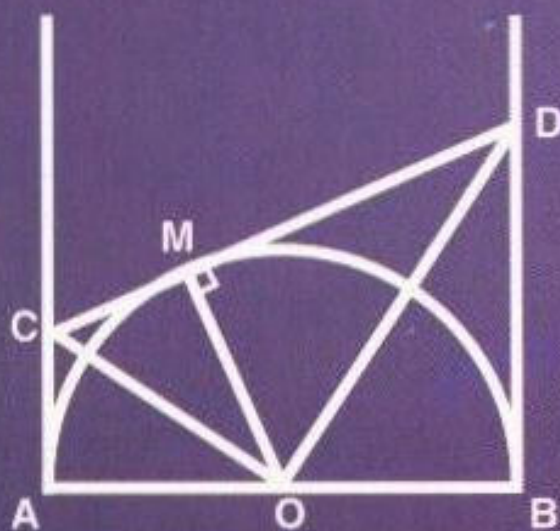


PGS. TS. ĐẬU THẾ CẤP
PHAN VĂN ĐỨC

500 bài tập *Toán chọn lọc*

BỒI DƯỠNG
HỌC SINH KHẢ, GIỎI



9



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS.TS ĐẬU THẾ CẤP - PHAN VĂN ĐỨC

500
BÀI TẬP
TOÁN
CHỌN LỌC

downloadsachmienphi.com
Download Sách Hay | Đọc Sách Online

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT: (04) 9715013; (04) 9724770 - Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH
Biên tập: MINH HẢI
Chế bản: HOÀI TRINH
Trình bày bìa: HS. ĐỖ DUY NGỌC

500 BÀI TẬP CHỌN LỌC TOÁN 9

Mã số 1L - 102 ĐH2007

In 3.000 bản, khổ 16 x 24 cm. Tại XN In Đồng Tháp

Số xuất bản: 273-2007/CXB/ 10-48/ĐHQGHN, ngày 11/4/2007

Quyết định xuất bản số: 202/LKXB

In xong nộp lưu chiểu quý II năm 2007.

Lời nói đầu

Quyển “500 BÀI TẬP TOÁN CHỌN LỌC LỚP 9”

Với mong muốn góp phần nâng cao chất lượng dạy và học ở bậc Trung học cơ sở, để đáp ứng yêu cầu học Toán của học sinh lớp 9 và giúp quý thầy, cô giáo, quý bậc phụ huynh có thêm tài liệu ôn tập và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán.

Tập sách này chọn lọc 500 bài tập Toán được sắp xếp từ dễ đến khó, từ đơn giản đến phức tạp, phù hợp với chương trình Toán 9 hiện hành. Trong đó có những bài Toán trắc nghiệm vận dụng trực tiếp kiến thức đã học, có những bài đòi hỏi phải suy luận vận dụng kiến thức một cách sáng tạo nhằm củng cố nâng cao kiến thức cho học sinh. Có những bài Toán rèn luyện kỹ năng tính toán, có những bài Toán rèn luyện năng lực tư duy giúp học sinh phát triển trí thông minh.

Phần hướng dẫn giải được trình bày cẩn thận, rõ ràng, dễ hiểu nhằm giúp học sinh dễ dàng trong tự học, quý thầy cô giáo thuận tiện trong việc hướng dẫn học sinh học tập, ôn thi vào lớp 10 phổ thông, lớp 10 chuyên và bồi dưỡng học sinh giỏi.

Chúng tôi tin rằng, quyển sách này là một tài liệu hữu ích cho các em học sinh lớp 9.

Chúc các em thành công.

TÁC GIẢ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I

CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA

§1. CĂN BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Căn bậc hai

Định nghĩa : Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

- $a > 0$: có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$
- $a = 0$: có một căn bậc hai là $\sqrt{0} = 0$
- $a < 0$: không có căn bậc hai

2. Căn bậc hai số học

Định nghĩa : Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a . Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.

Chú ý : Với $a \geq 0$, ta có $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = a \end{cases}$

3. So sánh các căn bậc hai số học

Định lý : Với các số a và b không âm, ta có : $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

B. BÀI TẬP

Bài 1 Tìm x sao cho :

a. $x^2 = 16$; b. $x^2 = \frac{9}{25}$; c. $x^2 = -4$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $x^2 = 16$ thì $x = 4$ hay $x = -4$.

b. $x^2 = \frac{9}{25}$ thì $x = \frac{3}{5}$ hay $x = -\frac{3}{5}$.

c. $x^2 = -4$ thì không tồn tại số thực x .

Bài 2 Tính :

a. $\sqrt{64}$; b. $\sqrt{0,49}$; c. $\sqrt{0,0081}$; d. $\sqrt{\frac{36}{121}}$
 e. $\sqrt{(-2)(-50)}$; f. $\sqrt{1,44} + 2\sqrt{0,09}$; g. $\left(\sqrt{1\frac{16}{9}} - \sqrt{\frac{49}{9}}\right) : 2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\sqrt{64} = 8$;

b. $\sqrt{0,49} = 0,7$;

c. $\sqrt{0,0081} = 0,09$;

d. $\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}$;

e. $\sqrt{(-2)(-50)} = 10$;

f. $\sqrt{1,44} + 2\sqrt{0,09} = 1,2 + 2 \cdot 0,3 = 1,8$;

g. $\left(\sqrt{1\frac{16}{9}} \pm \sqrt{\frac{49}{9}}\right) : 2 = \left(\frac{5}{3} - \frac{7}{3}\right) : 2 = -\frac{2}{3} : 2 = -\frac{1}{3}$.

Bài 3 Thực hiện các phép tính sau :

a. $(2 - \sqrt{5})^2$

b. $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$

c. $(3\sqrt{5} - 1)(3\sqrt{5} + 1)$

d. $(5\sqrt{2} - 3)(5\sqrt{2} + 3)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $(2 - \sqrt{5})^2 = 2^2 - 4\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$.

b. $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$.

c. $(3\sqrt{5} - 1)(3\sqrt{5} + 1) = (3\sqrt{5})^2 - 1 = 9(\sqrt{5})^2 - 1 = 9 \cdot 5 - 1 = 44$.

d. $(5\sqrt{2} - 3)(5\sqrt{2} + 3) = (5\sqrt{2})^2 - 3^2 = 25(\sqrt{2})^2 - 9 = 25 \cdot 2 - 9 = 41$.

Bài 4 Giải phương trình :

a. $\sqrt{x} = 3$

b. $\sqrt{x} = \sqrt{5}$

c. $\sqrt{x} = 0$

d. $\sqrt{x} = -2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\sqrt{x} = 3$ nên $x = 3^2$ vậy $x = 9$

b. $\sqrt{x} = \sqrt{5}$ nên $x = (\sqrt{5})^2$ vậy $x = 5$

c. $\sqrt{x} = 0$ nên $x = 0$

d. Vô nghiệm vì $\sqrt{x} \geq 0$.

Bài 5 So sánh các số :

a. $2\sqrt{31}$ và 10

b. $2 + \sqrt{3}$ và $3 + \sqrt{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Áp dụng định lí $a > b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Ta có $31 > 25$ nên $\sqrt{31} > 5$

hay $2\sqrt{31} > 10$.

b. Áp dụng định lí $a > b \geq 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2$.

Ta có : $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$

$(3 + \sqrt{2})^2 = 11 + 6\sqrt{2}$

Nhưng $4\sqrt{3} < 6\sqrt{2}$ (vì $(4\sqrt{3})^2 = 48$; $(6\sqrt{2})^2 = 72$)

nên $7 + 4\sqrt{3} < 11 + 6\sqrt{2}$. Vậy $2 + \sqrt{3} < 3 + \sqrt{2}$.

Bài 6 Cho hai số dương a và b . Chứng minh rằng :a. Nếu $a = b$ thì $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ và ngược lại.b. Nếu $a > b$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ và ngược lại.**HƯỚNG DẪN GIẢI**a. • Do a và b dương nên $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ đều xác định và đều là số dương.Từ $a = b$ (giả thiết) nên $a - b = 0$. Ta có

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

vì $a - b = 0$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ nên suy ra $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$. Vậy $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

• Điều ngược lại chứng minh tương tự như trên hoặc dùng phản chứng.

b. Dùng cách chứng minh tương tự câu a.

Bài 7 a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 1 + \sqrt{x-2}$.b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = 5 - \sqrt{2x-1}$.**HƯỚNG DẪN GIẢI**a. Ta có $\sqrt{x-2} \geq 0$ nên $A = 1 + \sqrt{x-2} \geq 1$.Suy ra A có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi và chỉ khi $\sqrt{x-2} = 0$. Hay $x = 2$.b. Ta có $\sqrt{2x-1} \geq 0$ nên $-\sqrt{2x-1} \leq 0$ hay $B = 5 - \sqrt{2x-1} \leq 5$.Suy ra B có giá trị lớn nhất bằng 5 khi và chỉ khi $\sqrt{2x-1} = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$.**§2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẸNG ĐẲNG THỨC**

$$\sqrt{A^2} = |A|$$

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**1. Căn thức bậc hai**

- Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là **căn thức bậc hai** của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.
- $\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) khi A lấy giá trị không âm. Với mỗi giá trị không âm thì $\sqrt{A}$ lấy giá trị là căn bậc hai số học của A .

2. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ **Định lý :** Với mọi số a , ta có $\sqrt{a^2} = |a|$.**Chú ý:** Một cách tổng quát, với A là biểu thức ta có $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$ **B. BÀI TẬP****Bài 8** Tính giá trị biểu thức sau :

a. $\sqrt{0,04} + \sqrt{0,25}$

b. $5,4 + 7\sqrt{0,36}$.

c. $0,5 \sqrt{100} - \sqrt{\frac{4}{25}}$

d. $\left(\sqrt{1\frac{19}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) : 5.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\sqrt{0,04} + \sqrt{0,25} = 0,2 + 0,5 = 0,7.$

b. $5,4 + 7 \sqrt{0,36} = 5,4 + 7 \cdot 0,6 = 9,6.$

c. $0,5 \sqrt{100} - \sqrt{\frac{4}{25}} = 0,5 \cdot 10 - \frac{2}{5} = 5 - 0,4 = 4,6.$

d. $\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) : 5 = \left(\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) : 5 = \left(\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right) : 5 = \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) : 5 = 0,1.$

Bài 9 Tìm giá trị của x để các căn thức sau có nghĩa :

a. $\sqrt{a-1}$

b. $\sqrt{2-3x}$

c. $\sqrt{1+\frac{x}{1-x}}$

d. $\sqrt{\frac{1-3x}{1+x^2}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\sqrt{a-1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow a-1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1.$

b. $\sqrt{2-3x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2-3x \geq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}.$

Tương tự

c. $x < 1.$

d. $x \leq \frac{1}{3}$ (vì $x^2 + 1 > 0 \forall x$).

downloadsachmienphi.com

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Bài 10 Tính

a. $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$;

b. $\sqrt{(-2)^2(3-\sqrt{5})^2} + 2\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| + |2-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1+2-\sqrt{3} = 1.$

b. $\sqrt{(-2)^2(3-\sqrt{5})^2} + 2\sqrt{(3+\sqrt{5})^2} = 2(3-\sqrt{5}) + 2(3+\sqrt{5}) = 12.$

Bài 11 a. Rút gọn: $\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}.$

b. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Xét $6+4\sqrt{2} = 4+4\sqrt{2}+2 = (2+\sqrt{2})^2.$

Tương tự $6-4\sqrt{2} = (2-\sqrt{2})^2.$

$$\Rightarrow \sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4.$$

b. Từ câu a phương trình đã cho được viết : $\sqrt{(x-1)^2} = 4$

$$\Leftrightarrow |x-1| = 4 \Leftrightarrow x-1 = \pm 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-3 \end{cases}$$

Bài 112 Viết các biểu thức sau đây dưới dạng của hiệu hai bình phương rồi phân tích ra thừa số :

a. $x^2 - 2$;

b. $x - 9$ với $x > 0$;

c. $4 + 3x$ với $x < 0$;

d. $5 - 16x^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

b. Với $x > 0$ ta có $x - 9 = (\sqrt{x})^2 - 3^2 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)$.

c. Với $x < 0$ ta có $4 + 3x = 2^2 - 3(-x) = 2^2 - (\sqrt{-3x})^2 = (2 - \sqrt{-3x})(2 + \sqrt{-3x})$.

d. $5 - 16x^2 = (\sqrt{5})^2 - (4x)^2 = (\sqrt{5} - 4x)(\sqrt{5} + 4x)$.

Bài 113 So sánh

a. $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ và 7;

b. $\sqrt{17} + \sqrt{5} + 1$ và $\sqrt{45}$;

c. $\frac{23 - 2\sqrt{19}}{3}$ và $\sqrt{27}$;

d. $\sqrt{3\sqrt{2}}$ và $\sqrt{2\sqrt{3}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Vì $\sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$ và $\sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$ nên $\sqrt{7} + \sqrt{15} < 3 + 4 = 7$.

b. Ta có $\sqrt{17} > \sqrt{16} = 4$, $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ nên :

$$\sqrt{17} + \sqrt{5} + 1 > 4 + 2 + 1 = \sqrt{49} > \sqrt{45}.$$

c. $\frac{23 - 2\sqrt{19}}{3} < \frac{23 - 2\sqrt{16}}{3} = \frac{23 - 2 \cdot 4}{3} = 5 = \sqrt{25} < \sqrt{27}$.

Vậy : $\frac{23 - 2\sqrt{19}}{3} < \sqrt{27}$.

d. Chú ý rằng : với các số dương a, b thì : $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$

Giả sử $\sqrt{3\sqrt{2}} > \sqrt{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow (\sqrt{3\sqrt{2}})^2 > (\sqrt{2\sqrt{3}})^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{2})^2 > (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 18 > 12$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên : $\sqrt{3\sqrt{2}} > \sqrt{2\sqrt{3}}$.

Bài 14 a. Trong các số sau đây, số nào là số nguyên ?

$$x = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}};$$

$$y = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}.$$

b. Chứng minh rằng với $x \geq 1$ thì

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = \begin{cases} 2 \text{ nếu } 1 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{x - 1} \text{ nếu } x > 2 \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

Do đó $x = 4$.

Vậy x là số nguyên.

Ta có $y = 2\sqrt{3}$.

Vậy y không phải là số nguyên.

b. Gọi biểu thức cần thu gọn là A , ta có :

$$A = |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1|$$

- Ta luôn có $|\sqrt{x-1} + 1| = \sqrt{x-1} + 1$ ($x \geq 1$).
- Với $|\sqrt{x-1} - 1|$ ta thấy :
 $+ x \geq 2$ thì $\sqrt{x-1} \geq 1$, do đó $|\sqrt{x-1} - 1| = \sqrt{x-1} - 1$;
 $+ 1 \leq x < 2$ thì $\sqrt{x-1} < 1$, do đó $|\sqrt{x-1} - 1| = 1 - \sqrt{x-1}$.
- Từ đó ta có $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \begin{cases} 2 & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \\ 2\sqrt{x-1} & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$

§3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lí

Với các số a và b không âm, ta có $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

2. Áp dụng

a. Quy tắc khai phương một tích

Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

b. Quy tắc nhân các căn bậc hai

Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

Chú ý : Một cách tổng quát, với các biểu thức A và B không âm ta có:
 $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

B. BÀI TẬP

Bài 15 Tính :

- | | | |
|---|---|---|
| a. $\sqrt{9 \cdot 64 \cdot 0,25}$ | ; | b. $\sqrt{3^4 \cdot (-2)^2}$; |
| c. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ | ; | d. $\sqrt{25^2 - 24^2}$; |
| e. $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$ | ; | g. $(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})$ |

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\sqrt{9 \cdot 64 \cdot 0,25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{64} \cdot \sqrt{0,25} = 3 \cdot 8 \cdot 0,5 = 12.$

b. $\sqrt{3^4 \cdot (-2)^2} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{(-2)^2} = 9 \cdot 2 = 18.$

c. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6.$

d. $\sqrt{25 - 24^2} = \sqrt{(25 - 24)(25 + 24)} = \sqrt{1 \cdot 49} = 7.$

e. $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) = (2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 12 - 18 = -6.$

g. $(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}) = (1 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 3 = -2\sqrt{2}.$

Bài 16 Chứng minh $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2} = 0.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét $x = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$

$\Rightarrow x^2 = 4 + \sqrt{7} - 2\sqrt{(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})} + 4 - \sqrt{7} = 8 - 2\sqrt{16 - 7} = 2.$

Vì $x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}.$

Vậy $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2} = 0$

Bài 17 Rút gọn: $A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Nhận xét $A > 0$. Ta có :

$A^2 = 4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{(4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})(4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})} + 4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow A^2 = 8 + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$

$\Leftrightarrow A^2 = 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2.$

Vậy $A = \sqrt{5} + 1.$

Bài 18 Phân tích thành nhân tử:

a. $5\sqrt{2} - \sqrt{15} + 5\sqrt{3} - \sqrt{10};$

b. $xy + y\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1 \ (x, y \geq 0);$

c. $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2} \ (x, y \geq 0);$

d. $\sqrt{x^2 - y^2} - x + y \ (|x| \geq |y|).$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $5\sqrt{2} - \sqrt{15} + 5\sqrt{3} - \sqrt{10} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - \sqrt{15} - \sqrt{10}$

$= 5(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(5 - \sqrt{5}).$

b. $xy + y\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1$

$= y\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + (\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} + 1)(y\sqrt{x} + 1).$

c. $\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{y^3} - \sqrt{xy^2}$

$= x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - y(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)$

$= (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$

d. $\sqrt{x^2 - y^2} - x - y$

$= \sqrt{(x + y)(x - y)} - (x - y) = \sqrt{x - y}(\sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}).$

Bài 19 So sánh các số: $\sqrt{1999} + \sqrt{2001}$ và $2\sqrt{2000}.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$(\sqrt{1999} + \sqrt{2001})^2 = 1999 + 2\sqrt{1999 \cdot 2001} + 2001$

$= 2 \cdot 2000 + 2\sqrt{(2000 - 1)(2000 + 1)}$

$= 2 \cdot 2000 + 2\sqrt{2000^2 - 1} < 2 \cdot 2000 + 2\sqrt{2000^2} = 4 \cdot 2000$

$\Rightarrow \sqrt{1999} + \sqrt{2001} < 2\sqrt{2000}.$

Bài 20 Giải phương trình

a. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2 = 0$

b. $(2 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = x + 5.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Giải phương trình

$$\begin{aligned} \text{a. } \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 2 &\Leftrightarrow |x-1| = 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ x-1=-2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

b. $(2 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = x + 5 \quad (1)$

Điều kiện $x \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{x} + \sqrt{x} + x = x + 5 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm là $x = 1$.**Bài 21** Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng :

$$a + b + c = \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \Leftrightarrow a = b = c.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\begin{aligned} a + b + c &= \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \\ \Leftrightarrow 2a + 2b + 2c - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ca} &= 0 \\ \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b + a - 2\sqrt{ac} + c + b - 2\sqrt{bc} + c &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \\ \sqrt{a} - \sqrt{c} = 0 \\ \sqrt{b} - \sqrt{c} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow a = b = c. \end{aligned}$$

§4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****1. Định lý**

Với số a không âm và số b dương, ta có $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

2. Áp dụng**a. Quy tắc khai phương một thương**

Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, trong đó số a không âm và số b dương, ta có thể lần lượt khai phương số a và số b , rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

b. Quy tắc chia hai căn bậc hai

Muốn chia căn bậc hai của số a không âm cho căn bậc hai của số b dương, ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

- **Chú ý :** Một cách tổng quát, với các biểu thức A không âm và B dương, ta có $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

B. BÀI TẬP**Bài 22** Thực hiện phép tính

a. $\sqrt{\frac{169}{196}}$; $\sqrt{2,25}$; $\sqrt{\frac{4,41}{0,0625}}$;

b. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; $\frac{\sqrt{2ab^4}}{\sqrt{50}}$;

c. $(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15}$; $(2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + 6\sqrt{2}) : \sqrt{2}$

d. $\frac{a - \sqrt{b}}{\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{b}}$ ($b > 0$ và $a \neq -\sqrt{b}$).

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. • $\sqrt{\frac{169}{196}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{196}} = \frac{13}{14}$

• $\sqrt{2,25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1,5$

• $\sqrt{\frac{4,41}{0,0625}} = \frac{\sqrt{4,41}}{\sqrt{0,0625}} = \frac{\sqrt{2,1^2}}{\sqrt{0,25^2}} = \frac{2,1}{0,25} = \frac{210}{25} = \frac{42}{5}$

b. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

$$\frac{\sqrt{2ab^4}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{2ab^4}{50}} = \sqrt{\frac{ab^4}{25}} = \sqrt{a \left(\frac{b^2}{5}\right)^2} = \frac{b^2}{5} \sqrt{a}$$

c. $(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15} = 5 \sqrt{\frac{3}{15}} + 3 \sqrt{\frac{5}{15}} = 5 \sqrt{\frac{1}{5}} + 3 \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

d. $\frac{a - \sqrt{b}}{\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} = \frac{(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a^2 - b}{b}$

Bài 23 Rút gọn biểu thức

a. $A = (b - 2) \sqrt{\frac{b^2}{4 - 4b + b^2}}$ (với $0 < b < 2$);

b. $B = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$ (với $x, y > 0$ và $x > y$).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Rút gọn

$$\text{a. } A = (b-2) \sqrt{\frac{b^2}{4-4b+b^2}} = (b-2) \sqrt{\frac{b^2}{(2-b)^2}} \text{ (với } 0 < b < 2 \text{)}$$

$$\Rightarrow A = (b-2) \frac{|b|}{|2-b|}$$

$$\text{Vì } 0 < b < 2 \Rightarrow \begin{cases} |b| = b \\ |2-b| = 2-b \end{cases} \text{ nên } A = (b-2) \cdot \frac{b}{2-b} = -b.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } B &= \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} : (\sqrt{x}-\sqrt{y}) \text{ (} x, y > 0 \text{ và } x > y \text{)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 1. \end{aligned}$$

Bài 24 Cho các biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-1} \quad \text{và} \quad B = \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x}-1}$$

a. Các biểu thức trên có nghĩa khi nào?

b. Khi nào xảy ra $A = B$?**HƯỚNG DẪN GIẢI**a. • Biểu thức A có nghĩa khi $\frac{2x-3}{x-1} \geq 0$

$$\text{hay } \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 2x-3 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\text{hay } x \geq 1,5 \quad \text{hoặc} \quad x < 1.$$

• Biểu thức B có nghĩa khi $\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ hay $x \geq 1,5$.b. Để A và B đồng thời có nghĩa thì $x \geq 1,5$ khi đó ta có $A = B$ (theo tính chất khai phương một thương).**Bài 25** Giải các phương trình :

$$\text{a. } \frac{\sqrt{2x-3}}{x-1} = 2 \quad \text{và} \quad \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x}-1} = 2;$$

$$\text{b. } \frac{\sqrt{4x+3}}{x+1} = 3 \quad \text{và} \quad \frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x}+1} = 3.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. – Phương trình : $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$ có điều kiện xác định là $x < 1$ hoặc $x \geq 1,5$.

Khi đó, đưa về phương trình : $\frac{2x-3}{x-1} = 2^2$.

Giải ra được $x = 0,5$ và thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 0,5$.

– Phương trình $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ có điều kiện xác định là $x \geq 1,5$.

Khi đó, đưa về phương trình $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$.

Theo câu a được $x = 0,5$, nhưng không thỏa mãn điều kiện $x \geq 1,5$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b. Tương tự câu a.

– Phương trình $\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3$ có nghiệm $x = -1,2$.

– Phương trình $\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3$ vô nghiệm.

Bài 26

Cho hai số a, b không âm. Chứng minh : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ? (Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Do a và b không âm nên $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ xác định. Ta có : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

Khai triển vế trái được : $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$

biến đổi tiếp, có : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Chia hai vế cho 2 ta được bất đẳng thức phải chứng minh : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Rõ ràng dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Bài 27

Cho $a \geq 0$; $b \geq 0$; $c \geq 0$. Chứng minh : $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng bất đẳng thức Côsi với hai số không âm a và b ; b và c ; a và c , ta có :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}; \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}; \quad a + c \geq 2\sqrt{ac};$$

$$\text{Vậy} \quad (a + b) + (b + c) + (a + c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac})$$

$$\text{hay} \quad 2(a + b + c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac})$$

$$\text{do đó} \quad a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}.$$

Bài 28

Chứng minh rằng với mọi số thực a , ta đều có : $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$.

Khi nào có đẳng thức ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Nhận xét : $a^2 + 2 = (\sqrt{a^2 + 1})^2 + 1$ nên :

$$\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{(\sqrt{a^2 + 1})^2 + 1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{a^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\sqrt{a^2 + 1}$ và $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ ta có :

$$\sqrt{a^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2 \cdot \sqrt{\sqrt{a^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}} = 2$$

Vậy : $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{a^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \Leftrightarrow a = 0$.

§5. BẢNG CĂN BẬC HAI

(Bảng số với 4 chữ số thập phân của Bradixor)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tìm $\sqrt{a}$ với $1 < a < 100$.

Ví dụ : Tìm $\sqrt{5,62}$

Tại ô gặp nhau giữa dòng 5, 6 và cột 2 ta được 2,371.

Vậy : $\sqrt{5,62} \approx 2,371$.

2. Tìm $\sqrt{a}$ với $a > 100$.

Ví dụ : Tìm $\sqrt{584}$

Đổi $584 = 5,84 \cdot 100$

$$\sqrt{584} = \sqrt{5,84 \cdot 100} = \sqrt{5,84} \cdot 10 \approx 2,417 \cdot 10 = 24,17.$$

3. Tìm $\sqrt{a}$ với $a < 1$.

Ví dụ : Tìm $\sqrt{0,552}$

Đổi $0,552 = 55,2 \cdot \frac{1}{100}$

$$\sqrt{0,552} = \sqrt{55,2 \cdot \frac{1}{100}} = \frac{1}{10} \sqrt{55,2} \approx 7,43 \cdot 0,1 = 0,743.$$

4. Số chính phương :

Các số tự nhiên có căn bậc hai là số nguyên là các số chính phương.

B. BÀI TẬP

Bài 29 Tìm giá trị gần đúng của nghiệm các phương trình sau bằng bảng căn bậc hai rồi kiểm tra lại bằng máy tính bỏ túi.

a. $x^2 = 351$

b. $x^2 = 22,8$

c. $\sqrt{x} = 2,15$

d. $\sqrt{x} = 0,52$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Tra bảng ta được: $x_1 \approx 18,735$ suy ra $x_2 \approx -18,735$.

Có thể kiểm tra theo hai bước :

- Tìm giá trị nghiệm bằng máy tính.

Tính $x_1 = \sqrt{351}$ bằng máy tính được kết quả 18,73499399 (kết quả gần đúng với 10 chữ số trên màn hình). Từ đây suy ra x_2 .

- Thử lại giá trị tìm được bằng máy tính.

Thay giá trị $x_1 \approx 18,735$ vào phương trình $x^2 = 351$ ta được: $351,000225 \approx 351$.

b. c. d. Giải tương tự như trên.

Bài 30 Các mệnh đề sau đây đúng hay sai. Cho ví dụ để minh họa.

a. Tổng của hai số vô tỉ là số vô tỉ.

b. Tích của hai số vô tỉ là số vô tỉ.

c. Thương của hai số vô tỉ không thể là số hữu tỉ.

d. Bình phương của một số vô tỉ là số hữu tỉ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Các mệnh đề đều sai. Chẳng hạn :

a. Lấy $x = -\sqrt{3}$, $y = 1 + \sqrt{3}$, $x \notin \mathbb{Q}$, $y \notin \mathbb{Q}$. Tính $x + y = 1 \in \mathbb{Q}$.

b. Lấy $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. Tính $x \cdot y = 2 \in \mathbb{Q}$.

c. Như câu b) tính $\frac{x}{y} = 1 \in \mathbb{Q}$.

d. Lấy $x = \sqrt{\pi}$, x là số vô tỉ, nếu $x \in \mathbb{Q}$ thì $x = \frac{p}{q}$ (phân số tối giản), suy ra

$$x^2 = \pi = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Q} \text{ là điều vô lí, vì } \pi \text{ là số vô tỉ.}$$

Bài 31 Tìm tập hợp các số x , thỏa mãn $\sqrt{x} > 2$ và biểu thị tập hợp đó trên trục số.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Điều kiện $x \geq 0$.

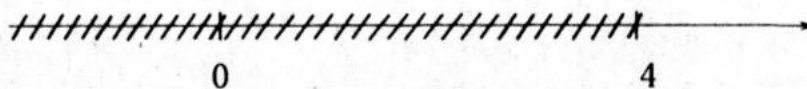
Đưa biểu thức đã cho về $\sqrt{x} > \sqrt{4}$.

Theo tính chất khai phương và thử tự tìm được $x > 4$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN

LC/1834

Biểu thị trên trục số có hình sau



Bài 32 Chứng minh rằng nếu $a, b, c \in \mathbb{Q}$; $a, b, c > 0$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$ thì $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có : $a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ mà $c = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{c} \in \mathbb{Q} \text{ (do } a, b, c \in \mathbb{Q})$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \frac{c+d}{2} \in \mathbb{Q} \text{ và } \sqrt{b} = \frac{c-d}{2} \in \mathbb{Q}.$$

$$\text{Với } d = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{c} \in \mathbb{Q}.$$

Bài 33 Chứng minh các số sau là số vô tỉ

a. $\sqrt{6}$

b. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Chứng minh $\sqrt{6}$ là số vô tỉ.

Giả sử $\sqrt{6}$ là số hữu tỉ, đặt $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$.

$$\text{Ta có } \frac{a^2}{b^2} = 6 \Rightarrow a^2 = 6b^2 \Rightarrow a^2 : 6 = b^2$$

$$\Rightarrow a^2 : 2 \Rightarrow a : 2 \Rightarrow a^2 : 2^2$$

$$\Rightarrow 6b^2 : 2^2 \Rightarrow 3b^2 : 2 \Rightarrow b^2 : 2$$

$$\Rightarrow b : 2 \text{ nên } (a, b) \geq 2 \text{ vô lí !}$$

Vậy điều giả sử trên sai, $\sqrt{6}$ là số vô tỉ.

b. Giả sử x là số hữu tỉ, ta có :

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = x \Leftrightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = x^2 \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{6} + 3 = x^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6} = \frac{x^2 - 5}{2} \text{ vô lí vì } \sqrt{6} \text{ là số vô tỉ còn } \frac{x^2 - 5}{2} \text{ là số hữu tỉ. Vậy } x \text{ là số hữu}$$

tỉ là sai $\Rightarrow x$ là số vô tỉ.

Bài 34 Cho a, b là hai số hữu tỉ khác 0 và n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng số $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ là một số vô tỉ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{Đặt } a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} = c \quad (1)$$

Giả sử c là số hữu tỉ.

Bình phương hai vế của (1) ta có :

$$a^2n + 2ab\sqrt{n(n+1)} + b^2(n+1) = c^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{n(n+1)} = \frac{c^2 - a^2n - b^2(n+1)}{2ab} = m \in \mathbb{Q} \text{ (do } a, b \neq 0)$$

$$\Rightarrow n(n+1) = m^2, \text{ vì } n \text{ nguyên dương } \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{mà } n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$$

$$\Rightarrow n^2 < m^2 < (n+1)^2$$

$$\Rightarrow n < m < n+1 \text{ (do } n \text{ nguyên dương).}$$

Không thể có $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ để $n < m < n+1$.

Vậy $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ là số vô tỉ.

§6. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT



1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Với hai biểu thức A, B mà $B \geq 0$, ta có $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$, tức là:

Nếu $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$.

Nếu $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ ta có $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$.

Với $A < 0$ và $B \geq 0$ ta có $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$.

B. BÀI TẬP

Bài 35 Đưa nhân tử ra ngoài dấu căn

a. $\sqrt{50 \cdot 24}$;

b. $\sqrt{32 \cdot 45}$;

c. $\frac{1}{2bc} \sqrt{8a^5b^3c^2}$ ($a, b, c > 0$);

d. $\sqrt{a^4b^2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta biến đổi $50 \cdot 24$ thành một tích trong đó có nhiều nhân tử là số chính phương.

$$\sqrt{50 \cdot 24} = \sqrt{50 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{100 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{10^2 \cdot 2^2 \cdot 3} = 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 20\sqrt{3}.$$

b. $\sqrt{32 \cdot 45} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5} = \sqrt{4^2 \cdot 3^2 \cdot 10} = 4 \cdot 3 \sqrt{10} = 12\sqrt{10}.$

$$c. \frac{1}{2bc} \sqrt{8a^5b^3c^2} = \frac{2a^2bc}{2bc} \sqrt{2ab} = a^2 \sqrt{2ab}.$$

$$d. \sqrt{a^4b^2} = a^2|b|.$$

Bài 36 Đưa thừa số vào trong dấu căn để so sánh các cặp số sau :

a. $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$;

b. $3\sqrt{11}$ và $2\sqrt{23}$;

c. $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{2}{3}\sqrt{7}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$; $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$.

Ta có $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

b. $3\sqrt{11} = \sqrt{99}$; $2\sqrt{23} = \sqrt{92}$.

Ta có $\sqrt{99} > \sqrt{92}$ nên $3\sqrt{11} > 2\sqrt{23}$.

c. $\frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{50}{16}} = \sqrt{3\frac{1}{8}}$; $\frac{2}{3}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{28}{9}} = \sqrt{3\frac{1}{9}}$

Ta có $\sqrt{3\frac{1}{8}} > \sqrt{3\frac{1}{9}}$ nên $\frac{5}{4}\sqrt{2} > \frac{2}{3}\sqrt{7}$.

Bài 37 Rút gọn :

a. $3\sqrt{8} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{50}$

b. $5\sqrt{12} + 2\sqrt{75} - 5\sqrt{48}$

c. $\frac{a}{b} \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{1}{a} \sqrt{a^3b} + \frac{2}{3b} \sqrt{9ab^3}$; $a, b > 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có : $3\sqrt{8} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{50} = 3\sqrt{4 \cdot 2} - 4\sqrt{9 \cdot 2} + 2\sqrt{25 \cdot 2}$
 $= 3 \cdot 2\sqrt{2} - 4 \cdot 3\sqrt{2} + 2 \cdot 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$

b. Ta có : $5\sqrt{12} + 2\sqrt{75} - 5\sqrt{48} = 5\sqrt{4 \cdot 3} + 2\sqrt{25 \cdot 3} - 5\sqrt{16 \cdot 3}$
 $= 5 \cdot 2\sqrt{3} + 2 \cdot 5\sqrt{3} - 5 \cdot 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 20\sqrt{3} = 0.$

c. Ta có : $\frac{a}{b} \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{1}{a} \sqrt{a^3b} + \frac{2}{3b} \sqrt{9ab^3} = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{ab}{a^2}} - \frac{1}{a} \sqrt{a^2 \cdot ab} + \frac{2}{3b} \sqrt{(3b)^2 ab}$
 $= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{|a|} \cdot \sqrt{ab} - \frac{|a|}{a} \sqrt{ab} + \frac{2|3b|}{3b} \sqrt{ab}$
 $= \frac{1}{b} \sqrt{ab} - \sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} \text{ (vì } a, b > 0) = \left(\frac{1}{b} + 1\right) \sqrt{ab} = \frac{(b+1)\sqrt{ab}}{b}.$

Bài 38 Rút gọn biểu thức : $A = (2\sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{2})(\sqrt{18} - \sqrt{20} + 2\sqrt{2})$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vì $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$ và $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$ nên ta có :

$$\begin{aligned} A &= (2\sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) = (5\sqrt{2} - \sqrt{5})(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) \\ &= 25\sqrt{4} - 10\sqrt{10} - 5\sqrt{10} + 2\sqrt{25} = 50 - 15\sqrt{10} + 10 = 60 - 15\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Bài 39 Chứng minh rằng :

a. $\sqrt{10} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$

b. $\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}}.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có :

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{10} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60})^2 &= 10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = 10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} \\
 (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 &= (\sqrt{2})^2 + \sqrt{(3)^2} + (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \\
 &= 2 + 3 + 5 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}
 \end{aligned}$$

Do đó, ta có : $\sqrt{10} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$

b. Ta có thể viết : $\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}}.$

Vậy : $\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}}.$

Bài 40 Tìm x, biết : a. $\sqrt{16x} = 24$ b. $\sqrt{9x} \leq 75.$ **HƯỚNG DẪN GIẢI**

a. Cách 1 : $\sqrt{16x} = 24 \Leftrightarrow 16x = 24 \cdot 24 \Leftrightarrow x = 36.$

Cách 2 : $\sqrt{16x} = 24 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 24 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36.$

b. Cách 1 : Điều kiện $x \geq 0$. $\sqrt{9x} \leq 75 \Leftrightarrow 9x \leq 75 \cdot 75 \Leftrightarrow x \leq 625.$

Vậy $0 \leq x \leq 625.$

Cách 2 : Điều kiện $x \geq 0$. $\sqrt{9x} \leq 75 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} \leq 75 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 25 \Leftrightarrow x \leq 625.$

Vậy $0 \leq x \leq 625.$

Bài 41 Giải các phương trình :

a. $\sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{x - 2} = 0$

b. $\sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{x + 3} = 0.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, x \geq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

$$\begin{aligned}
 \text{Nên } \sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{x - 2} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x - 2} \cdot (\sqrt{x + 2} - 2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x - 2} = 0 \text{ hoặc } \sqrt{x + 2} - 2 = 0
 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ hoặc } x_2 = 2$

$\Leftrightarrow x = 2.$ Vậy phương trình có một nghiệm $x = 2.$

b. Điều kiện $x \geq -3.$

Nên $\sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{x + 3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x + 3} \cdot (\sqrt{x - 3} - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x + 3} = 0 \text{ hoặc } \sqrt{x - 3} - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ hoặc } x_2 = 12.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = -3; x_2 = 12.$

§7. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI (tiếp theo)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

Với các biểu thức A, B mà $AB \geq 0, B \neq 0$, ta có $\sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$.

2. Trục căn thức ở mẫu

a. Với các biểu thức A, B mà $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$

b. Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có

$$\frac{C}{A \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B^2}$$

c. Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$$

B. BÀI TẬP

Bài 42 Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn :

a. $\sqrt{\frac{1}{300}}$,

b. $\sqrt{\frac{5}{147}}$,

c. $4xy \sqrt{\frac{3}{xy}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\sqrt{\frac{1}{300}} = \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 10^2}} = \sqrt{\frac{3}{3^2 \cdot 10^2}} = \frac{1}{30} \sqrt{3}$.

b. $\sqrt{\frac{5}{147}} = \sqrt{\frac{5}{3 \cdot 7^2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 3}{3^2 \cdot 7^2}} = \frac{1}{3 \cdot 7} \sqrt{15} = \frac{1}{21} \sqrt{15}$.

c. $4xy \sqrt{\frac{3}{xy}} = 4xy \sqrt{\frac{3xy}{x^2 y^2}} = 4xy \cdot \frac{1}{xy} \sqrt{3xy} = 4 \sqrt{3xy}$ (vì $xy > 0$).

Bài 43 Trục căn thức ở mẫu số :

a. $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

b. $\frac{35}{2\sqrt{2} - 1}$

c. $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{a. } \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\text{b. } \frac{35}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{35(2\sqrt{2} + 1)}{(2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1)} = \frac{35(2\sqrt{2} + 1)}{(2\sqrt{2})^2 - 1} = \frac{35(2\sqrt{2} + 1)}{8 - 1} = 5(2\sqrt{2} + 1).$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} &= \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})} \\ &= \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5} = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{2 + 2\sqrt{6} + 3 - 5} \\ &= \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{2\sqrt{6}} = \frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3(2 + \sqrt{6} - \sqrt{10})}{4}. \end{aligned}$$

Bài 44

Thực hiện các phép tính : $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}; \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} &= \frac{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{(3+2\sqrt{3}+1) + (3-2\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy : } \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 4.$$

$$\bullet \text{ Tương tự, ta có : } \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Bài 45

So sánh $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}$ và $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}} &= \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{(2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3})} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Bài 46 : So sánh $\sqrt{2005} - \sqrt{2004}$ với $\sqrt{2004} - \sqrt{2003}.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{Ta có } \sqrt{2005} - \sqrt{2004} = \frac{(\sqrt{2005} - \sqrt{2004})(\sqrt{2005} + \sqrt{2004})}{\sqrt{2005} + \sqrt{2004}} = \frac{1}{\sqrt{2005} + \sqrt{2004}}.$$

Tương tự $\sqrt{2004} - \sqrt{2003} = \frac{1}{\sqrt{2004} + \sqrt{2003}}$.

Vì $\sqrt{2005} + \sqrt{2004} > \sqrt{2004} + \sqrt{2003}$.

nên $\frac{1}{\sqrt{2005} + \sqrt{2004}} < \frac{1}{\sqrt{2004} + \sqrt{2003}}$.

Suy ra $\sqrt{2005} - \sqrt{2004} < \sqrt{2004} - \sqrt{2003}$.

Bài 47

Rút gọn biểu thức : $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Trục căn thức ở mẫu :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} &= \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{1 - 2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} + \dots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{99 - 100} \\ &= -(\sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{99} - \sqrt{100}) \\ &= -(\sqrt{1} - \sqrt{100}) = -(1 - 10) = 9. \end{aligned}$$

Bài 48

Chứng minh các đẳng thức sau :

a. $\frac{2}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{2}{7 - 4\sqrt{3}} = 28$.

b. $\left(\frac{6 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}} \right)^2 = 8$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có : $\frac{2}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{2}{7 - 4\sqrt{3}} = \frac{2(7 - 4\sqrt{3}) + 2(7 + 4\sqrt{3})}{(7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})} = \frac{14 - 8\sqrt{3} + 14 + 8\sqrt{3}}{49 - 48} = 28$

Vậy : $\frac{2}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{2}{7 - 4\sqrt{3}} = 28$.

b. Ta có : $\frac{6 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2}} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2}}$
 $= \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 2} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})} + \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}$
 $= \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{dpcm.}$

§8. RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cần biết vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết !

B. BÀI TẬP

Bài 49 Rút gọn : $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{Xét } \frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{5}{12} - \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{12} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}}{12} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow Q = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{6} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{6} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{1}{2}.$$

Bài 50 Cho a, b, c là các số dương. Rút gọn biểu thức sau :

$$A = \frac{x - \sqrt{yz}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{z})} + \frac{y - \sqrt{xz}}{(\sqrt{y} + \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{z})} + \frac{z - \sqrt{xy}}{(\sqrt{z} + \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{y})}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \frac{x - \sqrt{yz}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{z})} &= \frac{x + \sqrt{xz} - \sqrt{xz} - \sqrt{yz}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{z})} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{z}) - \sqrt{z}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{z})} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự : } \frac{y - \sqrt{xz}}{(\sqrt{y} + \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{z})} &= \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ \frac{z - \sqrt{xy}}{(\sqrt{z} + \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{y})} &= \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{z}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $A = 0$.

Bài 51 Chứng minh đẳng thức :

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = 2\sqrt{b} \quad (a > 0, b > 0).$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Thực hiện phép tính ở vế trái, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} &= \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2}}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \\ &= \sqrt{a} + \sqrt{b} - (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2\sqrt{b} \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

Bài 52

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$.

- Tìm những giá trị của x để A có nghĩa.
- Rút gọn A .

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{a. } A \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} \neq 0 \\ x^2 - \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1) \neq 0 \\ \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 1$$

b.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ A &= (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = x - 1. \end{aligned}$$

Bài 53

Giải phương trình : $\sqrt{x+4} + 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+20}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Điều kiện để phương trình có nghĩa :

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x+20 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq -1 \\ x \geq -20 \end{cases} \Rightarrow x \geq -1.$$

Trong điều kiện trên, hai vế của phương trình đều không âm, nên bình phương hai vế ta có :

$$\begin{aligned} x+4 + 4\sqrt{(x+4)(x+1)} + 4(x+1) &= x+20 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+4} &= 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x^2+5x+4 = 9-6x+x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ 11x = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x = \frac{5}{11} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{11}. \end{aligned}$$

Vậy : $x = \frac{5}{11}$.

Bài 544

Cho biểu thức : $M = \frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$.

Chứng minh rằng : $M = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{với } 0 < x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{với } x > 2. \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} (x+2)^2 - 8x \geq 0; \\ x > 0; \\ \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } M = \frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2} \cdot \sqrt{x}}{x-2} = \frac{|x-2| \sqrt{x}}{x-2}.$$

$$\text{Với } 0 < x < 2 \text{ thì } M = \frac{(2-x) \sqrt{x}}{x-2} = -\frac{(x-2) \sqrt{x}}{x-2} = -\sqrt{x};$$

$$\text{Với } x \geq 2 \text{ thì } M = \frac{(x-2) \sqrt{x}}{x-2} = \sqrt{x}.$$

$$\text{Vậy } M = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{với } 0 < x < 2; \\ \sqrt{x} & \text{với } x > 2 \end{cases}$$

Bài 55

Chứng minh rằng với mọi $x > 1$, biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

$$A = \frac{\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1} - x+1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Với $x > 1$ thì A có nghĩa.

$$\begin{aligned} \text{Xét } & \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1} - x+1} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + \frac{x-1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})} \\ &= \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(x+1) - (x-1)} \\ &= \frac{2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}}{2} = \sqrt{x^2-1}. \end{aligned}$$

Vậy $A = 1$.

§9. CĂN BẬC BA

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa căn bậc ba

Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.

Mỗi số a đều có duy nhất một căn bậc ba.

Căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$. Chữ số 3 viết nhỏ ở dấu $\sqrt{}$ gọi là chỉ số của căn. Phép tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba

* *Chú ý* : Từ định nghĩa căn bậc ba, ta có $\sqrt[3]{a^3} = a$.

* *Nhận xét* :

Căn bậc ba của số dương là số dương;

Căn bậc ba của số âm là số âm;

Căn bậc ba của số 0 là chính số 0.

2. Tính chất căn bậc ba

Tương tự tính chất của căn bậc hai, ta có các tính chất sau của căn bậc ba

a. $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$;

b. $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$;

c. Với $b \neq 0$, ta có $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

B. BÀI TẬP

Bài 58 Thực hiện phép tính :

$$a. A = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

$$b. B = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. *Cách 1* :

$$2 + \sqrt{5} = \frac{16 + 8\sqrt{5}}{8} = \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}}{8} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3$$

$$2 - \sqrt{5} = \frac{16 - 8\sqrt{5}}{8} = \frac{1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5}}{8} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3$$

$$\text{Do đó : } A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1.$$

$$\text{Cách 2 : } A = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow A^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \cdot A \Leftrightarrow A^3 = 4 - 3A$$

$$\Leftrightarrow A^3 + 3A - 4 = 0 \Leftrightarrow (A - 1)(A^2 + A + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow A - 1 = 0 \left(\text{do } A^2 + A + 4 = \left(A + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow A = 1$$

b. Đáp số: $B = 3$.

Bài 57 Phân tích ra thừa số :

a. $\sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{21}; 3 - \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{a^2x} + \sqrt[3]{b^2x}$

b. $\sqrt[3]{6a^2b} - \sqrt[3]{9ab^2}; a - b - \sqrt[3]{a - b}$

c. $\sqrt[3]{a^3 + b^3} - \sqrt[3]{a^2 - ab + b^2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có : $\bullet \sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{21} = \sqrt[3]{3 \cdot 5} - \sqrt[3]{3 \cdot 7} = \sqrt[3]{3} (\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{7})$

$\bullet 3 - \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} (\sqrt[3]{9} - 1)$

$\bullet \sqrt[3]{a^2x} + \sqrt[3]{b^2x} = \sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})$.

b. Ta có : $\bullet \sqrt[3]{6a^2b} - \sqrt[3]{9ab^2} = \sqrt[3]{3ab} (\sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{3b})$

$\bullet a - b - \sqrt[3]{a - b} = \sqrt[3]{(a - b)^3} - \sqrt[3]{a - b} = \sqrt[3]{a - b} (\sqrt[3]{(a - b)^2} - 1)$

$= \sqrt[3]{a - b} (\sqrt[3]{a - b} + 1)(\sqrt[3]{a - b} - 1)$.

c. Ta có : $\sqrt[3]{a^3 + b^3} - \sqrt[3]{a^2 - ab + b^2} = \sqrt[3]{(a + b)(a^2 - ab + b^2)} - \sqrt[3]{a^2 - ab + b^2}$
 $= \sqrt[3]{a^2 - ab + b^2} (\sqrt[3]{a + b} - 1)$.

Bài 58 Giải các phương trình :

a. $\sqrt[3]{2x+1} = 3$; b. $\sqrt[3]{2-3x} = -2$; c. $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\sqrt[3]{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 27 \Leftrightarrow x = 13$

Vậy : $S = \{13\}$.

b. $\sqrt[3]{2-3x} = -2 \Leftrightarrow 2 - 3x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$

Vậy $S = \left\{ \frac{10}{3} \right\}$.

c. $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} - (\sqrt[3]{x-1})^3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} [1 - (\sqrt[3]{x-1})^2] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} = 0 \\ \sqrt[3]{(x-1)^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x - 1 = \pm 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1; x = 0; x = 2$

Vậy : $S = \{0; 1; 2\}$.

Bài 59 Giải các phương trình :

a. $(2\sqrt[3]{x} + 5)(2\sqrt[3]{x} - 5) = -21$ b. $(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 2) = \sqrt[3]{x^2} - 4$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Ta có : $(2^3\sqrt{x} + 5)(2^3\sqrt{x} - 5) = -21 \Leftrightarrow (2^3\sqrt{x})^2 - 25 = -21$
 $\Leftrightarrow 4^3\sqrt{x^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- b. Ta có : $(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 2) = \sqrt[3]{x^2} - 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 2 = \sqrt[3]{x^2} - 4$
 $\Leftrightarrow -3\sqrt[3]{x} = -6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8$

Bài 60 Chứng minh rằng $\sqrt[3]{2} + 1$ là nghiệm của phương trình :
 $x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x &= \sqrt[3]{2} + 1 & \Leftrightarrow x - 1 &= \sqrt[3]{2} & \Rightarrow (x - 1)^3 &= 2 \\ & & \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 &= 2 & \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Vậy $\sqrt[3]{2} + 1$ là nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$.

Bài 61 Cho x, y là các số dương và $x \neq y$. Thu gọn biểu thức sau :

$$P = \frac{\frac{(x-y)^3}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3(\sqrt{xy} - y)}{x - y}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét $\frac{(x-y)^3}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} = \frac{[(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})]^3}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^3$

và $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 3x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} = 3\sqrt{x}(x - \sqrt{xy} + y)$

- $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)$
- $\frac{3(\sqrt{xy} - y)}{x - y} = \frac{3\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

Do đó $P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 3$.

Bài 62 Tìm số nguyên n thỏa mãn đẳng thức sau :

$$\sqrt[3]{n + \sqrt{n^2 + 8}} + \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2 + 8}} = 8.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đặt $a = \sqrt[3]{n + \sqrt{n^2 + 8}}$, $b = \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2 + 8}}$

$$\Rightarrow a \cdot b = \sqrt[3]{(n + \sqrt{n^2 + 8})(n - \sqrt{n^2 + 8})} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Theo đề bài ta có : $a + b = 8$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 8^3 \Leftrightarrow 2n + 3(-2) \cdot 8 = 512$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{512 + 48}{2} = 280.$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 613 So sánh các số:

a. $1 + \sqrt{2}$ và $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

b. $5 - \sqrt{3}$ và $\sqrt{34 - 10\sqrt{3}}$

c. $\frac{1}{\sqrt{15}}$ và $\frac{1}{4}$

d. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ và $\frac{1}{\sqrt{37}}$.

Bài 614 Cho a, b là các số không âm $0 \leq a \leq b$.

Chứng minh $a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

Bài 615 Chứng minh đẳng thức:

$$(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}}) - (\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}) = 0.$$

Bài 616 Rút gọn $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$.

Bài 617 Thực hiện các phép tính.

a. $A = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

b. $D = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}$

c. $E = \sqrt{4 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

d. $F = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}} \sqrt{3 - \sqrt{2 + \sqrt{12}}} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}$.

Bài 618 Cho biểu thức:

$$A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$$

a. Tìm điều kiện để A xác định.

b. Rút gọn A .

c. Cho $xy = 6$. Xác định x, y để A có giá trị nhỏ nhất.

Bài 619 Tính giá trị biểu thức:

a. $A = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}}$

b. $B = \sqrt[3]{72 - 32\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7 + 3\sqrt{3}}$.

Bài 70 Cho biểu thức: $P = x^3 + y^3 - 3(x + y) + 1967$.

Tính giá trị biểu thức với: $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$
 $y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$.

Bài 71 Rút gọn biểu thức:

a. $\frac{a}{2} \left(\sqrt[3]{a^2b} + \frac{b}{3a^2} \sqrt{\frac{15a}{b^2}} - \frac{4a^3}{5a} \sqrt{\frac{b}{2a^2}} \right) : \frac{2a^3}{15b^2} \sqrt{\frac{5a^2}{2b}}$

b. $\left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2} \right)^2 + \left(\frac{a^6}{a^2} \sqrt{a^5} - \frac{3^3}{5} \sqrt{a^2} \right) \right] : a^3 \sqrt{a}$

c. $A = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4}}$.

Bài 72 Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$B = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 + \frac{2x^2}{\sqrt{x}} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{\sqrt[3]{xy} - 3y}{x - y}$

Bài 73 Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} = 2$.

Bài 74 Giải phương trình: $\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1$.

Bài 75 Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 5$.

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

Bài 63

a. Ta có: $a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$ (1)

$b = \sqrt{3+2\sqrt{2}} \Rightarrow b^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 > b^2$ mà $a > 0, b > 0$

nên $a > b$ hay $1 + \sqrt{2} > \sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

b. Đáp số: $5 - \sqrt{3} < \sqrt{34 - 10\sqrt{3}}$.

c. Ta có: $15 < 16 \Rightarrow \sqrt{15} < \sqrt{16} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{15}} > \frac{1}{\sqrt{16}}$ hay $\frac{1}{\sqrt{15}} > \frac{1}{4}$

d. Đáp số: $\frac{1}{3\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{37}}$.

Bài 64

$$Do \quad 0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq ab \Rightarrow a \leq \sqrt{ab} \quad (1)$$

$$0 \leq a \leq b \Rightarrow a + b \leq 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} \leq b \quad (2)$$

$$\text{Bất đẳng thức Cauchy của hai số không âm } a, b \text{ cho ta } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm.

Bài 65

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}} &= -2\sqrt{3} \\ \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Bài 66

$$\text{Ta có: } 29 - 12\sqrt{5} = 9 - 12\sqrt{5} + 20 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 = (3 - 2\sqrt{5})^2.$$

$$\text{Vì } 3 < 2\sqrt{5} \text{ nên } \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 3$$

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6} - 2\sqrt{5}}.$$

$$\text{Ta lại có: } 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5} - 1)^2$$

$$\text{cho ta } A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)} = \sqrt{1} \Rightarrow A = 1.$$

Bài 67

$$\text{a. } A^2 = 4, \text{ vì } A < 0 \text{ nên } A = -2.$$

b. Ta rút gọn dần dần từ trong ra ngoài:

$$7 + 4\sqrt{3} = (2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3})^2$$

$$\begin{aligned} 48 - 10\sqrt{7+4\sqrt{3}} &= 48 - 10(2 + \sqrt{3}) = 28 - 10\sqrt{3} = 25 - 10\sqrt{3} + 3 \\ &= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (5 - \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

$$5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7+4\sqrt{3}}} = 5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3}) = 25.$$

$$\text{Suy ra: } D = \sqrt{4 + \sqrt{25}} = \sqrt{4 + 5} \Rightarrow D = 3.$$

$$\text{c. Dễ thấy: } \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{4 - (2 + \sqrt{2})} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$\text{Mặt khác } 4 + \sqrt{8} = 4 + 2\sqrt{2} = 2(2 + \sqrt{2}).$$

$$\text{Suy ra } E = \sqrt{2(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \Rightarrow E = \sqrt{4} \Rightarrow E = 2$$

$$\text{d. Đáp số: } F = 1 + \sqrt{3}.$$

Bài 68

Ta có:

$$\text{a. } x > 0, y > 0.$$

$$\text{b. } \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{xy}}{xy}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2\sqrt{xy}}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy}$$

$$\frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$$

Vậy: $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$.

c. Vì $xy = 16 \Rightarrow \sqrt{xy} = 4 \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 4$

Hai số dương $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ có tích $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 4$ không đổi nên tổng $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ có giá trị nhỏ nhất khi $\sqrt{x} = \sqrt{y} = 2$. Lúc bấy giờ $A = \frac{2+2}{4} = 1$.

Bài 69

a. Vì $(\sqrt{2} + 1)^3 = 7 + 5\sqrt{2}$

Vậy $A = \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{1} = 2\sqrt{2}$.

b. $(3 + \sqrt{5})^3 = 72 - 32\sqrt{5}$, $7 + 3\sqrt{5} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})^2$

$B = \sqrt[3]{(3 - \sqrt{5})^3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 2\sqrt{2}$.

Bài 70

$x^3 = 3x + 6 \Rightarrow x^3 - 3x = 6$

$y^3 = 3y + 34 \Rightarrow y^3 - 3y = 34$

$P = (x^3 - 3x) + (y^3 - 3y) + 1967 = 6 + 34 + 1967 = 2007$.

Bài 71

a. Đáp số: $\frac{3b^2}{4a^{23}\sqrt{50b^2}} + \frac{5b^2}{2a^6}\sqrt{6a^2b^2} - \frac{6b^3}{5a^4}\sqrt{25a^2b^2}$.

b. Đáp số: $\frac{\sqrt[3]{a^2} + a^4 - 2a^{36}\sqrt{a}}{a^4}$.

c. Ta có: $a^2 = \sqrt[3]{a^6}$ nên:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2}} &= \sqrt{\sqrt[3]{a^6} + \sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[3]{b^2}} &= \sqrt{\sqrt[3]{a^4} \cdot (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})} \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{b^2}}} &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{b^2}}} \\ &= \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{b^2}} \end{aligned}$$

Tương tự, ta có: $\sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^4b^4}} = \sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{b^2}}$

$\Rightarrow A = (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{b^2}}) = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3}$.

Bài 72

a. $A = 1, a \neq b, a \geq 0, b \geq 0.$

b. $B = 3, x \geq 0, y \geq 0, x \neq y.$

Bài 73

$$x + 2 + 2\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} + 1)^2$$

$$x + 2 - 2\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - 1)^2$$

Phương trình trở thành $\sqrt{x+1} + 1 + |\sqrt{x+1} - 1| = 2.$

- Với $\sqrt{x+1} - 1 \geq 0$ được $x = 0.$
- Với $\sqrt{x+1} - 1 < 0$ được nghiệm là mọi $x.$

Vậy: $-1 \leq x \leq 0.$

Cách khác: Đặt ẩn số phụ $\sqrt{x+1} = y \Rightarrow x + 1 = y^2 \Rightarrow x = y^2 - 1, y \geq 0.$

Phương trình đã cho trở thành $|y + 1| + |y - 1| = 2.$

Vì $y \geq 0 \Rightarrow |y + 1| = y + 1.$

Giải ra ta cũng được kết quả trên.

Bài 74

Phương trình đã cho trở thành $|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 3| = 1.$

Vì $|\sqrt{x-1} - 2| \geq 0$ và $|\sqrt{x-1} - 3| \geq 0$ nên vế trái là tổng của hai số không âm, do vậy phương trình đã cho chỉ được xác định khi:

$$|\sqrt{x-1} - 2| \leq 1 \quad (1)$$

$$|\sqrt{x-1} - 3| \leq 1 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow -1 \leq \sqrt{x-1} - 2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 10 \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow -1 \leq \sqrt{x-1} - 3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 4 \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 17 \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) ta có kết quả $5 \leq x \leq 10.$

Bài 75

$$x + 3 + 4\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} + 2)^2$$

$$x + 8 - 6\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 3)^2$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt{x-1} + 2 + |\sqrt{x-1} - 3| = 5, x \geq 1.$$

- Với $\sqrt{x-1} - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 10$ được $x = 10.$
- Với $\sqrt{x-1} - 3 < 0 \Rightarrow x < 10$ được nghiệm với mọi $x \geq 1.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $1 \leq x \leq 10.$

Chương II**HÀM SỐ BẬC NHẤT****§1. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****1. Khái niệm hàm số**

- Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x , và x được gọi là biến số.
- Khi y là hàm số của x ta có thể viết $y = f(x)$.

2. Đồ thị của hàm số

- Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp tương ứng $(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

Với x_1, x_2 bất kì thuộc R :

- Nếu $x_1 < x_2$ suy ra $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên R ;
- Nếu $x_1 < x_2$ suy ra $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên R .

Bài 78 Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{(2-x)(x-1)}$

a. Tìm giá trị của x để căn thức có nghĩa.

b. Cho $x_0 = \frac{5}{4}$, $x_1 = \frac{7}{4}$. Hãy so sánh $f(x_0)$ và $f(x_1)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Điều kiện để căn thức có nghĩa là

$$(2-x)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2-x \leq 0 \\ x-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

b. Với $x_0 = \frac{5}{4}$ và $x_1 = \frac{7}{4}$ thì chúng thỏa mãn điều kiện để căn thức có nghĩa.

$$x_0 = \frac{5}{4} \Rightarrow f(x_0) = \sqrt{\left(2 - \frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{4} - 1\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$x_1 = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x_1) = \sqrt{\left(2 - \frac{7}{4}\right)\left(\frac{7}{4} - 1\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $f(x_0) = f(x_1)$.

Bài 77 Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{3 - 2x}$.

a. Tìm giá trị của x để căn thức có nghĩa.

b. Hãy tính $f(2)$; $f(1)$; $f(-3)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Điều kiện $3 - 2x \geq 0$ hay $x \leq \frac{3}{2}$.

b. • Vì 2 không thỏa mãn điều kiện $x \leq \frac{3}{2}$ nên không tính được $f(2)$.

• $f(1) = \sqrt{3 - 2 \cdot 1} = 1$

• $f(-3) = \sqrt{3 - 2 \cdot (-3)} = \sqrt{9} = 3$.

Bài 78 Xét sự biến thiên của hàm số : $y = f(x) = 2x + 3$ trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Trên $\mathbb{R}$. Giả sử $x_1 < x_2$ ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 + 3 - (2x_2 + 3) = 2(x_1 - x_2) < 0 \text{ (vì } x_1 < x_2)$$

Suy ra $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Bài 79 Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng $(0, 1)$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Chứng minh rằng $f\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) < 0$ và $f\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) > 0$.

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có : $\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) \in (0, 1)$ và $\frac{1}{2}; \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \in (0, 1)$

Vì $\sqrt{3} - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$ và hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(0, 1)$

$$\Rightarrow f\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Mà } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) < 0.$$

$$\text{Tương tự : } \sqrt{2} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Bài 80 Chứng minh rằng hàm số $y = ax$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$.

• Xét trường hợp $a > 0$:

Giả sử x_1, x_2 là hai giá trị bất kì của x thuộc $\mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$. Khi đó ta có :

$$y_1 - y_2 = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2)$$

Từ giả thiết $x_1 < x_2$ suy ra $x_1 - x_2 < 0$ từ đó $y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) < 0$ hay $y_1 < y_2$.
 Vậy, với $a > 0$ hàm số $y = ax$ là hàm số đồng biến.

- Xét trường hợp $a < 0$:

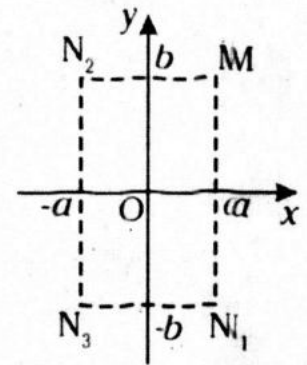
Với hai giá trị bất kì x_1, x_2 thuộc R và giả sử $x_1 < x_2$; lập luận tương tự như trên ta có :

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) > 0 \text{ hay } y_1 > y_2.$$

Vậy, với $a < 0$ hàm số $y = ax$ là hàm số nghịch biến.

Bài 81 Các điểm M, N có vị trí như thế nào đối với trục tọa độ nếu :

- M (a; b), N (a; -b);
- M (a; b), N (-a; b);
- M (a; b), N (-a; -b).



HƯỚNG DẪN GIẢI

- M đối xứng với N qua trục hoành.
- M đối xứng với N qua trục tung.
- M đối xứng với N qua gốc tọa độ.

Bài 82 Trong mặt phẳng tọa độ cho bốn điểm A(-2; 1); B(4; 2); C(2; -1); D(-4; -2). Tứ giác ABCD là hình gì? Vì sao?

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$A(-2; 1); C(2; -1) \Rightarrow \text{A và C đối xứng qua O.}$$

$$B(4; 2); D(-4; -2) \Rightarrow \text{B và D đối xứng qua O.}$$

Do đó tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 83 Tìm hệ số a của các đường thẳng $y = ax$.

- Đi qua A(1; 1)
- Đi qua B(1; -1)
- Đi qua F(-3; 0)
- Đi qua I($2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$)

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{a. Đường thẳng } y = ax \text{ đi qua điểm A(1; 1)} \Leftrightarrow 1 = a \cdot 1 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\text{b. Đường thẳng } y = ax \text{ đi qua điểm B(1; -1)} \Leftrightarrow -1 = a \cdot 1 \Leftrightarrow a = -1.$$

$$\text{c. Đường thẳng } y = ax \text{ đi qua điểm F(-3; 0)} \Leftrightarrow 0 = a(-3) \Leftrightarrow a = 0.$$

$$\text{d. Đường thẳng } y = ax \text{ đi qua điểm I}(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow 2 + \sqrt{3} = a \cdot (2 - \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{4 - 3} = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow a = 7 + 4\sqrt{3}.$$

Bài 84 Cho hàm số $y = 2x$.

- a. Vẽ đồ thị hàm số.
b. Điểm A thuộc đồ thị của hàm số có khoảng cách đến gốc tọa độ bằng $3\sqrt{5}$. Xác định tọa độ của A.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Vẽ đồ thị hàm số
- $y = 2x$
- .

$$\text{Cho } x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 = 2.$$

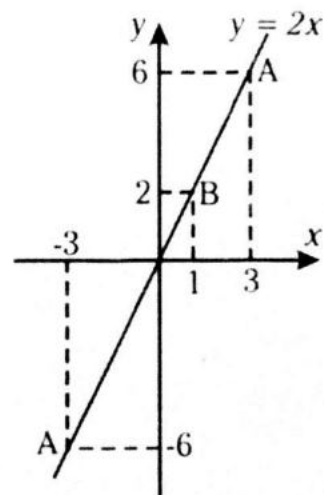
Ta có điểm B(1; 2).

Vẽ đường thẳng OB đó là đồ thị hàm số $y = 2x$.

- b. Gọi x là hoành độ của điểm A, tung độ của điểm A là
- $y = 2x$
- . Nên A (x, 2x).

$$\text{Ta có } x^2 + (2x)^2 = (3\sqrt{5})^2 \Rightarrow x = \pm 3$$

Vậy điểm A có tọa độ (3; 6) hoặc (-3; -6).

**Bài 85**

Cho các hàm số : $y = -2x$, $y = \frac{1}{2}x$.

- a. Vẽ đồ thị các hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ.
b. Gọi d_1 , d_2 theo thứ tự là đồ thị của các hàm số nói trên. Xác định tọa độ điểm B thuộc d_1 , điểm C thuộc d_2 sao cho hoành độ của chúng đều bằng 2.
c. Giải thích vì sao các đường thẳng d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. •
- $y = -2x$
- : cho
- $x = 1 \Rightarrow y = -2$
- .

$$\bullet y = \frac{1}{2}x : \text{cho } x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Vẽ đồ thị ta được hình bên.

- b. Với
- $y = -2x$
- thay
- $x = 2$
- vào ta được
- $y = -2 \cdot 2 = -4$
- nên tọa độ điểm B là B(2; -4).

$$\text{Với } y = \frac{1}{2}x \text{ thay } x = 2 \text{ vào ta được } y = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ nên } C(2; 1).$$

- c. Gọi H(2; 0). Ta có HC = 1; BH = 4.

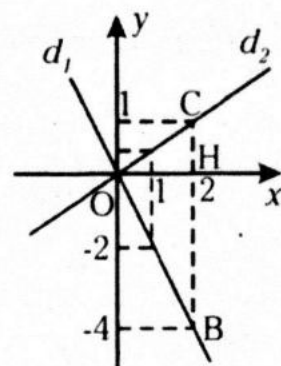
$$\text{Nên } OC^2 = 1^2 + 2^2 = 5, OB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$CB^2 = 5^2 = 25.$$

$$\text{Xét } \triangle OBC \text{ có } OC^2 + OB^2 = BC^2 \text{ (vì } 5 + 20 = 25).$$

Suy ra $\triangle OBC$ vuông tại O hay $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

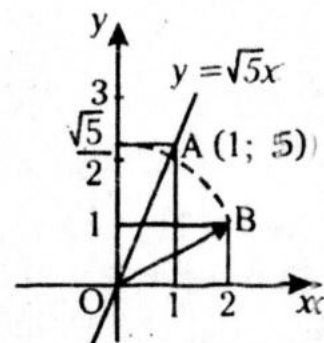
Vậy $d_1 \perp d_2$.



Bài 86 Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{5}x$.**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Dựng hình chữ nhật có kích thước là 1 và 2.

- Độ dài của $OB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ (Áp dụng định lý Py-ta-go đối với tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 1 và 2).
- Tìm trên Oy điểm biểu thị giá trị $\sqrt{5}$ bằng cách lấy compa quay cung tròn tâm O, bán kính $OB = \sqrt{5}$, cung tròn cắt Oy ở C và ta cũng có $OC = \sqrt{5}$.



- Dựng điểm $A(1; \sqrt{5})$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.
- Đường thẳng vẽ qua O và A là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{5}x$.

Bài 87 a. Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}x$.

b. Tìm tung độ các điểm A, B, C nằm trên đồ thị có hoành độ $-2, 1; \sqrt{3}$.

c. Gọi α là góc hợp bởi tia Ox và đường thẳng $y = \sqrt{3}x$. Tính α .

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}x$ là đường thẳng đi qua gốc O và điểm $B(1; \sqrt{3})$.

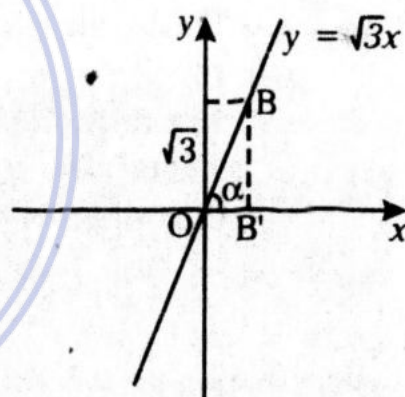
b. Điểm A có hoành độ $x = -2$ nên có tung độ là $y = -2\sqrt{3}$.

Điểm B có hoành độ $x = 1$ nên có tung độ là $y = \sqrt{3}$.

Điểm C có hoành độ $x = \sqrt{3}$ nên có tung độ là $y = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

c. Trong tam giác vuông $OB'B$, ta có $\operatorname{tg} \alpha = \frac{B'B}{OB'}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

**Bài 88** Cho hàm số $y = \sqrt{2}x$.

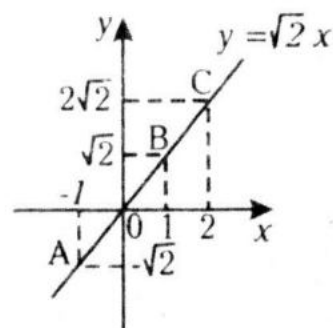
a. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Ba điểm A, B, C thuộc đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt là $-1; 1; 2$, xác định tung độ của các điểm đó.

c. Tính khoảng cách từ các điểm A, B, C đến gốc tọa độ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{2}x$.
- b. Tọa độ các điểm A, B, C là :
 $A(-1; -\sqrt{2})$; $B(1; \sqrt{2})$ và $C(2; 2\sqrt{2})$.
- c. Áp dụng định lí Pitago để tính các khoảng cách, ta được :
 $OA = \sqrt{3}$; $OB = \sqrt{3}$; $OC = 2\sqrt{3}$.



§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

1. Định nghĩa

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức: $y = ax + b$ trong đó a, b là các số thực xác định và $a \neq 0$.

* Chú ý : Khi $b = 0$, hàm số có dạng $y = ax$.

2. Tính chất

– Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị x thuộc tập hợp R và có tính chất sau:

a. Đồng biến trên R , khi $a > 0$.

b. Nghịch biến trên R , khi $a < 0$.

Bài 8) Xét xem các hàm số sau hàm số nào là hàm số bậc nhất. Nếu có xác định hệ số a, b của chúng.

a. $y = 1 - 3x$

b. $y = \sqrt{2} - x\sqrt{3}$

c. $y = \sqrt{3x} - 1$

d. $y = \frac{1}{2}x - 1 + \sqrt{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $y = 1 - 3x$ là hàm số bậc nhất với $a = -3$; $b = 1$.

b. $y = \sqrt{2} - x\sqrt{3}$ là hàm số bậc nhất với $a = -\sqrt{3}$; $b = \sqrt{2}$.

c. Không phải là hàm số bậc nhất.

d. $y = \frac{1}{2}x - 1 + \sqrt{2}$ là hàm số bậc nhất với $a = \frac{1}{2}$; $b = -1 + \sqrt{2}$.

Bài 9) Cho hàm số $y = (m - 3)x$.

a. Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến, nghịch biến ?

b. Xác định giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$.

c. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số là trục hoành ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3$: Hàm số đồng biến.

