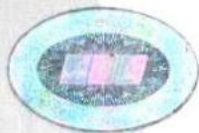


– TRẦN THỊ VÂN ANH –



MỚI

TÀI LIỆU ÔN THI VÀO LỚP 10

Môn

TOÁN

- ✓ Dành cho HS lớp 9 ôn tập và luyện thi vào lớp 10 công lập trên toàn quốc.
- ✓ Biên soạn theo nội dung và hướng dẫn ôn thi mới.



HÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN THỊ VÂN ANH



TÀI LIỆU ÔN THI VÀO LỚP 10

Môn **TOÁN**

- ✓ Dành cho HS lớp 9 ôn tập và luyện thi vào lớp 10 công lập trên toàn quốc.
- ✓ Biên soạn theo nội dung và hướng dẫn ôn thi mới.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

ĐT (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập **PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập nội dung

BÍCH HANH

Sửa bài

ANH THU

Chế bản

CÔNG TI ANPHA

Trình bày bìa

SƠN KỲ

Đối tác liên kết xuất bản

CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

TÀI LIỆU ÔN THI VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN

Mã số: 1L-323ĐH2009

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24cm in tại Công ti TNHH In Song Nguyên

Số xuất bản: 1072 - 2009/CXB/03-203/ĐHQGHN, ngày 23/11/2009

Quyết định xuất bản số: 323 LK - TN/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2010.

LỜI NÓI ĐẦU

Để đáp ứng nhu cầu học tập của học sinh, tài liệu tham khảo cho giáo viên, tác giả đã mạnh dạn viết quyển sách:

“Tài liệu ôn thi vào lớp 10 môn Toán”

Trong quyển sách này, tác giả đã phân chia thành các chuyên đề cơ bản sau, bao gồm:

- 1: Một số phép biến đổi đại số
- 2: Phương trình bậc hai - Hệ thức Viet
- 3: Hệ phương trình
- 4: Phương trình quy về phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai
- 5: Các bài toán về hàm số
- 6: Các bài toán hình học trong mặt phẳng
- 7: Các bài toán tổng hợp
- 8: Các bài toán hình học không gian
- 9: Một số đề thi tuyển sinh của các tỉnh, thành phố

Trong mỗi phần, sách được cấu trúc gồm 4 nội dung chính như sau:

1. Phương pháp chung.
2. Các ví dụ minh họa.
3. Bài tập vận dụng.
4. Hướng dẫn và đáp số.

Với mỗi dạng bài tập cơ bản đều có phương pháp giải cụ thể và ví dụ minh họa. Ngoài ra, các bài tập đều có hướng dẫn giải chi tiết, dễ hiểu. Nhiều ví dụ có lời nhận xét để giúp học sinh tránh các sai lầm cơ bản. Các bài tập được lựa chọn từ dễ đến khó, có những bài tác giả đã đưa ra nhiều phương pháp khác nhau để bạn đọc tham khảo.

Mặc dù đã hết sức cố gắng, song lời giải các bài toán trong quyển sách này có khi chưa phải là phương án giải hay nhất và cũng có thể còn thiếu sót. Tuy vậy, tác giả hy vọng rằng quyển sách này sẽ giúp ích cho các bạn trong quá trình học tập và giảng dạy, đặc biệt là quá trình tự học. Chúc các em học sinh và các thầy cô giáo quan tâm đến quyển sách này thành công trên mọi lĩnh vực. Rất mong nhận được sự góp ý chân thành của các em học sinh và các thầy cô giáo, tác giả xin chân thành cảm ơn trước.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

- **Trung tâm Sách giáo dục Anpha**

225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.

- **Công ti Sách - thiết bị giáo dục Anpha**

50 Nguyễn Văn Sáng, Q. Tân Phú, Tp. HCM.

ĐT: 08. 62676463, 38547464.

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin chân thành cảm ơn!

Tác giả

MỤC LỤC

1. Một số phép biến đổi đại số	5
- Các ví dụ minh họa	6
- Bài tập vận dụng	20
- Hướng dẫn và đáp số	22
2. Phương trình bậc hai -Hệ thức Viet	31
- Các ví dụ minh họa	33
- Bài tập vận dụng	50
- Hướng dẫn và đáp số	54
3. Hệ Phương trình	67
- Các ví dụ minh họa	68
- Bài tập vận dụng	84
- Hướng dẫn và đáp số	86
4. Phương trình qui về phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai	94
- Các ví dụ minh họa	96
- Bài tập vận dụng	115
- Hướng dẫn và đáp số	116
5. Các bài toán về hàm số	124
- Các ví dụ minh họa	126
- Bài tập vận dụng	144
- Hướng dẫn và đáp số	146
6. Các bài toán hình học trong mặt phẳng	153
- Các ví dụ minh họa	155
- Bài tập vận dụng	173
- Hướng dẫn và đáp số	181
7. Các bài toán tổng hợp	202
8. Các bài toán hình học không gian	214
- Các ví dụ minh họa	215
- Bài tập vận dụng	231
- Hướng dẫn và đáp số	233
9. Một số đề thi tuyển sinh của các tỉnh, thành phố	237

1. Một số phép biến đổi đại số

Một số kiến thức cơ bản

1. Hằng đẳng thức đáng nhớ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

2. Một số phép biến đổi căn thức bậc hai

$$a. \sqrt{A^2} = |A|;$$

$$b. \sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} (A \geq 0; B \geq 0);$$

$$c. \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} (A \geq 0; B > 0)$$

$$d. \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} (B \geq 0);$$

$$e. \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} (A \geq 0; B > 0);$$

$$f. \frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{A - B}.$$

$$g. \frac{1}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{A - B}$$

$$h. (\sqrt{A} - \sqrt{B})(A + \sqrt{AB} + B) = A - B$$

$$k. (\sqrt{A} + \sqrt{B})(A - \sqrt{AB} + B) = A + B.$$

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Tìm điều kiện xác định

Dạng 2: Tính giá trị biểu thức

Dạng 3: Rút gọn biểu thức

Dạng 4: Chứng minh đẳng thức

Dạng 5: So sánh các số

Phương pháp:

Để so sánh hai số A và B với nhau ta thường sử dụng các cách sau

Cách 1: Xét hiệu hai số $A - B$

Cách 2: Nếu hai số A, B là hai số dương, để so sánh A và B , ta có thể so sánh A^2 và B^2 .

Dạng 6: Các bài toán tổng hợp

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Tìm điều kiện xác định

Phương pháp

1. $\sqrt{A}$ được xác định khi và chỉ khi $A \geq 0$

2. $\frac{1}{A}$ được xác định khi và chỉ khi $A \neq 0$

Ví dụ: Tìm điều kiện xác định của các hàm số sau đây:

a. $y = \sqrt{x+1}$

b. $y = \sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}$

c. $y = \frac{1}{\sqrt{3x-1}} + \sqrt{1-x}$

d. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

e. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \frac{3-2x}{\sqrt{x-1}}$

f. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}$

Giải:

a. Điều kiện xác định của hàm số là: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

b. Điều kiện xác định của hàm số là: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

c. Điều kiện xác định của hàm số là: $\begin{cases} 3x-1 > 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x \leq 1$

d. **Cách 1:** Điều kiện xác định của hàm số là $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-4 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Cách 2: Điều kiện xác định của hàm số là $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{9}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left|x - \frac{5}{2}\right| \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

e. Điều kiện xác định của hàm số là

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) \geq 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

f. Điều kiện xác định của hàm số là

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 6x + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ (x+3)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -3.$$

ABC

Dạng 2: Tính giá trị biểu thức

Phương pháp:

Bước 1: Trục căn thức ở mẫu thức (nếu có).

Bước 2: Quy đồng mẫu thức (nếu có).

Bước 3: Đưa một biểu thức ra ngoài dấu căn.

Bước 4: Rút gọn biểu thức.

Bước 5: Tính số trị (nếu còn tham số).

Ví dụ 1: Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức :

$$\text{a. } A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} \quad \text{b. } \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}} = 1.$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{a. } A &= \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} \\ &= |2-\sqrt{3}| - |2+\sqrt{3}| \end{aligned}$$

$$\text{Mà } 2-\sqrt{3} > 0 \text{ và } 2+\sqrt{3} > 0 \text{ nên } A = 2-\sqrt{3} - 2-\sqrt{3} = -2\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}} &= \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{12-4\sqrt{3}+1}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2}}} = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-|2\sqrt{3}-1|}} \\ &= \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}} = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} \\ &= \sqrt{\sqrt{3}-|\sqrt{3}-1|} = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3}+1} = 1 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{4 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8}}.$$

Giải:

Trước hết ta biến đổi mẫu số

$$\begin{aligned} 4 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} &= 2 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8} = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + (\sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8}) \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + (\sqrt{2 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 4}) \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta có } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{4 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})(1 + \sqrt{2})} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Ví dụ 3: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

ABC

Giải:

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } A^2 &= \left(\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right)^2 \\
&= 4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{\left(4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)\left(4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)} + 4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \\
&= 8 + 2\sqrt{16 - 10 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \\
&= 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2 \Rightarrow A = \sqrt{5} + 1.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4 : Cho $(x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3$. Tính giá trị biểu thức $E = x + y$

Giải:

Ta có : $(x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3$. Nhân hai vế của đẳng thức với $(\sqrt{x^2 + 3} - x)$, ta có

$$\begin{aligned}
&(x + \sqrt{x^2 + 3})(\sqrt{x^2 + 3} - x)(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3(\sqrt{x^2 + 3} - x) \\
&\Leftrightarrow 3(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3(\sqrt{x^2 + 3} - x) \Leftrightarrow x + y = \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{y^2 + 3}
\end{aligned}$$

Mặt khác : $(x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3$. Nhân hai vế của đẳng thức với $(\sqrt{y^2 + 3} - y)$, ta có:

$$\begin{aligned}
&(x + \sqrt{x^2 + 3})(\sqrt{y^2 + 3} - y)(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3(\sqrt{y^2 + 3} - y) \\
&\Leftrightarrow 3(x + \sqrt{x^2 + 3}) = 3(\sqrt{y^2 + 3} - y) \Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 3}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $E = x + y = 0$.

Ví dụ 5 : Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau

$$A = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

Giải:

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \sqrt{2 + \sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{2(2 + \sqrt{3})}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(4 + 2\sqrt{3})}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \\
\sqrt{2 - \sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{2(2 - \sqrt{3})}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}, \text{ nên}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}} - \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}} - \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)} - \frac{(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ngoài ra bạn đọc có thể sử dụng phương pháp trục căn thức ở mẫu số, sau đó qui đồng mẫu số ta cũng có kết quả như trên.

Ví dụ 6: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A^3 &= \left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \right)^3 \\ &= 20 + 14\sqrt{2} + 3A\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + 20 - 14\sqrt{2} = 40 + 6A \\ \Leftrightarrow A^3 - 6A - 40 &= 0 \Leftrightarrow A^3 - 4A^2 + 4A^2 - 16A + 10A - 40 = 0 \\ \Leftrightarrow A^2(A - 4) + 4A(A - 4) + 10(A - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (A - 4)(A^2 + 4A + 10) &= 0 \end{aligned}$$

Do $A^2 + 4A + 10 = (A + 2)^2 + 6 > 0$, nên $A = 4$.

Ví dụ 7: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$$



$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - |2\sqrt{5} - 3|}}, \text{ do } 2\sqrt{5} > 3 \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - 2\sqrt{5} + 3}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5} + 1}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)} = 1 \text{ (do } \sqrt{5} > 1). \text{ Vậy } A = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 8: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \frac{20}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}$$

Giải:

$$A = \frac{20}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}. \text{ Qui đồng mẫu số ta có :}$$

$$A(3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}) = 20 \Leftrightarrow A(3 + \sqrt{5}) - 20 = -A\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}.$$

Bình phương hai vế ta có

$$(3 + \sqrt{5})A^2 - 10(3 + \sqrt{5})A + 100 = 0 \Leftrightarrow A^2 - 10A + 75 - 25\sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1 = 5 + 5\sqrt{\sqrt{5} - 2}; \quad A_2 = 5 - 5\sqrt{\sqrt{5} - 2}.$$

Ta có : $3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}} > 4$ nên $A = \frac{20}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}} < 5$, do đó

$$A = 5 - 5\sqrt{\sqrt{5} - 2}.$$

Ví dụ 9 : Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau

$$A = \frac{\sqrt{15 - 10\sqrt{2}} + \sqrt{13 + 4\sqrt{10}} - \sqrt{11 + 2\sqrt{10}}}{2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{12 + 8\sqrt{2}}}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\sqrt{15 - 10\sqrt{2}} + \sqrt{13 + 4\sqrt{10}} - \sqrt{11 + 2\sqrt{10}}}{2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{12 + 8\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{15 - 2\sqrt{50}} + \sqrt{13 + 2\sqrt{40}} - \sqrt{11 + 2\sqrt{10}}}{\sqrt{12 + 8\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{8}} + \sqrt{12 + 4\sqrt{8}}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{8} + \sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{10} + 1)^2}}{2\sqrt{(\sqrt{8} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{8} - 1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{5} - \sqrt{10} - 1}{2(\sqrt{8} + 2) + \sqrt{8} - 1} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3(2\sqrt{2} + 1)} = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{21}. \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Tính giá trị biểu thức P, với $x = 2\sqrt{2}$.

$$P = \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 2(2x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} &= \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}} + \sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}} \\ &= \sqrt{x^2 - 1} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \text{ từ đó suy ra} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 2 &= \sqrt{\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}} - 2 = \sqrt{\frac{2x - 2\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}} \\ &= \sqrt{\frac{x+1 - 2\sqrt{x^2 - 1} + x-1}{\sqrt{x^2 - 1}}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2 - 1}}. \text{ Do đó} \end{aligned}$$

$$P = \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 2(2x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2-1}} \right) \cdot (2x + \sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(2x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}} \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt[4]{(2\sqrt{2})^2-1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7}}.$$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức

Phương pháp:

Bước 1: Trục căn thức ở mẫu thức (nếu có).

Bước 2: Quy đồng mẫu thức (nếu có).

Bước 3: Đưa một biểu thức ra ngoài dấu căn.

Bước 4: Rút gọn biểu thức.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức sau: $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-4}} - \sqrt{x-2}$

Giải:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-2\sqrt{x^2-4}} - \sqrt{x-2} &= \sqrt{(x+2) - 2\sqrt{(x-2)(x+2)}} + x-2 - \sqrt{x-2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x+2})^2 - 2\sqrt{(x-2)(x+2)} + (\sqrt{x-2})^2} - \sqrt{x-2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})^2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức sau:

$$P = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \quad (x \geq 2)$$

Giải:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \quad (x \geq 2) \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \right]}{\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[|\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| \right]}{\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2} \left[|\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| \right]}{|\sqrt{2x-1}+1| - |\sqrt{2x-1}-1|} \\ &= \frac{\sqrt{2}[\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1]}{\sqrt{2x-1}+1 - (\sqrt{2x-1}-1)} \quad (\text{vì } x \geq 2 \text{ nên } \sqrt{x-1} \geq 1 \text{ và } \sqrt{2x-1} \geq 1) \\ &= \sqrt{2}\sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức sau:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x-4} - \frac{\sqrt{x-1}}{x+4\sqrt{x+4}} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}+2x-4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}} \quad (x > 0; x \neq 4).$$

ABC

Giải:

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-4} - \frac{\sqrt{x}-1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}+2x-4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x})^2-2^2} - \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+2)^2} \right) \cdot \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}} \\
 &= \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) - (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{[(\sqrt{x})^2-2^2](\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{x+3\sqrt{x}+2 - (x-3\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}} = \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 6.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức sau:

$$B = \frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + \frac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b}$$

Giải:

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } A &= \frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2)^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \\
 &= \left[\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right]^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \\
 &= a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} \\
 \text{Vậy } &\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + \frac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b} \\
 &= \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)} + \frac{3\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\
 &= \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + 3\sqrt{b}(a-\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)} = \frac{3a\sqrt{a} + 3b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} = 3.
 \end{aligned}$$

Dạng 4: Chứng minh đẳng thức**Phương pháp:****Bước 1:** Tìm điều kiện xác định của biểu thức**Bước 2:** Biến đổi vế trái về vế phải hoặc vế phải về vế trái. Cũng có khi chúng ta phải biến đổi cả hai vế cùng về biểu thức trung gian.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$

Giải:

Chúng ta đưa bài toán cần chứng minh về bài toán sau

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}})} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}})} = 1$$

Ta có $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$; $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$.

(Do $\sqrt{3} > 1$). Từ đó ta có: $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}})} = \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+1} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{(3+\sqrt{3})}{6}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}+1} = \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{(3-\sqrt{3})}{6}. \text{ Từ đó suy ra:}$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}})} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}})} = \frac{(3+\sqrt{3})}{6} + \frac{(3-\sqrt{3})}{6} = 1.$$

Ví dụ 2: Chứng minh: $\left(\frac{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}{x-\sqrt{3x}+3} - 2\sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{3-x} \right) = 1$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 3$).

Giải:

Với giả thiết đã cho: $x \geq 0$ và $x \neq 3$, ta có:

$$\frac{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}{x-\sqrt{3x}+3} - 2\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{3})^3}{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{x} = \sqrt{3} - \sqrt{x}$$

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{3-x} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-\sqrt{x})(\sqrt{3}+\sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{x})}$$

$$\text{Vậy: } \left(\frac{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}{x-\sqrt{3x}+3} - 2\sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{3-x} \right) = (\sqrt{3} - \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{x}} = 1.$$

Dạng 5: Các bài toán tổng hợp

Ví dụ 1: Cho biểu thức: $B = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right]$

$$C = \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$$

- Tìm điều kiện để $A = B : C$ xác định.
- Rút gọn A
- Cho $xy = 6$. Xác định x, y để A có giá trị nhỏ nhất.

Giải:

- Điều kiện để biểu thức A xác định là điều kiện các biểu thức B, C cùng xác định hay A xác định khi và chỉ khi $x > 0; y > 0$.
- Ta có : $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{xy}}{xy}$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } B &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ &= \frac{2\sqrt{xy}}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{xy} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \\ C &= \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy}} \\ &= \frac{\sqrt{x}(x+y) + \sqrt{y}(x+y)}{\sqrt{xy}(x+y)} = \frac{(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}(x+y)} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } A &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} : \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}. \end{aligned}$$

- Vì $xy = 16 \Rightarrow \sqrt{xy} = 4 \Rightarrow \sqrt{x}\sqrt{y} = 4$.

Hai số dương $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ có tích $\sqrt{x}\sqrt{y} = 4$ không đổi nên ta có

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 4. \text{ Dấu bằng xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}. \text{ Vậy } \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\text{có giá trị nhỏ nhất khi } \sqrt{x} = \sqrt{y} = 2 \Rightarrow A = \frac{2+2}{4} = 1.$$

Ví dụ 2 : Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right).$$

a. Rút gọn P

b. Tìm giá trị x để $P = -1$.

c. Tìm m để với mọi $x > 9$ ta có $m(\sqrt{x} - 3)P > x + 1$.

Giải:

a. Điều kiện để P có nghĩa: $x > 0, x \neq 4, x \neq 1$. Ta có

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})} \right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right] \\ &= \left[\frac{4\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} + \frac{8x}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})} \right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}} - \frac{2(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \right] \\ &= \left[\frac{8\sqrt{x} + 4x}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})} \right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1 - 2\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}} \right] \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x} + 2)4\sqrt{x}}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})} \right] : \left[\frac{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} \right] = \frac{4x}{\sqrt{x} - 3} \quad (x \neq 9) \end{aligned}$$

b. Tìm giá trị x để $P = -1$.

$$P = \frac{4x}{\sqrt{x} - 3} = -1 \Leftrightarrow 4x = 3 - \sqrt{x} \Leftrightarrow 4x + \sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(4\sqrt{x} - 3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{16} \quad (\text{Do } x > 0).$$

c. Tìm m để với mọi $x > 9$ ta có $m(\sqrt{x} - 3)P > x + 1$.

$$\text{Ta có } m(\sqrt{x} - 3)P > x + 1 \Leftrightarrow m(\sqrt{x} - 3) \frac{4x}{\sqrt{x} - 3} > x + 1$$

$$\Leftrightarrow m \cdot 4x > x + 1 \Leftrightarrow x(4m - 1) > 1. \text{ Vì } x > 9 > 0 \text{ nên } 4m - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } x > \frac{1}{4m - 1}. \text{ Do đó } \frac{1}{4m - 1} \leq 9 \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{18}.$$

$$\text{Vậy giá trị } m \text{ để với mọi } x > 9 \text{ ta có } m(\sqrt{x} - 3)P > x + 1 \text{ là } m \geq \frac{5}{18}.$$

Ví dụ 3: Cho biểu thức: $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \right).$

a. Chứng minh rằng $P > 0$ với $\forall x > 0; x \neq 1$

b. Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

c. Tìm giá trị x thỏa mãn: $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x - 4}$.

Giải:

a. Điều kiện để P có nghĩa: $x > 0, x \neq 1$. Ta có :

$$P = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) : \left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right] = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{x-1+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} > 0, \text{ với } \forall x > 0; x \neq 1.$$

b. Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$. Ta có

$$x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4-2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}-1.$$

$$\text{Do đó } P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{3}-1+1)^2}{\sqrt{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{3}-1} = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

c. Tìm giá trị x thỏa mãn: $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$. Điều kiện $x \geq 4$.

$$P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 - 6\sqrt{x} + 3 + \sqrt{x-4} = 0 \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{x-4} = 0. \text{ Vì } (\sqrt{x}-2)^2 \geq 0; \sqrt{x-4} \geq 0, \text{ với mọi } x \geq 4, \text{ nên}$$

$$\text{ta có phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}-2)^2 = 0 \\ \sqrt{x-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ví dụ 4: Cho biểu thức [Download Sách Hay | Đọc Sách Online](#)

$$P = \frac{x}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})} - \frac{y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{y})}$$

a. Tìm điều kiện của x và y để P xác định. Rút gọn P.

b. Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P = 2$.

Giải:

a. Điều kiện để P xác định là: $x \geq 0; y \geq 0; y \neq 1; x+y \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Rút gọn P: } P &= \frac{x(1+\sqrt{x})-y(1-\sqrt{y})-xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{y})} \\ &= \frac{(x-y)+(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})-xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{y})} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-\sqrt{y}(\sqrt{x}+1)+y(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{y})} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y - y\sqrt{x}}{1 - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{y})(1 + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(1 - \sqrt{y})}{1 - \sqrt{y}}$$

$$= \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}$$

Vậy $P = \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}$.

b. $P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1 + \sqrt{y}) - (\sqrt{y} + 1) = 1$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{y} + 1) = 1$. Ta có:

$$\sqrt{y} + 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = 0; 1; 2; 3; 4$$

Thay vào ta có các cặp giá trị (4; 0) và (2; 2) thỏa mãn.

Ví dụ 5: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \right)$.

- a. Rút gọn biểu thức P. b. Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$.
 c. Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

Giải:

- a. Rút gọn biểu thức P. Điều kiện P có nghĩa là: $\forall x > 0; x \neq 1$

$$P = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \right)$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)} \right]$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x} + x)} \right]$$

$$= \frac{(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} : \left[(2\sqrt{x} - 1) \frac{1 - \sqrt{x} + x + \sqrt{x} - x}{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)} \right]$$

$$= \frac{(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \cdot \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)}{(2\sqrt{x} - 1)} = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$$

- b. Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

Ta có $x = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$, do đó

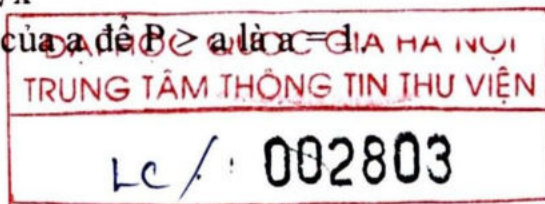
$$P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \frac{1 - (2 - \sqrt{3}) + 7 - 4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 3.$$

- c. Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

$$P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} - 1 = 1 \Rightarrow P \geq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$, không thỏa mãn.

Vậy $P > 1$. Do đó giá trị lớn nhất của a để $P > a$ là $a = 1$.



Ví dụ 6 : Cho $P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$

a. Rút gọn P.

b. Chứng minh: $P < \frac{1}{3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Giải:

a. Điều kiện: $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x+2+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b. Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, ta có:

$$P < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x} < x+\sqrt{x}+1 \quad (\text{vì } x+\sqrt{x}+1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 > 0 \quad (\text{đúng vì } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1).$$

Ví dụ 7: Rút gọn biểu thức sau:

$$P = \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{2}}{\sqrt{2x}+2\sqrt{x}-3\sqrt{2}-6} + \frac{\sqrt{2x}-6}{\sqrt{2x}+2\sqrt{x}+3\sqrt{2}+6}$$

Giải:

Ta có:

$$A = \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{2}}{\sqrt{2x}+2\sqrt{x}-3\sqrt{2}-6} = \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{2}}{\sqrt{x}(\sqrt{2}+2)-3(\sqrt{2}+2)} = \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{2x}-6}{\sqrt{2x}+2\sqrt{x}+3\sqrt{2}+6} = \frac{\sqrt{2x}-6}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{x}+3)}$$

Điều kiện để P có nghĩa là $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 9 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } P &= A + B = \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{2x}-6}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{(2\sqrt{x}+3\sqrt{2})(\sqrt{x}+3) + (\sqrt{2x}-6)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(2+\sqrt{2})(x+9)}{(x-9)(2+\sqrt{2})} = \frac{(x+9)}{(x-9)} \end{aligned}$$

Ví dụ 8: Cho biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$

- a. Tìm điều kiện của x để A có nghĩa. b. Rút gọn A .
c. Tìm các giá trị x nguyên để A là số nguyên.

Giải:

a. Điều kiện: $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$.

b. Quy đồng, biến đổi biểu thức thành

$$A = \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$$

c. Ta cũng có $A = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$.

Để A là số nguyên, ta phải có $\sqrt{x} - 3$ là ước số của 4. Suy ra $\sqrt{x} - 3$ nhận các giá trị -4 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 4 . Từ đó, suy ra các giá trị của x , với chú ý $x \neq 4$ là: 1 ; 16 ; 25 ; 49 .

Ví dụ 9: Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}}$

- a. Tìm điều kiện của x để P có nghĩa.
b. Rút gọn biểu thức P .

Giải:

a. Điều kiện để P có nghĩa là:
$$\begin{cases} x-1 \geq 0 & (1) \\ x-2\sqrt{x-1} \geq 0 & (2) \\ x^2 - 4(x-1) > 0 & (3) \end{cases}$$

(1) cho ta $x \geq 1$.

Do đó (2) tương đương với $x^2 \geq 4(x-1) \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$. Vậy (2) được thỏa mãn khi $x \geq 1$. Ngoài ra, (3) $\Leftrightarrow (x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Tóm lại, P có nghĩa khi $x \geq 1$ và $x \neq 2$.

b. Ta có:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}-1|;$$

$$\sqrt{x^2 - 4(x-1)} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

* Trường hợp $1 \leq x < 2$. Khi đó $\sqrt{x-1}-1 < 0$ và $x-2 < 0$, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} = \frac{2}{2-x}$$

* Trường hợp $x > 2$. Khi đó $\sqrt{x-1}-1 > 0$ và $x-2 > 0$, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}.$$

ABC

Bài tập vận dụng

- Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1} \right)$
 - Rút gọn P
 - Tìm x nguyên để P có giá trị nguyên.
- Tính giá trị biểu thức: $A = \sqrt{a^2 + 4ab^2 + 4b^4} - \sqrt{4a^2 - 12ab^2 + 9b^4}$ với $a = \sqrt{2}; b = 1$.
- Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x^3-1}{x-1} + x \right) \left(\frac{x^3+1}{x+1} - x \right) : \frac{x(1-x^2)^2}{x^2-2}$ với $x \neq \sqrt{2}; \pm 1$.
 - Rút gọn biểu thức A
 - Tính giá trị của biểu thức khi cho $x = \sqrt{6+2\sqrt{2}}$.
 - Tìm giá trị của x để $A = 3$.
- So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi): $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ và $\sqrt{19}$.
 - Biến đổi $x - \sqrt{3x} + 1$ về dạng $A^2 + b$ với b là hằng số và A là một biểu thức.
 - Suy ra giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{1}{x - \sqrt{3x} + 1}$. Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu?
- Xét biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$
 - Rút gọn A.
 - Tìm các giá trị của x để $A < 1$.
 - Tìm các giá trị nguyên của x sao cho A cũng là số nguyên.
- Rút gọn biểu thức: $A = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$
- Không sử dụng máy tính bỏ túi, hãy tính giá trị biểu thức:

$$B = \sqrt{(1 - \sqrt{2008})^2} \cdot \sqrt{2009 + 2\sqrt{2008}}$$
- Xét biểu thức: $P = \left(\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} - \frac{4x}{x-4} \right) : \frac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}-x}$
 - Rút gọn P.
 - Tìm các giá trị của x để $P > 0, P < 0$.
 - Tìm các giá trị của x sao cho $|P| = 1$.
- Không sử dụng máy tính bỏ túi, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{6}{3+\sqrt{3}}$$

11. Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 2\sqrt{x} + 1} \quad (x > 0, x \neq 1)$

12. Chứng minh đẳng thức: $\left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{27} - 3} - \frac{\sqrt{150}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{4}{3}$

13. Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \frac{3}{3x - 1} \sqrt{4x^2(9x^2 - 6x + 1)}$ với $0 < x < \frac{1}{3}$

b. $B = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}}} + \sqrt{\frac{4 + \sqrt{7}}{4 - \sqrt{7}}}$

14. Chứng minh giá trị biểu thức B không phụ thuộc vào a:

$$B = \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) \frac{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} \quad \text{với } a > 0, a \neq 1.$$

15. Chứng minh giá trị biểu thức C không phụ thuộc vào x, y:

$$C = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + y} - \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)^2} - \frac{x+y}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{(x+y)^4}}{4xy}.$$

16. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right).$

a. Rút gọn A.

b. Tìm giá trị của A nếu $a = \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}}.$

c. Tìm giá trị của a để $\sqrt{A} > A.$

17. Tính giá trị của: $P = \frac{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} - 2}{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{-2 - a}$

với $a = -1 - 2\sqrt{2}$

18. Xét biểu thức $A = \left(\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y} \right) : \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

a. Rút gọn A.

b. Chứng minh $A \geq 0.$

c. So sánh A với $\sqrt{A}.$

19. Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x + 4\sqrt{x} - 4} + \sqrt{x - 4\sqrt{x} - 4}}{\sqrt{1 - \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}}}$

20. Cho M = $\sqrt{\frac{a + x^2}{x}} - 2\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a + x^2}{x}} + 2\sqrt{a}$

ABC

- a. Rút gọn M.
 b. Tìm các giá trị của x và a để $M < M^2$.
 c. Tìm các giá trị của x và a để $|M| \leq \frac{1}{4}$.

21. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{a+4\sqrt{a-4}} + \sqrt{a-4\sqrt{a-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{a}+\frac{16}{a^2}}}$

- a. Rút gọn biểu thức A.
 b. Tìm các giá trị nguyên lớn hơn 8 ($a \in \mathbb{Z}, a > 8$) để A có giá trị nguyên.

22. Cho $A = \frac{1}{2(1+\sqrt{a+2})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a+2})}$; $B = A + \frac{a^2-2a}{1+a^3}$

- a. Tìm a để A, B có nghĩa.
 b. Rút gọn A, B.
 c. Tìm giá trị nhỏ nhất của B.

23. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$

1. Rút gọn A.
 2. Với giá trị nào của x thì A đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

24. Chứng tỏ rằng: $\sqrt[3]{7-\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$ là số tự nhiên.

25. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P = \sqrt{1+2a} + \sqrt{1+2b}$ với $1 \leq a+b \leq \sqrt{2}; a^2+b^2=1$

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Hướng dẫn và đáp số

1. Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 1$

a. Rút gọn $P = \frac{2x(x-1)}{x(x-1)} : \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{x-1} \Leftrightarrow P = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

b. $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$. Để P nguyên thì

$\sqrt{x}-1=1 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4; \sqrt{x}-1=-1 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0.$

$\sqrt{x}-1=2 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9; \sqrt{x}-1=-2 \Rightarrow \sqrt{x}=-1$ (loại).

Vậy với $x = \{0; 4; 9\}$ thì P có giá trị nguyên

2. $A = \sqrt{(a+2b^2)^2} - \sqrt{(2a-3b^2)^2} = |a+2b^2| - |2a-3b^2|$

Với $a = -2; b = 1$ thì $A = |\sqrt{2}+2| - |2\sqrt{2}-3| = 3\sqrt{2}-1$

ABC
22

3. a. Rút gọn $A = \frac{x^2 - 2}{x}$

b. Thay $x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}}$ vào A ta được $A = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{6 + 2\sqrt{2}}}$

c. $A = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

4. Đưa về so sánh $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$ với $(\sqrt{19})^2 = 19$ hay so sánh $10 + 2\sqrt{21}$ với $19 = 10 + 9$, hay so sánh $2\sqrt{21}$ với 9 . Ta có $(2\sqrt{21})^2 = 84 > 81 = 9^2$, suy ra: $2\sqrt{21} > 9 \Rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 > (\sqrt{19})^2 \Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt{7} > \sqrt{9}$.

5.a. $x - \sqrt{3x} + 1 = (\sqrt{x})^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \quad (x \geq 0)$

b. Suy ra $x - \sqrt{3x} + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{4}$ khi

$$\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Do đó $\frac{1}{x - \sqrt{3x} + 1}$ đạt giá trị lớn nhất là 4 khi $x = \frac{3}{4}$.

6. a. Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3) - (\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{(x - 9) - (2x + \sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 2)}{x - 5\sqrt{x} + 6} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 9 + x - 3\sqrt{x} + 7}{x - 5\sqrt{x} + 6} = \frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} = \frac{(x + \sqrt{x}) - 2(\sqrt{x} + 1)}{(x - 2\sqrt{x}) - 3(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}. \end{aligned}$$

b. $A < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 3} < 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9. \text{ Kết hợp điều kiện ta có: } \begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

ABC

c. Ta có: $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$. Đặt $a = \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$. Ta có:

$$a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{a} + 3 \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

Đặt $\frac{4}{a} + 3 = \frac{p}{q}$ (2) với $\begin{cases} p, q \in \mathbb{Z} \\ (p, q) = 1, q > 0 \end{cases}$. Từ (1) và (2) ta có:

$$\sqrt{x} = \frac{p}{q} \Rightarrow x = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow xq^2 = p^2 \Rightarrow p^2 : q^2 \Rightarrow p : q, \text{ mà } (p, q) = 1$$

$$\Rightarrow q = 1 \Rightarrow \frac{p}{q} = p \Rightarrow \sqrt{x} = p \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z}.$$

Do vậy $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3$ là ước của 4

$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 3$ nhận các giá trị là $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$\Leftrightarrow x$ nhận các giá trị là 1, 4, 16, 25, 49.

7. Ta có

$$A_1 = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x - \sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

$$A = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2x}{x-1} = 2\sqrt{x} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

8. Biến đổi: $\sqrt{(1 - \sqrt{2008})^2} = |1 - \sqrt{2008}| = \sqrt{2008} - 1$

$$\sqrt{2009 + 2\sqrt{2008}} = \sqrt{(\sqrt{2008} + 1)^2} = |\sqrt{2008} + 1| = \sqrt{2008} + 1$$

$$B = (\sqrt{2008} - 1)(\sqrt{2008} + 1) = 2007$$

9. a.
$$P = \frac{(2 + \sqrt{x})^2 - (2 - \sqrt{x})^2 + 4x}{4 - x} : \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}$$

$$= \frac{8\sqrt{x} + 4x}{4 - x} \cdot \frac{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{\sqrt{x} - 3} = \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) \cdot \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{4x}{\sqrt{x} - 3}$$

(Chú ý điều kiện $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$).

b. $P > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 3} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$

$$P < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$c. |P| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{4x}{\sqrt{x}-3} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{x}-3} = \pm 1$$

$$\text{Với } \frac{4x}{\sqrt{x}-3} = 1 \Leftrightarrow 4x - \sqrt{x} + 3 = 0 \quad (1)$$

Để thấy $4x - \sqrt{x} + 3 > 0$ nên (1) vô nghiệm.

$$\text{Với } \frac{4x}{\sqrt{x}-3} = -1 \Leftrightarrow 4x + \sqrt{x} - 3 = 0 \quad (2). \text{ Đặt } \sqrt{x} = t > 0, \text{ ta có:}$$

$$(2) \Leftrightarrow 4t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(4t-3) = 0 \Leftrightarrow 4t-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{16} \text{ thỏa mãn điều kiện } x > 0, x \neq 4, x \neq 9.$$

10. Ta có

$$A = \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{6}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}} + \frac{6(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

$$A = \sqrt{3} - 2 + \frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3} = \sqrt{3} - 2 + 3 - \sqrt{3} = 1$$

11. Ta có: $\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$B = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2} = -\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \quad (\text{vì } x > 0 \text{ và } x \neq 1)$$

$$12. \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{27}-3} = \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{3\sqrt{3}-3} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{3(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \frac{\sqrt{150}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

$$\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{27}-3} - \frac{\sqrt{150}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{5\sqrt{6}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{4}{3}$$

$$13. a. A = \frac{3}{3x-1} \sqrt{4x^2(9x^2-6x+1)} = \frac{6|x|\sqrt{(3x-1)^2}}{3x-1}$$

$$= \frac{6x|3x-1|}{3x-1} = \frac{-6x(3x-1)}{3x-1} = -6x \quad (\text{vì } 0 < x < \frac{1}{3} \text{ nên } x > 0 \text{ và } 3x-1 < 0)$$

$$b. B = \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}} + \sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}} = \sqrt{\frac{(4-\sqrt{7})^2}{9}} + \sqrt{\frac{(4+\sqrt{7})^2}{9}}$$

$$= \frac{|4-\sqrt{7}| + |4+\sqrt{7}|}{3} = \frac{4-\sqrt{7}}{3} + \frac{4+\sqrt{7}}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 14. B &= \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{(\sqrt{a} + 1)^2} - \frac{\sqrt{a} - 2}{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)} \right) \cdot \frac{a(\sqrt{a} + 1) - (\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}} \\
 &= \frac{(2 + \sqrt{a})(\sqrt{a} - 1) - (\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} + 1)^2(\sqrt{a} - 1)} \cdot \frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}} \\
 &= \frac{2\sqrt{a} - 2 + a - \sqrt{a} - a - \sqrt{a} + 2\sqrt{a} + 2}{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)} \cdot \frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2.
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào a.

$$\begin{aligned}
 15. C &= \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} - \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)^2} - \frac{x+y}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{(x+y)^4}}{4xy} \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{x + 2\sqrt{xy} + y - x - y}{\sqrt{x+y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right)^2} - \frac{x+y}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} - \frac{(x+y)^2}{4xy} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x+y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} \right)^2 - \frac{x+y}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} - \frac{(x+y)^2}{4xy} \\
 &= \frac{(x+y)(x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y)}{4xy} - \frac{2\sqrt{x}\sqrt{y}(x+y)}{4xy} - \frac{(x+y)^2}{4xy} \\
 &= \frac{(x+y)(x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} - x - y)}{4xy} = 0
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức C không phụ thuộc vào x, y.

$$\begin{aligned}
 16. a. A &= \frac{(\sqrt{a} + 1)^2 - (\sqrt{a} - 1)^2 + 4\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} \cdot \frac{a - 1}{\sqrt{a}} \\
 &= \frac{a + 2\sqrt{a} + 1 - (a - 2\sqrt{a} + 1) + 4\sqrt{a}(a - 1)}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{\sqrt{a}} \\
 &= \frac{a + 2\sqrt{a} + 1 - a + 2\sqrt{a} - 1 + 4a\sqrt{a} - 4\sqrt{a}}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{\sqrt{a}} \\
 &= \frac{4a\sqrt{a}}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{\sqrt{a}} = 4a \quad (\text{điều kiện } a > 0, a \neq 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b. A &= 4a. \text{ Với } a = \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}} \text{ thì } A = \frac{4\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}(2 - \sqrt{6})}{4 - 6} \\
 &= -2\sqrt{6}(2 - \sqrt{6}) = 12 - 4\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$c. \sqrt{A} > A \Leftrightarrow \sqrt{A} > \sqrt{A^2} \Leftrightarrow \sqrt{A} - \sqrt{A^2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{A}(1 - \sqrt{A}) > 0$$

Vì $\sqrt{A} > 0$ nên $1 - \sqrt{A} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{A} < 1$ hay $A < 1$.

Mà $A = 4a$ nên $4a < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{4}$.

$$17. P = \frac{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} - 2}{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{-2-a}. \text{ Vì } a = -1 - 2\sqrt{2} < -2 \text{ nên:}$$

$$\sqrt{a^2 - 4} = \sqrt{(a-2)(a+2)} = \sqrt{2-a} \cdot \sqrt{-2-a}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= \frac{(a+1)\sqrt{2-a}(-a-1)\sqrt{2-a} + (a-1)\sqrt{-2-a}}{(a-1)\sqrt{-2-a}(-a-1)\sqrt{-2-a} + (a+1)\sqrt{2-a}} \cdot \sqrt{-2-a} \\ &= \frac{(a+1)\sqrt{2-a}}{1-a} \end{aligned}$$

$$\text{Với } a = -1 - 2\sqrt{2}, \text{ ta được: } \sqrt{2-a} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2}$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{-2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{2+2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$18. a. \text{Điều kiện: } x \geq 0, y \geq 0; x \neq y: A = \frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y}$$

$$b. \text{ Ta có: } \sqrt{xy} \geq 0 \text{ và } x - \sqrt{xy} + y = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2} \right)^2 + \frac{3y}{4} > 0$$

với mọi x, y không đồng thời bằng 0 nên $A \geq 0$.

c. Xét $A^2 - A = A(A-1)$. Vì $A \geq 0$ nên chỉ xét hiệu

$$\begin{aligned} A-1 &= \frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y} - 1 = \frac{\sqrt{xy} - x + \sqrt{xy} - y}{x - \sqrt{xy} + y} \\ &= \frac{-(x - 2\sqrt{xy} + y)}{x - \sqrt{xy} + y} = \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x - \sqrt{xy} + y} \end{aligned}$$

Thấy $A-1 < 0$ (vì $x \neq y$), do vậy $A^2 \leq A$ nên $A \leq \sqrt{A}$.

$$19. A = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}\right)^2}}. \text{ Nếu } 4 \leq x \leq 8 \text{ thì } A = \frac{4x}{x-4}$$

Nếu $x > 8$ thì $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$. Bây giờ ta đi tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $A \in \mathbb{Z}$.

Xét $A = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$: $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4$ là ước số của 16, nhưng $4 \leq x \leq 8$ nên $x = 5; 6; 8$.

ABC

Xét $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} : A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x-4}$ phải là số nguyên

$$\Leftrightarrow x-4 = m^2 (0 \leq m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow m^2 + 4 = x.$$

Vậy $A = \frac{2(m^2 + 4)}{m} = 2m + \frac{8}{m}$, từ đó $m = 4; 8$ (vì $x \geq 9$ nên $m \geq 2$).

Vì thế $x = 20; 68$.

$$\begin{aligned} 20.a. M &= \sqrt{\frac{a+x^2}{x}} - 2\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+x^2}{x}} + 2\sqrt{a} \\ &= \sqrt{\frac{a+x^2-2\sqrt{ax}}{x}} + \sqrt{\frac{a+x^2+2\sqrt{ax}}{x}} = \frac{|\sqrt{a}-x|}{\sqrt{x}} + \frac{|\sqrt{a}+x|}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } a \geq 0 \text{ và } x > \sqrt{a} \text{ thì } M = \frac{x - \sqrt{a} + \sqrt{a} + x}{\sqrt{x}} = \frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$$

$$\text{Nếu } a \geq 0 \text{ và } 0 < x < \sqrt{a} \text{ thì } M = \frac{\sqrt{a} - x + \sqrt{a} + x}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}}.$$

$$b. \text{ Nếu } a \geq 0 \text{ và } x > \sqrt{a} : M < M^2 \Rightarrow M > 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}.$$

$$\text{Nếu } 0 \leq a < \frac{1}{16} \text{ thì } M > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}. \text{ Nếu } a \geq \frac{1}{16} \text{ thì } M > 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{a}.$$

$$\text{Nếu } a \geq 0 \text{ và } 0 < x < \sqrt{a} : M^2 < M \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{a} > \sqrt{x}$$

$$\text{Vậy } 4a > x. \text{ Nếu } a > \frac{1}{16} \text{ thì } 4a > \sqrt{a}$$

$$\text{Vậy } x < \sqrt{a}. \text{ Nếu } a < \frac{1}{16} \text{ thì } 4a > \sqrt{a}. \text{ Vậy } x > \sqrt{a}.$$

$$c. \text{ Nếu } a \geq 0 \text{ và } x > \sqrt{a} \text{ thì } M = 2\sqrt{x}. \text{ Ta có:}$$

$$|M| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |2\sqrt{x}| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow x < \frac{1}{64}.$$

$$\text{Nếu } \sqrt{a} < \frac{1}{64} \Leftrightarrow 0 \leq a < \left(\frac{1}{64}\right)^2 \text{ thì } |M| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{a} < x < \frac{1}{64}.$$

$$\text{Nếu } \sqrt{a} \geq \frac{1}{64} \Leftrightarrow a \geq \left(\frac{1}{64}\right)^2 \text{ thì BPT } |M| < \frac{1}{4} \text{ là vô nghiệm.}$$

$$\text{Nếu } a \geq 0 \text{ và } 0 < x < \sqrt{a} : |M| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{4a}{x} < \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{64a}{x} < 1 \Leftrightarrow x > 64a.$$

$$\text{Nếu } 64a < \sqrt{a} \Leftrightarrow 64^2 a^2 < a \Leftrightarrow (64a)^2 - a < 0 \Leftrightarrow a[(64)^2 a - 1] < 0$$

$$\Leftrightarrow 4096a - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq a < \frac{1}{4096} \text{ thì } |M| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 64a < x < \sqrt{a}$$

Nếu $64 \geq \sqrt{a} \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{4096}$ thì BPT $|M| < \frac{1}{4}$ là vô nghiệm.

21. a. Ta có

$$A = \frac{\sqrt{a+4\sqrt{a-4}} + \sqrt{a-4\sqrt{a-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{a}+\frac{16}{a^2}}}$$

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{a-4})^2 + 4\sqrt{a-4} + 2^2} + \sqrt{(\sqrt{a-4})^2 - 4\sqrt{a-4} + 2^2}}{\sqrt{\frac{a^2 - 8a + 16}{a^2}}}$$

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{a-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{a-4}-2)^2}}{\sqrt{\frac{(a-4)^2}{a^2}}} = \frac{|\sqrt{a-4}+2| + |\sqrt{a-4}-2|}{\frac{|a-4|}{|a|}}$$

Biểu thức A có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} a-4 \geq 0 \\ a-4 \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 4 \\ a \neq 4 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 4$

Nếu $4 < a \leq 8$ thì $A = \frac{\sqrt{a-4}+2+2-\sqrt{a-4}}{\frac{a-4}{a}} = \frac{4a}{a-4}$

Nếu $a > 8$ thì $A = \frac{\sqrt{a-4}+2+\sqrt{a-4}-2}{\frac{a-4}{a}} = \frac{2a\sqrt{a-4}}{a-4}$

b. Đặt $m = \sqrt{a-4}$. Suy ra $m^2 = a-4 \Rightarrow a = m^2 + 4$
Do $a > 8$ nên $m > 2$

Lúc đó $A = \frac{2a\sqrt{a-4}}{a-4} = \frac{2(m^2+4)m}{m^2} = \frac{2(m^2+4)}{m} = 2m + \frac{8}{m}$

Biểu thức A nhận giá trị nguyên ($a \in \mathbb{Z}$ và $a > 8$) khi $m > 2$ và là ước của 8.

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \\ m > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a-4} = 4 \\ \sqrt{a-4} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ a = 68 \end{cases}$$

22. Để A, B có nghĩa: $\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 \geq 0 \\ 1-\sqrt{a+2} \neq 0 \\ 1+a^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ \sqrt{a+2} \neq 1 \\ a^3 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a+2 \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a \neq -1 \end{cases}$

b. $A = \frac{(1-\sqrt{a+2}) + (1+\sqrt{a+2})}{2(1-a-2)} = -\frac{1}{a+1}$

$$B = -\frac{1}{a+1} + \frac{a^2 - 2a}{(a+1)(a^2 - a + 1)} = \frac{-a^2 + a - 1 + a^2 - 2a}{(a+1)(a^2 - a + 1)}$$

$$= -\frac{(a+1)}{(a+1)(a^2 - a + 1)} = -\frac{1}{a^2 - a + 1}$$

c. Ta có $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$

Do đó $\frac{1}{a^2 - a + 1} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{a^2 - a + 1} \geq -\frac{4}{3}$. Dấu “=” xảy ra

$\Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của B là $-\frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

23. 1. $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right)$$

$$= \frac{x-1-2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(x-1)} \cdot (\sqrt{x}+1) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \text{ (điều kiện } x \geq 0, x \neq 1)$$

2. $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-1-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$

Mà $\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1} \leq 2$. Dấu “=” xảy ra

$\Leftrightarrow A \geq -1 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy A có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

24. Đặt $X = \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{50}} \Rightarrow X^3 = 14 - 3X$

$\Rightarrow X^3 + 3X - 14 = 0 \Rightarrow (X-2)(X^2 + 2X + 7) = 0$

Do: $X^2 + 2X + 7 > 0 \Rightarrow X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2$

Nên $\sqrt[3]{7-\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{50}} = 2$ hay $\sqrt[3]{7-\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$ là số tự nhiên.

25. Xét $P^2 = 2 + 2(a+b) + 2\sqrt{1+2(a+b)+4ab}$

Do $a+b \leq \sqrt{2}, ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}$

Nên $P^2 \leq 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{1+2\sqrt{2}+2} \Rightarrow P^2 \leq 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$

$\Rightarrow P^2 \leq 4 + 4\sqrt{2} \Rightarrow P \leq 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$, dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $2\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Mặt khác ta cũng có $a+b \geq 1$ và

$ab \geq 0$ nên $P^2 \geq 2 + 2 + 2\sqrt{1+2} \Rightarrow P^2 \geq 4 + 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow P \geq 1 + \sqrt{3}$, dấu “=” xảy ra khi $(a=0, b=1)$ hoặc $(a=1, b=0)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $1 + \sqrt{3}$.

2. Phương trình bậc hai

Hệ thức Viet

Một số kiến thức cơ bản

1. Các phép biến đổi phương trình mà không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là các phép biến đổi tương đương. Chẳng hạn các phép biến đổi sau đây:

- a) $f(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = h(x)$.
- b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + c = g(x) + c$.
- c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^{2k+1} = [g(x)]^{2k+1}; k \in \mathbb{N}$.
- d) $f(x) = g(x)$ (với $f(x) \geq 0; g(x) \geq 0$)
 $\Leftrightarrow [f(x)]^{2k} = [g(x)]^{2k}; k \in \mathbb{N}$

Sau này trong từng loại phương trình, ta sẽ đề cập thêm nhiều phép biến đổi tương đương khác.

2. Các phép biến đổi phương trình mà làm mở rộng thêm tập nghiệm gọi là các phép biến đổi hệ quả. Chẳng hạn: $x = \sqrt{2x+3} \Rightarrow x^2 = 2x+3$. Khi sử dụng các phép biến đổi hệ quả phải chú ý đặt thêm điều kiện để phép biến đổi trở thành tương đương hoặc phải kiểm tra các nghiệm của phương trình hệ quả để phát hiện ra các nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu (nghiệm ngoại lai).

3. Phương trình bậc hai

Định nghĩa: Phương trình bậc hai là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Công thức nghiệm: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nếu $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ thì phương trình có hai nghiệm trùng nhau hay phương trình có nghiệm kép $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$.

Hệ thức Viet: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$.

Nếu phương trình có nghiệm x_1, x_2 thì $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

Ta có thể sử dụng định lý Viet để tính các biểu thức của x_1, x_2 theo a, b, c .

$$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{3abc - b^3}{a^3}.$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}.$$

Ứng dụng của hệ thức Viet

1. Nhẩm nghiệm: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Nếu $a + b + c = 0 \Rightarrow x = 1; x = \frac{c}{a}$.

Nếu $a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$.

2. Tìm hai số khi biết tổng và tích

Cho hai số x, y . Biết rằng $x + y = S, x.y = P$ thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + SX + P = 0$.

3. Phân tích thành nhân tử

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

4. Xác định dấu các nghiệm số

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Giả sử phương trình có nghiệm x_1, x_2 thì $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$.

Nếu $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Nếu $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a} > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu. Khi đó

Nếu $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ thì phương trình có hai nghiệm dương.

Nếu $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm âm.

Chú ý: Ở đây, cần nhấn mạnh với bạn đọc, giá thiết của hệ thức Viet là $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. Nhiều học sinh khi sử dụng hệ thức Viet mà quên kiểm tra giá thiết. Trong nhiều bài toán, việc lãng quên đó sẽ dẫn đến những kết quả sai lạc.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Giải phương trình bậc hai

Dạng 2: Tìm điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm

Dạng 3: Tìm hai số khi biết tổng và tích

Dạng 4: Biểu thức đối xứng của hai nghiệm

Dạng 5: Hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số m

Dạng 6: Điều kiện để hai nghiệm liên hệ với nhau bởi một hệ thức cho trước

Dạng 7: Xác định dấu các nghiệm số

Dạng 8: Phương trình chứa tham số $ax^2 + bx + c = 0$

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Giải phương trình bậc hai

Phương pháp: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình vô nghiệm. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ thì phương trình có hai nghiệm trùng nhau hay phương trình có nghiệm kép $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$.

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a. $3x(x-1) - (x-1)(x+1) = 11 - 3x$

b. $4(x-2)^2 - 1 = 0$

d. $5x(5x-1) - 6 = 15x - 10$

c. $x^2 - x\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$

e. $\frac{(x+3)(x-3)}{3} + 2 = x(1-x)$

Giải:

a. $3x(x-1) - (x-1)(x+1) = 11 - 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \pm\sqrt{5}$.

b. $4(x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{1}{2} \\ x-2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

ABC

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1 = \frac{5}{2}$ và $x_2 = \frac{3}{2}$.

c. $x^2 - x\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - x\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = 0$

Ta có: $a - b + c = 1 - (-\sqrt{2}) + (-1 - \sqrt{2}) = 0$

Nên phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = -1$ và $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

d. $5x(5x - 1) - 6 = 15x - 10 \Leftrightarrow 25x^2 - 20x + 4 = 0$

($a = 25$, $b' = -10$, $c = 4$)

Ta có: $\Delta = b'^2 - ac = (-10)^2 - 4.25 = 0$

Nên phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = -\frac{-10}{25} = \frac{2}{5}$

e. $\frac{(x+3)(x-3)}{3} + 2 = x(1-x) \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 3 = 0$

($a = 4$, $b' = -3$, $c = -3$)

Ta có: $\Delta = b'^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.4.(-3) = 57 > 0$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{57}}{8}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{57}}{8}$$

Dạng 2: Tìm điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm

Phương pháp: Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm là

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \text{ hoặc } P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \leq 0$$

Trong trường hợp cần chứng minh có ít nhất một trong hai phương trình $ax^2 + bx + c = 0$; $a'x^2 + b'x + c' = 0$ có nghiệm người ta thường làm theo một trong hai cách sau

Cách 1: Chứng minh $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$.

Cách 2: Chứng minh $\Delta_1 \cdot \Delta_2 \leq 0$.

Ví dụ: Cho phương trình (m là tham số): $2x^2 - 4mx + 2m^2 - 1 = 0$ (1)

a. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$2x_1^2 + 4mx_2 + 2m^2 - 1 > 0.$$

Giải:

a. $\Delta' = (2m)^2 - 2(2m^2 - 1) = 2 > 0$, $\forall m$, nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Viét có: $x_1 + x_2 = 2m$. Do x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên có $2x_1^2 - 4mx_1 + 2m^2 - 1 = 0$. Ta có

$$Q = (2x_1^2 - 4mx_1 + 2m^2 - 1) + 4m(x_1 + x_2) = 4m(x_1 + x_2) = 4m \cdot 2m = 8m^2$$

Nên $Q > 0 \Leftrightarrow 8m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Vậy với $m \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn đề bài.

Dạng 3: Tìm hai số khi biết tổng và tích

Phương pháp:

Bước 1: Cho hai số x, y . Biết rằng $x + y = S, x \cdot y = P$ thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + SX + P = 0$.

Bước 2: Giải phương trình $X^2 + SX + P = 0$.

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ: Cho a, b là hai số thực thỏa $5a + b = 22$. Biết phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Hãy tìm hai nghiệm đó.

Giải:

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của phương trình ($0 < x_1 \leq x_2$)

Để phương trình có nghiệm $\Delta = a^2 - 4b \geq 0$. Áp dụng hệ thức Viét, ta có $a = -x_1 - x_2$ và $b = x_1 x_2$ nên theo giả thiết

$$5(-x_1 - x_2) + x_1 x_2 = 22 \Leftrightarrow x_1(x_2 - 5) - 5(x_2 - 5) = 47$$

$\Leftrightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 47$ (*). Do phương trình có hai nghiệm là hai số nguyên dương nên: $-4 \leq x_1 - 5 \leq x_2 - 5$ nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5 = 1 \\ x_2 - 5 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 52 \end{cases}. \text{ Khi đó: } a = -58 \text{ và } b = 312 \text{ thỏa } 5a + b = 22.$$

Vậy hai nghiệm cần tìm là $x_1 = 6; x_2 = 52$.

Dạng 4: Biểu thức đối xứng của hai nghiệm

Phương pháp:

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Bước 2: Tính $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, theo m .

Bước 3: Biểu diễn hệ thức đề bài theo S, P , với chú ý rằng

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P; x_1^3 + x_2^3 = S(S^2 - 3P);$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}; \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}.$$

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 + 5x + 2 = 0$. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm. Tính giá trị các biểu thức sau:

a. $x_1^2 + x_2^2; x_1^3 + x_2^3; x_1^4 + x_2^4$

b. $x_1^2 \cdot x_2^3 + x_1^3 \cdot x_2^2; |x_1 - x_2|$

Giải:

Trước hết ta có $\Delta = 17 > 0$, nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Áp dụng hệ thức Viet ta có: $S = x_1 + x_2 = -5$; $P = x_1 \cdot x_2 = 2$.

a. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = S^2 - 2P = 25 - 4 = 21$.

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2 \right]$$

$$= S(S^2 - 3P) = -5(25 - 6) = -95$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = 21^2 - 8 = 433$$

b. $x_1^2 \cdot x_2^3 + x_1^3 \cdot x_2^2 = x_1^2 \cdot x_2^2 (x_1 + x_2) = P^2 S = -20$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{17}$$

Chú ý: Nếu bạn đọc tính trực tiếp x_1, x_2 rồi thay vào các biểu thức cần tính, chúng ta cũng có đáp số tương tự, nhưng việc tính toán sẽ phức tạp hơn nhiều.

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 4m + 5 = 0$ (có ẩn số là x)

a. Định m để phương trình có nghiệm.b. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nếu có của phương trình. Tính $x_1^2 + x_2^2$ theo m .**Giải:**a. Định m để phương trình có nghiệm.Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Delta' = (m+1)^2 - m^2 + 4m - 5 = 6m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$$

b. Theo hệ thức Viet, ta có
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(m+1) = 2m+2 \\ P = x_1 x_2 = m^2 - 4m + 5 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2m+2)^2 - 2(m^2 - 4m + 5)$$

$$= 4m^2 + 8m + 4 - 2m^2 + 8m - 10 = 2m^2 + 16m - 6$$

Ví dụ 3: Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3 = 0$ (ẩn số là x)

a. Định m để phương trình có nghiệm.b. Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa:

$$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$$

Giải:a. * Với $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$, ta có phương trình trở thành:

$$-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

Vậy $m=-1$ phương trình có nghiệm $x=-2$.* Với $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

$$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m-3) = m^2 + 4m + 4 - m^2 + 3m - m + 3 = 6m + 7$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6m + 7 \geq 0$.

$\Leftrightarrow 6m \geq -7 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{6}$. Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{6}$.

b. Điều kiện: $m \geq -\frac{7}{6}; m \neq -1$

Theo hệ thức Viet, ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} \\ P = x_1 x_2 = \frac{m-3}{m+1} \end{cases}$$

Do đó $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18 \Leftrightarrow 16x_1 x_2 + 4x_1 + 4x_2 + 1 = 18$

$\Leftrightarrow 16x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 1 = 18 \Leftrightarrow \frac{16(m-3)}{m+1} + \frac{8(m+2)}{m+1} - 17 = 0$

$\Leftrightarrow 16(m-3) + 8(m+2) - 17(m+1) = 0$

$\Leftrightarrow 16m - 48 + 8m + 16 - 17m - 17 = 0 \Leftrightarrow 7m - 49 = 0 \Leftrightarrow m = 7$

Vậy $m = 7$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18.$$

Ví dụ 4: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 4 = 0$ (có ẩn số là x)

a. Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$y = x_1^2 + x_2^2$$

downloadsachmienphi.com

Giải:

a. Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (2m-4) = m^2 - 2m + 1 - 2m + 4$
 $= m^2 - 4m + 4 + 1 = (m-2)^2 + 1 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b. Theo hệ thức Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) = 2m-2 \\ x_1 x_2 = 2m-4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \\ &= (2m-2)^2 - 2(2m-4) = 4m^2 - 8m + 4 - 4m + 8 \\ &= 4m^2 - 12m + 12 = (2m)^2 - 2 \cdot 2m \cdot 3 + 3^2 + 3 = (2m-3)^2 + 3 \geq 3 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2m-3=0 \Leftrightarrow 2m=3 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là 3 khi $m=\frac{3}{2}$.

Ví dụ 5: Cho $f(x) = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3$. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của $f(x)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = |x_1 \cdot x_2 - 2x_1 - 2x_2|.$$

ABC

Giải:

Ta có: $f(x) = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)(-m-5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$$

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $S = -m - 1$; $P = \frac{m^2 + 4m + 3}{2}$.

$$\text{Do đó } A = |x_1 \cdot x_2 - 2x_1 - 2x_2| = \left| \frac{m^2 + 4m + 3}{2} + 2m + 2 \right| = \left| \frac{m^2 + 8m + 7}{2} \right|$$

Ta có: $m^2 + 8m + 7 = (m+1)(m+7)$, nên với điều kiện $-5 \leq m \leq -1$, thì

$$m^2 + 8m + 7 \leq 0 \Rightarrow A = \frac{-m^2 - 8m - 7}{2} = \frac{9 - (m+4)^2}{2} \leq \frac{9}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = -4$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là $\frac{9}{2}$.

Chú ý: Nếu chúng ta không đặt điều kiện $\Delta' \geq 0$ thì việc khử dấu giá trị tuyệt đối trong bài này tương đối phức tạp.

Ví dụ 6: Tìm m để phương trình $3x^2 + 4(m-1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$, có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Giải:

Trước hết, ta phải tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \text{ khác không, tức là } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \Delta' = 4(m-1)^2 - 3(m^2 - 4m + 1) = m^2 + 4m + 1 = (m+2)^2 - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 > 3 \Leftrightarrow |m+2| > \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 + \sqrt{3} \\ m < -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}(m^2 - 4m + 1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \pm \sqrt{3}.$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left(\frac{1}{x_1 \cdot x_2} - \frac{1}{2} \right) = 0..$$

Áp dụng hệ thức Viet ta có:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{4(m-1)}{3}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 - 4m + 1}{3}, \text{ thế vào biểu thức sau ta có:}$$

$$(x_1 + x_2) \left(\frac{1}{x_1 \cdot x_2} - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(m-1)}{3} \left[\frac{3}{m^2 - 4m + 1} - \frac{1}{2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-1)(m^2-4m-5)}{3(m^2-4m+1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-1 \\ m=5 \end{cases}$$

Kết hợp với các điều kiện ở trên ta có $m=1$; $m=5$.

Ví dụ 7: Cho phương trình $x^2 - mx - \frac{1}{m^2} = 0$. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x_1^4 + x_2^4$ và nêu rõ khi đó m lấy giá trị nào.

Giải:

Từ phương trình đã cho, ta có $a.c = -\frac{1}{m^2} < 0$, nên phương trình đã cho luôn có nghiệm. Áp dụng hệ thức Viet, ta có

$$x_1 + x_2 = m; \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{m^2} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = m^2 + \frac{2}{m^2}$$

$$\text{Và } x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2)^2 = \left(\frac{m^4 + 2}{m^2}\right)^2 - \frac{2}{m^4} = \frac{m^8 + 4m^4 + 2}{m^4}.$$

Đặt $S = x_1^4 + x_2^4 = \frac{m^8 + 4m^4 + 2}{m^4}$, và đặt $t = m^4 \Rightarrow t > 0$. Từ đó ta có

$$S = \frac{t^2 + 4t + 2}{t} \text{ với } t > 0. \text{ Ta biến đổi}$$

$$S = \frac{t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 + (4 + 2\sqrt{2})t}{t} = \frac{(t - \sqrt{2})^2}{t} + 4 + 2\sqrt{2}.$$

Do $t > 0$, nên $S \geq 4 + 2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = \sqrt{2} \Rightarrow m = \pm \sqrt[4]{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S = 4 + 2\sqrt{2}$ khi $m = \pm \sqrt[4]{2}$.

Dạng 5: Hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số

Phương pháp: Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Bước 2: Tính $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, theo m .

Bước 3: Khử m để lập hệ thức giữa S và P , từ đó ta suy ra hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số m .

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m

Giải:

Trước hết, ta phải tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

ABC

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 \geq 0 \Leftrightarrow (m - 4)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |m - 4| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình, áp dụng hệ thức Viet

$$S = x_1 + x_2 = m \quad (1); P = x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 \quad (2)$$

Cách 1: Thế m từ hệ thức (1) vào hệ thức (2) ta có $x_1 \cdot x_2 = 2(x_1 + x_2) - 3$

Cách 2: Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \quad (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1 + x_2) = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế ta có $x_1 \cdot x_2 = 2(x_1 + x_2) - 3$.

Ví dụ 2: Cho phương trình $mx^2 - (2m + 3)x + m - 4 = 0$.

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc m .

Giải:

a. Phương trình: $mx^2 - (2m + 3)x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (2m + 3)^2 - 4m(m - 4) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 28m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{9}{28} \end{cases}$$

b. Với điều kiện phương trình có nghiệm ở trên, áp dụng hệ thức Viet

$$S = x_1 + x_2 = \frac{2m + 3}{m} = 2 + \frac{3}{m} \quad (1);$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m - 4}{m} = 1 - \frac{4}{m} \quad (2)$$

Nhân hai vế của (1) với 4 và nhân hai vế của (2) với 3 ta được

$$\begin{cases} 4(x_1 + x_2) = 8 + \frac{12}{m} \\ 3x_1 \cdot x_2 = 3 - \frac{12}{m} \end{cases} \text{ Cộng vế theo vế ta có } 4(x_1 + x_2) + 3x_1 \cdot x_2 = 11.$$

Dạng 6: Điều kiện để hai nghiệm liên hệ với nhau bởi một hệ thức cho trước

Phương pháp:

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Bước 2: Tính $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, theo m .

Bước 3: Giải phương trình với ẩn số m , so sánh điều kiện.

Bước 4: Kết luận

Ví dụ 1: Số đo hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông là nghiệm của phương trình bậc hai $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$. Hãy xác định giá trị của m để số đo đường cao ứng với cạnh huyền tam giác là $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Giải:

- a. Số đo hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông là nghiệm của phương trình bậc hai $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$ nên hai nghiệm của phương trình này phải dương, do vậy ta có: $m \neq 2$; $\Delta \geq 0$;

$$P = x_1 + x_2 > 0; S = x_1 \cdot x_2 > 0. \text{ Suy ra } m < 0 \text{ hoặc } m > 2.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}, \text{ từ đó } m = 4 \text{ thỏa mãn}$$

Ví dụ 2: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2004x + 1 = 0$ và x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2005x + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)$.

Giải:

Theo định lý Vi-ét ta có:

$$x_1 + x_2 = -2004; x_3 + x_4 = -2005; x_1 x_2 = x_3 x_4 = 1, \text{ mặt khác:}$$

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) \\ &= (x_1 x_2 + (x_1 + x_2)x_3 + x_3^2)(x_1 x_2 - (x_1 + x_2)x_4 + x_4^2) \\ &= (1 - 2004x_3 + x_3^2)(1 - 2004x_4 + x_4^2) \\ &= (x_3^2 + 2005x_3 + 1 - 4009x_3)(x_4^2 + 2005x_4 + 1 - x_4) \\ &= (-4009x_3)(-x_4) = 4009x_3 x_4 = 4009 \text{ (do } x_3, x_4 \text{ là nghiệm của phương trình } x^2 + 2005x + 1 = 0). \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Cho phương trình $x^2 - 2mx - 16 + 5m^2 = 0$ (x là ẩn số).

- a. Tìm m để phương trình có nghiệm.

- b. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17)$.

Giải:

Cho phương trình $x^2 - 2mx - 16 + 5m^2 = 0$ (1) (x là ẩn số).

- a. Tìm m để phương trình có nghiệm.

$$\text{Ta có: } \Delta' = 16 - 4m^2.$$

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

- b. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

ABC

Ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 x_2 = 5m^2 - 16$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } A &= x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17) \\ &= 5(x_1^2 + x_2^2) + 6x_1 x_2 - 17(x_1 + x_2) \\ &= 5[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 6x_1 x_2 - 17(x_1 + x_2) \\ &= 5(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 17(x_1 + x_2) \\ &= 20m^2 - 4(5m^2 - 16) - 17 \cdot 2m = -34m + 64. \end{aligned}$$

Vì $-2 \leq m \leq 2$ nên $-4 \leq A \leq 132$.

Khi $m = 2$ thì $A = -4$ và khi $m = -2$ thì $A = 132$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -4 và giá trị lớn nhất của A là 132 .

Ví dụ 4: Tìm m sao cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1 + 2x_2 = 1$.

Giải:

Phương trình: $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2m^2 - 4m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Vi - et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \quad \text{Do } x_1 = 1 - 2x_2 \text{ nên}$$

$$\begin{cases} 1 - x_2 = \frac{2(m-1)}{m} & (1) \\ (1 - 2x_2) \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có :

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m}, \text{ thay vào (2) ta được} \\ \left[1 - \frac{2(2-m)}{m} \right] \cdot \frac{(2-m)}{m} &= \frac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow \frac{(2-m)}{m} \left[-\frac{2(2-m)}{m} + 4 \right] = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(2-m)(6m-4)}{m^2} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy giá trị m sao cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1 + 2x_2 = 1$, là $m = 2; m = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 5: Cho phương trình (ẩn x): $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$.

1. Giải phương trình đã cho khi $m = 1$.
2. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Giải:

1. Khi $m = 1$, phương trình trở thành: $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1$ hay $x = 3$ (vì $a + b + c = 0$)

2. $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$

$\Delta' = (m+1)^2 - m^2 - 2 = 2m - 1$. Với điều kiện $m \geq \frac{1}{2}$, ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(m^2 + 2) = 10$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)^2 - m^2 - 2 = 5 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hay } m = -5 \text{ (loại)}$$

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6: Cho phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3 = 0$ (1).

- a. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.
- b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$

Giải: Đọc Sách Online

- a. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm;

* Xét trường hợp $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy khi $m = -1$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = -2$.

* Xét trường hợp $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$, ta có:

$$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m-3) = m^2 + 4m + 4 - m^2 + 2m + 3 = 6m + 7$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{6}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -\frac{7}{6}$.

- b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$. Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $m > -\frac{7}{6}; m \neq -1$.

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có $S = x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1}$.

ABC

Do đó, từ giả thiết, ta có ;

$$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18 \Leftrightarrow 16x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 + 1 = 18$$

$$\Leftrightarrow 16x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) - 17 = 0 \Rightarrow \frac{16(m-3)}{m+1} + \frac{8(m+2)}{m+1} - 17 = 0$$

$$16(m-3) + 8(m+2) - 17(m+1) = 0 \Leftrightarrow 7m = 49 \Leftrightarrow m = 7.$$

Ta thấy $m = 7$ thỏa mãn điều kiện $m > -\frac{7}{6}; m \neq -1$.

Vậy giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$ là $m = 7$.

Dạng 7: Xác định dấu các nghiệm số

Phương pháp:

Bước 1: Nếu $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu

Bước 2: Nếu $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

Khi đó, nếu $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0$ thì phương trình có hai nghiệm dương.

Nếu $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm âm.

Bước 3: Kết luận

Ví dụ 1: Cho phương trình: $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$. Tìm giá trị m để phương trình có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2)$.

Giải:

Từ phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ (1).

Đặt: $t = x^2$, ta có: $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$ (2) ($t \geq 0$).

$$\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } m.$$

Vậy để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình (2) luôn có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 . Tức là :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}, m \neq 1 \\ S = 2m > 0 \end{cases} \quad (3).$$

Với điều kiện (3), phương trình (2) có 2 nghiệm dương $0 < t_1 < t_2$, hay phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi :

$$x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}.$$

Theo giả thiết:

$$x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2) \Leftrightarrow 2\sqrt{t_2} = 6\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 \quad (4)$$

Theo định lí Vi-ét, ta có: $t_1 + t_2 = 2m$ và $t_1 t_2 = 2m - 1$ (5)

Từ (4) và (5) ta có: $10t_1 = 2m$ và $9t_1^2 = 2m - 1$

$\Rightarrow 9m^2 - 50m + 25 = 0 \Leftrightarrow m_1 = \frac{5}{9}; m_2 = 5$. Cả hai giá trị đều thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy để phương trình (1) có 4 nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán thì cần và đủ là: $m = \frac{5}{9}$ và $m = 5$.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $x^2 + \sqrt{2}mx - m^2 + m - 1 = 0$ (1).

a. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị m .

Xác định dấu các nghiệm số của phương trình.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

a. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị m .

Xác định dấu các nghiệm số của phương trình.

Ta có hệ số $a = 1 > 0$, $c = -m^2 + m - 1 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$, từ đó suy

ra $ac < 0$, nên phương trình đã cho có nghiệm và hai nghiệm của phương trình trái dấu nhau.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do phương trình đã cho luôn có nghiệm nên áp dụng hệ thức Viet ta có

$$S = x_1 + x_2 = -\sqrt{2}m; P = x_1 \cdot x_2 = -m^2 + m - 1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 2m^2 + 2m^2 - 2m + 2$$

$$= 4m^2 - 2m + 2 = \left(2m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x_1^2 + x_2^2$ là $\frac{7}{4}$ khi $m = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 3: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 4m + 5 = 0$ (có ẩn số là x).

a. Định m để phương trình có nghiệm.

b. Định m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Giải:

a. $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 5) = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 4m - 5 = 6m - 4$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 6m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$$

b. Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 6m - 4 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ m^2 - 4m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m > 4 \\ m+1 > 0 \\ (m-2)^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 4: Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 6m - 9 = 0$ (có ẩn số là x)

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm.

b. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để có $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Giải:

a. Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 9 > 0 \\ 2m < 0 \\ -6m - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 > 0 \\ m < 0 \\ -6m > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < 0 \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

b) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2m \\ P = x_1 x_2 = -6m - 9 \end{cases}$

$$\text{Do đó } x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 13$$

$$\Leftrightarrow (2m)^2 - 2(-6m - 9) = 13 \Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 5 = 0$$

$$\Delta' = 6^2 - 4 \cdot 5 = 16; \sqrt{\Delta'} = 4 \Rightarrow m_1 = \frac{-6+4}{4} = -\frac{1}{2}; m_2 = \frac{-6-4}{4} = -\frac{5}{2}$$

Vậy $m_1 = -\frac{1}{2}$ hay $m_2 = -\frac{5}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Dạng 8: Phương trình chứa tham số $ax^2 + bx + c = 0$

Phương pháp:

Bước 1: Xét $a = 0$, khi đó phương trình trở thành $0x^2 + bx + c = 0$, lúc này ta đưa về bài toán giải và biện luận phương trình dạng bậc nhất

Bước 2: Xét $a \neq 0$: Trong trường hợp này, phương trình đã cho trở thành phương trình bậc hai. Khi đó tính $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nếu $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ thì phương trình có hai nghiệm trùng nhau hay phương trình có nghiệm kép $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$.

Bước 3: Kết luận

Ví dụ 1: Chứng minh rằng phương trình: $x^4 - 2(m^2 + 2)x^2 + m^4 + 3 = 0$

luôn có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 với mọi giá trị của m . Tìm giá trị m sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11$.

Giải:

$$x^4 - 2(m^2 + 2)x^2 + m^4 + 3 = 0.$$

Đặt $t = x^2$, ta có: $t^2 - 2(m^2 + 2)t + m^4 + 3 = 0$ (2) ($t \geq 0$).

