

LỜI MỞ ĐẦU

Các em học sinh thân mến !

Bước sang thế kỉ XXI thế kỉ “ bùng nổ ” công nghệ thông tin, đã và đang mang lại cho chúng ta những kiến thức vô cùng phong phú trên tất cả các lĩnh vực khoa học tự nhiên và khoa học xã hội , cùng với sự đổi mới toàn diện của ngành giáo dục, nội dung của chương trình đổi mới và cách kiểm tra đánh giá kết quả học tập của học sinh cũng thay đổi .

Một trong những nguyên nhân cơ bản khiến các em không giải hoàn chỉnh một bài toán đó là do không nắm vững lý thuyết liên quan.

Cuốn sách **LÝ THUYẾT TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ** được biên soạn nhằm đáp ứng một số vốn kiến thức căn bản , đồng thời bao quát toàn bộ lý thuyết và công thức trong chương trình THCS nhằm giúp các em giải quyết một số khó khăn khi tiếp cận với nội dung đổi mới và không ngoài mục đích giúp các em có được sự lập luận chặt chẽ để hoàn thiện bài giải một cách tốt nhất

Cuốn sách “ **LÝ THUYẾT TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ** ” được trình bày theo từng lớp, từng chương, từng phần, từng mục .

Gồm 4 lớp : - Lớp 6 : Gồm 3 chương đại và 2 chương hình

- Lớp 7 : Gồm 4 chương đại và 3 chương hình

- Lớp 8 : Gồm 4 chương đại và 4 chương hình

- Lớp 9 : Gồm 4 chương đại và 4 chương hình

- Trong quá trình biên soạn sẽ có những thiếu sót , chúng tôi mong nhận được sự góp ý chân thành của các đồng nghiệp và các em học sinh !

TÁC GIẢ

Phạm Hồng Phụng

HỆ THỐNG LÝ THUYẾT TOÁN THCS



LỚP 6

A. ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I : SỐ TỰ NHIÊN

1. TẬP HỢP. PHẦN TỬ CỦA TẬP HỢP. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN. GHI SỐ TỰ NHIÊN

+ Tập hợp là một khái niệm cơ bản thường dùng trong toán học và trong đời sống, ta hiểu tập hợp thông qua các ví dụ. :Để viết một tập hợp, ta có thể:

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.
- Chỉ ra các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

+ Để kí hiệu a là một phần tử của tập hợp A , ta viết $a \in A$. Để kí hiệu b không là phần tử của tập hợp A , ta viết $b \notin A$.

+ Tập hợp các số tự nhiên được kí hiệu là N

$$N = \{0; 1; 2; \dots\}$$

+ Tập hợp các số tự nhiên khác 0 được kí hiệu là N^*

$$N^* = \{1; 2; 3; \dots\}$$

+ Mỗi số tự nhiên được biểu diễn bởi một điểm trên tia số. Trên tia số, điểm biểu diễn số nhỏ ở bên trái điểm biểu diễn số lớn.

Trong hệ thập phân, cứ mười đơn vị ở một hàng thì làm thành một đơn vị ở hàng trên liền trước đó.

Ví Dụ : Viết tập hợp C các số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 18 và không vượt quá 100 bằng hai cách.

Ví Dụ : Viết tập hợp sau và cho biết mỗi tập hợp có bao nhiêu phần tử : Tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 23 và nhỏ hơn hoặc bằng 1000

Ghi số tự nhiên: Có nhiều cách ghi số khác nhau:

- Cách ghi số trong hệ thập phân: Để ghi các số tự nhiên ta dùng 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Cứ 10 đơn vị ở một hàng thì làm thành một đơn vị ở hàng liền trước nó.

+ Kí hiệu: $\overline{ab}$ chỉ số tự nhiên có hai chữ số, chữ số hàng chục là a , chữ số hàng đơn vị là b . Viết được $\overline{ab} = a.10 + b$

$\overline{abc}$ chỉ số tự nhiên có ba chữ số, chữ số hàng trăm là a , chữ số hàng chục là b , chữ số hàng đơn vị là c . Viết được $\overline{abc} = a.100 + b.10 + c$

- Cách ghi số La Mã: có 7 chữ số

Kí hiệu	I	V	X	L	C	D	M
Giá trị tương ứng trong hệ thập phân	1	5	10	50	100	500	1000

+ Mỗi chữ số La Mã không viết liền nhau quá ba lần.

+ Chữ số có giá trị nhỏ đứng trước chữ số có giá trị lớn làm giảm giá trị của chữ số có giá trị lớn.

- Cách ghi số trong hệ nhị phân: để ghi các số tự nhiên ta dùng 2 chữ số là : 0 và 1.

- Các ví dụ tách một số thành một tổng:

Trong hệ thập phân: $6478 = 6.10^3 + 4.10^2 + 7.10^1 + 8.10^0$

Trong hệ nhị phân: $1101 = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$

2. SỐ PHẦN TỬ CỦA TẬP HỢP. TẬP HỢP CON

- Một tập hợp có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử, cũng có thể không có phần tử nào.

- Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập hợp rỗng. Tập hợp rỗng kí hiệu ϕ .
- Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B thì tập hợp A là con của tập hợp B. Kí hiệu $A \subset B$, đọc là : A là tập hợp con của tập hợp B, hoặc A được chứa trong B, hoặc B chứa A.
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói A và B là hai tập hợp bằng nhau, kí hiệu $A = B$.

❖ Cách tìm số phần tử của một tập hợp:

- Tập hợp các số tự nhiên từ a đến b có: $b - a + 1$ phần tử.
- Tập hợp các số chẵn từ số chẵn a đến số chẵn b có : $(b-a):2 + 1$ phần tử.
- Tập hợp các số lẻ từ số lẻ m đến số lẻ n có: $(n-m):2 + 1$ phần tử.
- Tập hợp các số tự nhiên từ a đến b, hai số kế tiếp cách nhau d đơn vị, có: $(b-a):d + 1$ phần tử.

Chú ý: Nếu một tập hợp có n phần tử thì số tập hợp con của nó bằng 2^n .

Ví Dụ : Cho hai tập hợp $A = \{5; 7\}$, $B = \{2; 9\}$

Viết tập hợp gồm hai phần tử trong đó có một phần tử thuộc A , một phần tử thuộc B.

3. CÁC PHÉP TÍNH

a, Phép cộng:

$$a + b = c$$

$$(\text{số hạng}) + (\text{số hạng}) = (\text{tổng})$$

b, Phép trừ: Cho hai số tự nhiên a và b, nếu có số tự nhiên x sao cho $b + x = a$ thì ta có phép trừ

$$a - b = x$$

$$(\text{số bị trừ}) - (\text{số trừ}) = (\text{hiệu})$$

c, Phép nhân:

$$a \cdot b = d$$

$$(\text{thừa số}) \cdot (\text{thừa số}) = (\text{tích})$$

d, Phép chia: Cho hai số tự nhiên a và b, trong đó $b \neq 0$, nếu có số tự nhiên x sao cho $b \cdot x = a$ thì ta nói a chia hết cho b và ta có phép chia hết

$$a : b = x$$

$$(\text{số bị chia}) : (\text{số chia}) = (\text{thương})$$

❖ Tổng quát: Cho hai số tự nhiên a và b, trong đó $b \neq 0$, ta luôn tìm được hai số tự nhiên q và r duy nhất sao cho: $a = b \cdot q + r$ (trong đó $0 \leq r < b$)

$$(\text{số bị chia}) = (\text{số chia}) \cdot (\text{thương}) + (\text{số dư})$$

➤ Nếu $r = 0$ thì ta có phép chia hết.

➤ Nếu $r \neq 0$ thì ta có phép chia có dư.

Ví Dụ : Tìm x :

a) $140 : (x - 8) = 7$

b) $5x + x = 150 : 2 + 3$

*** Tính chất của phép cộng và phép nhân số tự nhiên:**

Phép tính	Cộng	Nhân
Tính chất		
Giao hoán	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Kết hợp	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Cộng với số 0	$a + 0 = 0 + a = a$	
Nhân với số 1		$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Phân phối của phép nhân đối với phép cộng	$a \cdot (b + c) = ab + ac$	

+ Phát biểu bằng lời:

Tính chất giao hoán:

- Khi đổi chỗ các số hạng trong một tổng thì tổng không thay đổi.

- Khi đổi chỗ các thừa số trong một tích thì tích không đổi.

Tính chất kết hợp:

- Muốn cộng một tổng hai số với một số thứ ba, ta có thể cộng số thứ nhất với tổng của số thứ hai và số thứ ba.

- Muốn nhân một tích hai số với một số thứ ba, ta có thể nhân số thứ nhất với tích của số thứ hai và số thứ ba.

Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:

Muốn nhân một số với một tổng, ta có thể nhân số đó với từng số hạng của tổng, rồi cộng các kết quả lại.

e, Chú ý:

+ Trong tính toán có thể thực hiện tương tự với tính chất $a(b - c) = ab - ac$

+ Dạng tổng quát của số chẵn (số chia hết cho 2) là $2k$ ($k \in \mathbb{N}$), dạng tổng quát của số lẻ (số chia cho 2 dư 1) là $2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

f, + Để đếm các số hạng của một dãy số mà hai số hạng liên tiếp của dãy cách nhau cùng một số đơn vị, ta có thể dùng công thức:

Số số hạng = (số cuối – số đầu) : (khoảng cách giữa hai số) + 1

+ Để tính tổng các số hạng của một dãy số mà hai số hạng liên tiếp của dãy cách nhau cùng một số đơn vị, ta có thể dùng công thức:

Tổng = (số đầu + số cuối) . (số số hạng) : 2

Ví dụ : Tính tổng:

a) $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 999$

b) $S_2 = 10 + 12 + 14 + \dots + 2010$

c) $S_3 = 21 + 23 + 25 + \dots + 1001$

d) $S_4 = 24 + 25 + 26 + \dots + 125 + 126$

e) $S_5 = 1 + 4 + 7 + \dots + 79$

f) $S_6 = 15 + 17 + 19 + 21 + \dots + 151 + 153 + 155$

g) $S_7 = 15 + 25 + 35 + \dots + 115$

4. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN. NHÂN HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ. CHIA HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ

- **Định Nghĩa:**

Lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số bằng nhau, mỗi thừa số bằng a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số}} \quad (n \neq 0); a \text{ gọi là cơ số, } n \text{ gọi là số mũ.}$$

a^2 gọi là a bình phương (hay bình phương của a);

a^3 gọi là a lập phương (hay lập phương của a)

Quy ước: $a^1 = a$; $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

- Nhân hai lũy thừa cùng cơ số: Khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và cộng các số mũ.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

- Chia hai lũy thừa cùng cơ số: Khi chia hai lũy thừa cùng cơ số (khác 0), ta giữ nguyên cơ số và trừ các số mũ.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (\text{với } a \neq 0; m \geq n)$$

- Thêm: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

* **Số chính phương:** là số bằng bình phương của một số tự nhiên (VD: 0, 1, 4, 9, ...)

Ví Dụ : $5^9 : 5^7 + 70 : 14 = 2^3 \cdot 5^1 + 3^2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 7 + 1^{83} + 2 \cdot 3^3 + 28 : 7 = 6^{20} : 6^{18}$

5. THỨ TỰ THỰC HIỆN PHÉP TÍNH :

a) Đối với biểu thức không có dấu ngoặc :

- Nếu chỉ có phép cộng và trừ hoặc chỉ có phép nhân và chia ta thực hiện phép tính theo thứ tự từ trái sang phải .
- Nếu có các phép tính cộng , trừ , nhân , chia , nâng lên lũy thừa ta thực hiện theo thứ tự : **Lũy thừa** $\rightarrow$ **Nhân và chia** $\rightarrow$ **Cộng và trừ**

b) Đối với biểu thức có dấu ngoặc :

Ta thực hiện : $() \longrightarrow [] \longrightarrow \{ \}$

Ví Dụ : $100 : \{ 250 : [450 - (500 - 2^2 \cdot 25)] \} + 5 \cdot \{ 24 - [3 \cdot (5 + 2.5) + 15] : 15 \}$

6. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA MỘT TỔNG

- **Tính chất 1:** Nếu tất cả các số hạng của một tổng đều chia hết cho cùng một số thì tổng chia hết cho số đó.

$$a : m, b : m, c : m \Rightarrow (a + b + c) : m$$

- **Tính chất 2:** Nếu chỉ có một số hạng của tổng không chia hết cho một số, còn các số hạng khác đều chia hết cho số đó thì tổng không chia hết cho số đó.

$$a \not: m, b : m, c : m \Rightarrow (a + b + c) \not: m$$

Tóm lại :

$$\text{a) Nếu: } a : m, b : m \Rightarrow \begin{cases} (a + b) : m \\ (a - b) : m \end{cases}$$

$$\text{b) Nếu: } a : m, b : m, c : m \Rightarrow (a + b + c) : m$$

$$\text{c) Nếu: } a : m, b \not: m \Rightarrow \begin{cases} (a + b) \not: m \\ (a - b) \not: m \end{cases}$$

$$\text{d) Nếu: } a : m, b : m, c \not: m \Rightarrow (a + b + c) \not: m$$

7. DẤU HIỆU CHIA HẾT

- Các số có chữ số tận cùng là các chữ số chẵn thì chia hết cho 2 và chỉ những số đó mới chia hết cho 2.
- Các số có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 thì chia hết cho 5 và chỉ những số đó mới chia hết cho 5.
- Các số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 và chỉ những số đó mới chia hết cho 9
- Các số có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì chia hết cho 3 và chỉ những số đó mới chia hết cho 3
- Dấu hiệu chia hết cho 11: Tổng các chữ số hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số hàng chẵn (hoặc ngược lại) chia hết cho 11 $\Leftrightarrow a : 11$
- Dấu hiệu chia hết cho 8: Với $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$

$$\text{Ta có : } A : 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} : 4$$

$$A : 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} : 8$$

$$A : 125 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} : 125$$

Tận cùng là 000 hay 3 chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 8.

- Dấu hiệu chia hết cho 4 : tận cùng là 00 hay 2 chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 4.
- Dấu hiệu chia hết cho 6 : chia hết cho 2 và 3.

- Dấu hiệu chia hết cho 25 : tận cùng là 00, 25, 50, 75.

Ví Dụ 1 : Thay * bằng chữ số nào để được số

a) $\overline{12*}$ chia hết cho 2 và 5

b) $\overline{13*}$ chia hết cho 3 và 5

Ví Dụ 2 : Chứng tỏ: $B = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$ chia hết cho 3, 7

Ví Dụ 3 : Trong các số: 825; 9180; 21780.

a) Số nào chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9?

b) Số nào chia hết cho cả 2; 3; 5 và 9?

8. ƯỚC VÀ BỘI. SỐ NGUYÊN TỐ. HỢP SỐ PHÂN TÍCH MỘT SỐ RA THỪA SỐ NGUYÊN TỐ

- Nếu có số tự nhiên a chia hết cho số tự nhiên b thì ta nói a là bội của b, còn b là ước của a.

- Ta có thể tìm các bội của một số bằng cách nhân số đó lần lượt với 0, 1, 2, 3,...

- Ta có thể tìm các ước của a bằng cách lần lượt chia a cho các số tự nhiên từ 1 đến a để xét xem a chia hết cho những số nào, khi đó các số ấy là ước của a

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước là 1 và chính nó. Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn 2 ước.

* *Cách kiểm tra 1 số là số nguyên tố:* Để kết luận số a là số nguyên tố ($a > 1$), chỉ cần chứng tỏ rằng nó không chia hết cho mọi số nguyên tố mà bình phương không vượt quá a.

- Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố

* *Cách tính số lượng các ước của một số m ($m > 1$):* ta xét dạng phân tích của số m ra thừa số nguyên tố:

Nếu $m = a^x$ thì m có $x + 1$ ước

Nếu $m = a^x \cdot b^y$ thì m có $(x + 1)(y + 1)$ ước

Nếu $m = a^x \cdot b^y \cdot c^z$ thì m có $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$ ước.

- Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

- Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

- ƯCLN của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

- Các số nguyên tố cùng nhau là các số có ƯCLN bằng 1

- Để tìm ước chung của các số đã cho, ta có thể tìm các ước của ƯCLN của các số đó.

- BCNN của hai hay nhiều số là số lớn nhất khác 0 trong tập hợp các bội chung của các số đó.

- Để tìm BC của các số đã cho, ta có thể tìm các bội của BCNN của các số đó.

- Cách tìm ƯCLN và BCNN:

	Tìm ƯCLN	Tìm BCNN
Bước 1	Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố	
Bước 2	Chọn các thừa số nguyên tố	
	Chung	Chung và riêng
Bước 3	Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ:	
	nhỏ nhất	lớn nhất

Ví Dụ : Tìm số tự nhiên x

a) $150 : x$; $84 : x$; $30 : x$ và $0 < x < 16$.

b) $x : 2$; $x : 3$; $x : 5$; $x : 7$ và x nhỏ nhất

* Bổ sung:

+ Tích của hai số tự nhiên khác 0 bằng tích của ƯCLN và BCNN của chúng:

$$a \cdot b = \text{ƯCLN}(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b)$$

- + Nếu tích $a.b$ chia hết cho m , trong đó b và m là hai số nguyên tố cùng nhau thì $a : m$
- + Một cách khác tìm ƯCLN của hai số a và b (với $a > b$): Chia số lớn cho số nhỏ.

Nếu $a : b$ thì $ƯCLN(a,b) = b$

- Nếu phép chia a cho b có số dư r_1 , lấy b chia cho r_1 .
- Nếu phép chia b cho r_1 có số dư r_2 , lấy r_1 chia cho r_2 .
- Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi số dư bằng 0 thì số chia cuối cùng là ƯCLN phải tìm.

Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, không có ước khác 1 và chính nó. Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có ước khác 1 và chính nó. Số nguyên tố nhỏ nhất là 2, đó là số nguyên tố chẵn duy nhất.

Phân tích một số tự nhiên ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng các thừa số nguyên tố. Mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được ra thừa số nguyên tố.

Ví Dụ 1 : Học sinh của một trường học khi xếp hàng 3, hàng 4, hàng 7, hàng 9 đều vừa đủ hàng. Tìm số học sinh của trường, cho biết số học sinh của trường trong khoảng từ 1600 đến 2000 học sinh.

Ví Dụ 2: Cô Lan phụ trách đội cần chia số trái cây trong đó 80 quả cam; 36 quả quýt và 104 quả mận vào các đĩa bánh kẹo trung thu sao cho số quả mỗi loại trong các đĩa là bằng nhau. Hỏi có thể chia thành nhiều nhất bao nhiêu đĩa? Khi đó mỗi đĩa có bao nhiêu trái cây mỗi loại?

CHƯƠNG II : SỐ NGUYÊN

1. TẬP HỢP SỐ NGUYÊN VÀ THỨ TỰ TRONG TẬP HỢP SỐ NGUYÊN

- Tập hợp số nguyên : $\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

Hay $\mathbb{Z} = \{ \text{Nguyên âm}, \text{Số } 0, \text{Nguyên dương} \}$

Chú ý : Mọi số tự nhiên đều là số nguyên ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$)

- Thứ tự trong tập hợp số nguyên : Khi biểu diễn trên trục số (nằm ngang), điểm a nằm bên trái điểm b thì số nguyên a nhỏ hơn số nguyên b .

VD : $-3 < -2 < -1 < 0 < 1$

Nhận xét :

- Số nguyên âm < 0
- Số nguyên dương > 0
- Số nguyên âm $< 0 <$ Số nguyên dương.

2. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ NGUYÊN.

Giá trị tuyệt đối của số nguyên a ký hiệu : $|a|$ là khoảng cách từ điểm a đến điểm O trên trục số.

VD: $|5| = 5$
 $|-3| = 3$, $|0| = 0$

Chú ý: Giá trị tuyệt đối của một số nguyên (kết quả) *không bao giờ là một số nguyên âm* (vì kết quả đó là khoảng cách)

Ví Dụ :

3. THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

a. Cộng hai số nguyên dương: chính là cộng hai số tự nhiên,

b. Cộng hai số nguyên âm: Muốn cộng hai số nguyên âm, ta cộng hai giá trị tuyệt đối của chúng rồi đặt dấu “-” trước kết quả.

c. Cộng hai số nguyên khác dấu:

Quy tắc:

* Hai số nguyên đối nhau có tổng bằng 0.

* Muốn cộng hai số nguyên khác dấu không đối nhau ta thực hiện ba bước sau:

Bước 1: Tìm giá trị tuyệt đối của mỗi số.

Bước 2: Lấy số lớn trừ đi số nhỏ (trong hai số vừa tìm được).

Bước 3: Đặt dấu của số có giá trị tuyệt đối lớn hơn trước kết quả tìm được.

Ví dụ:

$$(-237) + 55 = -(237 - 55) = -182.$$

Ví Dụ : Tính : a) $(-75) + 50$ b) $80 + (-220)$ c) $(-23) + (-13)$

d. Hiệu của hai số nguyên: Muốn trừ số nguyên a cho số nguyên b , ta cộng a với số đối của b , tức là: $a - b = a + (-b)$

e. Quy tắc chuyển vế: Muốn chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó: dấu “+” đổi thành dấu “-” và dấu “-” đổi thành dấu “+”.

f. Quy tắc dấu ngoặc:

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu “-” đằng trước, ta phải đổi dấu các số hạng trong dấu ngoặc: dấu “+” thành dấu “-” và dấu “-” thành dấu “+”.

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu "+" đằng trước thì dấu các số hạng trong ngoặc vẫn giữ nguyên.

g. Tổng đại số: là một dãy các phép tính cộng, trừ các số nguyên.

- Tính chất: trong một tổng đại số, ta có thể:

+ Thay đổi tùy ý vị trí các số hạng kèm theo dấu của chúng.

+ Đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng một cách tùy ý với chú ý rằng nếu trước dấu ngoặc là dấu "-" thì phải đổi dấu tất cả các số hạng trong ngoặc.

h. Nhân hai số nguyên:

- Nhân hai số nguyên cùng dấu: ta nhân hai giá trị tuyệt đối của chúng.

- Nhân hai số nguyên khác dấu: ta nhân hai giá trị tuyệt đối của chúng rồi đặt dấu "-" trước kết quả nhận được.

- Chú ý: $+a \cdot 0 = 0$

+ Cách nhận biết dấu của tích: $(+) \cdot (+) \rightarrow (+)$

$(-) \cdot (-) \rightarrow (+)$

$(+) \cdot (-) \rightarrow (-)$

$(-) \cdot (+) \rightarrow (-)$

+ $a \cdot b = 0$ thì $a = 0$ hoặc $b = 0$

+ Khi đổi dấu một thừa số thì tích đổi dấu. Khi đổi dấu hai thừa số thì tích không thay đổi.

j. Tính chất của phép nhân các số nguyên:

- Giao hoán: $a \cdot b = b \cdot a$

- Kết hợp: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

- Nhân với 1: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

- Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng: $a \cdot (b + c) = ab + ac$

- Tính chất trên cũng đúng đối với phép trừ: $a \cdot (b - c) = ab - ac$

k. Bội và ước của một số nguyên:

- Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$. Nếu có số nguyên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b . Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a .

- Chú ý: + Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0.

+ Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.

+ Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

- Tính chất: + Nếu a chia hết cho b và b chia hết cho c thì a cũng chia hết cho c .

+ Nếu a chia hết cho b thì bội của a cũng chia hết cho b .

+ Nếu hai số a, b chia hết cho c thì tổng và hiệu của chúng cũng chia hết cho c .

Ví Dụ 1: Tìm số tự nhiên x , biết:

a) $2^x \cdot 4 = 128$

b) $x^{15} = x$

c) $2^x \cdot (2^2)^2 = (2^3)^2$

d) $(x^5)^{10} = x$

Ví Dụ 2: Tìm số tự nhiên n sao cho

a) $n + 3$ chia hết cho $n - 1$.

b) $4n + 3$ chia hết cho $2n + 1$.

CHƯƠNG III : PHÂN SỐ

1. Khái niệm phân số: người ta gọi $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$ là một phân số, a là tử số (tử), b là mẫu số (mẫu) của phân số.

- Số nguyên a được coi là phân số với mẫu số là 1. Có thể viết: $a = \frac{a}{1}$

2. Phân số bằng nhau: hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ gọi là bằng nhau nếu $a.d = b.c$

3. Tính chất cơ bản của phân số:

- Nếu ta nhân cả tử và mẫu của một phân số với cùng một số nguyên khác 0 thì ta được một phân số bằng phân số đã cho.

- Nếu ta chia cả tử và mẫu của một phân số cho cùng một ước chung của chúng thì ta được một phân số bằng phân số đã cho.

4. Rút gọn phân số:

- Muốn rút gọn một phân số, ta chia cả tử và mẫu của phân số cho một ước chung (khác 1 và -1) của chúng.

- Phân số tối giản (hay phân số không rút gọn được nữa) là phân số mà cả tử và mẫu chỉ có ước chung là 1 và -1. Để rút gọn một lần mà được kết quả là phân số tối giản, chỉ cần chia tử và mẫu của phân số cho UCLN của chúng.

- Để rút gọn một phân số có thể phân tích tử và mẫu thành tích các thừa số.

5. Quy đồng mẫu nhiều phân số: Quy đồng mẫu các phân số có mẫu dương ta làm như sau:

Bước 1: Tìm một BC của các mẫu (thường là BCNN) để làm mẫu chung.

Bước 2: Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu).

Bước 3: Nhân tử và mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng

6. So sánh hai phân số:

* Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn, tức

$$\text{là: } \left. \begin{array}{l} a > b \\ m > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{m} > \frac{b}{m}$$

* Muốn so sánh hai phân số không cùng mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số có cùng mẫu dương rồi so sánh các tử với nhau: phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

7. Phép cộng phân số:

* Cộng hai phân số cùng mẫu: Muốn cộng hai phân số cùng mẫu, ta cộng các tử và giữ nguyên mẫu, tức là: $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$

* Cộng hai phân số không cùng mẫu: Muốn cộng hai phân số không cùng mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số có cùng một mẫu rồi cộng các tử và giữ nguyên mẫu chung.

8. Phép trừ phân số: Muốn trừ một phân số cho một phân số, ta cộng số bị trừ với số

$$\text{đối của số trừ: } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$$

9. Phép nhân phân số: Muốn nhân hai phân số, ta nhân các tử với nhau và nhân các

$$\text{mẫu với nhau, tức là: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

10. Phép chia phân số: Muốn chia một phân số hay một số nguyên cho một phân số, ta nhân số bị chia với số nghịch đảo của số chia,

tức là: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$; $a : \frac{c}{d} = a \cdot \frac{d}{c} = \frac{a.d}{c}$ ($c \neq 0$).

11. Các phép tính cộng, trừ, nhân, chia phân số:

Phép tính Tính chất	Phép cộng: $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$ (nếu không cùng mẫu thì quy đồng mẫu trước khi cộng)	Phép nhân: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$
Giao hoán	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$
Kết hợp	$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{p}{q}\right)$	$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q}\right)$
Cộng với số 0	$\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$	
Nhân với số 1		$\frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
Số đối	$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$	
Số nghịch đảo		$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$
Phân phối của phép nhân đối với phép cộng	$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} + \frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q}$	
Các phép tính ngược	Phép trừ: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$	Phép chia: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

12. Hỗn số, số thập phân, phần trăm:

- Một phân số lớn hơn 1 có thể viết dưới dạng hỗn số. Hỗn số có thể viết dưới dạng phân số.

+ Khi viết một phân số âm dưới dạng hỗn số, ta chỉ cần viết số đối của nó dưới dạng hỗn số rồi đặt dấu "-" trước kết quả nhận được.

- Phân số thập phân là phân số mà mẫu là lũy thừa của 10.

- Các phân số thập phân có thể viết được dưới dạng số thập phân.

Số thập phân gồm hai phần: + Phần số nguyên viết bên trái dấu phẩy.

+ Phần thập phân viết bên phải dấu phẩy.

Số chữ số của phần thập phân đúng bằng số chữ số 0 ở mẫu của phân số thập phân.

- Những phân số có mẫu số là 100 còn được viết dưới dạng phần trăm với kí hiệu %.

13. Ba bài toán cơ bản về phân số:

- Tìm giá trị phân số của một số cho trước:

Muốn tìm $\frac{m}{n}$ của số b cho trước, ta tính $b \cdot \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$)

- Tìm một số biết giá trị một phân số của nó:

Muốn tìm một số biết $\frac{m}{n}$ của nó bằng a, ta tính $a : \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$).

- Tìm tỉ số của hai số:

Tỉ số của hai số a và b là thương trong phép chia số a cho số b ($b \neq 0$)

+ Tỉ số của a và b kí hiệu là $a : b$ hoặc $\frac{a}{b}$

+ Khái niệm tỉ số thường được dùng khi nói về thương của hai đại lượng (cùng loại và cùng đơn vị đo)

+ Tỉ số không có đơn vị

* Tỉ số phần trăm: Muốn tìm tỉ số phần trăm của hai số a và b, ta nhân a với 100 rồi chia cho b và viết kí hiệu % vào kết quả: $\frac{a \cdot 100}{b} \%$.

* Tỉ lệ xích: Tỉ lệ xích T của một bản vẽ (hoặc một bản đồ) là tỉ số khoảng cách a giữa hai điểm trên bản vẽ (hoặc bản đồ) và khoảng cách b giữa hai điểm tương ứng trên thực tế.

$$T = \frac{a}{b} \quad (a, b \text{ có cùng đơn vị đo}).$$

* Khi giải các bài toán cơ bản về phân số, ở một số bài toán đôi khi ta còn dùng phương pháp tính ngược từ cuối.

B. HÌNH HỌC 6

CHƯƠNG I : ĐOẠN THẲNG.

1. ĐIỂM . ĐƯỜNG THẲNG:

a, Điểm:

- Điểm là một khái niệm cơ bản của hình học, ta không định nghĩa điểm mà chỉ hình dung nó, chẳng hạn bằng một hạt bụi rất nhỏ, một chấm mực trên mặt giấy,...
- Hai điểm không trùng nhau là hai điểm phân biệt.
- Bất cứ một hình hình học nào cũng đều là một tập hợp các điểm. Người ta gọi tên điểm bằng các chữ cái in hoa.

b, Đường thẳng:

- Đường thẳng là một khái niệm cơ bản, ta không định nghĩa mà chỉ hình dung đường thẳng qua hình ảnh thực tế như một sợi chỉ căng thẳng, vết bút chì vạch theo cạnh thước,...
- Đường thẳng cũng là tập hợp các điểm.
- Đường thẳng không bị giới hạn về cả hai phía. Người ta đặt tên đường thẳng bằng một chữ thường, hoặc hai chữ thường, hoặc hai điểm bất kì thuộc đường thẳng.

c, Quan hệ giữa điểm và đường thẳng: (được diễn tả bằng một trong các cách sau)



- | | |
|---|--|
| + Điểm A thuộc đường thẳng a, kí hiệu $A \in a$ | + Điểm B không thuộc đường thẳng a, kí hiệu $B \notin a$ |
| + Điểm A nằm trên đường thẳng a. | + Điểm B không nằm trên đường thẳng a. |
| + Đường thẳng a chứa điểm A. | + Đường thẳng a không chứa điểm B. |
| + Đường thẳng a đi qua điểm A. | + Đường thẳng a không đi qua điểm B. |
- Khi ba điểm cùng thuộc một đường thẳng, ta nói là ba điểm thẳng hàng. Khi ba điểm không cùng thuộc bất kì đường thẳng nào, ta nói chúng không thẳng hàng.
 - Trong 3 điểm thẳng hàng, có một điểm và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại.



Với 3 điểm thẳng hàng A, B, C ta có thể nói:

- + Điểm B nằm giữa hai điểm A và C.
- + Hai điểm A và B nằm cùng phía đối với điểm C, Hai điểm B và C nằm cùng phía đối với điểm A.
- + Hai điểm A và C nằm khác phía đối với điểm B.
- Nhận xét: Có một đường thẳng và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm A và B.

d, Đường thẳng trùng nhau, cắt nhau, song song:

Hai đường thẳng a, b bất kì có thể:

- + Trùng nhau: có vô số điểm chung.
- + Cắt nhau: chỉ có 1 điểm chung - điểm chung đó gọi là giao điểm.
- + Song song: không có điểm chung nào.
- Chú ý:
 - + Hai đường thẳng không trùng nhau còn được gọi là hai đường thẳng *phân biệt*.
 - + Khi có nhiều đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm ta nói chúng *đồng quy* tại điểm đó.

+ Khi có nhiều đường thẳng nhưng trong đó không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy, ta nói các đường thẳng này *đôi một cắt nhau* hoặc *cắt nhau từng đôi một*.

2. TIA

- Hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O được gọi là một tia gốc O, còn gọi là một nửa đường thẳng gốc O.

- Khi đọc (hay viết) tên một tia, phải đọc (hay viết) tên gốc trước.

- Hai tia chung gốc và tạo thành một đường thẳng gọi là hai tia đối nhau.

- Chú ý:

+ Mỗi điểm trên đường thẳng là gốc chung của hai tia đối nhau.

+ Hai tia Ox, Oy đối nhau. Nếu điểm A thuộc tia Ox và điểm B thuộc tia Oy thì điểm O nằm giữa hai điểm A và B.

- Hai tia trùng nhau có cùng gốc và có một điểm chung khác gốc.

- Hai tia không trùng nhau còn được gọi là hai tia phân biệt.

3. ĐOẠN THẲNG:

- Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A, điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B. Các điểm A, B gọi là hai mút (hoặc hai đầu) đoạn thẳng AB.

- Khi hai đoạn thẳng có một điểm chung, ta nói hai đoạn thẳng ấy cắt nhau.

- Mỗi đoạn thẳng có một độ dài. Độ dài đoạn thẳng là một số dương. Độ dài đoạn thẳng AB cũng còn gọi là khoảng cách giữa hai điểm A và B.

+ Khi hai điểm A và B trùng nhau, ta nói độ dài bằng 0.

- Hai đoạn thẳng bằng nhau nếu có cùng độ dài. Đoạn thẳng lớn hơn nếu có độ dài lớn hơn.

- Trên một tia gốc O, với bất kì số $m > 0$, bao giờ cũng xác định được một điểm M để độ dài $OM = m$.

- Trên tia Ox, nếu có hai điểm M, N với $OM = a$, $ON = b$ và $0 < a < b$ thì điểm M nằm giữa hai điểm O và N.

- Cộng độ dài đoạn thẳng: Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B thì $AM + MB = AB$. Ngược lại nếu $AM + MB = AB$ thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B

4. TRUNG ĐIỂM CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG:

- Là điểm nằm giữa và cách đều hai đầu đoạn thẳng. Trung điểm của đoạn thẳng còn gọi là điểm chính giữa của đoạn thẳng.