$m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$: Hàm số nghịch biến.

b. Thay tọa độ của A vào hàm số : $2 = (m - 3) \cdot 1 \Rightarrow m = 5$.

c. $m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$. Lúc đó $y = 0$ (đồ thị $y = 0$ là trục hoành).

Bài 91 Cho hàm số $y = f(x) = 2 - 3x$. Không cần tính, hãy so sánh $f(2)$ và $f(1 + \sqrt{2})$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vì hàm số $y = f(x) = 2 - 3x$ là hàm số bậc nhất với $a = -3$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x) = 2 - 3x$ nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$

mà $2 < 1 + \sqrt{2} \Rightarrow f(2) > f(1 + \sqrt{2})$.

Bài 92 Cho hai hàm số : $f(x) = ax + \sqrt{3}$ ($a \neq 0$); $g(x) = (a^2 + 1)x - 1$
 Chứng minh rằng :

a. Các hàm số $f(x) + g(x)$; $g(x) - f(x)$ là đồng biến.

b. Hàm số $f(x) - g(x)$ là nghịch biến.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. * $f(x) + g(x) = ax + \sqrt{3} + (a^2 + 1)x - 1 = (a^2 + a + 1)x + \sqrt{3} - 1$.

* $g(x) - f(x) = (a^2 - a + 1)x - 1 - \sqrt{3}$

Ta có : $a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

và $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên hai hàm số trên đồng biến.

b. $f(x) - g(x) = (a - a^2 - 1)x + \sqrt{3} + 1 = -(a^2 - a + 1)x + \sqrt{3} + 1$

Để thấy : $-(a^2 - a + 1) = -\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] < 0$.

Bài 93 Cho hàm số bậc nhất $y = f(x) = (m - 1)x + 2m - 3$, m là số thực xác định khác 1.

a. Định m để hàm số đồng biến, nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b. Biết $f(1) = 2$, tính $f(2)$.

c. Biết $f(-3) = 0$, hàm số $f(x)$ đồng biến hay nghịch biến.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Hệ số $a = m - 1$, do đó hàm số đồng biến khi $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

và nghịch biến khi $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

b. $f(1) = 2 \Leftrightarrow (m - 1) \cdot 1 + 2m - 3 = 2 \Leftrightarrow 3m = 6 \Leftrightarrow m = 2$.

Với $m = 2$: $y = x + 1 \Rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3$.

c. $f(-3) = 0 \Leftrightarrow (m-1)(-3) + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Với $m = 0$: $y = -x - 3 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến

Bài 94 Cho hàm số $y = (m^2 + m + 1)x - 2$.

Chứng minh rằng hàm số này luôn luôn đồng biến.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Hàm số luôn luôn đồng biến vì $m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi m .

Bài 95 Cho hàm số: $y = f(x) = (m^2 - \sqrt{3}m - \sqrt{2}m + \sqrt{6})x + 7$.

Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến, nghịch biến?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Hàm số có dạng $y = ax + b$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a &= m^2 - \sqrt{3}m - \sqrt{2}m + \sqrt{6} = m(m - \sqrt{3}) - \sqrt{2}(m - \sqrt{3}) \\ &= (m - \sqrt{3})(m - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } y = f(x) = (m - \sqrt{3})(m - \sqrt{2})x + 7.$$

$$\begin{aligned} - \text{ Nếu } (m - \sqrt{3})(m - \sqrt{2}) > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{3} \\ m < \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = f(x) \text{ đồng biến.}$$

$$- \text{ Nếu } (m - \sqrt{3})(m - \sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} < m < \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow y = f(x) \text{ nghịch biến.}$$

Bài 96 a. Trên mặt phẳng tọa độ vẽ tam giác ABC, biết A(0; 4); B(3; 0) và C(-2; 0).

b. Tính S_{ABC} ;

c. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. (Hình bên)

$$\begin{aligned} \text{b. } S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AO = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = \\ &= 10 \text{ (đơn vị diện tích)} \end{aligned}$$

c. Ta có $BC = 5$ (đơn vị độ dài)

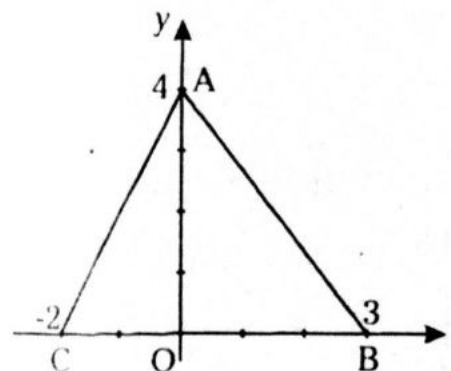
Xét tam giác vuông AOB, theo định lý Pitago ta có:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \text{ hay } 4^2 + 3^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 25$$

$$\Rightarrow AB = 5 \text{ (đơn vị độ dài).}$$

Tương tự với tam giác vuông AOC, ta có $AC = 2\sqrt{5}$ (đơn vị độ dài).



§3. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b , song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$ và trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

* *Chú ý* : Đồ thị hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$) cũng còn được gọi là đường thẳng $y = ax + b$; b được gọi là tung độ gốc của đường thẳng.

2. Cách vẽ đồ thị hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- Khi $b = 0$ thì $y = ax$. Đồ thị của hàm số $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm $A(1; a)$.
- Xét trường hợp $y = ax + b$ với $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

Bước 1: Cho $x = 0$, thì $y = b$, ta được điểm $P(0; b)$ thuộc trục tung Oy .

Cho $y = 0$, thì $x = -\frac{b}{a}$, ta được điểm $Q(-\frac{b}{a}; 0)$.

Bước 2: Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm P, Q ta được đồ thị của hàm số $y = ax + b$.

B. BÀI TẬP

Bài 97 Cho hàm số $y = -x + m$. Hãy xác định m biết:

- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 3.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 2)$.
- Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -1 .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét hàm số $y = -x + m$.

- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 3 $\Rightarrow$ hoành độ điểm đó là 0. Và đồ thị hàm số đi qua điểm $(0, 3)$ nên:

$$3 = -0 + m \Leftrightarrow m = 3.$$

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 2)$

$$\Leftrightarrow 2 = -(-1) + m \Leftrightarrow m = 1.$$

- Đồ thị hàm số trên cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $-1 \Rightarrow$ tung độ điểm đó là 0 và đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1, 0)$ nên:

$$0 = -(-1) + m \Leftrightarrow m = -1.$$

Bài 98

Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

- Xác định giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung và trục hoành. Vẽ đồ thị.
- Gọi A và B theo thứ tự là các giao điểm nói trên. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Giao điểm với trục tung :

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào } y = -\frac{1}{2}x + 2 : y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2.$$

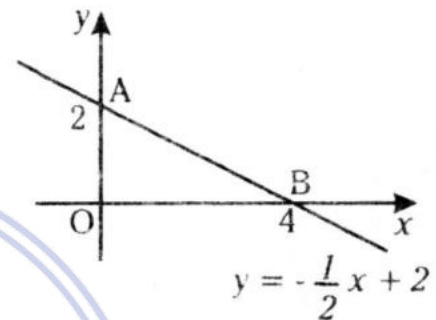
$\Rightarrow$ Giao điểm với trục tung : A (0; 2).

Giao điểm với trục hoành :

$$\text{Thay } y = 0 \text{ vào } y = -\frac{1}{2}x + 2 :$$

$$0 = -\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow x = 4.$$

$\Rightarrow$ Giao điểm với trục hoành : B(4; 0).



b. $S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$ (đơn vị diện tích).

Bài 99

Vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng hệ trục tọa độ:

a. $y = 2x - 3$; b. $y = -x + 4$; c. $y = \frac{x+3}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $y = 2x - 3$: Lấy điểm A(0; -3) và B(2; 1).

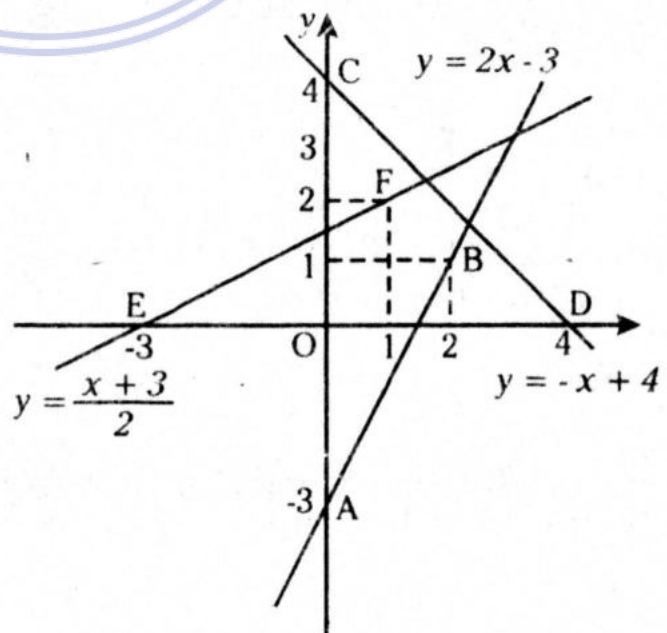
Đồ thị là đường thẳng AB.

b. $y = -x + 4$: Lấy điểm C(0; 4) và D(4; 0).

Đồ thị là đường thẳng CD.

c. $y = \frac{x+3}{2}$: Lấy điểm E(-3; 0) và F(1; 2).

Đồ thị là đường thẳng EF.



Bài 100 a. Vẽ trong cùng một hệ trục tọa độ, đồ thị các hàm số :

$$y = x + 2 \quad ; \quad y = -x + 2.$$

b. Có nhận xét gì? Chứng minh điều nhận xét đó.

HƯỚNG DẪN GIẢIa. Đồ thị hàm số $y = x + 2$ là đường thẳng

(d) đi qua các điểm :

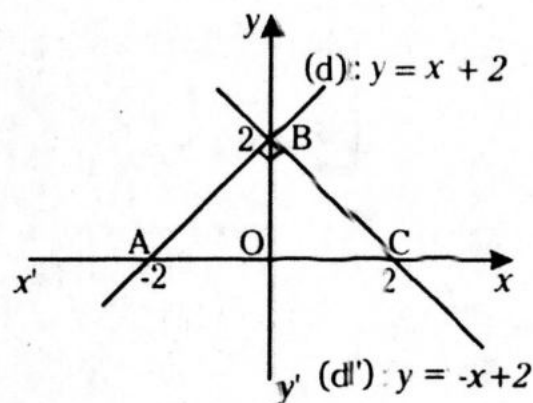
$$A(-2; 0) \quad \text{và} \quad B(0; 2).$$

- Đồ thị hàm số $y = -x + 2$ là đường thẳng (d') đi qua các điểm :

$$C(2; 0) \quad \text{và} \quad B(0; 2)$$

b. Ta nhận thấy $(d) \perp (d') : \triangle BAC$ có $BO =$

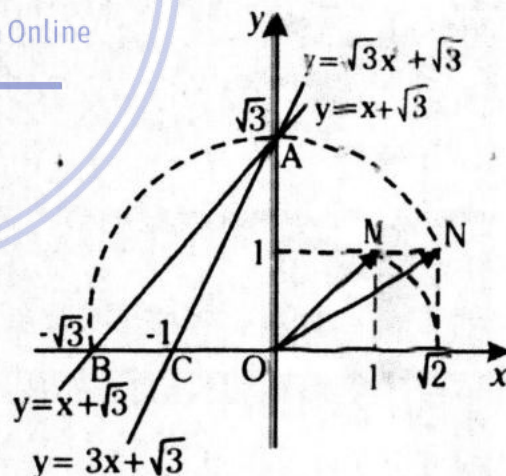
$$OA = OC = 2 = \frac{AC}{2} \text{ nên là một tam giác}$$

vuông tại $B \Rightarrow (d) \perp (d')$.**Bài 101** Vẽ đồ thị các hàm số $y = x + \sqrt{3}$ và $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.**HƯỚNG DẪN GIẢI**

- Vẽ đường thẳng $y = x + \sqrt{3}$.
- Cho $x = 0$ tính được $y = \sqrt{3}$ ta có điểm $A(0; \sqrt{3})$.
- Cho $y = 0$ tính được $x = -\sqrt{3}$ ta có điểm $B(-\sqrt{3}; 0)$.
- Dựng điểm $M(1; 1)$ được : $OM = \sqrt{2}$.
- Quay một cung tâm O , bán kính OM cắt tia Ox , được điểm biểu diễn $\sqrt{2}$.
- Dựng điểm $N(1; \sqrt{2})$, được $ON = \sqrt{3}$.
- Vẽ cung tâm O , bán kính $ON = \sqrt{3}$ được hai điểm $A(0; \sqrt{3})$, $B(-\sqrt{3}; 0)$. Đó là hai điểm có tọa độ thỏa mãn phương trình $y = x + \sqrt{3}$.

Vẽ đường thẳng qua A, B ta được đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{3}$ (1)

- Vẽ đường thẳng $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$.
 - Cho $x = 0$ tính được $y = \sqrt{3}$ ta có điểm $A(0; \sqrt{3})$.
 - Cho $y = 0$ tính được $x = -1$ ta có điểm $C(-1; 0)$.
- Đường thẳng qua A, C là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$.



Bài 102 Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng

(d) : $3x - 4y = 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Giao điểm với trục tung :

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow A\left(0; \frac{1}{4}\right).$$

Giao điểm với trục hoành :

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow B\left(\frac{1}{3}; 0\right).$$

Vẽ đường thẳng AB đó chính là (d) :

$$3x - 4y = 1.$$

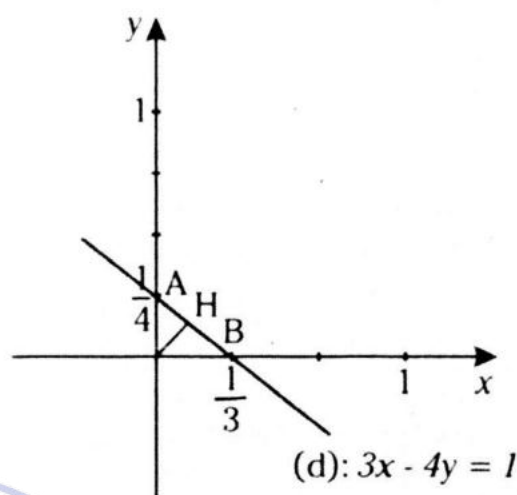
Kẻ đường cao OH của $\triangle OAB$. Ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

Mà $OA = \frac{1}{4}; OB = \frac{1}{3}$

Nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{16}} + \frac{1}{\frac{1}{9}} = 16 + 9 = 25$

$\Rightarrow OH^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow OH = \frac{1}{5}$



Vậy khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) : $3x - 4y = 1$ là $\frac{1}{5}$.

§4. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường thẳng song song

Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$, $b \neq b'$ và trùng nhau khi và chỉ khi $a = a'$, $b = b'$.

2. Đường thẳng cắt nhau

Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.

Chú ý: Khi $a \neq a'$ và $b = b'$ thì hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm trên trục tung có tung độ là b.

B. BÀI TẬP**Bài 103** Xác định hàm số $y = ax + b$ trong mỗi trường hợp sau :

- Khi $a = 3$, đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\sqrt{2}$.
- Khi $a = -3$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5
- Đồ thị hàm số qua điểm $A(-1; -2)$ và song song với đường thẳng $y = -x$.

HƯỚNG DẪN GIẢICác đường thẳng phải tìm có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

- Với $a = 3$, ta có $y = 3x + b$, đường thẳng này cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $\sqrt{2}$, nên $x = \sqrt{2}; y = 0$, do đó:

$$0 = 3\sqrt{2} + b \Rightarrow b = -3\sqrt{2}.$$

Vậy hàm số phải tìm là : $y = 3x - 3\sqrt{2}$.

- Với $a = -3$, hàm số phải tìm là : $y = -3x + 5$.

- Đường thẳng cần tìm có dạng $y = -x + b$. Đường thẳng này qua điểm $A(-1; -2)$ nên $-2 = 1 + b \Rightarrow b = -3$. Vậy hàm số cần tìm là $y = -x - 3$.

Bài 104 Cho đường thẳng $d : y = (a - 1)x - 2a + 3$ và đường thẳng $d' : y = (2a + 1)x + a + 4$. Định a để :

- d và d' cắt nhau;
- d và d' cắt nhau tại một điểm trên trục tung;
- d và d' song song;
- d và d' vuông góc;
- d và d' trùng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- d và d' cắt nhau $\Rightarrow a - 1 \neq 2a + 1 \Leftrightarrow a \neq -2$.

- d cắt Oy tại điểm $(0; -2a + 3)$; d' cắt Oy tại điểm $(0; a + 4)$.

Để d và d' cắt nhau tại một điểm trên Oy thì: $-2a + 3 = a + 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$.

$$\text{c. } d \text{ và } d' \text{ song song} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 2a + 1 \\ -2a + 3 \neq a + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a \neq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = -2$$

$$\text{d. } d \text{ và } d' \text{ vuông góc} \Leftrightarrow (a - 1)(2a + 1) = -1 \Leftrightarrow 2a^2 - 2a + a - 1 = -1. \\ \Leftrightarrow a(2a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ hay } a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{e. } d \text{ và } d' \text{ trùng nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 2a + 1 \\ -2a + 3 = a + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy không có a để d và d' trùng nhau.

Bài 105 Cho hai đường thẳng : $y = m(x + 2)$ và $y = (2m - 3)x + 2$.

- Chứng minh rằng khi $m = 1$ thì hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.
- Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Khi $m = 1$ thì ta có : $y = x + 2$ và $y = -x + 2$.
Ta có : $a \cdot a' = 1(-1) = -1$. Vậy chúng vuông góc nhau.
- Ta phải có $m(2m - 3) = -1$. Từ đó : $m = 1$ hoặc $m = \frac{1}{2}$.

Bài 106 Cho hàm số $y = (m - 2)x + 3m + 1$ có đồ thị là (d).

- Tìm m để (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 2$.
- Tìm m để (d) vuông góc với đường thẳng $y = -x$.
- Tìm m để (d) đi qua điểm $(-2; \frac{1}{2})$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét hàm số $y = (m - 2)x + 3m + 1$ có đồ thị là (d).

- (d) song song đường thẳng $y = 3x + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 3 \\ 3m + 1 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

- (d) vuông góc với đường thẳng $y = -x$

$$\Leftrightarrow (m - 2)(-1) = -1 \Leftrightarrow m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 3.$$

- (d) đi qua điểm $(-2; \frac{1}{2})$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = (m - 2)(-2) + 3m + 1 \Leftrightarrow 1 = -4m + 8 + 6m + 2$$

$$\Leftrightarrow 2m = -9 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{2}.$$

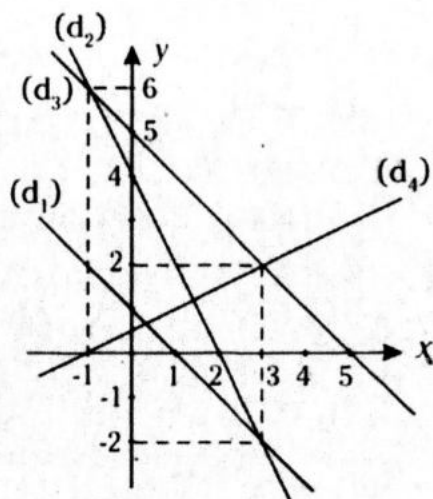
Bài 107 Trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy:

- Vẽ đồ thị hàm số: $(d_1) : y = -x + 1$

$$(d_2) : y = -2x + 4$$

Nhận xét về vị trí tương đối của (d_1) và (d_2) .

- Xác định và vẽ đường thẳng (d_3) đi qua điểm $M(3; 2)$ và song song với (d_1) .
- Xác định và vẽ đường thẳng (d_4) qua M và vuông góc với (d_2) .

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. $(d_1): (0; 1); (1; 0)$; $(d_2): (0; 4); (2; 0)$; $(d_1):$ cắt (d_2) tại $A(3; -2)$
 b. $(d_3): y = -x + 5$
 c. $(d_4): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Bài 108 Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $y = (m - 1)x + 2$ ($m \neq 1$) và $y = 3x - 1$:

- a. Song song với nhau; b. Cắt nhau;
 c. Vuông góc với nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Hệ số a của hai đường thẳng đã cho lần lượt là: $a = m - 1$ ($m \neq 1$) và $a' = 3$.

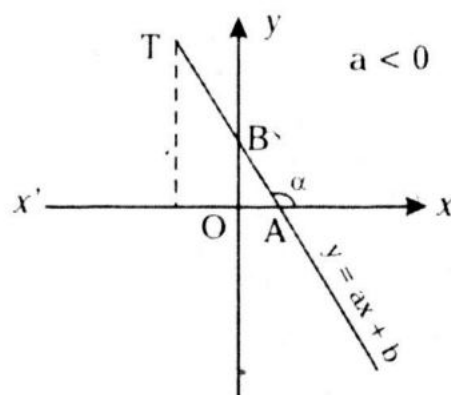
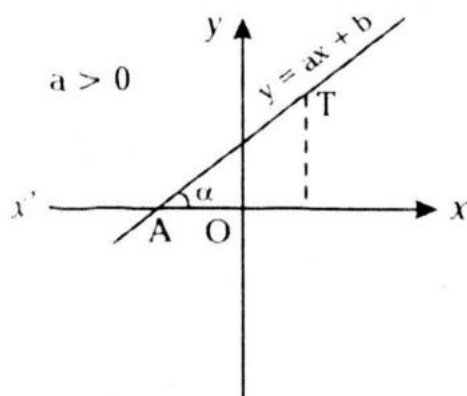
- a. Hai đường thẳng song song khi: $a = a' \Leftrightarrow m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 4$.
 b. Hai đường thẳng cắt nhau khi: $a \neq a' \Leftrightarrow m - 1 \neq 3 \Leftrightarrow m \neq 4$.
 c. Hai đường thẳng vuông góc khi

$$a \cdot a' = -1 \Leftrightarrow (m - 1) \cdot 3 = -1$$

$$\Leftrightarrow 3m - 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}.$$

§5. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ **A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****1. Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khi nói góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox (hoặc nói đường thẳng $y = ax + b$ tạo với trục Ox một góc α), ta hiểu đó là góc tạo bởi tia Ax và tia AT trong đó A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox , T là điểm thuộc đường thẳng $y = ax + b$ và có tung độ dương.



2. Hệ số góc

Các đường thẳng có cùng hệ số a (a là hệ số của x) thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau.

Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) có hệ số góc là a .

$$a > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

$$a < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

* *Chú ý* : Khi $b = 0$, ta có hàm số $y = ax$. Trong trường hợp này, ta cũng nói rằng a là hệ số góc của đường thẳng $y = ax$.

B. BÀI TẬP

- Bài 109**
- Tìm hàm số bậc nhất biết hệ số góc bằng -1 , và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2, 3)$.
 - Tìm hàm số bậc nhất biết đồ thị của nó qua hai điểm $A(-1, 2)$; $B(2, -1)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Ta có $a = -1$ nên $y = -x + b$ (1)

Đồ thị qua $A(2, 3)$.

Nên thay $x = 2, y = 3$ vào (1) thì được : $3 = -2 + b \Rightarrow b = 5$

Vậy $y = -x + 5$.

- b. Giả sử $y = ax + b$ (2)

Đồ thị qua $A(-1; 2)$ nên : $2 = -a + b$

qua $B(2; -1)$ nên : $-1 = 2a + b$.

$$\text{Suy ra : } \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}$$

Vậy : $y = -x + 5$.

- Bài 110** Cho hàm số $y = (m - 1)x + m$ (1)

- Xác định giá trị của m để đường thẳng (1) đi qua gốc tọa độ ?
Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$.

- b. Xác định giá trị của m để đường thẳng (1) song song với đường thẳng $y = -5x + 1$.
- c. Với giá trị nào của m thì góc α tạo bởi đường thẳng (1) với tia Ox là góc tù? Bằng 45° ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. $m = 0$; (lúc ấy $y = -x$). Đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$, tức tung độ gốc bằng $1 - \sqrt{2}$. Vậy $m = 1 - \sqrt{2}$.
- b. $\begin{cases} m - 1 = -5 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow m = -4$ ($m = -4$ thỏa mãn $m \neq 1$).
- c. $m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1$.
 $m - 1 = 1 \Rightarrow m = 2$ (lưu ý $\tan 45^\circ = 1$).

Bài 111 Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(3; 4)$.

- a. Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua A, B;
 b. Biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua A, B. Tìm hàm số đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Giả sử đường thẳng có dạng: $y = ax + b$. Khi đó

- Điểm $A(1; 2) \in y = ax + b \Leftrightarrow 2 = a \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 2 - a$ (1)
 – Điểm $B(3; 4) \in y = ax + b \Leftrightarrow 4 = a \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 4 - 3a$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $2 - a = 4 - 3a \Leftrightarrow a = 1$

thay $a = 1$ vào (1) ta có $b = 1$

Vậy: a. Hệ số góc của đường thẳng đi qua A, B là $a = 1$;

b. Hàm số $y = x + 1$ có đồ thị là đường thẳng đi qua A, B.

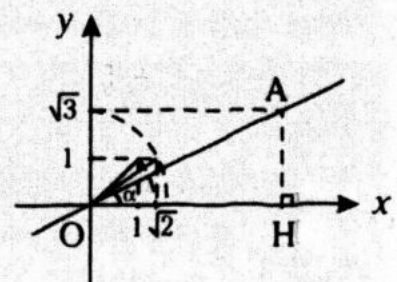
Bài 112 Cho hàm số $y = ax$ có đồ thị đi qua điểm $A(3; \sqrt{3})$. Xác định hệ số a và tính góc tạo bởi đường thẳng và tia Ox .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xem hình bên mô tả cách vẽ điểm $A(3; \sqrt{3})$

$$\text{Ta có: } a = \tan \alpha = \frac{HA}{OH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Suy ra: $\alpha = 30^\circ$.



Bài 113 a. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ, đồ thị các hàm số:

$$y = x + 1; y = 2x + 1; y = -x + 1.$$

b. Có nhận xét gì?

c. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ lần lượt là góc hợp bởi đường thẳng $y = x + 1$, $y = 2x + 1$, $y = -x + 1$ với tia Ox . Tính các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

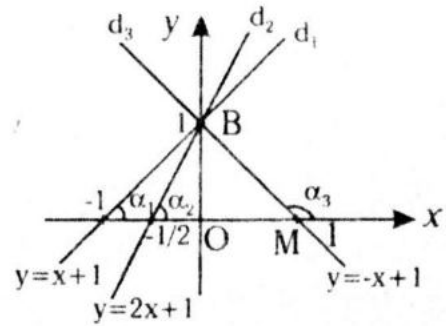
a. Đồ thị hàm số $y = x + 1$ là đường thẳng d_1 đi qua các điểm $A(-1; 0)$ và $B(0; 1)$.

• Đồ thị hàm số $y = 2x + 1$ là đường thẳng d_2 đi qua các điểm $C(-\frac{1}{2}; 0)$ và $B(0; 1)$.

• Đồ thị hàm số $y = -x + 1$ là đường thẳng d_3 đi qua các điểm $M(1; 0)$ và $B(0; 1)$.

b. Các đường thẳng d_1, d_2, d_3 (có cùng tung độ $b = 1$) đồng qui tại điểm $B(0; 1)$ thuộc tia Oy .

c. Ta có : $\operatorname{tg} \alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 45^\circ$
 $\operatorname{tg} \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 63^\circ 26' 6''$
 $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha_3) = 1 \Rightarrow 180^\circ - \alpha_3 = 45^\circ \Rightarrow \alpha_3 = 135^\circ$.



BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 114 Cho hàm số bậc nhất: $y = f(x) = (m^2 - m)x + m + 1$.

Tìm những giá trị của m trong mỗi trường hợp sau, nếu:

a. Hàm số đồng biến.

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 5)$.

c. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $P(0; 4)$.

d. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $Q(-\frac{3}{2}; 0)$.

Bài 115 a. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị hàm số:

$$y = 2x \quad \text{và} \quad y = (\sqrt{3} - 1)x.$$

b. Gọi A là điểm trên đường thẳng $y = 2x$ có hoành độ bằng $\frac{2}{3}$, B là điểm trên đường thẳng $y = (\sqrt{3} - 1)x$ có hoành độ bằng 3. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Bài 116 a. Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ đồ thị các hàm số:

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}.$$

b. Xác định hàm số mà đồ thị của nó là đường thẳng lập với tia Ox góc 135° , đi qua điểm $M(1; 1)$.

Bài 117 a. Vẽ trên cùng hệ trục tọa độ đồ thị các hàm số:

$$y = x + 2 \quad (d_1); \quad y = -\frac{1}{2}x + 1 \quad (d_2)$$

- b. Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2) . Tìm tọa độ của điểm A.
- c. Gọi (d_3) là đường thẳng đi qua $K(0; \frac{5}{2})$ song song với trục hoành.
- Đường thẳng (d_3) cắt các đường thẳng (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại B và C. Tìm tọa độ của B và C rồi tính diện tích tam giác ABC.

Bài 118 Cho ba đường thẳng:

$$(d_1): 2x + 3y - 5 = 0; \quad (d_2): x - 7y + 6 = 0; \\ (d_3): 10x - 9y - 1 = 0.$$

Vẽ các đường thẳng (d_1) , (d_2) , (d_3) trên cùng một hệ trục tọa độ. Có nhận xét gì về vị trí tương đối của ba đường thẳng (d_1) , (d_2) , (d_3) .

Bài 119 Trong hệ trục tọa độ Đề các cho đường thẳng $(d): 3x - y - 4 = 0$ và điểm $A(1; -2)$.

- Xác định vị trí tương đối của điểm A và đường thẳng (d) .
- Viết phương trình đường thẳng (d_1) qua A và song song với (d) .
- Viết phương trình đường thẳng (d_2) qua A và vuông góc với (d) .
- Cho đường thẳng $\Delta: (2 - m)x + my - 4 = 0$. Xác định m để ba đường thẳng (d_1) , (d_2) , Δ đồng quy.

Bài 120 Cho đường thẳng $\Delta: (m + 2)x + (m - 1)y - 3 = 0$, trong đó m là tham số.

- Xác định m để ta có đường thẳng Δ song song với đường thẳng $2x - y + 4 = 0$.
- Chứng tỏ đường thẳng Δ luôn đi qua một điểm cố định A. Tìm điểm cố định A.

Bài 121 Trên mặt phẳng tọa độ cho ba điểm $A(-2\sqrt{3}; 0)$; $B(-2; 0)$ và $C(0; 2)$.

- Tìm các hàm số mà đồ thị của nó là đường thẳng AC, đường thẳng BC.
- Tìm số đo góc của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

Bài 114

- Hàm số đồng biến với các giá trị của m sao cho $m^2 - m > 0$.
Điều này xảy ra khi $m < 0$ hoặc $m > 1$.
- Đồ thị đi qua điểm $A(1, 5)$ thì tọa độ A phải nghiệm đúng công thức của hàm số. Điều đó nghĩa là:
$$5 = (m^2 - m).1 + m + 1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$
- Ta có: $-4 = (m^2 - m).0 + m + 1 \Leftrightarrow m = -5.$
- Thay tọa độ Q vào công thức của hàm số thì được:

$$0 = (m^2 - m)\left(-\frac{3}{2}\right) + m + 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 5m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)(3m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ hoặc } m = -\frac{1}{3}.$$

Bài 115

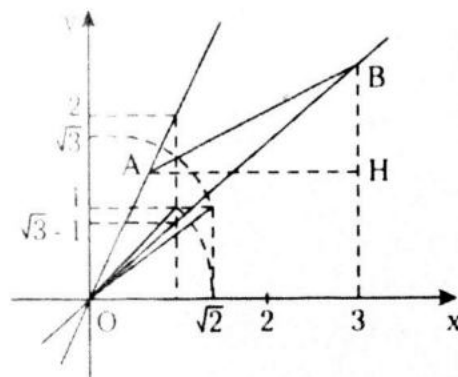
a. Hình bên.

Tính tọa độ của A và B

$$A\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right); B(3; (\sqrt{3} - 1)3).$$

Theo định lý Pitago, ta có:

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2}$$



$$= \sqrt{\left(3 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left[3(\sqrt{3} - 1) - \frac{4}{3}\right]^2} \approx 2.44 \text{ (đơn vị dài)}.$$

Bài 116

a. Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}$ là đường thẳng (d_1) , đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ là đường thẳng (d_2) như ở hình bên.

b. Đường thẳng lập với tia Ox góc 135° đi qua điểm $M(1; 1)$ là đường (d_3) . Kí hiệu các giao điểm giữa các đường thẳng như hình vẽ bên. Ta có:

$$\widehat{MIO} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

Hệ số góc của đường thẳng MI là:

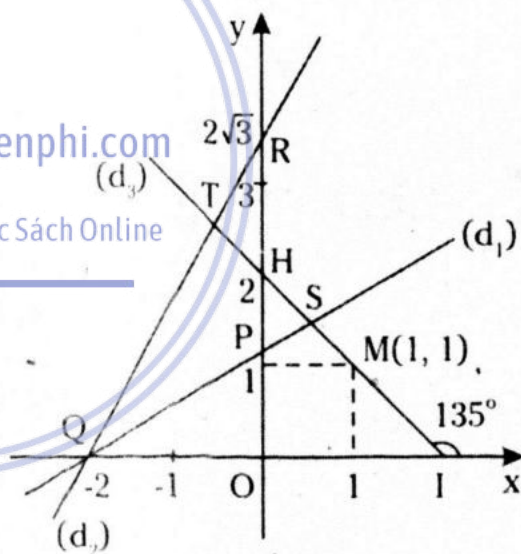
$$a = -\operatorname{tg} \widehat{MIO} = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1.$$

Vậy phương trình của (d_3) có dạng:

$$y = -x + b$$

Vì $M(1; 1)$ thuộc (d_3) nên có phương trình $1 = -1 + b$.

Suy ra $b = 2$ và (d_3) có phương trình là: $y = -x + 2$.

**Bài 117**

a. Vẽ đồ thị hàm số: $y = x + 2$ và $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Giao điểm d_1 với trục tung $P(0; 2)$, với trục hoành $Q(-2; 0)$.

Giao điểm d_2 với trục tung $P'(0; 1)$, với trục hoành $Q'(2; 0)$.

b. Hoành độ của A là nghiệm của phương trình:

$$x + 2 = -\frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow x_A = -\frac{2}{3}$$

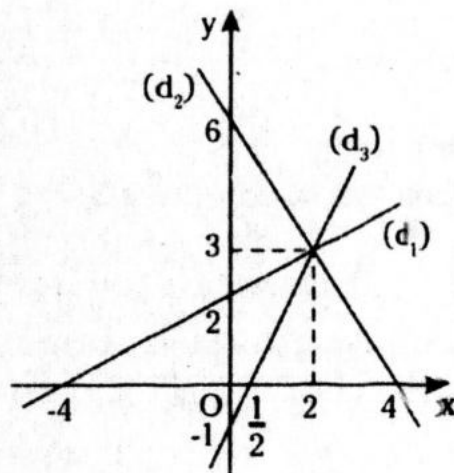
Tung độ của A :

$$y_A = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

Vậy tọa độ của A là $\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$

c. Hoành độ giao điểm của d_3 và d_1 là nghiệm của phương trình:

$$\frac{5}{2} = x + 2 \Rightarrow x_B = \frac{1}{2} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$$



Hoành độ điểm C là nghiệm của phương trình:

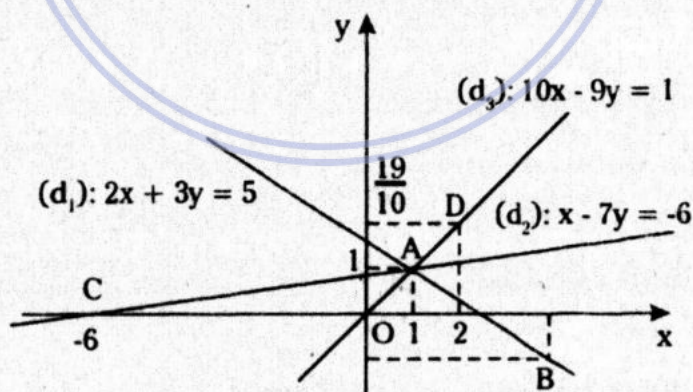
$$\frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow x_C = -3 \Rightarrow C(-3; \frac{5}{2})$$

Tính diện tích tam giác ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}(x_B - x_C) \left(\frac{5}{2} - y_A\right) = \frac{43}{24} \text{ đvdt.}$$

Bài 118

a. (d_1) qua $A(1; 1)$; $B(4; -1)$; (d_2) qua $A(1; 1)$; $C(-6; 0)$.



(d_3) qua $A(1; 1)$; $D(2; \frac{19}{10})$.

Từ hình vẽ ta thấy ba đường thẳng (d_1) , (d_2) , (d_3) đồng quy tại điểm $A(1; 1)$.

Bài 119

a. Thế tọa độ điểm A vào vế trái phương trình của đường thẳng (d) , ta có:

$$3 \cdot 2 - (-2) - 4 = 3 + 2 - 4 = 1 \neq 0.$$

Vậy điểm A nằm ngoài đường thẳng (d) .

b. Phương trình đường thẳng (d) có thể đưa về dạng

$$3x - y - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x - 4.$$

Các đường thẳng song song với (d) phải có dạng $y = 3x + m$.

Đường thẳng dạng $y = 3x + m$ đi qua $A(1; -2)$ cho ta:

$$-2 = 3.1 + m \quad \Rightarrow \quad m = -5.$$

Vậy đường thẳng d_1 qua A và song song với (d) có phương trình:

$$(d_1) : y = 3x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - y - 5 = 0.$$

c. Hệ số góc của (d) là $k = 3$. Đường thẳng vuông góc với (d) có dạng

$$y = -\frac{1}{3}x + n, \text{ và qua } A(1; -2) \text{ cho ta } -2 = -\frac{1}{3}.1 + n \Rightarrow n = -\frac{5}{3}.$$

$$\text{Vậy } (d_2) : y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \quad \text{hay} \quad x + 3y + 5 = 0.$$

d. Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm $A(1; 2)$. Để ba đường thẳng (d_1) , (d_2) , Δ đồng quy thì Δ phải đi qua $A(1; 2)$, do đó ta có:

$$(2 - m).1 + m(-2) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3m - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -\frac{2}{3}.$$

Bài 120

a. Ta cần có: $\frac{m+2}{2} = \frac{m-1}{-1} \neq \frac{-3}{4}$

và được đường thẳng: $2x - y - 3 = 0$.

b. $(m+2)x + (m-1)y - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(x+y) + 2x - y - 3 = 0.$

Điểm cố định mà Δ luôn đi qua có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases} \Rightarrow x=1; y=-1 \Rightarrow A(1; -1).$$

Bài 121

a. Hàm số có đồ thị là đường thẳng AC là: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$ và hàm số có đồ thị

là đường thẳng BC là: $y = x + 2$.

b. Ta có:

$$\widehat{\text{tgCAB}} = \frac{CO}{OA} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

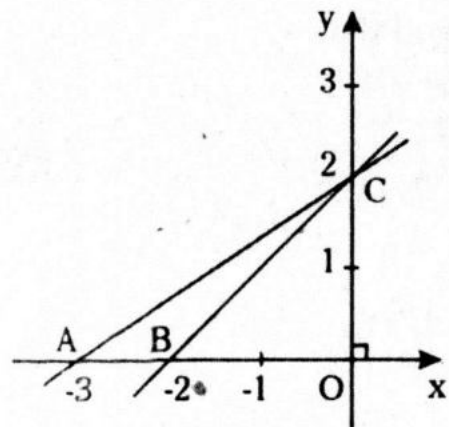
$$\Rightarrow \widehat{\text{CAB}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\text{tgCBO}} = \frac{CO}{OB} = \frac{2}{|-2|} = 1$$

$$\Rightarrow \widehat{\text{CBO}} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \widehat{\text{ABC}} = 135^\circ.$$

Vậy các góc của tam giác ABC có số đo là:

$$\widehat{A} = 30^\circ, \widehat{B} = 135^\circ, \widehat{C} = 15^\circ$$



Chương III

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm về phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 1 :

Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình dạng

$$ax + by = c \quad (1)$$

trong đó a, b và c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$), x và y là các ẩn.

Định nghĩa 2 :

Nếu tại $x = x_0$ và $y = y_0$ mà vế trái của phương trình (1) có giá trị bằng vế phải thì cặp số (x_0, y_0) được gọi là một nghiệm của phương trình đó.

- * Chú ý : Khái niệm cặp số dùng để chỉ hai số kể cả thứ tự của chúng. Chẳng hạn $(a; b) \neq (b; a)$. Để nói rằng $x = x_0$ và $y = y_0$, ta viết $(x; y) =$

$$(x_0, y_0), \text{ hoặc } \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

2. Tập nghiệm và biểu diễn hình học của nó

- a. Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một đường thẳng (d) gọi là đường thẳng $ax + by = c$.

- b. Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì đường thẳng (d) chính là đồ thị của hàm số:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì đường thẳng (d) song song với trục hoành.

Nếu $b = 0$ và $a \neq 0$ thì đường thẳng (d) song song với trục tung.

B. BÀI TẬP

Bài 122 Phương trình nào sau đây xác định một hàm số dạng $y = ax + b$:

a. $2x - 3y = 5$

b. $x + 2y = -1 + x$

c. $xy + 3 = 2x$

d. $3x - y = 10 - y$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có $2x - 3y = 5 \Rightarrow -3y = -2x + 5$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \text{ xác định hàm số dạng } y = ax + b$$

b. $x + 2y = -1 + x \Rightarrow 2y = -1$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ xác định hàm số dạng $y = ax + b$.

c. $xy + 3 = 2x \Rightarrow xy = 2x - 3$

$\Rightarrow y = 2 - \frac{3}{x}$ không xác định hàm số dạng $y = ax + b$.

d. $3x - y = 10 - y \Rightarrow 3x = 10$

$\Rightarrow x = \frac{10}{3}$ không xác định hàm số dạng $y = ax + b$.

Bài 123 Cho phương trình $ax - 2y = 2a - 3$ (1), a là hệ số.

a. Định a để (1) không có nghiệm là (1; 2).

b. Biết (1) có nghiệm (3; -1), tìm nghiệm tổng quát của phương trình.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Thế $x = 1, y = 2$ vào (1), ta được : $a - 4 = 2a - 3 \Leftrightarrow a = -1$.

Vậy (1) không có nghiệm (1; 2) $\Leftrightarrow a \neq -1$.

b. Thế $x = 3, y = -1$ vào (1), ta được : $3a + 2 = 2a - 3 \Leftrightarrow a = -5$.

Với $a = -5$: (1) thành $-5x - 2y = -13 \Leftrightarrow y = \frac{-5x + 13}{2}$.

Hệ có nghiệm tổng quát là : $(x \in \mathbb{R}, y = \frac{-5x + 13}{2})$.

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Bài 124 Giải các phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trong hệ trục Oxy.

a. $2x - 3y = 9$

;

b. $2x + 0y - 5 = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta tính y theo x :

$$y = \frac{2x - 9}{3} = \frac{2x}{3} - 3$$

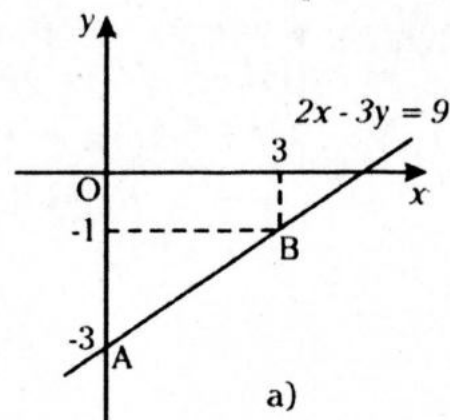
Phương trình có vô số nghiệm $(x \in \mathbb{R}, y = \frac{2x}{3} - 3)$.

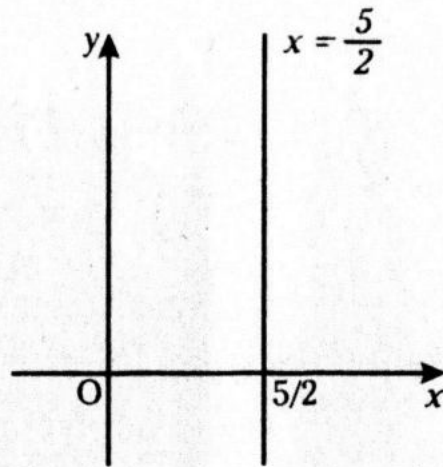
Để biểu diễn tập nghiệm, ta chỉ cần biểu diễn 2 nghiệm, tức hai điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{3} - 3$ hay 2 điểm của đường thẳng $2x - 3y = 9$.

$x = 0$: $y = -3$ (điểm A)

$x = 3$, $y = -1$ (điểm B)

Tập nghiệm là đường thẳng AB.





b. Phương trình có vô số nghiệm ($x = \frac{5}{2}, y \in \mathbb{R}$).

Tập nghiệm là đường thẳng vuông góc với Ox tại điểm $(\frac{5}{2}, 0)$.

Bài 125 Tính diện tích tam giác được tạo thành bởi đường thẳng có phương trình $3x - 4y - 12 = 0$ và hai trục tọa độ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

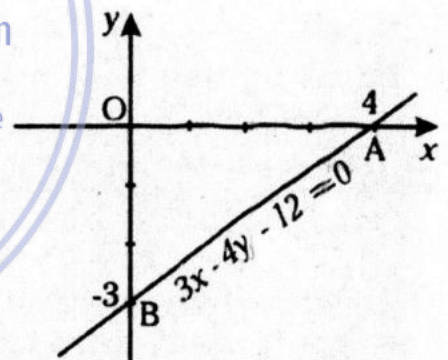
Giao điểm của đường thẳng $3x - 4y - 12 = 0$ với hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt là (h.16).

$$A \begin{cases} x = 4; \\ y = 0; \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Tam giác AOB vuông ở O, do đó :

$$\begin{aligned} S_{AOB} &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \\ &= \frac{1}{2} \cdot |4| \cdot |-3| = 6 \text{ (đơn vị diện tích)} \end{aligned}$$



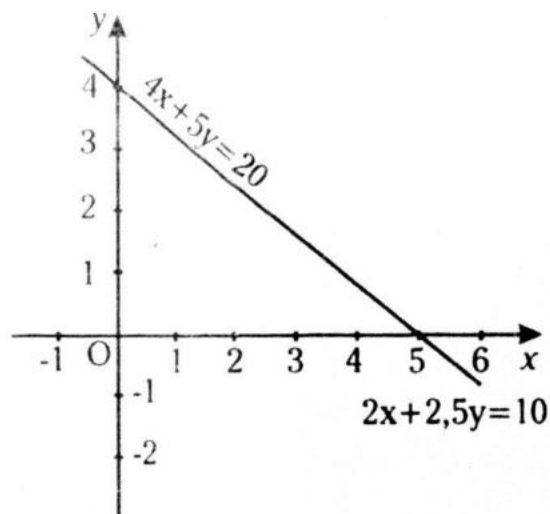
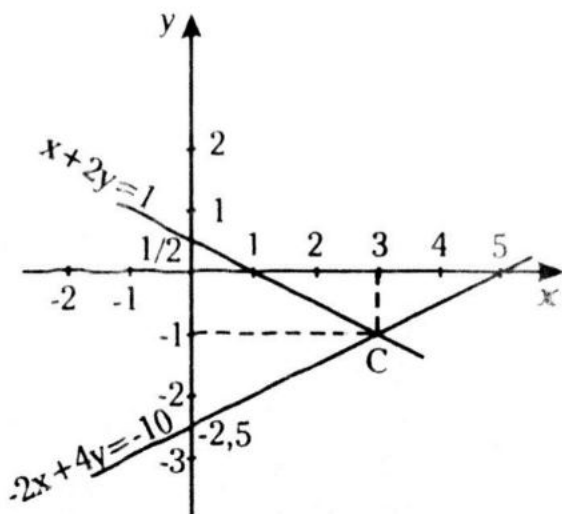
Bài 126 Vẽ đồ thị của mỗi cặp phương trình sau trong cùng một hệ trục tọa độ rồi tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị :

a. $x + 2y = 1$ và $-2x + 4y = -10$.

b. $2x + 2,5y = 10$ và $4x + 5y = 20$.

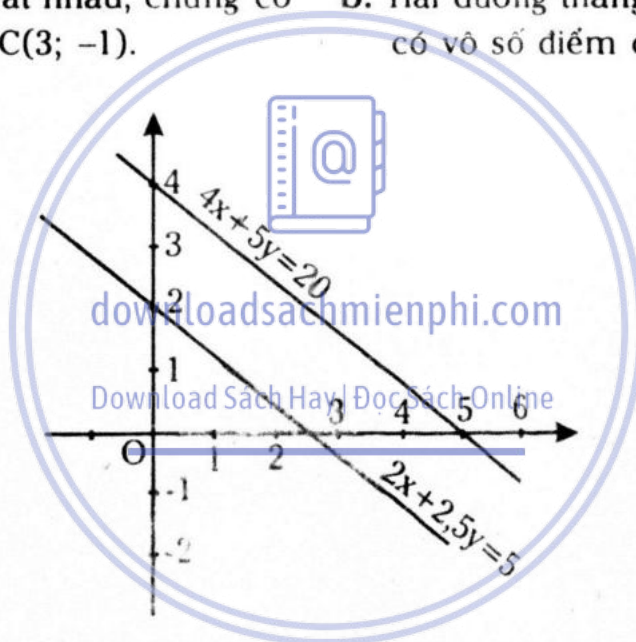
c. $4x + 5y = 20$ và $2x + 2,5y = 5$.

HƯỚNG DẪN GIẢI



a. Hai đường thẳng cắt nhau, chúng có một điểm chung $C(3; -1)$.

b. Hai đường thẳng trùng nhau, chúng có vô số điểm chung.



c. Hai đường thẳng song song. Chúng không có điểm chung.

Bài 127 Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $5x + 3y = 2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$5x + 3y = 2$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{2 - 5x}{3} = \frac{3 - 6x + x - 1}{3} = 1 - 2x + \frac{x - 1}{3}.$$

Nếu $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{x - 1}{3} \in \mathbb{Z}$.

Đặt $\frac{x - 1}{3} = t \in \mathbb{Z}$, thì : $x = 3t + 1$.

Từ đó $y = 1 - 2(3t + 1) + t = 1 - 6t - 2 + t = -5t - 1$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là :
$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -5t - 1 \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Chẳng hạn chọn $t = -1$, thì $x = -2$, $y = 4$ là một nghiệm nguyên của phương trình $5x + 3y = 2$.

Bài 128 Trên đường thẳng : $8x - 13y + 6 = 0$ hãy tìm các điểm nguyên nằm giữa hai đường thẳng : $x = -10$ và $x = 50$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Nếu $M(x, y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ là một điểm thuộc đường thẳng: $8x - 13y + 6 = 0$ thì x, y là nghiệm nguyên của phương trình này.

Tương tự bài toán ở trên, ta tìm được nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là:

$$\begin{cases} x = 13t - 30; \\ y = 8t - 18; t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Do } -10 < x < 50 \Leftrightarrow -10 < 13t - 30 < 50$$

suy ra $t = 2, 3, 4, 5, 6$; từ đó ta có 5 điểm nguyên tương ứng là

$$(-4; -2); (9; 6); (22; 14); (35; 22); (48; 30).$$

§2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm về hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng :

$$(I) \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

trong đó $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ là những phương trình bậc nhất hai ẩn.

Nếu hai phương trình của hệ có nghiệm chung thì nghiệm chung ấy gọi là nghiệm của hệ phương trình (I). Trái lại, nếu hai phương trình không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) là vô nghiệm.

Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

2. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Đối với hệ phương trình (I), ta có :

- Nếu (d) cắt (d') thì hệ (I) có một nghiệm duy nhất.
- Nếu (d) song song với (d') thì hệ (I) vô nghiệm.
- Nếu (d) trùng với (d') thì hệ (I) có vô số nghiệm.

- * *Chú ý* : Trong trường hợp hai đường thẳng cắt nhau, ta có thể xác định được tọa độ giao điểm của chúng, nghĩa là có thể tìm được nghiệm của hệ phương trình. Cách làm đó gọi là giải hệ phương trình bằng phương pháp hình học. Tuy nhiên, phương pháp này thường chỉ cho các giá trị gần đúng của nghiệm với độ chính xác phụ thuộc vào hình vẽ. Bởi vậy, muốn biết chính xác nghiệm của hệ phương trình ta phải thử lại cho chắc chắn.

B. BÀI TẬP

Bài 129

Cho hệ phương trình (ẩn là x, y) :
$$\begin{cases} -mx + y = -2m \\ x - my = 1 - m \end{cases}$$

Tìm m sao cho hệ trên nhận cặp số $(x = 1; y = 1)$ làm nghiệm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Thay $x = 1; y = 1$ vào hệ phương trình ta được

$$-m + 1 = -2m \Rightarrow m = -1.$$

$$1 - m = 1 - m \text{ đúng với mọi số thực } m.$$

Vậy $m = -1$.

Bài 130

Hãy kiểm tra xem mỗi cặp số sau có phải là một nghiệm của hệ phương trình tương ứng hay không ?

$$\begin{array}{ll} \text{a. } (1; 2), & \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases} & \text{b. } (2; 2), & \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases} \\ \text{c. } (4; 5), & \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 6x - 4y = 4 \end{cases} & \end{array}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Thay $x = 1, y = 2$ vào hai phương trình trong hệ ta được.

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 1 + 4 = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy cặp số $(1, 2)$ là một nghiệm của hệ tương ứng.

b. Không, vì $6 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4 \neq 3$.

c. Có.

Bài 131

Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ mx + y = 2m \end{cases}$$

Xác định m để hệ phương trình có một nghiệm ? vô nghiệm ? vô số nghiệm ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 1 \\ mx + y = 2m \end{cases} \quad (I) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -x + 1 & (1) \\ y = -mx + 2m & (2) \end{cases}$$

Gọi $(d_1), (d_2)$ là các đường thẳng có phương trình (1) và (2)

Hệ phương trình (I) có 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow (d_1) \text{ cắt } (d_2)$$

$$\Leftrightarrow -1 \neq -m \quad \text{hay} \quad m \neq 1.$$

Hệ phương trình (I) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -m \\ 1 \neq 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Hệ phương trình (I) có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -m \\ 1 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \text{điều này không thể xảy ra.}$$

Vậy $m \neq 1$: hệ phương trình (I) có 1 nghiệm.

$m = 1$: hệ phương trình (I) vô nghiệm.

Không có giá trị của m để hệ phương trình (I) có vô số nghiệm.

Bài 132 Cho phương trình $2x - 3y = 5$. Hãy thêm một phương trình bậc nhất hai ẩn để được một hệ phương trình :

a. Có nghiệm duy nhất

b. Vô nghiệm

c. Có vô số nghiệm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Biến đổi phương trình đã cho thành : $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

a. Chẳng hạn : $y = x + 1$ hay $x - y = -1$. Vì hai đường thẳng $(d_1) : y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ và $(d_2) : y = x + 1$ có $\frac{2}{3} \neq 1$ nên chúng cắt nhau. Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

b. Chẳng hạn : $y = \frac{2}{3}x + 1$ hay $2x - 3y = -3$. Vì $(d_1) : y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ và $(d_2) : y = \frac{2}{3}x + 1$ có $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, $-\frac{5}{3} \neq 1$ nên chúng song song.

Vậy hệ vô nghiệm

Chẳng hạn : $4x - 6y = 10$.

Bài 133 Dựa vào vị trí tương đối giữa hai đồ thị, hãy tìm mối liên hệ giữa các hằng số a, b, c và các hằng số a', b', c' (a, b, a', b' đều khác 0) để hệ phương trình :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

a. Có nghiệm duy nhất;

b. Vô nghiệm;

c. Có vô số nghiệm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Với a, b, a', b' đều khác 0. Ta có :
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \\ y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'} \end{cases}$$

a. Hệ có nghiệm duy nhất khi hai đồ thị cắt nhau, tức là khi $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$ hay $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

b. Hệ vô nghiệm khi hai đồ thị song song, tức là khi : $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ và $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$ hay

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \text{ nếu } c' \neq 0, \text{ hoặc } \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c} \text{ nếu } c \neq 0.$$

c. Hệ có vô số nghiệm khi hai đồ thị trùng nhau, tức là khi : $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ và

$$\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \text{ hay } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Bài 134 Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

a. Giải hệ bằng đồ thị.

b. Nghiệm của hệ có phải là nghiệm của phương trình $3x - 2y = -1$ hay không?

HƯỚNG DẪN GIẢI
Download Sách Hay | Đọc Sách Online

a. Đường thẳng

$(d_1) : x + y = 3$ qua $A(0; 3), B(3; 0)$

$(d_2) : 2x + y = 4$ qua $C(0; 4), D(2; 0)$

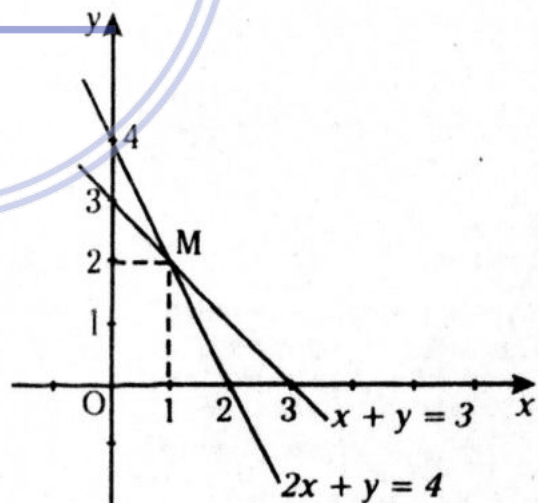
Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng này là $M(1; 2)$.

Thử lại $(1; 2)$ là nghiệm của hệ phương trình.

b. Thay $x = 1, y = 2$ vào phương trình $3x - 2y = -1$ ta được ;

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm của hệ là nghiệm của phương trình $3x - 2y = -1$.

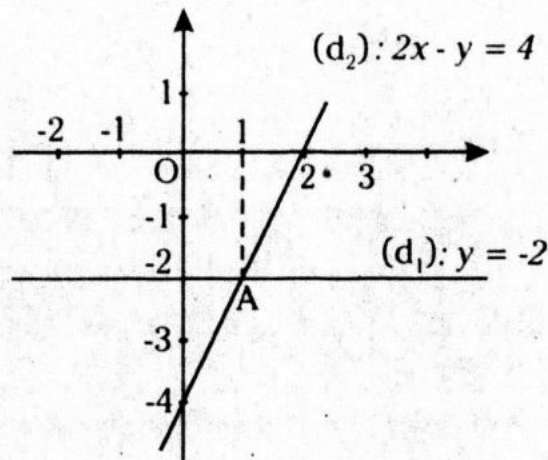


Bài 135 Ba đường thẳng sau có đồng qui hay không ?

$(d_1) : y = -2$

$(d_2) : 2x - y = 4$

$(d_3) : 3x - 7y = 17$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vẽ hai đường thẳng (d_1) và (d_2) . Tìm tọa độ giao điểm của chúng ta được $A(1; -2)$.

Thay $x = 1, y = -2$ vào phương trình $3x - 7y = 17$ ta được :

$$3 \cdot 1 - 7(-2) = 3 + 14 = 17 \text{ (thỏa mãn)}$$

Nên $A(1; -2)$ thuộc đường thẳng (d_3) . Vậy ba đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ đồng qui.

§3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc thế cho phép ta thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

Bước 2: Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ (và giữ nguyên phương trình thứ nhất).

2. Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

1. Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.
2. Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

B. BÀI TẬP**Bài 136**

Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Hãy xác định các số a và b sao cho các hệ phương trình sau tương đương với hệ phương trình đã cho.

$$\begin{cases} 3x - 3y = a \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x - b \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

• Ta có $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = a \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Ta thấy phương trình $x - y = 1$ được thay bởi phương trình tương đương với nó là $3x - 3y = a$.

Mà $x - y = 1 \Leftrightarrow 3x - 3y = 3$

Suy ra $a = 3$.

• Tương tự $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - b \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Phương trình $x - y = 1$ được thay bởi phương trình tương đương với nó là $y = x - b$ hay $x - y = b$. Suy ra $b = 1$.

Vậy $a = 3, b = 1$.

Bài 137

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế :

a. $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 5y = 22 \end{cases};$ b. $\begin{cases} -x + 2y - 6 = 0 \\ 5x - 3y - 5 = 0 \end{cases};$ c. $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có : $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 5y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ 3x + 5(2x - 6) = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 6 \\ 13x = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

b. Từ phương trình đầu, ta có : $x = 2y - 6$ (*)

Thế vào phương trình sau :

$$5(2y - 6) - 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow 7y = 35 \Leftrightarrow y = 5.$$

Thế vào (*) : $x = 4$. Hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$

c. Từ phương trình đầu : $y = \frac{14 - 3x}{2}$ (*)

Thế vào phương trình sau :

$$5x + 3 \cdot \frac{14 - 3x}{2} = 1 \Leftrightarrow 10x + 42 - 9x = 2 \Leftrightarrow x = -40.$$

Thế vào (*) : $y = 67$. Hệ có nghiệm $\begin{cases} x = -40 \\ y = 67 \end{cases}$

Bài 138 Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

1.
$$\begin{cases} 4x + y = 2 & (1) \\ 8x + 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$1. \begin{cases} 4x + y = 2 & (1) \\ 8x + 3y = 5 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3(2 - 4x) = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được :

2. $3x - 2y = 11 \quad (1)$

$4x - 5y = 3 \quad (2)$

Từ (1) suy ra $x = \frac{11 + 2y}{3}$ (1') thay x tìm được theo y ở (1') vào (2) ta được

$$4\left(\frac{11 + 2y}{3}\right) - 5y = 3 \quad (2')$$

Ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 & (1) \\ 4\left(\frac{11 + 2y}{3}\right) - 5y = 3 & (2) \end{cases}$$
 tương đương với hệ phương trình đã cho.Giải hệ phương trình này ta được $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -5 \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình.**Bài 118** Tìm nghiệm gần đúng (chính xác đến chữ số thập phân thứ hai) của hệ phương trình :

a.
$$\begin{cases} 1,7x - 2y = 3,8 \\ 2,1x + 5y = 0,4 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} (\sqrt{5} + 2)x + y = 3 - \sqrt{5} \\ -x + 2y = 6 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$a. \begin{cases} 1,7x - 2y = 3,8 \\ 2,1x + 5y = 0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,1x + 5y = 0,4 \\ y = \frac{1,7x - 3,8}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4,2x + 5(1,7x - 3,8) = 0 \\ y = \frac{1,7x - 3,8}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12,7x = 19,8 \\ y = \frac{1,7x - 3,8}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{198}{127} \\ y = -\frac{73}{127} \end{cases}$$

Đáp số : $(x; y) \approx (1,56; -0,57)$

$$b. \begin{cases} (\sqrt{5} + 2)x + y = 3 - \sqrt{5} \\ -x + 2y = 6 - 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\sqrt{5} + 2)x + 2y = 6 - 2\sqrt{5} \\ -x + 2y = 6 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 6 - 2\sqrt{5} \\ (2\sqrt{5} + 5)x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Đáp số : $(x; y) \approx (0; 0,76)$.

Bài 119 Giải các hệ phương trình bằng phép thế :

1.
$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + y = \frac{4x - 3}{5} \\ x + 3y = \frac{15 - 9y}{14} \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{3} \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} -x + 2y = -4(x - 1) \\ 5x + 3y = -(x + y) + 8 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 9x - 6y = 4 \\ 3(4x - 3y) = -3x + y + 7 \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. $(x = \frac{1}{4}; y = 1)$

2. $(x = 7; y = 5)$

3. $(x = 12; y = -3)$

4. $(x = 8; y = 2)$

5. Hệ phương trình có vô số nghiệm.

6. Hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 120Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1) \\ (x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4) \end{cases}$$
HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1) \\ (x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2x + 5y - 10 = xy - x + 2y - 2 \\ xy + 7x - 4y - 28 = xy + 4x - 3y - 12 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 8 \\ 3x - y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 8 \\ y = 3x - 16 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3(3x - 16) = 8 \\ y = 3x - 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 56 \\ y = 3x - 16 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \cdot 7 - 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy : $(x = 7; y = 5)$.**Bài 121** Tìm giao điểm của hai đường thẳng :

$$(d_1) : 10x - 4y = a \quad ; \quad (d_2) : x + by = 2$$

biết rằng (d_1) đi qua điểm A $(5; -1)$ và (d_2) qua điểm B $(-7; 3)$.**HƯỚNG DẪN GIẢI**Vì (d_1) : $10x - 4y = a$ đi qua điểm A $(5; -1)$ nên $10 \cdot 5 - 4 \cdot (-1) = a$ hay $a = 54$.Vì (d_2) : $x + by = 2$ đi qua điểm B $(-7; 3)$ nên $-7 + 3 \cdot b = 2$ hay $b = 3$.Như vậy $(d_1) : 10x - 4y = 54$; $(d_2) : x + 3y = 2$

Giao điểm M của hai đường thẳng này có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 10x - 4y = 54 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10(-3y + 2) - 4y = 54 \\ x = -3y + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -34y = 52 \\ x = -3y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{26}{17} \\ x = -3 \cdot \left(-\frac{26}{17}\right) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{112}{17} \\ y = -\frac{26}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6\frac{10}{17} \\ y = -1\frac{9}{17} \end{cases}$$

Vậy giao điểm của hai đường thẳng là $M\left(6\frac{10}{17}; -1\frac{9}{17}\right)$.

§4. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quy tắc cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc cộng đại số cho phép ta thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.

Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia).

2. Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

1. Nhân các vế của hai phương trình với số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
2. Sử dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).
3. Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

B. BÀI TẬP

Bài 143 Hãy giải thích vì sao các hệ phương trình sau đây là tương đương:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ x - y = 3 & (2) \end{cases} & \text{và} \quad \begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ y - x = -3 & (2b) \end{cases} \\ \text{b. } (I) \begin{cases} 2x + y = 0 & (1) \\ 3x + 2y - 1 = 0 & (2) \end{cases} & \text{và } (II) \begin{cases} x = 1 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \\ & \text{và } (III) \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{array}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Hai hệ tương đương vì phương trình (2) được thay bằng (2b) tương đương với nó.

b. Nếu ta trừ từng vế hai phương trình của hệ (I) thì ta có :

$$(2x + y) - (3x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay phương trình này cho phương trình (1) và giữ nguyên phương trình (2), ta có hệ (II) tương đương với hệ (I) (theo qui tắc cộng đại số).

Tương tự như vậy, nếu thay phương trình $x = 1$ cho phương trình (2) và giữ nguyên phương trình (1) của hệ (I) ta được hệ (III) tương đương với hệ (I).

Bài 144 Giải thích tại sao các hệ phương trình sau là tương đương.

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} & \text{và} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ y - x = -2 \end{cases} \\ \text{b. } \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y = 3 \end{cases} & \text{và} \quad \begin{cases} x = 2 \\ 4x + y = 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x + y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \end{array}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{a. Ta có : } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -(x - y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ y - x = -2 \end{cases}$$

Vậy : hai hệ phương trình đã cho là tương đương.

$$\text{b. Ta có } \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x + y) - (3x + y) = 3 - 1 \\ 4x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Tương tự, ta có : } \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 \\ (4x + y) - (3x + y) = 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy : ba hệ phương trình đã cho là tương đương.

Bài 145 Biết rằng hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ (I)

có nghiệm (3; 1), chứng tỏ (3; 1) cũng là nghiệm của các hệ phương trình :

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ m(x + 2y) + n(2x - y) = 5m + 5n \end{cases} \quad \text{(II)} \\ \text{và} \quad \begin{cases} 2x - y = 5 \\ m(x + 2y) + n(2x - y) = 5m + 5n \end{cases} \quad \text{(III)} \end{array}$$

với mọi $m, n \neq 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vì $(x = 3; y = 1)$ là nghiệm của hệ (I) nên ta có :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \quad (1) \\ 2x - y = 5 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ m(x + 2y) + n(2x - y) = 5m + 5n \end{cases} \quad \text{(II)}$$

(Nhân phương trình (1) với m , phương trình (2) với n và áp dụng qui tắc cộng đại số).

Suy ra $(x = 3; y = 1)$ là nghiệm của hệ (II).

Tương tự : $(x = 3; y = 1)$ là nghiệm của hệ (III).

Bài 146 Cho hai hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x = m \end{cases}$$

Xác định số m sao cho hai hệ phương trình tương đương.**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Ta có : (I) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$ (II) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x = m \end{cases}$

Ta thấy phương trình $5x = m$ của hệ (II) có được là do cộng từng vế của hai phương trình trong hệ (I). Mà kết quả của phép cộng này là $5x = 12$. Suy ra : $m = 12$.

Bài 147 Xác định các số a và b để hệ phương trình : $\begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$
có nghiệm $x = 1, y = -2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Thay $x = 1, y = -2$ vào hệ phương trình được : $\begin{cases} 2 - 2b = -4 \\ b + 2a = -5 \end{cases}$

Từ đó $b = 3, a = -4$.

Bài 148 Giải các hệ sau bằng phương pháp cộng đại số:

a. $\begin{cases} 4x - 3y = 21 \\ 2x - 5y = 21 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Nhân hai vế của phương trình thứ hai với -2 , rồi cộng lại, ta được :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 21 \\ -4x + 10y = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = -21 \\ 4x - 3y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

b. Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 3 , rồi cộng lại :

$$\begin{cases} 9x - 3y = 18 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 22 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Bài 149 Giải các hệ phương trình sau :

a. $\begin{cases} (x+2)^2 + 3y = (x-2)^2 \\ 2x + (2y-3)^2 = 4(y-3)^2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} (2x+1)(y-2) = (x-3)2y \\ (x-3)(y+1) = (x+1)(y-2) \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Khai triển và rút gọn, hệ phương trình thành :

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 4 + 3y = x^2 - 4x + 4 \\ 2x + 4y^2 - 12y + 9 = 4y^2 - 24y + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 3y = 0 \\ 2x + 12y = 27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 32x + 12y = 0 \\ 2x + 12y = 27 \end{cases}$$

(nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 30x = -27 \\ 2x + 12y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{10} \\ y = \frac{12}{5} \end{cases}$$

b. Khai triển và rút gọn, hệ phương trình thành

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2xy - 4x + y - 2 = 2xy - 6y \\ xy + x - 3y - 3 = xy - 2x + y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 7y = 2 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -12x + 21y = 6 \\ 12x - 16y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 10 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 150

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{2x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đặt $X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{1}{y}$ (ĐK: $x, y \neq 0$).

Hệ phương trình đã cho được viết lại:
$$\begin{cases} \frac{1}{2}X - Y = -\frac{1}{2} \\ X - 2Y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X - 2Y = -1 \\ X - 2Y = 1 \end{cases} (*)$$

$\Rightarrow$ hệ phương trình (*) vô nghiệm nên hệ đã cho cũng vô nghiệm.

Bài 151 Giải các hệ phương trình sau:

a.
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - 3\sqrt{y+2} = 2 \\ 2\sqrt{x-1} + 5\sqrt{y+2} = 15 \end{cases};$$
 b.
$$\begin{cases} (x+3)^2 - 2y^3 = 6 \\ 3(x+3)^2 + 5y^3 = 7 \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Đặt $u = \sqrt{x-1}$, $v = \sqrt{y+2}$

ta được:
$$\begin{cases} u - 3v = 2 \\ 2u + 5v = 15 \end{cases} (u, v \geq 0).$$

Đây là hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn.

Giải hệ này ta được: $u = 5$, $v = 1$ (nhận)

Suy ra:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = 5 \\ \sqrt{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 25 \\ y+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 26 \\ y = -1 \end{cases}$$

b. Đặt $u = (x+3)^2$, $v = y^3$, ta được:
$$\begin{cases} u - 2v = 6 \\ 3u + 5v = 7 \end{cases} (u \geq 0)$$

Đây là hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn.

Giải hệ này ta được: $u = 4$, $v = -1$ (nhận)

$$\text{Suy ra : } \begin{cases} (x+3)^2 = 4 \\ y^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = \pm 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Hệ có hai nghiệm $(-5; -1)$ và $(-1; -1)$.

Bài 152 Cho phương trình : $x^2 + (2m - 5)x - 3n = 0$ (1)

Hãy xác định m và n sao cho phương trình trên có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = -3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Từ $x_1 = 2$ là nghiệm của (1) suy ra : $4m - 3n = 6$.

Từ $x_2 = -3$ là nghiệm của (1) suy ra : $6m + 3n = 24$.

$$\text{Vậy ta có hệ } \begin{cases} 4m - 3n = 6 \\ 6m + 3n = 24 \end{cases}$$

Giải bằng phương pháp cộng ta có $m = 3$ và $n = 2$.

Bài 153 Xác định các hệ số a, b của hàm số : $y = ax + b$ biết rằng đồ thị của hàm số:

a. Đi qua $A(1; 2)$ và $B(3; 4)$.

b. Đi qua $E(-1; 3)$ và $F(3; -1)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm $A(1; 2)$ và $B(3; 4)$ nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ Vậy : } a = 1, b = 1.$$

b. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm $E(-1; 3)$ và $F(3; -1)$ nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -4 \\ b = 3 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy : $a = -1; b = 2$.

§5. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình :

Bước 1 : Lập hệ phương trình

- Chọn hai ẩn số (thường là x và y) và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2 : Giải hệ phương trình.

Bước 3 : Trả lời : Kiểm tra xem nghiệm tìm được của hệ phương trình có thỏa mãn với điều kiện hay không và trả lời.