Ta chứng tỏ (2) luôn có hai nghiệm: $0 < t_1 < t_2$.

$$\Delta' = (m^2 + 2)^2 - (m^4 + 3) = 4m^2 + 1 > 0, \text{ với mọi } m$$

Vậy (2) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 và $t_1 \cdot t_2 = m^4 + 3 > 0$ với mọi

m $t_1 + t_2 = 2(m^2 + 2) > 0$ với mọi m .

Do đó phương trình (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}$;

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

$$= (-\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 + (\sqrt{t_2})^2 + (-\sqrt{t_1}) \cdot (\sqrt{t_1}) \cdot (-\sqrt{t_2}) \cdot (\sqrt{t_2})$$

$$= 2(t_1 + t_2) + t_1 \cdot t_2.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 4(m^2 + 2) + m^4 + 3 = m^4 + 4m^2 + 11$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11 \Leftrightarrow m^4 + 4m^2 + 11 = 11$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy giá trị m sao cho: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11$ là $m = 0$.

Ví dụ 2: Cho phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m + 2)x + 1 = 0$.

a. Tìm m để phương trình có nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải:

a. Xét $(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$, thử trực tiếp ta thấy phương trình chỉ có nghiệm khi $m = 2$. Xét $(m^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ 4m + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m > -2$.

b. Phương trình chỉ có thể có nghiệm duy nhất trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 2(m + 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \neq 0 \\ 4(m + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m = -2 \end{cases}$. Trường hợp này không xảy ra.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = 2$.

Ví dụ 3: Biện luận số nghiệm của phương trình:

$$x^3 - m(x + 2) + 8 = 0 \quad (*) \text{ theo } m.$$

Giải:

Ta biến đổi phương trình đã cho về dạng phương trình tích:

$$x^3 - m(x + 2) + 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 8) - m(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - m(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4 - m) = 0.$$

Số nghiệm của phương trình (1) phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình:

$$(x^2 - 2x + 4 - m) = 0 \quad (2) \text{ khác } -2, \text{ do đó phụ thuộc vào}$$

$$\Delta' = m - 3 \text{ và } f(-2) = 12 - m. \text{ Xảy ra các trường hợp như sau:}$$

Trường hợp 1: $\Delta' = m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$, phương trình (2) vô nghiệm, nên phương trình đã cho có một nghiệm $x = -2$.

Trường hợp 2: $\Delta' = m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$, phương trình (2) có nghiệm kép $x = 1$, nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2, x = 1$.

Trường hợp 3: $\Delta' = m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$; $f(-2) = 12 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 12$.

Do đó, nếu $\begin{cases} m \neq 12 \\ m > 3 \end{cases}$ thì phương trình (2) có hai nghiệm, nên phương trình đã cho có ba nghiệm.

Nếu $m = 12$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm.

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt:

$$(x - 2)(x^2 + mx + m^2 - 3) = 0. \quad (*)$$

Giải:

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x) = x^2 + mx + m^2 - 3 = 0$, có hai nghiệm phân biệt khác 2.

Điều này tương đương với $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases}$ tức là

$$\begin{cases} -3m^2 + 12 > 0 \\ m^2 + 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Vậy giá trị m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt là:

$$\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Chú ý: Đừng nghĩ rằng phương trình (*) có nghiệm $x = 2$, thì chỉ cần đặt điều kiện phương trình $f(x) = x^2 + mx + m^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm là đủ.

Ví dụ 5: Tìm m để phương trình: $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = m$ (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Giải:

Đây là phương trình dạng: $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$ với

$a + b = c + d$. Ta có: $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) = m$

$$\Leftrightarrow [(x - 1)(x + 5)][(x + 1)(x + 3)] = m \Leftrightarrow [x^2 + 4x - 5][x^2 + 4x + 3] = m$$

Đặt $X = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$, ta có phương trình tương đương:

$$(X - 9)(X - 1) = m \Leftrightarrow X^2 - 10X + (9 - m) = 0 \quad (2).$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + m > 0 \\ 9 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9.$$

Vậy với $-16 < m < 9$, thì phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 6: Tìm m để phương trình: $x^4 - x^2 + 2mx - m^2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Giải:

$$\text{Ta có: } x^4 - (x^2 - 2mx + m^2) = 0 \Leftrightarrow x^4 - (x - m)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x - m)(x^2 - x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - m = 0 & (1) \\ x^2 - x + m = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) và (2) đồng thời mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt nhưng chúng không có nghiệm chung. Trước hết (1) và (2) đồng thời có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ 1 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4}$$

$$\text{Nhưng nếu (1) và (2) có nghiệm chung } x_0 \text{ thì: } \begin{cases} x_0^2 + x_0 - m = 0 \\ x_0^2 - x_0 + m = 0 \end{cases}$$

$$\text{Cộng từng vế: } 2x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0. \text{ Do đó: } m = 0.$$

$$\text{Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

ABC

Ví dụ 7: Giả sử m là một tham số để phương trình :

$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = m$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 đều khác không. Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ theo m .

Giải:

Phương trình $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = m$ (1)

$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = m$.

Đặt $y = x^2 - 5x + 4$ thì phương trình đã cho trở thành: $y^2 + 2y - m = 0$ (2)

Ta có: $\Delta = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Phương trình (1) có 4 nghiệm nên phương trình (2) có hai nghiệm y_1, y_2 với $y_1 + y_2 = -2$; $y_1 y_2 = -m$ ($m > -1$).

Bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 có vai trò như nhau trong phương trình nên ta có thể coi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$x^2 - 5x + 4 = y_1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 - y_1 = 0$ và x_3, x_4 là nghiệm phương trình:

$x^2 - 5x + 4 - y_2 = 0$. Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5; x_1 x_2 = 4 - y_1 \\ x_3 + x_4 = 5; x_3 x_4 = 4 - y_2 \end{cases}$

Nên $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_3 + x_4}{x_3 x_4} = \frac{5}{4 - y_1} + \frac{5}{4 - y_2}$
 $= \frac{5[8 - (y_1 + y_2)]}{16 - 4(y_1 + y_2) + y_1 y_2} = \frac{50}{24 - m}$.

Bài tập vận dụng

1. Tìm k sao cho phương trình $3x^2 - (3k - 2)x - (3k + 1) = 0$, có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - 5x_2 = 6$.
2. Cho phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$.
 - a. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
 - b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $1 < x_1 < x_2 < 6$.
 - c. Xác định m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
3. Cho phương trình: $mx^2 - 2mx + 1 = 0$ (m là tham số).
 - a. Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm và tính các nghiệm của phương trình theo m .
 - b. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm sao cho một nghiệm gấp đôi nghiệm kia.
4. Phân tích đa thức $A = x^4 + x^3 + 2(m - 1)x^2 + mx + m^2$ thành tích.
5. Giải phương trình: $x^2 - |x| - 20 = 0$.

6. Viết các phương trình bậc hai dạng $x^2 + px + q = 0$. Biết rằng, phương trình có nghiệm nguyên, các hệ số p, q đều là những số nguyên và $p + q + 1 = 2003$.
7. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 7 = 0$ (1)
 a. Tìm m để phương trình có nghiệm kép
 b. Tìm m để (1) có 2 nghiệm và nghiệm này gấp k lần nghiệm kia.
8. Cho phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0$ (1)
 a. Tìm m để (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $(x_1^2 + x_2^2)$ nhỏ nhất.
 b. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + 2x_2 = 4$.
9. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $cx^2 + bx + a = 0$ (2)
 với $a \neq 0$ và $c \neq 0$.
 a. Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có 2 nghiệm dương thì phương trình (2) cũng có 2 nghiệm dương.
 b. Chứng minh rằng nếu phương trình (1) vô nghiệm thì phương trình (2) cũng vô nghiệm.
 c. Nếu phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu thì phương trình (2) cũng có 2 nghiệm trái dấu.
10. Giả sử phương trình $x^2 + 3x + 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1^2 + 2x_1}{(x_1 + 1)^2} + \frac{x_2^2 + 2x_2}{(x_2 + 1)^2} = -1.$$
11. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x - m^4 + m^2 - 1 = 0$ (1)
 a. Giải phương trình với $m = 1$.
 b. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .
 c. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = -x_1x_2 + 5$.
12. Cho phương trình $(x + 1)^4 - (m - 1)(x + 1)^2 - m^2 + m - 1 = 0$ (1)
 a. Giải phương trình với $m = -1$.
 b. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị tham số của m .
 c. Tìm các giá trị của m để $|x_1| + |x_2| = 2$.

(Đề thi vào lớp 10 trường Hà Nội – Amsterdam, 1998-1999)

13. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ($a \neq 0$) và $cx^2 + bx + a = 0$ (2). ($c \neq 0$). Biết rằng phương trình (1) có 2 nghiệm dương x_1, x_2 . Chứng minh rằng phương trình (2) cũng có 2 nghiệm dương; gọi 2 nghiệm đó là x_3, x_4 . Chứng minh rằng: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$

ABC

14. Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 2 = 0$ (1)
- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu.
 - Gọi 2 nghiệm của (1) là x_1, x_2 . Tìm m để $(x_1^2 + x_2^2)$ là nhỏ nhất.
15. Giải phương trình:
- $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 2$
 - $(|x|-2)^4 + (|x|-6)^4 = 82$
16. Tìm giá trị nhỏ nhất của $(a^2 + b^2)$ sao cho phương trình:
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm.
17. Cho phương trình $2x^2 - 3mx - 2 = 0$.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
 - Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của m để $S = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.
 - Tính $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$ theo m .
18. Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $cy^2 + by + a = 0$ (2)
- Chứng minh rằng nếu α là nghiệm của phương trình (1) thì $\frac{1}{\alpha}$ là nghiệm của phương trình (2).
 - Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1); y_1, y_2 là nghiệm của phương trình (2). Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$ khi a, b, c thay đổi.
19. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ với m là tham số.
- Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $m \neq 1$.
 - Xác định giá trị của m để phương trình có tích 2 nghiệm bằng 5. Từ đó tính tổng 2 nghiệm của phương trình.
 - Tìm một hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm không phụ thuộc m .
 - Tìm m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0.$$
20. Cho phương trình $2x^2 - 2mx + m^2 - 2 = 0$.
- Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt.
 - Giả sử phương trình có 2 nghiệm không âm. Tìm nghiệm dương lớn nhất của phương trình.
21. Tìm giá trị nguyên của a để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung: $2x^2 + (3a-1)x - 3 = 0$ (1); $6x^2 - (2a-3)x - 1 = 0$ (2)

22. Cho hai phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1); $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ (2)
 Biết hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung. Chứng minh rằng:
 $(ac_1 - a_1c)^2 = (a_1b - ab_1)(b_1c - bc_1)$.
23. Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung: $2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0$ (1); $4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$ (2)
24. Với giá trị nào của m thì hai phương trình:
 $x^2 - (m + 1)x + m = 0$ (1); $2x^2 - x + 2m = 0$ (2)
 a. Có hai nghiệm chung.
 b. Tương đương.
25. Cho phương trình: $x + 3(m - 3x^2)^2 = m$ (1). Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có nghiệm?
26. Tìm giá trị của k để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:
 $(x - 3)[x^2 + (k - 1)x + k^2] = 0$ (1)
27. Tìm giá trị của k để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt và cùng âm:
 $(x - 1)(x^2 + kx + k - 1) = 0$ (1')
28. Cho phương trình $x^2 - 6mx + 4 = 0$. Tìm giá trị của m , biết rằng phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{7}{2}$.
29. Chứng minh rằng, nếu phương trình $x^2 + 2mx + n = 0$ (1) có nghiệm, thì phương trình: $x^2 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 0$ (2) cũng có nghiệm.
 (m, n, k là các tham số; $k \neq 0$)
30. Cho phương trình: $mx^2 - 2mx + 1 = 0$ (m là tham số).
 a. Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm và tính các nghiệm của phương trình theo m .
 b. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm sao cho một nghiệm gấp đôi nghiệm kia.
31. Hai vòi nước cùng chảy vào bể thì đầy sau 16 giờ. Nếu vòi I chảy trong 3 giờ và vòi II chảy trong 6 giờ thì được thể tích nước bằng 25% bể. Tính thời gian cần thiết để riêng mỗi vòi chảy đầy bể.
32. Cho phương trình: $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (*)
 a. Tìm m để phương trình (*) có 2 nghiệm âm.
 b. Tìm m để phương trình (*) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1^3 - x_2^3| = 50$.

Hướng dẫn và đáp số

1. Điều kiện phương trình có nghiệm là $\Delta = (3k - 2)^2 + 4.3(3k + 1) = 9k^2 - 12k + 4 + 36k + 12 = 9k^2 + 24k + 16 = (3k + 4)^2 \geq 0, \forall k$.

Áp dụng hệ thức Vi et, ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{3k - 2}{3} = k - \frac{2}{3}; \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{3k + 1}{3} = -k - \frac{1}{3}.$$

Theo giả thiết, ta có $3x_1 - 5x_2 = 6$, từ đây ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = k - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5k}{8} + \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{3k}{8} - 1 \end{cases}. \text{ Thế vào biểu thức } x_1 \cdot x_2 = -k - \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{5k}{8} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3k}{8} - 1\right) = -k - \frac{1}{3} \Leftrightarrow k\left(k + \frac{32}{15}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{32}{15} \end{cases}.$$

$$\text{Khi } k = 0, \text{ phương trình trở thành: } 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Khi } k = -\frac{32}{15}, \text{ phương trình trở thành } 3x^2 + 8,4x + 5,4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1,8 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Vậy giá trị k sao cho phương trình $3x^2 - (3k - 2)x - (3k + 1) = 0$, có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - 5x_2 = 6$ là $k = 0$; $k = -\frac{32}{15}$.

2. a. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } \Delta = (2m - 3)^2 - 4(m^2 - 3m) = 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 12m = 9 > 0, \forall m.$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

- b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa:

$$1 < x_1 < x_2 < 6.$$

Do phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \text{ Nên } x_1 = m - 3; x_2 = m.$$

Theo giả thiết $1 < x_1 < x_2 < 6$, do đó $1 < m - 3 < m < 6 \Leftrightarrow 4 < m < 6$.

Vậy m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa:

$$1 < x_1 < x_2 < 6 \text{ là } 4 < m < 6.$$

- c. Xác định m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

ABC

Do phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt, áp dụng hệ thức

Viết, ta có $x_1 + x_2 = 2m - 3$; $x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3m$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (2m - 3)^2 - 2(m^2 - 3m)$$

$$= 4m^2 - 12m + 9 - 2m^2 + 6m = 2m^2 - 6m + 9 = 2\left(m^2 - 3m + \frac{9}{2}\right)$$

$$= 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } m = \frac{3}{2}.$$

Vậy giá trị m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là $m = \frac{3}{2}$.

3. a. + Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $1 = 0$, nên vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm khi:

$$\Delta' = m^2 - m = m(m - 1) \geq 0. \text{ Suy ra } m < 0 \text{ hoặc } m \geq 1 (*).$$

Khi đó các nghiệm của phương trình là:

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - m}}{m}; \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - m}}{m}.$$

b. Với điều kiện (*), phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo hệ thức Viète: $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = \frac{1}{m}$.

Theo giả thiết, ta có: $x_1 = 2x_2$ (hoặc $x_2 = 2x_1$), suy ra $x_1 = \frac{4}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}$

(hoặc $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{4}{3}$). Suy ra: $x_1 x_2 = \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{8}{9} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{9}{8} > 1$, thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy với $m = \frac{9}{8}$ thì phương trình có một nghiệm gấp đôi nghiệm kia.

4. $A = x^4 + x^3 + 2(m - 1)x^2 + mx + m^2$. Viết lại A thành tam thức theo m :

$$A = m^2 + (2x^2 + x)m + x^4 + x^3 - 2x^2. \text{ Ta tính được: } \Delta = 9x^2.$$

Vậy $A = 0$ có hai nghiệm: $m = -x^2 - 2x$ và $m = -x^2 + x$.

$$\text{Do đó: } A = (m + x^2 + 2x)(m + x^2 - x).$$

5. Phương trình $x^2 - |x| - 20 = 0$ tương đương với các hệ phương trình:

$$(1) \begin{cases} x^2 - x - 20 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} x^2 + x - 20 = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Hệ (1) có hai nghiệm là $x_1 = 5$, $x_2 = -4$, $x_2 = -4 < 0$ không thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$ nên bị loại. Vậy (1) chỉ có một nghiệm là: $x_1 = 5$.

ABC

Hệ (2) có hai nghiệm là $x_3 = 4$, $x_4 = -5$, $x_3 = 4 > 0$ không thỏa mãn điều kiện $x \leq 0$ nên bị loại. Vậy (2) chỉ có một nghiệm là: $x_4 = -5$.

Vậy, phương trình đã cho chỉ có hai nghiệm: $x_1 = 5$, $x_4 = -5$.

6. Giả sử phương trình $x^2 + px + q = 0$ có hai nghiệm nguyên x_1, x_2 . Theo định lý Viet, ta có: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$

Do đó $p + q + 1 = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 2003$ hay $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2003$.

Vì 2003 là số nguyên tố, giả sử $x_1 > x_2$, ta nhận được:

$$+ x_1 - 1 = 2003 \Rightarrow x_1 = 2004; x_2 - 1 = 1 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$\Rightarrow p = -2006, q = 4008.$$

$$+ x_1 - 1 = -1 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 - 1 = -2003 \Rightarrow x_2 = -2002$$

$$\Rightarrow p = 2002, q = 0.$$

Từ đó, ta có các phương trình bậc hai dạng $x^2 + px + q = 0$ thỏa mãn điều kiện bài toán: $x^2 - 2006x + 4008 = 0$; $x^2 + 2002x = 0$.

7. a. Phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{7}$

- b. Phương trình (1) có 2 nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \sqrt{7} - 1 \\ m \leq -\sqrt{7} - 1 \end{cases}$

Gọi 2 nghiệm của phương trình là x_1, x_2 . Phương trình (1) có nghiệm này

gấp k lần nghiệm kia $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = 0 \Leftrightarrow (k^2 + 1)x_1 x_2 - k(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^2 x_1 x_2 - k(x_1 + x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow (k+1)^2 \cdot 7 - k[2(m+1)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4k(m+1)^2 = 7 \cdot (k+1)^2 \quad (*)$$

Nếu $k \leq 0$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

Nếu $k > 0$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm là: $m = -1 \pm \sqrt{\frac{7(k+1)^2}{4k}}$.

8. a. Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{4}$

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2m+1)^2 - 2(m^2 + 2) = 2m^2 + 4m - 3$$

$$m \geq \frac{7}{4} \Rightarrow A = 2m^2 + 4m - 3 \geq 2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 4 \cdot \frac{7}{4} - 3 = \frac{81}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $m = \frac{7}{4}$.

- b. Với $m \geq \frac{7}{4}$ theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 & (1') \\ x_1 x_2 = m^2 + 2 & (2') \end{cases}$

ABC

Vậy ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 - 2m \\ x_1 = 2m + 1 - (3 - 2m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 - 2m \\ x_1 = 4m - 2 \end{cases}$$

Theo (2') ta có: $x_1 x_2 = m^2 + 2 \Leftrightarrow (3 - 2m)(4m - 2) = m^2 + 2$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 16m + 8 = 0 : \text{phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy không có giá trị m nào để (1) và (2) có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1 + 2x_2 = 4.$$

9. a. Phương trình (1) có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{a} > 0; \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

Ta có: $\Delta_{(1)} = \Delta_{(2)} = b^2 - 4ac \geq 0$. Suy ra phương trình (2) cũng có 2 nghiệm. Gọi $\alpha > 0, \beta > 0$ là 2 nghiệm của (1).

Do $\alpha > 0$ là nghiệm của (1) nên $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ (*).

Chia 2 vế của (*) cho α^2 , ta có: $a + b\left(\frac{1}{\alpha}\right) + c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = 0$,

suy ra $\frac{1}{\alpha}$ là nghiệm của phương trình (2).

Tương tự $\frac{1}{\beta}$ cũng là nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình (2) cũng có 2 nghiệm dương.

b. $\Delta_{(1)} = \Delta_{(2)} = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta_{(1)} < 0$ thì $\Delta_{(2)} < 0$, suy ra nếu phương trình (1) vô nghiệm thì (2) cũng vô nghiệm.

c. (1) có 2 nghiệm trái dấu nên $\frac{c}{a} < 0$, do đó $\frac{a}{c} < 0$, vậy (2) cũng có 2 nghiệm trái dấu (đpcm).

10. Do x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + 3x + 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + 3x_1 + 1 = 0 \\ x_2^2 + 3x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 + 1)^2 = -x_1 \text{ và } x_1^2 + 2x_1 = -(1 + x_1) \\ (x_2 + 1)^2 = -x_2 \text{ và } x_2^2 + 2x_2 = -(1 + x_2) \end{cases}$$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$

$$\text{Vậy: } \frac{x_1^2 + 2x_1}{(x_1 + 1)^2} \cdot \frac{x_2^2 + 2x_2}{(x_2 + 1)^2} = \frac{-(1 + x_1)}{-x_1} \cdot \frac{-(1 + x_2)}{-x_2} = \frac{1 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2}{x_1 x_2} = -1$$

11. a. Học sinh tự giải.

b. Có $a = 1 > 0, c = -(m^4 - m^2 + 1) < 0$ suy ra $ac < 0$.

Vậy (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

ABC

c. Do phương trình (1) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 nên theo Viét ta có:

$$x_1 x_2 = -m^4 + m^2 - 1. \text{ Suy ra } A = -x_1 x_2 + 5 = m^4 - m^2 + 6$$

$$= \left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 5\frac{3}{4} \geq 5\frac{3}{4}. \text{ Vậy } A \text{ nhỏ nhất bằng } 5\frac{3}{4}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } m^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

12. a. Đặt $(x+1)^2 = t, t \geq 0$. Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow t^2 - (m-1)t - m^2 + m - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Với } m = -1, \text{ ta có: } (1) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ x+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

b. Trong phương trình (2) có $a = 1, c = -(m^2 - m + 1) < 0$ nên (2) có 2 nghiệm trái dấu $t_1 < 0 < t_2$.

Vì vậy phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$$x_2 = \sqrt{t_2} - 1; \quad x_1 = -\sqrt{t_2} - 1$$

$$c. |x_1| + |x_2| = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{t_2} - 1| + |-\sqrt{t_2} - 1| = 2 \Leftrightarrow 2 \geq |1 - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_2} + 1| = 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$(1 - \sqrt{t_2})(1 + \sqrt{t_2}) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{t_2} \geq 0 \Leftrightarrow t_2 \leq 1.$$

t_2 là nghiệm dương của phương trình (2) nên:

$$t_2 = (m-1) + \sqrt{(m-1)^2 - 4(-m^2 + m - 1)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2 - 6m + 5} \leq 2 - m \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 2m + 1 \leq 0 \\ m \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$13. \text{ Phương trình (1) có 2 nghiệm dương } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \geq 0 \\ -\frac{b}{a} > 0; \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Ta có: $\Delta_{(1)} = b^2 - 4ac = \Delta_{(2)} > 0$ do đó phương trình (2) cũng có 2 nghiệm.

Giả sử $x_1 > 0$ là nghiệm của (1). Thế thì: $ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \quad (3)$

Chia 2 vế của (3) cho x_1^2 , ta có: $\frac{ax_1^2}{x_1^2} + \frac{bx_1}{x_1^2} + \frac{c}{x_1^2} = 0$, tức là

$$a + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + c\left(\frac{1}{x_1^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1} \text{ là nghiệm của (2).}$$

Tương tự $\frac{1}{x_2}$ cũng là nghiệm của (2), mà x_3, x_4 là nghiệm của (2). Không

mất tổng quát, giả sử: $x_3 = \frac{1}{x_1}, x_4 = \frac{1}{x_2}$.

$$\text{Suy ra: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \geq 4$$

(do $x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2$ với $x_1 > 0$ và $x_2 + \frac{1}{x_2} \geq 2$ với $x_2 > 0$).

14. a. Ta có:
$$\begin{cases} ac = 1 \cdot (-m^2 + m - 2) < 0 \\ \Delta = (m-1)^2 + 4(m^2 - m + 2) > 0 \quad \forall m \end{cases}$$

Do đó phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.

b. Theo Viét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 x_2 = -m^2 + m - 2 \end{cases}$$

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3m^2 - 4m + 5$$

$$= 3\left(m - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \geq \frac{11}{3}, \quad \forall m.$$

Vậy A nhỏ nhất $= \frac{11}{3}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$.

15. Đặt $y = x + 4 \Rightarrow y - 1 = x + 3$

a. $\Leftrightarrow (y-1)^4 + (y+1)^4 = 2$

$$\Leftrightarrow y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 + y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow 12y^2 + 2y^4 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = -4$$

b. Tương tự câu a.

16. Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \quad (1), \text{ do đó } x \neq 0.$$

Chia 2 vế của phương trình (1) cho x^2 ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, với $|t| \geq 2$. Do đó (1) $\Leftrightarrow t^2 + at + b - 2 = 0$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki có:

$$(a^2 + b^2)(t^2 + 1) \geq (at + b)^2 = (2 - t^2)^2$$

ABC

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(2-t^2)^2}{t^2+1}. \text{ Đặt } t^2 = u, u \geq 4 \Rightarrow \frac{(2-t^2)^2}{t^2+1} = \frac{(2-u)^2}{u+1}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(2-u)^2}{u+1} \text{ Ta sẽ chứng minh: } \frac{(2-u)^2}{u+1} \geq \frac{4}{5} \text{ với } u \geq 4 (*)$$

$$\text{Thật vậy } (*) \Leftrightarrow 5(2-u)^2 \geq 4(u+1) \Leftrightarrow (u-4)(5u-4) \geq 0 \text{ (do } u \geq 4)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} u = 4 \\ a = bt \\ at + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 4 \\ bt = a \\ at + b = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ thì phương trình } x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \text{ có nghiệm } x = 1.$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ thì phương trình } x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \text{ có nghiệm } x = -1.$$

$$\text{Vậy } (a^2 + b^2) \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{4}{5}.$$

17. a. $ac = 2(-2) = 4 < 0$, phương trình luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

$$\text{Theo hệ thức Viét ta có: } x_1 + x_2 = \frac{3m}{2}; x_1 x_2 = -1$$

$$\text{b. } S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{3m}{2}\right)^2 - 2(-1) = \frac{9m^2}{4} + 2 \geq 2$$

Vậy $\min S = 2$ khi $m = 0$.

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} &= \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 x_2)^3} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{(x_1 x_2)^3} \\ &= \frac{\left(\frac{3m}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{3m}{2}}{-1} = \frac{-9m(3m^2 + 4)}{8}. \end{aligned}$$

18. a. Từ giả thiết các phương trình (1) và (2) là phương trình bậc 2 nên $a \neq 0, c \neq 0$ do đó $x \neq 0$. Ta có:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 \left(c \cdot \frac{1}{x^2} + b \cdot \frac{1}{x} + a \right) = 0.$$

Vì vậy nếu $x = \alpha$ là nghiệm của (1) thì $\alpha \neq 0$ và $\frac{1}{\alpha}$ là nghiệm của phương trình (2).

b. x_1, x_2 là nghiệm của (1) thì $\frac{1}{x_1} = y_1; \frac{1}{x_2} = y_2$ là nghiệm của (2)

$$\text{Vậy } M = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} \right) + \left(x_2^2 + \frac{1}{x_2^2} \right) \geq 2 + 2 = 4.$$

Suy ra m nhỏ nhất là bằng 4.

19.a. Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình bậc hai: $m \neq 1$.

$$\Delta' = m^2 - (m-1)(m+1) = 1 > 0.$$

Vậy phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $m \neq 1$.

b. $x_1 x_2 = \frac{m+1}{m-1} = 5 \Rightarrow m = \frac{3}{2}; x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = 6$

c. Áp dụng định lý Viét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{m+1}{m-1} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \Rightarrow \frac{2m - (m-1)}{m-1} = \frac{m+1}{m-1} + 1 = x_1 x_2 + 1$$

Vậy hệ thức phải tìm là: $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 0$.

d. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0 (x_1 \neq 0, x_2 \neq 0) \Leftrightarrow 2(x_1^2 + x_2^2) = -5x_1 x_2$

$$\Leftrightarrow 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = -5x_1 x_2 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 = -x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{4m^2}{(m-1)^2} = -\frac{m+1}{m-1} \Leftrightarrow 9m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{3}$$

20. a. Điều kiện:
$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ m > 0 \\ m^2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} < m < 2$$

b. Từ giả thiết có $\sqrt{2} \leq m \leq 2$

ABC

Ta có $x_1 = \frac{m - \sqrt{4 - m^2}}{2}$; $x_2 = \frac{m + \sqrt{4 - m^2}}{2}$. Dễ thấy $x_1 \leq x_2$

$$x_2^2 = \frac{1}{4} \left(m + \sqrt{4 - m^2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(m^2 + 4 - m^2 + 2\sqrt{m^2(4 - m^2)} \right). \text{ Ta có}$$

$$2\sqrt{m^2(4 - m^2)} \leq m^2 + 4 - m^2 = 4 \text{ nên } x_2^2 \leq \frac{1}{4}(4 + 4) = 2.$$

Vì $x_2 > 0$ nên $x_2 \leq \sqrt{2}$.

Vậy nghiệm dương lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ khi $m = \sqrt{2}$.

21. Gọi x_0 là nghiệm chung của (1) và (2). Thay vào hai phương trình ta tính được: $(11a - 6)x_0 = 8$.

Với $a = \frac{6}{11}$, 2 phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung.

Với $a \neq \frac{6}{11}$ thì $x_0 = \frac{8}{11a - 6}$. Thay vào (1), rút gọn: $99a^2 - 164a - 68 = 0$.

Nghiệm nguyên của phương trình này là $a = 2$.

Với $a = 2$: (1) là $2x^2 + 5x - 3 = 0$, nghiệm là $\frac{1}{2}$ và -3 .

(2) là $6x^2 - x - 1 = 0$, nghiệm là $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{3}$. Do đó (1) và (2) có nghiệm

chung. Kết luận: giá trị nguyên cần tìm của a là $a = 2$.

22. Giả sử α là nghiệm chung của hai phương trình đã cho:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ b_1^2 - 4a_1c_1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Thế thì } \begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 & (1) \\ a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} aa_1\alpha^2 + a_1b\alpha + a_1c = 0 \\ aa_1\alpha^2 + ab_1\alpha + ac_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ab_1 - a_1b)\alpha = (a_1c - ac_1) \Rightarrow (ab_1 - a_1b)^2\alpha^2 = (a_1c - ac_1)^2 \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác lại có: } \begin{cases} ab_1\alpha^2 + bb_1\alpha + b_1c = 0 \\ a_1b\alpha^2 + bb_1\alpha + bc_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (ab_1 - a_1b)\alpha^2 = bc_1 - b_1c$$

$$\Rightarrow (ab_1 - a_1b)^2\alpha^2 = (ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c) \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) ta suy ra: } (ac_1 - a_1c)^2 = (ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c)$$

$$\text{hay } (ac_1 - a_1c)^2 = (a_1b - ab_1)(b_1c - bc_1).$$

23. Cho hai phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$; $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$

Biết hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung. Ta có:

$$(ac_1 - a_1c)^2 = (a_1b - ab_1)(b_1c - bc_1). \text{ Áp dụng vào bài ta có:}$$

$$(72 - 48)^2 = [-2(9m - 2) + 4(3m + 2)][-36(3m + 2) + 12(9m - 2)]$$

$$\Leftrightarrow (12 - 6m) \cdot (-96) = 24^2 \Leftrightarrow m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 3.$$

Thử lại, ta có giá trị $m = 3$ thì hai phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm chung.

24. a. Điều kiện:
$$\begin{cases} (m+1)^2 - 4m \geq 0 \\ 1 - 16m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 \geq 0 \\ m \leq \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{16}.$$

Gọi α là một nghiệm chung của phương trình (1) và (2)

Ta có:
$$\begin{cases} \alpha^2 - (m+1)\alpha + m = 0 \\ 2\alpha^2 - \alpha + 2m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 - 2(m+1)\alpha + 2m = 0 & (*) \\ 2\alpha^2 - \alpha + 2m = 0 & (**) \end{cases}$$

Lấy (*) trừ (**), ta có: $-2(m+1)\alpha + \alpha = 0$

$$\Leftrightarrow (-2m-1)\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Nếu } \alpha = 0 \text{ thì từ (1) ta có } m = 0$$

+ $m = 0$, suy ra phương trình (1) và (2) có dạng:

$$x^2 - x = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}; \quad 2x^2 - x = 0 \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó (1) và (2) không có cả hai nghiệm chung (loại).

+ $m = -\frac{1}{2}$, suy ra phương trình (1) và (2) có dạng:

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$2x^2 - x + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \quad (2). \text{ Suy ra } m = -\frac{1}{2} \text{ thỏa mãn.}$$

b. Phương trình (1) và (2) tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(1) và (2) cùng vô nghiệm} \\ \text{(1) và (2) có 2 nghiệm chung} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \\ m = -\frac{1}{2} \text{ (do câu a)} \end{cases}$$

Xét trường hợp:
$$\begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4m < 0 \\ 1 - 16m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 < 0 \\ 1 - 16m < 0 \end{cases} : \text{trường hợp này loại.}$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thì hai phương trình (1) và (2) tương đương.

ABC

25. Đặt $m - 3x^2 = y$, ta có: $\begin{cases} x + 3y^2 = m & (*) \\ y + 3x^2 = m & (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y^2 = m \\ (x - y) + 3(y^2 - x^2) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y^2 = m \\ (x - y)(1 - 3x - 3y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 3y^2 = m & (I) \\ x = y \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3y^2 = m & (II) \\ 1 - 3x - 3y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (I) hoặc (II) có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 + y - m = 0 \text{ có nghiệm} \\ 3y^2 + \frac{3y - 1}{-3} = m \text{ có nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 12m \geq 0 \\ 9 - 4.9(1 - 3m) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{12} \\ m \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{12}.$$

26. Tìm giá trị của k để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$(x - 3)[x^2 + (k - 1)x + k^2] = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 + (k - 1)x + k^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt và cả 2 nghiệm đó đều khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ 3^2 + 3(k - 1) + k^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k - 1)^2 - 4k^2 > 0 \\ k^2 + 3k + 6 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3k^2 + 2k - 1 < 0 \\ k^2 + 3k + 6 \neq 0 \text{ (hiển nhiên)} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < k < \frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị của k để phương trình có 3 nghiệm phân biệt: $-1 < k < \frac{1}{3}$.

27. $(x - 1)(x^2 + kx + k - 1) = 0 \quad (1') \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + kx + (k - 1) = 0 \end{cases} \quad (2)$

Phương trình (1') có 2 nghiệm phân biệt và cùng âm $\Leftrightarrow$ phương trình (2') có 2 nghiệm phân biệt và cùng âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{\Delta_{(2)}}}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 4(k - 1) > 0 \\ x_2 = -1 < 0 \\ x_1 = 1 - k < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-2)^2 > 0 \\ x_2 = -1 < 0 \\ x_1 = 1-k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 1 \\ k \neq 2 \end{cases}$$

28. Ta có: $\Delta' = 9m^2 - 4$. Để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 cần và đủ là:

$$\Delta' = 9m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq \frac{4}{9} \Leftrightarrow |m| \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow m \leq -\frac{2}{3} \text{ hay } m \geq \frac{2}{3}.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{36m^2 - 8}{16} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow m^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow m = \pm \frac{4}{3}. \text{ Cả hai giá trị này của } m \text{ đều thỏa}$$

mãn điều kiện $|m| \geq \frac{2}{3}$.

Vậy các giá trị của m thỏa mãn điều kiện của bài toán là: $m = \pm \frac{4}{3}$.

29. Xét phương trình: $x^2 + 2mx + n = 0$.

$\Delta'_1 = m^2 - n \geq 0$ (do giả thiết phương trình (1) có nghiệm).

Xét phương trình (2), ta có:

$$\Delta'_2 = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 m^2 - n \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = (m^2 - n) \left(k + \frac{1}{k}\right)^2.$$

Do $m^2 - n = \Delta'_1 \geq 0$. Mặt khác, $\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta'_2 \geq 0$

Vậy, phương trình (2) cũng có nghiệm (đpcm).

30. a. Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $1 = 0$, nên phương trình vô nghiệm. Nếu $m \neq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm khi:

$$\Delta' = m^2 - m = m(m-1) \geq 0. \text{ Suy ra } m < 0 \text{ hoặc } m \geq 1 (*).$$

Khi đó các nghiệm của phương trình là:

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - m}}{m}; \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - m}}{m}.$$

b. Với điều kiện (*), phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo hệ thức Vi-et: $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = \frac{1}{m}$.

Theo giả thiết, ta có: $x_1 = 2x_2$ (hoặc $x_2 = 2x_1$), suy ra: $x_1 = \frac{4}{3}; x_2 = \frac{2}{3}$

(hoặc $x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{4}{3}$).

ABC

Suy ra: $x_1 x_2 = \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{8}{9} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{9}{8} > 1$, thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy với $m = \frac{9}{8}$ thì phương trình có một nghiệm gấp đôi nghiệm kia.

- 31.** Gọi x (giờ) và y (giờ) là thời gian để riêng vòi I và vòi II chảy đầy bể ($x > 0$; $y > 0$). Mỗi giờ vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Theo giả thiết thứ nhất, ta có phương trình: $\frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1$.

Theo giả thiết thứ hai, ta có phương trình: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{25}{100} \Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$.

Vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16u + 16v = 1 \\ 3u + 6v = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\text{với } u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}).$$

Giải hệ phương trình trên, ta được $(u; v) = \left(\frac{1}{24}; \frac{1}{48}\right)$.

Suy ra: $(x; y) = (24; 48)$ thỏa điều kiện bài toán. Vậy nếu chảy riêng, thì vòi I chảy đầy bể trong 24 giờ và vòi II chảy đầy bể trong 48 giờ.

- 32. a.** Để phương trình có hai nghiệm âm thì:

$$\begin{cases} \Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + m - 6) \geq 0 \\ x_1 x_2 = m^2 + m - 6 > 0 \\ x_1 + x_2 = 2m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 25 > 0 \\ (m-2)(m+3) > 0 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$$

- b.** Giải phương trình: $|(m-2)^3 - (m+3)^3| = 50$

$$\Leftrightarrow |5(3m^2 + 3m + 7)| = 50 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

3. Hệ phương trình

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số

Phương pháp giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp cộng đại số.

Cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

- * Nhân các vế của hai phương trình với số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- * Sử dụng quy tắc cộng đại số để thực hiện phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn số).
- * Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Cách 2: Sử dụng phương pháp thế. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương.

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

- + Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.
 - + Giải hệ phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.
- Nghiệm của hệ phương trình là cặp số (x, y) vừa tìm được.

Cách 3: Sử dụng phương pháp đồ thị.

Cách 4: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Dạng 2: Hệ phương trình đối xứng loại 1: Nếu ta thay đổi vai trò của x, y thì từng phương trình vẫn không thay đổi.

Phương pháp giải: Đưa về hệ phương trình theo 2 biến mới là:

$$\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases} \text{ với điều kiện } S^2 \geq 4P.$$

Dạng 3: Hệ phương trình đối xứng loại 2: Nếu ta thay đổi vai trò của x, y thì phương trình này chuyển thành phương trình kia.

Phương pháp giải: Trừ 2 phương trình với nhau để nhận được phương trình mới có dạng tích số

Chú ý: Hệ phương trình đối xứng loại 2 nếu có nghiệm thì có nghiệm (x_0, x_0) (tức là $x = y$). Nếu hệ phương trình có nghiệm (x, y) thì hệ phương trình cũng có nghiệm (y, x) .

Dạng 4: Hệ phương trình không mẫu mực

Dạng 5: Hệ phương trình có chứa tham số: Chuyển bài toán tìm điều kiện có nghiệm của hệ phương trình trở thành bài toán tìm điều kiện có nghiệm của phương trình (bằng phương pháp thế)

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số

Phương pháp giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp cộng đại số.

Cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

- * Nhận các vế của hai phương trình với số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- * Sử dụng quy tắc cộng đại số để thực hiện phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn số).
- * Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Cách 2: Sử dụng phương pháp thế. Quy tắc thế

— Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương.

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

- + Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới trong đó có một phương trình một ẩn.
- + Giải hệ phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho. Nghiệm của hệ phương trình là cặp số (x, y) vừa tìm được.

Cách 3: Sử dụng phương pháp đồ thị.

Cách 4: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (a) \\ 3x + 4y = -1 & (b) \end{cases}$$

Giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp thế

Từ phương trình (a) $\Rightarrow y = 1 - 2x$ (c). Thế phương trình (c) vào phương trình (b) ta được: $3x + 4(1 - 2x) = -1 \Leftrightarrow -5x = -5 \Leftrightarrow x = 1$.

Thế $x = 1$ vào phương trình (c) ta được $y = -1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$ và $y = -1$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp cộng đại số

$$\text{Hệ phương trình đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 4 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3 \cdot 1 + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x = 1; y = -1)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^3 - y^3 = 9 \end{cases}$

Giải:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 3 \\ x^3 - y^3 = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ (3 + y)^3 - y^3 = 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 27 + 27y + 9y^2 + y^3 - y^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ y^2 + 3y + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ y = -1 \text{ hay } y = -2 \text{ (vì } a - b + c = 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = -1 \\ x = 1; y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ phương trình có hai nghiệm là $(x = 2; y = -1)$ và $(x = 1; y = -2)$

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} xy = -64 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Giải:

a) Đặt $u = x + y; v = xy$, ta có: $x^2y + xy^2 = xy(x + y) = v.u$

Do đó $\begin{cases} u + v = 11 \\ v.u = 30 \end{cases}$; ta có u, v là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 11X + 30 = 0; \Delta = 11^2 - 4.1.30 = 1; \sqrt{\Delta} = 1$$

$$X_1 = \frac{11+1}{2} = 6; X_2 = \frac{11-1}{2} = 5. \text{ Do đó } \begin{cases} u = 6 \\ v = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases}$$

* Xét $\begin{cases} u = 6 \\ v = 5 \end{cases}$. Ta có $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases}$; do đó x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 6t + 5 = 0; \text{ Vì } a + b + c = 1 + (-6) + 5 = 0 \text{ nên } t_1 = 1; t_2 = \frac{c}{a} = 5$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

* Xét $\begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases}$; Ta có $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$; do đó x, y là nghiệm của phương trình

$$h^2 - 5h + 6 = 0; \Delta = 5^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1; \sqrt{\Delta} = 1$$

$$\text{Nên } h_1 = \frac{5+1}{2} = 3; h_2 = \frac{5-1}{2} = 2. \text{ Do đó } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

ABC

b. Điều kiện $x, y \neq 0$

$$\begin{cases} xy = -64 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{64} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{64} \\ \frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Do đó $\frac{1}{x}$ và $-\frac{1}{y}$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{64} = 0$

$$\Delta = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{64} = 0 \Rightarrow X_1 = X_2 = \frac{1}{8}; \text{ Ta có } \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{y} = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -8 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + xy = 2 + 3\sqrt{2} & (1) \\ y^2 + x^2 = 6 & (2) \end{cases}$

Giải:

$$\text{Ta có } y^2 + x^2 + 2(x + y + xy) = 6 + 2(2 + 3\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2xy + y^2) + 2(x + y) = 6 + 4 + 6\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + 2(x + y) + 1 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 = (3 + \sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 = 3 + \sqrt{2} \\ x + y + 1 = -3 - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 + \sqrt{2} & (3) \\ x + y = -4 - \sqrt{2} & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) có $xy = 2\sqrt{2}$. Suy ra

$$\begin{cases} xy = 2\sqrt{2} \\ x + y = 2 + \sqrt{2} \end{cases} \text{ nên } x, y \text{ là nghiệm của phương trình}$$

$$X^2 - (2 + \sqrt{2})X + 2\sqrt{2} = 0 \quad (*)$$

Giải phương trình (*) được: $X_1 = 2; X_2 = \sqrt{2}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

Từ (1) và (4) có $xy = 6 + 4\sqrt{2}$

Ta có: $(x - y)^2 = y^2 + x^2 - 2xy = 6 - 12 - 8\sqrt{2} = -6 - 8\sqrt{2} < 0$ (không thích hợp nên loại).

Nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |x+1| + \sqrt{y} = 5 \\ (x^2 + 2x + 1)y = 36 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện $y \geq 0$. Ta có $(x^2 + 2x + 1)y = 36 \Leftrightarrow |x+1|\sqrt{y} = 6$

Đặt $u = |x+1|$, $v = \sqrt{y}$ ($u \geq 0$, $v \geq 0$), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta có: $u = 2$, $v = 3$ hoặc $u = 3$, $v = 2$

Trường hợp: $u = 2$, $v = 3$ có: $(x = 1; y = 9)$ hoặc $(x = -3; y = 9)$

Trường hợp: $u = 3$, $v = 2$ có: $(x = 2; y = 4)$ hoặc $(x = -4; y = 4)$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $(1; 9)$, $(-3; 9)$, $(2; 4)$, $(-4; 4)$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |xy| - 2 = 4 - y^2 & (1) \\ xy = 1 + x^2 & (2) \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{cases} |xy| - 2 = 4 - y^2 & (1) \\ xy = 1 + x^2 & (2) \end{cases} \cdot \text{Từ (1)} \Rightarrow 4 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq y^2 \quad (3)$$

Từ (2) $\Rightarrow x^2 - yx + 1 = 0$. Để phương trình bậc hai ẩn x có nghiệm thì:

$$\Delta = y^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 4 \quad (4) \text{ Từ (3) và (4) suy ra: } y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

Thế vào (1) ta có: $x = \pm 1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x, y) = (1, 2); (-1, -2)$.

Dạng 2: Hệ phương trình đối xứng loại 1

Phương pháp giải: Đưa về hệ phương trình theo 2 biến mới là:

$$\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases} \text{ với điều kiện } S^2 \geq 4P.$$

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2 \end{cases} \quad (I)$$

Giải:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x, y) là: $(0; 1)$ và $(1; 0)$.

ABC

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$$

Giải:

Đây là hệ phương trình đối xứng loại 1, biến đổi về dạng:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x+y)^2 - xy = 7 \\ (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 7 \\ [(x+y)^2 - 2xy]^2 - x^2y^2 = 21 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 7 \\ [7-xy]^2 - x^2y^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 7 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 3 \\ xy = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $\{(1; 2), (2; 1), (-1; -2), (-2; -1)\}$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 12 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 28 \end{cases}$$

Đề TS lớp 10 Hàn Thuyên - Bắc Ninh (2002 – 2003)

Giải:

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 12 & (1) \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 28 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} = 36 & (3) \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 28 & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) + (4) về theo vế, ta được: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = 64 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

Từ (1) $\Rightarrow \sqrt{xy} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 12 \Rightarrow \sqrt{xy} = 3$

Từ (5) và (6) ta có $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 4X + 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

và $\sqrt{y} = 3 \Rightarrow y = 9$ Hoặc $\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$ và $\sqrt{y} = 1 \Rightarrow y = 1$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

Giải:

Đặt: $\begin{cases} x-y = u \\ xy = v \end{cases}$. Hệ phương trình (1) trở thành:
$$\begin{cases} u^2 - 3u + v = 0 \\ v = 2u^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 - 3u = 0 \\ v = 2u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - x^2 \cdot y^2 + y^4 = 13 \end{cases} \quad (1)$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: (1)} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - x^2 \cdot y^2 + y^4 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ (x^2 + y^2)^2 - 3x^2 \cdot y^2 = 13 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 \cdot y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy ta có hệ phương trình có các nghiệm

$$(x, y) \in \{(1, 2); (1, -2); (-1, 2); (-1, -2); (2, 1); (2, -1); (-2, 1); (-2, -1)\}.$$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y - xy = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Giải:

$$\begin{aligned} 1. \quad \begin{cases} x - y - xy = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - y) + 1 - y = 0 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(1 - y) = 0 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \vee y = -2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \vee x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm là $(-1; 1), (-1; -2), (2; 1)$

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^5 + y^5 = 11 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Vì } x + y = 1, \text{ ta có: } x^5 + y^5 &= (x^5 + x^2y^3 + x^3y^2 + y^5) - (x^2y^3 + x^3y^2) \\ &= (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x^2y^2(x + y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2) - x^2y^2 \\ &= ((x + y)^2 - 3xy)((x + y)^2 - 2xy) - x^2y^2 = 5(xy)^2 - 5xy + 1 = 11. \text{ Do đó} \\ x^5 + y^5 = 11 &\Leftrightarrow 5(xy)^2 - 5xy - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow (xy)^2 - xy - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -1 \\ xy = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

ABC

Suy ra hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ hay

x, y là nghiệm của hai phương trình $t^2 - t - 1 = 0$ hoặc $t^2 - t + 2 = 0$.

Phương trình $t^2 - t + 2 = 0$ vô nghiệm

Phương trình $t^2 - t - 1 = 0$ có hai nghiệm là $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$

Giải:

Đặt $x + y = S, x.y = P$, khi đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} S^2 - P = 4 \\ S + P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S - 6 = 0 \\ P = 2 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = 2 \\ P_1 = 0 \end{cases} \quad (1) \text{ hoặc } \begin{cases} S_2 = -3 \\ P_2 = 5 \end{cases} \quad (2)$$

Với $S_1 = 2, P_1 = 0$ ta có $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Với $\begin{cases} S_2 = -3 \\ P_2 = 5 \end{cases}$, ta có hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x + y) = 23 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$

Giải:

Đặt $u = x + y, v = xy$. Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2 + 2u - 2v = 23 \\ u + v = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 2u - 2(11 - u) = 23 \\ v = 11 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 4u - 45 = 0 \\ v = 11 - u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} u = -9 \\ v = 20 \end{cases}$$

Giải từng hệ phương trình ta được $\begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (2, 3) \vee (3, 2)$

$$\begin{cases} u = -9 \\ v = 20 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-4, -5) \vee (-5, -4)$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(2, 3); (3, 2); (-4, -5); (-5, -4)$.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 29 \\ xyz = -24 \\ xy - 2x - 3y = -6 \\ y > 2 \end{cases}$$

Giải:

Từ phương trình $xy - 2x - 3y = -6 \Rightarrow (x - 3)(y - 2) = 0$

do $y > 2 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.

Thay $x = 3$ vào các phương trình đầu và phương trình thứ 2 của hệ ta

được:
$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 20 \\ yz = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y + z)^2 = 4 \\ yz = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = \pm 2 \\ yz = -8 \end{cases}$$

Với $y + z = -2$ mà $yz = -8 \Rightarrow y = 2$ hoặc $y = -4$ (loại)

Với $y + z = 2$ mà $yz = -8 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$ do đó $x = 3$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x, y, z) = (3, 4, -2)$

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$$

Giải:

Đặt $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y} \Rightarrow$ hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 + b^2 - 4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ (a + b)^2 - 2ab = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b) = (2, 3) \\ (a, b) = (3, 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ y + \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \bullet \quad \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 3 \\ y + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm (x, y) là:

$$\left(1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right); \left(1; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 1\right); \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 1\right).$$

Dạng 3: Hệ phương trình đối xứng loại 2

Phương pháp giải: Trừ 2 phương trình với nhau để nhận được phương trình mới có dạng tích số

Chú ý: Hệ phương trình đối xứng loại 2 nếu có nghiệm thì có nghiệm (x_0, x_0) (tức là $x=y$). Nếu hệ phương trình có nghiệm (x, y) thì hệ phương trình cũng có nghiệm (y, x) .

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y = 8 \\ y^2 - 2x = 8 \end{cases}$$

Giải:

Trừ vế theo vế, ta có:

$$(x^2 + 2y) - (y^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y+2) = 0$$

* Nếu $x+y=0$, thay $y=-x$ vào phương trình đầu thì:

$x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$. Giải ra: $x=4$; $x=-2$. Trường hợp này hệ phương trình có hai nghiệm: $(x; y) = (4; -4)$; $(x; y) = (-2; 2)$

* Nếu $x-y+2=0$, thay $y=x+2$ vào phương trình đầu thì:

$$x^2 + 2(x+2) = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0. \text{ Giải ra: } x = -1 - \sqrt{5}; x = -1 + \sqrt{5}$$

Trường hợp này hệ phương trình có hai nghiệm:

$$(x; y) = (-1 - \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}); (x; y) = (-1 + \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}).$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y & (1) \\ y^3 + 1 = 2x & (2) \end{cases}$$

Giải:

Từ hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$$
 suy ra $x^3 - y^3 = 2(y - x)$

$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 2) = 0 \Leftrightarrow y = x$. Thay vào phương trình (1) ta được $x^3 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là:

$$(x = 1; y = 1), \left(x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right).$$

Dạng 4: Hệ phương trình có chứa tham số

Chuyển bài toán tìm điều kiện có nghiệm của hệ phương trình trở thành bài toán tìm điều kiện có nghiệm của phương trình (bằng phương pháp thế)

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 2 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình khi $a = 2$.

b. Tìm a sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất

Giải:

a. Khi $a = 2$ ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

b. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $\frac{1}{a} \neq \frac{a}{1} \Leftrightarrow a \neq \pm 1$.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - my = -3 \\ mx + 3y = 4 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

b. Với giá trị nguyên nào của m thì hệ phương trình có nghiệm $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $x_0 < 0$ và $y_0 > 0$

Giải:

a. Khi $m = 1$, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{11}{7} \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2x - my = -3 & (1) \\ mx + 3y = 4 & (2) \end{cases}$$
. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế ta có:

$$x = \frac{4m - 9}{m^2 + 6}; y = \frac{3m + 8}{m^2 + 6}. \text{ Vì } m^2 + 6 > 0 \text{ với mọi } m \text{ nên } x < 0 \text{ khi}$$

$$4m - 9 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}; y > 0 \text{ khi } 3m + 8 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{8}{3}$$

Kết hợp hai điều kiện trên ta có các số nguyên m thỏa mãn đề bài là: $-2, -1, 0, 1, 2$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm $x > 0, y < 0$

$$\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 15x - 3y = 3 \end{cases} \quad (*)$$

Giải:

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = m \\ 17x = m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+3}{17} \\ 3y = m - \frac{2(m+3)}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+3}{17} \\ 3y = \frac{15m-6}{17} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+3}{17} \\ y = \frac{5m-2}{17} \end{cases} \cdot \text{Giải hệ bất phương trình: } \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+3}{17} > 0 \\ \frac{5m-2}{17} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ 5m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m < \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < \frac{2}{5}.$$

Các giá trị trên của m làm hệ phương trình đã cho có nghiệm $x > 0, y < 0$.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (a+1)x + y = 3 \\ ax + y = a \end{cases} \quad (*)$

a. Giải hệ phương trình với $a = -\sqrt{2}$.

b. Xác định giá trị của a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện $x + y > 0$.

Giải:

a. Với $a = -\sqrt{2}$, được hệ phương trình: $\begin{cases} (-\sqrt{2} + 1)x - y = 3 \\ -\sqrt{2}x + y = -\sqrt{2} \end{cases}$

$$\text{Giải ra được nghiệm } (x; y) = \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}}, \frac{2(1 + \sqrt{2})}{1 - 2\sqrt{2}} \right).$$

b. Cộng hai vế của hệ phương trình, ta được: $(2a + 1)x = a + 3 \quad (1)$

Hệ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 2a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -\frac{1}{2}$.

Xét $a \neq -\frac{1}{2}$, ta có (1) có nghiệm $x = \frac{a+3}{2a+1}$.

$$\text{Từ đó } y = a - ax = a - a \cdot \frac{a+3}{2a+1} = \frac{a^2 - 2a}{2a+1}$$

Vậy nếu $a \neq -\frac{1}{2}$ hệ có nghiệm duy nhất: $x = \frac{a+3}{2a+1}; y = \frac{a^2 - 2a}{2a+1}$.

$$S = x + y = \frac{a^2 - a + 3}{2a + 1} = \frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}{2a + 1} > 0 \Leftrightarrow 2a + 1 > 0 \text{ hay } a > -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 5: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + my = -3 & (1) \\ (1 - m)x + y = 0 & (2) \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình với $m = 2$.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm ($x < 0$; $y < 0$).

Giải:

a. Với $m = 2$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y = -3 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\frac{3}{2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{3}{2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ hệ phương trình có nghiệm là $\left(x = -\frac{3}{4}; y = -\frac{3}{4}\right)$

$$\begin{aligned} \text{b. } \begin{cases} mx + my = -3 \\ (1 - m)x + y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} mx + my = -3 \\ y = -(1 - m)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx - m(1 - m)x = -3 \\ y = -(1 - m)x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (m - m + m^2)x = -3 \\ y = -(1 - m)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2x = -3 \\ y = -(1 - m)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{m^2} \\ y = -(1 - m)\frac{-3}{m^2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy $m > 1$ là giá trị cần tìm.

Dạng 5: Hệ phương trình không mẫu mực

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 5x + y = 0 \\ x - \sqrt{y} + 1 = 0 \end{cases}$

Giải:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + y = 0 \\ x - \sqrt{y} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + y = 0 & (1) \\ \sqrt{y} = x + 1 & (2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình xác định với $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$$\sqrt{y} = x + 1 \Rightarrow y = x^2 + 2x + 1$$

Thay vào (1) ta được: $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{1}{2}$ (vì $a + b + c = 0$)

ABC

Thay vào (3) có $y_1 = 4; y_2 = \frac{9}{4}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x = 1; y = 4), \left(x = \frac{1}{2}, y = \frac{9}{4}\right)$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 1 \\ x^9 + y^9 = x^4 + y^4 \end{cases}$$

Giải:

Phương trình $x^9 + y^9 = x^4 + y^4 \Leftrightarrow x^4(1 - x^5) + y^4(1 - y^5) = 0$

Do $x^5 + y^5 = 1$, ta có: $x^4 \cdot y^5 + y^4 \cdot x^5 = 0 \Leftrightarrow x^4 y^4 (y + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = -x \end{cases}$

Với $y = -x \Rightarrow x^5 + y^5 = 0$ trái với phương trình $x^5 + y^5 = 1$ (loại)

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$; Với $y = 0 \Rightarrow x = 1$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(0; 1)$ và $(1; 0)$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x - y)^2 y = 2 \\ x^3 - y^3 = 19 \end{cases}$$

Giải:

Do $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình nên đặt $x = ty$ ta được:

$$\begin{cases} (t - 1)^2 y^3 = 2 \\ (t^3 - 1)y^3 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - 1)^2 y^3 = 2 \quad (1) \\ \frac{t^3 - 1}{(t - 1)^2} = \frac{19}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (2) $\Leftrightarrow 2(t^2 + t + 1) = 19(t - 1)$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 17t + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{\sqrt[3]{18}}, y = \frac{1}{\sqrt[3]{18}} \\ t = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 3, y = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \quad (1) \\ x^3 + y^3 = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Giải:

Từ phương trình (1) suy ra $-1 \leq x, y \leq 1$. (3)

Từ hệ phương trình suy ra $(x^2 - x^3) + (y^2 - y^3) = 0$.

Do (3) nên vế phải của (4) là tổng của hai số hạng không âm vậy
$$\begin{cases} x^2 - x^3 = 0 \\ y^2 - y^3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x = 0, y = 0), (x = 0, y = 1), (x = 1, y = 0), (x = 1, y = 1)$.

Thử lại ta thấy $(x = 0, y = 1), (x = 1, y = 0)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện: $xy \neq 0$. Ta có $(1) \Leftrightarrow (x - y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = -1 \end{cases}$

Trường hợp 1: $\begin{cases} x = y \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x = x^3 + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Trường hợp 2:

$\begin{cases} xy = -1 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ -\frac{2}{x} = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ x^4 + x + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$

Ta chứng minh phương trình (4) vô nghiệm.

Cách 1. $x^4 + x + 2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} > 0, \forall x$

Cách 2. Đặt $f(x) = x^4 + x + 2 \Rightarrow f(x) \geq \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}\right) > 0$

Trường hợp này hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$(x; y) = (1; 1), \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right).$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} & (1) \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$. Khi đó hệ phương trình đã cho

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(3xy + x + y) = 0 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases}$

ABC

Trường hợp 1: $\begin{cases} x = y \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 3xy + x + y = 0 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \end{cases}$. Hệ phương trình này vô nghiệm, vì từ (1) và (2) ta có $x, y > 0$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $x = y = 1$.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 13 \\ (x+y)(x^2-y^2) = 25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải:

Cách 1: $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 13 \\ (x+y)(x^2-y^2) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 13 \quad (1) \\ (x-y)(x+y)^2 = 25 \quad (2) \end{cases}$

$(2) - (1) \Rightarrow (x-y)2xy = 12 \quad (3); \quad (1) - (3) \Rightarrow (x-y)^3 = 1 \quad (4)$

Do đó hệ phương trình tương đương với:

$\begin{cases} (x-y)^3 = 1 \\ (x+y)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=\pm 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x;y) = (3;2) \\ (x;y) = (-2;-3) \end{cases}$

Cách 2: Hệ phương trình tương đương:

$\begin{cases} x^3 + xy^2 - yx^2 - y^3 = 13 \quad (1) \\ x^3 - xy^2 + yx^2 - y^3 = 25 \quad (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)[(x-y)^2 + 3xy] = 19 \\ xy(x-y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^3 + 3xy(x-y) = 19 \\ xy(x-y) = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ xy(x-y)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ (y+1)y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Giải:

Điều kiện: $x \geq -1, y \geq -1, xy \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{xy} \quad (t \geq 0)$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ phương trình suy ra: $x+y = 3+t$.

Bình phương hai vế của phương trình thứ hai ta có:

$x+y+2+2\sqrt{xy}+x+y+1 = 16 \quad (2).$

Thay $xy = t^2, x+y = 3+t$ vào (2) ta được:

$3+t+2+2\sqrt{t^2+3+t+1} = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+t+4} = 11-t$

ABC
82

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ 4(t^2 + t + 4) = (11 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ 3t^2 + 26t - 105 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3.$$

Với $t = 3$ ta có $x + y = 6$, $xy = 9$.

Suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (3; 3)$.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải:

$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2(4x + y) & (1) \\ x^2 - 3y^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta có: $3(x^3 - y^3) = 6(4x + y)$

$$\Leftrightarrow 3(x^3 - y^3) = (x^2 - 3y^2)(4x + y) \Leftrightarrow x^3 + x^2y - 12xy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 3y \text{ hay } x = -4y$$

* $x = 0 \Rightarrow -3y^2 = 6$ vô nghiệm.

* $x = 3y$ thay vào (2) hệ phương trình hai nghiệm $(3; 1)$ và $(-3; -1)$.

* $x = -4y$ thay vào (2) hệ phương trình có nghiệm $\left(-4\sqrt{\frac{6}{13}}; \sqrt{\frac{6}{13}}\right)$ hay

$$\left(4\sqrt{\frac{6}{13}}; -\sqrt{\frac{6}{13}}\right).$$

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2 + 1) + y(y + x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải:

$$\begin{cases} (x^2 + 1) + y(y + x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Khi } y = 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ (x^2 + 1)(x - 2) = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này vô nghiệm.

Khi $y \neq 0$ chia hai phương trình cho y

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + y + x - 2 = 2 \\ \frac{x^2 + 1}{y}(y + x - 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + y + x - 2 = 2 \\ (y + x - 2)^2 - 2(y + x - 2) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + x - 2 = 1 \\ x^2 + 1 = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

ABC

Cách khác: Thay y của phương trình sau vào phương trình đầu ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + (x^2 + 1)(y + x - 2)(y + x) = 4(x^2 + 1)(y + x - 2) \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + (y + x - 2)(y + x) = 4(y + x - 2) \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases}$$

(chia 2 vế của phương trình đầu cho $1 + x^2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + (y + x - 2)(y + x - 2 + 2) = 4(x^2 + 1)(y + x - 2) \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + x - 2 = 1 \\ x^2 + 1 = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Bài tập vận dụng

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \left(1 - \frac{12}{y + 3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \frac{12}{y + 3x}\right)\sqrt{y} = 6 \end{cases} \quad (1)$$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |2x - y - 2|y - x| = 1 \\ 3|2x - y| + |x - y| = 10 \end{cases} \quad (1)$$

3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases}$$

4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - y\sqrt{x \cdot y} = 36 \\ y^2 - x\sqrt{x \cdot y} = 72 \end{cases}$$

5. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3 - (y + 1)^2 = \sqrt{x - y} \\ x + 8y = \sqrt{x - y - 9} \end{cases}$$

6. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1 \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2 \end{cases}$$

7. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x - 2y} + x + 2y = 5 \\ \frac{x + 2y}{x - 2y} = 6 \end{cases}$$

8. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37 \\ y^2 + z^2 + yz = 19 \\ z^2 + x^2 + zx = 28 \end{cases}$$

9. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 2 \end{cases}$$
10. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$
11. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$
12. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \end{cases}$$
13. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+2)(2x+y) = 9 \\ x^2 + 4x + y = 6 \end{cases}$$
14. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 1 - 2xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
15. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 & (1) \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$
16. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y)^2 + 3(x-y) = 4 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$
17. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - y = 1 \end{cases}$$
18. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy \\ (x-1)\sqrt{y} + (y-1)\sqrt{x} = \sqrt{2xy} \end{cases}$$
19. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + yz + zx = 27 \end{cases}$$
20. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = m \end{cases}$$
- a. Giải hệ phương trình khi $m = 24$.
- b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

ABC

Hướng dẫn và đáp số

1. Điều kiện: $x, y \geq 0$. Nhận xét với $x = 0, y = 0$ không phải là nghiệm của

$$\text{hệ phương trình (I). Hệ phương trình (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{12}{y+3x} = \frac{2}{\sqrt{x}} & (1) \\ 1 + \frac{12}{y+3x} = \frac{6}{\sqrt{y}} & (2) \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được: $1 = \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ (3). Trừ vế theo vế ta được:

$$\frac{12}{y+3x} = \frac{3}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (4). \text{ Nhân (3) và (4) vế theo vế ta được:}$$

$$\frac{12}{y+3x} = \frac{9}{y} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow (3x-y)(9x+y) = 0 \Leftrightarrow 3x = y \quad (5).$$

Thay (5) vào (1) thu được $1 - \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$,

nên: $x = 4 + 2\sqrt{3}$ suy ra $y = 12 + 6\sqrt{3}$. Thử lại đúng.

Vậy ta có cặp nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = 12 + 6\sqrt{3} \end{cases}$

Cách khác: Ngoài cách trên ta còn có cách khác:

Đặt: $\frac{12}{3x+y} = a$. Ta có $(1-a)\sqrt{x} = 2$ do đó $0 < a < 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{1-a} \Leftrightarrow x = \frac{4}{(1-a)^2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{6}{1+a} \Leftrightarrow y = \frac{36}{(1+a)^2}. \text{ Theo cách đặt } a \text{ ta suy ra:}$$

$$3x + y = \frac{12}{a} \Leftrightarrow \frac{12}{(1-a)^2} + \frac{36}{(1+a)^2} = \frac{12}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{(1-a)^2} + \frac{3}{(1+a)^2} = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 2a^2 - 4a + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} - 4\left(a + \frac{1}{a}\right) + 2 = 0.$$

Đặt: $t = a + \frac{1}{a}$ suy ra $|t| \geq 2$.

Ta có: $t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$ dễ thấy $t = 0$ loại.

$$\text{Suy ra: } a + \frac{1}{a} = 4 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + \sqrt{3} \\ a = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện ta được $a = 2 - \sqrt{3}$ thỏa mãn. Suy ra

$$\begin{cases} x = \frac{4}{(1-a)^2} = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = \frac{36}{(1+a)^2} = 12 + 6\sqrt{3} \end{cases} \text{ . Thử lại đúng .}$$

$$2. (1) \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - y| - 2|y - x| = 1 \\ 6|2x - y| + 2|x - y| = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - y| = 3 \\ |x - y| = 1 \end{cases}$$

Xảy ra các trường hợp sau

$$\begin{aligned} \text{a. } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \\ \text{c. } \begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases} & \text{d. } \begin{cases} 2x - y = -3 \\ y - x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm (x, y) là: $(2; 1)$, $(4; 5)$, $(-4; -5)$, $(-2; -1)$

$$3. \text{ Hệ phương trình: } \begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-x^2 + xy)^2 + x^3y = 1 \\ (-x^2 + xy) + x^3y = 1 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $u = -x^2 + xy$; $v = x^3y$. Hệ phương trình (I) thành

$$\begin{cases} u^2 + v = 1 \\ u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -u + 1 \\ u^2 - u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \\ u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

Do đó hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} -x^2 + xy = 0 \\ x^3y = 1 \\ -x^2 + xy = 1 \\ x^3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^4 = 1 \\ y = 0 \\ x^2 = -1 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

4. Hệ phương trình đã cho tương đương với tuyển của 2 hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ \sqrt{x}(\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}) = 36 \\ \sqrt{y}(\sqrt{y^3} - \sqrt{x^3}) = 72 \end{cases} \text{ . Vì vế trái của các phương trình trái dấu nhau}$$

hoặc có thể nhận giá trị 0 nên hệ phương trình trên không có nghiệm.

ABC

$$b) \begin{cases} x \leq 0; y \leq 0 \\ \sqrt{(-x)}(\sqrt{(-x^3)} + \sqrt{(-y^3)}) = 36 \\ \sqrt{(-y)}(\sqrt{(-y^3)} + \sqrt{(-x)^3}) = 72 \end{cases} \text{ . Từ đây } \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}} = \frac{1}{2}; \sqrt{-y} = 2\sqrt{-x}, \text{ thay vào}$$

phương trình, ta nhận được $\sqrt{x^4} = 4$, hay $x = -2$ (vì chỉ xét $x \leq 0$). Từ đây có $y = -8$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(-2; -8)$.

5. Ta viết phương trình thứ nhất của hệ phương trình thành:

$$-(y+1)^2 = \sqrt{x-y} - 3 \Rightarrow \sqrt{x-y} - 3 \leq 0$$

$\Leftrightarrow 0 \leq x-y \leq 9$ nhưng từ phương trình thứ 2 của hệ phương trình, ta có $x-y-9 \geq 0$ do đó $x-y=9 \Rightarrow x=y+9$. Thay vào phương trình 2 của hệ phương trình, sẽ được: $y+9+8y=0 \Rightarrow y=-1$ và ta được $x=y+9=8$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(8; -1)$

$$6. \begin{cases} \sqrt{x+y-1}=1 \\ \sqrt{x-y+2}=2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=1 \\ \sqrt{x-y+2}=2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ \sqrt{x-y+2}=2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ \sqrt{2x}=2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x+y=2 \\ 2x^2-5x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

7. Đặt $u = \frac{1}{x-2y}$; $v = x+2y$, điều kiện $x \neq \pm 2y$

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u.v=6 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \right)$$

Tương ứng với các giá trị u, v tìm được, ta có: $\begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ y=\frac{5}{8} \end{cases}$ và $\begin{cases} x=\frac{7}{6} \\ y=\frac{5}{12} \end{cases}$

8. Để thỏa mãn hệ phương trình, x, y, z phải phân biệt nhau từng đôi một.

Nhân các vế của ba phương trình lần lượt cho $x-y, y-z, z-x$ rồi cộng lại ta được:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 37(x-y) \\ y^3 - z^3 = 19(y-z) \\ z^3 - x^3 = 28(z-x) \end{cases} \text{ . Từ hệ trên ta có } x-2y+z=0 \Rightarrow z=2y-x,$$

thay vào các phương trình thứ hai, thứ ba của hệ thì được:

ABC
88

$$\begin{cases} 7y^2 + x^2 - 5xy = 19 \\ 4y^2 + x^2 - 2xy = 28 \end{cases}$$

Đặt $y = tx$ ta có $\begin{cases} x^2(7t^2 - 5t + 1) = 19 \\ x^2(4t^2 - 2t + 1) = 28 \end{cases}$

Suy ra $\frac{7t^2 - 5t + 1}{19} = \frac{4t^2 - 2t + 1}{28} \Leftrightarrow 40t^2 - 34t + 3 = 0$, từ đó

$$t = \frac{3}{4} \text{ hay } t = \frac{1}{10}.$$

* Thay $t = \frac{3}{4}$, ta tính được $x = 4$ hay $x = -4$, các giá trị nghiệm tương ứng là $(x; y; z) = (4; 3; 2)$ và $(x; y; z) = (-4; -3; -2)$.

* Thay $t = \frac{1}{10}$, ta tìm được các nghiệm:

$$(x; y; z) = \left(\frac{10}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{8}{\sqrt{3}} \right) \text{ và } (x; y; z) = \left(-\frac{10}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{3}} \right).$$

9. Đặt $X = \frac{1}{x}$; $Y = \frac{1}{y}$ ($x > 0$; $y > 0$).

Ta có: $\sqrt{X} + \sqrt{2 - Y} = \sqrt{Y} - \sqrt{2 - X}$. Nhận thấy:

* Nếu $X > Y$ thì $\sqrt{X} + \sqrt{2 - Y} > \sqrt{Y} - \sqrt{2 - X}$.

* Nếu $X < Y$ thì $\sqrt{X} + \sqrt{2 - Y} < \sqrt{Y} - \sqrt{2 - X}$.

Vậy phải có $X = Y$.

Với $X = Y$, ta có: $\sqrt{X} + \sqrt{2 - X} = 2 \Leftrightarrow X + (2 - X) + 2\sqrt{X(2 - X)} = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{X(2 - X)} = 1 \Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow X = Y = 1$$

Từ đó $x = y = 1$.

10. $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2 + xy - 3) = 0 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases} \quad (1)$

a) Hặc $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = y = \pm \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$

b) Hặc $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases} \quad (3)$

Từ (4) suy ra $|x| \leq 1, |y| \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1, y^2 \leq 1, xy \leq 1$

Vậy (3) (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 = xy = 1 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ vô nghiệm

ABC

Hệ phương trình (1), (2) có hai nghiệm: $x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$; $x_2 = y_2 = -\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$.

11. Từ hệ phương trình suy ra điều kiện cần là $0 \leq x^2, y^2 \leq 1$.

Trừ từng vế ta được:
$$\begin{cases} x^4(1-x^2) + y^4(1-y^2) = 0 & (1) \\ x^4 + y^4 = 1 & (2) \end{cases}$$

Do $0 \leq x^2, y^2 \leq 1$ nên phương trình (1) dẫn tới hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4(1-x^2) = 0 & (1a) \\ y^4(1-y^2) = 0 & (1b) \end{cases}$$
 . Kết hợp hệ (1a), (1b) với phương trình (2) ta được

các nghiệm của hệ phương trình là:
$$\begin{cases} x = 0, y = \pm 1 \\ x = \pm 1, y = 0 \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} x + y = 4 & (1) \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 & (2) \end{cases}$$
 . Thế $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 16 - 2xy$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 4((x + y)^2 - 3xy) = 4(16 - 3xy)$$

vào phương trình (2) ta có:

$$(16 - 2xy)(16 - 3xy) = 280 \Leftrightarrow (8 - xy)(16 - 3xy) = 35$$

$$\Leftrightarrow 3(xy)^2 - 40xy + 93 = 0$$
 .

Đặt $xy = v$, dễ dàng giải phương trình này ta được $v = 3$ hoặc $v = \frac{31}{3}$

* Nếu $v = xy = 3$, kết hợp với $x + y = 4$, ta được
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

* Nếu $\begin{cases} \frac{31}{3} = xy \\ 4 = x + y \end{cases} \Rightarrow 4xy > (x + y)^2$ vô lý.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

13. Hệ phương trình
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 2x)(2x + y) = 9 \\ (x^2 + 2x) + (2x + y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x = 1; y = 1), (x = -3, y = 9)$

14. Hệ phương trình
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - 2xy \\ (x + y)^2 - 2xy = 1 \end{cases}$$
 . Đặt $x + y = u, xy = v$

$$u^2 - 2v - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = -2 \\ v = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 4xy > (x+y)^2, \text{ vô lý. Hệ phương trình này vô nghiệm}$$

$$15. \begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 & (1) \\ y^3 + x^2y + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

* Xét $x = 0$ thì $y = 0$, hệ phương trình có một nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

* Xét $x \neq 0$, nhân hai vế của (2) với x rồi trừ cho (1) ta có:

$$x^3y + 2y - x^2 = 0 \Rightarrow y(x^3 + 2) = x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \quad (\text{vì } x^3 + 2 \neq 0)$$

$$\text{Thay vào (1) ta có: } x \left(\frac{x^2}{x^3 + 2} \right)^2 - 2 \left(\frac{x^2}{x^3 + 2} \right) + 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{(x^3 + 2)^2} - \frac{2}{x^3 + 2} + 3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2(x^3 + 2) + 3(x^3 + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^3 - 4 + 3x^6 + 12x^3 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^6 + 11x^3 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 1)(3x^3 + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 0 \\ 3x^3 + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = -1 \\ x^3 = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \sqrt[3]{-\frac{8}{3}} \end{cases}$$

$$* x = -1, \text{ ta có } y = \frac{(-1)^2}{(-1)^3 + 2} = 1$$

$$* x = \sqrt[3]{-\frac{8}{3}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{3}}, \text{ ta có: } y = -\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$$

$$\text{Nghiem của hệ phương trình là: } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{-2}{\sqrt[3]{3}} \\ y=\frac{-6}{\sqrt[3]{9}} \end{cases}$$

$$16. \text{Đặt } x - y = a \text{ ta được phương trình: } a^2 + 3a = 4 \Rightarrow a = -1; a = -4$$

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} (x-y)^2 + 3(x-y) = 4 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y=1 \\ 2x+3y=12 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x-y=-4 \\ 2x+3y=12 \end{cases} & (2) \end{cases}$$

ABC

Giải hệ (1) ta được: $x = 3, y = 2$. Giải hệ (2) ta được: $x = 0; y = 4$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $x = 3, y = 2$ hoặc $x = 0; y = 4$

17. 1/ Đặt $X = x^2 > 0$, ta có:
$$\begin{cases} X + 3y = 1 \\ 3X - y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X + 3y = 1 \\ 3X - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + 3y = 1 \\ 10y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Ta có: $x^2 = X = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}$. Vậy, hệ phương trình có hai nghiệm:

$$\left(x = \frac{\sqrt{10}}{5}; y = \frac{1}{5} \right), \left(x = -\frac{\sqrt{10}}{5}; y = \frac{1}{5} \right).$$

18.
$$\begin{cases} x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy & (1) \\ (x-1)\sqrt{y} + (y-1)\sqrt{x} = \sqrt{2xy} & (2) \end{cases}$$

• Điều kiện: $x, y \geq 1$. (1) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} = 1$.