Tóm tắt:

- Cách nhận biết điểm nằm giữa hai điểm:

$$M, N \in Ox, OM < ON$$

$$\Rightarrow M \text{ nằm giữa O và N}$$

$$AM + MB = AB$$

$$\Rightarrow M \text{ nằm giữa A và B}$$

$$- M \text{ là trung điểm của đoạn thẳng AB} \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ nằm giữa hai điểm A, B} \\ MA = MB \end{cases}$$

$$\text{hoặc } M \text{ là trung điểm của đoạn thẳng AB} \Leftrightarrow \begin{cases} AM + MB = AB \\ MA = MB \end{cases}$$

$$\text{hoặc } M \text{ là trung điểm của đoạn thẳng AB} \Leftrightarrow AM = BM = \frac{1}{2}AB$$

$$\text{hoặc } M \text{ là trung điểm của AB} \begin{cases} A, B, M \text{ thẳng hàng} \\ MA = MB \end{cases}$$

CHƯƠNG II : GÓC

1. NỬA MẶT PHẪNG

a, Mặt phẳng:

- Một mặt bàn, mặt bảng, một tờ giấy trải rộng... cho ta hình ảnh của mặt phẳng.
- Mặt phẳng không bị hạn chế về mọi phía.

b, Nửa mặt phẳng:

- Hình gồm đường thẳng a và một phần mặt phẳng bị chia ra bởi a được gọi là một nửa mặt phẳng bờ a .
- Hai nửa mặt phẳng có chung bờ gọi là hai nửa mặt phẳng đối nhau.
- Bất kì đường thẳng nào nằm trên mặt phẳng cũng là bờ chung của hai nửa mặt phẳng đối nhau.

2. GÓC

a, Góc: - Góc là hình gồm hai tia chung gốc.

+ Góc chung của hai tia gọi là *đỉnh* của góc.

+ Hai tia là hai *cạnh* của góc.

- Góc bẹt là góc có hai cạnh là hai tia đối nhau.

b, Số đo góc:

- Mỗi góc có một số đo xác định, lớn hơn 0 và không vượt quá 180° . Số đo của góc bẹt là 180° .

- Hai góc bằng nhau nếu số đo của chúng bằng nhau. Trong hai góc không bằng nhau thì góc nào có số đo lớn hơn là góc lớn hơn.

- Góc vuông là góc có số đo bằng 90° . Số đo của góc vuông còn được kí hiệu là $1v$.

- Góc nhọn là góc có số đo lớn hơn 0° và nhỏ hơn 90° .

- Góc tù là góc có số đo lớn hơn 90° và nhỏ hơn 180° .

- Chú ý: Đơn vị đo góc là độ, phút, giây: $1^\circ = 60'$; $1' = 60''$.

c, Cộng góc: - Nếu tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz thì $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$. Ngược lại, nếu $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$ thì tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz .

- Hai góc kề nhau là hai góc có một cạnh chung và hai cạnh còn lại nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là đường thẳng chứa cạnh chung.

- Hai góc phụ nhau là hai góc có tổng số đo bằng 90° .

- Hai góc bù nhau là hai góc có tổng số đo bằng 180° .

- Hai góc kề bù là hai góc vừa kề nhau, vừa bù nhau (hai góc có 1 cạnh chung và 2 cạnh còn lại là 2 tia đối nhau).

- Chú ý:

+ Với bất kì số m nào, $0 \leq m \leq 180^\circ$, trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa tia Ox bao giờ cũng vẽ được một và chỉ một tia Oy sao cho $\widehat{xOy} = m$ (độ).

+ Nếu có các tia Oy, Oz thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox và $\widehat{xOy} < \widehat{xOz}$ thì tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz .

3. TIA PHÂN GIÁC CỦA GÓC :

- Tia phân giác của một góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau.

Tia Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Tia } Oz \text{ nằm giữa hai tia } Ox, Oy \\ \widehat{xOz} = \widehat{zOy} \end{cases}$

Hoặc: Tia Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{xOz} + \widehat{zOy} = \widehat{xOy} \\ \widehat{xOz} = \widehat{zOy} \end{cases}$

Hoặc: Tia Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy} \Leftrightarrow \widehat{xOz} = \widehat{zOy} = \frac{1}{2} \widehat{xOy}$

4. ĐƯỜNG TRÒN :

- Đường tròn tâm O, bán kính R là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R, kí hiệu (O;R).

- Với mọi điểm M nằm trong mặt phẳng thì:

+ Nếu $OM < R$: điểm M nằm trong đường tròn

+ Nếu $OM = R$: điểm M nằm trên (thuộc) đường tròn.

+ Nếu $OM > R$: điểm M nằm ngoài đường tròn.

- Hình tròn: là hình gồm các điểm nằm trên đường tròn và các điểm nằm bên trong đường tròn đó.

- Cung, dây cung, đường kính:

+ Hai điểm A, B nằm trên đường tròn chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần gọi là một cung tròn (cung). Hai điểm A, B là hai mút của cung.

+ Đoạn thẳng AB gọi là một dây cung.

+ Dây cung đi qua tâm là đường kính.

- Đường kính dài gấp đôi bán kính và là dây cung lớn nhất.

5. TAM GIÁC :

- Tam giác ABC là hình gồm ba đoạn thẳng AB, BC, CA khi ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Kí hiệu: $\triangle ABC$.

- Một tam giác có: 3 cạnh, 3 đỉnh, 3 góc.

- Một điểm nằm bên trong tam giác nếu nó nằm trong cả 3 góc của tam giác. Một điểm không nằm trong tam giác và không nằm trên cạnh nào của tam giác gọi là điểm ngoài của tam giác.

* Ta đã dùng compa và thước thẳng để vẽ được đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt, vẽ được các đoạn thẳng trên tia, vẽ đường tròn, tam giác,... Sau này các em được làm quen một loại bài toán gọi là "toán dựng hình bằng thước và compa"

* **Những sai lầm cần chú ý:**

- Cho 3 điểm A, B, C, có bao nhiêu đường thẳng vẽ qua các điểm đó?

Trả lời: Có 3 đường thẳng.

Sai lầm ở chỗ: nếu A, B, C thẳng hàng thì chỉ có một đường thẳng mà thôi.

- Trên đường thẳng xy, lấy ba điểm A, B, C. Điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?

Sai lầm thường gặp: Một số em lấy thứ tự khi viết "A, B, C" để trả lời B nằm giữa A và C.

=> Cần xem xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra.

- Với 3 điểm A, B, C thẳng hàng ta có một đường thẳng duy nhất, tên đường thẳng duy nhất đó có thể là AB hoặc BC hoặc AC. Nhưng với 3 điểm thẳng hàng ta có 3 đoạn thẳng khác nhau là AB, BC, AC.

- Không vội vàng kết luận vị trí tương đối giữa một đoạn thẳng và đường thẳng nếu như chưa xét tất cả các trường hợp vị trí hai đầu mút của đoạn thẳng đó đối với đường thẳng cho trước.

LỚP 7

A. ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I : SỐ HỮU TỈ - SỐ THỰC

I. SỐ HỮU TỈ :

1. Định nghĩa số hữu tỉ.

Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0$.

2. Công, trừ số hữu tỉ.

Quy tắc cộng, trừ.

Viết các số hữu tỉ dưới dạng các phân số cùng mẫu dương rồi thực hiện công, trừ phân số:

Với $x = \frac{a}{m}; y = \frac{b}{m}$ ($a, b, m \in \mathbb{Z}; m \neq 0$), ta có:

$$x+y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}; \quad x-y = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$$

Ví dụ Tính: a, $0, 6 + \frac{2}{-3}$; b, $\frac{-8}{18} - \frac{15}{27}$

Giải.

$$a, 0, 6 + \frac{2}{-3} = \frac{6}{10} + \frac{-2}{3} = \frac{3}{5} + \frac{-2}{3} = \frac{9}{15} + \frac{-10}{15} = \frac{-1}{15}$$

$$b, \frac{-8}{18} - \frac{15}{27} = \frac{-4}{9} - \frac{5}{9} = -1$$

3. Nhân, chia số hữu tỉ.

➤ Nhân số hữu tỉ.

Với $x = \frac{a}{b}; y = \frac{c}{d}$, ta có: $x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

➤ Chia số hữu tỉ.

Với $x = \frac{a}{b}; y = \frac{c}{d}$, ($y \neq 0$) ta có: $x:y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Ví dụ :

Thực hiện phép tính. a, $\frac{-2}{7} \cdot \frac{21}{8}$; b) $\frac{-5}{23} : (-2)$

Giải.

$$a. \frac{-2}{7} \cdot \frac{21}{8} = \frac{-2 \cdot 21}{7 \cdot 8} = \frac{-1 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{-3}{4}$$

$$b. \frac{-5}{23} : (-2) = \frac{-5}{23} \cdot \frac{1}{-2} = \frac{5}{46}$$

II. TỈ LỆ THỨC

1. Tỉ lệ thức : Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Tính chất 1 : Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $a \cdot d = b \cdot c$

Tính chất 2 : Nếu $a \cdot d = b \cdot c$ và $a, b, c, d \neq 0$ thì ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

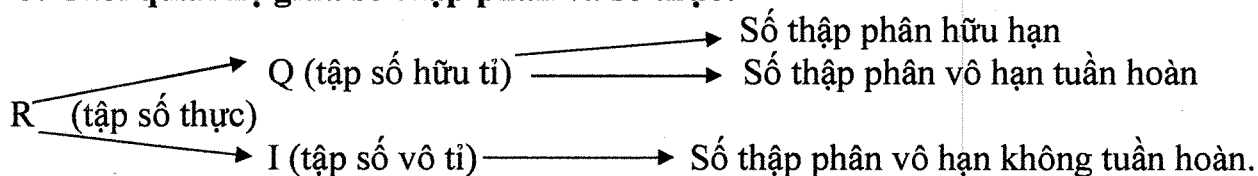
2. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f} = \frac{a-c}{b-d} = \dots \quad (\text{giả thiết các tỉ số đều có nghĩa})$$

- Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a \pm b \pm e}{b \pm d \pm f}$ (với giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

- Có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ Thì $a = bk, c = dk, e = fk$

3. Mối quan hệ giữa số thập phân và số thực:



4. Một số quy tắc ghi nhớ khi làm bài tập

a) Quy tắc bỏ ngoặc:

Bỏ ngoặc trước ngoặc có dấu “-” thì đồng thời đổi dấu tất cả các hạng tử có trong ngoặc, còn trước ngoặc có dấu “+” thì vẫn giữ nguyên dấu các hạng tử trong ngoặc.

b) Quy tắc chuyển vế: Khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó.

Với mọi $x, y, z \in \mathbb{R} : x + y = z \Rightarrow x = z - y$

Ví dụ : Tìm x , biết: $x - \frac{1}{2} = \frac{-2}{3}$

$$\text{Giải. } x = \frac{-2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-4+3}{6} = \frac{-1}{6};$$

5. Chú ý:

+ Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số $2; 3; 5$ ta cũng viết $a:b:c = 2:3:5$.

+ Vì tỉ lệ thức là một đẳng thức nên nó có tính chất của đẳng thức,

từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}; k \cdot \frac{a}{b} = k \cdot \frac{c}{d} (k \neq 0); \frac{k_1 a}{k_1 b} = \frac{k_2 c}{k_2 d} (k_1, k_2 \neq 0)$

từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ suy ra $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{e}{f}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}; \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$

III. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ :

Định nghĩa: Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ x , kí hiệu $|x|$ là khoảng cách từ điểm x

tới điểm 0 trên trục số. $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Tính chất về giá trị tuyệt đối : $|A| \geq 0$ với mọi A ; $|A| = \begin{cases} A, A \geq 0 \\ -A, A < 0 \end{cases}$

Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối :

$|A| + |B| \geq |A+B|$ dấu “=” xảy ra khi $AB \geq 0$; $|A-B| \geq |A|-|B|$ dấu “=” xảy ra $A, B > 0$

$$|A| \geq m \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq m \\ A \leq -m \end{cases} (m > 0) ; |A| \leq m \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq m \\ A \geq -m \end{cases} (\text{hay } -m \leq A \leq m) \text{ với } m > 0$$

Tính chất lũy thừa của 1 số thực : $A^{2n} \geq 0$ với mọi A ; $-A^{2n} \leq 0$ với mọi A

$A^m = A^n \Leftrightarrow m = n$; $A^n = B^n \Rightarrow A = B$ (nếu n lẻ) hoặc $A = \pm B$ (nếu n chẵn)

$$0 < A < B \Leftrightarrow A^n < B^n;$$

IV. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ.

Dạng 1: Sử dụng định nghĩa của lũy thừa với số mũ tự nhiên

Cần nắm vững định nghĩa: $x^n = \underbrace{x.x.x \dots x}_{n \text{ thừa số } x}$ ($x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$)

Quy ước: $x^1 = x$; $x^0 = 1$; ($x \neq 0$)

Dạng 2: Đưa lũy thừa về dạng các lũy thừa cùng cơ số hoặc lũy thừa cùng số mũ.

Áp dụng các công thức tính lũy thừa của một tích, lũy thừa của một thương:

$$\triangleright a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m \geq n)$$

$$\triangleright (a.b)^n = a^n . b^n ;$$

$$\triangleright \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0) \quad (y \neq 0)$$

$$\triangleright a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0; n \in \mathbb{N}^*)$$

Áp dụng các công thức tính lũy thừa của lũy thừa

$$\triangleright (a^m)^n = a^{m.n}$$

Sử dụng tính chất: Với $a \neq 0, a \neq \pm 1$, nếu $a^m = a^n$ thì $m = n$

Dạng 3: So sánh hai lũy thừa

a. Cùng cơ số: Với $m > n > 0$ thì:

$$\triangleright x > 1 \Rightarrow x^m > x^n$$

$$\triangleright x = 1 \Rightarrow x^m = x^n$$

$$\triangleright 0 < x < 1 \Rightarrow x^m < x^n$$

b. Cùng số mũ: * Với $x, y > 0$ nếu $x > y$ thì

$$\triangleright x^n > y^n$$

$$\triangleright x > y \Leftrightarrow x^{2n+1} > y^{2n+1}$$

$$\triangleright |x| > |y| \Leftrightarrow x^{2n} > y^{2n}$$

$$\triangleright (-x)^{2n} = x^{2n}$$

$$\triangleright (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$$

V. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

Các kiến thức vận dụng :

$$* a^2 + 2.ab + b^2 = (a + b)^2 \geq 0 \text{ với mọi } a, b$$

$$* a^2 - 2.ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0 \text{ với mọi } a, b$$

$$* A^{2n} \geq 0 \text{ với mọi } A, -A^{2n} \leq 0 \text{ với mọi } A$$

$$* |A| \geq 0, \forall A, -|A| \leq 0, \forall A$$

$$* |A| + |B| \geq |A + B|, \forall A, B \text{ dấu "=" xảy ra khi } A.B \geq 0$$

$$* |A| - |B| \leq |A - B|, \forall A, B \text{ dấu "=" xảy ra khi } A.B \geq 0$$

VI. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN, SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

1. Viết phân số dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn:

a. Nếu một phân số tối giản mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.(STPHH)

b. Nếu một phân số tối giản mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì không viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn. Phân số đó viết thành số thập phân vô hạn, trong đó có những nhóm chữ số được lặp lại, nhóm chữ số đó gọi là **chu kì**, số thập phân vô hạn đó gọi là **số thập phân vô hạn tuần hoàn** (STPVHTH)

- Số thập phân có nguồn gốc từ phân số nếu vô hạn thì phải tuần hoàn
- Ví dụ: Khi chia 1 cho 7 ta được số thập phân vô hạn, số dư trong phép chia này chỉ có thể là 1,2,3,4,5,6 nếu nhiều nhất đến số dư thứ 7, số dư phải lặp lại, do đó các nhóm chữ số cũng thường lặp lại, và số thập phân vô hạn phải tuần hoàn.

$$\text{Ta có } \frac{1}{7} = 0,142857142857\dots$$

c. Để viết gọn số TPVHTH người ta đặt chu kì trong dấu ngoặc

$$\text{Ví dụ: } \frac{7}{33} = 0,2121\dots = 0,(21)$$

$$\frac{7}{22} = 0,31818\dots = 0,3(18)$$

d. Số thập phân vô hạn tuần hoàn gọi là đơn nếu chu kì bắt đầu ngay sau dấu phẩy, ví dụ 0,(21) ; gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp nếu chu kì không bắt đầu ngay sau dấu phẩy, phân thập phân đứng trước chu kì gọi là phần bất thường ví dụ 0,3(18) chu kì là 18 và phần bất thường là 3

2. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số:

- Muốn viết phân thập phân của STPVHTH dưới dạng phân số ta lấy chu kì làm tử, còn mẫu là một số gồm các chữ số , số chữ số 9 bằng số chữ số của chu kì

$$\text{Ví dụ: } 0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \text{ Lưu ý: } 0,(1) = \frac{1}{9} \Rightarrow 0,(6) = 6 \cdot 0,(1) = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$0,(01) = \frac{1}{99} \Rightarrow 0,(06) = 6 \cdot 0,(01) = 6 \cdot \frac{1}{99} = \frac{6}{99} = \frac{2}{33}$$

$$0,(001) = \frac{1}{999} \Rightarrow 0,(006) = 6 \cdot 0,(001) = 6 \cdot \frac{1}{999} = \frac{6}{999} = \frac{2}{333}$$

- Muốn viết phân thập phân của STPVHTH **tạp** dưới dạng phân số, ta lấy số gồm phần bất thường và chu kì trừ đi phần bất thường **làm tử**, còn mẫu là một số gồm các chữ số 9 kèm theo các chữ số 0, số chữ số 9 bằng số các chữ số của chu kì, số chữ số 0 bằng số chữ số của phần bất thường

$$\text{Ví dụ: } 0,3(18) = \frac{318 - 3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$$

3. Điều kiện để phân số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn hay tạp:

Một phân số tối giản mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn .

Đối với các phân số đó

- Nếu mẫu không có ước nguyên tố 2 và 5 thì viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn

Ví dụ: $\frac{1}{7} = 0,142857$ (mẫu chỉ chứa ước nguyên tố 7)

- Nếu mẫu có một trong các ước nguyên tố 2 và 5 thì viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp

Ví dụ: $\frac{7}{22} = 0,31818... = 0,3(18)$ (mẫu có chứa ước nguyên tố 2 và 11)

VII. QUY ƯỚC LÀM TRÒN SỐ

1. Nếu chữ số đầu tiên bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại.

Ví dụ: Làm tròn số 12, 348 đến chữ số thập phân thứ nhất, được kết quả 12,3.

2. Nếu chữ số đầu tiên bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại.

Ví dụ: Làm tròn số 0,26541 đến chữ số thập phân thứ hai, được kết quả 0,27.

VIII. CĂN BẬC HAI

a) Định nghĩa về căn bậc hai :

- Định nghĩa : Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai, một số dương ký hiệu là $\sqrt{a}$ và một số âm ký hiệu là $-\sqrt{a}$.

b) Định nghĩa căn bậc hai số học :

Với số dương a, số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a.

Sau đó đưa ra chú ý : với $a \geq 0$, ta có :

Nếu $x = \sqrt{a}$ thì $x \geq 0$ và $x^2 = a$;

Nếu $x \geq 0$ và $x^2 = a$ thì $x = \sqrt{a}$. Ta viết

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

Phép toán tìm căn bậc hai số học của số không âm gọi là phép khai phương (gọi tắt là khai phương).

CHƯƠNG II : HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1. Tỷ lệ thuận:

Hai đại lượng tỷ lệ thuận x và y liên hệ với nhau bởi công thức $y = kx$, (với k là một hằng số khác 0), (y tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỷ lệ k).

+ Tính chất.

- Tỷ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng tỷ lệ thuận luôn không đổi và bằng hệ số tỷ lệ.

$$+ \text{ Tính chất 1: } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = k$$

- Tỷ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỷ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

$$+ \text{ Tính chất 2: } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}; \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{y_3}{y_4}; \dots$$

2. Tỷ lệ nghịch

Hai đại lượng tỷ lệ nghịch x và y liên hệ với nhau bởi công thức $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) hay $x \cdot y = a$.

a. Ta nói y tỷ lệ nghịch với x theo hệ số tỷ lệ a

+ Tính chất

- Tích của một giá trị bất kì của đại lượng này với giá trị tương ứng của đại lượng kia tương ứng của đại lượng kia luôn là một hằng số (bằng hệ số tỷ lệ).

$$\text{Tính chất 1: } x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = \dots = a$$

- Tỷ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỷ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

$$\text{Tính chất 2: } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}; \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{y_4}{y_3}; \dots; \dots$$

3. Khái niệm hàm số:

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x ,

kí hiệu $y = f(x)$ hoặc $y = g(x) \dots$ và x được gọi là biến số.

+ Chú ý

- Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng lời, bằng công thức.... Khi hàm số được cho bằng công thức thì ta hiểu rằng biến số x chỉ nhận những giá trị làm cho công thức có nghĩa.

- Hàm số thường được kí hiệu $y = f(x)$

4. Mặt phẳng tọa độ

+ Trên mặt phẳng, nếu hai trục OX , Oy vuông góc và cắt nhau tại gốc O của mỗi trục số, thì ta gọi hệ trục tọa độ Oxy.

Ox và Oy gọi là các trục tọa độ

- Trục nằm ngang Ox gọi là trục hoành

- Trục thẳng đứng Oy gọi là trục tung.

Giao điểm O gọi là gốc tọa độ. Mặt phẳng có hệ trục tọa độ Oxy gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy.

+ Tọa độ của một điểm trong mặt phẳng tọa độ

- Trên mặt phẳng tọa độ, mỗi điểm M xác định một cặp số $(x_0; y_0)$. Ngược lại mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ xác định vị trí của một điểm M.

- Cặp số $(x_0; y_0)$ gọi là tọa độ của điểm M; x_0 là hoành độ và y_0 là tung độ của điểm M

5. Đồ thị hàm số

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

6. Đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$).

Đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

Cách vẽ : cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$. ta được điểm O (0 : 0)

$x = 1 \Rightarrow y = a$. Ta được điểm A (1 ; a)

Chú ý : Khi vẽ đồ thị không nhất thiết phải cho $x = 1$ mà có thể cho $x = 2$ hoặc $x = 3$ hoặc ...

CHƯƠNG III : THỐNG KÊ

1. Thu thập số liệu thống kê

- Các số liệu thu thập được khi điều tra về một dấu hiệu gọi là số liệu thống kê. Mỗi số liệu là một giá trị của dấu hiệu.

- Số tất cả các giá trị của dấu hiệu bằng số các đơn vị điều tra

2. **Tần số của một giá trị:** số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy các giá trị của dấu hiệu gọi là tần số của giá trị đó.

3. **Bảng số liệu thống kê ban đầu:** Các số liệu thu thập được khi điều tra được ghi trên bảng thống kê và được gọi là bảng số liệu thống kê ban đầu.

4. Bảng "Tần số" (hay bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu)

Từ bảng thu nhập số liệu ban đầu có thể lập bảng "tần số" (còn gọi là bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu.)

Ta có thể lập bảng "tần số" theo dòng hoặc theo cột.

Giá trị (x)	x_1	x_2	x_3	...	x_n		
Tần số (n)	n_1	N_2	N_3	...	n_n		$N =$

Giá trị (x)	Tần số (n)
x_1	n_1
x_2	n_2
x_3	n_3
...	...
x_n	N_n
	$N =$

5. Công dụng

Bảng "tần số" giúp người điều tra dễ có những nhận xét chung về sự phân phối các giá trị của dấu hiệu và tiện lợi cho việc tính toán sau này.

6. Số trung bình cộng của một dấu hiệu X.

- Kí hiệu $\bar{X}$ là số dùng làm đại diện cho một dấu hiệu khi phân tích hoặc so sánh nó với các biến lượng cùng loại.

- Quy tắc tìm số trung bình cộng

Số trung bình cộng của một dấu hiệu được tính từ bảng tần số theo cách sau:

- Nhân từng giá trị với tần số tương ứng

- Cộng tất cả các tích vừa tìm được

- Chia tổng đó cho các giá trị (tức tổng các tần số)

Ta có công thức: $\bar{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + \dots + x_kn_k}{N}$

trong đó:

- $x_1, x_2, \dots, x_k$ là k giá trị khác nhau của dấu hiệu x.
- $n_1, n_2, \dots, n_k$ là tần số tương ứng.
- N là số các giá trị.
- $\bar{X}$ là số trung bình của dấu hiệu X.

7. Ý nghĩa:

Số trung bình cộng thường được dùng làm "đại diện" cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại.

8. Mốt của dấu hiệu:

Mốt của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng tần số. Kí hiệu là M_0 .

9. Biểu đồ

- Ngoài bảng số liệu thống kê ban đầu, bảng "tần số", người ta còn dùng biểu đồ cho một hình ảnh cụ thể về giá trị của dấu hiệu về "tần số".

- Các loại biểu đồ thường gặp là: biểu đồ đoạn thẳng, biểu đồ hình chữ nhật, biểu đồ hình quạt.

10. Tần suất

- Tỷ số giữa tần số n của giá trị x_i với tần số N các phần tử điều tra được gọi là tần suất f của giá trị đó.

- Tần suất f thường được tính dưới dạng tỉ lệ phần trăm.

- Tần suất của một giá trị của dấu hiệu được tính theo công thức $f = \frac{n}{N}$.

N là số tất cả các giá trị

n là tần số của một giá trị

f là tần suất của giá trị đó.

CHƯƠNG 4 : BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

1. Khái niệm về biểu thức đại số :

Những biểu thức bao gồm các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa không chỉ trên những số mà còn có thể trên những chữ được gọi là biểu thức đại số

+ Biểu thức nguyên, biểu thức phân

- Biểu thức đại số không chứa biến ở mẫu gọi là biểu thức nguyên

- Biểu thức đại số có chứa biến ở mẫu gọi là biểu thức phân

Giá trị của một biểu thức đại số Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay các giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính

* Lưu ý :

- Đối với biểu thức nguyên, ta luôn tính được giá trị của nó tại mọi giá trị của biến.

- Đối với biểu thức phân ta chỉ tính được giá trị của nó tại những giá trị của biến làm cho mẫu khác không

2. Đơn thức

Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến

- Đơn thức thu gọn

Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm một tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương (mỗi biến chỉ được viết một lần)

- Số nói trên gọi là hệ số (viết phía trước đơn thức) phần còn lại gọi là phần biến của đơn thức (viết phía sau hệ số, các biến thường viết theo thứ tự của bảng chữ cái).

- Các bước thu gọn một đơn thức

Bước 1. Xác định dấu duy nhất thay thế cho các dấu có trong đơn thức. Dấu duy nhất là dấu "+" nếu đơn thức không chứa dấu "-" nào hay chứa một số chẵn lần dấu "-". Dấu duy nhất là dấu "-" trong trường hợp ngược lại.

Bước 2. Nhóm các thừa số là số hay là các hằng số và nhân chúng với nhau.

Bước 3. Nhóm các biến, xếp chúng theo thứ tự các chữ cái và dùng kí hiệu lũy thừa để viết tích các chữ cái giống nhau.

- Bậc của đơn thức thu gọn

Bậc của đơn thức có hệ số khác không là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.

Số thực khác 0 là đơn thức bậc không.

Số 0 được coi là đơn thức không có bậc

Nhân đơn thức

Để nhân hai đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau

-. Đơn thức đồng dạng

Định nghĩa: Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác không và có cùng phần biến.

Chú ý: Mọi số khác 0 được coi là đơn thức đồng dạng với nhau. 2. Cộng, trừ đơn thức đồng dạng

Quy tắc: Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến

3. Khái niệm đa thức

Đa thức là một đơn thức hoặc một tổng của hai hay nhiều đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó

Nhận xét:

- Mỗi đa thức là một biểu thức nguyên.
- Mỗi đơn thức cũng là một đa thức.
- Thu gọn các số hạng đồng dạng trong đa thức: Nếu trong đa thức có chứa các số hạng đồng dạng thì ta thu gọn các số hạng đồng dạng đó để được một đa thức thu gọn.
- Đa thức được gọi là đã thu gọn nếu trong đa thức không còn hai hạng tử nào đồng dạng
- Bậc của đa thức: Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó
- + Cộng đa thức : Muốn cộng hai đa thức ta có thể lần lượt thực hiện các bước:
 - Viết liên tiếp các hạng tử của hai đa thức đó cùng với dấu của chúng.
 - Thu gọn các hạng tử đồng dạng (nếu có)

4. Trừ đa thức

Muốn trừ hai đa thức ta có thể lần lượt thực hiện các bước:

- Viết các hạng tử của đa thức thứ nhất cùng với dấu của chúng.
- Viết tiếp các hạng tử của đa thức thứ hai với dấu ngược lại.
- Thu gọn các hạng tử đồng dạng (nếu có).

5. Bậc của đa thức một biến

Bậc của đa thức một biến khác đa thức không (đã thu gọn) là số mũ lớn nhất của biến có trong đa thức đó.

6. Hệ số, giá trị của một đa thức

a) Hệ số của đa thức Hệ số cao nhất là hệ số của số hạng có bậc cao nhất

Hệ số tự do là số hạng không chứa biến.

b) Giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$ được kí hiệu là $f(a)$ có được bằng cách thay $x = a$ vào đa thức $f(x)$ rồi thu gọn lại.

7. Đa thức một biến

Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

Lưu ý: Một số được coi là đa thức một biến

Để cộng, trừ hai đa thức một biến, ta có thể thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1. Thực hiện theo cách cộng, trừ đa thức đã học ở lớp dưới

Cách 2. Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến, rồi đặt phép tính theo cột dọc tương tự như cộng, trừ các số (chú ý đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột)

8. Nghiệm của đa thức một biến

Cho đa thức $P(x)$ Nếu tại $x = a$ đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

9. Số nghiệm của đa thức một biến

Một đa thức (khác đa thức không) có thể có 1, 2, 3, ..., n nghiệm hoặc không có nghiệm nào.

Tổng quát: Số nghiệm của một đa thức (khác đa thức 0) không vượt qua bậc của nó.

CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Thu gọn biểu thức đại số:

a. Thu gọn đơn thức, tìm bậc, hệ số

.Phương pháp:

Bước 1: dùng qui tắc nhân đơn thức để thu gọn

Bước 2: xác định hệ số, bậc của đơn thức đã thu gọn.

b. Thu gọn đa thức, tìm bậc, hệ số cao nhất.

Phương pháp:

Bước 1: nhóm các hạng tử đồng dạng, tính cộng, trừ các hạng tử đồng dạng.

Bước 2: xác định hệ số cao nhất, bậc của đa thức đã thu gọn.

Dạng 2: Tính giá trị biểu thức đại số :

Phương pháp :

Bước 1: Thu gọn các biểu thức đại số.

Bước 2: Thay giá trị cho trước của biến vào biểu thức đại số.

Bước 3: Tính giá trị biểu thức số.

Dạng 3 : Cộng, trừ đa thức nhiều biến

Phương pháp :

Bước 1: viết phép tính cộng, trừ các đa thức.

Bước 2: áp dụng qui tắc bỏ dấu ngoặc.

Bước 3: thu gọn các hạng tử đồng dạng (cộng hay trừ các hạng tử đồng dạng)

Dạng 4: Cộng trừ đa thức một biến:

Phương pháp:

Bước 1: thu gọn các đơn thức và sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến.

Bước 2: viết các đa thức sao cho các hạng tử đồng dạng thẳng cột với nhau.

Bước 3: thực hiện phép tính cộng hoặc trừ các hạng tử đồng dạng cùng cột.

Chú ý: $A(x) - B(x) = A(x) + [-B(x)]$

Dạng 5 : Tìm nghiệm của đa thức 1 biến

1. Kiểm tra 1 số cho trước có là nghiệm của đa thức một biến không

Phương pháp :

Bước 1: Tính giá trị của đa thức tại giá trị của biến cho trước đó.

Bước 2: Nếu giá trị của đa thức bằng 0 thì giá trị của biến đó là nghiệm của đa thức.

2. Tìm nghiệm của đa thức một biến

Phương pháp :

Bước 1: Cho đa thức bằng 0.

Bước 2: Giải bài toán tìm x.

Bước 3: Giá trị x vừa tìm được là nghiệm của đa thức.

Chú ý :

– Nếu $A(x).B(x) = 0 \Rightarrow A(x) = 0$ hoặc $B(x) = 0$

– Nếu đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ có $a + b + c = 0$ thì ta kết luận đa thức có 1 nghiệm là $x = 1$, nghiệm còn lại $x_2 = c/a$.

– Nếu đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ có $a - b + c = 0$ thì ta kết luận đa thức có 1 nghiệm là $x = -1$, nghiệm còn lại $x_2 = -c/a$.

Dạng 6 : Tìm hệ số chưa biết trong đa thức $P(x)$ biết $P(x_0) = a$

Phương pháp :

Bước 1: Thay giá trị $x = x_0$ vào đa thức.

Bước 2: Cho biểu thức số đó bằng a.

Bước 3: Tính được hệ số chưa biết.

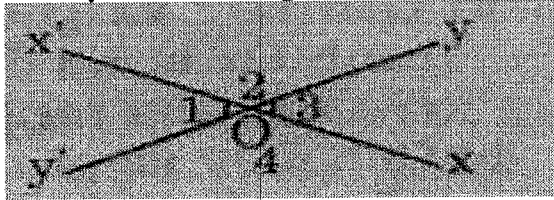
B. HÌNH HỌC 7

CHƯƠNG I:

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC- ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Định nghĩa hai góc đối đỉnh: Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.

2. Định lý về hai góc đối đỉnh: Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.



$\widehat{O_1}$ đối đỉnh với $\widehat{O_3} \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_3}$.

$\widehat{O_2}$ đối đỉnh với $\widehat{O_4} \Rightarrow \widehat{O_2} = \widehat{O_4}$.

3. Hai đường thẳng vuông góc: Hai đường thẳng xx' , yy' cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là hai đường thẳng vuông góc và được kí hiệu là $xx' \perp yy'$.

