



BÙI VĂN TUYÊN
TRỊNH HOÀI DƯƠNG
NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC
VÀ PHƯƠNG PHÁP
GIẢI BÀI TẬP
TOÁN 9

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BÙI VĂN TUYẾN – TRỊNH HOÀI DƯƠNG – NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

**TRỌNG TÂM KIẾN THỨC
VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP
TOÁN 9**

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến !

Các em đi học, ai cũng mong muốn mình học giỏi trong đó có môn Toán. Muốn vậy, các em cần nắm vững lí thuyết và biết cách vận dụng để giải bài tập. Lí thuyết thì nhiều và rộng nên cần biết chọn lọc đâu là vấn đề cơ bản, trọng tâm để học cho kĩ và ghi nhớ.

Bài tập có nhiều loại, vô cùng phong phú và đa dạng nên cần phân loại các dạng và đưa ra phương pháp giải của từng dạng ấy. Ngoài ra một điều quan trọng nữa là phải biết cách suy luận khi giải toán.

Cuốn sách này được biên soạn nhằm đáp ứng các yêu cầu trên đây của các em học sinh.

Sách được viết theo sát các chương và bài của sách giáo khoa. Mỗi bài gồm ba phần :

A. Trọng tâm kiến thức

Phần này tóm tắt các kiến thức cơ bản, trọng tâm của bài. Người ta thường nói "Có bột mới gột nên hồ", bột ở đây là các kiến thức cơ bản, trọng tâm của bài. Có nắm vững được thì mới có cơ sở để giải bài tập.

B. Các dạng bài tập và phương pháp giải

Quá trình "gột nên hồ" chính là quá trình luyện tập.

Dựa vào trọng tâm kiến thức đã nêu ở trên, các tác giả đã đưa ra các dạng bài tập để các em luyện giải.

Trong mỗi dạng có nêu ngắn gọn phương pháp giải và nhiều ví dụ minh họa. Điều đó giúp các em kinh nghiệm giải bài tập, định hướng được cách giải, các bước cần làm rồi thực hiện theo các bước đó.

Các bài toán trong mỗi ví dụ được lựa chọn là những bài tập tiêu biểu, đơn giản nhưng không tầm thường, chứa đựng nhiều kiến thức, kĩ năng và phương pháp suy luận mà chương trình đòi hỏi.

C. Bài tập tự luyện

Phần này gồm một số bài tập, có loại trung bình, có loại khó, giúp các em tự kiểm tra, đánh giá mức độ thành thạo của mình. Các em hãy cố gắng tự giải. Nếu gặp khó khăn có thể xem lời giải hoặc hướng dẫn ở cuối bài. Các tác giả mong rằng cuốn sách này là một tài liệu có ích giúp các em tự học, tự đọc có kết quả.

Cuốn sách cũng cung cấp cho các thầy giáo, cô giáo những tư liệu tham khảo để chọn bài cho các tiết luyện tập, bồi dưỡng học sinh.

Các bậc phụ huynh cũng có thể dùng cuốn sách này để hướng dẫn con em học tập.

Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc cho cuốn sách.

Các ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, quận Đống Đa, Hà Nội.

Xin chân thành cảm ơn.

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I

CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

§1. CĂN BẬC HAI

§2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Căn bậc hai số học

Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là *căn bậc hai số học* của a .

Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.

Với $a \geq 0$, ta có :

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a. \end{cases}$$

Với hai số a và b không âm, ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2. Căn thức bậc hai

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là *căn thức bậc hai* của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.

$\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) khi A lấy giá trị không âm.

Ta có
$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM CĂN BẬC HAI SỐ HỌC CỦA MỘT SỐ

Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa căn bậc hai số học của một số không âm :

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai số học rồi tìm căn bậc hai của :

a) 121 ; b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$.

Giải

a) Ta có $\sqrt{121} = 11$ vì $11 \geq 0$ và $11^2 = 121$.

Do đó số 121 có hai căn bậc hai là 11 và -11.

b) $\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}$ vì $\frac{2}{5} \geq 0$ và $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2$.

Do đó số $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ có hai căn bậc hai là $\frac{2}{5}$ và $-\frac{2}{5}$.

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức : $\sqrt{0,09} + 7.\sqrt{0,36} - 3.\sqrt{2,25}$.

Giải

Ta có $\sqrt{0,09} + 7.\sqrt{0,36} - 3.\sqrt{2,25}$

$$= 0,3 + 7.0,6 - 3.1,5 = 0,3 + 4,2 - 4,5 = 0.$$

Ví dụ 3. Giá trị của biểu thức sau là số vô tỉ hay hữu tỉ : $\sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right).18}$?

Giải

$$\sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right).18} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right).18}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) \cdot 18} = \sqrt{9} = 3.$$

Vậy giá trị của biểu thức đã cho là một số hữu tỉ, hơn nữa còn là một số tự nhiên.

Dạng 2. SO SÁNH CÁC CĂN BẬC HAI SỐ HỌC

Phương pháp giải

Dựa vào tính chất : Nếu $a, b \geq 0$ thì $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ví dụ 1. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh 8 và $\sqrt{65}$.

Giải

Cách 1 : Ta có $8 = \sqrt{64}$. Vì $\sqrt{64} < \sqrt{65}$ nên $8 < \sqrt{65}$.

Cách 2 : Vì $8^2 = 64$; $(\sqrt{65})^2 = 65$

nên $8^2 < (\sqrt{65})^2$, suy ra $8 < \sqrt{65}$.

Cách giải này dựa vào tính chất : Nếu $a, b > 0$ và $a^2 < b^2$ thì $a < b$.

Như vậy, để so sánh hai số dương ta có thể so sánh các bình phương của chúng.

Ví dụ 2. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh $\sqrt{15} - 1$ và $\sqrt{10}$.

Giải

Ta có $\sqrt{15} - 1 < \sqrt{16} - 1 = 4 - 1 = 3$,

$\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3$.

Vậy $\sqrt{15} - 1 < \sqrt{10}$.

Ví dụ 3. Với $a < 0$ thì số nào lớn hơn trong hai số $\sqrt{-a}$ và $\sqrt{-2a}$?

Giải

Ta có $-1 > -2$ nên $-a < -2a$ (vì $a < 0$).

Do đó $\sqrt{-a} < \sqrt{-2a}$.

Dạng 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

Với $a \geq 0$:

- $x^2 = a$ khi $x = \pm\sqrt{a}$.
- $\sqrt{x} = a$ khi $x = a^2$.
- $\sqrt{x} < a$ khi $0 \leq x < a^2$.

Ví dụ 1. Giải phương trình : $3x^2 = 0,75$.

Giải

Ta có $3x^2 = 0,75 \Leftrightarrow x^2 = 0,25$.

Do đó $x = \pm\sqrt{0,25} = \pm 0,5$.

Ví dụ 2. Giải phương trình : $2\sqrt{3x} = 12$.

Giải

ĐKXĐ : $x \geq 0$.

Ta có : $2\sqrt{3x} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 6 \Leftrightarrow 3x = 36 \Leftrightarrow x = 12$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 3. Tìm số x không âm, biết $\frac{1}{2}\sqrt{5x} < 10$.

Giải

Với $x \geq 0$ ta có : $\frac{1}{2}\sqrt{5x} < 10 \Leftrightarrow \sqrt{5x} < 20$

$\Leftrightarrow 5x < 400 \Leftrightarrow x < 80$.

Vậy $0 \leq x < 80$.

Ví dụ 4. Tính tổng các giá trị của x thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{x^2 + 25} = 13$.

Giải

Ta có $\sqrt{x^2 + 25} = 13$

$\Leftrightarrow x^2 + 25 = 169$

$\Leftrightarrow x^2 = 169 - 25$

$$\Leftrightarrow x^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 12.$$

Vậy tổng các giá trị của x thỏa mãn đẳng thức đã cho là $(-12) + 12 = 0$.

Dạng 4. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ $\sqrt{A}$ CÓ NGHĨA

Phương pháp giải

- $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$;
- $\frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa khi $A > 0$.

Ví dụ 1. Tìm x để căn thức $\sqrt{5-2x}$ có nghĩa.

Giải

$$\sqrt{5-2x} \text{ có nghĩa khi } 5-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 2. Tìm x để căn thức $\sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}}$ có nghĩa.

Giải

$$\sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}} \text{ có nghĩa khi } \sqrt{\frac{1}{(x-2)^2}} \text{ có nghĩa.}$$

Điều đó xảy ra khi $(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Ví dụ 3. Với giá trị nào của x thì biểu thức $\sqrt{25-x^2}$ có nghĩa ?

Giải

$$\begin{aligned} \sqrt{25-x^2} \text{ có nghĩa khi } 25-x^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -x^2 &\geq -25 \\ \Leftrightarrow x^2 &\leq 25 \\ \Leftrightarrow |x| &\leq 5 \\ \Leftrightarrow -5 &\leq x \leq 5. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tìm các giá trị của x để biểu thức $\sqrt{\frac{1}{x^2-100}}$ có nghĩa.

Giải

$$\sqrt{\frac{1}{x^2-100}} \text{ có nghĩa khi } x^2 - 100 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 100$$

$$\Leftrightarrow |x| > 10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 10 \\ x < -10. \end{cases}$$

Ví dụ 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}$ có nghĩa ?

Giải

$$M \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của x để biểu thức M có nghĩa.

Dạng 5. RÚT GỌN BIỂU THỨC DẠNG $\sqrt{A^2}$

Phương pháp giải

Vận dụng hằng đẳng thức :

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}}$.

Giải

$$A = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|.$$

Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $A = x - \frac{1}{2}$;

Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $A = \frac{1}{2} - x$.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{x^4} + \sqrt{x^6}$.

Giải

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{x^4} + \sqrt{x^6} = \sqrt{(x^2)^2} + \sqrt{(x^3)^2} \\ &= |x^2| + |x^3| = x^2 + |x^3|. \end{aligned}$$

Nếu $x \geq 0$ thì $B = x^2 + x^3$;

Nếu $x < 0$ thì $B = x^2 - x^3$.

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức $C = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

Giải

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} \\ &= |\sqrt{2}-1| - |2-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 - (2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-3. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3$.

Giải

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3 \\ &= \sqrt{(2x-1)^2} + 3 = |2x-1| + 3 \geq 3 \text{ với mọi } x. \end{aligned}$$

Vậy $\min D = 3$ khi $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Tìm x , biết $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 7x = 13$.

Giải

Ta có $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 7x = 13$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} + 7x = 13$$

$$\Leftrightarrow |x-3| + 7x = 13. \quad (1)$$

Nếu $x \geq 3$ thì $|x-3| = x-3$. Khi đó (1) trở thành

$$x-3+7x=13 \Leftrightarrow 8x=16 \Leftrightarrow x=2 \text{ (không thuộc khoảng đang xét).}$$

Nếu $x < 3$ thì $|x-3| = 3-x$. Khi đó (1) trở thành

$$3-x+7x=13 \Leftrightarrow 6x=10 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3} \text{ (thuộc khoảng đang xét).}$$

Vậy giá trị của x thỏa mãn đẳng thức đã cho là $x = \frac{5}{3}$.

Ví dụ 6. Cho biểu thức : $P = 3x - \sqrt{x^2 - 10x + 25}$.

- Rút gọn biểu thức P ;
- Tính giá trị của P khi $x = 2$.

Giải

$$\text{a) } P = 3x - \sqrt{x^2 - 10x + 25}$$

$$= 3x - \sqrt{(x-5)^2}$$

$$= 3x - |x-5|.$$

- Nếu $x \geq 5$ thì $P = 3x - (x-5) = 2x + 5$;
- Nếu $x < 5$ thì $P = 3x + (x-5) = 4x - 5$.

b) Khi $x = 2 < 5$ thì giá trị của biểu thức P là :

$$P = 4 \cdot 2 - 5 = 3.$$

Lưu ý : Nếu bạn thay $x = 2$ vào biểu thức $2x + 5$ để tính giá trị của P thì bạn sai lầm vì biểu thức $P = 2x + 5$ khi $x \geq 5$.

Ví dụ 7. Cho biểu thức : $Q = 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

- Rút gọn biểu thức Q ;
- Tìm các giá trị của x để $Q = 7$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } Q &= 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 1} \\ &= 2x - \sqrt{(x+1)^2} \\ &= 2x - |x+1|. \end{aligned}$$

- Nếu $x \geq -1$ thì $Q = 2x - (x+1) = x - 1$;

- Nếu $x < -1$ thì $Q = 2x + (x+1) = 3x + 1$.

b) Ta phải xét hai trường hợp :

- $Q = 7 \Leftrightarrow x - 1 = 7 \Leftrightarrow x = 8$ (thỏa mãn $x \geq -1$) ;

- $Q = 7 \Leftrightarrow 3x + 1 = 7 \Leftrightarrow x = 2$ (không thỏa mãn điều kiện $x < -1$).

Vậy $Q = 7$ khi $x = 8$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh :

a) $\sqrt{26} + 3$ và $\sqrt{63}$; b) $\frac{1}{2}$ và $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

2. Tìm x, biết :

a) $5x^2 = 80$; b) $2\sqrt{x} = 1$; c) $\sqrt{3x} \leq 6$.

3. Tìm x để các căn thức bậc hai sau có nghĩa :

a) $\sqrt{\frac{2}{9-x}}$; b) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$; c*) $\sqrt{x^2 - 4x}$.

4. Tìm x để các biểu thức sau có nghĩa :

a) $\sqrt{9-x^2}$; b) $\sqrt{\frac{1}{x^2-4}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

5. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}$; b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; c) $3x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

6. Giải phương trình

a) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 2$; b) $\sqrt{x^2} = 3x - 2$; c) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = x + 7$.

7*. Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x} > x$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $\sqrt{26} + 3 > \sqrt{63}$; b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2} < \frac{1}{2}$.

2. a) $x = \pm 4$; b) $x = \frac{1}{4}$; c) $0 \leq x \leq 12$.

3. a) $x < 9$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) $x \geq 4$ hoặc $x \leq 0$.

4. a) $-3 \leq x \leq 3$; b) $x > 2$ hoặc $x < -2$; c) $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

5. a) $\sqrt{10} - 3$; b) $\sqrt{5} - 2$; c) $\begin{cases} 2x+1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 4x-1 & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$

6. a) $x = 3$ hoặc $x = 7$; b) $x = 1$; c) $x \in \left\{ 10; -\frac{4}{3} \right\}$.

7*. $\sqrt{x} > x$ (1). Điều kiện : $x > 0$. Khi đó

(1) $\Leftrightarrow x > x^2$ (do hai vế của (1) đều dương)

$\Leftrightarrow x - x^2 > 0$

$\Leftrightarrow x(1 - x) > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

§3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lí

Với hai số a và b không âm, ta có

$$\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}.$$

2. Áp dụng

Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

3. Chú ý

Với hai biểu thức A và B không âm, ta có $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ và ngược lại $\sqrt{A}.\sqrt{B} = \sqrt{A.B}$. Đặc biệt, khi $A \geq 0$, ta có

$$(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. KHAI PHƯƠNG MỘT TÍCH

Phương pháp giải

Dựa vào quy tắc khai phương một tích :

$$\text{Với } a, b \geq 0 \text{ thì } \sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}.$$

Ví dụ 1. Tính

a) $\sqrt{12.1.160}$;

b) $\sqrt{2500.4.9.0,9}$.

Giải

a) $\sqrt{12.1.160} = \sqrt{121.16} = \sqrt{121}.\sqrt{16} = 11.4 = 44$.

b) $\sqrt{2500.4.9.0,9} = \sqrt{25.49.9} = \sqrt{25}.\sqrt{49}.\sqrt{9} = 5.7.3 = 105$.

Ví dụ 2. Tính

$$\text{a) } \sqrt{41^2 - 40^2} ; \quad \text{b) } \sqrt{81.6,25 - 2,25.81}.$$

Giải

$$\text{a) } \sqrt{41^2 - 40^2} = \sqrt{(41-40)(41+40)} = \sqrt{1.81} = 1.9 = 9.$$

$$\text{b) } \sqrt{81.6,25 - 2,25.81} = \sqrt{81.(6,25 - 2,25)} = \sqrt{81}.\sqrt{4} = 9.2 = 18.$$

Ví dụ 3. Đẳng thức $\sqrt{x(1-y)} = \sqrt{x}.\sqrt{1-y}$ đúng với những giá trị nào của x và y ?***Giải***

Theo định lí khai phương một tích thì

$$\sqrt{x(1-y)} = \sqrt{x}.\sqrt{1-y} \text{ khi } x \geq 0 \text{ và } 1-y \geq 0 \text{ hay } x \geq 0 \text{ và } y \leq 1.$$

Ví dụ 4. Cho các biểu thức $M = \sqrt{(x-1)(x+3)}$ và $N = \sqrt{x-1}.\sqrt{x+3}$.a) Tìm các giá trị của x để M có nghĩa ; để N có nghĩa.b) Với giá trị nào của x thì $M = N$?***Giải*** M có nghĩa khi $(x-1)(x+3) \geq 0$.

$$\text{Trường hợp 1 : } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 ;$$

$$\text{Trường hợp 2 : } \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -3.$$

Vậy M có nghĩa khi $x \geq 1$ hoặc $x \leq -3$.

$$N \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

b) Để M và N đồng thời có nghĩa thì $x \geq 1$.Khi đó ta có $M = N$ theo định lí khai phương một tích.**Dạng 2. NHÂN CÁC CĂN BẬC HAI****Phương pháp giải**

Dựa vào quy tắc nhân các căn bậc hai :

$$\text{Với } a, b \geq 0 \text{ thì } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Ví dụ 1. Tính

a) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50}$;

b) $\sqrt{12,8} \cdot \sqrt{0,2}$.

Giải

a) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{72 \cdot 50} = \sqrt{36 \cdot 100} = 6 \cdot 10 = 60$.

b) $\sqrt{12,8} \cdot \sqrt{0,2} = \sqrt{12,8 \cdot 0,2} = \sqrt{128 \cdot 0,02} = \sqrt{64 \cdot 0,04} = 8 \cdot 0,2 = 1,6$.

Ví dụ 2. Tính

a) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{4,5}$;

b) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Giải

a) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{4,5} = \sqrt{40 \cdot 20 \cdot 4,5} = \sqrt{400 \cdot 9} = 20 \cdot 3 = 60$.

b) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.

Ví dụ 3. Thực hiện các phép tính :

a) $(\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5}$; b) $(\sqrt{12} + \sqrt{3})(\sqrt{27} - \sqrt{3})$;

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1)(\sqrt{5} - 1)$.

Giải

a) $(\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = \sqrt{100} + \sqrt{225} - \sqrt{25} = 10 + 15 - 5 = 20$.

b) $(\sqrt{12} + \sqrt{3})(\sqrt{27} - \sqrt{3}) = \sqrt{324} - \sqrt{36} + \sqrt{81} - \sqrt{9} = 18 - 6 + 9 - 3 = 18$.

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1)(\sqrt{5} - 1) = 5 - \sqrt{5} - \sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - 1 = 4 - \sqrt{15} + \sqrt{3}$.

Ví dụ 4. Tính

a) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2$; b) $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$; c) $(5\sqrt{3} - 2\sqrt{7})(5\sqrt{3} + 2\sqrt{7})$.

Giải

$$a) (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 + 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 7 + 2\sqrt{21} + 3 = 10 + 2\sqrt{21}.$$

$$b) (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{8})^2 - 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{16} + 2 = 2.$$

$$c) (5\sqrt{3} - 2\sqrt{7})(5\sqrt{3} + 2\sqrt{7}) = (5\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{7})^2 = 25 \cdot 3 - 4 \cdot 7 = 47.$$

Dạng 3. RÚT GỌN, TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp giải

- Trước hết tìm điều kiện của biến để biểu thức có nghĩa (nếu cần).
- Áp dụng quy tắc khai phương một tích, quy tắc nhân các căn bậc hai, các hằng đẳng thức để rút gọn.
- Thay giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn rồi thực hiện các phép tính.

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau :

$$a) \sqrt{\frac{3x}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5x}{27}} \quad \text{với } x > 0;$$

$$b) \sqrt{x^6 \cdot (x-2)^2} \quad \text{với } x > 2.$$

Giải

$$a) \sqrt{\frac{3x}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5x}{27}} = \sqrt{\frac{3x}{5} \cdot \frac{5x}{27}} = \sqrt{\frac{x^2}{9}} = \frac{|x|}{3} = \frac{x}{3} \quad (\text{vì } x > 0).$$

$$b) \sqrt{x^6 \cdot (x-2)^2} = \sqrt{x^6} \cdot \sqrt{(x-2)^2} = |x^3| \cdot |x-2| = x^3(x-2) \quad (\text{vì } x > 2).$$

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau :

$$a) \sqrt{15x^3 \cdot \frac{60}{x}};$$

$$b) \sqrt{16(x^2 - 6x + 9)}.$$

Giải

a) ĐK : $x \neq 0$.

$$\sqrt{15x^3 \cdot \frac{60}{x}} = \sqrt{900x^2} = 30|x| = \begin{cases} 30x & \text{nếu } x > 0 \\ -30x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{16(x^2 - 6x + 9)} &= \sqrt{16(x-3)^2} = 4|x-3| \\ &= \begin{cases} 4(x-3) & \text{nếu } x \geq 3 \\ 4(3-x) & \text{nếu } x < 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức $M = \sqrt{25x^2(x - 2\sqrt{x} + 1)}$ với $0 < x < 1$.