• Vì $(\sqrt{y-1} - 1)^2 = y - 2\sqrt{y-1} \geq 0$, suy ra: $\frac{\sqrt{y-1}}{y} \leq \frac{1}{2}$ và suy ra

$\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$. Do đó: $\frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq 1$.

• Nên (1) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{y-1}}{y} = \frac{1}{2}$ và $\frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{1}{2}$.

Vậy
$$\begin{cases} \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

• Thử lại: (2) thỏa, vậy hệ có nghiệm là: $(x = 2; y = 2)$.

19.
$$\begin{cases} x + y + z = 9 & (1) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 & (2) \text{ Điều kiện xác định: } x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0. \\ xy + yz + zx = 27 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x + y + z)^2 = 81 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 81$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 81 - 2(xy + yz + zx) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 27$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (xy + yz + zx) \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 0$$

ABC
92

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ (y-z)^2 = 0 \\ (z-x)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Thay vào (1) $\Rightarrow x = y = z = 3$.

Ta thấy $x = y = z = 3$ thỏa mãn hệ phương trình.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = z = 3$.

20. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = m \end{cases} \quad (A)$$

a. Khi $m = 24$ thì (A) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = 24 \end{cases} \quad (B)$

Đặt $u = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1$ và $v = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1 \geq -1$

Ta được (B) $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ uv = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 8 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u = 8 \\ v = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 4 \\ (y+1)^2 = 9 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (x+1)^2 = 9 \\ (y+1)^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 - 1 \\ y = \pm 3 - 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \pm 3 - 1 \\ y = \pm 2 - 1 \end{cases}$

Vậy khi $m = 24$ thì (A) có các nghiệm (x, y) là:

$(1; -2), (1; -4), (-3; -4), (2; 1), (2; -3), (-4; 1), (-4; -3)$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm

Đặt $u = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ và $v = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \geq 0$

Ta được (A) trở thành:

$$\begin{cases} u + v = 13 \\ (u-1)(v-1) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 13 \\ uv - (u+v) + 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 13 \\ uv = m + 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow u, v$ lần lượt là các nghiệm của phương trình $X^2 - 13X + m + 12 = 0$ (C)

Do đó: (A) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (C) có 2 nghiệm $X_1, X_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 121 - 4m \geq 0 \\ m + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{121}{4} \\ m \geq -12 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq m \leq \frac{121}{4}.$$

ABC

4. Phương trình qui về phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai

Phương pháp chung

1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu số

Cách giải :

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Qui đồng mẫu số, biến đổi đưa về phương trình bậc hai .

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm .

2. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Cách giải:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Khử dấu giá trị tuyệt đối, biến đổi đưa về phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai

Bước 3: Giải phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm

3. Phương trình bậc cao

Để giải các phương trình bậc cao, thông thường người ta sẽ sử dụng một trong các phương pháp sau

1. Phương pháp đưa về dạng tích.

2. Phương pháp đặt ẩn số phụ.

3-1. Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Cách giải: Bước 1: Đặt $x^2 = t \geq 0$.

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai .

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm

3-2. Phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$ với $a+d = b+c$.

Cách giải:

Bước 1: Đặt $t = x^2 + (a+d)x + k = x^2 + (b+c)x + k$ với $k = \frac{1}{2}(ad - bc)$

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai .

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện hoặc thử lại và kết luận nghiệm.

3-3. Phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ với $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$; $e \neq 0$.

Cách giải: Bước 1: Đặt $t = x + \frac{d}{bx} \Rightarrow t^2 = \left(x + \frac{d}{bx}\right)^2 = x^2 + 2\frac{d}{b} + \left(\frac{d}{bx}\right)^2$

$$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{d}{bx}\right)^2 = t^2 - 2\frac{d}{b}$$

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện hoặc thử lại và kết luận nghiệm.

3-4. Phương trình bậc 4 dạng: $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$

Cách giải: Đặt $y = x + \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow x+a = y + \frac{a-b}{2}; x+b = y - \frac{a-b}{2}$

Đưa phương trình trên về phương trình trùng phương ẩn y đã biết cách giải.

4. Phương trình chứa căn thức

Cách giải:

1. Phương pháp thứ nhất:

Sử dụng phép biến đổi tương đương để đưa về các dạng cơ bản của phương trình đại số.

Dùng phép biến đổi tương đương hay phép khử căn thức đối với phương

trình chứa căn thức: Ta có $\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases} n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x)$$

2. Phương pháp thứ hai: Biến đổi đưa về phương trình tích.

Để giải một phương trình nói chung, phương trình chứa căn thức nói riêng, người ta thường sử dụng phương pháp đưa về phương trình tích với dạng như sau: $f(x).g(x).h(x) = 0$. Trong đó các phương trình

$f(x) = 0; g(x) = 0; h(x) = 0$, là những phương trình đơn giản, đã biết phương pháp giải như phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai...

Nghiệm của phương trình cần giải là tập nghiệm của các phương trình:

$$f(x) = 0, g(x) = 0, \dots, h(x) = 0$$

3. Phương pháp thứ ba: Phương pháp đặt ẩn số phụ:

Trong quá trình giải phương trình nói chung và phương trình chứa căn thức nói riêng, chúng ta cần phải sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Người ta dùng ẩn số phụ đó thay thế cho một biểu thức chứa ẩn nào đó nhằm mục đích hạ bậc của phương trình, đưa phương trình đã cho về những phương trình dạng đã biết. Giải phương trình với ẩn phụ, sau đó tìm nghiệm của phương trình.

4. Phương pháp thứ tư: Phương pháp sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức: Để giải phương trình nói chung và phương trình chứa căn thức nói riêng, người ta còn sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức, các tính chất bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối, bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Bunhiacópki. Trong phương pháp này chủ yếu đưa về 2 dạng sau:

Dạng 1: Đưa phương trình về dạng: $f(x) = g(x)$ mà $f(x) \geq a$

(a là hằng số), $g(x) = a$.

Nghiệm của phương trình là nghiệm của hệ phương trình sau: $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$

Dạng 2: Đưa phương trình cần giải về dạng $h(x) = a$ (a là hằng số) mà ta luôn có $h(x) \geq a$. Hoặc $h(x) \leq a$, thì nghiệm của phương trình là giá trị của biến x làm cho dấu đẳng thức xảy ra.

Áp dụng tính chất: $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$. Ta có:

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Các ví dụ minh họa

Dạng 1. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Ở đây cần lưu ý các phép biến đổi cơ bản:

$$1) |a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = \pm b \end{cases}$$

$$2) |a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$$

Phương pháp:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Khử dấu giá trị tuyệt đối, biến đổi đưa về phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm

Ví dụ 1: Cho phương trình: $|x^2 - 2x + m| = x - 1$

a. Giải phương trình với $m = 0$.

b. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải:

Đặt $X = x - 1$ thì phương trình đã cho trở thành: $|X^2 + m - 1| = X$ (*)

$$\text{Với } m = 0 \text{ ta có: } \begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 - 1 = \pm X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 \pm X - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vì } x = X + 1 \text{ nên suy ra: } \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

. Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (*)$ có bốn nghiệm phân biệt.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 + m - 1 = \pm X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 \pm X + m - 1 = 0 \end{cases} \quad (*) \text{ có bốn nghiệm phân}$$

biệt khi và chỉ khi phương trình $X^2 + X + m - 1 = 0$ có hai nghiệm không âm phân biệt và phương trình $X^2 - X + m - 1 = 0$ có hai nghiệm không âm phân biệt. Nhưng phương trình $X^2 + X + m - 1 = 0$ không thể có hai nghiệm không âm (các bạn tự giải thích).

Vậy, phương trình đã cho không thể có bốn nghiệm phân biệt.

Chú ý: Phép giải câu 2 của ví dụ trên sẽ rất phức tạp nếu các bạn sử dụng phương pháp chia khoảng.

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình: $x^2 - 2x - m|x - 1| + m^2 = 0$ (1) có nghiệm.

Giải:

Đặt $X = |x - 1| \geq 0$ ta có $x^2 - 2x = X^2 - 1$ nên phương trình (1) trở thành:

$X^2 - mX + m^2 - 1 = 0$ (2). Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có ít nhất một nghiệm $X \geq 0$.

Trường hợp 1: (2) có nghiệm $X = 0 \Leftrightarrow P = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Trường hợp 2: (2) có nghiệm $X_1 < 0 < X_2 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Trường hợp 3: (2) có nghiệm $X_1, X_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0; S > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 4 \geq 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Kết hợp các kết quả, ta có: $-1 \leq m \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chú ý: Ở thí dụ trên có thể dùng phương pháp chia khoảng nhưng phép giải sẽ dài hơn.

Ví dụ 3: Giải phương trình $|x^2 + x - 2| + |x - 3| = x^2 + 1$.

Giải:

Đặt $x^2 + x - 2 = a$, $3 - x = b$ khi đó $a + b = x^2 + 1$ và theo tính chất đã biết, ta đưa phương trình đã cho về hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x \leq -2$ hoặc $1 \leq x \leq 3$.

ABC

Dạng 2: Phương trình bậc cao

Phương pháp: Để giải các phương trình bậc cao, thông thường người ta sẽ sử dụng một trong các phương pháp sau

1. Phương pháp đưa về dạng tích.

2. Phương pháp đặt ẩn số phụ.

2-1. Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Phương pháp: Bước 1: Đặt $x^2 = t \geq 0$.

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm

2-2. Phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$ với $a+d = b+c$.

Phương pháp: Bước 1: Đặt $t = x^2 + (a+d)x + k = x^2 + (b+c)x + k$ với

$$k = \frac{1}{2}(ad + bc)$$

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện hoặc thử lại và kết luận nghiệm.

2-3. Phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ với $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2; e \neq 0$.

Cách giải: Bước 1: Đặt $t = x + \frac{d}{bx} \Rightarrow t^2 = \left(x + \frac{d}{bx}\right)^2 = x^2 + 2\frac{d}{b} + \left(\frac{d}{bx}\right)^2$

$$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{d}{bx}\right)^2 = t^2 - 2\frac{d}{b}$$

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện hoặc thử lại và kết luận nghiệm.

2-4. Phương trình bậc 4 dạng: $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$

Cách giải: Đặt $y = x + \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow x+a = y + \frac{a-b}{2}; x+b = y - \frac{a-b}{2}$

Đưa phương trình trên về phương trình trùng phương ẩn y đã biết cách giải.

1. Phương pháp đưa về dạng tích

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$.

Giải:

Viết phương trình dưới dạng: $x^4 - (2x-3)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow [x^2 + 2x - 3][x^2 - 2x + 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Chú ý: Để sử dụng được phương pháp này, các bạn cần luyện lại phương pháp phân tích đa thức thành tích của các thừa số. Nhiều trường hợp đòi hỏi các bạn phải biết cách thêm, bớt các số hạng cần thiết để đạt được mục đích.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^4 - 4x = 1$.

Giải:

Đưa phương trình về dạng: $x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 4x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow [x^2 + 1 + \sqrt{2}(x + 1)][x^2 + 1 - \sqrt{2}(x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + \sqrt{2}(x + 1) = 0 & (1) \\ x^2 + 1 - \sqrt{2}(x + 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có $\Delta = -4\sqrt{2} - 2 < 0$ nên vô nghiệm.

Phương trình (2) có $\Delta = 4\sqrt{2} - 2 > 0$ nên có hai nghiệm:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}. \text{ Đó là hai nghiệm của phương trình đã cho.}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0$.

Giải:

$$x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 36x^2 - 4x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x)^2 - 4(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 6x)^2 - 4(x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + 6x - 2(x + 1)][x^2 + 6x + 2(x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 2)(x^2 + 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 2 = 0 \\ x^2 + 8x + 2 = 0 \end{cases}, \text{ từ đó ta có}$$

phương trình có các nghiệm sau $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$; $x_{3,4} = -4 \pm \sqrt{14}$

Chú ý: Khi xét số nghiệm (khác nhau) của phương trình tích các bạn cần lưu ý đến những nghiệm giống nhau của các thừa số.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x^2 + \frac{2x}{x-1} = 8$.

Giải:

Điều kiện: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Ta có: $x^2 + \frac{2x}{x-1} = 8$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x = 8x - 8 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 2) + x(x - 2) - 4(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)\left(x^2 + x - 4\right) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)\left[\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{17}{4}\right] = 0$$

ABC

$$\Leftrightarrow (x-2) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{17}{4} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x = \frac{\pm\sqrt{17}-1}{2} \end{cases}$$

Phương trình có ba nghiệm: $x=2; x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}; x = \frac{-\sqrt{17}-1}{2}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x-3}$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, x \geq \frac{3}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x-3} \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2})^2 = (\sqrt{2x-3})^2 \\ \Leftrightarrow x-1 + 2\sqrt{(x-1)(x-2)} + x-2 = 2x-3$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện, phương trình có nghiệm là $x=2$.

2. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\frac{4x}{x^2-8x+7} + \frac{5x}{x^2-10x+7} = -1$

Giải:

* Xét $x=0$: $x=0$ không là nghiệm của phương trình vì $0 \neq -1$

* Xét $x \neq 0$, phương trình trở thành: $\frac{4}{x-8+\frac{7}{x}} + \frac{5}{x-10+\frac{7}{x}} = -1$

. Đặt $y = x - 10 + \frac{7}{x}$, ta có phương trình: $\frac{4}{y+2} + \frac{5}{y} = -1$

$$\Leftrightarrow y^2 + 11y + 10 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ hay } y = -10 \quad (\text{vì } a - b + c = 0)$$

* $y = -1$, ta có:

$$x - 10 + \frac{7}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 7 = 0; \Delta = 53 \Rightarrow x_1 = \frac{9 + \sqrt{53}}{2}; x_2 = \frac{9 - \sqrt{53}}{2}$$

* $y = -10$, ta có: $x - 10 + \frac{7}{x} = -10 \Leftrightarrow x + \frac{7}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7 = 0$ suy ra phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $\frac{9 + \sqrt{53}}{2}; \frac{9 - \sqrt{53}}{2}$

Ví dụ 2: Giải phương trình : $x^4 + (x + 2)^4 = 184$.

Giải:

Đặt: $t = x + 1$, phương trình đã cho trở thành:

$$(t + 1)^4 + (t - 1)^4 = 184 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 91 = 0.$$

Đặt $z = t^2$ (với $z \geq 0$). Với điều kiện trên phương trình trở thành:

$$z^2 + 6z - 91 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 \\ z = -13 \end{cases}$$

$$\text{Với } z = 7 \Rightarrow t = \pm\sqrt{7} \Rightarrow x = -1 \pm\sqrt{7}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_{1,2} = -1 \pm\sqrt{7}$.

Ví dụ 3: Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = m$$

Giải:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = m$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 4)(x - 2)(x - 3) = m \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = m \quad (*).$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$(*) \Leftrightarrow \left(t - \frac{9}{4}\right)\left(t - \frac{1}{4}\right) = m \Leftrightarrow t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{9}{16} - m = 0 \quad (2)$$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Phương trình (2) có nghiệm trái dấu} \\ \text{Phương trình (2) có nghiệm không âm} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{16} - m < 0 \\ \Delta_{(2)} \geq 0; \frac{5}{2} > 0 \\ \frac{9}{16} - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{9}{16} \\ -1 \leq m \\ m \leq \frac{9}{16} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq -1$.

Ví dụ 4: Tìm giá trị của m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$2x^2 - |x| + m^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Giải:

Đặt $|x| = t$, với $t \geq 0$. Ta có:

$$2x^2 - |x| + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t + m^2 - 1 = 0 \quad (2).$$

Nếu phương trình (2) có nghiệm $t > 0$ thì phương trình (1) không có nghiệm duy nhất, do đó loại.

Vậy phương trình (1) muốn có nghiệm duy nhất thì phương trình (2) phải có nghiệm $t = 0$. Với $t = 0$ thì phương trình (2) có dạng:

$$2 \cdot 0^2 - 0 + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

$$\text{Nếu } m = \pm 1 \text{ thì (2) } \Leftrightarrow 2t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} > 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình (2) lại có nghiệm $t = \frac{1}{2} > 0$ (vô lý)

Vậy không tồn tại giá trị m nào để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0$

Giải:

$$x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 4x^3 + 4x^2) - 4x^2 + 8x - 5 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) - 5 = 0.$$

Đặt $x^2 - 2x = t$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 4t - 5 = 0$.

Giải phương trình này ta có $t_1 = -1$; $t_2 = 5$.

Khi $t_1 = -1$, ta có $x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi $t_2 = 5$, ta có $x^2 - 2x = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$, $x = 1$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$.

Giải:

Đây là phương trình dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + a = 0$ ($a \neq 0$)

Ta thấy: $x = 0$ không phải là nghiệm nên chia hai vế cho x^2 ta có phương

$$\text{trình tương đương: } 2x^2 - 5x + 6 - 5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Đặt $X = x + \frac{1}{x}$ (điều kiện: $|X| \geq 2$).

$$\text{Ta có } 2(X^2 - 2) - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ X = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do $|X| \geq 2$ nên chỉ lấy giá trị $X = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Chú ý: Phương trình trên cũng có thể đưa về dạng tích.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4$.

Giải:

$$(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4 \Leftrightarrow (x^2 + 12x + 32)(x^2 + 12x + 35) = 4$$

$$\text{Đặt } x^2 + 12x + 32 = t \Rightarrow x^2 + 12x + 35 = t + 3.$$

$$\text{Do có phương trình đã cho trở thành } t(t + 3) = 4$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1; t_2 = -4$$

$$\cdot \text{ Khi } t = 1 \text{ ta có } x^2 + 12x + 32 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 31 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Khi } t = -4 \text{ ta có } x^2 + 12x + 32 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

Vậy phương trình có các nghiệm sau $x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{5}$, $x = -6$.

Ví dụ 8: Giải phương trình: $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = 9$.

Giải

Viết lại phương trình đã cho ta có:

$$(x - 1)(x + 5)(x + 1)(x + 3) = 9 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = 9$$

$$\text{Đặt: } t = x^2 + 4x, \text{ phương trình trở thành: } (t - 5)(t + 3) = 9 \text{ hay:}$$

$$t^2 - 2t - 24 = 0. \text{ Giải phương trình này ta có: } t = 6; t = -4$$

$$\text{Với } t = 6 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 6, \text{ giải ra: } x = -2 \pm \sqrt{10}$$

$$\text{Với } t = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x = -4, \text{ giải ra: } x = -2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = -2$; $x = -2 \pm \sqrt{10}$.

Ví dụ 9: Giải phương trình: $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+\sqrt{x}} = \frac{2+\sqrt{x}}{2x}$.

Giải:

$$\text{Ta có } \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+\sqrt{x}} = \frac{2+\sqrt{x}}{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2x(1+\sqrt{x}) + 4(1+x)x = (1+x)(1+\sqrt{x})(2+\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2x\sqrt{x} + 4x + 4x^2 = (x+1)(2+3\sqrt{x}+x)$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4x^2 + 2x\sqrt{x} = 2x + 2 + 3x\sqrt{x} + x^2 + 3\sqrt{x} + x$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3x^2 - x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2 = 0.$$

Đặt $\sqrt{x} = y \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$3y^4 - y^3 + 3y^2 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(3y^3 + 2y^2 + 5y + 2) = 0$$

· Do $y \geq 0 \Rightarrow 3y^3 + 2y^2 + 5y + 2 > 0$, suy ra $y = 1$, nên phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 10: Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm:

$$x + 3(m - x)^2 = m$$

Giải:

$$x + 3(m - x)^2 = m \Leftrightarrow x + 3m^2 - 6mx + 3x^2 = m$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + (1 - 6m)x + 3m^2 - m = 0$$

$$\Delta = (1 - 6m)^2 - 4 \cdot 3(3m^2 - m) = 1 - 12m + 36m^2 - 36m^2 + 12m$$

$\Delta = 1 > 0 \forall m$. Do $\Delta > 0$ do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị m .

Dạng 3: Phương trình chứa căn thức

Phương pháp

1. Phương pháp thứ nhất:

Sử dụng phép biến đổi tương đương để đưa về các dạng cơ bản của phương trình đại số.

Dùng phép biến đổi tương đương hay phép khử căn thức đối với phương

trình chứa căn thức: Ta có $\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x)$$

2. Phương pháp thứ hai: Biến đổi đưa về phương trình tích.

Để giải một phương trình nói chung và phương trình chứa căn thức nói riêng, người ta thường sử dụng phương pháp đưa về phương trình tích với dạng như sau: $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = 0$. Trong đó các phương trình

$f(x) = 0$; $g(x) = 0$; $h(x) = 0$, là những phương trình đơn giản, đã biết phương pháp giải như phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai... Nghiệm của phương trình cần giải là tập nghiệm của các phương trình: $f(x) = 0, g(x) = 0, \dots, h(x) = 0$

3. Phương pháp thứ ba: Phương pháp đặt ẩn số phụ:

Trong quá trình giải phương trình nói chung và phương trình chứa căn thức nói riêng, chúng ta cần phải sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ. Người ta dùng ẩn số phụ đó thay thế cho một biểu thức chứa ẩn nào đó nhằm mục đích hạ bậc của phương trình, đưa phương trình đã cho về những phương trình dạng đã biết. Giải phương trình với ẩn phụ, sau đó tìm nghiệm của phương trình.

4. Phương pháp thứ tư: Phương pháp sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức:

Để giải phương trình nói chung và phương trình chứa căn thức nói riêng, người ta còn sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức, các tính chất bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối, bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Bunhiacópki. Trong phương pháp này chủ yếu đưa về 2 dạng sau:

Dạng 1: Đưa phương trình về dạng: $f(x) = g(x)$ mà $f(x) \geq a$

(a là hằng số), $g(x) = a$.

Nghiệm của phương trình là nghiệm của hệ phương trình sau: $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$

Dạng 2: Đưa phương trình cần giải về dạng $h(x) = a$ (a là hằng số) mà ta luôn có $h(x) \geq a$. Hoặc $h(x) \leq a$, thì nghiệm của phương trình là giá trị của biến x làm cho dấu đẳng thức xảy ra.

Áp dụng tính chất: $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$. Ta có:

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

a. Phương pháp biến đổi tương đương

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2$.

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2x - x^2 = (x - 2)^2 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = 3$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt[3]{16 - x^3} = 4 - x$.

Giải:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{16 - x^3} = 4 - x &\Leftrightarrow 16 - x^3 = (4 - x)^3 \\ &\Leftrightarrow 16 - x^3 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 - x^3 \Leftrightarrow 12x^2 - 48x + 48 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = 2$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{3x + 5} - \sqrt{x - 1} = 4$.

Giải:

Viết phương trình thành dạng: $\sqrt{3x + 5} = \sqrt{x - 1} + 4$ (1)

Trên tập hợp $K = [1; \infty)$ là miền xác định của phương trình, cả 2 vế của phương trình đều không âm. Mặt khác hàm số $\varphi(t) = t^2$, là hàm đơn điệu, với $t \geq 0$, nên trong tập K này, phương trình ban đầu tương đương với phương trình: $(\sqrt{3x + 5})^2 = (\sqrt{x - 1} + 4)^2$.

Phương trình (1) tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} 3x + 5 = x - 1 + 16 + 8\sqrt{x-1} \\ x \in [1; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = x - 5$$

Trong tập hợp $L = [5; \infty)$, cả 2 vế của phương trình đều có giá trị không âm nên nó tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} 16x - 16 = x^2 - 10x + 25 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \pm 8\sqrt{2} \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 13 + 8\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 13 + 8\sqrt{2}$.

Chú ý: Khi giải phương trình này, có thể làm đơn giản hơn, bằng cách 2 lần bình phương 2 vế để phá căn. Kết quả ta có phương trình bậc 2. Sau đấy kiểm tra lại để loại nghiệm ngoại lai. Tuy nhiên vấn đề kiểm tra không phải bao giờ cũng làm được.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$

Giải:

Trong miền xác định $K = \left[\frac{5}{2}; \infty\right)$, cả hai vế của phương trình nhận các giá trị không âm. Vì vậy, phương trình này tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 3x - 3 + 2\sqrt{2x-5} \cdot \sqrt{x+2} = 2x + 1 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2x-5} \cdot \sqrt{x+2} = -x + 4 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Cả hai vế của phương trình đầu trong hệ phương trình trên đều nhận các giá trị không âm trong $H = \left[\frac{5}{2}; 4\right] \subset K$.

Suy ra phương trình đầu tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 8x^2 - 4x - 40 = x^2 - 8x + 16 \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 4x - 56 = 0 \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 \pm 6\sqrt{11}}{7} \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\sqrt{10x-1} - \sqrt{x+3} = 1$.

Giải:

Bình phương 2 vế của phương trình. Do vậy phép toán này dẫn tới phương trình hệ quả:

$$11x + 2 - 2\sqrt{10x-1} \cdot \sqrt{x+3} = 1 \text{ hay } 2\sqrt{10x-1} \cdot \sqrt{x+3} = 11x + 1$$

Bình phương 2 vế của phương trình lần nữa ta được phương trình hệ quả mới: $4(10x^2 + 29x - 3) = 121x^2 + 22x + 1 \Leftrightarrow 81x^2 - 94x + 13 = 0$.

Phương trình này có 2 nghiệm $x = 1$, $x = \frac{13}{81}$.

Cần kiểm tra xem chúng có thỏa mãn phương trình đã cho không. Thử lại, ta có $x = \frac{13}{81}$ không thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Nhận xét: Nghiệm ngoại lai $x = \frac{13}{81}$ nằm trong miền xác định của phương

trình đầu. Điều ấy có nghĩa là: nguyên nhân xuất hiện nghiệm ngoại lai không phải do mở rộng miền xác định mà do việc sử dụng hàm số không đơn điệu. Việc giải phương trình có chứa căn thức, không phải bao giờ cũng tìm tập xác định, có khi chúng ta giải bằng cách đưa về phương trình hệ quả, sau đó thử lại.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $x - \sqrt{2x+3} = 0$.

Giải:

$$\text{Ta có: } x = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Ví dụ 7: Giải phương trình: $x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30$.

Giải:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x &= 6\sqrt{x+5} - 30 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 6\sqrt{x+5} + 30 = 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) + (x + 5 - 6\sqrt{x+5} + 9) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (\sqrt{x+5} - 3)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 = 0 \\ (\sqrt{x+5} - 3)^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ \sqrt{x+5}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \sqrt{x+5}=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=4. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{4\}$.

b. Phương pháp biến đổi đưa về phương trình tích

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 10x + 21} = 3\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+7} - 6$ (1)

Giải:

$$\text{Điều kiện: } x \geq -3 \quad (1) \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x+7)} - 3\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+7} + 6 = 0$$

ABC

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+3}-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7}-3=0 \\ \sqrt{x+3}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x_1=1; x_2=2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}=-\sqrt{x^2-x}$ (1)

Giải:

Ta có $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2); x^2-x=x(x-1)$. Điều kiện: $x \geq 3$

$$\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}=-\sqrt{x^2-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x})=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ \sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x}=0 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$ (2)

Giải:

Tập xác định: $\begin{cases} 2x^2+8x+6 \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, x \geq -1 \\ x \leq -1, x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \leq -3, x = -1, x \geq 1$. Riêng giá trị $x = -1$: thỏa mãn (2) $\Rightarrow x = -1$ là một nghiệm.

Với $x \leq -3$: Không thỏa mãn (2) vì vế phải âm.

Với $x \geq 1$: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(2x+6)}+\sqrt{(x-1)(x+1)}=2\sqrt{(x+1)^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+6}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+1}, \text{ bình phương 2 vế}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+6)(x-1)}=x-1=\sqrt{(x-1)(x-1)}$$

$$\begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ 2\sqrt{2x+6}=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x=-\frac{25}{7} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Kết luận: phương trình (2) có hai nghiệm $x_1=-1, x_2=1$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $3(2+\sqrt{x-2})=2x+\sqrt{x+6}$

Giải:

Điều kiện $x \geq 2$. Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 2(3-x)=\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2}$

$$\Leftrightarrow 2(3-x)(\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2})=8(3-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}=4 \end{cases} \quad (1)$$

Giải phương trình (1) ta nhận được nghiệm $x = \frac{11-\sqrt{45}}{2}$.

c. Phương pháp đặt ẩn số phụ:**Ví dụ 1:** Giải phương trình:

$$\sqrt{2x-2} + 2\sqrt{(2x-3)} + \sqrt{2x+13} + 8\sqrt{2x-3} = 7$$

Giải:

Đặt $y = \sqrt{2x-3}$. Điều kiện $y \geq 0 \Rightarrow x = \frac{y^2+3}{2}$ nên phương trình đã cho

trở thành: $\sqrt{y^2+2y+1} + \sqrt{y^2+8y+16} = 7$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{(y+4)^2} = 7 \Leftrightarrow |y+1| + |y+4| = 7.$$

Do $y \geq 0$ nên $y = 1$ hay $2x-3=1$. Suy ra $x=2$. Thử lại ta có nghiệm của phương trình đã cho là $x=2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2+5x-2} - 2$.**Giải:**

Đặt $y = \sqrt[3]{x^2+5x-2} \Rightarrow x^2+5x = y^3+2$. Nên phương trình đã cho là:

$$y^3 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y+2)(y^2 - 2y + 2) = 0.$$

Ta có $y^2 - 2y + 2 = 0$ có $\Delta < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

$$\text{Vậy } y = -2 \text{ hay } x^2 + 5x = (-2)^3 + 2 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0.$$

Suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = -2, x_2 = -3$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = 3$ **Giải:**

$$\text{Đặt } X = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} \text{ thì } \sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{X^2-9}{2}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$X - \frac{X^2-9}{2} = 3 \Leftrightarrow 2X - X^2 + 9 = 6 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ X = 3 \end{cases}$$

$$* X = -1 \Leftrightarrow \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = -1 \text{ vô nghiệm}$$

$$* X = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -3 \end{cases}$$

Chú ý: Ở thí dụ trên, các bạn cũng có thể đưa vào hai ẩn phụ: $u = \sqrt{3+x} \geq 0$

$$\text{và } v = \sqrt{6-x} \geq 0 \text{ để có hệ: } \begin{cases} u^2 + v^2 = 9 \\ u + v - uv = 3 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ trên, các bạn được nghiệm: } \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}.$$

ABC

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$

Giải:

Điều kiện $-1 \leq x \leq 4$.

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} > 0$ ta có $\sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{t^2 - 5}{2}$.

Vậy ta có phương trình $t + \frac{t^2 - 5}{2} = 5 \Rightarrow t = -5$ (loại), $t = 3$.

Từ đó ta có phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = 3$, giải phương trình này bằng phép biến đổi tương đương, suy ra phương trình có nghiệm: $x = 0, x = 3$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}$ (1)

Giải:

Phương trình được xác định khi và chỉ khi: $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2$ (2)

Đặt $x + \sqrt{4-x^2} = t \Rightarrow x\sqrt{4-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}$. Thay vào (1):

$$t = 2 + 3 \cdot \frac{t^2 - 4}{2} \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2, t_2 = -\frac{4}{3}$$

Với $t_1 = 2$: $x + \sqrt{4-x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = 2-x \Leftrightarrow 4-x^2 = (2-x)^2$
 $\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$ (thỏa mãn (2)).

Với $t_2 = -\frac{4}{3}$: $x + \sqrt{4-x^2} = -\frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = -x - \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -\frac{4}{3} \\ 4-x^2 = x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -\frac{4}{3} \\ 9x^2 + 12x - 10 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Giải (4) ta được } x_3 = \frac{-6 - \sqrt{126}}{9}, x_4 = \frac{-6 + \sqrt{126}}{9}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x_1 = 0, x_2 = 2$,

$$x_3 = \frac{-6 - \sqrt{126}}{9}, x_4 = \frac{-6 + \sqrt{126}}{9}.$$

d. Phương pháp sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$

Giải:

Ta có: $3x^2 + 6x + 7 = 3(x+1)^2 + 4$

$$5x^2 + 10x + 14 = 5(x+1)^2 + 9; 4 - 2x - x^2 = 5 - (x+1)^2$$

Do đó: $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} \geq 2; 4 - 2x - x^2 \leq 5; \sqrt{5x^2 + 10x + 14} \geq 3$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $(x+1)^2 = 0$, nay $x = -1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = -1$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 3 - \sqrt[4]{3x^2 - 12x + 13}$

Giải:

Ta có: $2x^2 - 8x + 12 = 2(x - 2)^2 + 4$

$$3x^2 - 12x + 13 = 3(x - 2)^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 8x + 12} \geq 2$$

$\sqrt[4]{3x^2 - 12x + 13} \geq 1$. Do đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 2$.

Ví dụ 3 Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 11} + \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt[4]{x^2 - 4x + 5} = 3 + \sqrt{2} \quad (1)$$

Giải:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 11} + \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt[4]{x^2 - 4x + 5} = 3 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + 2} + \sqrt{(x - 3)^2 + 4} + \sqrt[4]{(x - 2)^2 + 1} = 3 + \sqrt{2}$$

$$\text{Mà } \sqrt{(x - 3)^2 + 2} + \sqrt{(x - 3)^2 + 4} + \sqrt[4]{(x - 2)^2 + 1} \geq 3 + \sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra phương trình đã cho có nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 = 0 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x^2 - 3x + \frac{7}{2} = \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 4x + 5)}$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a, b \geq 0)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Ta có: $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$.

Ta có: $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$.

$$\text{Nên } \frac{x^2 - 2x + 2 + x^2 - 4x + 5}{2} \geq \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 4x + 5)}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = x^2 - 4x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\sqrt{5x^3 + 3x^2 + 3x - 2} = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}$

Giải :

Ta có: Từ phương trình $\sqrt{5x^3 + 3x^2 + 3x - 2} = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}$

Mà $5x^3 + 3x^2 + 3x - 2 = (x^2 + x + 1)(5x - 2)$.

ABC

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0. \text{ Nên } 5x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{5}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số: $a = x^2 + x + 1, b = 5x - 2$.

$$\text{Ta có: } \sqrt{(x^2 + x + 1)(5x - 2)} \leq \frac{(x^2 + x + 1) + (5x - 2)}{2} = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ Hay $x^2 + x + 1 = 5x - 2 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3$

Nghiệm của phương trình là: $x_1 = 1; x_2 = 3$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ (1).

Giải:

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |3-\sqrt{x-1}| = 1. \text{ Áp dụng tính chất: } |a| + |b| \geq |a+b|$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$. Ta có:

$$|\sqrt{x-1}-2| + |3-\sqrt{x-1}| \geq |\sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}| = 1$$

Dấu bằng xảy ra $(\sqrt{x-1}-2)(3-\sqrt{x-1}) \geq 0$. Đặt $\sqrt{x-1} = y, y \geq 0$

$$\Rightarrow (y-2)(3-y) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$$

$$\Rightarrow 4 \leq x-1 \leq 9 \Rightarrow 5 \leq x \leq 10.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $5 \leq x \leq 10$.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $3x + 4y = 5\sqrt{x^2 + y^2}$ (1).

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

$$\text{Từ phương trình (1) ta có: } (3x + 4)^2 \leq (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) = 25(x^2 + y^2)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \text{ Hay } y = \frac{4}{3}x.$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là: } \begin{cases} x = a \\ y = \frac{4}{3}a \end{cases} (a \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

Ví dụ 8: Giải phương trình: $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Giải:

$$\text{Điều kiện } 2 \leq x \leq 4. \text{ Ta có: } x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski:

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})^2 \leq [(\sqrt{x-2})^2 + (\sqrt{4-x})^2](1^2 + 1^2)$$

$\Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq 2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$. Thế vào phương trình
 $\Rightarrow x = 3$ là nghiệm của phương trình.

e. Phương pháp đưa về hệ phương trình:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{2x + \sqrt{x+1} + 1} + \sqrt{2x - \sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} + 1$

Giải:

Đặt $\sqrt{2x + \sqrt{x+1} + 1} = u$; $\sqrt{2x - \sqrt{x+1}} = v$

$$\begin{aligned} \text{Xét } u^2 - v^2 &= \left(\sqrt{2x + \sqrt{x+1} + 1}\right)^2 - \left(\sqrt{2x - \sqrt{x+1}}\right)^2 \\ &= (2x + \sqrt{x+1} + 1) - (2x - \sqrt{x+1}) = 2\sqrt{x+1} + 1 \end{aligned}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = 2\sqrt{x+1} + 1 \\ u^2 - v^2 = 2\sqrt{x+1} + 1; u \geq 0; v \geq 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta có :

$$\begin{cases} u = \sqrt{x+1} + 1 \\ v = \sqrt{x+1} \end{cases} \quad \text{. Suy ra : } \sqrt{2x - \sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = 3.$$

Nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\left(\sqrt[3]{3x+1}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{3x-1}\right)^2 + \sqrt[3]{9x^2-1} = 1$

Giải:

Đặt $\sqrt[3]{3x+1} = u$; $\sqrt[3]{3x-1} = v$. Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + uv = 1 \\ u^3 - v^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u^2 + v^2 + uv) = 2 \\ u^2 + v^2 + uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta có: $\begin{cases} \sqrt[3]{3x+1} = 1 \\ \sqrt[3]{3x-1} = -1 \end{cases}$. Suy ra $x = 0$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $-x^2 + 2 = \sqrt{2-x}$

Giải:

Điều kiện: $x \leq 2$.

Đặt $\sqrt{2-x} = y, y \geq 0 \Rightarrow x = 2 - y^2$ và ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x^2 + 2 = y \\ -y^2 + 2 = x \end{cases} \Rightarrow (y-x)(y+x-1) = 0$$

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình là $x = 1, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

ABC

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} = 1$

Giải:

Điều kiện: $x \leq \frac{1}{2}$. Đặt $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} = u; \sqrt{\frac{1}{2} - x} = v, v \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u + v = 1; v \geq 0 \\ u^3 + v^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 - v)^3 = 1 - v^2. \text{ Hay } (1 - v)v^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 1 \end{cases}. \text{ Giải ra ta có nghiệm của phương trình là:}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}; x_3 = -\frac{17}{2}.$$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x+7} = 7$

Giải:

· Điều kiện: $x \geq -7$. Đặt $t = \sqrt{x+7} \geq 0 \Leftrightarrow t^2 = x+7$

Phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} x^2 + t = 7 \\ t^2 = x + 7 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 - t^2 = -(x+t) \Leftrightarrow (x+t)(x-t+1) = 0$$

$$x+t=0 \Rightarrow x^2 - x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$$x-t+1=0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}, x = 2, x = -3$

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3$

Giải:

Đặt $u = \sqrt[3]{2-x}; v = \sqrt[3]{7+x}$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3 \\ (u+v)(u^2 + v^2 - uv) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ (u+v)^2 - 3uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases}$$

Do đó, u và v là các nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 2.$$

Từ đó dễ dàng có 2 nghiệm của phương trình là $x = 1$ hoặc $x = -6$.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$.

Giải:

Đặt $y = \sqrt[3]{2x - 1} \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x$.

Do đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y & (1) \\ y^3 + 1 = 2x & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế của (1) cho (2) ta có:

$$x^3 - y^3 = 2(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$$

Do $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2 > 0, \forall x, y$.

Suy ra: $x - y = 0$ hay $x = y$. Thay vào (1), ta có:

$$x^3 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) - (x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bài tập vận dụng

1. Giải các phương trình:

a. $\sqrt{x + 3} + 4\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 8} - 6\sqrt{x - 1} = 5$

b. $(4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) = 4$

2. Giải các phương trình

a. $\frac{x^3}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$

b. $\sqrt{x + 2} + 3\sqrt{2x - 5} + \sqrt{x - 2} - \sqrt{2x - 5} = 2\sqrt{2}$

3. Giải phương trình: $3x^2 + 3x - 2\sqrt{x^2 + x} = 1$

4. Giải phương trình: $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} + \sqrt{-2x^2 + 8x - 5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

5. Giải các phương trình:

a. $(x^2 - 3x)^2 - 6(x^2 - 3x) - 7 = 0$

b. $\sqrt{8 + \sqrt{x - 3}} + \sqrt{5 - \sqrt{x - 3}} = 5$

c. $\sqrt{x + x^2} + \sqrt{x - x^2} = x + 1$.

6. Cho phương trình: $x^4 - (3m + 14)x^2 + (4m + 12)(2 - m) = 0$

a. Định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

b. Định m sao cho tích số của 4 nghiệm trên đạt giá trị lớn nhất.

ABC

7. Giải phương trình:

a. $|x^2 + |2x + 1| - 1| = 2 - x^2$

b. $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

8. Giải phương trình: $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$

9. Giải phương trình: $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3$.

10. Giải phương trình $(\sqrt{x-1} + 1)^3 + 2\sqrt{x-1} = 2 - x$.

11. Giải phương trình: $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$

12. Giải phương trình: $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

13. Giải phương trình: $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$

14. Giải phương trình: $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$

15. Giải phương trình: $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = 2$.

16. Giải phương trình: $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$

17. Giải phương trình: $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2-4} - 2x + 2$

18. Tìm m để phương trình: $(x^2-1)(x+3)(x+5) = m$ (1) có bốn nghiệm phân biệt.

19. Cho phương trình: $x^4 - (3m+14)x^2 + (4m+12)(2-m) = 0$

a. Định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

b. Định m sao cho tích số của 4 nghiệm trên đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn và đáp số

1. a. $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1+4\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+2 + |\sqrt{x-1}-3| = 5 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-3| = 3-\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-3 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x-1 \leq 3^2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 10.$$

Nghiem của phương trình đã cho là $1 \leq x \leq 10$

b. $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1) = 4$.

$$\Leftrightarrow [(4x+1)(3x+2)][(12x-1)(x+1)] = 4$$

$$\Leftrightarrow (12x^2+8x+3x+2)(12x^2+12x-x-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow (12x^2+11x+2)(12x^2+12x-x-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(12x^2+11x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(12x^2+11x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(12x^2 + 11x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(12x^2 + 11x + \frac{1}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(12x^2 + 11x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + 11x - 2 = 0 & (1) \\ 12x^2 + 11x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $\Delta = 121 + 96 = 217$; $x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{217}}{24}$;

Giải (2): $\Delta = 121 - 144 = -23 < 0$. phương trình vô nghiệm.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{217}}{24}$;

2. a. Điều kiện $x \neq 0$. Đặt $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$. Ta có: $y^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} - \frac{8}{3}$.

Do đó $3y^2 + 8 = \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2}$. Ta có phương trình: $3y^2 + 8 = 10y$

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 8 = 0: \Delta' = 25 - 24 = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{5+1}{3} = 2; y_2 = \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3}$$

* Với $y = 2$, ta có $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x - 12 = 0$

$$\Delta' = 9 + 12 = 21; \sqrt{\Delta'} = \sqrt{21}; x_1 = 3 + \sqrt{21}; x_2 = 3 - \sqrt{21}$$

* Với $y = \frac{4}{3}$, ta có $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 12 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$$\Delta' = 4 + 12 = 16; \sqrt{\Delta'} = 4; x_3 = 2 + 4 = 6; x_4 = 2 - 4 = -2$$

Phương trình có bốn nghiệm là:

$$x_1 = 3 + \sqrt{21}; x_2 = 3 - \sqrt{21}; x_3 = 2 + 4 = 6; x_4 = 2 - 4 = -2$$

b. Điều kiện $x \geq \frac{5}{2}$. Ta có:

$$\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}} \right) = 2\sqrt{2}\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5+6\sqrt{2x-5}+9} + \sqrt{2x-5-2\sqrt{2x-5}+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2x-5}+3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-5}-1)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5} + 3 + |\sqrt{2x-5}-1| = 4 \Leftrightarrow |\sqrt{2x-5}-1| = 1 - \sqrt{2x-5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5} - 1 \leq 0 \text{ (vì } |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0)$$

ABC

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x-5 \leq 1 \Leftrightarrow 5 \leq 2x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 3.$$

Nghiệm của phương trình là: $\frac{5}{2} \leq x \leq 3$.

3. Biến đổi phương trình đã cho thành $3(x^2 + x) - 2\sqrt{x^2 + x} - 1 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + x}$ (điều kiện $t \geq 0$), ta có phương trình $3t^2 - 2t - 1 = 0$.

Giải tìm được $t = 1$ hoặc $t = -\frac{1}{3}$ (loại)

Với $t = 1$, ta có $\sqrt{x^2 + x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$.

Giải ra được $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

4. Khi điều kiện xác định được thỏa thì ta có:

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 2} = \sqrt{2 - (x-2)^2} \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{-2x^2 + 8x - 5} = \sqrt{3 - 2(x-2)^2} \leq \sqrt{3}$$

Do đó: $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} + \sqrt{-2x^2 + 8x - 5} \leq \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

5.a. $(x^2 - 3x)^2 - 6(x^2 - 3x) - 7 = 0$. Đặt $t = x^2 - 3x$, ta có phương trình:

$$t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 7 \end{cases}$$

Với $t = -1$, $x^2 - 3x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Với $t = 7$, $x^2 - 3x = 7 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$.

b. $\sqrt{8 + \sqrt{x-3}} + \sqrt{5 - \sqrt{x-3}} = 5$

Đặt: $u = \sqrt{8 + \sqrt{x-3}} \Leftrightarrow u \geq 0, u^2 = 8 + \sqrt{x-3}$

Đặt: $v = \sqrt{5 - \sqrt{x-3}} \Leftrightarrow v \geq 0, v^2 = 5 - \sqrt{x-3}$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 + v^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \\ u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

c. $\sqrt{x+x^2} \sqrt{x-x^2} = x+1$ (Điều kiện $0 \leq x \leq 1$)

Ta thấy $x = 0$ không thỏa nên ta chia hai vế cho $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{\frac{x+x^2}{x}} + \sqrt{\frac{x-x^2}{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Xét vế phải: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$ và dấu “=” xảy ra khi $x = 1$.

$$\text{Ta có: } \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{2} \leq (\sqrt{1+x})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 2$$

Suy ra vế trái: $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 2$ và dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Vậy hai vế không bằng nhau. Phương trình đã cho vô nghiệm.

$$6. \quad x^4 - (3m+14)x^2 + (4m+12)(2-m) = 0 \quad (*)$$

a. Đặt $t = x^2$. Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow t^2 - (3m+14)t + (4m+12)(2-m) = 0 \quad (**) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4m+12 \\ t = 2-m \end{cases}$$

$$(*) \text{ có 4 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+12 > 0 \\ 2-m > 0 \\ 4m+12 \neq 2-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

b. Ta có 4 nghiệm của (*) là $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$ với t_1, t_2 là nghiệm của (**)

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = t_1 t_2 = (4m+12)(2-m)$$

$$= -4m^2 - 4m + 24 = -(2m+1)^2 + 25 \leq 25 \quad \forall m.$$

Suy ra giá trị lớn nhất của $x_1 x_2 x_3 x_4$ là 25.

Khi $m = -\frac{1}{2}$ thỏa điều kiện ở câu a.

$$7. \text{ a. } |x^2 + |2x+1| - 1| = 2 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + |2x+1| - 1 = 2 - x^2 \\ x^2 + |2x+1| - 1 = x^2 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2x+1| = 3 - 2x^2 \\ x^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x^2 \geq 0; x^2 \leq 2 \\ 2x+1 = 3 - 2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2x+1| = -1 \\ x^2 \leq 2 \end{cases} \quad (\text{VN}) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = 2x^2 - 3 \end{cases}$$

b. Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}} \Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}) = \sqrt{9x^2+16} \quad (2)$$

ABC

$$\begin{aligned}
 (2) &\Rightarrow 4(2x+4) + 16(2-x) + 16\sqrt{8-2x^2} = 9x^2 + 16 \\
 &\Rightarrow 16\sqrt{8-2x^2} - 8x = 9x^2 - 32 \\
 &\Rightarrow 8(2\sqrt{8-2x^2} - x) = 9x^2 - 32 \Rightarrow \frac{8(32-9x^2)}{2\sqrt{8-2x^2} + x} = 9x^2 - 32 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 9x^2 - 32 = 0 \\ 2\sqrt{8-2x^2} + x = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ 2\sqrt{8-2x^2} = -8 - x \text{ (VN do } -2 \leq x \leq 2) \end{cases} \\
 &\Rightarrow x = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}. \text{ Thử lại ta được } x = \frac{4\sqrt{2}}{3}.
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x = \frac{2}{3}; x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

8. Viết $f(x) = (x^2 + bx + c)(x^2 + px + q)$

Sau khi khai triển về phải, so sánh các hệ số ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} b + p = 4 \\ c + q + pb = -10 \\ pc + qb = 37 \\ qc = -14 \end{cases}$$



Giải hệ phương trình ta được $p = -5, q = 2, b = 1, c = -7$.

Lúc đó (8) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x^2 + x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} \right\}$.

9. Cách 1: Điều kiện $-4 \leq x \leq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 5 + 2\sqrt{4-3x-x^2} &= 9 \Leftrightarrow \sqrt{4-3x-x^2} = 2 \\
 \Leftrightarrow 4-3x-x^2 &= 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Cách 2: Đặt $u = \sqrt{1-x}; v = \sqrt{4+x}$ ta thu được hệ $\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases}$

suy ra $v = 3 - u$, thay vào phương trình thứ hai, ta được: $u^2 + (3-u)^2 = 5$

$$\Leftrightarrow 2u^2 - 6u + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = 1 \\ \sqrt{1-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

10. Điều kiện: $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x-1} + 1)^3 + (x-1) + 1 + 2\sqrt{x-1} &= 2 \\
 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + 1)^3 + (\sqrt{x-1} + 1)^2 &= 2. \text{ Đặt } (\sqrt{x-1} + 1) = t \text{ ta được:} \\
 t^3 + t^2 - 2 &= 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = 1.
 \end{aligned}$$

$$11. x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow (x^2 + 1) - (x + 3)\sqrt{x^2 + 1} + 3x = 0 \quad (1)$$

Đưa vào ẩn phụ $t = \sqrt{x^2 + 1}$, PT tương đương với hệ :

$$\begin{cases} t = \sqrt{x^2 + 1} \\ t^2 - (x + 3)t + 3x = 0 \end{cases} \quad (2). \text{Coi (2) là PT bậc hai đối với ẩn } t, \text{ ta có:}$$

$$\Delta = (x + 3)^2 - 12x = (x - 3)^2$$

$$\text{Từ đó: } t_1 = \frac{x + 3 + x - 3}{2} = x = \sqrt{x^2 + 1} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$t_2 = \frac{1}{2}(x + 3 - (x - 3)) = 3 = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$12. \text{Giải phương trình } \sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} = 1$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x^2 \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Với $x = \frac{1}{2}$, phương trình được thỏa mãn.

$$\text{Với } x > \frac{1}{2} \text{ ta có } \begin{cases} \sqrt{4x - 1} > \sqrt{2 - 1} = 1 \\ \sqrt{4x^2 - 1} > \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4} - 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} > 1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \frac{1}{2}$.

$$13. \text{Đặt } m = \sqrt{2}. \text{ Khi đó (9) có dạng: } m^2 - (2x^2 + 1)m - x + x^4 = 0.$$

Phương trình ẩn m cho ta hai nghiệm: $m_1 = x^2 - x$, $m_2 = x^2 + x + 1$.

Khi đó:

$$(9) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = \sqrt{2} \\ x^2 + x + 1 = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1 \mp \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}, \frac{-1 \mp \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2} \right\}$$

$$14. \sqrt{x + x^2} + \sqrt{x - x^2} = x + 1 \text{ (Điều kiện: } 0 \leq x \leq 1 \text{)}$$

Ta thấy $x = 0$ không thỏa nên ta chia hai vế cho $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{\frac{x + x^2}{x}} + \sqrt{\frac{x - x^2}{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Xét vế phải: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$ và dấu “=” xảy ra khi $x = 1$.

$$\text{Ta có: } \frac{(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})^2}{2} \leq (\sqrt{1 + x})^2 + (\sqrt{1 - x})^2 = 2$$

Suy ra về trái: $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 2$ và dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Vậy hai vế không bằng nhau. Phương trình đã cho vô nghiệm.

15. Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Phương trình đã cho biến đổi thành: $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-1} = 2$

$$\Leftrightarrow 2x - (x-1) = 2(x^2-1) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3$$

Phương trình này có hai nghiệm: $\begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, ta có phương trình này có nghiệm: $x = \frac{3}{2}$.

16. Giải phương trình: $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+12)(x+3)(x+8) = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow (x+14x+24)(x^2+11x+24) = 4x^2$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm nên

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{24}{x} + 14\right) \left(x + \frac{24}{x} + 11\right) = 4$$

Đặt $t = x + \frac{24}{x}$, ta có phương trình $t^2 + 25t + 150 = 0$.

Giải ra ta được $t_1 = -10, t_2 = -15$

Thay vào ta thu được các phương trình $\begin{cases} x^2 + 15x + 24 = 0 \\ x^2 + 10x + 24 = 0. \end{cases}$

Giải phương trình ra ta được

$$x_{1,2} = (-15) \frac{(-15 \mp \sqrt{129})}{2}, x_3 = -4, x_4 = -6.$$

17. Tập xác định $x \geq 2$. Đặt $t = \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} \Rightarrow t^2 = -2\sqrt{x^2-4} + 2x$

$\Rightarrow -t^2 = 2\sqrt{x^2-4} - 2x$. Thế vào phương trình đã cho được:

$$t = -t^2 + 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Với $t = 1$: $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow x-2 = 1 + x+2 + 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = -5 : \text{vô nghiệm}$$

Với $t = -2$: $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 2 = \sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow x-2 + 4 + 4\sqrt{x-2} = x+2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

18. Đây là phương trình dạng: $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = l_1$ với $a + b = c + d$.

Ta có: $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) = m$

$$\Leftrightarrow [(x - 1)(x + 5)][(x + 1)(x + 3)] = m$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + 4x - 5][x^2 + 4x + 3] = m.$$

Đặt $X = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$, ta có phương trình tương đương:

$$(X - 9)(X - 1) = m$$

$\Leftrightarrow X^2 - 10X + (9 - m) = 0$ (2). Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + m > 0 \\ 9 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9$$

Chú ý: Đối với một số bất phương trình bậc cao, các bạn cũng có thể đưa vào ẩn phụ để xét những bất phương trình bậc thấp hơn.

19. $x^4 - (3m + 14)x^2 + (4m + 12)(2 - m) = 0$ (*)

a. Đặt $t = x^2$. Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow t^2 - (3m + 14)t + (4m + 12)(2 - m) = 0 \quad (**)$$

$$(*) \text{ có 4 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 12 > 0 \\ 2 - m > 0 \\ 4m + 12 \neq 2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

b). Ta có 4 nghiệm của (*) là $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$ với t_1, t_2 là nghiệm của (**)

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = t_1 t_2 = (4m + 12)(2 - m)$$

$$= -4m^2 - 4m + 24 = -(2m + 1)^2 + 25 \leq 25 \quad \forall m.$$

Suy ra giá trị lớn nhất của $x_1 x_2 x_3 x_4$ là 25.

Khi $m = -\frac{1}{2}$ thỏa điều kiện ở câu a.

ABC

5. Các bài toán về hàm số

Một số kiến thức cơ bản

I. Hàm số bậc nhất

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.
- Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và có tính chất:
Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$; Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.
- Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng:

Cắt trục tung tại điểm $B(0; b)$; Cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

(a gọi là hệ số góc, b gọi là tung độ góc).

- Các đường thẳng có cùng hệ số góc a thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau. (Nếu gọi α là góc hợp bởi giữa đường thẳng và tia Ox thì $a = \tan \alpha$)

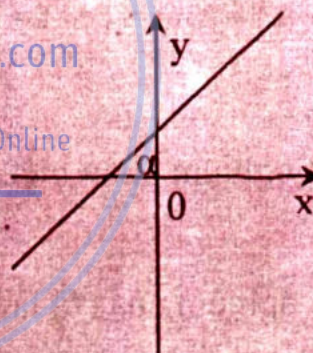
Chú ý: Nếu đường thẳng $(D): y = ax + b$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $(D'): y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) thì

$$\bullet (D) \text{ cắt } (D') \Leftrightarrow a \neq a'$$

$$\bullet (D) \parallel (D') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$$

$$\bullet (D) \equiv (D') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

$$\bullet (D) \perp (D') \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$$



II. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có tính chất:

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$
- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$

Đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một parabol với đỉnh là gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng.

- Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.
- Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Xác định hàm số bậc nhất (phương trình của đường thẳng)

Phương pháp giải: Dựa vào các điểm sau:

- Nếu điểm $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax + b$ thì $ax_0 + b = y_0$
- Các kết quả đã nêu trong phần lý thuyết.

Dạng 2: Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất.

Phương pháp giải: Dựa vào các điều kiện sau:

Đồ thị hàm số $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và qua điểm $A(1; a)$

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng qua $B(0; b)$ và qua $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

Chú ý: Có thể thay điểm $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ với một điểm C khác bằng cách cho x bởi một giá trị nguyên nào đó rồi xác định y .

Dạng 3: Xác định hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Phương pháp giải: Dựa vào điểm sau: Nếu điểm $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2$ thì $ax_0^2 = y_0$.

Dạng 4: Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Phương pháp giải: Thực hiện các bước sau:

- Lập bảng giá trị
- Vẽ đồ thị.

Dạng 5: Tìm giao điểm của hai đồ thị

Phương pháp giải: Thực hiện các bước sau:

- Lập phương trình hoành độ giao điểm
- Giải phương trình, từ đó tìm được tọa độ các giao điểm

Chú ý:

- Có thể xác định tọa độ các giao điểm dựa vào đồ thị
- Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép.

Tương giao của đường thẳng và Parabol

Phương pháp: Cho đường thẳng có phương trình $y = ax + b$, ($a \neq 0$), và Parabol có phương trình $y = Ax^2$. Xét phương trình hoành độ giao điểm $Ax^2 = ax + b$ (1), ta có số giao điểm của hai đồ thị phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình này.

a. Đường thẳng cắt Parabol khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm.

b. Đường thẳng không cắt Parabol khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm

Đường thẳng tiếp xúc với Parabol khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép.

Dạng 6: Tìm điểm cố định mà Parabol luôn đi qua với mọi tham số m

Dạng 7: Các bài toán liên quan khác

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Xác định hàm số bậc nhất (phương trình của đường thẳng)

Phương pháp giải: Dựa vào các điểm sau:

- Nếu điểm $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax + b$ thì $ax_0 + b = y_0$
- Các kết quả đã nêu trong phần lý thuyết.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = ax + b$. Hãy xác định a và b trong các trường hợp sau:

- a) Đồ thị song song với đường thẳng $y = 3x$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.
- b) Đồ thị song song với đường thẳng $y = -4x$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -1
- c) Đồ thị vuông góc với đường thẳng $y = -5x + 1$ và đi qua $A(5; 2)$.
- d) Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; -7)$

Giải:

- a) Vì đồ thị song song với đường thẳng $y = 3x$ nên $a = 3$.
Mặt khác, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $b = 2$
Vậy hàm số cần tìm là: $y = 3x + 2$.
- b) Vì đồ thị song song với đường thẳng $y = -4x$ nên $a = -4$
Mặt khác, đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -1 nên
 $a(-1) + b = 0 \Rightarrow -4(-1) + b = 0 \Rightarrow b = -4$
Vậy hàm số cần tìm là $y = -4x - 4$
- c) Vì đồ thị vuông góc với đường thẳng $y = -5x + 1$ nên
$$a(-5) = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

Mặt khác, đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(5; 2)$ nên
$$\frac{1}{5} \cdot 5 + b = 2 \Rightarrow b = 1.$$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = \frac{1}{5}x + 1$
- d) Do $A(1; 2); B(-2; -7)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax + b$ nên ta có:
 $a + b = 2$ và $-2a + b = -7$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 2 \\ -2a + b = -7 \end{cases}$ ta được $a = 3$ và $b = -1$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = 3x - 1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = (m + 3)x - n$. Tìm điều kiện của m và n để:

- Hàm số đồng biến
- Hàm số nghịch biến
- Đồ thị của hàm số đã cho song song với đường thẳng $y = x + 2$

Giải:

- Hàm số đã cho đồng biến $\Leftrightarrow m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -3$
- Hàm số đã cho nghịch biến $\Leftrightarrow m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -3$
- Đồ thị của hàm số đã cho song song với đường thẳng $y = x + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 = 1 \\ n \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n \neq -2 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d:

$$y = -\frac{2k}{k-1}x + \frac{2}{k-1} \quad (k \neq 1).$$

- Với giá trị nào của k đường thẳng d song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$?
Khi đó hãy tính góc tạo bởi giữa d với tia Ox.
- Tìm k để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d lớn nhất.

Giải:

- Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$

$$\Leftrightarrow -\frac{2k}{k-1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow k = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$$

Khi đó góc nhọn α tạo bởi giữa d và tia Ox có $\tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

- Gọi h là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d.

Nếu $k = 0$ thì d: $y = -2$ nên $h = 2$

Nếu $k \neq 0, k \neq 1$ ta gọi A và B lần lượt là giao điểm của đường thẳng d

với trục Ox và Oy thì $A\left(\frac{1}{k}; 0\right)$ và $B\left(0; \frac{2}{k-1}\right)$.

$$\text{Suy ra: } OA = \left|\frac{1}{k}\right|, OB = \left|\frac{2}{k-1}\right|$$

Vì tam giác OAB vuông tại O nên: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

$$\Rightarrow OH = \frac{2}{\sqrt{5k^2 - 2k + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5\left(k - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}} \leq \sqrt{5}$$

ABC

$$OH = \sqrt{5} \text{ khi } k = \frac{1}{5}.$$

Với $k = \frac{1}{5}$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d lớn nhất.

Dạng 2: Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất.

Phương pháp giải:

Dựa vào các điều kiện sau:

Đồ thị hàm số $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và qua điểm $A(1; a)$.

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng qua $B(0; b)$ và qua $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

Chú ý: Có thể thay điểm $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ với một điểm C khác bằng cách cho x bởi một giá trị nguyên nào đó rồi xác định y.

Ví dụ 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x$.

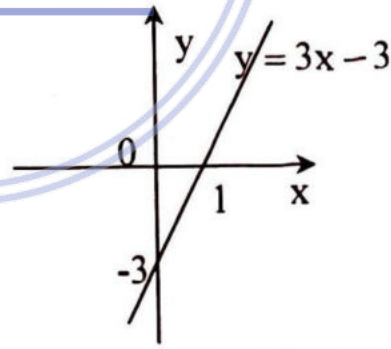
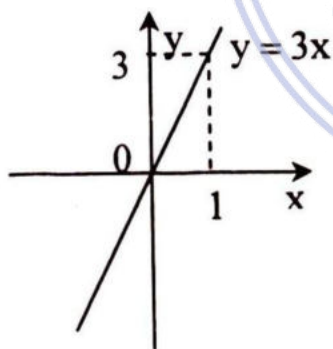
Giải:

Đồ thị hàm số $y = 3x$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $(1; 3)$

Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x - 3$

Giải:

Đồ thị hàm số $y = 3x - 3$ là đường thẳng đi qua điểm $(0; -3)$ và $(1; 0)$.



Dạng 3: Xác định hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Phương pháp giải:

Dựa vào điểm sau: Nếu điểm $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2$ thì $ax_0^2 = y_0$.

Ví dụ 1: Tìm a biết (P): $y = ax^2$ đi qua điểm $A(-1; 1)$

Giải:

Vì $(-1; 1) \in (P)$ nên $a(-1)^2 = 1 \Rightarrow a = 1$

ABC
28

Ví dụ 2: Cho hàm số: $y = ax^2$. Tìm a biết rằng đồ thị của nó cắt đường thẳng $y = -2x + 3$ tại điểm A có hoành độ bằng 1.

Giải:

- ❖ Vì điểm A thuộc đường thẳng $y = -2x + 3$ nên tọa độ của A thỏa mãn phương trình này, nghĩa là: $y = -2.1 + 3 = 1$. Như vậy $A(1; 1)$.
- ❖ Vì điểm A thuộc đồ thị $y = ax^2$ nên $a.1^2 = 1 \Rightarrow a = 1$.

Dạng 4: Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Phương pháp giải: Thực hiện các bước sau:

- Lập bảng giá trị
- Vẽ đồ thị.

Ví dụ: Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

Giải:

Ta có bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Đồ thị là đường parabol đỉnh $O(0; 0)$ nằm phía trên trục hoành, nhận trục tung làm trục đối xứng và đi qua các điểm có tọa độ cho trong bảng trên.

Dạng 5: Tìm giao điểm của hai đồ thị

Phương pháp giải: Thực hiện các bước sau:

- Lập phương trình hoành độ giao điểm.
- Giải phương trình để tìm được tọa độ các giao điểm.

Chú ý:

- Có thể xác định tọa độ các giao điểm dựa vào đồ thị
- Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép.

Ví dụ 1: Cho hai đồ thị (P): $y = 2x^2$ và (d): $y = -x + 3$. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$

Thay $x_1 = 1$ vào hàm số $y = -x + 3$ ta được $y_1 = -1 + 3 = 2$

Thay $x_2 = -\frac{3}{2}$ vào hàm số $y = -x + 3$ ta được $y_2 = \frac{9}{2}$.

Ví dụ 2: Cho hai đồ thị (P): $y = mx^2$ và (d): $y = 2x - 5$. Tìm m để (P) và (d) tiếp xúc nhau.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $mx^2 = 2x - 5 \Leftrightarrow mx^2 - 2x + 5 = 0$ (1);
(P) và (d) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 5m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}$$

Vậy $m = \frac{1}{5}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: a. Vẽ đồ thị Parabol (P) của hàm số $y = -x^2$ và đường thẳng (D): $y = x - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b. Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.

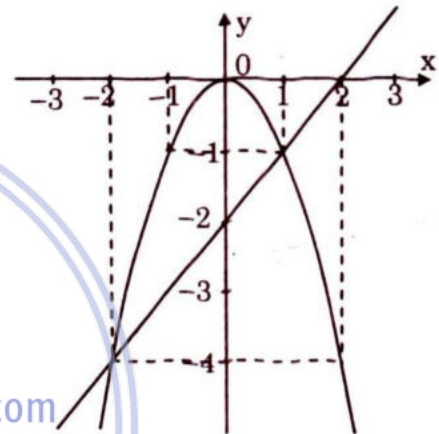
Giải :

a) * Bảng giá trị đặc biệt của hàm số $y = -x^2$:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

* Bảng giá trị đặc biệt của hàm số $y = x - 2$:

x	0	2
$y = x - 2$	-2	0



• Đồ thị của Parabol(P) và đường thẳng (D) được vẽ như sau: downloaadsachmienphi.com

b) Phương trình hoành độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (D) là: $-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -2$ ($a + b + c = 0$)

Khi $x = 1$ thì $y = -1$; Khi $x = -2$ thì $y = -4$.

Vậy Parabol (P) cắt đường thẳng (D) tại hai điểm là (1; -1) và (-2; -4).

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

a. Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của hàm số đã cho cắt đường thẳng d: $y = -2x + 3$ tại điểm A có tung độ bằng -1.

b. Vẽ đồ thị (P) của hàm số ứng với giá trị a vừa tìm được trong câu a) và vẽ đường thẳng d trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Tìm giao điểm thứ hai B của (P) và d.

Giải:

a. + Điểm A ở trên d và có tung độ bằng -1 nên:

$$-1 = -2x + 3 \Leftrightarrow x = 2. \text{ Do đó: } A(2; -1).$$

+ A là giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^2$ với d, nên A thuộc (P), suy ra:

$$-1 = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}.$$

ABC
130

b. + Vẽ parabol (P): $y = -\frac{1}{4}x^2$. Vẽ đường thẳng d

+ Hoàn thành đồ thị của (P) và d là nghiệm của phương trình:

$$-\frac{1}{4}x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

+ Giải phương trình ta được nghiệm thứ hai là: $x_2 = 6 \Rightarrow y_2 = -9$

Vậy giao điểm thứ hai của (P) và d là B(6; -9).

Ví dụ 5: Trong cùng một hệ trục tọa độ, cho (P) và (D) lần lượt là đồ thị của $y = x^2$ và $y = -x + 2$.

a. Gọi (D') là đường thẳng song song với (D) và (D') đi qua điểm M(0; m) (m là tham số). Viết phương trình của (D').

b. Với giá trị nào của m: + (D') cắt (P) tại 2 điểm khác nhau?
+ (D') và (P) không có điểm chung?
+ (D') tiếp xúc với (P)?

Giải:

a. (D') có dạng $y = ax + b$.

+ Vì (D') // (D) $\Rightarrow a = -1$

+ M(0; m) $\in$ (D') $\Leftrightarrow m = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = m$.

Vậy phương trình của (D') là: $y = -x + m$.

b. Số giao điểm của (D') và (P) chính là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D').

Với (P): $y = x^2$ và (D'): $y = -x + m$, ta có phương trình hoành độ giao điểm của (D') và (P) là: $x^2 = -x + m \Leftrightarrow x^2 + x - m = 0$ (1).

* $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$. Vậy, với $m > -\frac{1}{4}$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, suy ra (D') và (P) cắt nhau tại hai điểm khác nhau.

* $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 + 4m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$. Vậy, với $m < -\frac{1}{4}$ phương trình (1) vô nghiệm, suy ra (D') và (P) không có điểm chung.

* $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$. Vậy, với $m = -\frac{1}{4}$ phương trình (1) có nghiệm kép, suy ra (D') và (P) tiếp xúc nhau.

Ví dụ 6: Cho hai đường thẳng có phương trình:

$mx - (n+1)y - 1 = 0$ (d) và $nx + 2my + 2 = 0$ (d'). Xác định các giá trị của n và m sao cho (d) và (d') cắt nhau tại điểm P(-1; 3).

ABC

Giải:

Đường thẳng (d) và (d') cắt nhau tại $P(-1;3)$ khi và chỉ khi hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} mx - (n+1)y - 1 = 0 \\ nx + 2my + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{có nghiệm duy nhất } (-1;3)$$

$$\text{Kết quả: } m = -\frac{10}{19}; n = -\frac{22}{19}.$$

Ví dụ 7: Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng $x + 2y = 1$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y = 4$ và $d_2: 3x + y = 5$.

Giải:

+ Đường thẳng $x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, nên có hệ số góc $a = -\frac{1}{2}$

+ Đường thẳng d song song với đường thẳng $x + 2y = 1$, nên

$$d: y = -\frac{1}{2}x + b \quad \left(b \neq \frac{1}{2} \right)$$

+ Tọa độ giao điểm M của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad \text{Giải hệ phương trình ta có } M\left(\frac{19}{11}; -\frac{2}{11}\right)$$

$$+ \text{ Đường thẳng d đi qua M nên: } -\frac{2}{11} = -\frac{19}{22} + b \Leftrightarrow b = \frac{15}{22} \neq \frac{1}{2}$$

$$+ \text{ Vậy phương trình của đường thẳng d: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{22} \Leftrightarrow 11x + 22y = 15.$$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (D) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P).

1. Tìm a, b biết rằng (D) đi qua $A(-1;3)$ và $B(2;0)$.
2. Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm được.
Viết phương trình của (P).

Giải:

$$1. A(-1;3) \in (D) \Leftrightarrow 3 = -a + b; B(2;0) \in (D) \Leftrightarrow 0 = 2a + b$$

$$\text{Ta có hệ phương trình có ẩn a, b: } \begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 + a \\ 3a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng (D) là: $y = -x + 2$.

2. Ta biết rằng (D) tiếp xúc với (P) khi phương trình hoành độ giao điểm của chúng có nghiệm kép. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P): $kx^2 = -x + 2 \Leftrightarrow kx^2 + x - 2 = 0 \quad (1)$

$$(1) \text{ có nghiệm kép khi } \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = 1 + 8k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$$

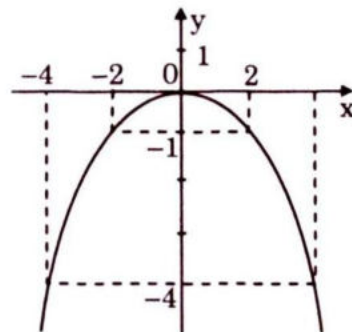
Vậy phương trình của (P) là: $y = -\frac{1}{8}x^2$.

Ví dụ 9: Cho parabol (P): $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng (D): $y = mx - 2m - 1$

- Vẽ (P).
- Tìm m để (D) tiếp xúc với (P).
- Chứng tỏ rằng (D) luôn đi qua một điểm cố định A thuộc (P).

Giải:

a. Vẽ (P): $y = -\frac{x^2}{4}$ (Hình)



b. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là

$$-\frac{x^2}{4} = mx - 2m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8m - 4 = 0$$

$$\Delta' = 4m^2 + 8m + 4 = (2m + 2)^2.$$

(D) tiếp xúc với (P) khi $\Delta' = (2m + 2)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$.

c. Giả sử $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc (D), ta có:

$$y_0 = mx_0 - 2m - 1 \text{ với mọi } m \Leftrightarrow m(x_0 - 2) - 1 - y_0 = 0 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ -1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

Vậy (D) luôn đi qua điểm cố định $A(2; -1)$ thuộc (P): $y = -\frac{x^2}{4}$

Ví dụ 10: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (D): $y = mx - m + 1$.

- Chứng minh rằng đường thẳng (D) và parabol (P) luôn có điểm chung với mọi giá trị của m.
- Với giá trị nào của m thì (D) và parabol (P) tiếp xúc với nhau?
- Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị của hai hàm số tìm được ở câu

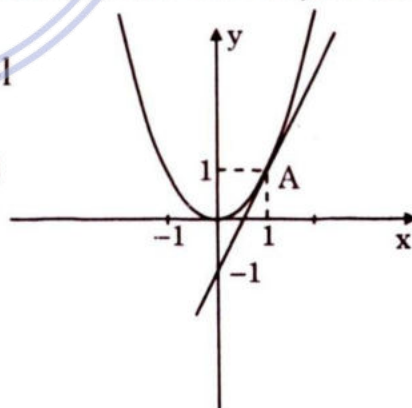
Giải:

a. Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và (D) là:

$$x^2 = mx - m + 1(1) \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 1 = 0$$

$$\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 \geq 0 \text{ với mọi}$$

giá trị của m $\Rightarrow$ phương trình (1) luôn luôn có nghiệm hay (D) và (P) luôn luôn có điểm chung với mọi giá trị của m.



- (D) tiếp xúc với (P) khi (1) có nghiệm kép hay $\Delta = (m - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$
Lúc đó phương trình của đường thẳng (D) là: $y = 2x - 1$
- Vẽ đồ thị: Trên đồ thị ta thấy (P) và (D) tiếp xúc nhau tại điểm A (1; 1).

ABC

Ví dụ 11: Với giá trị nào của m thì đường thẳng $(d): y = \frac{3}{2}x + 2m$ cắt Parabol

$$(P): y = -\frac{3}{4}x^2 \text{ tại hai điểm phân biệt?}$$

Giải:

Tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2m \\ y = -\frac{3}{4}x^2 \end{cases} \text{ . Suy ra phương trình hoành độ giao điểm:}$$

$$\frac{3}{2}x + 2m = -\frac{3}{4}x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 8m = 0 \quad (1)$$

Điều kiện để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt là (1) có 2 nghiệm phân biệt nghĩa là: $\Delta' = 9 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{8}$.

Dạng 6: Tìm điểm cố định mà đó thì hàm số luôn đi qua với mọi tham số m

Ví dụ 1 : Cho đường thẳng $(d_m): 2mx + (3m - 1)y - 6 = 0$

- Tìm đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; -3)$ và xác định hệ số góc của đường thẳng đó
- Tìm điểm cố định B của (d_m) với mọi m

Giải:

- Tìm đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; -3)$ và xác định hệ số góc của đường thẳng đó .