B. BÀI TẬP

Bài 154 Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến nơi sớm hơn 1 giờ.

Tìm quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (km) là quãng đường AB và y (h) là thời gian dự định lúc đầu.

Điều kiện : $x > 0$ và $y > 0$.

- Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì thời gian đi là $y + 2$, do đó ta có phương trình : $x = 35(y + 2)$.
- Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì thời gian đi là $y - 1$, do đó ta có phương trình : $x = 50(y - 1)$.

$$\text{Ta có hệ : } \begin{cases} x = 35y + 70 \\ x = 50y - 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35y + 70 \\ 0 = 15y - 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 350 \\ y = 8 \end{cases}$$

Vậy quãng đường AB dài 350 km và thời gian dự định là 8 giờ.

Bài 155 Chữ số hàng chục của một số có hai chữ số lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 1. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau sẽ được một số bằng $\frac{5}{6}$ số ban đầu. Tìm số có hai chữ số ban đầu.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi chữ số hàng chục là x và chữ số hàng đơn vị là y.

($x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$; $x, y \leq 9$, $x > y$).

$\Rightarrow$ số có hai chữ số ban đầu có giá trị là $10x + y$.

Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được số mới có giá trị là $10y + x$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 10y + x = \frac{5}{6}(10x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5y = 5 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 54.

Bài 156 Trong phòng học có một số ghế dài. Nếu xếp mỗi ghế 3 học sinh thì 6 học sinh không có chỗ. Nếu xếp mỗi ghế 4 học sinh thì thừa 1 ghế. Hỏi lớp có bao nhiêu ghế và bao nhiêu học sinh ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi số ghế là x , số học sinh là y , $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$.

Nếu xếp mỗi ghế 3 học sinh thì số học sinh được ngồi ghế là $3x$.

Vì còn 6 học sinh không có chỗ nên tổng số học sinh của lớp là : $3x + 6$.

Do đó có phương trình : $3x + 6 = y$ (1)

Nếu xếp mỗi ghế 4 học sinh thì thừa 1 ghế, nghĩa là số học sinh bằng $4(x - 1)$.

Do đó lại có phương trình : $4(x - 1) = y$ (2)

Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được : $(x; y) = (10; 36)$.

Trả lời : Trong lớp có 10 ghế và 36 học sinh.

Bài 157 A nói với B : "Tuổi của tôi hiện nay gấp ba lần tuổi anh vào lúc tuổi tôi bằng tuổi anh hiện nay. Lúc tuổi anh bằng tuổi tôi hiện nay thì tổng số tuổi của hai chúng ta là 98". Tìm tuổi của A và B hiện nay.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x, y là tuổi của A và B hiện nay ($x, y \in \mathbb{N}$, $x > y$).

Lúc A có số tuổi là y thì B có số tuổi là $y - (x - y) = 2y - x$.

Khi B có số tuổi là x thì A có số tuổi là $x + (x - y) = 2x - y$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} x = 3(2y - x) \\ 2x - y + x = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 42 \\ y = 28 \end{cases}$$

Vậy tuổi của A là 42 và tuổi của B là 28.

Bài 158 Tuổi hai anh em cộng lại bằng 21. Tuổi anh hiện nay gấp đôi tuổi em lúc anh bằng tuổi em hiện nay. Tính tuổi của mỗi người hiện nay.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi tuổi anh hiện nay là x , tuổi em hiện nay là y ta có $x + y = 21$ (1)

Tuổi anh hiện nay gấp đôi tuổi em trước kia nên tuổi em trước kia bằng $\frac{x}{2}$.

Tuổi anh trước kia bằng tuổi em hiện nay nên tuổi anh trước kia bằng y .

Do hiệu số tuổi hai người không đổi theo thời gian nên :

$$x - y = y - \frac{x}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ
$$\begin{cases} x + y = 21 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \end{cases}$$

Vậy hiện nay anh 12 tuổi và em 9 tuổi.

Bài 159 Hai đội bóng bàn của hai trường phổ thông thi đấu với nhau. Mỗi đấu thủ của đội này phải đấu với mỗi đấu thủ của đội kia một trận. Biết rằng tổng số trận đấu bằng 4 lần tổng số đấu thủ của hai đội và số đấu thủ của ít nhất một trong hai đội là số lẻ. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu đấu thủ ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x và y là số đấu thủ của mỗi đội, x, y nguyên dương. Giả sử x là số lẻ. Vì mỗi đấu thủ của đội này phải đấu với mỗi đối thủ của đội kia một trận, nên tổng số trận đấu là xy . Do tổng số trận đấu bằng 4 lần tổng số đấu thủ của hai đội, ta có phương trình.

$$\begin{aligned} xy &= 4(x + y) \Leftrightarrow xy - 4x - 4y + 16 = 16 \\ &\Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 16 \end{aligned}$$

Vì x, y là các số nguyên dương nên $x - 4 \geq -3$; $y - 4 \geq -3$, hơn nữa x là số lẻ nên $x - 4$ là số lẻ. Số 16 chỉ phân tích thành ra tích của hai số nguyên thỏa mãn yêu cầu trên là $16 = 1 \cdot 16$.

$$\text{Từ đó ta có } \begin{cases} x - 4 = 1; \\ y - 4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5; \\ y = 20 \end{cases}$$

Vậy một đội có 5 đấu thủ và đội còn lại có 20 đấu thủ.

Bài 160 Một canô dự định đi từ A đến B trong một thời gian đã định. Nếu vận tốc canô tăng 3 km/h thì đến nơi sớm hơn 2 giờ. Nếu vận tốc canô giảm 3 km/h thì đến nơi chậm 3 giờ. Tính chiều dài khúc sông AB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi vận tốc dự định của canô là x ($x > 3$; km/h).

Thời gian dự định đi AB là y ($y > 2$; giờ).

Chiều dài khúc sông AB là xy .

Trong trường hợp đầu, canô có vận tốc $x + 3$ (km/h) đi trong $y - 2$ (giờ); được xy (km) nên có phương trình:

$$(x + 3)(y - 2) = xy.$$

Trong trường hợp sau, canô có vận tốc $x - 3$ (km/h), đi trong $y + 3$ (giờ) cũng được xy (km) nên có phương trình $(x - 3)(y + 3) = xy$.

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x + 3)(y - 2) = xy \\ (x - 3)(y + 3) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 3x - 3y = 9 \end{cases}$$

Giải ra được $x = 15$; $y = 12$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy khúc sông AB dài $15 \cdot 12 = 180$ (km)

Bài 161 Hai người A và B cùng làm chung một công việc thì trong 6 giờ sẽ hoàn thành. Nếu người A làm trong 2 giờ rồi người B làm trong 3 giờ thì sẽ hoàn thành $\frac{2}{5}$ công việc. Hỏi nếu một mình thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi thời gian hoàn thành công việc khi làm một mình của người A là x (giờ) và người B là y (giờ) ($x, y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$$

Vậy nếu một mình thì người A hoàn thành công việc trong 10 giờ và người B hoàn thành công việc trong 15 giờ.

Bài 162 Hai máy cày có công suất khác nhau cùng làm việc đã cày được $\frac{1}{6}$ cánh đồng trong 15 giờ. Nếu máy thứ nhất làm một mình trong 12 giờ, máy thứ hai trong 20 giờ thì cả hai sẽ cày được 20% cánh đồng. Hỏi nếu mỗi máy làm việc riêng thì có thể cày xong cánh đồng trong bao lâu ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi thời gian tính bằng giờ để máy thứ nhất, thứ hai cày một mình xong cánh đồng là x, y ($x, y > 0$).

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{15}{x} + \frac{15}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{12}{x} + \frac{20}{y} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x = 300; y = 200$.

Vậy: máy cày thứ nhất làm một mình mất 300 giờ, máy cày thứ hai mất 200 giờ.

Bài 163 Hai điểm A, B cách nhau 150 km và hai ô tô khởi hành cùng một lúc đi ngược chiều nhau. Gặp nhau ở vị trí C cách A 90 km. Nếu vận tốc vẫn không đổi nhưng ô tô đi từ B đi trước ô tô đi từ A 50 phút thì hai xe gặp nhau ở giữa quãng đường. Tính vận tốc mỗi ô tô.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi vận tốc ô tô đi từ A là x (km/h).

Vận tốc ô tô đi từ B là y (km/h) ($x, y > 0$). Theo đề bài ô tô đi từ A khi gặp ô tô đi từ B thì đã đi được 90 km và ô tô B đi được 60 km. Lúc đó thời gian mỗi ô tô đi lần lượt là $\frac{90}{x}$ (h) và $\frac{60}{y}$ (h).

Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{90}{x} = \frac{60}{y} \\ 75 + x + \frac{5}{6} = \frac{75}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 0 \\ \frac{75}{x} - \frac{75}{y} = -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{45} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy vận tốc ô tô đi từ A là 45 km/h và vận tốc ô tô đi từ B là 30 km/h.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 164 Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn các phương trình:

a. $2x + 5y = 35$

b. $7x + 3y = 11$

c. $-3x + 8y = 10$.

Bài 165 Giải các hệ phương trình:

a.
$$\begin{cases} (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{3}x - (\sqrt{3} - \sqrt{2})y = \sqrt{2} \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + y = \frac{4x - 3}{5} \\ x + 3y = \frac{15 - 9y}{14} \end{cases}$$

Bài 166 Xác định a, b sao cho hệ: $\begin{cases} (2a - 1)x + by = 7 \\ (a - 2)x + (b - 1)y = 2 \end{cases}$ nhận cặp $(1; -1)$ làm một nghiệm.

Bài 167 Cho đa thức: $f(x) = x^2 + (2m - 5)x - 3n$.

Tìm các giá trị m và n biết rằng đa thức triệt tiêu tại các giá trị $x = 2$ hoặc $x = -3$

Bài 168 Giải các hệ phương trình

a.
$$\begin{cases} 2x = y + 150 \\ \frac{x - 80}{y + 10} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \frac{4}{x + 2y} - \frac{1}{x - 2y} = 1 \\ \frac{20}{x + 2y} + \frac{3}{x - 2y} = 1 \end{cases}$$

Bài 169 Giải các hệ phương trình:

a.
$$\begin{cases} \frac{4}{2x - 1} + \frac{3}{2(3y + 2)} = 21 \\ \frac{5}{6x - 3} - \frac{2}{15y + 10} = 19 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{y - 1} = 0 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$$

Bài 170 Giải các hệ phương trình:

a.
$$\begin{cases} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{y + 3}{y + 1} \\ 3x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \frac{y}{2} = (x^2 - 1) - (x - 2)^2 \\ \frac{y}{3} = (x + 3)^2 + (x - 3)^2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} \frac{x + 2}{y - 3} - \frac{x + 1}{y + 1} = \frac{8}{(y + 1)(y - 3)} \\ \frac{x + 1}{x} - \frac{y - 2}{y} = \frac{5}{xy} \end{cases}$$

Bài 171 Giải các hệ:

$$\text{a. } \begin{cases} \frac{(x+3)^2 + (y-8)^2}{x^2 + y^2 + 39} = 1 \\ \frac{2x+3y+8}{5x+4y-1} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} \frac{x+2}{y-3} + \frac{x+5}{y+1} = \frac{3}{(y+1)(y-3)} \\ \frac{2x+y}{15-8x-4y} = \frac{4x-y}{5-16x+4y} \end{cases}$$

Bài 172 Giải các hệ phương trình:

$$\text{a. } \begin{cases} 2x+3y-5z=33 \\ x-y+2z=-9 \\ x+2y-3z=20 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 2x+3y-z=24 \\ 4x-2y+3z=6 \\ 6x-y+2z=22 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 2x+3y-2z=-2 \\ 4x+5y+z=9 \\ 3x+22y-3z=32 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 15x+8y+12z=792 \\ 3x=4y \\ 5y=12z \end{cases}$$

Bài 173 Giải hệ phương trình:

$$\text{a. } \begin{cases} x+z=a \\ z+x=b \\ x+y=c \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 2x+y+z=5 \\ x+2y+z=2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=8 \\ x+3y+9z=27 \end{cases}$$

Bài 174 Giải các hệ:

$$\text{a. } \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = \frac{31}{30} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = \frac{31}{30} \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = \frac{31}{30} \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} \frac{x-3}{5} = \frac{y+9}{13} = \frac{z}{-2} \\ 2x+y-3z=14 \end{cases}$$

Bài 175 Tìm các giá trị m để hệ phương trình sau đây có nghiệm:

$$\begin{cases} x+y=m \\ 11x+40y=4m+37 \\ 21x+120y=12m+171 \end{cases}$$

Bài 176

Tìm các nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x-y+3z=9 \end{cases}$

Bài 177

a. Cho ba đường thẳng có phương trình:

$$d_1 : x - 2y + 4 = 0$$

$$d_2 : 3x + 2y - 12 = 0$$

$$d_3 : 2x - y + m = 0$$

Xác định giá trị m để ba đường thẳng đồng quy
Minh họa kết quả bằng đồ thị.

- b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ (x + y - 2)(x - 2y + 1) = 0 \end{cases}$ bằng phép tính và bằng đồ thị.

Bài 178

Cho hai đường thẳng:

$$d_1 : y - 3 + m(x - 2) = 0$$

$$d_2 : y + 3 - m(x + 2) = 0.$$

- Chứng tỏ d_1 đi qua một điểm cố định A, d_2 đi qua một điểm cố định B. Xác định tọa độ A, B và viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B.
- Tìm tọa độ giao điểm M của d_1, d_2 .
- Với giá trị nào của m thì điểm M trùng với điểm A ? Đến trùng với B ?

Bài 179

Cho tam giác ABC có các cạnh AB, BC, CD theo thứ tự nằm trên các đường thẳng:

$$d_1 : 5x - 8y + 26 = 0 ;$$

$$d_2 : 10x - 7y = 11 = 0 ;$$

$$d_3 : 5x + y + 8 = 0.$$

- Tính tọa độ các đỉnh A, B, C.
- Gọi AH, BK, CI là các đường cao của tam giác. Viết phương trình các đường thẳng AH, BK, CI.
Chứng tỏ rằng ba đường thẳng AH, BK, CI đồng quy.

- c. Gọi $d'_1; d'_2; d'_3$ theo thứ tự là các đường thẳng:

- Qua A và song song với BC
- Qua B và song song với AC
- Qua C và song song với AB.

Gọi D, E, F theo thứ tự là giao điểm của d'_1 và d'_2 , d'_2 và d'_3 ; d'_3 và d'_1 . Tìm tọa độ các điểm D, E, F.

Bài 180

Trong một cuộc thi học sinh giỏi toán toàn trường, mỗi học sinh phải làm 20 bài toán.

Mỗi bài giải đúng được 9 điểm.

Mỗi bài giải sai bị trừ 4 điểm.

Mỗi bài không giải được 0 điểm.

- Một bạn học sinh giải được tổng cộng 62 điểm. Tìm xem số bài bạn giải đúng, số bài bạn giải sai, số bài bạn không giải?
- Biết rằng để được vào vòng II thì phải đạt được ít nhất là 130 điểm. Hỏi muốn chắc chắn vào được vòng II thì phải giải đúng ít nhất bao nhiêu bài ?

HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

Bài 164

- a. (0; 7); (15; 1); (10; 3); (5; 5).
 b. Không có giá trị tự nhiên nào của x, y thỏa mãn phương trình đã cho.
 c. (2; 2); (10; 5); ...

Bài 165

- a. $x = 1, y = 1$.
 b. $x = 12, y = -3$.

Bài 166

Hệ đã cho có nghiệm (1; -1), ta có:
$$\begin{cases} 2a - b - 1 = 7 \\ a - 2 - b + 1 = 2 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có: $a = 5, b = 2$.

Bài 167

Từ giả thiết, ta đi đến hệ:
$$\begin{cases} 4m - 3n = 6 \\ 6m + 3n = 24 \end{cases} \Rightarrow m = 3; n = 2$$

Bài 168

- a. $x = 170; y = 110$.

- b. Điều kiện: $x \neq \pm 2y$.

Đặt $\frac{1}{x+2y} = X; \frac{1}{x-2y} = Y \Rightarrow X = \frac{1}{8}; Y = -\frac{1}{2}$.

đưa về hệ:
$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

Đáp số: (3; 2; 5).

Bài 169

- a. Đáp số: $x = \frac{5}{9}; y = -\frac{7}{10}$.

- b. ĐK: $x \neq 3, y \neq 1$.

Từ phương trình $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{y-1} = 0 \Rightarrow x - 3 = y - 1 \Rightarrow x - y = 2$.

Với điều kiện $x \neq 3, y \neq 1$ thì:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{y-1} = 0 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow x = 3; y = 1$$

Các giá trị này không thỏa mãn điều kiện $x \neq 3, y \neq 1$. Vậy hệ vô nghiệm.

Bài 170

a. $x = \frac{2}{5}; y = -\frac{8}{5}$

b. $x = -\frac{5}{14}; y = -\frac{45}{7}$

c. $x = -1; y = 7.$

Bài 171

a. $x = -5; y = \frac{1}{4}$

b. $x = 4; y = 2.$

Bài 172

a. $x = 2; y = 3; z = -4$

b. $x = 5; y = 4; z = -2$

c. $x = -1; y = 2; x = 3$

d. $x = 32; y = 24; z = 10.$

Bài 173

a. $x = \frac{-a+b+c}{2}; y = \frac{a-b+c}{2}; z = \frac{a+b-c}{2}$

b. $x = 3; y = 0; z = -1$

c. $x = 18; y = -29; z = 12.$

Bài 174

a. $x = y = z = 1$

b. $x = 28; y = -29; z = -10.$

Bài 175

Ta có: $\begin{cases} x+y=m \\ 11x+40y=4m+37 \\ 21x+120y=12m+171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m & (1) \\ 11x+40y=4m+37 & (2) \\ 7x+40y=4m+57 & (3) \end{cases}$

Từ (2) và (3) ta tính ra $x = -5 \Rightarrow y = m + 5.$

Thế các giá trị này vào (2) và (3), ta rút ra $m = -3.$

Bài 176

Ta có hệ: $\begin{cases} x+2y+z=8 & (1) \\ 2x-y+3z=9 & (2) \end{cases}$

Nhân phương trình (2) với 2 và cộng với phương trình (1) ta được phương trình: $5x + 7z = 26$ (3)

Phương trình (3) cho ta nghiệm: $\begin{cases} x = -7t + 8 \\ z = 5t - 2 \end{cases}$

Đem thế vào phương trình (1), ta được: $y = t + 1; t \in \mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm nguyên của hệ là: $\begin{cases} x = -7t + 8 \\ y = t + 1 \\ z = 5t - 2 \end{cases}; t \in \mathbb{Z}.$

Bài 177

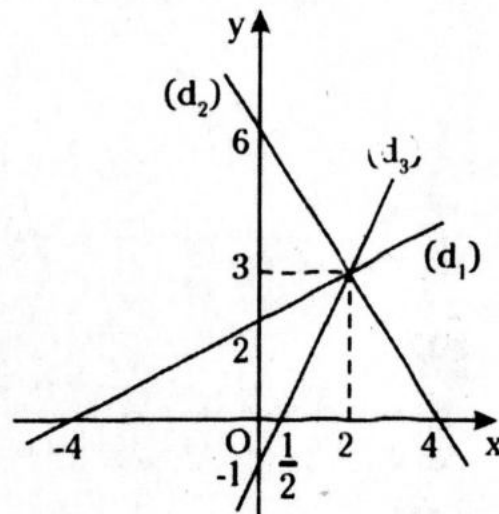
- a. Hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại điểm $M(2; 3)$.

Để d_3 đi qua M thì: $2 \cdot 2 - 3 + m = 0$

$$\Rightarrow m = -1.$$

Phương trình của d_3 là: $2x - y - 1 = 0$.

Biểu diễn trên đồ thị (Xem hình bên).



- b. Ta có:
$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ (x + y - 2)(x - 2y + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Hệ (I) cho ta: $x = 1,5$; $y = 0,5$.

Hệ (II) cho ta: $x = 3$; $y = 2$.

Minh họa trên đồ thị (Xem hình bên)

Hai đường thẳng:

$$d_1: x - y - 1 = 0$$

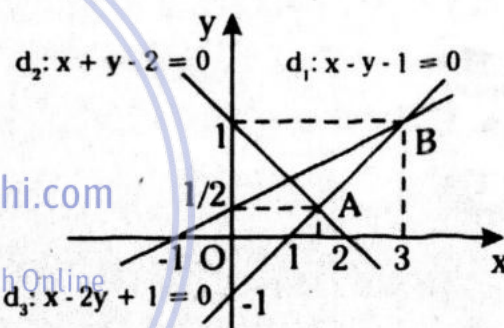
$$d_2: x + y - 2 = 0$$

cắt nhau tại điểm $A(1,5; 0,5)$.

Hai đường thẳng: $d_1: x - y - 1 = 0$

$$d_2: x - 2y + 1 = 0$$

cắt nhau tại điểm $B(3; 2)$.

**Bài 178**

- a. D đi qua điểm cố định $A(2; 3)$, D_2 đi qua điểm cố định $B(-2; -3)$

Phương trình đường thẳng đi qua A, B : $AB = 3x - 2y = 0$

- b. Giải hệ:
$$\begin{cases} mx + y = 2m + 3 \\ mx - y = -2m + 3 \end{cases} \Rightarrow x_M = \frac{3}{m}; y_M = 2m \quad (m \neq 0)$$

- c. M đến trùng với A khi $\frac{3}{m} = 2 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$.

M đến trùng với B khi $\frac{3}{m} = -2 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Bài 179

- a. Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 5x - 8y = -26 \\ 5x + y = -8 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 2).$$

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 5x - 8y = -26 \\ 10x - 7y = 11 \end{cases} \Rightarrow B(6; 7).$

Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 10x - 7y = 11 \\ 5x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow C = (-1; -3).$

b. Ta viết phương trình BC dưới dạng $y = ax + b$.

$$10x - 7y - 11 = 0 \Rightarrow y = \frac{10}{7}x - \frac{11}{7}.$$

BC có hệ số góc $k = \frac{10}{7}$, vậy đường cao AH vuông góc với $k' = -\frac{7}{10}$ và phương trình đường thẳng AH có dạng $y = -\frac{7}{10}x + b$.

Vì AH đi qua A $(-2; 2)$ nên ta có: $2 = -\frac{7}{10}(-2) + b \Rightarrow b = \frac{6}{10}.$

Phương trình đường thẳng AH:

$$AH : y = -\frac{7}{10}x + \frac{6}{10} \quad \text{hay} \quad 7x + 10y - 6 = 0.$$

Tương tự, ta viết được phương trình các đường thẳng BK, CI:

$$BK : x - 5y + 29 = 0; \quad CI : 8x + 5y + 23 = 0.$$

Gọi P là giao điểm của BK và CI. Tọa độ của P là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 5y = -29 \\ 8x + 5y = -23 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{52}{9}; \frac{209}{45}\right).$$

Thế tọa độ của P vào phương trình của AH:

$$7 \cdot \left(-\frac{52}{9}\right) + 10 \cdot \left(\frac{209}{45}\right) - 6 = \frac{-1820 + 2090}{45} - 6 = 6 - 6 = 0.$$

Tọa độ giao điểm P của BK và CI thỏa mãn phương trình AH. Vậy điểm P nằm trên AH hay ba đường thẳng AH, BK, CI đồng quy. (Điều này đúng với định lý: trong tam giác thì ba đường cao đồng quy tại trọng tâm).

c. $d'_1: 5x - 8y - 19 = 0.$

$d'_2: 10x - 7y + 34 = 0.$

$d'_3: 5x + y - 7 = 0.$

$D(-8; -9); E\left(\frac{1}{3}; \frac{16}{3}\right); F\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right).$

Bài 18

a. Gọi x, y, z là số bài giải đúng, số bài giải sai và số bài không giải được, ta có: điều kiện x, y, z nguyên, không âm và ≤ 20 .

Ta có hệ: $\begin{cases} x + y + z = 20 & (1) \\ 9x - 4y = 62 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2), ta có: $x = 4t + 2; y = 9t - 13.$

Thế vào (1) ta rút ra: $z = 29 - 13t.$

Với điều kiện $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ($t \in \mathbb{Z}$) ta được:

$$\frac{13}{9} \leq t \leq \frac{29}{13} \quad \Rightarrow \quad 1\frac{4}{9} \leq t \leq 2\frac{3}{13}$$

Vì t nguyên, ta chọn $t = 2$ và được $x = 10; y = 7; z = 3$.

- b.** Gọi x là số bài giải đúng ít nhất cần có, như vậy, trường hợp xấu nhất xảy ra khi $(20 - x)$ bài còn lại giải sai.

Theo bài ra, ta cần có: $9x - 4(20 - x) \geq 130$

$$\Rightarrow 13x \geq 210 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{210}{13} \quad \Rightarrow \quad x \geq 16\frac{2}{3}.$$

Vì x nguyên, ta chọn $x = 17$. Vậy muốn chắc chắn vào được vòng II thì phải giải đúng ít nhất 17 bài.



downloadsachmienphi.com

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Chương IV**HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$) – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN****§1. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****Tính chất của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)**Hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ có tính chất sau :Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2$ nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2$ đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.**Nhận xét**Nếu $a > 0$ thì $y > 0$ với mọi $x \neq 0$, $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.Nếu $a < 0$ thì $y < 0$ với mọi $x \neq 0$, $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 0$.**B. BÀI TẬP****Bài 181** Một hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng.

- Gọi diện tích hình chữ nhật đó là y , chiều rộng là x , hãy lập công thức tính diện tích của nó.
- Chứng minh rằng nếu x tăng thì y tăng, x giảm thì y giảm.
- Chứng minh rằng nếu x tăng 2, 3, 4,... n lần thì y tăng 4, 9, 16,..., n^2 lần.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Diện tích hình chữ nhật là $y = 3x^2$.
- Hàm số $y = 3x^2$ với $a = 3 > 0$ và tập xác định là các giá trị dương của x (vì x biểu thị chiều rộng). Do đó hàm số $y = 3x^2$ đồng biến tức là x tăng thì y tăng, nếu x giảm thì y giảm.
- Giả sử x có giá trị là k , khi x tăng n lần thì giá trị của nó là nk , giá trị tương ứng của y là $3k^2$ và $3(nk)^2$.
So sánh các giá trị trên ta thấy y tăng n^2 lần ($n = 2, 3, 4, \dots$).

Bài 182 Cho hàm số $y = 2x^2$.

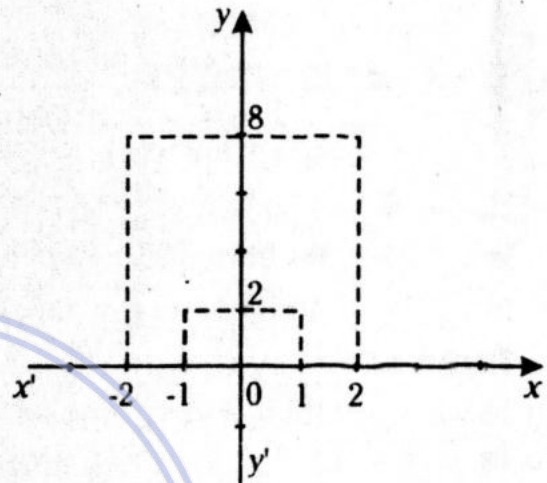
- a. Lập bảng giá trị của hàm số ứng với các giá trị sau của x : -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 .
- b. Ghi trong mặt phẳng tọa độ, các điểm tương ứng.
- c. Hàm số lấy giá trị trong khoảng nào khi x lấy giá trị trong khoảng $(-4; -2)$; $(-3; -1)$; $(-5; 0)$; $(0; 3)$; $(-2; 2)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Bảng giá trị của hàm số :

x		-2	-1	0	1	2	
y		8	2	0	2	8	

b. Biểu diễn mặt phẳng tọa độ

c. Khi $x \in (-4; -2)$ thì $y \in (8; 32)$ Khi $x \in (-3; -1)$ thì $y \in (2; 18)$ Khi $x \in (-5; 0)$ thì $y \in (0; 50)$ Khi $x \in (0; 3)$ thì $y \in (0; 18)$ Khi $x \in (-2; 2)$ thì $y \in (0; 8)$.**Bài 183**Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$.a. Tính $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$. Có nhận xét gì?b. Tính $x \in \mathbb{R}$ để $f(x)$ lần lượt lấy các giá trị sau: 0 ; $0,02$; 1 ; 16 ; -4 .**HƯỚNG DẪN GIẢI**

a. Ta có : $f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4)^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$

$$f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$$

Hàm nghịch biến với $x < 0$ và đồng biến với $x > 0$.

b. Ta có : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$$f(x) = 0,02 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 0,02 \Leftrightarrow x^2 = 0,04 \Leftrightarrow x = \pm 0,2.$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}.$$

$$f(x) = 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 32 \Leftrightarrow x = \pm 4\sqrt{2}.$$

$$f(x) = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = -4 : \text{không tồn tại } x \in \mathbb{R}.$$

Bài 184 Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{2}}x^2$.

- a. Tính $f(-1)$; $f(-\sqrt{2})$; $f(1-\sqrt{2})$.
b. So sánh $f(2-\sqrt{2})$ và $f(\sqrt{3}-1)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. $f(-1) = -(1+\sqrt{2})$; $f(-\sqrt{2}) = -2(1+\sqrt{2})$;
 $f(1-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}$.
b. Vì $\frac{1}{1-\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow$ hàm số $y = \frac{1}{1-\sqrt{2}}x^2$ nghịch biến trong khoảng $(0, +\infty)$.
mà $2-\sqrt{2}, \sqrt{3}-1 \in (0, +\infty)$ và $2-\sqrt{2} < \frac{7}{10} < \sqrt{3}-1 \Rightarrow f(2-\sqrt{2}) > f(\sqrt{3}-1)$.

Bài 185 Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.
a. Chứng minh rằng : $f(a) - f(-a) = 0$ với mọi a .
b. Tìm $a \in \mathbb{R}$ biết $f(a-1) = 4$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Ta có : $f(-a) = (-a)^2 = a^2$.
Vậy $f(a) - f(-a) = a^2 - a^2 = 0$, với mọi a .
b. $f(a-1) = (a-1)^2$.
Do đó : $f(a-1) = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow |a-1| = 2$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a-1=2 \\ a-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-1 \end{cases}$
Vậy với $a = 3$ hoặc $a = -1$ thì $f(a-1) = 4$.

Bài 186 Tìm những giá trị nguyên nhỏ hơn 8 của m để hàm số

$$y = \left(2 - \frac{m+2}{5}\right)x^2 \text{ đồng biến khi } x < 0.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$y = \left(2 - \frac{m+2}{5}\right)x^2$$

$$\text{Phải có } 2 - \frac{m+2}{5} < 0 \Rightarrow 8 - m < 0 \Rightarrow m > 8.$$

Không có giá trị nguyên của m nhỏ hơn 8.

Bài 187 Tìm giá trị của m để hàm số $y = (\sqrt{3m+4} - 3)x^2$

a. Nghịch biến khi $x > 0$;

b. Đồng biến khi $x > 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{Điều kiện } 3m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{4}{3}.$$

Hàm số có dạng $y = ax^2$ với $a = \sqrt{3m+4} - 3$.

a. HSNB khi $x > 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{3m+4} - 3 < 0$.

$\Leftrightarrow \sqrt{3m+4} < 3$ với $m \geq -\frac{4}{3}$ thì hai vế của bất đẳng thức là số không âm, nên bình phương hai vế ta được bất đẳng thức tương đương $3m + 4 < 9 \Leftrightarrow 3m < 5 \Leftrightarrow m < \frac{5}{3}$. Vậy $-\frac{4}{3} \leq m < \frac{5}{3}$.

b. HSĐB khi $x > 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{3m+4} - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3m+4} > 3 \Leftrightarrow 3m + 4 > 9 \Leftrightarrow m > \frac{5}{3}.$$

§2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$, ($a \neq 0$)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$, ($a \neq 0$) là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một parabol với đỉnh O.

Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

* *Chú ý* : Khi vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ nên tận dụng kết quả trên.

- Đồ thị luôn luôn đi qua điểm $O(0; 0)$;
- Chỉ cần tìm vài điểm ở bên phải trục Oy rồi lấy các điểm đối xứng với chúng qua Oy.

B. BÀI TẬP

Bài 188 Cho hàm số $y = f(x) = (\sqrt{m-1} - 3)x^2$.

a. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; -2)$.

b. Tìm m để hàm số nghịch biến với $x > 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét hàm số $y = f(x) = (\sqrt{m-1} - 3)x^2$.

a. Đồ thị hàm số đi qua $A(1; -2)$

$$\Leftrightarrow -2 = \sqrt{m-1} - 3 \Leftrightarrow m = 2.$$

b. Hàm số nghịch biến với $x > 0$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m-1} - 3 < 0 \\ m-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 10 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 10.$$

Bài 189 Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

- a. Chứng tỏ rằng nếu (a, b) là một điểm thuộc đồ thị của hàm số, thì $(-a, b)$ cũng nằm trên đồ thị của hàm số.
b. Chứng minh rằng $f(-x) = f(x)$ với mọi x .

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Nếu (a, b) là một điểm trên đồ thị thì ta có :

$$b = f(a) = a^2 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } f(-a) = (-a)^2 = a^2 \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có $b = f(-a)$.

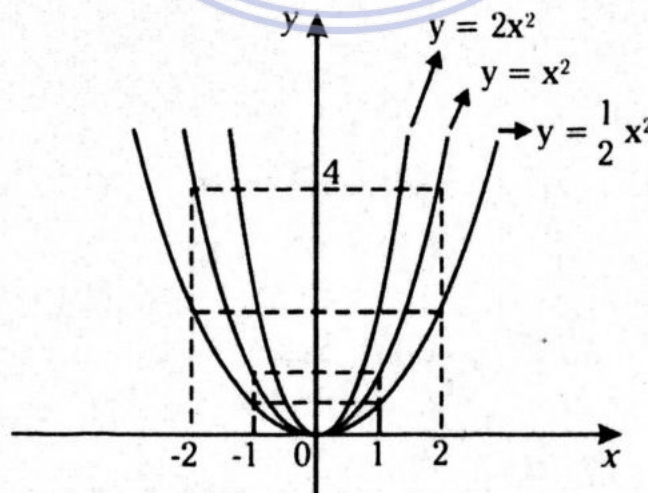
Do đó $(-a, b)$ cũng nằm trên đồ thị của hàm số.

b. Ta có : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Vậy $f(-x) = f(x)$ với mọi x .

Bài 190

Vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng hệ trục tọa độ : $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = x^2$ và $y = 2x^2$. Có nhận xét gì về đồ thị các hàm số này ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bảng giá trị tương ứng của x và y :

x	... -2	-1	0	1	2...
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Nhận xét : khi $a > 0$:

Giá trị của a càng lớn thì hai nhánh parabol càng thu hẹp.

Bài 191 Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2$ để đồ thị (P) của hàm số đi qua điểm :

- a. A(-2; 4) b. B(1; $\frac{1}{2}$) c. C(-2; -16) d. D(-4; 4).

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Đồ thị (P) : $y = ax^2$ đi qua A(-2; 4) $\Leftrightarrow 4 = a(-2)^2 = 4a \Leftrightarrow a = 1$

Vậy $a = 1$; $y = x^2$.

b. Đồ thị (P) : $y = ax^2$ đi qua B(1; $\frac{1}{2}$) $\Leftrightarrow \frac{1}{2} = a \cdot 1^2 = a$

Vậy $a = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x^2$.

c. Đồ thị (P) : $y = ax^2$ đi qua C(-2; -16) $\Leftrightarrow -16 = a(-2)^2 \Leftrightarrow a = -4$

Vậy : $a = -4$; $y = -4x^2$.

d. Đồ thị (P) : $y = ax^2$ đi qua D(-4; -4) $\Leftrightarrow -4 = a(-4)^2 = 16a$

$\Leftrightarrow a = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$. Vậy : $a = -\frac{1}{4}$; $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Bài 192 Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P).

a. Tìm a biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm M(-1, -2).

b. Xác định hoành độ điểm A nằm trên (P) biết tung độ của A: $y_A = -4$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $M(-1, -2) \in (P) \Leftrightarrow y_M = ax_M^2 \Leftrightarrow -2a(-1)^2 \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy $y = -2x^2$ (P)

b. $A(x_A, -4) \in (P) \Leftrightarrow y_A = -2x_A^2 \Leftrightarrow -4 = -2x_A^2$

$\Leftrightarrow x_A^2 = 2 \Leftrightarrow x_A = \pm\sqrt{2}$.

Vậy có hai điểm trên (P) cùng có tung độ -4 là : A($\sqrt{2}$; -4) và A(- $\sqrt{2}$; -4).

- Bài 193** a. Xác định hàm số có đồ thị là parabol (P) có đỉnh ở gốc tọa độ, nhận trục tung làm trục đối xứng và đi qua điểm $A(1; \frac{1}{4})$.
- b. Tìm các điểm của (P) có tung độ $-\frac{1}{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Parabol (P) có đỉnh gốc ở tọa độ và nhận trục tung làm trục đối xứng nên hàm số của (P) có dạng : $y = ax^2$.

$$(P) \text{ đi qua điểm } A(1; -\frac{1}{4}) \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = a \cdot 1^2 = a.$$

Do đó phương trình của parabol (P) là : $y = -\frac{1}{4}x^2$.

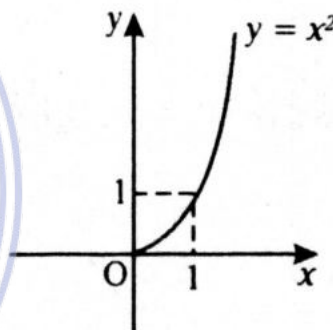
- b. Với $y = \frac{1}{3}$, ta có : $-\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy các điểm phải tìm là : $A(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{3})$; $B(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{3})$.

- Bài 194** Viết hàm số biểu thị sự tương quan giữa diện tích của hình vuông và cạnh x của nó. Vẽ đồ thị của hàm số.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Hàm số biểu thị sự tương quan giữa diện tích y của hình vuông và cạnh x của nó là $y = x^2$ ($x > 0$). Hình vẽ bên.



§3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn số là phương trình có dạng :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

x là ẩn số; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

2. Cách giải hai trường hợp đặc biệt

- a. Trường hợp $c = 0$: $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

- b. Trường hợp $b = 0$: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$.

- Nếu a, c cùng dấu $-\frac{c}{a} < 0$ phương trình vô nghiệm.
- Nếu a, c trái dấu $-\frac{c}{a} > 0$ phương trình có hai nghiệm.

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}; \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

B. BÀI TẬP

Bài 195 Giải các phương trình :

a. $4x^2 - 9 = 0$

b. $2x^2 + 5 = 0$

c. $3x^2 - 6x = 0$

d. $3x^2 = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm \frac{3}{2}$.

b. $2x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{5}{2}$

Vậy phương trình vô nghiệm.

c. $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0, x = 2$.

d. $3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

Bài 196 Giải các phương trình sau bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức:

a. $(x - 1)^2 - 4 = 0$

b. $(x - 1)^2 - 4(x - 3)^2 = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có : $(x - 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 2^2 = 0$
 $\Leftrightarrow [(x - 1) + 2][(x - 1) - 2] = 0$
 $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy : phương trình có hai nghiệm là : $x_1 = -1; x_2 = 3$.

b. Ta có $(x-1)^2 - 4(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - [2(x-3)]^2 = 0$
 $\Leftrightarrow [(x-1) + 2(x-3)][(x-1) - 2(x-3)] = 0$
 $\Leftrightarrow (3x-7)(-x+5) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-7=0 \\ -x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=7 \\ -x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ x=5 \end{cases}$

Vậy : phương trình có hai nghiệm là : $x_1 = \frac{7}{3}$; $x_2 = 5$.

Bài 197 Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng $a(x+m)^2 = n$.

a. $x^2 - 4x - n = 0$

b. $4x^2 - 4x - 3 = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 16 = 0$
 $(x-2)^2 = 4^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=4 \\ x-2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-2 \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 6$ và $x = -2$.

b. $4x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 4^2$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=3 \\ 2x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$.

Bài 198 Biến đổi vế trái thành tích rồi giải phương trình :

a. $x^2 - 4x + 3 = 0$

;

b. $x^2 + 6x - 16 = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x(x-1) - 3(x-1) = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = 3$.

b. $x^2 + 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 6x - 12 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + 6(x-2) = 0$
 $\Leftrightarrow (x-2)(x+2+6) = 0$
 $\Leftrightarrow (x-2)(x+8) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-8 \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2$, $x = -8$.

Bài 199 Phương trình tích $(x - 2)(x + 5) = 0$ hay phương trình bậc hai $x^2 + 3x - 10 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = 2; x_2 = 5$.

Tương tự, hãy lập những phương trình bậc hai mà nghiệm của mỗi phương trình là một trong những cặp số sau :

a. $x_1 = 1; x_2 = 3$

b. $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 4$

c. $x_1 = \sqrt{2} - 1; x_2 = \sqrt{2} + 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. 1 và 3 là hai nghiệm của phương trình

$$(x - 1)(x - 3) = 0 \quad \text{hay} \quad x^2 - 4x + 3 = 0.$$

b. $-\frac{1}{2}$ và 4 là hai nghiệm của phương trình $\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right](x - 4) = 0$ hay

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 4) = 0 \quad \text{hay} \quad 2x^2 - 7x - 4 = 0.$$

c. $\sqrt{2} - 1$ và $\sqrt{2} + 1$ là hai nghiệm của phương trình $(x - \sqrt{2} + 1)(x - \sqrt{2} - 1) = 0$ hay $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0$.



§4. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

B. BÀI TẬP

Bài 200 Xác định các hệ số a, b, c , tính biệt thức Δ rồi tìm nghiệm của phương trình :

a. $x^2 - 7x + 10 = 0$

b. $x^2 - 4x - 21 = 0$

c. $4x^2 - 5x + 7 = 0$

d. $4x^2 + 28x + 49 = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $a = 1, b = -7, c = 10.$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3.$$

$$\text{Do đó } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = 5; x_2 = 2$

b. $a = 1, b = -4, c = -21.$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 10$$

$$\text{Do đó } x_1 = \frac{4 + 10}{2} = 7; \quad x_2 = \frac{4 - 10}{2} = -3.$$

c. $a = 4, b = -5, c = 7.$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 7 = 25 - 112 = -87 < 0$$

Nên phương trình vô nghiệm.

d. $a = 4, b = 28, c = 49.$

$$\Delta = 28^2 - 4 \cdot 4 \cdot 49 = 784 - 784 = 0.$$

$$\text{Do đó phương trình có nghiệm kép : } x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-28}{8} = \frac{-7}{2}.$$

Bài 201 Với các giá trị nào của m thì các phương trình sau vô nghiệm:

a. $x^2 - 3x + m = 0;$ b. $x^2 - (m - 1)x + m + 2 = 0.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Xem phương trình : $x^2 - 3x + m = 0.$

$$a = 1; \quad b = -3; \quad c = m$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 9 - 4m.$$

$$\text{Phương trình vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta < 0$$

$$\Leftrightarrow 9 - 4m < 0 \quad \Leftrightarrow 4m > 9 \quad \Leftrightarrow m > \frac{9}{4}. \text{ Vậy : } m > \frac{9}{4}.$$

b. Xem phương trình : $x^2 - (m - 1)x + m + 2 = 0.$

$$a = 1; \quad b = -(m - 1); \quad c = (m + 2)$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (m - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 2)$$

$$= m^2 - 2m + 1 - 4m - 8 = m^2 - 6m - 7$$

$$= m^2 - 7m + m - 7 = m(m - 7) + m - 7$$

$$= (m - 7)(m + 1)$$

$$\text{Phương trình vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (m - 7)(m + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < m < 7.$$

Bài 202 Với các giá trị nào của m thì các phương trình sau có nghiệm kép:

a. $x^2 - 5x + m - 3 = 0$

b. $x^2 - mx + 4 = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Xem phương trình : $x^2 - 5x + m - 3 = 0$.

$a = 1; b = -5; c = m - 3$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 3) = 25 - 4m + 12 = 37 - 4m$.

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow 37 - 4m = 0 \quad \Leftrightarrow 4m = 37 \quad \Leftrightarrow m = \frac{37}{4}$.

Vậy : $m = \frac{37}{4}$.

b. Xem phương trình : $x^2 - mx + 4 = 0$.

$a = 1; b = -m; c = 4$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = m^2 - 16$.

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow m^2 = 16 \quad \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Vậy : $m = \pm 4$.

Bài 203 Với các giá trị nào của m thì các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt :

a. $3x^2 - 7x - m + 1 = 0$;

b. $3x^2 - mx + 12 = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Xem phương trình : $3x^2 - 7x - m + 1 = 0$.

$a = 3; b = -7; c = -m + 1$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-m + 1)$
 $= 49 + 12m - 12 = 12m + 37$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Leftrightarrow 12m + 37 > 0 \quad \Leftrightarrow 12m > -37 \quad \Leftrightarrow m > -\frac{37}{12}$.

Vậy : $m > -\frac{37}{12}$.

b. Xem phương trình : $3x^2 - mx + 12 = 0$.

$a = 3; b = -m; c = 12$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = m^2 - 144$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 144 > 0 \quad \Leftrightarrow (m - 12)(m + 12) > 0$

$\Leftrightarrow m < -12 \text{ hoặc } m > 12$.

Bài 204

Cho phương trình $\frac{3}{x+2m} + \frac{2}{x+m} = 1$.

- Chứng minh rằng phương trình bao giờ cũng có nghiệm với mọi m .
- Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm bằng 5.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Ta phải có $x + 2m \neq 0$; $x + m \neq 0$.

Phương trình trên trở thành :

$$x^2 + (3m - 5)x + 2m^2 - 7m = 0 (*)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (3m - 5)^2 - 4(2m^2 - 7m) = m^2 - 2m + 25 \\ &= (m - 1)^2 + 24 > 0. \end{aligned}$$

- b. Thay $x = 5$ vào phương trình (*) ta được $m = -4$ hoặc $m = 0$.

Bài 205

Xác định m để hai phương trình sau có nghiệm chung:

$$x^2 + mx + 1 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + x + m = 0.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình nên $\begin{cases} x_0^2 + mx_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + x_0 + m = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (m - 1)x_0 = m - 1 \Leftrightarrow (m - 1)(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

- Nếu $m = 1 \Rightarrow 2$ phương trình đã cho vô nghiệm nên giá trị này không nhận được.
- Nếu $x_0 = 1 \Rightarrow m = -2$.

Bài 206

Cho phương trình $2x^2 + x - 3 = 0$.

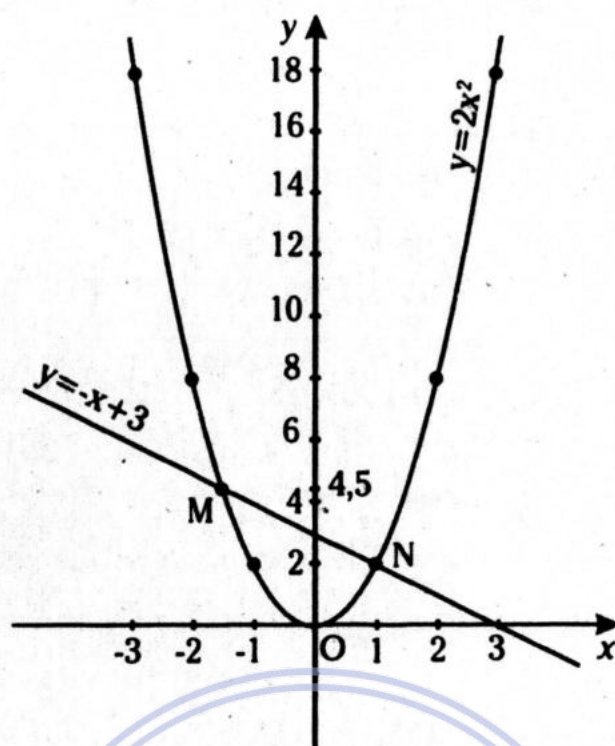
- Vẽ các đồ thị của hai hàm số : $y = 2x^2$, $y = -x + 3$ trong cùng một hệ trục tọa độ.
- Tìm hoành độ của mỗi giao điểm của hai đồ thị. Hãy giải thích vì sao các hoành độ này đều là nghiệm của phương trình đã cho.
- Giải phương trình đã cho bằng công thức nghiệm, so sánh với kết quả tìm được trong câu b).

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Vẽ đồ thị

- b. Hai giao điểm là $M(-1,5; 4,5)$, $N(1; 2)$. Hoành độ của M là $-1,5$; nó là nghiệm của phương trình đã cho vì $2(-1,5)^2 + (-1,5) - 3 = 4,5 - 1,5 - 3 = 0$. Hoành độ của N là 1 cũng là nghiệm của phương trình đã cho vì $2 \cdot 1^2 + 1 - 3 = 0$.

- c. Giải phương trình $2x^2 + x - 3 = 0$ ta cũng được hai nghiệm là $x_1 = -1,5$, $x_2 = 1$.



§5. CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ và $b = 2b'$, $\Delta = b'^2 - ac$:

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

B. BÀI TẬP

Bài 207 Xác định a , b , b' , c trong mỗi phương trình, tính Δ' rồi giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn:

a. $3x^2 - 14x + 8 = 0$

b. $x^2 + 2(1 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3} = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $a = 3$, $b = -14$, $b' = -7$, $c = 8$.

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-7)^2 - 3 \cdot 8 = 49 - 24 = 25 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 5$$

$$\text{Do đó } x_1 = \frac{7-5}{3} = \frac{2}{3}; \quad x_2 = \frac{7+5}{3} = 4.$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: } x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = 4.$$

b. $a = 1, b = 2(1 - \sqrt{3}), b' = 1 - \sqrt{3}, c = -2\sqrt{3}$.

$$\Delta' = b'^2 - ac = (1 - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} = 4$$

$$\text{Do đó } x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{\sqrt{3} - 1 + 2}{1} = \sqrt{3} - 3$$

$$x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{\sqrt{3} - 1 + 2}{1} = \sqrt{3} - 1$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \sqrt{3} - 3; x_2 = \sqrt{3} - 1$.

Bài 208 Với những giá trị nào của x thì giá trị của hai biểu thức bằng nhau:

a. $\sqrt{3} \cdot x^2 + 2x - 1$ và $2\sqrt{3} \cdot x + 3$.

b. $\sqrt{3} \cdot x^2 + 2\sqrt{5}x - 3\sqrt{3}$ và $-x^2 - 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{5} + 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\sqrt{3}x^2 + 2x - 1 = 2\sqrt{3}x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 + 2(1 - \sqrt{3})x - 4 = 0$

$$\Delta' = (1 - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2, x_1 = \frac{\sqrt{3} - 1 - 1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, x_2 = 2.$$

b. $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{5}x - 3\sqrt{3} = -x^2 - 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{5} + 1$

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{3})x^2 + 2(\sqrt{5} + \sqrt{3})x - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 1 = 0$$

$$\Delta' = 5 + 3 + 2\sqrt{15} + (1 + \sqrt{3})(3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 1)$$

$$= 18 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15} = (1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{1 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - 4 - \sqrt{15}$$

$$x_2 = \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + 1} = 1.$$

Bài 209 Với giá trị gần đúng nào của x (chính xác đến chữ số thập phân thứ hai) thì giá trị của hai hàm số bằng nhau :

a. $y = \frac{1}{3}x^2$ và $y = 2x - 3$

b. $y = -\frac{1}{2}x^2$ và $y = x - 8$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\frac{1}{3}x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9$. Suy ra : $x_1 = x_2 = 3$.

b. $-\frac{1}{2}x^2 = x - 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 16 = 0$. Suy ra :

$$x_1 = -1 - \sqrt{17}, x_2 = -1 + \sqrt{17}.$$

$$\text{Vậy } x_1 \approx -5,12; x_2 \approx 3,12$$

Bài 210 Cho phương trình : $(m - 2)x^2 - 2mx + (m - 3) = 0$ (1) (m là tham số)

a. Giải phương trình (1) với $m = 11$.

b. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Với $m = 11$, phương trình (1) có dạng :

$$9x^2 - 22x + 8 = 0$$

$$\Delta' = 11^2 - 9 \cdot 8 = 121 - 72 = 49.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = \frac{11-7}{9} = \frac{4}{9}$; $x_2 = \frac{11+7}{9} = 2$.

b. Điều kiện để (1) có hai nghiệm phân biệt : $\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$$\Delta' = m^2 - (m-2)(m-3) = 5m - 6$$

$$\text{Do đó : } \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{6}{5} < m \neq 2.$$

Bài 211 Cho phương trình : $x^2 - (m-1)x + 4 = 0$.

Tìm m để phương trình có nghiệm kép.

Tính nghiệm kép đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có $x^2 - (m-1)x + 4 = 0$. Nên

$$\Delta = (m-1)^2 - 16 = m^2 - 2m - 15$$

Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 = 0$$

Giải phương trình bậc hai theo m .

$$\Delta' = 1 + 15 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 4$$

$$\text{Do đó } m_1 = 1 + 4 = 5, m_2 = 1 - 4 = -3$$

$$\text{Phương trình có nghiệm kép là: } x_1 = x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{m-1}{2}.$$

- Nếu $m = 5$ thì $x_1 = x_2 = 2$.
- Nếu $m = 3$ thì $x_1 = x_2 = -2$.

Bài 212 Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm, vô nghiệm, có hai nghiệm phân biệt:

$$3x^2 - 2x + m = 0.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$3x^2 - 2x + m = 0$$

$$\Delta' = 1 - 3m$$

- Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0$, $\Delta' = 1 - 3m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

- Phương trình vô nghiệm khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.
- Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Bài 213 Chứng minh rằng với $a \neq 0$ thì một trong các phương trình sau có nghiệm : $ax^2 + bx + c = 0$ và $ax^2 + bx - c = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có biệt số $\Delta_1 = b^2 - 4ac$.

Phương trình $ax^2 + bx - c = 0$ có biệt số $\Delta_2 = b^2 + 4ac$.

Do đó $\Delta_1 + \Delta_2 = b^2 - 4ac + b^2 + 4ac = 2b^2 \geq 0$

Suy ra $\Delta_1 \geq 0$ hoặc $\Delta_2 \geq 0$.

Vậy một trong các phương trình đã cho có nghiệm.

§6. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ thức Vi-ét

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ thì :

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

2. Áp dụng : Tính nhẩm nghiệm

- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = \frac{c}{a}$.
- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

3. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng S và tích bằng P và $S^2 - 4P \geq 0$ thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

B. BÀI TẬP

Bài 214 Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm số của phương trình sau và tính giá trị biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

a. $x^2 - 6x + 8 = 0$; b. $x^2 + 13x + 42 = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Xét phương trình : $x^2 - 6x + 8 = 0$

$a = 1$; $b = -6$; $c = 8$ có :

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 > 0$.

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm.

Nên ta có :

• Tổng các nghiệm phương trình là : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$.

• Tích các nghiệm của phương trình là : $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$.

• $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6^2 - 2 \cdot 8 = 36 - 16 = 20$.

b. Xét phương trình : $x^2 + 13x + 42 = 0$ có :

$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 42 = 169 - 168 = 1 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm.

Ta có :

• $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -13$.

• $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 42$.

• $A = x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 169 - 84 = 85$.

Bài 215 Tính nhẩm nghiệm của các phương trình :

a. $x^2 - \sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 1) = 0$ (1)

b. $x^2 + \sqrt{3}x + (\sqrt{3} - 1) = 0$ (2)

c. $x^2 - (3 + \sqrt{7})x + 3\sqrt{7} = 0$ (3)

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $a + c = 1 + (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}$; $b = -\sqrt{2}$

Ta thấy $a + b + c = 0$ nên $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = \sqrt{2} - 1$.

b. $a + c = 1 + (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3}$; $b = \sqrt{3}$

Ta thấy $a - b + c = 0$ nên $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{-c}{a} = 1 - \sqrt{3}$.

c. Hai số 3 và $\sqrt{7}$ có tổng bằng $3 + \sqrt{7}$, tích bằng $3\sqrt{7}$ nên là nghiệm của phương trình $x^2 - (3 + \sqrt{7})x + 3\sqrt{7} = 0$, tức là nghiệm của phương trình (3).

Bài 216 Giải các phương trình sau bằng phương pháp nhẩm nghiệm:

a. $x^2 - 18x + 77 = 0$ (1)

b. $(\sqrt{3} + 1)x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 = 0$ (2)

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có : $\begin{cases} S = 18 = 7 + 11 \\ P = 77 = 7 \cdot 11 \end{cases}$

Do đó : (1) có hai nghiệm : $\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 11 \end{cases}$

b. Ta có : $a + b + c = (\sqrt{3} + 1) + (-2\sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1) = 0$.

Do đó : (2) có hai nghiệm : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

Bài 217 Cho phương trình $(m + 3)x^2 - m(m + 5)x + 2m^2 = 0$ (1)

a. Chứng tỏ $x = m$ là một nghiệm của phương trình (1).

b. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Thay $x = m$ vào phương trình (1) ta thấy thỏa nên $x = m$ là một nghiệm của phương trình (1).

b. Vì phương trình (1) luôn có nghiệm nên phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow$

$$2x_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow 2m = \frac{m(m+5)}{m+3} \text{ (nếu } m \neq -3) \quad \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = -1.$$

Bài 218 Tìm 2 số x và y trong các trường hợp sau :

a. $x + y = 11$; $xy = 28$;

b. $x - y = 5$; $xy = 68$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Với $x + y = 11$, $xy = 28$ thì x và y là nghiệm của phương trình bậc hai :

$$X^2 - 11X + 28 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 121 - 112 = 9 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là :

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 + 3}{2} = 7; \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 - 3}{2} = 4.$$

Do đó ta có : $(x; y) = (7; 4), (4; 7)$.

b. Ta có : $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (-y) = 5 \\ x(-y) = -66 \end{cases}$

Suy ra : x và $(-y)$ là nghiệm của phương trình bậc hai :

$$X^2 - 5X - 66 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 264 = 289 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là :

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 17}{2} = 11; \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 17}{2} = -6.$$

Do đó ta có : $(x; y) = (11; 6), (-6; -11)$.

Bài 219 a. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là

$$\frac{1}{10 - \sqrt{72}} \quad \text{và} \quad \frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$$

b. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 x_2 = 4$.

$$\frac{x_1}{x_1 - 1} + \frac{x_2}{x_2 - 1} = \frac{a^2 - 7}{a^2 - 4}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có : $x_1 + x_2 = \frac{1}{10 - \sqrt{72}} + \frac{1}{10 + 6\sqrt{2}} = -\frac{20}{28}$

$$x_1 x_2 = \frac{1}{10 - \sqrt{72}} \cdot \frac{1}{10 + 6\sqrt{2}} = \frac{1}{28}$$

Phương trình cần tìm là : $x^2 - \frac{20}{28}x + \frac{1}{28} = 0$

hay : $28x^2 - 20x + 1 = 0$.

b. Từ $x_1 x_2 = 4$ và $\frac{x_1}{x_1 - 1} + \frac{x_2}{x_2 - 1} = \frac{a^2 - 7}{a^2 - 4}$ Suy ra : $x_1 + x_2 = a^2 + 1$.

Phương trình cần tìm là $x^2 - (a^2 + 1)x + 4 = 0$.

Bài 220 Cho biết phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ có hai nghiệm là a, b ; phương trình $x^2 + qx + 2 = 0$ có 2 nghiệm là b, c .

Chứng minh rằng : $(b - a)(b - c) = pq - 6$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} a + b = -p \\ ab = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} b + c = -q \\ bc = 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } (b - a)(b - c) &= (b + a - 2a)(b + c - 2c) \\ &= (b + a)(b + c) - 2c(b + a) - 2a(b + c) + 4ac \\ &= (-p)(-q) - 2cb - 2ca - 2ab - 2ac + 4ac \\ &= pq - 4 - 2 = pq - 6 \end{aligned}$$

§7. PHƯƠNG TRÌNH QUI VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình trùng phương

Phương trình trùng phương là phương trình có dạng : $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$.

Cách giải :

– Đặt $x^2 = t \geq 0$, ta được phương trình bậc hai ẩn t :

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (*)$$

– Giải (*). Chọn $t \geq 0$.

– Giải phương trình $x^2 = t$.

Suy ra nghiệm của phương trình trùng phương.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Phương pháp giải

Bước 1 : Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2 : Qui đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức.

Bước 3 : Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4 : Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thỏa mãn điều kiện xác định, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình.

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

3. Phương trình tích

Phương pháp giải : Bằng các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử đưa phương trình về dạng $A(x) \cdot B(x) = 0$. Để giải phương trình tích này ta áp dụng công thức $A(x) \cdot B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ hoặc $B(x) = 0$.

Ta giải hai phương trình $A(x) = 0$ và $B(x) = 0$ rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

B. BÀI TẬP

Bài 221 Giải phương trình :

a $(x + 2)^2 - 5 = 1 + 3x - x^2$.

b $(x + 5)^2 + (x - 2)^2 = (x + 7)(x - 7) + 8x + 77$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $(x + 2)^2 - 5 = 1 + 3x - x^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 5 = 1 + 3x - x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 = 0$$

Giải ra, được nghiệm là : $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$; $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{b. } (x+5)^2 + (x-2)^2 &= (x+7)(x-7) + 8x + 77 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 29 &= x^2 - 49 + 8x + 77 \quad \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$.

Bài 222 Giải các phương trình :

$$\text{a. } \frac{60}{x-10} - \frac{60}{x} = 1 \quad ; \quad \text{b. } 3x - \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{2-x}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Điều kiện : $x \neq 10$ và $x \neq 0$ (*)

Ta có :

$$\begin{aligned} \text{Với (*), (a)} \quad &\Leftrightarrow 60x - 60(x-10) = x(x-10) \\ &\Leftrightarrow 60x - 60x + 600 = x^2 - 10x \quad \Leftrightarrow x^2 - 10x - 600 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 30 \text{ hay } x = -20, \text{ thỏa (*)} \end{aligned}$$

Vậy : phương trình có hai nghiệm là : $x_1 = 30$; $x_2 = -20$.

b. Điều kiện : $x \neq 2$ (*)

Ta có :

$$\begin{aligned} \text{Với (*), (b)} \quad &\Leftrightarrow 3x(x-2) - 1 = -x + 1 \\ &\Leftrightarrow 3x^3 - 5x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 2 \text{ hay } x = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện (*), ta chọn giá trị $x = -\frac{1}{3}$.

Vậy : phương trình có nghiệm : $x = -\frac{1}{3}$.

Bài 223 Giải những phương trình sau :

$$\text{a. } x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{b. } x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36 = 0 \quad (2)$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{a. (1)} \Leftrightarrow x^2(x-1) - 3(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{b. (2)} \Leftrightarrow x^2(x^2 - 10x + 25) - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x(x-5)]^2 - 6^2 = 0 \Leftrightarrow [x(x-5) + 6][x(x-5) - 6] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \\ x=-1 \\ x=6 \end{cases}$$

Bài 224 Cho phương trình : $x^3 - (m^2 - m + 7)x - 3(m^2 - m - 2) = 0$ (1)
 Tìm giá trị của m để một trong các nghiệm của phương trình trên bằng -1 . Tìm các nghiệm còn lại với giá trị đó của m .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Thay $x = -1$ vào phương trình (1) được $m^2 - m = 6$.

Thay vào (1) được $x^3 - 13x - 12 = 0$.

Giải phương trình trên với chú ý $x = -1$ là một nghiệm :

$$\begin{aligned} x^3 + 1 - 13x - 12 &= 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) - 13(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x - 12) = 0. \end{aligned}$$

Ngoài nghiệm -1 , hai nghiệm còn lại là -3 và 4 .

Bài 225 Giải các phương trình :

a. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b. $3x^4 + 7x^2 - 10 = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Xem phương trình : $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Đặt : $x^2 = t$, $t \geq 0$, ta có : $t^2 - 13t + 36 = 0 \Leftrightarrow t = 9$ hay $t = 4$.

• Với $t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

• Với $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Vậy : phương trình có bốn nghiệm : $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$.

b. Xem phương trình : $3x^4 + 7x^2 - 10 = 0$.

Đặt : $x^2 = t$, $t \geq 0$, ta có : $3t^2 + 7t - 10 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ hay $t = -\frac{10}{3}$ (loại)

• Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Phương trình có hai nghiệm là : $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

Bài 226 Giải phương trình : $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đặt $x^2 + x = y$, ta có : $y^2 + 4y - 12 = 0$.

Giải phương trình trên được $y_1 = -6$, $y_2 = 2$.

Với $y = -6$ thì $x^2 + x + 6 = 0$, vô nghiệm.

Với $y = 2$ thì $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm : 1 và -2 .

Bài 227 Giải phương trình : $(x + 1)(x + 2)(x - 6)(x - 7) = 180$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Nhân các đa thức ở vế trái một cách hợp lý :

$$(x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x - 14) = 180$$

Đặt $x^2 - 5x - 10 = y$

Ta có : $(y + 4)(y - 4) = 180 \Leftrightarrow y^2 - 16 = 180 \Leftrightarrow y = \pm 14$.

Với $y = 14$ thì : $x^2 - 5x - 10 = 14 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Với $y = -14$ thì $x^2 - 5x - 10 = -14 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 4 \end{cases}$

Kết luận : phương trình đã cho có bốn nghiệm : -3, 1, 4, 8.

Nhận xét :

Để giải các phương trình dạng : $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$
trong đó $a + d = b + c$, ta có nhóm :

$$[(x + a)(x + d)][(x + b)(x + c)] = m.$$

Bài 228 Giải phương trình : $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$, $v = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$.

Vì $x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow u, v$ luôn xác định $\forall x$.

Theo đề bài ta có : $\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 - v^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ (u - v)(u + v) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ u - v = -1 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$ từ đó tìm được nghiệm của phương trình đã cho
 $x_1 = 1, x_2 = 2$.

§8. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình :

Bước 1 : Lập phương trình

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2 : Giải phương trình.

Bước 3 : Trả lời : Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

B. BÀI TẬP

Bài 229 Một số gồm hai chữ số, có tổng bằng 12. Nếu thêm 12 vào tích hai chữ số thì ta được một số gồm hai chữ số đảo ngược của số đã cho. Tìm số đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi $\overline{xy}$ là số phải tìm. Số có hai chữ số đảo ngược là $\overline{yx} = 10y + x$ ($0 < x \leq 9$, $0 < y \leq 9$).

Theo giả thiết, ta có :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 12 \\ 12 + xy = 10y + x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ 12 + x(12 - x) = 10(12 - x) + x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ x^2 - 21x + 108 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ x = 9 \text{ (nhận)} \text{ hay } x = 12 \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy số phải tìm là : 93.

Bài 230 Một phòng họp có 150 người, được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu có thêm 71 người thì phải kê thêm hai dãy ghế và mỗi dãy ghế phải bố trí thêm 3 người nữa. Hỏi lúc đầu phòng họp có bao nhiêu dãy ghế ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi số dãy ghế lúc đầu là x (dãy) (x nguyên dương).

Số người trên mỗi dãy ghế lúc đầu là : $\frac{150}{x}$ (người).

Số dãy ghế lúc sau là : $x + 2$ (dãy).

Số người trên mỗi dãy ghế lúc sau là $\frac{221}{x+2}$ người.

Theo đề bài ta có phương trình $\frac{150}{x} = \frac{221}{x+2} - 3$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 150(x+2) = 221x - 3x(x+2) \Leftrightarrow 150x + 300 = 221x - 3x^2 - 6x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 65x + 300 = 0$$

$$\Delta = 65^2 - 4 \cdot 3 \cdot 300 = 4225 - 3600 = 625$$

$$\sqrt{\Delta} = 25$$

$$x_1 = \frac{65+25}{6} = 15; \quad x_2 = \frac{65-25}{6} = \frac{20}{3}$$

Giá trị $x = \frac{20}{3}$ không thỏa mãn điều kiện x nguyên dương nên loại. Vậy lúc đầu phòng họp có 15 dãy ghế.

Bài 231 Trong một phòng họp có 360 ghế ngồi được xếp thành từng dãy và số ghế của mỗi dãy đều bằng nhau. Nếu số dãy tăng thêm 1 và số ghế của mỗi dãy cũng tăng thêm 1 thì trong phòng có 400 ghế. Hỏi trong phòng họp có bao nhiêu dãy ghế và mỗi dãy có bao nhiêu ghế?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (dãy) là số dãy ghế có trong phòng họp lúc đầu (x nguyên dương).

$\Rightarrow$ số ghế của mỗi dãy là $\frac{360}{x}$ (ghế).

Theo đề bài ta có phương trình : $(x+1)\left(\frac{360}{x}+1\right)=400 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=24 \\ x_2=-15 \end{cases}$

Vì x nguyên dương, ta chọn $x=24$.

Vậy số dãy ghế trong phòng họp là 24 dãy và số ghế ở mỗi dãy là 15 ghế.

Bài 232 Một xe hơi khởi hành từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 150 km. Khi về, xe tăng vận tốc hơn vận tốc lúc đi là 25 km/h. Tính vận tốc lúc đi biết rằng thời gian đi và về là 5 giờ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi v (km/h) là vận tốc lúc đi, $v > 0$.

Vận tốc lúc về là $v+25$.

Thời gian đi từ A đến B là $\frac{150}{v}$

Thời gian đi từ B đến A là $\frac{150}{v+25}$

Theo giả thiết, ta có : $\frac{150}{v} + \frac{150}{v+25} = 5$

$\Leftrightarrow 30(v+25) + 30v = v(v+25) \Leftrightarrow v^2 - 35v - 750 = 0$

$$\Delta = 35^2 + 4 \cdot 750 = 4225 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 65 \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{35-65}{2} = -15 \text{ (loại)} \\ v = \frac{35+65}{2} = 50 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc lúc đi từ A đến B là 50 km/h.

Bài 233 Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 50 km. Sau đó 1g30 phút một người đi xe gắn máy cũng đi từ A và đến B sớm hơn 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe biết rằng vận tốc xe gắn máy gấp 2,5 lần vận tốc xe đạp.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (km/h) là vận tốc xe đạp ($x > 0$)

$\Rightarrow$ vận tốc xe gắn máy là $2,5x$ (km/h).

Thời gian xe đạp đi hết quãng đường AB nhiều hơn thời gian xe gắn máy đi hết quãng đường AB là

$$1g30' + 1(g) = 2g30ph = \frac{5}{2} (g).$$

Theo đề bài ta có phương trình :

$$\frac{50}{x} - \frac{50}{2,5x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 12.$$

Vận tốc xe đạp là 12 km/h, xe gắn máy là 30 km/h.

Bài 234 Một canô xuôi một khúc sông dài 90 km rồi ngược về 36 km, tổng thời gian cả xuôi dòng và ngược dòng là 10 giờ và vận tốc khi xuôi dòng hơn vận tốc ngược dòng là 6 km/h. Hỏi vận tốc của canô lúc xuôi dòng và lúc ngược dòng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi vận tốc của canô khi ngược dòng là x (km/h) (điều kiện $x > 0$) vận tốc canô khi xuôi dòng là : $x + 6$ (km/h).

Thời gian canô khi xuôi dòng là $\frac{90}{x+6}$ (h).

Thời gian canô khi ngược dòng là $\frac{36}{x}$ (h).

Tổng thời gian cả xuôi dòng và ngược dòng là 10 giờ nên ta có phương trình

$$\frac{90}{x+6} + \frac{36}{x} = 10 \quad (1).$$

$$(1) \Leftrightarrow 90x + 36(x+6) = 10x(x+6) \Leftrightarrow 90x + 36x + 216 = 10x^2 + 60x$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 - 66x - 216 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 33x - 108 = 0$$

$$\Delta = 33^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-108) = 1089 + 2160 = 3249$$

$$\sqrt{\Delta} = 57$$

$$x_1 = \frac{33+57}{10} = 9;$$

$$x_2 = \frac{33-57}{10} = -\frac{12}{5}.$$

Giá trị $x = -\frac{12}{5}$ không thỏa điều kiện $x > 0$ nên loại.

Vậy vận tốc của canô khi ngược dòng là 9 km/h và vận tốc của canô khi xuôi dòng là 15 km/h.

Bài 235 Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 4 giờ 48 phút thì đầy bể. Mỗi giờ lượng nước của vòi I chảy được bằng 1,5 lần lượng nước của vòi II chảy. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x (giờ) là thời gian vòi II chảy riêng đầy bể ($x > 4\frac{4}{5}$) ($4g48ph = 4\frac{4}{5}$ giờ)

⇒ Mỗi giờ vòi II chảy được $\frac{1}{x}$ bể.

Nên mỗi giờ vòi I chảy được $1,5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{2x}$ (bể).

Cả hai cùng chảy thì trong $4\frac{4}{5}$ g đầy bể.

⇒ mỗi giờ cả hai cùng chảy thì được $\frac{1}{4\frac{4}{5}} = \frac{5}{24}$ (bể)

Theo đề bài ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow x = 12$.

Thời gian vòi II chảy riêng đầy bể là 12 giờ và vòi I chảy riêng đầy bể là $\frac{2x}{3} = 8$ giờ.

Bài 236 Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 10 m. Hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 2m. Tìm các cạnh góc vuông của tam giác.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x(m) và y(m) là số đo hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đã cho, x là số đo cạnh lớn và y là số đo cạnh nhỏ.

Điều kiện : $0 < y < x; x > 2$.

Theo giả thiết, ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x - y = 2 & (1) (*) \\ x^2 + y^2 = 100 & (2) \end{cases}$

Ta giải (*) bằng phương pháp thế. Ta có :

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ (y + 2)^2 + y^2 = 100 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 2y^2 + 4y - 96 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y^2 + 2y - 48 = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y = 6 \vee y = -8 \text{ (loại)} \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6; \text{thỏa} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy : các cạnh góc vuông có số đo là : 8m và 6m.