Giải

$$\text{Ta có } M = \sqrt{25x^2(x - 2\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{25x^2(\sqrt{x} - 1)^2} = 5|x| \cdot |\sqrt{x} - 1|.$$

Vì $x > 0$ nên $|x| = x$.

Vì $0 < x < 1$ nên $\sqrt{x} < 1$, do đó $|\sqrt{x} - 1| = 1 - \sqrt{x}$.

Vậy $M = 5x(1 - \sqrt{x})$.

Ví dụ 4. Tính giá trị của các biểu thức sau :

$$\text{a) } \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} ; \quad \text{b) } \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} ; \quad \text{c) } \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} .$$

Giải

$$\text{a) } \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1.$$

$$\text{b) } \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{5 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + 3} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

$$\text{c) } \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 4} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{5} - 2.$$

Nhận xét : Phương pháp giải trong ví dụ này là biến đổi biểu thức lấy căn thành bình phương của tổng hay hiệu hai số rồi áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

Ví dụ 5. Rút gọn các biểu thức sau :

$$\text{a) } \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} ; \quad \text{b) } \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} .$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} &= \sqrt{x-1 + 2\sqrt{x-1} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1 \quad (\text{ĐK : } x \geq 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} &= \sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} = |\sqrt{x+1}-1| \quad (\text{ĐK : } x \geq -1). \end{aligned}$$

Nếu $x \geq 0$ thì $|\sqrt{x+1}-1| = \sqrt{x+1}-1$.

Nếu $-1 \leq x < 0$ thì $|\sqrt{x+1}-1| = 1-\sqrt{x+1}$.

Dạng 4. BIẾN ĐỔI MỘT BIỂU THỨC VỀ DẠNG TÍCH

Phương pháp giải

Dùng cách đặt nhân tử chung, nhóm các hạng tử, dùng các hằng đẳng thức,...

Ví dụ 1. Phân tích thành nhân tử

a) $3-\sqrt{3}$;

b) $x+3\sqrt{xy}$;

c) $x\sqrt{y}-y\sqrt{x}$;

d) $x-\sqrt{x}-\sqrt{xy}+\sqrt{y}$.

Giải

a) $3-\sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$.

b) $x+3\sqrt{xy} = \sqrt{x}(\sqrt{x}+3\sqrt{y})$ (ĐK : $x \geq 0$; $y \geq 0$).

c) $x\sqrt{y}-y\sqrt{x} = \sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ (ĐK : $x \geq 0$; $y \geq 0$).

d) $x-\sqrt{x}-\sqrt{xy}+\sqrt{y} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-\sqrt{y}(\sqrt{x}-1)$
 $= (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ (ĐK : $x \geq 0$; $y \geq 0$).

Ví dụ 2. Phân tích thành nhân tử

a) $\sqrt{x^3}-25\sqrt{x}$;

b) $9x+6\sqrt{xy}+y$;

c) $\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}$;

d) $\sqrt{x^2-9}-2\sqrt{x-3}$.

Giải

a) $\sqrt{x^3}-25\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x^2}-25) = \sqrt{x}(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)$ (ĐK : $x \geq 0$).

$$b) 9x + 6\sqrt{xy} + y = (3\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \quad (\text{ĐK : } x, y \geq 0).$$

$$c) \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) \quad (\text{ĐK : } x, y \geq 0).$$

$$d) \sqrt{x^2 - 9} - 2\sqrt{x - 3} = \sqrt{x - 3}(\sqrt{x + 3} - 2) \quad (\text{ĐK : } x \geq 3).$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức : $(\sqrt{14} + \sqrt{6})\sqrt{5 - \sqrt{21}}$.

Giải

$$\begin{aligned} (\sqrt{14} + \sqrt{6})\sqrt{5 - \sqrt{21}} &= \sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{5 - \sqrt{21}} \\ &= (\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{10 - 2\sqrt{7 \cdot 3}} = (\sqrt{7} + \sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2} \\ &= (\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 4. \end{aligned}$$

Dạng 5. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

- Trước tiên tìm điều kiện để căn thức có nghĩa.
- Áp dụng quy tắc khai phương một tích, áp dụng các hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$; $(\sqrt{A})^2 = A$ (với $A \geq 0$) đưa phương trình đã cho về phương trình đơn giản hơn.
- Có thể đưa về phương trình tích.

Ví dụ 1. Giải phương trình : $\sqrt{25 \cdot (x + 5)^2} = 15$.

Giải

$$\text{Ta có } \sqrt{25 \cdot (x + 5)^2} = 15$$

$$\Leftrightarrow 5|x + 5| = 15 \Leftrightarrow |x + 5| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 3 \\ x + 5 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -8. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình : $\sqrt{9x^2 - 90x + 225} = 6$.

Giải

Ta có $\sqrt{9x^2 - 90x + 225} = 6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9(x^2 - 10x + 25)} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{9(x-5)^2} = 6 \Leftrightarrow 3|x-5| = 6$$

$$\Leftrightarrow |x-5| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 2 \\ x-5 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 3. \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải phương trình : $\sqrt{x^2 - 25} = 2\sqrt{x-5}$.

Giải

$$\text{ĐK : } \begin{cases} x^2 - 25 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 25 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Khi đó $\sqrt{x^2 - 25} = 2\sqrt{x-5}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-5)(x+5)} - 2\sqrt{x-5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5}(\sqrt{x+5} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} = 0 \\ \sqrt{x+5} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} = 0 \\ \sqrt{x+5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 0 \\ x+5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -1 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Ví dụ 4. Giải phương trình : $\sqrt{x-5} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = \frac{1}{5}\sqrt{25x-125} + 6$.

Giải

ĐK : $x \geq 5$.

Ta có $\sqrt{x-5} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = \frac{1}{5}\sqrt{25x-125} + 6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} + \frac{1}{3}\sqrt{9(x-5)} = \frac{1}{5}\sqrt{25(x-5)} + 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} + \sqrt{x-5} = \sqrt{x-5} + 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 6$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = 36$$

$$\Leftrightarrow x = 41 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Ví dụ 5. Giải phương trình : $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.

Giải

ĐK : $x > 0$.

Ta có $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Dạng 6. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

Có thể dùng các phương pháp sau :

- Với $a \geq 0$; $b \geq 0$ thì $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$;
- Biến đổi tương đương.

Ví dụ 1. Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh rằng :

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}.$$

Giải

Ta có $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 < (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 \text{ (vì hai vế đều dương)}$$

$$\Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{40} + 8 < 6 + 2\sqrt{42} + 7 \Leftrightarrow 13 + 2\sqrt{40} < 13 + 2\sqrt{42}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{40} < \sqrt{42} \Leftrightarrow 40 < 42.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

Ví dụ 2. Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh rằng :

$$\sqrt{3} + 2 < \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1).$$

Giải

Ta có $(\sqrt{3}+2)^2 = 3+4\sqrt{3}+4 = 7+4\sqrt{3}$;

$$[\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)]^2 = 2(\sqrt{3}+1)^2 = 2(3+2\sqrt{3}+1) = 8+4\sqrt{3}.$$

Vì $7+4\sqrt{3} < 8+4\sqrt{3}$ nên $(\sqrt{3}+2)^2 < [\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)]^2$.

Do đó $\sqrt{3}+2 < \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.

Ví dụ 3. Cho $a > 0$, chứng minh rằng : $\sqrt{a+9} < \sqrt{a}+3$.

Giải

Ta có $(\sqrt{a+9})^2 = a+9$;

$$(\sqrt{a}+3)^2 = a+6\sqrt{a}+9.$$

Do $a > 0$ nên $a+9 < a+9+6\sqrt{a}$, do đó $(\sqrt{a+9})^2 < (\sqrt{a}+3)^2$.

Vậy $\sqrt{a+9} < \sqrt{a}+3$.

Chú ý : Căn bậc hai của một tổng không bằng tổng các căn bậc hai.

Ví dụ 4. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng :

a) $a+b \geq 2\sqrt{ab}$;

b) $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

Giải

a) Ta có $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a=b).$$

Bất đẳng thức cuối này đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

Lưu ý : Bất đẳng thức $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ với $a, b \geq 0$ gọi là bất đẳng thức Cô-si.

b) Ta có $a, b, c \geq 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si đối với hai số ta được :

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$2(a + b + c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

Suy ra $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ (dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$).

Ví dụ 5. Cho $a \geq \frac{1}{2}$, chứng minh rằng : $\sqrt{2a-1} \leq a$.

Giải

Từ bất đẳng thức Cô-si $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ suy ra $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức này cho các số không âm $2a - 1$ và 1 ta được :

$$\sqrt{2a-1} = \sqrt{(2a-1) \cdot 1} \leq \frac{(2a-1) + 1}{2} = a.$$

Vậy $\sqrt{2a-1} \leq a$ (dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính

a) $\sqrt{400.0,81}$;

b) $\sqrt{\frac{5}{27} \cdot \frac{3}{20}}$;

c) $\sqrt{(-5)^2 \cdot 3^2}$;

d) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2 \cdot (2+\sqrt{5})^2}$.

2. Tính

a) $(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)$;

b) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$;

c) $\left(\sqrt{\frac{25}{3}} - \sqrt{\frac{49}{3}} + \sqrt{3}\right)\sqrt{3}$;

d) $(1 + \sqrt{3} - \sqrt{5})(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5})$.

3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{3} + \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$;

b) $\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-2}$.

4. Phân tích thành nhân tử

a) $a - 5\sqrt{a}$;

b) $a - 7$ với $a > 0$;

c) $a + 4\sqrt{a} + 4$;

d) $\sqrt{xy} - 4\sqrt{x} + 3\sqrt{y} - 12$.

5. Giải phương trình

a) $\sqrt{49(1-2x+x^2)} - 35 = 0$; b) $\sqrt{x^2-9} - 5\sqrt{x+3} = 0$;

c) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$.

6*. Tìm x và y , biết $x + y + 13 = 2(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})$.

7*. Chứng minh rằng : $\sqrt{7} - \sqrt{3} < \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

8. Chứng minh bất đẳng thức : $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$ với $a, b \geq 0$.

9*. Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) 18 ;

b) $\frac{1}{6}$;

c) 15 ;

d) 1.

2. a) $x - \sqrt{x} - 6$;

b) $x - y$;

c) 1 ;

d) $2\sqrt{3} - 1$.

3. a) $\sqrt{5}$;

b) $\begin{cases} \sqrt{x-2}-1 & \text{nếu } x \geq 3 \\ 1-\sqrt{x-2} & \text{nếu } 2 \leq x < 3. \end{cases}$

4. a) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-5)$;

b) $(\sqrt{a}-\sqrt{7})(\sqrt{a}+\sqrt{7})$;

c) $(\sqrt{a}+2)^2$;

d) $(\sqrt{x}+3)(\sqrt{y}-4)$.

5. a) $x_1 = 6$; $x_2 = -4$;

b) $x_1 = -3$; $x_2 = 28$;

c) $x = 25$.

6*. $x + y + 13 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}$ (ĐK : $x, y \geq 0$)

$$\Leftrightarrow (x - 4\sqrt{x} + 4) + (y - 6\sqrt{y} + 9) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 + (\sqrt{y} - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 = 0 \text{ và } (\sqrt{y} - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ và } y = 9.$$

7*. $\sqrt{7} - \sqrt{3} < \sqrt{6} - \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7} + \sqrt{2} < \sqrt{6} + \sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 < (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{14} < 9 + 2\sqrt{18} \Leftrightarrow 2\sqrt{14} < 2\sqrt{18}.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

8. Bình phương hai vế.

9*. Tính A^2 được $A^2 = 2$, suy ra $A = \sqrt{2}$.

§4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lý

Với số a không âm và số b dương, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

2. Áp dụng

Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, trong đó $a \geq 0$ và $b > 0$, ta có thể lần lượt khai phương số a và số b , rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

Muốn chia căn bậc hai của số a không âm cho căn bậc hai của số b dương, ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

3. Chú ý

Với các biểu thức $A \geq 0$ và $B > 0$, ta có

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. KHAI PHƯƠNG MỘT THƯƠNG

Phương pháp giải

Dựa vào quy tắc khai phương một thương :

$$\text{Với } a \geq 0 ; b > 0 \text{ thì } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Ví dụ 1. Tính

$$\text{a) } \sqrt{\frac{4}{25} : \frac{49}{121}} ;$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{-36a}{49}} \text{ với } a < 0.$$

Giải

$$\text{a) } \sqrt{\frac{4}{25} : \frac{49}{121}} = \sqrt{\frac{4}{25}} : \sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{2}{5} : \frac{7}{11} = \frac{22}{35}.$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{-36a}{49}} = \frac{\sqrt{-36a}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{-a}}{\sqrt{49}} = \frac{6\sqrt{-a}}{7}.$$

Lưu ý : Vì $a < 0$ nên $\sqrt{-a}$ có nghĩa.

Ví dụ 2. Tính

$$\text{a) } \sqrt{\frac{65^2 - 52^2}{225}} ;$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{11}{9} : 1,44 - \frac{7}{9} : 1,44}.$$

Giải

$$\text{a) } \sqrt{\frac{65^2 - 52^2}{225}} = \sqrt{\frac{(65-52)(65+52)}{225}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 117}{225}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 13 \cdot 9}{15^2}} = \frac{13 \cdot 3}{15} = \frac{39}{15}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{\frac{11}{9} : 1,44 - \frac{7}{9} : 1,44} &= \sqrt{\left(\frac{11}{9} - \frac{7}{9}\right) : \frac{144}{100}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{9} : \frac{144}{100}} = \sqrt{\frac{4}{9}} : \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{2}{3} : \frac{12}{10} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Đẳng thức $\sqrt{\frac{x-5}{y+2}} = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{y+2}}$ đúng với những giá trị nào của x và y ?

Giải

Theo định lý khai phương một thương thì

$$\sqrt{\frac{x-5}{y+2}} = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{y+2}}$$

khi $x-5 \geq 0$ và $y+2 > 0$ hay $x \geq 5$ và $y > -2$.

Dạng 2. CHIA CÁC CĂN BẬC HAI

Phương pháp giải

Dựa vào quy tắc chia các căn bậc hai :

Với $a \geq 0$; $b > 0$ thì $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Ví dụ 1. Tính

a) $\sqrt{45} : \sqrt{80}$;

b) $\sqrt{(2.3)^5} : \sqrt{2^3.3^5}$.

Giải

a) $\sqrt{45} : \sqrt{80} = \sqrt{\frac{45}{80}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.

b) $\sqrt{(2.3)^5} : \sqrt{2^3.3^5} = \sqrt{\frac{2^5.3^5}{2^3.3^5}} = \sqrt{2^2} = 2$.

Ví dụ 2. Tính

a) $\sqrt{54} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$;

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} : \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$.

Giải

a) $\sqrt{54} : \sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{54 : 2} : \sqrt{3} = \sqrt{27 : 3} = \sqrt{9} = 3$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} : \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}} = \sqrt{\frac{3}{75}} : \sqrt{\frac{52}{117}} = \sqrt{\frac{1}{25}} : \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{1}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{10}$.

Ví dụ 3. Thực hiện các phép tính

a) $(\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{20}) : \sqrt{5}$;

b) $(2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{2}) : \sqrt{2}$.

Giải

a) $(\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{20}) : \sqrt{5} = \sqrt{9} - \sqrt{25} + \sqrt{4} = 3 - 5 + 2 = 0.$

b) $(2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{2}) : \sqrt{2} = 2\sqrt{9} + 3\sqrt{4} - 6 = 2.3 + 3.2 - 6 = 6.$

Dạng 3. RÚT GỌN, TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp giải

- Tìm điều kiện của biến để căn thức có nghĩa.
- Áp dụng quy tắc khai phương một thương hoặc quy tắc chia các căn bậc hai để rút gọn.
- Thay giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn rồi thực hiện các phép tính.

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt{3^{16} - 3^{12}}}{\sqrt{3^{12} - 3^8}}.$

Giải

$$\frac{\sqrt{3^{16} - 3^{12}}}{\sqrt{3^{12} - 3^8}} = \sqrt{\frac{3^{12}(3^4 - 1)}{3^8(3^4 - 1)}} = \sqrt{3^4} = 9.$$

Ví dụ 2. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức sau với $x = 6$:

$$A = \frac{\sqrt{(165^2 - 124^2)}}{\sqrt{369}} \cdot x.$$

Giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{(165^2 - 124^2)}}{\sqrt{369}} \cdot x = \frac{\sqrt{(165 + 124)(165 - 124)}}{\sqrt{369}} \cdot x \\ &= \sqrt{\frac{289 \cdot 41}{369}} \cdot x = \sqrt{\frac{289}{9}} \cdot x = \frac{17}{3} \cdot x. \end{aligned}$$

Với $x = 6$ thì $A = \frac{17}{3} \cdot 6 = 34.$

Ví dụ 3. Cho biểu thức $B = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}-1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}-1}}$.

Rút gọn rồi tính giá trị của B với $x = 5$; $y = 10$.

Giải

$$B = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}-1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}-1}} \text{ ĐK : } x > 1 ; y > 1.$$

$$B = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}-1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1)}} = \sqrt{\frac{x-1}{y-1}}.$$

$$\text{Với } x = 5 ; y = 10 \text{ thì } B = \sqrt{\frac{5-1}{10-1}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 4. Cho biểu thức $C = \sqrt{\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x+6\sqrt{xy}+9y}}$ với $x > 0, y > 0$.

Rút gọn rồi tính giá trị của C với $x = 25$; $y = 81$.

Giải

$$C = \sqrt{\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x+6\sqrt{xy}+9y}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+3\sqrt{y})^2}} = \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}.$$

Với $x = 25$; $y = 81$ thì

$$C = \frac{|\sqrt{25}-\sqrt{81}|}{\sqrt{25}+3\sqrt{81}} = \frac{|5-9|}{5+3 \cdot 9} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

Dạng 4. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

- Tìm điều kiện để căn thức có nghĩa.
- Nếu hai vế không âm thì có thể bình phương hai vế để khử dấu căn.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{\frac{3x-1}{x+2}} = 2$.

Giải

ĐKXD : $3x - 1$ và $x + 2$ cùng dấu hoặc $x = \frac{1}{3}$.

$$\text{Trường hợp 1 : } \begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$$

$$\text{Trường hợp 2 : } \begin{cases} 3x - 1 < 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2.$$

Vậy ĐKXD là $x \geq \frac{1}{3}$ hoặc $x < -2$.

Bình phương hai vế của phương trình ta được :

$$\frac{3x-1}{x+2} = 4$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 4(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 4x + 8$$

$$\Leftrightarrow x = -9 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình $\frac{\sqrt{5x-7}}{\sqrt{2x-1}} = 1$.

Giải

$$\text{ĐKXD : } \begin{cases} 5x - 7 \geq 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{5} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{5}.$$

Bình phương hai vế ta được :

$$\frac{5x-7}{2x-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow 5x - 7 = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính

$$a) \sqrt{72} : \sqrt{8} ;$$

$$b) (\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{112}) : \sqrt{7} .$$

2. Tính

$$a) \sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}} ;$$

$$b) \sqrt{54x} : \sqrt{6x} ;$$

$$c) \sqrt{\frac{1}{125}} \cdot \sqrt{\frac{32}{35}} : \sqrt{\frac{56}{225}} .$$

3. Làm phép chia

$$\sqrt{\frac{a-1}{a+2}} : \sqrt{\frac{a+2}{a^3-3a^2+3a-1}} \text{ với } a > 1.$$

4. Rút gọn biểu thức

$$a) \frac{x^3}{y^2} : \sqrt{\frac{x^2}{y^4}} \text{ với } x, y \neq 0 ;$$

$$b) \sqrt{\frac{27(x-1)^2}{12}} + \frac{3}{2} - (x-2) \sqrt{\frac{50x^2}{8(x-2)^2}} \text{ với } 1 < x < 2.$$

$$5. \text{ Cho } x = \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ tính giá trị của biểu thức } M = \sqrt{6x+5}.$$

6*. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} .$$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

$$1. a) 3 ; \quad b) 5.$$

2. a) $\frac{7}{5}$; b) 3; c) $\frac{6}{35}$.