Do $A(-1; -3) \in (d_m)$ thế tọa độ điểm A vào phương trình (d_m) ta có

$$2m(-1) + (3m - 1)(-3) - 6 = 0 \Leftrightarrow -11m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{11}$$

$$\text{Khi } m = -\frac{3}{11} \text{ đường thẳng } (d): 3x + 10y + 33 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{10}x - \frac{33}{10}$$

- Hệ số góc của đường thẳng (d) là $k = -\frac{3}{10}$.

Vậy đường thẳng (d) cần tìm là: $y = -\frac{3}{10}x - \frac{33}{10}$ và hệ số góc $k = -\frac{3}{10}$.

- Tìm điểm cố định B của (d_m) với mọi m

Giả sử $B(x; y)$ là điểm cố định của họ (d_m) với mọi m

$$\Leftrightarrow 2mx + (3m - 1)y - 6 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3y)m - 6 - y = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -6 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -6 \end{cases}$$

Vậy điểm cố định mà mọi đường thẳng (d_m) đi qua là: $B(9; -6)$.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng: $(m - 2)x + (m - 1)y = 1$ (m là tham số)

- Chứng minh rằng đường thẳng luôn luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .
- Tính giá trị của m để khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng là lớn nhất.

Giải:

- Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(m - 2)x + (m - 1)y = 1$ (1) đi qua điểm cố định là: $(m - 2)x + (m - 1)y = 1$ với mọi m

$$\Leftrightarrow mx - 2x + my - y - 1 = 0 \quad \text{với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow (x + y)m - (2x + y + 1) = 0 \quad \text{với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy các đường thẳng (1) luôn đi qua điểm cố định $N(-1; 1)$.

- Gọi A là giao điểm của đường thẳng (1) với trục tung.

Ta có: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{m - 1}$. Do đó $OA = \frac{1}{|m - 1|}$. Gọi B là giao điểm của

đường thẳng (1) với trục hoành. Ta có: $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{m - 2}$

Do đó $OB = \frac{1}{|m - 2|}$. Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng (1).

$$\text{Ta có: } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = (m - 1)^2 + (m - 2)^2 = 2m^2 - 6m + 5$$

$$= 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Suy ra $h^2 \leq 2$, $\max h = \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $m = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 3: Xét các đường thẳng d có phương trình:

$$(2m + 3)x + (m + 5)y + (4m - 1) = 0 \quad (m \text{ là tham số})$$

- Vẽ đồ thị đường thẳng d , ứng với $m = -1$.
- Tìm điểm cố định mà mọi đường thẳng d đều đi qua.

Giải:

$$\text{a. } x + 4y - 5 = 0$$

- Điều kiện cần và đủ để đường thẳng

$$(2m + 3)x + (m + 5)y + (4m - 1) = 0 \text{ đi qua điểm cố định là:}$$

$$2mx + 3x + my + 5y + 4m - 1 = 0 \quad \text{với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow m(2x + y + 4) + 3x + 5y - 1 = 0 \quad \text{với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ 3x + 5y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng trên luôn đi qua điểm cố định $A(-3; 2)$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = mx + m - 1$. Chứng minh rằng với mọi m đồ thị hàm số trên luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:

Xét điểm $A(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng tọa độ. Ta có $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số: $y = mx + m - 1, \forall m \Leftrightarrow y_0 = mx_0 + m - 1, \forall m$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)m - (y_0 + 1) = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -1).$$

Vậy đồ thị hàm số $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định $A(-1; -1), \forall m$.

Ví dụ 5: Cho các đường thẳng:

$$y = x - 2 \quad (d_1); y = 2x - 4 \quad (d_2); y = mx + (m + 2) \quad (d_3)$$

- Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d_3) luôn đi qua với mọi giá trị m .
- Tìm m để ba đường thẳng $(d_1); (d_2); (d_3)$ đồng quy.

Giải:

a. $(d_3): y = mx + (m + 2) \Leftrightarrow m(x + 1) + (2 - y) = 0$

Để hàm số luôn đi qua điểm cố định với mọi $m \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy $N(-1; 2)$ là điểm cố định mà (d_3) đi qua

- b. Gọi M là giao điểm (d_1) và (d_2) . Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}. \text{ Vậy } M(2; 0). \text{ Nếu } (d_3) \text{ đi qua } M(2; 0) \text{ thì}$$

$$M(2; 0) \text{ là nghiệm } (d_3). \text{ Ta có: } 0 = 2m + (m + 2) \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

Vậy $m = -\frac{2}{3}$ thì $(d_1); (d_2); (d_3)$ đồng quy.

Dạng 7: Các bài toán liên quan khác

Ví dụ 1: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 4 điểm $A(-3; 4), B(-2; 1), C(1; 2), D(0; 5)$.

- Cho biết đơn vị đo trên các trục tọa độ là cm, tính độ dài các cạnh và các đường chéo của tứ giác ABCD. Tứ giác ABCD là hình gì?
- Dựa vào hình vẽ, cho biết tọa độ giao điểm của 2 đường chéo của tứ giác ABCD.

Giải:

- a. + Tứ giác ABCD có: Các cạnh bằng nhau vì cùng bằng cạnh huyền của tam giác vuông có các cạnh góc vuông là 3cm và 1cm. Do đó độ dài mỗi cạnh của tứ giác là: $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}(\text{cm})$. Các đường chéo bằng nhau vì cùng bằng cạnh huyền của tam giác vuông có các cạnh góc vuông là 2cm và 4cm. Do đó độ dài mỗi đường chéo của tứ giác là:

$AC = BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}(\text{cm})$. Tứ giác ABCD có 4 cạnh bằng nhau và hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

b. + Từ hình vẽ suy ra giao điểm của 2 đường chéo là: $I(-1;3)$.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = (2m - 1)x$ với $m \neq \frac{1}{2}$

a. Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến? nghịch biến?

b. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

c. Vẽ đồ thị hàm số với giá trị m vừa tìm được ở câu b.

d. Đồ thị vừa vẽ có quan hệ như thế nào với các đường thẳng sau:

$$3x + y = 1 \quad (1); \quad 3y - x - 12 = 0 \quad (2)$$

Giải:

a. Hàm số đồng biến nếu $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

nghịch biến nếu $2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

b. Ta có: $\frac{3}{2} = (2m - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m = 1$.

c. Học sinh tự làm.

d. Song song với đường thẳng (1). Vuông góc với đường thẳng (2).

Ví dụ 3: a. Xác định các hệ số a, b, c của hàm số $y = ax^2 + bx + c$, biết đồ thị (P) của hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; -5)$, cắt trục Ox tại điểm $(-1; 0)$ và đi qua điểm $(1; -6)$.

b. Với giá trị nào của x thì hàm số vừa xác định có giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó của hàm số.

c. Xác định sự biến thiên của hàm số đã tìm được ở câu a) khi $x < \frac{3}{4}$ và khi $x > \frac{3}{4}$.

Giải:

a. + (P) cắt Oy tại $(0; -5)$, nên $c = -5$.

+ (P) cắt Ox tại $(-1; 0)$, nên $0 = a - b - 5 \Leftrightarrow a - b = 5 \quad (1)$

+ (P) đi qua điểm $(1; -6)$, nên $-6 = a + b - 5 \Leftrightarrow a + b = -1 \quad (2)$

+ Giải hệ (1) và (2) ta có: $a = 2; b = -3$.

Hàm số cần xác định là: $y = 2x^2 - 3x - 5$ (P).

b. + Ta có: $y = 2x^2 - 3x - 5 = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$ có tập xác định là R.

$y = 2x^2 - 3x - 5 \geq -\frac{49}{8}, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là

$y_{\min} = -\frac{49}{8}$ khi và chỉ khi: $x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{c. } \forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 < \frac{3}{4} &\Rightarrow x_1 - \frac{3}{4} < x_2 - \frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 > \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 \\ &\Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} > \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} \\ &\Rightarrow 2\left[\left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] > 2\left[\left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] \\ &\Rightarrow 2x_1^2 - 3x_1 - 5 > 2x_2^2 - 3x_2 - 5 \\ &\Rightarrow y_1 > y_2. \text{ Vậy: hàm số nghịch biến khi } x < \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 : \frac{3}{4} < x_1 < x_2 &\Rightarrow 0 < x_1 - \frac{3}{4} < x_2 - \frac{3}{4} \Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 < \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 \\ &\Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} < \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} \\ &\Rightarrow 2\left[\left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] < 2\left[\left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] \\ &\Rightarrow 2x_1^2 - 3x_1 - 5 < 2x_2^2 - 3x_2 - 5 \\ &\Rightarrow y_1 < y_2. \text{ Vậy: hàm số đồng biến khi } x > \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4 : Cho parabol (P) có đỉnh ở gốc tọa độ O và đi qua điểm $A\left(1; -\frac{1}{4}\right)$

a. Viết phương trình của parabol (P).

b. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng $x + 2y = 1$ và đi qua điểm $B(0; m)$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho $3x_1 + 5x_2 = 5$.

Giải:

a. Phương trình của parabol (P) có dạng: $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

+ (P) đi qua điểm $A\left(1; -\frac{1}{4}\right)$, nên: $a = -\frac{1}{4}$.

Vậy phương trình của parabol (P) là: $y = -\frac{1}{4}x^2$.

b. + Đường thẳng d song song với đường thẳng

$x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, nên phương trình của d có dạng:

$$y = -\frac{1}{2}x + b \quad \left(b \neq \frac{1}{2}\right); B(0; m) \in d : m = 0 + b = b$$

Suy ra phương trình đường thẳng d là: $y = -\frac{1}{2}x + m \quad \left(m \neq \frac{1}{2}\right)$.

+ Phương trình cho hoành độ giao điểm của đường thẳng d và parabol

(P) là: $-\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4m = 0$

+ Để đường thẳng d cắt parabol (P) tại 2 điểm thì điều kiện cần và đủ là:

$$\Delta' = 1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4} \quad (*).$$

+ Với điều kiện (*), đường thẳng d cắt parabol (P) tại 2 điểm có hoành độ x_1 và x_2 . Theo giả thiết, ta có: $3x_1 + 5x_2 = 5 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 2x_2 = 5$

+ Áp dụng định lý Vi-ét, ta có: $6 + 2x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$

+ Thay nghiệm x_2 vào phương trình: $\frac{1}{4} + 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{16}$.

+ Đối chiếu điều kiện (*), ta có: $m = -\frac{5}{16}$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

a. Vẽ đồ thị của hàm số trên.

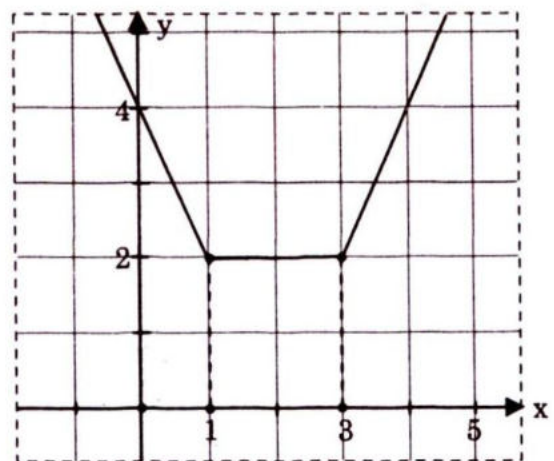
b. Với giá trị nào của x thì $y \geq 4$.

Giải:

a. $y = |x-1| + |x-3|$

$$\Leftrightarrow y = \begin{cases} -2x + 4 & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{khi } x > 3 \end{cases}$$

b. Ta có: $y \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4 \geq 4 \\ 2x - 4 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$



ABC

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = x^2 + bx + c$

- Xác định các hệ số b và c biết đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(1; 2)$ và $B(2; 1)$
- Với $b; c$ vừa tìm được, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- Chứng minh rằng đường thẳng $y = 2x - 4$ tiếp xúc với đồ thị của hàm số trên.

Giải:

- Đồ thị hàm số $y = x^2 + bx + c$ đi qua các điểm $A(1; 2)$ và $B(2; 1)$ nên

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ 2b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ b = -4 \end{cases}$$

- $y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$ với mọi x .

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là 1 khi $x = 2$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 2x - 4$ và đồ thị hàm số trên là: $x^2 - 4x + 5 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$

Phương trình có nghiệm kép $x = 3$

Vậy hai đồ thị tiếp xúc nhau tại $M(3; 2)$.

Ví dụ 7: Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (D) có phương trình $y = 2x + m^2 + 1$

- Chứng minh rằng với mọi m , đường thẳng (D) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B.
- Kí hiệu $x_A; x_B$ lần lượt là hoành độ của điểm A và điểm B. Hãy xác định giá trị của tham số m sao cho $x_A^2 + x_B^2 = 10$.

Giải:

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là:

$$x^2 = 2x + m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' = 1 + m^2 + 1 = m^2 + 2 > 0 \text{ với mọi giá trị của } m$$

$\Rightarrow$ phương trình (1) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ với mọi m , (D) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

- x_A, x_B chính là nghiệm của (1) nên áp dụng định lý Viet, ta có:

$$S = x_A + x_B = 2; P = x_A \cdot x_B = -m^2 - 1$$

$$x_A^2 + x_B^2 = (x_A + x_B)^2 - 2x_A \cdot x_B = 4 + 2m^2 + 2 = 10 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Ví dụ 8: Cho đường thẳng (D): $5x - 7y = 3$

- Một parabol (P) có đỉnh là gốc tọa độ, trục đối xứng Oy và tiếp xúc với (D). Tìm tọa độ tiếp điểm.
- Chứng minh rằng trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 6; x = 18; y = 7; y = 23$ có duy nhất 1 điểm thuộc (D) mà tọa độ của điểm đó là cặp số nguyên.

Giải:

- a. Parabol (P) có đỉnh là gốc tọa độ, trục đối xứng Oy nên có phương trình là: $y = ax^2$ ($a \neq 0$). (D) có phương trình: $y = \frac{5x-3}{7}$

(P) tiếp xúc với (D) khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm của chúng có nghiệm kép.

$$ax^2 = \frac{5x-3}{7} \Leftrightarrow 7ax^2 - 5x + 3 = 0; \Delta = 25 - 84a = 0 \Rightarrow a = \frac{25}{84}$$

Tọa độ của tiếp điểm $M\left(\frac{6}{5}; \frac{3}{7}\right)$.

- b. Áp dụng công thức nghiệm tổng quát của phương trình bậc nhất hai ẩn ta có công thức nghiệm của $5x - 7y = 3$ là: $\begin{cases} x = 2 - 7t \\ y = 1 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Mà } 6 \leq x \leq 18 \Leftrightarrow -\frac{4}{7} \geq t \geq -\frac{16}{7} \quad (1); 7 \leq y \leq 23 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} \geq t \geq -\frac{22}{5} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } -\frac{16}{7} \leq t \leq -\frac{6}{5} \Rightarrow t = -2 \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Khi đó $x = 16$; $y = 11$. Vậy trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 6$; $x = 18$; $y = 7$; $y = 23$ có duy nhất 1 điểm thuộc (D) mà tọa độ của điểm đó là cặp số nguyên là điểm A(16; 11)

Ví dụ 9: Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d) có hệ số góc m đi qua điểm M(-1; -2).

- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt.
- Xác định m để A, B nằm về hai phía của trục tung.

Giải:

- a. Đường thẳng (d) có hệ số góc m và đi qua điểm M(-1; -2). nên phương trình đường thẳng (d) là: $y = mx + m - 2$.

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$-x^2 = mx + m - 2 \Leftrightarrow x^2 + mx + m - 2 = 0 \quad (*)$$

Vì phương trình (*) có $\Delta = m^2 - 4m + 8 = (m - 2)^2 + 4 > 0, \forall m$ nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt, do đó (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.

- b. A và B nằm về hai phía của trục tung

$$\Leftrightarrow \text{phương trình: } x^2 + mx + m - 2 = 0 \text{ có hai nghiệm trái dấu}$$

$$\Leftrightarrow m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Ví dụ 10: Cho các điểm A(-2;0); B(0;4); C(1;1); D(-3;-2)

- Chứng minh 3 điểm A, B, D thẳng hàng; 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

b. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải:

- a. Đường thẳng đi qua 2 điểm A và B có dạng $y = ax + b$

Điểm A(-2;0) và B(0;4) thuộc đường thẳng AB nên $\Rightarrow b = 4; a = 2$

Vậy đường thẳng AB là $y = 2x + 4$. Điểm C(1;1) có tọa độ không thỏa mãn $y = 2x + 4$ nên C không thuộc đường thẳng AB $\Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng. Điểm D(-3;-2) có tọa độ thỏa mãn $y = 2x + 4$ nên điểm D thuộc đường thẳng AB $\Rightarrow A, B, D$ thẳng hàng.

- b. Ta có: $AB^2 = (-2 - 0)^2 + (0 - 4)^2 = 20$; $AC^2 = 10$; $BC^2 = 10$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5$ (đvdt)

Ví dụ 11: Trên mặt phẳng tọa độ cho hai điểm A(5; 2) và B(3; -4)

- a. Viết phương trình đường thẳng AB.

- b. Xác định điểm M trên trục hoành để tam giác MAB cân tại M.

Giải:

- a. A và B có hoành độ và tung độ đều khác nhau nên phương trình đường thẳng AB có dạng $y = ax + b$

$$A(5;2) \in AB \Rightarrow 5a + b = 2; B(3;-4) \in AB \Rightarrow 3a + b = -4.$$

Giải hệ ta có $a = 3$; $b = -13$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = 3x - 13$.

- b. Giả sử $M(x, 0) \in xx'$ ta có:

$$MA = \sqrt{(x-5)^2 + (0-2)^2}; MB = \sqrt{(x-3)^2 + (0+4)^2}$$

$$\Delta MAB \text{ cân} \Rightarrow MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2 + 4} = \sqrt{(x-3)^2 + 16}$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + 4 = (x-3)^2 + 16 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Kết luận: điểm cần tìm: } M(1;0)$$

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = -x^2$.

- a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2$, suy ra đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 + 2$.

- b. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A(1;-2), hệ số góc k. Xác định k để d cắt (P) tại hai điểm B, C nhận A làm trung điểm.

Giải:

- a. Học sinh tự giải.

- b. Ta có phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2 + kx - k - 2 = 0$, phương trình này có $\Delta = (k+2)^2 + 4 > 0$ nên để cắt (P) tại hai điểm B, C nhận A

làm trung điểm, ta cần có: $1 = -\frac{1}{2}k \Leftrightarrow k = -2$.

Ví dụ 13: Cho parabol (P) có phương trình: $y = \frac{x^2}{4} - 2x$

- Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4}$.
- Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) với $3x - 4y - 24 = 0$.
- Lập phương trình tiếp tuyến của parabol (P) tại $A(8;0)$.

Giải:

- Học sinh tự giải.
- Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x^2}{4} - 2x = \frac{3}{4}x - 6$, suy ra
 $(x = 8; y = 0)$ hoặc $(x = 3; y = -\frac{15}{4})$.
- Phương trình đường thẳng qua $A(8;0)$ có dạng: $y = kx - 8k$.
 Để đường thẳng trên là tiếp tuyến của (P) tại A, phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x^2}{4} - 2x = kx - 8k \Leftrightarrow x^2 - 2(4 + 2k)x + 32k = 0$ phải có nghiệm kép, tức là $\Delta' = 0 \Rightarrow k = 2$.
 Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 2x - 16$.

Ví dụ 14: a. Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{khi } -3 \leq x \leq 0 \\ -x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

- Tìm m để đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x + 4$ cắt trục Ox tại hai điểm A, B phân biệt và trục Oy tại điểm C sao cho $S_{ABC} = 1997$.

Giải:

- Học sinh tự giải.
- Để đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x + 4$ cắt trục Ox tại hai điểm A, B phân biệt với hoành độ tương ứng là x_1, x_2 , phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 4 = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt, suy ra $m < -3$ hay $m > 1$. Ngoài ra, đồ thị cắt trục Oy tại điểm $C(0;4)$. Khi đó:

$$S_{ABC} = 1997 \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = \frac{1997}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = \frac{1997^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 16 = \frac{1997^2}{4} \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{\frac{1997^2 + 64}{16}}$$

Ví dụ 15: Cho hàm số: $y = \frac{-x^2}{2}$ (P)

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.
- Tìm các điểm thuộc đồ thị (P) có tung độ bằng -5

Giải:

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số: Lập bảng giá trị đặc biệt:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1/2	0	-1/2	-2

Học sinh tự vẽ đồ thị.

b. Ta có: $y = -5$ nên $-5 = -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}$ Vậy có hai điểm thuộc đồ thị (P) có tung độ bằng -5 là $(-\sqrt{10}; -5); (\sqrt{10}; -5)$.

Ví dụ 16: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$, có đồ thị là (P). Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm M và N nằm trên parabol (P) lần lượt có hoành độ là -2 và 1 .

Giải:Tìm được M $(-2; -2)$; N $(1; -\frac{1}{2})$.Phương trình đường thẳng có dạng $y = ax + b$, đường thẳng đi qua M và

$$N \text{ nên } \begin{cases} -2a + b = -2 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ . Tìm được } a = \frac{1}{2}; b = -1.$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $y = \frac{1}{2}x - 1$.

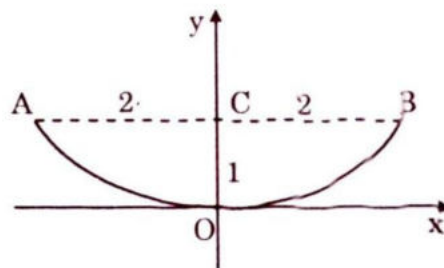
Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Bài tập vận dụng

- Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 4 điểm A $(-3; 4)$, B $(-2; 1)$, C $(1; 2)$, D $(0; 5)$.
 - Cho biết đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét (cm), tính độ dài các cạnh và các đường chéo của tứ giác ABCD. Tứ giác ABCD là hình gì?
 - Dựa vào hình vẽ, cho biết tọa độ giao điểm của 2 đường chéo của tứ giác ABCD.
- Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).
 - Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của hàm số đã cho cắt đường thẳng d: $y = -2x + 3$ tại điểm A có tung độ bằng -1 .
 - Vẽ đồ thị (P) của hàm số ứng với giá trị a vừa tìm được trong câu a. và vẽ đường thẳng d trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Tìm giao điểm thứ hai B của (P) và d.

3. Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (D) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P).
1. Tìm a, b biết rằng (D) đi qua $A(-1;3)$ và $B(2;0)$.
 2. Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm được. Viết phương trình của (P).
4. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$. Tìm a và b để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $(0;-1)$ và tiếp xúc với (P).
- 5.a. Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$, điểm $A(0; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $y = -1$. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc parabol. Chứng minh rằng MA bằng khoảng cách MH từ điểm M đến đường thẳng d.
- b. Cho điểm $A(0; a)$, gọi d là đường thẳng có phương trình $y = -a$. Chứng minh rằng quỹ tích của điểm $M(x; y)$ sao cho khoảng cách MH từ M tới d bằng MA là một parabol.
6. a. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$
- b. Gọi C là một điểm tùy ý nằm trên parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$. Gọi K là trung điểm của OC. Khi điểm C di chuyển trên parabol đó thì điểm K di chuyển trên đường nào?
7. Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 3$.
- a. Xác định tọa độ các giao điểm A, B của parabol và đường thẳng đã cho.
 - b. Xác định tọa độ điểm C thuộc cung AB của parabol đó sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.
8. Cho parabol $y = x^2$. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc đường thẳng $y = -\frac{1}{4}$, các tiếp tuyến kẻ từ M với parabol vuông góc với nhau.
9. Cho đường thẳng (d): $y = mx - 2m - 1$ và Parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$
- Chứng minh (d) luôn đi qua điểm cố định khi m thay đổi.
 - Tìm giá trị của m để (d) tiếp xúc với P.
10. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng $x + 2y = 1$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y = 4$ và $d_2: 3x + y = 5$.
11. Trong mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng (d) có phương trình: $2mx + (m - 1)y = 2$ (m là tham số).
- a. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$. Khi đó, hãy xác định góc bởi (d) và tia Ox.
 - b. Chứng tỏ đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

12. Thiết diện đi qua trục của một chiếc gương có dạng parabol (hình). Hãy xác định phương trình của parabol đó, biết rằng độ sâu $OC = 1\text{cm}$ và đường kính $AB = 4\text{cm}$.



13. Cho đường thẳng

$$(m+2)x - my = -1 \quad (m \text{ là tham số}) \quad (1)$$

- a. Tìm điểm cố định mà đường thẳng (1) luôn đi qua.
b. Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (1) là lớn nhất.
14. Trong hệ trục tọa độ Oxy, lấy các điểm A và B sao cho $A(1; 1)$, $B(9; 1)$. Viết phương trình của đường thẳng d vuông góc với AB và chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau.

- 15.a. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.

- b. Có bao nhiêu điểm nằm trên cạnh hoặc nằm trong tam giác tạo bởi ba đường thẳng $x = 6$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ và có hoành độ và tung độ là các số nguyên?



Hướng dẫn và đáp số

- 1.a. + Tứ giác $ABCD$ có:

- Các cạnh bằng nhau vì cùng bằng cạnh huyền của tam giác vuông có các cạnh góc vuông là 3cm và 1cm . Do đó độ dài mỗi cạnh của tứ giác là: $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} (\text{cm})$
- Các đường chéo bằng nhau vì cùng bằng cạnh huyền của tam giác vuông có các cạnh góc vuông là 2cm và 4cm . Do đó độ dài mỗi đường chéo của tứ giác là: $AC = BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} (\text{cm})$

+ Tứ giác $ABCD$ có 4 cạnh bằng nhau và hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

- b. + Từ hình vẽ suy ra giao điểm của 2 đường chéo là: $I(-1; 3)$.

2. a. + Điểm A ở trên d và có tung độ bằng -1 nên: $-1 = -2x + 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Do đó: $A(2; -1)$.

+ A là giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^2$ với d , nên A thuộc (P) , suy ra:

$$-1 = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

b. + Vẽ đúng parabol (P): $y = -\frac{1}{4}x^2$

+ Vẽ đúng đường thẳng d

+ Hoàn chỉnh đồ thị của (P) và d là nghiệm của phương trình:

$$-\frac{1}{4}x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

+ Giải phương trình ta được nghiệm thứ hai là: $x_2 = 6 \Rightarrow y_2 = -9$

Vậy giao điểm thứ hai của (P) và d là B(6; -9).

3. 1. $A(-1;3) \in (D) \Leftrightarrow 3 = -a + b$; $B(2;0) \in (D) \Leftrightarrow 0 = 2a + b$

Ta có hệ phương trình có ẩn a, b: $\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 + a \\ 3a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

Vậy phương trình của đường thẳng (D) là: $y = -x + 2$.

2. Ta biết rằng (D) tiếp xúc với (P) khi phương trình hoành độ giao điểm của chúng có nghiệm kép. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và

(P): $kx^2 = -x + 2 \Leftrightarrow kx^2 + x - 2 = 0$ (1)

(1) có nghiệm kép khi $\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = 1 + 8k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$

Vậy phương trình của (P) là: $y = -\frac{1}{8}x^2$

4.

Bảng giá trị:

x	...	-2	-1	0	1	2...
y	...	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2...

Đồ thị (P) như hình vẽ sau:

Vì $y = ax + b$ (d) đi qua (0; -1) nên

$b = -1$, ta có (d): $y = ax - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của

(P) và (d) là: $\frac{x^2}{2} = ax - 1$

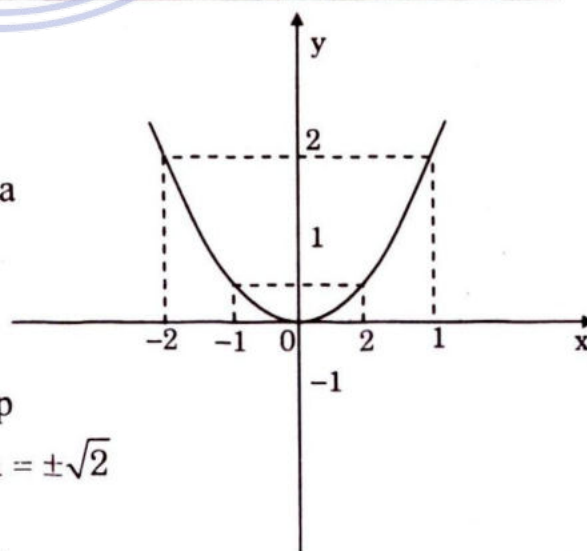
$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + 2 = 0$ (*); $\Delta' = a^2 - 2$

(d) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$

Vậy giá trị phải tìm là:

$a = \sqrt{2}; b = -1), (a = -\sqrt{2}; b = -1)$



5. a. Ta luôn có: $MH = y + 1$ (1)

Để tính MA , ta kẻ $MI \perp Oy$.

Ta có $MI = |x|$, $AI = |y - 1|$ nên

$$\begin{aligned} MA^2 &= MI^2 + AI^2 = x^2 + (y - 1)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$

Do $y = \frac{1}{4}x^2$ nên thay x^2 bởi $4y$ ta được:

$$MA^2 = 4y + y^2 - 2y + 1 = (y + 1)^2$$

Do đó $MA = |y + 1| = y + 1$ (do $y \geq 0$)

Từ (1) và (2) ta có: $MA = MH$.

b. (hình ứng với $a > 0$) theo công thức tính khoảng cách giữa hai điểm $M(x; y)$ và $A(0; a)$ ta có: $MA^2 = (x - 0)^2 + (y - a)^2$

$$= x^2 + y^2 - 2ay + a^2.$$

Ta lại có: $MH = |y + a|$ nên

$$MH^2 = (y + a)^2 = y^2 + 2ay + a^2; MA^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4ay \Leftrightarrow y = \frac{1}{4a}x^2.$$

Do đó, quỹ tích của M là parabol $y = \frac{1}{4a}x^2$.

Chú ý: Tổng quát, cho một điểm A và đường thẳng d không đi qua A , quỹ tích các điểm M sao cho khoảng cách MA bằng khoảng cách từ M đến d là một parabol.

6. a. Xem hình

b. Gọi tọa độ của điểm C là $(m; n)$.

Điểm C thuộc parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$ nên

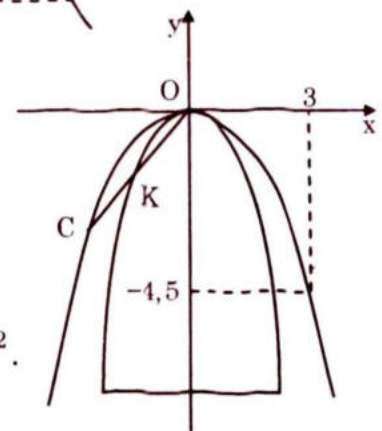
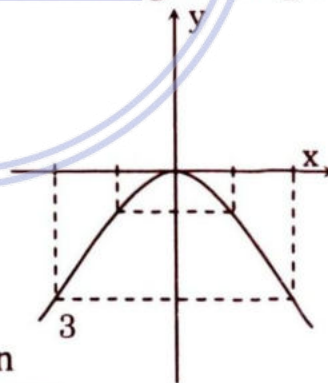
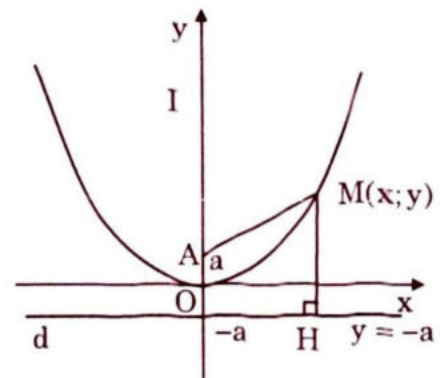
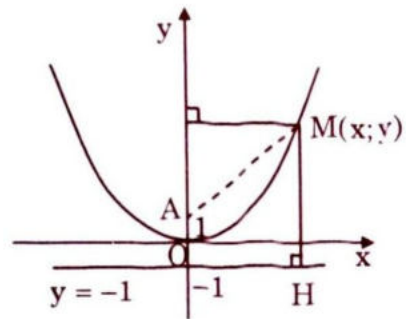
$$n = -\frac{1}{2}m^2 \quad (1).$$

Gọi tọa độ của điểm K là $(x; y)$, ta cần biểu thị y theo x . K là trung điểm của OC

nên $x = \frac{m}{2}$; $y = \frac{n}{2}$, suy ra $m = 2x$, $n = 2y$.

Thay vào (1) ta được: $2y = -\frac{1}{2}(2x)^2 = -2x^2$

Do đó $y = -x^2$. Điểm K di chuyển trên parabol $y = -x^2$.



7. a. Hoàn thành đồ thị của parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 3$ là

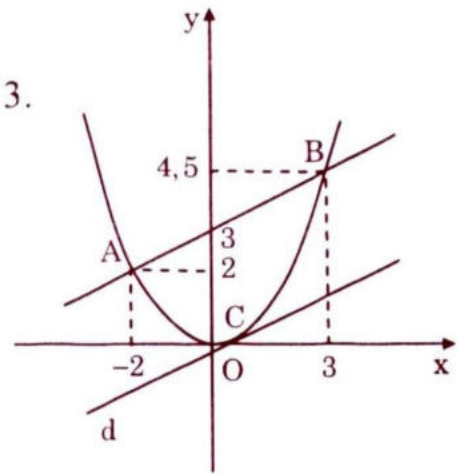
ng nghiệm của phương trình: $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$. (1)

Phương trình (1) có hai nghiệm $x = -2$ và $x = 3$.

Với $x = -2$ thì $y = 2$, với $x = 3$ thì $y = 4\frac{1}{2}$.

Giao điểm của parabol với đường thẳng là

$A(-2; 2)$ và $B(3; 4\frac{1}{2})$.



b. Ta cần tìm điểm C thuộc cung AB và cách xa AB nhất. Ta xác định đường thẳng d song song với AB và tiếp xúc với parabol, tiếp điểm là điểm C cần tìm.

Đường thẳng d song song với AB có dạng: $y = \frac{1}{2}x + n$.

Điều kiện để d tiếp xúc với parabol là phương trình sau có nghiệm kép:

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + n. (2) \Leftrightarrow x^2 - x - 2n = 0$$

Phương trình (2) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 8n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{8}$.

Với $n = -\frac{1}{8}$ thì nghiệm kép của (2) là $x = \frac{1}{2}$. Khi đó:

$$y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}. \text{ Tọa độ tiếp điểm C của đường thẳng d với parabol}$$

là $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$. Mọi điểm C' khác C thuộc cung AB của parabol đều có khoảng cách AB nhỏ hơn khoảng cách từ C đến AB.

Vậy ABC có diện tích lớn nhất khi điểm C có tọa độ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$

8. (Hình) Trước hết lập phương trình đường thẳng

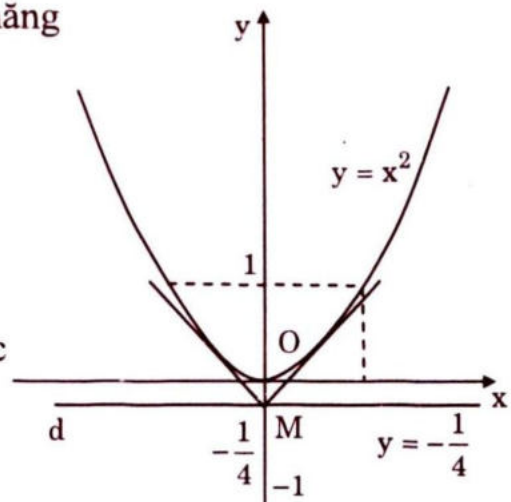
$y = mx + n$ đi qua $M\left(x_0; -\frac{1}{4}\right)$ được

$$y = mx - \left(mx_0 + \frac{1}{4}\right)$$

Giải điều kiện phương trình

$x^2 = mx - \left(mx_0 + \frac{1}{4}\right)$ có nghiệm kép, được

$$m^2 - 4mx_0 - 1 = 0$$



Hai nghiệm m_1, m_2 của phương trình này có tích $m_1 m_2 = -1$ (theo hệ thức Vi-ét) chứng tỏ rằng hai tiếp tuyến của parabol kẻ từ M vuông góc với nhau.

9. (d) : $y = mx - 2m - 1$.

Với giá trị $x = 2$ thì $y = -1$.

Vậy đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $(2; -1)$ khi m thay đổi.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y = mx - 2m - 1 \end{cases}$$

Nên phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 4mx + 8m + 4 = 0; \Delta' = 4m^2 - 8m - 4;$$

$$(d) \text{ tiếp xúc (P) khi } \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 1 + \sqrt{2} \\ m_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Với giá trị $m = \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$ thì (d) tiếp xúc (P).

10. + Đường thẳng $x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, nên có hệ số góc $a = -\frac{1}{2}$

+ Đường thẳng d song song với đường thẳng $x + 2y = 1$, nên

$$d: y = -\frac{1}{2}x + b \quad \left(b \neq \frac{1}{2}\right)$$

+ Tọa độ giao điểm M của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad \text{Giải hệ phương trình ta có } M\left(\frac{19}{11}, -\frac{2}{11}\right)$$

$$+ \text{ Đường thẳng d đi qua M nên: } -\frac{2}{11} = -\frac{19}{22} + b \Leftrightarrow b = \frac{15}{22} \neq \frac{1}{2}$$

$$+ \text{ Vậy phương trình của đường thẳng d: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{22} \Leftrightarrow 11x + 22y = 15$$

11. a. Tìm giá trị của m thì đường thẳng (d) song song với đường thẳng

$$y = \sqrt{3}x; 2mx + (m-1)y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{-2m}{m-1}x + \frac{2}{m-1} \quad (m \neq 1)$$

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$ nên

$$\sqrt{3} = \frac{-2m}{m-1} \Leftrightarrow (\sqrt{3} + 2)m = \sqrt{3} \Rightarrow m - 1 = 2\sqrt{3} - 4 = 2(\sqrt{3} - 2)$$

$$\Leftrightarrow m = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3.$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) là:

$$y = \sqrt{3}x + \frac{2}{-2(2 - \sqrt{3})} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 2 - \sqrt{3}$$

* Góc tạo bởi đường thẳng (d) và trục Ox là: $\operatorname{tg} \alpha = \left| \sqrt{3} \right| = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

- b. Chứng tỏ đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

Giả sử đường thẳng (d) đi qua điểm cố định $A(x_0; y_0)$ với $x_0; y_0 \in \mathbb{R}$.

Ta có: $2mx_0 + (m-1)y_0 = 2 \Leftrightarrow (2x_0 + y_0)m + (-y_0 + 2) = 0 (*)$

Phương trình (*) có nghiệm với mọi giá trị của m nên:

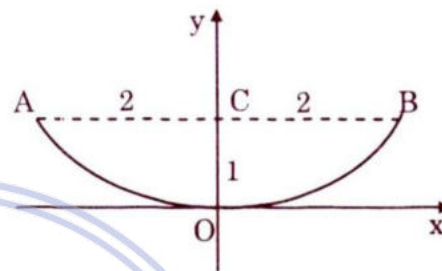
$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 0 \\ -y_0 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng $2mx + (m-1)y = 2$ đi qua $A(-1; 2)$ với mọi giá trị của m.

12. Parabol $y = ax^2$ đi qua $B(2; 1)$ nên

$$1 = a \cdot 2^2, \text{ do đó } a = \frac{1}{4}.$$

phương trình của parabol là $y = \frac{1}{4}x^2$.



12. (hình) Học sinh tự giải

13. a. Điểm cố định $N\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

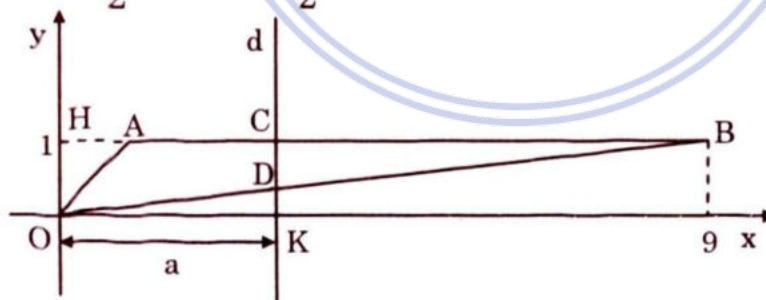


- b. Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng (I).

Ta tính được $\frac{1}{h^2} \geq 2 : \max h = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = -1$

14. (hình) Gọi H là giao điểm của AB và Oy, ta có:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 = 4.$$



Gọi giao điểm của d với AB, OB, Ox theo thứ tự là C, D, K.

Đặt $OK = a$ với $0 < a < 9$, ta có $CB = HB - HC = 9 - a$.

Đường thẳng OB có phương trình $y = \frac{1}{9}x$.

Điểm D có hoành độ $OK = a$ và nằm trên đường thẳng OB nên có tung độ $KD = \frac{a}{9}$.

Do đó: $DC = KC - KD = 1 - \frac{a}{9} = \frac{9-a}{9}$.

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} CB \cdot CD = \frac{1}{2} (9-a) \cdot \frac{9-a}{9} = \frac{(9-a)^2}{18}$$

Do $S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{OAB}$ nên $\frac{(9-a)^2}{18} = 2$. Ta tìm được $a = 15$ (loại) và $a = 3$.

Đường thẳng phải tìm có phương trình $x = 3$.

15. a. Hình vẽ bên.

b. Đường thẳng $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ (d) cắt đường thẳng $y = 0$ (trục hoành) tại điểm có hoành độ $x = -1\frac{1}{6}$.

Đường thẳng d cắt đường thẳng $x = 6$ tại điểm có tung độ $y = 10\frac{3}{4}$. Xét hàm số

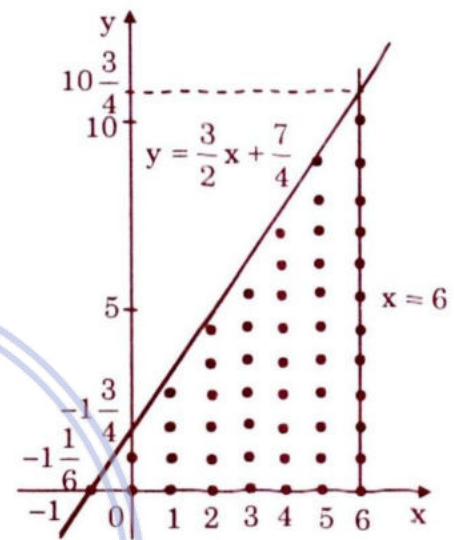
$$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Lần lượt cho x nhận các giá trị $-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$, ta được các giá trị

tương ứng là $\frac{1}{4}; 1\frac{3}{4}; 3\frac{1}{4}; 6\frac{1}{4}; 7\frac{3}{4}; 9\frac{1}{4}; 10\frac{3}{4}$.

Do đó số điểm có tọa độ nguyên phải tìm trên các đường thẳng $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6$ lần lượt là 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11.

Tổng số điểm phải đếm là: $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 = 48$.



6. Các bài toán hình học trong mặt phẳng

Một số kiến thức cơ bản

I. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (hình vẽ). Ta có:

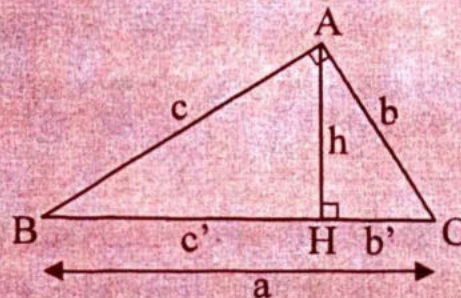
$$1) b^2 = ab'; c^2 = ac'.$$

$$2) b^2 + c^2 = a^2 \text{ (định lí Py-ta-go).}$$

$$3) h^2 = b'c'.$$

$$4) ah = bc.$$

$$5) \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$



2. Tỷ số lượng giác của góc nhọn

Các tỷ số lượng giác của góc nhọn α (hình vẽ) được định nghĩa như sau:

$\sin \alpha = \text{cạnh đối} / \text{cạnh huyền};$

$\cos \alpha = \text{cạnh kề} / \text{cạnh huyền};$

$\tan \alpha = \text{cạnh đối} / \text{cạnh kề};$

$\cot \alpha = \text{cạnh kề} / \text{cạnh đối};$

Với hai góc α và β phụ nhau,

ta có: $\sin \alpha = \cos \beta$, $\cos \alpha = \sin \beta$.

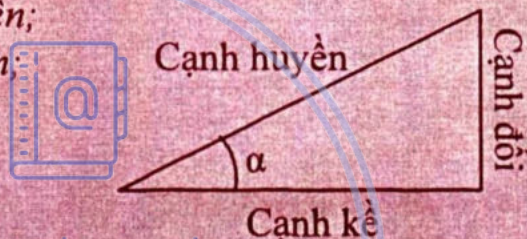
$\tan \alpha = \cot \beta$; $\cot \alpha = \tan \beta$.

Với một số góc đặc biệt, ta có:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1; \quad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$



3. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cosin góc kề; mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân tang góc đối hoặc nhân với cotang góc kề.

II. Đường tròn

1. Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn.

Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách đều O một khoảng bằng R .

Tùy theo $OM = R$; $OM < R$; $OM > R$ mà ta có điểm M nằm trên, nằm bên trong, nằm bên ngoài đường tròn.

Qua ba điểm không thẳng hàng, bao giờ cũng vẽ được một và chỉ một đường tròn.

Đường tròn có một tâm đối xứng, đó là tâm của đường tròn. Đường tròn có vô số trục đối xứng, đó là bất kì đường kính nào của nó.

2. Đường kính và dây của đường tròn. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Quan hệ về độ dài giữa đường kính và dây được thể hiện ở định lí: Trong một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây được thể hiện ở các định lí:

- * Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- * Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Để so sánh độ dài hai dây của một đường tròn dựa vào các định lí:

Trong một đường tròn

- a. Hai dây bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.
- b. Trong hai dây không bằng nhau, dây lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.

3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Căn cứ vào số điểm chung 0, 1, 2 của đường thẳng và đường tròn mà ta định nghĩa các vị trí: đường thẳng và đường tròn không giao nhau, tiếp xúc nhau, cắt nhau. Ứng với các vị trí trên, khoảng cách d từ tâm đường tròn đến đường thẳng và bán kính R của đường tròn có các liên hệ: $d > R$; $d = R$; $d < R$.

Ta có các định lí:

1. Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
2. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

4. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

Điểm đó cách đều hai tiếp điểm. Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến. Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

5. Đường tròn nội tiếp tam giác

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

6. Đường tròn bàng tiếp tam giác

Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác. Tâm của mỗi đường tròn bàng tiếp tam giác là giao điểm hai đường phân giác của hai góc ngoài của tam giác hoặc giao điểm của tia phân giác của góc trong và một trong hai đường phân giác của góc ngoài không kề với nó.

7. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Căn cứ vào số điểm chung 0, 1, 2 của hai đường tròn mà ta định nghĩa các vị trí: hai đường tròn không giao nhau, tiếp xúc nhau, cắt nhau. Do tính đối xứng của đường tròn, nếu hai đường tròn cắt nhau thì giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Các bài toán tính toán hình học

Dạng 2: Các bài toán chứng minh đẳng thức hình học

Dạng 3: Chứng minh tứ giác nội tiếp

Dạng 4: Bài tập tổng hợp

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Các bài toán tính toán hình học

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và có R là bán kính đường tròn ngoại tiếp thỏa hệ thức: $R(b + c) = a\sqrt{bc}$. Hãy tính các góc của tam giác ABC.

Giải:

$BC = a$ là dây cung của đường tròn bán kính R, do đó $2R \geq a$.
Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có:

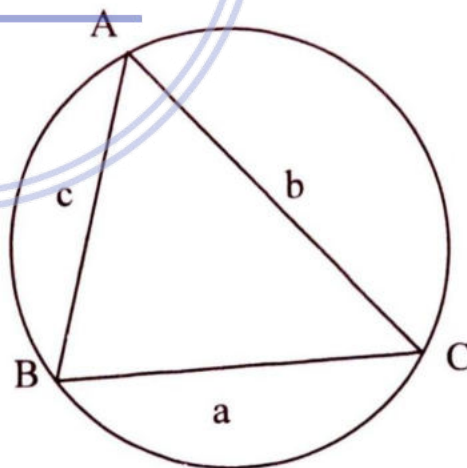
$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}.$$

$$\text{Do đó } 2R \cdot \frac{b+c}{2} \geq a \cdot \sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow R(b+c) \geq a\sqrt{bc}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \\ b = c \end{cases}; \begin{cases} \widehat{BAC} = 90^\circ \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại A}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 45^\circ, \hat{A} = 90^\circ.$$



ABC

Ví dụ 2: Cho hình thang ABCD có hai đường chéo AC và BD cùng bằng đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của CD. Cho biết $\widehat{MBC} = \widehat{CAB}$. Tính các góc của hình thang ABCD.

Giải:

Hình thang ABCD ($AB \parallel DC$) có:

$AC = BD$ (gt) nên là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ABC}$

Mà $\widehat{CAB} = \widehat{MBC}$ (giả thiết)

Do đó $\widehat{BAD} - \widehat{CAB} = \widehat{ABC} - \widehat{MBC} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{ABM}$ (1)

Gọi N là trung điểm cạnh AD $\Rightarrow MN$ là đường trung bình ΔADC

$\Rightarrow MN \parallel CA \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DNM}$ (2)

Từ (1) và (2) có $\widehat{ABM} = \widehat{DNM}$

$\Rightarrow$ Tứ giác ANMB nội tiếp được.

Mặt khác ΔBAD cân tại B ($AB = BD$) có BN là trung tuyến.

$\Rightarrow BN$ là đường cao của tam giác

$BAD \Rightarrow \widehat{ANB} = 90^\circ$

$\Rightarrow AB$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔMAB

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$. Mà $MA = MB$ (tính chất đối xứng trục)

Do đó ΔAMB vuông cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 45^\circ$;

ΔABC cân tại A ($AB = AC$)

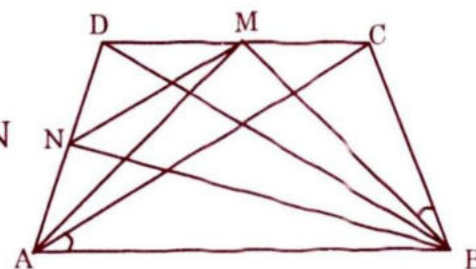
$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{MBA} + \widehat{MBC} = 45^\circ + \widehat{MBC}$. Ta có:

$\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ; \widehat{MBC} + 45^\circ + \widehat{MBC} + 45^\circ + \widehat{MBC} = 180^\circ$

$3\widehat{MBC} = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow \widehat{MBC} = 30^\circ$.

Do đó $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \widehat{MBA} + \widehat{MBC} = 75^\circ$

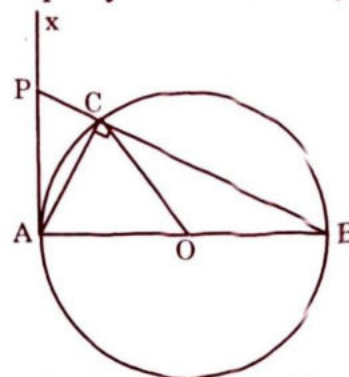
Vậy $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$



Ví dụ 3: Cho một nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Từ B, ta vẽ một cát tuyến cắt nửa đường tròn tại C và cắt tiếp tuyến Ax của một nửa đường tròn tại P.

a. Chứng minh tích BC, BP không đổi.

b. Trong trường hợp $BP = 2AP$, hãy tính diện tích của hình được giới hạn bởi PA, PC và cung AC.



Giải:

a. Trong tam giác vuông BAP có:

$BP \cdot BC = AB^2 = 4R^2$ (không đổi)

b. Nếu $BP = 2AP$ thì $\widehat{ABP} = 30^\circ$; $BP = \frac{2AB}{\sqrt{3}} = \frac{4R\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AP = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

ABC
156

Diện tích tam giác ABP là: $S_{ABP} = \frac{1}{2} AB \cdot AP = \frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình quạt AOC là: $s_{\text{quat}} = \frac{\pi R^2}{6}$

Diện tích tam giác đều AOC là: $S_{AOC} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích hình viên phân AOC là:

$$S_{VP} = S_{\text{quat}} - S_{AOC} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

Gọi S là diện tích của hình được giới hạn bởi PA, PC và cung AC ta có:

$$\begin{aligned} S &= S_{ABP} - S_{ABC} - S_{VP} = \frac{2R^2\sqrt{3}}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} \\ &= \frac{5R^2\sqrt{3} - 2\pi R^2}{12} \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính $\text{tg}15^\circ$ mà không dùng bảng số, không dùng máy tính.

Giải:

Cách 1. Xét tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 15^\circ, AC = 1$.

Đường trung trực của BC cắt AB ở I. Ta có $\widehat{AIC} = 30^\circ$ nên

$$IC = 2AC = 2, \frac{AC}{AI} = \text{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ suy ra } AI = \sqrt{3}.$$

Ta có: $AB = AI + BI = AI + IC = \sqrt{3} + 2$

$$\text{tg}15^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3},$$

Cách 2. Xét tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 30^\circ, AC = 1$

Ta có $\hat{B} = 30^\circ$ nên $BC = 2AC = 2$,

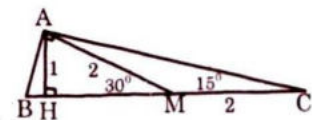
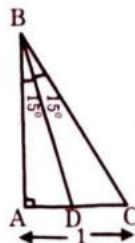
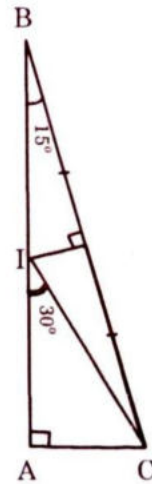
$$\frac{AC}{AB} = \text{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ nên } AB = \sqrt{3}.$$

Kẻ đường phân giác BD.

Theo tính chất đường phân giác:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{AB} &= \frac{DC}{BC} = \frac{AD + DC}{AB + BC} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} + 2} = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ta có $\text{tg}15^\circ = \frac{AD}{AB} = 2 - \sqrt{3}.$



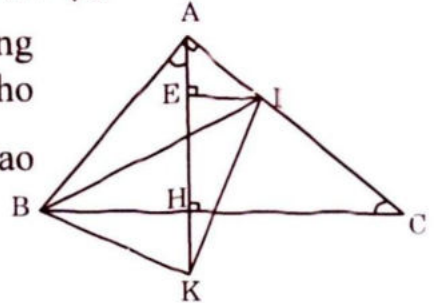
Cách 3. Xét tam giác ABC $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} = 15^\circ$, $BC = 4$.

Kẻ đường trung tuyến AM, đường cao AH.

Ta có $\widehat{AMB} = 30^\circ$, $AM = 2$ nên $AH = 1$, $\frac{AH}{HM} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $HM = \sqrt{3}$.

Suy ra $HC = HM + MC = \sqrt{3} + 2$. $\tan 15^\circ = \frac{AH}{HC} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

Ví dụ 5. Tam giác ABC vuông tại A, $\hat{C} = 40^\circ$, đường cao AH, điểm I thuộc cạnh AC sao cho $AI = \frac{1}{3}AC$, điểm K thuộc tia đối của tia HA sao cho $HK = \frac{1}{3}AH$. Tính số đo góc BIK.



Giải:

Kẻ $IE \perp AH$. Ta có $AE = \frac{1}{3}AH = HK$. Nên $AH = EK$. Ta có:

$$\begin{aligned} BI^2 &= BA^2 + AI^2 = (AH^2 + BH^2) + (AE^2 + EI^2) \\ &= (AH^2 + EI^2) + (BH^2 + AE^2) \\ &= (EK^2 + EI^2) + (BH^2 + HK^2) = IK^2 + BK^2 \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{BKI} = 90^\circ$. Tứ giác ABKI là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{BIK} = \widehat{BAH} = \hat{C} = 40^\circ.$$

Ví dụ 6. Tam giác ABC cân có $\hat{A} = 100^\circ$. Điểm D thuộc nửa mặt phẳng không chứa A có bờ BC sao cho $\widehat{CBD} = 15^\circ$, $\widehat{BCD} = 35^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{ADB}$.

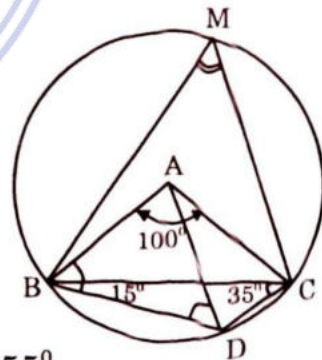
Giải:

Xét $\triangle BCD$ ta tính được $\hat{D} = 130^\circ$.

Vẽ đường tròn (A; AB), lấy M bất kì thuộc đường tròn đó (M và A cùng phía đối với BC). Do $\widehat{BAC} = 100^\circ$ nên $\widehat{BMC} = 50^\circ$.

Do đó MBDC là tứ giác nội tiếp, tức là D thuộc đường tròn (A).

$\triangle ABD$ cân tại A nên $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} = 40^\circ + 15^\circ = 55^\circ$.



Dạng 2: Cao bài toán chứng minh

Ví dụ 1: Cho hai tam giác ABC và DEF có các góc đều nhọn và có:

$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $AB = 3DE$. Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng ba lần bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

Giải:

Gọi $(O; R)$, $(I; r)$ lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, DEF ; $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
(vì $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}, \widehat{BAC} = \widehat{EDF}$)

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{DFE}$$

$$\widehat{ACB}, \widehat{DFE} \text{ nhọn nên } \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}; \widehat{DFE} = \frac{1}{2} \widehat{DIE} \text{ (hệ quả góc nội tiếp)}$$

Suy ra: $\widehat{AOB} = \widehat{DIE}$; $OA = OB (= R) \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O

$ID = IE (= r) \Rightarrow \triangle IDE$ cân tại I .

$$\text{Do đó: } \triangle OAB \sim \triangle IDE \Rightarrow \frac{OA}{ID} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{3DE}{DE} \Rightarrow R = 3r$$

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O, R) có đường kính AB và một điểm C bất kì thuộc đường tròn khác A và B . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cung nhỏ AC và CB .

- Kẻ ND vuông góc với AC (D thuộc AC). Chứng minh ND là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Gọi E là trung điểm của đoạn BC . Đường thẳng OE cắt đường tròn (O) tại điểm K (khác điểm N). Chứng minh tứ giác $ADEK$ là một hình bình hành.
- Chứng minh rằng khi C di chuyển trên đường tròn (O) thì MN luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Giải:

- $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) N là trung điểm cung $BC \Rightarrow ON \perp BC$.

Mà $AC \perp BC$

Suy ra $AC \parallel ON$; $DN \perp AC$ (gt)

Do đó $DN \perp ON \Rightarrow ND$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

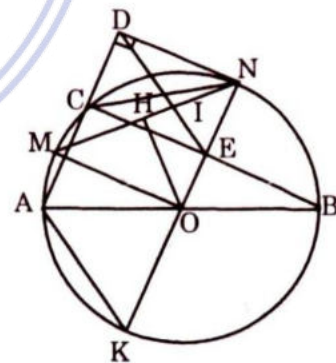
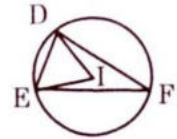
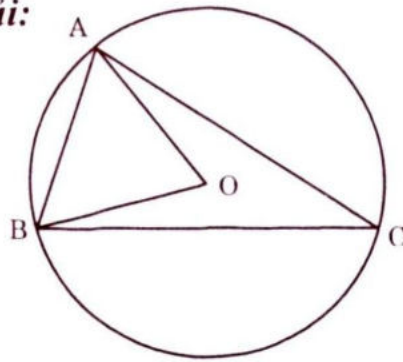
- N là trung điểm cung BC , E là trung điểm dây BC (gt)

$\Rightarrow O, N, E$ thẳng hàng. Tứ giác $CDNE$ có $\widehat{CDN} = \widehat{DNE} = \widehat{DCE} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật. Gọi I là giao điểm của DE và CN .

Ta có $IE = IN \Rightarrow \triangle IEN$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IEN} = \widehat{INE}$.

Hình thang $ACND$ ($AC \parallel ON$) nội tiếp đường tròn (O) nên là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{INE} = \widehat{AKN}$

Ta có $\widehat{AKN} = \widehat{IEN} (= \widehat{INE}) \Rightarrow AK \parallel DE$



$AK \parallel DE, AC \parallel KN \Rightarrow$ Tứ giác ADEK là hình bình hành.

$$c. \text{ sđ } \widehat{MN} = \text{ sđ } \widehat{MC} + \text{ sđ } \widehat{CN} = \frac{1}{2} \text{ sđ } \widehat{AC} + \frac{1}{2} \text{ sđ } \widehat{BC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow MN \text{ là cạnh của hình vuông nội tiếp } (O; R) \Rightarrow OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

(H là hình chiếu của O trên MN). Do đó MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O bán kính $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 3: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi K là trung điểm cung $\widehat{AB}$, M là điểm lưu động trên cung nhỏ $\widehat{AK}$ (M khác điểm A và K). Lấy điểm N trên đoạn BM sao cho $BN = AM$.

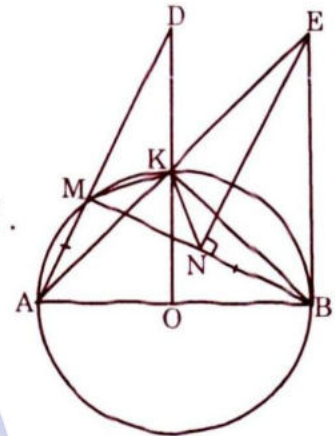
a. Chứng minh $\widehat{AMK} = \widehat{BNK}$

b. Chứng minh tam giác MKN là tam giác vuông cân.

c. Hai đường thẳng AM và OK cắt nhau tại D.

Chứng minh MK là đường phân giác của góc $\widehat{DMN}$.

d. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với BM tại N luôn luôn đi qua một điểm cố định.



Giải:

a. K là trung điểm của cung $\widehat{AB}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{KA} = \widehat{KB} \Rightarrow KA = KB$

Xét $\triangle MAK$ và $\triangle NBK$ có $AM = BN$ (gt)

$\widehat{MAK} = \widehat{NBK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{MK}$); $KA = KB$

Do đó $\triangle MAK = \triangle NBK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMK} = \widehat{BNK}$

b. $KM = KN, \widehat{MKA} = \widehat{NKB}$ ($\triangle MAK = \triangle NBK$)

$\widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{MKA} + \widehat{AKN} = \widehat{NKB} + \widehat{AKN} = \widehat{MKN} = 90^\circ$

$\triangle MKN$ vuông tại K có $KM = KN$. Do đó $\triangle MKN$ vuông cân tại K.

c. $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{DMN} = 90^\circ$ mà $\widehat{KMN} = 45^\circ$ ($\triangle MKN$ vuông cân tại K)

Do đó $\widehat{DMK} = 90^\circ - \widehat{KMN} = 45^\circ$. Ta có: $\widehat{DMK} = \widehat{KMN}$ ($= 45^\circ$)

Vậy MK là đường phân giác của góc $\widehat{DMN}$.

d. Đường thẳng vuông góc với BM tại N cắt AK tại E

Vì $\widehat{AKB} = 90^\circ$ nên $\widehat{EKB} = 90^\circ$

Ta có: $\widehat{EKB} = \widehat{ENB}$ ($= 90^\circ$) $\Rightarrow$ Tứ giác KEBN nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KEB} = \widehat{KNM} = 45^\circ$. Mà $\widehat{KAB} = \frac{1}{2} \text{ sđ } \widehat{BK} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$

$$\Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CA} = \frac{MN}{AB}. \text{ Mà } CB = CM \cdot \sqrt{2}$$

$$(\Delta CMB \text{ vuông cân tại } M) \Rightarrow MN = AB : \sqrt{2}$$

- c) Gọi E; F lần lượt là trung điểm của AI và IB, ta có:

$$\Rightarrow \widehat{EPF} = \widehat{ACB} = 45^\circ$$

$\Rightarrow P$ nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn thẳng cố định EF

Dạng 3: Chứng minh tứ giác nội tiếp

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Vẽ dây AE của (O_1) tiếp xúc với (O_2) . Vẽ dây AF của (O_2) tiếp xúc với (O_1) tại A.

a. Chứng minh: $\frac{BE}{BF} = \frac{AE^2}{AF^2}$

- b. Gọi C là điểm đối xứng của A qua B. Có nhận xét gì về hai tam giác EBC và FBC.

- c. Chứng minh AECF nội tiếp.

Giải:

- a. Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{F_1}$ (cùng chắn cung AB của (O_2)).

$$\widehat{A_2} = \widehat{E_2} \text{ (cùng chắn cung AB của } (O_1))$$

$$\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta FBA \Rightarrow \frac{AB}{FB} = \frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BA} \quad (1)$$

$$\Rightarrow BE = \frac{AB \cdot AE}{AF}; BF = \frac{AB \cdot AF}{AE} \Rightarrow \frac{BE}{BF} = \frac{AE^2}{AF^2}$$

- b. Từ (1) thay $AB = BC$, ta có:

$$\frac{BC}{BF} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \Delta CBE \sim \Delta FBC \text{ (c.g.c)}$$

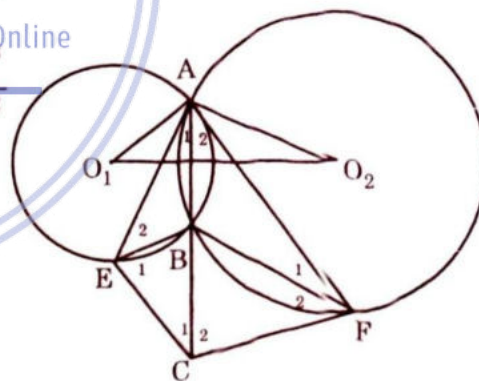
- c. $\widehat{A_1} = \widehat{F_1}; \widehat{C_1} = \widehat{F_2}$

$$\Rightarrow \widehat{EAF} + \widehat{ECF} = 2v \Rightarrow AECF \text{ nội tiếp.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn $((O; R))$. Vẽ tam giác đều ACD (D và B ở hai nửa mặt phẳng khác nhau có chung bờ AC). Gọi E là giao điểm của BD với đường tròn (O), gọi M là giao điểm của BD với đường cao AH của tam giác ABC.

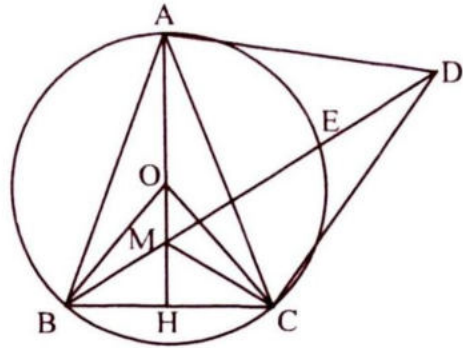
- a. Chứng minh MADC là một tứ giác nội tiếp.

- b. Tính $\angle E$ theo R.



Giải:

- a. Dễ dàng chứng minh được $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$ mà $\widehat{ABM} = \widehat{ADM}$ (tam giác ABD cân tại A). Suy ra $\widehat{ACM} = \widehat{ADM}$.
Nên MADC là tứ giác nội tiếp.

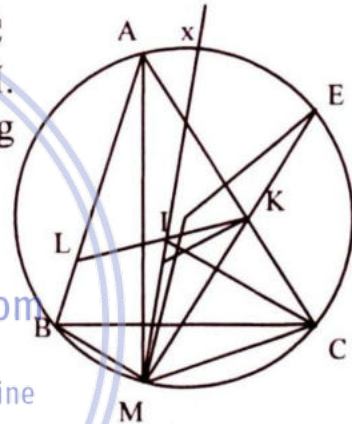


- b. Ta có $\widehat{EDC} = \widehat{OAC} = \widehat{OAB}$
 $\widehat{DCE} = 60^\circ - \widehat{ECA} = 60^\circ - \widehat{ABE}$
 $= \widehat{BMH} - \widehat{ABM} = \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$

Suy ra tam giác OAB bằng tam giác EDC.
Nên $ED = OA = R$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) ($AB < AC$). Đường tròn tâm O_1 tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại M, tiếp xúc với hai cạnh AB, AC lần lượt tại L và K. Gọi E là giao điểm thứ hai của MK với đường tròn (O).

- a. Chứng minh ME là tia phân giác của góc $\widehat{AMC}$
 b. Tia phân giác Mx của góc BMC cắt LK tại I.
 Chứng minh rằng bốn điểm M, I, K, C cùng thuộc một đường tròn.
 c. Chứng minh CI là tia phân giác của góc BCA.

**Giải:**

- a. Ta có $\widehat{O_1KM} = \widehat{O_1MK} = \widehat{OEM}$ nên $OE \parallel O_1K$.
 Mà $O_1K \perp AC$ nên $OE \perp AC$ suy ra $\widehat{AE} = \widehat{CE}$.
 Suy ra ME là tia phân giác của góc $\widehat{AMC}$.
 b. Ta có: $\widehat{IMC} = \frac{1}{2} \widehat{BMC} = \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{BAC}) = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{BAC} = \widehat{AKI}$
 Suy ra tứ giác MIKC nội tiếp.
 c. Tứ giác MIKC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KIC} = \widehat{KMC} = \widehat{EMC} = \widehat{EBC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

Ta có: $\widehat{IKC} = 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{BAC}$

Suy ra $\widehat{ICK} = 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \widehat{ABC} + 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{BAC} \right) = \frac{1}{2} \widehat{BCA}$

Nên CI là tia phân giác của góc BCA.

Ví dụ 4: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến MA; MB và cát tuyến MCD. Gọi I là trung điểm CD. Gọi E; F; K lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với MO; MD; OI.

- a. Chứng minh: $R^2 = OE \cdot OM = OI \cdot OK$.
 b. Chứng minh M; A; B; O; I nằm trên một đường tròn.

c. Khi cung CAD nhỏ hơn cung CBD hãy chứng minh $\widehat{DEC} = 2\widehat{DBC}$

Giải:

a) Ta có $IC = ID \Rightarrow OI \perp CD; OM \perp AB$

$$\Delta OIM \sim \Delta OEK \Rightarrow OE \cdot OM = OI \cdot OK \quad (1)$$

$$\text{Trong tam giác vuông OAM có: } R^2 = OA^2 = OE \cdot OM \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } R^2 = OE \cdot OM = OI \cdot OK$$

b. $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{MIO} = 1v$

$\Rightarrow M; A; B; I; O$ cùng nằm trên một đường tròn.

c. Trong tam giác vuông MAO có:

$$MA^2 = ME \cdot MO$$

Trong đường tròn (O) ta chứng minh được:

$$MA^2 = MC \cdot MD$$

$$\Rightarrow MC \cdot MD = ME \cdot MO \text{ hay } \frac{MC}{ME} = \frac{MO}{MD}$$

$$\Rightarrow \Delta MCE \sim \Delta MOD (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{MCE} = \widehat{MOD}$$

$$\Rightarrow \widehat{MCE} + \widehat{ECD} = \widehat{MOD} + \widehat{ECD} = 2v \Rightarrow OECD \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DOC} \text{ (cùng chắn cung CD)}$$

$$\text{Mà } \widehat{DOC} = 2\widehat{DBC} \text{ (cùng chắn chung CD). Vậy } \widehat{DEC} = 2\widehat{DBC}$$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC vuông tại A. Nửa đường tròn đường kính AB cắt BC tại D. Trên cung AD lấy điểm E. Kéo dài BE cắt AC tại F.

a. Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp.

b. Kéo dài DE cắt AC tại K. Tia phân giác góc CKD cắt EF và CD tại M và N. Tia phân giác góc CBF cắt DE và CF tại P và Q. Tứ giác MPNQ là hình gì?

c. Gọi $r; r_1; r_2$ lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC; ADB; ADC. Chứng minh $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Giải:

a. Ta có: $\widehat{FCD} = \widehat{BAD}$ (góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

$$\widehat{BAD} = \widehat{BED} \text{ (cùng chắn cung BD)}$$

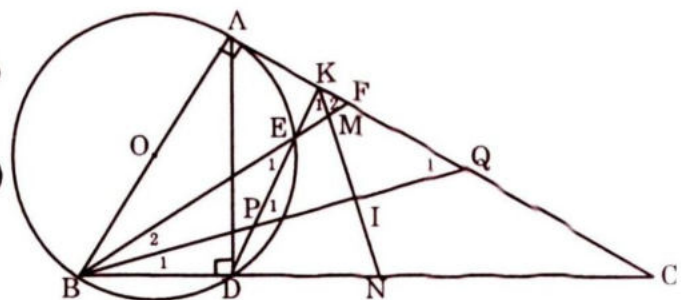
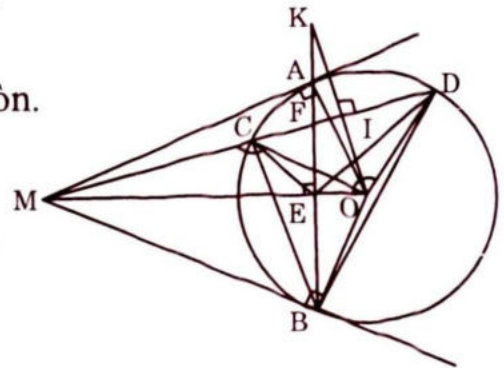
$$\Rightarrow \widehat{FCD} = \widehat{BED}$$

$$\Rightarrow \widehat{FCD} + \widehat{FED} = \widehat{BED} + \widehat{FED} = 2v$$

Vậy tứ giác CDEF nội tiếp.

b. $\widehat{Q_1} = \widehat{C} + \widehat{B_1}$ (góc ngoài của tam giác BQC); $\widehat{P_1} = \widehat{E_1} + \widehat{B_2}$ (góc ngoài của tam giác BEP); $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (gt), $\widehat{C} = \widehat{E_1}$ (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{Q_1} \Rightarrow \Delta PKQ \text{ cân} \Rightarrow PQ \perp KN \text{ và } PI = IQ$$



$\Rightarrow MI = IN$. Vậy MPNQ là hình thoi.

c. Ta dễ dàng chứng minh được:

$$r = AB + AC - BC; r_1 = AD + DC - AC; r_2 = AD + BD - AB$$

$$\Delta AFC \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD + DC - AC}{AB + AC - BC} = \frac{r_1}{r}.$$

$$\Delta AFC \sim \Delta DBA \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DB}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD + DB - AB}{AB + AC - BC} = \frac{r_2}{r}.$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{r^2} = \frac{AC^2}{BC^2} \text{ và } \frac{r_2^2}{r^2} = \frac{AB^2}{BC^2} \Rightarrow \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = 1.$$

$$\text{Vậy } r^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH và trung tuyến AM. Vẽ đường tròn tâm H bán kính AH cắt AB ở điểm D, cắt AC ở điểm E. (D và E khác điểm A).

a. Chứng minh D, H, E thẳng hàng.

b. Chứng minh $\widehat{MAE} = \widehat{ADE}$ và MA vuông góc với DE.

c. Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn tâm là O.

Tứ giác AMOH là hình gì?

d. Cho góc $\widehat{ACB} = 30^\circ$ và $AH = a$. Tính diện tích tam giác HEC theo a.

Giải:

a. $\widehat{DAE} = 90^\circ$ (giả thiết)

$\Rightarrow DE$ là đường kính của đường tròn (H; AH) $\Rightarrow D, H, E$ thẳng hàng.

b. ΔABC vuông tại A có AM là trung tuyến (giả thiết)

$$\Rightarrow AM = MB = MC = \frac{BC}{2}$$

$$\Delta MAC \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MCA} \quad (1);$$

$$HA = HD \text{ (vì } A, D \in (H; HA))$$

$$\Rightarrow \Delta HAD \text{ cân tại } H \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{BAH} \quad (2).$$

$$\text{Mà } \widehat{MCA} = \widehat{BAH} \quad (3)$$

(hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\widehat{MAE} = \widehat{ADE}$.

Gọi I là giao điểm của AM và DE. Ta có $\widehat{MAE} + \widehat{DAI} = \widehat{DAE}$

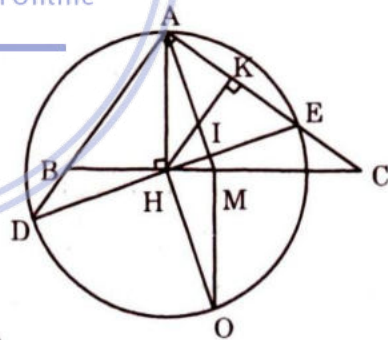
$$\text{Do đó } \widehat{ADE} + \widehat{DAI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AID} = 90^\circ \Rightarrow MA \perp DE$$

c. Từ (2) và (3) ta có $\widehat{ADE} = \widehat{MCA} \Rightarrow B, C, D, E$ cùng thuộc một đường tròn (Quỹ tích cung chứa góc) tâm O.

M là trung điểm dây BC; H là trung điểm dây DE nên $OH \perp DE$.

Ta có: $AH \perp BC$ (gt), $OM \perp BC \Rightarrow AH \parallel OM$ và

$MA \perp DE$ (câu b), $OH \perp DE \Rightarrow MA \parallel OH$.



ABC

Tứ giác AMOH có $AH \parallel OM$ và $MA \parallel OH$ nên tứ giác AMOH là hình bình hành.