Bài 237 Một hình chữ nhật có chu vi 100m. Nếu tăng chiều rộng gấp đôi và giảm chiều dài 10m thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 200 m². Tính chiều rộng của hình chữ nhật lúc đầu.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật lúc đầu là x (m). Phương trình :

$$2x(40 - x) - x(50 - x) = 200.$$

Rút gọn : $x^2 - 30x + 200 = 0$; $x_1 = 20$, $x_2 = 10$.

Chiều rộng lúc đầu : 20m (khi đó chiều dài 30m)

hoặc 10m (khi đó chiều dài 40m).

Bài 238 Chu vi hình chữ nhật là 28m, và đường chéo là 10m. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi x, y là hai kích thước của hình chữ nhật ($x, y > 0$).

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 2(x+y) = 28 \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 14 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 100 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) ta có: } (x+y)^2 = 14^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 196$$

$$\text{Vì: } x^2 + y^2 = 100 \text{ nên ta có: } 2xy = 96 \Rightarrow xy = 48.$$

$x + y = 14$ và $xy = 48$; vậy x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - 14X + 48 = 0$.

Giải phương trình bậc hai này ta có: $x = 8$; $y = 6$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 239 Giải các phương trình:

a. $(1 + \sqrt{3})x^2 - (3 + 2\sqrt{3})x + 3 = 0$

b. $x^2 - 2(2 + \sqrt{2})x - 3 + 4\sqrt{2} = 0$

c. $\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{3}x - 2\sqrt{2} = 0$.

Bài 240 Giải các phương trình:

a. $\frac{20}{2} + \frac{20}{x-2} = 15$

b. $\frac{16}{5(x-2)(x+2)} + \frac{9}{5(x+2)(x+3)} = \frac{-x}{(x-2)(x+3)}$

c. $\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^3+1}$.

Bài 241 Giải các phương trình:

a. $(2x + 5)^2 - 2(5x + 1)^2 = 0$

b. $\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^2 - 2\left(\frac{x-4}{x+1}\right) - 35 = 0$

c. $\left(\frac{y^2-1}{y}\right) - 4\left(\frac{y^2-1}{y}\right) - 12 = 0$.

Bài 242 Giải các phương trình trùng phương:

a. $16x^4 + 7x^2 - 9 = 0$

b. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0$

d. $x^4 - (m^2 + 4)x^2 + 4m^2 = 0$

e. $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4x^2 + a^2b^2) = 0$.

Bài 243 Giải các phương trình vô tỉ:

- a. $\sqrt{x^2 + 25} = 13$
 b. $\sqrt{x^2 - 7x + 10} + \sqrt{x^2 - 9x + 14} = 0$
 c. $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x - 3} = 4$.

Bài 244 Giải các phương trình:

- a. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$
 b. $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$
 c. $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$
 d. $(x + 6)(x - 4)(x + 3)(x - 1) = -110$.

Bài 245 Chứng minh rằng phương trình bậc hai: $x^2 + 2(m + 3)x + 6m = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .**Bài 246** Trong các phương trình bậc hai sau đây, x là ẩn, m là tham số. Hãy xác định giá trị của m để:

- a. Phương trình $(4m + 1)x^2 - 4mx + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
 b. Phương trình $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$ có nghiệm kép. Tính nghiệm kép.
 c. Phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 2 = 0$ vô nghiệm.

Bài 247 Lập phương trình bậc hai có nghiệm là các số nghịch đảo của nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.**Bài 248** a. Cho phương trình: $kx^2 - 4x + (2k - 1) = 0$.

Xác định k để phương trình có hai nghiệm thực mà tổng của chúng là $S = 3$. Giải phương trình với giá trị k tìm được.

b. Cho phương trình: $3x^2 - mx + n = 0$.

Tìm các giá trị của m và n để phương trình có hai nghiệm có tổng là -12 và tích là 20 . Giải phương trình với các giá trị m, n tìm được.

Bài 249 Cho phương trình bậc hai: $3x^2 - (3m - 2)x - (3m + 1) = 0$.

- a. Chứng tỏ phương trình có một nghiệm $x_1 = -1$. Tính nghiệm x_2 .
 b. Xác định m để phương trình có nghiệm thỏa mãn hệ thức $3x_1 - 5x_2 = 6$.
 c. Tìm một hệ thức các nghiệm độc lập đối với m .

Bài 250 Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 + 3x + nm = 0$. Xác định giá trị m để:

- a. Hiệu các nghiệm của phương trình là 6
 b. Tổng bình phương các nghiệm là 24
 c. Hiệu bình phương các nghiệm là 30 .

Bài 251 Cho phương trình: $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0$.

- Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm trái dấu?
- Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu?
- Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình, tìm giá trị m để hệ thức $5(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 - 7 = 0$ được thỏa mãn.

Bài 252 Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$.

Gọi Δ, P, S theo thứ tự là biệt thức, tổng, tích của các nghiệm (nếu có)

- Chứng tỏ rằng Δ và P là hai số không cùng âm.
- Chứng tỏ rằng khi tổng $S = 0$ thì Δ và P là hai số trái dấu.

Bài 253 Cho phương trình: $x^2 - 2ax(a + 3) = 0$.

Tìm các giá trị nguyên của hàm số a để phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Bài 254 Cho phương trình: $(x - a)(x - c) = b^2$, trong đó a, b, c là các số cho trước, x là ẩn.

- Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm bất chấp các giá trị của a, b, c .
- Cho $b = 2$ và phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3; x_2 = -2$. Tính a và c .
- Biết rằng nghiệm của phương trình trên là hai số x_1, x_2 . Chứng minh rằng a và c là nghiệm của phương trình: $(y - x_1)(y - x_2) - b^2 = 0$. Trong đó y là ẩn, còn x_1, x_2, b là các số đã biết.

Bài 255 Tìm giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) của một biểu thức:

- $P = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1}$
- $Q = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)$.

Bài 256 Vẽ đồ thị các hàm số: $y = x^2, y = 3 - 2x$.

- Tìm tọa độ các giao điểm A, B của hai đồ thị.
- Tính khoảng cách AB .

Bài 257 Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (D): $y = ax - a$.

- Với giá trị nào của a thì (P) và (D) cắt nhau tại hai điểm A, B .
- Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB . Suy ra một liên hệ giữa các tọa độ của M , độc lập với a .

Bài 258 Cho parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (D) có hệ số góc m và đi qua điểm $Q(0; -1)$.

- Viết phương trình đường thẳng (D).
- Tùy theo giá trị m , cho biết số giao điểm của (D) và (P).

HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

Bài 239

$$\text{a. } \Delta = (3 + 2\sqrt{3})^2 - 4.3(1 + \sqrt{3}) = 9 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

$$\text{b. } \Delta' = (2 + \sqrt{2})^2 + 3 - 4\sqrt{2} = 9 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} + 5; x_2 = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{c. } x_1 = (\sqrt{3} + 2)\sqrt{2}; \quad x_2 = (\sqrt{3} - 2)\sqrt{2}.$$

Bài 240

a. Điều kiện: $x \neq 0; x \neq 2$. Mẫu chung: $x(x - 2)$.

$$\frac{20}{x} + \frac{20}{x-2} = 15 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = \frac{2}{3}$$

c. Điều kiện: $x \neq \pm 2, x \neq -3$.

Mẫu chung $5(x - 2)(x + 2)(x + 3)$.

Phương trình được đưa về phương trình bậc hai: $x^2 + 7x + 6 = 0$

$$\Delta = 49 - 24 = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{-7+5}{2} = -1; x_2 = \frac{-7-5}{2} = -6.$$

Có hai giá trị x_1, x_2 đều thỏa mãn điều kiện $x \neq \pm 2, x \neq -3$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -6$.

b. Điều kiện $x \neq -1$. Mẫu chung $x^3 + 1$.

Phương trình đã cho được đưa về phương trình bậc hai $x^2 - x - 2 = 0 (*)$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.(-2) = 9.$$

Từ đây ta tính được hai nghiệm của phương trình (*) là $x_1 = -1, x_2 = 2$.

Chỉ có giá trị $x_2 = 2$ thỏa điều kiện đã nêu.

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 2$.

Bài 241

$$\text{a. } \text{Đưa phương trình về dạng } 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{b. } \text{Đặt } \frac{x-4}{x+1} = 7, \text{ đưa về phương trình } y^2 - 2y - 35 = 0$$

$$\text{Đáp số: } x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = \frac{-11}{6}.$$

c. Đặt ẩn phụ $\frac{y^2-1}{y} = t$, phương trình đã cho đưa về:

$$t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow \Delta'_t = 16 \Rightarrow t_1 = 6; t_2 = -2$$

$$\text{Với } t_1 = 6 \Rightarrow \frac{y^2-1}{y} = 6; \quad y \neq 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 6y - 1 = 0; \quad \Delta'_y = 10$$

$$\Rightarrow y_1 = 3 + \sqrt{10}; \quad y_2 = 3 - \sqrt{10}$$

$$\text{Với } t_2 = -2 \Rightarrow \frac{y^2 - 1}{y} = -2;$$

$$y \neq 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 2y - 1 = 0;$$

$$\Delta'_y = 2$$

$$\Rightarrow y_3 = -1 + \sqrt{2};$$

$$y_4 = -1 - \sqrt{2}$$

$$\text{Kết quả: } S = \{3 \pm \sqrt{10}; -1 \pm \sqrt{2}\}.$$

Bài 242

a. Đáp số: $S = \left\{-\frac{3}{4}; +\frac{3}{4}\right\}.$

b. Đáp số: $S = \{-2; 2; -3; 3\}.$

c. Đáp số: $S = \{a + b; -(a + b); a - b; -(a - b)\}.$

d. $x_1 = -\sqrt{m^2}; x_2 = \sqrt{m^2}; x_3 = -2; x_4 = 2.$

e. $x_1 = -\frac{a}{b}; x_2 = \frac{a}{b}; x_3 = -\frac{b}{a}; x_4 = \frac{b}{a}.$

Bài 243

a. $\sqrt{x^2 + 25} = 13 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 12 \Rightarrow S = \{-12; 12\}.$

b. Vì $\sqrt{x^2 - 7x + 10} \geq 0; \sqrt{x^2 - 9x + 14} \geq 0$

nên phương trình $\sqrt{x^2 - 7x + 10} + \sqrt{x^2 - 9x + 14} = 0$ chỉ được nghiệm đúng

khi $\sqrt{x^2 - 7x + 10} = 0$ và $\sqrt{x^2 - 9x + 14} = 0$

hay $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ x^2 - 9x + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ và } x_2 = 5 \\ x_3 = 2 \text{ và } x_4 = 7 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$ hay $S = \{2\}.$

c. $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x - 3} = 3.$ Điều kiện: $x \geq 3.$

$$\Rightarrow \sqrt{3x + 4} = 3 + \sqrt{x - 3} \Rightarrow 3x + 4 = 9 + 6\sqrt{x - 3} + x - 3$$

$$\Rightarrow 2x - 2 = \sqrt{x - 3} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x - 3}, \text{ điều kiện } x \geq 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4; x_2 = 7.$$

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện $x \geq 3$ nên đều là nghiệm của phương trình đã cho. $S = \{4; 7\}.$

Bài 244

a. $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases} \Rightarrow y = 3x - 5 \Rightarrow x^2 + (3x - 5)^2 = 65$

$$\Rightarrow 10x^2 - 30x - 40 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1; y_1 = -8 \quad \text{và} \quad x_2 = 4; y_2 = 7.$$

b. $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 10 \\ x^2 + xy = 70 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3x}{2} - 30 \Rightarrow x^2 - 12x - 28 = 0$

$$\Rightarrow x_1 = -2; y_1 = -33 \quad \text{và} \quad x_2 = 14; y_2 = -9.$$

$$\text{c. } \begin{cases} x + xy^2 = 104 & (1) \\ x + xy = 24 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + y^2) = 104 & (1) \\ x(1 + y) = 24 & (2) \end{cases}$$

Để nhận thấy $x \neq 0$. Lấy (1) chia cho (2) vế với vế, ta được:

$$\frac{1 + y^2}{1 + y} = \frac{13}{3} \Leftrightarrow 3y^2 - 13y - 10 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = 72$$

$$\Rightarrow y_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 4.$$

$$\text{d. } \begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = -47 & (1) \\ xy = 21 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có: $x^2 + 2xy + y^2 - 7xy = -47 \Rightarrow (x + y)^2 = 147 = -47$.

Hệ trở thành $\begin{cases} (x + y)^2 = 100 \\ xy = 21 \end{cases}$, cho ta hai hệ:

$$\text{(I): } \begin{cases} S = 10 \\ P = 21 \end{cases} \Rightarrow X^2 - 10X + 21 = 0 \Rightarrow x_1 = 3; y_1 = 7$$

$$x_2 = 7; y_2 = 3$$

$$\text{(II): } \begin{cases} S = -10 \\ P = 21 \end{cases} \Rightarrow X^2 + 10X + 21 = 0 \Rightarrow x_3 = -3; y_3 = -7$$

$$x_4 = -7; y_4 = -3$$

Hệ có bốn nghiệm: $(-7; -3); (-3; -7); (3; 7); (7; 3)$.

Bài 245

$$x^2 + 2(m + 3)x + 6m = 0$$

$$\Delta' = (m + 3)^2 - 6m = m^2 + 9 > 0, \infty \mathbb{R}$$

Vì $\Delta' > 0 \forall m$ nên phương trình cho có nghiệm $\forall m$.

Bài 246

$$\text{a. Đáp số: } m > -\frac{3}{11}.$$

$$\text{b. Đáp số: } m = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1; m = -1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1.$$

$$\text{c. Đáp số: } m < -3.$$

Bài 247

Gọi nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) là x_1, x_2 ; nghiệm

của phương trình căn lập là x'_1, x'_2 thế thì: $x'_1 = \frac{1}{x_1}; x'_2 = \frac{1}{x_2}$.

$$\text{Ta có: } x'_1 + x'_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$$

$$x'_1 \cdot x'_2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{P}$$

$$\text{Phương trình } X^2 - \frac{S}{P}X + \frac{1}{P} = 0 \Rightarrow PX^2 - SX + 1 = 0.$$

Với $S = -\frac{b}{a}$; $P = \frac{c}{a}$ ta có: $\frac{c}{a}X^2 + \frac{b}{a}X + 1 = 0 \Rightarrow cX^2 + bX + a = 0$.

Vậy phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ có các nghiệm là các số nghịch đảo của nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Cách khác: Đặt $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{y}$, được $xy^2 + by + a = 0$ là phương trình có nghiệm là số nghịch đảo của nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Bài 248

a. Ta cần có:
$$\begin{cases} \Delta' = 4 - k(2k - 1) > 0 \\ S = -\frac{a}{b} = \frac{4}{k} = 3 \end{cases}$$

$$S = \frac{4}{k} \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

Với $k = \frac{4}{3} = 3^2 \Rightarrow \Delta' = 4 - \frac{4}{3} \left(\frac{8}{3} - 1 \right) = \frac{16}{9} > 0$

Vậy giá trị $k = \frac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.

Vậy $k = \frac{4}{3}$ phương trình đã cho trở thành $4x^2 - 12x + 5 = 0$

$$\Delta' = 6^2 - 20 = 16 \Rightarrow x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{1}{2}.$$

b. Ta có: $\frac{m}{3} = -12 \Rightarrow m = -36$; $\frac{n}{3} = 20 \Rightarrow n = 60$.

Phương trình cần tìm là $3x^2 + 36x + 60 \Rightarrow x^2 + 12x + 20 = 0$

$$\Delta' = 6^2 - 20 = 16 \Rightarrow x_1 = -6 + 4 = -2, x_2 = -6 - 4 = -10.$$

Bài 249

a. Xét tổng các hệ số $a - b + c$ của phương trình, ta có:

$$3 + (3m - 2) - (3m + 1) = 3 + 3m - 2 - 3m - 1 = 0.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x_1 = -1$; nghiệm $x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{3m+1}{3}$.

b. Từ điều kiện của bài toán, ta có hệ:
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 & (1) \\ x_1 + x_2 = \frac{3m-2}{3} & (2) \\ x_1 x_2 = -\frac{3m+1}{3} & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta tính ra: $x_1 = \frac{15m+8}{24}$; $x_2 = \frac{2m-8}{6}$

Đem thế vào (3), ta có: $m_1 = 0$; $m_2 = -\frac{32}{15}$.

$$\text{c. Từ } S = x_1 + x_2 = \frac{3m-2}{2} \Rightarrow 3S = 3m - 2 \Rightarrow 3m = 3S + 2 \quad (1)$$

$$P = x_1x_2 = -\frac{3m+1}{3} \Rightarrow 3P = -3m + 1 \Rightarrow 3m = -3P + 1 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) và (2) ta có: } 3S + 2 &= 1 - 3P \Rightarrow 3S + 3P + 1 = 0 \\ &\Rightarrow 3(x_1 + x_2) + 3x_1x_2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Đó là hệ thức độc lập với m của các nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 250

$$\begin{aligned} \text{a. Điều kiện: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases} &\Rightarrow 9 - 4m > 0 \Rightarrow m < \frac{9}{4} \\ \begin{cases} x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases} &\Rightarrow 2x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, \text{ suy ra } x_2 = -\frac{9}{2} \\ \frac{c}{a} = x_1x_2 = m &\Rightarrow m = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{27}{2} \end{aligned}$$

Phương trình đã cho trở thành $4x^2 + 12x - 27 = 0$.

Giá trị $m = -\frac{27}{4}$ thỏa mãn điều kiện $m < \frac{9}{4}$. Vậy $m = -\frac{27}{4}$.

Vậy với $m = -\frac{27}{4}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm mà có hiệu là 6.

$$\text{b. Điều kiện: } m < \frac{9}{4}.$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 24 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 24$$

$$\text{Với } x_1 + x_2 = -3; x_1x_2 = m, \text{ ta có: } (-3)^2 - 2m = 24 \Rightarrow m = -\frac{15}{2}.$$

Giá trị $m = -\frac{15}{2}$ thỏa mãn điều kiện $m < \frac{9}{4}$. Vậy $m = -\frac{15}{2}$.

$$\text{c. Điều kiện } m < \frac{9}{4}; x_1^2 - x_2^2 = 30.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ } x_1^2 - x_2^2 = 30 &\Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 30 \Rightarrow -3(x_1 - x_2) = 30 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 = -10 \end{aligned}$$

Kết hợp với $x_1 + x_2 = -3$

$$\text{Ta tính ra: } x_1 = \frac{-13}{2}, x_2 = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Vậy } x_1x_2 = m \Rightarrow m = \frac{-13}{2} \cdot \frac{7}{2} = -\frac{91}{4}.$$

Với $m = -\frac{91}{4} < \frac{9}{4} \Rightarrow$ Phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài 251

a. Ta có: $\frac{c}{a} = m^2 + 2 > 0, \forall x$. Vậy không có giá trị nào của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b. Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu thì: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

$$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + 2) = 4m - 7$$

Kết quả: với $m > \frac{7}{4}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu.

c. Để phương trình có x_1, x_2 thỏa mãn $5(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 - 7 = 0$ ta giải hệ sau:

$$\begin{cases} \Delta > 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1x_2 = m^2 + 2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 - 7 = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (2), (3) vào (4), ta có: $3m^2 - 10m + 8 = 0$.

Phương trình này vô nghiệm nên không có giá trị nào của m thỏa mãn (4).

Bài 252

a. Với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ thì $\Delta = b^2 - 4ac, P = \frac{c}{a}$.

- Khi $P < 0$ thì $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow a$ và c trái dấu $\Rightarrow ac < 0$ do vậy $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

- Ngược lại, khi $\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow b^2 < 4ac$.

Điều này có nghĩa là tích ac không thể âm hay $\frac{c}{a}$ không thể âm.

b. Khi $S = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$ thì x_1, x_2 là hai số trái dấu, do đó $\frac{c}{a} = x_1, x_2 < 0$

Trong trường hợp này, ta lại có $\Delta > 0$ hay Δ và P là hai số trái dấu.

Bài 253

$$x^2 - 2ax - (a + 3) = 0 \Rightarrow \Delta' = 4a^2 + 4(a + 3) \Rightarrow x = a \pm \sqrt{4a^2 + 4a + 12}$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ' phải là số chính phương, ta đặt

$$\Delta' = (2k)^2, k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4a + 12 = 4k^2 \Rightarrow 4a + 4a + 1 - 4k^2 = -11$$

$$\Rightarrow (2a + 1)^2 - (2k)^2 = -11 \Rightarrow (2a + 1 + 2k)(2a + 1 - 2k) = -11 (*)$$

11 là số nguyên tố, -11 có các ước là $\pm 1; \pm 11$. Vì $a \in \mathbb{Z}$ và $k \in \mathbb{N}$ nên

$2a + 1 + 2k, 2a + 1 - 2k$ là số nguyên và phải là các ước của -11.

Mặt khác để thấy $2a + 1 + 2k > 2a + 1 - 2k$ nên từ (*) ta suy ra hai hệ:

$$(I): \begin{cases} 2a + 1 + 2k = 1 \\ 2a + 1 - 2k = -11 \end{cases}$$

$$(II): \begin{cases} 2a + 1 + 2k = 11 \\ 2a + 1 - 2k = -1 \end{cases}$$

Từ (I) ta tính ra $k = 3$; $a = -3$.

Từ (II) ta tính ra $k = 3$; $a = 2$.

Đáp số: $a = -3$ hoặc $a = 2$.

Bài 254

a. Phương trình $(x - a)(x - c) = b^2$ được đưa về $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 =$

$$\Delta = (a - c)^2 + b^2 \geq 0 \Rightarrow \text{phương trình luôn có nghiệm.}$$

b. Giải hệ: $\begin{cases} 3a + 3c - ac = 5 \\ 2a + 2c + ac = 0 \end{cases} (*)$ ta có: $a + c = 1 \Rightarrow a = 1 - c$

Thế vào (*) ta được phương trình: $c^2 - c - 2 = 0 \Rightarrow c_1 = -1; c_2 = 2$

Tính ra ta có: $a_1 = 2$ và $a_2 = -1$.

Kết quả $c = -1$ và $a = 2$ hoặc $c = 2$ và $a = -1$.

c. Dễ thấy $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 = a + c$
 $y_1 y_2 = x_1 x_2 = ac - b^2$.

Bài 255

a. Ta có: $P = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1} (*)$ vì $x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow P(x^2 + 1) = 2(x^2 + x + 1)$$

$$(P - 2)x^2 - 2x + (P - 2) = 0$$

$$\Delta' = 1 - (P - 2)^2$$

Để tồn tại giá trị x thỏa mãn (*) thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -P^2 + 2P + 3 \geq 0$

Tam thức vế trái có hai nghiệm $P_1 = 1; P_2 = 3$ lại có hệ số của hạng tử bậc hai là âm (-1) nên $-P^2 + 2P + 3 \geq 0$ khi $1 \leq P \leq 3$.

P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 lúc đó ta tính x từ phương trình:

$$-x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

P đạt giá trị lớn nhất bằng 3, lúc đó ta tính x từ phương trình:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

b. Ta có: $Q = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)$

$$\Rightarrow Q = (x + 1)(x + 3)(x + 2)^2 = (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 4).$$

Đặt $y = x^2 + 4x + 3$ thì $Q = y(y + 1)$

$$Q = y(y + 1) = y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow Q = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Vì $\left(y + \frac{1}{2}\right) \geq 0$ nên $Q \geq \frac{1}{4}$ và Q đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $y = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Tính } x \text{ từ: } x^2 + 4x + 3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}; x_2 = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

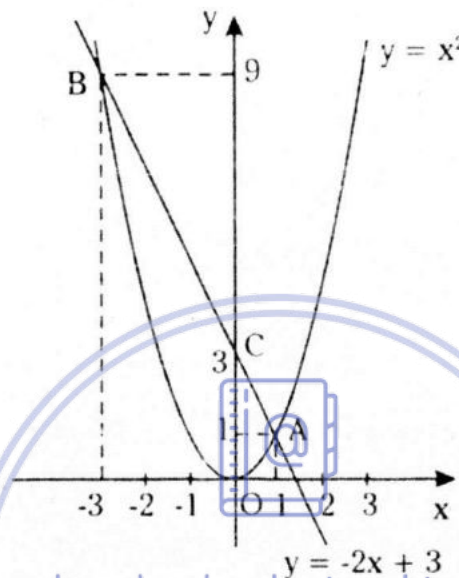
Bài 256

a. Để vẽ đồ thị hàm số $y = -2x + 3$ ta vẽ đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 1)$; $C(0; 3)$.

Trên đồ thị, hai đường cắt nhau tại hai điểm $A(1; 1)$; $B(-3; 9)$.

b. Ta có:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow AB^2 = (-3 - 1)^2 + (9 - 1)^2 \\ &\Rightarrow AB^2 = 80 \\ &\Rightarrow AB = 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

**Bài 257**

a. Điều kiện để (P) và (D) cắt nhau tại hai điểm A, B là phương trình

$$x^2 = ax - a \text{ có hai nghiệm phân biệt}$$

$$x^2 - ax + a = 0$$

$$\Delta = a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ hoặc } a > 4$$

b. Gọi x_M là hoành độ trung điểm M của AB thì: $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{a}{2}$

Từ đây ta tính được $y_M = \frac{a^2}{2} - a$.

$$\text{Từ } x_M = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2x_M \Rightarrow y_M = \frac{(2x_M)^2}{2} - 2x_M$$

$\Rightarrow$ ta có liên hệ giữa tọa độ của M, độc lập với a là:

$$y = \frac{4x^2}{2} - 2x \Rightarrow 4x^2 - 4x - 2y = 0.$$

Bài 258

a. Phương trình đường thẳng (D) có dạng $y = mx + n$; (D) đi qua điểm $Q(0; 1)$ cho ta:

$$-1 = m \cdot 0 + n \Rightarrow n = -1.$$

Phương trình của (D) là $y = mx - 1$.

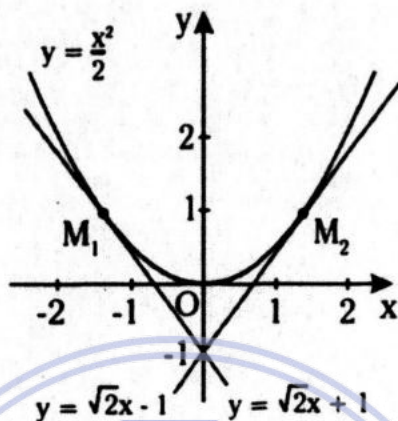
b. Phương trình hoành độ giao điểm của Parabol

$$(P): y = \frac{x^2}{2} \quad \text{và} \quad (D): y = mx - 1 \text{ là:}$$

$$\frac{x^2}{2} = mx - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2mx + 2 = 0$$

Số nghiệm của phương trình (*) chính là số giao điểm của (P) và (D).

Biệt thức $\Delta' = m^2 - 2$



- * $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -\sqrt{2}$ hoặc $m > \sqrt{2}$
 Phương trình (*) có hai nghiệm (P) và (D) cắt nhau tại hai điểm có tọa độ

$$x_1 = m + \sqrt{m^2 - 2}; \quad y_1 = m(m + \sqrt{m^2 - 2}) - 1$$

$$x_2 = m - \sqrt{m^2 - 2}; \quad y_2 = m(m - \sqrt{m^2 - 2}) - 1.$$

- * $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\sqrt{2}$ hoặc $m = \sqrt{2}$
 Phương trình (*) có nghiệm kép, (P) và (D) tiếp xúc với nhau

- Với $m = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Tiếp điểm $M_1(-\sqrt{2}; 1)$.

- Với $m = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Tiếp điểm $M_2(\sqrt{2}; 1)$.

- * $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

Phương trình (*) vô nghiệm, (P) và (D) không cắt nhau

PHẦN HÌNH HỌC

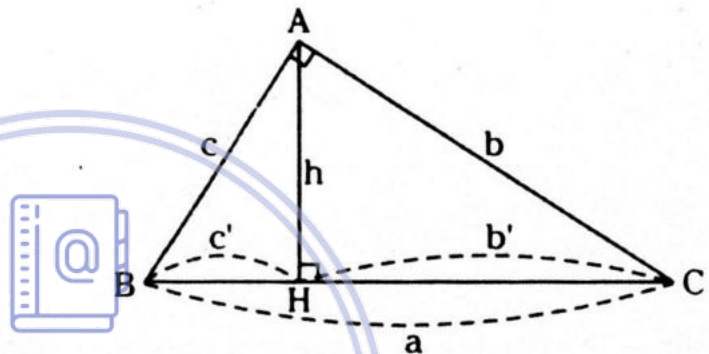
Chương I

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

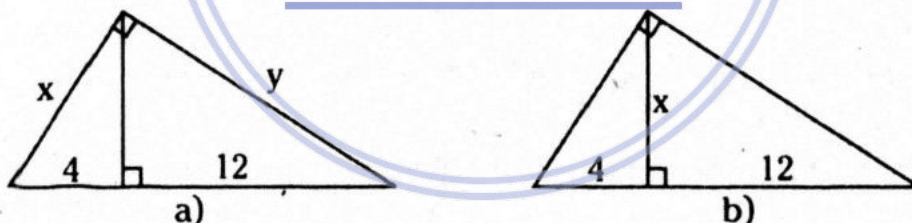
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Định lí 1 : $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$
- Định lí 2 : $h^2 = b'c'$
- Định lí 3' : $ha = bc$
- Định lí 4 : $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$



B. BÀI TẬP

Bài 258 Hãy tính x và y trong các hình sau:



HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Áp dụng định lí 1 :

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \cdot (4 + 12) = 64 & \Rightarrow x &= 8 \\ y^2 &= 12 \cdot (4 + 12) = 192 & \Rightarrow y &= 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

b. Áp dụng định lí 4 :

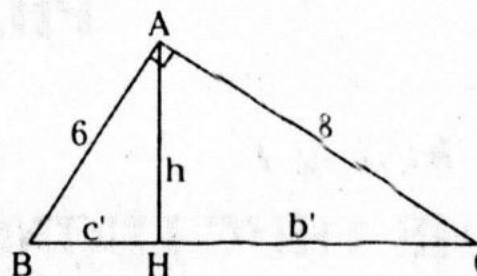
$$x^2 = 4 \cdot 16 = 64 \Rightarrow x = 8.$$

Bài 260 Cho tam giác vuông, trong đó có các cạnh góc vuông dài 6 cm, 8 cm. Tính độ dài đường cao phát xuất từ đỉnh góc vuông. Và độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông lên cạnh huyền.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có :

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 \text{ (định lí Pitago)} \\
 &= 8^2 + 6^2 \\
 &= 64 + 36 = 100 \\
 a &= 10 \text{ (cm)}.
 \end{aligned}$$



Theo định lí 1, ta có :

$$b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b' = \frac{b^2}{a} = \frac{64}{10} = 6,4 \text{ (cm)}$$

$$c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c' = \frac{c^2}{a} = \frac{36}{10} = 3,6 \text{ (cm)}$$

Theo định lí 3 ta có :

$$ah = bc \Rightarrow h = \frac{bc}{a} = \frac{8 \cdot 6}{10} = \frac{48}{10} = 4,8 \text{ (cm)}.$$

Bài 261 Cho tam giác vuông, biết tỉ số hai cạnh góc vuông là 3 : 4, cạnh huyền là 125 cm. Tính độ dài các hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$AB^2 = BH \cdot BC \quad (1)$$

$$AC^2 = CH \cdot BC \quad (2)$$

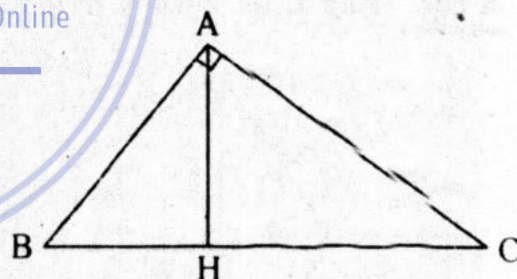
Từ (1), (2) suy ra

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} \text{ do đó :}$$

$$\frac{BH}{CH} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\text{Vậy : } \frac{BH}{9} = \frac{CH}{16} = \frac{BH + CH}{9 + 16} = \frac{125}{25} = 5$$

$$\Rightarrow BH = 45, CH = 80.$$



Bài 262 Cho hình vuông ABCD, một điểm E bất kỳ thuộc cạnh AB. Gọi F là giao điểm của DE và BC.

$$\text{Chứng minh rằng : } \frac{1}{DA^2} = \frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

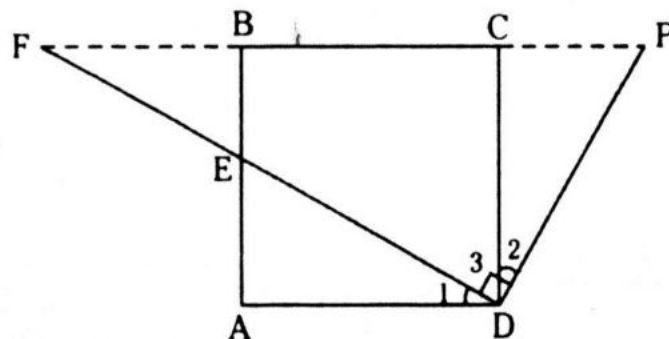
Dựng qua D đường thẳng vuông góc với DE cắt BC tại P. Trong tam giác vuông DPF, ta có :

$$\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{DP^2} + \frac{1}{DF^2} \text{ (định lí 4)}$$

Mà $CD = DA$ (cạnh hình vuông),
 $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ (cùng phụ $\hat{D}_3$)

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle DCP$$

$$\Rightarrow DE = DP, \text{ vậy } \frac{1}{DA^2} = \frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2}.$$



Bài 263 Cho tam giác cân ABC đỉnh A, đường cao AH và BK. Chứng minh rằng : $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$.

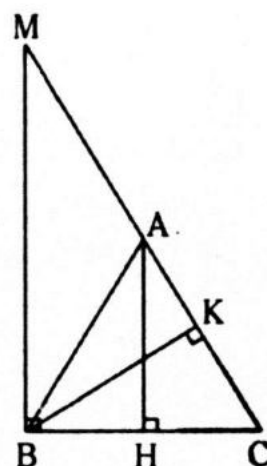
HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ $BM \parallel AH$ và M trên AC kéo dài.

BK là đường cao của tam giác vuông BCM và $BM = 2AH$ nên :

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$$

(Định lí 4)



Bài 264 Hình thang ABCD có $AB \parallel CD$, hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích hình thang biết $BD = 15$ cm, đường cao hình thang bằng 12 cm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{Kẻ } BH \perp CD \Rightarrow DH^2 = BD^2 - BH^2 = 15^2 - 12^2 = 81$$

$\Rightarrow DH = 9$ (cm). Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, đường thẳng này cắt DC ở E.

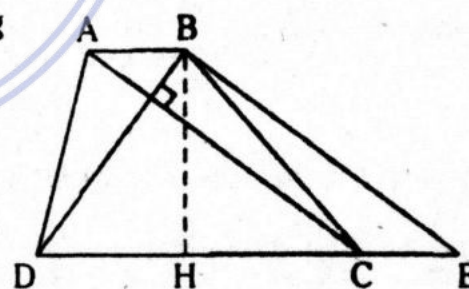
Xét $\triangle DBE$ vuông :

$$BD^2 = DH \cdot DE \text{ (định lí 1)}$$

$$\Rightarrow 15^2 = 9 \cdot DE \Rightarrow DE = 25 \text{ cm.}$$

Diện tích hình thang :

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot BH}{2} = \frac{DE \cdot BH}{2} = \frac{25 \cdot 12}{2} = 150 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Bài 265 Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ trung điểm I của cạnh AC ta kẻ đường thẳng vuông góc với cạnh huyền BC tại D. Chứng minh hệ thức : $BD^2 - CD^2 = AB^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

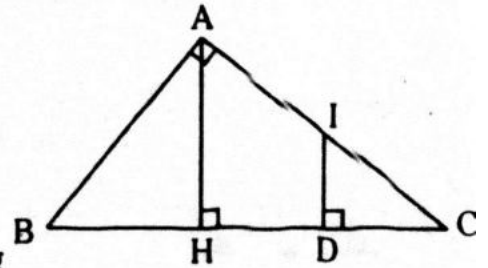
Kẻ đường cao AH.

Ta có :

$$AB^2 = BH \cdot BC \text{ (định lí 1)}$$

$$\begin{aligned} BD^2 - CD^2 &= (BD + CD)(BD - CD) \\ &= BC(BD - HD) \\ &= BC \cdot BH \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BD^2 - CD^2 = AB^2.$$



Bài 266 Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, HD, HE lần lượt là đường cao của tam giác AHB và AHC. Chứng minh rằng:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}; \quad \frac{AB^3}{AC^3} = \frac{DB}{EC}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Trong $\triangle ABC$ ta có :

$$AB^2 = BH \cdot BC; \quad AC^2 = CH \cdot BC \text{ (định lí 1)}$$

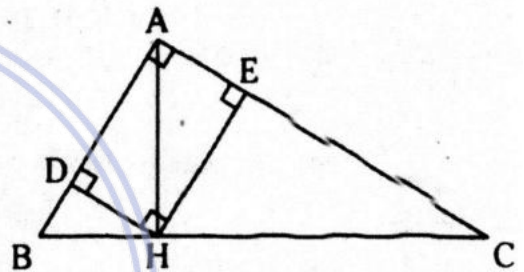
$$\text{Suy ra } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \cdot BC}{HC \cdot BC} = \frac{HB}{HC}.$$

$$\text{Do đó : } \frac{AB^4}{AC^4} = \frac{HB^2}{HC^2}$$

$$\triangle ABH \text{ cho : } HB^2 = BD \cdot BA$$

$$\triangle ACH \text{ cho : } HC^2 = CE \cdot CA.$$

$$\text{Do đó : } \frac{AB^4}{AC^4} = \frac{BD \cdot BA}{CE \cdot CA}. \text{ Vậy } \frac{AB^3}{AC^3} = \frac{DB}{EC}.$$



Bài 267 Tam giác ABC có là tam giác vuông không, nếu ba đường cao của nó bằng :

a. 3 cm, 4 cm, 5 cm?

b. 12 cm, 15 cm, 20 cm?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của $\triangle ABC$ có diện tích S.

$$\text{a. Ta có : } a = \frac{2S}{3}, \quad b = \frac{2S}{4} = \frac{S}{2}, \quad c = \frac{2S}{5}$$

$$\text{Ta thấy : } \left(\frac{S}{2}\right)^2 + \left(\frac{2S}{5}\right)^2 = S^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{25}\right) = S^2 \cdot \frac{41}{100} \neq S^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Vậy $\triangle ABC$ không là tam giác vuông.

$$\text{b. } a = \frac{2S}{12} = \frac{S}{6}, \quad b = \frac{2S}{15}, \quad c = \frac{2S}{20} = \frac{S}{10}$$

$$\text{Ta thấy } \left(\frac{2S}{15}\right)^2 + \left(\frac{S}{10}\right)^2 = \frac{4S^2}{225} + \frac{S^2}{100} = \frac{S^2}{25} \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{4}\right) = \frac{S^2}{25} \cdot \frac{25}{36} = \left(\frac{S}{6}\right)^2$$

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác vuông.

§2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Định nghĩa (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

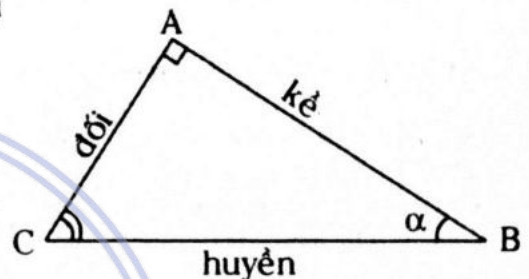
$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} \left(\frac{\text{đối}}{\text{huyền}} \right) ; \quad \cos \alpha = \frac{AB}{BC} \left(\frac{\text{kề}}{\text{huyền}} \right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{AB} \left(\frac{\text{đối}}{\text{kề}} \right) ; \quad \cot \alpha = \frac{AB}{AC} \left(\frac{\text{kề}}{\text{đối}} \right)$$

Định lý (tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau). Với $\alpha + \beta = 90^\circ$:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \cot \beta, \quad \cot \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$



B. 3ÀI TẬP

Bài 268 Cho tam giác ABC vuông ở A, kẻ đường cao AH. Cho BC = 36 cm, BH = 4 cm. Chứng minh $\operatorname{tg} B = 8 \operatorname{tg} C$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

ta có :

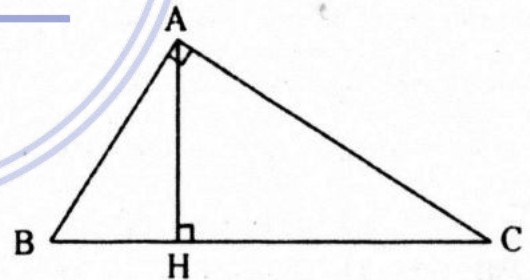
$$\Delta ABH \text{ vuông tại H nên } \operatorname{tg} B = \frac{AH}{BH} = \frac{AH}{4} \quad (1)$$

$$\Delta ACH \text{ vuông tại H nên } \operatorname{tg} C = \frac{AH}{HC} = \frac{AH}{32} \quad (2)$$

ừ (1) và (2) ta suy ra :

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{AH}{4} \cdot \frac{AH}{32} = \frac{AH}{4} \cdot \frac{32}{AH} = 8$$

Vậy $\operatorname{tg} B = 8 \operatorname{tg} C$ (đpcm)



Bài 269 Cho tam giác ABC vuông ở A. Biết $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$ và AB = 4dm. Tính các cạnh AC và BC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có : $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$

Nên $AC = AB \cdot \operatorname{tg} B = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 \text{ (dm)}$

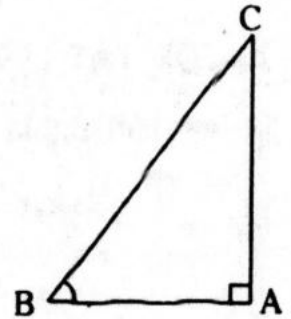
Ta có : $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$ hay $\frac{AC}{3} = \frac{AB}{4}$

Suy ra $\frac{AC^2}{9} = \frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2 + AB^2}{9 + 16} = \frac{BC^2}{25}$

(do theo định lí Pitago : $AC^2 + AB^2 = BC^2$)

Hay $\frac{AC}{3} = \frac{AB}{4} = \frac{BC}{5}$

Vậy $BC = 5 \text{ (dm)}$.



Bài 270 Hãy đổi các tỉ số lượng giác sau đây thành tỉ số lượng giác của góc nhỏ hơn 45° : $\sin 60^\circ$; $\cos 75^\circ$; $\cos 80^\circ$; $\sin 52^\circ 30'$; $\operatorname{tg} 57^\circ 30'$; $\cotg 90^\circ$; $\cotg 76^\circ$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia và tang góc này bằng cotg góc kia. Áp dụng điều này, ta được :

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ &= \cos 30^\circ && (\text{vì } 60^\circ, 30^\circ \text{ phụ nhau}) \\ \cos 75^\circ &= \sin 15^\circ && (\text{vì } 75^\circ, 15^\circ \text{ phụ nhau}) \\ \cos 80^\circ &= \sin 10^\circ && (80^\circ, 10^\circ \text{ phụ nhau}) \\ \sin 52^\circ 30' &= \cos 37^\circ 30' && (52^\circ 30' + 37^\circ 30' = 90^\circ) \\ \operatorname{tg} 57^\circ 30' &= \cotg 32^\circ 30' && (57^\circ 30' + 32^\circ 30' = 90^\circ) \\ \cotg 90^\circ &= \operatorname{tg} 0^\circ && (90^\circ + 0^\circ = 90^\circ) \\ \cotg 76^\circ &= \operatorname{tg} 14^\circ && (76^\circ + 14^\circ = 90^\circ) \end{aligned}$$

Bài 271 Tính góc nhọn α , biết :

a. $\sin \alpha = \cos \alpha$

;

b. $\operatorname{tg} \alpha = \cotg \alpha$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có :

$$\begin{aligned} \sin \alpha = \cos \alpha &\Leftrightarrow \sin \alpha = \sin (90^\circ - \alpha) && \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \\ &\Leftrightarrow 2\alpha = 90^\circ && \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ \end{aligned}$$

Vậy $\alpha = 45^\circ$.

b. Ta có : $\operatorname{tg} \alpha = \cotg \alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha$
 $\Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$

Vậy $\alpha = 45^\circ$.

Bài 272 Cho ΔABC có ba góc nhọn, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ $AH \perp BC$. Đặt $AH = h$. Ta có :

$$\sin B = \frac{AH}{AB}$$

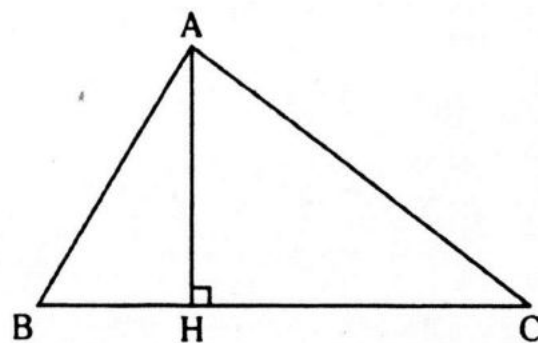
$$\sin C = \frac{AH}{AC}$$

Do đó : $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AH}{AB} \cdot \frac{AC}{AH} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

Suy ra $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Tương tự $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$

Vậy $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$



Bài 273 Chứng minh rằng diện tích của một tam giác bằng nửa tích độ dài hai cạnh với sin của góc nhọn tạo bởi hai cạnh ấy.

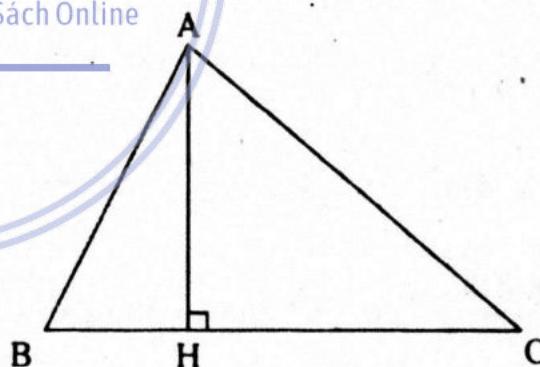
HƯỚNG DẪN GIẢI

Giả sử ΔABC có đường cao AH

$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AH \cdot BC \\ AH &= AB \cdot \sin B \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin B$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự : } S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin C \end{aligned}$$



Bài 274 Tam giác ABC có $AB = 3$ cm; $AC = 6$ cm; $\hat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài phân giác AD .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ$ (1)

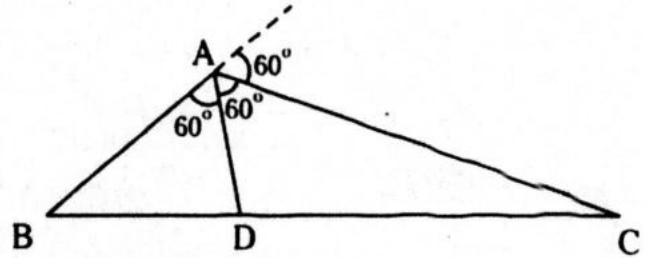
$$\begin{aligned} \text{Mặt khác : } S_{ADB} + S_{ADC} &= \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} AD (AB + AC) \cdot \sin 60^\circ \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$AB \cdot AC = AD (AB + AC)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ (cm)}$$

Vậy $AD = 2 \text{ cm}$.



Bài 275 Chứng minh rằng trong tam giác vuông có góc nhọn α thì ta có :

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$3. \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$4. 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Giả sử $\triangle ABC$ vuông tại A.

Đặt $AB = c, AC = b, BC = a, \hat{B} = \alpha$.

$$1. \text{ Ta có : } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

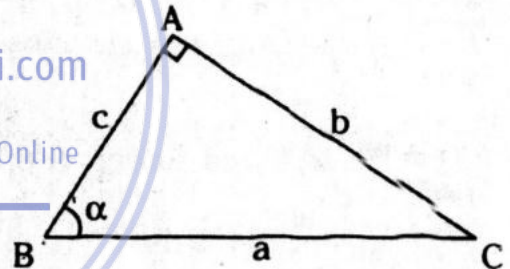
$$\text{mà } a^2 = b^2 + c^2 \text{ (định lí Pitago)} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$2. \text{ Ta có : } \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{Tương tự : } \operatorname{cotg} \alpha = \frac{c}{b} = \frac{c}{a} : \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$3. \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$4. \operatorname{cotg}^2 \alpha + 1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$



Bài 276 Cho tam giác vuông ở A. Biết $\sin B = \frac{3}{5}$. Tính $\cos B, \operatorname{tg} B, \operatorname{cotg} B$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{Vì } \sin B = \frac{3}{5}, \text{ ta có : } \sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

$$\text{nên } \cos^2 B = 1 - \sin^2 B = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\text{Vậy } \cos B = \frac{4}{5} \text{ (vì } \cos B > 0 \text{)}.$$

$$\text{Suy ra } \operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{cotg} B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

§3. HỆ THỨC GIỮA CÁC CẠNH VÀ CÁC GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC VUÔNG

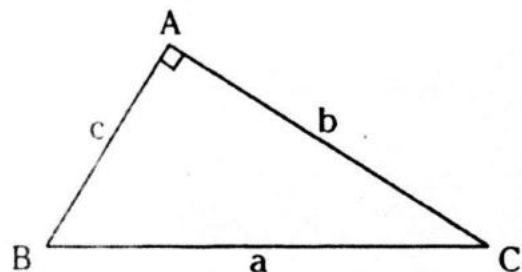
A. TÌM TẮT LÝ THUYẾT

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$$

$$b = c \cdot \operatorname{tg} B = c \cdot \operatorname{cotg} C$$

$$c = b \cdot \operatorname{tg} C = b \cdot \operatorname{cotg} B$$



Áp dụng giải tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và góc còn lại của nó. Bài toán đặt ra như trên gọi là bài toán "Giải tam giác vuông".

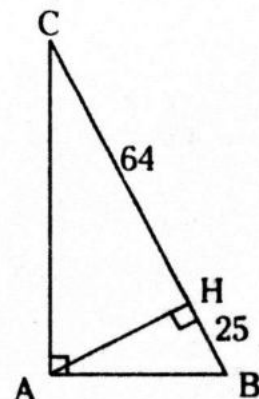
B. BÀI TẬP

Bài 27 Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết HB = 25 cm, HC = 64 cm. Tính B, C.

HƯỚNG DẪN GIẢI | Đọc Sách Online

$$AH = \sqrt{HB \cdot HC} = 40 \text{ cm}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{AH}{BH} = 1,6$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 57^\circ 59', \hat{C} = 90^\circ - \hat{B} \Leftrightarrow \hat{C} = 32^\circ 1'.$$



Bài 28 Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 70^\circ$; AB = 3,2 cm; BC = 6,2 cm. Dùng bảng lượng giác tính cạnh AC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ đường cao AH. Ta có :

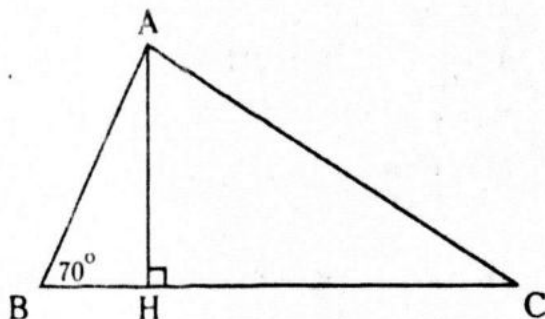
$$AH = AB \sin 70^\circ = 3,2 \cdot 0,9397 \approx 3,0 \text{ (cm)}$$

$$BH = AB \cos 70^\circ = 3,2 \cdot 0,342 \approx 1,1 \text{ (cm)}$$

$$HC = BC - BH = 6,2 - 1,1 = 5,1 \text{ (cm)}$$

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 3^2 + 5,1^2 = 35,01$$

$$\Rightarrow AC \approx 5,9 \text{ cm}$$



Bài 279 Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$. Đường cao AH = 2,5 cm. Dùng bảng lượng giác tính các cạnh của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có : $AH = AB \cdot \sin 60^\circ$

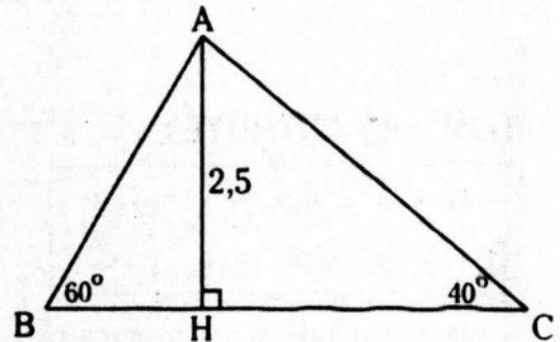
$$\Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin 60^\circ} \Leftrightarrow \frac{2,5}{0,866}$$

$$AB \approx 2,9 \text{ (cm)}$$

$$\text{Tương tự } AC = \frac{AH}{\sin 40^\circ} \approx \frac{2,5}{0,6428}$$

$$AC \approx 3,9 \text{ (cm)}$$

$$\begin{aligned} BC &= BH + HC = AH (\cotg 60^\circ + \cotg 40^\circ) \\ &= 2,5 (0,5774 + 1,1918) \approx 4,4 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$



Bài 280 Cho tam giác ABC, có $\hat{B} = 50^\circ$, $\hat{C} = 70^\circ$. Kẻ trung tuyến AM, đường cao AH. Tính góc MAH.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có : $BH = AH \cotg B$

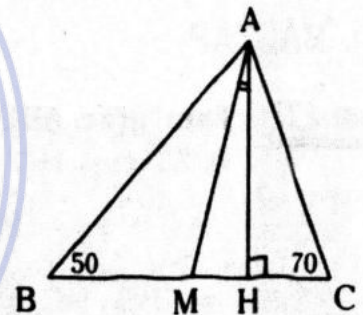
$$CH = AH \cotg C$$

$$MH = AH \tg \widehat{MAH}$$

Mà $BH - CH = 2MH$

Nên $AH (\cotg B - \cotg C) = 2AH \tg \widehat{MAH}$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \tg \widehat{MAH} &= \frac{\cotg B - \cotg C}{2} \\ &= \frac{\cotg 50^\circ - \cotg 70^\circ}{2} = \frac{0,8391 - 0,3640}{2} = 0,2375 \approx 22^\circ 46' \end{aligned}$$



Bài 281 Tam giác có $\hat{B} > \hat{C}$, đường cao AH, trung tuyến AM. Đặt $\widehat{MAH} = \alpha$. Tìm hệ thức giữa $\tg \alpha$ với $\cotg B$ và $\cotg C$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đặt $AH = h$

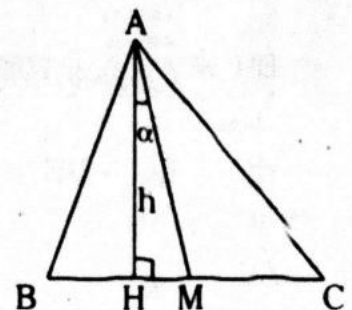
Ta có : $HC = h \cotg C$, $BH = h \cotg B$

Suy ra $HC - HB = h (\cotg C - \cotg B)$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác : } HC - HB &= (HM + MC) - (BM - HM) \\ &= 2HM = 2h \tg \alpha \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $2 \tg \alpha = \cotg C - \cotg B$

$$\text{Vậy } \tg \alpha = \frac{\cotg C - \cotg B}{2}$$



Bài 82 Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đặt $BC = a$.

a. Chứng minh rằng $AH = a \sin B \cos B$, $BH = a \cos^2 B$, $CH = a \sin^2 B$.

b. Dùng các kết quả trên, khẳng định các hệ thức:

$$AB^2 = BC \cdot BH, AH^2 = BH \cdot HC, AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Trong tam giác ABC vuông tại A.

Ta có $AC = BC \cdot \sin B = a \cdot \sin B$;

$$AB = a \cdot \cos B$$

Trong tam giác AHC vuông tại H, $\widehat{HAC} = \widehat{B}$

$$AH = AC \cdot \cos B = a \sin B \cdot \cos B$$

Trong tam giác AHB vuông tại H, ta có

$$BH = AB \cdot \cos B = a \cos B \cdot \cos B = a \cdot \cos^2 B$$

Trong tam giác vuông AHC cũng có

$$HC = AC \cdot \sin B = a \cdot \sin^2 B$$

b. Ta thấy

$$AB^2 = a^2 \cdot \cos^2 B$$

$$BC \cdot BH = a \cdot a \cos^2 B = a^2 \cdot \cos^2 B$$

$$\Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH$$

$$AH^2 = a^2 \cdot \sin^2 B \cdot \cos^2 B$$

$$BH \cdot HC = a \cos^2 B \cdot a \sin^2 B$$

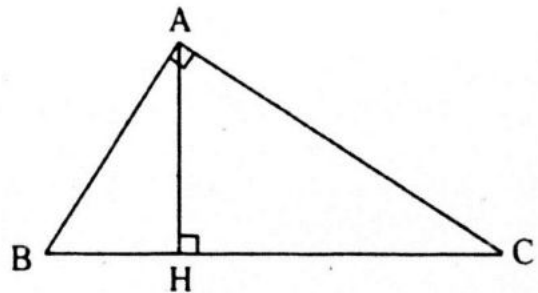
$$\Rightarrow AH^2 = BH \cdot HC$$

$$AB^2 = a^2 \cos^2 B$$

$$AC^2 = a^2 \sin^2 B$$

$$AB^2 + AC^2 = a^2 (\cos^2 B + \sin^2 B) = a^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$



Bài 83 Tính diện tích tam giác ABC biết $BC = a$, $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

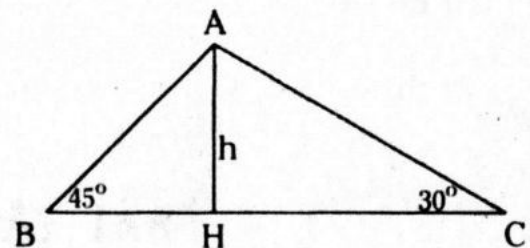
Vì $AH \perp BC$. Đặt $AH = h$. Ta có:

$$BH = AH = h; HC = AH \cotg 30^\circ = \frac{h\sqrt{3}}{2}$$

$$a = BH + HC = h \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = h \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2};$$

$$h = \frac{2a}{2 + \sqrt{3}} = 2a(2 - \sqrt{3})$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{a}{2} \cdot 2a(2 - \sqrt{3}) = a^2(2 - \sqrt{3}).$$



Bài 84 Tính diện tích hình thang ABCD biết $AB \parallel CD$, $\widehat{C} = 30^\circ$, $\widehat{D} = 60^\circ$,

$$AB = 1 \text{ cm}, CD = 5 \text{ cm}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi O là giao điểm của AD và BC, ta có $OC \perp OD$.

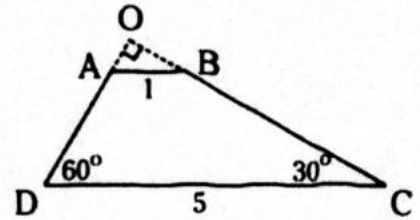
Ta có : $OD = \frac{CD}{2},$

$$OC = CD \sin 60^\circ = CD \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{OCD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD = \frac{CD^2 \cdot \sqrt{3}}{8} = \frac{25\sqrt{3}}{8}$$

Tương tự $S_{OAB} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$

Suy ra : $S_{ABCD} = S_{OCD} - S_{OAB} = \frac{24\sqrt{3}}{8} = 3\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$



Bài 285 Cho hình thang cân ABCD có đáy lớn AD. Cho $\widehat{ACD} = \alpha$, $\widehat{ADC} = \beta$ và $AB = a$. Tính diện tích của hình thang theo α , β và a .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ $AA' \perp DC$; $BB' \perp DC$

Đặt $h = AA'$ ta có :

$$A'D = B'C = h \cot \beta$$

$$A'C = h \cot \alpha$$

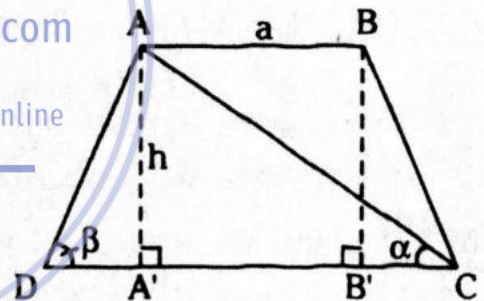
$$AB = A'B' = A'C - B'C$$

suy ra $a = h (\cot \alpha - \cot \beta)$

hay $h = \frac{a}{\cot \alpha - \cot \beta}$

Từ đó $CD = A'D + A'C = h (\cot \alpha + \cot \beta)$

Do đó : $S = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot h = \frac{a^2 \cot \alpha (\cot \alpha + \cot \beta)}{(\cot \alpha - \cot \beta)^2}$

**BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I**

Bài 286 Cho tam giác ABC, trực tâm H.

Chứng minh hệ thức: $AB^2 + HC^2 = BC^2 + HA^2 + CA^2 + HB^2.$

Bài 287 Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A. Kẻ các đường cao AH, BK, CI.

a. Chứng minh hệ thức: $3BK^2 + 2AK^2 + CK^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2.$ Xét hệ thức này trong trường hợp tam giác ABC là tam giác đều, suy ra công thức tính chiều cao một tam giác đều theo cạnh của nó.

Bài 296 Cho tam giác nhọn ABC và một điểm P thuộc miền trong của tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của P trên các cạnh BC, CA, AB.

a. Chứng minh đẳng thức: $BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$.

b. $BD^2 + DC^2 \geq \frac{BC^2}{2}$.

c. Xác định vị trí điểm P trong tam giác ABC để tổng $DC^2 + EA^2 + FB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 297 Đơn giản biểu thức: $A = \frac{a \tan 15^\circ - 2b \cos 60^\circ - 2a \cot 30^\circ + 2a \tan 60^\circ}{\sqrt{3}a^2 \tan 30^\circ - \sqrt{2}b^2 \sin 45^\circ}$.

Bài 298 Chứng minh hệ thức tam giác sau không phụ thuộc vào α

$$A = 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha)$$

$$B = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Bài 299 Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ đường cao AA' và gọi H là trực tâm của tam giác. Chứng minh hệ thức: $\tan B \cdot \tan C = \frac{AA'}{HA'}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

downloaadsachmienphi.com

Bài 296

Ta có:

$$AB^2 = BE^2 + AE^2$$

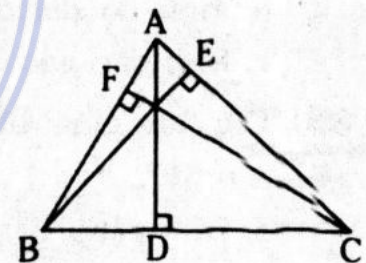
$$BC^2 = BE^2 + CE^2$$

$$\Rightarrow AB^2 - BC^2 = AE^2 - CE^2$$

$$\text{Lại có } HA^2 - HC^2 = AE^2 - CE^2$$

$$\text{Suy ra: } AB^2 + HC^2 = BC^2 + HA^2.$$

Chứng minh tương tự phần còn lại.



Bài 297

a. $AB^2 = BK^2 + AK^2, \quad AC^2 = CI^2 + AI^2$

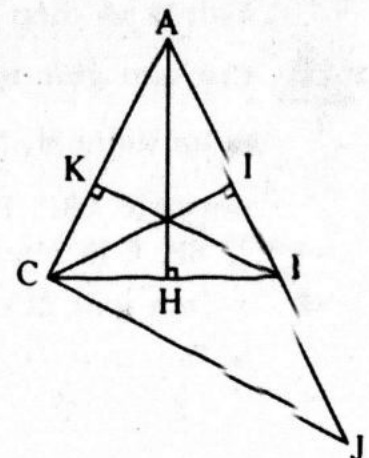
$$BC^2 = BK^2 + CK^2, \quad CI = BK, \quad AI = AK$$

$$\text{Nên } AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3BK^2 + 2AK^2 + CK^2$$

$$\text{Khi } \Delta ABC \text{ đều: } AK = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC$$

$$CK = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC. \text{ Ta được:}$$

$$3BC^2 = 3BK^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$



Suy ra: $BK = \frac{BC\sqrt{2}}{2}$.

b. $CJ \parallel BK \Rightarrow CJ \perp AC \Rightarrow \triangle ACJ$ vuông góc tại C, CI là đường cao của tam giác này cho ta $AC^2 = AI \cdot AJ$.

Vì $AC = AB$ nên ta có $AB^2 = AI \cdot AJ$.

Bài 28

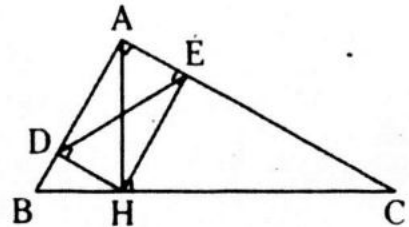
a. Trong tam giác vuông ABC:

$$AH^2 = HB \cdot HC \Rightarrow AH^4 = HB^2 \cdot HC^2$$

Hay $AH^4 = (BD \cdot AB)(CE \cdot AC)$

nhưng $AB \cdot BC = AH \cdot BC \Rightarrow AH^3 = BD \cdot CE \cdot BC$

Mà $DE = AH \Rightarrow DE^3 = BD \cdot CE \cdot BC$



b. Đẳng thức cần chứng minh viết lại:

$$^3\sqrt{\frac{BD^2}{BC^2}} + ^3\sqrt{\frac{CE^2}{BC^2}} = 1$$

Trong $\triangle ABH$: $BH^2 = BD \cdot BA \Rightarrow \frac{BD^2}{BA^2} = \frac{BH^4}{BA^2} = \frac{BH^4}{(BH \cdot BC)^2} = \frac{BH^3}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{BD^2}{BC^2} = \frac{BH^3}{BC^3} \Rightarrow ^3\sqrt{\frac{BD^2}{BC^2}} = \frac{BH}{BC} \quad (1)$$

Tương tự: $^3\sqrt{\frac{CE^2}{BC^2}} = \frac{CH}{BC} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 29

a. Ta có: $AB^2 = a^2$; $BC^2 = 3a^2$; $AC^2 = 2a^2$.

Suy ra: $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A.

b. $\sin B = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,8164 \Rightarrow \hat{B} \approx 54^\circ 45'$

$$\cos^2 B = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} \Rightarrow \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5774$$

$$\lg B = \sqrt{2} \approx 1,4142; \cotg B = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071.$$

c. $\cos C \approx 0,8164$; $\sin C \approx 0,5774$; $\lg C \approx 0,7072$; $\cotg C \approx 1,4142$.

Bài 29

a. $1 + \lg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 75^\circ} = 1 + (2 + \sqrt{3})^2 = 4(2 + \sqrt{3})$

$$\Rightarrow \cos^2 75^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 75^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

$$\sin^2 75^\circ = 1 - \cos^2 75^\circ \Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\cotg 75^\circ = \frac{1}{\tg 75^\circ} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\text{b. } \sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\tg 15^\circ = 2 - \sqrt{3} ; \cotg 15^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

Bài 281

a. Xuất phát từ vế trái và thay $\cotg \alpha = \frac{1}{\tg \alpha}$ ta có:

$$\frac{1 + \frac{1}{\tg \alpha}}{1 - \frac{1}{\tg \alpha}} = \frac{\frac{\tg \alpha + 1}{\tg \alpha}}{\frac{\tg \alpha - 1}{\tg \alpha}} = \frac{\tg \alpha + 1}{\tg \alpha - 1}$$

b. Biến đổi vế trái, ta có:

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tg^4 \alpha$$

c. Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1$
 $\Leftrightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$

Bài 282

a. Ta có: $a^2 = 50 ; b^2 = 32 ; c^2 = 18$
 $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông, đỉnh A.}$

b. Ta có: $b^2 = b' \cdot a \Rightarrow b' = CH = \frac{b^2}{a} = \frac{32}{5\sqrt{2}} = \frac{16}{5}\sqrt{2}$

$c^2 = c' \cdot a \Rightarrow c' = BH = \frac{c^2}{a} = \frac{18}{5\sqrt{2}} = \frac{9}{5}\sqrt{2}$

$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH^2 = \frac{16}{5}\sqrt{2} \cdot \frac{9}{5}\sqrt{2}$

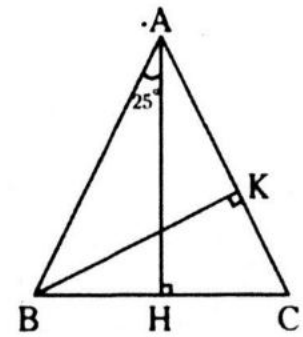
$\Rightarrow AH = \frac{12\sqrt{2}}{5}.$

c. $\sin B = \frac{b}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5} = 0,8 \Rightarrow \hat{B} \approx 53^\circ 13'$

$\Rightarrow \hat{C} \approx 36^\circ 47'$

Bài 23

- a. $BH \approx 5,9\text{cm}$, $BC \approx 12\text{cm}$
 $AH \approx 12,7\text{cm}$, $BK \approx 10,72\text{cm}$
 b. $AK = 9\text{cm}$, $CK = 5\text{cm}$
 c. $BC.AH = AC.BK$
 $BH = AB.\sin 25^\circ$ mà $BC = 2BH$
 $\Rightarrow BC = 2AB\sin 25^\circ$
 Do $AH = AB\cos 25^\circ$
 $\Rightarrow 2AB\sin 25^\circ . AB\sin 25^\circ = AC.AB\sin 50^\circ$
 Vì $AC = AB$ nên $\sin 50^\circ = 2\sin 25^\circ \cos 25^\circ$.
 Tổng quát, ta có công thức: $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$.

**Bài 24**

Ta có: $S_{HIK} = S_{ABC} - S_{AKI} - S_{BKH} - S_{CHI}$ (*)

Ta lại có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$

$$S_{AKI} = \frac{1}{2}AK.AI.\sin A$$

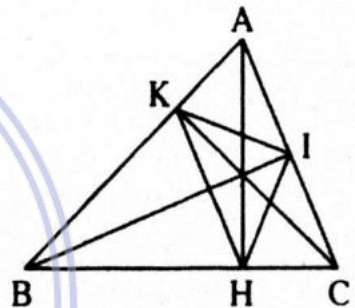
mà $AI = AB.\cos A$, $AK = AC.\cos A$

$$\Rightarrow \frac{S_{AKI}}{S_{ABC}} = \frac{AK.AI}{AB.AC} = \cos^2 A \Rightarrow S_{AKI} = S_{ABC}.\cos^2 A$$

Tương tự, ta có: $S_{BKH} = S_{ABC}.\cos^2 B$; $S_{CHI} = S_{ABC}.\cos^2 C$.

Đem thế vào (*) ta được: $S_{HIK} = S_{ABC}(1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)$

$$\Rightarrow \frac{S_{HIK}}{S_{ABC}} = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C).$$

**Bài 25**

a. Ta có: $AM = \frac{1}{4}AB$; $AP = \frac{3}{4}AC$

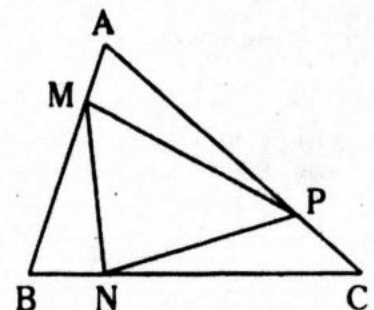
$$\Rightarrow S_{AMP} = \frac{1}{2}AM . AP . \sin A = \frac{3}{16} S.$$

Tương tự: $S_{CPN} = S_{BNM} = \frac{3}{16}S$.

$$\Rightarrow S_{MNP} = \frac{7}{16}S.$$

b. $S_{DEF} = S_{ABC} - (S_{ADC} + S_{AEB} + S_{BPC})$

$$S_{MAC} = S_{NBA} = S_{PBC} = \frac{1}{4}S$$



Tính S_{ADC} : Từ M kẻ $MQ \parallel AN$.

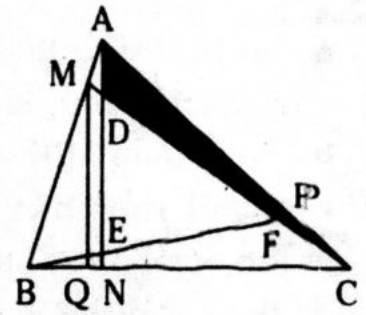
$$\frac{QN}{BN} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{4} \Rightarrow QN = \frac{1}{16}BC$$

$$\frac{CD}{DM} = \frac{CN}{QN} \Rightarrow \frac{CD}{CM} = \frac{12}{13}$$

Nên $\frac{S_{ADC}}{S_{AMC}} = \frac{12}{13}$ mà $S_{AMC} = \frac{1}{4}S$

Nên $S_{ADC} = \frac{3}{13}S$. Tương tự: $S_{AEB} = \frac{3}{13}S$, $S_{BFC} = \frac{3}{13}S$

Vậy $S_{DEF} = \frac{4}{13}S$.