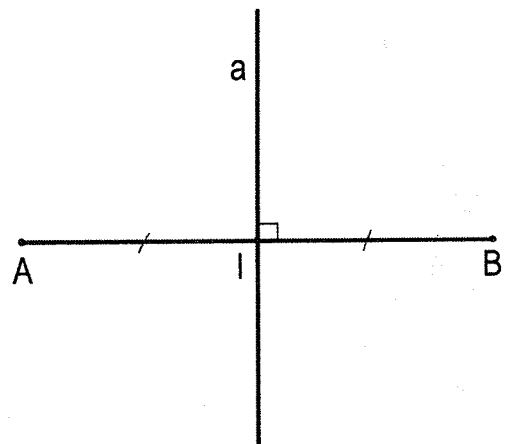
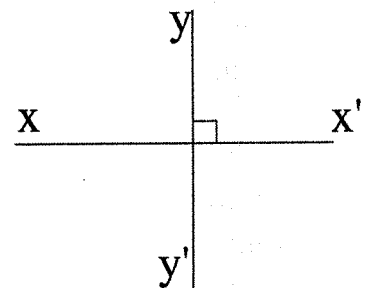
Tính chất: Có một và chỉ một đường thẳng a' đi qua điểm O cho trước và vuông góc với đường thẳng a cho trước.

4. Đường trung trực của đoạn thẳng:

a) Định nghĩa: Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.

b) Tổng quát : a là đường trung trực của AB

$\Leftrightarrow$



5. Các góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng

a) Cặp góc so le trong :

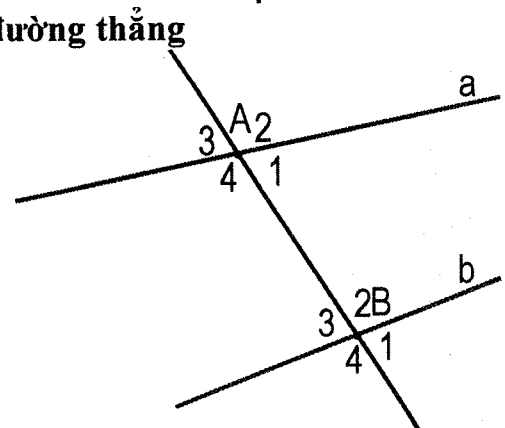
$\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_3}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$.

b) Các cặp góc đồng vị :

$\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$; $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$;

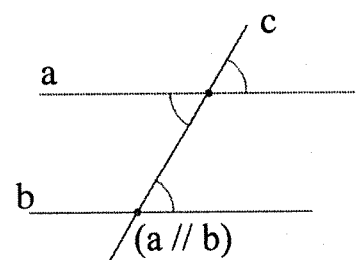
$\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_3}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_4}$.

c) Khi $a \parallel b$ thì $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_3}$ gọi là các cặp góc trong cùng phía bù



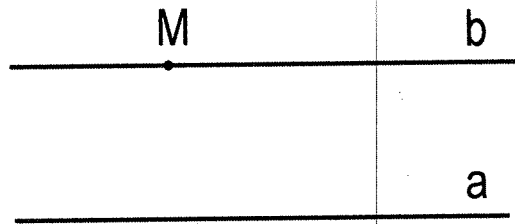
6. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song:

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b song song với nhau.



7. Tiên đề O-clit:

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.



8. Tính chất hai đường thẳng song song:

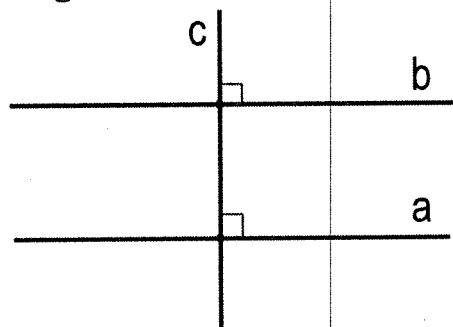
Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b, trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì:

- a) Hai góc so le trong bằng nhau;
- b) Hai góc đồng vị bằng nhau;
- c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

9. Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song

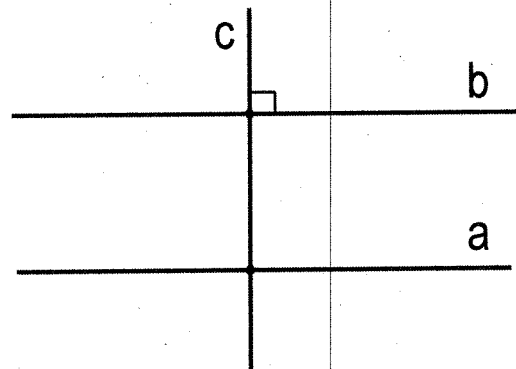
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau

$$\left. \begin{array}{l} a \perp c \\ b \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$$



- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia

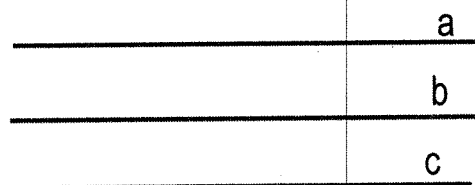
$$\left. \begin{array}{l} c \perp b \\ a // b \end{array} \right\} \Rightarrow c \perp a$$



- Ba đường thẳng song song

- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau

$$a // c \text{ và } b // c \Rightarrow a // b$$



10. Định lý

- Một tính chất được khẳng định là đúng bằng suy luận được gọi là định lý. Định lý thường phát biểu dưới dạng: "Nếu A thì B" với A là giả thiết, là điều kiện cho biết, B là kết luận, là điều được suy ra.

- Chứng minh định lý

Chứng minh định lý là dùng suy luận để khẳng định kết luận (được suy ra từ giả thiết) là đúng.

CHƯƠNG II : TAM GIÁC

1 Tổng ba góc của tam giác: Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .

- Định lý tổng ba góc trong một tam giác.

+ $\triangle ABC$ có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ (đ/l tổng ba góc trong một tam giác)

2. Áp dụng vào tam giác vuông.

Trong tam giác vuông có hai góc nhọn phụ nhau.

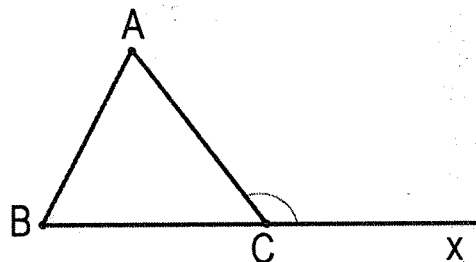
3. Góc ngoài của tam giác

a) **Định nghĩa:** Góc ngoài của tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác

b) **Tính chất :** Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong của hai góc không kề với nó.

$$\widehat{ACx} = \hat{A} + \hat{B}$$

c) **Nhận xét:** Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

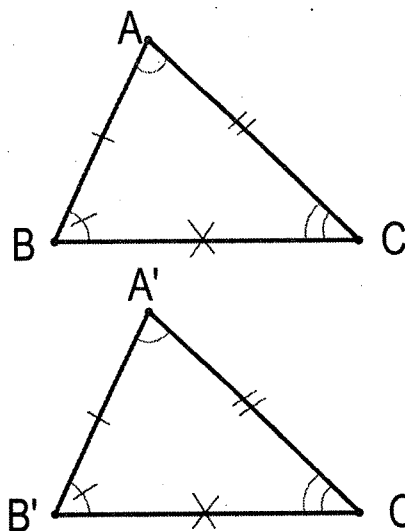


4. Hai tam giác bằng nhau

a) **Định nghĩa :** Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác mà ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia và ba góc đối diện với ba cạnh ấy của tam giác này bằng ba góc đối diện với ba cạnh của tam giác kia

b) . **Kí hiệu :** Để kí hiệu sự bằng nhau của tam giác ABC và tam giác A'B'C' ta viết: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \triangle ABC = \triangle A'B'C' \\ AB = A'B'; AC = A'C'; BC = B'C' \\ \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

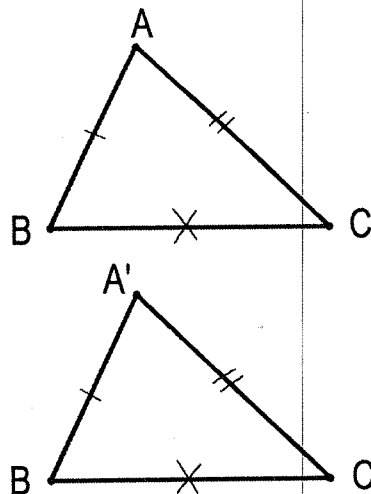


5. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác

***) Trường hợp 1: cạnh – cạnh- cạnh (c-c-c)**
- Tính chất: Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau

Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

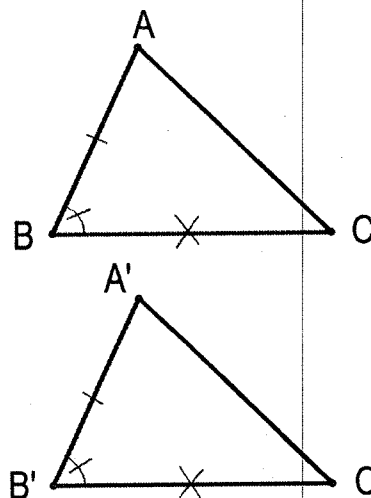
$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' (c.c.c)$$



***) Trường hợp 2: Cạnh-Góc- Cạnh (c-g-c)**
 Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' (c.g.c)$$

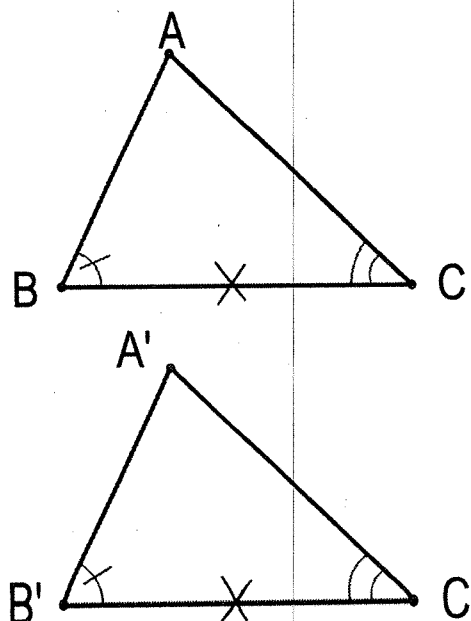


***) Trường hợp 3: Góc – Cạnh - Góc (g-c-g)**

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau

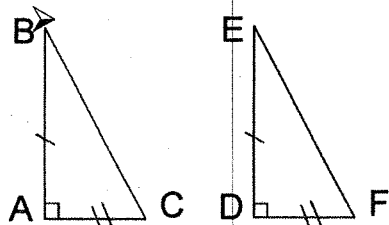
Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' (g.c.g)$$



6. Bốn trường hợp bằng nhau của tam giác vuông.

+ **Trường hợp 1: Hai cạnh góc vuông.** Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



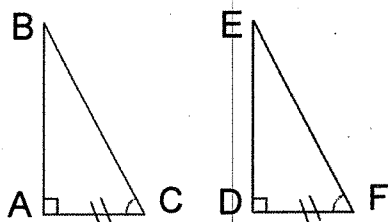
$$\triangle ABC (\hat{A} = 90^\circ) \text{ và } \triangle DEF (\hat{D} = 90^\circ)$$

$$\text{có: } \begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF \text{ (Hai cạnh góc vuông)}$$

+ **Trường hợp 2: Cạnh góc vuông – góc nhọn.**

➤ : Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



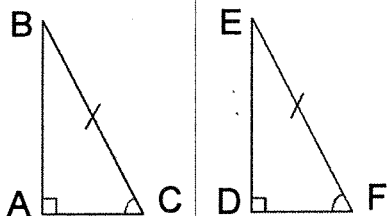
$$\triangle ABC (\hat{A} = 90^\circ) \text{ và } \triangle DEF (\hat{D} = 90^\circ)$$

$$\text{có: } \begin{cases} AC = DF \\ \hat{C} = \hat{F} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} AB = DE \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF \text{ (Cạnh góc vuông- góc nhọn)}$$

+ **Trường hợp 3: Cạnh huyền – góc nhọn.**

➤ : Nếu cạnh huyền và góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền, góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



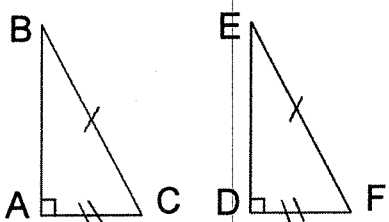
$$\triangle ABC (\hat{A} = 90^\circ) \text{ và } \triangle DEF (\hat{D} = 90^\circ)$$

$$\text{có: } \begin{cases} BC = EF \\ \hat{C} = \hat{F} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} BC = EF \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF \text{ (Cạnh huyền - góc nhọn)}$$

+ **Trường hợp 4: Cạnh huyền - cạnh góc vuông.**

: Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền, và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau



$$\triangle ABC (\hat{A} = 90^\circ) \text{ và } \triangle DEF (\hat{D} = 90^\circ)$$

$$\text{có: } \begin{cases} CB = EF \\ AC = DF \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} CB = EF \\ AB = DE \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF \text{ (Cạnh huyền - cạnh góc vuông)}$$

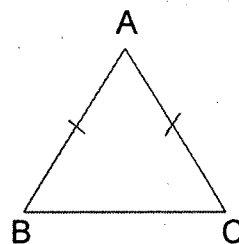
7. Định nghĩa tính chất của tam giác cân.

* Định nghĩa: Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

Hai cạnh bằng nhau là hai cạnh bên, cạnh còn lại là cạnh đáy

- Tam giác ABC có $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A.

* Phát biểu các tính chất của tam giác cân?



Tính chất 1: Trong tam giác cân hai góc ở đáy bằng nhau.

Tính chất 2: Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì là tam giác cân.

* Tính chất:

$$\begin{aligned} &+ AB = AC \\ &+ \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \\ &+ \widehat{B} = \widehat{C} \\ &+ \widehat{A} = 180^\circ - 2\widehat{B} \end{aligned}$$

8. Định nghĩa tính chất của tam giác đều:

* Định nghĩa: Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

- Tam giác ABC có $AB = AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều.

* Phát biểu tính chất của tam giác đều?

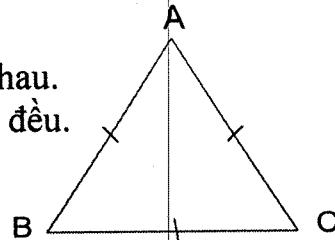
+ Trong tam giác đều mỗi góc bằng 60°

+ Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau là tam giác đều.

+ Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

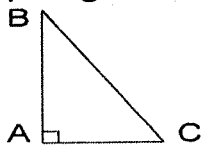
- Tính chất:

$$\begin{aligned} &+ AB = AC = BC \\ &+ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ \end{aligned}$$



9. Tam giác vuông:

Định nghĩa: Tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác vuông tại A.



* Tính chất:

$$+ \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$$

* Định lý Pytago: Trong tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

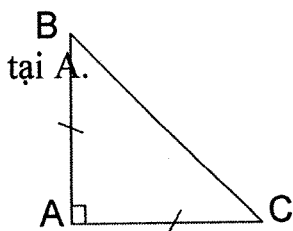
* Định lý Pytago đảo: Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$$\triangle ABC \text{ có } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } A$$

10. Tam giác vuông cân:

* Định nghĩa: Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau

Tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$ và $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ là vuông cân



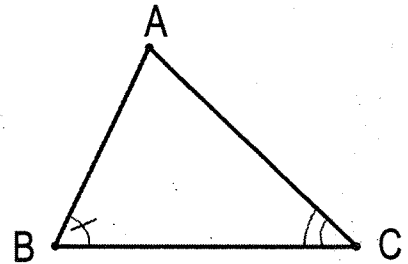
* Tính chất:

$$\begin{aligned} &+ AB = AC = c \\ &+ BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = c\sqrt{2} \\ &+ \widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ \end{aligned}$$

CHƯƠNG III : QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

1. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

- Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn thì lớn hơn



- Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Nhận xét

- Trong tam giác ABC: $AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$

- Trong tam giác ABC cân: $AB = AC \Leftrightarrow \hat{C} = \hat{B}$

- Trong tam giác tù (hoặc là tam giác vuông) cạnh đối diện với góc tù (hoặc góc vuông là cạnh lớn nhất.

2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu

a. Khái niệm về đường vuông góc, đường xiên và hình chiếu của đường xiên

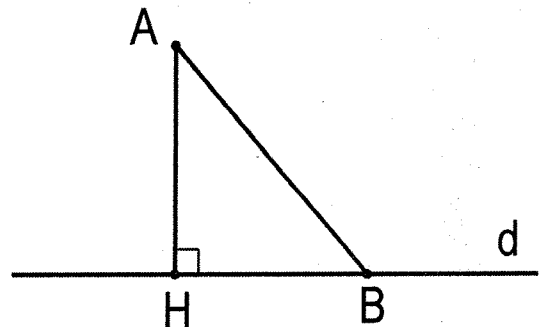
- Lấy $A \notin d$, kẻ $AH \perp d$, lấy $B \in d$ và $B \neq H$. Khi đó :

- + Đoạn AH gọi là đoạn vuông góc hay đường vuông góc

+ Đoạn AB gọi là đường xiên

+ Đoạn HB gọi là hình chiếu của đường xiên AB lên đường thẳng ra

- Điểm H gọi là hình chiếu của A trên đường thẳng d



b. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Định lý 1: Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất

c. Quan hệ giữa các đường xiên và hình chiếu của chúng

Định lý 2: Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó;

a) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn

b) Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn

c) Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau và ngược lại nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau

3. Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức tam giác

a. Bất đẳng thức tam giác

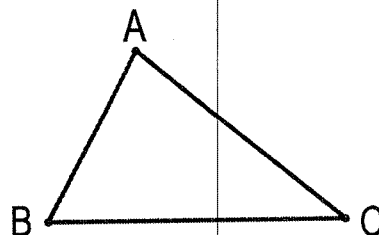
Định lý. Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kỳ bao giờ cũng lớn hơn độ dài hai cạnh còn lại

GT : ΔABC

KL : $AB + AC > BC$

$AB + BC > AC$

$AC + BC > AB$



b. Hệ quả của bất đẳng thức tam giác

Hệ quả: Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kỳ bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại. Ta có : $AC - BC < AB$; $AB - BC < AC$; $AC - AB < BC$

Nhận xét: Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn tổng độ dài của hai cạnh còn lại

Trong tam giác ABC, với cạnh BC ta có: $AB - AC < BC < AB + AC$

4. Đường trung tuyến của tam giác

Đường trung tuyến của tam giác là đoạn thẳng có một đầu là đỉnh của tam giác đầu kia là trung điểm của cạnh đối diện với đỉnh đó. Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến

5. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác

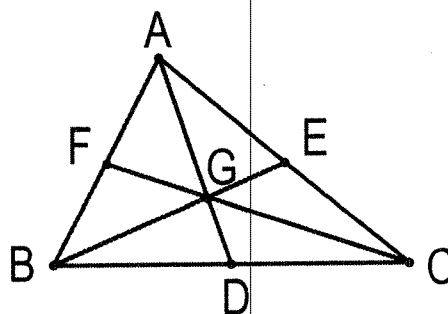
Định lý: Ba đường trung tuyến của tam giác cùng đi qua điểm. điểm đó cách đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến

đi qua đỉnh ấy.

Giao điểm của ba đường trung tuyến gọi là trọng tâm

GT : G là trọng tâm ΔABC

KL : $\frac{GA}{DA} = \frac{GB}{EB} = \frac{GC}{FC} = \frac{2}{3}$



$$* BG = \frac{2}{3} BE ; * BG = 2GE ; * GE = \frac{1}{3} BE$$

• Công thức độ dài trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}; m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}; m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

6. Đường phân giác của một góc

a. Định lý 1 (thuận) : Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó

GT : $M \in Oz$ là tia phân giác của góc xOy ; $MA \perp Ox$; $MB \perp Oy$

KL: $MA = MB$

b. Định lý 2 (đảo) Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên phân giác của góc đó.

GT : M ở miền trong ΔABC , $MA \perp Ox$; $MB \perp Oy$, $MA = MB$

KL: OM là tia phân giác của góc xOy

c. Nhận xét. Tập hợp các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó.

7. Đường phân giác của tam giác

Trong tam giác ABC, tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm M.

+ Đoạn thẳng AM được gọi là đường phân giác của tam giác ABC

+ Đường thẳng AM cũng được gọi là đường phân giác của tam giác ABC

+ Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

Tính chất: Trong một tam giác cân, đường phân giác xuất phát từ đỉnh đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy

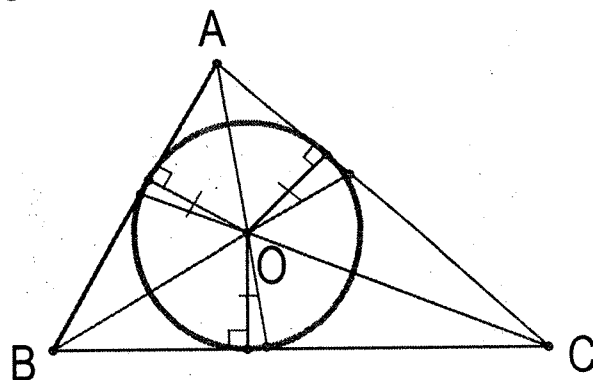
8. Tính chất ba đường phân giác của tam giác

Định lí: Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

GT: $\triangle ABC$ Hai phân giác BE, CF cắt nhau tại I

KL: AI là tia phân giác của góc A

IH = IK = IL



9. Định nghĩa đường trung trực của một đoạn thẳng

❖ Đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy

d là đường trung trực của đoạn thẳng AB

❖ Định lí 1: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó

GT: d là trung trực của AB $M \in d$

KL: $MA = MB$

Định lí 2: Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó

❖ Nhận xét: Từ định lí thuận và đảo ta có: Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

10. Đường trung trực của tam giác

- Trong một tam giác, đường trung trực của một cạnh gọi là một đường trung trực của tam giác đó

- Mỗi tam giác có ba đường trung trực

Định lí 1: Trong một tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh này.

GT: $\triangle ABC$ cân tại A AM là đường trung trực của cạnh BC

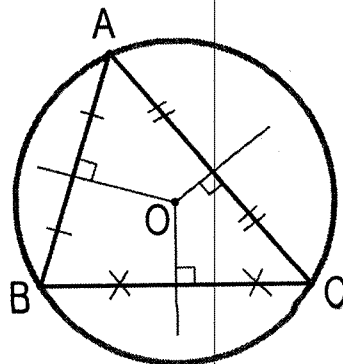
KL: $MB = MC$

11. Tính chất ba đường trung trực của tam giác

Định lí 2: Ba đường trung trực của tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó

GT: $\triangle ABC$ a là đường trung trực của BC
b là đường trung trực của AC
c là đường trung trực của AB
a, b, c cắt nhau tại O

KL: O nằm trên đường trung trực của BC
 $OA = OB = OC$



12. A. Một số phương pháp chứng minh hình học

1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau:

- P^2 : - Chứng minh hai tam giác bằng nhau chứa hai đoạn thẳng đó
- Chứng minh hai đoạn thẳng đó là hai cạnh bên của một tam giác cân
- Dựa vào tính chất đường trung tuyến, đường trung trực của đoạn thẳng
- Dựa vào định lí Py-ta-go để tính độ dài đoạn thẳng

2. Chứng minh hai góc bằng nhau:

- P^2 : - Chứng minh hai tam giác bằng nhau chứa hai góc đó
- Chứng minh hai góc đó là hai góc ở đáy của một tam giác cân
- Chứng minh hai đường thẳng song song mà hai góc đó là cặp góc so le trong, đồng vị
- Dựa vào tính chất đường phân giác của tam giác

3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng:

- P^2 : - Dựa vào số đo của góc bẹt (Hai tia đối nhau)
- Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 tại một điểm
- Hai đường thẳng đi qua một điểm và song song với đường thẳng thứ 3
- Dựa vào tính chất 3 đường trung tuyến, phân giác, trung trực, đường cao

4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

- P^2 : - Tính chất của tam giác vuông, định lí Py – ta – go đảo
- Qua hệ giữa đường thẳng song song và đường thẳng vuông góc
- Tính chất 3 đường trung trực, ba đường cao

5. Chứng minh 3 đường thẳng đồng quy(đi qua một điểm)

- P^2 : - Dựa vào tính chất của các đường trong tam giác

6. So sánh hai đoạn thẳng, hai góc :

- P^2 : - Gắn hai đoạn thẳng , hai góc vào một tam giác từ đó vận dụng định lí về quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong một tam giác , BĐT tam giác
- Dựa vào định lí về quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu, đường xiên và đường vuông góc .

B. Phương pháp chứng minh một số bài toán cơ bản (sử dụng một trong các cách sau đây)

a) Chứng minh tam giác cân

1. Chứng minh tam giác có hai cạnh bằng nhau
2. Chứng minh tam giác có hai góc bằng nhau
3. Chứng minh tam giác đó có đường trung tuyến vừa là đường cao
4. Chứng minh tam giác đó có đường cao vừa là đường phân giác ở đỉnh

b) Chứng minh tam giác đều

1. Chứng minh tam giác đó có ba cạnh bằng nhau

2. Chứng minh tam giác đó có ba góc bằng nhau
3. Chứng minh tam giác cân có một góc là 60°

c) Chứng minh một tứ giác là hình bình hành

1. Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành
2. Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành
3. Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành
4. Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành
5. Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành

hành

d) Chứng minh một tứ giác là hình thang: Ta chứng minh tứ giác đó có hai cạnh đối song song

e) Chứng minh một hình thang là hình thang cân

1. Chứng minh hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau
2. Chứng minh hình thang có hai đường chéo bằng nhau

f) Chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật

1. Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật
2. Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật
3. Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật
4. Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật

g) Chứng minh một tứ giác là hình thoi

1. Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau
2. Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau
3. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau
4. Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc

h) Chứng minh một tứ giác là hình vuông

1. Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau
2. Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc
3. Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc
4. Hình thoi có một góc vuông
5. Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau

LỚP 8

A. ĐẠI SỐ 8

CHƯƠNG I : PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

1. Quy tắc nhân đơn thức với đa thức:

Muốn nhân một đơn thức với một đa thức ta nhân đơn thức với từng số hạng của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

Công thức: Cho A, B, C, D là các đơn thức, ta có: $A(B + C - D) = A.B + A.C - A.D$.

2. Quy tắc nhân đa thức với đa thức:

Qui tắc: Muốn nhân một đa thức với một đa thức ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

Công thức: Cho A, B, C, D là các đa thức ta có:

$$\bullet (A + B) \cdot (C + D) = A(C + D) + B(C + D) = AC + AD + BC + BD.$$

$$\bullet (A + B) \cdot (D + E + F) = A.D + A.E + A.F + B.D + B.E + B.F$$

3. Bảy hằng đẳng thức : Với A, B là các biểu thức

3.1. Bình phương của một tổng: $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

3.2. Bình phương của một hiệu: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

3.3. Hiệu của hai bình phương: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

3.4. Lập phương của một tổng : $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

3.5. Lập phương của một hiệu: $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

3.6. Tổng hai lập phương: $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

3.7. Hiệu hai lập phương: $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

+ Các hằng đẳng thức liên quan:

$$\bullet (A + B)^2 = (A - B)^2 + 4AB$$

$$\bullet (A - B)^2 = (A + B)^2 - 4AB$$

$$\bullet A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$$

$$\bullet A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$$

$$\bullet A^3 - B^3 = (A - B)^3 + 3AB(A - B)$$

+ Các hệ thức liên quan

$$1. (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$2. a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$3. (a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$$

$$4. (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$5. (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$$

$$6. (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

$$7. (1 + \sqrt{a})^2 = 1 + 2\sqrt{a} + a$$

$$8. (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$$

$$9. (1 - \sqrt{a})^2 = 1 - 2\sqrt{a} + a$$

$$10. a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$11. a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)$$

$$12. a\sqrt{a} - b\sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)$$

$$13. 1 - a\sqrt{a} = (1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)$$

$$14. 1 + a\sqrt{a} = (1 + \sqrt{a})(1 - \sqrt{a} + a)$$

$$15. a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = (\sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$16. a\sqrt{b} - b\sqrt{a} = (\sqrt{ab})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

+ Các hằng đẳng thức dạng tổng quát:

$$1. (A + B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \dots + nAB^{n-1} + B^n$$

$$2. A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

$$3. (A_1 + A_2 + \dots + A_n)^2 = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 + 2(A_1A_2 + A_1A_3 + \dots + A_{n-1}A_n)$$

4. Phân tích đa thức thành nhân tử

4.1. Khái niệm:

Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

4.2. Ứng dụng của việc phân tích đa thức thành nhân tử:

Việc phân tích đa thức thành nhân tử giúp chúng ta rút gọn được biểu thức, tính nhanh, giải phương trình.

4.3. Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử

Phương pháp 1: Đặt nhân tử chung:

- Khi tất cả các số hạng của đa thức có một thừa số chung, ta đặt thừa số chung đó ra ngoài dấu ngoặc () để làm nhân tử chung.

- Các số hạng bên trong dấu () có được bằng cách lấy số hạng của đa thức chia cho nhân tử chung.

- Phương pháp này dựa trên tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng các đa thức.

$$\text{Công thức: } AB + AC + \dots + AF = A(B + C + \dots + F)$$

• **Phương pháp:** Tìm nhân tử chung.

- Lấy ƯCLN của các hệ số.

- Lấy các biến chung có mặt trong tất cả các hạng tử.

- Đặt nhân tử chung ra ngoài ngoặc theo công thức

$$AB + AC + \dots + AF = A(B + C + \dots + F)$$

• **Chú ý:**

- Phương pháp này áp dụng khi các hạng tử của đa thức có nhân tử chung.
- Nhiều khi muốn có nhân tử chung ta phải đổi dấu các số hạng bằng cách đưa số hạng vào trong ngoặc hoặc đưa vào trong ngoặc đằng trước có dấu cộng hoặc trừ.

Phương pháp 2: Dùng hằng đẳng thức

Nếu đa thức là một vế của hằng đẳng thức đáng nhớ nào đó thì có thể dùng hằng đẳng thức đó để biểu diễn đa thức này thành một tích các đa thức.

• **Phương pháp dùng hằng đẳng thức:**

- Nhận dạng các hằng đẳng thức.
- Kiểm tra xem có phải đúng là hằng đẳng thức không.
- **Chú ý:** Nhiều khi phải đổi dấu mới áp dụng được hằng đẳng thức.

Phương pháp 3: Nhóm nhiều hạng tử

Nhóm nhiều hạng tử của một đa thức một cách hợp lí để có thể đặt được nhân tử chung hoặc dùng được hằng đẳng thức đáng nhớ.

• **Chú ý:**

- Một đa thức có thể có nhiều cách nhóm
- Sau khi nhóm ta có thể áp dụng phương pháp đặt nhân tử chung, phương pháp dùng hằng đẳng thức để xuất hiện nhân tử chung mới hoặc hằng đẳng thức mới.

Phương pháp 4: Phối hợp nhiều phương pháp

1. Phương pháp: Ta tìm hướng giải bằng cách đọc kỹ đề bài và rút ra nhận xét để vận dụng các phương pháp đã biết: đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm nhiều hạng tử và phối hợp chúng để phân tích đa thức thành nhân tử.

2. Chú ý: Nếu các hạng tử của đa thức có nhân tử chung thì ta nên đặt nhân tử chung ra ngoài dấu ngoặc để đa thức trong ngoặc đơn giản hơn rồi mới tiếp tục phân tích đến kết quả cuối cùng.

Kiến thức Nâng cao.

Phương pháp 5: Phương pháp tách

- Khi phân tích đa thức : $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử

Cách 1: Tách

Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử:

Đối với các đa thức mà các hạng tử không có nhân tử chung, khi phân tích ra nhân tử ta thường phải tách một hạng tử nào đó ra thành nhiều hạng tử khác để nhóm với các hạng tử đã có trong đa thức để cho trong các nhóm có nhân tử chung, từ đó giữa các nhóm có nhân tử chung mới hoặc xuất hiện các hằng đẳng thức quen thuộc.

Tổng quát: Để phân tích tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c = a x^2 + b_1x + b_2x + c$ ra nhân tử, ta tách hạng tử bx thành $b_1x + b_2x$ sao cho $b_1b_2 = ac$ và $b = b_1 + b_2$

Tổng quát: Nếu đa thức $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ có nghiệm nguyên là $x = x_0$ thì x_0 là một ước của hệ số tự do a_0 , khi phân tích $f(x)$ ra nhân tử thì $f(x)$ có chứa nhân tử $x - x_0$. Vì vậy đối với những đa thức một biến bậc cao, ta nên tìm lấy một nghiệm của nó để định hướng việc phân tích ra nhân tử.

Tổng quát: Nếu đa thức $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ có nghiệm hữu tỉ là

$x = \frac{p}{q}$ (dạng tối giản) thì p là một ước của hệ số tự do a_0 còn q là ước dương của

hệ số cao nhất a_n . Khi phân tích $f(x)$ ra nhân tử thì $f(x)$ có chứa nhân tử $qx - p$.
 Cách 2: Tách $ax^2 + bx + c = X^2 - B^2$

Phương pháp 6: Phương pháp thêm bớt

Mục đích: Thêm, bớt cùng một hạng tử để nhóm với các hạng tử đã có trong đa thức nhằm xuất hiện nhân tử chung mới hoặc xuất hiện hằng đẳng thức, đặc biệt là xuất hiện hiệu của hai bình phương.

Phương pháp 7: Đặt biến phụ

- Trong đa thức có biểu thức xuất hiện nhiều lần ta đặt biểu thức đó làm biến phụ đưa về đa thức đơn giản. Sau khi phân tích đa thức này ra nhân tử rồi lại thay biến cũ vào và tiếp tục phân tích

Phương pháp 8: Phương pháp xét giá trị riêng

• Kiến thức:

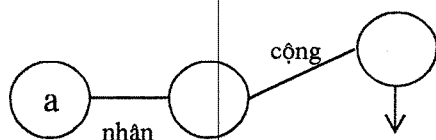
- $x = a$ là nghiệm của đa thức $f(x) \Leftrightarrow f(a) = 0$
- $x = a$ là nghiệm của đa thức $f(x) \Rightarrow f(x) : (x - a)$

• Lược đồ Horner

Sơ đồ Horner - ne

Nếu đa thức bị chia là $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, đa thức chia là $x - a$ ta được thương là $b_0x^2 + b_1x + b_2$. Theo sơ đồ Horner - ne ta có:

	a_0	a_1	a_2	a_3
A	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$r = ab_2 + a_3$



• Điều kiện để tam thức bậc hai phân tích được thành nhân tử.

Đối với tam thức bậc hai dạng $ax^2 + bx + c$, muốn xét xem đa thức này có phân tích được thành nhân tử hay không thường dùng phương pháp sau:

- Tính $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Nếu $\Delta \geq 0$ thì phân tích được.
- Nếu $\Delta < 0$ thì không phân tích được

Phương pháp 9: Phương pháp hạ bậc

Việc phân tích đa thức thành nhân tử có thể có ích cho việc giải các bài toán về tìm nghiệm của đa thức, chia đa thức, rút gọn đa thức.

$$\text{Đưa về dạng } A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Phương pháp 10: Phương pháp đổi biến:

Một số đa thức có bậc cao, nhờ đặt biến phụ đưa về đa thức có bậc thấp hơn để thuận tiện cho việc phân tích ra nhân tử, sau khi phân tích ra nhân tử đối với đa thức mới, thay trở lại biến cũ để được đa thức với biến cũ.