- d. Vẽ HK là đường cao của $\triangle HEC$.

$\triangle HAC$ vuông tại H có $\widehat{ACH} = 30^\circ$ (gt) $\Rightarrow \triangle HAC$ là nửa tam giác đều.

$\Rightarrow \widehat{HAE} = 60^\circ$, $AC = 2AH = 2a$. $\triangle HAE$ cân tại H ($HA = HE$) có

$$\widehat{HAE} = 60^\circ \Rightarrow \triangle HAE \text{ đều } AE = HE = a; HK = \frac{AH\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Do đó: $EC = AC - AE = 2a - a = a$

$$\text{Vậy } S_{HEC} = \frac{1}{2} EC \cdot HK = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ (đvdt)}.$$

Dạng 4: Bài tập tổng hợp

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn O và trực tâm là H. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC.

- Xác định vị trí của điểm M sao cho tứ giác BHCM là một hình bình hành.
- Với M lấy bất kì thuộc cung nhỏ BC; gọi N, E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC. Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng.
- Xác định vị trí của M thuộc cung nhỏ BC để cho NE có độ dài nhỏ nhất.

Giải:

- a. (Học sinh tự vẽ hình)

$BH \perp AC, CH \perp AB$ (H là trực tâm $\triangle ABC$.)

Tứ giác BHCM là hình bình hành

$$\Leftrightarrow BH \parallel MC \text{ và } CH \parallel MB \Leftrightarrow AC \perp MC \text{ và } AB \perp MB.$$

$$\Leftrightarrow AM \text{ là đường kính của } (O) \Leftrightarrow M \text{ là điểm đối xứng của A qua O.}$$

- b. $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ (tính chất đối xứng trục)

$$\widehat{AMB} = \widehat{ACB} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)}$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{ANB} = \widehat{ACB} \text{ mà } \widehat{AHB} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

$$\text{Do đó: } \widehat{AHB} + \widehat{ANB} = 180^\circ \Rightarrow \text{Tứ giác NAHB nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{NHB} = \widehat{NAB} \text{ mà } \widehat{NAB} = \widehat{BAM} \text{ (tính chất đối xứng)}$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{NHB} = \widehat{BAM}. \text{ Chứng minh tương tự cũng có: } \widehat{CHE} = \widehat{MAC};$$

$$\widehat{ABC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \widehat{NHE} &= \widehat{NHB} + \widehat{CHE} + \widehat{CHC} = \widehat{BAM} + \widehat{MAC} + \widehat{BHC} \\ &= \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ \Leftrightarrow N, H, E \text{ thẳng hàng.} \end{aligned}$$

- c. $\widehat{NAE} = 2\widehat{BAC}$: Vẽ $AK \perp NE, K \in NE$

$$AM = AN, AM = AE \text{ (tính chất đối xứng trục)}$$

ABC
166

$\Rightarrow AN = AE \Rightarrow \triangle ANE$ cân tại A, mà AK là đường cao

$\Rightarrow \Delta K$ là phân giác, trung tuyến $\Rightarrow \widehat{ANE} = 2\widehat{NAK}, NE = 2NK$

Do đó: $\widehat{BAC} = \widehat{NAK}$; ΔKAN có $\widehat{K} = 90^0$ nên $NK = AN \cdot \sin \widehat{NAK}$

Do đó: $NE = 2AM \cdot \sin \widehat{BAC}$; $AM \leq 2R$; $\sin \widehat{BAC}$ không đổi

NE lớn nhất $\Leftrightarrow$ AM lớn nhất $\Leftrightarrow$ AM là đường kính của (O)

$\Leftrightarrow M$ là điểm đối xứng của A qua O .

Vậy khi M là điểm đối xứng của A qua O thì NE lớn nhất.

Ví dụ 2: Cho đường tròn cố định tâm O , bán kính bằng 1. Tam giác ABC thay đổi và luôn ngoại tiếp đường tròn (O) . Một đường thẳng đi qua tâm O cắt các đoạn AB, AC lần lượt tại M, N . Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN .

Giải:

(Học sinh tự vẽ hình)

Vẽ $MI \perp AC, I \in AC$; Ta có $AM \geq MI$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta có:

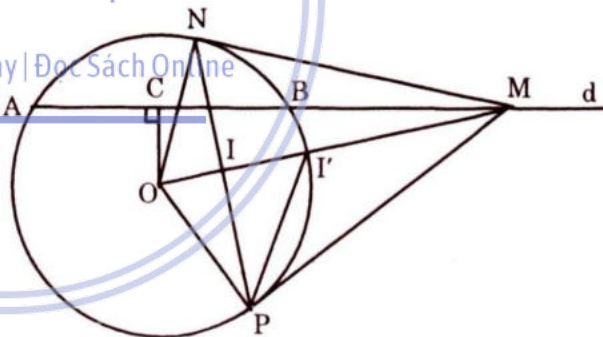
$$\frac{AM + AN}{2} \geq \sqrt{AM \cdot AN} \text{ . Do đó: } S_{AMN} \geq \sqrt{AM \cdot AN} \geq \sqrt{MI \cdot AN}$$

Ta có: $S_{AMN} \geq \sqrt{2S_{AMN}} \Leftrightarrow S_{AMN}^2 \geq 2S_{AMN} \Leftrightarrow S_{AMN} \geq 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow I = A \Leftrightarrow MN \perp OA, \widehat{BAC} = 90^\circ$

Giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN là 2.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng (d) cắt đường tròn (O) tại hai điểm A, B. Từ một điểm M trên đường thẳng (d) và ở ngoài (O), (d) không qua O, ta vẽ hai tiếp tuyến MN, MP với đường tròn (O) (N, P là hai tiếp điểm).



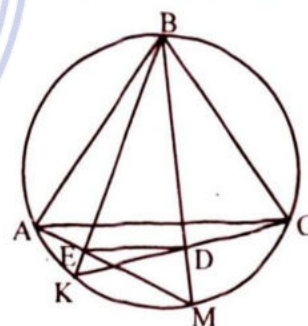
- Chứng minh $\widehat{NMO} = \widehat{NPO}$.
- Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP đi qua hai điểm cố định khi M lưu động trên đường thẳng (d).
- Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng (d) sao cho tứ giác MNOP là một hình vuông.
- Chứng minh rằng tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác MNP lưu động trên một đường cố định khi M lưu động trên (d).

Giải:

- a. MN, MP là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) (gt)
 $\Rightarrow \widehat{ONM} = \widehat{OPM} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác MNOP nội tiếp được
 $\Rightarrow \widehat{NMO} = \widehat{NPO}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung NO)

- b. Gọi C là trung điểm dây AB ta có C cố định.
 (d) không qua O nên $OC \perp AB$. $\widehat{OCM} = \widehat{ONM} = \widehat{OPM} = 90^\circ$
 $\Rightarrow C, N, P$ thuộc đường tròn đường kính OM
 $\Rightarrow C, N, P, O, M$ cùng thuộc một đường tròn. Mà O và C cố định.
 Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP đi qua hai điểm cố định O và C khi M lưu động trên đường thẳng (d).
 c. Tứ giác MNOP là hình vuông. $\Leftrightarrow$ hình thoi MNOP có $\widehat{ONM} = 90^\circ$
 $\Leftrightarrow$ Tứ giác MNOP có $MN = ON = OP = PM$ và $\widehat{ONM} = 90^\circ$.
 $\Leftrightarrow MN = ON = R; \widehat{ONM} = 90^\circ$. Tam giác OMN vuông cân tại N
 $\Leftrightarrow OM = ON\sqrt{2} = R\sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$ và đường thẳng (d).
 d. Giả sử đoạn thẳng OM cắt đường tròn (O) tại I'.
 OM là tia phân giác $\widehat{NOP}$ (vì MN, MP là hai tiếp tuyến của (O))
 $\Rightarrow \widehat{NOM} = \widehat{POM} \Rightarrow \widehat{NI'} = \widehat{PI'}$; $sđ \widehat{NPI'} = \frac{1}{2} sđ \widehat{NI'}$; $sđ \widehat{MPI'} = \frac{1}{2} sđ \widehat{PI'}$.
 Do đó $\widehat{NPI'} = \widehat{MPI'} \Rightarrow PI'$ là tia phân giác $\widehat{MPN}$
 ΔMPN có MI' là tia phân giác $\widehat{NMP}$ (vì MN và Mp là hai tiếp tuyến) và
 PI' là tia phân giác $\widehat{MPN}$ nên I' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP. Do đó $I' \equiv I$ mà I' thuộc đường tròn (O; R)
 Mặt khác, O, I cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ d.
 Do đó I lưu động trên cung lớn AB của đường tròn tâm O bán kính R.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC cân tại B nội tiếp trong đường tròn tâm O. Trên cung AC không chứa điểm B lấy 2 điểm M và K theo thứ tự A, K, M, C. Các đoạn thẳng AM và BK cắt nhau tại E, còn các đoạn thẳng KC và BM cắt nhau tại D. Chứng minh ED song song với AC.



Giải:

Ta có: $\widehat{BKC} = \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \widehat{BMA}$ nên EDMK là tứ giác nội tiếp được.

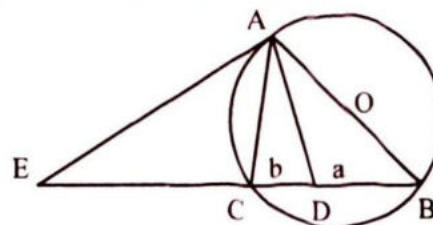
Suy ra: $\widehat{EDK} = \widehat{EMK}$ mà $\widehat{EMK} = \widehat{ACK}$.

Nên $\widehat{EDK} = \widehat{ACK}$. Suy ra: $ED \parallel AC$.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có đường phân giác AD với D thuộc đoạn BC sao cho $BD = a$, $CD = b$ ($a > b$). Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại E. Tính AE theo a và b.

Giải:

Ta có $\widehat{EAD} = \widehat{EAC} + \widehat{CAD}$

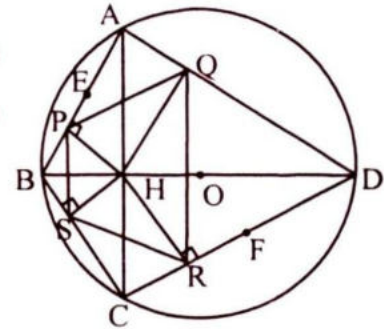


$= \widehat{ABC} + \widehat{DAB} = \widehat{ADE}$. Suy ra tam giác EAD cân tại E
 $\Rightarrow EA = ED \Rightarrow EC = EA - b$ và $EB = EA + a$. Mặt khác ta có
 $EA^2 = EC \cdot EB$ (do hai tam giác EAC và EBA đồng dạng)

Ta có phương trình: $EA^2 = (EA - b)(EA + a)$. Suy ra $EA = \frac{ab}{a - b}$

Ví dụ 6: Cho đường tròn (O) có đường kính $BD = 2R$, dây AC của (O) vuông góc với BD tại H . Gọi P, Q, R, S theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AD, CD, CB .

- Chứng minh: $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$
- Chứng minh tứ giác PQRS là tứ giác nội tiếp
- Chứng minh: $PR + QS \leq AB + AD$



Giải:

- $HA^2 + HB^2 = AB^2$, $HB^2 + HC^2 = BC^2$,
 $HC^2 + HD^2 = CD^2$, $HD^2 + HA^2 = DA^2$
 $2(HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2) = AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = 4R^2 + 4R^2$

Vậy $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$

- Tứ giác HPBS nội tiếp: $\widehat{HPS} = \widehat{HBS} = \widehat{DBC}$
 $HPAQ$ là hình chữ nhật: $\widehat{HPQ} = \widehat{HAQ} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$
 Do đó: $\widehat{SPQ} = \widehat{HPS} + \widehat{HPQ} = 2\widehat{DBC}$. Tương tự: $\widehat{SRQ} = 2\widehat{DBC}$
 Do $\widehat{BDC} + \widehat{DBC} = 90^\circ$ nên $\widehat{SPQ} + \widehat{SRQ} = 180^\circ$

Chú ý: PQRS là hình thang cân.

- Ta có $PR \leq HP + HR$. Gọi E là trung điểm AB , ta có: $HP \leq HE = \frac{1}{2}AB$.

Gọi F là trung điểm CD , $HR \leq HF = \frac{1}{2}CD$

Do đó: $PR \leq \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD$. Tương tự: $QS \leq \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$

Mà $AB = BC$; $AD = CD$. Do đó $PR + QS \leq AB + AD$.

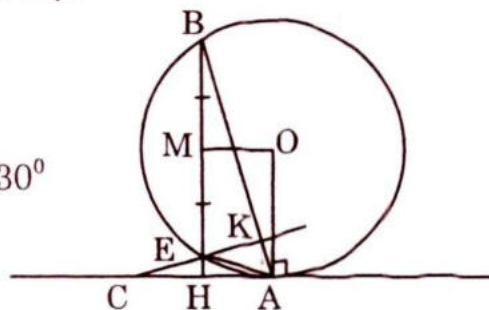
Ví dụ 7: Cho đường tròn (O; R) tiếp xúc với đường thẳng d tại A . Trên d lấy điểm H không trùng với A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d , đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B . (E nằm giữa B và H).

- Chứng minh góc $\widehat{ABE}$ bằng góc $\widehat{EAH}$ và tam giác ABH đồng dạng tam giác EAH
- Lấy điểm C trên d sao cho H là trung điểm của đoạn AC , đường thẳng CE cắt AB tại K . Chứng minh $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.
- Xác định vị trí điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

ABC

Giải:

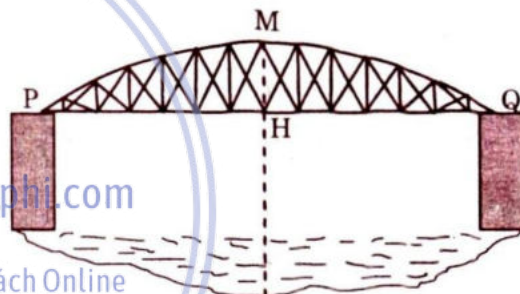
- a. $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$ vì cùng chắn cung AE.
Do đó tam giác ABH và EAH đồng dạng.
- b. $\widehat{ECA} = \widehat{EAC} = \widehat{ABH}$ nên $\widehat{EAC} + \widehat{BAH} = 90^\circ$
hay $\widehat{AKC} = 90^\circ$. Vậy tứ giác AHEK là nội
tiếp đường tròn đường kính AE.
- c. M là trung điểm EB thì OM vuông góc
BE, OM = AH. Ta có:
 $AB = R\sqrt{3} \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{BOM} = 30^\circ$
 $\Leftrightarrow \triangle OBE$ đều cạnh R.
Vậy $AH = OM = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.



Ví dụ 8: a. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó và điểm D ở ngoài đường thẳng AB sao cho $AB.AC = AD^2$. Chứng minh rằng AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

- b. Dựng một tam giác EFG, biết $FG = 6m$, $\widehat{FEG} = 60^\circ$ và diện tích của tam giác EFG bằng $12m^2$.

- c. Một chiếc cầu được thiết kế như hình dưới đây có độ dài đoạn $PQ = 32m$, chiều cao $MH = 4m$. Biết rằng $\widehat{PMQ}$ là cung của một đường tròn.



Hãy tính độ dài cung $\widehat{PMQ}$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Giải

- a. + Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

+ Ta có: $AB.AC = AD^2 \Leftrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}$

+ Hai tam giác ABD và ADC có:

Â chung là $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}$

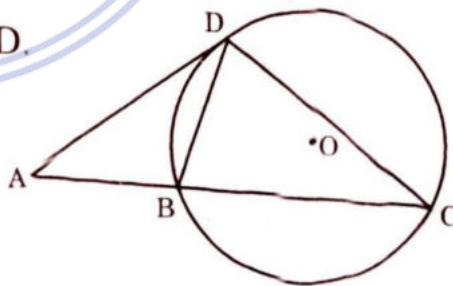
Vậy hai tam giác ABD và ADC đồng dạng (c.g.c).

Suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ hay $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}$ số $\widehat{BD}$.

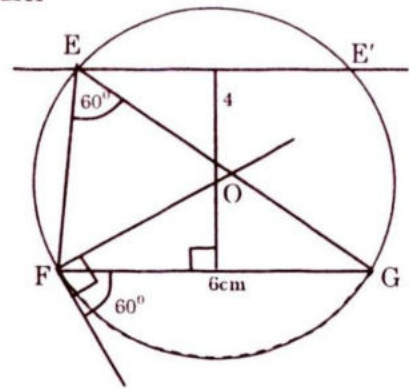
Do đó AD là tiếp tuyến của (O).

- b. Chiều cao tam giác cân dựng: $EH = 4m$.

+ Dựng đoạn $FG = 6m$. Dựng cung chứa góc 60° trên đoạn FG.



Dựng đường thẳng $xy \parallel FG$ cách xy một khoảng 4m sao cho xy cắt cung tròn vừa dựng tại E. Khi đó tam giác EGF là tam giác cân dựng.
+ Hình vẽ thể hiện các bước dựng.



c. Gọi R là bán kính đường tròn chứa cung $\widehat{PMQ}$.

$$\text{Ta có: } OP^2 = OH^2 + PH^2 \Leftrightarrow R^2 = (R - 4)^2 + 16$$

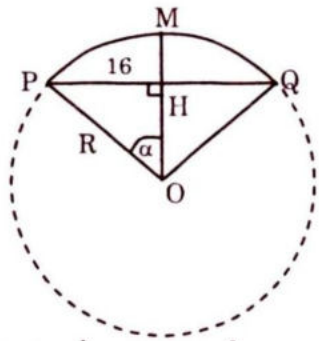
$$8R = 16 + 16^2 \Leftrightarrow R = 34(\text{m})$$

$$\sin \alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17} \Rightarrow \alpha \approx 28,08^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{POQ} = 2\alpha \approx 56,14^\circ$$

$$\text{Độ dài cung } \widehat{PMQ} \text{ là } l = \frac{\pi \cdot R \cdot 2\alpha}{180} \approx 33,3(\text{m})$$

Ví dụ 9: Cho hình vuông ABCD. Điểm M di động trên tia đối của tia CD (M không trùng với C). Đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt đường thẳng BC tại N.



1. Chứng minh rằng tam giác MAN vuông cân.

2. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng MN. Chứng minh rằng ba điểm D, B, E thẳng hàng.

3. Xác định vị trí của điểm M sao cho tam giác EAC là tam giác đều.

Giải

a. Ta có: tứ giác MCAN có

$\widehat{MAN} = \widehat{MCN} = 90^\circ$ nên tứ giác MCAN nội tiếp được đường tròn đường kính MN.

Suy ra: $\widehat{AMN} = \widehat{ACN} = 45^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

Mặt khác theo giả thiết: $\widehat{MAN} = 90^\circ$

Vậy tam giác MAN vuông cân đỉnh A.

b. Trong tam giác vuông CMN có ME là trung tuyến nên $CE = \frac{1}{2}MN$

Trong tam giác vuông AMN có AE là trung tuyến nên $AE = \frac{1}{2}MN$

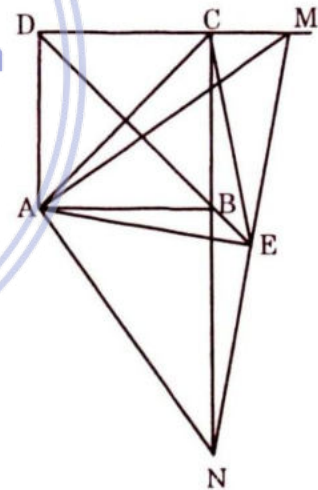
Từ đó suy ra $CE = AE$, hay E thuộc đường trung trực của AC.

* Do ABCD là hình vuông nên $DA = DC$; $BA = BC$ nên B, D cũng thuộc vào đường trung trực của AC. Do đó, ba điểm D, B, E thẳng hàng.

c. Gọi a là độ dài các cạnh của hình vuông.

Do tam giác EAC cân đỉnh E nên $\triangle EAC$ đều khi và chỉ khi $EA = AC = a\sqrt{2}$

* Trong tam giác vuông AMN: $MN = 2AE = 2a\sqrt{2}$. Khi đó $AM = 2a$.



* Trong tam giác vuông DAM ta có:

$$DM^2 = AM^2 - AD^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \text{ hay } DM = a\sqrt{3}$$

Kết luận: tam giác EAC là tam giác đều khi M thuộc tia đối của tia CD và $DM = DC \cdot \sqrt{3}$.

Ví dụ 10: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB cố định, đường kính CD di động (hai đường thẳng AB và CD không trùng nhau). Tiếp tuyến của (O) tại B cắt các đường thẳng AC và AD lần lượt tại E và F.

a. Chứng minh $BE \cdot BF = 4R^2$.

b. Chứng minh CEFD là tứ giác nội tiếp.

c. Gọi I là trung điểm của EF và K là giao điểm của AI và CD. Chứng minh rằng khi CD di động thì K chạy trên một đường cố định.

Giải

a. Ta có: tam giác ACD vuông tại A (nội tiếp nửa đường tròn đường kính CD), nên tam giác EAF vuông tại A.

AB vuông góc với EF (vì EF là tiếp tuyến tại B).

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông AEF:

$$AB^2 = BE \cdot BF \Leftrightarrow BE \cdot BF = 4R^2$$

b. + Ta có: $\widehat{AFE} = \frac{\widehat{AEB} - \widehat{ADB}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{ADB}}{2} = \frac{\widehat{ADC}}{2}$ (góc có đỉnh bên ngoài đường tròn).

$$\widehat{ACD} = \frac{\widehat{ADC}}{2} \text{ (góc nội tiếp chắn } \widehat{AD})$$

Suy ra $\widehat{AFE} = \widehat{ACD}$

Nên tứ giác CEFD nội tiếp.

c. + Ta có $\widehat{AFE} = \widehat{ACD}$ (chứng minh trên)

$AI = \frac{1}{2} EF$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông EAF). Nên tam

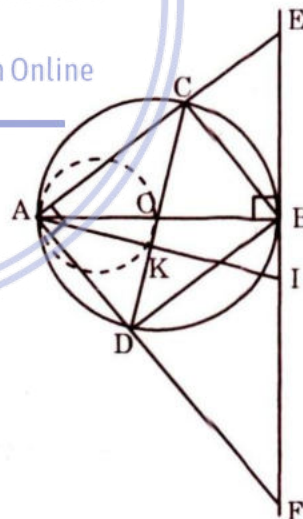
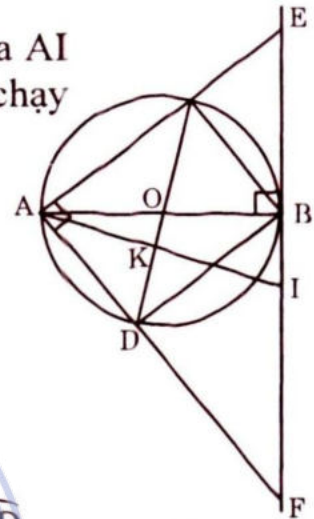
giác AIF cân tại I, suy ra:

$$\widehat{FAI} = \widehat{AFI} = \widehat{AFE}.$$

+ Mà $\widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{ADC} + \widehat{FAI} = \widehat{ADK} + \widehat{DAK} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{AKD} = \widehat{AKO} = 90^\circ$

Vậy khi CD di động thì K chạy trên đường tròn đường kính AO.



Bài tập vận dụng

- Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi (P), (Q) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp hai tam giác AHB và AHC. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài (khác BC) của hai đường tròn (P) và (Q), nó cắt AB, AH, AC theo thứ tự ở M, K, N. Chứng minh rằng :
 - Các tam giác HPQ và ABC đồng dạng ;
 - $KP \parallel AB, KQ \parallel AC$;
 - BMNC là tứ giác nội tiếp ;
 - Năm điểm A, M, P, Q, N thuộc cùng một đường tròn ;
 - Tam giác AED vuông cân (D, E theo thứ tự là giao điểm của PQ với AB, AC).
- Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. C là một điểm trên đoạn thẳng AB. Nối C với một điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn. Đường thẳng vuông góc tại M với CM cắt các tiếp tuyến tại A và B ở E và F.
 - Chứng minh ACME và BCMF là các tứ giác nội tiếp.
 - Chứng minh $\widehat{ECF} = 1v$
 - Tìm quỹ tích trung điểm N của EF khi M chạy trên nửa đường tròn đường kính AB với C cố định
- Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AN; AM. Trên nửa mặt phẳng bờ AN không chứa M lấy B sao cho $\widehat{ABO} = 90^\circ$. Đường thẳng BO cắt AN tại D, cắt đường thẳng AM tại C. Đường thẳng BM cắt AN tại K. Gọi I là trung điểm AC. BI cắt AN tại E. Chứng minh:
 - Năm điểm A; B; N; O; M cùng nằm trên một đường tròn.
 - BD là phân giác của tam giác BKN.
 - $DN.AK = AN.DK$
 - Tam giác BEN cân.
- Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R) có $\widehat{A} = 80^\circ$. Gọi I là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Vẽ hai dây IE; IF lần lượt cắt BC tại M và N.
 - Tính $\widehat{BIC}$
 - Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OB; OC.
 - Chứng minh tứ giác MNFE nội tiếp.
 - Chứng minh $IN.IF = IM.IE$
 - Gọi K là giao điểm của BC và AI. Chứng minh $AB.KC = KB.AC$
- Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5\text{cm}$ $AC = 12\text{cm}$. Gọi (O) và (O') là các đường tròn điều kiện AB; AC, chúng cắt nhau tại D. M là điểm chính giữa của cung nhỏ CD. AM cắt (O) tại N và cắt BC tại E.
 - Chứng minh ba điểm B; D; C thẳng hàng. Tính AD.
 - Chứng minh ba điểm O; N; O' thẳng hàng.

ABC

- c. So sánh BA và BE. Tam giác OO'M là tam giác gì?
- d. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh $\widehat{OIO'} = 90^\circ$
6. Từ đỉnh A của hình vuông ABCD vẽ hai tia tạo với nhau một góc 45° . Một tia cắt cạnh BC tại E, cắt đường chéo BD tại P. Tia còn lại cắt cạnh CD tại F, cắt đường chéo BD tại Q.
- a. Chứng minh 5 điểm E; P; Q; F; C cùng nằm trên một đường tròn.
- b. Chứng minh: $S_{AEF} = 2S_{APQ}$
- c. Vẽ đường trung trực của cạnh CD cắt AE tại M.
- Giả sử $\widehat{CPD} = \widehat{CMD}$. Tính $\widehat{MAB}$.
7. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). I là giao điểm hai đường chéo. Đường thẳng vuông góc với OI tại I cắt cạnh AD và BC tại E và F. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC.
- a. Chứng minh $\triangle AMI \sim \triangle BNI$
- b. Chứng minh các tứ giác MEIOI và NFIOI nội tiếp.
- c. Chứng minh $IE = IF$.
8. Cho đường tròn (O; R), đường thẳng xy tiếp xúc với (O) tại A. Từ điểm B thuộc đường tròn vẽ BK vuông góc xy. Đường cao OH của tam giác OAB cắt BK tại M.
- a. Chứng minh $\widehat{AOH} = \widehat{BAK}$.
- b. Chứng minh $OH \cdot BM = OB \cdot HM$.
- c. Khi B di chuyển trên đường tròn (O) tìm quỹ tích của M.
- d. Cho số $\widehat{AB} = 120^\circ$ Tính diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung AB.
9. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại D, cắt đường tròn tại E. Gọi M; N lần lượt là hình chiếu của D trên AC; AB.
- a. Chứng minh tứ giác AMDN nội tiếp.
- b. Cho $\widehat{MAN} = \alpha$. Chứng minh $MN = AD \cdot \sin \alpha$
- c. Chứng minh: $S_{ANEM} = S_{ABC}$.
10. Cho ba điểm A; B; C nằm trên đường thẳng xy theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C. Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AM; AN. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và MN.
- a. Chứng minh $AM^2 = AN^2 = AB \cdot AC$
- b. Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh $IN \parallel AB$.
- c. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF nằm trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (O) thay đổi.
11. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường cao AD; BE; CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm BC; K là điểm đối xứng với H qua M.
- a. Chứng minh: $\widehat{FEB} = \widehat{BED} = \widehat{CBK}$.
- b. Chứng minh K nằm trên đường tròn (O).

12. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC và CD lấy M và N sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. BD cắt AN và AM lần lượt tại P và Q. Chứng minh:
- Nằm điểm P; Q; M; C; N cùng nằm trên một đường tròn.
 - Đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M; N thay đổi.
 - Tỷ số $\frac{S_{APQ}}{S_{PQMN}}$ không đổi khi M; N thay đổi.
13. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O; R). Các đường cao AD; BE; CF cắt nhau tại H. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh:
- $OA \perp EF$.
 - H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.
 - Nếu $AD + BE + CF = 9r$ thì tam giác ABC đều.
14. Cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$ nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác góc A cắt (O) tại M; AH là đường cao của tam giác ABC. I là trung điểm BC, D và E là hình chiếu của M trên AB và AC.
- Chứng minh AM là phân giác góc OAH.
 - Chứng minh $\triangle MBD = \triangle MCE$.
 - Tia MO cắt (O) tại N. Vẽ OF vuông góc NC ($F \in NC$). Chứng minh tứ giác OICF nội tiếp và $OF = \frac{1}{2} BM$.
 - Chứng minh đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác OICF tiếp xúc nhau.
15. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$) nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ AC. Vẽ Cx đi qua M và D là điểm đối xứng với A qua O.
- Chứng minh AM là phân giác của $\widehat{BMx}$.
 - Trên tia đối của tia MB lấy điểm H sao cho $MH = MC$. Chứng minh $MD \parallel CH$.
 - Gọi K là trung điểm của CH. Chứng minh ba điểm A, M, K thẳng hàng.
16. Cho tam giác đều ABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng AC không chứa B vẽ tia Ax sao cho $\widehat{xAC} = 40^\circ$. Tia Ax cắt tia BC tại D. Đường tròn (O) đường kính CD cắt AD tại E. Đường trung trực của CD cắt AD tại M.
- Chứng minh AHCE nội tiếp được đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn đó.
 - Chứng minh $CA = CM$.
 - Đường thẳng HE cắt (O) tại K. Vẽ đường kính HN của đường tròn (I). HN cắt đường thẳng DK tại P. Chứng minh NPKE nội tiếp
17. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho $BC = R$. Vẽ dây $BD = R$. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc BC cắt tia AD tại M.

- a. Tính AD.AM
 b. Tính chu vi và diện tích tam giác ABM; tam giác ABD theo R.
 c. Cung BD chia tam giác ACM thành hai phần. Tính diện tích phần ngoài đường tròn.
18. Cho tam giác có các góc nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. H là trực tâm của tam giác. D là một điểm trên cung BC không chứa điểm A.
 a. Xác định vị trí của điểm D để tứ giác BHCD là hình bình hành.
 b. Gọi P và Q lần lượt là các điểm đối xứng của điểm D qua các đường tròn AB và AC. Chứng minh rằng 3 điểm P, H, Q thẳng hàng.
 c. Tìm vị trí của điểm D để PQ có độ dài lớn nhất.
19. Cho đường tròn (O) với BC cố định và một điểm A thay đổi vị trí trên cung lớn BC sao cho $AC > AB$ và $AC > BC$. Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Các tiếp tuyến của (O) tại D và C cắt nhau tại E. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB với CD; AD và CE.
 a. Chứng minh rằng $DE \parallel BC$
 b. Chứng minh tứ giác PACQ nội tiếp
 c. Gọi giao điểm của các dây AD và BC là F. Chứng minh hệ thức:

$$\frac{1}{CE} = \frac{1}{CQ} + \frac{1}{CF}.$$

20. Cho hình vuông ABCD. Kẻ tia Ax, Ay sao cho $\widehat{xAy} = 45^\circ$
 Tia Ax cắt CB và BD lần lượt tại E và P, tia Ay cắt CD và BD lần lượt tại F và Q.
 a. Chứng minh 5 điểm E, P, Q, F, C cùng nằm trên một đường tròn.
 b. $S_{\triangle AEF} = 2S_{\triangle APQ}$
 c. Kẻ đường trung trực của CD cắt AE tại M. Tính số đo $\widehat{MAB}$ biết $\widehat{CPD} = \widehat{CMD}$.
21. Cho tam giác ABC. Phân giác AD ($D \in BC$) vẽ đường tròn tâm O qua A và D đồng thời tiếp xúc với BC tại D. Đường tròn này cắt AB và AC lần lượt tại E và F. Chứng minh: a. $EF \parallel BC$
 b. Các tam giác AED và ADC; AFD và ABD là các tam giác đồng dạng.
 c. $AE.AC = AF.AB = AC^2$
22. Cho tam giác ABC đường phân giác AI, biết $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{A} = \alpha (\alpha = 90^\circ)$.

Chứng minh rằng $AI = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}$ (cho $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$)

23. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm N di động trên một nửa đường tròn sao cho $\widehat{NA} \leq \widehat{NB}$. Vẽ vào trong đường tròn hình vuông ANMP.
 a. Chứng minh rằng đường thẳng NP luôn đi qua điểm cố định Q.

- b. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác NAB. Chứng minh tứ giác ABMI nội tiếp.
- c. Chứng minh đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định.
24. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là trung điểm của BC, M là một điểm trên đoạn CI (M khác C và I). Đường thẳng AM cắt (O) tại D, tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AIM tại M cắt BD và DC tại P và Q.
- a. Chứng minh $DM \cdot AI = MP \cdot IB$. b. Tính tỉ số: $\frac{MP}{MQ}$
25. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A sao cho $OA = R\sqrt{2}$. Vẽ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Một góc $\widehat{xOy} = 45^\circ$ cắt đoạn thẳng AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng:
- a. DE là tiếp tuyến của đường tròn (O). b. $\frac{2}{3}R < DE < R$.
26. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn tâm O bán kính R, kẻ hai tiếp tuyến PA; PB. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A đến đường kính BC.
- a. Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm E của AH
- b. Giả sử $PO = d$. Tính AH theo R và d.
27. Cho đường tròn tâm O đường kính AB bán kính R. Tiếp tuyến tại điểm M bất kỳ trên đường tròn (O) cắt các tiếp tuyến tại A và B lần lượt tại C và D.
- a. Chứng minh: $AC \cdot BD = R^2$.
- b. Tìm vị trí của điểm M để chu vi tam giác COD là nhỏ nhất.
28. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và C là một điểm thuộc đường tròn ($C \neq A, C \neq B$). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C, kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O), gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Tia BC cắt Ax tại Q, tia AM cắt BC tại N.
- a. Chứng minh các tam giác BAN và MCN cân.
- b. Khi $MB = MQ$, tính BC theo R.
29. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), giao điểm hai đường chéo là O. Đường thẳng đi qua O song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại M và N.
- a. Chứng minh $\frac{MO}{CD} + \frac{MO}{AB} = 1$.
- b. Chứng minh: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$.
30. Cho đường tròn (O; R) và dây cung AB cố định không đi qua tâm O; C và D là hai điểm di động trên cung lớn AB sao cho AD và BC luôn song song. Gọi M là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:
- a. Tứ giác AOMB là tứ giác nội tiếp.
- b. $OM \perp BC$.

ABC

- c. Đường thẳng d đi qua M và song song với AD luôn đi qua một điểm cố định.
- 31.** Cho tam giác ABC vuông ở A ($AB < AC$), đường cao AH và trung tuyến AM ($H \in BC, M \in BC$). Đường tròn tâm O đường kính AH cắt AB và AC lần lượt tại K và I. Gọi N là giao điểm của đường thẳng IK và đường thẳng BC. Chứng minh:
- AKHI là hình chữ nhật.
 - Tứ giác BCIK nội tiếp được trong đường tròn.
 - $NH^2 = NK \cdot NI$; $AM \perp IK$.
- 32.** Cho tứ giác ABCD có hai đỉnh B và C ở trên nửa đường tròn đường kính AD, tâm O. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:
- Các tứ giác ABEH, DCEH nội tiếp được.
 - E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.
 - Năm điểm B, C, I, O, H ở trên một đường tròn.
- 33.** Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Kẻ hai tia tiếp tuyến Ax và By của nửa đường tròn (Ax, By và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là điểm tùy ý thuộc nửa đường tròn khác (khác A và B). Tiếp tuyến tại M của nửa đường tròn cắt Ax tại D và cắt By tại E.
- Chứng minh rằng: $\triangle DOE$ là tam giác vuông.
 - Chứng minh rằng: $AD \cdot BE = R^2$
- Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho diện tích của tứ giác ADEB nhỏ nhất.
- 34.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng:
- Tứ giác CEHD nội tiếp.
 - Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.
 - $AE \cdot AC = AH \cdot AD$; $AD \cdot BC = BE \cdot AC$.
 - H và M đối xứng nhau qua BC.
 - Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.
- 35.** Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), các đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.
- Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp.
 - Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
 - Chứng minh $ED = \frac{1}{2} BC$.
 - Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O)
 - Tính độ dài DE biết $DH = 2\text{cm}$, $AH = 6\text{cm}$.

36. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.
1. Chứng minh $AC + BD = CD$.
 2. Chứng minh $\widehat{COD} = 90^\circ$.
 3. Chứng minh $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$
 4. Chứng minh $OC \parallel BM$.
 5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
 6. Chứng minh $MN \perp AB$.
 7. Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.
37. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$) I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, O là trung điểm của IK.
1. Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.
 2. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
 3. Tính bán kính đường tròn (O) biết $AB = AC = 20\text{cm}$, $BC = 24\text{ cm}$.
38. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC$. Lấy điểm I thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{C}$. Đường tròn (O) đường kính IC cắt BI ở D và cắt BC ở M. Chứng minh rằng:
- a. CI là tia phân giác của góc DCM.
 - b. DA là tiếp tuyến của đường tròn (O).
39. Cho tam giác ABC vuông tại A, I là trung điểm của BC, D là điểm nằm giữa I và C. Gọi E, F theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng E và F nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AID.
40. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, đường phân giác AD. Gọi H, K theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADB, ACD. Chứng minh rằng $OH = OK$.
41. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:
- a. $HB \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$
 - b. $AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{2}$
42. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD, trực tâm H. Gọi AM, AN là các tiếp tuyến với đường tròn (O) đường kính BC (M, N là các tiếp điểm). Chứng minh rằng:
- a. AMDN là tứ giác nội tiếp.
 - b. Ba điểm M, H, N thẳng hàng.

43. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). đường cao AH. Chứng minh rằng: a. $AB.AC = 2R.AH$;
b. $S = \frac{abc}{4R}$ với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, diện tích tam giác ABC bằng S.
44. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của các góc A, B, C cắt đường tròn (O) theo thứ tự ở D, E, F. chứng minh rằng:
a. $AD > \frac{AB + AC}{2}$
b. $AD + BE + CF$ lớn hơn chu vi tam giác ABC.
45. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt BC ở D, cắt đường tròn ở E. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB, AC. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của E trên AB, AC. Chứng minh rằng: a. $AI + AK = AB + AC$;
b. Diện tích tứ giác AMEN bằng diện tích tam giác ABC.
46. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm M thuộc cung BC không chứa A. Gọi MH, MI, MK theo thứ tự là các đường vuông góc kẻ từ M đến BC, AB, AC. Chứng minh rằng: $\frac{BC}{MH} = \frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK}$.
47. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên EF. Chứng minh rằng $DE + DF = IK$.
48. Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao BD, CE. Vẽ ở phía ngoài tam giác các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AC, AB. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của BD, CE với các nửa đường tròn đó. Chứng minh rằng $AI = AK$.
49. Cho đường tròn tâm O và hai điểm B, C thuộc đường tròn, các tiếp tuyến với đường tròn tại B và tại C cắt nhau ở A. Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC. Tiếp tuyến với đường tròn tại M cắt AB, AC theo thứ tự ở D, E. Gọi giao điểm của OD, OE với BC theo thứ tự là I, K. Chứng minh rằng:
a. OBDK, DIKE là các tứ giác nội tiếp;
b. Các đường thẳng OM, DK, EI đồng quy.
50. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn tâm O, vẽ các tiếp tuyến AB, AC (B và C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC. Kẻ dây EF bất kì đi qua H. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc EAF.
51. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn tâm O, vẽ các tiếp tuyến AB, AC (B và C là các tiếp điểm) và cát tuyến ADE. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với OB cắt BC, BE theo thứ tự ở H, K. Chứng minh rằng $DH = HK$.
52. Cho đường tròn (O). Qua điểm K ở bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến KB, KD (B, D là các tiếp điểm), kẻ cát tuyến KAC.
a. Chứng minh rằng $AB.CD = AD.BC$.

b. Vẽ dây CN song song với BD. Gọi I là giao điểm của AN và BD.
Chứng minh rằng I là trung điểm của BD.

53. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Từ điểm B thuộc đường tròn (O'), kẻ các tiếp tuyến BC, BD với đường tròn (O) (C, D là các tiếp điểm). Gọi E, F theo thứ tự là các giao điểm thứ hai của CA, DA với đường tròn (O'). Chứng minh rằng $AF \cdot BE = AE \cdot BF$

54. Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Gọi E là hình chiếu của B trên AD, H là hình chiếu của A trên BC, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\triangle MEH$ là tam giác cân.

Hướng dẫn và đáp số

1. a. P và Q là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đồng dạng AHB và CHA

nên $\frac{HP}{HQ} = \frac{AB}{AC}$. Do đó $\triangle HPQ \sim \triangle ABC$ (c.g.c).

b. Từ câu a suy ra $\widehat{HQP} = \widehat{C}$,

mà $\widehat{C} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{HQP} = \widehat{A_1}$. (1)

Tứ giác HPKQ có $\widehat{PHQ} = \widehat{PKQ} = 90^\circ$

nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{HQP} = \widehat{HKP}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{HKP}$, do đó $KP \parallel AB$. Chứng minh tương tự $KQ \parallel AC$.

c.. Ta đã có $\widehat{C} = \widehat{HKP} = \widehat{MKP}$. Hãy chứng minh $\widehat{MKP} = \widehat{M_1}$ (sử dụng kết quả câu b).

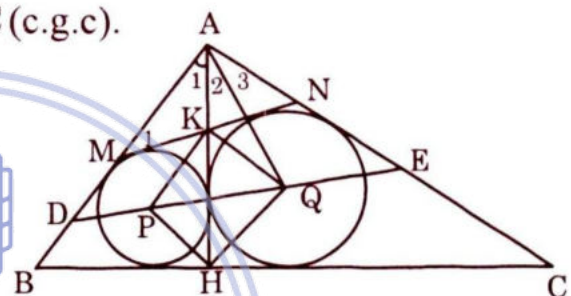
d. Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (cùng bằng $\widehat{C}$) nên $KM = KA$. Tương tự $KN = KA$.

Ta có $\widehat{A_2} = \widehat{AQK}$ (cùng bằng $\widehat{A_3}$). Nên $KQ = KA$. Tương tự $KP = KA$.

Do đó năm điểm A, M, P, Q, N thuộc đường tròn (K; KA).

e. Cách 1. Từ câu a suy ra $\widehat{HQP} = \widehat{C}$ nên HQEC là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{QEA} = \widehat{QHC} = 45^\circ$. Tam giác vuông ADE có $\widehat{E} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân.

Cách 2 (không dựa vào câu a). Chứng minh $BP \perp AQ$, tương tự $CQ \perp AP$, suy ra $AO \perp PQ$ (O là giao điểm của BP và CQ). Tam giác ADE có AO là tia phân giác của góc A và $AO \perp DE$ nên là tam giác cân, do đó là tam giác vuông cân.



ABC

$$\Rightarrow \widehat{ONA} = \widehat{BEA} \Rightarrow ON \parallel BC \quad (1)$$

Mặt khác: $OO' \parallel BC \quad (2)$ (cùng vuông góc với AD).

Từ (1) và (2) suy ra O; N; O' thẳng hàng.

c. $BA = BE$ vì $\triangle BAE$ cân tại B

$\triangle OO'M$ là tam giác vuông tại O' vì $OO' \parallel BC$ mà $BC \perp O'M$

d. Ta có: $\widehat{IO'N} = \widehat{O'NI} = \widehat{ONA} = \widehat{OAN}$

$\Rightarrow A$ và O' cùng nhìn OI dưới một góc không đổi nên tứ giác AOIO' nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OIO'} = \widehat{OAO'} = 90^\circ$.

6. a. $\widehat{PAF} = \widehat{PDF} = 45^\circ$

$\Rightarrow APFD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{APF} = \widehat{EPF} = 1v$

$\Rightarrow CEPF$ nội tiếp đường tròn đường kính EF (1).

Tương tự:

$$\widehat{QAE} = \widehat{QBE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AQE} = \widehat{EQF} = 1v$$

$\Rightarrow CEQF$ nội tiếp đường tròn đường kính EF.

Từ (1) và (2) suy ra năm điểm E; P; Q; F; C cùng nằm trên đường tròn đường kính EF.

b. Ta có: $\triangle APF$ vuông cân tại P nên $AF = AP\sqrt{2}$

Mặt khác: $\widehat{APQ} = \widehat{AFE}$ (cùng bù với $\widehat{EPQ}$)

$$\Rightarrow \triangle APQ \sim \triangle AFE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{APQ}} = \left(\frac{AF}{AP}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \Rightarrow S_{AEF} = 2.S_{APQ}$$

c. $\widehat{CPD} = \widehat{CMD} \Rightarrow CPMD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPD} = \widehat{MCD}$

mà P nằm trên trung trực BD của AC $\Rightarrow \widehat{CPD} = \widehat{MPD}$

Do đó: $\widehat{CMD} = \widehat{MCD} \Rightarrow \triangle MCD$ đều $\Rightarrow \widehat{MDA} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MAB} = 15^\circ$

7. a. $\triangle AID \sim \triangle BIC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{AD}{BC} = \frac{2AM}{2BN} = \frac{AM}{BN} \Rightarrow \triangle AIM \sim \triangle BIN \text{ (c.g.c)}$$

b. Tứ giác MEIO nội tiếp trong đường tròn đường kính OE.

Tứ giác NFIO nội tiếp trong đường tròn đường kính OF.

c. Ta có: $\widehat{EOI} = \widehat{EMI}$ (cùng chắn cung EI)

$\widehat{FOI} = \widehat{FNI}$ (cùng chắn cung FI); $\widehat{EMI} = 2.\widehat{CAD}$ (góc ngoài tam giác AMI);

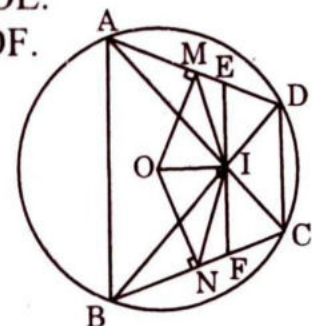
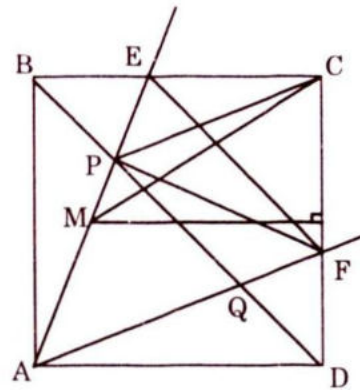
$\widehat{FNI} = 2.\widehat{CBD}$ (góc ngoài tam giác cân BNI)

Mà $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung CD).

Suy ra $\widehat{EOI} = \widehat{FOI}$ nên tam giác EOF cân tại O. Vậy $IE = IF$.

8. a. Ta có: $\widehat{AOH} = \widehat{BAK}$ (góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

b. Ta có $OA \parallel BM$ nên $\widehat{OAB} = \widehat{ABM} = \widehat{OBA}$



Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác OBM, ta có:

$$\frac{OH}{HM} = \frac{BO}{BM}. \text{ Hay } OH \cdot BM = OB \cdot HM$$

c. OAMB là hình thoi nên:

AM = AO = R. Vậy khi B di chuyển trên đường tròn tâm O thì quỹ tích của M là đường tròn tâm A bán kính R.

d. Gọi S_1 là diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OA; OB ta có: $S_1 = \frac{\pi R^2}{3}$.

Gọi S là diện tích tam giác AOB, ta có: $S_2 = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$.

Diện tích cần tìm là:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 (4\pi - 3\sqrt{3})}{12} \text{ (đvdt)}$$

9. a. Tứ giác AMDN nội tiếp đường tròn đường kính AD tâm I.

b. Gọi H là giao điểm của MN và AD.

Vì $\widehat{BAE} = \widehat{MAE}$ nên:

$$AH \perp MN \text{ và } \widehat{NID} = \widehat{ABC} = \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{NH}{NI} = \frac{MN}{AD} \Rightarrow MN = AD \sin \alpha$$

c. Ta có: $\triangle ACD \sim \triangle AEB$ (g.g) $\Rightarrow AC \cdot AB = AD \cdot AE$.

Vì α là góc nhọn nên:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} AE \cdot MN = S_{ANEM}$$

10. a. Ta có: $\triangle AMB \sim \triangle ACM \Rightarrow AM^2 = AB \cdot AC = AN^2$

b. $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = \widehat{AEO} = 90^\circ \Rightarrow$ năm điểm A; M; E; O; N cùng nằm trên đường tròn đường kính AO.

$\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{ANM}$ (cùng chắn cung AM),

$\widehat{ANM} = \widehat{NIM}$ (cùng chắn cung NM)

$\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{NIM} \Rightarrow NI \parallel AB$

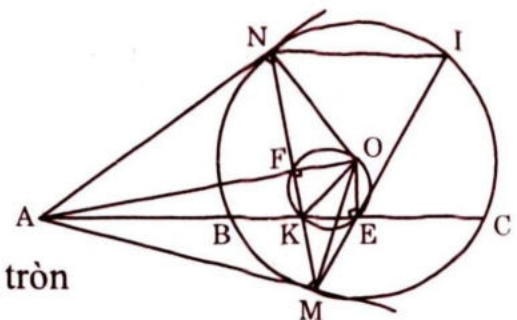
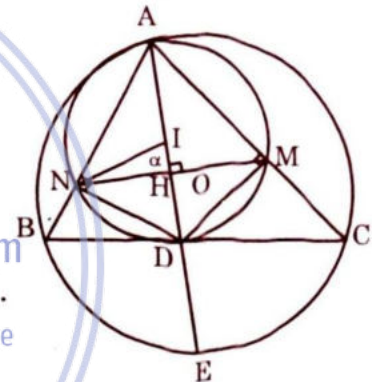
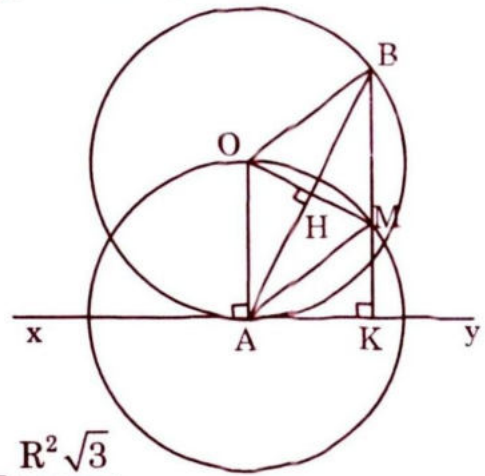
c. Gọi K là giao điểm của BC với MN.

Ta có: tứ giác OFKE nội tiếp trong đường tròn đường kính OK

$\Rightarrow \triangle AKO \sim \triangle AFE \Rightarrow AK \cdot AE = AF \cdot AO$

Mà $AF \cdot AO = AM^2 = AB \cdot AC \Rightarrow AK \cdot AE = AB \cdot AC$ không đổi

$\Rightarrow AK$ không đổi $\Rightarrow K$ cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF là trung điểm của OK cố định.



16. a. Ta có $\widehat{CED} = 90^\circ$ (nội tiếp đường tròn (O)) $\Rightarrow \widehat{CEA} = \widehat{CHA} = 90^\circ$
 Nên tứ giác AHCE nội tiếp trong đường tròn đường kính AC.
 Tâm I là trung điểm AC.

b. Ta có: $\widehat{ACD} = 120^\circ$; $\widehat{CAD} = 40^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{CDM} = \widehat{MCD} = 20^\circ$$

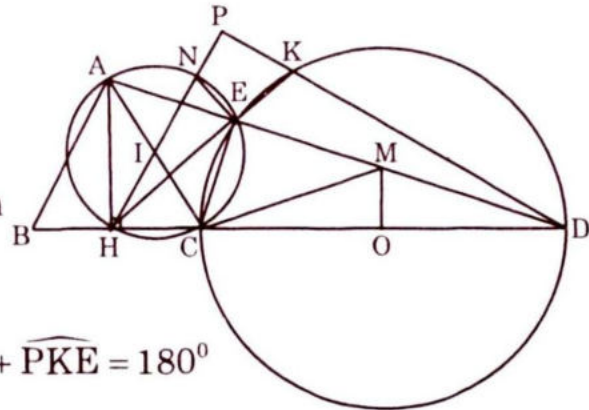
$$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{CMA} = 40^\circ \Rightarrow CA = CM$$

c. Ta có: $\widehat{HNE} = \widehat{HAE} = 70^\circ$ (cùng chắn cung HE) $\Rightarrow \widehat{PNE} = 110^\circ$

Ta tính được:

$$\widehat{DKE} = 110^\circ \Rightarrow \widehat{PNE} + \widehat{DKE} = \widehat{DKE} + \widehat{PKE} = 180^\circ$$

Vậy tứ giác NPKE nội tiếp.



17. a. Ta có: $\triangle ADB \sim \triangle ACM \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AM}$

$$\Rightarrow AD \cdot AM = AB \cdot AC = 2R \cdot 3R = 6R^2$$

b. Ta tính được: $AD = R\sqrt{3} \Rightarrow AM = 2R\sqrt{3}$

$$\Rightarrow DM = AM - AD = R\sqrt{3} = AD. \text{ Do đó } \triangle ABM \text{ cân tại B}$$

$$\Rightarrow AB = BM = 2R.$$

$$\text{Chu vi tam giác ABD là: } AD + BD + BA = R(3 + \sqrt{3})$$

$$\text{Chu vi tam giác ABM là: } AB + BM + MA = 2R(2 + \sqrt{3})$$

$$\text{Diện tích tam giác ABD bằng: } \frac{1}{2} AD \cdot BD = \frac{1}{2} R^2 \sqrt{3}$$

$$\text{Diện tích tam giác ABM bằng: } \frac{1}{2} AB \cdot BM = \frac{1}{2} (2R)^2 = 2R^2$$

$$\frac{1}{2} AM \cdot BD = R\sqrt{3}$$

c. Diện tích tam giác BMD là:

$$S_{BMD} = \frac{1}{2} BD \cdot DM = \frac{1}{2} R^2 \sqrt{3}$$

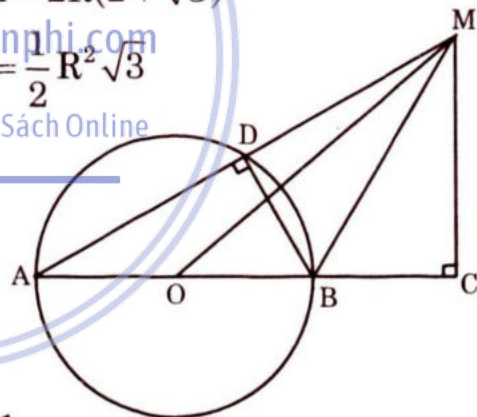
$$\text{Diện tích hình quạt tròn BOD là: } S_{\text{quạt}} = \frac{1}{6} \pi R^2.$$

$$\text{Diện tích tam giác đều BOD là: } S_{BOD} = \frac{1}{4} R^2 \sqrt{3}.$$

Diện tích hình viên phân cung BD là:

$$S_{VP} = S_{\text{quạt}} - S_{BOD} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$$

$$\text{Diện tích cần tìm là: } S = S_{BMD} - S_{VP} = \frac{R^2(9\sqrt{3} - 2\pi)}{12}.$$



ABC

18. a. Giả sử đã tìm được điểm D trên cung BC sao cho tứ giác BHCD là hình bình hành. Khi đó: $BD \parallel HC$; $CD \parallel HB$ vì H là trực tâm tam giác ABC nên $CH \perp AB$ và $CH \perp AC \Rightarrow BD \perp AB$ và $CD \perp AC$.

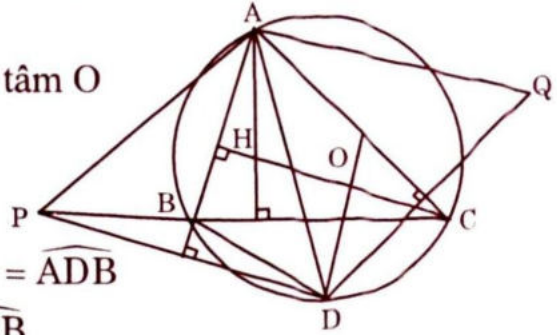
Do đó: $\widehat{ABD} = 90^\circ$ và $\widehat{ACD} = 90^\circ$.

Vậy AD là đường kính của đường tròn tâm O

Ngược lại nếu D là đầu đường kính

AD của đường tròn tâm O thì tứ giác

BHCD là hình bình hành.



- b. Vì P đối xứng với D qua AB nên $\widehat{APB} = \widehat{ADB}$

Nhưng $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ do đó: $\widehat{APB} = \widehat{ACB}$

Mặt khác: $\widehat{AHB} + \widehat{ACB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{APB} + \widehat{AHB} = 180^\circ$

Tứ giác APBH nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{PAB} = \widehat{PHB}$

Mà $\widehat{PAB} = \widehat{DAB}$ do đó: $\widehat{PHB} = \widehat{DAB}$.

Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{CHQ} = \widehat{DAC}$.

Vậy $\widehat{PHQ} = \widehat{PHB} + \widehat{BHC} + \widehat{CHQ} = \widehat{ABC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$

Ba điểm P, H, Q thẳng hàng.

- c. Ta thấy $\triangle APQ$ là tam giác cân đỉnh A có $AP = AQ = AD$ và $\widehat{PQA} = 2\widehat{BAC}$ không đổi nên cạnh đáy PQ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow AP$ và AQ là lớn nhất hay AD là lớn nhất

$\Rightarrow D$ là đầu đường kính kẻ từ A của đường tròn tâm O.

19. a. $\text{sđ } \widehat{CDE} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{DC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BD} = \widehat{BCD}$

$\Rightarrow DE \parallel BC$ (2 góc vị trí so le)

- b. $\widehat{APC} = \frac{1}{2} \text{sđ } (\widehat{AC} - \widehat{DC}) = \widehat{AQC}$

$\Rightarrow$ hình bình hành APQC nội tiếp

(vì $\widehat{APC} = \widehat{AQC}$ cùng nhìn đoạn AC)

- c. Tứ giác APQC nội tiếp

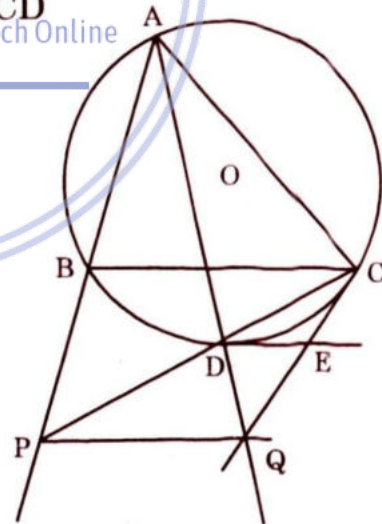
$\widehat{CPQ} = \widehat{CAQ}$ (cùng chắn cung CQ);

$\widehat{CAQ} = \widehat{CDE}$ (cùng chắn cung DC)

Suy ra $\widehat{CPQ} = \widehat{CDE} \Rightarrow DE \parallel PQ$.

Ta có: $\frac{DE}{PQ} = \frac{CE}{CQ}$ (vì $DE \parallel PQ$) (1)

$\frac{DE}{FC} = \frac{QE}{QC}$ (vì $DE \parallel BC$) (2)



Cộng (1) và (2): $\frac{DE}{PQ} + \frac{DE}{FC} = \frac{CE + QE}{CQ} = \frac{CQ}{CQ} = 1 \Rightarrow \frac{1}{PQ} + \frac{1}{FC} = \frac{1}{DE}$ (3)

ED = EC (tính chất tiếp tuyến) từ (1) suy ra PQ = CQ.

Thay vào (3): $\frac{1}{CQ} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{CE}$.

20. (Học sinh tự vẽ hình) a. $\widehat{EBQ} = \widehat{EAB} = 45^\circ \Rightarrow EBAQ$ nội tiếp; $\widehat{B} = 90^\circ$,

$\widehat{AQE} = 90^\circ, \widehat{EQF} = 90^\circ$. Tương tự $\widehat{FDP} = \widehat{FAP} = 45^\circ$

Tứ giác FDAP nội tiếp $\widehat{D} = 90^\circ, \widehat{APF} = 90^\circ, \widehat{EPF} = 90^\circ \dots$

Các điểm Q, P, C luôn nhìn EF dưới 1 góc 90° nên 5 điểm E, P, Q, F, C cùng nằm trên 1 đường tròn đường kính EF.

b. Ta có $\widehat{APQ} + \widehat{QPE} = 180^\circ$ (2 góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{AFE}$

$\widehat{AFE} + \widehat{EPQ} = 180^\circ$. Tam giác APQ đồng dạng với tam giác AEF (g.g)

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta AEF}} = k^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2S_{\Delta APQ} = S_{\Delta AEF}$$

c. $\widehat{CPD} = \widehat{CMD}$, tứ giác MPCD nội tiếp $\widehat{MCD} = \widehat{CPD}$ (cùng chắn cung MD).

Lại có $\widehat{MPD} = \widehat{CPD}$ (do BD là trung trực của AC)

$\widehat{MCD} = \widehat{MDC}$ (do M thuộc trung trực của DC)

$\widehat{CPD} = \widehat{MDC} = \widehat{CMD} = \widehat{MCD} \Rightarrow$ tam giác MDC đều $\widehat{CMD} = 60^\circ$

Tam giác DMA cân tại D (vì AD = DC = DM).

Và $\widehat{ADM} = \widehat{ADC} - \widehat{MDC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\widehat{MAD} = \widehat{AMD} (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$; $\widehat{MAB} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$

21. (Học sinh tự vẽ hình)

a. $\widehat{EAD} = \widehat{EFD} \left(= \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{ED} \right)$

$\widehat{FAD} = \widehat{FDC} \left(= \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{FD} \right)$

Mà $\widehat{EDA} = \widehat{FAD} \Rightarrow \widehat{EFD} = \widehat{FDC} \Rightarrow EF \parallel BC$

b. AD là phân giác góc $\widehat{BAC}$ nên DE = DF

$$\text{sd} \widehat{ACD} = \frac{1}{2} \text{sd} (\widehat{AED} - \widehat{DF}) = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{AE} = \text{sd} \widehat{ADE}$$

do đó $\widehat{ACD} = \widehat{ADE}$ và $\widehat{EAD} = \widehat{DAC} \Rightarrow \Delta AED \sim \Delta ADC$ (g.g)

Tương tự

$$\text{sd} \widehat{ADF} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{AF} = \frac{1}{2} \text{sd} (\widehat{AFD} - \widehat{DF}) = \text{sd} \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{ABD}$$

Do đó: $\Delta AFD \sim \Delta ABD$ (g.g)

c. Theo trên: $\triangle AED \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}$ hay $AD^2 = AE.AC$ (1)

+ $\triangle ADF \sim \triangle ABD$

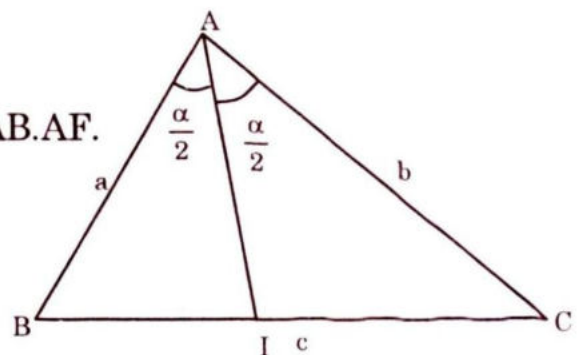
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB.AF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $AD^2 = AE.AC = AB.AF$.

$$22. + S_{\triangle ABI} = \frac{1}{2} AI.c. \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$+ S_{\triangle AIC} = \frac{1}{2} AI.b. \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$+ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha; \quad S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABI} + S_{\triangle AIC}$$



$$\Rightarrow bc \sin \alpha = AI \sin \frac{\alpha}{2} (b+c) \Rightarrow AI = \frac{bc \sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} (b+c)} = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}$$

23. a. $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$ Gọi $Q = NP \cap (O) \Rightarrow \widehat{QA} = \widehat{QB}$. Suy ra Q cố định

b. $\widehat{A}_1 = \widehat{M}_1 (= \widehat{A}_2) \Rightarrow$ Tứ giác ABMI nội tiếp

c. Trên tia đối của QB lấy điểm F sao cho $QF = QB$, F cố định.

Tam giác ABF có: $AQ = QB = QF$

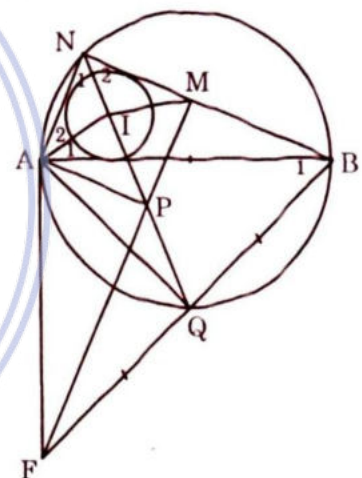
$$\Rightarrow \triangle ABF \text{ vuông tại } A \Rightarrow \widehat{B} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AFB} = 45^\circ$$

$$\text{Lại có } \widehat{P}_1 = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{P}_1$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác APQF nội tiếp} \Rightarrow \widehat{APF} = \widehat{AQF} = 90^\circ.$$

$$\text{Ta có: } \widehat{APF} + \widehat{APM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow M, P, F \text{ thẳng hàng.}$$



24.a. Ta có: $\widehat{DMP} = \widehat{AMQ} = \widehat{AIC}$. Mặt khác $\widehat{ADB} = \widehat{BCA}$

$$\Rightarrow \triangle MPD \text{ đồng dạng với } \triangle ICA \Rightarrow \frac{DM}{CI} = \frac{MP}{IA}$$

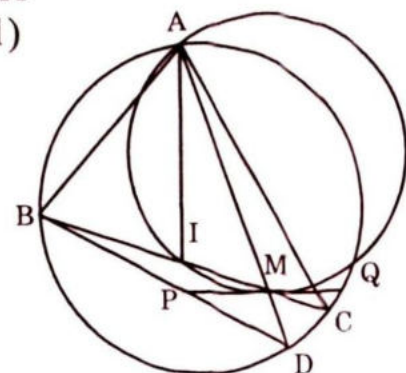
$$\Rightarrow DM.IA = MP.CI \text{ Hay } DM.IA = MP.IB \quad (1)$$

b. Ta có $\widehat{ADC} = \widehat{CBA}$, $\widehat{DMQ} = 180^\circ - \widehat{AMQ}$
 $= 180^\circ - \widehat{AIM} = \widehat{BIA}$.

Do đó $\triangle DMQ$ đồng dạng với $\triangle BIA$

$$\Rightarrow \frac{DM}{BI} = \frac{MQ}{IA} \Rightarrow DM.IA = MQ.IB \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{MP}{MQ} = 1.$$



25. a. Áp dụng định lý Pitago tính được $AB = AC = R$

$\Rightarrow ABOC$ là hình vuông.

Kẻ bán kính OM sao cho $\widehat{BOD} = \widehat{MOD} \Rightarrow \widehat{MOE} = \widehat{EOC}$

Chứng minh $\triangle BOD = \triangle MOD \Rightarrow \widehat{OMD} = \widehat{OBD} = 90^\circ$.

Tương tự: $\widehat{OME} = 90^\circ \Rightarrow D, M, E$ thẳng hàng.

Do đó DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

b. Xét $\triangle ADE$ có $DE < AD + AE$ mà $DE = DB + EC$

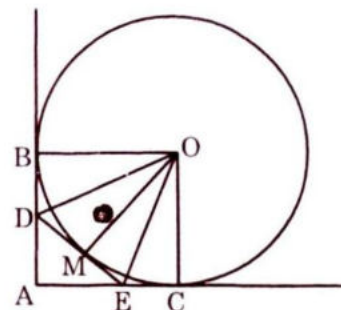
$\Rightarrow 2ED < AD + AE + DB + EC$

hay $2DE < AB + AC = 2R \Rightarrow DE < R$.

Ta có $DE > AD$; $DE > AE$; $DE = DB + EC$

Cộng từng vế ta được: $3DE > 2R \Rightarrow DE > \frac{2}{3}R$.

Vậy $R > DE > \frac{2}{3}R$.



26. Do $HA \parallel PB$ (cùng vuông góc với BC)

a. Theo định lý Talet áp dụng cho $\triangle CPB$ ta có:

$$\frac{EH}{PB} = \frac{CH}{CB} \quad (1)$$

Mặt khác, do $PO \parallel AC$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \widehat{POB} = \widehat{ACB}$ (hai góc đồng vị)

$\Rightarrow \triangle AHC \sim \triangle POB$

Do đó: $\frac{AH}{PB} = \frac{CH}{OB} \quad (2)$.

Do $CB = 2OB$, kết hợp (1) và (2) ta suy ra

$AH = 2EH$ hay E là trung điểm của AH .

b. Xét tam giác vuông BAC , đường cao $AH^2 = BH \cdot CH = (2R - CH)CH$.

Theo (1) và do $AH = 2EH$ ta có:

$$AH^2 = \left(2R - \frac{AH \cdot CB}{2PB}\right) \frac{AH \cdot CB}{2PB}$$

$$\Leftrightarrow AH^2 \cdot 4PB^2 = (4R \cdot PB - AH \cdot CB) \cdot AH \cdot CB$$

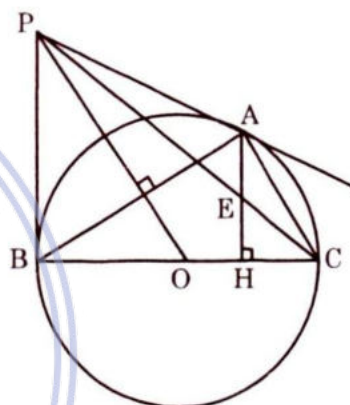
$$\Leftrightarrow 4AH \cdot PB^2 = 4R \cdot PB \cdot CB - AH \cdot CB^2$$

$$\Leftrightarrow AH(4PB^2 + CB^2) = 4R \cdot PB \cdot CB$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{4R \cdot CB \cdot PB}{4 \cdot PB^2 + CB^2} = \frac{4R \cdot 2R \cdot PB}{4PB^2 + (2R)^2} = \frac{8R^2 \cdot \sqrt{d^2 - R^2}}{4(d^2 - R^2) + 4R^2} = \frac{2 \cdot R^2 \cdot \sqrt{d^2 - R^2}}{d^2}$$

27.a. Ta có $CA = CM$; $DB = DM$

Các tia OC và OD là phân giác của hai góc $\widehat{AOM}$ và $\widehat{MOB}$ nên $OC \perp OD$. Tam giác COD vuông đỉnh O , OM là đường cao thuộc cạnh huyền CD nên:



$$MO^2 = CM.MD \Rightarrow R^2 = AC.BD$$

b. Các tứ giác ACMO; BDMO nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MAO}; \widehat{MDO} = \widehat{MBO}$$

$$\Rightarrow \triangle COD \sim \triangle AMB (g.g)$$

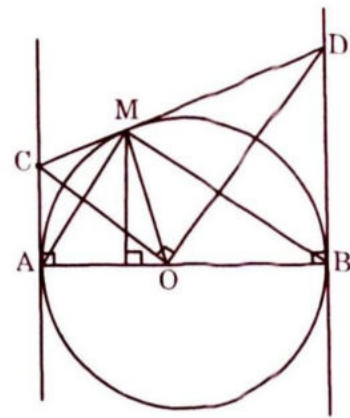
$$\text{Do đó: } \frac{\text{chu vi } \triangle COD}{\text{chu vi } \triangle AMB} = \frac{OM}{MH_1} (MH_1 \perp AB).$$

$$\text{Do } MH_1 \leq OM \text{ nên } \frac{OM}{MH_1} \geq 1$$

$$\Rightarrow \text{Chu vi } \triangle COD \geq \text{chu vi } \triangle AMB.$$

. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow MH_1 = OM \Leftrightarrow M \equiv O$

$\Rightarrow M$ là điểm chính giữa của cung AB.



28. a. Xét $\triangle ABM$ và $\triangle NBM$.

Ta có: AB là đường kính của đường tròn (O)

$$\text{nên } \widehat{AMB} = \widehat{NMB} = 90^\circ.$$

M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC nên

$$\widehat{ABM} = \widehat{MBN} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BNM}$$

$\Rightarrow \triangle BAN$ cân đỉnh B. Tứ giác AMCB nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MCN} \text{ (cùng bù với } \widehat{MCB})$$

$$\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{MNC} \text{ (cùng bằng góc } \widehat{BAM}).$$

$\Rightarrow$ tam giác MCN cân đỉnh M

b. Xét $\triangle MCB$ và $\triangle MNQ$ có:

MC = MN (theo chứng minh trên $\triangle MNC$ cân); MB = MQ (theo gt);

$$\widehat{BMC} = \widehat{MNQ} \text{ (vì } \widehat{MCB} = \widehat{MNC}; \widehat{MBC} = \widehat{MQN})$$

$$\Rightarrow \triangle MCB = \triangle MNQ (c.g.c) \Rightarrow BC = NQ.$$

Xét tam giác vuông ABQ có

$$AC \perp BQ \Rightarrow AB^2 = BC.BQ = BC(BN + NQ)$$

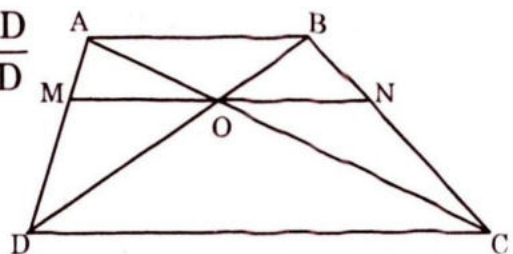
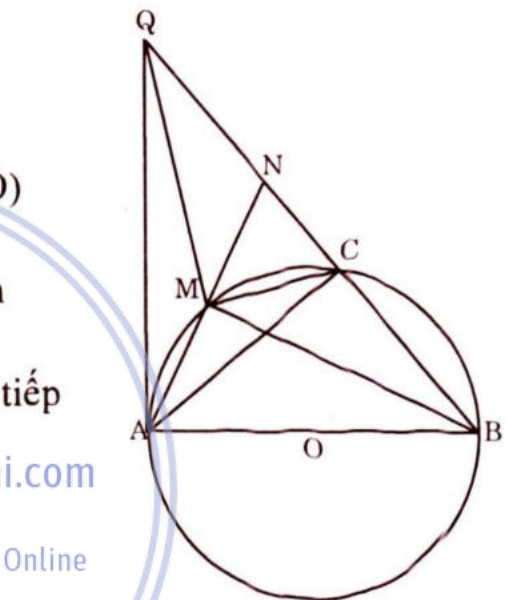
$$\Rightarrow AB^2 = BC.(AB + BC) = BC(BC + 2R)$$

$$\Rightarrow 4R^2 = BC.(BC + 2R) \Rightarrow BC = (\sqrt{5} - 1)R.$$

29.a. Chứng minh được: $\frac{MO}{CD} = \frac{AM}{AD} : \frac{MO}{AB} = \frac{MD}{AD}$

$$\text{Suy ra: } \frac{MO}{CD} + \frac{MO}{AB} = \frac{AM+MD}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1 \quad (1)$$

b. Tương tự câu a) ta có $\frac{NO}{CD} + \frac{NO}{AB} = 1 \quad (2)$



Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MO + NO}{CD} + \frac{MO + NO}{AB} = 2$ hay $\frac{MN}{CD} + \frac{MN}{AB} = 2$

Suy ra $\frac{1}{CD} + \frac{1}{AB} = \frac{2}{MN}$

30. a. Chứng minh được: - Hai cung $\widehat{AB}$ và $\widehat{CD}$ bằng nhau
- số góc $\widehat{AMB}$ bằng số cung $\widehat{AB}$.

Suy ra được hai góc $\widehat{AOB}$ và $\widehat{AMB}$ bằng nhau.

O và M cùng phía với AB.

- Do đó tứ giác AOMB nội tiếp.

- b. Chứng minh được:

- O nằm trên đường trung trực của BC (1)

- M nằm trên đường trung trực của BC (2).

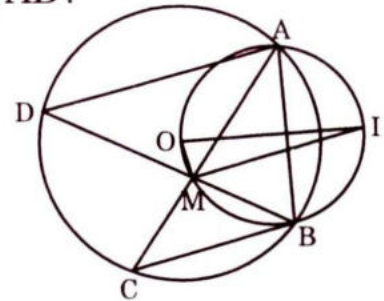
Từ (1) và (2) suy ra OM là đường trung trực của BC, suy ra $OM \perp BC$.