Bài 296

a. $BD^2 + CE^2 + AF^2 = (PB^2 - PF^2) + (PC^2 - PD^2) + (PA^2 - PE^2)$

$$\Rightarrow BD^2 + CE^2 + AF^2 = FB^2 + DC^2 + EA^2.$$

b. Giả sử $BD > DC \Rightarrow BD - DC \geq 0 \Rightarrow (BD - DC)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow BD^2 + DC^2 \geq 2BD \cdot DC$$

$$\Rightarrow 2(BD^2 + DC^2) \geq BD^2 + 2BD \cdot DC + DC^2$$

$$\Rightarrow 2(BD^2 + DC^2) \geq BC^2 \Rightarrow BD^2 + DC^2 \geq \frac{BC^2}{2}$$

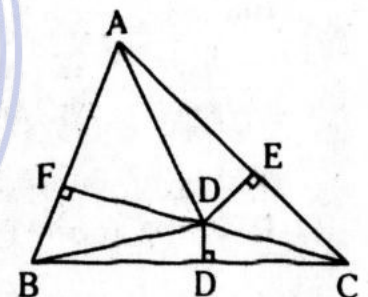
c. Ta có: $BD^2 + DC^2 \geq \frac{BC^2}{2}$

$$CE^2 + AE^2 \geq \frac{AC^2}{2}; BF^2 + AF^2 \geq \frac{AB^2}{2}$$

Từ đó suy ra $DC^2 + EA^2 + FB^2 \geq \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

$$BD^2 + DC^2 \geq \frac{BC^2}{2} \text{ đạt dấu "=" khi D là trung điểm BC.}$$

Nên tổng $DC^2 + EA^2 + FB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Nghĩa là P là giao điểm của các đường trung trực của các cạnh BC, CA, AB.



Bài 297

$$\text{Ta có } A = \frac{a \cdot 1 - 2b \cdot \frac{1}{2} - 2a \cdot \sqrt{3} + 2a \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}.$$

Bài 28

Đặt $\sin^2 \alpha = a$; $\cos^2 \alpha = b$

Áp dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ, ta tính ra $A = 1$; $B = 1$. Không phụ thuộc α .

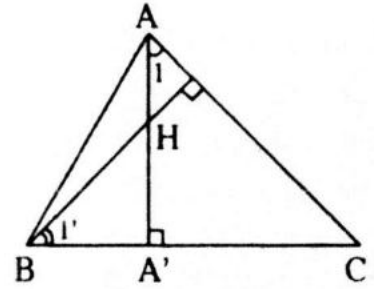
Bài 29

Ta có: $\operatorname{tg} B = \frac{AA'}{BA'}$; $\operatorname{tg} C = \frac{AA'}{CA'}$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \frac{AA'^2}{BA' \cdot CA'} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Do } \hat{B}_1 &= \hat{A}_1 &\Rightarrow \Delta A'BH &\sim \Delta A'AC \\ & &\Rightarrow \frac{BA'}{AA'} &= \frac{A'H}{CA'} \\ & &\Rightarrow BA' \cdot CA' &= A'H \cdot AA' \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.



downloadsachmienphi.com

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Chương II

ĐƯỜNG TRÒN

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nhắc lại về đường tròn

- Đường tròn tâm O có bán kính R là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng R trong đó $R > 0$.
- Bảng tóm tắt ba vị trí tương đối của điểm M và đường tròn $(O; R)$

Vị trí tương đối	Hệ thức
Điểm M nằm trên đường tròn (O)	$OM = R$
Điểm M nằm bên trong đường tròn (O)	$OM < R$
Điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O)	$OM > R$

2. Cách xác định đường tròn

Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

Chú ý: Không vẽ được đường tròn nào đi qua ba điểm thẳng hàng.

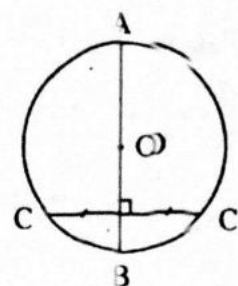
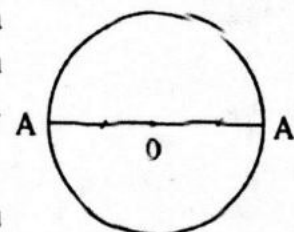
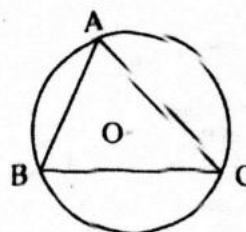
Ở lớp 7, ta đã biết: Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (hình bên). Khi đó tam giác ABC gọi là tam giác nội tiếp đường tròn.

3. Tâm đối xứng

Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

4. Trục đối xứng

Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.



B. BÀI TẬP

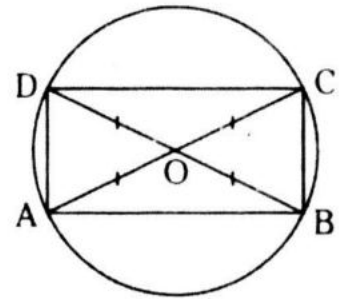
Bài 300 Cho hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn biết $AD = 24$ cm, $CD = 32$ cm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường (tính chất).

Do đó, ta có : $OA = OB = OC = OD$

Bốn điểm A, B, C, D cách đều điểm O nên cùng nằm trên một đường tròn tâm O, bán kính OA (hoặc OB, OC, OD)



$$\begin{aligned} \text{Ta có } AC^2 &= AD^2 + DC^2 = 24^2 + 32^2 \\ &= 576 + 1024 = 1600 = 40^2 \\ AC &= 40 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Vậy bán kính của đường tròn bằng 20 cm.

Bài 31 Cho đường tròn tâm O, bán kính bằng 3 có tâm ở gốc tọa độ. Hãy xác định vị trí của mỗi điểm A, B, C đối với đường tròn (O), biết tọa độ của các điểm : $A(2; 2)$, $B(-\sqrt{3}; \sqrt{6})$ và $C(3; -\sqrt{6})$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Giả R là bán kính của đường tròn.

$$OA^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{8} < 3 = R$$

$\Rightarrow A$ nằm trong (O).

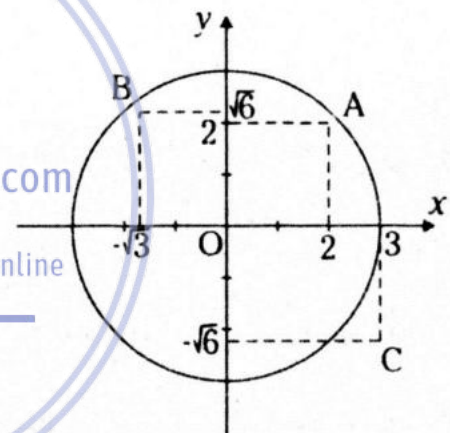
$$OB^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 = 9$$

$$\Rightarrow OB = 3 = R \Rightarrow B \text{ nằm trên (O).}$$

$$OC^2 = 3^2 + (\sqrt{6})^2 = 15$$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{15} > 3 = R$$

$\Rightarrow C$ nằm ngoài (O).



Bài 32 Cho tam giác ABC cân tại A, các đường cao AI, BK, CL cắt nhau tại H. Chứng minh rằng bốn điểm B, L, K, C nằm trên một đường tròn.

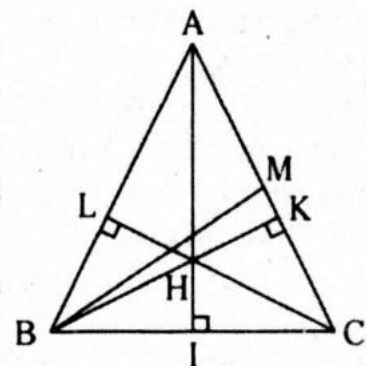
HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có $\triangle ABC$ cân nên đường cao AI cũng là trung tuyến, do đó I là trung điểm của BC.

$\triangle HLC$ và $\triangle HKB$ là tam giác vuông nên :

$IL = IK = IB = IC$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông).

Vì bốn điểm B, L, K, C cách đều I nên chúng nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $\frac{BC}{2}$.



Bài 303 Từ điểm A bất kỳ trên đường tròn (O), ta dựng hai dây AB, AC vuông góc nhau. Chứng minh rằng BC là một đường kính của đường tròn (O).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Để chứng minh BC là đường kính của đường tròn (O), tâm O, ta chỉ cần chứng minh ba điểm B, O, C thẳng hàng.

Nối O với ba điểm A, B, C. Các tam giác OAB, OAC cân ở đỉnh O. Do đó ta có :

$$\widehat{BOA} = 2v - 2\hat{A}_1$$

$$\widehat{AOC} = 2v - 2\hat{A}_2$$

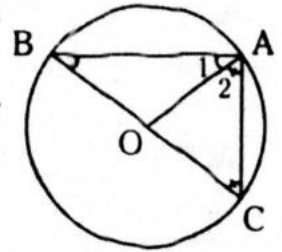
(góc ngoài bằng tổng hai góc trong không kề)

$$\text{Suy ra } \widehat{BOA} + \widehat{AOC} = 4v - 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2).$$

Theo giả thiết, ta có :

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 1v \Rightarrow \widehat{BOA} + \widehat{AOC} = 2v$$

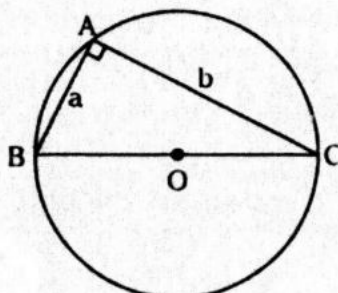
Điều này chứng tỏ ba điểm B, O, C thẳng hàng, vậy BC là một đường kính của (O).



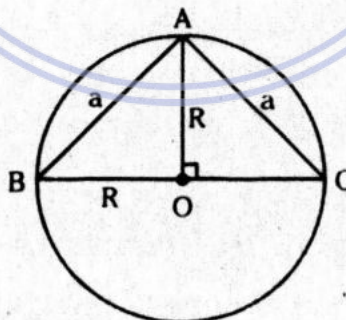
Bài 304 Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC , biết rằng :

- Tam giác ABC vuông có các cạnh góc vuông bằng a; b.
- Tam giác ABC vuông cân có cạnh góc vuông bằng a.
- Tam giác ABC đều có cạnh bằng a.

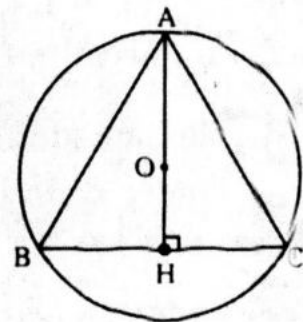
HƯỚNG DẪN GIẢI



Hình a



Hình b



Hình c

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC ; O là tâm đường tròn (ABC).

a. Hình a.

$$\text{Ta có : } R = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

b. Hình b ΔAOB có $OA = OB = R$, $\hat{B} = 45^\circ$.

$$\text{Suy ra : } \Delta AOB \text{ vuông cân, nên : } R^2 + R^2 = a^2 \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

c. Hình c.

Tong tam giác đều, đường cao đồng thời là đường trung trực, trung tuyến, do đó tâm O cũng là trọng tâm của $\triangle ABC$.

$$\text{Suy ra : } R = OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 35 Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và một dây AC bằng bán kính đường tròn. Tính các góc của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tam giác OAC có ba cạnh bằng nhau ($AC = OA = OC$) nên là một tam giác đều.

$$\text{Suy ra : } \hat{A} = \hat{C}_1 = \hat{O}_1 = 60^\circ$$

$$\triangle OBC \text{ có } OB = OC \text{ nên cân tại O} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}_2.$$

$\hat{C}_1$ là góc ngoài của $\triangle OBC$

$$= \hat{O}_1 = \hat{B} + \hat{C}_2 = 2\hat{B} = 2\hat{C}_2.$$

$$\text{Do đó } \hat{B} = \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{O}_1 = 30^\circ$$

$$= \hat{ACB} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ$$

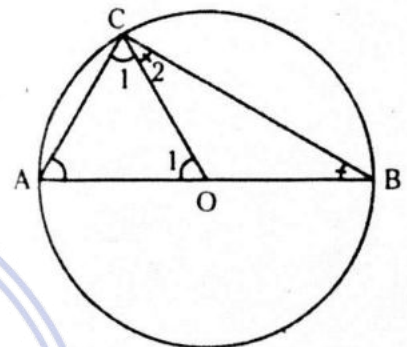
$$\text{Vậy } \hat{A} = 60^\circ; \hat{B} = 30^\circ; \hat{C} = 90^\circ$$

Có thể lý giải như sau : $\triangle CAB$ có trung tuyến CO bằng nửa cạnh đối ứng AB nên vuông tại C :

$$\hat{ACB} = 90^\circ$$

$$\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

$$\text{Vậy } \triangle ABC \text{ có : } \hat{C} = 90^\circ; \hat{A} = 60^\circ; \hat{B} = 30^\circ.$$



Bài 36 Cho tam giác ABC và M là trung điểm của BC. Vẽ $MD \perp AB$ và $ME \perp AC$. Trên các tia BD và CE lần lượt lấy các điểm I, K sao cho D là trung điểm của BI, E là trung điểm của CK. Chứng minh rằng bốn điểm B, I, K, C cùng nằm trên một đường tròn.

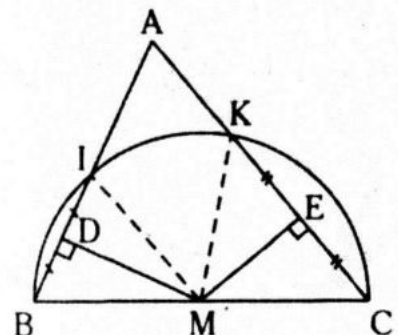
HƯỚNG DẪN GIẢI

MD là đường trung trực của BI nên $MB = MI$ (1)

Cứng minh tương tự, ta được $MK = MC$ (2)

Ti có $MB = MC$ (gt) nên từ (1) và (2), suy ra $MI = MB = MC = MK$.

Vậy bốn điểm B, I, K, C cùng nằm trên đường tròn tâm M, bán kính $\frac{1}{2}BC$.



§2. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Định lý 1: Đường kính là dây lớn nhất của đường tròn.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

Định lý 2: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

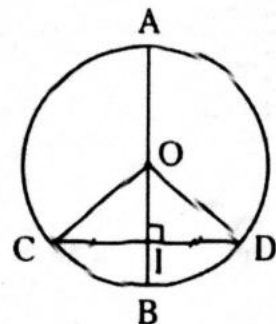
AB là đường kính của (O) , AB cắt CD tại I .

Nếu $AB \perp CD$ thì $IC = ID$.

Định lý 3: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

AB là đường kính của (O) , AB cắt CD tại I .

Nếu $IC = ID$ thì $AB \perp CD$.



B. BÀI TẬP

Bài 307 Cho hai tam giác vuông ABC và ABD chung cạnh huyền AB (C và D thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB).

a. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là O).

b. Chứng minh: $CD < AB$.

c. Giả sử hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M . Chứng minh rằng $MO = \frac{MA + MB}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Gọi O là trung điểm của AB thì $OC = OD = OA = OB$ (tính chất trung tuyến thuộc cạnh huyền) suy ra $A, B, C, D \in (O)$.

b. $CD < AB$ (vì dây cung nhỏ hơn đường kính).

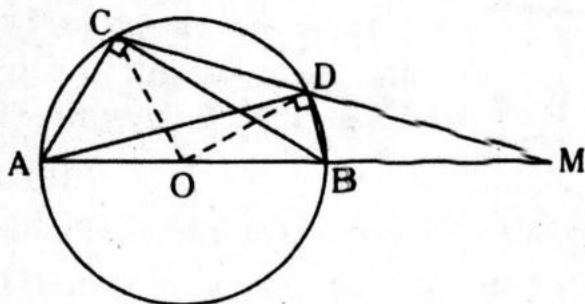
c. Điểm O nằm giữa A và M nên

$$OM = MA - OA \quad (1)$$

Điểm B nằm giữa O và M nên $OM = MB + OB \quad (2)$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên và chú ý rằng $OA = OB$ ta được $2MO = MA + MB$; suy ra:

$$MO = \frac{MA + MB}{2}$$



Bài 28 Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên AB lấy hai điểm C và D sao cho $OC = OD$. Từ C và D kẻ hai tia song song cắt nửa đường tròn (O) tại E và F. Chứng minh dây EF vuông góc với CE và DF.

HƯỚNG DẪN GIẢI

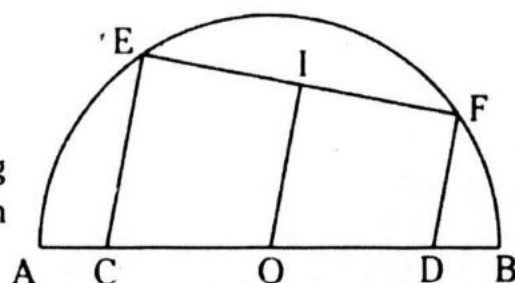
OI là trung điểm EF, theo định lý 2

Ta có $OI \perp EF$ (1)

Mà $CE \parallel DF$ (gt)

$\Rightarrow$ CEFD là hình thang; mặt khác IO là đường trung bình hình thang CEFD (I, O là trung điểm EF và CD) $\Rightarrow OI \parallel CE \parallel DF$ (2)

Kết hợp (1) và (2) $\Rightarrow EF \perp CE$ và $EF \perp DF$.



Bài 29 Cho một nửa đường tròn (O), đường kính AB và một dây cung CD. Kẻ AE và BF vuông góc với CD. Chứng minh rằng: $CE = DF$.

Chứng minh rằng: $CE = DF$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đường $OI \perp CD \Rightarrow IC = ID$ (1) (định lý 1)

Ta có: $AE \parallel BF \Rightarrow ABFE$ là một hình thang

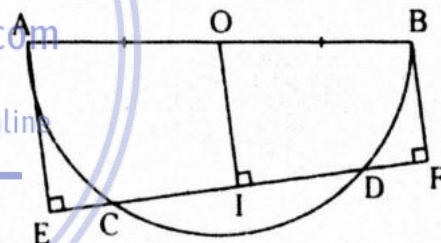
Ta lại có O là trung điểm AB mà OI song song với hai đáy hình thang ABFE nên I là trung điểm EF.

$\Rightarrow IE = IF$ (2)

Từ (2) cho (1) vẽ theo về, ta có:

$$IE - IC = IF - ID \Leftrightarrow CE = DF$$

Vậy: $CE = DF$.



Bài 30 Cho đường tròn (O) và đường kính AB. Kẻ hai dây AC và BD song song. Chứng minh rằng $AC = BD$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ $OH \perp AC$ tại H $\Rightarrow OH \perp BD$ tại K.

Hai tam giác vuông HOA và KOB có:

– Cạnh huyền bằng nhau: $OA = OB$

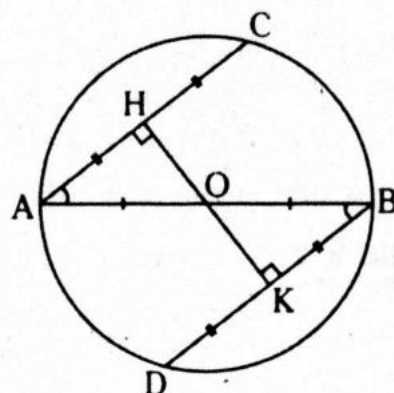
– Một góc nhọn bằng nhau: $\hat{A} = \hat{B}$ (so le trong)

nên: $\triangle HOA = \triangle KOB \Rightarrow HA = KB$.

Nhưng: $HA = HC = \frac{AC}{2}$ (đường kính vuông góc với một dây)

$$KB = KD = \frac{BD}{2}$$

Do đó: $AC = BD$.



- Bài 311** Cho đường tròn tâm A bán kính AB. Dây FE kéo dài cắt đường thẳng AB tại C (E ở giữa F và C). Hạ $AD \perp CF$.
Cho $AB = 10$ cm; $AD = 8$ cm; $CF = 21$ cm.
Tính CE và CA.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Nối EF.

- Áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông ADE, ta tính được :

$$DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{100 - 64} = 6.$$

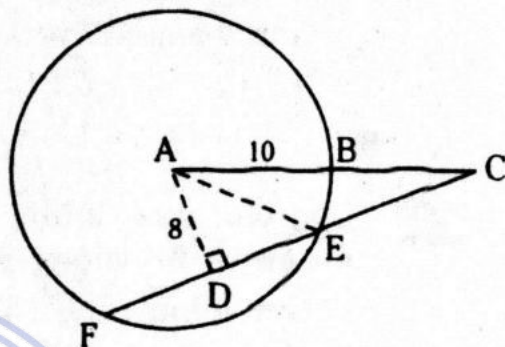
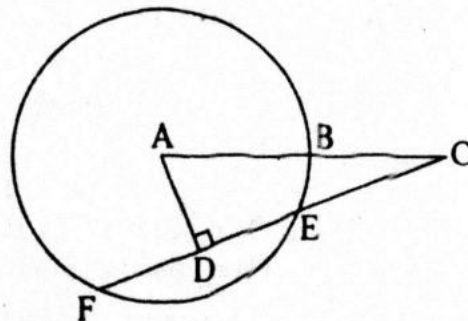
- Suy ra $CE = CF - 2DE = 21 - 12 = 9$.

Vậy $CE = 9$ cm.

- $CD = CE + ED = 9 + 6 = 15$.

- Áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông ADC :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{64 + 225} \\ &= \sqrt{289} = 17; \text{ suy ra } CA = 17 \text{ cm.} \end{aligned}$$



- Bài 312** Trong đường tròn tâm O, cho hai dây AB và CD song song với nhau. Biết $AB = 30$ cm; $CD = 40$ cm; khoảng cách giữa AB và CD là 35 cm. Tính bán kính đường tròn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Gọi bán kính đường tròn là R

$$OC = OA = R.$$

- Qua O vẽ $HK \perp AB$ và $HK \perp CD$

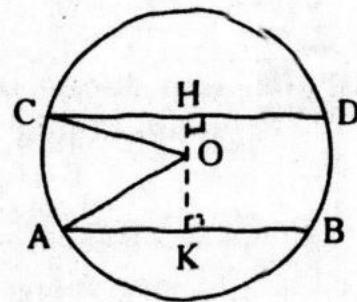
Đặt $OK = x$ thì $OH = 35 - x$.

- Ta lập được hệ thức

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 &= (35 - x)^2 + \left(\frac{40}{2}\right)^2 \\ x^2 + 225 &= 1225 - 70x + x^2 + 400 \\ 70x &= 1400 \text{ suy ra } x = 20. \end{aligned}$$

Từ đây ta tính được $R = 25$ cm.

Các trường hợp hình vẽ khác bạn đọc tự giải.



- Bài 313** Cho đường tròn tâm O bán kính $OA = 11$ cm. Điểm M thuộc bán kính OA và cách O là 7 cm. Qua M kẻ dây CD có độ dài 18 cm. Tính độ dài MC, MD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ $OH \perp CD$. Ta có $HC = HD = \frac{CD}{2} = \frac{18}{2} = 9$ (cm).

$\triangle OHD$ vuông :

$$OH^2 = OD^2 - HD^2 = 11^2 - 9^2 = 121 - 81 = 40$$

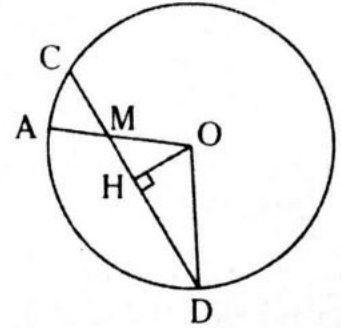
$\triangle OHM$ vuông :

$$MH^2 = OM^2 - OH^2 = 49 - 40 = 9$$

$$\Rightarrow MH = 3 \text{ cm}$$

$$\text{Do đó } MD = MH + HD = 3 + 9 = 12 \text{ (cm)}$$

$$MC = HC - MH = 9 - 3 = 6 \text{ (cm)}.$$



§3. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT



Định lí 1

Trong một đường tròn:

- Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
- Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Định lí 2

Trong hai dây của một đường tròn:

- Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
- Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

B. BÀI TẬP

Bài 314 Cho đường tròn (O), dây AB và dây CD, $AB < CD$. Giao điểm K của các đường thẳng AB, CD nằm ngoài đường tròn. Vẽ đường tròn (O; OK), cắt KA và KC tại M và N.

Chứng minh $KM < KN$.

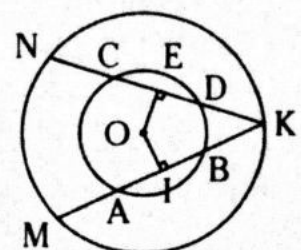
HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ $OI \perp AB$, $OE \perp CD$.

Trong đường tròn nhỏ: $AB < CD \Rightarrow OI > OE$.

Trong đường tròn lớn: $OI > OE \Rightarrow KM < KN$.

(liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây)



Bài 315 Cho một đường tròn (O); hai dây AB, CD và $AB = CD$. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm S ở bên ngoài đường tròn sao cho A nằm giữa S và B, C nằm giữa S và D.

Chứng minh : a. SO là tia phân giác $\widehat{ASC}$
b. $SA = SC$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Kẻ $OI \perp AB$ tại I

$OK \perp CD$ tại K

Vì $AB = CD$ (gt)

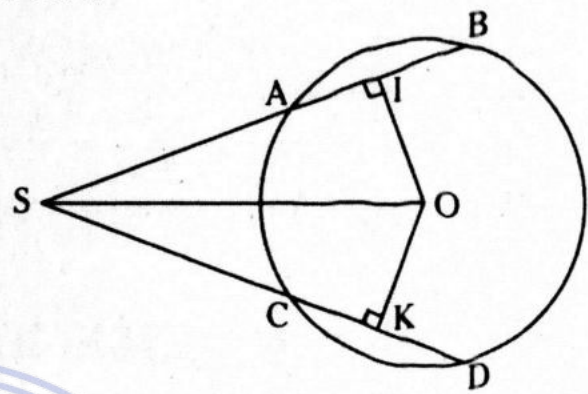
$\Rightarrow OI = OK$ (liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây)

$\Rightarrow \triangle SOI = \triangle SOK$

(cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow SO$ là phân giác $\widehat{ASC}$.

b. Từ chứng minh trên $\Rightarrow SI = SK$ mà $AI = CK$ (do $AB = CD$) $\Rightarrow SA = SC$.



Bài 316 Cho đường tròn (O), hai dây AB và CD cắt nhau tại điểm M nằm bên trong đường tròn.

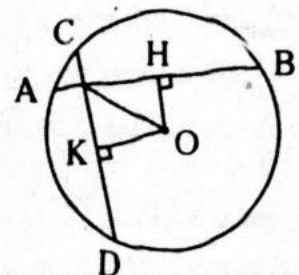
Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD, cho biết $AB > CD$. Chứng minh $MH > MK$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

MOH và MOK là các tam giác vuông.

Ta có: $MH^2 + OH^2 = MK^2 + OK^2 (= OM^2)$

Ta có : $AB > CD \Rightarrow OH < OK \Rightarrow OH^2 < OK^2$
 $\Rightarrow MH^2 > MK^2 \Rightarrow MH > MK$



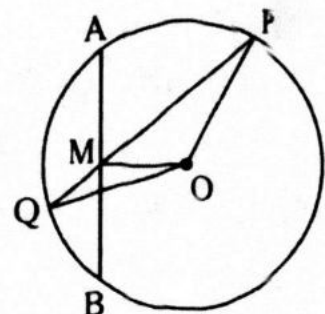
Bài 317 Cho đường tròn (O) và điểm M trong đường tròn ($M \neq O$). Dựng điểm P trên đường tròn sao cho $\widehat{OPM}$ lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vẽ một dây PQ bất kì đi qua M. Tam giác OPQ có : $OP = OQ (= R)$ nên là tam giác cân có cạnh bên không đổi (bằng R). Vì vậy góc ở đáy $\widehat{OPM}$ sẽ lớn nhất khi góc ở đỉnh nhỏ nhất. Nhưng góc ở đỉnh là $\widehat{POQ}$ sẽ nhỏ nhất khi dây cung PQ nhỏ nhất.

Nhưng trong các dây qua M chỉ có dây $AB \perp OM$ tại M là ngắn nhất (vì khi đó khoảng cách từ tâm O đến dây AB là lớn nhất).

Vậy điểm P phải trùng với A hoặc B.



Bài 318 Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của OA và OB . Qua M và N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

a. Chứng minh tứ giác $CDFE$ là hình chữ nhật.

b. Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn là 30° . Tính diện tích hình chữ nhật $CDFE$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Kẻ $OH \perp CD$ tại H . OH cắt EF tại K . Từ các tam giác bằng nhau HOM và KON suy ra $OH = OK$ nên $CD = EF$ (Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau), do đó tứ giác $CDFE$ là hình bình hành; HK là đường trung bình. Vậy $HK \parallel CE$ nên $\hat{E} = 1v$. Nên $CDFE$ là hình chữ nhật.

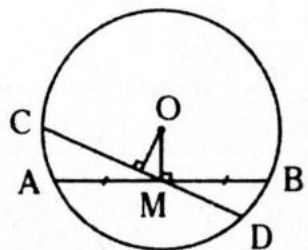
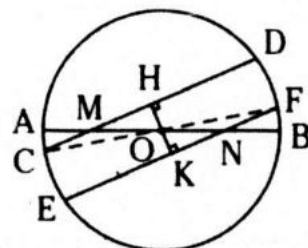
b. Tam giác vuông HOM có $\hat{M} = 30^\circ \Rightarrow OH = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{4}R$

$$\text{Vậy } HK = \frac{1}{2}R.$$

Ta có: $\hat{E} = 1v$ nên CF là đường kính. Trong tam giác vuông CEF : $EF^2 = CF^2 - CE^2 = \frac{15}{4}R^2$

$$\text{Suy ra: } EF = \frac{\sqrt{15}}{2}R.$$

$$\text{Diện tích hình chữ nhật } CDFE \text{ là: } \frac{\sqrt{15}}{2}R \cdot \frac{1}{2}R = \frac{\sqrt{15}}{2}R^2.$$



Bài 319 Cho đường tròn (O) và một điểm P ở miền trong của đường tròn. Một đường thẳng d thay đổi qua P , cắt đường tròn tại A và B . Gọi H là trung điểm của AB .

a. Chứng minh H nằm trên mặt đường tròn xác định.

b. Đường thẳng d ở vị trí nào thì dây AB có độ dài lớn nhất?

c. Giả sử $d \perp OP$. Chứng minh ở vị trí này, AB có độ dài bé nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Gọi I là trung điểm của đoạn OP thì I là điểm cố định.

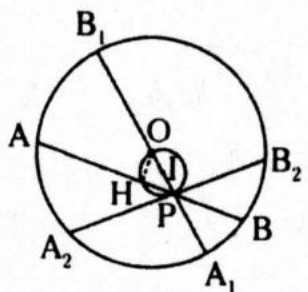
Trong tam giác vuông OHP , HI là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $IH = \frac{1}{2}OP$.

Do đó H nằm trên đường tròn tâm I bán kính $\frac{OP}{2}$.

b. AB có độ dài lớn nhất khi và chỉ khi AB là đường kính.

Do đó AB có độ dài lớn nhất khi d qua O (và qua P), đó là vị trí A_1B_1 .

c. So sánh độ dài hai dây AB và A_2B_2 , ta luôn có $OP > OH$. Do đó A_2B_2 là dây có độ dài bé nhất (vì có khoảng cách đến tâm lớn nhất).



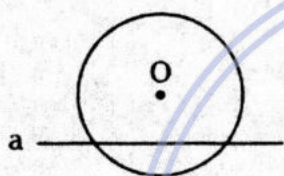
§4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

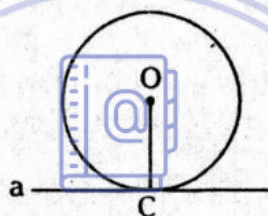
R là bán kính của đường tròn (O).

d là khoảng cách từ tâm O tới đường thẳng a .

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
1. Đường thẳng và đường tròn cắt nhau (H.a)	2	$d < R$
2. Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau (H.b)	1	$d = R$
3. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau (H.c)	0	$d > R$



Hình a



Hình b



Hình c

Định lý:

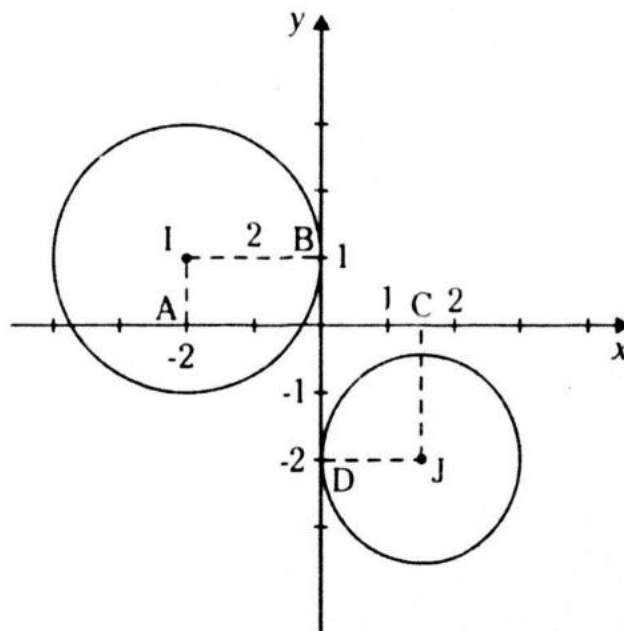
Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

B. BÀI TẬP

Bài 320 Trên mặt phẳng tọa độ có đường tròn tâm I bán kính $R = 2$ và đường tròn tâm J bán kính $r = 1,5$. Tọa độ của I là $(-2; 1)$ và của J là $(1,5; -2)$. Đường tròn tâm I và đường tròn tâm J có vị trí như thế nào đối với các trục tọa độ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Kẻ $IA \perp Ox$. Do $IA = 1 < R$ nên đường tròn (I) cắt trục Ox . Kẻ $IB \perp Oy$. Do $IB = 2 = R$ nên đường tròn (I) tiếp xúc với Oy .
- Kẻ $JC \perp Ox$. Do $JC = 2 > r$ nên đường tròn (J) không cắt Ox . Kẻ $JD \perp Oy$. Do $JD = 1,5 = r$ nên đường tròn (J) tiếp xúc với Oy .



Bài 321 Cho đường tròn $(O; R)$ và một đường thẳng xy cách tâm O một khoảng bằng d . Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường này theo bảng sau :

R	8 cm	12 cm	9 cm	15 cm
d	8 cm	10 cm	14 cm	15 cm
Vị trí tương đối	?	?	?	?

HƯỚNG DẪN GIẢI

- $+ d = 8; R = 8 \Rightarrow d = R$
 $\Rightarrow$ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.
 $+ d = 10; R = 12 \Rightarrow d < R$
 $\Rightarrow$ đường thẳng cắt đường tròn.
 $+ d = 14; R = 9 \Rightarrow d > R$
 $\Rightarrow$ đường thẳng và đường tròn không giao nhau.
 $+ d = 15; R = 15 \Rightarrow d = R$
 $\Rightarrow$ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.

Bài 322 Cho một số yếu tố và vị trí tương đối của một đường thẳng và một đường tròn như ở bảng dưới đây :

R	?	5 cm	10 cm	?
d	21 cm	?	?	12 cm
Vị trí tương đối	Cắt nhau	Tiếp xúc	Không giao nhau	Tiếp xúc

HƯỚNG DẪN GIẢI

- + Đường thẳng cắt đường tròn $\Rightarrow d < R$ mà $d = 21 \Rightarrow R > 21$.
- + Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn $\Rightarrow d = R$ mà $R = 5 \Rightarrow d = 5$.
- + Đường thẳng và đường tròn không giao nhau $\Rightarrow d > R$ mà $R = 10 \Rightarrow d > 10$.
- + Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn $\Rightarrow d = R$ mà $d = 12 \Rightarrow R = 12$.

Bài 323 Cho hai đường thẳng $a \parallel b$ và cách nhau một khoảng là 5 cm. Lấy $O \in b$, vẽ đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$. Chứng minh rằng đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng a .

HƯỚNG DẪN GIẢI

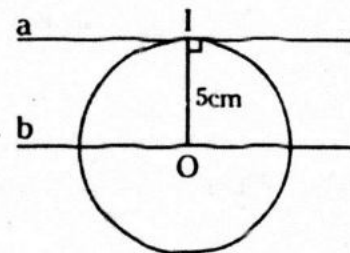
Ta có :

$$d = 5 \text{ cm} \quad (\text{gt})$$

$$R = 5 \text{ cm} \quad (\text{gt})$$

nên $d = R$

Vậy đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$.



Bài 324 Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Qua A kẻ đường thẳng song song với BC. Chứng minh rằng xy tiếp xúc với đường tròn (O) .

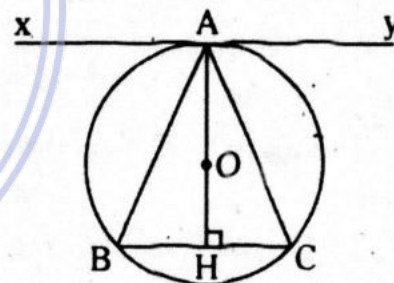
HƯỚNG DẪN GIẢI

Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) nên ta suy ra tâm O là giao điểm của ba đường trung trực $\Rightarrow O$ thuộc đường cao AH.

$$\Rightarrow AH \perp BC \text{ mà } xy \parallel BC$$

$$\Rightarrow AH \perp xy \text{ hay } OA \perp xy$$

Vậy xy tiếp xúc với đường tròn (O) .

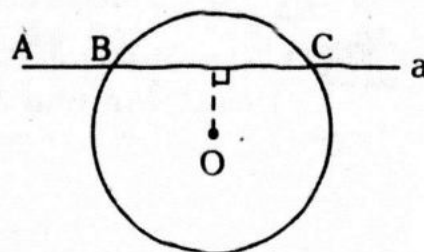


Bài 325 Chứng minh rằng một đường thẳng và một đường tròn không thể có quá hai điểm chung.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Giả sử đường thẳng a cắt đường tròn (O) quá hai điểm, nghĩa là có ít nhất ba điểm chung A, B, C vừa thuộc a , vừa thuộc (O) .

Như vậy, tâm O của đường tròn vừa nằm trên đường trung trực của BC, vừa nằm trên đường trung trực của BA, mà A, B, C cùng thuộc a , chứng tỏ từ điểm O ta dựng được hai đường thẳng vuông góc với đường thẳng a . Đây là điều vô lý (mâu thuẫn với định lý đã học), do đó (O) và a không thể có quá hai điểm chung.



Bài 326 Cho tam giác ABC vuông ở A, M là trung điểm của BC.

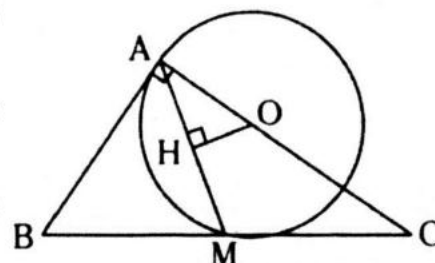
- Dựng đường tròn (O) đi qua M và tiếp xúc với AB tại A.
- Cho $BC = a$, $AC = b$. Tính bán kính của đường tròn (O).

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại A nên tâm O phải thuộc AC.

Mặt khác (O) qua hai điểm A, M nên O thuộc đường trung trực của AM.

Vậy tâm O chính là giao điểm của trung trực của AM với AC.



- Trong tam giác vuông ABC có AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên bằng nửa cạnh huyền. Suy ra $AM = CM$. Do đó $\triangle AMC$ cân tại M nên $\widehat{C} = \widehat{OAH}$. Từ đó hai tam giác vuông AHO và CAB đồng dạng, cho ta :

$$\frac{OA}{BC} = \frac{AH}{AC} \quad (1)$$

Mặt khác $OH \perp AM$ nên H là trung điểm của AM. Nên :

$$AH = \frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{BC}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OA = \frac{a^2}{4b}$.

Bài 327 Cho tam giác ABC vuông ở A.

- Dựng đường tròn tâm I đi qua B, tiếp xúc với AC, với I thuộc cạnh BC.
- Cho biết $AB = 24$ cm, $AC = 32$ cm. Tính bán kính đường tròn (I).

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Dựng phân giác BD. Dựng đường vuông góc với AC tại D, cắt BC ở I. Dựng đường tròn (I; ID).

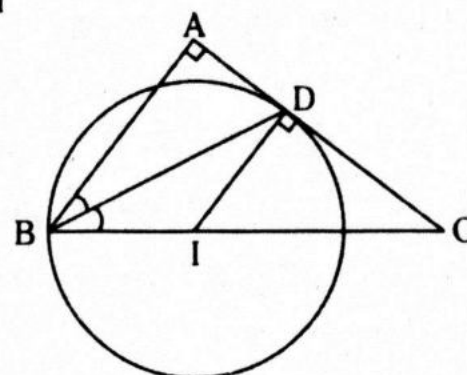
- $BC = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{1600} = 40$ (cm).

Đặt $ID = x$, ta có $ID \parallel AB$

$$\Rightarrow \frac{ID}{AB} = \frac{IC}{BC} \quad \Rightarrow \frac{x}{24} = \frac{40 - x}{40}$$

$$\Rightarrow x = 15$$

Đáp số : 15 cm.



§5. CÁC DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Ta đã biết những dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn:

- Nếu một đường thẳng và một đường tròn chỉ có một điểm chung thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.
- Nếu khoảng cách từ tâm của một đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

2. Định lý

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

B. BÀI TẬP

Bài 328 Cho tam giác ABC cân tại A. Đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh :

- Đường tròn đường kính AI đi qua K.
- HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

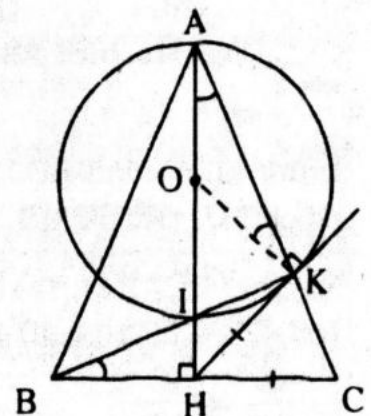
HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Gọi O là trung điểm của AI ta có $OA = OI = OK$. Vậy đường tròn tâm O đường kính AI đi qua K.

b. Ta có $\triangle AOK$ cân

$\Rightarrow \widehat{AKO} = \widehat{OAK}$
 Ta có $\widehat{OAK} = \widehat{HBK}$ (cùng phụ với $\widehat{C}$)
 Ta lại có $HK = HB$ nên $\widehat{HBK} = \widehat{HKB}$.
 Suy ra $\widehat{OKA} = \widehat{OAK} = \widehat{HBK} = \widehat{HKB}$
 mà $\widehat{OKA} + \widehat{IOK} = \widehat{IKA} = 90^\circ$ (gt)
 nên $\widehat{HKB} + \widehat{IOK} = \widehat{OKH} = 90^\circ$
 do đó $OK \perp HK$.

Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Bài 329 Cho đường tròn (O) đường kính AB, lấy điểm M sao cho A nằm giữa B và M. Kẻ đường thẳng MC tiếp xúc với đường tròn (O) tại C. Từ O hạ đường thẳng vuông góc với CB và cắt tia MC tại N. Chứng minh rằng đường thẳng NB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

HƯỚNG DẪN GIẢI

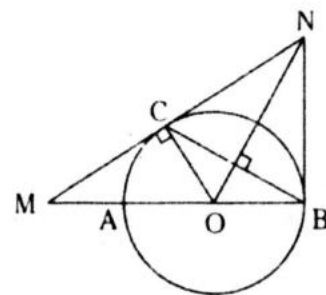
Tam giác OCB cân đỉnh O nên ON vừa là đường cao vừa là phân giác, do đó :

$$\widehat{NOC} = \widehat{NOB}$$

$$\Rightarrow \triangle ONB = \triangle ONC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OBN} = \widehat{OCN} = 90^\circ$$

Vậy NB là tiếp tuyến của (O).



Bài 330 Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn tâm I đường kính BH cắt AB tại E, đường tròn tâm J đường kính HC cắt AC tại F. Chứng minh rằng :

a. AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (J) tại H.

b. EF là tiếp tuyến của (I) tại E, tiếp tuyến của (J) tại F.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Gọi I là trung điểm của BH thì I là tâm đường tròn đường kính BH. Gọi J là trung điểm của HC thì J là tâm đường tròn đường kính HC.

Ta có $IH \perp AH$ suy ra AH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BH.

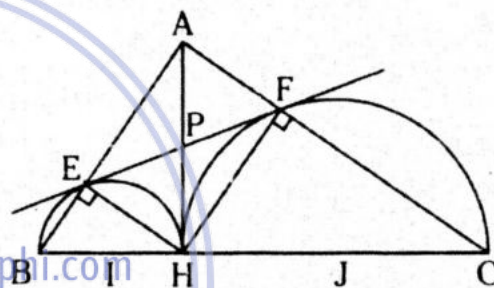
Cũng vậy AH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính HC.

Vậy AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I), (J).

b. Ta có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$ nên AFHE là hình chữ nhật. Gọi P là giao điểm AH và EF. Ta có $PE = PF = PH = PA$.

Chứng minh $\triangle PEI = \triangle PHI$ (c.c.c), suy ra $\widehat{IEP} = \widehat{IHP} = 90^\circ$. Vậy EF là tiếp tuyến của đường tròn (I).

Chứng minh $\triangle PFJ = \triangle PHJ$ (c.c.c), suy ra $\widehat{PFJ} = \widehat{PHJ} = 90^\circ$. Vậy EF là tiếp tuyến của đường tròn (J).



Bài 331 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Một đường thẳng d tiếp xúc với nửa đường tròn đó tại C. Từ A và B vẽ AM và BN vuông góc với d. Gọi D là hình chiếu của C trên AB. Chứng minh rằng $CD^2 = AM \cdot BN$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có AM, OC, BN song song với nhau vì cùng vuông góc với d, do đó $\widehat{A_1} = \widehat{ACO}$ (so le trong), nhưng $\widehat{A_2} = \widehat{ACO}$ (hai góc ở đáy của tam giác cân OAC).

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Xét hai tam giác vuông MAC và DAC, chúng có cạnh huyền AC chung, một cặp góc nhọn bằng nhau ($\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$) suy ra hai tam giác vuông đó bằng nhau, do đó $AM = AD$.

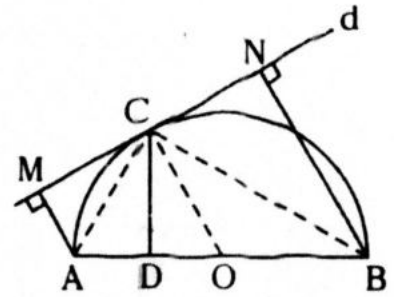
Cũng chứng minh tương tự, ta sẽ được $BN = BD$.

Tam giác ACB vuông tại C vì CO là trung tuyến thuộc cạnh AB mà $CO = \frac{1}{2} AB$. Xét hai tam giác vuông ACD và CBD có $\angle ACD = \angle CBD$ (cùng phụ BCD).

$$\triangle ACD \sim \triangle CBD \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD.$$

$$\text{Mà } AD = AM \cdot DB = BN$$

$$\text{nên: } CD^2 = AM \cdot BN \text{ (đpcm)}$$



Bài 332 Cho đường tròn (O; R) và dây AB = 1,6 R. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, nó cắt các tia OA và OB theo thứ tự tại M và N. Tính diện tích $\triangle MON$.

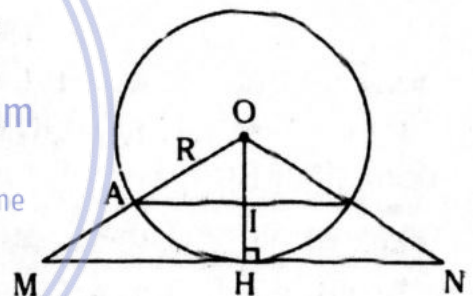
HƯỚNG DẪN GIẢI

Nối OH ta được $OH \perp MN$ (tính chất của tiếp tuyến). Ta lại có $AB \parallel MN$ (gt) nên $OH \perp AB$ (tại I).

Theo tính chất đường kính vuông góc với một dây ta được

$$IA = IB = \frac{1,6R}{2} = 0,8R.$$

Áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông IOA ta được: $OI^2 = OA^2 - IA^2 = R^2 - (0,8R)^2 = 0,36R^2$
 $\Rightarrow OI = 0,6R$.



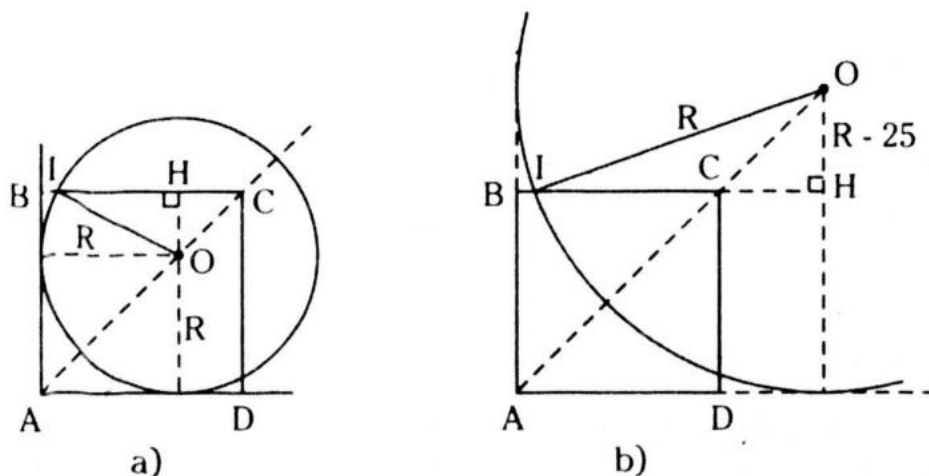
Xét $\triangle OMN$ có $AB \parallel MN$ (gt) nên $\triangle OAB$ và $\triangle OMN$ đồng dạng. Suy ra $\frac{AB}{MN} = \frac{OI}{OH}$ (tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng).

$$\text{Vậy } MN = \frac{AB \cdot OH}{OI} = \frac{1,6R \cdot R}{0,6R} = \frac{8}{3} R$$

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} MN \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} R \cdot R = \frac{4}{3} R^2.$$

Bài 333 Cho hình vuông ABCD. Một đường tròn tâm O tiếp xúc với các đường thẳng AB, AD và cắt mỗi cạnh BC, CD thành hai đoạn có độ dài 2 cm và 23 cm. Tính bán kính của đường tròn.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Kẻ $OH \perp BC$. Gọi bán kính của (O) là R. Ta có $OH = 25 - R$ (nếu O thuộc đoạn thẳng AC, h.a) hoặc $OH = R - 25$ (nếu O thuộc tia đối của tia CA, h.b).

Gọi I là giao điểm của (O) với cạnh BC, ta có $OI = R$, $IH = R - 2$. Trong $\triangle OHI$ vuông: $IH^2 + OH^2 = OI^2$

$$(R - 2)^2 + (25 - R)^2 = R^2$$

Khai triển và rút gọn, được: $R^2 - 54R + 629 = 0$

$$(R - 37)(R - 17) = 0$$

Vậy $R = 17$ cm (ứng với h.a)

hoặc $R = 37$ cm (ứng với h.b)

Bài 334 Cho trước góc xAy khác góc bẹt và một điểm B trên cạnh Ax. Hãy dựng đường tròn (O) đi qua B và tiếp xúc với Ay tại A.

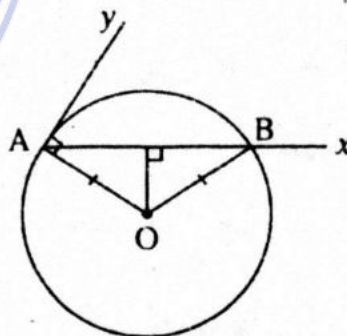
HƯỚNG DẪN GIẢI

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn (O) thỏa mãn đề bài. Ta có $OA \perp Ay$ (tính chất của tiếp tuyến).

Ta có $OA = OB$ nên O nằm trên đường trung trực của AB.

Vậy O là giao của hai đường thẳng: đường thẳng vuông góc với Ay tại A và đường trung trực của AB.

Các bước còn lại bạn đọc tự chứng minh.



§6. TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

GT AB, AC là các tiếp tuyến tại B, C của (O) .

- $AB = AC$

KL • $\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$: AO là phân giác $\widehat{BAC}$

- $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$: OA là phân giác $\widehat{BOC}$

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

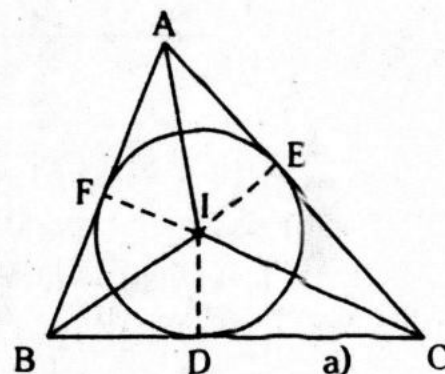
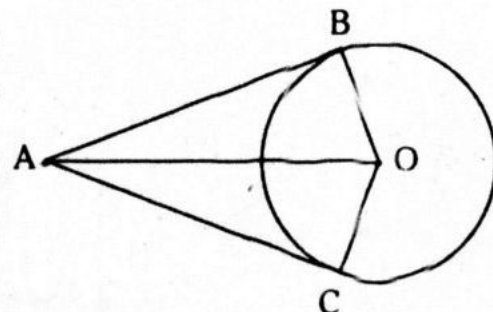
Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn. (Hình a)

Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong của tam giác.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác. (Hình b)

Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác là giao điểm hai đường phân giác của hai góc ngoài của tam giác. Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.



BÀI TẬP

Bài 335 Cho đường tròn (O) và dây AB không qua O . Các tiếp tuyến tại A và B cắt nhau tại P . Kẻ đường kính BC . Chứng minh rằng AC song song với PO .

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Cách 1:

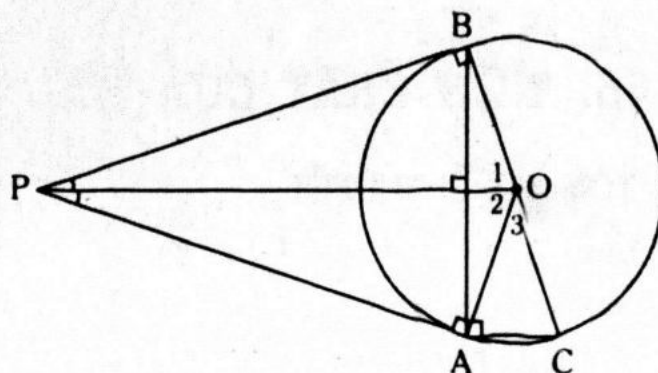
$\triangle PAB$ cân tại P ($PA = PB$) nên có phân giác PO còn là đường cao : $PO \perp AB$.

$\triangle ABC$ có trung tuyến AO bằng nửa cạnh đối ứng BC .

$$AO = OB = OC = \frac{1}{2} BC$$

nên vuông tại A : $AC \perp AB$.

Do đó $AC \parallel PO$.



- Cách 2 :

Ta có $\Delta OPB = \Delta OPA \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Do đó $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{180^\circ - \hat{O}_3}{2}$

$\Rightarrow \widehat{OCA} = \hat{O}_1 \Rightarrow AC \parallel PO$.

Bài 336 Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B nằm trên (O). Các tiếp tuyến tại A, B của (O) gặp nhau tại M. Đường vuông góc với OA tại O gặp MB tại C. Chứng minh rằng $CM = CO$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có MA là tiếp tuyến (O) tại A nên $MA \perp OA$.

Theo giả thiết có $OC \perp OA$, suy ra :

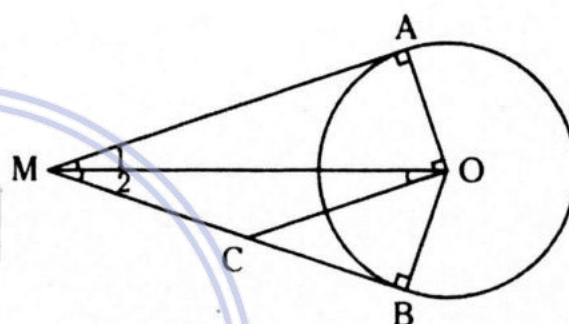
$$MA \parallel OC$$

Do đó : $\hat{M}_1 = \hat{O}_1$ (so le trong)

Nhưng $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau).

Nên $\hat{O}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow \Delta CMO$ cân tại C.

Vậy : $CM = CO$.



Bài 337 Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M nằm trên nửa đường tròn. Các tiếp tuyến của (O) tại A, B, M cắt nhau ở N và P; ON gặp AM tại C và OP gặp BM tại D. Chứng minh rằng CD song song AB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

ΔNAM cân tại N ($NA = NM$) nên phân giác NO còn là trung tuyến :

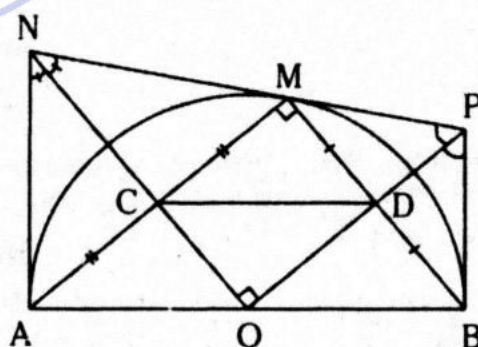
$$CA = CM.$$

Tương tự, ta có :

$$DB = DM$$

$\Rightarrow CD$ là đường trung bình của ΔMAB .

Do đó : $CD \parallel AB$.



Bài 338 Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Từ B, C kẻ các tiếp tuyến BE, CF với (A) (E, F là tiếp điểm). Chứng minh :

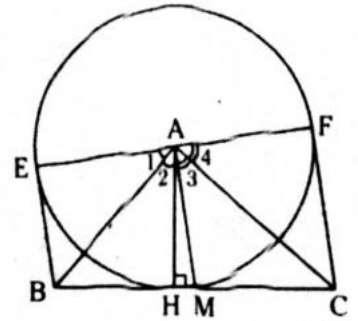
- Ba điểm E, A, F thẳng hàng và $BE \parallel CF$.
- Đường thẳng EF tiếp xúc với đường tròn đường kính BC tại A.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. + Chứng minh BC là tiếp tuyến của (A).
 + Sử dụng tính chất tiếp tuyến chứng minh $\widehat{EAF} = 2v$.
 b. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh : $MA \perp EF$.

Bài 339 Cho đường tròn đường kính $AB = 2R$ và hai tiếp tuyến Ax, By và một tiếp tuyến thứ ba [tiếp xúc điểm M], cắt Ax ở C, By ở D.

- a. So sánh diện tích ΔCOD và diện tích ACDB.
 b. Tìm giá trị nhỏ nhất của hai diện tích trên.
 c. Chứng minh $AC \cdot BD = R^2$.



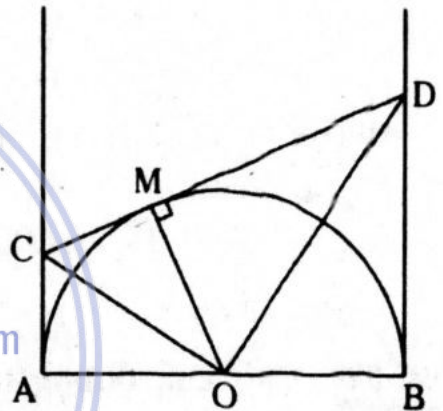
HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Ta thấy $\Delta OAC = \Delta OMC$; $\Delta OBD = \Delta OMD$

$$\text{Vậy } S_{\Delta OCD} = \frac{1}{2} S_{ACDB}$$

- b. $S_{\Delta OCD} = \frac{1}{2} OM \cdot CD$; ta thấy OM không đổi,
 $S_{\Delta OCD}$ nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất; CD nhỏ nhất
 khi là khoảng cách giữa hai đường thẳng song
 song Ax và By; tức là $CD = AB = 2R$. Khi đó

$$S_{\Delta OCD} = \frac{1}{2} R \cdot 2R = R^2.$$



Hình thang ACDB lúc ấy trở thành hình chữ nhật và diện tích của nó sẽ là $2R^2$ (gấp đôi diện tích ΔOCD).

- c. ΔCOD ($\widehat{COD} = 1v$); OM là đường cao :

$$OM^2 = MC \cdot MD; \text{ nhưng } MC = AC; MD = BD; OM = R$$

$$AC \cdot BD = R^2.$$

Bài 340 Tam giác ABC vuông ở A có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG.

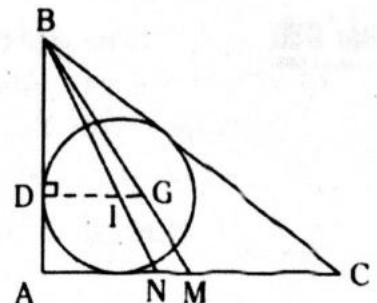
HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi D là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB. Ta tính được $BC = 15$ cm

$$AD = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{9 + 12 - 15}{2} = 3 \text{ (cm)}$$

Gọi N là giao điểm của BI và AC.

$$\text{Ta có } \frac{BI}{BN} = \frac{BD}{BA} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{BG}{BM}$$



$$\Rightarrow IG \parallel NM, IG = \frac{2}{3} NM.$$

Lần lượt tính $AN = 4,5 \text{ cm}$; $AM = 6 \text{ cm}$.

Suy ra $NM = 1,5 \text{ cm}$.

Do đó $IG = 1 \text{ cm}$.

Bài 341 Cho đường tròn (O) nội tiếp $\triangle ABC$. Gọi I, J, K lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh BC, CA, AB. Tính AJ, BK, CI theo các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Theo tính chất tiếp tuyến

$$AK = AJ; CJ = CI; BK = BI$$

Ta có : $AJ = AC - CJ$

$$\Rightarrow AJ = AC - CI \quad (1)$$

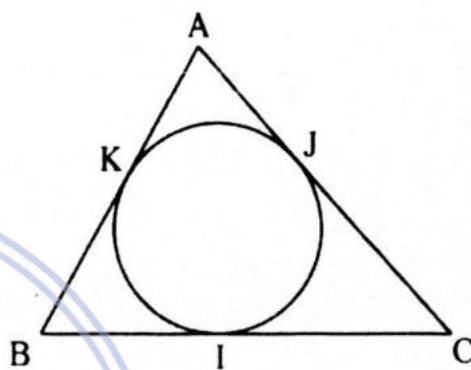
$$AK = AB - BK$$

$$\Rightarrow AJ = AB - BI \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 2AJ = AC + AB - BC$$

$$\text{Hay } AJ = \frac{b+c-a}{2}$$

$$\text{Tương tự : } BK = \frac{a+c-b}{2}, CI = \frac{a+b-c}{2}$$



Bài 342 Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH. Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các $\triangle ABC, \triangle ABH$ và $\triangle ACH$. Chứng minh $R_1 + R_2 + R_3 = AH$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét đường tròn (O) nội tiếp $\triangle ABC$ vuông tại A.

Gọi M, N, P là các điểm tiếp xúc của (O) với các cạnh AB, AC và BC.

Để dàng chứng minh AMON là hình vuông.

$$\Rightarrow R_1 = AM = AB - BM = AB - BP$$

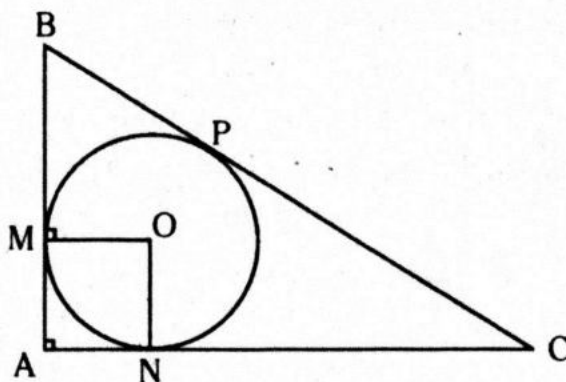
$$R_1 = AN = AC - CN = AC - CP$$

$$\Rightarrow 2R_1 = AB + AC - BC$$

$$\text{hay } R_1 = \frac{AB + AC - BC}{2}$$

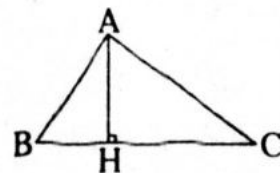
Tương tự : $\triangle ABH$ vuông tại H có bán kính đường tròn nội tiếp là R_2 .

$$\Rightarrow R_2 = \frac{AH + BH - AB}{2}$$



$$\text{Tương tự : } R_3 = \frac{AH + CH - AC}{3}.$$

$$\text{Do đó } R_1 + R_2 + R_3 = AH.$$



- Bài 343** Cho đường tròn (O, R) và M là một điểm di động trên đường thẳng d cố định nằm ngoài (O) . Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là tiếp điểm). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d , dây cung AB cắt OH, OM lần lượt tại I và K . Chứng minh:
- $OI \cdot OH = OK \cdot OM = R^2$.
 - AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên d .

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Chứng minh $\triangle OIK \sim \triangle OMH$

$$\Rightarrow OI \cdot OH = OM \cdot OK$$

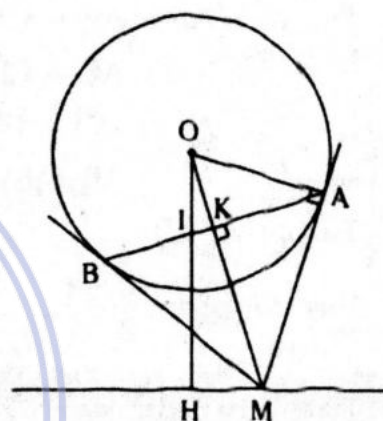
mà $\triangle OAM$ vuông tại A có

$$OA^2 = OK \cdot OM.$$

- b. O cố định, đường thẳng d cố định $\Rightarrow H$ cố định

$$OI = \frac{R^2}{OH} \Rightarrow I \text{ cố định}$$

$$\Rightarrow AB \text{ qua } I \text{ cố định.}$$

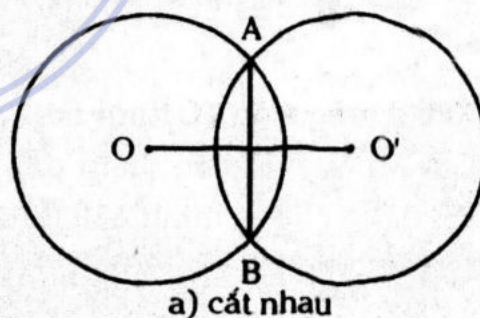


§7. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

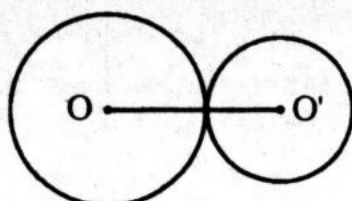
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ba vị trí tương đối của hai đường tròn

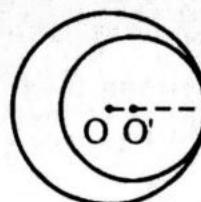
- a. Hai đường tròn cắt nhau là hai đường tròn có hai điểm chung. Hai điểm chung đó gọi là hai giao điểm. Đoạn nối hai điểm đó gọi là dây chung. (Hình a)



- b. Hai đường tròn tiếp xúc nhau là hai đường tròn chỉ có một điểm chung. Điểm chung đó gọi là tiếp điểm. (Hình b, c)

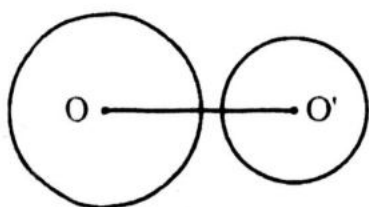


b) Tiếp xúc ngoài

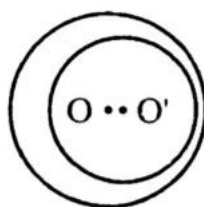


c) Tiếp xúc trong

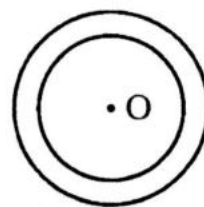
- c. Hai đường tròn không giao nhau là hai đường tròn không có điểm chung.
(Hình d, e, g)



d) Ngoài nhau



e) Đụng nhau



g) Đồng tâm

2. Tính chất đường nối tâm

Định lý :

- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, tức là đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

B. BÀI TẬP

Bài 344 Cho hai đường tròn (O) và (O') có cùng bán kính bằng đoạn nối tâm OO' , giao nhau tại A và B. Một cát tuyến bất kỳ qua A cắt (O) và (O') tại C và C'. Chứng minh rằng tam giác BCC' đều.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có $OA = O'A = OB = O'B = OO'$

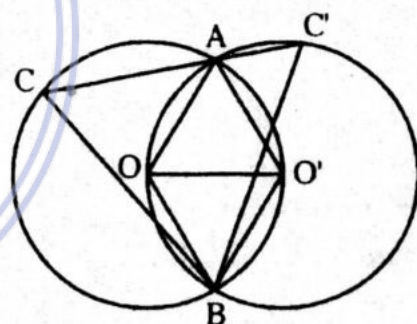
$\Rightarrow$ các tam giác OAO' và

$OB'O$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$

$$\widehat{ACB} = 60^\circ.$$

Tương tự ta có : $\widehat{AC'B} = 60^\circ$.

Vậy : $\triangle BCC'$ đều.



Bài 345 Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc với nhau tại A. Một cát tuyến bất kỳ qua A cắt (O) tại B và (O') tại C. Chứng minh rằng các tiếp tuyến của (O) tại B và (O') tại C song song với nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

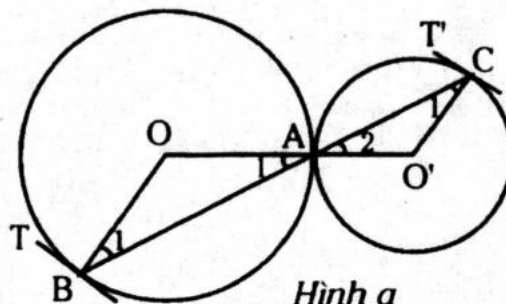
(O) và (O') tiếp xúc nhau tại A

$\Rightarrow A \in OO'$.

- a. Trường hợp (O) và (O') tiếp xúc ngoài.
(Hình a).

$\triangle OAB$ cân tại O ($OA = OB$)

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_1}$$



Hình a

Tương tự $\widehat{C}_1 = \widehat{A}_2$
 Nhưng $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (đối đỉnh)
 $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_2$

Hai góc B_1 và C_1 bằng nhau ở vị trí so le trong, nên :

$$CB \parallel O'C \quad \text{mà} \quad BT \perp OB$$

$$CT' \perp O'C \Rightarrow BT \parallel CT'.$$

b. Trường hợp (O) và (O') tiếp xúc trong (Hình b)

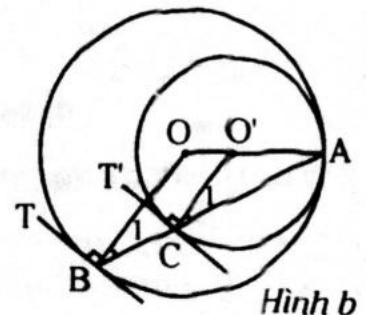
$$\triangle OAB \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}$$

$$\triangle OAC \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{A}$$

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$$

Hai góc B_1 và C_1 bằng nhau ở vị trí đồng vị, nên :

$$OB \parallel O'C \Rightarrow BT \parallel CT'.$$



Hình b

Bài 346 Cho ba đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau tại A, B, C. Tia AB cắt một đường tròn ở D; tia AC cắt đường tròn ấy ở E. Chứng minh DE chính là đường kính của đường tròn ấy.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm của ba đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau ở A, B, C. Tia AB cắt (O_2) ở D, tia AC cắt (O_2) ở E. Để chứng minh DE là đường kính của (O_2) ta chỉ cần chứng minh D, O_2 , E thẳng hàng.

Vì hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm phải nằm trên đường nối tâm nên ba điểm A, B, C nằm trên ba cạnh của tam giác $O_1O_2O_3$.

Các tam giác cân O_1BA và O_2BD có các góc ở đáy bằng nhau, do đó : $\widehat{DO_2B} = \widehat{O_1}$.

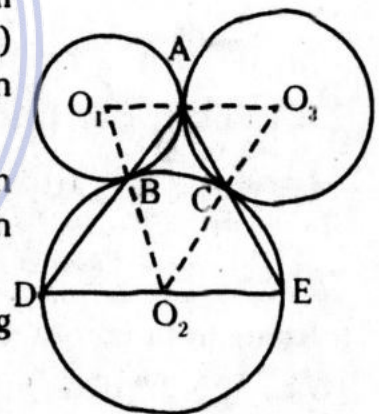
Cũng chứng minh tương tự ta được : $\widehat{CO_2E} = \widehat{O_3}$.

$$\text{Ta có : } \widehat{DO_2E} = \widehat{DO_2B} + \widehat{BO_2C} + \widehat{CO_2E}$$

$$\widehat{O_1} + \widehat{O_1O_2O_3} + \widehat{O_3} = 2v$$

vì là tổng ba góc trong của $\triangle O_1O_2O_3$.

Vậy D, O_2 , E thẳng hàng hay DE là đường kính của (O_2) (đpcm).



Bài 347 Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ hai đường kính AOC và AO'D. Chứng tỏ ba điểm C, B, D thẳng hàng và AB vuông góc CD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi H là giao điểm OO' và AB .

Các tam giác OAB , $O'AB$ cân tại O và O' nên OO' là trung trực của AB .

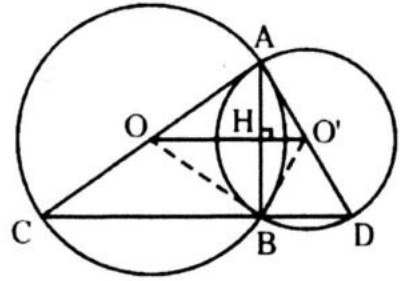
Trong tam giác ABC , OH là đường trung bình, suy ra : $BC \parallel OH$ hay $BC \parallel OO'$.