3. $\frac{(a-1)^2}{a+2}$.

4. a) $\begin{cases} x^2 & \text{nếu } x > 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$; b) $4x$.

5. $x = \frac{2}{3}$; $M = 3$.

6*. Mỗi vế đều bằng 1.

§6. §7. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Với hai biểu thức A, B mà $B \geq 0$, ta có

$$\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

$|A|\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$, tức là:

- Nếu $A \geq 0$; $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$;
- Nếu $A < 0$; $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$.

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

Với các biểu thức A, B mà $A.B \geq 0$ và $B \neq 0$, ta có

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}.$$

4. Trục căn thức ở mẫu

Trường hợp 1 : Với các biểu thức B, C mà $B > 0$ thì

$$\frac{C}{\sqrt{B}} = \frac{C\sqrt{B}}{B}.$$

Trường hợp 2 : Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$; $A \neq B^2$ thì

$$\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2}.$$

Trường hợp 3 : Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$, $B \geq 0$ và $A \neq B$ thì

$$\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \mp \sqrt{B}})}{A - B}.$$

Hai biểu thức $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ và $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ gọi là hai biểu thức liên hợp với nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI DẤU CĂN

Phương pháp giải

- Biến đổi biểu thức lấy căn thành dạng tích trong đó có thừa số là bình phương của một số hoặc một biểu thức.
- Khai phương thừa số này và viết kết quả ra ngoài dấu căn.

Ví dụ 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{45}$; b) $\sqrt{2400}$; c) $\sqrt{147}$; d) $\sqrt{1,25}$.

Giải

a) $\sqrt{45} = \sqrt{9.5} = 3\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{2400} = \sqrt{400.6} = 20\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{147} = \sqrt{49.3} = 7\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{1,25} = \sqrt{0,25.5} = 0,5\sqrt{5}$.

Ví dụ 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{50.6}$; b) $\sqrt{14.21}$; c) $\sqrt{32.45}$; d) $\sqrt{125.27}$.

Giải

a) $\sqrt{50.6} = \sqrt{100.3} = 10\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{14.21} = \sqrt{7.7.2.3} = 7\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{32.45} = \sqrt{16.2.9.5} = \sqrt{16.9.10} = 4.3\sqrt{10} = 12\sqrt{10}$;

d) $\sqrt{125.27} = \sqrt{25.5.9.3} = \sqrt{25.9.15} = 5.3\sqrt{15} = 15\sqrt{15}$.

Ví dụ 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{18x}$; b) $\sqrt{75x^2y}$; c) $\sqrt{605x^3y^2}$.

Giải

a) $\sqrt{18x} = \sqrt{9.2x} = 3\sqrt{2x}$ (với $x \geq 0$).

b) $\sqrt{75x^2y} = \sqrt{25x^2.3y} = 5|x|\sqrt{3y}$ ($y \geq 0$)

$$= \begin{cases} 5x\sqrt{3y} & \text{nếu } x \geq 0 \\ -5x\sqrt{3y} & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

c) $\sqrt{605x^3y^2} = \sqrt{121x^2y^2.5x} = 11x|y|\sqrt{5x}$ ($x \geq 0$)

$$= \begin{cases} 11xy\sqrt{5x} & \text{nếu } y \geq 0 \\ -11xy\sqrt{5x} & \text{nếu } y < 0. \end{cases}$$

Ví dụ 4. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{128(x-y)^2}$; b) $\sqrt{150(4x^2-4x+1)}$; c) $\sqrt{x^3-6x^2+12x-8}$.

Giải

a) $\sqrt{128(x-y)^2} = \sqrt{64(x-y)^2.2} = 8|x-y|\sqrt{2}$

$$= \begin{cases} 8(x-y)\sqrt{2} & \text{nếu } x \geq y \\ 8(y-x)\sqrt{2} & \text{nếu } x < y. \end{cases}$$

$$b) \sqrt{150(4x^2 - 4x + 1)} = \sqrt{25 \cdot 6(2x - 1)^2}$$

$$= 5|2x - 1|\sqrt{6} = \begin{cases} 5(2x - 1)\sqrt{6} & \text{nếu } x \geq \frac{1}{2} \\ 5(1 - 2x)\sqrt{6} & \text{nếu } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$c) \sqrt{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \sqrt{(x - 2)^3} = \sqrt{(x - 2)^2 \cdot (x - 2)} \\ = (x - 2)\sqrt{x - 2} \quad (\text{với } x \geq 2).$$

Dạng 2. ĐƯA THỪA SỐ VÀO TRONG DẤU CĂN

Phương pháp giải

- Nếu $A \geq 0$ thì ta nâng A lên lũy thừa bậc hai rồi viết kết quả vào trong dấu căn :

$$A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B} \quad (\text{với } A \geq 0 ; B \geq 0).$$

- Nếu $A < 0$ thì ta coi A như là $-(-A)$. Ta nâng $(-A)$ lên lũy thừa bậc hai rồi viết kết quả vào trong dấu căn. Còn dấu “-” vẫn để đằng trước dấu căn :

$$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B} \quad (\text{với } A < 0 ; B \geq 0).$$

Ví dụ 1. Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$a) 3\sqrt{5} ; \quad b) 5\sqrt{6} ; \quad c) \frac{2}{7}\sqrt{35}.$$

Giải

$$a) 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45} ;$$

$$b) 5\sqrt{6} = \sqrt{5^2 \cdot 6} = \sqrt{150} ;$$

$$c) \frac{2}{7}\sqrt{35} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 35} = \sqrt{\frac{20}{7}}.$$

Ví dụ 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn :

$$a) -4\sqrt{\frac{1}{8}} ; \quad b) -0,06\sqrt{250}.$$

Giải

a) $-4\sqrt{\frac{1}{8}} = -\sqrt{4^2 \cdot \frac{1}{8}} = -\sqrt{2}$;

b) $-0,06\sqrt{250} = -\sqrt{(0,06)^2 \cdot 250} = -\sqrt{0,9}$.

Ví dụ 3. Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $x\sqrt{x}$; b) $y\sqrt{\frac{x}{y}}$; c) $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}$.

Giải

a) $x\sqrt{x} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3}$ ($x \geq 0$) ;

b) ĐK : $x \cdot y \geq 0$; $y \neq 0$.

Xét trường hợp $x \geq 0$; $y > 0$, ta có $y\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{y^2 \cdot \frac{x}{y}} = \sqrt{xy}$.

Xét trường hợp $x < 0$; $y < 0$, ta có $y\sqrt{\frac{x}{y}} = -\sqrt{y^2 \cdot \frac{x}{y}} = -\sqrt{xy}$.

c) ĐK : $xy > 0$. Ta có $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

Ví dụ 4. Đưa thừa số vào trong dấu căn :

a) $-x\sqrt{\frac{3}{x}}$ với $x > 0$; b) $-x\sqrt{\frac{-1}{x}}$ với $x < 0$.

Giải

a) Ta có $-x\sqrt{\frac{3}{x}} = -\sqrt{x^2 \cdot \frac{3}{x}} = -\sqrt{3x}$ với $x > 0$.

b) Ta có $-x\sqrt{\frac{-1}{x}} = \sqrt{(-x)^2 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)} = \sqrt{-x}$ với $x < 0$.

Ví dụ 5. Chỉ ra chỗ sai trong các biến đổi sau :

a) $x\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3x^2}{7}}$; b) $xy\sqrt{\frac{y}{x}} = y\sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}} = y\sqrt{xy}$.

Giải

a) Biến đổi $x\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3x^2}{7}}$ chỉ đúng khi $x \geq 0$.

Nếu $x < 0$ thì $x\sqrt{\frac{3}{7}} = -\sqrt{\frac{3x^2}{7}}$.

b) Biến đổi $xy\sqrt{\frac{y}{x}} = y\sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}} = y\sqrt{xy}$ chỉ đúng khi $x > 0$.

Nếu $x < 0$ thì $xy\sqrt{\frac{y}{x}} = -y\sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}} = -y\sqrt{xy}$.

Dạng 3. KHỬ MẪU CỦA BIỂU THỨC LẤY CĂN

Phương pháp giải

Vận dụng công thức $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{B}$ ($A, B \geq 0$; $B \neq 0$). Cụ thể gồm các bước sau :

- Biến đổi mẫu thành bình phương của một số hoặc một biểu thức (nếu cần) ;
- Khai phương mẫu và đưa ra ngoài dấu căn.

Ví dụ 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn $\sqrt{\frac{5}{72}}$.

Giải

$$\text{Ta có } \sqrt{\frac{5}{72}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2}{72 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{10}{144}} = \frac{1}{12} \sqrt{10}.$$

Nhận xét : Nếu bạn nhân cả tử và mẫu của phân số $\frac{5}{72}$ với 72 thì vẫn ra kết quả nhưng biến đổi phức tạp hơn :

$$\sqrt{\frac{5}{72}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 72}{72^2}} = \sqrt{\frac{360}{72^2}} = \frac{6}{72} \sqrt{10} = \frac{1}{12} \sqrt{10}.$$

Vậy tìm thừa số phụ như thế nào cho hợp lí ?

Trước hết, bạn phân tích mẫu số ra thừa số nguyên tố : $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Bạn thấy ngay thừa số phụ là 2, lúc đó số mũ của các thừa số nguyên tố đều chẵn.

Ví dụ 2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{11}{27x}}$; b) $\sqrt{\frac{3x}{5y^3}}$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{11}{27x}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 3x}{27x \cdot 3x}} = \sqrt{\frac{33x}{81x^2}} = \frac{1}{9x} \sqrt{33x} \quad (\text{ĐK : } x > 0).$

b) $\sqrt{\frac{3x}{5y^3}} = \sqrt{\frac{3x \cdot 5y}{5y^3 \cdot 5y}} = \sqrt{\frac{15xy}{25y^4}} = \frac{1}{5y^2} \sqrt{15xy}$

(ĐK : $xy \geq 0$; $y \neq 0$).

Ví dụ 3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}}$; b) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}} = \sqrt{\frac{1}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{x+1}{(x+1)^4}}$
 $= \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{x+1} \quad (\text{ĐK : } x > -1).$

b) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \sqrt{\frac{x-1}{x^3}} = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x^4}}$
 $= \frac{1}{x^2} \sqrt{x(x-1)} \quad (\text{ĐK : } x \geq 1 \text{ hoặc } x < 0).$

Dạng 4. TRỪ CĂN THỨC Ở MẪU

Phương pháp giải

- **Cách 1** : Rút gọn biểu thức (nếu có thể) :
 - Phân tích tử số thành tích có thừa số là căn thức ở mẫu.
 - Chia cả tử và mẫu cho thừa số chung.
- **Cách 2** : Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu để làm mất dấu căn ở mẫu.

Ví dụ 1. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$; b) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

Giải

a) Ta có $\frac{3+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{5}$.

b) Ta có $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}$.

Ví dụ 2. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$; b) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$; c) $\frac{3}{\sqrt{15}+4}$.

Giải

a) $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

b) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$.

c) $\frac{3}{\sqrt{15}+4} = \frac{3(\sqrt{15}-4)}{(\sqrt{15}+4)(\sqrt{15}-4)} = \frac{3(\sqrt{15}-4)}{15-16} = 3(4-\sqrt{15})$.

Ví dụ 3. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2}{(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})}$
 $= \frac{75+45-30\sqrt{15}}{75-45} = \frac{30(4-\sqrt{15})}{30} = 4-\sqrt{15}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})} \\
 &= \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})^2-3} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{1-2\sqrt{2}+2-3} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2}.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Trục căn thức ở mẫu

$$\text{a) } \frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} \text{ với } a \geq 0; a \neq 1; \quad \text{b) } \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1} \text{ với } a > 0; b > 0; ab = \frac{1}{4}.$$

Giải

$$\text{a) } \frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{(1-\sqrt{a})^2}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} = \frac{1-2\sqrt{a}+a}{1-a}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1} &= \frac{1 \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}+1)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)(\sqrt{a}+\sqrt{b}+1)} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+1}{a+b+2\sqrt{ab}-1} \\
 &= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+1}{a+b+2\sqrt{\frac{1}{4}}-1} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+1}{a+b}.
 \end{aligned}$$

Dạng 5. SO SÁNH HAI SỐ

Phương pháp giải

Thực hiện các phép biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai rồi so sánh hai kết quả. Chẳng hạn :

– Đưa thừa số vào trong dấu căn rồi dùng tính chất :

Nếu $A > B > 0$ thì $\sqrt{A} > \sqrt{B}$.

– Đưa thừa số ra ngoài dấu căn rồi dùng tính chất :

Nếu $A, B, C > 0$ thì $A > B \Leftrightarrow A\sqrt{C} > B\sqrt{C}$.

Ví dụ 1. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh :

a) $5\sqrt{6}$ và $7\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{2\frac{2}{3}}$ và $5\sqrt{1\frac{1}{5}}$.

Giải

a) Ta có $5\sqrt{6} = \sqrt{25 \cdot 6} = \sqrt{150}$;
 $7\sqrt{3} = \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{147}$.

Vì $\sqrt{150} > \sqrt{147}$ nên $5\sqrt{6} > 7\sqrt{3}$.

b) Ta có $3\sqrt{2\frac{2}{3}} = \sqrt{9 \cdot \frac{8}{3}} = \sqrt{24}$;

$5\sqrt{1\frac{1}{5}} = \sqrt{25 \cdot \frac{6}{5}} = \sqrt{30}$.

Vì $\sqrt{24} < \sqrt{30}$ nên $3\sqrt{2\frac{2}{3}} < 5\sqrt{1\frac{1}{5}}$.

Ví dụ 2. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh :

a) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{2}{3}\sqrt{7}$; b) $-3\sqrt{11}$ và $-2\sqrt{23}$.

Giải

a) Ta có $\frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot 2} = \sqrt{\frac{25}{8}} = \sqrt{3\frac{1}{8}}$;

$\frac{2}{3}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 7} = \sqrt{\frac{28}{9}} = \sqrt{3\frac{1}{9}}$.

Vì $\sqrt{3\frac{1}{8}} > \sqrt{3\frac{1}{9}}$ nên $\frac{5}{4}\sqrt{2} > \frac{2}{3}\sqrt{7}$.

b) Ta có $-3\sqrt{11} = -\sqrt{9 \cdot 11} = -\sqrt{99}$;

$-2\sqrt{23} = -\sqrt{4 \cdot 23} = -\sqrt{92}$.

Vì $-\sqrt{99} < -\sqrt{92}$ nên $-3\sqrt{11} < -2\sqrt{23}$.

Ví dụ 3. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần

a) $6\sqrt{3}, 7\sqrt{2}, 15\sqrt{\frac{2}{5}}, 9\sqrt{1\frac{2}{9}}$; b) $-\sqrt{71}, \frac{2}{3}\sqrt{12}, \frac{1}{2}\sqrt{21}, -5\sqrt{3}$.

Giải

a) Ta có $6\sqrt{3} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108}$; $7\sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$;

$$15\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{225 \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{90} ; 9\sqrt{1\frac{2}{9}} = \sqrt{81 \cdot \frac{11}{9}} = \sqrt{99} .$$

Vì $\sqrt{90} < \sqrt{98} < \sqrt{99} < \sqrt{108}$ nên $15\sqrt{\frac{2}{5}} < 7\sqrt{2} < 9\sqrt{1\frac{2}{9}} < 6\sqrt{3}$.

b) Ta có $\frac{2}{3}\sqrt{12} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 12} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \sqrt{5\frac{1}{3}}$;

$$\frac{1}{2}\sqrt{21} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 21} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \sqrt{5\frac{1}{4}} ;$$

$$-5\sqrt{3} = -\sqrt{25 \cdot 3} = -\sqrt{75} .$$

Vì $-\sqrt{75} < -\sqrt{71} < \sqrt{5\frac{1}{4}} < \sqrt{5\frac{1}{3}}$ nên $-5\sqrt{3} < -\sqrt{71} < \frac{1}{2}\sqrt{21} < \frac{2}{3}\sqrt{12}$.

Dạng 6. RÚT GỌN BIỂU THỨC

Phương pháp giải

Thực hiện các phép biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai rồi thu gọn các căn thức đồng dạng hoặc rút gọn các thừa số chung ở tử và mẫu.

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{200} - \sqrt{50} + 4\sqrt{\frac{1}{8}}$;

b) $\sqrt{3}(\sqrt{72} + \sqrt{4,5} - \sqrt{12,5})$.

Giải

a) $\sqrt{200} - \sqrt{50} + 4\sqrt{\frac{1}{8}} = 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{3}(\sqrt{72} + \sqrt{4,5} - \sqrt{12,5}) = \sqrt{216} + \sqrt{13,5} - \sqrt{37,5}$
 $= 6\sqrt{6} + \sqrt{\frac{27}{2}} - \sqrt{\frac{75}{2}} = 6\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{6} - \frac{5}{2}\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$.

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau :

$$a) 12\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right);$$

$$b) 4\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{18}}.$$

Giải

$$a) 12\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 12\left(\frac{1}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = 4\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = -2\sqrt{6}.$$

$$b) 4\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức :

$$P = \sqrt{9ab} + 7\sqrt{\frac{a}{b}} - 5\sqrt{\frac{b}{a}} - 3ab\sqrt{\frac{1}{ab}} \text{ với } a, b > 0.$$

Giải

$$P = \sqrt{9ab} + 7\sqrt{\frac{a}{b}} - 5\sqrt{\frac{b}{a}} - 3ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$$

$$P = 3\sqrt{ab} + \frac{7}{b}\sqrt{ab} - \frac{5}{a}\sqrt{ab} - 3ab \cdot \frac{1}{ab}\sqrt{ab} = \left(\frac{7}{b} - \frac{5}{a}\right)\sqrt{ab}.$$

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức :

$$B = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}.$$

Giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} + \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{6-5} \\ &= (\sqrt{5}+\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2}) + \sqrt{6}-\sqrt{5} = 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Nhận xét : Phương pháp giải ví dụ này là trục căn thức ở mẫu rồi làm các phép cộng, trừ. Nếu quy đồng mẫu thì rất phức tạp.

Ví dụ 5. Cho $a > b > 0$, chứng minh rằng $\frac{a^2b}{a-b} \sqrt{\frac{8(a^2-2ab+b^2)}{75a^4b}} = \frac{2}{15}\sqrt{6b}.$

Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \frac{a^2b}{a-b} \sqrt{\frac{8(a^2-2ab+b^2)}{75a^4b}} &= \frac{a^2b}{a-b} \sqrt{\frac{8(a-b)^2 \cdot b}{75a^4b \cdot b}} \\ &= \frac{a^2b}{a-b} \cdot \frac{2(a-b)}{5a^2b} \cdot \sqrt{\frac{2b}{3}} = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2b \cdot 3}{9}} = \frac{2}{15} \sqrt{6b}.\end{aligned}$$

Ta thấy vế trái đúng bằng vế phải.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

a) $\sqrt{75a^3}$;

b) $\sqrt{98a^5(b^2-6b+9)}$.

2. Rút gọn biểu thức :

a) $2\sqrt{125} - 5\sqrt{45} + 6\sqrt{20}$;

b) $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt{12}$.

3. So sánh các số sau :

a) $3\sqrt{7}$ và $2\sqrt{15}$;

b) $-4\sqrt{5}$ và $-5\sqrt{3}$.

4. Khử mẫu của biểu thức lấy căn :

a) $\sqrt{\frac{3}{80}}$;

b) $\sqrt{\frac{2}{75}}$.

5. Trục căn thức ở mẫu :

a) $\frac{a-2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}$;

b) $\frac{13}{2\sqrt{3}-5}$;

c) $\frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

6. Trục căn thức ở mẫu :

a) $\frac{8}{\sqrt{5}-3}$;

b) $\frac{1}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$;

c) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

7. Tính

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)^2$;

$$b^*) \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

8. Cho $x = \frac{\sqrt{75} + \sqrt{12}}{\sqrt{147} - \sqrt{48}}$. Chứng minh rằng $3x$ là một số nguyên.

9*. Biến đổi $\frac{26}{10+4\sqrt{3}}$ về dạng $a+b\sqrt{3}$. Tính tích $a.b$.