- c. Từ giả thiết suy ra $d \perp OM$

Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với đường tròn ngoại tiếp tứ giác AOMB, suy ra góc OMI bằng 90° . Do đó OI là đường kính của đường tròn này.

Khi C và D di động thỏa mãn đề bài thì A, O, B cố định, nên đường tròn ngoại tiếp tứ giác AOMB cố định, suy ra I cố định.

Vậy d luôn đi qua điểm I cố định.



31. a. $\widehat{AKH} = \widehat{AIH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp nửa đường tròn) và

- $\widehat{KAI} = 90^\circ$ (gt).

Suy ra AKHI là hình chữ nhật.

- b. Ta có: $\widehat{AKI} = \widehat{AHI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AI)

$\widehat{ACB} = \widehat{AHI}$ (cùng phụ góc $\widehat{HAC}$). Suy ra $\widehat{AKI} = \widehat{ACB}$;

$\widehat{BKI} + \widehat{ICB} = \widehat{BKI} + \widehat{AKI} = 2v$

Vậy tứ giác BCIK nội tiếp trong đường tròn.

- c. Gọi E là giao điểm của AM và IK.

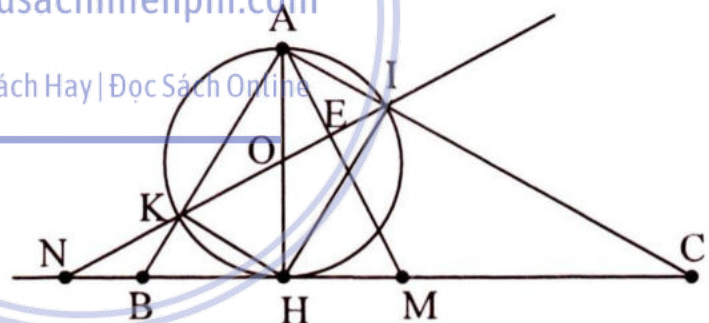
Ta có: $\widehat{AIK} = \widehat{AHK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AK)

$\widehat{AHK} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ góc $\widehat{BHK}$). Suy ra: $\widehat{AIK} = \widehat{ABC}$

AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ABC, nên:

$AM = \frac{BC}{2} = MC \Rightarrow \triangle AMC$ cân tại M. Suy ra: $\widehat{MAC} = \widehat{ACB}$

Mà $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 1v$, do đó: $\widehat{AIK} + \widehat{MAC} = 1v$.



Vậy $\widehat{AEI} = 1v \Leftrightarrow AM \perp IK$.

Xét ΔKHN và ΔHIN có $\widehat{N}$ chung $\widehat{NHK} = \widehat{NIH} (= \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{HK})$

$\Rightarrow \Delta KHN \sim \Delta HIN$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KN}{HN} = \frac{NH}{IN} \Rightarrow NH^2 = KN.IN$$

32. a. Tứ giác ABEH có: $\widehat{B} = 90^\circ$ (góc nội tiếp trong nửa đường tròn),
 $\widehat{H} = 90^\circ$ (gt).

Nên ABEH nội tiếp được.

Tương tự, tứ giác DCEH có

$\widehat{C} = \widehat{H} = 90^\circ$ nên nội tiếp được.

- b. Trong tứ giác nội tiếp ABEH, ta có:

$\widehat{EBH} = \widehat{EAH}$ (cùng chắn cung EH)

Trong (O) ta có:

$\widehat{EAH} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung CD)

Suy ra: $\widehat{EBH} = \widehat{EBC}$, nên BE là tia phân giác của $\widehat{HBC}$.

Tương tự, ta có $\widehat{ECH} = \widehat{BDA} = \widehat{BCE}$, nên CE là tia phân giác của $\widehat{BCH}$

Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.

Suy ra EH là tia phân giác của góc BHC.

- c. Ta có I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ECD, nên
 $\widehat{BIC} = 2\widehat{EDC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung EC). Mà
 $\widehat{EDC} = \widehat{EHC}$ suy ra $\widehat{BIC} = \widehat{BHC}$

Trong (O), $\widehat{BOC} = 2\widehat{BDC} = \widehat{BHC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BC). Suy ra H, O, I ở trên cung chứa góc BHC dựng trên đoạn BC, hay 5 điểm B, C, H, O, I cùng nằm trên một đường tròn.

33. a. Theo giả thiết: DA và DM là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D nên OD là phân giác góc AOM. Tương tự OE là tia phân giác góc MOB.

Mà $\widehat{AOM}$ và $\widehat{MOB}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{DOE} = 90^\circ$.

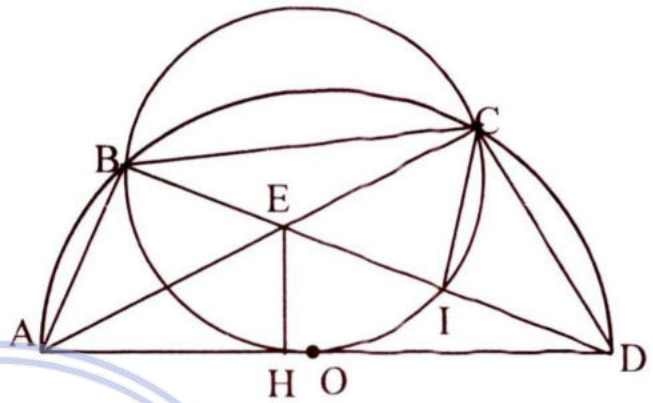
Vậy tam giác DOE vuông tại O.

- b. Tam giác DOE vuông tại O và $OM \perp DE$ nên theo hệ thức lượng của tam giác vuông, ta có: $DM.EM = OM^2 = R^2$ (1)

Mà $DM = DA$ và $EM = EB$ (định lý về 2 tiếp tuyến cắt nhau) (2).

Từ (1) và (2) ta có: $DA.EB = R^2$

- c. Tứ giác ADEB là hình thang vuông, nên diện tích của nó là:



$$S = \frac{1}{2} AB(DA + EB) = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot (DM + EM) = R \cdot DE$$

S nhỏ nhất khi và chỉ khi DE nhỏ nhất. Mà DE là đường xiên hay đường vuông góc kẻ từ D đến By, nên DE nhỏ nhất khi $DE = DH$ (DH vuông góc với By tại H). Khi đó DE song song với AB nên M là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O) (hoặc $OM \perp AB$). Giá trị nhỏ nhất của diện tích đó là: $S_0 = 2R^2$

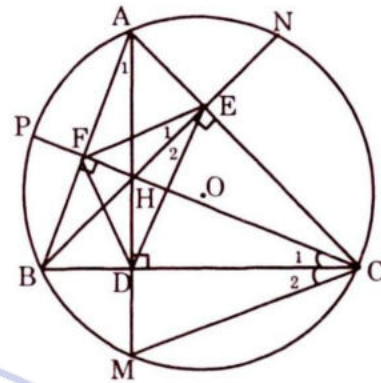
34. 1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$$\widehat{CEH} = 90^\circ \text{ (vì BE là đường cao)}$$

$$\widehat{CDH} = 90^\circ \text{ (vì AD là đường cao)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CEH} + \widehat{CDH} = 180^\circ$$

Mà $\widehat{CEH}$ và $\widehat{CDH}$ là hai góc đối của tứ giác CEHD, do đó CEHD là tứ giác nội tiếp.



2. Theo giả thiết: BE là đường cao

$$\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$$

CF là đường cao $\Rightarrow CF \perp AB \Rightarrow \widehat{BFC} = 90^\circ$. Như vậy E và F cùng nhìn BC dưới một góc $90^\circ \Rightarrow E$ và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC. Vậy bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

3. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: $\widehat{AEH} = \widehat{ADC} = 90^\circ$; $\hat{A}$ chung

$$\Rightarrow \triangle AEH \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AH \cdot AD$$

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$; $\hat{C}$ là góc chung.

$$\Rightarrow \triangle BEC \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AD \cdot BC = BE \cdot AC$$

4. Ta có: $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$)

$$\hat{C}_2 = \hat{A}_1 \text{ (vì hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)}$$

$$\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \Rightarrow CB \text{ là tia phân giác của góc HCM;}$$

$$\text{lại có } CB \perp HM \Rightarrow \triangle CHM \text{ cân tại C}$$

$$\Rightarrow CB \text{ cũng là đường trung trực của HM.}$$

Vậy H và M đối xứng nhau qua BC.

5. Theo chứng minh trên bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF). Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp, $\hat{C}_1 = \hat{E}_2$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD). $\hat{E}_1 = \hat{E}_2 \Rightarrow EB$ là tia phân giác của $\widehat{FED}$

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

35. 1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$$\widehat{CEH} = 90^\circ \text{ (vì BE là đường cao)}$$

$$\widehat{CDH} = 90^\circ \text{ (vì AD là đường cao)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CEH} + \widehat{CDH} = 180^\circ$$

Mà $\widehat{CEH}$ và $\widehat{CDH}$ là hai góc đối của tứ giác CEHD, do đó CEHD là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết:

$$\text{BE là đường cao } BE \perp AC \Rightarrow \widehat{BEA} = 90^\circ$$

$$\text{AD là đường cao } AD \perp BC \Rightarrow \widehat{BDA} = 90^\circ$$

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc 90°

$$\Rightarrow E \text{ và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.}$$

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

$$\Rightarrow D \text{ là trung điểm của BC. Theo trên ta có } \widehat{BEC} = 90^\circ.$$

$$\text{Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến } \Rightarrow DE = \frac{1}{2} BC.$$

4. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH $\Rightarrow OA = OE \Rightarrow$ tam giác AOE cân tại O $\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{A}_1$ (1).

$$\text{Theo trên } DE = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \text{tam giác DBE cân tại D} \Rightarrow \widehat{E}_3 = \widehat{B}_1 \text{ (2).}$$

$$\text{Mà } \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 \text{ (vì cùng phụ với góc } \widehat{ACB}) \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{E}_3 \Rightarrow \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{E}_2 + \widehat{E}_3$$

$$\text{Mà } \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{BEA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E}_2 + \widehat{E}_3 = 90^\circ = \widehat{OED} \Rightarrow DE \perp OE \text{ tại E}$$

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

5. Theo giả thiết AH = 6cm $\Rightarrow$ OH = OE = 3cm; DH = 2cm $\Rightarrow$ OD = 5cm.

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có:

$$ED^2 = OD^2 - OE^2 \Rightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow ED = 4\text{cm}$$

36. 1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có

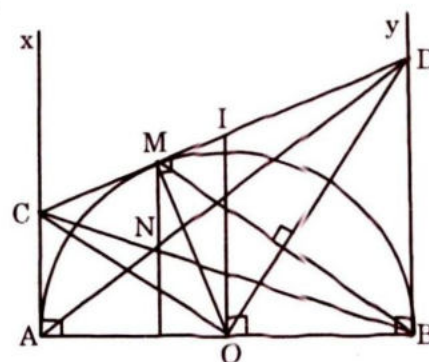
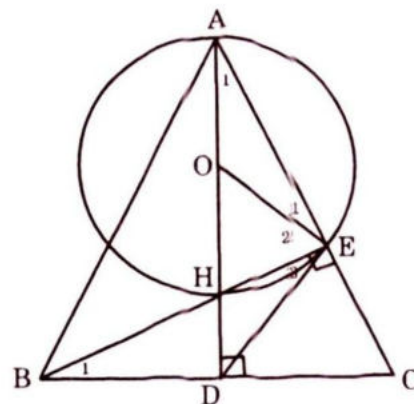
$$CA = CM; DB = DM \Rightarrow AC + BD = CD.$$

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

OC là tia phân giác của góc $\widehat{AOM}$;

OD là tia phân giác của góc $\widehat{BOM}$,

mà $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$ là hai góc kề bù $\widehat{COD} = 90^\circ$.

3. Theo trên $\widehat{COD} = 90^\circ$ nên tam giác COD vuông tại O có OM $\perp$ CD (OM là tiếp tuyến). Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có: $OM^2 = CM \cdot DM$.

$$\text{Mà } OM = R; CA = CM; DB = DM \Rightarrow AC \cdot BD = R^2 \Rightarrow AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4},$$

4. Theo trên $\widehat{COD} = 90^\circ$ nên $OC \perp OD$. (1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $DB = DM$;

lại có $OM = OB = R \Rightarrow OD$ là trung trực của $BM \Rightarrow BM \perp OD$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OC \parallel BM$ (vì cùng vuông góc với OD).

5. Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $AC \perp AB$; $BD \perp AB \Rightarrow AC \parallel BD$

$\Rightarrow$ tứ giác $ACBD$ là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD

O là trung điểm của $AB \Rightarrow IO$ là đường trung bình của hình thang $ACBD$

$\Rightarrow IO \parallel AC$, mà $AC \perp AB \Rightarrow IO \perp AB$ tại $O \Rightarrow AB$ là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD .

6. Theo trên $AC \parallel BD \Rightarrow \frac{CN}{BN} = \frac{AC}{BD}$, mà $CA = CM$; $DB = DM$ nên suy ra

$$\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM} \Rightarrow MN \parallel BD \text{ mà } BD \perp AB \Rightarrow MN \perp AB.$$

7. (HD): Ta có chu vi tứ giác $ACBD = AB + AC + CD + BD$ mà $AC + BD = CD$ nên suy ra chu vi tứ giác $ACBD = AB + 2CD$ mà AB không đổi nên chu vi tứ giác $ACBD$ nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất, mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữa Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By . Khi đó $CD \parallel AB \Rightarrow M$ phải là trung điểm của cung AB .

37. 1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B . Do đó $BI \perp BK$ hay $\widehat{IBK} = 90^\circ$

Tương tự ta cũng có $\widehat{ICK} = 90^\circ$ như vậy

B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2. Ta có $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH).

$$\widehat{C}_1 + \widehat{I}_1 = 90^\circ \quad (2) \quad (\text{vì } \widehat{IHC} = 90^\circ)$$

$$\widehat{I}_1 = \widehat{ICO} \quad (3) \quad (\text{vì tam giác } OIC \text{ cân tại } O)$$

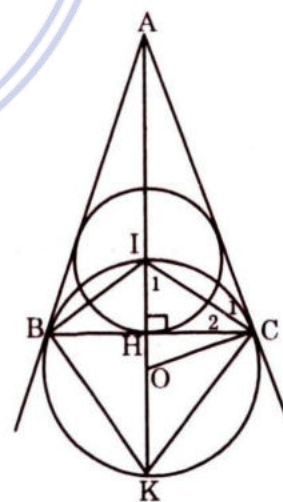
$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{ICO} = 90^\circ \text{ hay } AC \perp OC.$$

Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Từ giả thiết $AB = AC = 20\text{cm}$, $BC = 24\text{cm} \Rightarrow CH = 12\text{cm}$.

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16(\text{cm})$$

$$CH = AH \cdot OH \Rightarrow OH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16} = 9(\text{cm})$$



$$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15(\text{cm}).$$

38. a. ABCD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$.

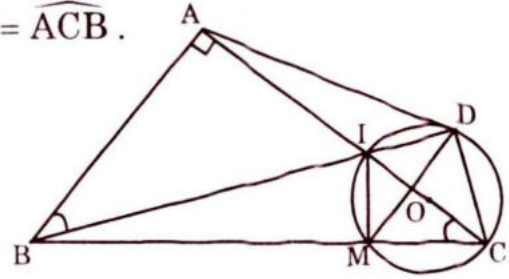
Theo giả thiết $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$, suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{ACB}$.

b. ABCD là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} \text{ ta lại có}$$

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACD} \text{ (câu a) nên}$$

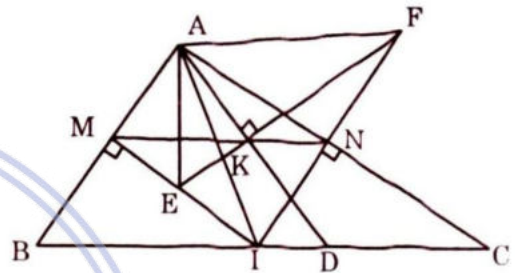
$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$, do đó DA là tiếp tuyến của đường tròn (O)



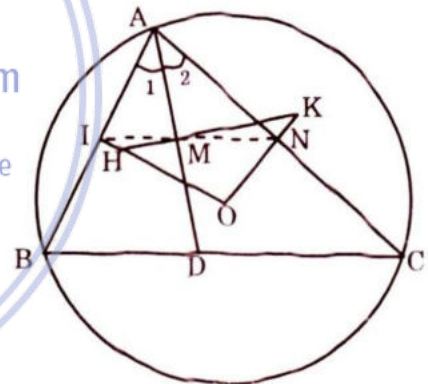
39. Gọi M, K, N là trung điểm của AB, AD, AC. Các điểm E, F là giao điểm của IM, IN và đường vuông góc với AD tại K.

$\widehat{AKF} = \widehat{ANF} = 90^\circ \Rightarrow$ AKNF là tứ giác nội tiếp $\widehat{AFK} = \widehat{ANK}$.

Ta lại có (ANIM là hình chữ nhật), tức là $\widehat{ANK} = \widehat{AIE}$. Suy ra $\widehat{AFK} = \widehat{AIE}$ tức là $\widehat{AFE} = \widehat{AIE}$. Do đó AEIF là tứ giác nội tiếp. Do $\widehat{EIF} = 90^\circ$ nên EF là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEIF. Do D đối xứng với A qua EF nên D cũng nằm trên đường tròn đó.



40. (hình) Theo tính chất của hai đường tròn cắt nhau: OH là đường trung trực của AB nên đi qua trung điểm I của AB, HK là đường trung trực của AD nên đi qua trung điểm M của AD, OK là đường trung trực của AC nên đi qua trung điểm N của AC.



Ta có AIHM, AMNK là các tứ giác nội tiếp và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên chứng minh được $\widehat{OHK} = \widehat{OKH}$. Do đó $OH = OK$.

41. (hình) a. Từ các tứ giác nội tiếp và các tam giác đồng dạng, ta có

$$BH \cdot BE + CH \cdot CF = BD \cdot BC + CD \cdot CB$$

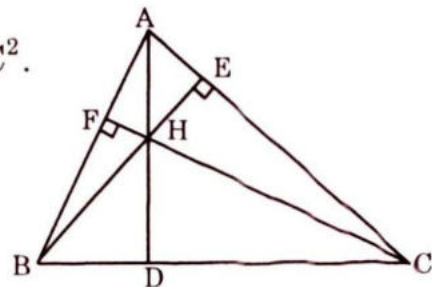
$$= BC(BD + CD) = BC^2.$$

b. Tương tự ta có:

$$CH \cdot CF + AH \cdot AD = AC^2$$

$$AH \cdot AD + BH \cdot BE = AB^2$$

Bạn đọc tự giải tiếp.



42. (hình) a. A, M, D, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

b. Gọi BE là đường cao của ΔABC .

Theo hệ thức lượng trong đường tròn (O) ta có: $AN^2 = AE.AC$

Do HDEC là tứ giác nội tiếp nên

$$AE.AC = AH.AD$$

Suy ra $AN^2 = AH.AD$, do đó $\frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AN}$.

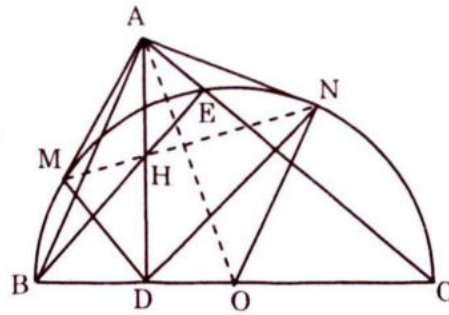
Từ đó $\Delta AHN \sim \Delta AND$ (c.g.c)

suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{AND}$.

Chứng minh tương tự $\widehat{AHM} = \widehat{AMD}$.

Suy ra: $\widehat{AHN} + \widehat{AHM} = \widehat{AND} + \widehat{AMD} = 180^\circ$ (do MADN là tứ giác nội tiếp).

Vậy M, H, N thẳng hàng.



43. Kẻ đường kính AD. Xét các trường hợp sau

Trường hợp $\hat{B}$ và $\hat{C}$ là góc nhọn

Trường hợp $\hat{B}$ và $\hat{C}$ là góc tù

(Bạn đọc tự làm tiếp).

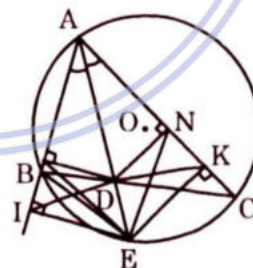
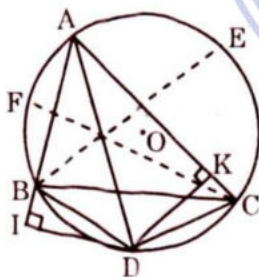
b. $S = \frac{1}{2} BC.AH = \frac{1}{2} BC \cdot \frac{AB.AC}{2R}$. Vậy $S = \frac{abc}{4R}$.

44. a. Kẻ $DI \perp AB, DK \perp AC$. Hãy chứng minh $BI = CK$, từ đó

$$AB + AC = AI + AK < 2AD.$$

b. Cộng từng vế các bất đẳng thức:

$$AD > \frac{AB + AC}{2}, BE > \frac{AB + BC}{2}, CF > \frac{AC + BC}{2}$$



45. a. Trước hết hãy chứng minh $BI = CK$.

b. Do $DM \parallel EI$ nên $S_{AME} = S_{ADI}$.

Do $DN \parallel EK$ nên $S_{ANE} = S_{ADK}$. Suy ra:

$$S_{AMEN} = S_{ADI} + S_{ADK} = \frac{1}{2} (AI + AK) \cdot DM = \frac{1}{2} (AB + AC) \cdot DM = S_{ABC}.$$

46. Giả sử $AC \geq AB$, ta có: $\frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK} = \frac{AI - BI}{MI} + \frac{AK + KC}{MK} = \frac{AI}{MI} + \frac{AK}{MK}$ (1)

$$\left(\widehat{MBI} = \widehat{MCK} \Rightarrow \cot \widehat{MBI} = \cot \widehat{MCK} \Rightarrow \frac{BI}{MI} = \frac{KC}{MK} \right)$$

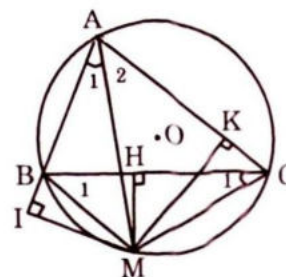
ABC

Do $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ nên $\cot \widehat{A_1} = \cot \widehat{C_1}$, suy ra:

$$\frac{AI}{MI} = \frac{CH}{MH} \quad (2)$$

$\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$ nên $\cot \widehat{A_2} = \cot \widehat{B_1}$, suy ra:

$$\frac{AK}{MK} = \frac{BH}{MH} \quad (3)$$



Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK} = \frac{CH}{MH} + \frac{BH}{MH} = \frac{BC}{MH}$.

47. (hình) Ta chứng minh được B, C là tâm của các đường tròn bàng tiếp của $\triangle DEF$. Theo tính chất của tiếp tuyến kẻ đến các đường tròn:

$$2EI = \text{chu vi DEF} \quad (1)$$

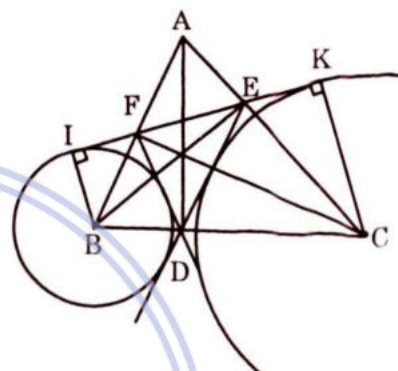
$$2FK = \text{chu vi DEF} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$\text{Chu vi DEF} = EI + FK$$

$$\Rightarrow DE + DF + EF = (IF + EF) + FK$$

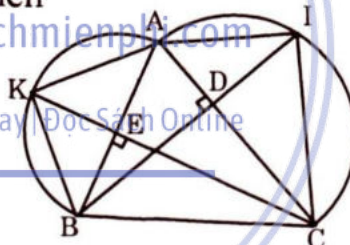
$$\Rightarrow DE + DF = IK.$$



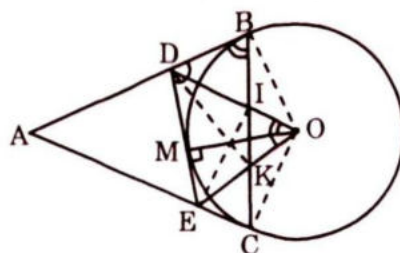
48. $AI^2 = AD \cdot AC = AE \cdot AB = AK^2$ nên
 $AI = AK$.

downloaadsachmienphi.com

Download Sách Hay | Đọc Sách Online



- 49.a. $\widehat{DBK} = \widehat{DOE}$ (cùng bằng nửa số đo cung DC) nên OBDK là tứ giác nội tiếp.

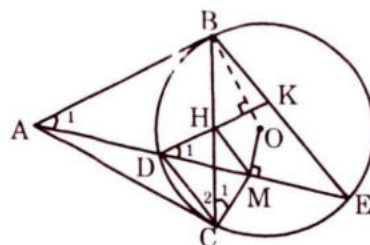
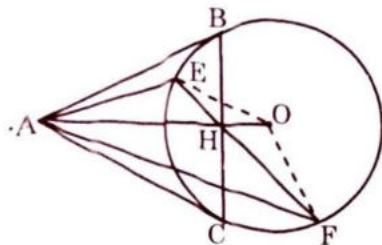


$\triangle DBI$ và $\triangle DOE$ có $\widehat{DBI} = \widehat{DOE}$, $\widehat{BDI} = \widehat{ODE}$ nên $\widehat{BID} = \widehat{OED}$ suy ra DIKE là tứ giác nội tiếp.

- b. OBDK là tứ giác nội tiếp (câu a) mà $\widehat{OBD} = 90^\circ$ nên $\widehat{OKD} = 90^\circ$, do đó $DK \perp OE$. Tương tự $EI \perp OD$. Ta lại có $OM \perp DE$.

Vậy OM, DK, EI đồng quy.

50. Lần lượt chứng minh: $HO \cdot HA = HB \cdot HC = HE \cdot HF$. Từ AEOF là tứ giác nội tiếp. Ta lại có $OE = OF$ nên AO là tia phân giác của góc EAF.



51. Kẻ $OM \perp DE$. Các điểm B, C, M thuộc đường tròn đường kính AO nên $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$. Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$. Do đó CDHM là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{C_2} = \widehat{HMD}$. Ta lại có $\widehat{C_2} = \widehat{E}$ nên $\widehat{HMD} = \widehat{E}$, do đó $MH \parallel EB$. Dễ dàng chứng minh $DH = HK$.

52. a. $\triangle KDA \sim \triangle KCD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KA}{KD} = \frac{AD}{DC}$$

Tương tự $\frac{KA}{KB} = \frac{AB}{BC}$, do đó $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

- b. $\triangle AIB \sim \triangle ADC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AI}{IB} = \frac{AD}{DC}$

Tương tự $\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BC}$.

Do $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ (câu a) nên $\frac{AI}{IB} = \frac{AI}{ID}$, suy ra $IB = ID$.

53. Gọi K là giao điểm thứ hai của BA với đường tròn (O). Theo câu a của bài 52, ta có: $AD \cdot KC = AC \cdot KD$ (1)

Đặt $\frac{AO'}{AO} = k$, ta dễ dàng chứng minh được

$AF = kAD, BE = kKC, AE = kAC, BF = kKD$ nên từ (1) suy ra:
 $kAD \cdot kKC = kAC \cdot kKD$, tức là $AF \cdot BE = AE \cdot BF$.

54. AHEB là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BAE} \quad (1)$$

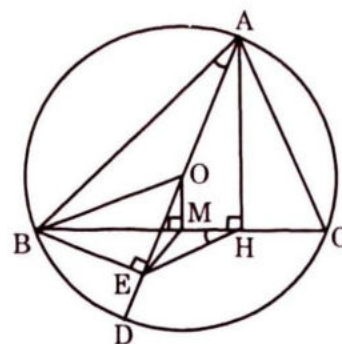
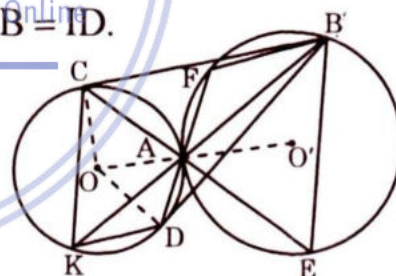
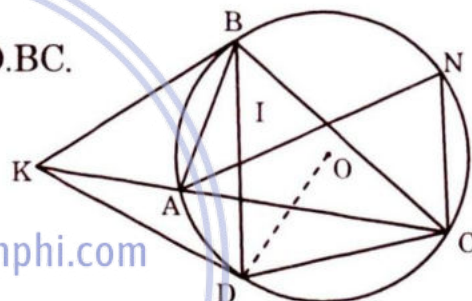
OMEB là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{BOE} \Rightarrow \widehat{HME} = \widehat{AOB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle HME \sim \triangle AOB$ (g.g).

Do đó $\triangle AOB$ cân nên $\triangle HME$ cân.

Chú ý: bỏ điều kiện “các góc nhọn, $AB > AC$ ”, bài toán vẫn đúng.



ABC

7. Các bài toán tổng hợp

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy \\ (x-1)\sqrt{y} + (y-1)\sqrt{x} = \sqrt{2xy} \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{cases} x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy & (1) \\ (x-1)\sqrt{y} + (y-1)\sqrt{x} = \sqrt{2xy} & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x, y \geq 1$. $(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} = 1$.

Vì $(\sqrt{y-1} - 1)^2 = y - 2\sqrt{y-1} \geq 0$, suy ra: $\frac{\sqrt{y-1}}{y} \leq \frac{1}{2}$ và suy ra

$\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$. Do đó: $\frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq 1$.

Nên $(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y-1}}{y} = \frac{1}{2}$ và $\frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{1}{2}$. Vậy $\begin{cases} \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$.

Thử lại: thỏa mãn, vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x = 2; y = 2)$.

Ví dụ 2: Trong một cuộc đua xe mô tô, ba tay đua đã khởi hành cùng một lúc. Mỗi giờ, người thứ hai chạy chậm hơn người thứ nhất 15km và nhanh hơn người thứ ba 3km nên người thứ hai đến đích chậm hơn người thứ nhất 12 phút và sớm hơn người thứ ba 3 phút. Tính vận tốc của ba tay đua mô tô trên.

Giải:

- Gọi x (km/h) là vận tốc người thứ hai. y (km) là chiều dài quãng đường đua. Điều kiện: $x \geq 3$, $y > 0$
- Ta có: $x + 15$ (km/h) là vận tốc mô tô thứ nhất;

$x - 3$ (km/h) là vận tốc mô tô người thứ ba. 12 phút = $\frac{1}{5}$ giờ; 3 phút = $\frac{1}{20}$ giờ

- Theo đề bài ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5} \\ \frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5} \\ \frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y(x+15) - 5yx = (x+15)x \\ 20xy - 20(x-3)y = x(x-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5xy + 75y - 5xy = x^2 + 15x \\ 20xy - 20xy + 60y = x^2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75y = x^2 + 15x \quad (1) \\ 60y = x^2 - 3x \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + 15x}{75} \\ 60\left(\frac{x^2 + 15x}{75}\right) = x^2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + 15x}{75} \\ 4(x^2 + 15x) = 5(x^2 - 3x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + 15x}{75} \\ x^2 - 75x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75 \\ y = 90 \end{cases}$$

- ♦ Vậy: vận tốc mô tô thứ nhất là: 90 km/h;
vận tốc mô tô thứ hai là: 75 km/h;
vận tốc mô tô thứ ba là: 72 km/h.

Ví dụ 3: Bốn học sinh Hồng, Hà, Long, Giang làm trực nhật, trong đó có một học sinh vẽ tranh lên tường. Thầy Chủ nhiệm hỏi: “Ai đã vẽ tranh lên tường?”. Các bạn lần lượt trả lời:

Hà: - Thưa Thầy, có thể bạn Giang, cũng có thể bạn Long đã vẽ ạ!

Giang: - Thưa Thầy, em không vẽ đâu ạ!

Hồng: - Thưa Thầy, chính bạn Long vẽ ạ!

Long: - Bạn Hồng ơi, bạn nhầm rồi. Thưa Thầy, em không vẽ đâu ạ!

Biết rằng có ba học sinh nói đúng, còn một học sinh nói sai. Hỏi ai đã vẽ tranh lên tường?

Download Sách **Giải:** Đọc Sách Online

Dùng phương pháp loại suy:

- + Giả sử Hà nói sai, thì 3 người còn lại nói đúng: Khi đó, cả 2 bạn Giang và Long đều không vẽ, do đó bạn Giang nói đúng, nhưng bạn Hồng nói sai (mâu thuẫn, vì cả Hà và Hồng đều nói sai). Khả năng này không xảy ra.
- + Giả sử Giang nói sai: Khi đó Hà nói đúng, nghĩa là Long không vẽ, do đó bạn Hồng lại nói sai (Giang và Hồng đều nói sai, dẫn đến mâu thuẫn). Khả năng này không xảy ra.
- + Giả sử Hồng nói sai: Khi đó, Long không vẽ, Long nói đúng, mà Giang không thể nói sai, do đó Hà nói sai vì cả Long và Giang đều không vẽ (cả Hồng và Hà đều nói sai, mâu thuẫn). Khả năng này không xảy ra.
- + Chỉ còn lại khả năng Long nói sai: tức là Long đã vẽ tranh lên tường, Hồng nói đúng, Giang nói đúng (không thể nói sai) và Hà cũng nói đúng.

Vậy: người vẽ tranh lên tường chính là Long.

Ví dụ 4: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình $a^2x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ vô nghiệm.

Giải:

ABC

$$\Delta = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2$$

$$= (a^2 + b^2 + 2ab - c^2)(a^2 + b^2 - 2ab - c^2)$$

$= [(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2]$. Do a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên:

$$a + b > c \Rightarrow (a+b)^2 > c^2 \Rightarrow (a+b)^2 - c^2 > 0$$

Và $|a-b| < c \Rightarrow (a-b)^2 < c^2 \Rightarrow (a-b)^2 - c^2 < 0$. Vì vậy $\Delta < 0$ nên phương trình $a^2x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ vô nghiệm.

Ví dụ 5: Tìm giá trị của m để phương trình sau vô nghiệm: $x + \sqrt{x-2} + m = 0$ (1)

Giải:

Điều kiện: $x \geq 2$. Đặt $\sqrt{x-2} = t$ ($t \geq 0$), ta có:

$$x + \sqrt{x-2} + m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2 + m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2 = -m \quad (2)$$

Ta có: phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm

Mặt khác: $\min_{t \geq 0} (t^2 + t + 2) = 2$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow -m < 2 \Leftrightarrow m > -2.$$

Vậy phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow m > -2$.

Ví dụ 6: Cho hai phương trình: $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ (1); $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ (2)

có các hệ số thỏa mãn điều kiện $a_1a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.

Giải:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{(1)} = a_1^2 - 4b_1 \\ \Delta_{(2)} = a_2^2 - 4b_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} = a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2)$$

Ta có: $a_1a_2 \geq 2(b_1 + b_2) \Rightarrow -2a_1a_2 \leq -4(b_1 + b_2)$

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \leq a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2) \geq (a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

$$\text{Do đó: } \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} \geq 0 \text{ suy ra } \begin{cases} \Delta_{(1)} \geq 0 \\ \Delta_{(2)} \geq 0 \end{cases}$$

Vậy ít nhất một trong hai phương trình (1), (2) có nghiệm.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z)$ (1)

Giải:

Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 1; z \geq 2$.

$$\text{Ta có: } \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z)$$

$$\Rightarrow (x - 2\sqrt{x} + 1) + (y - 1 - 2\sqrt{y-1} + 1) + (z - 2 - 2\sqrt{z-2} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y-1} - 1)^2 + (\sqrt{z-2} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-1} - 1 = 0 \\ \sqrt{z-2} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 8: Giải phương trình nghiệm là số tự nhiên: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{1984}$

Giải:

Lập phương 2 vế: $12\sqrt[3]{31xy} = 1984 - x - y \Rightarrow x + y = 1984 - 12\sqrt[3]{31xy}$

Do $12\sqrt[3]{31xy}$ là số tự nhiên nên: $31xy = 31^t$, $t \in \mathbb{N}$

Và $x + y : 31 \Rightarrow x : 31, y : 31$, hay $\begin{cases} x = 31.n \\ y = 31.k \end{cases}; n, k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x + y = 1984 - 12.31t = 31(64 - 12t) \Rightarrow n + k = 64 - 12t$ do

$64 - 12t > 0 \Rightarrow t = 1, 2, 3, 4, 5$

$\Rightarrow (x; y) = (31; 837)$ hoặc $(248; 248)$ hoặc $(837; 31)$.

Ví dụ 9: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương x, y sao cho với $x < y$.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}.$$

Giải:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6\sqrt{55}.$$

Ta có $6\sqrt{55}$ là số vô tỷ, nên vế trái phải là các căn thức dạng chứa $\sqrt{55}$.

Đặt: $\sqrt{x} = a\sqrt{55}; \sqrt{y} = b\sqrt{55}; a, b \in \mathbb{Z}^+; a < b$.

$$\text{Và } a + b = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình là: $(55; 1375); (220; 880)$.

Ví dụ 10: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $13\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = \sqrt{2000}$

Giải:

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

$$\text{Ta có } \sqrt{2000} = 20\sqrt{5}. \text{ Đặt } \begin{cases} \sqrt{x} = a\sqrt{5} \\ \sqrt{y} = b\sqrt{5} \\ 13a - 7b = 20 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{Z}^+)$$

$$\Rightarrow a = \frac{20 + 7b}{13} = 1 + \frac{7(1 + b)}{13}. \text{ Vì } (13, 7) = 1 \text{ nên}$$

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 + b = 13t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = 13t - 1; a = 7t + 1;$$

$$\text{Để } a \geq 0; b \geq 0 \text{ thì } t \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = 5a^2 = 5(1 + 7t)^2; y = 5b^2 = 5(13t - 1)^2; t \in \mathbb{Z}^+.$$

Ví dụ 11: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$\frac{11x}{5} - \sqrt{2x-1} = 3y - \sqrt{4y-1} + 2.$$

Giải:

$\sqrt{4y-1}$ là số vô tỷ với $y \in \mathbb{Z}$. (Vì bình phương của mọi số lẻ đều có dạng

$4n+1$) $\sqrt{4y-1} - \sqrt{2x+1} = 3y + 2 - \frac{11x}{5}$ là số hữu tỉ nên điều kiện cần và

đủ để phương trình có nghiệm là cả 2 vế bằng 0.

ABC

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4y-1} = \sqrt{2x+1} \\ 3y+2 = \frac{11x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y-1 = 2x+1 \\ 3y+2 = \frac{11x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$$

Ví dụ 12: Giải phương trình: $(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+2x-5)=x$

Giải:

Việc sử dụng các thủ pháp thông thường giải phương trình vô tỉ không đưa đến kết quả (bạn hãy tự mình thử xem). Ta dùng mẹo sau: Nhân hai vế của phương trình với $(\sqrt{1+x}-1)$ ta được phương trình hệ quả:

$x(\sqrt{1+x}+2x-5)=x(\sqrt{x+1}-1)$. Phương trình này tương đương với tuyến:

$$\begin{cases} x=0 \\ \sqrt{1+x}+2x-5=\sqrt{x+1}-1 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai có nghiệm là $x=2$.

Bây giờ cần kiểm tra 2 nghiệm $x=0$ và $x=2$. Dễ dàng nhận thấy chỉ có nghiệm thứ 2 thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x=2$.

Chú ý: Trước khi sang ví dụ khác, ta đề ý rằng, biểu thức $(\sqrt{1+x}-1)$ sẽ bằng 0 khi $x=0$. Đây chính là nghiệm ngoại lai của phương trình.

Ví dụ 13: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$

Giải:

Nhân 2 vế của phương trình với biểu thức $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}$.

Ta có phương trình hệ quả: $6x=3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})$.

Từ đây suy ra $\begin{cases} x=0 \\ \sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2 \end{cases}$ Không nên bình phương

2 vế của phương trình thứ 2, tốt hơn là cộng vế với vế của phương trình này và phương trình đầu.

Ta có: $2\sqrt{2x^2+3x+5}=2+3x$. Bình phương cả 2 vế, ta được phương trình hệ quả: $8x^2+12x+20=4+12x+9x^2 \Leftrightarrow x=\pm 4$

Kiểm tra các nghiệm $x=0$, $x=\pm 4$. Ta thấy chỉ có $x=4$ thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x=4$.

Ví dụ 14: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-1}=\left(\frac{1}{2}x+1\right)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Giải:

Nhận xét rằng, việc thay thế phương trình trên bằng phương trình

$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}=\left(\frac{1}{2}x+1\right)\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ sẽ dẫn tới mất nghiệm $x=-1$. Chúng ta

tránh nguy hiểm này bằng cách chuyển tới phương trình hệ quả:

$$\sqrt{|x-1|} \cdot \sqrt{|x+1|} = \left(\frac{1}{2}x+1\right) \frac{\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|x-1|}}. \text{ Phương trình này tương đương với tuyến:}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{|x-1|} = \frac{\frac{1}{2}x+1}{\sqrt{|x-1|}} \end{cases} \quad (1)$$

$$\sqrt{|x-1|} = \frac{\frac{1}{2}x+1}{\sqrt{|x-1|}} \quad (2). \text{ Giải phương trình thứ 2, ta có}$$

$$\left(\sqrt{|x-1|}\right)^2 = \frac{1}{2}x+1 \Leftrightarrow |x-1| = \frac{1}{2}x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{1}{2}x+1 \\ x-1 = -\frac{1}{2}x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \end{cases}$$

Cuối cùng, nhất thiết phải kiểm tra các nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$ hoặc $x = 4$.

Ví dụ 15: Giải phương trình: $\left|\frac{8x}{x^3-8}\right| + |x| = \frac{x^4}{|x^3-8|}$.

Giải:

Ta biến đổi về phải $\frac{x^4}{|x^3-8|} = \left|\frac{x^4}{x^3-8}\right| = \left|\frac{8x}{x^3-8} + x\right|$

$$\Rightarrow \frac{8x}{x^3-8} \cdot x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8x^2}{x^3-8} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^3-8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x > 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$ hoặc $x > 2$.

Ví dụ 16: Giải bất phương trình: $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-18} \leq \sqrt{2x+7}$

Giải:

Bất phương trình tương đương với: $\sqrt{7x+1} \leq \sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+1 \leq 5x-11+2\sqrt{(2x+7)(3x-18)} \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12+2x \leq 2\sqrt{(2x+7)(3x-18)} \\ x \geq 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+6 \leq \sqrt{(2x+7)(3x-18)} \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+12x+36 \leq 6x^2-15x-126 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-27x-162 \geq 0 \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x \leq -\frac{18}{5} \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 9$$

Ví dụ 17: Giải bất phương trình: $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$

ABC

Giải:

Bất phương trình $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$. Điều kiện: $x \geq -1$

* Nếu $\begin{cases} x-4 < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 4$, bất phương trình hiển nhiên thỏa mãn.

* Nếu $x \geq 4$, để ý $\frac{x}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{x(\sqrt{1+x}-1)}{(1+x)-1} = \sqrt{1+x}-1$

Nên bất phương trình: $\Leftrightarrow (\sqrt{1+x}-1)^2 > x-4 \Leftrightarrow 2+x-2\sqrt{1+x} > x-4$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} < 3 \Leftrightarrow 4 \leq x < 8$

Tổng hợp kết quả ta được: $\begin{cases} -1 \leq x < 4 \\ 4 \leq x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 8$

Ví dụ 18: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} \leq \sqrt{x^2+4x-5}$

Giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\sqrt{(x-1)(x+2)} + \sqrt{(x-1)(x+3)} \leq \sqrt{(x-1)(x+5)}$$

Điều kiện để bất phương trình xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -5 \end{cases}$

* Khi $x = 1$ bất phương trình nghiệm đúng.

* Khi $x > 1$ bất phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} &\leq \sqrt{x+5} \Leftrightarrow 2x+5+2\sqrt{(x+2)(x+3)} \leq x+5 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} &\leq -x \text{ (Bất phương trình vô nghiệm do } -x < 0) \end{aligned}$$

* Khi $x \leq -5$ bất phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned} \sqrt{-(x+2)} + \sqrt{-(x+3)} &\leq \sqrt{-(x+5)} \\ \Leftrightarrow -2x-5+2\sqrt{(x+2)(x+3)} &\leq -x-5 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} &\leq x \text{ (Bất phương trình vô nghiệm)} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình chỉ có một nghiệm là $x = 1$.

Ví dụ 19: Giải bất phương trình $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$.

Giải:

Bất phương trình $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$. Điều kiện: $\begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

Khi đó bất phương trình đã cho tương ứng với

$$\begin{aligned} \sqrt{5x-1} &> \sqrt{2x-4} + \sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow 5x-1 &> 2x-4+x-1+2\sqrt{(2x-4)(x-1)} \\ \Leftrightarrow 2x-2 &> 2\sqrt{(2x-4)(x-1)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 > 2x^2 - 6x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 10.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có: $2 \leq x < 10$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 20: Giải bất phương trình: $2x^2 + 4x + 3\sqrt{3 - 2x - x^2} > 1$

Giải:

Điều kiện có nghĩa: $-3 \leq x \leq 1$. Viết lại bất phương trình thành:

$$2(-x^2 - 2x + 3) - 3\sqrt{-x^2 - 2x + 3} - 5 < 0.$$

Đặt $t = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t^2 - 3t - 5 < 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t < \frac{5}{2} \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t < \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{-x^2 - 2x + 3} < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ 4x^2 + 8x + 13 > 0 \text{ (thỏa mãn } \forall x) \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

Ví dụ 21: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 1)^2} > 1 - x \Leftrightarrow |x^2 - 1| > 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 1 - x \\ x^2 - 1 < x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \vee x < -2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Ví dụ 22: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x - 1$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-3)} - \sqrt{(x-1)(2x-1)} \geq x-1 \quad (1)$$

a. Bằng cách thử trực tiếp ta thấy $x = 1$ nghiệm đúng bất phương trình

b. Với $x \geq 3$ thì $x - 1 > 0$ nên bất phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} - \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x-1} \Leftrightarrow -2x-1 \geq 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} \quad (\text{VN})$$

c. Với $x \leq \frac{1}{2}$ bất phương trình (1)

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{1-x} \geq \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow 2\sqrt{(3-x)(1-x)} \geq -3 \text{ luôn đúng.}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x = 1, x \leq \frac{1}{2}$.

Ví dụ 23: Giải bất phương trình: $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1) \quad (1)$

Giải:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x+5)(3x+4) > 16(x-1)^2 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ (x+5)(3x+4) \geq 0 \end{cases} \quad (II)$$

$$\text{Hệ bất phương trình (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 13x^2 - 51x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -\frac{1}{13} < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 4$$

$$\text{Hệ bất phương trình (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ -\frac{4}{3} \leq x < 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình $x \leq -5$ hoặc $-\frac{4}{3} \leq x < 4$

Ví dụ 24: Giải bất phương trình: $2x^2 + \sqrt{x^2 - 5x - 6} > 10x + 15$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 6 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Bất phương trình có thể viết: } 2(x^2 - 5x) + \sqrt{x^2 - 5x - 6} - 15 > 0 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 - 5x - 6} = t \text{ với } t \geq 0.$$

$$(2) \Leftrightarrow 2(t^2 + 6) + t - 15 > 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t < -\frac{3}{2} \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow t > 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x - 6} > 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 > 1 \text{ (thỏa mãn (1))}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 7 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5 - \sqrt{53}}{2} \\ x > \frac{5 + \sqrt{53}}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 25: Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \geq x$.

Giải:

$$\text{Điều kiện: } -1 \leq x \leq 1$$

Với $x \in [-1; 1]$ ta có $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > 0$ bất phương trình tương đương

$$\text{với: } (1+x) - (1-x) \geq x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \Leftrightarrow 2x \geq x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$$

* $x = 0$ rõ ràng thỏa mãn bất phương trình.

* Nếu $0 < x \leq 1$, bất phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \leq 2$, điều này luôn thỏa mãn vì: $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \leq \sqrt{2(1+x+1-x)} = 2 \quad (2)$

- Nếu $-1 \leq x < 0$, bất phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) > 2$, điều này không thể (suy ngay từ bất đẳng thức (2) hoặc bình phương hai vế sẽ đưa đến bất đẳng thức $\sqrt{1-x^2} \geq 1$).

Tổng hợp lại ta có tập hợp nghiệm của bất phương trình (1) là $0 \leq x \leq 1$

Ví dụ 26: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

a) $x = 1$ là nghiệm đúng bất phương trình.

b) $x < 1$. Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} \geq 2\sqrt{4-x}$.

Bất phương trình này vô nghiệm vì $(2-x)$ và $(3-x)$ cùng nhỏ hơn $4-x$.

c) $x \geq 4$. Bất phương trình tương đương với $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \geq 2\sqrt{x-4}$, luôn đúng vì $(2-x)$ và $(3-x)$ cùng lớn hơn $4-x$.

Kết luận: $x \geq 4$; $x = 1$.

Ví dụ 27: Giải bất phương trình: $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-3} \leq \sqrt{4x+9}$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3x+4 \geq 0, x-3 \geq 0 \\ 4x+9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow 4x+1+2\sqrt{(3x+4)(x-3)} \leq 4x+9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 12 \leq 16 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4 \text{ (do điều kiện } x \geq 3 \text{)}.$$

Ví dụ 28: Giải bất phương trình: $-4\sqrt{(4-x)(2+x)} \leq x^2 - 2x - 8$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } -2 \leq x \leq 4. \text{ Đặt } t = \sqrt{(4-x)(2+x)} = \sqrt{8+2x-x^2},$$

$0 \leq t \leq 3$; khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$$-4t \leq -t^2 \Leftrightarrow t(t-4) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4: \text{ luôn thỏa mãn.}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $-2 \leq x \leq 4$.

Ví dụ 29: Các số a, b thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 19 \\ b^3 - 3a^2b = 98 \end{cases}$

· Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = a^2 + b^2$.

Giải:

ABC Ta có: $(a^3 - 3ab^2)^2 = 19^2 \quad (1)$

$$(b^3 - 3a^2b)^2 = 98^2 \quad (2)$$

Cộng hai phương trình (1) và (2) ta được:

$$a^6 + b^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 = 19^2 + 98^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)^3 = 19^2 + 98^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt[3]{19^2 + 98^2}.$$

Ví dụ 30: Cho các số $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng: $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$

Giải:

Vì các số $a, b, c \in [0, 1]$ nên ta có:

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - a - b - c) + ab + bc + ca - abc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c - ab - bc - ca \leq 1 - abc \leq 1.$$

Mặt khác, theo giả thiết ta cũng có $b^2 \leq b$, $c^3 \leq c$, từ đó:

$$a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$$

Ví dụ 31: Giải phương trình: $\sqrt[3]{7+x} + \sqrt{1-x} = 2$.

Giải:

a. Điều kiện: $x \leq 1$.

Đặt $u = \sqrt[3]{7+x}$ và $v = \sqrt{1-x}$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} u + v = 2 \\ u^3 + v^2 = 8 \end{cases}$.

Từ hệ phương trình này ta có:

$$u^3 + (2-u)^2 = 8 \Leftrightarrow (u+1)(u^2-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ u = \pm 2 \end{cases}$$

Ta được nghiệm tương ứng với ba trường hợp $u = -1$; $u = -2$ và $u = 2$ là $x = -8$; $x = -15$ và $x = 1$.

Ví dụ 32: Giải phương trình sau: $\sqrt{7-x} + \sqrt{x+1} = x^2 - 6x + 13$.

Giải:

$$\sqrt{7-x} + \sqrt{x+1} = x^2 - 6x + 13 \quad (1)$$

Tập xác định: $-1 \leq x \leq 7$.

Ta có: $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ với mọi a, b suy ra

$$(\sqrt{7-x} + \sqrt{x+1})^2 \leq 2(7-x+x+1) = 16 \Rightarrow \sqrt{7-x} + \sqrt{x+1} \leq 4$$

Mặt khác $x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4 \geq 4$

Vậy phương trình (1) tương đương với

$$\sqrt{7-x} + \sqrt{x+1} = x^2 - 6x + 13 = 4 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vì $3 \in [-1; 7]$ nên $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Ví dụ 33: Cho ba số dương khác nhau a, b, c có tổng bằng 12. Chứng minh rằng trong ba phương trình sau có một phương trình vô nghiệm và một phương trình có nghiệm: $x^2 + ax + b = 0$; $x^2 + bx + c = 0$; $x^2 + cx + a = 0$

Giải:

Vì ba số dương a, b, c khác nhau và do tính chất các phương trình cần xét, nên không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a > b > c$. Vì chúng có tổng bằng 12 nên khi đó $a > 4$ và $c < 4$. Ta cũng có $a^2 > 4a > 4b$ nên $a^2 - 4b > 0$, do đó phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Ngoài ra vì $c^2 < 4c < 4a$, tức $c^2 - 4a < 0$, do đó phương trình $x^2 + cx + a = 0$ vô nghiệm.

Tóm lại, trong ba phương trình đã cho có một phương trình vô nghiệm, một phương trình có nghiệm.

Ví dụ 34: Tìm số tự nhiên n sao cho $n + 24$ và $n - 65$ là hai số chính phương.

Giải:

Giả sử $n + 24 = x^2$ và $n - 65 = y^2$ (*), với x, y là các số nguyên dương.

Suy ra $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 89$.

Vì 89 là số nguyên tố nên ta phải có $x - y = 1$; $x + y = 89$. Từ đó $\begin{cases} x = 45 \\ y = 44 \end{cases}$

Thay x, y vào hai phương trình ở (*) ta được $n = 2001$.

Ví dụ 35: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x-1)(x-2y)=0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \end{cases}$

Giải:

Điều kiện: $x, y \neq 0$. Từ phương trình thứ nhất của hệ phương trình suy ra $x = 0$, $x = 1$ hay $x = 2y$.

* $x = 0$: loại.

* $x = 1$: thay vào phương trình thứ hai, ta có:

$$1 - \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{y} = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -3. \text{ Ta được nghiệm: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

* $x = 2y$: thay vào phương trình thứ hai, ta có:

$$\frac{1}{2y} - \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{-1}{2y} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{3}{8} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}.$$

Ta được nghiệm $\begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = -\frac{3}{8} \end{cases}$.

Tóm lại, hệ có hai nghiệm: $(1; -3)$; $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{8}\right)$.

ABC

8. Các bài toán hình học không gian

Một số kiến thức cơ bản

1. Hình trụ: Hình sinh ra bởi miền hình chữ nhật $OO'IJ$ khi nó xoay quanh 1 vòng quanh cạnh OO' cố định.

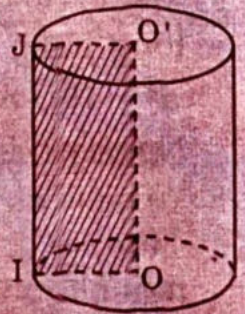
Mặt đáy: Các hình tròn tâm O và O' bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song.

* **Mặt xung quanh:** Mặt sinh ra bởi đoạn IJ khi quay quanh OO' .

* **Đường sinh:** Mỗi vị trí của đoạn IJ khi quay.

* **Trục:** đường thẳng OO'

* **Đường cao:** đường vuông góc hạ từ 1 điểm của đáy này đến đáy kia.



Chú ý:

* Nếu cắt hình trụ bởi mặt phẳng:

- Song song với đáy thì phần mặt phẳng bên trong hình trụ là hình tròn bằng đáy.

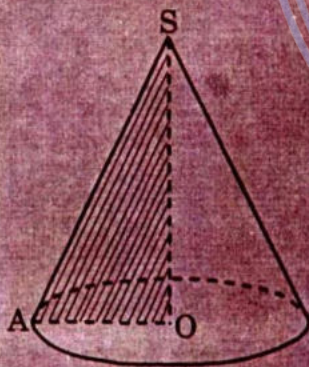
- Song song với trục thì phần mặt phẳng bên trong hình trụ là 1 miền hình chữ nhật.

* **Diện tích xung quanh hình trụ:** $S_{xq} = 2\pi Rh$

Với R là bán kính đáy, h là chiều cao.

* **Thể tích hình trụ:** $V = \pi R^2 h$

2. Hình nón:



Hình sinh ra bởi miền tam giác vuông OSA khi nó quay quanh 1 vòng quanh cạnh SO cố định.

• **Đỉnh:** điểm S

• **Mặt đáy:** hình tròn tâm O

• **Mặt xung quanh:** mặt sinh ra bởi đoạn SA khi quay.

• **Đường sinh:** mỗi vị trí của đoạn SA khi quay.

• **Trục:** đường thẳng SO .

• **Đường cao:** đoạn SO .

Chú ý:

* Nếu cắt hình trụ bởi mặt phẳng

- Song song với đáy thì phần mặt phẳng bên trong hình nón là một hình tròn có tâm nằm trên trục.

- Có chứa hai đường sinh thì phần mặt phẳng bên trong hình nón là một miền tam giác cân.

* **Diện tích xung quanh hình nón:** $S_{xq} = \pi Rl$.

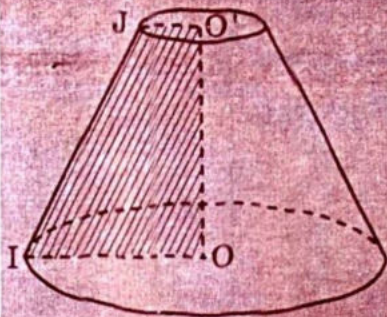
Với R là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh.

* Thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$.

Với R là bán kính đáy, h là chiều cao.

3. Hình nón cắt:

Hình sinh ra bởi miền hình thang vuông $OO'IJ$ khi nó quay 1 vòng quanh OO' cố định.



* Mặt đáy: các hình tròn tâm O và O' nằm trên hai mặt phẳng song song.

* Mặt xung quanh: mặt sinh ra bởi đoạn IJ khi quay.

* Đường sinh: Mỗi vị trí của đoạn IJ khi quay.

* Trục: đường thẳng OO'

* Đường cao: đường vuông góc hạ từ đáy nhỏ đến đáy lớn.

- Diện tích xung quanh hình nón cắt: $S_{xq} = \pi(R + r) \cdot l$

Với R, r là các bán kính đáy; l là độ dài đường sinh.

- Thể tích hình nón cắt: $V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rh)$ Với h là chiều cao.

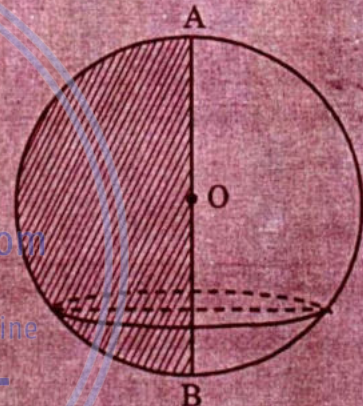
4. Hình cầu:

Hình sinh ra bởi nửa hình tròn đường kính $AB = 2R$ khi nó quay 1 vòng quanh AB cố định.

- Tâm: điểm O

- Bán kính: R

- Mặt cầu: mặt sinh ra bởi nửa đường tròn khi quay.



Chú ý:

- Nếu cắt hình cầu bởi mặt phẳng (P) thì phần mặt phẳng (P) bên trong mặt cầu là một hình tròn có tâm là hình chiếu của O trên mặt phẳng (P) .

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$. Với R là bán kính mặt cầu.

- Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Các ví dụ minh họa

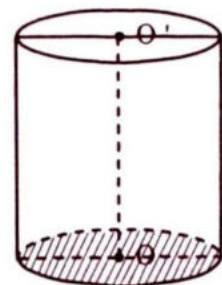
Ví dụ 1: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $2a$. Tính diện tích xung quanh; diện tích toàn phần và thể tích hình trụ.

Giải:

a. $S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h = 2\pi \cdot a \cdot 2a = 4\pi a^2$

b. $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 4\pi a^2 + 2\pi a^2 = 6\pi a^2$

c. $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$



Ví dụ 2: Hai hình chữ nhật ABD và EFGH có cạnh $AB = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $EF = 12\text{cm}$, $FG = 2\text{cm}$. Cho hình chữ nhật thứ nhất quay quanh AB và hình chữ nhật thứ hai quay quanh EF. Chứng minh rằng hai hình trụ được tạo thành có diện tích toàn phần bằng nhau và thể tích bằng nhau.

Giải:

a. $S_{xq1} = 2\pi \cdot 4 \cdot 3 = 24\pi(\text{cm}^2)$

$$2S_{d1} = 2\pi \cdot 4^2 = 32\pi(\text{cm}^2)$$

$$S_{tp1} = 56\pi(\text{cm}^2)$$

b. $S_{xq2} = 2\pi \cdot 2 \cdot 12 = 48\pi(\text{cm}^2)$

$$2S_{d2} = 2\pi \cdot 2^2 = 8\pi(\text{cm}^2)$$

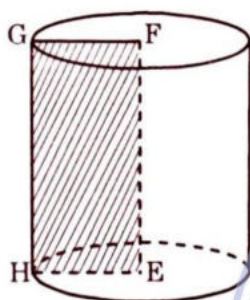
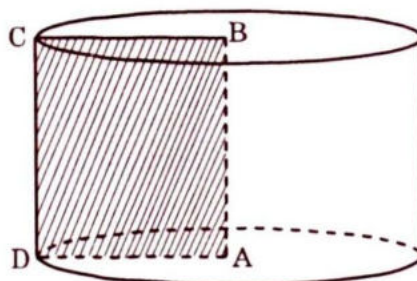
$$S_{tp2} = 56\pi(\text{cm}^2).$$

$$\text{Vậy } S_{tp1} = S_{tp2}$$

$$V_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 48\pi(\text{cm}^3)$$

$$V_2 = \pi \cdot 2^2 \cdot 12 = 48\pi(\text{cm}^3)$$

$$\text{Vậy } V_1 = V_2$$



Ví dụ 3: Mặt phẳng đi qua trục có hình trụ, phần mặt phẳng đó bị giới hạn bởi hình trụ là một hình chữ nhật có diện tích 72cm^2 . Tính bán kính đáy và đường cao hình trụ biết rằng đường kính đáy bằng một nửa đường cao.

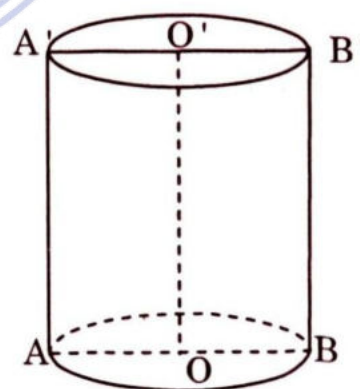
Giải:

Hình chữ nhật giới hạn bởi hình trụ có một cạnh bằng $2R$ và một cạnh bằng h . Theo đề bài: $2R = \frac{h}{2}$

$$\text{Do đó } \frac{h^2}{2} = 72 = h^2 = 144$$

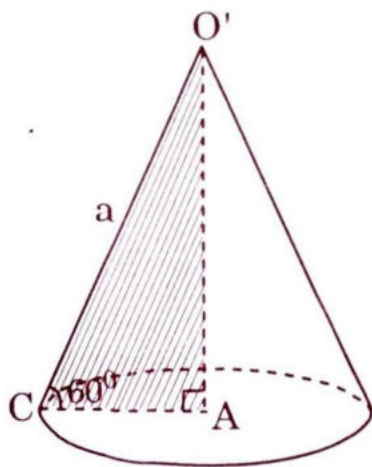
$$\Leftrightarrow h = 12(\text{cm})$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} h = 12(\text{cm}) \\ R = 3(\text{cm}) \end{cases}$$



Ví dụ 4: Tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) quay xung quanh AB, tính bán kính đáy và đường cao hình nón được tạo thành, từ đó tính thể tích và diện tích xung quanh của nó, biết rằng $BC = a$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$.

ABC
216

**Giải:** ΔABC là nửa tam giác đều, $BC = a$.

$$\Leftrightarrow AC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Và } AB^2 = BC^2 - AC^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy bán kính đáy hình nón $R = \frac{a}{2}$.

Chiều cao hình nón: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Do đó: thể tích hình nón: } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot \sqrt{3}}{24}$$

$$\text{* Diện tích xung quanh hình nón: } S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{\pi \cdot a^2}{2}.$$

Ví dụ 5: Cho hình nón biết diện tích xung quanh bằng $400\pi \text{ cm}^2$, độ dài đường sinh bằng 25cm.

a. Tính bán kính đáy.

b. Tính diện tích toàn phần và thể tích.

Giải:

$$\text{a. } S_{xq} = \pi R \cdot l \Leftrightarrow R = \frac{S_{xq}}{\pi l} = \frac{400\pi}{\pi \cdot 25} = 16(\text{cm})$$

b. Diện tích toàn phần hình chóp:

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{xq} + S_d = 400\pi + \pi(16)^2 \\ &= 400\pi + 256\pi = 656\pi(\text{cm}^2) \end{aligned}$$

* Trong ΔOSA :

$$h^2 = l^2 - R^2 = 25^2 - 16^2 = 369. \Rightarrow h = 3\sqrt{41}(\text{cm})$$

Thể tích hình nón:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot (16)^2 \cdot 3\sqrt{41} = 256\pi\sqrt{41}(\text{cm}^3)$$

Ví dụ 6: Cho hình nón cắt với hai bán kính đáy lần lượt là 6cm và 10 cm, đường sinh bằng 16cm.

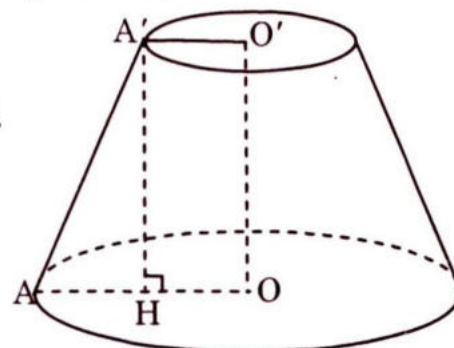
a. Tính diện tích xung quanh.

b. Tính đường cao và thể tích hình nón cắt.

Giải:

$$\text{a. } S_{xq} = \pi(R + r)l$$

$$= \pi(10 + 6)16 = 256\pi(\text{cm}^2)$$



↳. Kẻ đường cao A'H của hình thang vuông OAA'O':

$$AH = AO - A'O' = 10 - 6 = 4(\text{cm})$$

Trong tam giác vuông HAA':

$$A'H^2 = AA^2 - AH^2 = 256 - 16 = 240$$

$$\Rightarrow OO' = A'H = 4\sqrt{15}(\text{cm})$$

Vậy: chiều cao hình nón cụt: $h = OO' = 4\sqrt{15}(\text{cm})$

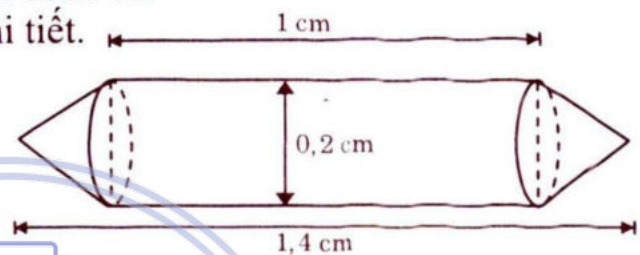
Thể tích hình nón cụt: $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

$$V = \pi \frac{4\sqrt{15}}{3}(100 + 36 + 60) = \frac{784\pi\sqrt{15}}{3}(\text{cm}^3)$$

Ví dụ 7: Một chi tiết máy có dạng như hình vẽ:

a. Tính diện tích mặt ngoài của chi tiết.

b. Tính thể tích.



Giải:

a. Diện tích xung quanh hình trụ có đường kính đáy 0,2m; chiều cao 1m là:

$$2\pi(0,1)1 = 0,2\pi(\text{m}^2)$$

Hình nón có đường kính đáy 0,2m; chiều cao 0,2m có:

$$\text{- Độ dài đường sinh: } l = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} = \sqrt{0,05}$$

$$\text{- Diện tích xung quanh: } \pi(0,1)\sqrt{0,05} = 0,1\pi\sqrt{0,05}(\text{m}^2)$$

$$\text{Diện tích cần tìm sẽ là: } S = 0,2\pi + 0,2\pi\sqrt{0,05} = 0,2\pi(1 + \sqrt{0,05})(\text{m}^2)$$

b. Thể tích hình trụ ở câu a: $\pi.(0,1)^2.1 = 0,01\pi(\text{m}^3)$

$$\text{Thể tích cần tìm sẽ là: } V = 0,01\pi + \frac{0,004\pi}{3} = \frac{0,034\pi}{3}(\text{m}^3)$$

Ví dụ 8: Tính thể tích một cái thùng được biểu diễn như hình vẽ

Giải:

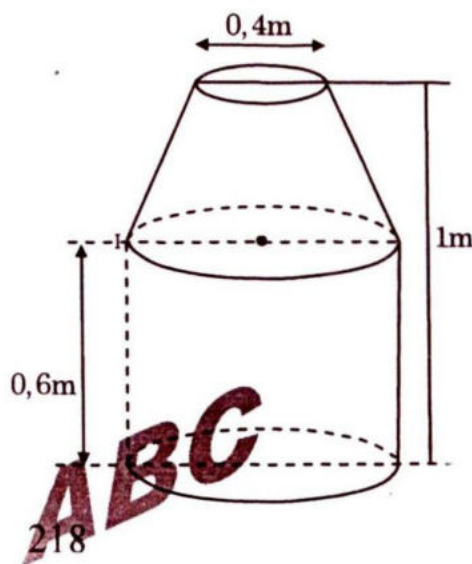
Thể tích hình trụ có đường kính đáy 0,6m; chiều cao 0,6m.

$$V_1 = \pi(0,3)^2.0,6 = 0,054\pi(\text{m}^3)$$

Thể tích hình nón cụt có các đường kính đáy 0,6m và 0,5m; chiều cao 0,4m.

$$V_2 = \frac{\pi(0,4)}{3} \cdot (0,09 + 0,04 + 0,06)$$

$$= \frac{0,076\pi}{3}(\text{m}^3)$$



Thể tích cái thùng là: $V = V_1 + V_2 = \frac{0,238\pi}{3}(\text{m}^3)$.

- Ví dụ 9:** a. Tính diện tích mặt ngoài và thể tích hòn bi thép có đường kính 1 cm.
b. Tính diện tích da để làm một quả bóng đá có đường kính 20 cm (không kể da dùng cho các chỗ ghép uôn).

Giải:

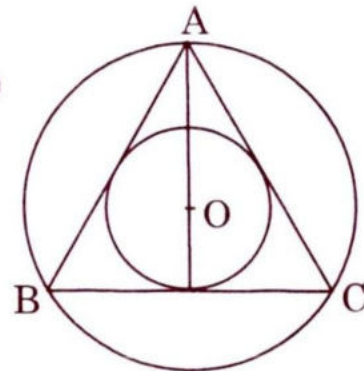
- a. Diện tích mặt ngoài viên bi: $S = 4\pi R^2 = 4\pi(\text{cm}^2)$

* Thể tích hòn bi thép:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}(\text{cm}^3)$$

- b. Diện tích da cần làm quả bóng không cần kể các chỗ ghép nối:

$$S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi(20)^2 = 1600\pi(\text{cm}^2).$$



- Ví dụ 10:** Cho tam giác đều ABC có cạnh $AB = 10\text{cm}$ và đường cao AH.
Tìm thể tích hai hình cầu tạo thành khi quay nửa hình tròn nội tiếp và nửa hình tròn ngoại tiếp tam giác một vòng quanh AH.

Giải:

$\triangle HAB$ vuông tại H:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 100 - 25 = 75 \Leftrightarrow AH = 5\sqrt{3}(\text{cm})$$

Bán kính hình tròn ngoại tiếp tam giác:

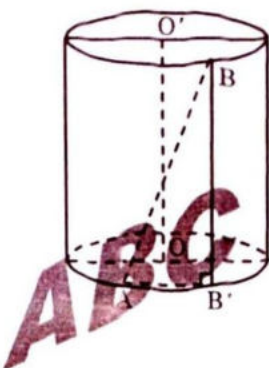
$$R = OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$$

Bán kính hình tròn nội tiếp tam giác: $r = OH = \frac{AH}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$

Do đó: thể tích hình cầu lớn tạo thành: $V_1 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4000\pi\sqrt{3}}{27}(\text{cm}^3)$

Thể tích hình cầu nhỏ được tạo thành: $V_2 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{500\pi\sqrt{3}}{27}(\text{cm}^3)$

- Ví dụ 11:** Một hình trụ có bán kính đáy là R, chiều cao 2R. Một đoạn thẳng AB có 2 đầu thuộc hai đường tròn đáy, góc giữa AB và trục hình trụ bằng α



- a. Tính độ dài đoạn AB trong trường hợp $\alpha = 30^\circ$.
b. Tìm giá trị của α để độ dài AB lớn nhất.

Giải:

Gọi BB' là một đường sinh của hình trụ.

Ta có: $OO' \parallel BB'$

$$\Rightarrow (\widehat{AB, OO'}) = (\widehat{AB, BB'}) = \widehat{ABB'} = \alpha$$

a. Khi $\alpha = 30^\circ$: $\Delta B'AB$ là một nửa tam giác đều nên nếu $AB = x$ thì:

$$AB^2 = AB'^2 + B'B^2, AB = 2AB'$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + 4R^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 16R^2 \Leftrightarrow x = \frac{4R}{3}$$

$$\text{Vậy } AB = \frac{4R\sqrt{3}}{3}.$$

b. Do $AB^2 = AB'^2 + B'B^2 \Leftrightarrow AB^2 = AB'^2 + 4R^2$

Như vậy: AB lớn nhất $\Leftrightarrow AB'$ lớn nhất vì AB là một dây cung của đường tròn (O) nên lớn nhất khi $AB' = 2R$.

Khi đó $\Delta B'AB$ vuông cân tại B' . Nghĩa là: $\alpha = 45^\circ$.

Ví dụ 12: Một hình trụ có bán kính đáy R , chiều cao h . Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường sinh bất kỳ của hình lăng trụ, phần của (P) giới hạn bởi hình trụ là một hình chữ nhật. Tìm (P) để diện tích hình chữ nhật lớn nhất.

Giải:

Hình chữ nhật $ABB'A'$ có 2 cạnh là hai đường sinh và 2 cạnh còn lại là hai dây cung của hai đáy.

Diện tích hình chữ nhật này là:

$$S = AA' \cdot AB = h \cdot AB.$$

Do đó: S lớn nhất $\Leftrightarrow$ độ dài AB lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là một đường kính của đáy.

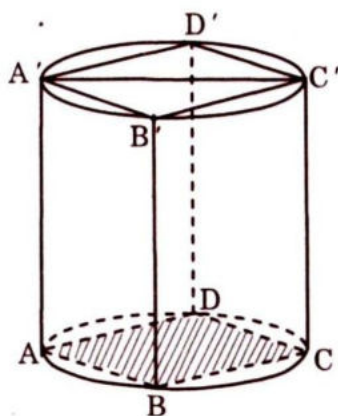
Vậy: (P) là mặt phẳng chứa một đường sinh và một đường kính của đáy.

Khi đó: giá trị lớn nhất của S sẽ là: $2Rh$.

Ví dụ 13: Một hình trụ có bán kính đáy R , chiều cao h . Tính:

- Thể tích hình lăng trụ tứ giác đều có đáy nội tiếp đáy hình trụ.
- Diện tích toàn phần hình lăng trụ tam giác đều có đáy ngoại tiếp đáy hình trụ.

Giải:



a. Hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có:

- Đáy là hình vuông nội tiếp đường tròn bán kính R .
- Cạnh bên là đường sinh hình trụ và bằng h . Như vậy:

$$2AB^2 = AC^2 = 4R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{2}$$

Suy ra: thể tích hình lăng trụ:

$$V = Bh = (R\sqrt{2})^2 \cdot h = 2R^2h$$

b. Hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có:

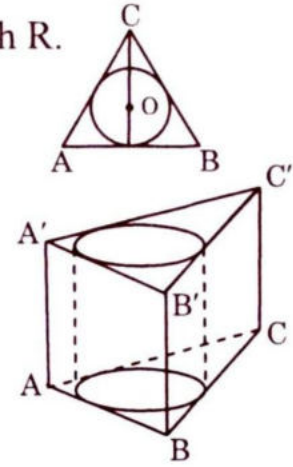
- Đây là tam giác đều ngoại tiếp đường tròn bán kính R .
- Cạnh bên bằng đường sinh hình trụ và bằng h .