5. Tính chia hết trong tập hợp số nguyên

Phương pháp chung

a. Chứng minh tính chia hết trong tập hợp số nguyên

Gọi $A(n)$ là một biểu thức phụ thuộc vào n ($n \in \mathbb{N}$ hoặc $n \in \mathbb{Z}$)

Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho một số m , ta thường phân tích $A(n)$ thành thừa số, trong đó có một thừa số là m . Nếu m là một hợp số ta phân tích m thành tích các thừa số đôi một nguyên tố cùng nhau, rồi chứng minh $A(n)$ chia hết cho tất cả các số đó

Nhận xét: Trong k số nguyên liên tiếp bao giờ cũng tồn tại một bội của k

Lưu ý: Các hằng đẳng thức hay dùng để chứng minh tính chia hết của một lũy thừa.

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}) \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 - \dots - a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}) \text{ với mọi } n \text{ lẻ}$$

$$(a + b)^n = a^n + c_1 a^{n-1} b + c_2 a^{n-2} b^2 + \dots + c_{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

➤ Các hệ số c_i được xác định bởi tam giác Pa-xcan

Tam giác Pa-xcan

$n=0$							1					
$n=1$						1		1				
$n=2$					1		2		1			
$n=3$			1		3		3		1			
$n=4$		1		4		6		4		1		
$n=5$	1		5		10		10		5		1	

- áp dụng vào tính chất chia hết ta có:

$a^n - b^n$ Chia hết cho $a - b$ ($a \neq b$)

$a^{2n+1} + b^{2n+1}$ Chia hết cho $a + b$ ($a \neq -b$)

$(a + b)^n = BS \cdot a + b^n$ (BS a là bội số của a)

b. Tìm chữ số cuối cùng trong biểu diễn thập phân của một số

Phương pháp:

Xét số tự nhiên $A = n^k$ với $n, k \in \mathbb{N}$

Cách 1: Muốn tìm chữ số cuối cùng của A ta chỉ cần biểu diễn A dưới dạng:

$$A = 10a + b = \overline{ab}$$

Thì b là chữ số cuối cùng của A

$$\text{Ta viết } A = n^k = (10q + r)^k = 10t + r^k$$

Thì chữ số cuối cùng của A cũng chính là chữ số của cùng của r^k

- Nếu $A = 100b + \overline{ab} = \overline{abc}$ thì $\overline{bc}$ là hai chữ số cuối cùng của A

-

Cách 2: Khi lấy k lần lượt những giá trị tự nhiên khác nhau thì trong biểu diễn thập phân của số $A = n^k$ chữ số cuối cùng hoặc một chữ số cuối cùng xuất hiện tuần hoàn.

Ta chỉ cần tìm chu kỳ của hiện tượng này và A ở trường hợp nào với giá trị k đã cho

Cách 3: Dùng phép chia có dư

c. Tính chia hết đối với đa thức

+ Tìm số dư của phép chia mà không thực hiện phép chia

Phương pháp:

* Đa thức chia có dạng $x - a$ với a là hằng số

Số dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho $x - a$ bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$

* Đa thức có bậc từ bậc hai trở lên

Cách 1: Tách đa thức bị chia thành những đa thức chia hết cho đa thức chia

Cách 2: Xét các giá trị riêng

Chú ý:

$a^n - b^n$ Chia hết cho $a - b$ ($a \neq b$)

$a^{2n+1} + b^{2n+1}$ Chia hết cho $a + b$ ($a \neq -b$)

+ Chứng minh một đa thức chia hết cho một đa thức

Phương pháp:

* Phân tích đa thức bị chia thành nhân tử, trong đó có một nhân tử là đa thức chia

6. Đơn thức chia hết cho đơn thức: Với A và B là hai đơn thức, $B \neq 0$. Ta nói A chia hết cho B nếu tìm được một đơn thức Q sao cho $A = B \cdot Q$

Kí hiệu: $Q = A : B = \frac{A}{B}$

- Qui tắc:

Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B) ta làm như sau:

- Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B.
- Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B.
- Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

7. Chia đa thức cho đơn thức

1. Qui tắc:

Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B), ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

2. Chú ý: Trường hợp đa thức A có thể phân tích thành nhân tử, thường ta phân tích trước để rút gọn cho nhanh.

8. Chia đa thức cho đa thức

Ta trình bày phép chia tương tự như cách chia các số tự nhiên. Với hai đa thức A và B của một biến, $B \neq 0$ tồn tại duy nhất hai đa thức Q và R sao cho:

$A = B \cdot Q + R$, với $R = 0$ hoặc bậc bé hơn bậc của B

- Nếu $R = 0$, ta được phép chia hết.
- Nếu $R \neq 0$, ta được phép chia có dư.

CHƯƠNG II : PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

1. Phân thức đại số:

a) Định nghĩa: Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức, B là đa thức khác đa thức 0

A là tử thức (tử).

B là mẫu thức

Mỗi một đa thức cũng được coi là một đa thức có mẫu là 1.

b) Hai phân thức bằng nhau:

Với hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$, ta nói $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A.D = B.C$

- Một đa thức được gọi là một biểu thức nguyên

- Một biểu thức chỉ chứa các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và chứa biến ở mẫu được gọi là biểu thức phân

- Các biểu thức nguyên và biểu thức phân được gọi chung là biểu thức hữu tỉ.

c) Giá trị của biểu thức phân

Giá trị của biểu thức phân chỉ được xác định với điều kiện giá trị của mẫu biểu thức khác 0

2. Tính chất cơ bản của phân thức đại số:

a) Tính chất:

- Tính chất 1: $\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M}$ (M là đa thức khác đa thức 0).

- Tính chất 2: $\frac{A}{B} = \frac{A:M}{B:M}$ (M là nhân tử chung khác 0).

b) Quy tắc đổi dấu: $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$.

3. Rút gọn phân thức

➤ Quy tắc: Muốn rút gọn một phân thức đại số ta phải:

- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung

- Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung giống nhau

➤ Chú ý: Có khi cần đổi dấu tử hoặc mẫu thức để xuất hiện nhân tử chung.

4. Quy đồng mẫu thức.

a. Tìm mẫu thức chung

- Phân tích mẫu thức của các phân thức đã cho thành nhân tử.

- Mẫu thức chung cần tìm là một tích mà các nhân tử được chọn như sau:

+ Nhân tử bằng số của mẫu thức chung là tích các nhân tử bằng số ở các mẫu thức của các phân thức đã học. (Nếu các nhân tử bằng số ở các mẫu thức là những số nguyên dương thì nhân tử bằng số của mẫu thức chung là BCNN của chúng)

+ Với mỗi cơ số của lũy thừa có mặt trong các mẫu thức ta chọn lũy thừa với số mũ cao nhất

b. Quy đồng mẫu thức

Muốn qui đồng mẫu thức nhiều phân thức ta có thể làm như sau:

- Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung
- Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức.
- Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng

5. Phép cộng các phân thức đại số.

a. Cộng hai phân thức cùng mẫu thức

Qui tắc: Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu thức ta cộng các tử thức với nhau, giữ nguyên mẫu thức.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}$$

b. Cộng phân thức có mẫu thức khác nhau

Qui tắc: Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau ta quy đồng mẫu thức vừa tìm được.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} + \frac{CB}{DB} = \frac{AD+BC}{BD}$$

c. Chú ý: Phép cộng các phân thức cũng có các tính chất sau:

- Giao hoán: $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}$
- Kết hợp: $(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}) + \frac{E}{F} = \frac{A}{B} + (\frac{C}{D} + \frac{E}{F})$

6. Phép trừ các phân thức đại số.

a) Phân thức đối:

- Hai phân thức được gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0.

- Công thức: $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$ và $-\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}$.

b) Phép trừ:

- Quy tắc:

Muốn trừ phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$, ta cộng $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của $\frac{C}{D}$

- Công thức: $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D}$

7. Phép nhân các phân thức đại số.

a. Qui tắc

Muốn nhân hai phân thức ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau rồi rút gọn phân thức vừa tìm được: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}$

b. Các tính chất

- Giao hoán $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \cdot \frac{A}{B}$

- Kết hợp $(\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}) \cdot \frac{E}{F} = \frac{C}{D} \cdot (\frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F})$

- Phân phối đối với phép cộng $(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}) \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F} + \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}$

8. Phép chia các phân thức đại số.

a. Phân thức nghịch đảo

Hai phân thức được gọi là nghịch đảo của nhau nếu tích của chúng bằng 1.

Nếu $\frac{A}{B}$ là một phân thức khác 0 thì $\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{A} = 1$

Do đó: $\frac{B}{A}$ là phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{A}{B}$

$\frac{A}{B}$ là phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{B}{A}$

b. Phép chia các phân thức đại số

Qui tắc: Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo $\frac{D}{C}$.

Ta có: $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$ với $\frac{C}{D} \neq 0$

CHƯƠNG III : PHƯƠNG TRÌNH

A. Kiến thức cơ bản

1. Phương trình

- Một phương trình với ẩn x là hệ thức có dạng $A(x) = B(x)$, trong đó $A(x)$ gọi là vế trái, $B(x)$ gọi là vế phải.
- Nghiệm của phương trình là giá trị của ẩn x thoả mãn (hay nghiệm đúng) phương trình.

2. Giải phương trình

- Giải phương trình là tìm tất cả các nghiệm của phương trình.
- Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình được gọi là tập nghiệm của phương trình đó. Tập hợp các nghiệm của phương trình kí hiệu là S .

3. Phương trình tương đương

Hai phương trình tương đương nếu chúng có cùng một tập hợp nghiệm.

Kí hiệu $\Leftrightarrow$ đọc là tương đương

4. Hai quy tắc biến đổi phương trình

a) Quy tắc chuyển vế

Trong một phương trình ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

b) Quy tắc nhân với một số

Trong một phương trình, ta có thể nhân cả hai vế với cùng một số khác 0

Chú ý:

- a) Hệ thức $x = m$ (với m là một số nào đó) cũng là một phương trình. Phương trình này chỉ rõ rằng m là nghiệm duy nhất của nó.
- b) Một phương trình có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ba nghiệm,...nhưng cũng có thể không có nghiệm nào hoặc có vô số nghiệm. Phương trình không có nghiệm nào được gọi là phương trình vô nghiệm.

B. Nội dung

1. Giải phương trình bậc nhất một ẩn

a) Định nghĩa : Phương trình $ax + b = 0$, với a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$ được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn

b) Cách giải: Bước 1: Chuyển vế về $ax = -b$

Bước 2: Chia hai vế cho a : $x = \frac{-b}{a}$

Bước 3: Kết luận nghiệm: $S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$

Ta có thể trình bày ngắn gọn như sau: $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$

- Để giải các phương trình đưa được về $ax + b = 0$ ta thường biến đổi phương trình như sau:

+ Quy đồng mẫu hai vế và khử mẫu.

+ thực hiện phép tính để bỏ dấu ngoặc và chuyển vế các hạng tử để đưa phương trình về dạng $ax = c$

+ Tìm x

Chú ý: Quá trình biến đổi phương trình về dạng $ax = c$ có thể dẫn đến trường hợp đặc biệt là hệ số của ẩn bằng 0 nếu:

$0x = c$ thì phương trình vô nghiệm $S = \Phi$.

$0x = 0$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi x hay vô số nghiệm: $S = \mathbb{R}$.

C. Một số dạng bài tập thường gặp

1. Giải và biện luận phương trình: $ax + b = 0$ (1)

$ax + b = 0$ (1)		
Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		(1) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	(1) vô nghiệm
	$b = 0$	(1) nghiệm đúng với mọi x

2. Phương trình đưa về phương trình bậc nhất:

Cách giải:

Bước 1 : Quy đồng mẫu rồi khử mẫu hai vế

Bước 2: Bỏ ngoặc bằng cách nhân đa thức; hoặc dùng quy tắc dấu ngoặc.

Bước 3: Chuyển vế: Chuyển các hạng tử chứa ẩn qua vế trái; các hạng tử tự do qua vế phải. (Chú ý: Khi chuyển vế hạng tử thì phải đổi dấu số hạng đó)

Bước 4: Thu gọn bằng cách cộng trừ các hạng tử đồng dạng

Bước 5: Chia hai vế cho hệ số của ẩn

3. Phương trình tích

Định nghĩa: Phương trình tích một ẩn là phương trình có dạng:

$$A(x).B(x) \dots = 0 \quad (1) \quad \text{Trong đó } A(x), B(x), \dots \text{ là các đa thức}$$

Cách giải:

1. Dạng tổng quát: $A(x).B(x) = 0$

2. Cách giải: $A(x).B(x) = 0$ với $A(x) = 0$ hoặc $B(x) = 0$

3. Các bước giải:

Bước 1: Đưa phương trình đã cho về dạng tổng quát $A(x).B(x) = 0$ bằng cách:

- Chuyển tất cả các hạng tử của phương trình về vế trái. Khi đó vế phải bằng 0.

- Phân tích đa thức ở vế phải thành nhân tử.

Bước 2: Giải phương trình và kết luận

Mở rộng: Có dạng: $A(x).B(x)C(x).D(x) = 0$ Trong đó $A(x).B(x)C(x).D(x)$ là các nhân tử.

Cách giải: $A(x).B(x)C(x).D(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \\ C(x) = 0 \\ D(x) = 0 \end{cases}$

Chú ý:

Việc phân tích đa thức thành nhân tử có vai trò quan trọng trong việc đưa phương trình về dạng phương trình tích. Ngoài ra ta còn dùng phương pháp đặt ẩn phụ

4. Phương trình đối xứng (các hệ số có tính đối xứng)

Trong phương trình đối xứng nếu a là nghiệm thì $\frac{1}{a}$ cũng là nghiệm

- + Phương trình đối xứng bậc lẻ bao giờ cũng có một trong các nghiệm là $x = -1$
- + Phương trình đối xứng bậc chẵn $2n$ đưa được về phương trình bậc n bằng cách

đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$

5. Phương trình chứa ẩn ở mẫu:

a. Điều kiện xác định của một phương trình

Điều kiện xác định của phương trình là tập hợp các giá trị của ẩn làm cho tất cả các mẫu trong phương trình đều khác 0.

Điều kiện xác định của phương trình viết tắt là ĐKXĐ.

b. Giải phương trình chứa ẩn số ở mẫu

Ta thường qua các bước:

Bước 1: -Phân tích mẫu thành nhân tử

-Tìm điều kiện xác của phương trình

Tìm ĐKXĐ của phương trình: Là tìm tất cả các giá trị làm cho các mẫu khác 0 (hoặc tìm các giá trị làm cho mẫu bằng 0 rồi loại trừ các giá trị đó đi)

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình tìm được.

- Bỏ ngoặc.
- Chuyển vế (đổi dấu)
- Thu gọn.

+ Sau khi thu gọn mà ta được: Phương trình bậc nhất thì giải theo quy tắc giải phương trình bậc nhất

+ Sau khi thu gọn mà ta được: Phương trình bậc hai thì ta chuyển tất cả hạng tử qua vế trái; phân tích đa thức vế trái thành nhân tử rồi giải theo quy tắc giải phương trình tích.

Bước 4: Kết luận.

Nghiệm của phương trình là giá trị của ẩn thoả mãn ĐKXĐ của phương trình.

6. a. Phương trình ẩn x là mệnh đề có dạng $f(x) = g(x)$ (1)

Nếu hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ lần lượt có tập xác định là D_f, D_g , thì $D = D_f \cap D_g$ gọi là tập xác định của phương trình (1).

Nếu có số $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì x_0 được gọi là một nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Giải phương trình là ta tìm tất cả các nghiệm của nó.

Phương trình không có nghiệm ta nói phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Các nghiệm của phương trình (1) chính là hoành độ các giao điểm của đồ thị các hàm số $y = f(x)$ & $y = g(x)$. Phương trình (1) cũng gọi là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị các hàm số $y = f(x)$ & $y = g(x)$.

b. Điều kiện của phương trình: Là điều kiện của ẩn x để hai vế của phương trình có nghĩa.

* Chú ý:

Khi giải phương trình, việc tìm tập xác định của phương trình đôi khi còn khó hơn việc giải phương trình đó, nên khi giải ta chỉ cần ghi điều kiện của phương trình là đủ. Khi giải xong ta chỉ việc thay nghiệm vào điều kiện để loại nghiệm ngoại lai đi.

c. Phương trình chứa tham số:

Là phương trình ngoài ẩn x còn có các chữ số khác xem như là hằng số và được gọi là tham số.

Ví dụ: $x^2 + 2x - m = 0$. Với m là tham số.

d. Phương trình tương đương:

Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm (kể cả tập rỗng)

Kí hiệu: " $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$ "

Chú ý:

Khi muốn nhấn mạnh hai phương trình có cùng tập xác định D và tương đương với nhau, ta nói "Hai phương trình tương đương trong điều kiện D"

e. Phép biến đổi tương đương:

Các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình được gọi là các phép biến đổi tương đương

* Phép cộng (trừ): $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \pm h(x) = g(x) \pm h(x)$

Cộng hoặc trừ vào hai vế của phương trình với biểu thức $h(x)$ mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình thì ta được phương trình mới tương đương.

* Phép nhân (chia): $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x).h(x) = g(x).h(x)$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{với } h(x) \neq 0$$

Nhân hoặc chia vào hai vế của phương trình với biểu thức $h(x) \neq 0$ mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình thì ta được phương trình mới tương đương.

Chú ý: Phép chuyển vế: $f(x) + h(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) - h(x)$.

f. Phương trình hệ quả:

Cho hai phương trình: $f(x) = g(x)$ (1) $f_1(x) = g_1(x)$ (2)

Phương trình (2) được gọi là phương trình hệ quả của phương trình (1) nếu tập nghiệm của phương trình (2) chứa tập nghiệm của phương trình (1). Kí hiệu: $(1) \Rightarrow (2)$

* Lưu ý:

- i) Khi bình phương hai vế của phương trình thì ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.
- ii) Khi giải phương trình mà dẫn đến phương trình hệ quả thì phải thử lại nghiệm vào phương trình ban đầu để loại nghiệm ngoại lai.

7. Chứng minh đẳng thức

Bài toán: Chứng minh đẳng thức $A = B$

☞ Một số phương pháp chứng minh:

- Phương pháp 1: Dựa vào định nghĩa.

$$A = B \Leftrightarrow A - B = 0$$

- Phương pháp 2: Biến đổi trực tiếp.

$$A = A_1 = A_2 = \dots = B$$

- Phương pháp 3: Phương pháp so sánh.

$$\left. \begin{array}{l} A = A_1 = A_2 = \dots = C \\ B = B_1 = B_2 = \dots = C \end{array} \right\} \rightarrow A = B$$

- Phương pháp 4: Phương pháp tương đương.

$$A = B \Leftrightarrow A' = B' \Leftrightarrow A'' = B'' \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (*)$$

(*) đúng do đó $A = B$

- Phương pháp 5: Phương pháp sử dụng giả thiết.

- Phương pháp 6: Phương pháp quy nạp.

- Phương pháp 7: Phương pháp dùng biểu thức phụ.

D. Giải bài toán bằng cách lập phương trình.

1. Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình

Bước 1: Lập phương trình

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình

Thông qua các mối quan hệ nêu trên để biểu diễn các đại lượng chưa biết khác qua ẩn

Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

2. Lưu ý về chọn ẩn và điều kiện thích hợp của ẩn

- Thông thường thì bài toán hỏi về đại lượng gì thì chọn ẩn là đại lượng đó.
- Về điều kiện thích hợp của ẩn
 - + Nếu x biểu thị một chữ số thì $0 \leq x \leq 9$
 - + Nếu x biểu thị tuổi, sản phẩm, người thì x nguyên dương.
 - + Nếu x biểu thị vận tốc của chuyển động thì $x > 0$

Chú ý:

Khi giải bài toán bằng cách lập phương trình, ngoài ẩn đã chọn đôi khi người ta còn biểu thị những đại lượng chưa biết khác bằng chữ. Điều lý thú là các chữ đó tuy tham gia vào quá trình giải toán nhưng chúng lại không có mặt trong đáp số của bài toán.

CHƯƠNG IV : BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Định nghĩa :

Hệ thức dạng $a < b$ (hay dạng $a > b$, $a \geq b$, $a \leq b$) được gọi là bất đẳng thức.

a gọi là vế trái, b gọi là vế phải của bất đẳng thức.

2. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

a) Tính chất: Khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho

Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$

Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$

Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$

Nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$

b) Chú ý: Tính chất của thứ tự cũng chính là tính chất của bất đẳng thức.

3. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số dương

a) Tính chất

Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho

b) Tổng quát

Với ba số a , b và c mà $c > 0$, ta có:

Nếu $a < b$ thì $ac < bc$; nếu $a \leq b$ thì $ac \leq bc$;

Nếu $a > b$ thì $ac > bc$; nếu $a \geq b$ thì $ac \geq bc$.

4. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số âm.

a) Tính chất

Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho

b) Tổng quát

Với ba số a , b và c mà $c < 0$, ta có:

Nếu $a < b$ thì $ac > bc$; nếu $a \leq b$ thì $ac \geq bc$;

Nếu $a > b$ thì $ac < bc$; nếu $a \geq b$ thì $ac \leq bc$.

c. Tính chất bắc cầu của thứ tự

Với ba số a , b và c nếu có $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$

5. Bất phương trình một ẩn

Bất phương trình ẩn x là hệ thức $A(x) > B(x)$ hoặc $A(x) < B(x)$ hoặc $A(x) \geq B(x)$ hoặc $A(x) \leq B(x)$.

Trong đó: $A(x)$ gọi là vế trái; $B(x)$ gọi là vế phải.

Nghiệm của bất phương trình là giá trị của ẩn thay vào bất phương trình ta được một khẳng định đúng.

6. Tập nghiệm của bất phương trình.

Tập hợp tất cả các nghiệm của bất phương trình được gọi là tập nghiệm của bất phương trình đó.

7. Bất phương trình tương đương

Hai bất phương trình tương đương là hai bất phương trình có cùng tập nghiệm,

Kí hiệu: $\Leftrightarrow$

B. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1. Định nghĩa

Bất phương trình dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$) trong đó a và b là hai số đã cho, $a \neq 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

2. Hai quy tắc biến đổi bất phương trình

a) Quy tắc chuyển vế

Khi chuyển một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia ta đổi dấu hạng tử đó.

b) Quy tắc nhân với một số

Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải:

- Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương.
- Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

3. Áp dụng

Áp dụng hai quy tắc biến đổi trên, ta giải bất phương trình bậc nhất một ẩn như sau:

Dạng: $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b$

$\Leftrightarrow x > \frac{-b}{a}$ nếu $a > 0$ hoặc $x < \frac{-b}{a}$ nếu $a < 0$

Vậy nghiệm của bất phương trình $ax + b > 0$ là:

$S_1 = \{x/x > \frac{-b}{a}, a > 0\}$ hoặc $S_2 = \{x/x < \frac{-b}{a}, a < 0\}$

C. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Giá trị tuyệt đối

Giá trị tuyệt đối của số a , kí hiệu là $|a|$ được định nghĩa như sau:

$|a| = a$ khi $a \geq 0$

$|a| = -a$ khi $a < 0$

Chú ý :

i) $|x| \geq 0, |x| \geq x, |x| \geq -x$

ii) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \forall a > 0$

iii) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ hoặc $|x| \geq a, \forall a > 0$

iv) $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

2. Giải một số phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

a) Phương pháp chung

Bước 1: Áp dụng định nghĩa giá trị tuyệt đối để loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối

Bước 2: Giải các bất phương trình không có dấu giá trị tuyệt đối

Bước 3: Chọn nghiệm thích hợp trong từng trường hợp đang xét

Bước 4: Kết luận nghiệm

b) Các dạng thường gặp:

Dạng $|A(x)| = B(x)$

$|A(x)| = B(x)$ với $A(x) \geq 0$

hoặc $|A(x)| = -B(x)$ với $A(x) < 0$

Dạng $|A(x)| = |B(x)|$

$|A(x)| = |B(x)| = B(x)$

hoặc $|A(x)| = |B(x)| = -B(x)$

⊙ Chú ý :

Khi chuyển về hạng tử thì phải đổi dấu số hạng đó.

Khi chia cả hai vế của bất phương trình cho số âm phải đổi chiều bất phương trình

D. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. Các tính chất của bất đẳng thức

- Tính bắc cầu: $a > b ; b > c \Rightarrow a > c$

- Cộng hai vế của bất đẳng thức với cùng một số

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

- Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số:

$$a > b ; c > 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$a > b ; c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

- Cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều,

$$a > b ; c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

- Trừ từng vế của hai bất đẳng thức ngược chiều, được bất đẳng thức cùng chiều với bất đẳng thức bị trừ:

$$a > b ; c < d \Rightarrow a - c > b - d$$

- Nhân từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm

$$a > b \geq 0 ; c > d \geq 0 \Rightarrow ac > bd$$

- Nâng lên lũy thừa bậc nguyên dương hai vế của bất đẳng thức:

$$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$$

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n \text{ với } n \text{ lẻ}$$

$$|a| > |b| \Leftrightarrow a^n > b^n \text{ với } n \text{ chẵn}$$

- So sánh hai lũy thừa cùng cơ số với số mũ dương:

$$\text{Nếu } m > n > 0 \text{ thì: } a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$$

$$a = 1 \Rightarrow a^m = a^n$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$$

- Lấy nghịch đảo hai vế và đổi chiều bất đẳng thức nếu hai vế cùng dấu

$$a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

2. Các hằng bất đẳng thức:

a. Ngoài các hằng bất đẳng thức $a^2 \geq 0 ; -a^2 \leq 0$, cần nhớ các hằng bất đẳng thức liên quan đến giá trị tuyệt đối:

$$|a| \geq 0 \text{ Xảy ra đẳng thức khi } a = 0$$

$$|a| \geq a \text{ Xảy ra đẳng thức khi } a \geq 0$$

$$|a+b| \geq |a| + |b| \text{ Xảy ra đẳng thức khi } ab \geq 0$$

$$|a-b| \geq |a| - |b| \text{ Xảy ra đẳng thức khi } ab > 0 \text{ và } |a| \geq |b|$$

b. Một số hằng bất đẳng thức khác có thể sử dụng như một bổ đề để giải toán.

$$\triangleright a^2 + b^2 \geq 2ab;$$

$$\triangleright \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \text{ Hay } (a+b)^2 \geq 4ab \text{ (bất đẳng thức Cô-si);}$$

- **Bất đẳng thức Cô-si:** Cho hai số a và b không âm:

Ta có: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

- **Các hệ quả:**

$$\triangleright a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$$

$\triangleright$ Cho hai số $x > 0, y > 0$. Nếu $x + y$ không đổi thì $x.y$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$.

$\triangleright$ Cho hai số $x > 0, y > 0$. Nếu $x.y$ không đổi thì $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$.

$$\triangleright \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \text{ với } a, b > 0$$

$$\triangleright \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ với } a, b > 0$$

- **Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki:** $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

3. Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức:

• Dùng định nghĩa

Để chứng minh $A > B$, ta xét hiệu $A - B$ và chứng minh $A - B > 0$

• **Dùng phép biến đổi tương đương:** Nếu BĐT $A < B$ là hệ quả của BĐT $C < D$ và ngược lại thì ta nói hai BĐT tương đương nhau. Kí hiệu: $A < B \Leftrightarrow C < D$.

• Dùng các tính chất của bất đẳng thức

- Dùng phương pháp phản chứng
- Phương pháp chứng minh tương đương:

$$A > B \Leftrightarrow A_1 > B_1 \Leftrightarrow A_2 > B_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_n > B_n.$$

Trong đó: $A > B$ là bất cần chứng minh

$A_n > B_n$ là bất đúng đã biết.

- Dùng các bất đẳng thức đã biết: BĐT Côsi, BĐT chứa giá trị tuyệt đối...

E: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

a. Cho biểu thức $f(x, y, \dots)$

Ta nói M là GTLN của biểu thức $f(x, y, \dots)$ nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

- Với mọi $x, y, \dots$ để $f(x, y, \dots)$ xác định thì
- $$f(x, y, \dots) \leq M \quad (M \text{ là hằng số}) \quad (1)$$

- Tồn tại $x_0, y_0, \dots$ sao cho
- $$f(x_0, y_0, \dots) = M \quad (2)$$

Cho biểu thức $f(x, y, \dots)$

b. Ta nói m là GTNN của biểu thức $f(x, y, \dots)$ nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

Với mọi $x, y, \dots$ để $f(x, y, \dots)$ xác định thì $(1')$

$$f(x, y, \dots) \geq m \quad (m \text{ là hằng số})$$

- Tồn tại $x_0, y_0, \dots$ sao cho
- $$f(x_0, y_0, \dots) = m \quad (2')$$

Chú ý: Nếu chỉ có điều kiện (1) và (1') thì chưa thể nói gì về cực trị của một biểu thức

Chẳng hạn ta xét biểu thức

$$A = (x - 1)^2 + (x - 3)^2$$

Mặc dù $A \geq 0$ nhưng chưa thể kết luận GTNN của $A = 0$ vì không tồn tại giá trị nào của x để $A = 0$

c. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức chứa một biến

- Tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $P = ax^2 + bx + c$

a) Tìm GTNN của P nếu $a > 0$

b) Tìm GTLN của P nếu $a < 0$

- Đa thức bậc cao hơn hai

- Phân thức có tử là hằng số mẫu là tam thức bậc hai

- Phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức

d. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức có quan hệ ràng buộc giữa các biến

F. Phương pháp diện tích trong chứng minh hình học

A. Mục tiêu

- Sử dụng các công thức tính diện tích để thiết lập quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng để chứng minh hình học
- Có kỹ năng sử dụng các công thức tính diện tích để chứng minh hình học

B. Sử dụng các công thức tính diện tích để chứng minh hình học.

G. Một số bất đẳng thức nâng cao để chứng minh

1. Bất đẳng thức Cauchy:

Cho hai số không âm $a; b$ ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Tổng quát :

- **Bất đẳng thức Cossi:**

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (\text{với } a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \geq 0)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

2. Bất đẳng thức BunhiaCôpxki:

Cho bốn số thực a, b, x, y ta có : $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$

Tổng quát :

Cho hai bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta có :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước rằng nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng

3. Bất đẳng thức cơ bản:

a) Cho hai số dương x, y ta luôn có: $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

b) Với mọi số thực x, y ta luôn có: $x^2 + y^2 \geq 2xy$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

4. Bất đẳng thức JENSEN :

1) Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a; b)$ (f là hàm lồi) thì

Với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ta có:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \quad (n \geq 2)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

2) Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a; b)$ (f là hàm lõm) thì

Với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ta có:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \quad (n \geq 2)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

5. Để chứng minh đẳng thức lượng giác $A < B$ ($>, \leq, \geq$) ta có thể thực hiện theo một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh đến đến một bất đẳng thức hiển nhiên đúng

Phương pháp 2: Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản đã biết (Cô si, BCS,...) để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh

*** Các chú ý khi giải bất phương trình:**

i) Khi biến đổi hai vế của bất phương trình thì có thể làm thay đổi điều kiện của bất phương trình. Vì vậy, để tìm nghiệm của bất phương trình ta phải tìm các giá trị

của x thoả mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.

VD: Giải bpt: $\frac{5x+2\sqrt{3-x}}{4}-1 > \frac{x}{4}-\frac{4-3\sqrt{3-x}}{6}$.

ii) Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình với biểu thức $f(x)$ ta cần lưu ý về dấu của $f(x)$. Nếu $f(x)$ nhận cả giá trị dương lẫn âm thì ta phải lần lượt xét cả hai trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến một hệ bất phương trình.

iii) Khi giải bất phương trình có ẩn ở mẫu ta quy đồng mẫu nhưng không được bỏ mẫu và phải xét dấu biểu thức để tìm tập nghiệm

VD: Giải bpt: $\frac{1}{x-1} \geq 1$

iv) Khi giải bất phương trình $P(x) < Q(x)$ mà phải bình phương hai vế thì phải xét hai trường hợp:

TH1: $P(x)$ và $Q(x)$ đều không âm thì ta bình phương hai vế của bất phương trình.

TH2: $P(x)$ và $Q(x)$ đều âm thì ta viết $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow -Q(x) < -P(x)$ rồi bình phương hai vế của bất phương trình mới.

VD: Giải bpt: $\sqrt{x^2+\frac{17}{4}} > x+\frac{1}{2}$

B. HÌNH HỌC 8

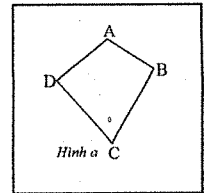
CHƯƠNG I : TỨ GIÁC

1. Định nghĩa tứ giác , tứ giác lồi , tổng các góc của tứ giác

a. Định nghĩa: Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, trong đó bất kì đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

b. Tứ giác lồi:

Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác (hình a).



c. Tổng các góc của một tứ giác:

Tổng các góc của một tứ giác bằng 360^0

2 : Hình thang :

a. Định nghĩa:

Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

Hai cạnh song song gọi là hai đáy.

Hai cạnh còn lại gọi là hai cạnh bên.

b. Nhận xét:

- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.

- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

3. Hình thang vuông:

a) Định nghĩa: Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.

b) Dấu hiệu nhận biết: Hình thang có một góc vuông là hình thang vuông.

4: Hình thang cân :

a. Định nghĩa

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

ABCD là hình thang cân (đáy AB; CD) , $AB \parallel CD$ và $\widehat{C} = \widehat{D}$

b. Tính chất:

Định lí 1: Trong một hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau, ABCD là hình thang cân (đáy AB, CD) $\Rightarrow AD = BC$

Định lí 2: Trong một hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau, ABCD là hình thang cân (đáy AB, CD) $\Rightarrow AC = BD$

Định lí 3: Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân. Hình thang ABCD (đáy AB, CD) có $AC = BD \Rightarrow ABCD$ là hình thang cân.

c. Dấu hiệu nhận biết hình thang cân:

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.

- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

5. Đường trung bình của tam giác:

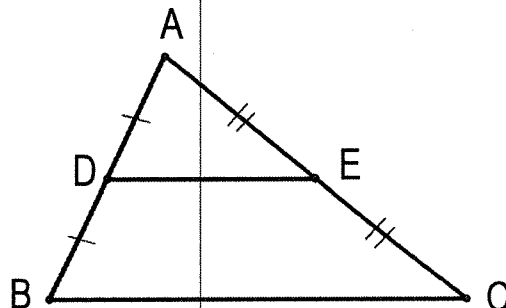
Định nghĩa: Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

Định lí 1: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba,

Định lí 2: Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

$$\triangle ABC, AD = DB, AE = EC$$

$$\Rightarrow DE // BC, DE = \frac{1}{2} BC$$



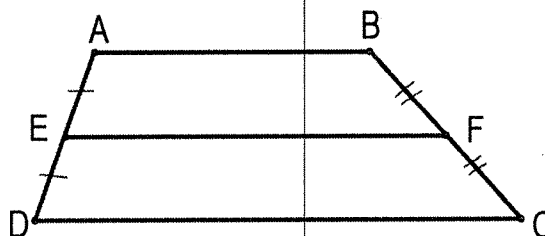
6. Đường trung bình của hình thang:

Định nghĩa: Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

Định lí 1: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.

Định lí 2: Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

$$EF // AB, EF // CD, EF = \frac{AB + CD}{2}$$



7. a. Bài toán dựng hình:

Ta đã biết vẽ hình bằng nhiều dụng cụ: thước, compa, êke.... Ta xét các bài toán vẽ hình mà chỉ sử dụng hai dụng cụ là thước và compa, chúng được gọi là các bài toán dựng hình.

Với thước, ta có thể:

- Vẽ được một đường thẳng khi biết hai điểm của nó.
- Vẽ được một đoạn thẳng khi biết hai đầu mút của nó.
- Vẽ được một tia khi biết gốc và một điểm của tia.

Với compa, ta có thể vẽ được một đường tròn khi biết tâm và bán kính của nó.

b. Bài toán dựng hình đã biết:

Chúng ta đã biết cách giải các bài toán dựng hình sau:

- Dựng một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng cho trước.
- Dựng một góc bằng một góc cho trước.
- Dựng đường trung trực của một đoạn thẳng cho trước, dựng trung điểm của đoạn thẳng cho trước.
- Dựng tia phân giác của một góc cho trước.
- Qua một điểm cho trước, dựng đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.
- Các dạng dựng tam giác (biết ba cạnh, biết hai cạnh và góc xen giữa, một cạnh và hai góc kề).

c. Dựng hình thang:

Ta hãy nhớ kết quả;

- Muốn dựng hình thang, cần biết bốn yếu tố, trong đó số yếu tố về góc không quá 2.
- Muốn dựng hình thang cân, cần biết ba yếu tố, trong đó số yếu tố về góc không quá 1.

8. Định nghĩa hai điểm, hình đối xứng qua một đường thẳng .

a. Hai điểm đối xứng qua một đường thẳng

Định nghĩa: Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Qui ước: Nếu điểm B nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với B qua đường thẳng d cũng là điểm B .

b. Hai hình đối xứng qua một đường thẳng

Định nghĩa: Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại.

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hai hình đó.

c. Hình có trục đối xứng

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua đường thẳng d cũng thuộc hình H .

Ta nói rằng hình H có trục đối xứng.

Định lí: - Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang đó.

9 : Hình bình hành

a. Định nghĩa:

Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

$ABCD$ là hình bình hành $AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$.

Nhận xét: Hình bình hành là một hình thang có hai cạnh bên song song.

b. Tính chất:

Định lý: Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

c. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường là hình bình hành

10. Hai điểm đối xứng qua một điểm:

a. Định nghĩa: Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Hai điểm A và A' gọi là hai điểm đối xứng với nhau qua điểm O .

b. Hai hình đối xứng qua một điểm:

Định nghĩa: Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua điểm O và ngược lại.

Điểm O gọi là tâm đối xứng của hai hình đó.

c. Hình có tâm đối xứng:

Định nghĩa: Điểm O gọi là tâm đối xứng qua hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua điểm O cũng thuộc hình H .

Định lý: Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.

11. Hình chữ nhật

a. Định nghĩa: Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

Hình chữ nhật cũng là một hình bình hành.

$ABCD$ là hình chữ nhật $\square ABCD$ là tứ giác có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$.

Nhận xét: Hình chữ nhật cũng là một hình bình hành cũng là một hình thang cân.

b. Tính chất:

- Hình chữ nhật là có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân.

➤ Định lí:

Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

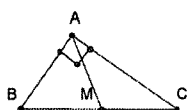
c. Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

❖ Áp dụng vào tam giác:

- Trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền. một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.
- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

Ta có : $\triangle ABC$ vuông tại A có AM là trung tuyến



$$AM = MB = MC$$

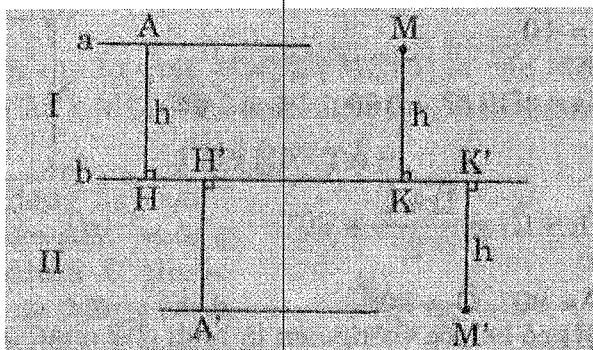
12 . Định nghĩa khoảng cách giữa hai đường thẳng song song – tính chất những điểm cách đều một đường thẳng cho trước , tính chất những đường thẳng song song cách đều

a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Định nghĩa: Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia. h là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a và b.

b. Tính chất của các điểm cách đều một đoạn thẳng cho trước.

Tính chất: Các điểm cách đường thẳng b một khoảng bằng h nằm trên hai đường thẳng song song với b và cách b một khoảng bằng h.



c. Đường thẳng song song cách đều

Định lí:

- Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.

- Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

13. Hình thoi :

a. Định nghĩa: Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Hình thoi cũng là một hình bình hành.

ABCD là hình thoi $\square$ ABCD là tứ giác có $AB = BC = CD = DA$.

b. Tính chất:

Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.

Định lí: Trong hình thoi:

- Hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Hai đường chéo là các đường phân giác các góc của hình thoi.

c. Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

14 : Hình vuông

a. Định nghĩa: Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

Suy ra:

- Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau.
- Hình vuông là hình thoi có bốn góc vuông.
- Hình vuông vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi.

b. Tính chất:

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

c. Dấu hiệu nhận biết:

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông

CHƯƠNG II

ĐA GIÁC - DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

A. Đa giác

1. Khái niệm đa giác

Định nghĩa: Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

2. Đa giác đều

Định nghĩa: Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

3. Tổng số đo các góc của đa giác n cạnh: $(n-2).180^\circ$

- Số đo một góc của đa giác đều n cạnh: $\frac{(n-2).180^\circ}{n}$

4. Số đường chéo của đa giác n cạnh: $\frac{n(n-3)}{2}$

B. Diện tích đa giác

1. Khái niệm diện tích đa giác

Số đo của một phần mặt phẳng giới hạn bởi một đa giác được gọi là diện tích đa giác đó.

Mỗi đa giác có một diện tích xác định. Diện tích đa giác là một số dương.

Diện tích đa giác có các tính chất sau:

- Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
- Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.

2. Công thức tính diện tích hình chữ nhật

Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó:

$$S = a.b$$

(S là diện tích, a là chiều dài, b là chiều rộng của hình chữ nhật)

Chu vi hình chữ nhật: $P = (a+b).2 = (\text{dài} + \text{rộng}) \times 2$

3. Công thức tính diện tích hình vuông, hình tam giác vuông.

Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó:

$$S = a^2$$

Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích của cạnh góc vuông

$$S = \frac{1}{2} a^2$$

Chu vi hình vuông: $P = a.4 = (\text{cạnh} \times 4)$

Đường chéo hình vuông bằng $a\sqrt{2}$

4. Diện tích tam giác

❖ Tam giác thường

Diện tích tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó.

$$S = \frac{1}{2} a.h = (\text{đáy} \times \text{chiều cao})/2$$

Chu vi tam giác là tổng của ba cạnh tam giác.

$$P = a + b + c$$

Trong đó a, b, c là các cạnh tam giác.

+ **Một số công thức tính diện tích tam giác thường:**

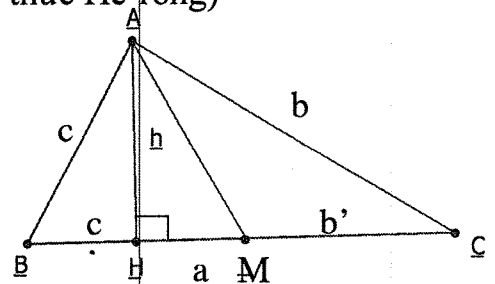
a) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ Với $p = \frac{a+b+c}{2}$ (Công thức Hê-rông)

b) $S = pr$ (r: bk đ.tròn nội tiếp tam giác)

c) diện tích của tam giác:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

$$\bullet S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c$$



❖ **Tam giác đều cạnh a:** a) Đường cao: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; b) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

c) Chu vi tam giác đều : $p = a.3$ (cạnh x 3)

d) Đường cao cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực

❖ Tam giác vuông:

a) $S = \frac{1}{2} ab$ (a, b là 2 cạnh góc vuông)

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của **cạnh huyền**

❖ Tam giác vuông cân (nửa hình vuông):

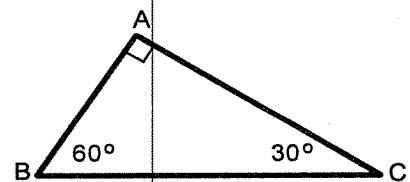
a) $S = \frac{1}{2} a^2$ (2 cạnh góc vuông bằng nhau)

b) Cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$

❖ Nửa tam giác đều:

a) Là tam giác vuông có một góc bằng 30° hoặc 60°

b) $BC = 2AB$ c) $AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ d) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$



❖ Tam giác cân:

a) $S = \frac{1}{2} ah$ (h: đường cao; a: cạnh đáy)

b) Đường cao hạ từ đỉnh cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực

5. Công thức tính diện tích hình thang

Diện tích hình thang bằng một nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao.

$$S = \frac{1}{2} (a+b) \cdot h \quad (h: \text{đường cao; } a, b: \text{hai cạnh đáy})$$

Chu vi hình thang: Tổng hai cạnh đáy cộng với hai cạnh bên

6. Công thức tính diện tích hình bình hành

Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó.

$$S = ah \quad (h: \text{đường cao; } a: \text{cạnh đáy})$$

7. Công thức tính diện tích hình thoi:

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \quad (d_1, d_2 \text{ là 2 đường chéo})$$

8. Công thức tính diện tích đường tròn:

$$a) C = 2\pi R \quad (R: \text{bán kính đường tròn})$$

$$b) S = \pi R^2 \quad (R: \text{bán kính đường tròn})$$

9. Phương pháp tính diện tích đa giác :

Việc tính diện tích đa giác của một đa giác bất kì thường được quy về việc tính diện tích các tam giác. Ta có thể chia đa giác thành các tam giác hoặc tạo ra một tam giác nào đó chứa đa giác

Trong một số trường hợp, để việc tính toán thuận lợi ta có thể chia đa giác thành nhiều tam giác vuông và hình thang vuông.

CHƯƠNG III

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. Tỷ số của hai đoạn thẳng.

a) Định nghĩa:

- Tỷ số của hai đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

- Tỷ số của hai đoạn thẳng AB và CD được kí hiệu là $\frac{AB}{CD}$

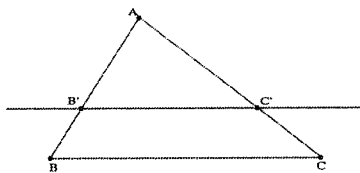
b) Chú ý: Tỷ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào các chọn đơn vị đo.

2. Đoạn thẳng tỉ lệ

Định nghĩa: Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu có tỉ lệ thức:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ hay } \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

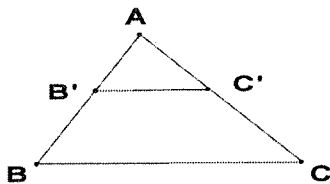
3. Định lý Talet trong tam giác: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh ấy những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



GT	$\triangle ABC, B'C' \parallel BC$ $B' \in AB$
KL	$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}; \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC}$

4. Định lý đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh một tam giác và định ra trên hai cạnh ấy những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.



$$\text{KL} \quad \left| \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \right.$$

GT	$\triangle ABC; B' \in AB; C' \in AC$ $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$
KL	$B'C' \parallel BC$

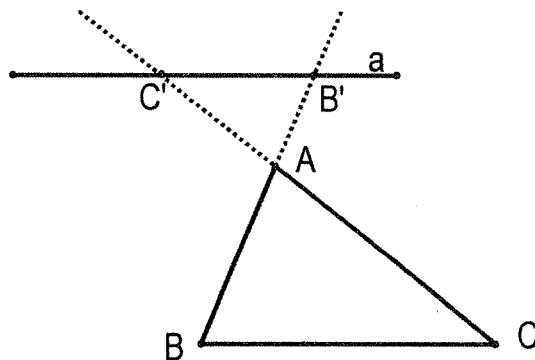
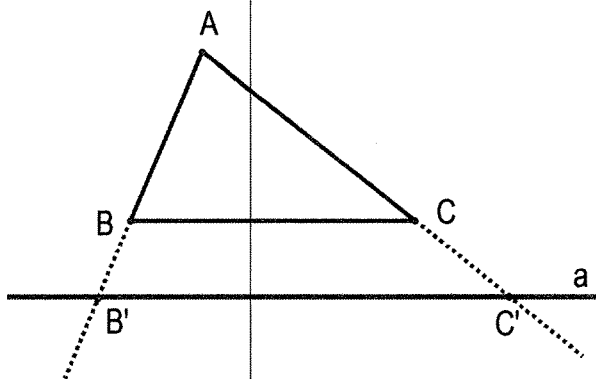
5. Hệ quả của định lý Talet

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh còn lại của một của một tam giác và song song với các cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh còn lại của tam giác đã cho.

$$\text{GT} \quad \left| \begin{array}{l} \triangle ABC : B'C' \parallel BC; \\ (B' \in AB ; C' \in AC) \end{array} \right.$$

chú ý: Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần còn lại kéo dài của hai cạnh còn lại.

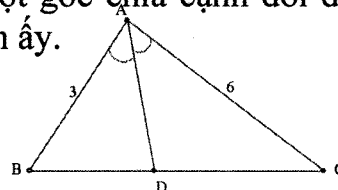
$$(B'C' // BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC})$$



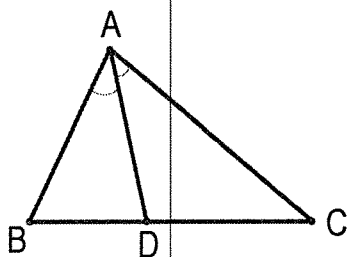
5. Tính chất đường phân giác trong tam giác :

- Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề của hai đoạn ấy.

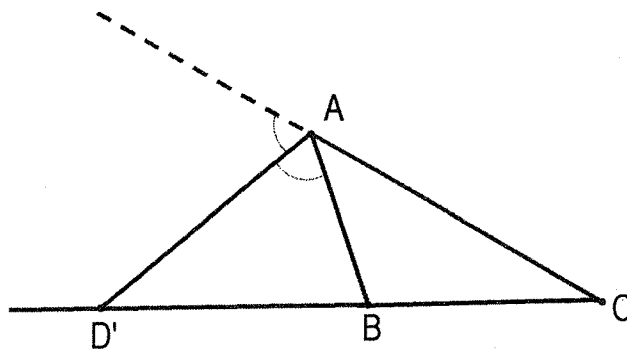
GT	$\triangle ABC, AD$ là phân giác của $\widehat{BAC}$
KL	$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$



- **Tính chất đường phân giác của tam giác:** Đường phân giác trong (hoặc ngoài) của một tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề của hai đoạn đó



$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$



$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$

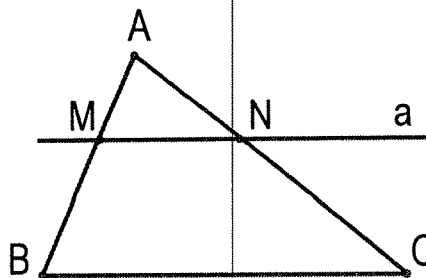
6. Định nghĩa hai tam giác đồng dạng : Hai tam giác đồng dạng là hai tam giác có các góc tương ứng bằng nhau và các cạnh tương ứng tỉ lệ

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k (\text{tỉ số đồng dạng}) \end{cases}$$

7. Định lí về hai tam giác đồng dạng: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho

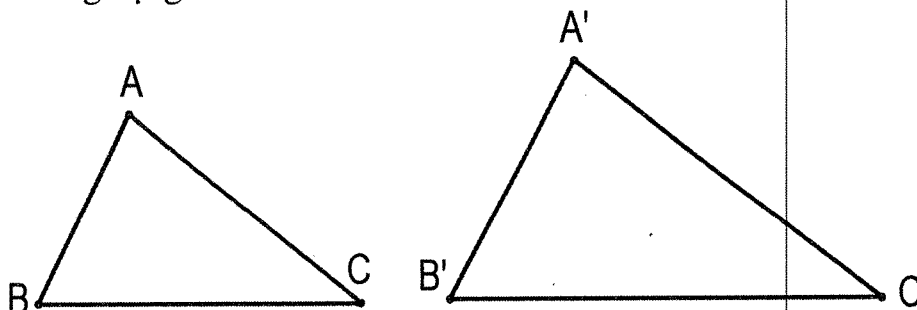
$$MN // BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

*) Lưu ý: Định lí cũng đúng đối với trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại



8. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác

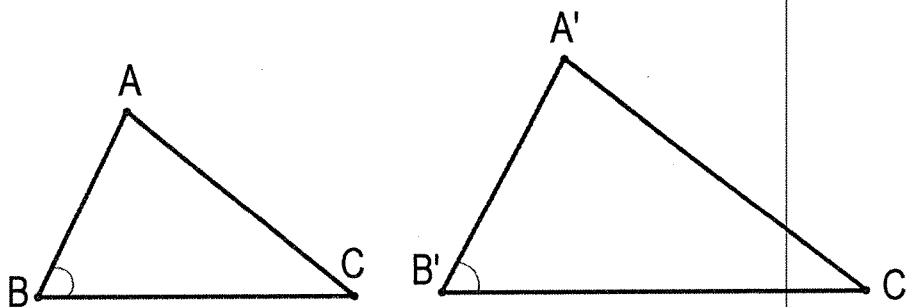
*) **Trường hợp 1:** Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.



Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' (c.c.c)$$

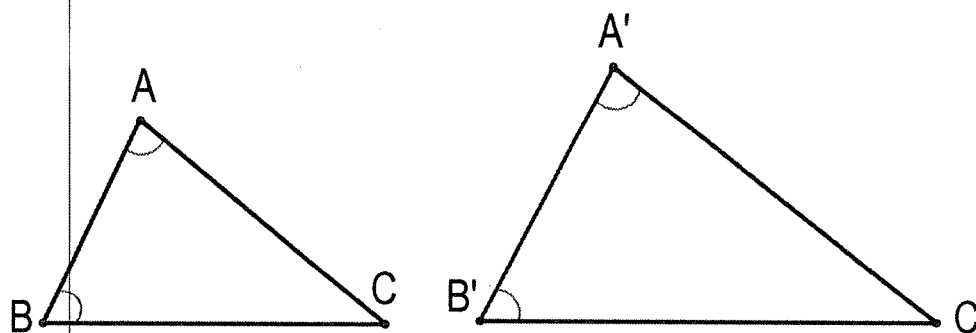
*) **Trường hợp 2:** Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đồng dạng



Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' (c.g.c)$$

*) **Trường hợp 3:** Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đồng dạng;

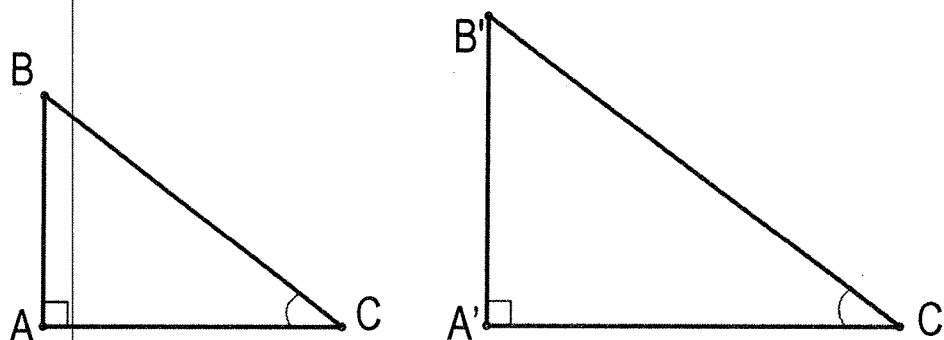


Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ (g.g)}$$

10. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông

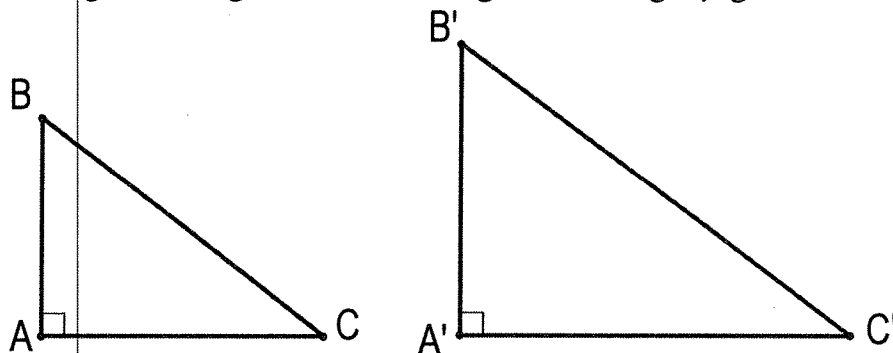
***) Trường hợp 1:** Nếu hai tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau thì chúng đồng dạng;



Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

***) Trường hợp 2:** Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng;



Hai tam giác vuông ABC và $A'B'C'$ có:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

***) Trường hợp 3:** Nếu cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Hai tam giác vuông ABC và $A'B'C'$ có:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

15. Tỉ số hai đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

- Tỷ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỷ số đồng dạng

- Tỷ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỷ số đồng dạng

- Cụ thể : $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỷ số k

$$\Rightarrow \frac{A'H'}{AH} = k \text{ và } \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$$

11. Học sinh cần nắm vững các bài toán dựng hình cơ bản (dùng thước và compa)

a) Dựng một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng cho trước;

b) Dựng một góc bằng một góc cho trước;

c) Dựng đường trung trực của một đoạn thẳng cho trước, dựng trung điểm của một đoạn thẳng cho trước;

d) Dựng tia phân giác của một góc cho trước;

e) Qua một điểm cho trước, dựng đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước;

f) Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước;

g) Dựng tam giác biết ba cạnh, hoặc biết hai cạnh kề và góc xen giữa, hoặc biết một cạnh và hai góc kề.

CHƯƠNG IV

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG . HÌNH CHÓP ĐỀU

1. Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình không gian có 6 mặt đều là những hình chữ nhật

Hình hộp chữ nhật có 6 mặt, 8 đỉnh, 12 cạnh

Hai mặt đối diện nhau được xem là hai mặt đáy của hình hộp chữ nhật, các mặt còn lại gọi là mặt bên

2. Hình lập phương

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt đều là hình vuông

3. Mặt phẳng và đường thẳng

a) Mặt phẳng: Mặt gương phẳng, mặt bảng.. là hình ảnh của mặt phẳng. Mặt phẳng rộng vô tận.

b) Đường thẳng thuộc mặt phẳng

Tính chất: Đường thẳng a đi qua điểm A và B của mặt phẳng (P) thì mọi điểm của đường thẳng a đều thuộc mặt phẳng (P) .

Kí hiệu $a \in (P)$

4. Hai đường thẳng song song trong không gian

+ Trong không gian, hai đường thẳng a và b gọi là song song với nhau nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.

+ Với hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian chúng có thể: cắt nhau; song song; chéo nhau (không cùng nằm trong một mặt phẳng nào)

+ Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

5. Đường thẳng song song với mặt phẳng. Hai mặt phẳng song song

a) Đường thẳng song song với mặt phẳng

Khi đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ mà d song song với đường thẳng của mặt phẳng này thì ta nói đường thẳng d song song với mặt phẳng $(ABCD)$, kí hiệu $d // mp (ABCD)$

b) Hai mặt phẳng song song

+ Nếu mặt phẳng $(ABCD)$ chứa hai đường thẳng a và b cắt nhau mà song song với hai đường thẳng a' và b' chứa trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ thì ta nói hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song nhau

Kí hiệu $mp (ABCD) // mp ((A'B'C'D'))$

Chú ý:

Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì chúng không có điểm chung

Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có chung một đường thẳng đi qua điểm chung đó. Ta nói hai mặt phẳng này cắt nhau.

6. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Hai mặt phẳng vuông góc

a) Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng tại điểm A thì nó vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng đi qua A.

b) Hai mặt phẳng vuông góc

Khi một trong hai mặt phẳng (ABCD) và (A'B'C'D') chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại thì người ta nói hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Kí hiệu : $mp(ABCD) \perp mp(A'B'C'D')$

7. Thể tích hình hộp chữ nhật : có a, b, c là ba kích thước của hình hộp

$$V = a.b.c$$

Thể tích hình lập phương cạnh a là

$$V = a^3$$

Hình vẽ bên gọi là lăng trụ đứng. trong hình này

+ A, B, C, D, A₁, B₁, C₁, D₁ là các đỉnh

ABB₁A₁, BCC₁B₁.. là những hình chữ nhật, gọi là các mặt bên

+ AA₁ ; BB₁ ; CC₁ ; DD₁ song song với nhau và bằng nhau, chúng được gọi là các cạnh bên

+ Hai mặt ABCD và A₁B₁C₁D₁ là hai đáy. Hình lăng trụ trên có hai đáy là tứ giác nên gọi là lăng trụ tứ giác, kí hiệu : ABCD.A₁B₁C₁D₁

Chú ý :

Hình hộp chữ nhật, hình lập phương cũng là hình lăng trụ đứng.

Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.

8. Diện tích xung quanh

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích các mặt bên hoặc bằng chu vi đáy nhân với chiều cao. $S_{xq} = 2p.h$

p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao

9. Diện tích toàn phần

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ bằng tổng các diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

Thể tích hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao

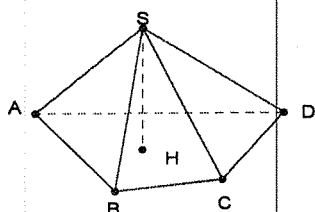
$$V = S \cdot h$$

S: diện tích đáy . h: chiều cao

10. Hình chóp

- Hình chóp có mặt đáy là một đa giác và các mặt bên là những tam giác có chung một đỉnh. Đỉnh này gọi là đỉnh của hình chóp
- Đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy gọi là đường cao của hình chóp.
- Hình chóp có đáy là tam giác gọi là hình chóp tam giác
- Hình chóp có đáy là tứ giác gọi là hình chóp tứ giác.

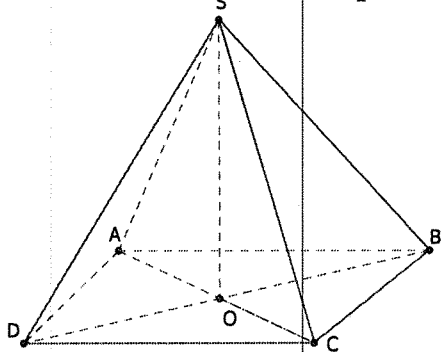
➤ **Định nghĩa** Cho đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó . Hình gồm n tam giác và đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là hình chóp S. $A_1A_2 \dots A_n$.



- Tứ diện là hình chóp tam giác .
- Tứ diện đều là hình chóp tam giác có tất cả các cạnh bằng nhau

Hình chóp tứ giác S.ABCD .

➤ **Hình chóp đều :**

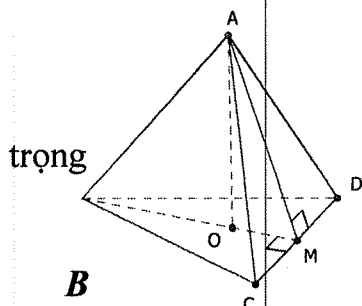


- Hình chóp đều là hình chóp có mặt đáy là một đa giác đều, có mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.

Trên hình chóp đều S.ABCD:

- Chân đường cao O là tâm của đường tròn đi qua các đỉnh của mặt đáy
- Đường cao vẽ từ đỉnh S của mỗi mặt bên của hình chóp đều được gọi là trung đoạn của hình chóp đó

➤ **Hình tứ diện đều:**



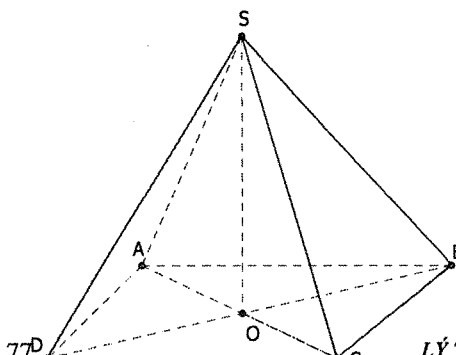
- + Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau
- + Tất cả các cạnh đều bằng nhau

- + Có 4 mặt là các tam giác đều bằng nhau
- + Chân đường cao trùng với **tâm** của đáy (O là

tâm của tam giác đáy và $AO \perp (BCD)$

➤ **Khối chóp tứ giác đều**

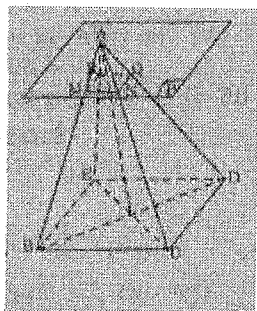
- + Tất cả các cạnh bên bằng nhau
- + Đa giác đáy là hình vuông tâm O



$$+ SO \perp (ABCD)$$

➤ Hình chóp cắt đều

Cắt hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy. Phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy của hình chóp là một hình chóp cắt đều



Nhận xét: Mỗi mặt bên của hình chóp cắt đều là một hình thang cân.

Công thức tính diện tích xung quanh:

Diện tích xung quanh của hình chóp cắt đều bằng tích của nửa chu vi đáy với trung đoạn.

$$S_{xq} = pd$$

p: nửa chu vi đáy

d: trung đoạn của hình chóp cắt đều

Công thức tính thể tích :

Thể tích của hình chóp cắt đều bằng một phần ba diện tích mặt đáy nhân với chiều cao

$$V = \frac{1}{3} S.h$$

S: diện tích đáy . h: chiều cao

LỚP 9
A. ĐẠI SỐ
CHƯƠNG I: CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA

1. Định nghĩa:

Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

- Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: Số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

- Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$.

* Chú ý. Với $a \geq 0$, ta có:

- Nếu $x = \sqrt{a}$ thì $x \geq 0$ và $x^2 = a$;

- Nếu $x \geq 0$ và $x^2 = a$ thì $x = \sqrt{a}$.

Ta viết : $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow x \geq 0$ và $x^2 = a$

2. So sánh các căn bậc hai số học

Ta đã biết: Với hai số a và b không âm, nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ta có thể chứng minh được: Với hai số a và b không âm, nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì $a < b$.

Như vậy ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ : Với hai số a và b không âm, ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

3. Điều kiện có nghĩa của một số biểu thức:

➤ $A(x)$ là đa thức $\Rightarrow A(x)$ luôn có nghĩa

➤ $\frac{A(x)}{B(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B(x) \neq 0$

➤ $\sqrt{A(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A(x) \geq 0$

➤ $\frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B(x) > 0$

➤ $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$

➤ $\frac{m}{\sqrt{A^2}}$ xác định $\Leftrightarrow A \neq 0$

➤ $\frac{m}{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \neq 0$

➤ $\sqrt{A.B}$ xác định $A.B \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A \leq 0 \\ B \leq 0 \end{cases} \quad (ta \text{ có thể lập bảng xét dấu})$

$$\triangleright \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ xác định } \frac{A}{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases} \quad \text{(ta có thể lập bảng xét dấu)}$$

4. Hằng đẳng thức căn bậc hai

$$\diamond \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Nếu } A \text{ không âm thì: } \sqrt{A^2} = A = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = (\sqrt{A})^2$$

$$\diamond \text{ Với } A \geq 0; B \geq 0 \text{ thì: } \sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$$

Tổng quát:

$$\sqrt{A_1 A_2 \dots A_n} = \sqrt{A_1} \cdot \sqrt{A_2} \dots \sqrt{A_n} \text{ với } A_i \geq 0 (1 \leq i \leq n)$$

$$\diamond \text{ với } A \geq 0, B \geq 0 \text{ thì: } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

Lưu ý. Nếu không có điều kiện A và B không âm thì không thể viết đẳng thức trên. Chẳng hạn $\sqrt{(-9) \cdot (-4)}$ được xác định nhưng đẳng thức $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4}$ không xác định.

♦ Đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai:

Với hai biểu thức A, B mà $B \geq 0$. Ta có: $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$

- Nếu $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A \sqrt{B}$;
- Nếu $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A \sqrt{B}$.

♦ Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai:

$$A \sqrt{B} = \sqrt{A^2 B} \quad (\text{với } A \geq 0)$$

$$A \sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B} \quad (\text{với } A < 0)$$

♦ Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn bậc hai:

Ta nhân mẫu số với thừa số phụ thích hợp để mẫu số là một bình phương:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{B^2}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{|B|} \quad (\text{với } B \neq 0, A \cdot B \geq 0)$$

♦ Trục căn thức ở mẫu số:

DẠNG 1: Mẫu là biểu thức dạng tích các căn thức và các số, ta nhân tử và mẫu với căn thức.

$$\frac{A}{a \sqrt{B}} = \frac{A \cdot \sqrt{B}}{a \cdot (\sqrt{B})^2} = \frac{A \cdot \sqrt{B}}{a \cdot B}$$

DẠNG 2: Mẫu là biểu thức dạng tổng có căn thức, ta nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu.