Tương tự : $BD \parallel OO'$.

Vì BC và BD cùng song song với OO' nên BC và BD cùng nằm trên một đường thẳng song song với OO' .

Vậy C, B, D thẳng hàng.

Ta có : $CD \parallel OO'$; mà $AB \perp OO'$ nên $AB \perp CD$. Vậy : $AB \perp CD$.



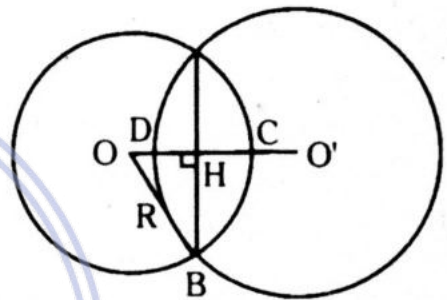
Bài 348 Hai đường tròn tâm O và tâm O' có cùng bán kính, cắt nhau tại A và B . Đoạn nối tâm OO' cắt các đường tròn (O) và (O') thứ tự ở C và D . Tính bán kính mỗi đường tròn biết $AB = 24$ cm, $CD = 12$ cm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi H là giao điểm của AB và CD . Xét $\triangle OHB$ vuông:

$$OB^2 = OH^2 + HB^2$$

$$R^2 = (R - 6)^2 + 12^2 = 15 \text{ (cm)}.$$



Bài 349 Ba đường tròn đôi một tiếp xúc ngoài nhau, trong đó hai đường tròn có bán kính 3 và một đường tròn có bán kính 2. Tính diện tích tam giác có ba đỉnh là các tiếp điểm của ba đường tròn nói trên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

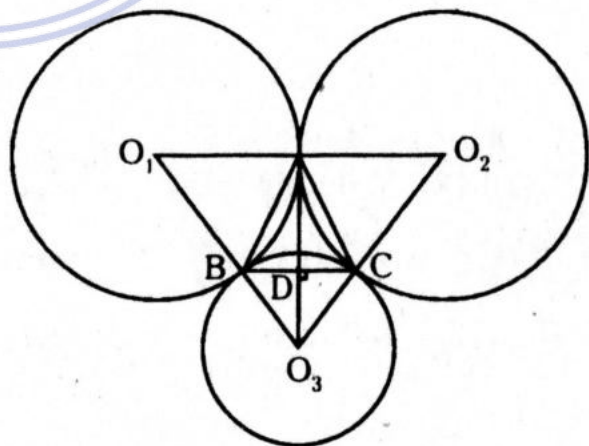
$$\triangle O_3BC \sim \triangle O_3O_1O_2 \text{ (} BC \parallel O_1O_2 \text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{O_1O_2} = \frac{O_3B}{O_3O_1}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{12}{5}.$$

$$\frac{AD}{AO_3} = \frac{O_2C}{O_2O_3} \Rightarrow AD = \frac{72}{25}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{72}{25}.$$



Bài 350 Cho hai đường tròn $(O; 17 \text{ cm})$ và $(O'; 10 \text{ cm})$ cắt nhau tại A và B . Biết $OO' = 21$ cm. Tính AB .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dây chung của hai đường tròn vuông góc với đường nối tâm và bị đường nối tâm chia làm hai phần bằng nhau nên $AB \perp OO'$ và $IA = IB$.

Ta đặt $OI = x$ thì $O'I = 21 - x$.

Áp dụng định lý Pitago vào các tam giác vuông AIO và AIO' ta được :

$$OA^2 - OI^2 = O'A^2 - O'I^2 (= AI^2)$$

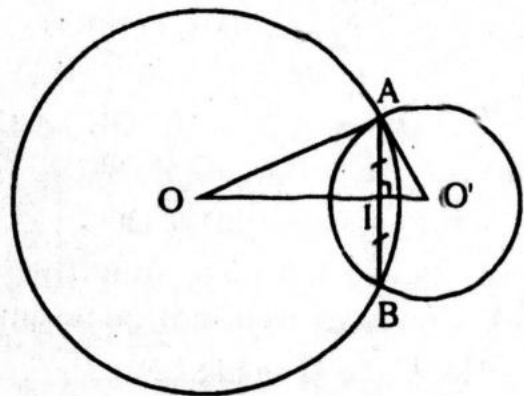
$$17^2 - x^2 = 10^2 - (21 - x)^2$$

$$289 - x^2 = 100 - 441 + 42x - x^2$$

$$x = 15 \text{ (cm)}$$

Ta có $AI^2 = OA^2 - OI^2 = 17^2 - 15^2 = 64 \Rightarrow AI = 8 \text{ (cm)}$.

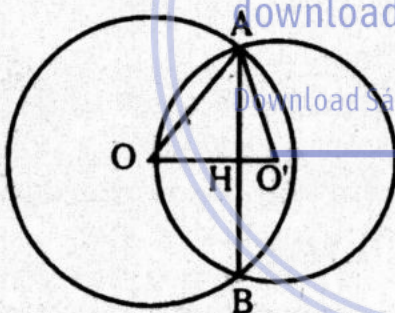
Vậy $AB = 16 \text{ cm}$.



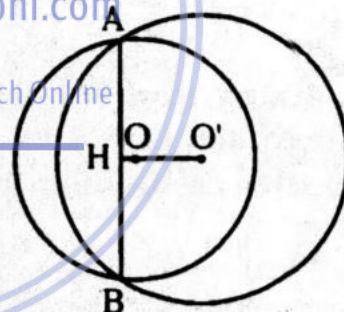
Bài 351 Hai đường tròn giao nhau có bán kính 13 cm và 15 cm có dây chung bằng 24 cm. Tính khoảng cách giữa hai tâm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi AB là dây chung của (O) và (O'); AB cắt OO' ở H. Xét hai trường hợp :



Hình a



Hình b

- Điểm H nằm giữa hai điểm O và O' (H.a).

Ta có OO' là đường trung trực của AB nên các tam giác AHO , AHO' vuông và

$$AH = HB = \frac{24}{2} = 12 \text{ (cm)}$$

Theo định lý Pitago :

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow OH = 9 \text{ (cm)}$$

$$O'H^2 = O'A^2 - AH^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow O'H = 5 \text{ (cm)}$$

Vậy $OO' = 9 + 5 = 14 \text{ (cm)}$.

- Điểm O nằm giữa hai điểm H và O' (H.b).

Tương tự ta tính được $OO' = 4 \text{ (cm)}$.

Bài 352 Cho hai đường tròn tâm O_1 và O_2 tiếp xúc nhau tại A . Qua A kẻ hai cát tuyến : cát tuyến thứ nhất cắt (O_1) tại A_1 và cắt (O_2) tại B_1 , cát tuyến thứ hai cắt (O_1) tại A_2 và cắt (O_2) tại B_2 . Tìm tỉ số $A_1A_2 : B_1B_2$ biết bán kính hai đường tròn lần lượt là R_1, R_2 .

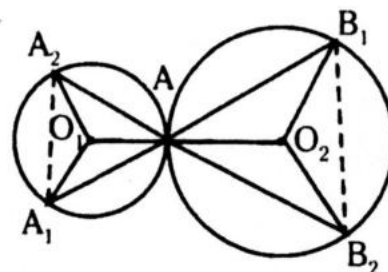
HƯỚNG DẪN GIẢI

- Trường hợp tiếp xúc ngoài :

$$\Delta AO_1A_1 \sim \Delta AO_2B_1 \Rightarrow \frac{AA_1}{AB_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\Delta AO_1A_2 \sim \Delta AO_2B_2 \Rightarrow \frac{AA_2}{AB_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\text{Từ đó } \Delta AA_1A_2 \sim \Delta AB_1B_2 \Rightarrow \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{R_1}{R_2}$$



- Trường hợp tiếp xúc trong : chứng minh tương tự.

§8. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN (tiếp theo)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ thức giữa đoạn nối tâm và các bán kính

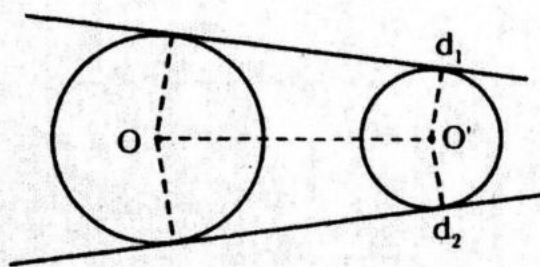
Bảng tóm tắt

Vị trí tương đối hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < OO' < R + r$
Hai đường tiếp xúc nhau - Tiếp xúc ngoài - Tiếp xúc trong	1	$OO' = R + r$ $OO' = R - r > 0$
Hai đường tròn không giao nhau - Ở ngoài nhau - (O) đựng (O') Đặc biệt (O) và (O') đồng tâm	0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$ $OO' = 0$

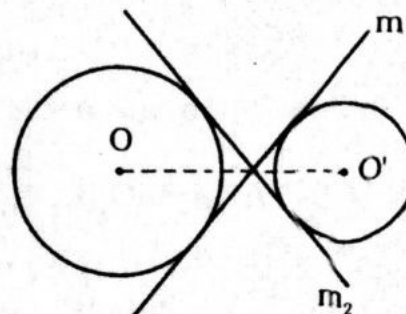
2. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

Trên hình a, các đường thẳng d_1 và d_2 là các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O') trên hình b các đường thẳng m_1 và m_2 là các tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn (O) và (O').



Hình a



Hình b

B. BÀI TẬP

Bài 353 Cho một số yếu tố và vị trí tương đối của hai đường tròn như bảng sau :

R	r	d	Vị trí tương đối
5 cm	3 cm	7 cm	
11 cm	4 cm	3 cm	
9 cm	6 cm	15 cm	
8 cm	2 cm		Tiếp xúc trong
7 cm	3 cm		Cắt nhau
	5 cm	11 cm	Tiếp xúc ngoài
12 cm		6 cm	Đụng nhau

Hãy điền giá trị hoặc vị trí thích hợp vào các ô trống ở bảng trên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

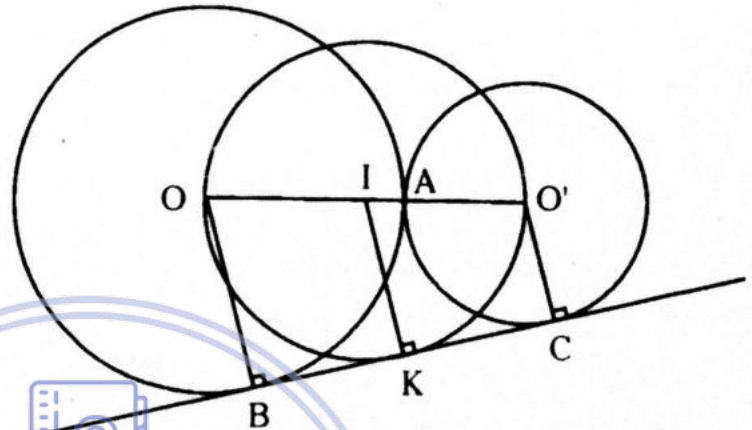
- Dòng thứ nhất : $5 - 3 < 7 < 5 + 3$ nên hai đường tròn cắt nhau.
- Dòng thứ hai : $3 < 11 - 4$, hai đường tròn không giao nhau và đường tròn lớn đựng đường tròn nhỏ.
- Dòng thứ ba : $15 = 9 + 6$ nên hai đường tròn tiếp xúc nhau và tiếp xúc ngoài.
- Dòng thứ tư : Hai đường tròn tiếp xúc trong nên $d = R - r = 8 - 2 = 6$ (cm). Vậy $d = 6$ cm.
- Dòng thứ năm : Hai đường tròn cắt nhau nên $7 - 3 < d < 7 + 3$
 $\Rightarrow 4 < d < 10$.
- Dòng thứ sáu : Hai đường tròn tiếp xúc ngoài nên $d = R - r \Rightarrow 11 = R - 5 \Rightarrow R = 6$ (cm).

Dòng thứ bảy: Hai đường tròn đựng nhau nên $d < R - r \Rightarrow 6 < 12 - r$
 $\Rightarrow r < 6$ (cm).
 Vậy $0 < r < 6$.

Bài 354 Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn đó cũng là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi I là tâm của đường tròn đường kính OO'. Để chứng minh (I) tiếp xúc với đường thẳng BC (tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (O')) ta chỉ việc chứng minh khoảng cách từ I tới đường thẳng BC bằng bán kính của (I) là $\frac{1}{2} OO'$.



Kẻ $IK \perp BC$. Tứ giác BOO'C có $OB \parallel O'C$ (vì cùng vuông góc với BC) nên là hình thang, IK là đường trung bình nên ta có :

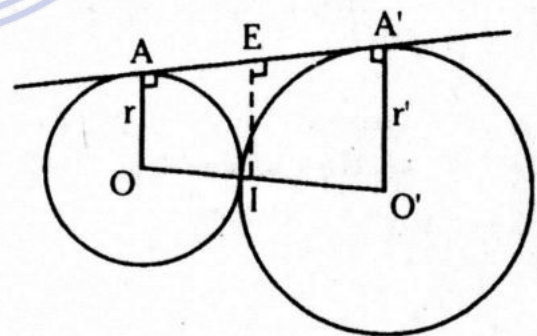
$$IK = \frac{OB + O'C}{2} = \frac{OA + O'A}{2} = \frac{1}{2} OO' \text{ (đpcm).}$$

Bài 355 Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn đó cũng là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Giả sử AA' là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O), (O'). Gọi I là trung điểm của OO'. Kẻ $IE \perp AA'$.

Ta được $EI \parallel OA$ (vì EI, OA cùng vuông góc với AA'). Nên EI là đường trung bình của hình thang AOO'A'.



$$\begin{aligned} \text{Do đó : } EI &= \frac{1}{2} (AO + A'O') \\ &= \frac{1}{2} (r + r') = \frac{1}{2} OO'. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ E nằm trên đường tròn đường kính OO' và AA' là tiếp tuyến với đường tròn này tại E.

- Bài 356** Cho đường tròn tâm (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Tiếp tuyến chung ngoài có tiếp điểm với hai đường tròn lần lượt ở M và N. Tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại A cắt MN ở I.
- Chứng minh các tam giác MAN và OIO' là các tam giác vuông.
 - Xác định vị trí tương đối của đường thẳng MN với đường tròn đường kính OO'.
 - Tính $S_{OIO'}$, biết bán kính của hai đường tròn tâm (O) và (O') lần lượt bằng 48 cm và 27 cm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Ta có $IM = IA$ và $IN = IA$ nên $IM = IA = IN$.

Tam giác MAN là tam giác vuông ở đỉnh A.

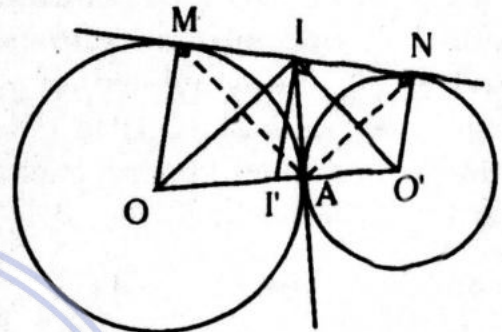
Do OI và IO' lần lượt là phân giác của hai góc kề bù $\widehat{MIA}$ và $\widehat{AIN}$ nên $IO \perp IO'$ tại I. Tam giác IOO' vuông tại đỉnh I.

- b. Gọi I' là trung điểm của OO' thì $II' = IO' = IO$, nên I' là bán kính của đường tròn qua ba điểm O, I, O'.

Mặt khác tứ giác OMNO' là hình thang, I'I là đường trung bình của hình thang này, do đó $I'I \parallel OM$ và $OM \perp MN$, suy ra $I'I \perp MN$ tại I. Vậy đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn qua ba điểm O, I, O' tại điểm I.

- c. Trong tam giác vuông OIO', do $IA \perp OO'$, nên $IA^2 = OA \cdot O'A = 48 \cdot 27 = 16 \cdot 3^4 = 36^2 \Rightarrow IA = 36$.

$$S_{OIO'} = \frac{OO' \cdot IA}{2} = \frac{75 \cdot 36}{2} = 1350 \text{ (cm}^2\text{)}$$



- Bài 357** Tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2) có tiếp điểm với đường tròn (O_1) ở A, với đường tròn (O_2) ở B. Đường thẳng AB cắt đường nối tâm O_1O_2 ở C.

Tính khoảng cách từ C đến O_1, O_2 biết đoạn nối tâm $O_1O_2 = 21$ cm và độ dài các bán kính của hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ lần lượt là 17 cm và 10 cm.

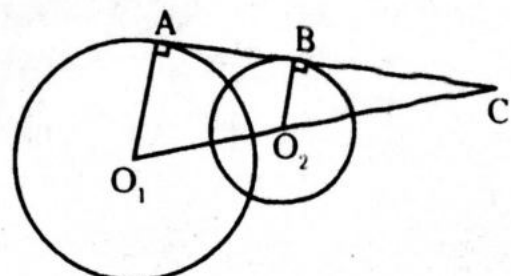
HƯỚNG DẪN GIẢI

Đặt $O_1C = x; O_2C = y$, ta có : $x - y = O_1O_2 = 21$ cm

Do $O_2B \parallel O_1A$ (vì cùng vuông góc với AB)

$$\text{nên } \frac{CO_1}{CO_2} = \frac{O_1A}{O_2B} \quad \text{hay} \quad \frac{x}{y} = \frac{17}{10}$$

$$\text{Suy ra } \frac{x-y}{y} = \frac{17-10}{10}$$



hay $\frac{21}{y} = \frac{7}{10}$

Vậy : $y = \frac{21 \cdot 10}{7} = 30 \text{ (cm)}.$

Từ đó suy ra $x = 51 \text{ cm}.$

Bài 358 Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC (B thuộc đường tròn (O) , C thuộc đường tròn (O')).

- Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông.
- Tính diện tích tứ giác BCO'O biết $R = 9 \text{ cm}$, $r = 4 \text{ cm}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Qua A vẽ tiếp tuyến chung ngoài, cắt BC tại M. Theo tính chất của tiếp tuyến ta có :

$$MB = MA, MC = MA.$$

Vậy $MB = MC$

và $MA = \frac{1}{2} BC.$

$\triangle ABC$ có trung tuyến AM ứng với cạnh BC bằng nửa cạnh đó nên là tam giác vuông.

- Tứ giác BCO'O có $OB \parallel O'C$ (vì cùng vuông góc với BC) nên tứ giác này là hình thang.

$$S_{BCO'O} = \frac{1}{2} (OB + O'O) BC$$

Để tính BC ta vẽ $O'D \perp OB$. Tứ giác BCO'D là hình chữ nhật suy ra $BC = O'D$. Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông DOO' ta được :

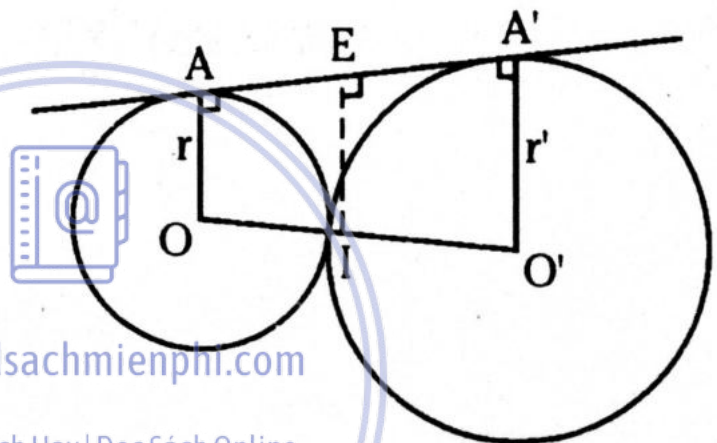
$$O'D^2 = OO'^2 - OD^2 = (9 + 4)^2 - (9 - 4)^2 = 13^2 - 5^2 = 144.$$

Suy ra $O'D = 12 \text{ (cm)}.$

Vậy $S_{BCO'O} = \frac{1}{2} (9 + 4) \cdot 12 = 78 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Bài 358 Cho hai đường tròn (O, R) và (O', r) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O)$, $C \in (O')$).

- Tính $\widehat{BAC}$.
- Tính BC.
- Gọi D là giao điểm CA với đường tròn tâm O ($D \neq A$). Chứng minh rằng ba điểm B, O, D thẳng hàng.
- Tính BA, CA.



HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. Kẻ tiếp tuyến chung trong tại A, cắt BC ở I.

Ta có : $IB = IA = IC$ nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

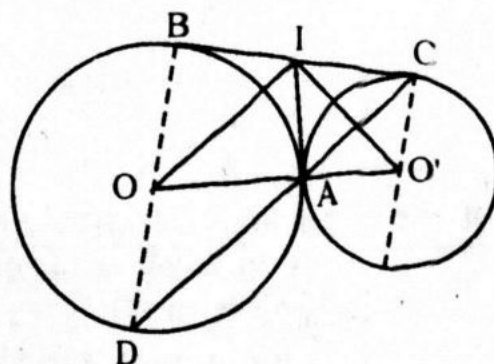
- b. $IO \perp IO'$ (tia phân giác của hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{OIO'} = 90^\circ$$

$\Delta IOO'$ vuông, đường cao IA

$$\Rightarrow IA^2 = OA \cdot O'A = Rr.$$

$$\text{Do đó } BC = 2IA = 2\sqrt{Rr}.$$



- c. Các tam giác cân $O'AC$ và OAD có góc ở đáy bằng nhau nên góc ở đỉnh bằng nhau, suy ra : $OD \parallel O'C$.

Ta lại có : $OB \parallel O'C$.

Vậy B, C, D thẳng hàng.

- d. Xét ΔCBD vuông :

$$\frac{1}{BA^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{4Rr} = \frac{R+r}{4R^2r} \Rightarrow BA = \frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R+r}}$$

$$\text{Tương tự } CA = \frac{2r\sqrt{R}}{\sqrt{R+r}}.$$

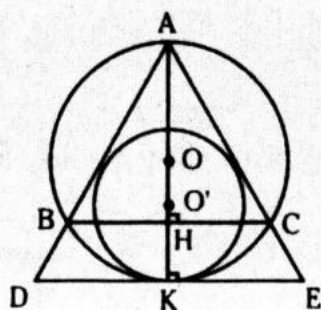
Bài 380 Tính bán kính của đường tròn (O') tiếp xúc với các cạnh bên AB, AC và cung BC của đường tròn ($O; R$) ngoại tiếp tam giác cân ABC biết rằng :

a. $\widehat{A} = 60^\circ$

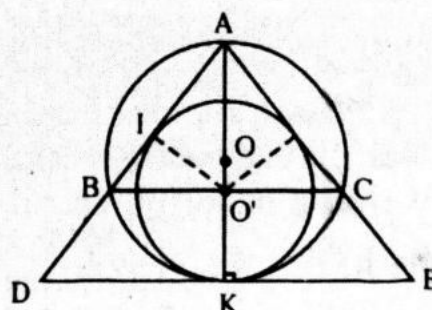
b. $\widehat{A} = 90^\circ$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- a. (Hình a) Gọi K là tiếp điểm của hai đường tròn. Ta có A, O, O', K thẳng hàng. Kẻ tiếp tuyến chung tại K cắt AB, AC ở D, E. Ta có ΔADE đều, AK là đường cao, O' là tâm nên $O'K = \frac{1}{3} AK = \frac{2R}{3}$.



Hình a



Hình b

- b. (Hình b) Vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn như câu a. $O'K = (AD + AE - DE) : 2$.

$$\text{Đáp số : } 2R(\sqrt{2} - 1)$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

- Bài 361** Cho tứ giác lồi ABCD, đường trung trực của cạnh AB và đường trung trực của cạnh CD trùng nhau, đường trung trực của cạnh BC cắt đường trung trực của cạnh AB tại điểm O.
- Chứng minh bốn đỉnh A, B, C, D thuộc một đường tròn tâm O.
 - Xác định hình dạng của tứ giác ABCD và nêu một nhận xét trong trường hợp này ?
- Bài 362** Cho tam giác ABC, kẻ đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là các điểm đối xứng của H qua các cạnh AB, BC.
- Biết: $AH = 2\sqrt{5}\text{cm}$, $BH = 4\text{cm}$, $CH = 5\text{cm}$.
- Tìm tâm và bán kính đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C ?
 - Chứng minh điểm H nằm trên đường tròn đường kính IK, suy ra các điểm B, C thuộc miền ngoài của đường tròn đường kính IK.
- Bài 363** Cho một tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại một điểm P sao cho $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.
- Gọi M, N, R, Q là các trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA và H, I, K, J theo thứ tự là các hình chiếu của điểm P trên các cạnh AB, BC, CD, DA.
- Chứng minh các điểm M, P, K thẳng hàng. Nêu các bộ ba điểm tương tự thẳng hàng.
 - Chứng minh $MN = QR$, MR và QN có cùng trung điểm.
- Bài 364** Cho góc nhọn xOy và một điểm A thuộc miền trong của góc ấy. Một tia Oz chuyển động, luôn nằm giữa hai tia Oy, Ox. Gọi I, J, K theo thứ tự là hình chiếu của điểm A trên các tia Ox, Oy, Oz.
- Chứng minh năm điểm O, I, J, K, A nằm trên một đường tròn, suy ra quỹ đạo của điểm K khi Oz thay đổi.
- Bài 365** Cho hình bình hành ABCD tâm O. Một đường tròn tâm O cắt các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự tại các điểm E, F, G, H.
- Chứng minh các điểm H, O, F thẳng hàng.
 - Xác định hình dạng tứ giác EFGH.
- Bài 366** Cho đường tròn (O, R) và một điểm P thuộc miền trong của đường tròn. Qua P ta kẻ hai dây AC và BD vuông góc với nhau.
- Chứng minh hệ thức: $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4R^2$.
 - Chứng minh tổng $AC^2 + BD^2$ không phụ thuộc vị trí của các dây AC, BD.

Bài 367 Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy một điểm M trên tiếp tuyến với đường tròn tại điểm B và kẻ đường thẳng đi qua A song song với OM, đường này cắt đường tròn tại một điểm C. Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 368 Cho hai đường tròn có chung tâm là điểm O và có bán kính lần lượt là R và $\frac{R}{2}$. Từ một điểm A cách tâm O một đoạn $OA = 2R$, ta kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O; R). Gọi D là giao điểm của đường thẳng AO với đường tròn (O; R) và điểm O thuộc đoạn thẳng AD.

- Chứng minh đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn $(O; \frac{R}{2})$.
- Chứng minh tam giác BCD là tam giác đều.
- Chứng minh rằng đường tròn $(O; \frac{R}{2})$ nội tiếp trong tam giác BDC.

Bài 268 Một đường thẳng Δ cắt một đường (O) tại hai điểm A, B. Lấy một điểm M bất kì thuộc đường thẳng Δ . Hãy dựng các đường tròn (I), (J) đi qua M và tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm A, B.

Tìm hệ thức liên hệ giữa các bán kính của ba đường tròn (O), (I), (J).

Bài 270 Cho hai đường thẳng X'X và Y'Y vuông góc với nhau tại giao điểm A. Một đường tròn có bán kính R không đổi và tâm O của nó di chuyển trên tia AX. Một đường tròn bán kính AC mà tâm C nằm trên tia AY luôn tiếp xúc với đường (O) tại điểm M.

- Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong tại điểm M của hai đường tròn cắt đường thẳng Y'Y tại một điểm I cố định.
- Gọi $OA = d$; bán kính $AC = x$. Tính x theo R, d.
- Với giá trị nào của d thì hai đường tròn có bán kính bằng nhau?

Trong trường hợp này, tính $\cos$ góc $\widehat{OCA}$, suy ra giá trị góc $\widehat{OCA}$?

Bài 371 Cho một đường thẳng Δ . Trên đường thẳng vuông góc với Δ tại một điểm H thuộc Δ , lấy một điểm A và trên Δ lấy một điểm T khác điểm H.

- Dựng đường tròn đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại T.
- Đường thẳng vuông góc với AT kẻ từ điểm T cắt đường thẳng AH tại điểm B và cắt đường tròn tại điểm C. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác cân.
- Cho $AH = h$, $HT = x$. Tính bán kính R của đường tròn theo h, x.

- d. Tiếp tuyến tại A với đường tròn cắt Δ tại E và đường thẳng AC cắt Δ tại D. Xác định x để T là trung điểm của ED. Trong trường hợp này, tính bán kính R của đường tròn.

Bài 372 Trên đường thẳng Δ cho trước lấy hai điểm cố định A, B với $AB = 2a$, trong đó a là một độ dài cho trước, và I là trung điểm của AB, K là trung điểm của IB. Một tia Kx thay đổi quay xung quanh điểm K.

Trên Kx lấy một điểm M sao cho $\widehat{KMB} = \widehat{MAB}$.

Tìm quỹ tích điểm M.

Bài 373 Cho trước một đường thẳng Δ và hai điểm B, C thuộc Δ . Hai đường tròn tâm O và O' cùng nằm trong một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng Δ , theo thứ tự tiếp xúc với Δ tại B, C và tiếp xúc với nhau tại điểm A.

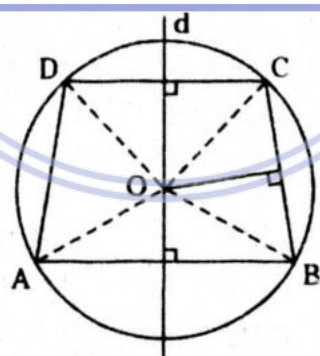
- Chứng minh ΔABC vuông tại A
- Chứng minh rằng đường tròn đường kính OO' tiếp xúc với Δ tại trung điểm D của đoạn thẳng BC.
- Biết bán kính đường tròn (O) là 7cm và bán kính đường tròn (O') là 3cm. Tính độ dài BC.

HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

downloaadsachmienphi.com

Bài 361

1. Để thấy $OA = OB = OC = OD$.

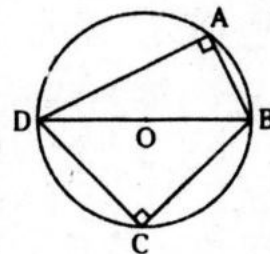


1. $AB \parallel CD$ nên ABCD là hình thang. Từ tính chất đối xứng suy ra $AC = BD$. Vậy ABCD là hình thang cân.

Phân xét:

- Một tứ giác có bốn đỉnh thuộc một đường tròn thì có tổng các góc đối là 180°
- Trường hợp đặc biệt: nếu $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$ thì bốn đỉnh A, B, C, D nằm trên đường tròn đường kính BD.

Một hình thang cân thì bốn đỉnh của nó nằm trên một đường tròn.



Bài 362

a. $AH^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$; $BH \cdot CH = 4.5 = 20$

$\Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm là điểm M, trung điểm của

cạnh huyền BC, bán kính $R = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(4 + 5)$

$= 4,5$ (cm).

b. $IA = AH = AK$; $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$; $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$

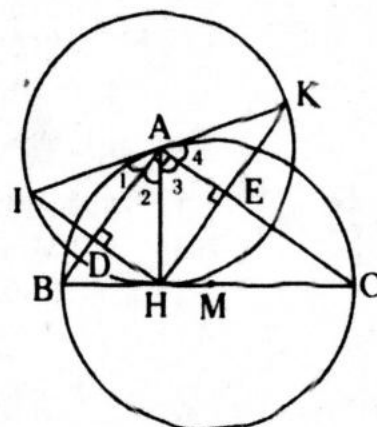
$\Rightarrow \widehat{IAK} = 2(\hat{A}_2 + \hat{A}_3) = 180^\circ$

$\Rightarrow I, A, K$ thẳng hàng.

Suy ra: A là trung điểm của IK. HEAD là hình chữ nhật, nên $\widehat{IHK} = 90^\circ$.

Vậy H nằm trên đường tròn đường kính IK.

Dễ thấy, trong tam giác vuông AHB thì $BA > AH$. Suy ra điểm B nằm ngoài đường tròn tâm A, đường kính AH. Chứng minh tương tự đối với điểm C.

**Bài 363**

a. Từ $PA \cdot PC = PB \cdot PD$

Suy ra $\triangle APB \sim \triangle DPC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

$\triangle MPB$ cân, đỉnh P cho $\hat{B} = \hat{P}_1$

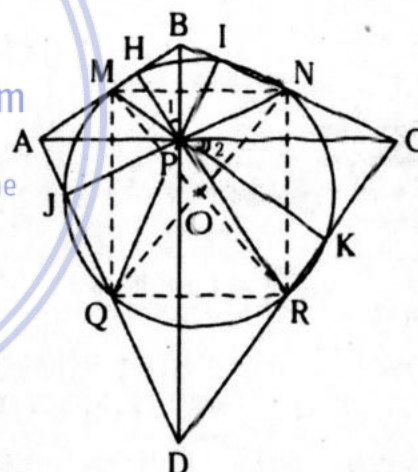
$\Rightarrow \widehat{MPB} = \hat{C}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{MPK} &= \widehat{MPB} + \widehat{BPC} + \widehat{CPK} = \hat{C} + 90^\circ + \widehat{CPK} \\ &= (\hat{D} + \widehat{CPK}) + 90^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$

Ba điểm M, P, K thẳng hàng.

Tương tự, các bộ ba điểm thẳng hàng (I, P, Q); (N, P, J); (R, P, H).

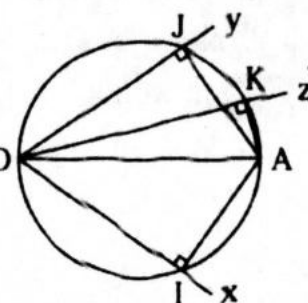
b. MBRQ là hình chữ nhật có hai đường chéo MR và QN cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

**Bài 364**

$\widehat{OIA} = \widehat{OKA} = \widehat{OJA} = 90^\circ$

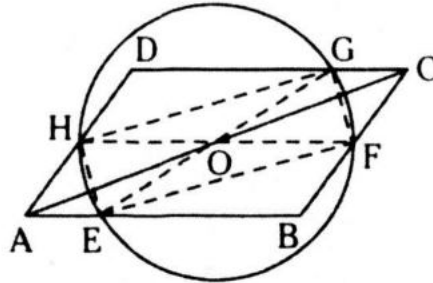
$\Rightarrow 5$ điểm A, O, I, J, K nằm trên đường tròn đường kính OA.

Vì tia Oz di chuyển giữa hai tia Ox, Oy nên quỹ tích điểm K chỉ là cung $\widehat{IAJ}$ thuộc đường tròn đường kính OA (cung chứa điểm A và giới hạn bởi hai điểm I, J).

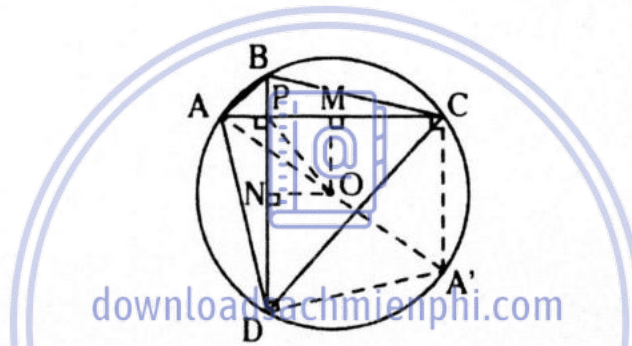


Bài 365

a. Do tính chất đối xứng của đường tròn và của hình bình hành qua điểm O, ta dễ dàng chứng minh hai điểm H và F đối xứng với nhau qua điểm O hay H, O, F thẳng hàng.



b. Tứ giác EFGH là hình bình hành có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Bài 366

a. Chứng minh:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = AD^2 + BC^2$$

$$AD^2 + DA'^2 = AA'^2; \quad BC' = DA$$

$$\text{Suy ra: } PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = AA'^2 = 4R^2.$$

b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. $OM \perp AC$, $ON \perp BD$. Ta có:

$$AM^2 + BN^2 = (OA^2 - OM^2) + (OB^2 - ON^2)$$

$$= OA^2 + OB^2 - (OM^2 + ON^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = 2R^2 - OP^2$$

$$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = 4(2R^2 - OP^2).$$

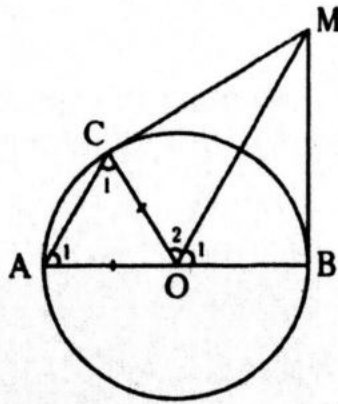
Tổng này không phụ thuộc vào vị trí của hai dây AC, BD thỏa mãn điều kiện đi qua P và $AC \perp BD$.

Bài 367

$$\text{Ta có: } \hat{A}_1 = \hat{O}_1, \hat{C}_1 = \hat{O}_2, \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2.$$

$$\text{Nên } \triangle MBO = \triangle MCO \text{ (cgc)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{MBO} = \widehat{MCO} = 90^\circ \Rightarrow MC \perp OC.$$



Vậy MC là tiếp tuyến tại C của (O).

Bài 368

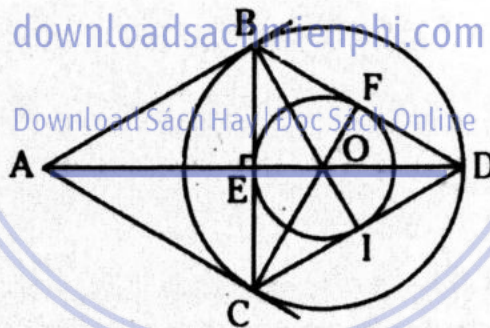
a. Ta có: $OB^2 = OE \cdot OA$

$$\Rightarrow OE = \frac{OB^2}{OA} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

Vậy E trên $(O, \frac{R}{2})$.

Lại có $OE \perp BC$

$\Rightarrow BC$ tiếp xúc với $(O, \frac{R}{2})$ tại E.



$$b. AB^2 = OA^2 - OB^2 = 3R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$$

$$EB^2 = OB^2 - OE^2 = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow EB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Nên $BC = AB = AC = R\sqrt{3} \Rightarrow \triangle ABC$ đều.

$ABCD$ là hình thoi cho $AB = BD = CD$

$$\Rightarrow BD = DC = CB$$

$\Rightarrow \triangle BDC$ đều.

$$c. \triangle ABC \text{ đều, } OE = \frac{1}{3}ED \text{ nên } O \text{ là trọng tâm. Ta có, } OE = OF = OI = \frac{R}{2}$$

$\Rightarrow (O, \frac{R}{2})$ nội tiếp trong $\triangle BCD$.

Bài 369

Xét các trường hợp:

a. M thuộc đoạn thẳng AB .

- Nối OA . Kẻ đường trung trực của đoạn thẳng AM , đường này cắt OA tại điểm I .

- Dựng đường tròn $(I; IA)$.

Đường tròn này đi qua M và tiếp xúc với đường tròn (O) tại A .

Với đường tròn (J) , dựng tương tự.

Từ các tam giác cân AIM , MJB , AOB ta suy ra $IM \parallel OJ$ và $IO \parallel JM$

$\Rightarrow OIMJ$ là hình bình hành, ta có: $OI = MJ$

$$OA = AI + IO \Rightarrow OA = AI + MJ.$$

Gọi R, R_1, R_2 theo thứ tự là bán kính của đường tròn $(O), (I), (J)$ thì

$$R = R_1 + R_2.$$

b. Trường hợp M không nằm trên đoạn thẳng AB .

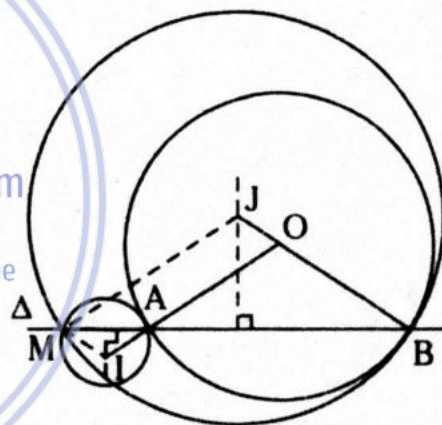
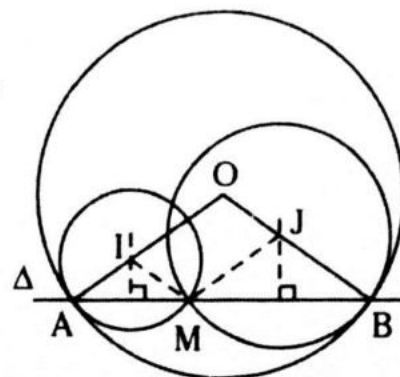
Cách dựng: theo hình vẽ.

Tâm I là giao điểm của OA với đường trung trực của đoạn thẳng AM .

Tâm J là giao điểm của OB với đường trung trực của đoạn thẳng BM .

Tứ giác $OIMJ$ là hình bình hành.

Ta có: $OB = |IM - JB| \Rightarrow R = |R_1 - R_2|.$

**Bài 370**

a. Gọi H là giao điểm của tiếp tuyến chung tại M của hai đường tròn với $X'X$, ta có: $HA = HM$

$\Rightarrow$ hai tam giác vuông AHI và MHO bằng nhau.

$\Rightarrow AI = OM = R =$ không đổi.

$\Rightarrow$ Suy ra I là điểm cố định.

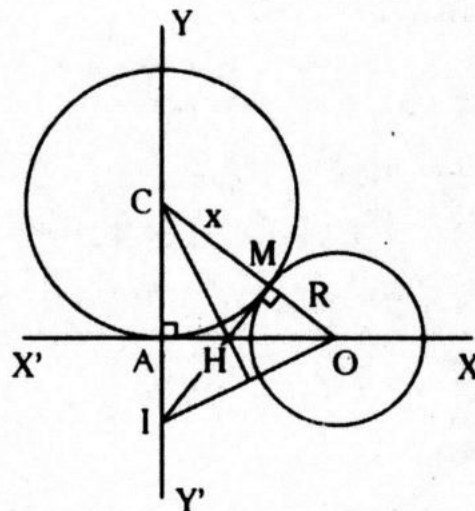
b. Hai đường tròn (C) và (O) tiếp xúc ngoài tại M nên: $OC = x + R$

$$OC^2 = CA^2 + OA^2$$

$$\Rightarrow (x + R)^2 = x^2 + d^2 \Rightarrow x = \frac{d^2 - R^2}{2R}$$

$$x > 0$$

$$\Rightarrow d > R.$$



Suy ra: $\widehat{MM'B} = \widehat{M'AB}$.

Vậy quỹ tích M là (B, a).

Bài 373

- a. Kẻ tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại A, cắt BC tại D

$$\Rightarrow DB = DC = DA$$

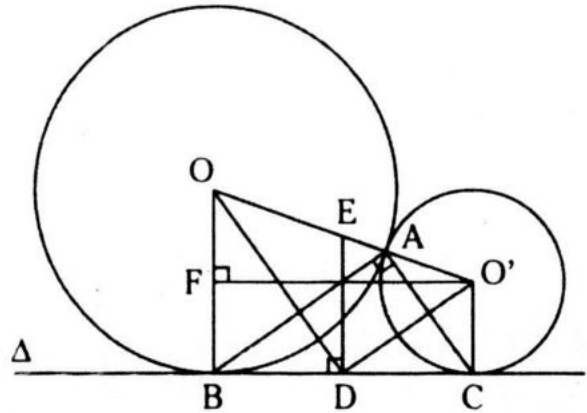
$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông.}$$

- b. Để chứng minh $\widehat{ODO'} = 90^\circ$. ED là đường trung bình hình thang BOO'C

$$\Rightarrow EO = ED = EO'$$

$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$

- c. Kẻ $OF \perp OB$, $BC = 2\sqrt{21}$ cm.



downloadsachmienphi.com

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Chương III

GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

§1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

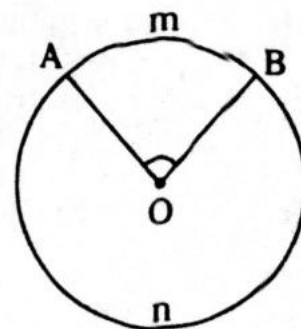
1. Góc ở tâm

Định nghĩa

Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.

Cung nằm bên trong góc AOB được gọi là "cung nhỏ" $\widehat{AmB}$. Cung $\widehat{AmB}$ gọi là cung bị chắn.

Cung nằm bên ngoài góc AOB được gọi là "cung lớn" $\widehat{AnB}$.



2. Số đo cung

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo của cung lớn bằng 360° trừ đi số đo của cung nhỏ.
- Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

* Chú ý

- Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180° ;
- Cung lớn có số đo lớn hơn 180° ;
- Cung có điểm đầu, điểm cuối trùng nhau có số đo 0° ;
- Cung cả đường tròn có số đo 360° .

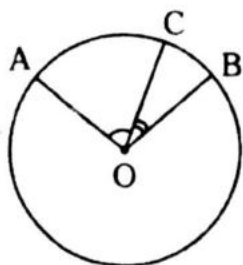
3. So sánh hai cung

- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.
- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

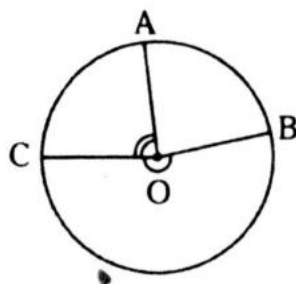
4. Khi nào thì số đo $\widehat{AB} = \text{số đo } \widehat{AC} + \text{số đo } \widehat{CB}$?

Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì :

$$\text{Số đo } \widehat{AB} = \text{Số đo } \widehat{AC} + \text{Số đo } \widehat{CB}.$$



Điểm C nằm trên cung nhỏ $\widehat{AB}$



Điểm C nằm trên cung lớn $\widehat{AB}$

B. BÀI TẬP

Bài 374 Tính góc tạo thành giữa hai kim đồng hồ ở các thời điểm :

a. 3 giờ

b. 5 giờ

c. 7 giờ 20 phút.

HƯỚNG DẪN GIẢI

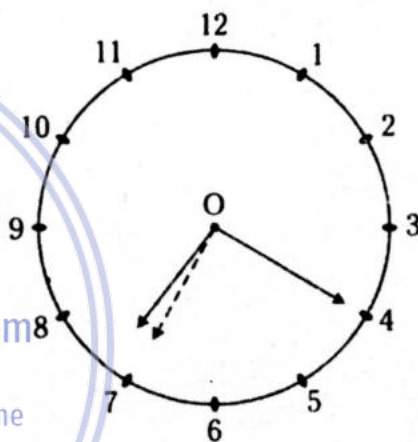
a. Góc ở tâm tạo bởi hai kim giữa hai số liên nhau là $360^\circ : 12 = 30^\circ$.

Khi kim đồng hồ chỉ 3 giờ, góc tạo thành giữa hai kim đồng hồ là $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$.

b. Khi kim đồng hồ chỉ 5 giờ, góc tạo thành giữa hai kim đồng hồ là $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$.

c. • Từ 7h đến 7h20 kim phút đã đi được $\frac{1}{3}$ vòng, còn kim giờ đi được $\frac{1}{3}$ góc giữa số 7 và số 8 tức 10° .

• Vậy góc tạo bởi hai kim là $10^\circ + 30^\circ \times 3 = 100^\circ$.



Bài 375 Cho TR là tiếp tuyến của đường tròn tâm O. Gọi S là giao điểm của OT với (O). Cho Số $\widehat{SR} = 67^\circ$. Tính số đo $\widehat{OTR}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

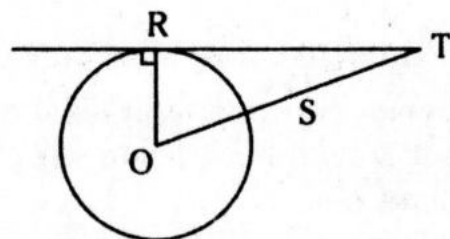
Ta có : $\widehat{ROT} = 67^\circ$.

Mà RT là tiếp tuyến

nên $\widehat{ORT} = 90^\circ$.

Trong tam giác vuông ORT ta có :

$$\widehat{OTR} = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ.$$



Bài 376 Một biểu đồ hình quạt được giới hạn bởi hai bán kính OA, OB của hình tròn diễn tả tỉ số phần trăm số học sinh giỏi của toàn trường là 20%.

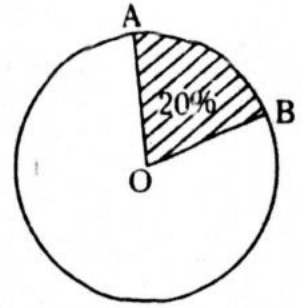
Hỏi số đo của cung $\widehat{AB}$ là bao nhiêu độ ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Toàn bộ cung đường tròn có số đo 360° . Cung $\widehat{AB}$ có số đo là : $20\% \cdot 360^\circ = 0,2 \cdot 360^\circ = 72^\circ$.

Vậy : $sđ \widehat{AB} = 72^\circ$.

Bài 377 Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm ngoài đường tròn. Qua P , kẻ các tiếp tuyến PA, PB với (O) . Biết $\widehat{APB} = 36^\circ$, hỏi các bán kính OA, OB tạo thành các góc ở tâm bao nhiêu độ ?

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

PA, PB là hai tiếp tuyến của (O) tại A và B nên:

$$OA \perp PA, \quad OB \perp PB$$

Suy ra : $\widehat{OAP} = \widehat{OBP} = 90^\circ$

Tổng số các góc của một tứ giác bằng 360° , do đó :

$$\widehat{APB} + \widehat{O_1} = 180^\circ \Rightarrow 36^\circ + \widehat{O_1} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$

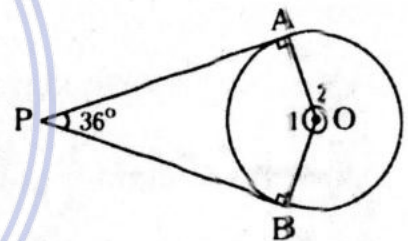
Hai bán kính OA và OB tạo thành hai góc ở tâm $\widehat{O_1}$ và $\widehat{O_2}$:

$$\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 360^\circ \Rightarrow 144^\circ + \widehat{O_2} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{O_2} = 360^\circ - 144^\circ = 216^\circ$$

Vậy các góc ở tâm mà bán kính OA, OB tạo thành là

$$\widehat{O_1} = 144^\circ, \quad \widehat{O_2} = 216^\circ$$



Bài 378 Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau theo hai cung có số đo bằng nhau. Chứng minh rằng hai đường tròn có bán kính bằng nhau.

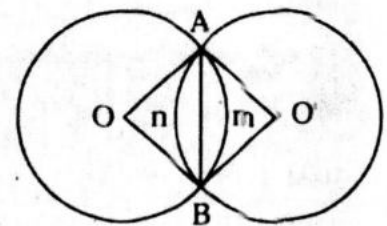
HƯỚNG DẪN GIẢI

Giả sử (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Theo giả thiết

$$sđ \widehat{AmB} = sđ \widehat{AnB} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AO'B}$$

Hai tam giác OAB và $O'AB$ đều là tam giác cân, có góc ở đỉnh bằng nhau, suy ra các góc ở đáy cũng bằng nhau.

$$\text{Vậy} \quad \triangle AOB = \triangle AO'B' \text{ (g.c.g)} \quad \Rightarrow \quad OA = O'A \text{ (dpcm)}$$



Bài 379 Cho C là một điểm nằm trên cung lớn AB của đường tròn (O)

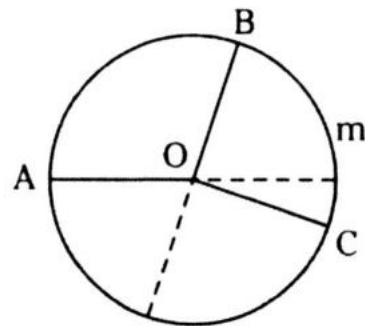
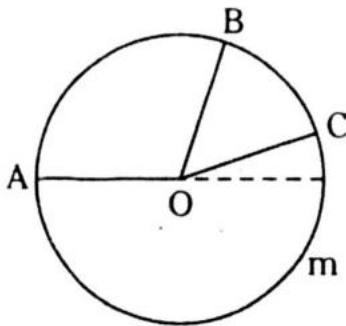
Điểm C chia cung lớn $\widehat{AB}$ thành hai cung $\widehat{AC}$ và $\widehat{CB}$.

Chứng minh rằng $sđ \widehat{AB} = sđ \widehat{AC} + sđ \widehat{CB}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Hai trường hợp có thể xảy ra :

- a. Tia OC nằm trong một góc kề bù với góc ở tâm AOB hoặc trùng với tia đối của một cạnh của góc ở tâm.



Trong trường hợp này $\widehat{AmC}$ là cung lớn. Bởi vậy :

$$\begin{aligned} \text{sđ } \widehat{AmC} + \text{sđ } \widehat{CB} &= 360^\circ - \widehat{AOC} + \widehat{COB} = 360^\circ - (\widehat{AOC} - \widehat{COB}) \\ &= 360^\circ - \widehat{AOB} = \text{sđ } \widehat{AmB}. \end{aligned}$$

- b. Tia OC nằm trong góc đối đỉnh của góc ở tâm AOB. Khi đó AC và BC là những cung nhỏ. Bởi vậy :

$$\text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{BC} = \widehat{AOC} = \widehat{COB} = 360^\circ - \widehat{AOB} = 360^\circ - \text{sđ } \widehat{AB} = \text{sđ } \widehat{AmB}.$$

- Bài 380** Cho n điểm cùng nằm trên một đường tròn. Hỏi n điểm đó chia đường tròn thành bao nhiêu cung ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Cứ mỗi cặp điểm khác nhau trên đường tròn xác định hai cung. Nếu chọn một điểm trong số n điểm ghép với $n - 1$ điểm còn lại, ta được $n - 1$ cặp điểm. Vì có n điểm nên có $n(n - 1)$ cặp điểm theo cách ghép trên, nhưng như vậy mỗi cặp điểm được tính hai lần. Từ đó suy ra số cung trên đường tròn là $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$ (cung).

- Bài 381** Cho đường tròn $(O; R)$ và một dây AB sao cho số đo của cung lớn AB gấp đôi cung nhỏ AB. Tính diện tích $\triangle AOB$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\text{Ta có: } \text{sđ } \widehat{AB}_{\text{lớn}} + \text{sđ } \widehat{AB}_{\text{nhỏ}} = 360^\circ$$

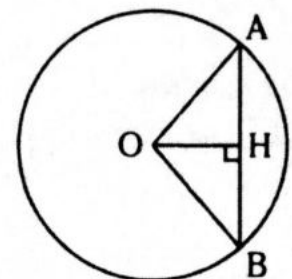
$$\text{mà } \text{sđ } \widehat{AB}_{\text{lớn}} = 2 \text{sđ } \widehat{AB}_{\text{nhỏ}}$$

$$\text{sđ } \widehat{AB}_{\text{nhỏ}} = \text{sđ } \widehat{AOB}$$

$$\text{nên } \text{sđ } \widehat{AB}_{\text{nhỏ}} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ.$$

$$\text{Kẻ } OH \perp AB \Rightarrow \widehat{AOH} = 60^\circ$$



$\Rightarrow \Delta OAH$ là nửa tam giác đều

$$\Rightarrow OH = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2} \text{ và } AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } OH \perp AB \text{ nên } AB = 2 \cdot AH = 2 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy: } S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

Bài 382 Trên dây cung AB của đường tròn $(O; R)$ ($AB \neq 2R$) có hai điểm C, D sao cho $AC = CD = DB$. Các tia OC, OD cắt cung AB lần lượt ở E, F . Chứng minh:

a. $\widehat{AE} = \widehat{BF}$

b. Tứ giác $AEFB$ là hình thang cân

c. $\widehat{AE} < \widehat{EF}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. ΔOAB cân tại O ($OA = OB$)

$$\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OBD}$$

$$\Delta AOC = \Delta BOD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD} \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BF}.$$

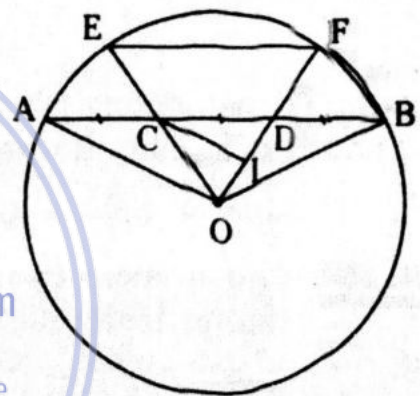
b. ΔOEF có $\frac{OC}{OE} = \frac{OD}{OF}$

$$\Rightarrow CD \parallel EF \text{ và } \widehat{OEF} = \widehat{OFE}.$$

c. Gọi I là trung điểm của $OD \Rightarrow CI \parallel AO$

$$CI = \frac{1}{2} OA, OI = \frac{1}{2} OD < \frac{1}{2} OE$$

$$\Delta COI \text{ có } OI < CI \Rightarrow \widehat{OCI} < \widehat{COI} \Rightarrow \widehat{COA} < \widehat{COI}.$$



§2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý 1

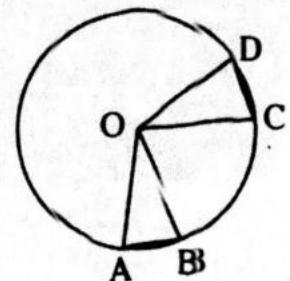
Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

a. Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD.$$

b. Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau

$$AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}.$$



2. Định lý 2

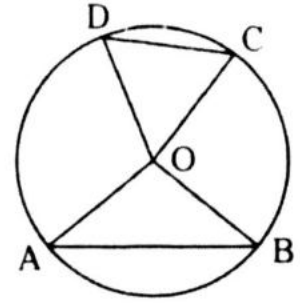
Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :

a. Cung lớn hơn căng dây lớn hơn

$$\widehat{AB} > \widehat{CD} \Rightarrow AB > CD.$$

b. Dây lớn hơn căng cung lớn hơn

$$AB > CD \Rightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD}.$$

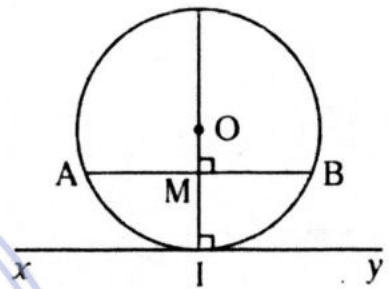


B. BÀI TẬP

Bài 383 Chứng minh rằng nếu một tiếp tuyến song song với một dây thì tiếp điểm chia đôi cung căng dây.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Nối OI cắt AB tại M . Ta có $OI \perp xy$ (tính chất của tiếp tuyến) mà $AB \parallel xy$ nên $OI \perp AB$. Suy ra $IA = IB$ (tính chất đường kính vuông góc với một dây).



Bài 384 Chứng minh rằng hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

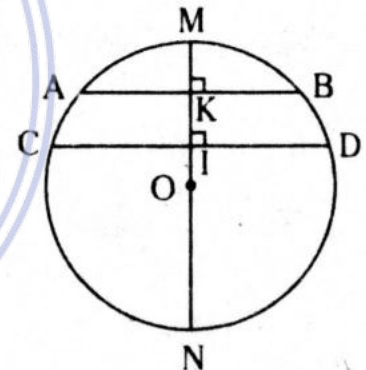
HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ đường kính $MN \perp CD$ tại I cắt AB tại K . Vì $AB \parallel CD$ nên $MN \perp AB$.

Giả sử K nằm giữa M và I ta được :

$$\widehat{MC} = \widehat{MD} \text{ và } \widehat{MA} = \widehat{MB}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{MC} - \widehat{MA} = \widehat{MD} - \widehat{MB} \text{ hay } \widehat{AC} = \widehat{BD}.$$



Bài 385 Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AC có số đo nhỏ hơn 90° . Vẽ dây $CD \perp AB$ và dây $DE \parallel AB$. Chứng minh rằng $AC = BE$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có $AB \perp CD$ (gt)

$$\text{Suy ra } \widehat{AC} = \widehat{AD} \quad (1)$$

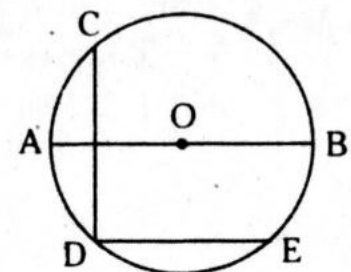
(đường kính vuông góc với một dây)

Mặt khác $AB \parallel DE$ (gt)

$$\text{nên : } \widehat{BE} = \widehat{AD} \quad (2)$$

(Hai cung chắn giữa hai dây song song).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AC} = \widehat{BE}$.



Bài 386 Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác DBC. Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc với BC và BD. Các đường vuông góc này cắt BC và BD lần lượt ở H và K. Chứng minh rằng $OH > OK$ và $BD > BC$ (với BD, BC những cung nhỏ của đường tròn tâm O).

HƯỚNG DẪN GIẢI

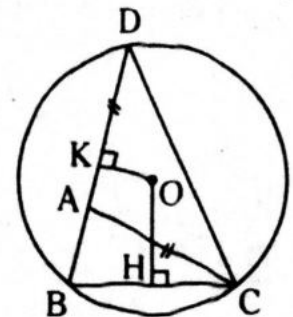
Xét tam giác ABC có $BC < AB + AC$ (bất đẳng thức tam giác)

Mà $AD = AC$ (gt)

Nên $BC < AB + AD$ hay $BC < BD$

Suy ra $OH > OK$ (đây nào lớn hơn thì gần tâm hơn).

Vì $BC < BD$ nên $\widehat{BC} < \widehat{BD}$ (định lí 2).



Bài 387 Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Trên tia đối của tia BA lấy điểm D. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác BCD.

a. So sánh số đo các cung $\widehat{DB}$, $\widehat{BC}$ và $\widehat{DC}$;

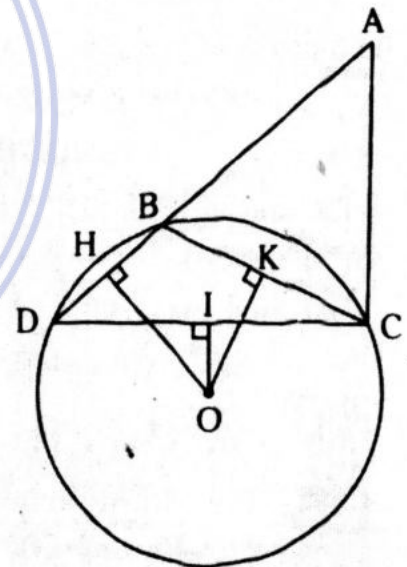
b. Từ O hạ OI , OH và OK lần lượt vuông góc với DC, DB và BC. So sánh các đoạn OI , OH , OK .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tam giác ABC là tam giác cân nên $\widehat{ABC} < 90^\circ$, suy ra $\widehat{DBC} > 90^\circ$, vì thế DC là một dây cung của đường tròn tâm O tương ứng nhỏ DC. Do $B \in DC$ nên $DB + BC \cong DC$ suy ra $BD < DC$; $BC < DC$, vì thế $DB < DC$ và $CB < DC$, do đó $OI < OH$ và $OH < OK$.

Vì D trên tia đối của tia BA nên

- Nếu $DB = BC$ thì $\widehat{BD} = \widehat{BC}$ và $OH = OK$;
- Nếu $DB < BC$ thì $\widehat{DB} < \widehat{BC}$ và $OH > OK$;
- Nếu $DB > BC$ thì $\widehat{DB} > \widehat{BC}$ và $OH < OK$.



Bài 388 Cho đường tròn $(O; r)$ với dây AB. Gọi H là trung điểm của AB và I là điểm chính giữa của cung AB (cung nhỏ hoặc cung lớn, hoặc cung nửa đường tròn).

a. Chứng minh rằng ba điểm H, I, O thẳng hàng.

b. Cho cung CD cũng nhận I làm điểm chính giữa. Chứng minh rằng $CD \parallel AB$ hoặc CD trùng với AB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Chứng minh H, I, O thẳng hàng vì H là trung điểm của AB nên $OH \perp AB$.

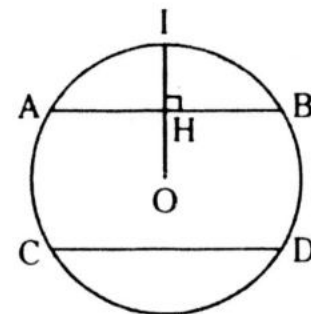
Đường thẳng OH là đường trung trực của đoạn AB. I là điểm chính giữa cung AB nên :

$$\widehat{IA} = \widehat{IB} \Rightarrow IA = IB$$

$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của AB.

Vậy H, I, O thẳng hàng.

b. Vì AB và CD cùng vuông góc với OI nên $AB \parallel CD$ hoặc AB trùng CD.



Bài 389 Trên đường tròn (O; R) lấy bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự sao cho: $AB = BC = CD = DA$.

a. Chứng minh rằng ABCD là một hình vuông.

b. Tính cạnh của hình vuông ABCD theo R.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có : $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DA}$, $AB = BC = CD = DA$

Do đó ABCD là một hình thoi. Ta lại có :

$$\text{Số } \widehat{AB} + \text{Số } \widehat{BC} = \text{Số } \widehat{CD} + \text{Số } \widehat{DA} = 180^\circ$$

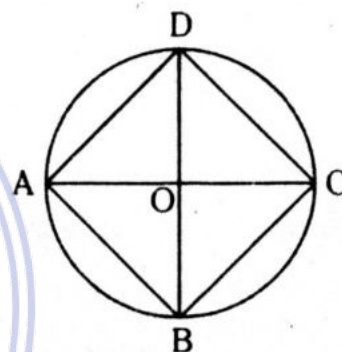
$\Rightarrow AC$ và BD là hai đường kính của O.

Hình thoi ABCD có hai đường chéo bằng nhau ($AC = BD$) nên là một hình vuông.

b. $\triangle OAB$ vuông tại O $\Leftrightarrow AB^2 = 2R^2$.

Do đó : $AB = R\sqrt{2}$.

Download Sách Hay | Đọc Sách Online



Bài 390 Cho đường tròn tâm O. Trên nửa đường tròn đường kính AB lấy hai điểm C, D. Từ C kẻ CH vuông góc với AB, nó cắt tiếp đường tròn tại E từ A kẻ AK vuông góc với DC, nó cắt tiếp đường tròn tại F. Chứng minh $DE = BF$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Theo giả thiết, ta chứng minh được : AFC là tam giác vuông ở F thì có trung tuyến bằng nửa cạnh huyền (bằng bán kính).

$$\Rightarrow \widehat{AFB} = 1v \Rightarrow AF \perp BF \text{ mà } CD \perp AF (AK \perp CD) \Rightarrow CD \parallel BF$$

$$\text{Suy ra } \widehat{CF} = \widehat{DB} \quad (1)$$

• Do tính chất đối xứng của đường kính ta có :

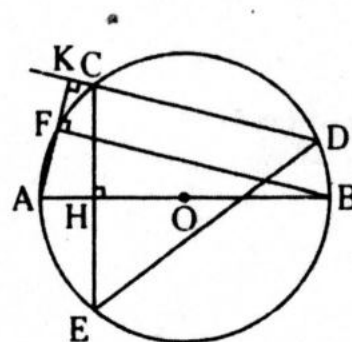
$$\widehat{BC} = \widehat{BE} \quad (2)$$

• Cộng từng vế của (1) và (2) ta được :

$$\widehat{BC} + \widehat{CF} = \widehat{DB} + \widehat{BE}$$

$$\text{Hay } \widehat{BF} = \widehat{DE} \quad (3)$$

• Với (3) ta suy ra được $DE = BF$.

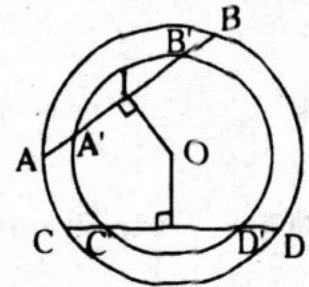


Bài 391 Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$, $(O; R')$; dây AB của đường tròn $(O; R)$ chứa dây $A'B'$ của đường tròn $(O; R')$; dây CD của đường tròn $(O; R)$ chứa dây $C'D'$ của đường tròn $(O; R')$. Chứng minh rằng nếu hai cung nhỏ AB , CD bằng nhau thì hai cung nhỏ $A'B'$, $C'D'$ cũng bằng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ $OI \perp AB$, $OJ \perp CD$

$$\begin{aligned} \widehat{AB} = \widehat{CD} &\Rightarrow AB = CD &\Rightarrow OI = OJ \\ &\Rightarrow A'B' = C'D' &\Rightarrow \widehat{A'B'} = \widehat{C'D'}. \end{aligned}$$



§3. GÓC NỘI TIẾP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

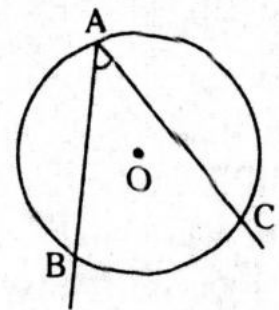
Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Cung nằm bên trong góc là cung bị chắn.

2. Định lý

Trong một đường tròn số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{Số } \widehat{BC}.$$



3. Hệ quả. Trong một đường tròn :

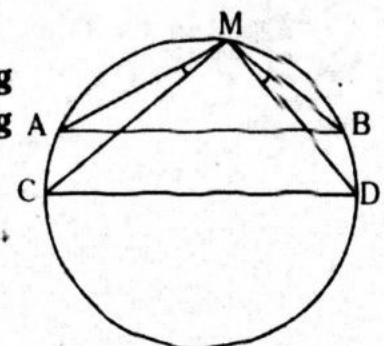
- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Mọi góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B. BÀI TẬP

Bài 392 Cho đường tròn (O) và hai dây cung song song AB , CD . Trên cung AB lấy một điểm M . Chứng minh rằng $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta biết rằng, hai dây song song chắn giữa chúng hai cung bằng nhau : $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$.



Ta có : các góc nội tiếp AMC và BMD chắn hai cung AC và BD bằng nhau nên bằng nhau :

$$\widehat{AMC} = \widehat{BMD}.$$

Bài 393 AB, BC, CA là ba dây cung của đường tròn (O). Từ trung điểm M của cung AB ta vẽ dây MN // BC. Gọi giao điểm của MN và AC là S. Chứng minh rằng SM = SC và SN = SA.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta sẽ chứng minh $\triangle MAS = \triangle CNS$.

Ta có : AM = BM (do $\widehat{AM} = \widehat{BM}$)

BM = CN (do MN // BC)

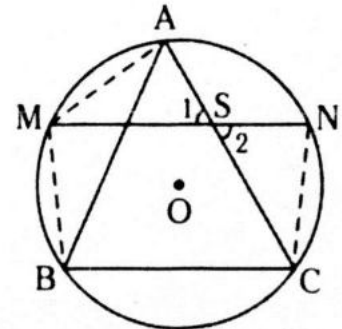
Từ đó AM = CN

$\widehat{S_1} = \widehat{S_2}$ (đối đỉnh)

$\widehat{AMS} = \widehat{NCS}$ (cùng chắn AN)

Vậy $\triangle MAS = \triangle CNS$ (g.c.g)

Suy ra : SM = SC và SN = SA.



Bài 394 Cho đường tròn (O) đường kính AB và hai điểm E, F nằm trên đường tròn. Các đường thẳng AE và BF cắt nhau tại P nằm ngoài (O); AF và BE cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng PQ vuông góc với AB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Các góc $\widehat{AEB}$ và $\widehat{AFB}$ nội tiếp trong nửa đường tròn nên là các góc vuông :

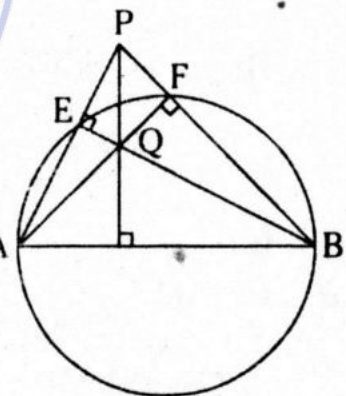
$$\bullet \quad \widehat{AEB} = 1v \Rightarrow BE \perp AP$$

$$\bullet \quad \widehat{AFB} = 1v \Rightarrow AF \perp BP$$

Trong tam giác PAB, AF và BE là hai đường cao nên A giao điểm Q của chúng là trực tâm của tam giác.

Ta suy ra PQ là đường cao thứ ba của $\triangle PAB$.

Do đó : $PQ \perp AB$.



Bài 395 Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB = AC. Qua A vẽ một cát tuyến cắt dây BC ở D và cắt đường tròn (O) ở E.

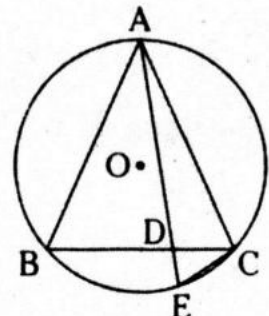
Chứng minh $AB^2 = AD \cdot AE$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có : AB = AC (gt) $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$

mà Sđ $\widehat{AEC} = \frac{1}{2}$ Sđ $\widehat{AC}$

Sđ $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}$ Sđ $\widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ACD}$



Mặt khác $\widehat{CAD}$: góc chung

$$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AE \text{ hay } AB^2 = AD \cdot AE.$$

Bài 396 Cho tam giác ABC đường cao AH nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AD. Chứng minh rằng : $AB \cdot AC = AH \cdot AD$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

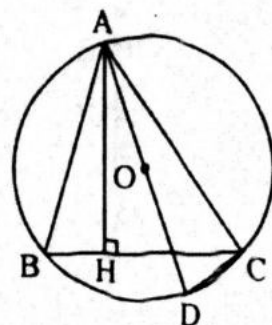
$\triangle ADC$ nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính AD nên vuông tại C.