10*. Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ trong đó $x < y$ sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{539}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

$$1. a) 5a\sqrt{3a} \ (a \geq 0); \quad b) \begin{cases} 7a^2(b-3)\sqrt{2a} & \text{nếu } b \geq 3 \\ 7a^2(3-b)\sqrt{2a} & \text{nếu } b < 3. \end{cases}$$

$$2. a) 7\sqrt{5}; \quad b) 0.$$

$$3. a) 3\sqrt{7} > 2\sqrt{15}; \quad b) -4\sqrt{5} < -5\sqrt{3}.$$

$$4. a) \frac{1}{20}\sqrt{15}; \quad b) \frac{1}{15}\sqrt{6}.$$

$$5. a) \sqrt{a}; \quad b) -(2\sqrt{3}+5); \quad c) \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}.$$

$$6. a) -2(\sqrt{5}+3); \quad b) \frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{30}; \quad c) \sqrt{35}-6.$$

$$7. a) 5+2\sqrt{6};$$

b) Trục căn thức ở mẫu của mỗi số hạng rồi tính tổng được $\sqrt{100} - \sqrt{1} = 9$.

8. Tính x được $x = \frac{7}{3}$, do đó $3x = 7 \in \mathbb{Z}$.

$$9^*. \frac{26}{10+4\sqrt{3}} = \frac{13}{5+2\sqrt{3}} = 5-2\sqrt{3}.$$

Vậy $a = 5$; $b = -2$. Do đó $a.b = 5.(-2) = -10$.

10*. $\sqrt{539} = \sqrt{49.11} = 7.\sqrt{11}$.

Ta có $7.\sqrt{11} = \sqrt{11} + 6\sqrt{11} = 2\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = 3\sqrt{11} + 4\sqrt{11}$

$$7.\sqrt{11} = \sqrt{11} + \sqrt{36.11} = \sqrt{4.11} + \sqrt{25.11} = \sqrt{9.11} + \sqrt{16.11}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{11} + \sqrt{396} = \sqrt{44} + \sqrt{275} = \sqrt{99} + \sqrt{176}.$$

Bài toán có ba đáp số : (11 ; 396) ; (44 ; 275) ; (99 ; 176).

§8. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta có thể :

- Thực hiện các phép biến đổi đơn giản các căn thức bậc hai nhằm làm xuất hiện các căn thức đồng dạng, từ đó thực hiện các phép tính cộng, trừ các căn thức đồng dạng.
- Phối hợp thực hiện các phép tính với các biểu thức có dạng phân thức mà tử và mẫu có chứa căn thức bậc hai theo quy tắc thực hiện các phép tính về phân thức đại số.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỈ CÓ CỘNG, TRỪ CĂN THỨC

Phương pháp giải

Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn, khử mẫu của biểu thức lấy căn rồi dùng công thức :

$$m\sqrt{A} - n\sqrt{A} + p\sqrt{A} + q = (m - n + p)\sqrt{A} + q$$

trong đó $A \geq 0$.

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{45}$;

b) $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{98}$.

Giải

a) Ta có $\sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = \sqrt{5}$.

b) Ta có $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{98} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{4,5} - \frac{1}{2}\sqrt{72} + 5\sqrt{\frac{1}{2}}$; b) $42\sqrt{\frac{25}{6}} - 10\sqrt{\frac{3}{2}} - 12\sqrt{\frac{98}{3}}$.

Giải

a) $\sqrt{4,5} - \frac{1}{2}\sqrt{72} + 5\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 2}} - \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2}$
 $= \frac{3}{2}\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

b) $42\sqrt{\frac{25}{6}} - 10\sqrt{\frac{3}{2}} - 12\sqrt{\frac{98}{3}}$
 $= 42 \cdot \frac{5}{6}\sqrt{6} - 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6} - 12 \cdot \frac{7}{3}\sqrt{6}$
 $= 35\sqrt{6} - 5\sqrt{6} - 28\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức

$$M = 2x\sqrt{16xy^3} + 7\sqrt{25x^3y^3} - 3y\sqrt{36x^3y} \quad \text{với } x \geq 0 ; y \geq 0.$$

Giải

Ta có $M = 2x\sqrt{16xy^3} + 7\sqrt{25x^3y^3} - 3y\sqrt{36x^3y}$
 $= 8xy\sqrt{xy} + 35xy\sqrt{xy} - 18xy\sqrt{xy} = 25xy\sqrt{xy}$.

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức $N = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Giải

Ta có $N = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} \\
&= \frac{1}{2}[(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)] = 1.
\end{aligned}$$

Ví dụ 5. Biến đổi biểu thức $5\sqrt{\frac{b}{a}} - 4\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{1}{ab}}$ về dạng $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{ab}\right)\sqrt{ab}$, trong

đó $a, b > 0$; $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Tính tổng $x + y + z$.

Giải

$$\text{Ta có } 5\sqrt{\frac{b}{a}} - 4\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{5}{a}\sqrt{ab} - \frac{4}{b}\sqrt{ab} - \frac{1}{ab}\sqrt{ab} = \left(\frac{5}{a} - \frac{4}{b} - \frac{1}{ab}\right)\sqrt{ab}.$$

Vậy $x = 5$; $y = -4$; $z = -1$. Do đó $x + y + z = 0$.

Dạng 2. RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CÁC PHÉP CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA CĂN THỨC DƯỚI DẠNG PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Phương pháp giải

- Xác định điều kiện để biểu thức có nghĩa gồm : điều kiện để biểu thức lấy căn không âm và điều kiện để mẫu thức khác 0.
- Vận dụng các quy tắc của phép tính về phân thức đại số, kết hợp với các phép tính về căn thức để đưa biểu thức đã cho về dạng đơn giản nhất.

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{xy} - x} - \frac{\sqrt{x}}{y - \sqrt{xy}}$.

Giải

Điều kiện : $x > 0$; $y > 0$; $x \neq y$. Khi đó ta có :

$$P = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} = \frac{y - x}{\sqrt{xy}(\sqrt{y} - \sqrt{x})}$$

$$= \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{\sqrt{xy}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy}}.$$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - 3 \right) : \frac{\sqrt{xy}}{x + 3\sqrt{xy}}.$

Giải

Điều kiện : $x > 0 ; y > 0.$ Khi đó ta có :

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - 3 \right) : \frac{\sqrt{xy}}{x + 3\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = \frac{x - 9y}{y}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right) : (x - y).$

Giải

Điều kiện : $x, y \geq 0 ; x \neq y.$ Khi đó ta có :

$$P = \left[\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right] : (x - y)$$

$$P = (x + 2\sqrt{xy} + y) \cdot \frac{1}{x - y}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} - 1}.$

Giải

Điều kiện : $x \geq 0 ; x \neq 1.$ Khi đó ta có :

$$P = \frac{x + \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \cdot \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$P = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \cdot \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x+\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = x - 1.$$

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{3\sqrt{x}-1}{1-x} \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right).$

Giải

Điều kiện : $x > 0$; $x \neq 1$. Khi đó ta có

$$P = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) + 3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{2\sqrt{x}-2}{x}$$

$$P = \frac{x-2\sqrt{x}+1+2x+2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x} = \frac{6}{\sqrt{x}}.$$

Dạng 3. RÚT GỌN RỒI TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC HOẶC RÚT GỌN RỒI TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ BIỂU THỨC CÓ MỘT GIÁ TRỊ NÀO ĐÓ

Phương pháp giải

Trước hết tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa rồi rút gọn biểu thức. Sau đó thay giá trị của biến vào biểu thức đã được rút gọn rồi thực hiện các phép tính.

Hoặc có thể phải sử dụng kết quả rút gọn, lập phương trình hoặc bất phương trình rồi giải ra để tìm giá trị của biến.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2-5\sqrt{x}}{4-x}$.

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$.

Giải

a) Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq 4$. Khi đó ta có :

$$P = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) - (2-5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$P = \frac{x-3\sqrt{x}+2-2x-4\sqrt{x}-2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$P = \frac{-x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$P = \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}.$$

b) Ta có $x = \frac{2}{2-\sqrt{3}} = 2(2+\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}+1$.

$$\text{Do đó } P = \frac{\sqrt{3}+1}{2-(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{-2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -(2+\sqrt{3}).$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4x}{(x-1)^2}$.

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P, biết $|x-5| = 4$.

Giải

a) Điều kiện : $x > 0$; $x \neq 1$. Khi đó ta có :

$$P = \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)^2} \right] \cdot \frac{(x-1)^2}{4x}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{4x}$$

$$P = \frac{(x+\sqrt{x}-2) - (x-\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{4x}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2 \cdot (\sqrt{x}+1)^2}{4x}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}.$$

b) Ta có $|x-5|=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=4 \\ x-5=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=1. \end{cases}$

Với $x=9$, ta có $P = \frac{\sqrt{9}+1}{2\sqrt{9}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$

Với $x=1$, không thỏa mãn điều kiện đã nêu nên biểu thức P không có giá trị.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P , biết $\frac{x}{y} = \frac{4}{9}.$

Giải

a) Điều kiện : $x \geq 0 ; y \geq 0 ; x \neq y$. Khi đó ta có :

$$P = \left[\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$P = \frac{4\sqrt{xy} - (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$P = \frac{4\sqrt{xy} - x - 2\sqrt{xy} - y}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$P = \frac{-(x - 2\sqrt{xy} + y)}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$P = \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

b) Ta có $\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \Rightarrow y = \frac{9x}{4}.$

$$\text{Do đó } P = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{9x}{4}}} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x}}{\frac{5}{2}\sqrt{x}} = -\frac{2}{5}.$$

Ví dụ 4. Cho $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2}{x + 4\sqrt{x} + 4} \right) : \left(\frac{2}{x - 4} - \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right).$

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để $P = -\frac{1}{2}.$

Giải

a) Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq 4$. Khi đó ta có :

$$P = \left[\frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2}{(\sqrt{x} + 2)^2} \right] : \left(\frac{2}{x - 4} - \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right)$$

$$P = \frac{\sqrt{x} + 2 - 2}{(\sqrt{x} + 2)^2} : \frac{2 - (\sqrt{x} + 2)}{x - 4}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)^2} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{-\sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } P &= -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x} + 2 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \\
 &\Leftrightarrow x = 36 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{x\sqrt{x}-9\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3\sqrt{x}-3}{x+3\sqrt{x}} \right).$$

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để $P > 1$.

Giải

a) Điều kiện : $x > 0$; $x \neq 9$. Khi đó ta có :

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{x-3\sqrt{x}+3}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}-3}.$$

$$\text{b) } P > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-4 > 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sqrt{x}-4 < 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 < x < 16 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Dạng 4. RÚT GỌN BIỂU THỨC RỒI CHỨNG MINH BIỂU THỨC CÓ MỘT TÍNH CHẤT NÀO ĐÓ HOẶC TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp giải

Trước tiên tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa.

Sau đó rút gọn biểu thức, biến đổi kết quả (nếu cần) rồi lập luận đi đến điều phải chứng minh hoặc đến điều phải tìm.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau là hằng số với mọi giá trị thích hợp của x và y :

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} - y} + \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{xy} - x} \right) \cdot \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}.$$

Giải

Điều kiện : $x > 0$; $y > 0$; $x \neq y$. Khi đó ta có :

$$A = \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} + \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} \right] \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$$

$$A = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$$

$$A = 1.$$

Vậy giá trị của biểu thức A luôn là hằng số với mọi giá trị thích hợp của x và y .

Ví dụ 2. Cho biểu thức $B = \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$

a) Rút gọn B .

b) Chứng minh rằng B luôn luôn có giá trị không âm với mọi giá trị thích hợp của x.

Giải

a) Điều kiện : $x \geq 0$. Khi đó ta có :

$$B = \frac{x+2+(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)-(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{x+2+x-1-x+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}.$$

b) Ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0$

$$x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Do đó } B = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0.$$

Ví dụ 3. Cho biểu thức $C = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} - 1 \right)$.

a) Rút gọn C.

b) Chứng minh rằng C luôn luôn có giá trị âm với mọi giá trị thích hợp của x.

Giải

a) Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq 1$. Khi đó ta có :

$$C = \left[\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \right] : \frac{\sqrt{x}-x-1}{x+1}$$

$$C = \frac{x+1-2}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \cdot \frac{-(x+1)}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$C = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \cdot \frac{-(x+1)}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$C = \frac{-(\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1}.$$

b) Ta có $x \geq 0$; $x \neq 1$ nên $-(\sqrt{x}+1) < 0$;

$$x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Do đó $C = \frac{-(\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} < 0$ với mọi giá trị thích hợp của x .

Ví dụ 4. Cho biểu thức $D = \left(2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-3}\right) : \left[\frac{6\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right]$.

a) Rút gọn D .

b) Chứng minh rằng $D < \frac{3}{2}$.

Giải

a) Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq \frac{9}{4}$. Khi đó ta có :

$$D = \frac{2(2\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}-3} : \frac{6\sqrt{x}+1 + \sqrt{x}(2\sqrt{x}-3)}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}$$

$$D = \frac{4\sqrt{x}-6-\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-3} : \frac{6\sqrt{x}+1+2x-3\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}$$

$$D = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-3} \cdot \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{2x+3\sqrt{x}+1}$$

$$D = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-3} \cdot \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$D = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1}.$$

$$\text{b) Xét hiệu } D - \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1} - \frac{3}{2} = \frac{6\sqrt{x}-10-6\sqrt{x}-3}{2(2\sqrt{x}+1)} = \frac{-13}{2(2\sqrt{x}+1)} < 0.$$

$$\text{Vậy } D < \frac{3}{2}.$$

Nhận xét : Về mặt phương pháp, muốn chứng minh $D < \frac{3}{2}$ ta chứng minh

$$D - \frac{3}{2} < 0.$$

Ví dụ 5. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1} \right).$

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Giải

a) Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq 1$. Khi đó ta có :

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{2(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-4)}{\sqrt{x}-1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

$$\text{b) Ta có } P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{1}{1} = 1 \text{ vì } \sqrt{x} \geq 0.$$

Do đó $\max P = 1$ (đạt được khi $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

Ví dụ 6. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{14}{9-x} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2}$.

a) Rút gọn Q.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của Q.

Giải

a) Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq 9$. Khi đó ta có :

$$Q = \frac{(\sqrt{x}-3)^2 + (\sqrt{x}+3)^2 + 14}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

$$Q = \frac{x-6\sqrt{x}+9+x+6\sqrt{x}+9+14}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

$$Q = \frac{2x+32}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

$$Q = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } Q &= \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9+25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} \\ &= \sqrt{x}+3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6 \\ &\geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{25}{\sqrt{x}+3}} - 6 \quad (\text{bất đẳng thức Cô-si}) \\ &\geq 10 - 6 = 4. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x}+3 = \frac{25}{\sqrt{x}+3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+3 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}).$$

Vậy $\min Q = 4$ khi $x = 4$.

Dạng 5. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

Biến đổi vế này thành vế kia hoặc biến đổi cả hai vế cùng bằng một biểu thức thứ ba.

Ví dụ 1. Chứng minh đẳng thức sau với $x > 0$; $y \geq 0$ và $x \neq y$:

$$\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{xy}}{x - y} \right) : \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Giải

Xét vế trái T :

$$T = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{xy}}{x - y} \right) : \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$T = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$T = \frac{x + 2\sqrt{xy} + y - 4\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$T = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$T = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Ta thấy vế trái đúng bằng vế phải nên đẳng thức đã cho là đúng.

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức sau với $x, y > 0$ và $x \neq y$:

$$\left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x - y) = 1 - \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Giải

Xét vế trái T :

$$T = \left[\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right] \cdot \frac{1}{x - y}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Xét về phải P :

$$P = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Rõ ràng $T = P$, suy ra điều phải chứng minh.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{6} + 3\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} + 12\sqrt{\frac{1}{6}}$;

b) $6\sqrt{a} + 3\sqrt{25a^3} - 2\sqrt{36ab^2} - 2\sqrt{9a}$ với $a, b > 0$.

2. Biến đổi biểu thức $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ về dạng $\frac{m}{x^2-1}\sqrt{x^2-1}$, trong đó $x > 1$.

Tính giá trị của m.

3. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức P với $x = 0,36$:

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} - \frac{3}{3 - \sqrt{x}} - \frac{6\sqrt{x}}{x - 9}.$$

4. Chứng minh đẳng thức sau với $x \geq 0$; $y > 0$; $y \neq 1$; $x \neq y$:

$$\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) \cdot \frac{\sqrt{y} - 1}{y - \sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{x}}{x - y}.$$

5. Cho biểu thức $P = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

6*. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-36} - \frac{\sqrt{x}-6}{x+6\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}-36\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-3)(x-2\sqrt{x}+3)}$.

a) Rút gọn P.

b) Với giá trị nào của x thì P có giá trị lớn nhất ? Giá trị lớn nhất đó là bao nhiêu ?

7*. Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $2\sqrt{6}$; b) $3(5a-4b)\sqrt{a}$.

2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn được $\frac{2}{x^2-1}\sqrt{x^2-1}$, suy ra $m=2$.

3. $P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x \geq 0$; $x \neq 9$. Khi $x=0,36$, ta có $P = -\frac{2}{3}$.

4. Rút gọn vế trái được $\frac{4\sqrt{xy}}{x-y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{x}}{x-y}$.

5. a) $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$); b) $x \in \{1; 4\}$.

6* a) $P = \frac{6}{x-2\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x > 0$; $x \neq 9$; $x \neq 36$.

b) $P = \frac{6}{(\sqrt{x}-1)^2+2} \leq \frac{6}{2} = 3$ (vì $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$).

Suy ra $\max P = 3$, đạt được khi $x=1$.

$$7. a) P = \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} \quad (x \geq 0; x \neq 1).$$

$$b) P = \frac{5\sqrt{x} + 15 - 17}{\sqrt{x} + 3} = 5 - \frac{17}{\sqrt{x} + 3}$$

$$P \geq 5 - \frac{17}{3} \quad (\text{vì } \sqrt{x} \geq 0)$$

$$P \geq -\frac{2}{3} \quad (\text{dấu "=" xảy ra khi } x = 0).$$

$$\text{Vậy } \min P = -\frac{2}{3}, \text{ đạt được khi } x = 0.$$

§9. CĂN BẬC BA

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Khái niệm căn bậc ba

Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.

$$\sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = a.$$

$$\text{Như vậy, } \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a.$$

Nhận xét :

- Căn bậc ba của số dương là số dương ;
- Căn bậc ba của số âm là số âm ;
- Căn bậc ba của số 0 là số 0.

2. Tính chất

- $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$;
- $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$;
- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ (với $b \neq 0$).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM CĂN BẬC BA CỦA MỘT SỐ

Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa căn bậc ba của một số :

$$\sqrt[3]{a^3} = a.$$

Ví dụ 1. Hãy tìm

- a) $\sqrt[3]{216}$; b) $\sqrt[3]{729}$; c) $\sqrt[3]{1331}$.

Giải

- a) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$;
b) $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$;
c) $\sqrt[3]{1331} = \sqrt[3]{11^3} = 11$.

Ví dụ 2. Hãy tìm

- a) $\sqrt[3]{-343}$; b) $\sqrt[3]{-1000}$; c) $\sqrt[3]{-1728}$.

Giải

- a) $\sqrt[3]{-343} = \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$;
b) $\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{(-10)^3} = -10$;
c) $\sqrt[3]{-1728} = \sqrt[3]{(-12)^3} = -12$.

Ví dụ 3. Hãy tìm

- a) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; b) $\sqrt[3]{-\frac{125}{512}}$; c) $\sqrt[3]{-0,064}$.

Giải

- a) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3}$;

$$b) \sqrt[3]{-\frac{125}{512}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{5}{8}\right)^3} = -\frac{5}{8};$$

$$c) \sqrt[3]{-0,064} = \sqrt[3]{(-0,4)^3} = -0,4.$$

Dạng 2. SO SÁNH

Phương pháp giải

- Đưa thừa số vào trong dấu căn : $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}$.
- So sánh hai số trong dấu căn : $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

Ví dụ 1. So sánh

$$a) 7 \text{ và } \sqrt[3]{345}; \quad b) 2\sqrt[3]{6} \text{ và } 3\sqrt[3]{2}.$$

Giải

$$a) 7 = \sqrt[3]{343} < \sqrt[3]{345};$$

$$b) 2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{8 \cdot 6} = \sqrt[3]{48};$$

$$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}.$$

$$48 < 54 \text{ nên } 2\sqrt[3]{6} < 3\sqrt[3]{2}.$$

Ví dụ 2. So sánh

$$a) \frac{2}{3}\sqrt[3]{18} \text{ và } \frac{3}{4}\sqrt[3]{12}; \quad b) \sqrt[3]{130} + 1 \text{ và } 3\sqrt[3]{12} - 1.$$

Giải

$$a) \text{Ta có } \frac{2}{3}\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 18} = \sqrt[3]{\frac{16}{3}} = \sqrt[3]{5\frac{1}{3}};$$

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 12} = \sqrt[3]{\frac{81}{16}} = \sqrt[3]{5\frac{1}{16}}.$$

$$\text{Vì } 5\frac{1}{3} > 5\frac{1}{16} \text{ nên } \frac{2}{3}\sqrt[3]{18} > \frac{3}{4}\sqrt[3]{12}.$$

b) Ta có $\sqrt[3]{130} + 1 > \sqrt[3]{125} + 1 = 5 + 1 = 6$;

$$3\sqrt[3]{12} - 1 = \sqrt[3]{27 \cdot 12} - 1 = \sqrt[3]{324} - 1 < \sqrt[3]{343} - 1 = 7 - 1 = 6.$$

Vậy $\sqrt[3]{130} + 1 > 3\sqrt[3]{12} - 1$.