Như vậy: $CH = 3OH = 3R$.

$$\begin{aligned} AH^2 &= AO^2 - OH^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \\ \Rightarrow AC^2 &= AH^2 + HC^2 = 3R^2 + 9R^2 = 12R^2 \\ \Rightarrow AC &= 2R\sqrt{3} \end{aligned}$$

Suy ra: diện tích toàn phần hình lăng trụ:

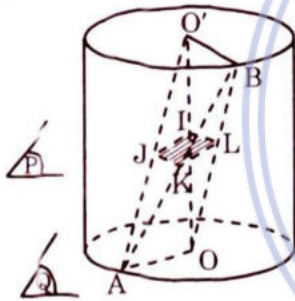
$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{xq} + 2S_d = 3AB \cdot AA' + 2 \frac{AB \cdot CH}{2} \\ &= 3 \cdot 2R\sqrt{3} \cdot h + 2R\sqrt{3} \cdot 3R = 6R\sqrt{3}(R + h) \end{aligned}$$



Ví dụ 14: Cho hình trụ có hai đáy là các hình tròn tâm O và O' bán kính R ; chiều cao hình trụ là $R\sqrt{2}$. Gọi A, B là 2 điểm lần lượt thuộc các đường tròn (O) và (O') sao cho $OA \perp OB'$. Chứng minh tứ diện $OAO'B$ có các mặt đều là tam giác vuông. Tính thể tích và diện tích toàn phần tứ diện này.

Giải:

a. $\begin{cases} AO \perp OB' \\ AO \perp OO' \end{cases} \Rightarrow AO \perp (OBO')$



$\Rightarrow$ Các tam giác OAO', OAB vuông tại O

$$\begin{cases} BO' \perp AO \\ BO' \perp OO' \end{cases} \Rightarrow BO' \perp (OAO')$$

$\Rightarrow$ Các tam giác $O'BO, O'BA$ vuông tại O'

* Coi tứ diện $OAO'B$ như là hình chóp có đỉnh A , đáy là tam giác OBO' thì thể tích tứ diện là:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{(OBO')} \cdot AO = \frac{1}{3} \cdot \frac{BO' \cdot OO'}{2} \cdot AO \\ &= \frac{1}{6} \cdot R \cdot R\sqrt{2} \cdot R = \frac{R^3 \sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

$$* \Delta OAO' \text{ vuông tại } O: O'A^2 = O'O^2 + OA^2 = 3R^2 \Rightarrow O'A = R\sqrt{3}$$

$$\Delta O'BO \text{ vuông tại } O': OB^2 = OO'^2 + O'B^2 = 3R^2 \Rightarrow OB = R\sqrt{3}$$

Diện tích toàn phần hình tứ diện:

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{(OAO')} + S_{(OBA)} + S_{(O'BO)} + S_{(O'AB)} \\ &= \frac{R^2 \sqrt{2}}{2} + \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{R^2 \sqrt{2}}{2} + \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} = R^2 (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Ví dụ 15: Tính diện tích toàn phần hình nón biết đường sinh có độ dài bằng l , phần mặt phẳng qua trục hình nón giới hạn bên trong hình nón là một miền tam giác đều.

ABC

Giải:

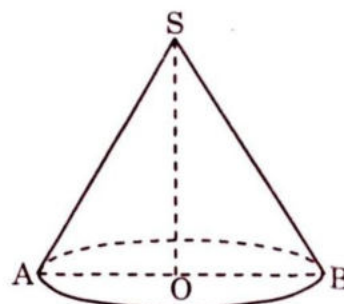
Theo đề bài, tam giác SAB là tam giác đều có cạnh bằng l .

Do đó: bán kính đáy hình nón:

$$R = OA = \frac{SA}{2} = \frac{l}{2}$$

Diện tích toàn phần hình nón:

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{xq} + S_d = \pi Rl + \pi R^2 \\ &= \frac{\pi l^2}{2} + \frac{\pi l^2}{4} = \frac{3\pi l^2}{4} \end{aligned}$$



Ví dụ 16: Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích các hình tròn xoay tạo ra bởi tam giác quay quanh cạnh huyền và các cạnh góc vuông. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$$

Giải:

Giả sử $\triangle ABC$ vuông tại A.

Kẻ đường cao AH của tam giác. Ta có:

* Thể tích hình nón sinh ra khi $\triangle ABC$ quay quanh

trục AC: $V_1 = \frac{1}{3} \pi AB^2 \cdot AC$

* Thể tích hình nón sinh ra khi $\triangle ABC$ quay quanh

trục AB: $V_2 = \frac{1}{3} \pi AC^2 \cdot AB$

* Thể tích hình sinh ra khi $\triangle ABC$ quay quanh trục BC gồm thể tích hai hình nón có bán kính đáy bằng AH; chiều cao là BH, CH.

$$V = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot CH = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC.$$

Như vậy:

$$\frac{1}{V^2} = \frac{9}{\pi^2 AH^4 \cdot BC^2} = \frac{9}{\pi^2 AH^2 AH^2 \cdot BC^2} = \frac{9}{\pi^2 AH^2 AB^2 AC^2}$$

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{9}{\pi^2 \cdot AB^4 \cdot AC^2} + \frac{9}{\pi^2 AC^4 \cdot AB^2}$$

$$= \frac{9}{\pi^2 AB^2 AC^2} \left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \right) = \frac{9}{\pi^2 AH^2 \cdot AB^2 \cdot AC^2}$$

(Do các hệ thức trong tam giác vuông:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC; \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}).$$

Vậy: $\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$

Ví dụ 17: Trong một hình nón, tìm góc lớn nhất tạo bởi hai đường sinh của nó.

Giải:

Xét $\triangle MAB$ nội tiếp đường tròn đường kính AB với AB là đường kính đáy hình nón.

Gọi I là trung điểm dây cung MA .

$\triangle IAO$ vuông tại $I \Rightarrow OA > OI$.

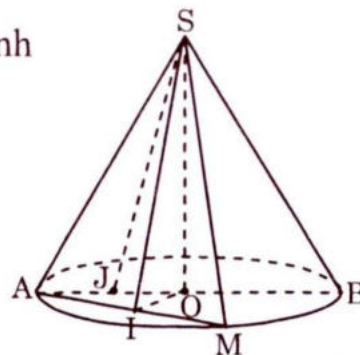
Lấy điểm J trên đoạn OA để $OI = OJ$.

Ta có: $\triangle OIS = \triangle OJS$

$\Rightarrow \widehat{OSI} = \widehat{OSJ} \Rightarrow \widehat{OSI} < \widehat{OSA}$

$\Rightarrow \widehat{MSA} = \widehat{BSA}$ (các tam giác SAB, SAM cân tại S)

Như vậy: góc lớn nhất tạo bởi hai đường sinh hình nón là $\widehat{ASB}$ trong đó AB là đường kính của đáy.



Ví dụ 18: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính R , chiều cao hình nón là $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. AB là một dây của đáy sao cho khoảng cách giữa

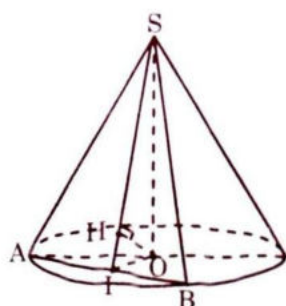
O và mặt phẳng (SAB) là $\frac{R\sqrt{3}}{4}$. Tính độ dài dây AB .

Giải:

* Gọi I là trung điểm của AB và OH là đường cao $\triangle OSI$.

$$\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$$

$$\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp SI \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB). \text{ Do đó: } OH = \frac{R\sqrt{3}}{4}$$



* $\triangle OSI$ vuông tại O : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{16}{3R^2} - \frac{4}{3R^2} = \frac{4}{R^2} \Rightarrow OI = \frac{R}{2}.$$

* IAO vuông tại O : $IA^2 = AO^2 \cdot OI^2$

$$= R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow IA = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \text{ Như vậy: } AB = R\sqrt{3}.$$

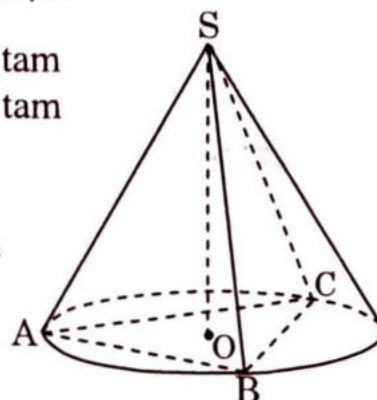
Ví dụ 19: Tính thể tích hình nón biết hình chóp tam giác đều có cùng đỉnh với hình nón và đáy là tam giác đều nội tiếp đáy hình nón có thể tích là V .

Giải:

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy, chiều cao hình nón, a là cạnh đáy hình chóp tam giác đều ABC .

* Đường cao hình chóp đều cũng bằng h .

* Trong tam giác vuông HAB :



$$AH = \frac{3}{2}AO = \frac{3R}{2}; AB = 2BH$$

$$\text{Do đó: } a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9R^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = 3R^2$$

Theo đề bài: thể tích hình chóp là V nên

$$V = \frac{1}{3}S_{(ABC)} \cdot SO = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{a^2 h \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Suy ra: thể tích hình nón là: } V_n = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^2}{3} \cdot h = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{12V}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi V}{3\sqrt{3}}$$

Ví dụ 20: Cho hình nón đỉnh S bán kính đáy R, góc lớn nhất tạo bởi hai đường sinh là 60° ; xét hình chóp đều SABC với ABC là tam giác đều ngoại tiếp đáy hình nón.

- Tính thể tích và diện tích toàn phần hình chóp.
- Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ABC) chia hình chóp thành 2 phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích hình tròn nằm trên (P) giới hạn bởi hình nón.

Giải:

- Theo kết quả bài toán 17, góc của 2 đường sinh hình nón lớn nhất khi mặt phẳng chứa 2 đường sinh đi qua trục:

$$\Leftrightarrow 2R = l, h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

ΔABC đều ngoại tiếp hình tròn đáy hình nón nên các tiếp điểm M, N, P lần lượt là trung điểm AB, BC, CA.

ΔMOA vuông tại M, $MO = R$, $OA = 2MO = 2R$ nên

$$AM = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2R\sqrt{3}.$$

Do đó: thể tích hình chóp:

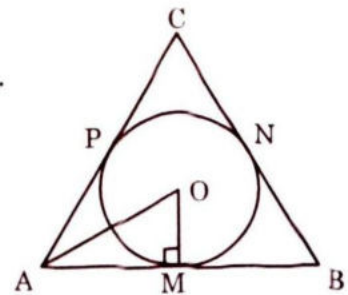
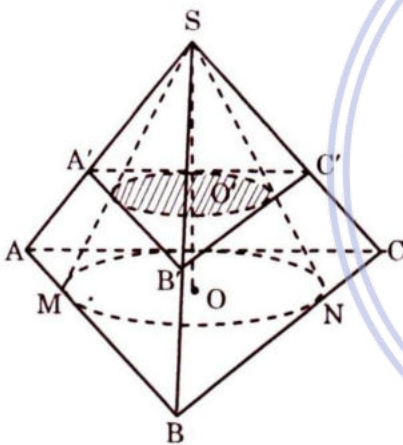
$$V = \frac{1}{3}S_{(ABC)} \cdot SO = \frac{1}{3} \frac{(2R\sqrt{3})^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot R\sqrt{3} = 3R^3.$$

Diện tích toàn phần hình chóp:

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{xq} + S_d = \frac{1}{2} \cdot 3AB \cdot SM + \frac{AB^2 \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{3}{2} \cdot 2R\sqrt{3} \cdot 2R + \frac{(2R\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 9R^2 \sqrt{3} \end{aligned}$$

- Theo kết quả bài toán 4 phần luyện tập ở bài 2: Nếu (P) cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' thì: $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng:

$$k = \frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO}.$$



$$\text{Do đó: } \frac{V_{(SA'B'C')}}{V_{(SABC)}} = \frac{S_{(A'B'C')}}{S_{(ABC)}} \cdot \frac{SO'}{SO} = k^2 \cdot k = k^3$$

$$\text{Nhu vậy: } \frac{1}{2} = k^3 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

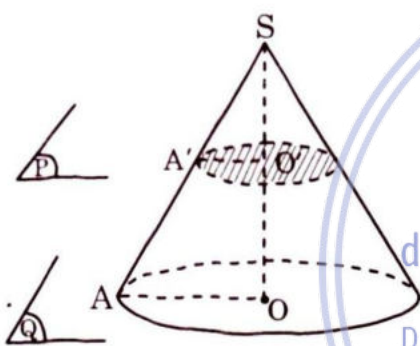
$$\text{Gọi } r \text{ là bán kính hình tròn cần tìm, ta có: } \frac{r}{R} = k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow r = R\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Diện tích hình tròn phải tìm: } S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(R\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{\pi \cdot R^2 \sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 21: Cho hình nón có đỉnh S, bán kính đáy là R và đường cao bằng h. Mặt phẳng (P) song song với đáy hình nón đi qua trung điểm đường cao chia hình nón làm hai phần. Tính thể tích mỗi phần đó.

Giải:

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đáy hình nón và (SOA) là mặt phẳng chứa đường cao và một đường sinh; O' là trung điểm SO.



$$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ (SOA) \cap (Q) = OA \Rightarrow OA \parallel OA' \\ (SOA) \cap (P) = O'A' \end{cases}$$

$\Rightarrow O'A'$ là đường trung bình của ΔSOA .

Mặt phẳng (P) chia hình nón lớn thành 2 phần:

- Một phần là hình nón nhỏ đỉnh S đáy là hình

$$\text{tròn có bán kính } O'A' = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2};$$

$$\text{chiều cao } SO' = \frac{SO}{2} = \frac{h}{2}.$$

- Một phần là hình chóp cụt có các bán kính đáy là R và $\frac{R}{2}$; chiều cao $\frac{h}{2}$.

Do đó: thể tích hình nón nhỏ:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi O'A'^2 \cdot SO' = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{\pi R^2 h}{24}.$$

Thể tích hình nón cụt:

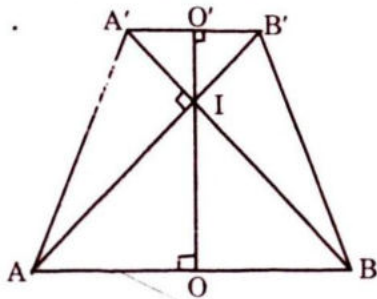
$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\pi \cdot OO'}{3} (OA^2 + O'A'^2 + OA \cdot O'A') \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h}{2} \left(R^2 + \frac{R^2}{4} + R \cdot \frac{R}{2} \right) = \frac{7\pi R^2 h}{24}. \end{aligned}$$

ABC

Ví dụ 22: Cho hình nón cụt có bán kính đáy lớn gấp hai bán kính đáy nhỏ phần mặt phẳng (P) chứa hai đường sinh và đi qua trục hình nón cụt giới hạn bởi hình nón cụt là một hình thang cân có hai đường chéo vuông góc. Tính thể tích và diện tích xung quanh hình nón cụt biết chiều cao là h.

Giải:

Gọi AA', BB' là 2 đường sinh của hình nón cụt chứa trong (P).



Tứ giác ABB'A' là hình thang cân có hai đường chéo cắt nhau và vuông góc tại I.

Đặt $AB = 2x$. $\triangle IAB$ vuông cân tại I nên:

$$OI = \frac{AB}{2} = x; AI = x\sqrt{2}$$

$\triangle IA'B'$ vuông cân tại I nên:

$$O'I = \frac{A'B'}{2} = \frac{x}{2}; A'I = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Theo đề bài: $x + \frac{x}{2} = h \Leftrightarrow x = \frac{2h}{3}$; $\triangle IAA'$ vuông tại I:

$$AA'^2 = AI^2 + IA'^2 = \left(\frac{2h\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{h\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{10h^2}{9} \Rightarrow AA' = \frac{h\sqrt{10}}{3}.$$

Do đó: thể tích hình nón cụt:

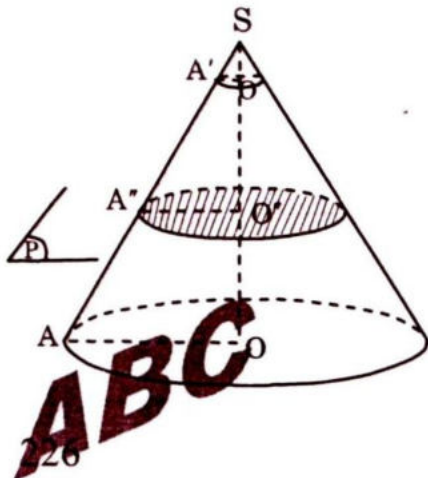
$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi OO'}{3} (OA^2 + O'A'^2 + OA \cdot O'A') \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot h \left(\frac{4h^2}{9} + \frac{h^2}{9} + \frac{2h^2}{9} \right) = \frac{7\pi h^2}{27}. \end{aligned}$$

Diện tích xung quanh hình chóp cụt:

$$S_{xq} = \pi(OA + O'A')AA' = \pi\left(\frac{2h}{3} + \frac{h}{3}\right) \cdot \frac{h\sqrt{10}}{3} = \frac{\pi h^2 \sqrt{10}}{9}.$$

Ví dụ 23: Cho hình nón cụt có các bán kính là R và r ($R > r$). Một mặt phẳng song song với đáy hình nón cụt chia hình nón cụt ra hai phần có thể tích bằng nhau. Tính bán kính của hình tròn là phần của mặt phẳng (P) giới hạn bởi hình nón cụt.

Giải:



Gọi x là bán kính đường tròn cần tìm. Xét hình nón đỉnh S sinh ra hình nón cụt. Lí luận như ở bài toán trên, ta có thể suy ra như sau:

Nếu gọi V là thể tích hình nón đáy tâm O. V_1 là thể tích hình nón đáy tâm O'

V_2 là thể tích hình nón đáy tâm O''

$$\text{Thì: } \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot O'A^2 \cdot SO'}{\frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO} = \frac{r^3}{R^3}. \text{ Tương tự: } \frac{V_2}{V} = \frac{x^3}{R^3}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{V - V_1}{V} = \frac{R^3 - r^3}{R^3} \Rightarrow V - V_1 = \frac{R^3 - r^3}{R^3} V$$

$$\frac{V - V_2}{V} = \frac{R^3 - r^3}{R^3} \Rightarrow V - V_2 = \frac{R^3 - r^3}{R^3} V.$$

$$\text{Theo đề bài: } V - V_1 = 2(V - V_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{R^3 - r^3}{R^3} \cdot V = 2 \cdot \frac{R^3 - x^3}{R^3} \cdot V \Leftrightarrow x^3 = \frac{R^3 + r^3}{R^3}. \text{ Vậy: } x = \sqrt{\frac{R^3 + r^3}{2}}.$$

Ví dụ 24: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy là a, chiều cao

$$SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

- Tìm tâm và bán kính mặt cầu (S) qua các điểm S, A, B, C, D.
- Mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn này.
- Tính thể tích hình cầu ở ngoài hình chóp.

Giải:

a. Gọi I là tâm và R là bán kính mặt cầu (S).

O' là hình chiếu vuông góc của I trên (ABCD).

Do IA = IB = IC = ID nên các tam giác vuông

O'IA, O'IB, O'IC, O'ID bằng nhau.

$$\Rightarrow O'A = O'B = O'C = O'D$$

$$\Rightarrow O' \text{ là tâm của hình vuông } ABCD \Rightarrow O' \equiv O.$$

Như vậy: I thuộc đường thẳng SO.

Ngoài ra: IS = IA nên trong mặt phẳng (SOA) I chính là giao điểm của đường trung trực của đoạn SA và đường thẳng SO. Nếu J là trung điểm của đoạn SA thì: Trong $\triangle OSA$ vuông tại O, ta có:

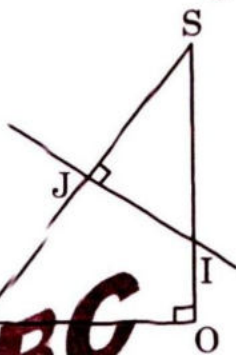
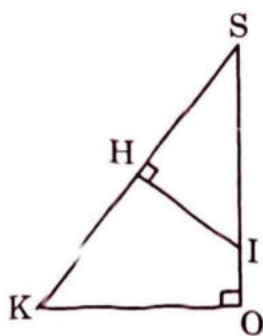
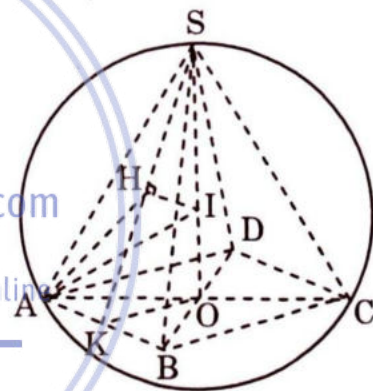
$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = \frac{6a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = 2a^2$$

$$\Rightarrow SA = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Ngoài ra: } SIJ \sim SAO \text{ nên: } \frac{SJ}{SO} = \frac{SI}{SA}$$

$$\text{Vậy, bán kính mặt cầu (S): } R = \frac{2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{24\pi a^3 \sqrt{6}}{81}.$$



- b. Mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có tâm là hình chiếu vuông góc của I trên (SAB). Gọi K là trung điểm của AB và IH là đường cao của $\triangle ISK$. $\begin{cases} AB \perp OK \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOK) \Rightarrow AB \perp IH$

$$\begin{cases} IH \perp SK \\ IH \perp AB \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SAB).$$

Vậy: chân đường cao IH của $\triangle SIK$ là tâm của đường tròn.

$$\triangle SIH \sim \triangle SKO \Rightarrow \frac{IH}{KO} = \frac{SI}{SK}$$

$$\Rightarrow IH = \frac{KO \cdot SI}{SK} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{6a^2}{9}}} = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

$\triangle HAI$ vuông tại H:

$$AH^2 = AI^2 - IH^2 = \frac{6a^2}{9} - \frac{22a^2}{121} = \frac{528a^2}{9 \times 121} \Rightarrow AH = \frac{4a}{\sqrt{33}}$$

Vậy bán kính của đường tròn này $r = \frac{4a\sqrt{33}}{33}$

c. Thể tích hình cầu: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{8\pi\sqrt{6}}{27}a^3$

Thể tích hình chóp: $V_2 = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Thể tích cần tìm: $V = V_1 - V_2 = \left(\frac{8\pi\sqrt{6}}{27} - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)a^3 = \frac{\sqrt{6}(16\pi - 9)}{54}a^3$

Ví dụ 25: Cho mặt cầu đường kính $SS' = 2R$. Gọi H là điểm trên đoạn SS' sao cho $HS = 2HS'$. Mặt phẳng (P) qua H vuông góc SS' cắt mặt cầu theo một đường tròn (C). ABC là một tam giác đều nội tiếp với (C).

a. Chứng minh SABC là tứ diện đều. Tính thể tích V của tứ diện đó.

b. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S' , đáy là hình tròn (C). Chứng minh các đường sinh $S'A$, $S'B$, $S'C$ của hình nón đôi một vuông góc.

Giải:

a. Để ý rằng A nhìn đường kính SS' của mặt cầu nên $\triangle ASS'$ vuông tại A.

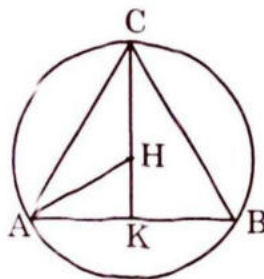
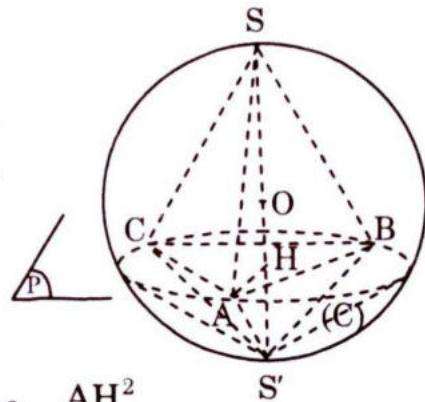
Ngược lại: $SS' \perp (P) \Rightarrow SS' \perp AH$. Trong $\triangle ASS'$:

ABC
128

$$HS = \frac{4R}{3}; HS' = \frac{2R}{3}. \text{ Và}$$

$$SA^2 = SH \cdot SS' = \frac{4R}{3} \cdot 2R = \frac{8R^2}{3} \Rightarrow SA = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

ΔABC đều nội tiếp đường tròn đường kính $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$ thì nếu CK là đường cao, ta có:



$$\begin{aligned} AK^2 &= AH^2 - HK^2 = AH^2 - \frac{AH^2}{4} \\ &= \frac{8R^2}{9} - \frac{2R^2}{9} = \frac{6R^2}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } AK = \frac{R\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AB = \frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

Như vậy: có thể thấy được:

$$SA = SB = SC = AB = BC = CA = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

Suy ra: tứ diện SABC đều. Thể tích tứ diện này:

$$V = \frac{1}{3} S_{(ABC)} \cdot SH = \frac{1}{3} \left(\frac{2R\sqrt{6}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4R}{3} = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$$

b. Cũng trong $\Delta ASS'$: downloaadsachmienphi.com

$$S'A^2 = S'H \cdot S'C = \frac{2R}{3} \cdot 2R = \frac{4R^2}{3} \Rightarrow S'A = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó: diện tích xung quanh hình nón đỉnh S'''

$$S_{xq} = \pi \cdot AH \cdot S'A = \pi \cdot \frac{2R\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi R^2\sqrt{6}}{9}.$$

Trong tam giác $S'AB$ với: $S'A = S'B = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$;

$$AB = \frac{2R\sqrt{6}}{3} \text{ thì } AB^2 = \frac{24R^2}{9} = \frac{12R^2}{9} + \frac{12R^2}{9} = S'A^2 + S'B^2;$$

$\Delta S'AB$ vuông cân tại S' .

Hoàn toàn tương tự: $\Delta S'BC$, $\Delta S'CA$ vuông cân tại S .

Suy ra: các đường sinh $S'A$, $S'B$, $S'C$ của hình nón đỉnh S' đôi một vuông góc nhau.

Ví dụ 26: Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi S là điểm đối xứng của O qua A, d là đường thẳng qua S vuông góc (P) và T là điểm thuộc d sao cho $ST = 2R$.

a. Tìm tâm I của mặt cầu (S) đi qua T và chứa (C).

b. Tính độ dài đoạn OI và thể tích hình cầu (C).

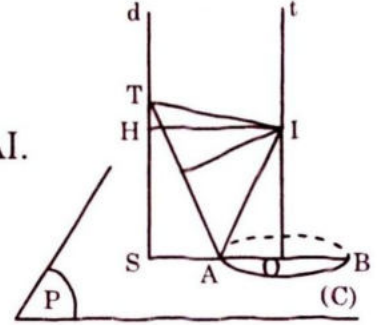
Giải:

- a. Mặt cầu (S) chứa đường tròn (C) nên tâm I của (S) nằm trên đường thẳng Ot vuông góc với (P).

$$\begin{cases} Ot \perp (P) \\ d \perp (P) \end{cases} \Rightarrow d // Ot, Ot \subset (BST)$$

Ngoài ra: $IT = IA \Rightarrow I$ nằm trên trung trực đoạn AI.

Vậy: trong mặt phẳng (SBT), I là giao điểm của các đường trung trực của AB và AT. Nói cách khác: I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BAT$.



- b. Kẻ IH vuông góc d tại điểm H.

Đặt $OI = x$. Trong $\triangle OAI$ vuông tại O: $AI^2 = AO^2 + OI^2 = R^2 + x^2$

Trong hình thang vuông IOST và tam giác vuông HIT:

$$IT^2 = IH^2 + HT^2 = OS^2 + HT^2 = 4R^2 + (2R - x)^2 = x^2 - 4Rx + 8R^2$$

Nhưng IA, IT đều là bán kính mặt cầu (S) nên:

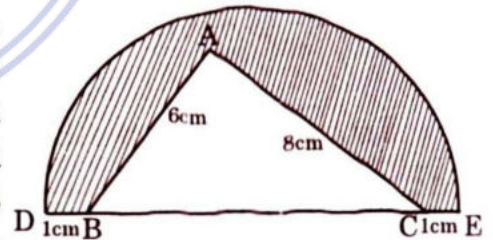
$$IA = IT \Leftrightarrow x^2 + R^2 = x^2 - 4Rx + 8R^2 \Leftrightarrow 4Rx = 7R^2 \Leftrightarrow x = \frac{7R}{4}$$

$$\text{Vậy } OI = \frac{7R}{4}.$$

$$\text{Theo trên: } AI^2 = x^2 + R^2 = \frac{49R^2}{16} + R^2 = \frac{65R^2}{16} \Rightarrow AI = \frac{R\sqrt{65}}{4}$$

$$\text{Thể tích hình cầu (S) là: } V = \frac{4}{3} \pi AI^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R\sqrt{65}}{4} \right)^3 = \frac{65\pi R^3 \sqrt{65}}{48}.$$

Ví dụ 27: Cho nửa hình tròn đường kính DE và tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và $DB = CE = 1\text{cm}$ (hình). Khi cho toàn bộ hình vẽ quay một vòng quanh DE thì nửa hình tròn tạo thành hình (S_1) và tam giác ABC tạo thành hình (S_2) . Hãy mô tả các hình (S_1) và (S_2) . Tính thể tích phần của hình (S_1) nằm bên ngoài hình (S_2) .

**Giải:**

- + Vẽ đường cao AH của tam giác ABC. Khi quay toàn bộ hình vẽ một vòng quanh DE thì: Nửa hình tròn tạo thành một hình cầu đường kính $DE = 2R$. Hai tam giác vuông AHB và AHC tạo thành 2 hình nón có chung đáy là hình tròn tâm H, bán kính $r = HA$ và 2 đỉnh là B và C.
- + Trong tam giác vuông ABC:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10\text{cm},$$

ABC
230

$$BC.AH = AB.AC \Rightarrow r = AH = \frac{AB.AC}{BC} = 4,8\text{cm}.$$

Ta có: $DE = DB + BC + CE = 12\text{cm}$, suy ra bán kính hình cầu:

$R = 6\text{cm}$. Thể tích hình cầu đường kính DE :

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi.6^3}{3} = 288\pi (\text{cm}^3) (\approx 16,283\text{cm}^3)$$

+ Tổng thể tích của hai hình nón:

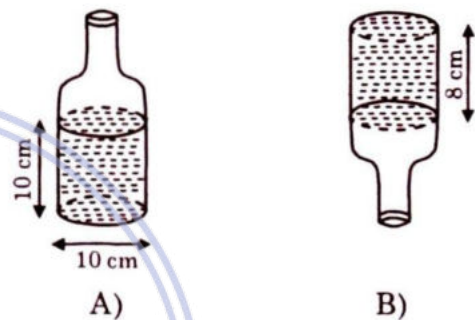
$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2.HB + \frac{1}{3}\pi r^2.HC = \frac{1}{3}\pi r^2.BC = 76,8\pi (\text{cm}^3) (\approx 251,274\text{cm}^3)$$

+ Vậy thể tích phần của hình (S_1) nằm bên ngoài hình (S_2) là:

$$V = V_1 - V_2 = 288\pi - 76,8\pi = 211,2\pi (\text{cm}^3) (\approx 663,504\text{cm}^3).$$

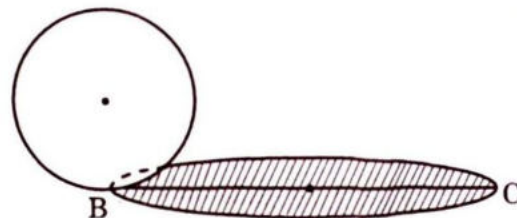
Bài tập vận dụng

- Một chai có phía dưới là hình trụ chứa một lượng nước có chiều cao 10cm như ở hình bên. Người ta lật ngược chai lại thì phần chai không chứa nước là một hình trụ có chiều cao 8cm. Tính thể tích của chai, biết rằng đường kính của đáy chai bằng 10.
- Có ba vật hình trụ bằng chì, bằng sắt, bằng nhôm có cùng khối lượng bằng 2kg và cùng có đường kính đáy bằng 10. Tính chiều cao của mỗi vật, biết rằng khối lượng riêng của chì là $11,3 \text{ kg/dm}^3$, khối lượng riêng của sắt là $7,8 \text{ kg/dm}^3$, khối lượng riêng của nhôm là $2,7 \text{ kg/dm}^3$.
- Một băng giấy dài được cuộn chặt lại 60 vòng làm thành một cuộn giấy hình trụ rỗng. Biết đường kính của đường tròn trong cùng bằng 2cm, đường kính của đường tròn ngoài cùng bằng 6cm. Tính chiều dài của băng giấy (làm tròn đến 0,1).
- Người ta cần cưa một thân cây hình trụ có đường kính đáy bằng d để được một khúc gỗ hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất. Tính các kích thước của khúc gỗ hình hộp chữ nhật.
- Chú kiến và giọt mật. Một chú kiến ở vị trí A trên mặt ngoài của một lọ thủy tinh hình trụ (không có nắp), nhìn thấy một giọt mật ở thẳng trước mặt tại vị trí B. Biết A cách miệng lọ 5cm, B cách miệng lọ 2cm và độ dài của đường tròn miệng lọ bằng 48cm. Tính độ dài ngắn nhất để chú kiến bò được tới chỗ giọt mật.
- Chứng minh rằng trong các hình trụ có cùng thể tích, hình trụ có đường cao bằng đường kính của đáy là hình có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

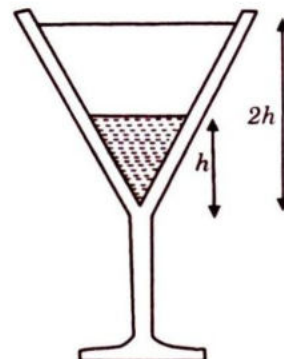


ABC

7. Cho tam giác OBC vuông tại O . Nếu quay tam giác đó quanh cạnh OB cố định thì được một hình nón có thể tích 800π , còn nếu quay tam giác đó quanh cạnh OC cố định thì được một hình nón có thể tích 1920π . Tính các độ dài OB , OC .



8. Ông An đã uống ở một cốc có dạng hình nón. Chiều cao phần rượu còn lại bằng nửa chiều cao rượu lúc đầu. Ông An đã uống bao nhiêu phần cốc rượu?



9. Một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O , đường kính AB , $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Qua trung điểm I của SO , kẻ đường thẳng song song với AB , cắt mặt xung quanh của hình nón ở C và D . Tính thể tích hình nón biết $CD = 6\text{cm}$.

10. Một hình nón có chiều cao h . Hai đường sinh vuông góc với nhau chia mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có tỉ số diện tích là $1:2$. Tính thể tích hình nón.

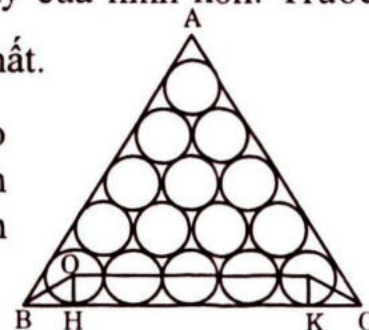
11. Tam giác ABC có $BC = a$, chiều cao tương ứng bằng h . Tính thể tích hình tạo thành khi quay tam giác một vòng quanh cạnh BC .

12. Hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$, các tia phân giác của các góc C và D gặp nhau tại trung điểm của AB . Biết $AB = 8\text{cm}$, diện tích hình thang bằng 40cm^2 . Tính diện tích mặt xung quanh của hình nón cắt do cạnh CD tạo thành khi quay hình thang một vòng quanh trục AB .

13. Tính số đo của cung AB của một hình quạt tâm O bán kính R để khi cuộn hình quạt lại, ta được một hình nón có thể tích lớn nhất.

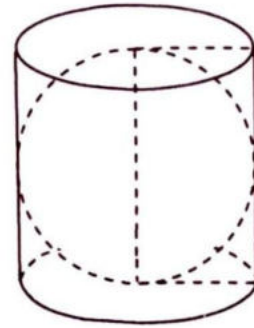
Hướng dẫn: gọi r là bán kính của đường tròn đáy của hình nón. Trước hết, hãy tính tỉ số $\frac{r}{R}$ để hình nón có thể tích lớn nhất.

14. Có 15 quả bi-a hình cầu đặt nằm trên mặt bàn, sao cho chúng được dồn khít trong một khung hình tam giác đều có chu vi bằng 858 mm . Tính bán kính của mỗi quả bi-a.



15. Một quả bóng hình cầu bán kính 13cm , nổi trên mặt hồ, đỉnh của quả bóng cao hơn mặt hồ 18cm . Tính độ dài của đường tròn được tạo thành bởi quả bóng và mặt hồ.

16. Một quả bóng hình cầu đặt trên mặt đất có bóng của nó như hình vẽ. Trong đó độ dài lớn nhất của bóng là $BC = 1\text{m}$. Biết một cột cao 1m lúc đó có bóng dài 2m . Tính bán kính của quả bóng.
17. Hình bên mô tả một hình cầu nội tiếp một hình trụ (tức là hình cầu được đặt khít vào trong hình trụ). Hãy chọn câu trả lời đúng:
- Tỉ số giữa diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần hình trụ bằng:
 - $\frac{1}{2}$;
 - $\frac{2}{3}$;
 - $\frac{3}{4}$;
 - $\frac{4}{5}$;
 - Tỉ số giữa thể tích hình cầu và thể tích hình trụ bằng:
 - $\frac{1}{2}$;
 - $\frac{2}{3}$;
 - $\frac{3}{4}$;
 - $\frac{4}{5}$;
18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.
- Chứng minh rằng tồn tại một hình cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình hộp chữ nhật.
 - Tính thể tích của hình cầu đó biết các kích thước của hình hộp chữ nhật là 6cm , 8cm , 24cm .



Hướng dẫn và đáp số

1. Thể tích chai bằng tổng các thể tích của khối nước hình trụ ở hình a và phần chia không chứa nước ở hình b.

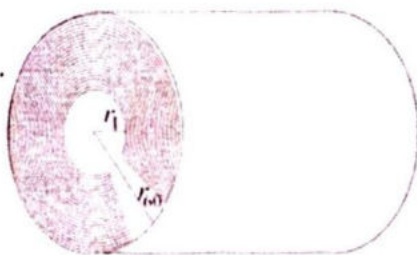
$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 + \pi \cdot 5^2 \cdot 8$$

$$= 25\pi(10 + 8) = 450\pi(\text{cm}^3) = 1413(\text{cm}^3).$$

2. Thể tích của các khối chì, sắt, nhôm theo thứ tự bằng:

$$V_1 = \frac{2}{11,3}(\text{dm}^3); V_2 = \frac{2}{7,8}(\text{dm}^3); V_3 = \frac{2}{2,7}(\text{dm}^3)$$

Chiều cao của các khối chì, sắt, nhôm theo thứ tự bằng:

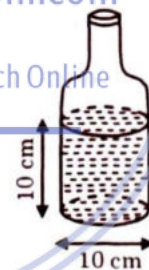


ABC

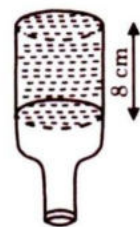
$$h_1 = \frac{2}{11,3 \cdot \pi \cdot 0,5^2} = 0,23\text{dm} = 2,3\text{cm}$$

$$h_2 = \frac{2}{7,8 \cdot \pi \cdot 0,5^2} = 0,33\text{dm} = 3,3\text{cm};$$

$$h_3 = \frac{2}{2,7 \cdot \pi \cdot 0,5^2} = 0,94\text{dm} = 9,4\text{cm}.$$



A)



B)

3. Gọi l là chiều dài của băng giấy, chiều dài đó bằng tổng độ dài của 60 đường tròn có bán kính $r_1, r_2, \dots, r_{60}$, trong đó $r_1 = 1\text{cm}; r_{60} = 3\text{cm}$.

Ta có: $l = 2\pi(r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{60})$

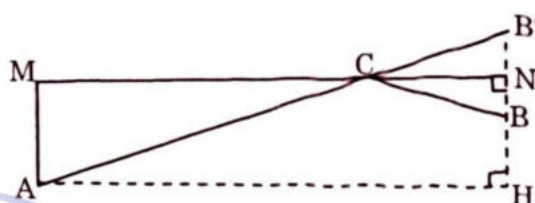
Gọi d là độ dày của tờ giấy thì $r_2 = r_1 + d, r_3 = r_2 + d, \dots, r_{60} = r_{59} + d$.

Do đó $r_1 + r_{60} = r_2 + r_{59} = r_3 + r_{58} = \dots = r_{30} + r_{31} = 4\text{cm}$

Vậy $l = 2\pi \cdot 30 \cdot 4 = 240\pi (\text{cm}) \approx 7,5\text{m}$.

4. Hãy chứng minh rằng trong các hình chữ nhật nội tiếp của đường tròn cho trước, hình vuông có diện tích lớn nhất. Từ đó nếu đáy của khúc gỗ là một hình vuông có đường chéo bằng d thì khúc gỗ có thể tích lớn nhất.

5. Giả thiết rằng lọ thủy tinh làm “băng bìa”, ta trải mặt xung quanh của lọ thành một hình chữ nhật có chiều dài bằng độ dài của đường tròn miệng lọ (48cm). Gọi AM, BN là các đường



vuông góc kẻ từ A, B đến miệng lọ thì $MN = 24\text{cm}$.

Chú kiến muốn tới B ở phía trong lọ phải vượt qua miệng lọ, tức là phải đi từ A tới MN , rồi tới B . Như vậy, chú phải “giải” bài toán: “tìm điểm C trên MN sao cho $AC + CB$ ngắn nhất.

Để dàng tính được $AC + CB = AC + CB' = AB' = 25\text{cm}$.

6. Gọi S là diện tích toàn phần, r là bán kính của đáy, h là đường cao của hình trụ. Ta có: $S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi(rh + r^2)$

S nhỏ nhất khi và chỉ khi $rh + r^2$ nhỏ nhất.

Gọi V là thể tích của hình trụ (V là hằng số), ta có

$$V = \pi r^2 h \text{ nên}$$

$$rh + r^2 = \frac{V}{\pi r} + r^2 = \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r} + r^2$$

Theo bất đẳng thức côsi, ba số dương $\frac{V}{2\pi r}; \frac{V}{2\pi r}; r^2$

có tích không đổi (bằng $\frac{V^2}{4\pi^2}$) nên tổng của chúng

nhỏ nhất khi và chỉ khi ba số ấy bằng nhau, tức là:

$$\frac{V}{2\pi r} = r^2 \Leftrightarrow \frac{rh}{2} = r^2 \Leftrightarrow h = 2r.$$

7. Thể tích hình nón khi quay tam giác quanh OB :

$$\frac{1}{3} \pi OC^2 \cdot OB = 800\pi \quad (1).$$

Thể tích hình nón khi quay tam giác quanh OC:

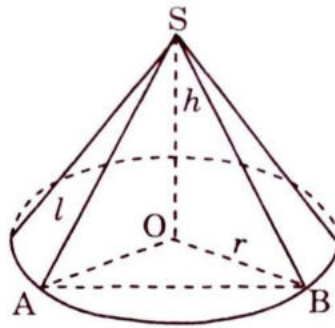
$$\frac{1}{3}\pi OB^2 \cdot OC = 1920\pi \quad (2).$$

Lấy (1) chia cho (2) được $\frac{OC}{OB} = \frac{5}{12}$,

Thay $OB = \frac{12}{5}OC$ vào (1) được

$$\frac{1}{3}\pi \cdot OC^2 \cdot \frac{1}{2}OC = 800\pi.$$

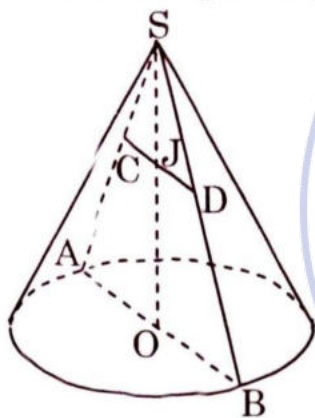
Suy ra $OC^3 = 1000$ nên $OC = 10$. Do đó $OB = \frac{12}{5} \cdot 10 = 24$.



8. Đáp số : $\frac{7}{8}$;

9. Đáp số $72\pi\sqrt{3}(\text{cm}^3)$.

10. Gọi SA, SB là hai đường sinh vuông góc. Do SA, SB chia mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có tỉ số diện tích là 1 : 2 nên A, B, chia đường tròn (O) thành hai phần có tỉ số độ dài là 1 : 2



Do đó $\widehat{AB} = 120^\circ$. Đặt $OA = OB = r$.

Xét $\triangle AOB$, ta có $AB = 2r \sin 60^\circ = r\sqrt{3}$

Xét $\triangle SAB$ vuông cân, ta có $AB = SA\sqrt{2}$.

Từ đó $SA^2 = \frac{3}{2}r^2$

$\triangle SOA$ vuông nên $h^2 = SA^2 - r^2 = \frac{r^2}{2}$ suy ra $r^2 = 2h^2$.

Từ đó $V = \frac{2}{3}\pi h^3$.

11. Giả sử $\widehat{B} \geq \widehat{C}$. Nếu $\widehat{B} = 90^\circ$ thì hình tạo thành là hình nón có bán kính đáy bằng h, chiều cao bằng a. (h. a)

Nếu $\widehat{B} < 90^\circ$ thì thể tích hình tạo thành là tổng thể tích hai hình nón (h. b).

Nếu $\widehat{B} > 90^\circ$ thì thể tích hình tạo thành là hiệu thể tích hai hình nón.

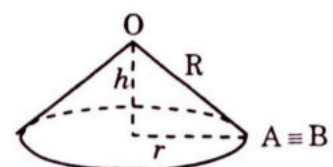
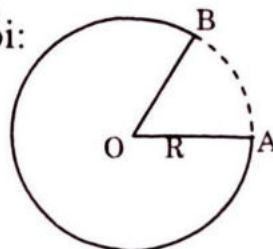
12. Đáp số: $100\pi(\text{cm}^2)$.

13. Gọi r là bán kính của đường tròn đáy của hình nón, h là chiều cao của hình nón. Ta có $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ nên V lớn nhất khi và chỉ khi $r^2 h$ lớn nhất.

Do $h^2 = R^2 - r^2$ nên ta biến đổi:

V lớn nhất $\Leftrightarrow r^4 h^2$ lớn nhất

$\Leftrightarrow r^4 (R^2 - r^2)$ lớn nhất.



$$\Leftrightarrow r^4(2R^2 - 2r^2) \text{ lớn nhất.}$$

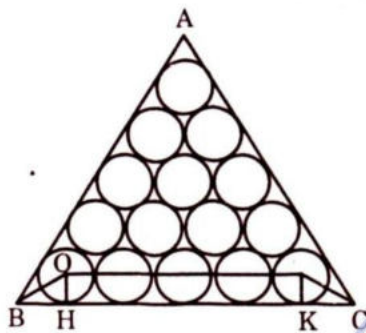
Theo bất đẳng thức Côsi, ba số dương $r^2, r^2, 2R^2 - 2r^2$ có tổng không đổi (bằng $2R^2$) nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi ba số đó bằng nhau, tức là: $r^2 = 2R^2 - 2r^2 \Leftrightarrow 3r^2 = 2R^2 \Leftrightarrow \frac{r^2}{R^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{r^2}{R^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Độ dài cung lớn AB bằng $2\pi r$. Độ dài đường tròn (O; R) bằng $2\pi R$.

$$\text{Số đo của cung lớn AB bằng: } \frac{2\pi r}{2\pi R} \cdot 360^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 360^\circ = 294^\circ$$

14. Gọi r là bán kính của mỗi quả bi-a. Cạnh của tam giác đều ABC bằng $858 : 3 = 286$ (mm).



Xét $\triangle OBH$ vuông tại H, ta có:

$$BH = OH \tan 60^\circ = r\sqrt{3}$$

Ta có:

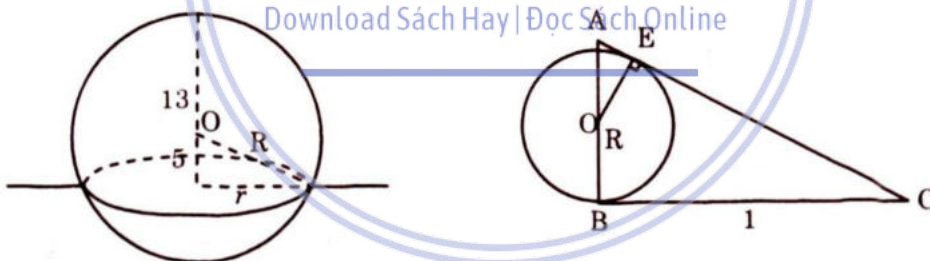
$$BC = BH + HK + KC = r\sqrt{3} + 8r + r\sqrt{3} = 2(4 + \sqrt{3})r.$$

Do đó:

$$r = \frac{286}{2(4 + \sqrt{3})} = \frac{143(4 - \sqrt{3})}{13} = 11(4 - \sqrt{3}) = 25 \text{ (mm)}$$

Bán kính của mỗi quả bi-a bằng 25mm.

15. Gọi r là bán kính của đường tròn được tạo thành bởi quả bóng và mặt hồ, ta tính được $r = 12$ cm. Đáp số 24π (cm).



16. Gọi R là bán kính của quả bóng. Trên hình 222, tia sáng tiếp xúc với đường tròn (O) tại E, A là giao điểm của BO và CE. Ta tính được:

$$AB = 0,5\text{m}; AC = \frac{\sqrt{5}}{2}\text{m}.$$

$$\triangle AEO \sim \triangle ABC \text{ (g.g) nên } \frac{OA}{CA} = \frac{OE}{BC}. \text{ Từ đó tính được } R = \sqrt{5} - 2(\text{m})$$

- 17.a, b) Câu trả lời B là đúng.

- 18.a) Chứng minh rằng bốn đường chéo của hình hộp chữ nhật cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường chéo.

- b. Đáp số: $\frac{8788}{3}\pi(\text{cm}^3).$

9. Một số đề thi tuyển sinh của các tỉnh, thành phố

Đề số 1

Tuyển sinh lớp 10 TP Hà Nội năm học 2007-2008

Bài 1: (1,5 điểm)

1. Giải các phương trình sau:

a. $x^2 + 2\sqrt{5}x + 4 = 0$

b. $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

2. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 9x - y = 7 \end{cases}$$

Bài 2: (1,5 điểm) Thu gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$B = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6-3\sqrt{3}}$$

Bài 3: (1 điểm) Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 675 m^2 và có chu vi bằng 120 m. Tìm chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Bài 4: (2 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ với m là tham số và x là ẩn số.

a. Giải phương trình khi $m = 1$

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

c. Với điều kiện của câu b hãy tìm m để biểu thức $A = x_1x_2 - x_1 - x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: (4 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F. Biết BF cắt CE tại H và AH cắt BC tại D. Chứng minh tứ giác BEFC nội tiếp và AH vuông góc với BC.

a. Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

b. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và K là trung điểm của BC. Tính tỉ số $\frac{OK}{BC}$ khi BHOC nội tiếp.

c. Cho $HF = 3\text{cm}$, $HB = 4\text{cm}$, $CE = 8\text{cm}$ và $HC > HE$. Tính HC.

Đề số 2

Tuyển sinh lớp 10 Hà Nam năm học 2009-2010

Bài 1:

1. Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x - 2} = 2$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x+y} = 7 \\ \frac{x}{x+y} = 12 \end{cases}$$

ABC

Bài 2: Cho phương trình: $x - \sqrt{6x} - 3 + 2m = 0$

- Tìm m để $x = \sqrt{7 - \sqrt{48}}$ là nghiệm của phương trình.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x = x_1; x = x_2$ thỏa mãn:

$$\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{24}}{3}$$

Bài 3. 1. Cho phương trình: $2x^2 + 2(2m - 6)x - 6m + 52 = 0$ (với m là tham số, x là ẩn số). Tìm giá trị của m là số nguyên để phương trình có nghiệm hữu tỷ.

2. Tìm số $\overline{abc}$ thỏa mãn: $\overline{abc} = (a + b)^2 4c$

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{C} < \widehat{A}$. Đường tròn tâm I nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại M, N, E; gọi K là giao điểm của BI và NE.

- Chứng minh $\widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2}$
- Chứng minh năm điểm A, M, I, K, E cùng nằm trên một đường tròn.
- Gọi T là giao điểm của BI và AC, chứng minh: $KT \cdot BN = KB \cdot ET$.
- Gọi Bt là tia của đường thẳng BC và chứa điểm C. Khi hai điểm A, B và Bt cố định; điểm C chuyển động trên tia Bt và thỏa mãn giả thiết, chứng minh rằng các đường thẳng NE luôn đi qua điểm cố định.

Download Sách Online

Đề số 3

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên tin Quốc học Thừa Thiên Huế 2009-2010

Bài 1: Cho biểu thức $P = \left(\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab} + b} + \frac{2b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right)$

- Tìm điều kiện đối với a và b để P có nghĩa rồi rút gọn biểu thức P.
- Khi a và b là các nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 3x + 1 = 0$. Không cần giải phương trình này, hãy chứng tỏ giá trị của P là một số nguyên dương.

Bài 2: Giải phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

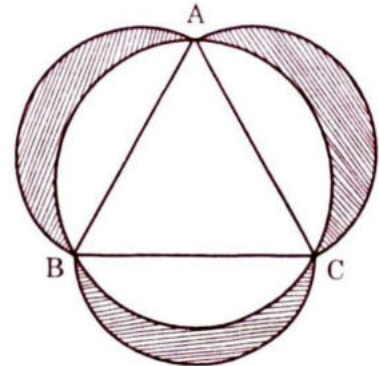
$$(4x + 3)^2(2x + 1)(x + 1) = 810$$

Bài 3: a. Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi bằng 114cm. Người ta cắt bỏ bốn hình vuông có cạnh là 5cm ở bốn góc rồi gấp lên thành một hình hộp chữ nhật (không có nắp). Tính các kích thước của tấm tôn đã cho. Biết rằng thể tích hình hộp bằng 1500cm^3 .

ABC
758

- b. Anh Nam gửi vào ngân hàng một số tiền là A đồng với lãi suất không đổi là $r\%$ cho mỗi tháng. Số tiền lãi của tháng đầu được gộp vào với vốn để tính lãi tháng thứ hai. Số tiền lãi của tháng thứ hai được gộp với số tiền có được ở đầu tháng thứ hai để tính lãi tháng thứ ba và cứ tiếp tục cách tính như thế cho các tháng tiếp theo. Hãy nêu ra cách lập công thức để tính số tiền anh Nam có được vào cuối tháng thứ n , với n là một số nguyên dương tùy ý.

Bài 4: a. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hạ đường cao BB' , CC' của tam giác ABC cắt nhau tại H . Vẽ đường kính AD của đường tròn (O) .



1. Tứ giác $BHCD$ là hình gì? Chứng tỏ HD đi qua trung điểm của cạnh BC .
2. Chứng minh OA vuông góc với $B'C'$.

- b. Dựng bên ngoài tam giác đều ABC cạnh $a = 6$ (đơn vị độ dài) ba nửa đường tròn đường kính AB , BC , CA và dựng đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đó. Tính diện tích của phần gạch sọc trên hình vẽ. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bài 5: a. Trong bảng bên (gồm nhiều dòng và nhiều cột), mỗi ô (được xác định vị trí bởi số thứ tự (TT) dòng và số thứ tự (TT) cột) chứa một giá trị số theo một quy luật. Hãy phát biểu quy luật đó và cho biết giá trị của các ô thuộc dòng có số thứ tự 10.

- b. Một học sinh bắt đầu làm bài tập lúc đúng 4 giờ chiều và làm xong bài tập khi hai kim đồng hồ (kim giờ và kim phút) chập vào nhau lần thứ nhất. Hỏi học sinh đó làm xong bài tập trong thời gian bao lâu?

TT cột TTdòng	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	.	.	.	.	.	.	
...	.	.	.	.	.	.	...

ABC

Đề số 4**Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Lê Quý Đôn Bình Định năm học 2009-2010****Bài 1:** Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Bài 2: Cho 3 số phân biệt m, n, p . Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-p} = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt.}$$

Bài 3: Với số tự nhiên $n, n \geq 3$. Đặt

$$S_n = \frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

Chứng minh rằng $S_n < \frac{1}{2}$.**Bài 4:** Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O có độ dài các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$. E là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A sao cho cung EB bằng cung EC. Nối AE cắt cạnh BC tại D.a. Chứng minh: $AD^2 = AB \cdot AC = DB \cdot DC$ b. Tính độ dài đoạn AD theo a, b, c .**Bài 5.** Chứng minh rằng: $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$ với mọi số nguyên dương m, n .downloaadsachmienphi.com

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Đề số 5**Tuyển sinh lớp 10 THPT Tỉnh Trà Vinh năm học 2009-2010****Bài 1:** a. Tính $P = 2\sqrt{12} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{75}$ b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 7x + 2y = 17 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$
Bài 2: Trong cùng hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng (D): $y = x + 2$ và parabol (P): $y = x^2$

a. Vẽ (D) và (P).

b. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (D) và parabol (P).

Bài 3: Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích $360m^2$. Nếu tăng chiều rộng 3m và giảm chiều dài 4m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.**Bài 4:** Cho hình thang vuông ABCD với đường cao AB. Biết rằng $AD = 6cm$, $BC = 8cm$ và đường chéo BD vuông góc với cạnh bên DC. Tính độ dài AB, CD và AC.**ABC**
240

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 45^\circ$ và nội tiếp trong đường tròn (O, R).

1. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ và tam giác BOC là tam giác vuông cân.
2. Tính diện tích tam giác ABC theo R.

Đề số 6

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên toán Quốc học Huế năm học 2009-2010

Bài 1: Cho phương trình: $x^2 - mx - m - 1 = 0$ (m là tham số)

a. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 .

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{m^2 + 2m}{x_1^2 + x_2^2 + 2}$

Bài 2: a. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Chứng minh rằng phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có hai nghiệm dương phân biệt.

b. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{2-x}{x+4}} - 2\sqrt{\frac{x+4}{2-x}} + 1 = 0$

c. Chứng minh rằng có duy nhất bộ số thực (x; y; z) thỏa mãn điều kiện:

$$\sqrt{x-2008} + \sqrt{y-2009} + \sqrt{z-2010} + 3012 = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

Bài 3: Cho góc xOy có số đo bằng 60° . Đường tròn có tâm K nằm trong góc xOy tiếp xúc với tia Ox tại M và tiếp xúc với tia Oy tại N. Trên tia Ox lấy điểm P sao cho $OP = 3OM$. Tiếp tuyến của đường tròn (K) qua P cắt tia Oy tại Q khác O. Đường thẳng PK cắt đường thẳng MN ở E. Đường thẳng QK cắt đường thẳng MN ở F.

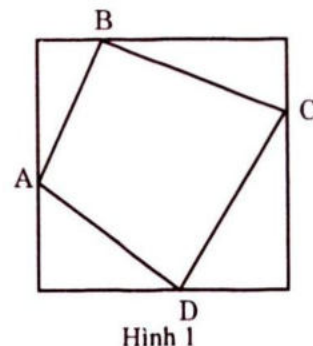
- a. Chứng minh tam giác MPE đồng dạng với tam giác KPQ.
- b. Chứng minh tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.
- c. Gọi D là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh tam giác DEF là một tam giác đều.

Bài 4 : Tìm tất cả các cặp số nguyên (a; b) nghiệm đúng điều kiện:

$$(a-1)^2(a^2+9) = 4b^2 + 20b + 25.$$

Bài 5: Người ta gọi “Hình vuông (V) ngoại tiếp tứ giác lồi ABCD” khi tứ giác ABCD nằm trong (V) và trên mỗi cạnh của (V) có chứa đúng một đỉnh của tứ giác ABCD (hình 1).

Giả sử tứ giác lồi ABCD có hai hình vuông ngoại tiếp khác nhau. Chứng minh rằng tứ giác này có vô số hình vuông ngoại tiếp nó.



Hình 1

Đề số 7**Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An - 2007-2008****Ngày thứ 1****Bài 1.** Cho biểu thức: $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$ a. Rút gọn biểu thức P. b. Tính giá trị của P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.**Bài 2.** Cho phương trình (m là tham số) $2x^2 - 4mx + 2m^2 - 1 = 0$ (1)

a. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$2x_1^2 + 4mx_2 + 2m^2 - 1 > 0$$

Bài 3. a. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y = 7 \end{cases}$ b. Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x + \frac{1}{y} \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

**Bài 4.** Cho tam giác ABC cân tại A ($\hat{A} < 90^\circ$) có đường cao BD. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, BM và BD. Tia NI cắt cạnh AC tại K. Chứng minh rằng

a. Các tứ giác ABMD, ABNK nội tiếp.

b. $BC^2 = \frac{4}{3} AC \cdot CK$.**Bài 5.** Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AC, N là điểm thuộc đoạn thẳng MC sao cho $MN = \frac{1}{2} NC$. Biết rằng $\widehat{MBN} = \widehat{CBN}$.Chứng minh rằng $\widehat{ABN} = 90^\circ$.**Ngày thứ 2:****Bài 6.** a. Giải phương trình $1 + \sqrt{1+x} = x^2$

b. Cho đa thức bậc bốn P(x) với các hệ số nguyên thỏa mãn P(x) chia hết cho 7 với mọi số nguyên x. Chứng minh các hệ số của P(x) chia hết cho 7.

Bài 7. a. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1 + x^3 y^3 - 19x^3 = 0 \\ y + xy^2 + 6x^2 = 0 \end{cases}$ b. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$
. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 8. Trong một hình chữ nhật có diện tích bằng 5 chứa chín hình chữ nhật nhỏ, mỗi hình chữ nhật nhỏ có diện tích bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại hai hình chữ nhật nhỏ có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{9}$.

Bài 9. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AN và CK. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt đường tròn (O) tại điểm M ($M \neq B$). Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng AC.

- Chứng minh EK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN.
- Chứng minh EM vuông góc với MB.

Bài 10. Biết rằng một tứ giác lồi có tổng hai cạnh đối và một đường chéo không lớn hơn $2\sqrt{2S}$ (S là diện tích tứ giác). Tính độ dài đường chéo còn lại theo S.

Đề số 8

Tuyển sinh lớp 10 THPT Bình Định năm học 2009-2010

Bài 1: Giải các phương trình sau:

- $2(x+1) = 4 - x$
- $x^2 - 3x + 2 = 0$

Bài 2: 1. Cho hàm số $y = ax + b$. Tìm a, b biết đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm A(-2;5) và B(1;-4).

2. Cho hàm số $y = (2m - 1)x + m + 2$

- Tìm điều kiện của m để hàm số luôn nghịch biến.
- Tìm giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{2}{3}$.

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Bài 3: Một người đi xe máy khởi hành từ Hoài Ân đi Quy Nhơn. Sau đó 75 phút, một ô tô khởi hành từ Quy Nhơn đi Hoài Ân với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 20km/giờ. Hai xe gặp nhau tại Phù Cát. Tính vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng Quy Nhơn cách Hoài Ân 100km và Quy Nhơn cách Phù Cát 30 km.

Bài 4: Cho tam giác vuông ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính AB. Kéo dài AC (về phía C) đoạn CD sao cho $CD = AC$.

- Chứng minh tam giác ABD cân.
- Đường thẳng vuông góc với AC tại A cắt đường tròn (O) tại E. Kéo dài AE (về phía E) đoạn EF sao cho $EF = AE$. Chứng minh rằng ba điểm D, B, F cùng nằm trên một đường thẳng.
- Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm A, D, F tiếp xúc với đường tròn (O).

Bài 5: Với mỗi số k nguyên dương, đặt $S_k = (\sqrt{2} + 1)^k + (\sqrt{2} - 1)^k$

Chứng minh rằng: $S_{m+n} + S_{m-n} = S_m \cdot S_n$ với mọi m, n là số nguyên dương và $m > n$.

ABC

Đề số 9**Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Hà Nam năm học 2009-2010**

Bài 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{1 - x} + \frac{(\sqrt{x} - 2)^2 + 3\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}$

a. Tìm điều kiện xác định của P.

b. Rút gọn P

c. Tìm x để $P > 0$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ (2 + \sqrt{2})x - y = 1 \end{cases}$$

Bài 3 : a. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 6$ và parabol $y = x^2$.

b. Tìm m để đồ thị hàm số $y = (m + 1)x + 2m + 3$ cắt trục Ox, Oy tại các điểm A và B và $\triangle OAB$ cân (đơn vị trên hai trục Ox và Oy bằng nhau)

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông đỉnh A, đường cao AH, I là trung điểm của AH, K là trung điểm của HC. Đường tròn đường kính AH ký hiệu là (AH) cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N

a. Chứng minh $\triangle ABC$ và $\triangle AMN$ đồng dạng.

b. Chứng minh KN là tiếp tuyến của đường tròn (AH)

c. Tìm trực tâm của tam giác ABK.

Bài 5. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Đề số 10**Tuyển sinh lớp 10 THPT Nam Định năm học 2009-2010**

Bài 1: Trong mỗi câu từ 1 đến 8 đều có bốn phương án trả lời A, B, C, D: Trong đó chỉ có một phương án đúng. Hãy chọn phương án đúng để viết vào bài làm.

Câu 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, đồ thị các hàm số $y = x^2$ và $y = 4x + m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $m > 1$. B. $m > -4$. C. $m < -1$ D. $m < -4$.

Câu 2. Cho phương trình $3x - 2y + 1 = 0$. Phương trình nào sau đây cùng với phương trình đã cho lập thành một hệ phương trình vô nghiệm.

A. $2x - 3y - 1 = 0$.

B. $6x - 4y + 2 = 0$

C. $-6x + 4y + 1 = 0$

D. $-6x + 4y - 2 = 0$

Câu 3. Phương trình nào sau đây có ít nhất một nghiệm nguyên

A. $(x - \sqrt{5})^2 = 5$

B. $9x^2 - 1 = 0$

C. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

D. $x^2 + x + 2 = 0$

ABC
244

Câu 4. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy góc tạo bởi đường thẳng $y = \sqrt{3}x + 5$ và trục Ox bằng:

- A. 30° B. 120° C. 60° D. 150° .

Câu 5. Cho biểu thức $P = a\sqrt{5}$, với $a < 0$. Đưa thừa số ở ngoài dấu căn vào trong dấu căn, ta được P bằng:

- A. $\sqrt{5a^2}$. B. $-\sqrt{5a}$ C. $\sqrt{5a}$ D. $-\sqrt{5a^2}$

Câu 6. Trong các phương trình sau đây phương trình nào có hai nghiệm dương:

- A. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ B. $x^2 - 4x + 5 = 0$
C. $x^2 + 10x + 1 = 0$ D. $x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0$

Câu 7. Cho đường tròn (O; R) ngoại tiếp tam giác MNP vuông cân ở M. Khi đó MN bằng:

- A. R B. 2R C. $2\sqrt{2}R$ D. $R\sqrt{2}$.

Câu 8. Cho hình chữ nhật MNPQ có MN = 4cm; MQ = 3cm. Khi quay hình chữ nhật đã cho một vòng quanh cạnh MN ta được một hình trụ có thể tích bằng:

- A. 48cm^3 B. $36\pi\text{cm}^3$ C. $24\pi\text{cm}^3$ D. $72\pi\text{cm}^3$

Bài 2: 1. Tìm x biết: $\sqrt{(2x-1)^2} = 9$

2. Rút gọn biểu thức: $M = 2\sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$

3. Tìm điều kiện xác định của biểu thức: $A = \sqrt{-x^2 + 6x - 9}$

Bài 3. Cho phương trình: $x^2 + (3-m)x + 2(m-5) = 0$ (1), với m là tham số.

1. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình (1) luôn có nghiệm $x_1 = 2$.

2. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$.

Bài 4. Cho đường tròn (O; R) và điểm A nằm ngoài (O; R). Đường tròn đường kính AO cắt đường tròn (O; R) tại M và N. Đường thẳng d qua A cắt (O; R) tại B và C (d không đi qua O; điểm B nằm giữa A và C). Gọi H là trung điểm của BC.

1. Chứng minh: AM là tiếp tuyến của (O;R) và H thuộc đường tròn đường kính AO.

2. Đường thẳng qua B vuông góc với OM cắt MN ở D. Chứng minh rằng: a. $\widehat{AHN} = \widehat{BDN}$

b. Đường thẳng DH song song với đường thẳng MC.

c. $HB + HD > CD$.

Bài 5: a. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y - 2xy = 0 \\ x + y - x^2y^2 = \sqrt{(xy-1)^2 + 1} \end{cases}$$

b. Chứng minh rằng với mọi x ta luôn có:

$$((2x+1)\sqrt{x^2 - x + 1} > (2x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}$$

ABC

Đề số 11**Tuyển sinh lớp 10 Trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội năm 1998****Bài 1:** a. Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$ b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21 \end{cases}$$
Bài 2: Các số a và b thỏa điều kiện:
$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 19 \\ b^3 - 3a^2b = 98 \end{cases}$$
Hãy tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$ **Bài 3:** Cho các số a, b, c $\in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$$

Bài 4: Cho đường tròn (ϵ) bán kính R. A và B là hai điểm cố định trên đường tròn, ($AB < 2R$). Giả sử M là một điểm thay đổi trên cung lớn AB của đường tròn.a. Kẻ từ B đường thẳng vuông góc với AM, đường thẳng này cắt AM tại I và cắt đường tròn (ϵ) tại N. Gọi J là trung điểm của MN. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên đường tròn thì mỗi điểm I, J đều nằm trên một đường tròn cố định.b. Xác định vị trí của điểm M để chu vi của $\triangle AMB$ là lớn nhất.**Bài 5:** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho mỗi số $n+26$ và $n-11$ đều là lập phương của một số nguyên dương. Cho các số x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hãy tính giá trị lớn nhất của biểu

thức:
$$P = xy + yz + xz + \frac{1}{2} [x^2(y-z)^2 + y^2(z-x)^2 + z^2(x-y)^2]$$

Đề số 12**Tuyển sinh lớp 10 THPT Chuyên Lam Sơn Thanh hóa -2007-2008****Bài 1:** (1.5 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3xy = 2(x+y) \\ 5yz = 6(y+z) \\ 4zx = 3(z+x) \end{cases}$$
Bài 2: (2 điểm) Đội bóng bàn của trường A thi đấu với đội bóng bàn của trường B, mỗi đấu thủ của trường này thi đấu với mọi đấu thủ của trường kia 1 trận. Biết rằng tổng số trận đấu bằng 4 lần tổng số cầu thủ của cả hai đội và số cầu thủ của trường B là số lẻ. Tìm số cầu thủ của mỗi đội.**ABC**
246

Bài 3: (3 điểm) Cho hai điểm A và B cố định trên đường tròn (O). C là điểm chính giữa cung AB, M là điểm chuyển động trên dây AB. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng:

1. $AC^2 = CM \cdot CD$.
2. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM thuộc một đường thẳng cố định.
3. Gọi R_1 và R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADM và BDM. Chứng minh $R_1 + R_2$ là hằng số.

Bài 4: (2 điểm) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;3)$, $B(4;0)$, $C\left(5;\frac{3}{4}\right)$ cùng với O tạo thành tứ giác lồi AOBC. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A và chia tứ giác AOBC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 5: (1.5 điểm) Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$ thì tích abc là lập phương của một số nguyên.

Đề số 13

Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 TP.VINH - Năm học 2007 – 2008

Bài 1: 1. Cho $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}}$

Tính giá trị biểu thức: $A = (x^3 - 2x + 2)^{2008}$

2. Tìm các số nguyên a, b, c sao cho: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$.

Bài 2: 1. Chứng minh: $A = 3^8 + 3^6 + 3^{2010} - 11$ chia hết cho 7 và 13.

2. Chứng minh rằng trong biểu diễn thập phân của số $(7 + 4\sqrt{3})^3$ đằng sau dấu phẩy có ít nhất 3 chữ số 9.

Bài 3: 1. Xác định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1}$.

2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$

Bài 4: Cho $f(x) = (1 + x + x^2)^{2007}$. Chứng minh rằng tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc chẵn của x là một số chẵn và tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc lẻ của x là một số lẻ.

Bài 5: Cho đường tròn tâm (O) đường kính AB. Từ một điểm M trên đường tròn (M khác A, B) ta vẽ tiếp tuyến xy với (O). Kẻ $AD \perp xy$ và $BC \perp xy$.

1. Chứng minh $MC = MD$. Từ đó suy ra $AD + BC$ có giá trị không phụ thuộc vào vị trí của M.

2. Tính tỉ số diện tích tam giác AMB và diện tích tứ giác ABCD.

3. Giả thiết tia phân giác góc AMB cắt AB tại I và đi qua E của đường kính EF ($EF \perp AB$). Chứng minh $\frac{1}{MI} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} \right)$. Nêu cách dựng tam giác AMB biết $MI = m$, $AB = a$.

Đề số 14

Tuyển sinh lớp 10 tỉnh Nghệ An 2009 – 2010

Bài 1: Cho biểu thức: $A = \frac{x\sqrt{x} + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$

1. Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .
2. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{9}{4}$.
3. Tìm tất cả các giá trị của x để $A < 1$.

Bài 2: Cho phương trình bậc hai, $2x^2 - (m + 3)x + m = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = 2$.
2. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm

$$x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, x_1 x_2 = \frac{1}{2}.$$

3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |x_1 - x_2|$.

Bài 3: Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 45m. Tính diện tích thửa ruộng, biết rằng nếu chiều dài giảm 2 lần và chiều rộng tăng 3 lần thì chu vi thửa ruộng không thay đổi.

Bài 4: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB cố định và CD là một đường kính thay đổi không trùng với AB . Tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại B cắt các đường thẳng AC và AD lần lượt tại E và F .

1. Chứng minh rằng: $BE \cdot BF = 4R^2$.
2. Chứng minh tứ giác $CEFD$ nội tiếp được trong đường tròn.
3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CEFD$. Chứng minh rằng tâm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Đề số 15

TS 10 Toán – Đại học Vinh năm 2009 -2010 (vòng 1)

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m(m - 3) = 0$, với m là tham số.

1. Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.
2. Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm u, v thỏa mãn hệ thức $u^2 + v^2 = 17$.

Bài 2: 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x + y) = 23 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$$

2. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x > 8y > 0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + \frac{1}{y(x - 8y)}$.

Bài 3: Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) cắt nhau tại hai điểm I, P. Cho biết $R_1 < R_2$ và O_1, O_2 khác phía đối với đường thẳng IP. Kẻ hai đường kính IE, IF tương ứng của (O_1, R_1) và (O_2, R_2) .

1. Chứng minh E, P, F thẳng hàng.
2. Gọi K là trung điểm EF. Chứng minh O_1PKO_2 là tứ giác nội tiếp.
3. Tia IK cắt (O_2, R_2) tại điểm thứ hai là B, đường thẳng vuông góc với IK tại I cắt (O_1, R_1) tại điểm thứ hai là A. Chứng minh $IA = BF$.

Hướng dẫn và đáp số

Đề số 1

Bài 1: 1. a. Ta có $\Delta' = 1 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = -\sqrt{5} - 1; x_2 = -\sqrt{5} + 1.$$

b. Đặt $t = x^2 \geq 0$, ta được phương trình trở thành

$$t^2 - 29t + 100 = 0 \Leftrightarrow t = 25 \text{ hay } t = 4$$

$$t = 25 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5; t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = \pm 5; x = \pm 2$.

$$2. \begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 9x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6(9x - 7) = 17 \\ y = 9x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 59x = 59 \\ y = 9x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Bài 2: } A = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$B = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = (3 + \sqrt{3})\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$$

$$= (3 + \sqrt{3})\sqrt{(3 - \sqrt{3})^2} = (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 6.$$

Bài 3: Gọi chiều dài là x (m) và chiều rộng là y (m) ($x > y > 0$)

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} 2(x + y) = 120 \\ xy = 675 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 60 - x \\ x(60 - x) = 675 \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow x^2 - 60x + 675 = 0 \Leftrightarrow x = 45 \text{ hay } x = 15$$

Khi $x = 45$ thì $y = 15$ (nhận). Khi $x = 15$ thì $y = 45$ (loại)

Vậy chiều dài là 45m, chiều rộng là 15m.

ABC

Bài 4: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (1)

a. Khi $m = 1$ thì phương trình (1) trở thành:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

b. (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

c. (1) khi $m > 1$ ta có:

$$S = x_1 + x_2 = 2m \text{ và } P = x_1 \cdot x_2 = m^2 - m + 1$$

$$\text{Do đó: } A = P - S = m^2 - m + 1 - 2m = m^2 - 3m + 1 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (thỏa điều kiện } m > 1)$$

Vậy khi $m = \frac{3}{2}$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất và GTNN của A là $-\frac{5}{4}$.

Bài 5: a. Ta có E, F lần lượt là giao điểm của AB, AC với đường tròn đường kính BC $\Rightarrow$ BEFC nội tiếp đường tròn đường kính BC.

* Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ BF, CE là hai đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow$ H là trực tâm tam giác ABC $\Rightarrow$ AH vuông góc với BC

b. Xét tam giác AEC và AFB có: $\widehat{BAC}$ chung, $\widehat{AEC} = \widehat{AFB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle AFB \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$$

c. Khi BHOC nội tiếp ta có:

$$\widehat{BOC} = \widehat{BHC}, \widehat{BHC} = \widehat{EHF} \Rightarrow \widehat{EHF} = \widehat{BOC}, \widehat{EHF} + \widehat{EAF} = 180^\circ$$

$$\text{(do tứ giác AEHF nội tiếp)} \Rightarrow \widehat{BOC} + \widehat{BAC} = 180^\circ, \widehat{EHF} = \widehat{BOC}$$

$$\Rightarrow 3\widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ.$$

Ta có : K là trung điểm của BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Rightarrow$ OK vuông góc với BC mà tam giác OBC cân tại O ($OB = OC$)

$$\Rightarrow \widehat{KOC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^\circ \Rightarrow \frac{OK}{KC} = \cot \widehat{KOC} = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } BC = 2KC \text{ nên } \frac{OK}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

d. Xét $\triangle EHB$ và $\triangle FHC$ có:

$$\widehat{BEH} = \widehat{CFH} = 90^\circ, \widehat{EBH} = \widehat{FHC} \text{ (đối đỉnh)} \Rightarrow \triangle EHB \sim \triangle FHC$$

$$\Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow HE \cdot HC = HB \cdot HF = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\Rightarrow HC(CE - HC) = 12 \Rightarrow HC^2 - 8 \cdot HC + 12 = 0 \Leftrightarrow HC = 2 \text{ hoặc } HC = 6$$

* Khi $HC = 2$ thì $HE = 6$ (không thỏa $HC > HE$)

* Khi $HC = 6$ thì $HE = 2$ (thỏa $HC > HE$)

Vậy $HE = 2$ (cm)

Đề số 2

Bài 1: a. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x - 2} = 2$ (điều kiện: $x \neq 2; x \neq 1$)

$$\Leftrightarrow 1 - x + 1 = 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0; \Delta = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \text{ (loại); } x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

b. Đặt $\frac{1}{x+y} = t$ ta có $\begin{cases} x+t=7 \\ x.t=12 \end{cases}$ nên x, t là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 7X + 12 = 0 \text{ giải ra ta có } X_1 = 3; X_2 = 4 \text{ nên}$$

$$1) \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{x+y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x+y=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-\frac{11}{4} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x=4 \\ \frac{1}{x+y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x+y=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-\frac{11}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $\left(x_1 = 3; y_1 = -\frac{11}{4}\right), \left(x_1 = 4; y_1 = -\frac{11}{3}\right)$

Bài 2: Cho phương trình: $x - \sqrt{6x} - 3 + 2m = 0$

a. Để $x = \sqrt{7 - \sqrt{48}} = 2 - \sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} - \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} - 3 + 2m = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} - 3 + \sqrt{3} - 3 + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

b. Đặt $\sqrt{x} = t$ ($t \geq 0$) thì phương trình có dạng: $t^2 - \sqrt{6}t - 3 + 2m = 0$ (2).

Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 6 + 12 - 8m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{9}{4}$.

Theo hệ thức Viet thì $\begin{cases} t_1 + t_2 = \sqrt{6} \\ t_1 \cdot t_2 = -3 + 2m \end{cases}$ để phương trình (1) có hai nghiệm thì

$$\begin{cases} t_1 + t_2 \geq 0 \\ t_1 \cdot t_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 + 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}.$$

Để $\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{24}}{3}$ thì

$$\frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 + t_2} = \frac{\sqrt{24}}{3} \Leftrightarrow \frac{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{\sqrt{24}}{3} \Leftrightarrow \frac{6 + 6 - 4m}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{24}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 36 - 12m = 12 \Leftrightarrow -12m = -24 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 3. a. $2x^2 + 2(2m - 6)x - 6m + 52 = 0$ có nghiệm hữu tỷ với m nguyên

$\Leftrightarrow x^2 + (2m - 6)x - 3m + 26 = 0$ có nghiệm hữu tỷ với m nguyên

$$\Delta = (2m - 6)^2 + 12m - 104 = k^2 (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 24m + 36 + 12m - 104 = k^2$$

$$4m^2 - 12m + 9 - k^2 = 77 \Leftrightarrow (2m - 3 - k)(2m - 3 + k) = 77$$

- 1) $\begin{cases} 2m - 3 - k = 1 \\ 2m - 3 + k = 77 \end{cases} \Leftrightarrow m = 21 \text{ (thỏa mãn)}$
- 2) $\begin{cases} 2m - 3 - k = -1 \\ 2m - 3 + k = -77 \end{cases} \Leftrightarrow m = -18 \text{ (thỏa mãn)}$
- 3) $\begin{cases} 2m - 3 - k = 11 \\ 2m - 3 + k = 7 \end{cases} \Leftrightarrow m = 6 \text{ (thỏa mãn)}$
- 4) $\begin{cases} 2m - 3 - k = -11 \\ 2m - 3 + k = -7 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3 \text{ (thỏa mãn)}$

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn đề bài: $m_1 = 21 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -37$;

$m_2 = -18 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 40$; $m_3 = 6 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = -4$; $m_4 = -3$

$\Rightarrow x_1 = 5; x_2 = 7$

b. Tìm số $\overline{abc}$ thỏa mãn $\overline{abc} = (a + b)^2 4c$

Vì $\overline{abc} = (a + b)^2 4c$ nên $\overline{abc}$ chia hết cho 4. Suy ra c là chữ số chẵn. Mặt khác $\overline{abc} = (a + b)^2 4c$ nên $4(a + b)^2$ có chữ số tận cùng là 6 $\Rightarrow (a + b)^2$ có tận cùng là 4, 9 (1)

Do $\overline{abc} < 1000$; $c \geq 2$. Suy ra $(a + b)^2 \leq \frac{1000}{8} = 125 \Rightarrow a + b \leq 11$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a + b = 8; 7; 3; 2$

1) $a + b = 8$ suy ra $\overline{abc} = 256c$ nên $\overline{abc} = 512$ không thỏa mãn.

2) $a + b = 7$ suy ra $\overline{abc} = 196c$.

Nếu $c = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 392$ không thỏa mãn

Nếu $c = 4 \Rightarrow \overline{abc} = 784$ không thỏa mãn.

Nếu $c = 6 \Rightarrow \overline{abc} > 1000$ không thỏa mãn

3) $a + b = 3$ suy ra $\overline{abc} = 36c$.

Nếu $c = 2 \Rightarrow \overline{abc} < 100$ không thỏa mãn

Nếu $c = 4 \Rightarrow \overline{abc} = 144$ không thỏa mãn.

Nếu $c = 6 \Rightarrow \overline{abc} = 216$ thỏa mãn.

Nếu $c = 8 \Rightarrow \overline{abc} = 288$ không thỏa mãn

4) $a + b = 2$ suy ra $\overline{abc} = 16c$.

Nếu $c = 8 \Rightarrow \overline{abc} = 128$ không thỏa mãn

Nếu $c = 6 \Rightarrow \overline{abc} < 100$ không thỏa mãn. Vậy số cần tìm là 216.

- a. Vì a, b là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 3x + 1 = 0$ nên theo định lý Viet ta có: $a + b = 3$; $ab = 1$.

Thế vào biểu thức (*) ta được: $P = 3$ (đpcm).

Bài 2. Biến đổi phương trình đã cho thành:

$$[8(2x^2 + 3x) + 9](2x^2 + 3x + 1) = 810 \quad (1).$$

Đặt $t = 2x^2 + 3x$. (1) trở thành: $(8t + 9)(t + 1) = 810 \Leftrightarrow 8t^2 + 17t - 801 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = -\frac{89}{8} \end{cases}$$

Với $t = 9$ ta có phương trình: $2x^2 + 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -3 \end{cases}$

Với $t = -\frac{89}{8}$ ta có phương trình: $2x^2 + 3x + \frac{89}{8} = 0$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{3}{2}$; $x = -3$

Bài 3: a. Nửa chu vi tấm tôn: $\frac{114}{2} = 57$ (cm).

Gọi kích thước thứ nhất của tấm tôn là x (cm), điều kiện: $10 < x < 57$.

Ta có kích thước thứ hai là $57 - x$ (cm). Sau khi gấp thành hình hộp chữ nhật, ba kích thước của nó là: $x - 10$ (cm); $47 - x$ (cm); 5 (cm).

Thể tích hình hộp chữ nhật: $(x - 10)(47 - x).5$ (cm³).

Theo bài ra ta có phương trình:

$$(x - 10)(47 - x).5 = 1500 \Leftrightarrow x^2 - 57x + 770 = 0$$

Giải phương trình: $x_1 = 35$; $x_2 = 22$ (thỏa mãn điều kiện bài toán)

Vậy các kích thước tấm tôn đã cho là: 35 (cm); 22 (cm)

- b. Cuối tháng thứ 1, số tiền anh Nam có:

$A + A \cdot \frac{r}{100} = A(1 + \frac{r}{100})$ (đồng). Cuối tháng thứ 2, số tiền anh Nam có:

$$A \left(1 + \frac{r}{100}\right) + A \left(1 + \frac{r}{100}\right) \frac{r}{100} = A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \text{ (đồng)}$$

+ Tương tự cho các tháng tiếp theo..., từ đó suy ra:

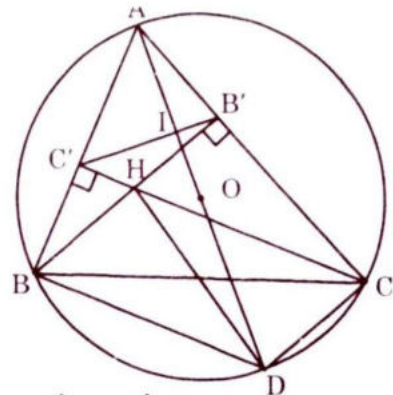
+ Cuối tháng thứ n, số tiền anh Nam có: $A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ (đồng)

Bài 4: a.1- Ta có $BB' \perp AC$ và $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $DC \parallel BB'$ hay $DC \parallel BH$ (1)

- Tương tự: $CC' \perp AB$ và $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $DB \parallel CC'$ hay $DB \parallel CH$ (2).

Từ (1) và (2) ta có BHCD là hình bình hành.

Suy ra hai đường chéo HD và BC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, hay HD đi qua trung điểm của cạnh BC.



2- AO cắt $B'C'$ tại I, ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp chắn cung AB).

Tứ giác $BCB'C'$ là tứ giác nội tiếp ($\widehat{BB'C} = \widehat{BC'C} = 90^\circ - \text{gt}$)

Từ đó suy ra $\widehat{IDB} + \widehat{BC'I} = 180^\circ$. Do đó, tứ giác $BC'ID$ là tứ giác nội tiếp.

- Ta có: $\widehat{C'ID} + \widehat{C'BD} = 180^\circ$

mà $\widehat{C'BD} = 90^\circ$ (cmt).

Suy ra $\widehat{C'ID} = 90^\circ$, hay $AO \perp B'C'$ (đpcm).

b. - Chiều cao của tam giác ABC là:

$$\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (đvdd)}.$$

- Bán kính của (O) là $\frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (đvdd)

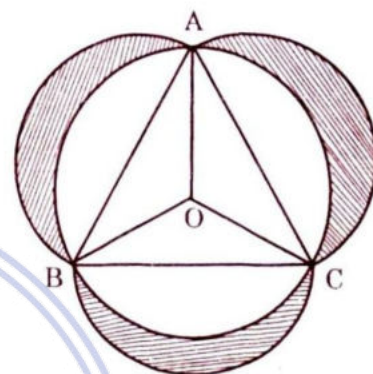
- Diện tích của hình viên phân tạo ra bởi dây AB và cung nhỏ AB của

(O) là: $S_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi (2\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 4\pi - 3\sqrt{3}$ (đvdt)

- Diện tích của phần nửa hình tròn đường kính AB nằm ngoài (O) là:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 - S_1 = \frac{9}{2} \pi - (4\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} + 3\sqrt{3} \text{ (đvdt)}$$

- Diện tích cần tìm là: $3 \cdot S_2 = \frac{3\pi}{2} + 9\sqrt{3} \approx 20,3$ (đvdt).



Bài 5. a) Kí hiệu $(i; j)$ là ô ở dòng i và cột j .

Giá trị số của các ô trong bảng có quy luật:

- Giá trị của ô $(i; 0)$ là 1 (với mọi $i = 0, 1, 2, \dots$)

- Giá trị của ô $(i; i)$ là 1 (với mọi $i = 0, 1, 2, \dots$)

- Ô $(i; j)$ là ô trống khi $i < j$ (với mọi $i = 0, 1, 2, \dots$)

- Tổng giá trị của 2 ô $(i; j)$ và $(i; j + 1)$ bằng giá trị của ô $(i + 1; j + 1)$ (với $i > j$; $i = 1, 2, \dots$ và $j = 0, 1, 2, \dots$)

- Điền lần lượt các ô từ dòng 4 đến dòng 10, ta có giá trị của các ô ở dòng 10 theo thứ tự như sau:

1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
---	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	----	----	---

b) Ở thời điểm 4 giờ đúng, kim phút cách kim giờ $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (vòng)

ABC

Mỗi giờ kim giờ quay được $\frac{1}{12}$ vòng, nên mỗi phút kim giờ quay được:

$$\frac{1}{12} : 60 = \frac{1}{720} \text{ (vòng)}. \text{ Mỗi phút kim phút quay được } \frac{1}{60} \text{ vòng.}$$

Do đó, cứ mỗi phút, kim phút quay hơn kim giờ $\frac{1}{60} - \frac{1}{720} = \frac{11}{720}$ (vòng).

Thời gian học sinh làm bài xong bằng thời gian để kim phút đuổi kịp kim giờ lần thứ nhất kể từ lúc 4 giờ chiều:

$$\frac{1}{3} : \frac{11}{720} = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11} \text{ (phút)} \text{ (hoặc } \approx 21 \text{ phút } 49 \text{ giây)}$$

Đề số 4

Bài 1: Chứng minh $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$ (với a, b, c là độ dài ba cạnh

của tam giác). Ta có: $\frac{m}{n} < \frac{m+k}{n+k}$, (với $0 < m < n, \forall k > 0$) (1)

Thật vậy,

$$(1) \Leftrightarrow 0 < m(n+k) < n(m+k) \Leftrightarrow 0 < mk < nk \Leftrightarrow 0 < m < n (0 < m, n, k)$$

Áp dụng: $0 < a < b+c \Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$

$$0 < b < c+a \Rightarrow \frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}; 0 < c < a+b \Rightarrow \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (2).$$

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ: $(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 (x, y, z > 0)$

$$\text{Ta có: } (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq 9$$

Thay $x = a+b, y = b+c, z = c+a$ vào (2):

$$2(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} > 1 \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra: $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

Bài 2: Phương trình $\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-p} = 0 \quad (1)$.

Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq m, n, p$.

Biến đổi phương trình tương đương:

$$(1) \Leftrightarrow (x-n)(x-p) + (x-m)(x-p) + (x-m)(x-n) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x(m+n+p) + mn + np + mp = 0$$

$$\Delta' = (m+n+p)^2 - 3(mn + np + mp) = m^2 + n^2 + p^2 - mn - np - mp$$

$$\frac{1}{2}[(m-n)^2 + (n-p)^2 + (m-p)^2] > 0 \text{ (với } m \neq n \neq p)$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3: Ta có bất đẳng thức: $2n+1 > 2\sqrt{n(n+1)}$

$$\Leftrightarrow (2n+1)^2 > 4n(n+1) \Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n : \text{BDT đúng}$$

Do đó: $\frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} < \frac{1}{2(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(n+1-n)\sqrt{n(n+1)}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] \quad (1).$$

Cho n lần lượt lấy các giá trị từ 1 đến n , thay vào (1), rồi cộng vế theo vế các bất đẳng thức tương ứng, ta được:

$$S_n = \frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$$< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < \frac{1}{2}$$

Bài 4: a. Xét hai tam giác ABD và AEC, ta có: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (AD là phân giác góc A);

$\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ (g.g).

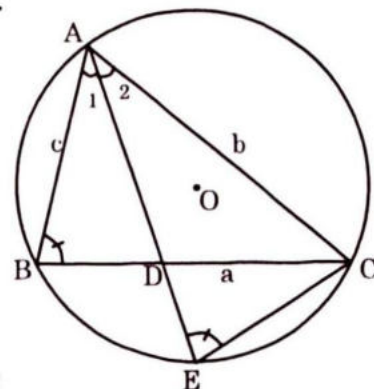
Suy ra $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AC$.

Mặt khác $\triangle ABD \sim \triangle CED$ (g.g)

nên $\frac{BD}{DE} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow BD \cdot DC = DA \cdot DE$

Từ đó: $AB \cdot AC - BD \cdot DC = AD \cdot AE - DA \cdot DE$
 $= AD(AE - DE) = AD^2$

Vậy $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC \quad (1)$.



b. Theo tính chất đường phân giác của tam giác, ta có:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow \frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB+DC}{c+b} = \frac{BC}{c+b} = \frac{a}{c+b}$$

Suy ra

$$\frac{DB}{c} \cdot \frac{DC}{b} = \frac{DB \cdot DC}{bc} = \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \Rightarrow DB \cdot DC = \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \cdot bc \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta có:

$$\begin{aligned} AD^2 &= bc - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \cdot bc = bc \left(1 - \frac{a}{b+c} \right) \left(1 + \frac{a}{b+c} \right) \\ &= bc \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } AD = \frac{\sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}$$

Bài 5: Trước hết, ta cần chứng minh $\left| \frac{1}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1).$

Vì $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2} - \frac{1}{n} \geq \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{n^2} \quad (2). \text{ Đặt } t = \frac{1}{n} (0 < t \leq 1), \text{ ta có:}$$

$$(2) \Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t^2 + t - \sqrt{2} \leq 0 (\forall t: 0 < t \leq 1) \quad (3). \text{ Biến đổi tương đương:}$$

$$(3) \Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})t + (\sqrt{3} - \sqrt{2})t + t - \sqrt{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t-1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)t - \sqrt{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t-1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)t - (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1) + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t-1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)(t-1) + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0 \quad (\text{vì } 0 < t \leq 1 \text{ nên } t(t-1) \leq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} + 1 \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{3} \leq 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4:$$

Bất đẳng thức đúng. Do đó bất đẳng thức (2) đúng.

$$\text{Vì } \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \left| \frac{1}{n} - \sqrt{2} \right|, \forall m \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Nhận xét: Dấu “=” trong bất đẳng thức không xảy ra.

Đề số 5

Bài 1: a. Tính $P = 2\sqrt{12} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{75}$

$$= 2\sqrt{4 \cdot 3} - 3\sqrt{16 \cdot 3} + 4\sqrt{25 \cdot 3}$$

$$= 4\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 7x + 2y = 17 & (1) \\ 3x + 2y = 5 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế của phương trình (1) cho phương trình (2), ta được:

$$4x = 12 \Leftrightarrow x = 3. \text{ Thế } x = 3 \text{ vào phương trình (2): } y = -2.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(3; -2)$

Bài 2: a- Vẽ đường thẳng (D): $y = x + 2$ và parabol (P) $y = x^2$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.

b- Tọa độ giao điểm của đường thẳng (D) và parabol (P) là nghiệm của hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Từ đó ta được: $x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$

Phương trình này có hai nghiệm là $x_1 = 2$ và $x_2 = -1$

$$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 4; x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 1$$

Vậy tọa độ giao điểm của (D) và (P) là $A(2; 4)$ và $B(-1; 1)$

Bài 3: Gọi $x(m)$ là chiều rộng của mảnh đất ($x > 0$) thì chiều dài là $\frac{360}{x} (m)$.

Tăng chiều rộng 3m và giảm chiều dài 4m thì diện tích mảnh đất không đổi. Theo đề ta có:

$$(x + 3) \left(\frac{360}{x} - 4 \right) = 360 \Leftrightarrow 360 - 4x + \frac{1080}{x} - 12 = 360$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 - 12x + 1080 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 270 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm là $x_1 = 15, x_2 = -18.$

Ta có $x_2 = -18 < 0$, không thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy chiều rộng của mảnh đất là 15(m)

Và chiều dài của mảnh đất là $\frac{360}{15} = 24 (m)$

Bài 4: Kẻ $DH \perp BC$ ($H \in BC$), ta được tứ giác ABHD là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow BH = AD = 6cm; DH = AB.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông BCD:

$$BD^2 = BC \cdot BH = 8 \cdot 6 = 48$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}(\text{cm})$$

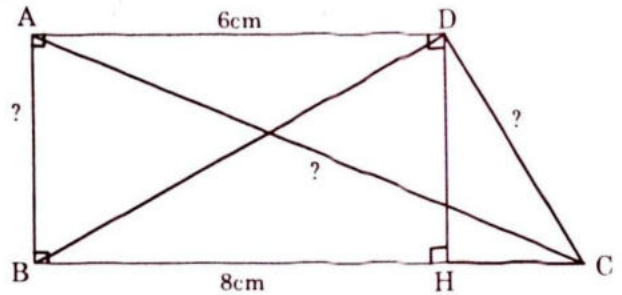
Áp dụng định lý Pitago trong hai tam giác vuông ABD, BCD.

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = BD^2 - AD^2 = 48 - 6^2 = 12$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}(\text{cm}); BC^2 = BD^2 + CD^2$$

$$\Rightarrow CD^2 = BC^2 - BD^2 = 8^2 - 48 = 16 \Rightarrow CD = 4(\text{cm}).$$



Tiếp tục áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABC:

$$AC^2 = AB^2 + CB^2 = 12 + 8^2 = 76 \Rightarrow AC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}(\text{cm}).$$

Bài 5: 1. Do $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn (O, R) nên $OA = OB = OC$

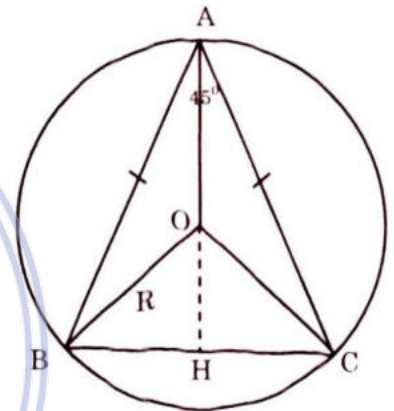
Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OAC$ ta có: OA chung,

$AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân), $OB = OC$ (bán kính).

Vậy $\triangle OAB = \triangle OAC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{CAO}$

Lại có AO nằm giữa AB và AC nên AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BAC} = 45^\circ (\text{gt}) \\ * \text{ Ta có: } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sđ} \widehat{BC} = 90^\circ$$



(Vì $\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{BC}$). Mà $\widehat{BOC}$ là góc ở tâm chắn cung $\widehat{BC}$ nên $\widehat{BOC} = 90^\circ$ (1).

Do $OB = OC$ (bán kính) nên $\triangle BOC$ cân tại O (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BOC$ là tam giác vuông cân

2. Tính diện tích tam giác ABC theo R

Ta có: $\triangle BOC$ vuông tại O nên

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \text{ (định lý Pitago)}$$

$$\Rightarrow BC = R\sqrt{2} \Rightarrow BH = R \frac{\sqrt{2}}{2};$$

AH là đường cao ứng với cạnh đáy $BC \Rightarrow AH \perp BC$ hay $OH \perp HB$.

Tam giác vuông OHB có $\widehat{OBH} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân.

$$\Rightarrow OH = BH = R \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Do đó } AH = AO + OH = R + R \frac{\sqrt{2}}{2} = R \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} R\sqrt{2} \cdot R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} R^2 (1 + \sqrt{2}) (\text{đvdt}).$$

Đề số 6

Bài 1: a) $x^2 - mx - m = 1 (*)$; $\Delta = m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -2$$

b) Ta có: $x_1 + x_2 = m$; $x_1 x_2 = -m - 1$

$$S = \frac{m^2 + 2m}{x_1^2 + x_2^2 + 2} = \frac{m^2 + 2m}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2} = \frac{m^2 + 2m}{m^2 + 2m + 4}$$

$$S = 1 - \frac{4}{(m + 1)^2 + 3} \geq 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$m = -1 \Rightarrow S = -\frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là: $-\frac{1}{3}$.

Bài 2: a) Theo giả thiết, phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (1)$ có hai nghiệm dương phân biệt, nên:

$$a \neq 0, \Delta_1 = b^2 - 4ac > 0, P_1 = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0, S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0.$$

Xét phương trình $cx^2 + bx + a = 0 (2)$.

Từ trên ta có: $c \neq 0$ và $\Delta_2 = b^2 - 4ca = \Delta_1 > 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 .

$$P_2 = x_3 x_4 = \frac{a}{c} > 0 \left(\text{do } \frac{c}{a} > 0 \right), S_2 = x_3 + x_4 = -\frac{b}{c}.$$

Nhưng $-\frac{b}{c} = \frac{-b}{a} \cdot \frac{a}{c}$, mà $\frac{-b}{a} > 0$ và $\frac{a}{c} > 0$, do đó: $S_2 > 0$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt.

b) $\sqrt{\frac{2-x}{x+4}} - 2\sqrt{\frac{x+4}{2-x}} + 1 = 0$. Điều kiện: $\Leftrightarrow -4 < x < 2$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} (t > 0), \text{ ta có } t - \frac{2}{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2) = 0$$

$$\text{Chỉ chọn } t = 1. \text{ Ta có: } t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

Nghiệm của phương trình là $x = -1$.

$$\text{c) } \sqrt{x-2008} + \sqrt{y-2009} + \sqrt{z-2010} + 3012 = \frac{1}{2}(x+y+z) (**)$$

Điều kiện: $x \geq 2008, y \geq 2009, z \geq 2010$. (**) tương đương:

$$(x-2008) - 2\sqrt{x-2008} + 1 + (y-2009) - 2\sqrt{y-2009} + 1 + (z-2010) - 2\sqrt{z-2010} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2008}-1)^2 + (\sqrt{y-2009}-1)^2 + (\sqrt{z-2010}-1)^2 = 0 \quad (***)$$

$$(***) \text{ chỉ xảy ra trong trường hợp: } \begin{cases} x-2008=1 \\ y-2009=1 \\ z-2010=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2009 \\ y=2010 \\ z=2011 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Bài 3: a) Chứng minh tam giác MPE đồng dạng với tam giác KPQ.

+ PK là phân giác góc $\widehat{QPO}$

$$\Rightarrow \widehat{MPE} = \widehat{KPQ} \quad (\alpha)$$

+ Tam giác OMN đều $\Rightarrow \widehat{EMP} = 120^\circ$

+ QK cũng là phân giác $\widehat{OQP}$

$$\widehat{QKP} = 180^\circ - (\widehat{KQP} + \widehat{KPQ})$$

$$\text{Mà } 2\widehat{KQP} + 2\widehat{KPQ} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{QKP} = 120^\circ. \text{ Do đó: } \widehat{EMP} = \widehat{QKP} \quad (\beta).$$

Từ (α) và (β) , ta có tam giác MPE đồng dạng với tam giác KPQ.

b) Chứng minh tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.

Do hai tam giác MPE và KPQ đồng dạng nên: $\widehat{MEP} = \widehat{KQP}$.

Suy ra, tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.

c) Gọi D là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh tam giác DEF là một tam giác đều: Do hai tam giác MPE và KPQ đồng dạng nên: $\frac{PM}{PK} = \frac{PE}{PQ}$.

$$\text{Suy ra: } \frac{PM}{PE} = \frac{PK}{PQ}. \text{ Ngoài ra: } \widehat{MPK} = \widehat{EPQ}.$$

Do đó, hai tam giác MPK và EPQ đồng dạng. Từ đó: $\widehat{PEQ} = \widehat{PMK} = 90^\circ$

Suy ra, D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác PQEF.

Vì vậy, tam giác DEF cân tại D. Ta có:

$$\widehat{FDP} = 2\widehat{FQD} = \widehat{OQP}; \widehat{EDQ} = 2\widehat{EPD} = \widehat{OPQ}.$$

$$\widehat{FDE} = 180^\circ - (\widehat{FDP} + \widehat{EDQ}) = \widehat{POQ} = 60^\circ$$

Từ đó, tam giác DEF là tam giác đều.

Bài 4: Viết lại: $(a-1)^2(a^2+9) = (2b+5)^2$. Suy ra a^2+9 là số chính phương.

Do $|a|^2 < a^2+9 \leq (|a|+3)^2$ nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp

$$\text{sau: } a^2+9 = (|a|+3)^2 \text{ hoặc } a^2+9 = (|a|+2)^2 \text{ hoặc } a^2+9 = (|a|+1)^2$$

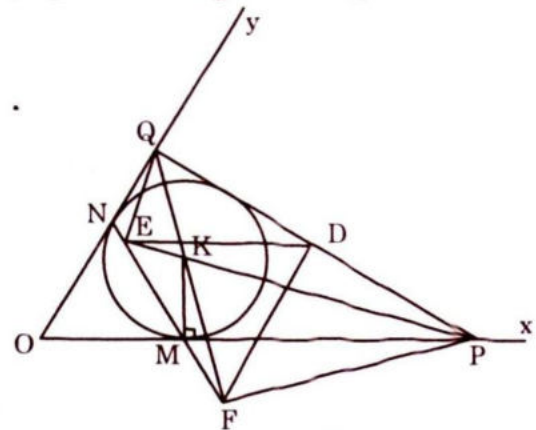
$$\text{Trường hợp 1: } a^2+9 = (|a|+3)^2 \Leftrightarrow a=0. \text{ Lúc đó } 9 = (2b+5)^2 \Leftrightarrow b=-1$$

hoặc $b=-4$

$$\text{Trường hợp 2: } a^2+9 = (|a|+2)^2 \Leftrightarrow 5 = 4|a|. \text{ Không có số nguyên } a \text{ nào}$$

thỏa

ABC
262



Trường hợp 3: $a^2 + 9 = (|a| + 1)^2 \Leftrightarrow |a| = 4 \Leftrightarrow a = 4$ hoặc $a = -4$

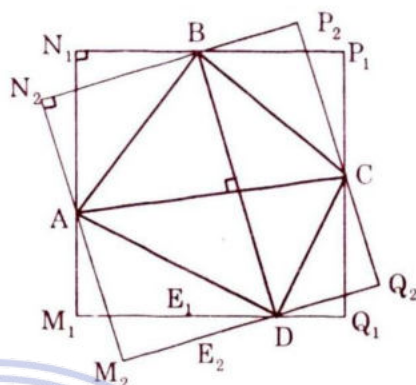
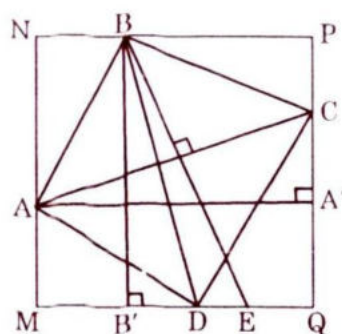
Với $a = 4$, ta có: $9.25 = (2b + 5)^2 \Leftrightarrow b = 5$ hoặc $b = -10$.

Với $a = -4$, ta có: $25.25 = (2b + 5)^2 \Leftrightarrow b = 10$ hoặc $b = -15$.

Các cặp số nguyên thỏa bài toán:

$$(a; b) = (0; -1), (0; -4), (4; 5), (4; -10), (-4; 10), (-4; -15).$$

Bài 5:



Xét MNPQ là hình vuông ngoại tiếp tứ giác ABCD. Gọi A' là hình chiếu của A lên PQ, B' là hình chiếu của B lên MQ. Từ B kẻ đường vuông góc với AC cắt MQ tại E. Ta chứng tỏ: $BE = AC$.

Nếu E trùng B' thì A' trùng C. Lúc đó: $BE = BB' = AA' = AC$.

Nếu E khác B' thì xét hai tam giác vuông BB'E và AA'C. Chúng có:

$BB' = AA'$ và $\widehat{B'BE} = \widehat{A'AC}$ nên $\triangle BB'E = \triangle AA'C$. Suy ra: $BE = AC$.

Bây giờ, xét hai hình vuông $M_1N_1P_1Q_1$ và $M_2N_2P_2Q_2$ cùng ngoại tiếp tứ giác ABCD. Từ B kẻ đường vuông góc với AC cắt M_1Q_1 tại E_1 và cắt M_2Q_2 tại E_2 . Theo chứng minh trên: $BE_1 = AC$ và $BE_2 = AC$. Suy ra E_1 và E_2 trùng nhau tại D. Vì vậy, tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD bằng nhau và vuông góc nhau.

Cuối cùng, cho tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo AC và BD bằng nhau và vuông góc nhau. Dựng đường thẳng (d) tùy ý sao cho tứ giác ABCD và (d) chỉ có một điểm chung là A. Qua C dựng đường thẳng song song với (d). Qua B và D dựng các đường thẳng vuông góc với (d). Ta có hình chữ nhật MNPQ ngoại tiếp tứ giác ABCD.

Gọi A' là hình chiếu của A lên PQ, B' là hình chiếu của B lên MQ. Từ tính chất “hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc nhau”, suy ra $AA' = BB'$ (chứng minh như phần đầu). Do đó, hình chữ nhật MNPQ là hình vuông. Vì vậy, có vô số hình vuông ngoại tiếp tứ giác ABCD.

ABC

Đề số 7**Ngày thứ nhất****Bài 1:** a. Điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có:

$$P = \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

b. Đáp số $P = 1 + \sqrt{2}$.**Bài 2:** a. $\Delta' = (2m)^2 - 2(2m^2 - 1) = 2 > 0, \forall m$, nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m .b. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).Theo định lý Viet có $x_1 + x_2 = 2m$. Do x_1 là nghiệm của phương trình (1)nên có $2x_1^2 - 4mx_1 + 2m^2 - 1 = 0$. Lại có

$$Q = (2x_1^2 - 4mx_1 + 2m^2 - 1) + 4m(x_1 + x_2)$$

$$= 4m(x_1 + x_2) = 4m \cdot 2m = 8m^2.$$

Ta có $Q > 0 \Leftrightarrow 8m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.Vậy với $m \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn yêu cầu bài toán**Bài 3:** a. Đặt $u = \sqrt{x+1}, v = \sqrt{y}$ ($u \geq 0, v \geq 0$)

$$\text{Hệ phương trình đã cho trở thành } \begin{cases} u+v=4 \\ u^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ u \cdot v=4 \end{cases}$$

Suy ra $u = 2; v = 2$, từ đó $x = 3$ và $y = 4$.Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 4)$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$1 \geq x + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ suy ra } \frac{y}{x} \geq 4. \quad (1)$$

Áp dụng (1) và bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{16x} + \frac{15y}{16x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{16x}} + \frac{15 \cdot 4}{16} = \frac{17}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$.**Bài 4.** Do tam giác ABC cân tại A nên $AM \perp BM$. Lại có $BD \perp AD$, do đó tứ giác ABMD nội tiếp. Mặt khác, NI là đường trung bình của tam giácBMD nên $NI \parallel MD$. Do đó $\widehat{KNC} = \widehat{DMC}$.

Hơn nữa $\widehat{DMC} = \widehat{KAB}$ (tính chất tứ giác nội tiếp ABMD). Suy ra

$$\widehat{KNC} = \widehat{KAB} \quad (1)$$

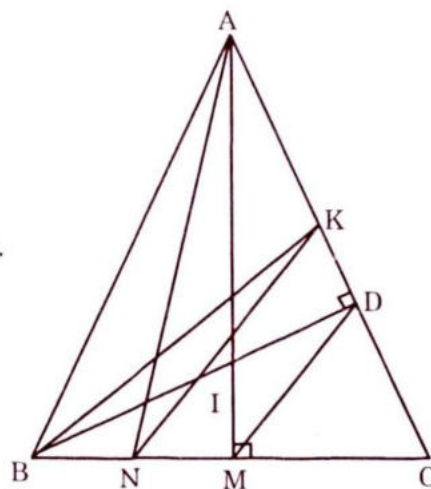
Vậy tứ giác ABNK nội tiếp.

- b) Ta có $\widehat{NKC} = \widehat{ABC}$ (tứ giác ABNK nội tiếp).
 Từ đây và từ (1) có $\Delta ABC \sim \Delta NKC$.

$$\text{Suy ra } \frac{BC}{CK} = \frac{AC}{NC}.$$

Mặt khác, dễ thấy $NC = \frac{3}{4}BC$, do đó

$$BC^2 = \frac{4}{3}BC \cdot NC = \frac{4}{3}AC \cdot CK.$$

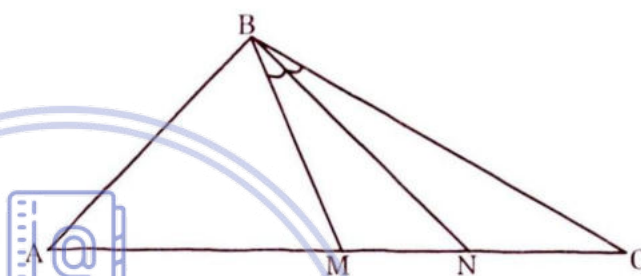


Bài 5. Do BN là tia phân giác trong góc B của tam giác BMC nên

$$\frac{BM}{BC} = \frac{NM}{NC} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Lại có } \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{BM}{BC}, \text{ suy ra}$$

BA là tia phân giác ngoài của tam giác BMC. Theo tính chất của hai đường phân giác trong và phân giác ngoài suy ra $BN \perp BA$ (đpcm).



Ngày thứ hai

Bài 6. a) Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 + x = (x^2 - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

- b) Gọi đa thức đã cho là $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$)

Từ giả thiết ta có: $e = P(0) \equiv 7$; $P(2) - P(1) + P(-2) - P(-1) = 3a \equiv 7$, do đó

$$a \equiv 7; \quad P(2) - P(1) - P(-2) - P(-1) = 3b \equiv 7, \text{ do đó } b \equiv 7;$$

$$c = P(1) + P(-1) - 2e - a \equiv 7; \quad d = P(1) - P(-1) - b \equiv 7, \text{ suy ra đpcm.}$$

Bài 7. a. Nhân phương trình thứ nhất của hệ với 6, nhân phương trình thứ hai của hệ với $19x$ rồi cộng lại được $6(xy)^3 + 19(xy)^2 + 19xy + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (xy + 1)(2xy + 3)(3xy + 2) = 0$$

* Với $xy = -1$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ được $x = 0$ (không thỏa mãn).

$$* \text{ Với } xy = -\frac{2}{3}, \text{ tìm được } (x; y) = \left(\frac{1}{3}; -2\right)$$

ABC

* Với $xy = -\frac{3}{2}$, tìm được $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$

b. Đặt A là vế trái bất đẳng thức cần chứng minh. Ta có

$$A = a - \frac{ab^2}{1+b^2} + b - \frac{bc^2}{1+c^2} + c - \frac{ca^2}{1+a^2}.$$

$$= 3 - \left(\frac{ab^2}{1+b^2} + \frac{bc^2}{1+c^2} + \frac{ca^2}{1+a^2} \right) \geq 3 - \left(\frac{ab^2}{2b} + \frac{bc^2}{2c} + \frac{ca^2}{2a} \right) \geq 3 - \frac{(a+b+c)^2}{6} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 8. a) Phản chứng. Giả sử bất kì hai hình chữ nhật nào trong chín hình chữ nhật nhỏ $H_1, H_2, \dots, H_9$ đều có diện tích phần chung nhỏ hơn $\frac{1}{9}$.

Khi đó diện tích phần H_2 không bị phủ bởi H_1 lớn hơn $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$; diện

tích phần H_3 không bị phủ bởi H_1 và H_2 lớn hơn $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$; ...; diện

tích phần H_9 không bị phủ bởi $H_1, \dots, H_8$ lớn hơn $\frac{1}{9}$. Như vậy diện tích

của hình chữ nhật lớn hơn $1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \dots + \frac{1}{9} = 5$ (vô lí).

Bài 9. a. Ta có tứ giác BNHK nội tiếp đường tròn đường kính BH ($\widehat{BKH} = \widehat{BNH} = 90^\circ$).

Gọi I là trung điểm của BH. Các tam giác KBH và KAC vuông nên $\widehat{IKH} = \widehat{IHK}$ và $\widehat{EKC} = \widehat{KCE}$. Lại có $\widehat{IHK} = \widehat{DHC}$ từ đó có $\widehat{EKC} + \widehat{HKI} = 90^\circ$. Hay $EK \perp KI$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

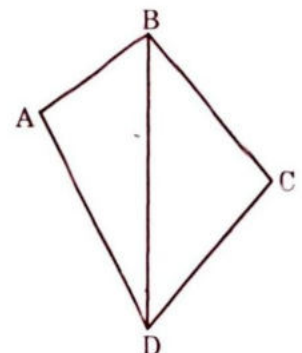
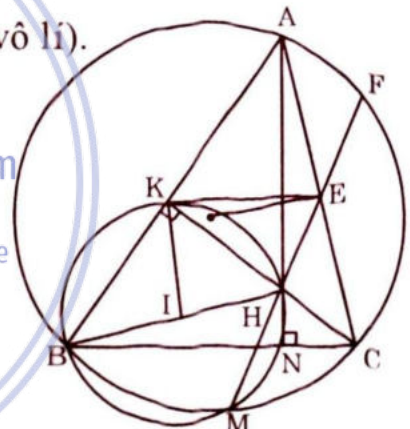
b. Kẻ đường kính BF của đường tròn (O). Dễ thấy tứ giác AHCF là hình bình hành nên E là trung điểm của HF. Theo tính chất đường trung bình ta có $OI \parallel EH$. Mặt khác $OI \perp BM$ (đường nối tâm hai đường tròn vuông góc với dây cung chung). Do đó $EH \perp BM$. Lại có $HM \perp BM$ (do BH là đường kính đường tròn (I)), suy ra E, H, M thẳng hàng và $EM \perp BM$.

Bài 10. Giả sử tứ giác lồi ABCD thỏa mãn

$$\text{Ta thấy } 2S \leq BD(AD + BC) \leq \left(\frac{AD + BC + BD}{2} \right)^2 (*)$$

$$\text{Vậy } AD + BC + BD \geq 2\sqrt{2S}.$$

Từ đó $AD + BC + BD = 2\sqrt{2S}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các đẳng thức ở (*) xảy ra, tức là khi $AD \perp BD$, $BC \perp BD$ và $AD + BC = BD$.



Dựng hình bình hành CAED ta có $\triangle BDE$ vuông cân tại B.
Do đó $AC = DE = BD\sqrt{2} = 2\sqrt{5}$.

Đề số 8

Bài 1: 1) $2(x+1) = 4 - x \Leftrightarrow 2x + 2 = 4 - x \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

2) $x^2 - 3x + 2 = 0$

Ta có $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$. Suy ra $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a} = 2$

Bài 2: 1. Ta có a, b là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 5 = -2a + b \\ -4 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 9 \\ -4 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ -4 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -3x - 1$

2. Cho hàm số $y = (2m - 1)x + m + 2$

a) Để hàm số luôn nghịch biến thì $2m - 1 < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$.

b) Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{2}{3}$.

Ta phải có $0 = (2m - 1) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + m + 2 \Rightarrow m = 8$

Bài 3: Quãng đường từ Hoài Ân đi Phù Cát dài: $100 - 30 = 70$ (km)

Gọi x (km/h) là vận tốc xe máy. Điều kiện: $x > 0$.

Vận tốc ô tô là $x + 20$ (km/h)

Thời gian xe máy đi đến Phù Cát: $\frac{70}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đi đến Phù Cát: $\frac{30}{x + 20}$ (h).

Vì xe máy đi trước ô tô 75 phút $= \frac{5}{4}$ (h) nên ta có phương trình:

$$\frac{70}{x} - \frac{30}{x + 20} = \frac{5}{4}$$

Giải phương trình trên ta được $x_1 = -60$ (loại); $x_2 = 40$ (thích hợp)

Vậy vận tốc của xe máy là 40 (km/h), vận tốc của ô tô là $40 + 20 = 60$ (km/h)

Bài 4: a) Xét $\triangle ABD$ có $BC \perp DA$ (do $\widehat{ACB} = 90^\circ$: Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn(O))

Mặt khác: $CA = CD$ (gt). BC vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên $\triangle ABD$ cân tại B.

b) Ta có tứ giác ACBE có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Do đó $\widehat{CBE} = 90^\circ$ hay $\widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 90^\circ$ (1)

ΔABD cân tại B nên có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (2)

Tương tự ΔABF cân tại B nên có $\widehat{B}_3 = \widehat{B}_4$ (3)

Từ (1); (2); (3) ta có $\widehat{DBF} = 180^\circ$

Do đó ba điểm D, B, F cùng nằm trên một đường thẳng.

- c) Từ chứng minh trên ta có $BA = BD = BF$
do đó đường tròn qua ba điểm A, D, F
nhận B làm tâm và AB làm bán kính.

Vì $OB = AB - OA > 0$ nên đường tròn đi qua 3 điểm A, D, F tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A

Bài 5: Với mọi m, n là số nguyên dương và $m > n$.

Ta có $S_m \cdot S_n = [(\sqrt{2} + 1)^m + (\sqrt{2} - 1)^m] \cdot [(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n]$

$$= (\sqrt{2} + 1)^m (\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} + 1)^m (\sqrt{2} - 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^m (\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^m (\sqrt{2} - 1)^n$$

$$= (\sqrt{2} + 1)^{m+n} + (\sqrt{2} - 1)^{m+n} + (\sqrt{2} + 1)^n (\sqrt{2} - 1)^n (\sqrt{2} + 1)^{m-n} + (\sqrt{2} - 1)^n (\sqrt{2} + 1)^n (\sqrt{2} - 1)^{m-n}$$

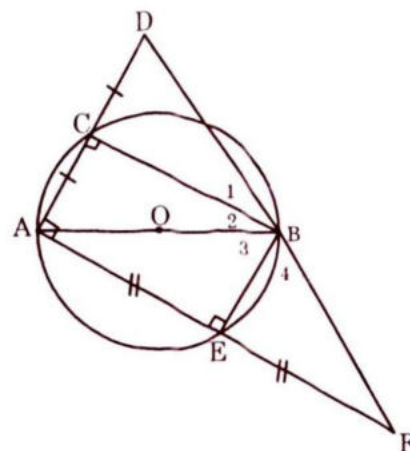
$$= (\sqrt{2} + 1)^{m+n} + (\sqrt{2} - 1)^{m+n} + 1 \cdot (\sqrt{2} + 1)^{m-n} + 1 \cdot (\sqrt{2} - 1)^{m-n} = S_{m+n} + S_{m-n}$$

Vậy $S_{m+n} + S_{m-n} = S_m \cdot S_n$ với mọi m, n là số nguyên dương và $m > n$.

Đề số 9

Bài 1: a) P xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \neq 0 \\ 1 - \sqrt{x} \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

b) Rút gọn P:
$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{1 - x} + \frac{(\sqrt{x} - 2)^2 + 3\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} + \frac{x - 4\sqrt{x} + 4 + 3\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})} + \frac{-\sqrt{x} + 4}{1 - \sqrt{x}} = \frac{4}{(1 - \sqrt{x})}$$



$$c). P > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{(1-\sqrt{x})} > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 > x \geq 0$$

Bài 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ (2+\sqrt{2})x - y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3+2\sqrt{2})x = \sqrt{2} + 1 \\ (1+\sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ (1+\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) + y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Bài 3: 1) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 6$ và parabol $y = x^2$ là nghiệm của phương trình: $x^2 = x + 6$ hay $x^2 - x - 6 = 0$.

Giải phương trình ta có $x_1 = -2; x_2 = 3$ suy ra tung độ giao điểm tương ứng là $y_1 = 4; y_2 = 9$ nên tọa độ các giao điểm là: $A(-2; 4); B(3; 9)$

2) Đồ thị hàm số $y = (m+1)x + 2m + 3$ cắt trục Oy tại điểm

$B(0; 2m+3)$ và cắt trục Ox tại điểm $A\left(-\frac{2m+3}{m+1}; 0\right)$ với $m \neq -1$.

Để $\triangle OAB$ cân thì $OA = OB \Leftrightarrow \left|-\frac{2m+3}{m+1}\right| = |2m+3| \Leftrightarrow \frac{|2m+3|}{|m+1|} = |2m+3|$

1) $2m+3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ khi đó $A \equiv B \equiv 0$ không tồn tại $\triangle OAB$

$$2) \frac{1}{|m+1|} = 1$$

$$a) m+1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$$

$$b) m+1 = -1 \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy $m = 0; m = -2$ là giá trị cần tìm

Bài 4. a) $AH \perp BC$ (gt); $\widehat{HMA} = \widehat{HNA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

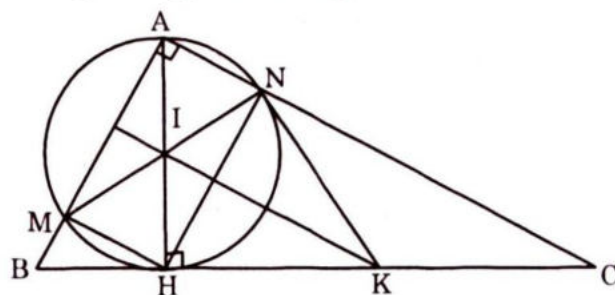
Áp dụng hệ thức cạnh và đường cao trong tam giác vuông.

Trong $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ có

$$AH^2 = AM \cdot AB = AN \cdot AC$$

Suy ra: $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ lại có góc A

chung nên $\triangle ACB \sim \triangle AMN$ (c.g.c)



- b) I là trung điểm của AH nên I là tâm của đường tròn (AH) $\Rightarrow IN = IH$;
 ΔHNC vuông tại N có K là trung điểm của HC $\Rightarrow KH = KC = KN$
 · Lại có KI chung nên $\Delta KNI = \Delta KHI$ (c.c.c)
 $\Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{KHI}$ mà $\widehat{KHI} = 90^\circ$
 nên $\widehat{KNI} = 90^\circ$ hay KN là tiếp tuyến của đường tròn (AH).
 c) Trong tam giác AHC có KI là đường trung bình nên $KI \parallel AC$ mà
 $AC \perp AB \Rightarrow KI \perp AB$; mặt khác $AH \perp BK$ nên I là trực tâm của ΔKAB .

Bài 5: Theo BĐT Bu-nhi-a-côp-xki: $P = \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) \cdot (x + y + z)$

$$= \left(\left(\frac{1}{\sqrt{16x}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{4y}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \right) \cdot \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 \right)$$

$$\geq \left(\frac{1}{\sqrt{16x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{4y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z} \right)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right)^2 = \frac{49}{16}.$$

Vậy $P_{\min} = \frac{49}{16}$ khi đó $\frac{1}{\sqrt{16x}} : \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{4y}} : \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{z}} : \sqrt{z}$ và

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}.$$

downloaadsachmienphi.com

Đề số 10

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Bài 1: 1.B 2.C 3. A 4. C 5. D 6.A 7. D 8. B

Bài 2: Câu 1: $\sqrt{(2x-1)^2} = 9 \Leftrightarrow |2x-1| = 9$

Giải phương trình trên được $x = 5$; $x = -4$.

Câu 2: $M = 2\sqrt{3} + \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = 2\sqrt{5}$

Câu 3: Điều kiện xác định của A là: $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$

$$\Leftrightarrow -(x-3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Bài 3: Câu 1: Thay $x = 2$ vào phương trình (1) ta được:

$4 + 2(3-m) + 2(m-5) = 0$. Đẳng thức trên luôn đúng với mọi m, suy ra điều phải chứng minh.

Câu 2: phương trình (1) là phương trình bậc hai. Theo chứng minh trên, phương trình luôn có nghiệm, trong đó $x_1 = 2$. Từ định lý Viet suy ra nghiệm còn lại của phương trình là $x_2 = m - 5$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi

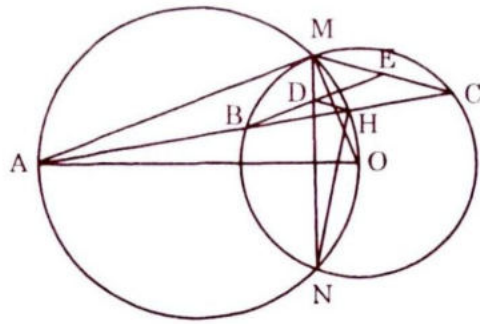
$$m - 5 = 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 6 + 2\sqrt{2}.$$

Bài 4:

Câu 1: Xét đường tròn đường kính AO có $\widehat{AMO} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AM \perp OM$. Mà OM là bán kính của đường tròn (O; R), nên AM là tiếp tuyến của đường tròn (O; R). H là trung điểm của dây BC của (O; R) và BC không đi qua tâm O nên $OH \perp BC$.

Vậy H thuộc đường tròn đường kính AO.



Câu 2: a) Xét đường tròn đường kính AO có $\widehat{AHN} = \widehat{AMN}$ (1) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AN}$). Theo giả thiết $BD \perp OM$ và $AM \perp OM$ suy ra $BD \parallel AM$ suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{BDN}$ (2) (hai góc đồng vị)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{BDN}$.

b) Theo chứng minh trên ta có $\widehat{BHN} = \widehat{BDN}$. Mặt khác, D và H cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ BN nên 4 điểm H, D, B, N cùng thuộc một đường tròn. Xét trên đường tròn này ta có $\widehat{BHD} = \widehat{BND}$ (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD). Xét trên đường tròn (O) có $\widehat{BND} = \widehat{MCB}$ (4) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM). Từ (3), (4) suy ra $\widehat{BHD} = \widehat{MCB}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị đối với hai đường thẳng DH và MC bị cắt bởi đường thẳng BC, suy ra $DH \parallel MC$.

c) Xét $\triangle DHC$ có $DH + HC > CD$ (bất đẳng thức trong tam giác)

Mà $HC = BC$ (Vì H là trung điểm của BC)

Suy ra $HB + HD > CD$ (đpcm).

Bài 5. 1: Với mọi x, y ta có $(xy - 1)^2 + 1 \geq 1$ (*) nên hệ phương trình đã cho xác định với mọi x, y. Từ phương trình đầu của hệ ta có $x + y = 2xy$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $2xy - x^2y^2 = \sqrt{(xy - 1)^2 + 1}$ (**).

Nếu hệ có nghiệm thì từ (*), (**) suy ra

$$2xy - x^2y^2 \geq 1 \Rightarrow (xy - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow xy = 1$$

Thay $xy = 1$ vào hệ đã cho ta có: $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$ Giải hệ trên được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có một nghiệm $x = y = 1$.

2: Xét $(2x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1} > (2x - 1)\sqrt{x^2 + x + 1}$ (1)

Khi thay x bởi -x ta thấy (1) không thay đổi, nên chỉ cần chứng minh (1) đúng với mọi $x \geq 0$. Với mọi x ta có

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ và } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Vậy: nếu $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ thì (1) luôn đúng. Nếu $x > \frac{1}{2}$ thì (1) tương đương

$$(2x+1)^2(x^2-x+1) > (2x-1)^2(x^2+x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + x^2 + 3x + 1 > 4x^4 + x^2 - 3x + 1 \text{ (luôn đúng với } x > \frac{1}{2})$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đề số 11

Bài 1: 1) Điều kiện: $x^2 \leq 2$. Bình phương hai vế của phương trình đã cho ta được phương trình tương đương.

$$2 - x^2 + x^2 + 8 + 2\sqrt{(2-x^2)(x^2+8)} = 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^4 - 6x^2 + 16} = 3 \Leftrightarrow x^4 + 6x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -7 \end{cases}$$

Loại nghiệm $x^2 = -7$. Nghiệm của phương trình là $x = \pm 1$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 & (1) \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21 & (2) \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 21 \Leftrightarrow (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = 21$$

$$\text{Từ đó và (1)} \Rightarrow (x^2 - xy + y^2) = 3 \quad (3)$$

$$\text{Từ đó (1) và (3)} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Bài 2: Ta có: $\begin{cases} (a^3 - 3ab^2)^2 = 19^2 & (1) \\ (b^3 - 3a^2b)^2 = 98^2 & (2) \end{cases}$

$$\text{Cộng (1) và (2) ta nhận được: } a^6 + b^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 = 19^2 + 98^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)^3 = 19^2 + 98^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt[3]{19^2 + 98^2}$$

Bài 3: Do $a, b, c \in [0, 1] \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$

$$\Rightarrow (1-a-b-c) + ab + bc + ca - abc \geq 0$$

$$\Rightarrow a + b + c - ab - bc - ca \leq 1 - abc \leq 1$$

Chú ý rằng do $a, b, c \in [0; 1]$ nên $b^2 \leq b, c^3 \leq c$

Vậy $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq a + b + c - ab - bc - ca \leq 1$

Bài 4: 1) Vì góc $\widehat{AIB} = 90^\circ$ nên khi M thay đổi (trên cung lớn AB) thì I nằm trên đường tròn cố định có đường kính AB; IJ là trung tuyến tam giác vuông MIN nên $IJ = \frac{1}{2}MN$. Do tổng 2 cung AB và MN là 180° , AB cố định nên MN có độ dài không đổi. Kéo dài JI cắt AB ở H ta có $\widehat{JIM} = \widehat{AIH} = \widehat{JMI}$ suy ra $\widehat{IAB} + \widehat{AIH} = 90^\circ$ hay $\widehat{IHA} = 90^\circ$. Đoạn JI vuông góc với AB và có độ dài không đổi. Kẻ hai đoạn AA', BB' vuông góc với AB và có độ dài bằng JI (A', B', I nằm cùng phía đối với AB) A', B' cố định. Do các tứ giác $AA'JI$ và $BB'JI$ là các hình bình hành nên $\widehat{A'JB'} = \widehat{AIB} = 90^\circ$.

Vậy J nằm trên đường tròn cố định đường kính $A'B'$.

2) Kéo dài AM một đoạn $MN = MB$ khi đó: $AN = AM + MN = AM + MB$. Chu vi của $\triangle AMB$ bằng $AB + AN$. Do AB cố định nên chu vi $\triangle AMB$ lớn nhất khi AN lớn nhất.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của cung lớn AB và cung nhỏ AB, $MP \perp MQ$ và PQ là đường kính cố định của đường tròn. Vì MQ là phân giác góc $\widehat{AMB}$ nên MP là phân giác góc $\widehat{BMN}$. Do $\triangle BMN$ là tam giác cân nên MP đồng thời là trung trực của BN $\Rightarrow PA = PB = PN \Rightarrow N$ nằm trên đường tròn cố định tâm P bán kính PA. Khi đó AN là dây cung của đường tròn này, suy ra AN lớn nhất khi AN là đường kính của đường tròn tâm P. Vậy khi M trùng với trung điểm P của cung lớn AB thì chu vi của $\triangle AMB$ lớn nhất.

Bài 5: 1) Giả sử:
$$\begin{cases} n + 26 = a^3 & (1) \\ n - 11 = b^3 & (2) \end{cases}$$
 với a và b là những số nguyên dương.

Lấy (1) trừ đi (2) ta nhận được: $a^3 - b^3 = 37$

$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 37 = 1.37$. Chú ý rằng

$$a - b < a^2 + ab + b^2 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + ab + b^2 = 37 \end{cases}$$

Thay $a = b + 1$ vào phương trình thứ 2 ta được

$$b^2 + b - 12 = 0 \Rightarrow b_1 = 3, b_2 = -4 \text{ (loại)}. \text{ Với } b = 3 \Rightarrow n = 38$$

2) Trước hết, chú ý rằng với $\forall a, b$ và $a \in [0, 1]$ ta luôn có:

$$(a - b)^2(1 - a) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab + a(a - b)^2 \quad (*)$$

Áp dụng (*) với hai số x, y và $a = z^2 \in [0, 1]$, ta được

$$x^2 + y^2 \geq 2xy + z^2(x - y)^2$$

Tương tự $y^2 + z^2 \geq 2yz + x^2(y - z)^2$ và $z^2 + x^2 \geq 2zx + y^2(z - x)^2$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều lại với nhau ta nhận được:

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx + \frac{1}{2} [x^2(y - z)^2 + y^2(z - x)^2 + z^2(x - y)^2]$$

$$\Rightarrow P \leq 1. \text{ Vậy } P_{\max} = 1, \text{ đạt được khi } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Đề số 12

Bài 1: Nếu $x = 0$ thì $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ phương trình.

- Nếu $x \neq 0$ thì khi đó $y, z \neq 0$, hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{2} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{6} \\ \frac{z+x}{zx} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6}$$

$$\text{Từ đó } \frac{1}{x} = 1, \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y; z)$ là $(0; 0; 0)$ và $(1; 2; 3)$.

Bài 2: Gọi x và y theo thứ tự là số cầu thủ của đội A và đội B ($x, y \in \mathbb{N}^*, y$ lẻ).

Số trận đấu là: $xy = 4(x + y) \Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 16$

Suy ra $x - 4$ và $y - 4$ là các ước số của 16. Do y lẻ nên

$y - 4 = 1$, hay $y = 5$. Từ đó tìm được $x = 20$.

Vậy số cầu thủ của đội A là 20 và số cầu thủ của đội B là 5.

Bài 3: 1. Ta có $\triangle ACM$ đồng dạng với $\triangle DCA$ (vì $\widehat{CAM} = \widehat{CDA}$ và $\widehat{ACD}$ chung)

$$\text{Suy ra } \frac{AC}{DC} = \frac{CM}{CA} \text{ hay } AC^2 = CM \cdot CD.$$

2. Vẽ đường kính CE. Vì $\angle CAM = \angle CDA$ nên AC là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADM$. Do $AC \perp AE$, nên tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADM$ nằm trên đường thẳng cố định AE.

3. Tương tự phần 2, tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDM$ thuộc đường thẳng BE. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADM và BDM. Kẻ $O_1H \perp AB, O_2K \perp AB$. Khi đó, H và K lần lượt là trung điểm của AM và MB. Suy ra $R_1 = O_1A$ và $R_2 = O_2B$.

$$\text{Kẻ } O_1N \perp CE \text{ thì } O_1N = HI = AI - AH = \frac{1}{2}(AB - AM) = \frac{1}{2}BM = KB.$$

$$\text{Vậy } \triangle ENO_1 = \triangle O_2KB \Rightarrow R_2 = O_2B = O_1E, \text{ suy ra } R_1 + R_2 = AE$$

Bài 4: Nối A với B, từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt trục hoành tại E. Gọi I là trung điểm của OE. Ta thấy $S_{AOI} = S_{AIE}$, $S_{EAB} = S_{CAB}$ nên $S_{AIE} = S_{AIBC}$. Từ đó AI chính là đường thẳng (d) đi qua A và chia tứ giác AOBC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Ta viết phương trình đường thẳng đi qua A, B. Đường thẳng này có dạng: $y = ax + b$, vì nó đi qua $A(0;3)$ nên $b = 3$, đi qua $B(4;0)$, từ đó tính được $a = -\frac{3}{4}$. Đường thẳng đi qua $C\left(5; \frac{3}{5}\right)$ và song song với AB nên phương trình có dạng $y = -\frac{3}{4}x + n$. Thay tọa độ C và ta có $n = \frac{9}{2}$. Đường thẳng này cắt trục Ox tại $E(6;0)$. Vậy trung điểm I của OE có tọa độ $I(3;0)$. Điều này chứng tỏ I nằm giữa O và B. Đường thẳng (d) đi qua A và I có phương trình là $y = -x + 3$.

Bài 5: Đặt $x^3 = \frac{a}{b}$, $y^3 = \frac{b}{c}$, $z^3 = \frac{c}{a}$. Từ giả thiết suy ra

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

Nếu $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ thì

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow a = b = c$$

Do đó $abc = a^3$ là lập phương của một số nguyên.

Nếu $(x + y + z) = 0$ thì $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} = 0$.

Nhân 2 vế lần lượt với $a\sqrt[3]{b^2c}$ và $b\sqrt[3]{ac^2}$ ta được

$$a^3\sqrt[3]{abc} + ab + \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 0 \text{ và } b^3\sqrt[3]{abc} + bc + \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 0.$$

Trừ vế theo vế hai hệ thức trên, ta được: $(a - b)\sqrt[3]{abc} = b(c - a)$.

Nếu $a = b$ thì $a = b = c \Rightarrow x = y = z = 1$ (không thỏa mãn $x + y + z = 0$).

Vậy $a \neq b$. Do đó $abc = \left(\frac{b(c - a)}{a - b}\right)^3$ là lập phương số hữu tỷ. Nhưng do a, b, c là các số nguyên nên khi đó abc là lập phương của số nguyên.

Đề số 13

Bài 1: 1. Ta có $\sqrt{\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{2}. \text{ Thế vào A có kết quả } A = 2^{2008}.$$

2. Với hai số nguyên bất kì sai kém nhau ít nhất một đơn vị, thành thử

$$(I) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 4 \leq ab + 3b + 2c$$

$$\text{Hay } \left(a^2 - ab + \frac{b^2}{4} \right) + \left(\frac{3b^2}{4} - 3b + 3 \right) + (c^2 - 2c + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{b}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{b}{2} - 1 \right)^2 + (c - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c - 1 = 0 \\ \frac{b}{2} - 1 = 0 \\ a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Bài 2: 1. Chú ý: $3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$ chia hết cho 91 nên chia hết cho 7 và 13;

$$\text{Mà } A = (3^8 - 3^2) + (3^6 - 1) + (2^{2004} - 1) + 3^2 + 1 + 1$$

$$= 3^2(3^6 - 1) + (3^6 - 1) + ((3^6)^{335} - 1) + 11.$$

Vậy $A - 11$ chia hết cho 91.

2. Nhận xét: $(7 + 4\sqrt{3}) + (7 - 4\sqrt{3}) = 14$ và $(7 + 4\sqrt{3}) \cdot (7 - 4\sqrt{3}) = 1$

Nên $S = (7 + 4\sqrt{3})^3 + (7 - 4\sqrt{3})^3 = 2702 \in \mathbb{Z}$. Mặt khác:

$$(y - 4\sqrt{3})^3 = \left(\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} \right)^3 < \left(\frac{1}{11} \right)^3 < \left(\frac{1}{10} \right)^3$$

$$\Rightarrow S - \left(\frac{1}{10} \right)^3 < (7 + 4\sqrt{3})^3 < S \Leftrightarrow 2702 - \frac{1}{1000} < (7 + 4\sqrt{3})^3 < 2702$$

$$\Leftrightarrow 2701,999 < (7 + 4\sqrt{3})^3 < 2702. \text{ Điều phải chứng minh.}$$

Bài 3: 1. + Điều kiện $x \neq m$ và $x \neq 1$ (*)

+ Ta có phương trình đã cho (1)

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = (x + 1)(x - m) \Leftrightarrow mx = 2 - m \quad (2)$$

Nếu $m \neq 0$ thì (2) có nghiệm duy nhất $x = \frac{2 - m}{m}$

+ Để (1) có nghiệm duy nhất thì (2) phải có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện (*), tức là: $m \neq 0$, $\frac{2 - m}{m} \neq m$ và $\frac{2 - m}{m} \neq 1$

+ Từ đó suy ra $m \neq 0$, $m \neq 1$ và $m \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

2. Vì x, y, z nguyên dương và vai trò như nhau nên có thể giả sử $x \geq y \geq z$.

Bình phương hai vế của phương trình đã cho:

$$x + 2\sqrt{3} = y + z + 2\sqrt{yz} \quad (*)$$

$$\Rightarrow (x - y - z)^2 + 4\sqrt{3}(x - y - z) = 4yz - 12$$

Vì là $\sqrt{3}$ số vô tỉ nên từ (*) suy ra $x - y - z = 0 \Leftrightarrow 4yz - 12 = 0$ hay $yz = 3$

hay $y = z = 1$ và $x = 4$.

Phương trình có nghiệm là: (4, 3, 1) và (4, 1, 3).

Bài 4: Giả sử $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^{4014}$. Khi đó:

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{4014}$$

$$= \underbrace{(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{4014})}_m + \underbrace{(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{4013})}_n = m + n$$

$$f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{4014}$$

$$= (a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{4014}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{4013}) = m - n$$

Mà: $f(1) = 3^{2007}$; $f(-1) = 1$. Suy ra $\begin{cases} m + n = 3^{2007} \\ m - n = 1 \end{cases}$ hay

$$m = \frac{1}{3}(3^{2007} + 1); n = \frac{1}{2}(3^{2007} - 1) \text{ mà } m \text{ chia hết cho } 4 \text{ vậy } m \text{ là số chẵn,}$$

$$n = m - 1 \text{ là số lẻ.}$$

Bài 5:

1. Chứng minh được OM là đường trung bình của hình thang vuông ABCD, nên MD = MC.

+ Theo tính chất độ dài đường trung bình của hình thang suy ra được:

$$AD + BC = 2OM = AB \text{ (không đổi).}$$

2. + Kẻ $MH \perp AB$, chứng minh được: $MC = MD = MH$.

+ Chứng minh được: $S_{ADM} = S_{AHM}$; $S_{MHB} = S_{MCB}$ suy ra: $\frac{S_{MAB}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$

3. a. Chứng minh: kẻ $AN \parallel IM$ cắt BM kéo dài tại N. Khi đó

$$\frac{MI}{NA} = \frac{BM}{BN} \Rightarrow MI = \frac{NA \cdot BM}{BN} \quad (*)$$

Trong tam giác AMN có $AN < MA + MN = 2 \cdot MA$, từ (*) có:

$$MI < \frac{2 \cdot MA \cdot MB}{MA + MB} \Rightarrow \frac{1}{MI} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} \right). \text{ đpcm.}$$

b. Phân tích: - Giả sử $\triangle MAB$ dựng được. Ta có $AB = a$, $MI = m$ và đặt

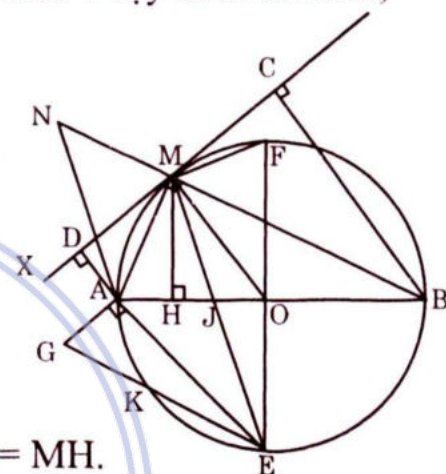
$EI = x$. Khi đó $ME = m + x$.

+ Vì $\triangle EOI \sim \triangle EMF$, nên

$$x(x + m) = \frac{a}{2} \cdot a \Leftrightarrow x^2 + mx = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{a^2}{2}$$

+ Như thế $x + \frac{m}{2}$ là cạnh huyền của một tam giác vuông mà hai cạnh góc

vuông bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $\frac{m}{2}$. Suy ra cách dựng sau:



ABC

Cách dựng:

- Dựng $\triangle EAG$ vuông ở A có $AG = \frac{m}{2}$
- Trên GE dựng điểm K sao cho $GK = \frac{m}{2}$, ta được đoạn $EK = x$.
- Dựng đường tròn tâm E bán kính EK cắt AB tại I.
- Nối EI cắt đường tròn (O) tại M. $\triangle MAB$ là tam giác phải dựng.

Đề số 14

Bài 1: 1. Điều kiện xác định của biểu thức A là $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$A = \frac{x\sqrt{x} + 1 - (x-1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \frac{x\sqrt{x} + 1 - x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x - 1}{x-1} = \frac{x + \sqrt{x}}{x-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

2. Khi $x = \frac{9}{4}$, ta có: $A = 3$.

3. Trong điều kiện xác định thì $A < 1$ trở thành $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < 1$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow x < 1$$

Kết hợp với điều kiện ta có kết quả là: $0 \leq x < 1$

Bài 2: 1. Khi $m = 2$, phương trình trở thành: $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 16 = 9. \text{ Phương trình có hai nghiệm là } x_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = 2.$$

Ta có: $\Delta = (m+3)^2 - 8m = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+3}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{2} \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} x_1 x_2, \text{ trở thành } \frac{m+3}{2} = \frac{5m}{4} \Leftrightarrow m = 2. \text{ Vậy } m = 2.$$

$$3. \text{ Ta có: } x_1 = \frac{m+3-\sqrt{(m-1)^2+8}}{4}; x_2 = \frac{m+3+\sqrt{(m-1)^2+8}}{4}$$

$$P = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{(m-1)^2+8}}{2} \geq \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}, \text{ dấu "=" xảy ra khi } m = 1.$$

Vậy $\text{Min}P = \sqrt{2}$, khi $m = 1$.

Bài 3: Gọi chiều rộng, chiều dài của thửa ruộng tương ứng là x, y . Điều kiện $x > 0, y > 0$, đơn vị của x, y là mét. Vì chiều rộng ngắn hơn chiều dài 45m nên $y - x = 45$ (1). Chiều dài giảm 2 lần, chiều rộng tăng 3 lần ta được hình chữ nhật có hai cạnh là $\frac{y}{2}$ và $3x$.

Theo giả thiết chu vi không thay đổi nên: $2(x + y) = 2\left(3x + \frac{y}{2}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} y - x = 45 \\ 2(x + y) = 2\left(3x + \frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta có: $\begin{cases} x = 15(\text{m}) \\ y = 60(\text{m}) \end{cases}$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy diện tích của thửa ruộng là $S = xy = 900(\text{cm}^2)$

Bài 4: 1. Vì CD là đường kính, nên tam giác AEF là tam giác vuông tại A. Vì EF là tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại B nên AB là đường cao của tam giác vuông AEF.

Theo hệ thức trong tam giác vuông ta có: $BE \cdot BF = AB^2$

Vì AB là đường kính nên $BE \cdot BF = 4R^2$.

$$2. \widehat{ADC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AC} = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{ACB} - \text{sđ} \widehat{CB})$$

$$\widehat{AEF} = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{ADB} - \text{sđ} \widehat{CB}) = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{ACB} - \text{sđ} \widehat{CB}). \text{ Suy ra}$$

$$\widehat{ADC} = \widehat{AEF} \Rightarrow \widehat{CDF} + \widehat{CEF} = 180^\circ$$

Vậy tứ giác CEFD nội tiếp được trong đường tròn.

3. Gọi K là trung điểm của EF, từ K kẻ đường thẳng $Kt \perp EF$, từ O kẻ đường thẳng $Ox \perp CD$. Khi CD không trùng, không vuông góc với AB thì Kt cắt Ox tại I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác CEFD.

Vì AK là trung tuyến của tam giác vuông AEF nên $\widehat{KAF} = \widehat{AFE}$, kết hợp với $\widehat{ADC} = \widehat{AEF}$ và $\widehat{AFE} + \widehat{AEF} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp CD$.

Suy ra tứ giác AKIO là hình bình hành, do đó $KI = AO = R$ không đổi và I khác phải với điểm O so với đường thẳng cố định EF. Suy ra I nằm trên đường thẳng d cố định ($d \parallel EF$, d cách EF một khoảng bằng R không đổi và d thuộc nửa mặt phẳng bờ EF không chứa điểm O).

Trong trường hợp $CD \perp AB$ thì tâm I là giao điểm của đường thẳng AB và d. Vậy tâm I nằm trên một đường thẳng d cố định.

Đề số 15

Bài 1: 1. Dễ thấy $\Delta = 9 > 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt khi đó phương trình có 2 nghiệm $u = m, v = m - 3$.

2. Theo ý 1 ta có: $u^2 + v^2 = 17 \Leftrightarrow m^2 + (m - 3)^2 = 17$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - m - 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \vee m = 4.$$

Bài 2: 1. Đặt $u = x + y, v = xy$. Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2 + 2u - 2v = 23 \\ u + v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 2u - 2(11 - u) = 23 \\ v = 11 - u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 4u - 45 = 0 \\ v = 11 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -9 \\ v = 20 \end{cases}$$

Giải từng hệ ta được $\begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (2, 3) \vee (3, 2)$

$$\begin{cases} u = -9 \\ v = 20 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-4, -5) \vee (-5, -4)$$

Vậy hệ có 4 nghiệm $(2, 3); (3, 2); (-4, -5); (-5, -4)$.

2. Sử dụng BĐT Côsi cho ba số dương ta có: $P = (x + 8y) + 8y + \frac{8}{8y(x - 8y)} \geq 6$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x + 8y = 8y \\ 8y = \frac{1}{y(x - 8y)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16y \\ y^3 = \frac{1}{64} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4; y = \frac{1}{4}$

Do vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là 6.

Bài 3: 1. Vì IE là đường kính của (O_1, R_2) nên $\widehat{IPE} = 90^\circ$

Tương tự $\widehat{IPF} = 90^\circ$. Từ giả thiết ta có: E, F nằm về hai phía của P.

Suy ra $\widehat{EPF} = 180^\circ$, hay E, P, F thẳng hàng.

2. Ta có: $\Delta O_1IO_2 = \Delta O_1PO_2$ (c.c.c) nên $\widehat{O_1IO_2} = \widehat{O_1PO_2}$ (1)

Mặt khác, O_1K, O_2K là các đường trung bình của tam giác IEF nên

IO_1KO_2 là hình bình hành. Do đó $\widehat{O_1IO_2} = \widehat{O_1KO_2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{O_1PO_2} = \widehat{O_1KO_2}$, hay O_1PKO_2 là tứ giác nội tiếp.

3. IA cắt (O_2, R_2) tại điểm A' (khác I).

Ta có tứ giác IBFA' là hình chữ nhật, nên $BF = IA'$ (3).

Mặt khác, $IK \parallel AE$ và A'F, K là trung điểm của EF nên I là trung điểm của AA'. Hay là $IA = IA'$. (4). Từ (3) và (4) suy ra $IA = BF$.