$\triangleright A - B$ và $A + B$ là hai biểu thức liên hợp với nhau.

$$\triangleright (A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

$$\triangleright \frac{m}{A + \sqrt{B}} = \frac{m \cdot (A - \sqrt{B})}{(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B})} = \frac{m \cdot (A - \sqrt{B})}{A^2 - B}$$

$$\triangleright \frac{m}{A-\sqrt{B}} = \frac{m.(A+\sqrt{B})}{(A-\sqrt{B})(A+\sqrt{B})} = \frac{m.(A+\sqrt{B})}{A^2-B}$$

$$\triangleright \frac{m}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{m.(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})} = \frac{m.(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}$$

$$\triangleright \frac{m}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{m.(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})} = \frac{m.(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}$$

$$\triangleright \sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = \sqrt{m \pm 2\sqrt{m.n} + n} = \sqrt{(\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2} = |\sqrt{m} \pm \sqrt{n}|$$

$$\text{với } \begin{cases} m+n=A \\ m.n=B \end{cases} \quad (m,n > 0)$$

5. Phương trình chứa căn thức bậc hai:

1) $\sqrt{A^2} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \Leftrightarrow A = 0$	3) $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
2) $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \text{ (hoặc } A \geq 0) \\ A = B \end{cases}$	4) $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ và } B = 0$

6. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Khi thực hiện rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai, ta phải vận dụng mọi quy tắc và mọi tính chất của các phép tính trên các số thực nói chung và trên các căn thức nói riêng như:

- Phép nhân, phép chia các căn bậc hai;
- Phép khai phương một tích, một thương;
- Phép đưa thừa số vào trong, ra ngoài dấu căn;
- Phép khử mẫu của biểu thức dưới căn;
- Phép trục căn thức ở mẫu.
- Quy đồng mẫu thức (nếu có)
- Thực hiện các phép tính: lũy thừa, khai căn, nhân chia....
- Cộng trừ các số hạng đồng dạng.

Nói riêng, khi làm tính cộng hoặc trừ trên các căn thức, ta thường dùng các phép đưa thừa số vào trong hoặc ra ngoài dấu căn để được những căn thức có cùng biểu thức dưới dấu căn rồi áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và phép trừ.

7: Bài toán tính toán

Bài toán 1: Tính giá trị của biểu thức A.

☛ Tính A mà không có điều kiện kèm theo đồng nghĩa với bài toán *Rút gọn biểu thức A*

Bài toán 2: Tính giá trị của biểu thức A(x) biết x = a

☛ Cách giải:

- Rút gọn biểu thức A(x).
- Thay x = a vào biểu thức rút gọn.

8. Giới thiệu bảng:

Bảng căn bậc hai được chia thành các hàng và các cột.

Ta quy ước gọi tên của các hàng (cột) theo số được ghi ở cột đầu tiên (hàng đầu tiên) của mỗi trang.

Căn bậc hai của các số được viết bởi không quá ba chữ số từ 1,00 đến 99,9 được ghi sẵn trong bảng ở các cột 0 đến cột 9.

Tiếp đó là chín cột hiệu chỉnh để hiệu chỉnh chữ số cuối của căn bậc hai của các số được viết bởi bốn chữ số từ 1,000 đến 99,99.

- Cách dùng bảng Bảng tính sẵn căn bậc hai của tác giả V.M.Bra-đi-xơ chỉ cho phép ta tìm trực tiếp căn bậc hai của số lớn hơn 1 và nhỏ hơn 100.

Tuy nhiên, dựa vào tính chất của căn bậc hai, ta vẫn dùng bảng này để tìm được căn bậc hai của số không âm lớn hơn 100 hoặc nhỏ hơn 1.

Chú ý: Khi tìm căn bậc hai của số không âm lớn hơn 100 hoặc nhỏ hơn 1, ta dùng hướng dẫn của bảng: "Khi dời dấu phẩy trong số N đi 2, 4, 6,... chữ số thì phải dời dấu phẩy theo cùng chiều trong đó $\sqrt{N}$ đi 1, 2, 3,... chữ số".

BẢNG CĂN BẬC 2 CỦA CÁC SỐ 1-100						
Số	Bình Phương	Căn bậc 2		Số	Bình Phương	Căn bậc 2
1	1	1		51	2,601	7.141
2	4	1.414		52	2,704	7.211
3	9	1.732		53	2,809	7.28
4	16	2		54	2,916	7.348
5	25	2.236		55	3,025	7.416
6	36	2.449		56	3,136	7.483
7	49	2.646		57	3,249	7.55
8	64	2.828		58	3,364	7.616
9	81	3		59	3,481	7.681
10	100	3.162		60	3,600	7.746
11	121	3.317		61	3,721	7.81
12	144	3.464		62	3,844	7.874
13	169	3.606		63	3,969	7.937
14	196	3.742		64	4,096	8
15	225	3.873		65	4,225	8.062
16	256	4		66	4,356	8.124
17	289	4.123		67	4,489	8.185
18	324	4.243		68	4,624	8.246
19	361	4.359		69	4,761	8.307
20	400	4.472		70	4,900	8.367
21	441	4.583		71	5,041	8.426
22	484	4.69		72	5,184	8.485
23	529	4.796		73	5,329	8.544
24	576	4.899		74	5,476	8.602
25	625	5		75	5,625	8.66
26	676	5.099		76	5,776	8.718
27	729	5.196		77	5,929	8.775

28	784		5.292		78	6,084	8.832
29	841		5.385		79	6,241	8.888
30	900		5.477		80	6,400	8.944
31	961		5.568		81	6,561	9
32	1,024		5.657		82	6,724	9.055
33	1,089		5.745		83	6,889	9.11
34	1,156		5.831		84	7,056	9.165
35	1,225		5.916		85	7,225	9.22
36	1,296		6		86	7,396	9.274
37	1,369		6.083		87	7,569	9.327
38	1,444		6.164		88	7,744	9.381
39	1,521		6.245		89	7,921	9.434
40	1,600		6.325		90	8,100	9.487
41	1,681		6.403		91	8,281	9.539
42	1,764		6.481		92	8,464	9.592
43	1,849		6.557		93	8,649	9.644
44	1,936		6.633		94	8,836	9.695
45	2,025		6.708		95	9,025	9.747
46	2,116		6.782		96	9,216	9.798
47	2,209		6.856		97	9,409	9.849
48	2,304		6.928		98	9,604	9.899
49	2,401		7		99	9,801	9.95
50	2,500		7.071		100	10,000	10

9. Căn bậc ba

a. Định nghĩa:

- Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.
- Căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.

Như vậy $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

Mọi số thực đều có căn thức bậc ba.

b. Các tính chất: a) $a < b \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

b) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$;

c) Với $b \neq 0$, ta có $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^3}}$

c. Từ các tính chất trên, ta cũng có các quy tắc đưa thừa số vào trong, ra ngoài dấu căn bậc ba, quy tắc khử mẫu của biểu thức lấy căn bậc ba và quy tắc trục căn bậc ba ở mẫu:

➤ $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}$;

➤ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$;

➤ Áp dụng hằng đẳng thức $(A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2) = A^3 \pm B^3$,

CHƯƠNG II

HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. HÀM SỐ

1. Định nghĩa hàm số:

- Nếu đại lượng y phụ thuộc vào một đại lượng thay đổi sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x được gọi là biến số.
 - Hàm số thường được kí hiệu bởi những chữ $f, g, h, \dots$ chẳng hạn khi y là một hàm số của biến số x , ta viết $y = f(x)$ hoặc $y = g(x), \dots$
 - $f(a)$ là giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại $x = a$
- Khi hàm số y được cho bởi công thức $y = f(x)$, muốn tính giá trị $f(a)$ của hàm số tại $x = a$, ta thay $x = a$ vào biểu thức $f(x)$ rồi thực hiện các phép tính trong biểu thức.
- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì y được gọi là một hàm hằng.

2. Đồ thị của hàm số:

Tập hợp các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

3. Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi giá trị của x thuộc tập số thực R . Với x_1, x_2 tùy ý thuộc R :

- a) Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số được gọi là hàm đồng biến.
- b) Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số được gọi là hàm nghịch biến.

B. HÀM SỐ BẬC NHẤT

1. Hàm số bậc nhất

a. Khái niệm hàm số bậc nhất

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$. Trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) còn được gọi là đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) Người ta gọi a là hệ số góc, b được gọi là tung độ gốc của đường thẳng

b. Tính chất: Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị của x thuộc R và có tính chất sau:

- Đồng biến trên R khi $a > 0$
- Nghịch biến trên R khi $a < 0$

c. Cách vẽ đồ thị của hàm số:

❖ Đồ thị của hàm số $y = ax$ là 1 đường thẳng đi qua gốc tọa độ O

- Cách vẽ

+ Cho $x = 1 \Rightarrow y = a \Rightarrow A(1; a)$

+ Đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và $A(1; a)$ là đồ thị hàm số $y = ax$

❖ Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng

- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b
- Song song với đường thẳng $y = ax$, nếu $b \neq 0$, trùng với đường thẳng $y = ax$, nếu $b = 0$

* Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

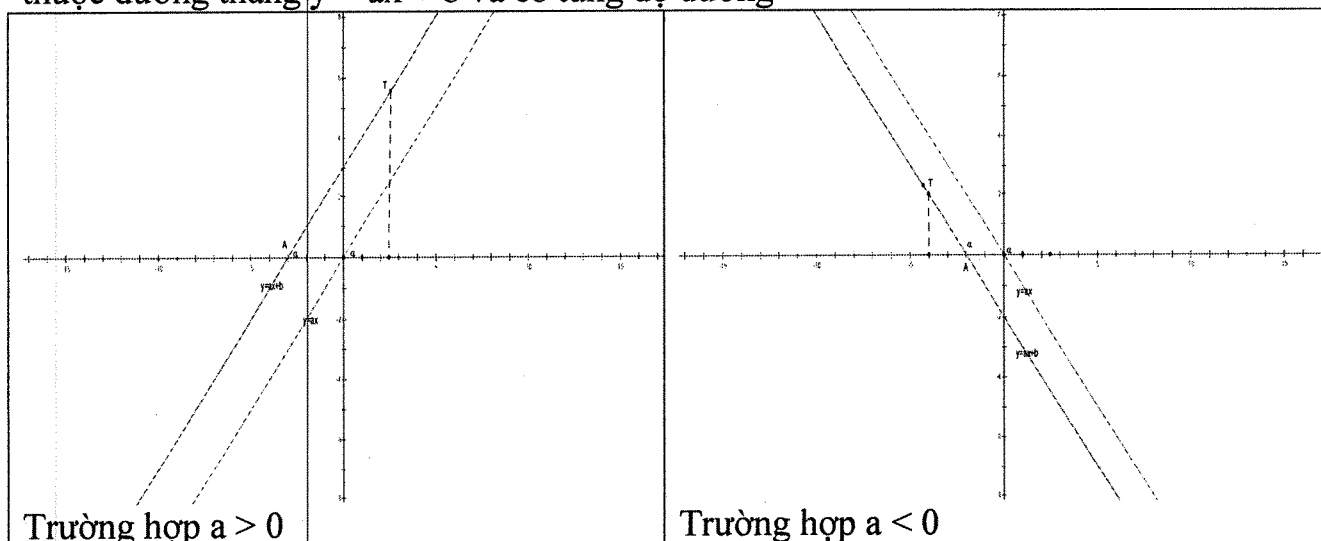
Bước 1. Cho $x = 0$ thì $y = b$ ta được điểm $P(0; b)$ thuộc trục tung Oy .

Cho $y = 0$ thì $x = \frac{-b}{a}$ ta được điểm $Q(\frac{-b}{a}; 0)$ thuộc trục hoành

Bước 2. Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm P và Q ta được đồ thị hàm số $y = ax + b$

2. Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ (a khác 0) và trục Ox

- Góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ (a khác 0) và trục Ox là góc tạo bởi tia Ax và tia AT, trong đó A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox; T là điểm thuộc đường thẳng $y = ax + b$ và có tung độ dương



Khi $a > 0$, $\Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc nhọn và nếu a càng lớn thì góc đó càng lớn. a càng lớn thì α càng lớn

Khi $a < 0$, $\Rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$ góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc tù và a càng lớn thì α càng lớn

Như vậy, góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox phụ thuộc vào a .

Người ta gọi a là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$.

Lưu ý: Khi $a > 0$, ta có $\tan \widehat{TAx} = \frac{OB}{OA} = \frac{\left| \frac{b}{-b} \right|}{\left| \frac{-b}{a} \right|} = \frac{b}{-b} = |a| = a$.

Từ đó dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi suy ra số đo của $\widehat{TAx}$.

Khi $a < 0$, ta có $\tan (180^\circ - \widehat{TAx}) = \tan \widehat{OAP} = \frac{OP}{OA} = \frac{\left| \frac{b}{-b} \right|}{\left| \frac{-b}{a} \right|} = \frac{b}{-b} = |a| = -a$.

Từ đó tìm được số đo của góc $180^\circ - \widehat{TAx}$ rồi suy ra số đo của góc $\widehat{TAx}$.

3. Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng

Hai đường thẳng $y = ax + b$ (d) và $y = a'x + b'$ (d')

- (d) cắt (d') khi và chỉ khi $a \neq a'$
- (d) // (d') khi và chỉ khi $a = a'$ và $b \neq b'$
- (d) $\equiv$ (d') khi và chỉ khi $a = a'$ và $b = b'$

- (d) $\perp$ (d') khi và chỉ khi $a \cdot a' = -1$

- (d) cắt (d') tại 1 điểm trên trục tung khi và chỉ khi $a \neq a'$ và $b = b'$

4. Một số phương trình đường thẳng

- Đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ có hệ số góc k : $y = k(x - x_0) + y_0$

- Đường thẳng đi qua điểm $A(x_A, 0)$ và $B(0; y_0)$ với $x_0, y_0 \neq 0$ là $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$

5. Công thức tính tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và độ dài đoạn thẳng

Cho hai điểm phân biệt A với B với $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$. Khi đó

- Độ dài đoạn thẳng AB được tính bởi công thức

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Tọa độ trung điểm M của AB được tính bởi công thức

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

6. Các dạng bài tập thường gặp

Dạng 1: Lập phương trình của đường thẳng (D) đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc bằng k.

☛ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là : $y = ax + b$ (*)

- Xác định a: ta có $a = k$

- Xác định b: (D) đi qua $A(x_A; y_A)$ nên ta có $y_A = kx_A + b \rightarrow b = y_A - kx_A$

- Thay $a = k$; $b = y_A - kx_A$ vào (*) ta có phương trình của (D)

Dạng 2: Lập phương trình của đường thẳng (D) đi qua điểm $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$

☛ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là : $y = ax + b$

(D) đi qua A và B nên ta có:
$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được a và b suy ra phương trình của (D)

Dạng 3: Viết phương trình đường thẳng (xác định hàm số) $y = ax + b$ biết đường thẳng (đồ thị hàm số) thoả mãn các điều kiện cho trước :

- **Nhận xét :** Thực chất việc viết phương trình đường thẳng (xác định hàm số)

$y = ax + b$ biết đường thẳng (đồ thị hàm số) thoả mãn các điều kiện cho trước chính là đi tìm a, b.

Bài toán : Xác định hàm số $y = ax + b$ biết :

a) Hệ số góc a và đồ thị của nó đi qua $A(x_0; y_0)$

b) Đồ thị của nó song song với đường thẳng $y = a'x + b'$ và đi qua $A(x_0; y_0)$

c) Đồ thị của nó vuông góc với đường thẳng $y = a'x + b'$ và đi qua $A(x_0; y_0)$

d) Đồ thị của nó đi qua $A(x_0; y_0)$ và $B(x_1; y_1)$

e) Đồ thị của nó đi qua $A(x_0; y_0)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng x_1

f) Đồ thị của nó đi qua $A(x_0; y_0)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng y_1

Phương pháp giải :

a) Thay hệ số góc vào hàm số, Vì đồ thị của nó đi qua $A(x_0; y_0)$ nên thay $x = x_0$; $y = y_0$ vào hàm số ta tìm được b.

b) Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = a'x + b'$ nên $a = a'$ thay $a = a'$ vào hàm số rồi làm tương tự phần b.

c) Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ vuông với đường thẳng $y = a'x + b'$ nên ta có $a.a' = -1$ ta tìm được $a = -\frac{1}{a'}$, thay $a = -\frac{1}{a'}$ vào hàm số rồi làm tương tự phần b.

d) Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(x_0; y_0)$ và $B(x_1; y_1)$ nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} y_0 = ax_0 + b \\ y_1 = ax_1 + b \end{cases} \quad (1); \text{Giải hệ phương trình (1) ta tìm được } a \text{ và } b.$$

e) Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(x_0; y_0)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng x_1 tức là đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(x_0; y_0)$ và $B(x_1; 0)$. Sau đó làm tương tự phần d.

f) Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(x_0; y_0)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng y_1 tức là đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(x_0; y_0)$ và $B(0; y_1)$. sau đó làm tương tự phần d.

Dạng 4: Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng,

1) Bài toán 1 : Cho hai đường thẳng $y = ax + b$ (d) và $y = a'x + b'$ (d') (với $a \neq a'$).

Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (d').

Phương pháp giải :

- *Cách 1 :* Vẽ đồ thị hai hàm số $y = ax + b$ (d) và $y = a'x + b'$ (d') trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy, sau đó tìm tọa độ giao điểm (nếu có)

- *Cách 2 :* Hoành độ giao điểm của (d) và (d') là nghiệm của phương trình :

$$ax + b = a'x + b' \quad (1)$$

Giải phương trình (1) tìm $x = x_0$ sau đó thay $x = x_0$ tìm được vào (d) hoặc (d') tìm $y = y_0$. Tọa độ giao điểm là $A(x_0; y_0)$

- *Cách 3 :* Tọa độ giao điểm của $y = ax + b$ (d) và $y = a'x + b'$ (d') là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình : } \begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases} \quad (2)$$

Giải hệ phương trình (2) tìm được $x = x_0; y = y_0$ Tọa độ giao điểm là $A(x_0; y_0)$

Dạng 5: Tìm điều kiện của tham số để 3 đường thẳng đồng quy :

1) Bài toán : Cho ba đường thẳng: $y = ax + b$ (d) ; $y = a'x + b'$ (d') và $y = a''x + b''$ (d'')

Trong đó $y = a''x + b''$ chứa tham số m.

Phương pháp giải :

- Tọa độ giao điểm của (d) và (d') là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases} \quad (1)$

Giải hệ phương trình (1) tìm được $x = x_0; y = y_0$ Tọa độ giao điểm là $A(x_0; y_0)$

- Để 3 đường thẳng đã cho đồng quy thì (d'') phải đi qua $A(x_0; y_0)$.

- Thay $A(x_0; y_0)$ vào phương trình đường thẳng (d'') ta được phương trình ẩn m, giải phương trình tìm m.

- Kết luận :

Dạng 6: Tìm điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm trên trục tung, cắt nhau tại một điểm trên trục hoành.

6.1: Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

Cho $(d_1): y = a_1x + b_1$ và $(d_2): y = a_2x + b_2$

Để (d_1) cắt (d_2) tại một điểm trên trục tung thì $\begin{cases} a_1 \neq a_2 & (1) \\ b_1 = b_2 & (2) \end{cases}$

Giải (1)

Giải (2) và chọn những giá trị thoả mãn (1).

6.2: Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm trên trục hoành.

Cho $(d_1): y = a_1x + b_1$ và $(d_2): y = a_2x + b_2$

Để (d_1) cắt (d_2) tại một điểm trên trục hoành thì $\begin{cases} a_1 \neq a_2 & (1) \\ \frac{-b_1}{a_1} = \frac{-b_2}{a_2} & (2) \end{cases}$

Dạng 7: Cho điểm $M(x_0, y_0)$. Ta có $A(x_0, -y_0)$ đối xứng M qua Ox; $B(-x_0, y_0)$ đối xứng M qua Oy; $C(-x_0, -y_0)$ đối xứng M qua O.

Dạng 8 : Cho hai điểm $A=(x_A; y_A), B=(x_B; y_B)$. Nếu điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ thì $M(x_M; y_M)$ có toạ độ là:

$$x_M = \frac{x_A - ky_B}{1 - k} ; \quad y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k} \quad (\text{nếu } k = -1 \text{ thì M là trung điểm AB})$$

CHƯƠNG IV

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. Các khái niệm :

① **Phương trình bậc nhất hai ẩn:**

- + Dạng: $ax + by = c$ trong đó $a; b; c$ là các hệ số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$)
- + Một nghiệm của phương trình là cặp số $x_0; y_0$ thỏa mãn : $ax_0 + by_0 = c$
- + Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn luôn có vô số nghiệm.
- + Tập nghiệm được biểu diễn bởi đường thẳng (d): $ax + by = c$. Nếu $a \neq 0; b \neq 0$ thì đường thẳng (d) là đồ thị của hàm số bậc nhất: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

② **Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:**

- + Dạng:
$$\begin{cases} ax + by = c. (1) \\ a'x + b'y = c'. (2) \end{cases}$$
- + Nghiệm của hệ là nghiệm chung của hai phương trình
- + Nếu hai phương trình ấy không có nghiệm chung thì ta nói hệ vô nghiệm
- + Quan hệ giữa số nghiệm của hệ và đường thẳng biểu diễn tập nghiệm:
 - Phương trình (1) được biểu diễn bởi đường thẳng (d)
 - Phương trình (2) được biểu diễn bởi đường thẳng (d')

③ **Hệ phương trình tương đương:**

Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm

II. Một số hệ phương trình thường gặp:

A. **Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:**
$$\begin{cases} ax + by = c. (1) \\ a'x + b'y = c'. (2) \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0, a'^2 + b'^2 \neq 0)$$

1. **Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế:**

a) Quy tắc thế:

- + Bước 1: Từ một phương trình của hệ đã cho, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia, rồi thay vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn 1 ẩn).
- + Bước 2: Dùng phương trình mới này để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ (phương trình thứ nhất cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia có được ở bước 1).

2. **Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số:**

a) Quy tắc cộng đại số:

- + Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.
- + Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia)

Lưu ý: Khi các hệ số của cùng một ẩn đối nhau thì ta cộng vế theo vế của hệ.

Khi các hệ số của cùng một ẩn bằng nhau thì ta trừ vế theo vế của hệ.

Khi hệ số của cùng một ẩn không bằng nhau cũng không đối nhau thì ta chọn nhân với số thích hợp để đưa về hệ số của cùng một ẩn đối nhau (hoặc bằng nhau). (tạm gọi là quy đồng hệ số)

3. **Ngoài các phương pháp giải đã học ta có thêm phương pháp sau:**

- + Bước 1. Tính các định thức

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b, D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b, D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

+ Bước 2.

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$
- Nếu $D = 0$ và $D_x^2 + D_y^2 \neq 0$ thì hệ vô nghiệm
- Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ $\Leftrightarrow ax + by = c$ (vô số nghiệm)

B. Hệ phương trình đối xứng loại I

a) **Định nghĩa.** Hệ phương trình đối xứng loại I là hệ pt có dạng $\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$

Trong đó $f(x; y)$ và $g(x; y)$ là những đa thức chứa hai biến x, y thỏa mãn $f(x; y) = f(y; x), g(x; y) = g(y; x), \forall x, y \in \mathbb{R}$

b) Cách giải phổ biến

- Bước 1. Biểu diễn từng pt theo tổng $x + y$ và tích xy
- Bước 2. Đặt $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \cdot \exists x, y \Leftrightarrow S^2 \geq 4P$
- Bước 3. Giải hệ mới theo S và P
- Bước 4. x và y là hai nghiệm của pt $X^2 - SX + P = 0$

C. Hệ phương trình đối xứng loại II

a) **Định nghĩa.** Hệ phương trình đối xứng loại II là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ f(y; x) = 0 \end{cases}$$

trong đó $f(x; y)$ là một biểu thức chứa hai biến x và y .

b) Cách giải.

- Bước 1. Trừ vế hai pt ta được $f(x; y) - f(y; x) = 0$ (*)
- Bước 2. Đưa phương trình (*) về dạng tích $(x - y)g(x; y) = 0$
- Bước 3. Xét hai trường hợp.

TH 1. $x = y$ thế vào một trong hai phương trình của hệ và giải tiếp

TH 2. $g(x; y) = 0$ kết hợp với $f(x; y) + f(y; x) = 0$ ta được hệ đối xứng loại I

$$\begin{cases} f(x; y) + f(y; x) = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$$

* **Chú ý.** Nếu $g(x; y) = 0$ phức tạp ta sẽ tìm cách chứng minh nó vô nghiệm.

D) Hệ phương trình có vế trái đẳng cấp bậc hai

a) **Định nghĩa.** Hệ phương trình có vế trái đẳng cấp bậc hai là hệ có dạng

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

b) Cách giải

- Bước 1. Cân bằng hệ số tự do ta được $\begin{cases} ad'x^2 + bd'xy + cd'y^2 = dd' \\ da'x^2 + db'xy + dc'y^2 = dd' \end{cases}$

- Bước 2. Trừ về hai phương trình ta được $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ (*)
- Bước 3. Giải phương trình (*) ta sẽ biểu diễn được x theo y
- Bước 4. Thế vào một trong hai phương trình của hệ và giải tiếp

*** Chú ý**

- Cách giải trên có thể áp dụng cho pt có vế trái đẳng cấp bậc cao hơn.
- Cách giải trên chứng tỏ rằng hệ phương trình này hoàn toàn giải được bằng cách đặt $y = tx, x \neq 0$ hoặc đặt $x = ty, y \neq 0$.
- Ta cũng có thể cân bằng số hạng chứa x^2 (hoặc chứa y^2) rồi trừ về và dùng phép thế.

E) Hệ phương trình gồm một bậc nhất và một bậc hai đối với 2 ẩn:

Cách giải:

- Từ phương trình bậc nhất ta rút một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình bậc hai ta được phương trình bậc hai một ẩn.
- Giải phương trình bậc hai ta tìm được nghiệm, thay nghiệm vừa tìm vào phương trình bậc nhất ta tìm được nghiệm của ẩn còn lại.

F) Hệ 3 phương trình bậc nhất 3 ẩn

Phương trình bậc nhất 3 ẩn có dạng: $ax+by+cz=d$, trong đó x,y,z là 3 ẩn và a,b,c,d là các hệ số a,b,c không đồng thời bằng 0.

Hệ 3 pt bậc nhất 3 ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (4)$$

Trong đó x,y,z là 3 ẩn; các chữ số còn lại là các hệ số

Mỗi bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ nghiệm đúng cả ba pt của hệ được gọi là một nghiệm của hệ pt (4).

G) Một số bài toán liên quan đến hệ phương trình chứa tham số:

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} ax + by = c, a \neq 0 & (D) \\ a'x + b'y = c', a' \neq 0 & (D') \end{cases}$

- $(D) \text{ cắt } (D') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- $(D) // (D') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.
- $(D) \equiv (D') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm.

III. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. Kiến thức cơ bản

Để giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình ta thực hiện theo 3 bước sau :

- bước 1 : lập hpt (bao gồm các công việc sau)
 - + chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn)
 - + biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết
 - + lập hpt biểu thị tương quan giữa các đại lượng
- bước 2 : giải hpt vừa lập đc ở bước 1

- bước 3 : kết luận : so sánh nghiệm tìm đc với điều kiện đặt ra ban đầu

B. Các dạng toán thường gặp

Dạng 1: Toán tìm số

- Ta phải chú ý tới cấu tạo của một số có hai chữ số , ba chữ số ...viết trong hệ thập phân. Điều kiện của các chữ số .

Dạng 2: Toán làm chung, làm riêng

- Ta coi toàn bộ công việc là 1 đơn vị, nếu gọi thời gian làm xong công việc là x thì trong một đơn vị thời gian làm được $\frac{1}{x}$ công việc .

** Ghi nhớ : Khi lập pt dạng toán làm chung, làm riêng không được cộng cột thời gian, năng suất và thời gian của cùng 1 dòng là 2 số nghịch đảo của nhau.*

Dạng 3. Toán chuyển động. Đây là dạng phổ biến nhất

Vận tốc, quãng đường, thời gian.

1/ Vận tốc: Muốn tính vận tốc, ta lấy quãng đường chia cho thời gian.

=> vận tốc (v) = Quãng đường (S) : Thời gian (t)

2/ Quãng đường: Muốn tính quãng đường ta lấy vận tốc nhân với thời gian.

=> Quãng đường (S) = Vận tốc (v) x thời gian (t).

3/ Thời gian: Muốn tính thời gian ta lấy quãng đường chia cho vận tốc.

=> Thời gian (t) = Quãng đường (S) : vận tốc (v)

*** Hai vật chuyển động cùng chiều có vận tốc lần lượt là V_1, V_2 ($V_1 > V_2$) cách nhau quãng đường S, cùng xuất phát một lúc thì thời gian chúng đuổi kịp nhau là:**

$$t = \frac{S}{V_1 - V_2}$$

*** Hai vật chuyển động cùng chiều, cùng xuất phát từ một địa điểm. Vật thứ hai xuất phát trước vật thứ nhất thời gian t_0 . Sau đó vật thứ nhất đuổi theo thì thời gian để chúng đuổi kịp nhau là:**

$$t = \frac{V_2 \times t_0}{V_1 - V_2}$$

*** Hai vật chuyển động ngược chiều cùng thời điểm xuất phát cách nhau quãng đường S thì thời gian chúng gặp nhau là:**

$$t = \frac{S}{V_1 + V_2}$$

Dạng 4. Toán liên quan tới yếu tố hình học.

- Ta phải nắm được công thức tính chu vi; diện tích của tam giác, hình thang, hình chữ nhật, hình vuông, định lý Pi-ta-go.

Dạng 5. Toán năng suất

*** Chú ý:**

- Năng suất (NS) là số sản phẩm làm được trong một đơn vị thời gian (t).

- (NS) x (t) = Tổng sản phẩm thu hoạch

CHƯƠNG IV

HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$). PHƯƠNG TRÌNH

A. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$). ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

1. Tính chất hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

a) Tính chất:

Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$

Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x > 0$ và đồng biến khi $x < 0$

b) Nhận xét:

- Nếu $a > 0$ thì $y > 0$ với mọi x khác 0; $y = 0$ khi $x = 0$, giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.

- Nếu $a < 0$ thì $y < 0$ với mọi x khác 0; $y = 0$ khi $x = 0$. giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 0$.

2. Tính chất đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy là trục đối xứng. đường cong đó được gọi là một Parabol với đỉnh O.

Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, $O(0;0)$ là điểm thấp nhất của đồ thị.

Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, $O(0;0)$ là điểm cao nhất của đồ thị.

3. Cách vẽ đồ thị:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Lập bảng giá trị (thường từ 5 đến 7 giá trị) tương ứng giữa x và y .

Bước 3: Vẽ đồ thị và kết luận.

3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường cong.

Xét đường thẳng $y = ax + b$ (d) và $y = ax^2$ (P)

(d) và (P) cắt nhau tại hai điểm

(d) tiếp xúc với (P) tại một điểm

(d) và (P) không có điểm chung

B. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Định nghĩa: pt bậc hai một ẩn là pt có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1), trong đó x là ẩn; a, b, c là các số cho trước.

2. Cách giải

a) Khuyết c ($c = 0$): pt (1) trở thành: $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$

b) Khuyết b ($b = 0$): pt (1) trở thành: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$ (2)

- nếu $-\frac{c}{a} < 0$ thì pt (2) vô nghiệm, suy ra pt (1) cũng vô nghiệm

- nếu $-\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

c) đầy đủ: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Công thức nghiệm	Công thức nghiệm thu gọn
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$
+ Nếu $\Delta > 0$ thì pt có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	+ Nếu $\Delta' > 0$ thì pt có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$
+ nếu $\Delta = 0$ thì pt có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	+ nếu $\Delta' = 0$ thì pt có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$
+ nếu $\Delta < 0$ thì pt vô nghiệm	+ nếu $\Delta' < 0$ thì pt vô nghiệm

3. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

- Định lý: Nếu $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của pt $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$
- Ứng dụng nhằm nghiệm của hệ thức Vi-ét:
 - + nếu pt $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có $a + b + c = 0$ thì pt có 2 nghiệm là: $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$
 - + nếu pt $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có $a - b + c = 0$ thì pt có 2 nghiệm là: $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$
 - + nếu $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \cdot x_2 = P \end{cases}$ thì suy ra u, v là nghiệm của pt: $x^2 - Sx + P = 0$ (điều kiện để tồn tại x_1, x_2 là $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$)

C. Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình

Bước 1: Lập phương trình hoặc hệ phương trình

Bước 2: Giải phương trình hoặc hệ phương trình

Bước 3: Kiểm tra các nghiệm của phương trình hoặc hệ phương trình nghiệm nào thích hợp với bài toán và kết luận

D. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH THƯỜNG GẶP:

Dạng 1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu: Các bước giải

- Tìm đk xác định của pt
- Quy đồng mẫu thức cả 2 vế của pt, rồi khử mẫu
- Giải pt vừa nhận được
- Kết luận: so sánh nghiệm tìm được với đk xác định của pt

Dạng 2. Phương trình tích.

- dạng tổng quát: $A_{(x)} \cdot B_{(x)} \dots = 0$ - cách giải: $A_{(x)} \cdot B_{(x)} \dots = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_{(x)} = 0 \\ B_{(x)} = 0 \end{cases}$

Dạng 3: bài toán liên quan tới phương trình bậc hai

Bài toán 1: Giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

☛ Các phương pháp giải:

- Phương pháp 1: Phân tích đưa về phương trình tích.
- Phương pháp 2: Dùng kiến thức về căn bậc hai
- Phương pháp 3: Dùng công thức nghiệm
- Phương pháp 4: Dùng công thức nghiệm thu gọn
- Phương pháp 5: Nhẩm nghiệm nhờ định lí Vi-et.

Chú ý: Nếu a, c trái dấu tức là $a.c < 0$ thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài toán 2: Biện luận theo m sự có nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m).

☛ Xét hệ số a : Có thể có 2 khả năng

a. Trường hợp $a = 0$ với vài giá trị nào đó của m .

Giả sử $a = 0 \leftrightarrow m = m_0$ ta có:

(*) trở thành phương trình bậc nhất $ax + c = 0$ (**)

+ Nếu $b \neq 0$ với $m = m_0$: (**) có một nghiệm $x = -c/b$

+ Nếu $b = 0$ và $c = 0$ với $m = m_0$: (**) vô định $\leftrightarrow$ (*) vô định

+ Nếu $b = 0$ và $c \neq 0$ với $m = m_0$: (**) vô nghiệm $\leftrightarrow$ (*) vô nghiệm

b. Trường hợp $a \neq 0$: Tính Δ hoặc Δ'

+ Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

Nếu $\Delta > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nếu $\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Nếu $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm

+ Tính $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$

Nếu $\Delta' > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Nếu $\Delta' = 0$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

Nếu $\Delta' < 0$: Phương trình vô nghiệm

- Ghi tóm tắt phân biện luận trên.

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) có nghiệm.

☛ Có hai khả năng để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm:

1. Hoặc $a = 0, b \neq 0$

2. Hoặc $a \neq 0, \Delta \geq 0$ hoặc $\Delta' \geq 0$

Tập hợp các giá trị m là toàn bộ các giá trị m thỏa mãn điều kiện 1 hoặc điều kiện 2.