Ví dụ 3. Cho $a < 0$, hỏi số nào lớn hơn trong hai số $\sqrt[3]{2a}$ và $\sqrt[3]{3a}$?

Giải

Ta có $2 < 3$ suy ra $2a > 3a$ (vì $a < 0$).

Do đó $\sqrt[3]{2a} > \sqrt[3]{3a}$.

Dạng 3. THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH

Phương pháp giải

Vận dụng định nghĩa căn bậc ba của một số, các tính chất nhân các căn bậc ba, chia các căn bậc ba.

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64}$;

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128}$.

Giải

a) Ta có $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64} = 2 + (-3) + (-4) = -5$.

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$.

Ví dụ 2. Tính

a) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13,5} - \sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15}$;

b) $(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$.

Giải

a)
$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13,5} - \sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15} \\ &= \sqrt[3]{16 \cdot 13,5} - \sqrt[3]{120 : 15} \\ &= \sqrt[3]{216} - \sqrt[3]{8} \\ &= 6 - 2 = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{b) } (\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1) \\
 &= \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1 \\
 &= 2 + 1 = 3.
 \end{aligned}$$

Nhận xét : Để tính tích trên bạn có thể dùng hằng đẳng thức :

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

$$\text{Ta có } (\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1) = (\sqrt[3]{2})^3 + 1^3 = 2 + 1 = 3.$$

Ví dụ 3. Tính

$$\text{a) } (\sqrt[3]{5} + 1)^3 - 3\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5} + 1); \quad \text{b) } (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})^3 + 6\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - 1).$$

Giải

$$\text{a) Ta có } (\sqrt[3]{5} + 1)^3 - 3\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5} + 1) = 5 + 3\sqrt[3]{25} + 3\sqrt[3]{5} + 1 - 3\sqrt[3]{25} - 3\sqrt[3]{5} = 6.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})^3 + 6\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - 1) &= 4 - 3\sqrt[3]{32} + 3\sqrt[3]{16} - 2 + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} \\
 &= 4 - 6\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} - 2 + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} = 2.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính $A = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.

Giải

Để tính giá trị của A, ta tính A^3 sau đó suy ra A.

Bạn nên nhớ hằng đẳng thức $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

$$\text{Ta có } A^3 = (\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2})^3$$

$$A^3 = (\sqrt{5} + 2) - (\sqrt{5} - 2) - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \cdot (\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2})$$

$$\Rightarrow A^3 = 4 - 3A$$

$$\Rightarrow A^3 + 3A - 4 = 0 \Leftrightarrow (A - 1)(A^2 + A + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow A - 1 = 0 \text{ (vì } A^2 + A + 4 > 0)$$

$$\Leftrightarrow A = 1.$$

Vậy $A = 1$.

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức

a) $\sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x+1)}$;

b) $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}$.

Giải

a) Ta có $\sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x+1)} = \sqrt[3]{(x+1)^3} = x+1$.

b) $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \sqrt[3]{x} + 1$.

Dạng 4. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH**Phương pháp giải**

- Nếu $x^3 = a$ thì $x = \sqrt[3]{a}$.
- Nếu $\sqrt[3]{x} = b$ thì $x = b^3$.

Ví dụ 1. Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{x+7} - 3 = 1$;

b) $\sqrt[3]{1-x^2} + 2 = 0$.

Giải

a) Ta có $\sqrt[3]{x+7} - 3 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+7} = 4 \Leftrightarrow x+7 = 64 \Leftrightarrow x = 57$.

b) $\sqrt[3]{1-x^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x^2} = -2 \Leftrightarrow 1-x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$; b) $\sqrt[3]{x-3} + 3 = x$.

Giải

a) Ta có $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$

$\Leftrightarrow 10\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} = 15$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x} = 15$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 5$

$\Leftrightarrow x = 125$.

$$b) \sqrt[3]{x-3} + 3 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-3} = x-3$$

$$\Leftrightarrow x-3 = (x-3)^3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^3 - (x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)[(x-3)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-4)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{2; 3; 4\}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính

$$a) \sqrt[3]{162} \cdot \sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \quad b) \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{22\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{53\frac{1}{3}}.$$

2. Tính

$$a) \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right)^3; \quad b) \left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}\right).$$

3. Rút gọn biểu thức

$$a) \sqrt[3]{3} \cdot \left(5\sqrt[3]{18} - 3\sqrt[3]{144}\right) + \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{50}; \quad b) \left(12\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}\right)\left(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right).$$

4. Tìm x, biết :

$$a) 2\sqrt[3]{27x} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{-343x} + \sqrt[3]{-729x} = 2; \quad b) \sqrt[3]{x^3 - 9x^2} = x - 3.$$

$$5*. \text{ Tính } M = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

$$1. a) -6; \quad b) -\frac{1}{4}.$$

$$2. a) 5 + 3\sqrt[3]{18} + 3\sqrt[3]{12}; \quad b) 2.$$

$$3. a) 2\sqrt[3]{2}; \quad b) 84.$$

4. a) $-\frac{1}{8}$;

b) 1.

5. $M^3 = (5\sqrt{2} + 7) - (5\sqrt{2} - 7) - 3\sqrt{(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)}.M$

$$\Leftrightarrow M^3 = 14 - 3M$$

$$\Leftrightarrow M^3 + 3M - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow (M - 2)(M^2 + 2M + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow M - 2 = 0 \quad (\text{vì } M^2 + 2M + 7 = (M + 1)^2 + 6 > 0)$$

$$\Leftrightarrow M = 2.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Các công thức biến đổi căn thức

1. $\sqrt{A^2} = |A|.$

2. $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (\text{với } A \geq 0 ; B \geq 0).$

3. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (\text{với } A \geq 0 ; B > 0).$

4. $\sqrt{A^2B} = |A| \cdot \sqrt{B} \quad (\text{với } B \geq 0).$

5. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B} \quad (\text{với } A \geq 0 ; B \geq 0).$

$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B} \quad (\text{với } A < 0 \text{ và } B \geq 0).$

6. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} \quad (\text{với } AB \geq 0 \text{ và } B \neq 0).$

7. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (\text{với } B > 0).$

$$8. \frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2} \quad (\text{với } A \geq 0 \text{ và } A \neq B^2).$$

$$9. \frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \mp \sqrt{B}})}{A - B} \quad (\text{với } A \geq 0; B \geq 0; A \neq B).$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC, TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp giải

- Tìm điều kiện của biến để biểu thức có nghĩa (nếu cần).
- Áp dụng các công thức biến đổi căn thức, quy tắc thực hiện các phép tính về phân thức đại số để rút gọn biểu thức.
- Thay giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn rồi thực hiện các phép tính.

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau :

$$a) \sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}} ;$$

$$b) \sqrt{45,8^2 - 44,2^2} - \sqrt{6 \left[(\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 \right]}.$$

Giải

$$a) \text{ Ta có } \sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{8} : \frac{25}{8}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} - \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{9}{10} - \frac{7}{5} = -\frac{1}{2}.$$

$$b) \sqrt{45,8^2 - 44,2^2} - \sqrt{6 \left[(\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 \right]}$$

$$= \sqrt{1,6 \cdot 90} - \sqrt{6 \cdot 6} = 4,3 - 6 = 6.$$

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau :

$$\text{a) } \frac{1}{34} \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} + 4 \sqrt{\frac{32}{176^2 - 112^2}} ; \quad \text{b) } \frac{5(\sqrt{6}-1)}{\sqrt{6}+1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Giải

$$\text{a) } \frac{1}{34} \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} + 4 \sqrt{\frac{32}{176^2 - 112^2}}$$

$$= \frac{1}{34} \sqrt{\frac{41.289}{164}} + 4 \sqrt{\frac{32}{64.288}}$$

$$= \frac{1}{34} \sqrt{\frac{289}{4}} + 4 \sqrt{\frac{1}{576}}$$

$$= \frac{1}{34} \cdot \frac{17}{2} + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

$$\text{b) } \frac{5(\sqrt{6}-1)}{\sqrt{6}+1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5(\sqrt{6}-1)^2}{6-1} + \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{2-3}$$

$$= 7 - 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6} = 2.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức :

$$\text{a) } \frac{3+3\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6+2\sqrt{5}} ; \quad \text{b) } \frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}.$$

Giải

$$\text{a) Ta có } \frac{3+3\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6+2\sqrt{5}} = \frac{3(1+\sqrt{5})-\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{x\sqrt{x} + x\sqrt{y} - y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}} &= \frac{x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - y(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + y(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \\
 &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + y)} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + y)} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + y}.
 \end{aligned}$$

Điều kiện $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \neq y$.

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}.$

Giải

Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{2\sqrt{x} - 9}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}} \\
 P &= \frac{2\sqrt{x} - 9 - (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3) + (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} \\
 P &= \frac{2\sqrt{x} - 9 - x + 9 + 2x - 4\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} \\
 P &= \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{3 - 11\sqrt{x}}{9 - x}.$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{4}.$

Giải

a) Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq 9$. Khi đó ta có

$$P = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3) - 3 + 11\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$P = \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 4\sqrt{x} + 3 - 3 + 11\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$P = \frac{3x + 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}.$$

b) Ta có $x = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } P &= \frac{3 \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2} - 3} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3} - 4} \\ &= \frac{6 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 4} = \frac{(6 + 3\sqrt{3})(\sqrt{3} + 4)}{(\sqrt{3} - 4)(\sqrt{3} + 4)} \\ &= \frac{6\sqrt{3} + 24 + 9 + 12\sqrt{3}}{3 - 16} = \frac{-(33 + 18\sqrt{3})}{13}. \end{aligned}$$

Ví dụ 6. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} + \frac{5}{\sqrt{x} - 3} - \frac{6}{9 - x} \right) : \frac{6}{\sqrt{x} + 2}.$

a) Rút gọn P.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Giải

a) Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq 9$. Khi đó ta có

$$P = \frac{(\sqrt{x} - 3) + 5(\sqrt{x} + 3) + 6}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{6}$$

$$P = \frac{\sqrt{x} - 3 + 5\sqrt{x} + 15 + 6}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{6}$$

$$P = \frac{6\sqrt{x} + 18}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{6}$$

$$P = \frac{6(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}.$$

b) Ta có $P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+5}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-3}.$

P có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-3}$ có giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in U(5)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in \{\pm 1; \pm 5\}.$$

Ta có bảng sau :

$\sqrt{x}-3$	1	-1	5	-5
$\sqrt{x}$	4	2	8	-2
x	16	4	64	

Vậy khi $x \in \{4, 16, 64\}$ thì P có giá trị nguyên.

Dạng 2. RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CHỨNG MINH BIỂU THỨC CÓ MỘT TÍNH CHẤT NÀO ĐÓ

Phương pháp giải

- Trước tiên tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa.
- Rút gọn biểu thức rồi lập luận đi đến điều phải chứng minh.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{xy}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 - \frac{x+y}{x-2\sqrt{xy}+y}.$

Chứng minh rằng với mọi giá trị của x và y làm cho biểu thức P có nghĩa thì giá trị của P không phụ thuộc vào x và y .

Giải

Điều kiện : $x, y > 0$; $x \neq y$. Khi đó ta có

$$P = \frac{2}{\sqrt{xy}} : \left(\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{xy}} \right)^2 - \frac{x+y}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$$

$$P = \frac{2}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{(\sqrt{xy})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} - \frac{x+y}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$$

$$P = \frac{2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} - \frac{x+y}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$$

$$P = \frac{-(x - 2\sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} = -\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} = -1.$$

Vậy giá trị của của P không phụ thuộc vào x và y.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh rằng $P > \frac{1}{3}$.

Giải

a) Điều kiện : $x > 0$; $x \neq 9$. Khi đó ta có

$$P = \frac{x+3+\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Xét hiệu } P - \frac{1}{3} &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{x}+3-\sqrt{x}-3}{3(\sqrt{x}+3)} = \frac{2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}+3)} > 0 \quad (\text{vì } x > 0). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } P > \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh rằng biểu thức P luôn luôn âm với mọi giá trị của x làm P xác định.

Giải

a) Điều kiện : $x > 0$. Khi đó ta có

$$P = \frac{(x - \sqrt{x} + 1) - (x + 2)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} : \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{-(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$P = \frac{-\sqrt{x}}{2(x - \sqrt{x} + 1)}.$$

b) Ta có $x > 0$ nên $-\sqrt{x} < 0$,

$$x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Do đó $P < 0$ với mọi $x > 0$.

Ví dụ 4. Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1}$.

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh rằng biểu thức P luôn luôn không âm với mọi giá trị của x làm P xác định.

Giải

a) Điều kiện : $x \geq 1$. Khi đó ta có

$$P = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} - \sqrt{x})} + \frac{x(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x-1}}{-1} + x$$

$$P = x - 2\sqrt{x-1}.$$

b) Ta có $P = x - 2\sqrt{x-1} = (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1$

$$P = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0.$$

Vậy P luôn luôn không âm với mọi $x \geq 1$.

Ví dụ 5. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Giải

a) Điều kiện : $x > 0$. Khi đó ta có

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}+1+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}.$$

b) Ta có : $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$.

$$\text{Xét biểu thức ở mẫu } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 = 3.$$

$$\text{Ta có } P = \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1} \leq \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } \max P = \frac{1}{3}, \text{ đạt được khi } \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1.$$

Dạng 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

- Trước tiên tìm điều kiện để căn thức có nghĩa.
- Áp dụng các công thức biến đổi căn thức để đưa phương trình về dạng đơn giản hơn.
- Nếu hai vế đều không âm thì có thể bình phương hai vế để khử dấu căn.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\text{a) } \sqrt{25(3x-1)^2} = 10 ;$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-2}.$$

Giải

$$\text{a) Ta có } \sqrt{25(3x-1)^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow 5|3x-1| = 10 \Leftrightarrow |3x-1| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=2 \\ 3x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-2} (*)$$

Điều kiện : $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$. Khi đó ta có

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2) = (\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-3)$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 6 = x + 2\sqrt{x} - 15$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 81 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\text{a) } 5x - \sqrt{(2x-1)^2} = 2 ;$$

$$\text{b) } \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = x .$$

Giải

$$\text{a) } 5x - \sqrt{(2x-1)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 5x - |2x-1| = 2. \quad (1)$$

$$\text{Nếu } x \geq \frac{1}{2} \text{ thì (1) } \Leftrightarrow 5x - (2x-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (loại).}$$

$$\text{Nếu } x < \frac{1}{2} \text{ thì (1) } \Leftrightarrow 5x + (2x-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow 7x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{b) } \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = x. \quad \text{ĐK : } x \geq 1.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = x$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1-x=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(1-\sqrt{x-1})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{x-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

b) $B = \sqrt{x^2 - 10x + 25} + x$ với $x < 0$.

2. Tính

a) $(\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{5})(\sqrt{50} - \sqrt{5})$;

b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{3} - \frac{2\sqrt{3}-1}{4}$.

3*. Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2+1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3+2} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100+99} < \frac{9}{20}$.

4. Giải phương trình $\frac{4\sqrt{x}+2}{7\sqrt{x}-2} = \frac{2}{3}$.

5. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$.

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

c) Tìm x để $P = 1$.

6. Cho biểu thức $P = \frac{3}{\sqrt{x}} + \left(\frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm các giá trị của x để $P \geq 10$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) 4 ; b) 5

2. a) 45 ; b) $\frac{4\sqrt{3}+5}{12}$.

3. Xét dạng tổng quát của các số hạng $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)+n}$ trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.

Để thấy $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} > 0$; $(n+1)+n > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)+n} &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(2n+1)^2}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}} \\ &< \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức này với n lấy các giá trị từ 1 đến 99 ta được :

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2+1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3+2} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100+99} \\ &< \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{99}} - \frac{1}{2\sqrt{100}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

4. $x = 25$.

5. a) $\frac{2}{\sqrt{x}+1}$; b) $\sqrt{2}$; c) $x = 1$.

6. a) $\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$; b) $0 < x \leq \frac{1}{9}$; c) $x \in \{1; 9\}$.

CHƯƠNG II

HÀM SỐ BẬC NHẤT

§1. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Khái niệm hàm số

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x , và x được gọi là *biến số*.

Khi y là hàm số của x thì ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$, ...

Khi hàm số được cho bằng công thức $y = f(x)$, ta hiểu rằng biến số x chỉ lấy những giá trị mà tại đó $f(x)$ xác định. Tập hợp các giá trị đó được gọi là tập xác định của hàm số, kí hiệu là D .

Giá trị của $f(x)$ tại x_0 kí hiệu là $f(x_0)$ hay $y_0 = f(x_0)$. Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số y được gọi là hàm hằng.

2. Đồ thị của hàm số

Tập hợp " $\mathcal{G}$ " tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ gọi là *đồ thị của hàm số* $y = f(x)$.

$$M(x_0; y_0) \in \mathcal{G} \text{ hay } \mathcal{G} \text{ đi qua điểm } M(x_0; y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in D \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$$

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D trong đó D là một khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng, với mọi $x_1, x_2 \in D$:

- Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ *đồng biến* trên D .
- Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ *nghịch biến* trên D .

4. Hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.

Khi $b = 0$, hàm số có dạng $y = ax$ (đã học ở lớp 7).

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$) xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$; hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH (TXĐ) CỦA HÀM SỐ

Phương pháp giải

Hàm số $f(x)$ chứa căn bậc hai $\sqrt{A(x)}$, điều kiện: $A(x) \geq 0$.

Hàm số $f(x)$ chứa biến số ở mẫu $\frac{A(x)}{B(x)}$ (hoặc $A(x) : B(x)$), điều kiện: $B(x) \neq 0$.

Ví dụ 1. Với những giá trị nào của x thì hàm số sau đây xác định ?

$$\text{a) } y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}.$$

$$\text{b) } y = g(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}.$$

Giải

$$\text{a) } f(x) \text{ xác định khi: } x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2.$$

$$\text{b) } g(x) \text{ xác định khi: } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5.$$

Ví dụ 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y = h(x) = \frac{\sqrt{-x}}{1-x^2} : \sqrt{x}$.

Giải

$$h(x) \text{ xác định khi: } \begin{cases} -x \geq 0 \\ 1-x^2 \neq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \neq \pm 1 \\ x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \emptyset$.

(Tức là không có giá trị nào của x để hàm số xác định).

Ví dụ 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Giải

$f(x)$ xác định khi : $x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x^2}$.

Giải

$f(x)$ xác định khi : $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tập xác định $D = \{1\}$.

Chú ý : Tập xác định D của hàm số có thể có một phần tử, một vài phần tử, vô số phần tử hoặc không có phần tử nào.

Dạng 2. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA BIẾN SỐ.

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIẾN SỐ KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

Phương pháp giải

Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$.

- Thế giá trị $x = x_0 \in D$ vào biểu thức của hàm số rồi tính giá trị biểu thức (đôi khi ta rút gọn biểu thức, biến đổi x_0 rồi mới thay vào để tính toán).
- Thế giá trị $y = y_0$ ta được $y_0 = f(x)$.

Giải phương trình $f(x) = y_0$ để tìm giá trị biến số x (chú ý : chọn $x \in D$).

Ví dụ 1. Tính giá trị của hàm số $y = f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}$ tại $x = 1$; $x = -1$.

Giải

TXĐ : $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có : } f(1) = -\frac{3}{4} \cdot 1^2 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1 ;$$

$$f(-1) = -\frac{3}{4} \cdot (-1)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1.$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$. Khi đó $f(-3)$ bằng bao nhiêu ?

Giải

Điều kiện $x \neq -3$.

Vì $x = -3$ không thỏa mãn điều kiện nên không tồn tại $f(-3)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = mx + m - 1$, biết $f(2) = 8$. Tính $f(3)$.

Giải

TXĐ : $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(2) = 8 \Leftrightarrow m \cdot 2 + m - 1 = 8 \Leftrightarrow 3m = 9 \Leftrightarrow m = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x + 2 \Rightarrow f(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11.$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x - 1$. Tìm x , biết $f(x) = 0$.

Giải

TXĐ : $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có : } f(x) = 0 \Leftrightarrow (3 - 2\sqrt{2})x - 1 = 0 \Leftrightarrow (3 - 2\sqrt{2})x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

a) Tìm x , biết $f(x) = 1$;

b) Tìm x sao cho $f(x) = 0,5$;

c) Tìm m để có giá trị của x thỏa mãn $f(x) = m$.