Ta có : $\widehat{ABH} = \widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

Do đó : $\triangle ABH \sim \triangle ADC$

$$\text{Suy ra : } \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AB \cdot AC = AH \cdot AD.$$

Vậy : $AB \cdot AC = AH \cdot AD$.



Bài 397 Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R) có $AB = 8$ cm, $AC \approx 15$ cm, đường cao $AH = 5$ cm (điểm H nằm trên cạnh BC). Tính bán kính của đường tròn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ đường kính AD. Ta có :

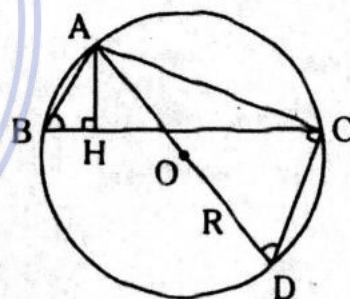
$\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung),

$\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Vậy $\triangle AHB \sim \triangle ADC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{5}{15} = \frac{8}{2R} \Rightarrow R = 12 \text{ (cm)}$$

Bán kính đường tròn (O) bằng : 12 cm.



Bài 398 Cho nửa đường tròn đường kính AD. Trên nửa đường tròn ta chọn các dây cung $AB = BC = 2\sqrt{5}$ cm. Tính bán kính của nửa đường tròn biết $CD = 6$ cm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chứng minh OI là đường trung bình $\triangle ACD$.

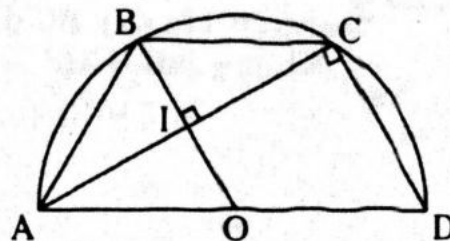
$$\Rightarrow OI = \frac{CD}{2} = 3 \text{ cm}$$

Sử dụng định lý Pitago với các $\triangle$ vuông ABI, AIO.

$$\Rightarrow AB^2 - BI^2 = OA^2 - OI^2$$

$$\Rightarrow 20 - (R - 3)^2 = R^2 - 3^2 \text{ (R là bán kính (O))}$$

$$\Rightarrow R^2 - 3R - 10 = 0 \Rightarrow R = 5 \text{ (cm)}$$



Bài 399 Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M nằm trên cung BC. Chứng minh rằng $MB + MC = MA$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Trên dây MA, lấy $MD = MB$ (1)

Ta có : $\widehat{BMD} = \widehat{BCA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

mà : $\widehat{BCA} = 60^\circ$ ($\triangle ABC$ đều)

$\Rightarrow \widehat{BMD} = 60^\circ$

$\triangle MBD$ cân tại M ($MD = MB$), lại có $\widehat{BMD} = 60^\circ$ nên là một tam giác đều $\Rightarrow DB = MB$.

Ta có $\widehat{B_1} + \widehat{B_3} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$

Hai tam giác DBA và MBC có :

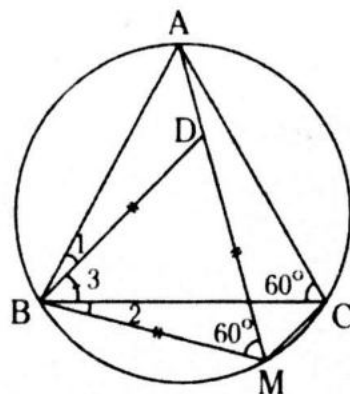
$DB = MB$ (chứng minh trên)

$\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (chứng minh trên)

$BA = BC$ ($\triangle ABC$ đều)

nên bằng nhau : $\triangle DBA = \triangle MBC$ (cgc) $\Rightarrow DA = MC$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MB + MC = MA$.



Bài 400 Cho đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M vẽ một cát tuyến bất kỳ cắt đường tròn tại A và B. Chứng minh tích $MA \cdot MB$ không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến.

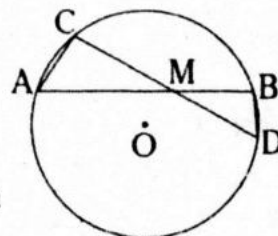
HƯỚNG DẪN GIẢI

* Xét M ở bên trong đường tròn.

Vẽ cát tuyến tùy ý qua M cắt (O) tại C, D.

Chứng minh $\triangle MAC \sim \triangle MDB \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$

* Xét M ở bên ngoài đường tròn cũng vẽ và chứng minh tương tự.



Bài 401 Cho $\triangle ABC$ có diện tích S bán kính đường tròn ngoại tiếp là R và $\triangle ABC$ có các cạnh tương ứng là a, b, c. Chứng minh công thức $S = \frac{abc}{4R}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dựng đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có tâm O, bán kính R và đường cao AH; đường kính AA'.

Chứng minh $\triangle ABH \sim \triangle AA'C \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{AD} = \frac{b \cdot c}{2R}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{abc}{4R}$.

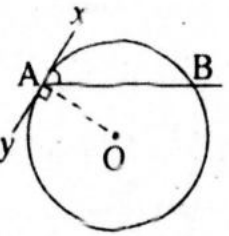


§4. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

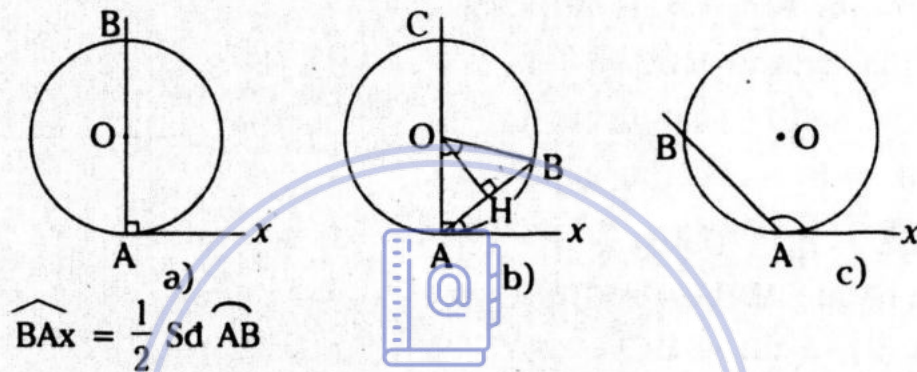
1. Định nghĩa

Góc BAx có đỉnh A nằm trên đường tròn, cạnh Ax là một tia tiếp tuyến còn cạnh kia chứa dây cung AB. Ta gọi BAx là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung.



2. Định lý

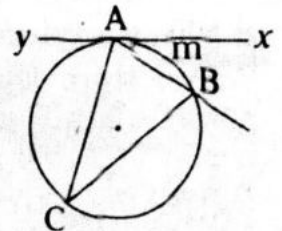
Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.



$$\widehat{BAx} = \frac{1}{2} \text{Số } \widehat{AB}$$

3. Hệ quả

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.



B. BÀI TẬP

Bài 402 Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O') cắt lại đường tròn (O) tại P. Tia PB cắt đường tròn (O') tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng AQ song song với tiếp tuyến tại P của đường tròn (O).

HƯỚNG DẪN GIẢI

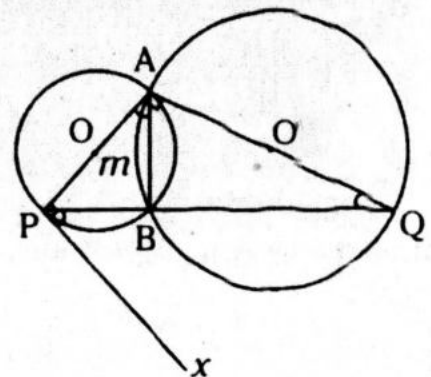
Nối AB. Ta có :

$\widehat{AQB} = \widehat{PAB}$ (góc giữa một tia tiếp tuyến và một dây đi qua tiếp điểm bằng góc nội tiếp cùng chắn một cung.)

$$\widehat{PAB} = \widehat{BPx} \text{ (tương tự như trên)}$$

$$\text{Suy ra : } \widehat{AQB} = \widehat{BPx}$$

Hai góc này ở vị trí so le trong nên $AQ \parallel Px$.



Bài 403 Cho hai đường tròn tâm O, O' tiếp xúc ngoài nhau tại A. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm phân biệt B, C khác A. Các đường thẳng BA, CA cắt tiếp đường tròn (O) tại B'C'. Chứng minh $BC \parallel B'C'$.

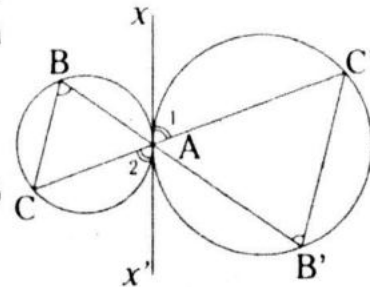
HƯỚNG DẪN GIẢI

Vẽ tiếp tuyến chung x'Ax. Dựa theo hình vẽ bên ta có

$$\widehat{C'B'B} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{CBB'};$$

từ đây ta chứng minh được

$$BC \parallel B'C'.$$



Bài 404 Cho đường tròn tâm O. Từ một điểm M ngoài đường tròn ta kẻ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB tới đường tròn. Chứng minh rằng :

$$MT^2 = MA \cdot MB$$

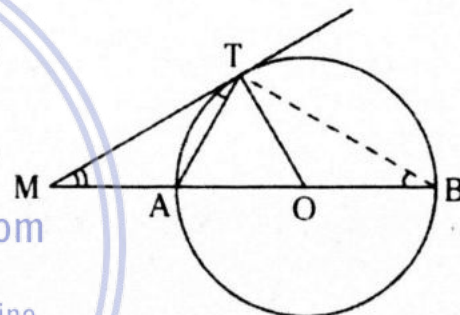
HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có $\widehat{MTA} = \widehat{MBT}$ (góc giữa một tia tiếp tuyến và một dây đi qua tiếp điểm bằng góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Góc $\widehat{BMT}$ là góc chung của hai tam giác AMT và TMB. Do đó $\triangle TMB \sim \triangle AMT$ (g.g) nên $\frac{AM}{MT} = \frac{MT}{MB}$

$$\text{Suy ra } MT^2 = MA \cdot MB$$

Đoạn thẳng MT được gọi là trung bình nhân của hai đoạn MA và MB.



Bài 405 Trên cạnh Mx của góc xMy khác góc bẹt lấy hai điểm A và B. Trên cạnh My lấy điểm T sao cho $MT^2 = MA \cdot MB$.

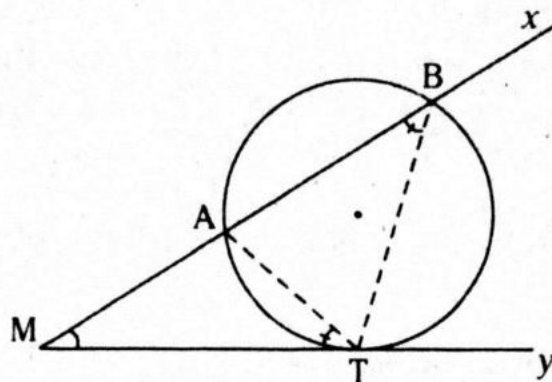
Chứng minh rằng đường thẳng My tiếp xúc với đường tròn qua ba điểm A, B, T tại điểm T.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Từ giả thiết $MT^2 = MA \cdot MB$ ta có $\frac{MB}{MT} = \frac{MT}{MA}$.

Do hai tam giác AMT và TMB có góc M chung nên :

$\triangle TMB \Leftrightarrow \triangle AMT$ (c.g.c) do đó $\widehat{ATM} = \widehat{MBT}$. Theo bài toán 317 thì MT tiếp xúc với đường tròn qua ba điểm A, B, T tại điểm T.



Bài 406 Cho hai đường tròn tâm O và tâm O' cắt nhau tại A và B. Qua A vẽ tiếp tuyến Ax với đường tròn (O) nó cắt đường tròn (O') tại E. Qua A vẽ tiếp tuyến Ay với đường tròn (O') nó cắt đường tròn (O) tại D.

a. Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle EBA$.

b. Chứng minh $\left(\frac{AE}{AD}\right)^2 = \frac{EB}{BD}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta chứng minh được $\widehat{AEB} = \widehat{DAB}$ (cùng chắn AB của (O')) (1)

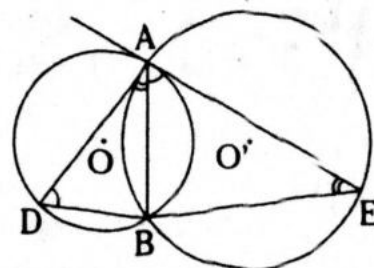
$\widehat{ADB} = \widehat{BAE}$ (cùng chắn AB của (O)) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABD \sim \triangle EBA$.

b. Từ $\triangle ABD \sim \triangle EBA$ ta có :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{BD} \quad (*) \quad \text{và} \quad \frac{AE}{AD} = \frac{EB}{AB} \quad (**)$$

Nhân từng vế của (*) và (**) ta được $\left(\frac{AE}{AD}\right)^2 = \frac{EB}{BD}$



Bài 407 Cho hai đường tròn tâm O và O' tiếp xúc ngoài tại A. Qua A kẻ một cát tuyến cắt đường tròn (O) ở B và cắt đường tròn (O') ở C. Kẻ các đường kính BOD và CO'E của hai đường tròn trên.

a. Chứng minh BD song song với CE.

b. Chứng minh ba điểm D, A, E thẳng hàng.

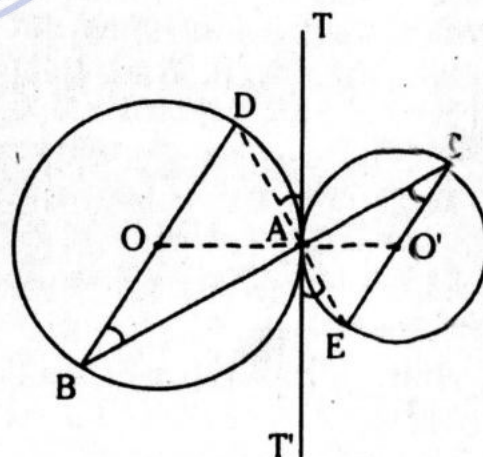
c. Nếu đường tròn tâm (O) bằng đường tròn tâm (O') thì tứ giác BDCE là hình gì? Chứng minh.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\widehat{BAD} = 90^\circ$, $\widehat{CAE} = 90^\circ$ nên $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ mà hai tia AD và AE thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau qua BC, do đó ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b. Kẻ tiếp tuyến chung TAT', ta có $\widehat{DBA} = \widehat{DAT}$ và $\widehat{ECA} = \widehat{EAT'}$ mà $\widehat{DAT} = \widehat{EAT'} \Rightarrow \widehat{DBA} = \widehat{ECA}$, do đó $BD \parallel CE$.

c. Nếu đường tròn tâm O bằng đường tròn tâm O' thì $BD = CE$. Tứ giác BDCE là hình bình hành, lại có $BC \perp DE$ nên BDCE là hình thoi.



Bài 408 Trong đường tròn tâm O cho dây CA và đường kính B'OB song song với CA (A thuộc cung nhỏ CB).

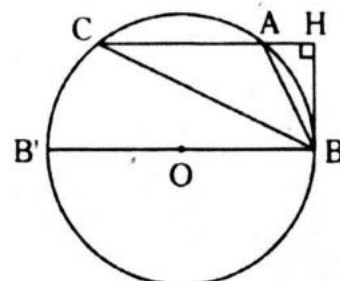
- a. Chứng minh rằng đường cao BH của tam giác ABC là tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại B.
- b. Chứng minh rằng $\widehat{CAB} - \widehat{BCA} = 90^\circ$.
- c. Chứng minh $HB^2 = HA \cdot HC$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $CA \parallel B'B$, mà $BH \perp CA$ nên $BH \perp BB'$ tại B. Vậy BH là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B.

b. Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{ABH}$. Vì $\widehat{CAB} = 90^\circ + \widehat{ABH} = 90^\circ + \widehat{ACB}$, suy ra $\widehat{CAB} - \widehat{ACB} = 90^\circ$.

c. $\triangle HBA \sim \triangle HCB \Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{HC}{HB} \Rightarrow HB^2 = HA \cdot HC$.



Bài 409 Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó và dựng các đường tròn đường kính AB, BC. Từ A vẽ tiếp tuyến với đường tròn đường kính BC tại D, tiếp tuyến này cắt đường tròn đường kính AB tại E. Chứng minh BD là tia phân giác EBC.

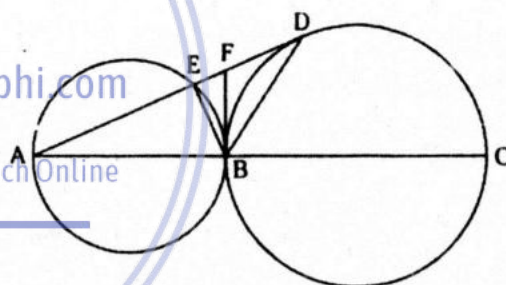
HƯỚNG DẪN GIẢI

Đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính BC tiếp xúc ngoài tại B. Kẻ tiếp tuyến chung tại B cắt ED tại F.

Chứng minh được:

$$\widehat{EBD} = \widehat{DAB} + \widehat{ADB}$$

Từ đó suy ra đpcm.



Bài 410 Cho đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh Ox và Oy của góc xOy tại A và B. Từ A vẽ tia song song với OB cắt (O') tại C. Đoạn OC cắt đường tròn (O') tại E. Hai đường thẳng AE và OB cắt nhau tại K. Chứng minh K là trung điểm OB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$AC \parallel OB \Rightarrow \widehat{EOK} = \widehat{ACE}$$

$$\text{mà } \widehat{OAK} = \widehat{ACE}$$

$$\Rightarrow \widehat{EOK} = \widehat{OAK}$$

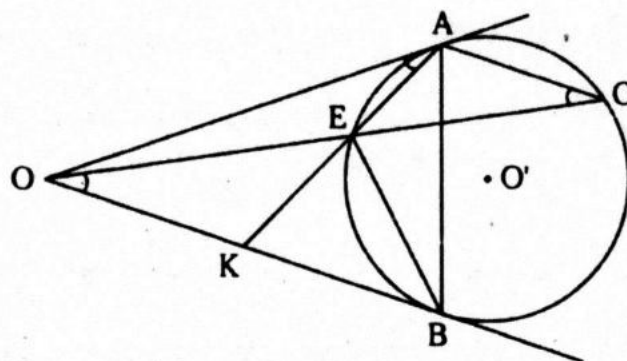
$$\Rightarrow \triangle OEK \sim \triangle AOK$$

$$\Rightarrow OK^2 = AK \cdot EK \quad (1)$$

$$\triangle ABK \sim \triangle BEK$$

$$\Rightarrow KB^2 = AK \cdot EK \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow KB = OK \Rightarrow K \text{ là trung điểm OB.}$$



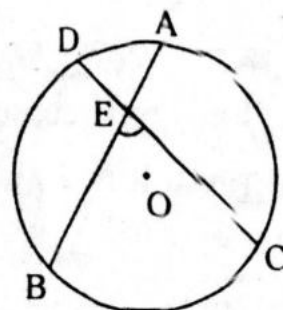
§5. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN, GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn

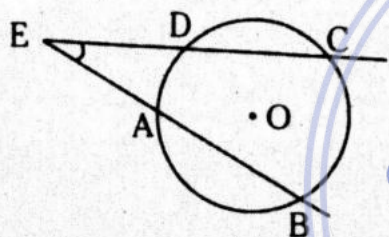
Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

$$\widehat{BEC} = \frac{\text{Sđ } \widehat{BC} + \text{Sđ } \widehat{AD}}{2}$$

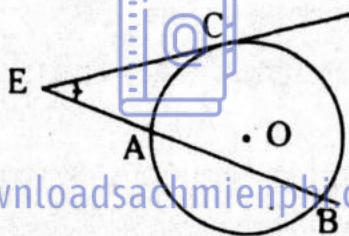


2. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

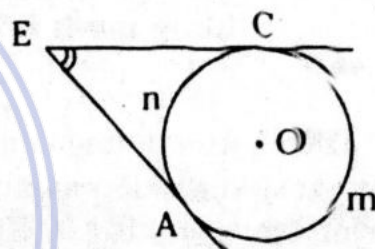
Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.



$$\widehat{BEC} = \frac{\text{Sđ } \widehat{BC} - \text{Sđ } \widehat{AD}}{2}$$



$$\widehat{BEC} = \frac{\text{Sđ } \widehat{BC} - \text{Sđ } \widehat{CA}}{2}$$



$$\widehat{AEC} = \frac{\text{Sđ } \widehat{AmC} - \text{Sđ } \widehat{AiC}}{2}$$

B. BÀI TẬP

Bài 411 Cho đường tròn (O) trong đó có ba dây bằng nhau AB, AC, BD sao cho hai dây AC, BD cắt nhau tại M tạo thành góc vuông AMB. Tính số đo các cung nhỏ AB, CD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Theo giả thiết ta có : $AB = AC = BD$.

Suy ra $\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BD}$.

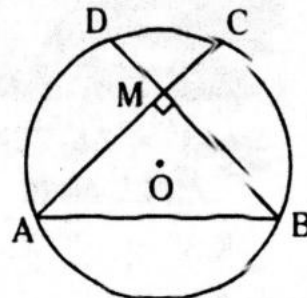
Do đó : $\widehat{AB} = \widehat{AC} - \widehat{DC} = \widehat{BD} - \widehat{DC} = \widehat{BC}$.

Theo định lý góc có đỉnh bên trong đường tròn, ta có :

$$\text{Sđ } (\widehat{AD} + \widehat{AB}) = 2 \cdot \text{Sđ } \widehat{M} = 2 \times 90^\circ = 180^\circ.$$

Nên $\text{Sđ } \widehat{AD} = \text{Sđ } \widehat{BC} = 90^\circ$.

$$\text{Lại có : } \text{Sđ } \widehat{AB} + \text{Sđ } \widehat{DC} = 2 \cdot \text{Sđ } \widehat{M} = 180^\circ. \quad (4)$$



$$\text{Và } \widehat{AB} = \widehat{BD} = \widehat{BC} + \widehat{DC} = 90^\circ + \widehat{DC} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được : $90^\circ + 2 \cdot \widehat{DC} = 180^\circ$.

Suy ra : $\widehat{DC} = 45^\circ$

$$\widehat{AB} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

Bài 412 Cho đường tròn (O) và hai đường kính vuông góc AB và CD. Trên cung BD lấy một điểm M. Tiếp tuyến của (O) tại M gặp AB ở E; CM gặp AB tại F. Chứng tỏ $EF = EM$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có : $\widehat{EMF} = \frac{1}{2} \widehat{MBC}$ (góc giữa tiếp tuyến và một dây đi qua tiếp điểm).

$$\Rightarrow \widehat{EMF} = \frac{\widehat{MB} + \widehat{BC}}{2}$$

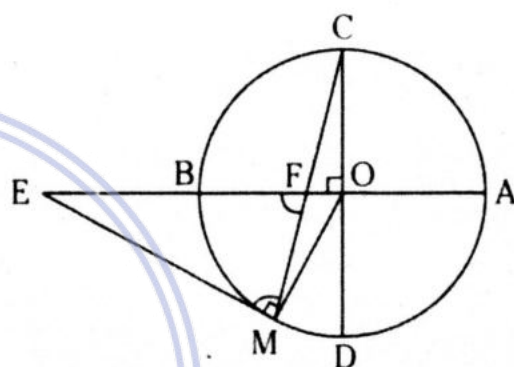
$$\text{Ta lại có : } \widehat{EFM} = \frac{\widehat{MB} + \widehat{AC}}{2}$$

Nhưng : $\widehat{BC} = \widehat{AC}$ (vì $CD \perp AB$)

$$\text{Do đó : } \widehat{EMF} = \widehat{EFM}$$

$\Leftrightarrow \Delta EFM$ cân tại E

Vậy : $EF = EM$.



Bài 413 Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm ngoài (O). Kẻ cát tuyến PAB và tiếp tuyến PT. Đường phân giác của góc ATB gặp AB tại D. Chứng minh $PT = PD$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có : $\widehat{PTD} = \frac{1}{2} \widehat{TAM}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây đi qua tiếp điểm)

$$\Rightarrow \widehat{PTD} = \frac{\widehat{TA} + \widehat{MB}}{2} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có : } \widehat{PDT} = \frac{\widehat{TA} + \widehat{MB}}{2} \quad (2)$$

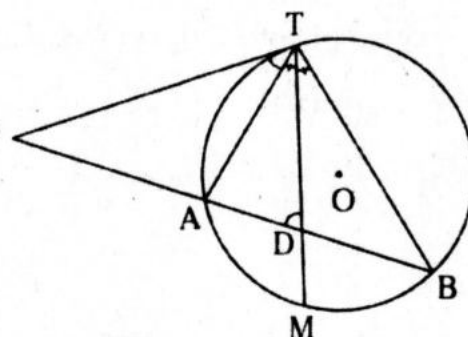
Phân giác TM của góc ATB cắt cung AB tại M

$$\widehat{ATM} = \widehat{MTB} \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có :

$$\widehat{PTD} = \widehat{PDT}$$

$\Leftrightarrow \Delta PTD$ cân tại P $\Leftrightarrow PT = PD$.



Bài 414 Trong hình bên biết $\widehat{F} = 50^\circ$, $\text{sđ } \widehat{NQ} = 40^\circ$.

Chứng minh rằng $MN \perp PQ$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Góc F là góc có đỉnh bên ngoài đường tròn nên :

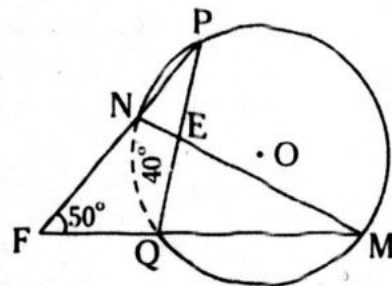
$$\text{sđ } \widehat{F} = \frac{\text{sđ } \widehat{MP} - \text{sđ } \widehat{NQ}}{2}. \text{ Thay các số đo đã biết ta được :}$$

$$50^\circ = \frac{\text{sđ } \widehat{MP} - 40^\circ}{2}, \text{ suy ra } \text{sđ } \widehat{MP} = 140^\circ$$

Góc MEP là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn nên :

$$\text{sđ } \widehat{MEP} = \frac{\text{sđ } \widehat{MP} + \text{sđ } \widehat{NQ}}{2} = \frac{140^\circ + 40^\circ}{2} = 90^\circ$$

Suy ra $MN \perp PQ$.



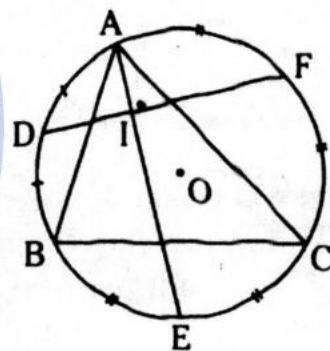
Bài 415 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F theo thứ tự là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CA. Chứng minh rằng $AE \perp DF$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi I giao điểm của hai dây AE và DF.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \angle AIF &= \frac{\text{sđ } \widehat{AF} + \text{sđ } \widehat{DBE}}{2} = \frac{\text{sđ } \widehat{AF} + \text{sđ } \widehat{DB} + \text{sđ } \widehat{BE}}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{AB} + \text{sđ } \widehat{BC})}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 360^\circ}{2} = 90^\circ \end{aligned}$$

Suy ra $AE \perp DF$.



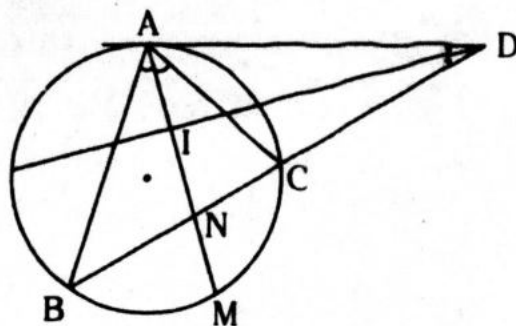
Bài 416 Cho A, B, C là ba điểm thuộc đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến tại A cắt tia BC tại D. Tia phân giác của góc BAC cắt đường tròn ở M, tia phân giác góc D cắt AM ở I. Chứng minh $DI \perp AM$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi N là giao điểm của BD và AM

$$\begin{aligned} \text{sđ } \widehat{AND} &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{BM}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{CM}) \\ &= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AM} = \text{sđ } \widehat{NAD} \\ &\quad (\text{vì AD là tiếp tuyến}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \triangle ADN$ cân tại D $\Rightarrow DI \perp AM$.

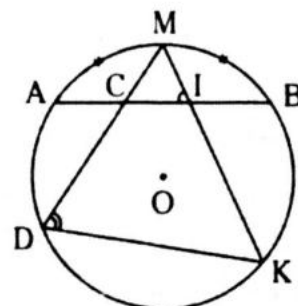


Bài 417 Trong đường tròn (O) cho dây cung AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung AB. Hai cát tuyến qua M lần lượt cắt dây cung AB ở C và I, cắt đường tròn ở D và K. Chứng minh $\widehat{AIM}$ bằng hoặc bù với góc $\widehat{MDK}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Theo định lý góc có đỉnh ở bên trong đường tròn ta có :

$$\begin{aligned}\text{sđ } \widehat{AIM} &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AM} + \text{sđ } \widehat{BK}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{MB} + \text{sđ } \widehat{BK}) \\ &= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{MBK}.\end{aligned}$$



Hình a

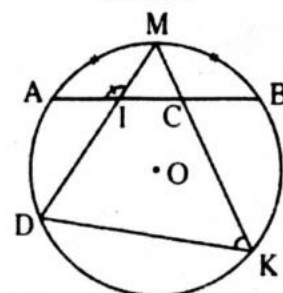
a. Xét trường hợp C nằm ngoài đoạn IB (hình a).

$$\text{sđ } \widehat{MDK} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{MBK} = \text{sđ } \widehat{AIM}.$$

b. Xét trường hợp C nằm trong IB (hình b).

$$\text{sđ } \widehat{MDK} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{MAK} = 180^\circ - \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{MBK}$$

$$\text{Vậy : } \widehat{MDK} = 180^\circ - \widehat{MIA}.$$



Hình b

Bài 418 Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai cát tuyến PAB và PCD, các đường thẳng AD và BC gặp nhau tại Q.

Chứng minh rằng : $\widehat{P} + \widehat{AQC} = 2 \widehat{BCD}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Góc $\widehat{P}$ có đỉnh nằm ngoài đường tròn (O) và chắn hai cung BD, AC nên ta có :

$$\text{sđ } \widehat{P} = \frac{\text{sđ } \widehat{BD} - \text{sđ } \widehat{AC}}{2} \quad (1)$$

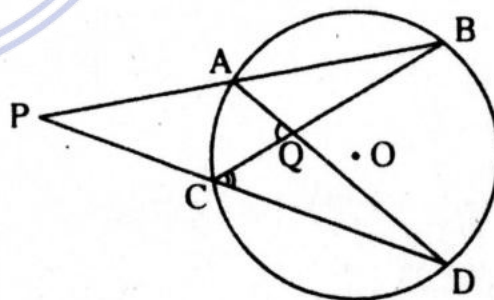
Góc $\widehat{AQC}$ có đỉnh nằm trong (O) chắn cung AC và góc đối đỉnh của nó chắn cung BD nên ta có :

$$\text{sđ } \widehat{AQC} = \frac{\text{sđ } \widehat{BD} + \text{sđ } \widehat{AC}}{2} \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) được : $\text{sđ } \widehat{P} + \text{sđ } \widehat{AQC} = \text{sđ } \widehat{BD} \quad (3)$

Mặt khác, $\widehat{BCD}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{BD}$ nên $\text{sđ } \widehat{BCD} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BD}$

Từ (3) và (4) ta có $\widehat{P} + \widehat{AQC} = 2 \widehat{BCD}$.



Bài 419 Cho đường tròn tâm O bán kính 2 cm, các bán kính OA và OB vuông góc với nhau. M là điểm chính giữa của cung AB. Gọi C là giao điểm của AM và OB, H là hình chiếu của M trên OA. Tính diện tích hình thang OHMC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Vẽ đường kính BOD.

$$\text{sđ } \widehat{C} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AD} - \text{sđ } \widehat{MB}) = \frac{90^\circ - 45^\circ}{2} = 22^\circ 30'$$

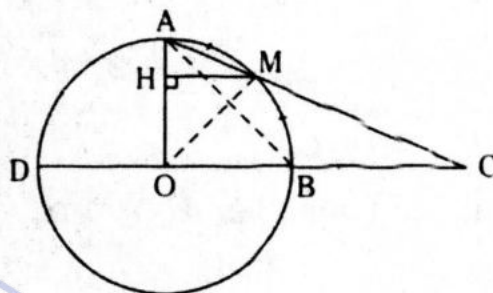
Ta lại có $\widehat{MAB} = 22^\circ 30'$.

Do đó $BC = AB = OB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Suy ra $OC = 2 + 2\sqrt{2}$.

$\triangle OHM$ vuông cân nên

$$MH = \frac{OM}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Từ đó tính được S_{OHMC} , đáp số : $3 + \sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$.



§6. CUNG CHỨA GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT downloaadsachmienphi.com

1. Cách giải bài toán quỹ tích

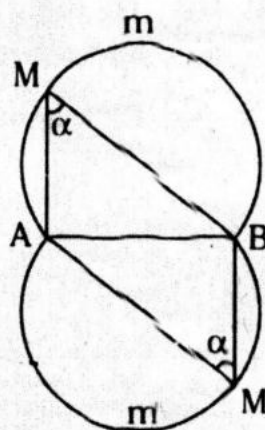
Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần :

Phản thuận : Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H.

Phản đảo : Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.

Kết luận : Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm M có tính chất T là hình H.

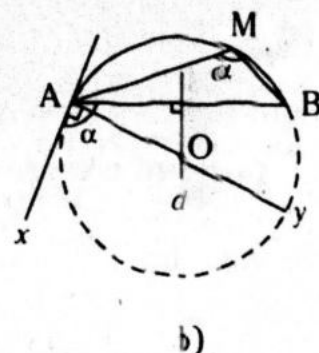
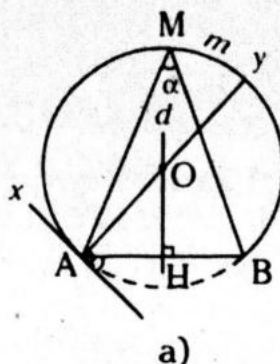
Trong nhiều trường hợp, ta cần dự đoán hình H trước khi chứng minh.



2. Quỹ tích "cung chứa góc"

Quỹ tích (tập hợp) các điểm tạo với hai mút của đoạn thẳng AB cho trước một góc AMB có số đo α cho trước ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) là hai cung tròn có số đo $360^\circ - 2\alpha$ đối xứng nhau qua AB.

Cách vẽ cung chứa góc α (xem hình a, b).



- Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB .
- Vẽ tia Ax tạo với AB góc α .
- Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .
- Vẽ cung AmB , tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax .

$\widehat{AmB}$ được vẽ như trên là một chứa góc α .

B. BÀI TẬP

Bài 420 Cho đường tròn (O) , một dây AB cố định chắn một cung có số đo 120° . Trên cung lớn AB có một điểm C di động. Trên tia đối của tia CA , lấy $CD = CB$. Tìm quỹ tích các điểm D .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Phân thuận :

$$Sđ \widehat{ACB} = \frac{1}{2} Sđ \widehat{AB} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$\triangle CDB$ cân mà :

$$\widehat{ACB} = \widehat{CBD} + \widehat{CDB}$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 2 \widehat{CDB}$$

$$(\text{vì } \widehat{CBD} = \widehat{CDB})$$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = 30^\circ$$

D tạo với hai mút của đoạn thẳng cố định AB một góc 30°

$\Rightarrow D \in$ cung chứa góc 30° vẽ trên AB .

Giới hạn :

- Khi $C \equiv B$, vì $CD = CB$ nên khi đó $C \equiv D$.
- Khi $C \equiv A$, cần chú ý rằng :

$$\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$\Rightarrow D \equiv D_0$ là giao điểm của tiếp tuyến tại A của (O) với cung chứa góc.

Vậy D chỉ di động trên cung $\widehat{D_0B}$.

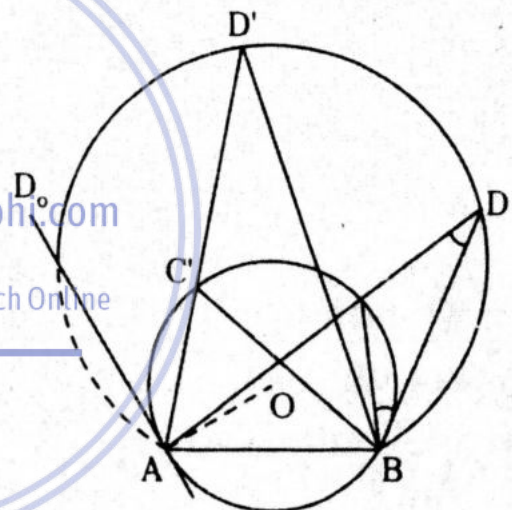
Phân đảo :

Lấy một điểm D' bất kì thuộc cung $\widehat{D_0B}$, $D'A$ cắt (O) tại C' , ta có :

$$\widehat{AD'B} = 30^\circ \text{ vì } D' \in \text{cung chứa góc } 30^\circ \text{ vẽ trên } AB.$$

$$\widehat{AC'B} = 60^\circ \text{ vì } C' \in \text{cung chứa góc } 60^\circ \text{ vẽ trên } AB.$$

Mà $\widehat{AC'B} = \widehat{C'D'B} + \widehat{D'B'C'}$ (tính chất góc ngoài của tam giác $BD'C'$). Như vậy:



$$60^\circ = 30^\circ + \widehat{D'BC'} \Rightarrow \widehat{D'BC'} = 30^\circ$$

$\Rightarrow \Delta C'BD'$ cân: $C'D' = C'B$.

Kết luận :

Quý tích của D là cung D_0B (phần cung chứa góc 30° vẽ trên AB được giới hạn bởi tiếp tuyến với (O) tại A).

Bài 421 Cho đường tròn (O; R) và một điểm A ở ngoài đường tròn, một cát tuyến qua A cắt đường tròn tại B và C. Tìm quỹ tích trung điểm M của dây BC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Phân thuận :

Nối O với M thì $OM \perp BC$ (đường kính đi qua trung điểm của một dây, không qua tâm).

$\widehat{AMO} = 1v \Rightarrow M \in$ đường tròn đường kính AO.

Giới hạn : Hai vị trí giới hạn của cát tuyến ABC là hai tiếp tuyến AD, AE, khi đó : $M \equiv D$; $M \equiv E$.

Vậy M chỉ di động trên $\widehat{DOE}$.

Phân đảo :

Lấy một điểm M' bất kì thuộc $\widehat{DOE}$; $\widehat{AM'}$ cắt (O) tại B' , C'

$\widehat{AM'O} = 1v$ vì là góc nội tiếp trong nửa đường tròn, đường kính OA.

$OM' \perp B'C' \Rightarrow M'B' = M'C'$

Kết luận :

Quý tích của M (trung điểm của dây BC) là cung $\widehat{DOE}$.

(Phần của đường tròn, đường kính OA nằm trong (O; R)).

Chú ý :

1. Nếu $A \in (O; R)$ hoặc A ở trong (O; R) thì quỹ tích là đường tròn, đường kính OA.
2. Nếu $A \equiv O$, quỹ tích là điểm O (đường tròn điểm tức là đường tròn có bán kính bằng 0).

Bài 422 M là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB. Trên đoạn AM lấy điểm N sao cho $AN = MB$.

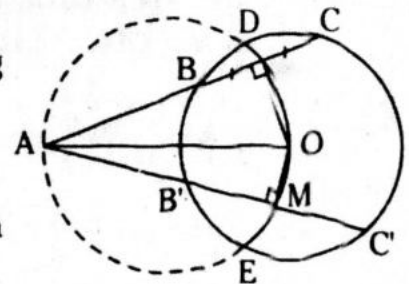
Tìm quỹ tích các điểm N.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Phân thuận :

Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn đường kính AB, dựng tia $Ax \perp AB$. Trên tia đó lấy điểm B' sao cho $AB' = AB$, ta có điểm B' cố định.

$\Delta AMB = \Delta B'NA$ vì có $AB = AB'$

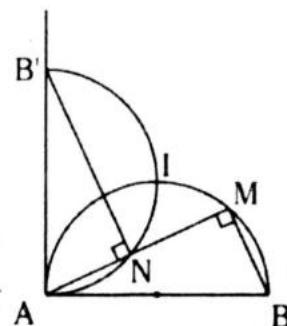


$\widehat{ABM} = \widehat{B'AN}$ và $BM = AN$ nên :

$$\widehat{ANB'} = \widehat{AMB} = 90^\circ.$$

Vậy điểm N thuộc đường tròn đường kính AB' .

Giới hạn : Khi M trùng với B thì N trùng với A. Khi M trùng với I là điểm chính giữa của cung AB thì N trùng với I. Khi M trùng với A thì N trùng với B'. Vậy N chạy trên nửa đường tròn đường kính $AB' = AB$.



Phân đảo :

Trên nửa đường tròn nói trên lấy N' bất kì (N' khác A và B'). Tia AN' cắt nửa đường tròn đường kính AB ở M' . Ta phải chứng minh $AN' = BM'$. Thật vậy hai tam giác vuông $AM'B$ và $B'N'A$ có $AB = AB'$.

$$\widehat{NAB'} = \widehat{MBA} \text{ nên } \triangle M'AB = \triangle N'B'A, \text{ do đó } AN' = BM'.$$

Kết luận : Quỹ tích điểm N là nửa đường tròn đường kính AB' .

Bài 423 Cho tam giác ABC có cạnh BC cố định và góc $\hat{A} = \alpha$ không đổi. Tìm quỹ tích giao điểm của ba phân giác trong của tam giác đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi I là giao điểm của ba phân giác trong của $\triangle ABC$. Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có :

$$\hat{I}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 \quad (1)$$

$$\hat{I}_2 = \hat{C}_1 + \hat{A}_2 \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế với vế, ta có :

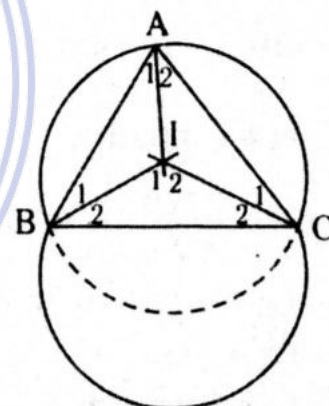
$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 + \hat{C}_1 + \hat{A}_2$$

$$\text{hay : } \hat{I} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\text{Vậy : } \widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \text{ không đổi.}$$

Điểm I nhìn đoạn thẳng BC cố định dưới góc $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

không đổi nên quỹ tích của I là cung chứa góc $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn thẳng BC (hai cung đối xứng nhau qua đường thẳng BC).



Bài 424 Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M di động trên đường tròn. Trên tia đối của tia MA, lấy đoạn $MC = 2MB$.

Tìm quỹ tích các điểm C khi M di động trên (O).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có $\widehat{AMB} = 1v$

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

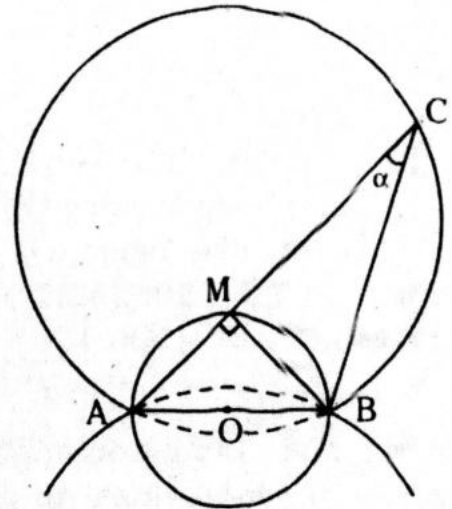
$$\frac{MC}{MB} = 2$$

Khi điểm M chạy trên (O), tam giác MBC vuông tại M và có tỷ số hai cạnh góc vuông $\frac{MC}{MB}$ luôn luôn bằng 2 không đổi, do đó $\triangle MBC$ luôn luôn đồng dạng với chính nó khi điểm M di động trên (O).

Ta suy ra : $\hat{C} = \alpha$ không đổi.

Điểm C di động nhưng luôn luôn nhìn đoạn AB cố định dưới góc α không đổi nên C chạy trên hai cung tròn chứa góc α đi qua A, B và đối xứng qua AB.

Vậy : quỹ tích các điểm C là hai cung tròn chứa góc α vẽ trên đoạn AB.



Bài 425 Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ bán kính OC vuông góc với AB tại O. Lấy điểm M trên cung AC. Hạ $MH \perp OA$. Trên bán kính OM lấy điểm P sao cho $OP = MH$.

- Tìm quỹ tích các điểm P khi M chạy trên cung AC.
- Tìm quỹ tích các điểm P lấy trên bán kính OM sao cho OP bằng khoảng cách từ M đến AB khi M chạy khắp đường tròn (O).

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Phân thuận:

$$\triangle OMH = \triangle COP, \text{ suy ra } \widehat{OPC} = \widehat{MHO} = 90^\circ$$

Do đó P nằm trên nửa đường tròn đường kính OC thuộc miền trong góc $\widehat{AOC}$.

b. Phân đảo:

Lấy P' trên nửa đường tròn đã vẽ. Nối OP' nó cắt cung AC tại M' . Hạ $M'H'$ vuông góc xuống AB. Ta chứng minh $OP' = M'H'$ (bạn đọc tự chứng minh).

Kết luận

Quỹ tích các điểm P là nửa đường tròn đường kính OC thuộc miền trong góc $\widehat{AOC}$.

b. Quỹ tích các điểm P là hai đường tròn đường kính OC và OD.

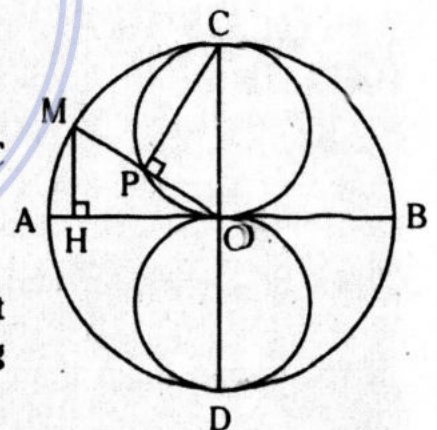
Bài 428 Dựng tam giác ABC biết $BC = 3$ cm, $\hat{A} = 50^\circ$ và $AB = 3,5$ cm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Phân tích

Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ thỏa mãn đề bài, ta thấy :

Đoạn thẳng $BC = 3$ cm dựng được ngay.

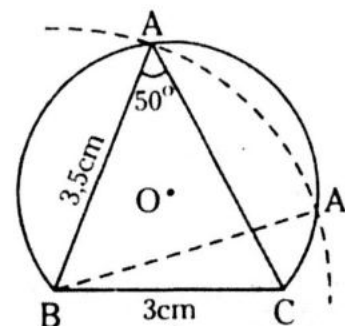


Điểm A thỏa mãn hai điều kiện :

- A nằm trên cung chứa góc 50° dựng trên đoạn thẳng BC.
- A nằm trên đường tròn (B; 3,5 cm).

Bạn đọc tự làm các bước dựng và chứng minh.

Biện luận : Bài toán có hai nghiệm hình là các tam giác ABC và A'BC.



§7. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

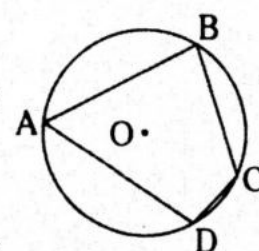
Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).

2. Định lí

Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .

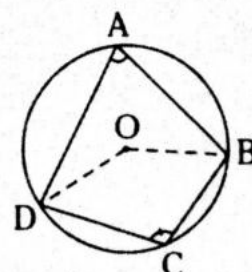
ABCD nội tiếp
đường tròn (O)

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \end{cases}$$



3. Định lí đảo

Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.



B. BÀI TẬP

Bài 427 Cho một đường tròn tâm M và một tứ giác nội tiếp ABCD sao cho $\widehat{DAB} = 80^\circ$; $\widehat{DAM} = 30^\circ$; $\widehat{MBC} = 70^\circ$. Hãy tính số đo các góc MAB; CBM; AMB; AMD; DMC; MCD và BCD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tia AM nằm giữa hai tia AB và AD do đó :

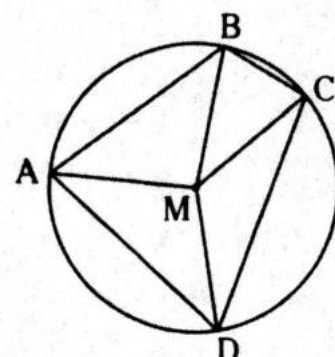
$$\widehat{BAM} + \widehat{MAD} = \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{MAB} = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ.$$

$\triangle MBC$ cân ($MB = MC = R$), suy ra :

$$\widehat{MBC} = \widehat{MCB} = \frac{180^\circ - \widehat{BMC}}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ.$$

$\widehat{MAB} = 50^\circ$ mà $\triangle MAB$ cân ($MA = MB = R$) nên :

$$\widehat{AMB} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{MAB} = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ.$$



$$\text{sd } \widehat{BAD} = \text{sd } \frac{\widehat{BCD}}{2} \Rightarrow \text{sd } \widehat{BCD} = 2 \text{ sd } \widehat{BAD}$$

$$\text{sd } \widehat{BCD} = 2 \cdot 80^\circ = 160^\circ;$$

$$\text{sd } \widehat{BC} = \text{sd } \widehat{BMC} = 70^\circ$$

$$\text{Vậy } \text{sd } \widehat{DC} = 160^\circ - 70^\circ = 90^\circ.$$

$\text{sd } \widehat{DMC} = \text{sd } \widehat{DC}$ (số đo góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn) nên $\widehat{DMC} = 90^\circ$.

$\triangle MAD$ là tam giác cân ($MA = MD = R$) nên :

$$\widehat{DAM} = \widehat{MDA} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AMD} = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

$$\triangle DMC \text{ cân } (MD = MC = R) \Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{MDC} = \frac{180^\circ - \widehat{DMC}}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\widehat{BCD} = 100^\circ.$$

Bài 428 Hai đường tròn (O) và (O') giao nhau tại A và B . CD là một dây tùy ý của (O) . CA và DB cắt (O') tại E và F . Chứng minh EF song song với CD .

HƯỚNG DẪN GIẢI

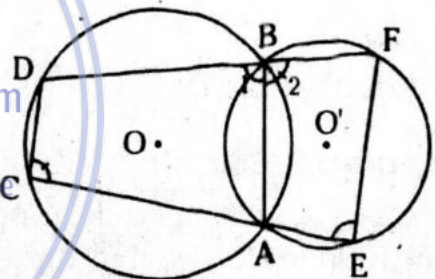
Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O)

$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{B}_1 = 2v$$

$$\text{mà : } \widehat{B}_2 + \widehat{B}_1 = 2v \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{B}_2$$

$$\text{Tương tự : } \widehat{E} = \widehat{B}_1 \Rightarrow \widehat{C} + \widehat{E} = 2v.$$

Do đó : $EF \parallel CD$.



Bài 429 Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và A' . Một cát tuyến (Δ) bất kỳ qua A' , cắt (O) tại B và (O') tại C . Qua B và C , kẻ hai đường thẳng song song bất kỳ theo thứ tự cắt (O) và (O') tại B' và C' . Chứng minh rằng ba điểm A, B', C' thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tứ giác $AA'B'B'$ nội tiếp đường tròn (O) .

$$\Rightarrow \widehat{A'AB'} + \widehat{B} = 180^\circ.$$

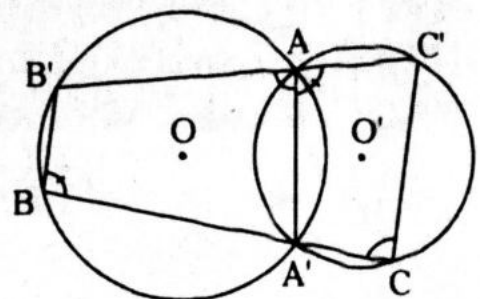
$$\text{Tương tự } \widehat{A'AC'} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$BB' \parallel CC'$$

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{A'AB'} + \widehat{A'AC'} = 180^\circ.$$

$\Rightarrow A, B', C'$ thẳng hàng.



Bài 430 Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, H là trực tâm. H' là điểm đối xứng của H qua BC. Chứng minh rằng tứ giác ABH'C nội tiếp được trong một đường tròn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Trong tứ giác AC'HB' có :

$$\widehat{C'} = 1v; \quad \widehat{B'} = 1v$$

nên $\widehat{BAC} + \widehat{C'HB'} = 2v$

và $\widehat{BHC} = \widehat{C'HB'}$ (đối đỉnh)

Suy ra: $\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 2v$ (1)

Vì H' đối xứng với H qua BC nên suy ra

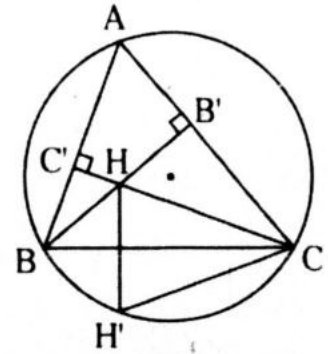
$$\triangle BHC = \triangle BH'C$$

Nên $\widehat{BHC} = \widehat{BH'C}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được :

$$\widehat{BAC} + \widehat{BH'C} = 2v$$

Vậy tứ giác ABH'C nội tiếp được trong một đường tròn.



Bài 431 Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). S là điểm chính giữa cung AB, SC và SD cắt AB ở E và F.

a. Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp được.

b. Chứng minh SO là phân giác góc ASB.

c. DE và CF kéo dài cắt (O) ở M và N. Chứng minh SO vuông góc với MN.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có :

$$\begin{aligned} \text{sđ } \widehat{DFB} &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{DCB} + \text{sđ } \widehat{AS}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{DCB} + \text{sđ } \widehat{SB}) = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{DSC} \\ \text{sđ } \widehat{DSC} &= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{DAS} \end{aligned}$$

Vậy $\widehat{DFB} + \widehat{DCS} = 2v$, tức là tứ giác DFEC nội tiếp được.

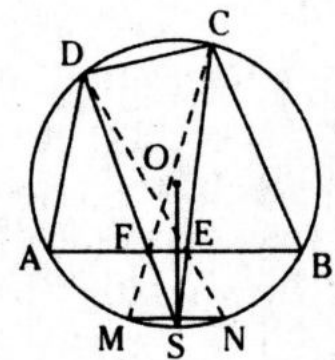
b. Do $\widehat{SA} = \widehat{SB}$ nên $SA = SB \Rightarrow \triangle ASB$ cân tại S

Mặt khác, $SO \perp AB$ nên đường cao SO đồng thời là đường phân giác góc $\widehat{ASB}$.

c. Tứ giác DCEF nội tiếp nên $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$ (cùng chắn cung FE).

Từ đó suy ra đường tròn (O) hai cung bằng nhau : $\widehat{NS} = \widehat{SM}$.

Do đó $SO \perp MN$.



Bài 432 Cho tam giác ABC, đường cao BB' và CC' nội tiếp trong đường tròn (O). Chứng minh rằng OA vuông góc với B'C'.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Ta có : $\widehat{BB'C} = \widehat{BC'C} = 1v$

$\Rightarrow$ tứ giác BCB'C' nội tiếp được trong đường tròn đường kính BC.

Do đó : $\widehat{ABC} + \widehat{C'B'C} = 2v$

Nhưng : $\widehat{C'B'A} + \widehat{C'B'C} = 2v \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{C'B'A}$ (1)

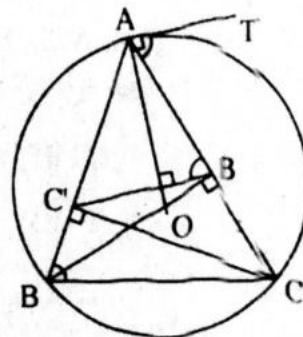
Kẻ tia tiếp tuyến AT với (O), ta có :

$$\widehat{ABC} = \widehat{CAT} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $\widehat{C'B'A} = \widehat{CAT}$

Hai góc này bằng nhau ở vị trí so le trong, do đó : $B'C' \parallel AT$.

Nhưng $OA \perp AT$ nên $OA \perp B'C'$. Vậy : $OA \perp B'C'$.



Bài 433 Tam giác ABC có ba góc nhọn với trực tâm H. Dựng hình bình hành BHCD và gọi I là giao điểm của hai đường chéo.

a. Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp được.

b. So sánh các góc BAH và OAC, trong đó O là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

c. AI cắt OH tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Gọi BE, CF là hai đường cao của $\triangle ABC$. Khi đó AEHF là tứ giác nội tiếp và

$$\widehat{BAC} + \widehat{FHE} = 180^\circ.$$

$$\text{Từ đó : } \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ,$$

nghĩa là tứ giác ABCD nội tiếp được.

b. Do $DC \parallel BE$ nên $DC \perp AC$.

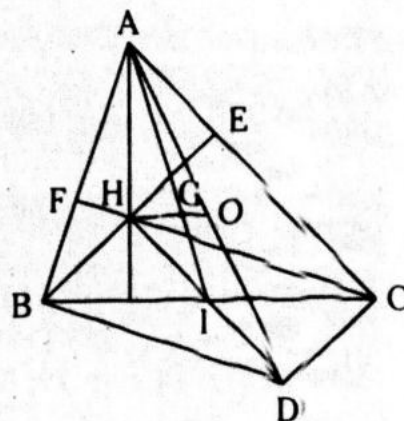
Vì vậy tâm O của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là trung điểm của AD. Từ đó :

$$\widehat{OAC} = \widehat{DAC} = \widehat{DBC} \quad (\text{cùng chắn } \widehat{DC})$$

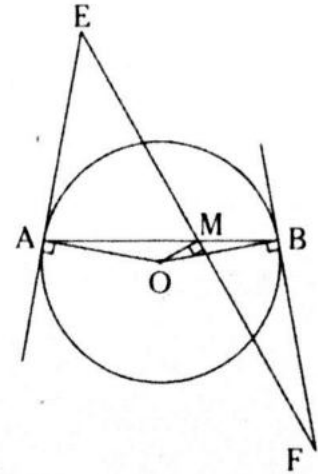
$$= 90^\circ - \widehat{ABC} \quad (\text{do AD là đường kính}) = \widehat{BAH}.$$

c. Vì I là trung điểm BC nên AI là một trung tuyến của $\triangle ABC$.

Xét $\triangle AHD$ có HO và AI là hai trung tuyến nên G là trọng tâm của $\triangle AHD$: $\frac{GA}{GI} = 2$. Điều này lại chứng tỏ G là trọng tâm $\triangle ABC$.



Bài 434 Từ 1 điểm M trên dây cung AB của đường tròn (O) ta kẻ 1 đường thẳng vuông góc với OM tại M; đường thẳng này cắt các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn tại các điểm tương ứng E và F. Chứng minh M là trung điểm EF.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Chứng minh các tứ giác AEMO và BMOF nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{BOF}$$

$$\Rightarrow \triangle AOE = \triangle BOF$$

$$\Rightarrow OE = OF \Rightarrow \triangle OEF \text{ cân tại } O$$

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm } EF.$$

Bài 435 Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O), M là một điểm di động trên đáy BC. Dựng đường tròn (O) qua M và tiếp xúc với AB tại B, đường tròn (E) qua M và tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (D) và (E). Chứng minh:

a. Điểm N nằm trên đường tròn (O).

b. Ba điểm M, N, A thẳng hàng.

c. Tổng bán kính của hai đường tròn tâm D và E không đổi khi M di động trên BC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. $\widehat{BNM} = \widehat{ABM}$ (cùng chắn BM của (D))

Tương tự $\widehat{CNM} = \widehat{ACM}$

$$\Rightarrow \widehat{BNM} + \widehat{CNM} = \widehat{ABM} + \widehat{ACM}$$

$$\Rightarrow \widehat{BNC} + \widehat{BAC} = 2V$$

$$\Rightarrow ABNC \text{ nội tiếp} \Rightarrow N \in (O).$$

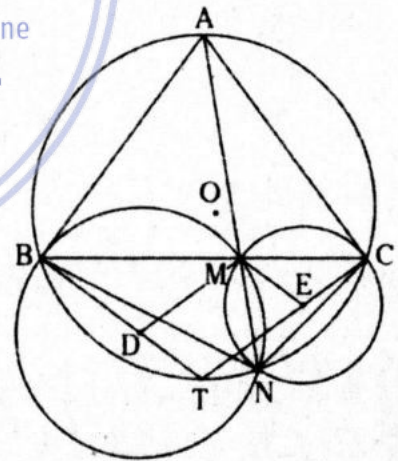
b. Chứng minh NM và NA đều là tia phân giác $\widehat{BNC}$.

$$\Rightarrow A, M, N \text{ thẳng hàng.}$$

c. Chứng minh B, D, I thẳng hàng : C, E, I thẳng hàng (I là điểm chính giữa BC không chứa A).

MDIE là hình bình hành

$$\Rightarrow MD + EM = BI \Rightarrow đpcm.$$



§8. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.
- Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.

2. Định lí

Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

Tâm của đường tròn ngoại tiếp trùng với tâm của đường tròn nội tiếp và được gọi là tâm của đa giác đều.

B. BÀI TẬP

Bài 436 Các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác $ABCD$ tiếp xúc với đường tròn tâm O lần lượt tại các điểm M, N, P, Q . Chứng minh rằng :

- Nếu $MP = NQ$ thì $\hat{A} = \hat{C}$.
- Ngược lại nếu $\hat{A} = \hat{C}$ thì $MP = NQ$.

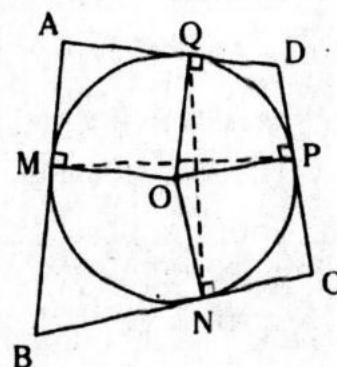
HƯỚNG DẪN GIẢI

Các tứ giác $AMOQ$ và $CNOP$ nội tiếp đường tròn, do đó $\hat{A} + \hat{MOQ} = 180^\circ$ và $\hat{C} + \hat{NOP} = 180^\circ$ (*)

- Nếu $MP = NQ$ thì $\triangle MOP = \triangle NOQ$ (c.c.c) nên $\hat{MOP} = \hat{NOQ}$, suy ra $\hat{MOQ} = \hat{NOP}$. Từ đây kết hợp với (*), ta có $\hat{A} = \hat{C}$.

- Ngược lại nếu $\hat{A} = \hat{C}$ thì từ (*) ta có $\hat{MOQ} = \hat{NOP}$; do đó $\hat{MOP} = \hat{NOQ}$, suy ra $\triangle MOP = \triangle NOQ$ (c.g.c)

Vậy $MP = NQ$.



Bài 437 $ABCD$ là một tứ giác ngoại tiếp một đường tròn. Chứng minh rằng các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ACD tiếp xúc với nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

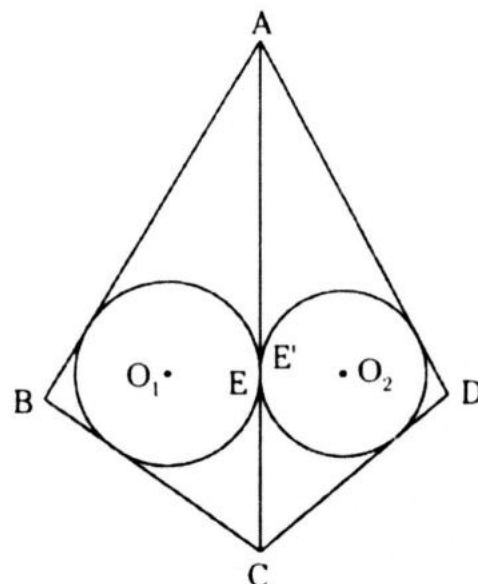
Gọi E và E' lần lượt là tiếp điểm của đường tròn tâm O_1, O_2 nội tiếp các tam giác ABC và ACD với cạnh AC .

Ta có : $AE = \frac{AB + AC - BC}{2}$

và $AE' = \frac{AD + AC - CD}{2} \quad (1)$

Vì tứ giác ABCD ngoại tiếp được đường tròn nên $AB + CD = AD + BC$

hay $AB - BC = AD - CD$. Từ đây kết hợp với (1) ta có $AE = AE' \Rightarrow E \equiv E'$, tức là đường tròn tâm O_1 và O_2 tiếp xúc nhau.



Bài 438 Tính diện tích của hình 8 cạnh đều nội tiếp trong một đường tròn tâm O, bán kính R.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Kí hiệu như hình vẽ.

Ta có : $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

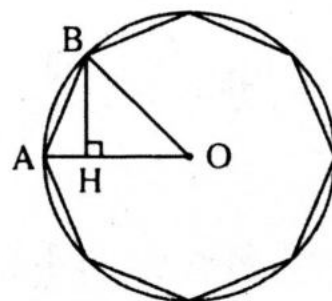
Tam giác OBH vuông cân tại H nên $BH = OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Gọi S là diện tích của hình 8 cạnh đều thì :

$$S = 8 \cdot S_{AOB}$$

Ta có : $S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BH = \frac{1}{2} R \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} R^2$

Vậy : $S = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} R^2 = 2\sqrt{2} R^2$ (đvdt).



Bài 439 Hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Tính diện tích hình thang biết rằng :

a. $OB = 10$ cm, $OC = 20$ cm ;

b. $AB = b$, $CD = a$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Tính BC, được $10\sqrt{5}$. Do đó: $OH = \frac{OB \cdot OC}{BC} = 4\sqrt{5}$.

Tổng hai đáy : $AB + CD = AD + BC$

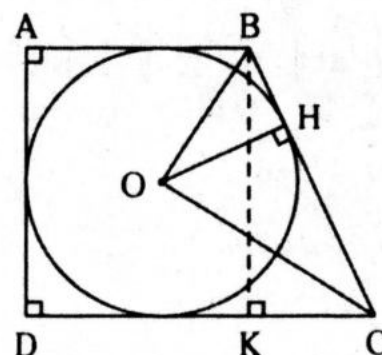
$= 8\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = 18\sqrt{5}$. Đáp số : $S = 360$ cm².

b. Kẻ $BK \perp DC$. Đặt $BK = h$.

Ta có $KC = a - b$, $BC^2 = BK^2 + KC^2$

$\Rightarrow (a + b - h)^2 = h^2 + (a - b)^2$

Từ đó : $h = \frac{2ab}{a+b}$, $S = ab$.



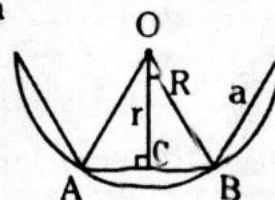
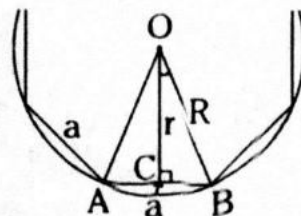
Bài 440 Cho một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a . Hãy tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Giả sử một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a . Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và r là bán kính đường tròn nội tiếp đa giác đó.

Xét tam giác vuông OCB , ta có :

- $\widehat{COB} = \frac{180^\circ}{n}$
- $\sin \widehat{COB} = \frac{CB}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow \sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2R} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin \frac{180^\circ}{n}}$
- $\tan \widehat{COB} = \frac{CB}{OC} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow \tan \frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2r} \Rightarrow r = \frac{a}{2\tan \frac{180^\circ}{n}}$



Bài 441 Cho ngũ giác đều có cạnh bằng a . Tính bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp của nó.

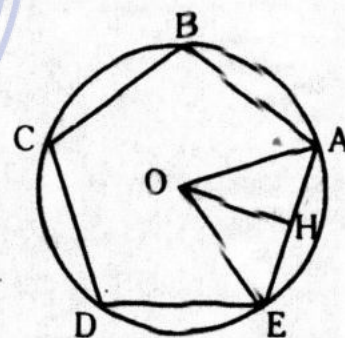
HƯỚNG DẪN GIẢI

Bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = OA$

$$\text{Ta có : } R = \frac{a}{2\sin \frac{180^\circ}{5}} = \frac{a}{2\sin 36^\circ} \approx 1,18$$

Bán kính đường tròn nội tiếp là $r = OH$

$$\text{Ta có : } r = \frac{a}{2\tan \frac{180^\circ}{5}} = \frac{a}{2\tan 36^\circ} \approx 1,46$$



Bài 442 Tính số cạnh của một đa giác đều nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R , biết độ dài cạnh AB của nó bằng R .

HƯỚNG DẪN GIẢI

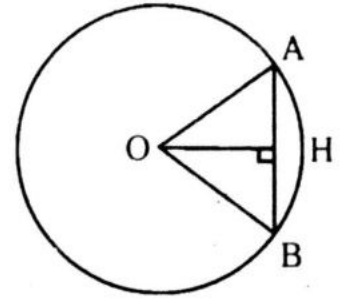
$$\text{Áp dụng công thức : } R = \frac{a}{2\sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\text{Ở đây } a = R \Rightarrow R = \frac{R}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{180^\circ}{n} = 1 \Rightarrow \sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Hay } \sin \frac{180^\circ}{n} = \sin 30^\circ.$$

Do đó $\frac{180^\circ}{n} = 30^\circ$ hay $n = 6$. Vậy đa giác đều có sáu cạnh.



Bài 443 Cho lục giác đều ABCDEF nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của đường chéo BD và cạnh EF. Chứng minh :

a. $\triangle AOI = \triangle AFK$

b. $\triangle AIK$ đều.

HƯỚNG DẪN GIẢI.

a. A, O, D thẳng hàng $\Rightarrow OI = \frac{1}{2} AB$

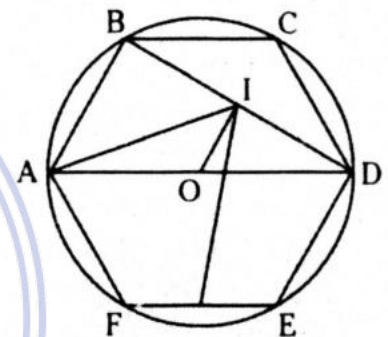
$$\text{mà } FK = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} AB$$

$$\Rightarrow OI = FK.$$

$$\text{Mặt khác } OA = AF = R$$

$$\widehat{AOI} = \widehat{AFK} = 120^\circ \Rightarrow \triangle AOI = \triangle AFK$$

$$\Rightarrow AI = AK, \widehat{IAO} = \widehat{FAK} \Rightarrow \triangle AIK \text{ cân và } \angle IAK = 60^\circ \Rightarrow \triangle AIK \text{ đều.}$$



Bài 444 Chứng minh rằng nếu một ngũ giác (lồi) có các góc bằng nhau và nội tiếp được trong một đường tròn thì ngũ giác đó đều.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Giả sử ngũ giác ABCDE có các góc bằng nhau và nội tiếp đường tròn tâm O.

Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ (gt).

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} \text{ (cùng chắn } \widehat{AD})$$

$$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{ACB}$$

$$BC \text{ chung và } \widehat{ABC} = \widehat{BCD} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle DCB$$

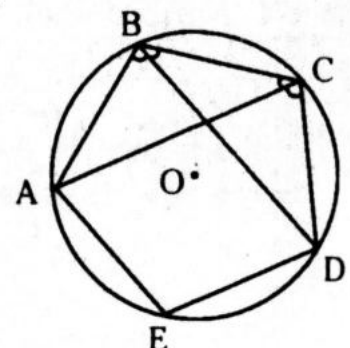
$$\Rightarrow AB = DC$$

Chứng minh tương tự ta được :

$$BC = ED; CD = AE \text{ và } ED = AB$$

Từ đó suy ra $AB = BC = CD = DE = EA$.

Vậy ngũ giác ABCDE đều.



§9. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức tính độ dài đường tròn

Độ dài C của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức: $C = 2\pi R$.

Nếu gọi d là đường kính đường tròn ($d = 2R$) thì: $C = \pi d$.

π (đọc là "pi") và $\pi \approx 3,14$ hay $\pi = \frac{22}{7}$.

2. Cách tính độ dài cung tròn

Trên đường tròn bán kính R , độ dài l của một cung n° được tính theo công

$$\text{thức : } l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$$

B. BÀI TẬP

Bài 445 Cho nửa đường tròn đường kính AB . Trong đoạn AB lấy hai điểm C , D sao cho C nằm giữa A và D . Vẽ các nửa đường tròn đường kính AC , CD , DB . Chứng minh rằng tổng độ dài của ba nửa đường tròn này bằng độ dài nửa đường tròn đường kính AB .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Theo công thức $C = 2\pi R$, suy ra $\frac{C}{2} = \pi R$.

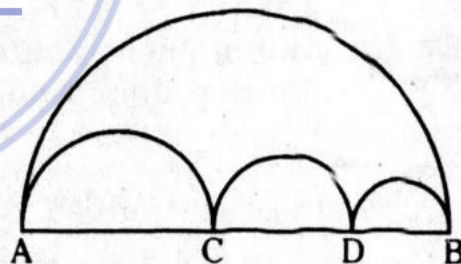
Ta có độ dài ba nửa đường tròn đường kính AC , CD , DB lần lượt là :

$$\pi \cdot \frac{AC}{2}, \pi \cdot \frac{CD}{2}, \pi \cdot \frac{DB}{2}$$

Do đó tổng độ dài ba nửa đường tròn này là :

$$\frac{\pi}{2} (AC + CD + DB) = \frac{\pi}{2} AB$$

$\frac{\pi}{2} AB$ chính bằng độ dài nửa đường tròn đường kính AB (đpcm).