Bài toán 4: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c phụ thuộc tham số m) có 2 nghiệm phân biệt.

☛ Điều kiện có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Bài toán 5: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) có 1 nghiệm.

☛ Điều kiện có một nghiệm:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$$

Bài toán 6: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) có nghiệm kép.

☛ Điều kiện có nghiệm kép: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

Bài toán 7: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) vô nghiệm.

☛ Điều kiện có một nghiệm: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

Bài toán 8: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) có 1 nghiệm.

☛ Điều kiện có một nghiệm: $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

Bài toán 9 : Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c phụ thuộc tham số m) có hai nghiệm cùng dấu.

☛ Điều kiện có hai nghiệm cùng dấu:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Bài toán 10 : Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c phụ thuộc tham số m) có 2 nghiệm dương.

☛ Điều kiện có hai nghiệm dương:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$$

Bài toán 11 : Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) có 2 nghiệm âm.

☛ Điều kiện có hai nghiệm âm:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$$

Bài toán 12: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c phụ thuộc tham số m) có 2 nghiệm trái dấu.

☛ Điều kiện có hai nghiệm trái dấu:

$P < 0$ hoặc a và c trái dấu.

Bài toán 13 : Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (*) (a, b, c phụ thuộc tham số m) có một nghiệm $x = x_1$.

☛ Cách giải:

- Thay $x = x_1$ vào phương trình (*) ta có: $ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \rightarrow m$

- Thay giá trị của m vào (*) $\rightarrow x_1, x_2$

- Hoặc tính $x_2 = S - x_1$ hoặc $x_2 = \frac{P}{x_1}$

Bài toán 14 : Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c phụ thuộc tham số m) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn các điều kiện:

- a. $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ b. $x_1^2 + x_2^2 = k$ c. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = n$ d. $x_1^2 + x_2^2 \geq h$ e. $x_1^3 + x_2^3 = t$

☛ Điều kiện chung: $\Delta \geq 0$ hoặc $\Delta' \geq 0$ (*)

Theo định lý Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = S & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = P & (2) \end{cases}$$

a. Trường hợp: $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$

Giải hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma \end{cases} \longrightarrow x_1, x_2$

Thay x_1, x_2 vào (2) $\rightarrow m$

Chọn các giá trị của m thỏa mãn (*)

b. Trường hợp: $x_1^2 + x_2^2 = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = k$

Thay $x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a}$ và $x_1 \cdot x_2 = P = \frac{c}{a}$ vào ta có:

$S^2 - 2P = k \rightarrow$ Tìm được giá trị của m thỏa mãn (*)

c. Trường hợp: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = n \Leftrightarrow x_1 + x_2 = nx_1 x_2 \Leftrightarrow -b = nc$

Giải phương trình $-b = nc$ tìm được m thỏa mãn (*)

d. Trường hợp: $x_1^2 + x_2^2 \geq h \Leftrightarrow S^2 - 2P - h \geq 0$

Giải bất phương trình $S^2 - 2P - h \geq 0$ chọn m thỏa mãn (*)

e. Trường hợp: $x_1^3 + x_2^3 = t \Leftrightarrow S^3 - 3PS = t$

Giải phương trình $S^3 - 3PS = t$ chọn m thỏa mãn (*)

❖ Một số bài toán ứng dụng hệ thức Vi- Ét:

$$1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{S}{P};$$

$$2) x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P;$$

$$3) \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2};$$

$$4) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) - 3x_1 x_2) \\ = S(S^2 - 3P) = S^3 - 3PS$$

Bài toán 15 : Tìm hai số u và v biết tổng $u + v = S$ và tích $u \cdot v = P$ của chúng.

☛ Ta có u và v là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad (*)$$

(Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$)

Giải phương trình (*) ta tìm được hai số u và v cần tìm.

Bài toán 16. Phương trình bậc 2 có điều kiện :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0), x \neq \alpha$$

$$2 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}, 1 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta < 0 \vee \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Nếu a có tham số, xét thêm a = 0 với các trường hợp 1 nghiệm, VN.

Dạng 4: Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn số phụ

Bài toán 1: Giải phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (a ≠ 0)

☛ Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$) ta có phương trình $at^2 + bt + c = 0$

Giải phương trình bậc hai ẩn t sau đó thay vào tìm ẩn x

$$\Rightarrow t = x^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{t}$$

Điều kiện để phương trình : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có số nghiệm thì phương trình : $at^2 + bt + c = 0$ phải là:

$$* 4 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}; * 3 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

$$* 2 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ \Delta = 0 \\ S/2 > 0 \end{cases}; * 1 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \\ \Delta = 0 \\ S/2 = 0 \end{cases}$$

$$* \text{Vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta < 0 \vee \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta < 0 \vee \begin{cases} P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

$$* 4 \text{ nghiệm CSC} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t_1 < t_2 \\ \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \text{Giải hệ pt: } \begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ S = t_1 + t_2 \\ P = t_1 \cdot t_2 \end{cases}$$

Bảng tóm tắt

$At^2 + bt + c = 0$	$ax^4 + bx^2 + c = 0$
vô nghiệm	vô nghiệm
2 nghiệm âm	vô nghiệm
nghiệm kép âm	vô nghiệm
1 nghiệm dương	2 nghiệm đối nhau
2 nghiệm dương	4 nghiệm 2 cặp nghiệm đối nhau

Bài toán 2: Giải phương trình $A(x^2 + \frac{1}{x^2}) + B(x + \frac{1}{x}) + C = 0$

☛ Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0$

$$\text{Suy ra } t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

Thay vào phương trình ta có:

$$\begin{aligned} A(t^2 - 2) + Bt + C &= 0 \\ \Leftrightarrow At^2 + Bt + C - 2A &= 0 \end{aligned}$$

Giải phương trình ẩn t sau đó thế vào $x + \frac{1}{x} = t$ giải tìm x.

Bài toán 3: Phương trình bậc 3 : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -b/a, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c/a, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -d/a$$

Biết $x_1 + x_2 + x_3 = A$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = B$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = C$

thì x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm phương trình : $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$

➤ Số nghiệm phương trình bậc 3 :

• $x = \alpha \vee f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) :

❖ 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

❖ 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

❖ 1 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$ hay $\begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$

Bài toán 4: Giải phương trình bậc cao

☞ Dùng các phép biến đổi đưa phương trình bậc cao về dạng:

+ Phương trình tích

+ Phương trình bậc hai.

➤ $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. Đặt $t = x + \frac{1}{x}$. Tìm đk của t bằng BBT :

$$|t| \geq 2$$

➤ $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$. Đặt $t = x - \frac{1}{x}$. Tìm đk của t bằng BBT : $t \in$

R.

➤ $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$ với $a+b = c+d$. Đặt : $t = x^2 + (a+b)x$.
Tìm đk của t bằng BBT.

➤ $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$. Đặt : $t = x + \frac{a+b}{2}$, $t \in R$

Dạng 5: Giải phương trình vô tỉ

Bài toán 1: Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (1)

☞ Ta có $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 & (2) \\ f(x) = [g(x)]^2 & (3) \end{cases}$

Giải (3) đối chiếu điều kiện (2) chọn nghiệm thích hợp $\rightarrow$ nghiệm của (1)

Bài toán 2: Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)} + \sqrt{h(x)} = g(x)$

☞ Điều kiện có nghĩa của phương trình

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên thoả mãn ta bình phương hai vế để giải tìm x.

Dạng 6: Giải phương trình chứa giá trị tuyệt đối

Bài toán: Giải phương trình dạng $|f(x)| = g(x)$

☛ **Phương pháp 1:** $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \end{cases}$

☛ **Phương pháp 2:** Xét $f(x) \geq 0 \rightarrow f(x) = g(x)$
Xét $f(x) < 0 \rightarrow -f(x) = g(x)$

☛ **Phương pháp 3:** Với $g(x) \geq 0$ ta có $f(x) = \pm g(x)$

Dạng 7: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$

☛ **Phương pháp 1:** Dựa vào lũy thừa bậc chẵn.

- Biến đổi hàm số $y = f(x)$ sao cho:

$$y = M - [g(x)]^{2n}, n \in \mathbb{Z} \rightarrow y \leq M$$

Do đó $y_{\max} = M$ khi $g(x) = 0$

- Biến đổi hàm số $y = f(x)$ sao cho:

$$y = m + [h(x)]^{2k}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow y \geq m$$

Do đó $y_{\min} = m$ khi $h(x) = 0$

☛ **Phương pháp 2:** Dựa vào tập giá trị hàm.

☛ **Phương pháp 3:** Dựa vào đẳng thức.

Dạng 8 : các bài toán liên quan đến hàm số

*** Điểm thuộc đường - đường đi qua một điểm**

Bài toán 1: Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và một điểm $A(x_A; y_A)$. Hỏi (C) có đi qua A không?

☛ Đồ thị (C) đi qua $A(x_A; y_A)$ khi và chỉ khi toạ độ của A nghiệm đúng phương trình của (C) $A \in (C) \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$

Do đó tính $f(x_A)$

Nếu $f(x_A) = y_A$ thì (C) đi qua A.

Nếu $f(x_A) \neq y_A$ thì (C) không đi qua A.

*** sự tương giao của hai đồ thị**

Bài toán 2 : Cho (C) và (L) theo thứ tự là đồ thị hàm số

$$y = f(x) \text{ và } y = g(x)$$

Hãy khảo sát sự tương giao của hai đồ thị

☛ Toạ độ điểm chung của (C) và (L) là nghiệm của phương trình hoành độ điểm chung:

$$f(x) = g(x) (*)$$

- Nếu (*) vô nghiệm thì (C) và (L) không có điểm chung.

- Nếu (*) có nghiệm kép thì (C) và (L) tiếp xúc nhau.

- Nếu (*) có 1 nghiệm thì (C) và (L) có 1 điểm chung.

- Nếu (*) có 2 nghiệm thì (C) và (L) có 2 điểm chung.

Dạng 9 : Lập phương trình đường thẳng

Bài toán 1: Lập phương trình của đường thẳng (D) đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc bằng k.

☛ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là : $y = ax + b$ (*)

- Xác định a: ta có $a = k$

- Xác định b: (D) đi qua $A(x_A; y_A)$ nên ta có $y_A = kx_A + b \rightarrow b = y_A - kx_A$

- Thay $a = k$; $b = y_A - kx_A$ vào (*) ta có phương trình của (D)

Bài toán 2: Lập phương trình của đường thẳng (D) có hệ số góc k và tiếp xúc với đường cong (C): $y = f(x)$

☛ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là : $y = kx + b$

Phương trình hoành độ điểm chung của (D) và (P) là:

$$f(x) = kx + b \quad (*)$$

Vì (D) tiếp xúc với (P) nên (*) có nghiệm kép. Từ điều kiện này ta tìm được b và suy ra phương trình của (D)

Bài toán 3: Lập phương trình của đường thẳng (D) đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ k và tiếp xúc với đường cong (C): $y = f(x)$

☛ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là : $y = kx + b$

Phương trình hoành độ điểm chung của (D) và (P) là:

$$f(x) = kx + b \quad (*)$$

Vì (D) tiếp xúc với (P) nên (*) có nghiệm kép.

Từ điều kiện này ta tìm được hệ thức liên hệ giữa a và b (**)

Mặt khác: (D) qua $A(x_A; y_A)$ do đó ta có $y_A = ax_A + b$ (***)

Từ (**) và (***) $\rightarrow a$ và $b \rightarrow$ Phương trình đường thẳng (D).

B. HÌNH HỌC 9

CHƯƠNG I : HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông.

Trong một tam giác vuông: $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$; $AH = h$

a. $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow h^2 = b'c'$

$\Rightarrow$ Bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

b. $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow ah = bc$

$\Rightarrow$ Tích hai cạnh góc vuông bằng tích cạnh huyền với đường cao tương ứng.

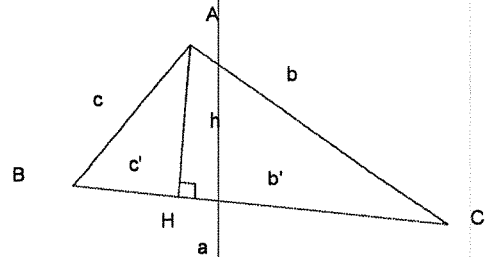
c. $AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow c^2 = ac'$

$AC^2 = BC \cdot HC \Rightarrow b^2 = ab'$

$\Rightarrow$ Bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền với hình chiếu tương ứng của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

d. $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

$\Rightarrow$ Nghịch đảo bình phương đường cao bằng tổng nghịch đảo bình phương hai cạnh góc vuông.



➡ Áp dụng định lý pytago vào:

❖ $\triangle$ vuông ABC: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

❖ $\triangle$ vuông ABH: $AH^2 + BH^2 = AB^2$

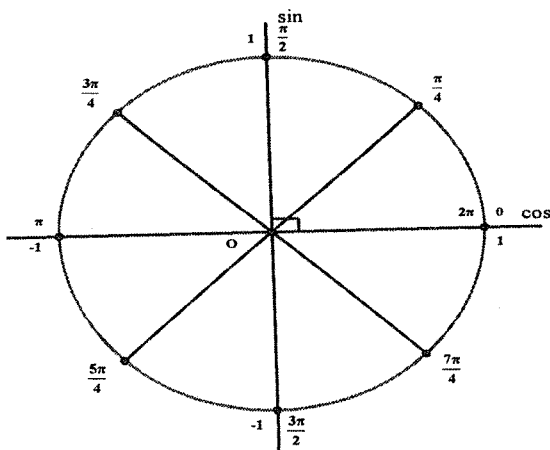
❖ $\triangle$ vuông ACH: $AH^2 + CH^2 = AC^2$

❖ Ta có : $BH + HC = BC$ ($H \in BC$)

2. Đường tròn lượng giác

- Kí hiệu 1^0 đọc là một độ : $1^0 = 60'$; $1' = 60''$

Độ và radian: $(180)^0 = \pi(\text{rad})$; $1^0 = \frac{\pi}{180}(\text{rad})$; $1(\text{rad}) = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$



BẢNG GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT

X	rad	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
Độ		-180^0	-150^0	-135^0	-120^0	-90^0	-60^0	-45^0	-30^0	0

Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Cos	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Cot		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	

X	Rad	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
	Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Sin		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Cos		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Tan		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Cot		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	

3. Một số tính chất và đẳng thức lượng giác cần nhớ:

a. Với góc α nhọn ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) thì $0 < \sin \alpha, \cos \alpha < 1$

b. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$); $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ($\sin \alpha \neq 0$)

c. $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

d. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ (Các bạn nhớ chỉ được lấy giá trị dương vì tuân theo tính chất a ở mục này)

e. Với góc α nhọn và $\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

f. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

4. Mối quan hệ lượng giác của các góc phụ nhau.

Nếu $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì các giá trị lượng giác của α và β chéo nhau, tức là:

$\sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta, \tan \alpha = \cot \beta, \cot \alpha = \tan \beta$

5. Dấu các giá trị lượng giác:

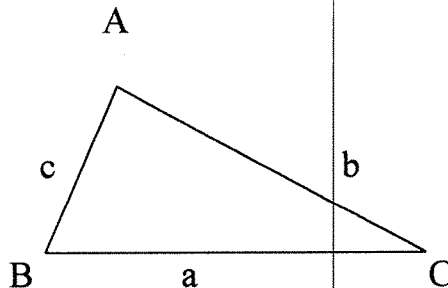
GTLG	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

6. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông.

Các tỉ số lượng giác.

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC}, \cos \alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \alpha = \frac{AC}{AB}, \cotg \alpha = \frac{AB}{AC}$$



7. Hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông.

$$b = a \sin B = a \cos C; \quad b = c \tan B = c \cotg C$$

$$c = a \sin C = a \cos B; \quad c = b \tan C = b \cotg B$$

Vậy: Trong một tam giác vuông:

➤ Độ dài một cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền với sin góc đối hoặc cos góc kề.

➤ Độ dài một cạnh góc vuông bằng tích của cạnh góc vuông còn lại với tg góc đối hoặc cotg góc kề.

Chú ý: Giải tam giác là khái niệm của việc đi tính số đo của các góc nhọn, độ dài các cạnh của một tam giác vuông.

8. Định lý cosin trong tam giác không vuông

Với mọi tam giác ABC ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

9. Định lý sin trong tam giác. R : bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Trong tam giác ABC ta có: $a = 2R \sin A; b = 2R \sin B; c = 2R \sin C$

$$\text{Hay } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

10. Định lý trung tuyến: $m_a; m_b; m_c$ là đường trung tuyến nối từ đỉnh A.B.C

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

CHƯƠNG II : ĐƯỜNG TRÒN

1. Đường tròn.

a. Định nghĩa của đường tròn: Đường tròn tâm O, bán kính R, ký hiệu: (O; R) là tập hợp các điểm cách O một khoảng bằng R

b. Vị trí tương đối của 1 điểm đối với đường tròn: Cho (O; R) và 1 điểm M trong cùng 1 mặt phẳng

- điểm M nằm trên (O) $\Leftrightarrow OM = R$

- điểm M nằm bên trong (O) $\Leftrightarrow OM < R$

- điểm M nằm bên ngoài (O) $\Leftrightarrow OM > R$

c. Sự xác định đường tròn

- Định lý: Qua 3 điểm không thẳng hàng ta vẽ được 1 và chỉ 1 đường tròn

- Chú ý:

+ tâm của đường tròn đi qua 3 điểm không thẳng hàng là giao điểm của các đường trung trực của tam giác ABC. Đường tròn đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C được gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC còn tam giác ABC nội tiếp đường tròn

+ không vẽ được đường tròn nào đi qua 3 điểm thẳng hàng

+ để chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên 1 đường tròn, ta chứng minh các điểm ấy cùng cách đều 1 điểm cố định. Điểm cố định ấy là tâm của đường tròn, khoảng cách đều ấy là bán kính của đường tròn

- **Tâm đối xứng, trục đối xứng** : Đường tròn có một tâm đối xứng; có vô số trục đối xứng.

d. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây.

Trong một đường tròn

+ Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy

+ Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

➤ **Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây:**

Trong một đường tròn:

+ Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm

+ Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau

+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn

+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn

➤ **Liên hệ giữa cung và dây:**

Trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

+ Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau

+ Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau

+ Cung lớn hơn căng dây lớn hơn

+ Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

2. Dấu hiệu, tính chất tiếp tuyến.

a. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

- Đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O ; R) $\Leftrightarrow d = R$ (d : là khoảng cách từ tâm O đến a)

- Nếu đường thẳng a đi qua 1 điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng a là 1 tiếp tuyến của đường tròn
Tiếp tuyến vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

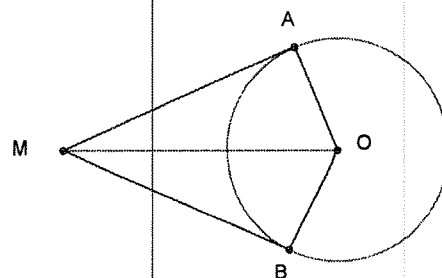
- Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến:

- + Đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung
- + Khoảng cách từ tâm của đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính
- + Đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

b Tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau

MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau thì:

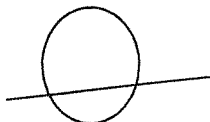
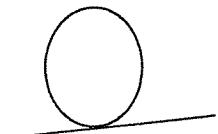
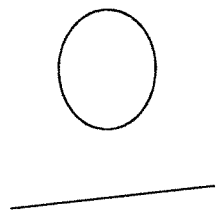
- + $MA = MB$
- + MO là phân giác của góc AMB
- + OM là phân giác của góc AOB



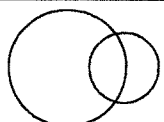
Nếu 2 tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :

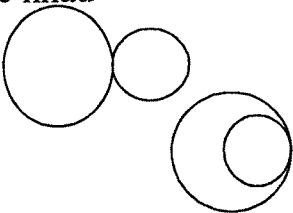
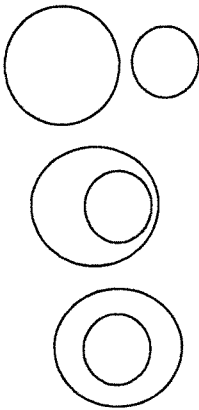
- điểm đó cách đều hai tiếp điểm
- tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến
- tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua 2 tiếp điểm

3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ giữa d và R
- Đường thẳng và đường tròn cắt nhau 	2	$d < R$
- Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau 	1	$d = R$
- Đường thẳng và đường tròn không giao nhau 	0	$d > R$

4. Vị trí tương đối của đường tròn và đường tròn:

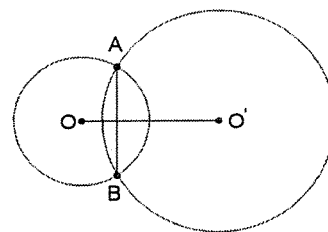
Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ giữa d và R
- Hai đường tròn cắt nhau 	2	$R - r < d < R + r$

- Hai đường tròn tiếp xúc nhau + Tiếp xúc ngoài + Tiếp xúc trong		1	$OO' = R + r$ $OO' = R - r$
- Hai đường tròn không giao nhau + (O) và (O') ở ngoài nhau + (O) đựng (O') + (O) và (O') đồng tâm		0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$ $OO' = 0$

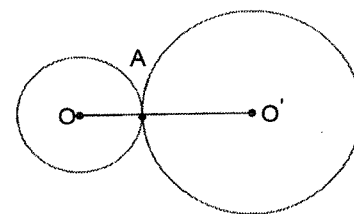
5. Tính chất đường nối tâm

- Định lý:

a) Nếu 2 đường tròn cắt nhau thì 2 giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, tức là đường nối tâm là đường trung trực của dây chung (OO' là đường trung trực của dây AB)

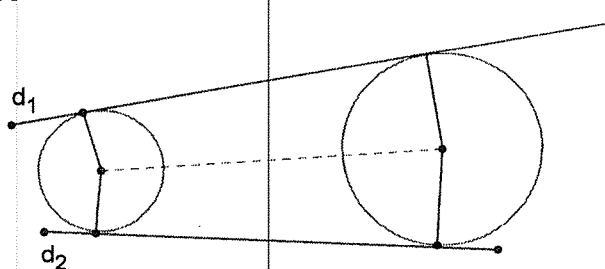


b) Nếu 2 đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm (A thuộc OO')

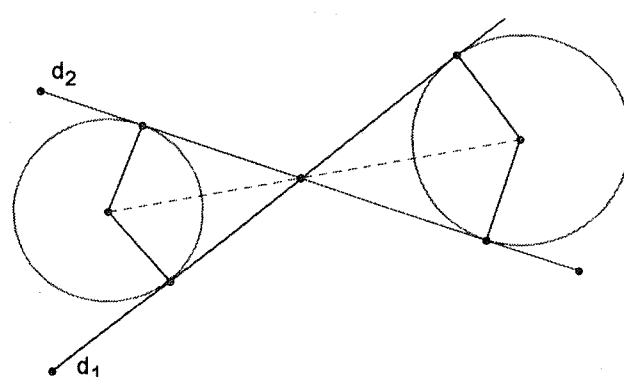


6. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

- Định nghĩa: tiếp tuyến chung của 2 đường tròn là đg thg tiếp xúc với cả 2 đường tròn đó



d_1 ; d_2 là tiếp tuyến chung ngoài: tiếp tuyến chung ngoài không cắt đoạn nối tâm



d_1 ; d_2 là tiếp tuyến chung trong: tiếp tuyến chung trong cắt đoạn nối tâm

CHƯƠNG III GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

1. Góc ở tâm. Số đo cung

a) Định nghĩa góc ở tâm: Góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn được gọi là góc ở tâm

b) Số đo cung:

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360^0 và số đo của cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn)
- Số đo của nửa đtr bằng 180^0

c) Tính chất của số đo cung: Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì

$$\text{sđ } \widehat{AB} = \text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{CB}$$

2. Liên hệ giữa cung và dây

a) Định lý 1: Với 2 cung nhỏ trong một đtròn hay trong 2 đtròn bằng nhau:

- 2 cung bằng nhau căng 2 dây bằng nhau
- 2 dây bằng nhau căng 2 cung bằng nhau

b) Định lý 2: Với 2 cung nhỏ trong 1 đtròn hay trong 2 đtròn bằng nhau:

- Cung lớn hơn căng dây lớn hơn
- Dây lớn hơn căng cung lớn hơn

3. Góc nội tiếp

a) Định nghĩa: Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đtròn và 2 cạnh chứa 2 dây cung của đtròn đó. Cung nằm trong góc gọi là cung bị chắn

b) Định lý: Trong 1 đtròn số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn

c) Các hệ quả: Trong một đtròn

- Các góc nt bằng nhau chắn các cung bằng nhau
- Các góc nt cùng chắn 1 cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nt (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- Góc nt chắn nửa đtròn là góc vuông

4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

a) Định nghĩa: Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh tại tiếp điểm, một cạnh là tiếp tuyến và cạnh còn lại chứa dây cung

b) Định lý: Số của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn

c) Định lý đảo: Nếu $\widehat{B\hat{A}x}$ có đỉnh nằm trên đtròn, một cạnh chứa dây cung AB, có số bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là 1 tia tiếp tuyến của đtròn

d) Hệ quả: Trong 1 đtròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn 1 cung thì bằng nhau

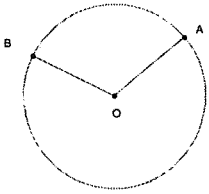
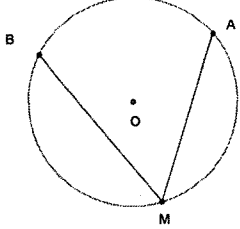
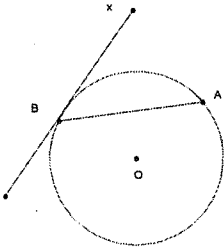
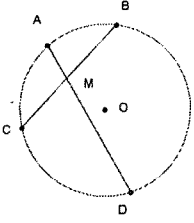
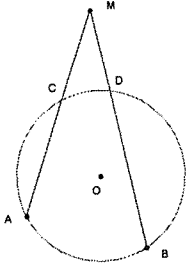
5. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

a) Góc có đỉnh ở bên trong đtròn

- Định lý: Số của góc bằng nửa tổng số của 2 cung bị chắn

b) Góc có đỉnh ở bên ngoài đtròn

- Định lý: Số của góc bằng nửa hiệu số của 2 cung bị chắn

Loại góc		Hình vẽ	Công thức tính số đo
1. Góc ở tâm			$\widehat{AOB} = sd\widehat{AB}$
2. Góc nội tiếp			$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} sd\widehat{AB}$
3. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.			$\widehat{xBA} = \frac{1}{2} sd\widehat{AB}$
4. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn			$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} (sd\widehat{AB} + sd\widehat{CD})$
5. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn			$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} (sd\widehat{AB} - sd\widehat{CD})$

☛ **Chú ý:** Trong một đường tròn

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau
- Các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp nhỏ hơn hoặc bằng 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông và ngược lại góc vuông nội tiếp thì chắn nửa đường tròn.
- Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

6. Độ dài đường tròn - Độ dài cung tròn.

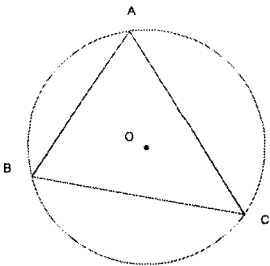
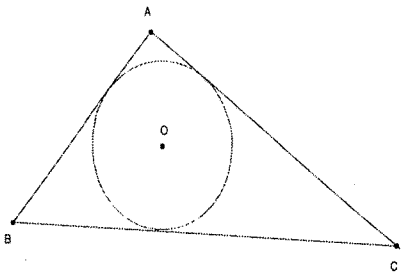
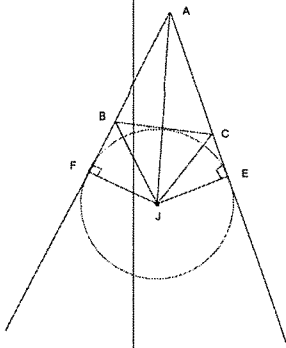
- Độ dài đường tròn bán kính R: $C = 2\pi R = \pi d$
- Độ dài cung tròn n° bán kính R: $l = \frac{\pi R n}{180}$

7. Diện tích hình tròn - Diện tích hình quạt tròn

- Diện tích hình tròn: $S = \pi R^2$

- Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cong n° : $S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2}$

8. Các loại đường tròn

Đường tròn ngoại tiếp tam giác	Đường tròn nội tiếp Tam giác	Đường tròn bàng tiếp tam giác
 - Tâm đường tròn là giao của ba đường trung trực của tam giác. - Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm cạnh huyền	 - đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với 3 cạnh của tam giác - tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của 3 đường phân giác của các góc trong tam giác	 Đường tròn bàng tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với 1 cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại - tâm của Đường tròn bàng tiếp tam giác là giao điểm của 2 đường phân giác các góc ngoài tại hai đỉnh của tam giác - mỗi tam giác có 3 đường tròn bàng tiếp

9. Tứ giác nội tiếp:

☞ Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp:

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện
- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α .

α .

A. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng 1: Chứng minh hai góc bằng nhau.

☞ *Cách chứng minh:*

- Chứng minh hai góc cùng bằng góc thứ ba
- Chứng minh hai góc bằng với hai góc bằng nhau khác
- Hai góc bằng tổng hoặc hiệu của hai góc theo thứ tự đôi một bằng nhau
- Hai góc cùng phụ (hoặc cùng bù) với góc thứ ba
- Hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù có các cạnh đôi một song song hoặc vuông góc
- Hai góc ó le trong, so le ngoài hoặc đồng vị

- Hai góc ở vị trí đối đỉnh
- Hai góc của cùng một tam giác cân hoặc đều
- Hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau hoặc đồng dạng
- Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn hai cung bằng nhau.

Dạng 2: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

☛ Cách chứng minh:

- Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng đoạn thứ ba
- Hai cạnh của một tam giác cân hoặc tam giác đều
- Hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau
- Hai cạnh đối của hình bình hành (chữ nhật, hình thoi, hình vuông)
- Hai cạnh bên của hình thang cân
- Hai dây trũng hai cung bằng nhau trong một đường tròn hoặc hai đường bằng nhau.

Dạng 3: Chứng minh hai đường thẳng song song

☛ Cách chứng minh:

- Chứng minh hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba
- Chứng minh hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba
- Chứng minh chúng cùng tạo với một cát tuyến hai góc bằng nhau:
 - + ở vị trí so le trong
 - + ở vị trí so le ngoài
 - + ở vị trí đồng vị.

- Là hai dây chắn giữa hai cung bằng nhau trong một đường tròn
- Chúng là hai cạnh đối của một hình bình hành

Dạng 4: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

☛ Cách chứng minh:

- Chúng song song song song với hai đường thẳng vuông góc khác.
- Chứng minh chúng là chân đường cao trong một tam giác.
- Đường kính đi qua trung điểm dây và dây.
- Chúng là phân giác của hai góc kề bù nhau.

Dạng 5: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

☛ Cách chứng minh:

- Chứng minh chúng là ba đường cao, ba trung tuyến, ba trung trực, ba phân giác trong (hoặc một phân giác trong và phân giác ngoài của hai góc kia)
- Vận dụng định lý đảo của định lý Talet.

Dạng 6: Chứng minh hai tam giác bằng nhau

☛ Cách chứng minh:

*** Hai tam giác thường:**

- Trường hợp góc - cạnh - góc (g-c-g)
- Trường hợp cạnh - góc - cạnh (c-g-c)
- Trường hợp cạnh - cạnh - cạnh (c-c-c)

*** Hai tam giác vuông:**

- Có cạnh huyền và một góc nhọn bằng nhau
- Có cạnh huyền bằng nhau và một cạnh góc vuông bằng nhau
- Cạnh góc vuông đối một bằng nhau

Dạng 7: Chứng minh hai tam giác đồng dạng

☛ Cách chứng minh:

*** Hai tam giác thường:**

- Có hai góc bằng nhau đôi một

- Có một góc bằng nhau xen giữa hai cạnh tương ứng tỷ lệ
- Có ba cạnh tương ứng tỷ lệ

*** Hai tam giác vuông:**

- Có một góc nhọn bằng nhau
- Có hai cạnh góc vuông tương ứng tỷ lệ

Dạng 8: Chứng minh đẳng thức hình học

☛ Cách chứng minh:

Giả sử phải chứng minh đẳng thức: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ (*)

- Chứng minh: $\triangle MAC \sim \triangle MDB$ hoặc $\triangle MAD \sim \triangle MCB$

- Nếu 5 điểm M, A, B, C, D cùng nằm trên một đường thẳng thì phải chứng minh các tích trên cùng bằng tích thứ ba:

$$MA \cdot MB = ME \cdot MF$$

$$MC \cdot MD = ME \cdot MF$$

Tức là ta chứng minh: $\triangle MAE \sim \triangle MFB$
 $\triangle MCE \sim \triangle MFD$

$$\rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

* Trường hợp đặc biệt: $MT^2 = MA \cdot MB$ ta chứng minh $\triangle MTA \sim \triangle MBT$

Dạng 9: Chứng minh tứ giác nội tiếp

☛ Cách chứng minh:

Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp:

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện
- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc

α .

Dạng 10: Chứng minh MT là tiếp tuyến của đường tròn (O;R)

☛ Cách chứng minh:

- Chứng minh $OT \perp MT$ tại $T \in (O;R)$
- Chứng minh khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng MT bằng bán kính
- Dùng góc nội tiếp.

Dạng 11: Các bài toán tính toán độ dài cạnh, độ lớn góc

☛ Cách tính:

- Dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông.
- Dựa vào tỷ số lượng giác
- Dựa vào hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông
- Dựa vào công thức tính độ dài, diện tích, thể tích...

B. CÁC VẤN ĐỀ

Vấn đề 1: định nghĩa và sự xác định đường tròn.

1. Tập hợp các điểm cách O cho trước một khoảng R không đổi gọi là đường tròn tâm O bán kính R. Kí hiệu: $(O; R)$.

2. Để xác định được đường tròn ta có các cách sau:

Biết tâm O và bán kính R.

Biết 3 điểm không thẳng hàng nằm trên đường tròn.

3. Cho $(O; R)$ và điểm M. Khi đó có các khả năng sau:

Nếu $MO > R$ thì M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$.

Nếu $MO = R$ thì M nằm trên đường tròn $(O; R)$. Kí hiệu: $M \in (O; R)$.

Nếu $MO < R$ thì M nằm trong đường tròn $(O; R)$.