Giải

Điều kiện : $0 \leq x \leq 1$.

a) Ta có : $f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2 = 1^2$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 1 - x = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ hoặc } \sqrt{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

b) Ta có : $f(x) = 0,5 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 0,5 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2 = 0,5^2$.

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 1 - x = 0,25$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} = -0,75 \text{ (không xảy ra vì } 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} \geq 0 \text{)}.$$

Do đó không có giá trị nào của x để $f(x) = 0,5$.

c) Ta có : $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow f^2(x) = (\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = x + 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 1 - x$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 1 \geq 1 \text{ (vì } 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} \geq 0 \text{)}.$$

Suy ra : $f(x) \geq 1$ (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 1$).

Do đó chỉ khi $m \geq 1$ thì có giá trị của x thỏa mãn $f(x) = m$.

Chú ý : Ta có thể chứng minh $f(x) \geq 1$ bằng một số cách khác như sau :

Cách 1 : Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{A} + \sqrt{B} \geq \sqrt{A+B}$ với $A, B \geq 0$ (dấu “=” xảy ra khi $A = 0$ hoặc $B = 0$).

Cách 2 : Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{A} \geq A$ với mọi A thỏa mãn điều kiện $0 \leq A \leq 1$.

Dạng 3. BIỂU DIỄN ĐIỂM TRÊN MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ,

XÁC ĐỊNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐIỂM TRÊN MẶT PHẪNG

Phương pháp giải

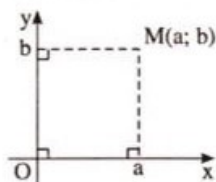
- Để biểu diễn điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ ta làm như sau :

Kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành tại điểm a .

Kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung tại điểm b .

Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm đó là điểm M .

- Xác định khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$:

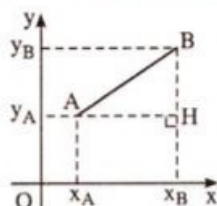


Ta có : $AH = |x_A - x_B|$; $BH = |y_A - y_B|$.

Ta có :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB = \sqrt{AH^2 + BH^2}$$

hay : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} . \quad (*)$



Ví dụ 1. Biểu diễn hai điểm $A(2 ; 1)$ và $B(4 ; 5)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
Tính khoảng cách giữa hai điểm đó.

Giải

Biểu diễn các điểm A, B như hình 1.

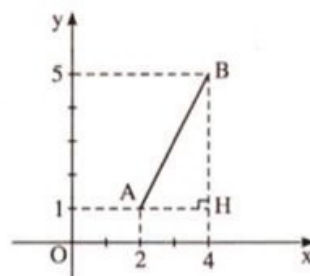
Trong $\triangle ABH$, ta có : $\widehat{H} = 90^\circ$; $AH = 4 - 2 = 2$;

$BH = 5 - 1 = 4$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} .$$



Hình 1

Chú ý : Sau này trong thực hành ta sẽ vận dụng ngay công thức (*).

Ta có $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (5 - 1)^2} = 2\sqrt{5} .$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $A(1 ; 1)$; $B(3 ; 3)$ và $C(5 ; 1)$.

a) Tính chu vi tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông cân.

Giải

a) Ta có : $AB = \sqrt{(3 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} ;$

$$AC = \sqrt{(5 - 1)^2 + (1 - 1)^2} = 4 ; BC = \sqrt{(5 - 3)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} .$$

Vậy chu vi tam giác ABC là :

$$AB + BC + AC = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 = 4(\sqrt{2} + 1) \text{ (đvđ)} .$$

b) Ta có :

$$\bullet AB = BC = 2\sqrt{2}, \text{ suy ra } \triangle ABC \text{ cân tại B.} \quad (1)$$

$$\bullet \begin{cases} AB^2 = BC^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \\ AC^2 = 4^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại B.} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABC$ vuông cân tại B.

Ví dụ 3. Cho các điểm $A(2; 4)$, $B(-1; 0)$ và $C(0; 4)$.

a) Biểu diễn các điểm A, B, C trên mặt phẳng tọa độ.

b) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.

Giải

a) Biểu diễn các điểm $A(2; 4)$, $B(-1; 0)$ và $C(0; 4)$ như hình 2.

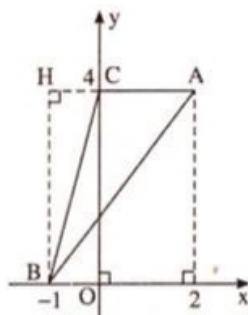
b) Ta thấy A, B, C không thẳng hàng nên A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Áp dụng công thức :

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}, \text{ ta tính được}$$

$$AB = 5; AC = 2; BC = \sqrt{17}.$$

$$\text{Chu vi tam giác ABC là : } 5 + 2 + \sqrt{17} = 7 + \sqrt{17} \text{ (đvđ).}$$

$$\text{Diện tích tam giác ABC là : } S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot CA = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ (đvdt).}$$



Hình 2

Ví dụ 4. Cho hai điểm $A(2; 4)$ và $B(-1; 0)$ trên hệ trục tọa độ Oxy.

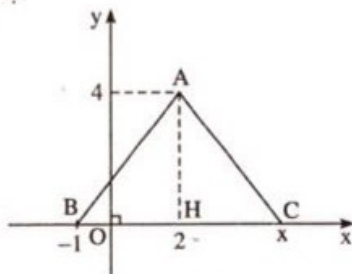
a) Biểu diễn các điểm A, B trên mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm điểm C trên trục hoành sao cho $\triangle ABC$ cân tại A.

Giải

a) Biểu diễn các điểm $A(2; 4)$, $B(-1; 0)$ như hình 3.

b) Vì C nằm trên trục hoành Ox nên tung độ của điểm C bằng 0, do đó $C(x; 0)$ với $x \neq -1$.



Hình 3

Áp dụng công thức : $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$, ta tính được $AB = 5$;

$$AC = \sqrt{(x-2)^2 + (0-4)^2}.$$

Ta có $\triangle ABC$ cân tại A $\Leftrightarrow AB = AC$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (0-4)^2} = 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = -1 \text{ (loại vì điều kiện } x \neq -1).$$

Vậy $C(5 ; 0)$ thì $\triangle ABC$ cân tại A.

Chú ý : • Ta có thể giải cách khác như sau :

$$\triangle ABC \text{ cân tại A} \Leftrightarrow HB = HC \Leftrightarrow HC = 3 \text{ (vì HB = 3)} \Leftrightarrow x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 5.$$

Do đó, nếu kết hợp với kiến thức hình học thì chúng ta có thể giải bài toán đơn giản hơn, nhanh hơn.

• Ta có thể thay đổi yêu cầu bài toán thành “Tìm điểm C trên trục hoành sao cho $\triangle ABC$ cân”. Với yêu cầu mới ta phải giải bài toán trong ba trường hợp :

- Trường hợp 1 : $\triangle ABC$ cân tại A.
- Trường hợp 2 : $\triangle ABC$ cân tại B.
- Trường hợp 3 : $\triangle ABC$ cân tại C.

Dạng 4. ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ, ĐIỂM KHÔNG THUỘC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Phương pháp giải

Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định D và có đồ thị $\mathcal{G}$, khi đó :

- $M(x_0 ; y_0)$ thuộc đồ thị $\mathcal{G}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x_0 \in D \\ y_0 = f(x_0). \end{cases}$
- $M(x_0 ; y_0)$ không thuộc đồ thị $\mathcal{G}$ khi và chỉ khi $y_0 \neq f(x_0)$ hoặc $x_0 \notin D$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$. Trong các điểm $A(9 ; 3)$, $B(4 ; -2)$, $M(-1 ; 1)$ và $N(4 + 2\sqrt{3} ; \sqrt{3} - 1)$ điểm nào không thuộc và điểm nào thuộc đồ thị ($\mathcal{G}$) của hàm số đã cho ?

Giải

Ta có : $M \notin (\mathcal{G})$, vì khi $x = -1$ thì hàm số không xác định ;

$B \notin (\mathcal{G})$, vì $\sqrt{4} = 2 \neq -2$;

$A(9 ; 3) \in (\mathcal{G})$, vì $f(9) = \sqrt{9} = 3$;

$N(4 + 2\sqrt{3} ; \sqrt{3} - 1) \notin (\mathcal{G})$, vì :

$$f(4 + 2\sqrt{3}) = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1 \neq \sqrt{3} - 1.$$

Ví dụ 2. Điểm $M(-1 ; -1)$ thuộc đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây ?

(A) $y = x^2$; (B) $y = x^4$; (C) $y = 3x + 2$; (D) $y = -x^3$.

Giải

Loại (A), (B), vì tung độ của M âm.

Loại (D), vì hoành độ và tung độ của M cùng dấu.

Chọn (C).

Ví dụ 3. Khi m thay đổi, tìm tập hợp các điểm M có tọa độ như sau :

a) $M(m ; 3)$; b) $M(2 ; m)$.

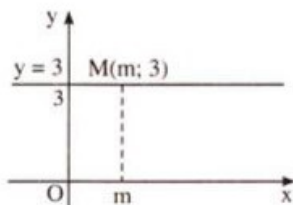
Giải

a) Ta có $f(m) = 3$, khi m thay đổi $f(m)$ luôn nhận một giá trị không đổi. Hàm số $y = f(m) = 3$ là một hàm hằng.

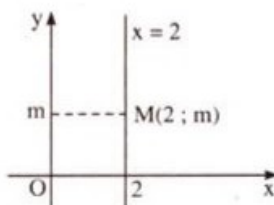
Đồ thị của hàm số $y = 3$ là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 (hình 4).

Tập hợp các điểm $M(m ; 3)$ là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 (hình 4).

b) Tập hợp các điểm $M(2 ; m)$ là đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 (hình 5).



Hình 4



Hình 5

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = (m + 1)x - 2m$.

a) Tìm m để đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $A(1 ; 1)$.

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố định với mọi m .

Giải

a) $A(1 ; 1) \in d : y = (m + 1)x - 2m \Leftrightarrow 1 = (m + 1) \cdot 1 - 2m \Leftrightarrow m = 0$.

b) $M(x_0 ; y_0) \in d : y = (m + 1)x - 2m \Leftrightarrow y_0 = (m + 1)x_0 - 2m$

$$\Leftrightarrow m(x_0 - 2) + (x_0 - y_0) = 0. \quad (1)$$

d đi qua M với mọi m khi (1) đúng với mọi m , tức là :

$$\begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2. \end{cases}$$

Vậy d luôn đi qua điểm $M(2 ; 2)$ cố định với mọi m .

Dạng 5. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC NHẤT

Phương pháp giải

Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng $y = ax + b$, trong đó a và b là các số cho trước và $a \neq 0$.

Ví dụ 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất ?

a) $y = 1 - 3x$;

b) $y = 2x^2 + x - 5$;

c) $y = x^2 + x(\sqrt{2} - x) + 3$;

d) $y = (\sqrt{3} - 1)^2 x + 1$.

Giải

a) Hàm số $y = 1 - 3x$ hay $y = -3x + 1$ có dạng $y = ax + b$, trong đó $a = -3 \neq 0$, nên $y = -3x + 1$ là hàm số bậc nhất.

b) Hàm số $y = 2x^2 + x - 5$ không phải là hàm số bậc nhất vì sau khi thu gọn không có dạng $y = ax + b$.

c) Hàm số $y = x^2 + x(\sqrt{2} - x) + 3 = x^2 + \sqrt{2}x - x^2 + 3 = \sqrt{2}x + 3$ là hàm số bậc nhất vì hàm số có dạng $y = ax + b$, trong đó $a = \sqrt{2} \neq 0$.

d) Hàm số $y = (\sqrt{3} - 1)^2 x + 1$ là hàm số bậc nhất vì hàm số có dạng $y = ax + b$, trong đó $a = (\sqrt{3} - 1)^2 \neq 0$.

Ví dụ 2. Cho ba hàm số $f(x) = x^2 + 3$; $g(x) = x^2 - x + 1$ và $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

Xét xác khẳng định :

(I) $f(x) - g(x)$ là hàm số bậc nhất ;

(II) $h(x) - g(x)$ là hàm số bậc nhất ;

(III) $f(x) + g(x) - h(x)$ là hàm số bậc nhất.

Trong các khẳng định trên, khẳng định đúng là :

(A) Chi (I)

(B) Chi (II)

(C) Chỉ (I) và (II)

(D) Chỉ (I) và (III).

Giải

Ta thực hiện phép tính cộng, trừ các đa thức được kết quả :

$f(x) - g(x) = x + 2$, là hàm số bậc nhất ;

$h(x) - g(x) = x^2 + 4x - 2$, không là hàm số bậc nhất ;

$f(x) + g(x) - h(x) = -4x + 5$, là hàm số bậc nhất.

Do đó, chọn (D).

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = (1 - 2m)x + m^2 + 2$.

Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

Giải

Hàm số $y = f(x) = (1 - 2m)x + m^2 + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi :

$$1 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = (m^2 - m)x^2 + mx + 2$.

Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

Giải

Hàm số $y = f(x) = (m^2 - m)x^2 + mx + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m^2 - m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Khi $m = 1$, ta có hàm số $y = x + 2$, là hàm số bậc nhất.

Dạng 6. XÁC ĐỊNH TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

Phương pháp giải

- Vận dụng định nghĩa : Với mọi $x_1; x_2$ thuộc miền xác định D là một khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng :

Nếu $x_1 > x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên D .

Nếu $x_1 > x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên D .

- Trong thực hành giải toán ta làm như sau : Với mọi $x_1; x_2 \in D, x_1 \neq x_2$:

Nếu $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên D .

Nếu $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên D .

- Hàm số $y = f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) :

Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$;

Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Chứng minh hàm số $y = f(x) = \sqrt{x+3}$ đồng biến trên tập xác định.

Giải

Hàm số xác định khi $x \geq -3$. Lấy x_1, x_2 bất kì thoả mãn $x_1, x_2 \geq -3, x_1 \neq x_2$, ta có :

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{\sqrt{x_1+3} - \sqrt{x_2+3}}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1+3) - (x_2+3)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1+3} + \sqrt{x_2+3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1+3} + \sqrt{x_2+3}} > 0.\end{aligned}$$

Do đó hàm số $y = f(x) = \sqrt{x+3}$ đồng biến trên tập xác định.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) = m - 2x$ (m là hằng số). Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Giải

Cách 1. Tập xác định : $\mathbb{R}$. Lấy x_1, x_2 thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $x_1 < x_2$, ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = (m - 2x_1) - (m - 2x_2) = m - 2x_1 - m + 2x_2 = 2(x_2 - x_1) > 0.$$

Do đó $f(x_1) > f(x_2)$, suy ra hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cách 2. $y = f(x) = m - 2x = -2x + m$ là hàm số bậc nhất có hệ số $a = -2 < 0$, nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Tìm m để hàm số $y = (m^2 - 2)x + 1$ (m là tham số) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải

Hàm số $y = (m^2 - 2)x + 1$ là hàm số bậc nhất khi $m^2 \neq 2$ với hệ số $a = m^2 - 2$.

Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -\sqrt{2}$ hoặc $m > \sqrt{2}$.

Chú ý: Khi $m = -\sqrt{2}$ hoặc $m = \sqrt{2}$ thì $y = 0x + 1 = 1$ nên hàm số là hàm hằng. Khi đó đồ thị của hàm số là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Ví dụ 4. Cho hai hàm số $f(x) = mx + 2012$ và $g(x) = (m^2 + 1)x - 2011$ (m là tham số).

Xét tính **Đúng, Sai** của các khẳng định sau :

- (A) $f(x) + g(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$;
- (B) $g(x) - f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$;
- (C) $f(x) - g(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Giải

Ta thực hiện phép tính cộng, trừ các đa thức, được kết quả :

$f(x) + g(x) = (m^2 + m + 1)x + 1$ là hàm số bậc nhất, với hệ số

$$a = m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } m \text{ nên khẳng định (A) đúng.}$$

$g(x) - f(x) = (m^2 - m + 1)x - 4023$ là hàm số bậc nhất, với hệ số

$$a = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } m \text{ nên khẳng định (B) đúng.}$$

$f(x) - g(x) = -(m^2 - m + 1)x + 4023$ là hàm số bậc nhất, với hệ số

$$a = -(m^2 - m + 1) = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0 \text{ với mọi } m \text{ nên khẳng định (C) đúng.}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho hai hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{3}$ và $y = g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.
 - Tìm tập xác định của các hàm số đã cho.
 - Tính $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $g(0)$, $g(1)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Cho các điểm $A(2; 3)$, $B(-2; 0)$ và $C(4; 3)$.
 - Biểu diễn các điểm A, B, C trên mặt phẳng tọa độ.
 - Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.
 - Tìm điểm M trên trục hoành sao cho tam giác ABM cân tại A.
 - Tìm điểm N trên trục tung sao cho tam giác ABN cân tại B.
- Cho hàm số $y = f(x) = -mx + m - 3$. Biết $f(-2) = 6$, tính $f(-3)$.
- Cho hàm số $y = f(x) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Tìm x sao cho $f(x) = \sqrt{3}$.
- Cho hàm số $y = f(x) = -mx + 4$.
 - Tìm m để đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $A(-1; -1)$.
 - Chứng minh rằng đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.
- Với các giá trị nào của m thì hàm số sau là hàm số bậc nhất?
 - $y = (4m^2 - 1)x$;
 - $y = \sqrt{5-m}(x-2)$;
 - $y = m^2x^2 + m(x+2-4x^2) + 1 - 2x$.
- Xác định tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:
 - $y = f(x) = (1 - \sqrt{2})x + 1$, với $x \in \mathbb{R}$;
 - $y = f(x) = \sqrt{x-2}$, với $x \geq 2$;
 - $y = f(x) = x^2 + 2$, với $x < 0$.
- Cho hàm số $y = f(x) = (1 - \sqrt{3})x - 1$ và $f(m+1)$, $f(m + \sqrt{2})$ là hai giá trị tương ứng của hàm số tại $x = m+1$, $x = m + \sqrt{2}$. Khi đó:
(A) $f(m+1) > f(m + \sqrt{2})$;

- (B) $f(m+1) < f(m+\sqrt{2})$;
 (C) $f(m+1) = f(m+\sqrt{2})$;
 (D) Không thể so sánh được vì phụ thuộc vào giá trị của m.
9. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $f(x)$ bậc ba với hệ số nguyên sao cho $f(7) = 2010$ và $f(11) = 2012$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) Hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{3}$ xác định khi : $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Hàm số $y = g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ xác định khi :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

- b) $f(2) = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$ không xác định ;

$$g(0) = 1 ; g(1) = 1 ; g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

2. a) Biểu diễn các điểm $A(2 ; 3)$, $B(-2 ; 0)$ và $C(4 ; 3)$ như hình 6.

b) Ta thấy A, B, C không thẳng hàng nên A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Áp dụng công thức : $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$, ta tính được

$$AB = 5 ; AC = 2 ; BC = 3\sqrt{5}.$$

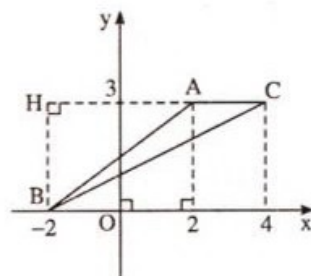
Chu vi tam giác ABC là :

$$5 + 2 + 3\sqrt{5} = 7 + 3\sqrt{5}.$$

Diện tích tam giác ABC là : $S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$ (dvdv).

- c) $M(6 ; 0)$.

- d) $N(0 ; \sqrt{21})$ hoặc $N(0 ; -\sqrt{21})$.