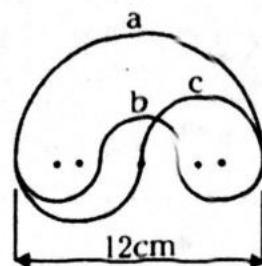
Bài 448 Hãy so sánh độ dài ba đường cong a , b , c trong hình bên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đường cong a là nửa đường tròn đường kính 12 cm.

Đường cong b là ba nửa đường tròn đường kính 4 cm.

Đường cong c là hai nửa đường tròn đường kính 6 cm.

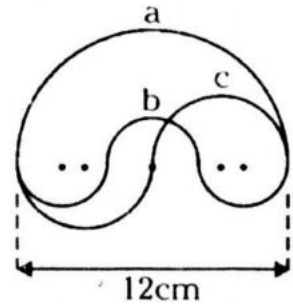


Ta có : $a = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 12 = 6\pi \text{ cm};$

$$b = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 4 = 6\pi \text{ cm};$$

$$c = \pi \cdot 6 = 6\pi \text{ cm}$$

Vậy ba đường cong có độ dài bằng nhau.

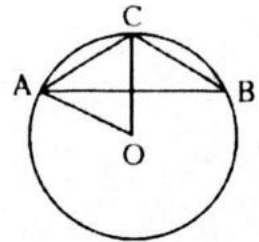


Bài 447 Cho ΔABC cân có $\widehat{C} = 120^\circ$, $AC = 10 \text{ cm}$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$\Delta AOC \text{ đều} \Rightarrow OC = AC = 10 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow C = 2\pi R = 2\pi \cdot 10 \text{ (cm)} = 20\pi \text{ (cm)}.$$



Bài 448 Cho tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$), cạnh AB bằng 4, góc B bằng 60° . Đường tròn tâm O , đường kính AB cắt BC ở D .

a. Chứng minh rằng AD vuông góc với BC .

b. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AC (tâm O_2) đi qua D .

d. Tính độ dài cung nhỏ BD .

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Góc $\widehat{ADB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$, tức $AD \perp BC$.

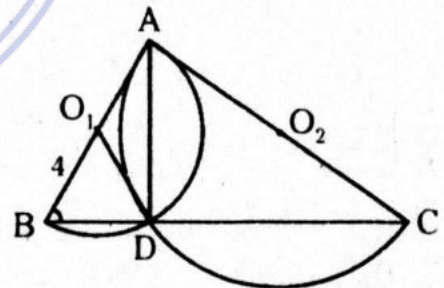
b. $\widehat{ADC} = 90^\circ$ nên D thuộc đường tròn đường kính AC . Vậy (O_2) đi qua D .

c. $O_1B = O_1D$ nên ΔO_1BD cân. Lại có $\widehat{O_1BD} = 60^\circ$ nên ΔO_1BD đều. Vậy $\widehat{BO_1D} = 60^\circ$.

Độ dài cung nhỏ BD được tính theo công thức :

$$l = \frac{\pi \cdot R \cdot n}{180}$$

$$\Rightarrow l = \frac{\pi \cdot \frac{4}{2} \cdot 60}{180^\circ} = \frac{2}{3} \cdot \pi.$$



Bài 449 Cho đường tròn tâm O bán kính R .

a. Tính góc $\widehat{AOB}$, biết rằng độ dài cung $\widehat{AB}$ là $\frac{\pi R}{4}$.

b. Tính cung lớn AB của (O) , xác định điểm C sao cho, khi nối O với C , A với C , ta được ΔAOC là tam giác đều và AC cắt đoạn OB . Tính độ dài các cung lớn AC và BC .

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Gọi n là số đo cung nhỏ AB . Theo giả thiết ta có :

$$\frac{\pi R}{4} = \frac{\pi R n}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{n}{180} \Leftrightarrow n = 45^\circ$$

Vậy : $\widehat{AOB} = 45^\circ$.

- b. Theo giả thiết số đo cung nhỏ $\widehat{AC} = 60^\circ$ nên cung lớn AC có số đo là :

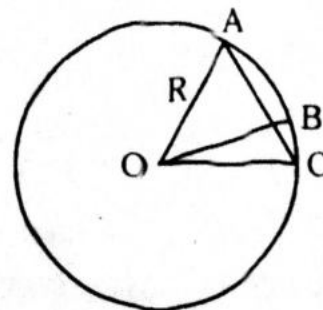
Số đo cung lớn $\widehat{AC} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

$$\text{Vậy : } l_{AC} = \frac{\pi \cdot R \cdot 300}{180} = \frac{5}{3} \pi R.$$

Từ kết quả câu a) suy ra số đo cung nhỏ $\widehat{BC} = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

Do đó số đo cung lớn $\widehat{BC} = 360^\circ - 15^\circ = 345^\circ$.

$$\text{Vậy : } l_{BC} = \frac{\pi \cdot R \cdot 345}{180} = \frac{23}{12} \pi R.$$



Bài 450 Một dây AB chia đường tròn (O, R) thành hai cung mà cung này gấp đôi cung kia.

a. Tìm số đo mỗi cung và độ dài của các cung đó.

b. Tính các góc của tam giác OAB.

c. Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

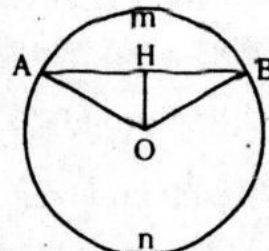
HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có : Số $\widehat{AmB} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

$$\text{Số } \widehat{AnB} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

Chiều dài của $\widehat{AmB}$ là : $l = \frac{\pi R \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi R}{3}$

Chiều dài của $\widehat{AnB}$ là : $l' = 2l = \frac{4\pi R}{3}$



b. Góc $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm chắn cung $\widehat{AmB}$, nên $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

Suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 30^\circ$.

c. Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow \triangle AOH$ là nửa tam giác đều cạnh $OA = R$, đường cao AH và OH là nửa cạnh, do đó : $OH = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$.

Bài 451 Cho đường tròn tâm O bán kính CA. Vẽ đường tròn đường kính OA, tâm O'.

a. Chứng minh hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau.

b. M là một điểm trên đường tròn (O'), tia OM cắt đường tròn (O) tại N.

So sánh độ dài hai cung $\widehat{AM}$ và $\widehat{AN}$ tương ứng của hai đường tròn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có : $OO' = R - R'$. Mà O, O', A thẳng hàng suy ra hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A .

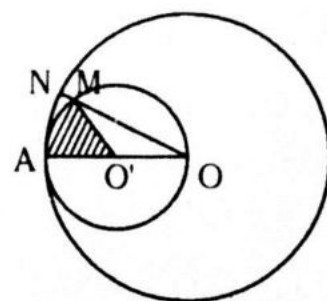
b. Gọi $\widehat{AON} = \alpha^\circ$ thì $\widehat{AO'M} = 2\alpha^\circ$

$$AC = R \quad \text{thì} \quad AO' = \frac{R}{2}$$

Cung AM đường tròn (O') có độ dài : $\frac{\pi \frac{R}{2} \cdot 2\alpha}{180^\circ} = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$.

Cung AN đường tròn (O) có độ dài : $\frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$. Vậy hai cung AM và AN có độ dài

bằng nhau.

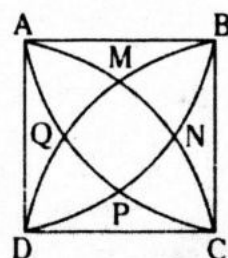


Bài 452 Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Lấy các đỉnh làm tâm, vẽ phía trong hình vuông, dựng các cung tròn bán kính a , tạo thành một hình hoa hồng. Tìm chu vi của hình đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Để tìm chu vi của hình hoa hồng $AMBNCPDQA$, ta nhận xét rằng các cung AM, MB, BN có chiều dài bằng nhau và có cùng số đo bằng 30° . Ta tìm chiều dài một cung rồi nhân lên cho 8.

$$\text{Đáp số : } \frac{2\pi a}{12} \cdot 8 = \frac{4\pi a}{3}$$

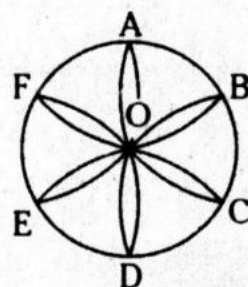


Bài 453 Chia đường tròn (O, R) thành sáu phần bằng nhau bởi các điểm chia A, B, C, D, E, F . Từ mỗi điểm chia làm tâm, vẽ phía trong đường tròn (O) , dựng các cung tròn bán kính R . So sánh chu vi của hình tạo thành (hình hoa hồng) với chu vi của đường tròn (O, R) .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tính độ dài của mỗi cung tròn đã dựng. Chu vi của hình hoa hồng gấp 6 lần độ dài mỗi cung tròn và gấp 2 chu vi đường tròn (O) (h.127).

$$\text{Đáp số : } \frac{2\pi R}{3} \cdot 6 = 4\pi R$$



§10. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức :

$$S = \pi R^2$$

2. Cách tính diện tích hình quạt tròn

Trong hình tròn bán kính R diện tích hình quạt n° được tính theo công thức

$$S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} \text{ hay } S = \frac{l \pi}{2}$$

(l là độ dài cung n° của hình quạt)

B. BÀI TẬP

Bài 454 Cho hình vuông có cạnh bằng a nội tiếp đường tròn (O) . Hãy tính theo a độ dài đường tròn (O) và diện tích hình tròn (O) .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi R là bán kính đường tròn (O)

$$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a\pi\sqrt{2} \Rightarrow S = \pi \frac{a^2}{2}.$$

Bài 455 Hãy lập công thức tính diện tích hình vành khăn S theo R_1 và R_2 ($R_1 > R_2$) và tính diện tích này khi $R_1 = 10,5$ cm, $R_2 = 7,8$ cm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Diện tích hình tròn lớn : $S_1 = \pi R_1^2$.

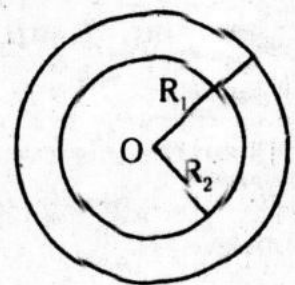
Diện tích hình tròn nhỏ : $S_2 = \pi R_2^2$.

Diện tích hình vành khăn

$$S_v = S_1 - S_2 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi (R_1^2 - R_2^2).$$

- Áp dụng khi $R_1 = 10,5$ cm, $R_2 = 7,8$ cm

$$S = \pi (10,5^2 - 7,8^2) = \pi (10,5 + 7,8)(10,5 - 7,8) = 155,2 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Bài 458 Tính diện tích một hình quạt tròn có bán kính 6 cm và góc ở tâm tương ứng là 60° .

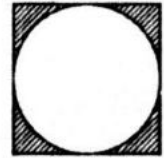
HƯỚNG DẪN GIẢI

- * Cách 1 : Theo công thức : $S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60}{360} = 6\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

* **Cách 2** : Cung 60° có chiều dài bằng $\frac{\pi \cdot 6 \cdot 60}{180} = 2\pi$ (cm).

Do đó diện tích hình quạt tròn có bán kính 6 cm và góc ở tâm 60° là :

$$S_q = l \cdot \frac{R}{2} = 2\pi \cdot \frac{6}{2} = 6\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Bài 457 Trên hình bên biết diện tích phần gạch sọc là 86 cm^2 .
Tính diện tích hình tròn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

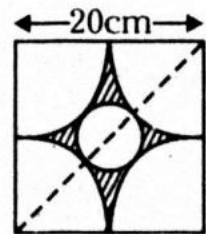
Gọi cạnh hình vuông là $2a$. Ta có diện tích hình vuông là $4a^2$. Diện tích hình tròn là πa^2 .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 4a^2 - \pi a^2 &= 86 \\ a^2(4 - \pi) &= 86 \\ 0,86a^2 &= 86 \\ a^2 &= 100 \end{aligned}$$

Vậy diện tích hình tròn là $S = \pi a^2 = 100\pi \approx 314 \text{ (cm}^2\text{)}$

Bài 458 Trên hình bên :

- Tính diện tích hình tròn ở giữa.
- Tính diện tích phần gạch sọc.



HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Muốn tính diện tích hình tròn ở giữa, ta cần biết bán kính. Muốn vậy ta tính MN rồi chia đôi.

$$\text{Ta có } BD = 20 \cdot \sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow MN &= BD - (BN + DM) \\ &= 20\sqrt{2} - (10 + 10) = 20(\sqrt{2} - 1) \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Bán kính hình tròn ở giữa là :

$$r = 10(\sqrt{2} - 1) \approx 4,14 \text{ cm}$$

Diện tích hình tròn ở giữa là :

$$S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot (4,14)^2 \approx 54 \text{ (cm}^2\text{)}$$

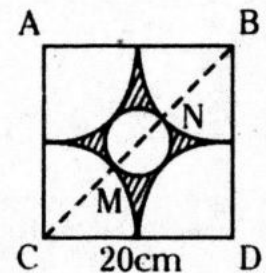
b. Muốn tìm diện tích phần gạch sọc, ta lấy diện tích hình vuông trừ đi diện tích bốn hình quạt và diện tích hình tròn ở giữa.

$$\text{Diện tích hình vuông là : } S = 20^2 = 400 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{Diện tích bốn hình quạt là : } S_2 = \pi \cdot 10^2 \approx 314 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích phần gạch sọc là :

$$S_3 = S - (S_1 + S_2) = 400 - (54 + 314) = 32 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

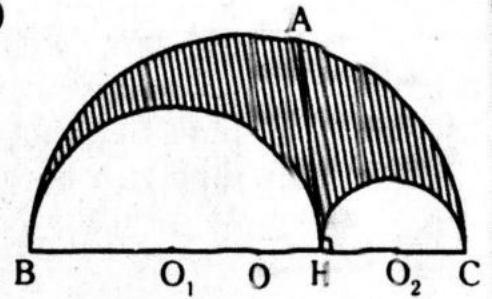


Bài 459 Tính diện tích phần gạch sọc ở hình bên biết $AH = 3 \text{ cm}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Gọi S, S_1, S_2 là diện tích các nửa đường tròn $(O), (O_1)$ và $(O_2), R_1, R_2$ là các bán kính tương ứng của các nửa đường tròn (O_1) và $(O_2) \Rightarrow$ bán kính đường tròn (O) là $R_1 + R_2$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{\text{gạch}} &= S - (S_1 + S_2) \\ \Rightarrow S_{\text{gạch}} &= \frac{\pi (R_1 + R_2)^2}{2} - \left(\frac{\pi R_1^2}{2} + \frac{\pi R_2^2}{2} \right) \\ &= \pi \cdot R_1 R_2. \end{aligned}$$



Mặt khác $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao

$$\Rightarrow AH^2 = BH \cdot HC = 4R_1 \cdot R_2 \Rightarrow R_1 R_2 = \frac{9}{4}.$$

$$\text{Vậy } S_{\text{gạch}} = \frac{9\pi}{4} (\text{cm}^2).$$

Bài 480 Cho đường tròn (O, R) và một điểm M sao cho $OM = 2R$. Từ M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là tiếp điểm). Tính theo R.

a. Độ dài cung nhỏ AB.

b. Diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến MA, MB và cung nhỏ AB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

$\triangle AOM$ là $\frac{1}{2} \triangle$ đều

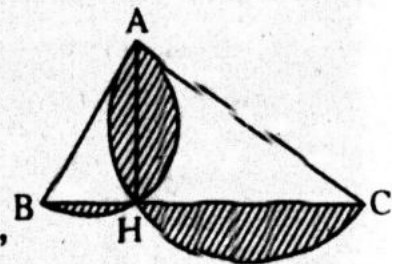
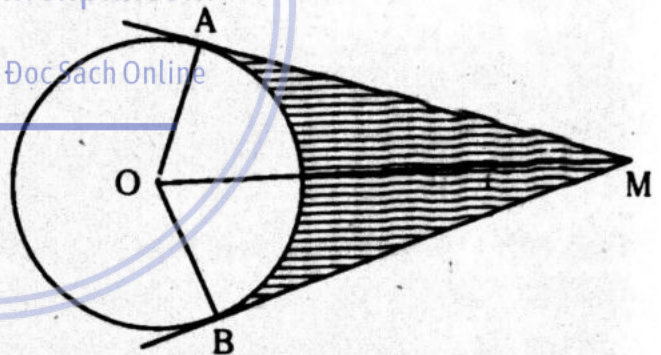
$$\Rightarrow \widehat{AOM} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$l_{AB} = \frac{2\pi \cdot R}{3}$$

$$S_{MAOB} = 2 S_{AOM} = R^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$S_{\text{quạt } AOB} = \frac{\pi R^2}{3}.$$

$$\Rightarrow S_{\text{gạch}} = \frac{R^3}{3} (3\sqrt{3} - \pi).$$



Bài 481 Trên hình bên biết $\triangle ABC$ vuông ở A, $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$. Tính diện tích phần gạch sọc.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Diện tích phần gạch sọc bằng tổng diện tích của hai nửa hình tròn đường kính AB và AC trừ đi diện tích $\triangle ABC$.

$$\text{Diện tích nửa hình tròn đường kính AB là: } S_1 = \frac{1}{2} \pi R_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi (\text{cm}^2)$$

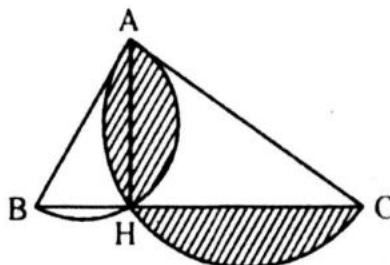
Diện tích nửa hình tròn đường kính AC là :

$$S_2 = \frac{1}{2} \pi \cdot R_2^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2} \pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích $\triangle ABC$ là : $S_3 = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích phần gạch sọc là : $S = S_1 + S_2 - S_3$

$$= 2\pi + \frac{9}{2} \pi - 12 \approx 8,4 \text{ cm}^2.$$



Bài 462 Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B mà tại các giao điểm, tiếp tuyến đường tròn này đi qua tâm đường tròn kia và khoảng cách hai tâm $OO' = 2R$. Tìm diện tích phần chung của hai đường tròn theo bán kính R của đường tròn (O).

HƯỚNG DẪN GIẢI

$\triangle OAO'$ vuông tại A, có cạnh huyền $OO' = 2R$ gấp đôi cạnh góc vuông $OA = R$ nên là nửa tam giác đều cạnh $OO' = 2R$ và đường cao $O'A \Rightarrow O'A = R\sqrt{3}$.

$$\widehat{AOO'} = 60^\circ; \widehat{AO'O} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ; \widehat{AO'B} = 60^\circ$$

$$AB = R\sqrt{3}.$$

Do đó ta có : $OH = \frac{R}{2}; O'H = \frac{3R}{2}$

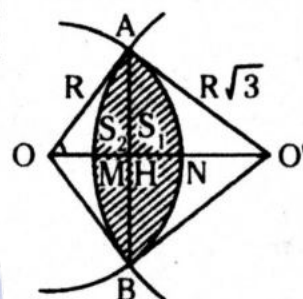
$$\Rightarrow S_1 = S_{\text{hq } OANB} - S_{OAB} = \frac{1}{3} \pi R^2 - \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$$

Ta lại có : $S_2 = S_{\text{hq } O'AMB} - S_{O'AB} = \frac{1}{6} \pi (R\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{R^2}{2} \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$

Do đó diện tích phải tìm là :

$$S = S_1 + S_2 = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2 + \frac{R^2}{2} \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{(5\pi - 6\sqrt{3}) R^2}{6}$$

Vậy : $S = \frac{(5\pi - 6\sqrt{3}) R^2}{6}$.



BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

463 Cho nửa đường tròn đường kính AB, tâm O. Một điểm C thay đổi trên nửa đường tròn. Các tia phân giác của góc AOC, BOC cắt nửa đường tròn tại các điểm M, N.

Chứng minh rằng cung $\widehat{MN}$ có số đo không phụ thuộc vào vị trí điểm C trên nửa đường tròn.

484

Cho ba điểm A, B, C cùng nằm trên một nửa đường tròn tâm O, điểm B nằm giữa hai điểm A, C. Các tia phân giác OM, ON của các góc AOB, BOC cắt nửa đường tròn tại M, N.

So sánh các cung MN và AC.

485

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AF. Kẽ từ điểm A, theo thứ tự ta lấy các điểm B, C, D, E sao cho B là điểm chính giữa của cung AC và C là điểm chính giữa của cung BD và cung AE.

- Chứng minh $AB = BC = CD = DE$.
- Chứng minh $AD = BE$.
- Chứng minh tứ giác ABDE là hình thang cân.

486

Cho đường tròn tâm O, đường kính AC. Từ A kẻ một dây cung AB căng một cung 60° . Đường thẳng qua B vuông góc với đường kính AC cắt đường tròn ở điểm D và đường thẳng song song với AC kẻ từ D cắt đường tròn tại điểm E.

- Tính số đo các cung $\widehat{AD}$, $\widehat{DE}$, suy ra $DE = DA = AB$.
- Chứng minh ba điểm B, O, E thẳng hàng.
- Cho bán kính đường tròn $R = 6\text{cm}$. Tính BD, EA.

487

Từ một điểm A nằm ngoài một đường tròn, ta kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B và C là các tiếp điểm) đến đường tròn. Một đường thẳng qua A, cắt đường tròn tại hai điểm D, E (điểm D nằm giữa hai điểm A, E)

- Chứng minh hệ thức: $BD \cdot CE = BE \cdot CD$.
- Giả sử $CE \parallel AB$. Gọi F là giao điểm của CD và AB. Chứng minh F là trung điểm của AB.

488

Cho một đường tròn (O) và một dây AB của đường tròn; S là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB}$. Từ S ta kẻ hai dây SM, SN theo thứ tự cắt dây AB tại các điểm P, Q.

- Chứng minh bốn điểm M, N, Q, P nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh $\triangle SAM \sim \triangle SPA$.
- Chứng minh SA là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAP.

489

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Các đường trung trực của các đoạn thẳng AB và AO theo thứ tự cắt nửa đường tròn tại các điểm C, D.

- Tính AD, AC, BD theo R, suy ra công thức tính cạnh của lục giác đều, tứ giác đều, tam giác đều nội tiếp theo bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

- b. Gọi E là giao điểm của AC và BD; F là hình chiếu của E trên AB. Chứng minh ba đường thẳng AD, BC, EF đồng quy tại một điểm mà ta gọi là M. Đặt $MF = x$, tính AF, BF theo x và R.
- c. Tính CD theo R, suy ra công thức tính cạnh và trung đoạn của hình 12 giác đều nội tiếp trong đường tròn.

470

Cho tam giác đều ABC cạnh a. Kẻ các đường cao AD, BE. Vẽ cung tròn $\widehat{AmB}$ phần thuộc miền trong tam giác của đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AC, BC tại các điểm A, B và cung tròn $\widehat{AnB}$ phần thuộc miền trong tam giác của đường tròn tiếp xúc tại B với đường cao BE và tiếp xúc tại A với đường cao AD.

- Tính số đo các cung $\widehat{AmB}$, $\widehat{AnB}$.
- Tính bán kính các đường tròn trên.
- Tính diện tích hình trắng khuyết $AmBnA$.

471

Cho đường tròn tâm O bán kính R. Vẽ một hình bình hành ABCD ngoại tiếp đường tròn.

Chứng minh rằng ABCD là hình thoi.

Tìm một liên hệ giữa các độ dài của AC, BD và cạnh AB với bán kính R.

Chứng minh hệ thức: $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{1}{4R^2}$

472

Cho một đoạn thẳng AB. Trong hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là

đường thẳng AB ta dựng hai tia Ax, Ay sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{BAy}$ (các góc này đều nhọn). Kẻ $BC \perp Ax$ và gọi D là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AB kẻ từ B với cạnh Ay của góc BAy.

- Chứng minh $AB^2 = AC \cdot AD$.
- Vẽ đường tròn đi qua ba điểm A, B, D. Chứng minh rằng CB là tiếp tuyến tại B với đường tròn này.
- Cho AB cố định, góc BAx thay đổi từ 0° đến 90° . Tìm quỹ tích điểm C.
- Cho $\widehat{BAx} = \widehat{BAy} = 30^\circ$. Tính:
 - BD, AD, AC theo bán kính R của đường tròn đi qua ba điểm A, B, D.
 - Tính diện tích các viên phân giới hạn bởi dây AB và cung AB; dây BD và cung BD.

HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

Bài 483

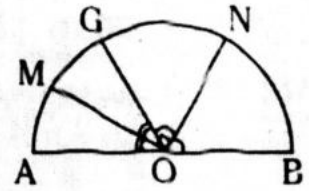
Hai góc ở tâm $\widehat{AOC}$ và $\widehat{BOC}$ là hai góc kề bù nên:

$$OM \perp ON$$

$$\Rightarrow \widehat{MON} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow sđ\widehat{MN} = 90^\circ = \text{không đổi.}$$

Không phụ thuộc vào vị trí điểm C trên nửa đường tròn.



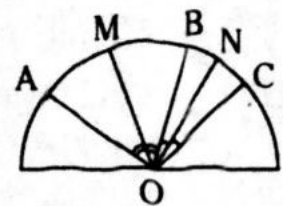
Bài 484

$$\text{Ta có } \widehat{MOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}, \quad \widehat{BON} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$$

$$\text{mà } \widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC}, \quad \widehat{MOB} + \widehat{BON} = \widehat{MON}$$

$$\Rightarrow \widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$$

$$\Rightarrow sđ\widehat{MN} = \frac{1}{2}sđ\widehat{AC}.$$

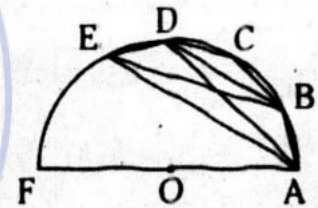


Bài 485

a. Dễ thấy: $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}$

b. Suy ra từ: $\widehat{AD} = \widehat{EB}$.

c. Chứng minh $\triangle ABD = \triangle EDA$.



Bài 488

a. $sđ\widehat{AB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOA} = 60^\circ, \widehat{BAO} = 60^\circ$

$\widehat{DA} = \widehat{BA} \Rightarrow sđ\widehat{DA} = 60^\circ, \widehat{OAD} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BOA} = \widehat{OAD} \Rightarrow OE \parallel AD$

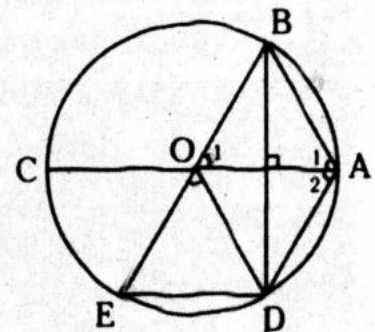
ABCD là hình thoi: $AD = DE$

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DE}$. Vậy $sđ\widehat{AD} = sđ\widehat{DE} = 60^\circ$.

b. $ED \perp BD$ ($ED \parallel AC, AC \perp BD$)

nên $\widehat{BDE} = 90^\circ \Rightarrow BE$ là một đường kính. Hay BE qua O. Ba điểm O, B, E thẳng hàng.

c. $EA = BD = \sqrt{BE^2 - ED^2} = \sqrt{108} \Rightarrow EA = BD = 2\sqrt{27} \text{ (cm)}.$



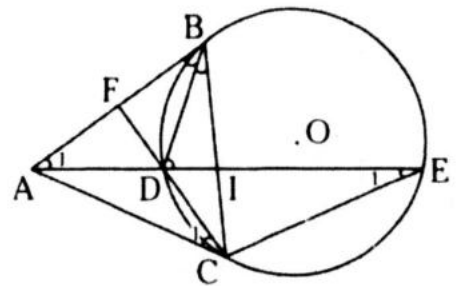
Bài 467

$$\begin{aligned} \text{a. } \triangle ABE \sim \triangle ADB &\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BD}{DB} \\ \triangle ACE \sim \triangle ADC &\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{CE}{DC} \\ &\text{và } AB = AC \\ \text{Suy ra } \frac{BE}{DB} = \frac{CE}{DC} &\Rightarrow BD \cdot CE = BE \cdot CD. \end{aligned}$$

$$\text{b. } \widehat{AEC} = \widehat{A_1}, \widehat{AEC} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1} \Rightarrow \triangle ACF \sim \triangle DAF$$

$$\Leftrightarrow AF^2 = DF \cdot CF. \text{ Lại có } FB^2 = FD \cdot FC.$$

Suy ra $AF = FB$. F là trung điểm của AB.

**Bài 468**

$$\begin{aligned} \text{a. } \widehat{SPQ} &= \frac{1}{2}(\widehat{SDB} + \widehat{SAM}) = \frac{1}{2}(\widehat{SBA} + \widehat{SAM}) \\ &= \frac{1}{2}\widehat{SMB} \end{aligned}$$

$$\widehat{SNM} = \frac{1}{2}\widehat{SMB} \Rightarrow \widehat{SPQ} = \widehat{SNM}$$

$$\triangle SPQ \sim \triangle SNM \Rightarrow SP \cdot SM = SQ \cdot SN$$

Vậy M, N, P, Q nằm trên đường tròn.

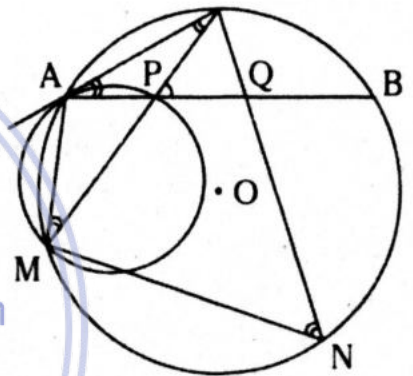
$$\text{b. } \widehat{SMA} = \frac{1}{2}\widehat{SBA} \text{ và } \widehat{SAB} = \frac{1}{2}\widehat{SBA}$$

$$\text{mà } \widehat{SA} = \widehat{SB} \text{ suy ra } \widehat{SMA} = \widehat{SAP}$$

Kết hợp với góc $\widehat{ASM}$ chung suy ra $\triangle SAM \sim \triangle SPA$.

$$\text{c. Từ } \triangle SAM \sim \triangle SPA \text{ ta có: } \frac{SA}{SM} = \frac{SP}{SA} \Rightarrow SA^2 = SP \cdot SM$$

$\Rightarrow SA$ là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAP.

**Bài 469**

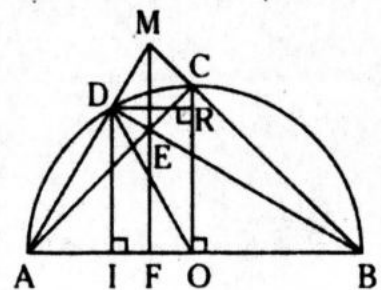
a. Chứng minh AD là cạnh của lục giác đều nội tiếp trong đường tròn.

$\triangle ACO$ vuông $\Rightarrow AC$ là cạnh hình vuông nội tiếp trong đường tròn.

$$AC^2 = AO^2 + CO^2 = 2R^2 \Rightarrow AC = R\sqrt{2}$$

$\widehat{BOD} = 120^\circ \Rightarrow BD$ là cạnh tam giác đều nội tiếp đường tròn.

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 3R^2 \Rightarrow BD = R\sqrt{3}.$$



b. E là trực tâm của $\triangle AMB \Rightarrow MF$ đi qua E.

$$DI // MF \Rightarrow AF = \frac{AI \cdot MF}{DI}$$

$$\text{Với } AI = \frac{R}{2}, DI = \frac{R\sqrt{3}}{2}, MF = x \Rightarrow AF = \frac{2\sqrt{3}}{3}, BF = \frac{1}{3}(6R - 2\sqrt{3}).$$

c. $\widehat{DOC} = 30^\circ, n = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12 \Rightarrow CD$ là cạnh của hình 12 cạnh đều nội tiếp trong đường tròn.

$$\text{Kẻ } DK \perp OK : DK = OI = \frac{R}{2}; CK = CO - DI = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{3}).$$

$$\triangle DKC : DC^2 = DK^2 + CK^2 \Rightarrow DC = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Bài 470

a. Tâm O và O' của các đường tròn tiếp xúc với AC, BC và đường tròn tiếp xúc với AD, BE đều nằm trên tia phân giác trong của $\hat{C}$. Suy ra O là giao điểm của phân giác trong của $\hat{C}$ với đường thẳng vuông góc với AC kẻ qua A. Tương tự cho O'. Suy ra $s\widehat{AmB} = 120^\circ, s\widehat{AnB} = 60^\circ$.

b. Đường tròn tiếp xúc với AC tại A, BC tại B có bán kính $OA = \frac{AF}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

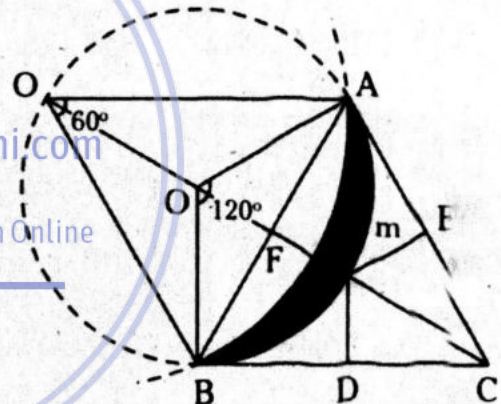
$$\text{Tương tự } O'A = \frac{AF}{\sin 30^\circ} = a$$

c. Diện tích viên phân AmBA : $\frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$

$$\text{Diện tích viên phân AnBA : } \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Diện tích hình trắng khuyết AmBnA

$$\frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} - \left(\frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{a^2(3\sqrt{3} - \pi)}{18}.$$



Bài 471

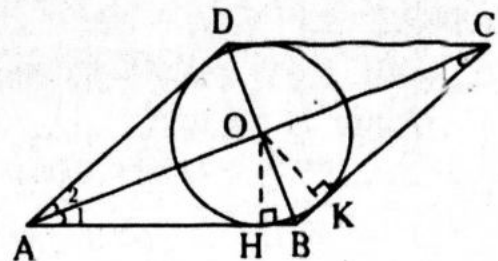
a. Kẻ $OH \perp AB, OK \perp BC \Rightarrow OH = OK$. Nên $\triangle OAH = \triangle OCK \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$, mà $\hat{C}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow dpcm$.

$$b. S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

$$S_{ABDC} = 4S_{AOB} = 4R \frac{AB}{2}$$

$$\Rightarrow AC \cdot BD = 4R \cdot AB.$$

$$c. AC \cdot BD = 4R \cdot BC \Rightarrow 16R^2 \cdot BC^2 = AC^2 \cdot BD^2$$



$$\text{và } BC^2 = OB^2 + OC^2 \Rightarrow BC^2 = \frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4} \Rightarrow 4BC^2 = AC^2 + BD^2$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{4R^2} = \frac{AC^2 + BD^2}{AO^2 \cdot BD^2} \Rightarrow \frac{1}{4R^2} = \frac{1}{AO^2} + \frac{1}{BD^2}.$$

Bài 472

$$\begin{aligned} 1. \widehat{BAC} = \widehat{DAB} &\Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle DAB \\ &\Rightarrow AB^2 = AC \cdot AD. \end{aligned}$$

2. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có đường kính AD , tâm M là trung điểm của AD . $\triangle AMB$ cân. Nên $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$, $\widehat{A_2} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

$$\Rightarrow AC \parallel MB$$

$$\Rightarrow MB \perp BC$$

$$\Rightarrow MB \perp CB \Rightarrow \text{đpcm.}$$

3. Quỹ tích C là nửa đường tròn đường kính AB .

$$1. BD = R, AD = 2R, AC = \frac{3R}{2}$$

$$\text{Khi } \widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 120^\circ$$

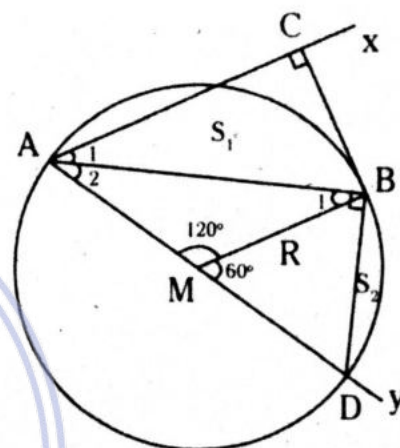
AB là cạnh tam giác đều nội tiếp trong đường tròn $AB = R\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Hình quạt } AMB \text{ có } \widehat{AMB} = 120^\circ \Rightarrow S_{\text{qnAMB}} = \frac{1}{3}\pi R^2$$

$$\text{Diện tích hình viên phân } S_1 = R^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\text{Tương tự: } S_2 = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



Chương IV

HÌNH TRỤ – HÌNH NÓN – HÌNH CẦU

§1. HÌNH TRỤ – DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH HÌNH TRỤ

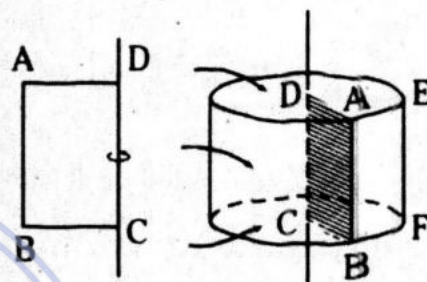
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hình trụ

Khi quay hình chữ nhật ABCD một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một hình trụ (hình bên).

Khi đó:

- DA và CB quét nên hai đáy của hình trụ, là hai hình tròn bằng nhau nằm trong hai mặt phẳng song song, có tâm D và C.
- Cạnh AB quét nên mặt xung quanh của hình trụ, mỗi vị trí của AB khi quay được gọi là một đường sinh. Chẳng hạn EF là một đường sinh.
- Các đường sinh của hình trụ vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài đường sinh là chiều cao của hình trụ.
- DC gọi là trục của hình trụ.



2. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng

- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với đáy, thì phần mặt phẳng nằm trong hình trụ (mặt cắt) là một hình tròn bằng hình tròn đáy.
- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục DC thì mặt cắt là một hình chữ nhật.

3. Diện tích xung quanh của hình trụ

- Diện tích xung quanh của hình trụ:

$$S_{xq} = 2\pi r h$$

- Diện tích toàn phần của hình trụ:

$$S_{tp} = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

(r là bán kính đường tròn đáy, h là chiều cao)

4. Thể tích hình trụ

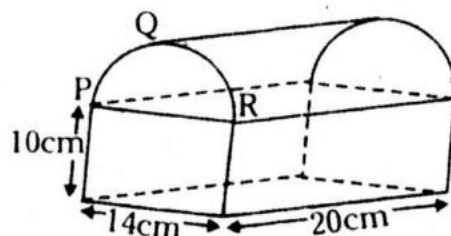
Công thức tính thể tích hình trụ :

$$V = Sh = \pi r^2 h$$

(S là diện tích hình tròn đáy, h là chiều cao)

B. BÀI TẬP

Bài 473 Cho hình lập phương có cạnh $a = R\sqrt{\pi}$. Tìm độ dài đường cao của hình trụ có bán kính đáy và có cùng thể tích với hình lập phương nói trên.

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Gọi h là đường cao của hình trụ. Ta có :

- Thể tích của hình trụ là : $\pi R^2 h$
- Thể tích của hình lập phương : $(R\sqrt{\pi})^3 = R^3 \pi \sqrt{\pi}$

Theo đề bài thì $\pi R^2 h = R^3 \pi \sqrt{\pi}$.

Vậy $h = R\sqrt{\pi} = a$.

Bài 474 Một trang giấy hình chữ nhật rộng 7 cm có diện tích 91 cm².

- a. Tính bán kính hình trụ cao 7 cm được tạo thành do cuộn tờ giấy nói trên.
- b. Tính thể tích hình trụ ấy.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Chiều dài hình chữ nhật : $91 : 7 = 13$ (cm)

Khi lấy chiều cao h của hình trụ là 7 cm thì chu vi đáy của hình trụ là 13 cm. Suy ra bán kính đáy là:

$$R = \frac{13}{2\pi} \approx 2,07 \text{ (cm)}.$$

b. Thể tích hình trụ :

$$V = \pi R^2 h \approx \pi \cdot (2,07)^2 \cdot 7 \approx 94,18 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Bài 475 Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $a \times b$ (với $a < b$), người ta cuộn lại thành mặt xung quanh của một hình trụ. Hỏi phải cuộn theo chiều nào của tấm tôn để được một hình trụ có thể tích lớn nhất?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Nếu lấy chiều cao của hình trụ bằng a thì chu vi đáy bằng b , suy ra bán kính đáy $R = \frac{b}{2\pi}$.

Thể tích hình trụ là:

$$V_1 = \pi \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \cdot a = \frac{ab^2}{4\pi} \quad (1)$$

Nếu lấy chiều cao của hình trụ bằng b thì chu vi đáy bằng a , suy ra bán kính đáy $R = \frac{a}{2\pi}$.

Thể tích của hình trụ là :

$$V_2 = \pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot b = \frac{a^2 b}{4\pi} \quad (2)$$

Vì $a < b$ nên từ (1) và (2) suy ra $V_2 < V_1$.

Vậy cuộn tấm tôn theo chiều cạnh a là đường cao thì hình trụ có thể tích lớn nhất.

Bài 476 Một chiếc rương có dạng như hình bên. Phần trên là nửa hình trụ, phần dưới là một hình hộp chữ nhật, với các kích thước cho trên hình vẽ, hãy tính thể tích của chiếc rương.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Thể tích hình hộp chữ nhật là : $10 \times 14 \times 20 = 2800 \text{ (cm}^3\text{)}$.

- Thể tích nửa hình trụ là :

$$\left[\left(\frac{14}{2}\right)^2 \times \frac{22}{7} \times 20 \right] : 2 = 1540 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

- Thể tích của chiếc rương là :

$$2800 + 1540 = 4340 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Bài 477 Hai hình chữ nhật ABCD và EFGH có cạnh $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$, $EF = 12 \text{ cm}$, $FG = 2 \text{ cm}$. Cho hình thứ nhất quay một vòng quanh cạnh AB, hình thứ hai quay một vòng quanh cạnh EF. Ta được hai hình trụ.

- Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ thứ nhất và của hình trụ thứ hai.
- Nhận xét gì về diện tích toàn phần và thể tích của hai hình này.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Gọi S_{xq1} , S_{xq2} là diện tích xung quanh của hình trụ thứ nhất, hình trụ thứ hai.

Ta có : $S_{xq1} = 2\pi \cdot AB \cdot BC = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

$$S_{xq2} = 2\pi \cdot EF \cdot FG = 48\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Gọi V_1 , V_2 là thể tích của hình trụ thứ nhất, hình trụ thứ hai. Ta có :

$$V_1 = \pi \cdot BC^2 \cdot AB = \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 48\pi \approx 150,72 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$V_2 = \pi \cdot EG^2 \cdot FH = \pi \cdot 2^2 \cdot 12 = 48\pi \approx 150,72 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

b. Gọi S_{tp1} , S_{tp2} lần lượt là diện tích toàn phần của hình trụ thứ nhất, hình trụ thứ hai. Ta có :

$$S_{tp1} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R)$$

$$= 2\pi \cdot BC(AB + BC)$$

$$= 2\pi \cdot 4(3 + 4)$$

$$= 56\pi \approx 175,84 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\begin{aligned}
 S_{tp2} &= 2\pi R(h + R) \\
 &= 2\pi \cdot FG \cdot (EF + FG) \\
 &= 2\pi \cdot 2(12 + 2) \\
 &= 56\pi \approx 175,84 \text{ (cm}^2\text{)}
 \end{aligned}$$

Vậy diện tích toàn phần và thể tích của hai hình trụ bằng nhau.

Bài 478 Người ta quét xi măng mặt trong một bể hình trụ có đường kính 4m và chiều cao 2,25m. Hỏi diện tích phải quét xi măng?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Diện tích đáy bể hình trụ : $\pi \cdot 2^2$.
 Chu vi đáy bể hình trụ : $2\pi \cdot 2$.
 Diện tích mặt bên hình trụ: $2\pi \cdot 2 \cdot 2,25$.
 Diện tích quét xi măng (bể hình trụ không có nắp) :
 $\pi \cdot 2^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 2,25 = 4\pi \cdot 3,25 \approx 40,8 \text{ (m}^2\text{)}.$

Bài 479 Diện tích và chu vi của một hình chữ nhật ABCD ($AB > AD$) theo thứ tự là $2a^2$ và $6a$. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng, ta được một hình trụ. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ này.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Nếu ta xem độ dài của các cạnh AB và AD như là các ẩn thì chúng sẽ là các nghiệm của phương trình bậc hai :

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$$

Giải phương trình bậc hai này, đối chiếu điều kiện của đề bài, ta có :

$$AB = 2a \text{ và } AD = a.$$

- Thể tích hình trụ :

$$V = \pi AD^2 \cdot AB = 2\pi a^3.$$

- Diện tích xung quanh của hình trụ :

$$S_{xq} = 2\pi AD \cdot AB = 4\pi a^2.$$

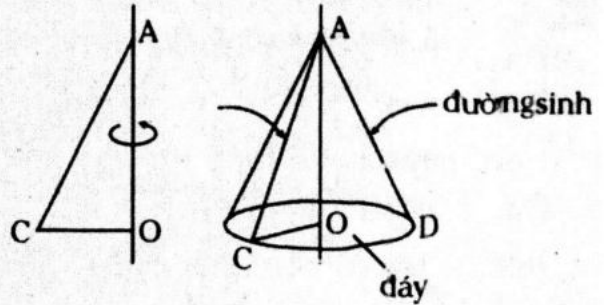
§2. HÌNH NÓN – HÌNH NÓN CỤT – DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hình nón

Khi quay tam giác vuông AOC một vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định thì được một hình nón (hình bên).

- Cạnh OC quét nên đáy của hình nón, là một hình tròn tâm O.
- Cạnh AC quét nên mặt xung quanh của hình nón, mỗi vị trí của AC khi quay được gọi là một đường sinh. Chẳng hạn AD là một đường sinh.
- A gọi là đỉnh và AO gọi là đường cao của hình nón.



2. Diện tích xung quanh của hình nón

- Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi r l$
- Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2$
(r là bán kính đường tròn đáy, l là đường sinh)

3. Thể tích hình nón

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (r \text{ là bán kính đường tròn đáy, } h \text{ là chiều cao})$$

4. Hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt đáy được gọi là một hình nón cụt (hình bên).

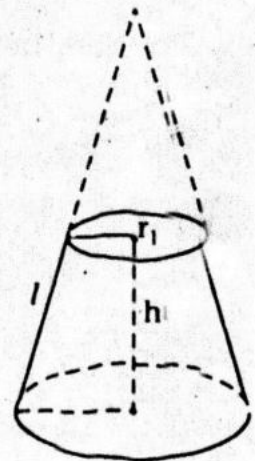
5. Diện tích và thể tích hình nón cụt

Cho hình nón cụt có r_1 , r_2 là các bán kính đáy, l là đường sinh, h là chiều cao.

Kí hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh và V là thể tích hình nón cụt. Quan sát hình bên, ta nhận thấy S_{xq} là hiệu diện tích xung quanh của hình nón lớn và hình nón nhỏ, V cũng là hiệu thể tích của hình nón lớn và hình nón nhỏ.

Do đó, ta có các công thức sau: $S_{xq} = \pi (r_1 + r_2) l$

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$



B. BÀI TẬP

Bài 480 Một hình nón có bán kính đáy bằng 5 cm và diện tích xung quanh bằng $65\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

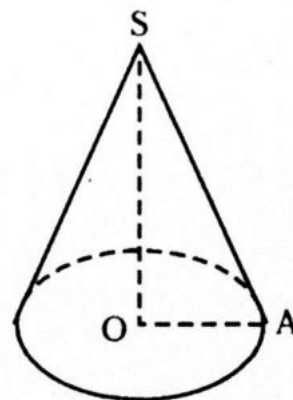
$$S_{xq} = \pi Rl \Rightarrow l = \frac{S_{xq}}{\pi R}$$

Vậy $l = \frac{65\pi}{\pi \cdot 5} = 13 \text{ (cm)}$

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông SOA ta được:

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (cm)}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Bài 481 Cho ΔABC vuông tại A có góc $C = 60^\circ$ cạnh $BC = 2a$. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón tạo thành khi quay ΔABC xung quanh cạnh AB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Tính được $AC = a \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2}, \quad V = \frac{\pi a^3 \cdot \sqrt{3}}{24}$$

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Bài 482 Một đồng cát hình nón, đường kính đáy 2,5 m, góc giữa đáy và cạnh bên khoảng 33° . Tính thể tích đồng cát.

HƯỚNG DẪN GIẢI

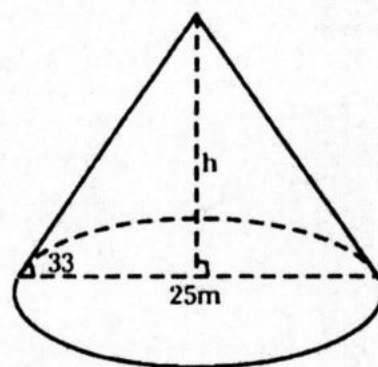
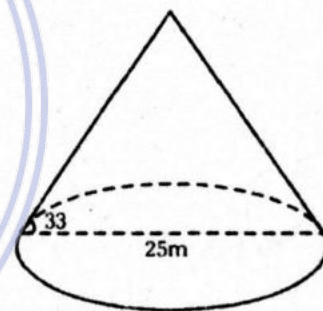
Diện tích đáy là $B = \pi (1,25)^2$.

Gọi h là chiều cao đồng cát thì

$$h = 1,25 \cdot \tan 33^\circ \\ \approx 1,25 \cdot 0,649 \approx 0,811 \text{ (m)}$$

Thể tích đồng cát :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi (1,25)^2 \cdot 0,811 \approx 1,328 \text{ (m}^3\text{)}.$$



Bài 483 Cho hình thang ABCD vuông tại A và B, biết $AB = BC = 3 \text{ cm}$, $AD = 7 \text{ cm}$. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón cụt tạo quanh khi quay hình thang này xung quanh cạnh AB.

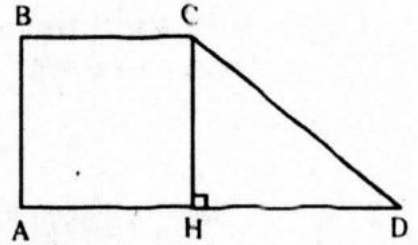
HƯỚNG DẪN GIẢI

Kẻ $CH \perp AD \Rightarrow ABCH$ là hình vuông và $CH = 3$ cm
 $HD = 4$ cm $\Rightarrow CD = 5$ cm.

Khi quay hình thang ABCD xung quanh cạnh AB ta được hình nón cụt có bán kính đáy lần lượt là 3 cm và 7 cm, đường sinh là 5 cm và đường cao là 3 cm.

$$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2) \cdot l = \pi(7 + 3) \cdot 5 = 50\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2) = 79\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Bài 484 Nếu cho tam giác vuông ABC, với $BC = 10$ cm, $\hat{B} = 60^\circ$, quay quanh cạnh huyền BC thì diện tích xung quanh và thể tích của hình tạo nên sẽ bằng bao nhiêu ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

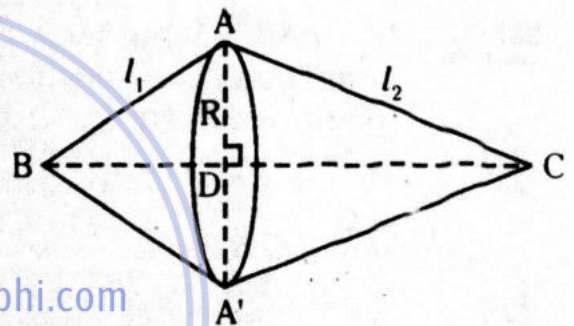
Kẻ $AD \perp BC$. Khi tam giác ABC, quay quanh BC thì nó tạo thành hai hình nón có đáy là hai hình tròn bán kính $R = AD = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm úp lên nhau.

Diện tích xung quanh của hình tạo thành:

$$\begin{aligned} S_{xq} &= \pi R l_1 + \pi R l_2 = \pi R (AB + AC) \\ &= \pi \frac{5\sqrt{3}}{2} (5 + 5\sqrt{3}) = \frac{25\pi(\sqrt{3} + 3)}{2} \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Thể tích của hình:

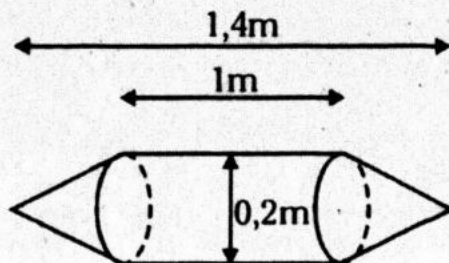
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi R^2 h_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 (BD + DC) = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot 10 = \frac{125\pi}{2} \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Bài 485 Một chi tiết máy có dạng như ở hình vẽ.

a. Tính diện tích mặt ngoài của chi tiết.

b. Tính thể tích.

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Chi tiết máy ở hình vẽ bao gồm một hình trụ và hai hình nón ở hai đầu hình trụ bằng nhau.

Đường kính của hình nón và hình trụ bằng nhau: $2R = 0,2$ m $\Rightarrow R = 0,1$ m

Đường cao hình trụ : $h = 1 \text{ m}$

Đường cao hình nón : $h' = (1,4 - 1\text{m}) : 2 = 0,2 \text{ m}$

Đường sinh hình nón : $l = \sqrt{R^2 + h'^2} = \sqrt{0,05} \approx 0,22 \text{ (m)}.$

a. Diện tích mặt ngoài của chi tiết :

$$S = 2\pi Rh + 2\pi Rl = 2\pi R(h + l) = 2\pi \cdot 0,1 (1 + 0,22) = 0,76 \text{ (m}^2\text{)}.$$

b. Thể tích :

$$V = \pi R^2 h + 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 h' = \pi R^2 (h + \frac{2}{3}h') = \pi \cdot (0,1)^2 (1 + \frac{2}{3} \cdot 0,2) \approx 0,035 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Bài 486 Một hình trụ và một hình nón cùng có bán kính đáy là R và đường cao bằng h . Tìm tỉ số giữa các diện tích xung quanh và các thể tích của hình trụ và hình nón.

HƯỚNG DẪN GIẢI

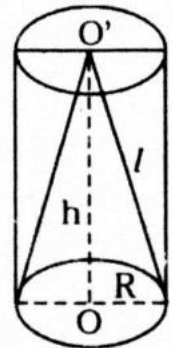
Gọi S, V là diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ, S', V' là diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.

Ta có : $S = 2\pi R \cdot h$; $V = \pi R^2 \cdot h$

$$S' = \pi Rl = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$V' = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$\text{Do đó : } \frac{S}{S'} = \frac{2h}{\sqrt{R^2 + h^2}} ; \frac{V}{V'} = 3.$$



Download Sách Hay | Đọc Sách Online

§3. HÌNH CẦU

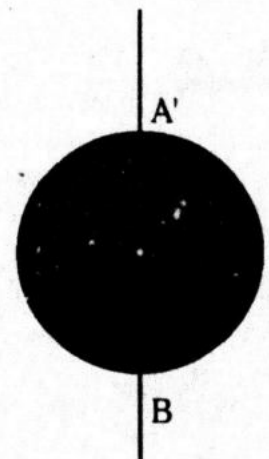
DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hình cầu

Khi quay nửa hình tròn tâm O , bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu (hình bên).

- Điểm O được gọi là tâm, độ dài R là bán kính của hình cầu.
- Nửa đường tròn trong phép quay nói trên tạo nên mặt cầu.



2. Cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng

Khi cắt hình cầu bán kính R bởi một mặt phẳng ta được :

- Một hình tròn bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm hình cầu.

- Một đường tròn bán kính bé hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm hình cầu.

3. Diện tích mặt cầu

$$S = 4\pi R^2 \text{ hay } S = \pi d^2$$

(R là bán kính, d là đường kính mặt cầu)

4. Thể tích hình cầu

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$



B. BÀI TẬP

Bài 487 Kinh tuyến của trái đất được coi là đường tròn có độ dài 40.000k
Tính :

a. Bán kính trái đất.

b. Độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo, cho biết vĩ của Hà Nội là $21^\circ 03'$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Từ công thức tính độ dài đường tròn $C = 2\pi \cdot R$.

Ta suy ra $R = \frac{C}{2\pi}$.

Do đó bán kính trái đất có độ dài : $R = \frac{40.000}{2 \cdot 3,14} \approx 6369 \text{ (km)}$.

b. Độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo bị chắn bởi góc ở tâm $21^\circ 03'$ hay $21,05^\circ$. Do đó, nó có độ dài là :

$$l = \frac{\pi \cdot R \cdot n}{180} = \frac{3,14 \cdot 6369 \cdot 21,05}{180} \Rightarrow l \approx 2339 \text{ (km)}.$$

Bài 488 Trong nửa hình cầu ở hình bên, có $OR = 12 \text{ (cm)}$, $\widehat{TOS} = 45^\circ$. H
tính :

a. Số đo góc $\widehat{PQS}$

b. Độ dài đoạn QS

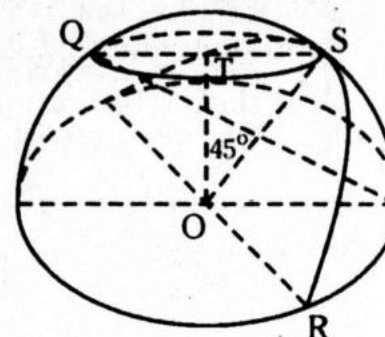
HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Các điểm O, P, S, Q cùng thuộc một mặt phẳng và ba điểm P, S, Q cùng nằm trên một đường tròn bán kính OP. Ta có :

$$\widehat{SOP} = 45^\circ \text{ (cùng phụ với góc kề } \widehat{SOT})$$

Nên $\widehat{PQS} = \frac{1}{2} \widehat{SOP}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn cung SP)

$$\text{Suy ra } \widehat{PQS} = 22,5^\circ.$$



Từ tam giác vuông cân TOS, ta có: $ST = \frac{OR}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ (cm)
 Vậy $QS = 12\sqrt{2}$ (cm)

489 Cho hình cầu tâm O, bán kính $R = 10$ cm.

Mặt phẳng P cắt hình cầu theo đường tròn tâm H, bán kính $r = 5$ cm.
 Gọi M là một điểm bất kì của đường tròn này. Tính OH và góc OMH.

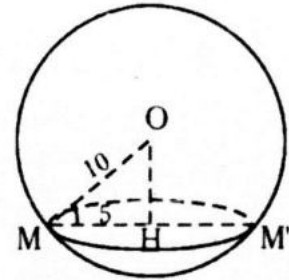
HƯỚNG DẪN GIẢI

Trong tam giác vuông OHM:

$$OH^2 = OM^2 - HM^2 = 10^2 - 5^2 = 75$$

$$OH = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ (cm)}$$

Vì $MH = \frac{1}{2} OM$ nên $\triangle OHM$ là nửa tam giác đều, do đó
 $\widehat{MH} = 60^\circ$



(Có thể tính $\cos \widehat{OMH} = \frac{MH}{OM} = \frac{5}{10} = 0,5$ suy ra $\widehat{OMH} = 60^\circ$).

490 Cho một nửa hình tròn có đường kính AB quay một vòng quanh AB.

a. Gọi tên hình được sinh ra và các yếu tố.

b. Cho $AB = 6$ cm.

- Tính diện tích của hình đó.
- Tính thể tích của hình đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Khi quay nửa hình tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$ một vòng quanh AB được hình cầu có:

- Tâm O, bán kính $\frac{AB}{2} = R$.
- Mặt cầu là phần sinh ra do nửa đường tròn quay quanh AB.
- $S = 4\pi \cdot R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \approx 113 \text{ (cm}^2\text{)}$
- $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 4\pi \cdot 3^3 = 108\pi \approx 339 \text{ (cm}^3\text{)}$.

491 Đường kính sao kim là 12374 km. Tính diện tích bề mặt sao kim với giả thiết rằng đó là một mặt cầu.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu:

$$S = 4\pi R^2 \text{ với bán kính } R = \frac{12374}{2} \text{ km.}$$

$$\text{Ta được: } S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{12374}{2}\right)^2 \approx 12,56^2 \cdot 38278969 \approx 481.000.000 \text{ km}^2.$$

Vậy diện tích bề mặt sao kim là $S \approx 481.000.000 \text{ km}^2$.

Bài 492 Một tháp nước hình cầu có bán kính phía trong đo được là 7 m. Người ta dự tính nước đầy trong tháp đó là đủ dùng cho một thị trấn trong một ngày. Biết số dân thị trấn là 11110 người. Hỏi người ta đã dự tính mức bình quân mỗi người bao nhiêu lít nước một ngày (tính gần đúng).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Thể tích tháp nước là : $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 7^3 \approx 1432,437 \text{ m}^3$.

Lượng nước đầy tháp ≈ 1432437 lít.

Mức nước bình quân mỗi người một ngày được tính là :

$$1432437 : 11110 \approx 129 \text{ (lít/người)}$$

Bài 493 Cho hình cầu tâm O, bán kính R. Gọi A là một điểm trên mặt cầu và I là trung điểm của đoạn OA. Qua I dựng mặt phẳng vuông góc với đường thẳng OA cắt hình cầu theo một hình tròn (C). Tìm diện tích hình tròn (C) và tỉ số diện tích của (C) và diện tích mặt cầu.

HƯỚNG DẪN GIẢI

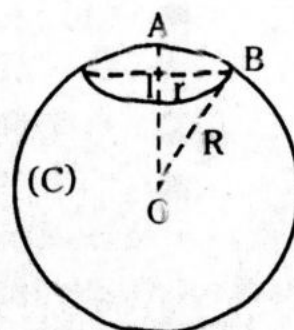
Gọi bán kính hình tròn (C) là r. Tam giác OIB vuông tại I nên

$$r = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Diện tích hình tròn (C) : $S_C = \pi r^2 = \frac{3}{4} \pi R^2$

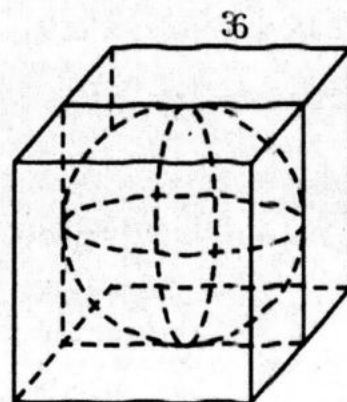
Diện tích mặt cầu : $S = 4\pi R^2$.

Tỉ số diện tích là : $\frac{S_C}{S} = \frac{\frac{3}{4} \pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{16}$.



Bài 494 Một hình cầu nội tiếp hình lập phương cạnh 36 cm.

- Tính thể tích hình cầu.
- Thể tích hình cầu chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích hình lập phương ?
- Xét tỉ số phần trăm thể tích hình cầu và hình lập phương trong trường hợp tổng quát.



HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Ta có bán kính hình cầu là $36 : 2 = 18$ (cm).

Nên thể tích của hình cầu là : $V = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 18^3 \approx 24417$ (cm³).

b. Thể tích của hình lập phương : $V = a^3 = 36^3 = 46656$ (cm³).

Tỉ số phần trăm của thể tích hình cầu so với hình lập phương là :

$$\frac{24417}{46656} \cdot 100 \approx 52,33\%.$$

c. Trong trường hợp tổng quát ta có :

- Thể tích hình cầu : $V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3} \pi R^3$

- Thể tích hình lập phương : $V_{\text{lp}} = (2R)^3 = 8R^3$

Tỉ số phần trăm thể tích hình cầu và hình lập phương là :

$$\frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{8R^3} \cdot 100 \approx 52,33\%.$$

Bài 495 Một hình cầu bán kính 3 cm nội tiếp một hình trụ.

a. Tính thể tích hình trụ.

b. Thể tích hình cầu chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích hình trụ?

c. Tính diện tích xung quanh hình trụ và diện tích mặt cầu. Có nhận xét gì?

HƯỚNG DẪN GIẢI

a. Thể tích hình trụ : $V_{\text{trụ}} = Sh = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi \approx 169,56$ (cm³).

b. Thể tích hình cầu: $V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 36\pi \approx 113,04$ (cm³)

$$\text{Nên } \frac{V_{\text{cầu}}}{V_{\text{trụ}}} = \frac{113,04}{169,56} \approx 0,66$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{\text{cầu}}}{V_{\text{trụ}}} = 66\%.$$

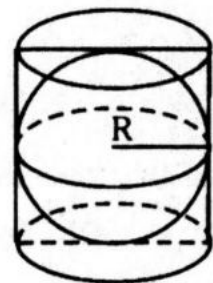
c. Diện tích xung quanh hình trụ :

$$S_{\text{xqtrụ}} = 2\pi Rh = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6 = 36\pi.$$

Diện tích mặt cầu :

$$S_{\text{cầu}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi.$$

$$\text{Vậy } S_{\text{xqtrụ}} = S_{\text{cầu}} = 36\pi \approx 113,04$$
 (cm²)



BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

- Bài 496** Cho hình lăng trụ lục giác đều, cạnh đáy là a , chiều cao là h .
- Tính diện tích xung quanh và thể tích hình lăng trụ.
 - Xét hai hình trụ có các đáy theo thứ tự là các hình tròn nội tiếp và ngoại tiếp đáy lăng trụ.
 - Tính diện tích xung quanh và thể tích các hình trụ nói trên.
 - Tính tỉ số giữa các thể tích, các diện tích xung quanh của các hình trụ nói trên.
- Bài 497** Cho nửa đường tròn đường kính AB , tâm O , bán kính R . Ta dựng bên trong nửa đường tròn này, các nửa đường tròn tâm O_1, O_2 các đường kính OA, OB . Gọi I là tâm đường tròn tiếp xúc với ba nửa đường tròn.
- Chứng minh rằng OI vuông góc với AB .
 - Tính bán kính r của đường tròn tâm I .
 - Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi bốn nửa đường tròn.
 - Cho hình vẽ quay xung quanh trục AB . Tính thể tích phần không gian giới hạn bởi bốn mặt cầu tạo nên.
- Bài 498** Chia đường cao của một hình nón thành ba phần bằng nhau qua mỗi điểm chia ta dựng một mặt phẳng song song với mặt đáy.
- Tính tỉ số diện tích các thiết diện có được.
 - Tính tỉ số diện tích xung quanh và thể tích của hình nón nhỏ trên cùng với diện tích xung quanh và thể tích hình nón đã cho.
 - Tính tỉ số thể tích của mỗi một trong ba hình cắt ra với thể tích hình nón đã cho.
- Bài 499** Cho nửa đường tròn đường kính $AC = 2a$, tâm O . Trên tia OA , lấy một điểm B sao cho $AB = OA$. Từ B kẻ tiếp tuyến BM đến đường tròn (M là tiếp điểm).
- Tính BM .
 - Cho hình vẽ quay xung quanh trục AC . Tính thể tích và diện tích hình tạo nên bởi tam giác BOM .
- Bài 500** Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự ấy thuộc một đường thẳng Δ với $AB = 2a, BC = 2b$, a và b là các độ dài cho trước và $a > b$.
- Trong cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng Δ , dựng hai nửa đường tròn đường kính AB, BC . Gọi DE là tiếp tuyến chung ngoài của hai nửa đường tròn, D là tiếp điểm thuộc đường tròn đường kính AB và E là tiếp điểm thuộc đường tròn đường kính BC . Gọi M là giao điểm của AD và CE .

- Chứng minh tứ giác MDBE là hình chữ nhật và MB là tiếp tuyến chung trong của hai nửa đường tròn.
- Tính độ dài DE theo a, b.
- Cho hình vẽ quay xung quanh Δ . Gọi S là diện tích xung quanh của hình tạo bởi đoạn thẳng DE và S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích hình tạo nên bởi các đường tròn đường kính AB, BC. Chứng minh hệ thức: $S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ

Bài 196

a. $S_{xq} = 6a.h$, $V = \frac{3a^2h\sqrt{3}}{2}$.

b. • Bán kính đáy hình tròn nội tiếp $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$S_1 = \pi ah\sqrt{3}, V_1 = \frac{3\pi a^2h}{4}$$

- Bán kính đáy hình trụ ngoại tiếp $R = a$

$$S_2 = 2\pi ah, V_2 = \pi a^2h$$

Ta có: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$

Bài 197

- a. O_1, E, I thẳng hàng; O_2, F, I thẳng hàng.

r là bán kính đường tròn tâm I

$$IO_1 = \frac{R}{2} + r; \quad IO_2 = \frac{R}{2} + r$$

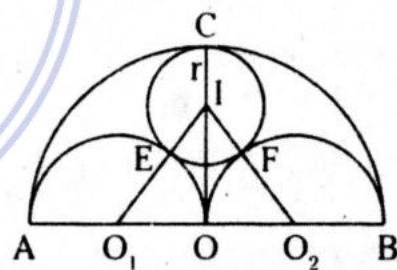
$$\Rightarrow IO_1 = IO_2 \Rightarrow I \text{ thuộc trung trực } AB \Rightarrow OI \perp AB$$

b. $IO_1^2 = OI^2 + O_1O^2 \Rightarrow r = \frac{R}{3}$.

- c. Phải diện tích cần tìm thì bằng diện tích nửa hình tròn bán kính R trừ đi tổng diện tích của 3 nửa đường tròn.

$$S = \frac{\pi R^2}{2} - \left[\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 \right] \Rightarrow S = \frac{5\pi R^2}{36}$$

d. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \left[\frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 + \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 + \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{3}\right)^3 \right]$
 $= \frac{4}{3}\pi R^3 \left[1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{27} \right] = \frac{67}{81}\pi R^2$

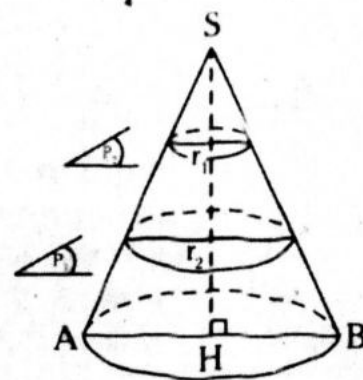


Bài 498

$$a. \frac{B_1}{B_2} = \frac{\pi R^2}{9} : \frac{4}{9}\pi R^2 = \frac{1}{4}.$$

$$b. \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9}; \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{27}.$$

$$c. \frac{V_1}{V} = \frac{1}{27}; \frac{V_2}{V} = \frac{7}{27}; \frac{V_3}{V} = \frac{19}{27}.$$

**Bài 499**

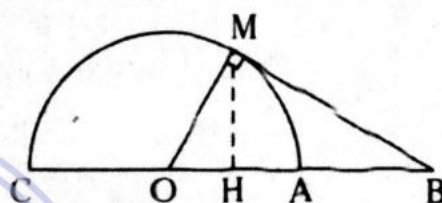
$$a. BM^2 = OB^2 - OM^2 \Rightarrow BM = a\sqrt{3}.$$

b. Kẻ $MB \perp OB$. Ta có:

$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MO^2} + \frac{1}{MB^2}$$

$$\Rightarrow MB = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$V = \frac{\pi a^3}{2}; S = \frac{\pi a^2}{2}(a + \sqrt{3})$$

**Bài 500**

a. MDBE là hình chữ nhật vì

$$\hat{M} = \hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$$

Gọi F là giao điểm của DE và MB:

$$FD = FB = FE$$

$\Rightarrow$ MB là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn tại B.

b. $\triangle MAC$ vuông, $MB \perp AC : MB^2 = AB \cdot BC$

$$\Rightarrow MB = 2\sqrt{ab}$$

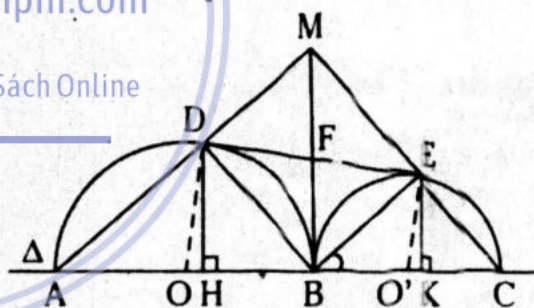
$$DE = MB \Rightarrow DE = 2\sqrt{ab}.$$

$$c. S_1 = 4\pi a^2, \quad S_2 = 4\pi b^2$$

$$S = \pi \cdot DE (DH + EK) \text{ mà } DH + EK = 2FB = MB = DE$$

$$\text{nên } S = \pi DE^2 = 4\pi ab$$

$$\text{Vậy } S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$



MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I. Căn bậc hai, căn bậc ba

§1. Căn bậc hai.....	5
§2. Căn hức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = A $	7
§3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương.....	10
§4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương	12
§5. Bảng căn bậc hai.....	16
§6. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai	19
§7. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai (tiếp theo)	22
§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai	25
§9. Căn bậc ba	28
BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I	31

Chương II. Hàm số bậc nhất

§1. Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số.....	36
§2. Hàm số bậc nhất	41
§3. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$).....	44
§4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau.....	47
§5. Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$	50
BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II	53

Chương III. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

§1. Phương trình bậc nhất hai ẩn.....	58
§2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	62
§3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế.....	66
§4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.....	70
§5. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình	74
BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III	79

Chương IV. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) – Phương trình bậc hai một ẩn

§1. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).....	87
§2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)	90
§3. Phương trình bậc hai một ẩn.....	93
§4. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai	96
§5. Công thức nghiệm thu gọn	100
§6. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng	103