4. Dây cung là đoạn thẳng nối hai điểm trên đường tròn. Đường kính là dây cung qua tâm. Vậy đường kính là dây cung lớn nhất trong một đường tròn.
5. Muốn c/m các điểm cùng nằm trên $(O; R)$ ta chỉ ra khoảng cách từ mỗi điểm đến O đều là R . Các cách khác sau này xét sau.
6. Đường tròn qua hai điểm A và B có tâm nằm trên trung trực của AB .
7. đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm cạnh huyền.

Vấn đề 2: tính chất đối xứng của đường tròn.

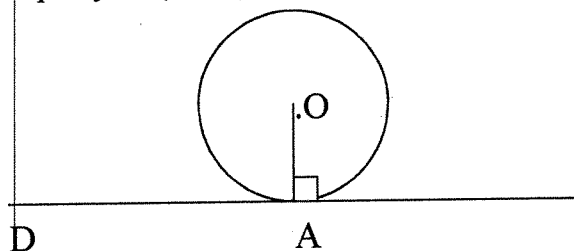
1. Đường tròn là hình có một tâm đối xứng là tâm đường tròn đó.
2. Đường tròn có vô số trục đối xứng là mỗi đường kính của nó.
3. Đường kính vuông góc dây cung thì đi qua trung điểm và ngược lại.
4. Hai dây cung bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.
5. Dây cung nào gần tâm hơn thì dài hơn và ngược lại.
6. Vận dụng các tính chất trên ta có thể tính độ dài các đoạn và c/m các tính chất cũng như so sánh các đoạn thẳng dựa vào đường tròn.

Vấn đề 3: vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn.

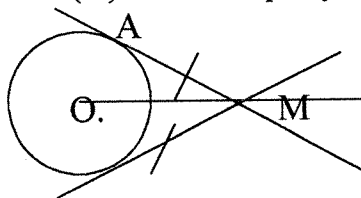
1. Khoảng cách từ 1 điểm đến đường thẳng là độ dài đường vuông góc từ điểm đó đến đường thẳng.
2. Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d khi đó có các trường hợp sau:
Nếu $d(O; d) = OH > R$ thì đường thẳng và đường tròn không có điểm chung. Ta nói đường thẳng và đường tròn ngoài nhau hoặc không cắt nhau.
Nếu $d(O; d) = OH = R$ khi đó đường thẳng và đường tròn có một điểm chung duy nhất chính là H . Khi đó ta nói đường thẳng tiếp xúc đường tròn (đường thẳng này gọi là tiếp tuyến của (O)).
Nếu $d(O; d) = OH < R$ thì đường thẳng d cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt A và B . Đường thẳng này gọi là cát tuyến với $(O; R)$.
3. Vậy muốn xác định vị trí của đường thẳng d và đường tròn ta cần tìm bán kính R và khoảng cách $d(O; d)$ rồi so sánh và kết luận.

Vấn đề 4: tiếp tuyến của đường tròn.

1. Cho $(O; R)$ tiếp tuyến của $(O; R)$ là một đường thẳng tiếp xúc với $(O; R)$.
2. Vậy d là tiếp tuyến $(O; R) \Leftrightarrow d \perp OA$ tại A . A gọi là tiếp điểm.



3. Nói cách khác : d là tiếp tuyến của $(O; R) \Leftrightarrow d(O; d) = R$.
4. Ta có tính chất: từ một điểm M nằm ngoài $(O; R)$ ta kẻ được hai tiếp tuyến đến $(O; R)$ tại hai tiếp điểm A và B khi đó $MA = MB$.
5. Từ một điểm A trên $(O; R)$ ta kẻ được một tiếp tuyến duy nhất, đó là đường thẳng qua A và vuông góc bán kính OA .
6. Từ hai điểm A và B trên (O) kẻ hai tiếp tuyến cắt nhau tại M thì $MA = MB$.



B

7. Ngoài ra ta còn có : MO là phân giác của góc AOB và OM là phân giác góc AOB.

8. Phương pháp vẽ tiếp tuyến với (O) từ một điểm nằm ngoài (O).

Ta nối OM.

Vẽ (I; OM/2) cắt (O) tại hai điểm A và B.

Nối MA và MB được hai tiếp tuyến.

Vấn đề 5: vị trí tương đối của hai đường tròn.

1. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ khi đó dựa vào khoảng cách OO' và $R; R'$ ta có các khả năng sau:
2. Nếu $OO' = R - R'$ với $R > R'$ thì hai đường tròn này tiếp xúc trong.
3. Nếu $OO' = R + R'$ thì hai đường tròn có một điểm chung và điểm này là giao điểm của OO' và hai đường tròn. Ta gọi hai đường tròn tiếp xúc ngoài.
4. Nếu $OO' < R + R'$ thì hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm. Hai điểm này nhận OO' làm trung trực.
5. Nếu $OO' > R + R'$ thì hai đường tròn không cắt nhau và ngoài nhau.
6. $OO' < R - R'$ thì hai đường tròn đựng nhau. $(O; R)$ chứa $(O'; R')$ hay $(O'; R)$ chứa trong $(O; R)$.
7. Hai đường tròn đồng tâm là hai đường tròn có cùng tâm.
8. Nếu có hai đường tròn thì tiếp tuyến chung của chúng và đường nối tâm OO' đồng quy.
 - Nếu đồng quy bên trong đoạn OO' thì gọi là tiếp tuyến chung trong.
 - Nếu đồng quy bên ngoài đoạn OO' thì gọi là tiếp tuyến chung ngoài.
 - Điểm đồng quy này chia OO' theo tỉ lệ bằng tỉ lệ hai bán kính.

Vấn đề 6: đường tròn ngoại tiếp- nội tiếp và bàng tiếp tam giác... đa giác.

1. Cho tam giác ABC, đường tròn đi qua 3 đỉnh A; B và C của tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
2. Tâm của đường tròn ngoại tiếp là điểm cách đều 3 đỉnh nên là giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh tam giác.
3. Đường tròn tiếp xúc với cả ba cạnh của tam giác ABC gọi là đường tròn nội tiếp tam giác.
4. Tâm của đường tròn nội tiếp là điểm cách đều 3 cạnh nên nó là giao điểm của ba đường phân giác.
5. Đường tròn tiếp xúc với 1 cạnh BC và phần kéo dài của hai cạnh kia (AB và AC) gọi là đường tròn bàng tiếp trong góc A.
6. Vậy đường tròn bàng tiếp trong góc A có tâm là giao điểm phân giác trong góc A và hai phân giác ngoài tại B và C.
7. Một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.
8. Tam giác nội tiếp đường tròn thì đường tròn này gọi là ngoại tiếp tam giác.
9. Tam giác ngoại tiếp đường tròn thì đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Vấn đề 7: Góc ở tâm- số đo độ của cung—so sánh cung.

1. Góc ở tâm là góc có đỉnh là tâm của đường tròn.
2. Góc này cắt đường tròn tại A và B khi đó cung AB là cung bị chắn của góc ở tâm AOB.
3. Ta có tính chất: số đo cung bị chắn bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
4. So sánh cung: cung nào lớn hơn thì có số đo cũng lớn hơn và ngược lại.

5. Cung nào có góc ở tâm lớn hơn thì lớn hơn và ngược lại.

Vấn đề 8: Liên hệ giữa cung và dây.

1. Cho (O) cung AB là đường cong chạy từ A đến B theo đường tròn. Còn dây (dây cung) là đoạn thẳng AB.
2. Ta chú ý với hai điểm A và B trên (O) luôn tạo ra hai cung lớn và cung nhỏ. Sau đây ta chỉ xét cung nhỏ.
3. Hai dây cung bằng nhau $\Leftrightarrow$ hai cung bằng nhau.
4. Dây lớn hơn $\Leftrightarrow$ cung lớn hơn.

Vấn đề 9: góc nội tiếp.

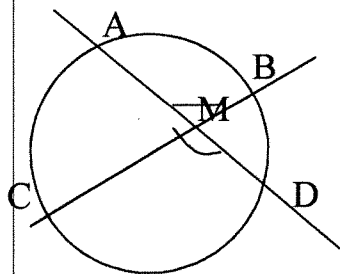
1. Góc nội tiếp của (O) là góc có đỉnh nằm trên đường tròn (O) và hai cạnh cắt (O) tại hai điểm phân biệt.
2. Để có góc nội tiếp thường ta có ba điểm nằm trên đường tròn.
3. Số đo góc nội tiếp chắn cung bằng $\frac{1}{2}$ số đo góc ở tâm cùng chắn cung đó. Chú ý là cùng một cung.
4. Góc nội tiếp có số đo bằng $\frac{1}{2}$ số đo cung bị chắn.
5. Cùng một cung có thể có nhiều góc nội tiếp thì các góc này đều bằng nhau.
6. Đặc biệt góc nội tiếp chắn nửa đường tròn thì là góc vuông 90° .
7. Các cung bằng nhau thì góc nội tiếp chắn cung đó cũng bằng nhau và ngược lại.
8. Cung nào lớn hơn thì góc nội tiếp chắn cung đó cũng lớn hơn.

Vấn đề 10: góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung.

1. Góc tạo bởi một tiếp tuyến tại tiếp điểm A và dây cung AX gọi là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung.
2. Số đo của góc này bằng $\frac{1}{2}$ số đo góc ở tâm chắn cung AX.
3. Số đo của góc này bằng $\frac{1}{2}$ số đo cung AX.
4. Số đo góc này cũng bằng số đo một góc nội tiếp bất kỳ chắn cung đó.

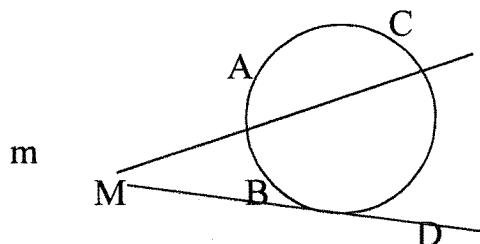
Vấn đề 11: góc có đỉnh bên trong – bên ngoài đường tròn.

1. Cho (O) và M trong (O) khi đó có hai đường thẳng cùng qua M tạo thành góc. Góc này là góc bên trong đường tròn. Hai đường thẳng này cắt đường tròn tạo thành các cung.
2. Khi đó số đo góc ở trong đường tròn bằng tổng số đo hai cung này chia hai.

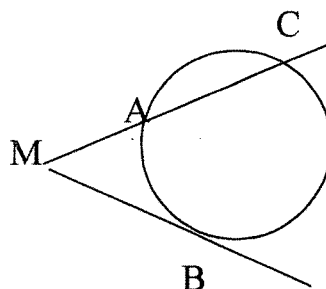


$$\widehat{AMB} = \widehat{CMD} = \frac{sd\widehat{AB} + sd\widehat{CD}}{2}.$$

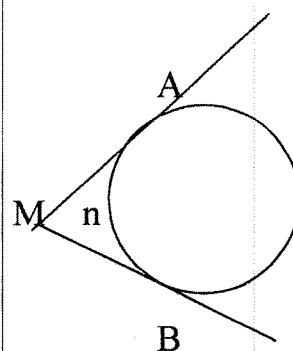
3. Cho (O) và M ngoài (O) khi đó góc mà các cạnh của nó luôn tiếp xúc hoặc cắt (O) gọi là góc ngoài đường tròn (O) tại M. Khi đó góc này cũng cắt đường tròn tạo thành hai cung; một cung lớn và một cung nhỏ.
4. Số đo góc ngoài bằng số đo cung lớn – cung nhỏ sau đó chia hai.
- 5.



$$\widehat{AMB} = \frac{sd\widehat{CD} - sd\widehat{AB}}{2}$$



$$\widehat{AMB} = \frac{sd\widehat{CB} - sd\widehat{AB}}{2}$$



$$\widehat{AMB} = \frac{sd\widehat{AmB} - sd\widehat{AB}}{2}$$

Vấn đề 12: cung chứa góc.

1. Cho đoạn thẳng AB cố định khi đó quỹ tích các điểm M sao cho: $\widehat{AMB} = \alpha$ cho trước là một cung. Cung này được gọi là cung chứa góc α độ nhận AB làm dây.
2. Cho một dây AB và α độ khi đó ta có hai cung chứa góc α độ nhận AB làm dây và hai cung này đối xứng qua AB.
3. Cách vẽ cung chứa góc α độ nhận AB làm dây như sau:

Có AB: tại A vẽ tia At tạo AB góc α .

Tại A vẽ tia Ax $\perp$ At cắt trung trực AB tại O.

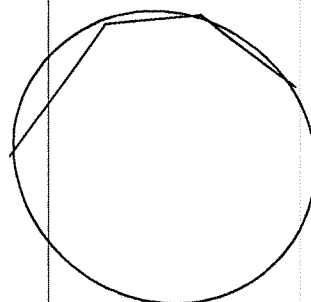
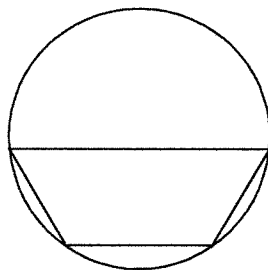
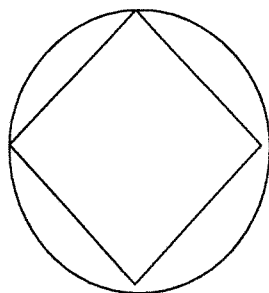
Vẽ cung tròn (O; OA) ở phía chứa O.

Khi đó cung này chính là cung chứa góc α nhận AB làm dây.

Ta lấy O' đối xứng O qua AB và vẽ cung tròn (O'; O'A) ta được cung thứ hai.

Vấn đề 13: tứ giác nội tiếp.

1. Tứ giác nội tiếp là tứ giác có 4 đỉnh nằm trên một đường tròn.
2. Tứ giác ABCD nội tiếp đồng nghĩa 4 điểm A; B; C và D cùng nằm trên 1 đường tròn.
3. Tứ giác nội tiếp đường tròn thì đường tròn gọi là ngoại tiếp tứ giác đó.
4. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác là giao điểm ba đường trung trực của ba cạnh tứ giác đó.
5. Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O; R) khi đó $OA = OB = OC = OD = R$.
6. Chú ý: O có thể nằm ngoài tứ giác; cũng có thể nằm trong hoặc nằm trên một cạnh chứ không phải lúc nào cũng nằm trong.



7. Cho ABCD là tứ giác nội tiếp thì $A + C = B + D = 180^\circ$.
8. Ngược lại tứ giác ABCD có $A + C = 180^\circ$ hoặc $B + D = 180^\circ$ thì ABCD nội tiếp.
9. Để c/m tứ giác ABCD nội tiếp ta có các cách sau:
 1. Chỉ ra $A + C = 180^\circ$.
 2. Chỉ ra $B + D = 180^\circ$.

- Chỉ ra bốn điểm A; B; C và D cùng thuộc một đường tròn nào đó cụ thể.
- Chỉ ra các góc nội tiếp tại A và B cùng nhìn CD 1 góc bằng nhau.

Vấn đề 14: đa giác đều ngoại tiếp--nội tiếp đường tròn.

- Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh và góc đều bằng nhau.
- Đa giác nội tiếp (O) là đa giác có các đỉnh cùng nằm trên (O). Khi đó đường tròn gọi là ngoại tiếp đa giác.
- Đa giác ngoại tiếp (O) là đa giác có các cạnh cùng tiếp xúc (O). Khi đó (O) gọi là ngoại tiếp đa giác.
- Mỗi đa giác đều bất kỳ có một đường tròn ngoại tiếp và 1 đường tròn nội tiếp và hai đường này đồng tâm. Tâm này là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh hoặc là hai đường phân giác của hai góc.
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm đến đỉnh: $OA = R$.
- Bán kính đường tròn nội tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm O đến 1 cạnh. Khoảng cách này gọi là trung đoạn của đa giác.
- Cho n giác đều cạnh a khi đó:
Chu vi của đa giác: $2p = na$ với p là nửa chu vi (tên thường dùng).

Mỗi góc có số đo: $A = B = \dots = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$. (dùng tỉ số lượng giác).

Bán kính đường tròn nội tiếp $r = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$.

Ta có: $R^2 - r^2 = a^2/4$.

Diện tích đa giác đều: $S = n/2 \cdot a \cdot r$.

Vấn đề 15: độ dài đường tròn--diện tích hình tròn.

- Đường tròn chỉ là đường biên ngoài còn hình tròn là cả phần trong và biên.
- Cho (O; R) khi đó độ dài đường tròn chính là chu vi của đường tròn: $C = 2\pi R$.
- Nếu cho cung n° trên (O; R) thì độ dài cung là: $l = \frac{\pi R \cdot n^\circ}{180^\circ}$. Vì cả đường tròn 360° dài $2\pi R$ nên 1° dài $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ sau đó ta nhân lên.
- Diện tích của (O; R) là: $S = \pi R^2$.
- Trên (O; R) cho cung AB có số đo n° khi đó hình quạt OAB có diện tích:
 $S_{\text{quạt OAB}} = \pi R^2 \frac{n^\circ}{360^\circ} = l_{\text{ab}} \cdot R/2$.
- Hình viên phân là ta lấy phần quạt rồi bỏ đi tam giác OAB là được viên phân : tính diện tích viên phân lấy $S_{\text{h.quạt}} - S_{\text{tgiac OAB}}$.
- Hình xuyến là hình tạo ra khi có hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; r) với $R > r$. Bằng cách lấy đường tròn lớn và bỏ đi đường tròn nhỏ. Phần ở giữa là hình xuyến.
Vậy: $S_{\text{xuyến}} = S_{\text{tròn lớn}} - S_{\text{tròn nhỏ}} = \pi(R^2 - r^2)$.

8. $\pi = 3.14\dots$ nhưng thường dùng là $\pi = 3.14$.

Vấn đề 16: phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng.

1. Ta có thể chỉ ra ba điểm tạo thành góc bẹt (180°).
2. Vận dụng tính chất các đường đồng quy.
3. C/m hai tia AB và AC trùng nhau theo tiên đề Ôclit (cùng song song 1 đường).
4. Chỉ ra 3 điểm cùng nằm trên 1 đường nào đó.
5. Có thể chỉ ra $AB+BC=AC$.

Vấn đề 17: phương pháp chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau.

1. Dùng hai tam giác bằng nhau.
2. Dùng tính chất của tam giác; hình thang cân; hình bình hành;.....
3. Sử dụng tính chất của đường chéo các hình. Tính chất đường trung bình.
4. Sử dụng tính chất bắc cầu.

Vấn đề 18: phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

1. Hai đường thẳng vuông góc là hai đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có 1 góc vuông 90° .
2. Cho điểm O và d khi đó có duy nhất một đường thẳng qua O và $\perp d$.
3. Cho $a \parallel b$ khi đó nếu $c \perp a$ thì $c \perp b$.
4. Ngoài ra ta còn dùng các tính chất khác như xem hai đường thẳng là hai cạnh của tam giác vuông. Xét các tính chất tam giác cân; tam giác vuông; hình thoi, hình chữ nhật;..... Để c/m hai đường thẳng vuông góc.

Vấn đề 19: Chứng minh hai đường thẳng song song.

1. Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung (không làm được gì).
2. Hai đường thẳng song song khi có đường thẳng cắt qua và tạo các cặp:
So le trong bằng nhau.
Đồng vị bằng nhau.
Các góc trong cùng phía đồng vị.
3. Hai đường thẳng cùng vuông góc đường thứ ba thì song song.
4. Hai cạnh đối của hình bình hành thì song song.
5. Tính chất đường trung bình tam giác và hình thang.
6. Các tính chất của các hình khác như hình hộp chữ nhật.....
7. Tính chất bắc cầu: chỉ ra $a \parallel b$ và $b \parallel c$ thì $a \parallel c$.

Vấn đề 20: Chứng minh các đường thẳng đồng quy.

1. Các đường thẳng đồng quy là các đường thẳng đó cùng đi qua một điểm.
2. Ta có thể chỉ ra một điểm O nào đó và chứng minh các đường thẳng cùng đi qua nó.
3. Ta gọi O là giao điểm hai đường thẳng và chỉ ra đường còn lại cũng qua nó.
4. Ta dùng tính chất các đường chéo hình bình hành; hình chữ nhật để chỉ ra các đường cùng đi qua trung điểm cạnh nào đó.
5. Vận dụng tính chất các đường đồng quy trong tam giác..
6. Ta vận dụng định lý Talet đảo về các đoạn song song.

Vấn đề 21: Chứng minh hệ thức hình học.

1. Tức là ta phải đi chứng minh một đẳng thức đúng từ các dữ kiện đề bài cho.
2. Ta thường dùng các công thức của tam giác vuông nếu trong bài xuất hiện góc vuông. (xem phần trước).

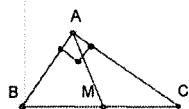
3. Ta dùng phương pháp hai tam giác đồng dạng để chứng minh tỉ số bằng nhau và từ tỉ số này ta suy ra đẳng thức cần chứng minh.
4. Chú ý là có thể sử dụng tính chất bắc cầu trong nhiều tam giác đồng dạng.
5. Vận dụng công thức diện tích và phân tích một hình thành nhiều tam giác và cộng diện tích lại.
6. Sử dụng tam giác bằng nhau để chuyển cạnh khi cần thiết.
7. Dùng các tính chất của đường trung bình, HBH; đoạn chắn bởi các đường thẳng //...

Vấn đề 22: tính góc.

1. Để tính góc ta dùng các tính chất về góc đối đỉnh; góc kề bù; góc phụ nhau.
2. Các tính chất về góc của tam giác; góc trong và góc ngoài.
3. Vận dụng tính chất tổng các góc tam giác; tứ giác.
4. Vận dụng tính chất phân giác; phân giác trong và phân giác ngoài vuông góc.
5. Vận dụng tính chất của góc nội tiếp.
6. Vận dụng tính chất các tam giác đồng dạng.
7. Các tính chất về góc và hai đường thẳng song song.
8. Các tính chất của hình thang; hình thang cân; hình bình hành; hình thoi;...

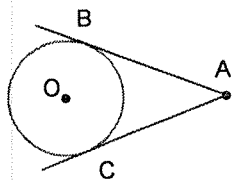
Vấn đề 23: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

- a) CM 2 Δ bằng nhau
- b) Cùng bằng cạnh thứ ba
- c) $AB = CD = EF = GH \Rightarrow AB = GH$
- d) Tổng (hay hiệu) của hai cặp đoạn thẳng bằng nhau từng đôi một thì bằng nhau
- e) Δ có 2 góc $= \Rightarrow \Delta$ cân $\Rightarrow$ 2 cạnh bằng nhau
- f) Δ cân $\Rightarrow$ đường phân giác hay đường cao ở đỉnh chia đôi cạnh đáy
- g) Áp dụng đl I)3
- h) Tính chất đoạn chắn
- i) CM tứ giác là hbh $\Rightarrow$ 2 cạnh đối bằng nhau
- j) ΔABC vuông tại A có AM là trung tuyến



$$AM = MB = MC$$

- k) Khoảng cách từ tâm đến 2 dây cung bằng nhau thì 2 dây cung bằng nhau
- l) Giao điểm 2 tiếp tuyến trong 1 đường tròn cách đều 2 tiếp điểm



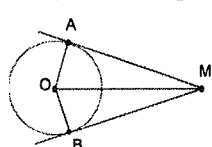
$$AB = AC$$

$$m) \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD$$

Vấn đề 24: Chứng minh hai góc bằng nhau:

- a) CM 2 Δ bằng nhau
- b) Δ có 2 cạnh bằng $\Rightarrow \Delta$ cân $\Rightarrow$ 2 góc bằng
- c) Δ cân thì đường cao hay trung tuyến cũng là phân giác
- d) 2 cặp góc bằng $\Rightarrow$ 2 Δ đồng dạng $\Rightarrow$ cặp góc thứ ba bằng

- e) 2 góc đối đỉnh
- f) 2 đường thẳng song song bị chặn bởi đường thẳng thứ ba $\Rightarrow$ 2 góc so le trong bằng nhau, 2 góc đồng vị bằng
- g) 2 góc (cùng nhọn hoặc cùng tù) có cạnh đối một song song
- h) 2 góc (cùng nhọn hoặc cùng tù) có cạnh đối một vuông góc
- i) cùng bằng góc thứ ba
- j) cùng phụ (hoặc cùng bù) với góc thứ ba
- k) cùng cộng với góc thứ ba bằng 60°
- l) $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4} \Rightarrow \hat{1} = \hat{4}$
- m) 2 góc là tổng (hay hiệu) của 2 góc bằng nhau từng đôi một
- n) CM tứ giác là hbh $\Rightarrow$ 2 góc đối bằng nhau
- o) Hai tiếp tuyến cắt nhau



$$\begin{cases} \widehat{AMO} = \widehat{BMO} \\ \widehat{AOM} = \widehat{BOM} \end{cases}$$

Vấn đề 25: CM 2 đường thẳng song song:

- a) 2 góc so le trong bằng nhau $\Rightarrow$ 2 đt //
- b) 2 góc đồng vị bằng nhau $\Rightarrow$ 2 đt //
- c) 2 góc trong (hoặc ngoài) cùng phía bù nhau $\Rightarrow$ 2 đt //
- d) 2 đt cùng // với đt thứ ba $\Rightarrow$ 2 đt //
- e) 2 đt cùng $\perp$ với đt thứ ba $\Rightarrow$ 2 đt //
- f) CM tứ giác là một trong các hình: hbh, hcn, h.thoi, h.vuông $\Rightarrow$ 2 cạnh đối //
- g) Đường trung bình trong một Δ thì // với cạnh thứ ba
- h) Áp dụng đl Ta let đảo mục I) 7)

Vấn đề 26: CM 2 đường thẳng vuông góc với nhau

- a) 2 đt giao nhau tạo thành 2 góc kề = $\Rightarrow$ 2 đt $\perp$
- b) 2 đt tạo thành góc 90° , mục I) 6)
- c) Δ có 2 góc phụ nhau $\Rightarrow$ góc còn lại bằng $90^\circ \Rightarrow$ 2 đt $\perp$
- d) $\left. \begin{matrix} a // b \\ a \perp c \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \perp c$
- e) $a // c, b // d, c \perp d \Rightarrow a \perp b$
- f) Δ cân đ. phân giác hay trung tuyến cũng là đ. cao
- g) 2 tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc
- h) Định lý Pitago đảo
- i) Đường cao thứ 3 trong 1 Δ
- j) Đường kính qua trung điểm 1 dây không qua tâm $\Rightarrow$ đường kính $\perp$ dây cung
- k) Tiếp tuyến $\perp$ bán kính đi qua tiếp điểm
- l) 2 cạnh của góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

Vấn đề 27: CM 3 điểm thẳng hàng

- a) $\widehat{ABC} = 180^\circ \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng
- b) $\left. \begin{matrix} AB // m \\ AC // m \end{matrix} \right\} \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng
- c) $\left. \begin{matrix} AB \perp n \\ BC \perp n \end{matrix} \right\} \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng

d) $\widehat{xAB} = \widehat{xAC} \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng

e) Định lý về các đường đồng quy trong Δ

f) Đường tròn (O) có AB là đường kính $\Rightarrow A, O, B$ thẳng hàng

g) Đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A $\Rightarrow O, A, O'$ thẳng hàng

Vấn đề 28: CM 4 điểm nằm trên 1 đường tròn

a) CM 4 điểm cách đều 1 điểm nào đó

b) CM 4 điểm là 4 đỉnh của hình thang cân, hcn, h.vuông

c) CM là đỉnh của tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180°

d) 2 điểm M, N cùng nhìn đoạn AB dưới 1 góc vuông

e) 2 điểm M, N cùng nhìn đoạn AB dưới 1 góc α

CHƯƠNG IV

HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN, HÌNH CẦU

A. CÔNG THỨC CÁC HÌNH KHÔNG GIAN

a. Hình trụ.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh$

- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi rh + \pi r^2$

- Thể tích hình trụ: $V = Sh = \pi r^2 h$

Trong đó $\left\{ \begin{array}{l} r: \text{bán kính} \\ h: \text{chiều cao} \end{array} \right.$

b. Hình nón:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rl$

- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi rl + \pi r^2$

- Thể tích hình trụ: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Trong đó $\left\{ \begin{array}{l} r: \text{bán kính} \\ l: \text{đường sinh} \end{array} \right.$

c. Hình nón cụt:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l$

- Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

Trong đó $\left\{ \begin{array}{l} r_1: \text{bán kính đáy lớn} \\ r_2: \text{bán kính đáy nhỏ} \\ l: \text{đường sinh} \\ h: \text{chiều cao} \end{array} \right.$

d. Hình cầu.

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = \pi d$

- Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Trong đó $\left\{ \begin{array}{l} R: \text{bán kính} \\ d: \text{đường kính} \end{array} \right.$

B. CÔNG THỨC KHỐI ĐA DIỆN:

1. **Thể tích khối lăng trụ:** $V = Bh$ (B: diện tích đáy; h: chiều cao)

2. **Thể tích của khối hộp chữ nhật:**

$V = a.b.c$ với a, b, c là ba kích thước của khối hộp chữ nhật.

3. **Thể tích khối chóp:** $V = \frac{1}{3} B h$ (diện tích đáy là đa giác)

4. **Tỉ số thể tích của khối chóp:** $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$

5. **Diện tích xq của hình nón tròn xoay:**

$S_{xq} = \pi R l$ (R: bk đường tròn; l: đường sinh)

6. **Thể tích của khối nón tròn xoay:**

$$V = \frac{1}{3} B h \quad (\text{diện tích đáy là đường tròn})$$

7. Diện tích xq của hình trụ tròn xoay:

$$S_{xq} = 2\pi R l \quad (R: \text{bk đường tròn}; l: \text{đường sinh})$$

8. Thể tích của khối trụ tròn xoay:

$$V = B h = \pi R^2 h \quad (h: \text{chiều cao khối trụ})$$

9. Diện tích của mặt cầu:

$$S = 4\pi R^2 \quad (R: \text{bk mặt cầu})$$

10. Thể tích của khối nón tròn xoay:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (R: \text{bán kính mặt cầu})$$

C. CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN

1. Hình lăng trụ: Hình lăng trụ là hình đa diện có hai mặt song song gọi là đáy và các cạnh không thuộc hai đáy song song với nhau. Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều

$$S_{xq} = p \cdot l \quad (p \text{ là chu vi thiết diện thẳng, } l \text{ là độ dài cạnh bên})$$

➤ Lăng trụ đứng: $S_{xq} = p \cdot h$ (p là chu vi đáy, h là chiều cao)
 $V = B \cdot h$ (B là diện tích đáy, h là chiều cao)

➤ Hình hộp chữ nhật:

$$S_{tp} = 2(ab + bc + ca) \quad (a, b, c \text{ là các kích thước của hình hộp chữ nhật})$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$\text{Các đường chéo hình hộp chữ nhật } d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

➤ Hình lập phương: $V = a^3$ (a là cạnh)

2. Hình chóp: Hình chóp là hình đa diện có một mặt là đa giác, các mặt khác là tam giác có chung đỉnh. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các mặt bên bằng nhau. Hình chóp cắt là phần hình chóp nằm giữa đáy và thiết diện song song với đáy. Hình chóp cắt từ hình chóp đều gọi là hình chóp cắt đều

➤ Hình chóp đều: $S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a \cdot d$ (n là số cạnh đáy; a là độ dài cạnh đáy;

d là độ dài trung đoạn)

$$S_{tp} = S_{xq} + B \quad (B \text{ là diện tích đáy})$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

➤ Hình chóp cắt đều: $S_{xq} = \frac{1}{2}(n \cdot a + n \cdot a') \cdot d$ (n là số cạnh đáy; a, a' cạnh đáy; d trung đoạn chiều cao mặt bên)

$$V = V_1 + V_2 \quad (V_1 \text{ thể tích hình chóp cắt; } V_2 \text{ thể tích hình chóp trên})$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot h (B + B' + \sqrt{B \cdot B'}) \quad (B, B' \text{ là diện tích đáy, } h \text{ là chiều cao})$$

3. Hình trụ: Hình trụ là hình sinh ra bởi hình chữ nhật quay xung quanh một cạnh của nó

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h$ (R là bán kính đáy; h là chiều cao)

- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi \cdot R \cdot h + 2\pi \cdot R^2$

- Thể tích hình trụ: $V = S \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h$ (S là diện tích đáy)

4. Hình nón: Hình nón là hình sinh ra bởi tam giác vuông quay xung quanh một cạnh góc vuông của nó. Hình nón cụt là phần hình nón giữa đáy và một thiết diện vuông góc với trục

➤ Hình nón: - Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l$ (R là bán kính đáy; l là đường sinh)

- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi \cdot R \cdot l + \pi \cdot R^2$

- Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$ (h là chiều cao)

➤ Hình nón cụt:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(R_1 + R_2) \cdot l$ ($R_1; R_2$ là bán kính hai đáy; l là đường sinh)

- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi(R_1 + R_2) \cdot l + \pi(R_1^2 + R_2^2)$

- Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$ (h là chiều cao)

5. Hình cầu:

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi \cdot R^2$ (R là bán kính)

- Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

MỤC LỤC

LỚP 6

A. ĐẠI SỐ

Chương 1: số tự nhiên	2
Chương 2: Số nguyên	8
Chương 3: Phân số	10

B. HÌNH HỌC

Chương : Đoạn thẳng	13
Chương 2: Góc	15

LỚP 7

A. ĐẠI SỐ

Chương 1:Số hữu tỉ - Số thực	17
Chương 2: Hàm số và đồ thị	22
Chương 3: Thống kê	24
Chương 4: Biểu thức đại số	26

B. HÌNH HỌC

Chương 1: Đường thẳng vuông góc – đường thẳng song song	29
Chương 2: Tam giác	31
Chương 3: Quan hệ các yếu tố trong tam giác – Các đường đồng quy của tam giác	35

LỚP 8

A. ĐẠI SỐ

Chương 1:Phép nhân và phép chia trong đa thức	40
Chương 2:Phân thức đại số	46
Chương 3:Phương trình	49
Chương 4: Bất phương trình	54

B. HÌNH HỌC

Chương 1: Tam giác	61
Chương 2: Đa giác – Diện tích đa giác	67
Chương 3: Tam giác đồng dạng	70
Chương 4: Hình lăng trụ đứng – Hình chóp đều	75

LỚP 9

A. ĐẠI SỐ

Chương 1:Căn bậc hai – căn bậc ba	79
Chương 2:Hàm số bậc nhất	84
Chương 3:Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	89
Chương 4: Hàm số $y = ax^2$ và phương trình bậc hai	93

B. HÌNH HỌC

Chương 1: Hệ thức lượng trong tam giác vuông	102
Chương 2: Đường tròn	105
Chương 3: Góc với đường tròn	108
Chương 4: Hình trụ - Hình nón – Hình cầu	121