Hình 6

3. $f(-2) = 6 \Leftrightarrow -m(-2) + m - 3 = 6 \Leftrightarrow 3m = 9 \Leftrightarrow m = 3$
 $\Rightarrow f(x) = -3x \Rightarrow f(-3) = 9.$
4. $f(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + \sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = -(\sqrt{6} + 2).$
5. a) $A(-1; -1) \in d : y = -mx + 4 \Leftrightarrow -1 = -m(-1) + 4 \Leftrightarrow m = -5.$
 b) $M(x_0; y_0) \in d : y = -mx + 4 \Leftrightarrow y_0 = -mx_0 + 4 \Leftrightarrow mx_0 + y_0 - 4 = 0. \quad (1)$
 d đi qua M với mọi m khi (1) đúng với mọi m, tức là : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 4. \end{cases}$
 Vậy d luôn đi qua điểm $M(0; 4)$ cố định với mọi m.
6. a) $m \neq \pm \frac{1}{2}$; b) $m < 5$; c) $m = 0$ hoặc $m = 4.$
7. a) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2$, ta có :
 $f(x_1) - f(x_2) = (1 - \sqrt{2})(x_1 - x_2) < 0$, vì $1 - \sqrt{2} < 0, x_1 - x_2 > 0.$
 Do đó $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}.$
 b) Với mọi $x_1, x_2 \geq 2; x_1 \neq x_2$, ta có :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1 - 2} - \sqrt{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{(\sqrt{x_1 - 2} - \sqrt{x_2 - 2})(\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2})}{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2}} > 0.$$

 Do đó, $f(x)$ là hàm số đồng biến với mọi $x \geq 2.$
 c) Với mọi $x_1, x_2 < 0; x_1 > x_2$, ta xét :
 $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 + 2) - (x_2^2 + 2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$
 vì $x_1 - x_2 > 0, x_1 + x_2 < 0$ với mọi $x_1, x_2 < 0; x_1 > x_2$, do đó hàm số
 nghịch biến với mọi $x < 0.$
8. Hàm số $y = f(x) = (1 - \sqrt{3})x - 1$ là hàm số nghịch biến vì $a = 1 - \sqrt{3} < 0.$
 Ta có : $f(m + 1) > f(m + \sqrt{2})$ vì $m + 1 < m + \sqrt{2}$. Chọn (A).

9. Giả sử có đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ thỏa mãn $f(7) = 2010$, $f(11) = 2012$. Ta có :
- $$f(11) - f(7) = (a.11^3 + b.11^2 + c.11 + d) - (a.7^3 + b.7^2 + c.7 + d)$$
- $$= a.\underbrace{(11^3 - 7^3)}_{:4} + b.\underbrace{(11^2 - 7^2)}_{:4} + c.\underbrace{(11 - 7)}_{:4}.$$
- Từ đó suy ra : $[f(11) - f(7)] : 4$. (*)
- Mặt khác $f(11) = 2012$, $f(7) = 2010$ nên $f(11) - f(7) = 2$. (**)
- Từ (*) và (**) suy ra $2 : 4$ (vô lí), suy ra điều giả sử là sai (đpcm).

§3. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng (kí hiệu là (d)) :
- + Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b hay (d) luôn đi qua điểm $B(0 ; b)$;
 - + Song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$; trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

Chú ý. • b được gọi là tung độ gốc của đường thẳng.

- Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) còn được gọi là đường thẳng $y = ax + b$ hoặc đường thẳng $ax - y + b = 0$.

2. Cách vẽ đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Trường hợp 1 : Khi $b = 0$ thì $y = ax$. Đồ thị của hàm số $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc toạ độ $O(0 ; 0)$ và điểm $A(1 ; a)$.

Trường hợp 2 : $y = ax + b$ với $a \neq 0$ và $b \neq 0$:

Cách 1. + Xác định hai điểm bất kì của đồ thị.

Chẳng hạn cho $x = 1$ thì $y = a.1 + b = a + b$, ta được điểm $B(1 ; a + b)$; cho $x = 2$ thì $y = a.2 + b$, ta được điểm $C(2 ; 2a + b)$.

+ Vẽ đường thẳng BC ta được đồ thị hàm số.

Cách 2. + Xác định giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ :

• Cho $x = 0 \Rightarrow y = a.0 + b = b \Rightarrow M(0 ; b)$ thuộc trục tung.

• Cho $y = 0 \Rightarrow 0 = a.x + b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow N(-\frac{b}{a} ; 0)$ thuộc trục hoành.

+ Vẽ đường thẳng MN ta được đồ thị của hàm số.

Chú ý. Khi $b = 0$ thì $y = ax$; đồ thị của hàm số $y = ax$ đi qua gốc tọa độ $O(0 ; 0)$.

Khi $b \neq 0$ thì đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $B(0 ; b)$.

Khi $a > 0$ thì đồ thị hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng có chiều đi lên từ trái sang phải (hàm số đồng biến).

Khi $a < 0$ thì đồ thị hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng có chiều đi xuống từ trái sang phải (hàm số nghịch biến).

Đường thẳng $y = x$ là đường phân giác của góc phần tư thứ (I) và thứ (III).

Đường thẳng $y = -x$ là đường phân giác của góc phần tư thứ (II) và thứ (IV).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG.

ĐIỂM KHÔNG THUỘC ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải

Cho điểm $M(x_0 ; y_0)$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Khi đó :

$$M \in (d) \Leftrightarrow y_0 = ax_0 + b ;$$

$$M \notin (d) \Leftrightarrow y_0 \neq ax_0 + b.$$

Ví dụ 1. Cho đường thẳng (d) : $y = -3x + 1$. Trong các điểm $M(-1 ; 2)$, $N(0 ; 1)$, $P(\frac{1}{3} ; 0)$, hãy xác định các điểm thuộc và không thuộc đường thẳng (d).

Giải

Ta có : $M(-1 ; 2) \notin (d)$, vì khi $x = -1$ thì $-3(-1) + 1 = 3 + 1 = 4 \neq 2$;

$N(0 ; 1) \in (d)$, vì khi $x = 0$ thì $-3.0 + 1 = 0 + 1 = 1$;

$P(\frac{1}{3} ; 0) \in (d)$, vì khi $x = \frac{1}{3}$ thì $-3. \frac{1}{3} + 1 = -1 + 1 = 0$.

Ví dụ 2. Điểm $M(\sqrt{2}; 1)$ thuộc đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây ?

(A) $y = x + 1 - \sqrt{2}$; (B) $x + y - \sqrt{2} + 1 = 0$;

(C) $y = \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}$; (D) $x + y - \sqrt{2} = 0$.

Giải

Kí hiệu các đường thẳng ở các trường hợp (A), (B), (C) và (D) lần lượt là

$(d_1) : y = x + 1 - \sqrt{2}$, $(d_2) : y = -x + \sqrt{2} - 1$,

$(d_3) : y = \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}$ và $(d_4) : y = -x + \sqrt{2}$.

Ta có : $M(\sqrt{2}; 1) \in (d_1)$, vì khi $x = \sqrt{2}$ thì $\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$;

$M(\sqrt{2}; 1) \notin (d_2)$, vì khi $x = \sqrt{2}$ thì $-\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = -1 \neq 1$;

$M(\sqrt{2}; 1) \notin (d_3)$, vì khi $x = \sqrt{2}$ thì $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} \neq 1$;

$M(\sqrt{2}; 1) \notin (d_4)$, vì khi $x = \sqrt{2}$ thì $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \neq 1$.

Chọn (A).

Ví dụ 3. Cho đường thẳng $(d) : y = -2x + 3$. Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-m; -3)$.

Giải

Đường thẳng $(d) : y = -2x + 3$ đi qua điểm $A(-m; -3)$ khi :

$$-3 = -2 \cdot (-m) + 3 \Leftrightarrow 2m = -6 \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy đường thẳng $(d) : y = -2x + 3$ đi qua điểm $A(-m; -3)$ khi $m = -3$.

Ví dụ 4. Cho đường thẳng $(d) : y = (m + 2)x + 3m - 1$. Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-2; 3)$.

Giải

$M(-2; 3) \in (d) : y = (m + 2)x + 3m - 1$ khi :

$$3 = (m + 2)(-2) + 3m - 1 \Leftrightarrow 3 = -2m - 4 + 3m - 1 \Leftrightarrow m = 8.$$

Vậy đường thẳng $(d) : y = (m + 2)x + 3m - 1$ đi qua điểm $M(-2; 3)$ khi $m = 8$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng đường thẳng $(m + 2)x + y + 4m - 3 = 0$ luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .

Giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc (d) , ta có :

$$(m + 2)x_0 + y_0 + 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow m(x_0 + 4) + (2x_0 + y_0 - 3) = 0.$$

Đường thẳng (d) luôn đi qua $M(x_0; y_0)$ với mọi m khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} x_0 + 4 = 0 \\ 2x_0 + y_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = 11. \end{cases}$$

Vậy (d) luôn đi qua điểm cố định $M(-4; 11)$ với mọi giá trị của m .

Dạng 2. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải

Gọi hàm số cần tìm là : $y = ax + b$ ($a \neq 0$), ta phải tìm a và b .

- + Với điều kiện của bài toán ta xác định được các hệ thức liên hệ giữa a và b .
- + Giải phương trình để tìm a, b .

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc nhất $y = -2x + b$. Xác định b nếu :

- a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.
- b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; 2)$.

Giải

- a) Đồ thị hàm số $y = -2x + b$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2, nên $b = 2$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = -2x + 2$.

- b) Đồ thị hàm số $y = -2x + b$ đi qua điểm $A(-1; 2)$ khi :

$$2 = (-2).(-1) + b \Leftrightarrow 2 = 2 + b \Leftrightarrow b = 0.$$

Vậy $b = 0$ thì $y = -2x$ đi qua điểm $A(-1; 2)$.

Ví dụ 2. Xác định đường thẳng (d), biết (d) có dạng $y = ax - 4$ và đi qua điểm $A(-3; 2)$.

Giải

Đường thẳng (d) : $y = ax - 4$ đi qua điểm $A(-3; 2)$ khi :

$$2 = a.(-3) - 4 \Leftrightarrow -3a = 2 + 4 \Leftrightarrow a = -2.$$

Vậy (d) có phương trình $y = -2x - 4$ đi qua điểm $A(-3; 2)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = (m - 2)x + m + 2$. Xác định m , biết :

- Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 .
- Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

Giải

a) Đồ thị (d) của hàm số $y = (m - 2)x + m + 2$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 nên $A(-2 ; 0)$ thuộc (d).

$$\text{Do đó : } 0 = (m - 2).(-2) + m + 2 \Leftrightarrow -2m + 4 + m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

b) Đồ thị (d) của hàm số $y = (m - 2)x + m + 2$ đi qua gốc tọa độ nên $O(0 ; 0)$ thuộc (d).

$$\text{Do đó : } 0 = (m - 2).0 + m + 2 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Ví dụ 4. Xác định đường thẳng đi qua hai điểm $A(-3 ; 0)$ và $B(0 ; 2)$.

Giải

Gọi phương trình đường thẳng AB là : $y = ax + b$.

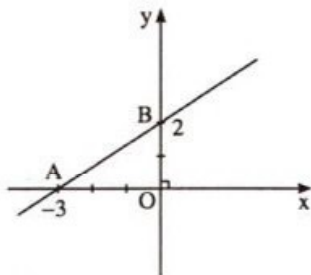
Ta có :

$$A(-3 ; 0) \in AB \Rightarrow 0 = a.(-3) + b \text{ hay } b = 3a.$$

$$B(0 ; 2) \in AB \Rightarrow 2 = a.0 + b \text{ hay } b = 2.$$

$$\text{Từ đó suy ra } a = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng AB là : } y = \frac{2}{3}x + 2.$$



Hình 7

Ví dụ 5. Cho đường thẳng $(d_1) : y = 2012x + 2$. Xác định đường thẳng (d_2) sao cho (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

Giải

Đồ thị hàm số $y = 2012x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 vì có tung độ gốc là $b = 2 \Rightarrow$ đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm $A(0 ; 2)$ nằm trên trục tung.

Vì (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung nên $A(0 ; 2)$ thuộc (d_2) .

Do đó (d_2) có phương trình $y = 2$ hoặc $x = 0$ (trục tung) hoặc $y = ax + 2$ (với $a \neq 0, a \neq 2012$).

Chú ý. Có vô số đường thẳng đi qua điểm $A(0 ; 2)$.

Dạng 3. VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Phương pháp giải

- Tìm hai điểm thuộc đồ thị hàm số bằng cách cho x nhận hai giá trị xác định rồi tính hai giá trị tương ứng của y (thông thường ta lấy hai điểm đó là giao điểm của đồ thị với trục hoành và trục tung).
- Đường thẳng đi qua hai điểm vừa tìm được là đồ thị hàm số cần vẽ.

Ví dụ 1. Cho các hàm số sau : $y = -x + 2$ (1) ; $y = 2x - 1$ (2).

- a) Vẽ đồ thị các hàm số (1), (2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
b) Xác định tọa độ giao điểm I của (1) và (2).

Giải

a) (Hình 8) * Vẽ đồ thị hàm số (1) :

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0 ; 2) \in Oy$;

$y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2 ; 0) \in Ox$.

Đường thẳng AB là đồ thị hàm số

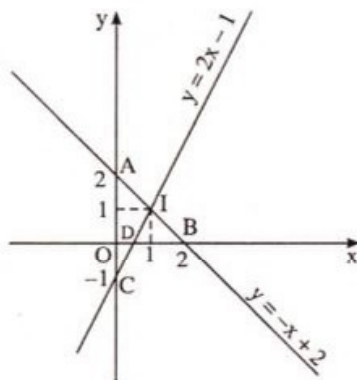
$$y = -x + 2.$$

* Vẽ đồ thị hàm số (2) :

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow C(0 ; -1) \in Oy$;

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow D(\frac{1}{2} ; 0) \in Ox$.

Đường thẳng CD là đồ thị hàm số $y = 2x - 1$.



Hình 8

b) *Cách 1.* Từ giao điểm I của hai đồ thị ta vẽ đường thẳng vuông góc với trục hoành, cắt trục này tại điểm có hoành độ là 1 ; vẽ đường thẳng vuông góc với trục tung, cắt trục này tại điểm có tung độ là 1. Vậy tọa độ giao điểm là $I(1 ; 1)$.

Cách 2. Gọi tọa độ giao điểm I là $(x_I ; y_I)$.

Vì I là giao điểm của AB và CD nên I vừa thuộc AB, vừa thuộc CD.

Vì $I(x_I ; y_I) \in AB : y = -x + 2$ nên $y_I = -x_I + 2$.

Vì $I(x_I ; y_I) \in CD : y = 2x - 1$ nên $y_I = 2x_I - 1$.

Suy ra ta có : $-x_I + 2 = 2x_I - 1 \Leftrightarrow 3x_I = 3 \Leftrightarrow x_I = 1$

$$\Rightarrow y_I = -x_I + 2 = -1 + 2 = 1.$$

Vậy tọa độ giao điểm I là $I(1 ; 1)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số : $y = \frac{1}{2}x - 1$ (d).

a) Vẽ đồ thị (d) của hàm số đã cho.

b) Tính khoảng cách từ gốc O của hệ trục tọa độ đến đường thẳng (d).

Giải

a) Cho $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0; -1) \in Oy$; $y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2; 0) \in Ox$.

Đường thẳng AB là đồ thị (d) của hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$.

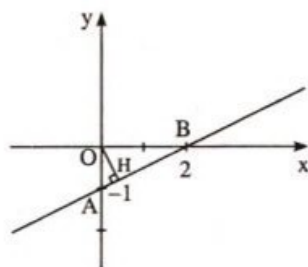
b) Kẻ OH vuông góc với (d) tại H. Khi đó OH là khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) (hình 9).

Trong tam giác vuông OAB, ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Từ đó suy ra : } OH^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow OH = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy khoảng cách từ O đến (d) là $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



Hình 9

Ví dụ 3. Cho các hàm số sau : $y = 2$ (1); $y = |x + 1|$ (2); $y = 2mx + m - 1$ (3).

a) Vẽ đồ thị các hàm số (1), (2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (3) đi qua giao điểm của hai đồ thị (1) và (2).

Giải

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2$ (1) :

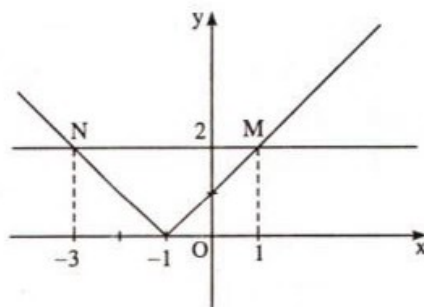
Đồ thị hàm số $y = 2$ là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x + 1|$ (2).

Ta có :

$$y = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } x \geq -1 \\ -(x + 1) & \text{khi } x \leq -1. \end{cases}$$

Từ đó, ta được đồ thị có hình chữ V như hình 10.



Hình 10

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị của hai hàm số (1) và (2) cắt nhau tại hai điểm $M(1; 2)$ và $N(-3; 2)$.

b) Đồ thị (d) của hàm số $y = 2mx + m - 1$ đi qua giao điểm của hai đồ thị hàm số (1) và đồ thị hàm số (2) khi và chỉ khi (d) đi qua điểm M hoặc N.

- Trường hợp (d) đi qua $M(1; 2)$. Khi đó $2 = 2m \cdot 1 + m - 1 \Leftrightarrow 3m = 3 \Leftrightarrow m = 1$.
- Trường hợp (d) đi qua $N(-3; 2)$. Khi đó

$$2 = 2m \cdot (-3) + m - 1 \Leftrightarrow 5m = -3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}.$$

Vậy với $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{5}$ thì đồ thị hàm số (3) đi qua giao điểm của đồ thị hàm số (1) và đồ thị hàm số (2).

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = mx + 3$ (d). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

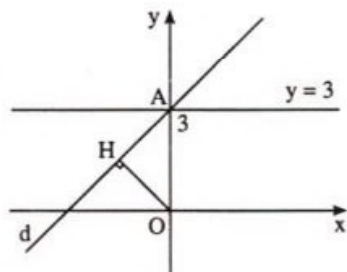
Giải

Trường hợp 1. Xét $m = 0$.

Khi $m = 0$ thì (d) có phương trình

$$y = 0 \cdot x + 3 = 3 \text{ hay } y = 3.$$

Đồ thị hàm số $y = 3$ là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 nên khoảng cách từ O đến (d) bằng 3.



Hình 11

Trường hợp 2. Xét $m \neq 0$.

Khi đó (d) : $y = mx + 3$ luôn đi qua điểm $A(0; 3)$

nằm trên trục tung. Kẻ OH vuông góc với (d) tại H.

Khi đó OH là khoảng cách từ O đến đường thẳng (d).

Ta có $OH \leq OA$ hay $OH \leq 3$ (dấu “=” không xảy ra vì $m \neq 0$ nên H không trùng A).

Do đó $OH < 3$.

Kết hợp hai trường hợp ta có khi $m = 0$ thì khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Đồ thị của hàm số $y = \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}$ đi qua điểm nào sau đây ?
(A) $M(-1; 1)$ (B) $N(1; 1)$ (C) $P(1; -1)$ (D) $Q(\sqrt{2}; 1)$.
- Điểm $E(-2; 0)$ thuộc đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây ?
 $(d_1): y = x + 2$; $(d_2): y = -2x - 4$; $(d_3): y = 3x + 6$; $(d_4): y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.
(A) Chỉ thuộc đường thẳng (d_1) ; (B) Chỉ thuộc (d_2) và (d_4) ;
(C) Chỉ thuộc (d_2) và (d_3) ; (D) Thuộc cả bốn đường thẳng đã cho.
- Cho hai đường thẳng $(d_1): y = 2x + 2012$ và $(d_2): y = -\frac{1}{2}x + 2012$. Đường thẳng nào dưới đây không đi qua giao điểm của (d_1) và (d_2) ?
(A) $y = 2012x$; (B) $y = x + 2012$;
(C) $y = 2012x + 2012$; (D) $y = -x + 2012$.
- Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một hệ trục tọa độ :
 $y = \frac{1}{2}x + 2$; $y = -2x + 2$; $y = -2x + 4$.
- Xác định đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2; 0)$ và $B(0; 3)$.
- Cho $(d_1): y = x$, $(d_2): y = 0,5x$; đường thẳng (d) song song với trục Ox và cắt trục tung Oy tại điểm C có tung độ bằng 2. Đường thẳng (d) lần lượt cắt (d_1) , (d_2) tại D và E . Khi đó, tính diện tích tam giác ODE .
- Với giá trị nào của m thì đồ thị của các hàm số $y = 2x + 4 - m$ và $y = 3x + m - 2$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.
- Cho hai đường thẳng $(d_1): (m - 2)x + 4my + 1 = 0$ và
 $(d_2): (m - 2)x + 2012y + 5 - m = 0$ (m là tham số).
a) Chứng minh rằng (d_1) luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.
b) Tìm m để hai đường thẳng (d_1) , (d_2) cắt nhau tại một điểm thuộc trục hoành.

9. Cho hàm số $y = f(x) = (m - 2)x + 2$ có đồ thị là đường thẳng (d).
- a) Tìm m để (d) đi qua điểm $M(-1; 1)$.
- b) Xác định m để khoảng cách từ điểm $O(0; 0)$ đến (d) có giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Ta thử cặp giá trị mà triệt tiêu $\sqrt{2}$ trước. Thử $N(1; 1)$ thấy đúng. Chọn (B).
2. Thử trực tiếp ta thấy tọa độ $(-2; 0)$ thỏa mãn cả bốn hàm số. Chọn (D).
3. (d_1) và (d_2) có cùng tung độ gốc là 2012, hệ số a khác nhau. Các đường thẳng có cùng tung độ gốc 2012 sẽ đi qua giao điểm của (d_1) và (d_2) . Do đó, ta loại (B), (C), (D), vì có tung độ gốc là 2012. Chọn (A).

4. (h.12) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x + 2$ (d_1):

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0; 2)$.

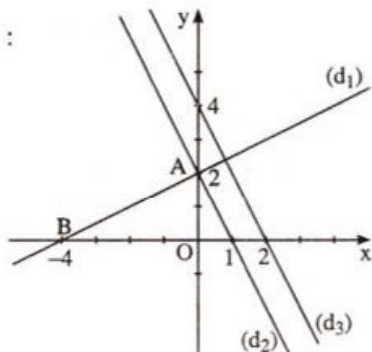
Cho $y = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow B(-4; 0)$.

Biểu diễn các điểm A, B trên mặt phẳng tọa độ.

Vẽ đường thẳng AB được đồ thị (d_1).

Tương tự ta vẽ được :

$$(d_2) : y = -2x + 2; (d_3) : y = -2x + 4.$$



Hình 12

5. Gọi phương trình đường thẳng AB là : $y = ax + b$. Ta có :

$$A(-2; 0) \in AB \Rightarrow 0 = a \cdot (-2) + b \text{ hay } b = 2a.$$

$$B(0; 3) \in AB \Rightarrow 3 = a \cdot 0 + b \text{ hay } b = 3. \text{ Từ đó suy ra } a = \frac{3}{2}. \text{ Vậy phương}$$

$$\text{trình đường thẳng AB là : } y = \frac{3}{2}x + 3.$$

6. Vẽ nhanh đồ thị. Từ đồ thị ta thấy : $DE = 2, OC = 2$.

$$\text{Do đó diện tích tam giác cần tìm là : } S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2}OC \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ (dvdt)}.$$

7. $M \in Oy \Rightarrow M(0; y_0)$. Giả sử M là giao điểm của (d_1) và (d_2) .

$$M \in (d_1) : y = 2x + 4 - m \Leftrightarrow y_0 = 4 - m ;$$

$$M \in (d_2) : y = 3x + m - 2 \Leftrightarrow y_0 = m - 2.$$

Suy ra $4 - m = m - 2 \Leftrightarrow m = 3$ (thử lại thấy đúng).

Vậy khi $m = 3$ thì (d_1) cắt (d_2) tại $M(0; 1)$ thuộc Oy .

8. a) $M(\frac{1}{2}; -\frac{1}{8})$.

b) Giao điểm thuộc trục hoành, nên tung độ $y = 0$. Vậy :

$$(m - 2)x + 4m \cdot 0 + 1 = 0 \text{ và } (m - 2)x + 2012 \cdot 0 + 5 - m = 0$$

Suy ra : $1 = 5 - m \Leftrightarrow m = 4$ (thử lại thấy đúng).

9. a) $m = 3$.

b) (h.13) Khi $m = 2 : y = 2 \Rightarrow$ khoảng cách từ O đến (d) là $OH = 2$.

Khi $m \neq 2 : y = (m - 2)x + 2$.

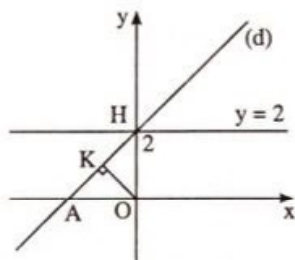
$$\text{Cho } y = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{m-2} \Rightarrow A(\frac{-2}{m-2}; 0).$$

Vẽ $OK \perp (d)$. Ta có :

$H(0; 2) \in (d) : y = (m - 2)x + 2$ với mọi m .

Suy ra : $OK < OH$ hay $OK < 2$.

Vậy khoảng cách từ điểm O đến (d) lớn nhất bằng 2, đạt được khi $m = 2$.



Hình 13

§4. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Hai đường thẳng song song

Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$, $b \neq b'$ và trùng nhau khi và chỉ khi $a = a'$, $b = b'$.

2. Hai đường thẳng cắt nhau

Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.

Chú ý.

- Khi $a \neq a'$, $b = b'$ thì hai đường thẳng có cùng tung độ gốc, do đó chúng cắt nhau tại một điểm trên trục tung có tung độ là b .
- Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a.a' = -1$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN DẠNG CẶP ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI NHAU, CẶP ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU, CẶP ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

Phương pháp giải

Cho hai đường thẳng $(d) : y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $(d') : y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$).

- $(d) // (d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$.
- $(d) \equiv (d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.
- (d) và (d') cắt nhau $\Leftrightarrow a \neq a'$.
- $(d) \perp (d') \Leftrightarrow a.a' = -1$.

Ví dụ 1. Hãy chỉ ra hai cặp đường thẳng song song với nhau trong các đường thẳng sau :

$$(d_1) : y = 2x + 1 ; \quad (d_2) : y = \frac{x+3}{2} ; \quad (d_3) : y = -\frac{1}{2}x + 2 ;$$

$$(d_4) : y = 0,5x - 1 ; \quad (d_5) : y = 4 + 2x ; \quad (d_6) : y = 1 - 2x.$$

Giải

Hai cặp đường thẳng song song với nhau là :

$$(d_1) // (d_5) \text{ vì } a = a' (= 2) ; b \neq b' (1 \neq 4) ;$$

$$(d_2) // (d_4) \text{ vì } a = a' (= 0,5) ; b \neq b' (1,5 \neq -1).$$

Ví dụ 2. Hãy chỉ ra các cặp đường thẳng vuông góc với nhau trong các đường

$$\text{thẳng sau : } (d_1) : y = 2x + 1 ; (d_2) : y = \frac{x+3}{2} ; (d_3) : y = -\frac{1}{2}x + 2 ;$$

$$(d_4) : y = 0,5x - 1 ; (d_5) : y = 4 + 2x \text{ và } (d_6) : y = 1 - 2x.$$

Giải

Bốn cặp đường thẳng vuông góc với nhau là : $(d_1) \perp (d_3)$; $(d_2) \perp (d_6)$; $(d_3) \perp (d_5)$; $(d_4) \perp (d_6)$ vì đều có $a.a' = -1$.

Ví dụ 3. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng sau luôn cắt nhau với mọi giá trị của m :

a) $(d_1) : y = (m^2 - m + 1)x + 1$ và $(d_2) : y = \frac{-x+m}{2}$.

b) $(d_3) : y = (m^2 + 1)x + 2012$ và $(d_4) : y = -mx + 2012$.

Giải

a) Xét (d_1) có : $a = m^2 - m + 1 = (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$; (d_2) có $a' = -\frac{1}{2} < 0$.

Suy ra $a \neq a'$ với mọi m nên (d_1) luôn cắt (d_2) .

b) Ta có : $a - a' = m^2 + 1 - (-m) = m^2 + m + 1 = (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ nên

$a \neq a'$ với mọi m , suy ra (d_3) luôn cắt (d_4) .

Chú ý. Hai đường thẳng (d_3) và (d_4) có cùng tung độ gốc là 2012 nên chúng cùng đi qua điểm $A(0 ; 2012)$ nằm trên trục tung.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng $y = -mx$ và $y = \frac{1}{m}x + 4$

luôn nằm trên một đường tròn cố định với mọi $m \neq 0$.

Giải

Kí hiệu đường thẳng $y = -mx$ là (d) , đường thẳng $y = \frac{1}{m}x + 4$ là (d') .

Ta có $(d) : y = -mx$ luôn đi qua gốc tọa độ $O(0 ; 0)$ cố định ;

$(d') : y = \frac{1}{m}x + 4$ luôn đi qua điểm $B(0 ; 4)$ cố định.

Xét $a.a' = (-m) \cdot \frac{1}{m} = -1$ với $m \neq 0 \Rightarrow (d) \perp (d')$ tại A (A là giao điểm của hai

đường thẳng (d) và (d')) $\Rightarrow \widehat{OAB} = 90^\circ$.

Do đó giao điểm A của (d) và (d') luôn nằm trên đường tròn đường kính OB cố định, với $O(0 ; 0)$ và $B(0 ; 4)$.

Dạng 2. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG VỚI QUAN HỆ SONG SONG

Phương pháp giải

Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước : Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$.

- Sử dụng điều kiện hai đường thẳng song song với nhau để xác định hệ số a .
- Với a vừa tìm được, sử dụng điều kiện còn lại để xác định tung độ gốc b .

Ví dụ 1. Tìm m để đường thẳng $(d_1) : y = (2 - m^2)x - m - 5$ song song với đường thẳng $(d_2) : y = -2x + 2m + 1$.

Giải

$$(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow 2 - m^2 = -2 \quad (1) \text{ và } -m - 5 \neq 2m + 1. \quad (2)$$

$$\text{Giải (1) : } 2 - m^2 = -2 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

$$\text{Giải (2) : } -m - 5 \neq 2m + 1 \Leftrightarrow 3m \neq -6 \Leftrightarrow m \neq -2.$$

Vậy với $m = 2$ thì $(d_1) // (d_2)$.

Ví dụ 2. Cho đường thẳng $(d) : 2x + y - 3 = 0$ và điểm $M(-1 ; 1)$. Viết phương trình đường thẳng (d') đi qua điểm M và song song với (d) .

Giải

Gọi phương trình đường thẳng (d') là $y = ax + b$.

Ta có $(d) : 2x + y - 3 = 0$ hay $y = -2x + 3$.

Vì $(d') // (d)$ nên $a = -2$ và $b \neq 3$. Mặt khác, (d') đi qua điểm $M(-1 ; 1)$ nên

$$1 = a \cdot (-1) + b \Leftrightarrow -a + b = 1 \Leftrightarrow -(-2) + b = 1 \text{ (vì } a = -2) \Leftrightarrow b = -1 \text{ (} \neq 3 \text{)}.$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là : $y = -2x - 1$.

Ví dụ 3. Cho $M(0 ; 2)$, $N(1 ; 0)$, $P(-1 ; -1)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , CA và AB của tam giác ABC . Viết phương trình đường thẳng AB .

Giải

Gọi phương trình đường thẳng MN là : $y = ax + b$. Ta có :

$$N(1 ; 0) \in MN \Rightarrow 0 = a \cdot 1 + b \text{ hay } a = -b ;$$

$$M(0; 2) \in MN \Rightarrow 2 = a \cdot 0 + b \text{ hay } b = 2 \Rightarrow a = -2.$$

Do đó phương trình đường thẳng MN là : $y = -2x + 2$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của CB và CA nên MN là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel AB$.

Vì $AB \parallel MN$ nên phương trình đường thẳng AB có dạng : $y = -2x + b' (b' \neq 2)$.

Vì $P(-1; -1)$ là trung điểm của đoạn AB nên đường thẳng AB đi qua $P(-1; -1)$

$$\Rightarrow -1 = -2 \cdot (-1) + b' \Leftrightarrow b' = -3 \text{ (thoả mãn)}.$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là : $y = -2x - 3$.

Chú ý. Ta có thể viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh của ΔABC .

Ví dụ 4. Cho ba điểm không thẳng hàng $A(-2; -2)$, $B(0; 4)$ và $C(2; 0)$. Xác định điểm D trên mặt phẳng tọa độ sao cho ABCD là hình bình hành.

Giải

Dễ thấy BC : $y = -2x + 4$.

Giả sử có D để ABCD là hình bình hành.

Khi đó $AD \parallel BC$ nên đường thẳng AD có phương trình :

$y = -2x - 6$ (vì đường thẳng AD qua A).

Vì D thuộc AD nên $D(x_0; -2x_0 - 6)$.

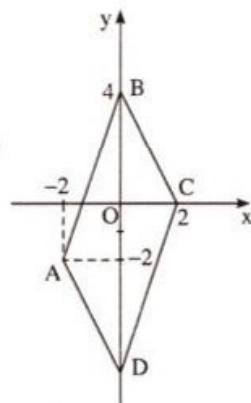
Tứ giác ABCD là hình bình hành nên :

$$AD = BC \Leftrightarrow AD^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 2)^2 + (-2x_0 - 4)^2 = 2^2 + (-4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow D_1(-4; 2), D_2(0; -6)$. Từ hình 14 suy ra loại D_1 vì không đúng thứ tự các đỉnh của tứ giác ABCD.

Vậy $D(0; -6)$.



Hình 14

Dạng 3. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG VỚI QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Phương pháp giải

Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước :

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$.

- Sử dụng điều kiện hai đường thẳng vuông góc để xác định hệ số a .
- Với a vừa tìm được, sử dụng điều kiện điểm thuộc đường thẳng để xác định tung độ gốc b .

Ví dụ 1. Tìm m để đường thẳng $(d) : y = m^2x + 1 - m$ vuông góc với đường thẳng

$$(d') : y = -\frac{1}{4}x + 2012.$$

Giải

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow a.a' = -1 \Leftrightarrow m^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2. \end{cases}$$

Vậy $m = \pm 2$ thì $(d) \perp (d')$.

Ví dụ 2. Tìm a và b , biết đường thẳng $(d_1) : y = ax + b$ vuông góc với đường thẳng

$$(d_2) : y = -\frac{1}{3}x \text{ và } (d_1) \text{ đi qua điểm } P(1; -1).$$

Giải

$$\text{Vì } (d_1) \perp (d_2) \text{ nên } a.a' = -1 \Leftrightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow a = 3. \text{ Ta có } (d_1) : y = 3x + b.$$

$$\text{Vì } (d_1) \text{ đi qua điểm } P(1; -1) \text{ nên } 3 \cdot 1 + b = -1 \Leftrightarrow b = -4.$$

$$\text{Vậy } a = 3 \text{ và } b = -4.$$

Ví dụ 3. Cho ba điểm $A(1; 2)$, $B(3; 0)$, $C(0; 1)$.

- Chứng minh rằng A , B , C là ba đỉnh của một tam giác.
- Viết phương trình đường thẳng chứa đường cao AH của ΔABC .

Giải

- Gọi phương trình đường thẳng đi qua $B(3; 0)$ và $C(0; 1)$ là $BC : y = ax + b$.

$$\text{Ta có : } B \in BC \text{ nên : } 0 = a.3 + b \Leftrightarrow 3a + b = 0 \quad (1)$$

$$C \in BC \text{ nên : } 1 = a.0 + b \Leftrightarrow b = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow BC : y = -\frac{1}{3}x + 1.$$

Vì $A \notin BC$ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Vậy ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi phương trình đường cao AH là $(d') : y = a'x + b'$.

Vì AH là đường cao của tam giác ABC nên :

$$AH \perp BC \Leftrightarrow (d') \perp BC \Leftrightarrow a.a' = -1 \Leftrightarrow a' \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow a' = 3.$$

$$\text{Mặt khác : } A(1 ; 2) \in (d') \text{ nên : } 2 = a'.1 + b' \Leftrightarrow 2 = 3.1 + b' \Leftrightarrow b' = -1.$$

Vậy phương trình đường cao AH của $\triangle ABC$ là $y = 3x - 1$.

Ví dụ 4. Cho $M(0 ; 2)$, $N(1 ; 0)$, $P(-1 ; -1)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC. Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Giải

Gọi phương trình đường trung trực của đoạn AB là $(d) : y = mx + n$.

Gọi phương trình đường thẳng MN là : $y = ax + b$. Ta có :

$$N(1 ; 0) \in MN \Rightarrow 0 = a.1 + b \text{ hay } a = -b ;$$

$$M(0 ; 2) \in MN \Rightarrow 2 = a.0 + b \text{ hay } b = 2 \Rightarrow a = -2.$$

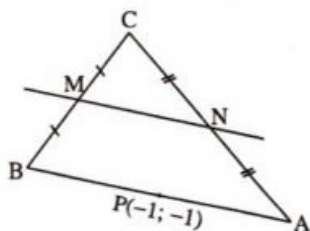
Do đó phương trình đường thẳng MN là : $y = -2x + 2$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của CB và CA nên MN là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AB$.

Vì (d) là đường trung trực của đoạn AB nên $(d) \perp AB$

$$\Rightarrow (d) \perp MN \Rightarrow m.(-2) = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow (d) : y = \frac{1}{2}x + n.$$



Hình 15

Vì $P(-1 ; -1)$ là trung điểm của đoạn AB nên đường thẳng (d) đi qua $P(-1 ; -1)$

$$\Rightarrow -1 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + n \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB là : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho đường thẳng (d) : $y = ax + b$. Tìm giá trị của a và b trong mỗi trường hợp sau :

a) (d) // (d₁) : $y = 2x + 3$; b) (d) trùng (d₂) : $y = -x + 1$;

c) (d) cắt (d₃) : $y = \frac{1}{2}x$; d) (d) $\perp$ (d₄) : $y = -\frac{1}{2}x$.

2. Viết phương trình đường thẳng (d') song song với đường thẳng (d) : $y = -4x + 5$ và đi qua điểm M(1 ; -1).

3. Xác định a và b để đường thẳng (d₁) : $y = ax + b$ vuông góc với đường thẳng (d₂) : $y = -\frac{1}{2}x$ và đi qua điểm P(-1 ; 2).

4. Đường thẳng (d) : $y = -ax + 2011$ song song với đường phân giác của góc phần tư (I) và (III) thì hệ số a của (d) bằng :

(A) 1 ; (B) -1 ; (C) 0 ; (D) $-\frac{1}{2011}$.

5. Cho bốn đường thẳng (d₁) : $y = \frac{1}{3}x - 2$; (d₂) : $y = -3x$; (d₃) : $y = -3x + 4$ và (d₄) : $y = \frac{1}{3}x + 2$ cắt nhau tại bốn điểm phân biệt M, N, P, Q.

Khi đó bốn điểm M, N, P, Q là bốn đỉnh của :

- (A) Một hình thang ; (B) Một hình bình hành ;
(C) Một hình chữ nhật ; (D) Một tứ giác không có gì đặc biệt.

6. Cho tam giác ABC có A(1 ; 5), B(-3 ; 1), C(5 ; 3).

a) Viết phương trình đường trung trực của cạnh BC.

b) Viết phương trình đường trung bình MN của tam giác ABC (MN // BC).

7. Cho $M(0; 4)$, $N(2; 0)$, $P(-1; -2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , CA và AB của tam giác ABC . Viết phương trình đường thẳng AB .
8. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = mx + m$ và $(d_2): y = \sqrt{3}x + m^2 + \sqrt{3}$.
 Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) không trùng nhau với mọi giá trị của m .
9. Cho ba điểm không thẳng hàng $A(-3; 0)$, $B(0; 2)$ và $C(1; 0)$. Xác định điểm D trên mặt phẳng tọa độ sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $(d) \parallel (d_1) \Leftrightarrow a = 2; b \neq 3$.
 b) $(d) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a = -1; b = 1$.
 c) $(d) \text{ cắt } (d_3) \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}; b \in \mathbb{R}$.
 d) $(d) \perp (d_4) \Leftrightarrow a \cdot a' = -1 \Leftrightarrow a = 2; b \in \mathbb{R}$.
2. Gọi phương trình đường thẳng (d') là $y = ax + b$.
 Vì $(d') \parallel (d): y = -4x + 5$ nên $a = -4$ và $b \neq 5$. Mặt khác (d') đi qua $M(1; -1)$ nên: $-1 = a \cdot 1 + b \Leftrightarrow a + b = -1 \Leftrightarrow -4 + b = -1$ (vì $a = -4$) $\Leftrightarrow b = 3$ (thỏa mãn). Vậy $(d'): y = -4x + 3$.
3. Vì $(d_1) \perp (d_2)$ nên $a \cdot a' = -1 \Leftrightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow a = 2$. Do đó $(d_1): y = 2x + b$.
 Vì (d_1) đi qua điểm $P(-1; 2)$ nên $2 \cdot (-1) + b = 2 \Leftrightarrow b = 4$.
4. $(d'): y = x$ là đường phân giác của góc phần tư (I) và (III).
 $(d) \parallel (d') \Leftrightarrow -a = 1 \Leftrightarrow a = -1$. Chọn (B).
5. $(d_1) \parallel (d_4)$, vì: $a = \frac{1}{3} = a'; b = -2 \neq 2 = b'$; tương tự $(d_2) \parallel (d_3); (d_2) \perp (d_4)$
 vì $\frac{1}{3}(-3) = -1$.
 Do đó, bốn giao điểm M, N, P, Q là bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Chọn (C).

6. a) Gọi phương trình đường thẳng BC là : $y = ax + b$.

Vì $B(-3 ; 1) \in BC$ nên $1 = -3a + b \Rightarrow b = 1 + 3a$ (1) ; $C(5 ; 3) \in BC$ nên $3 = 5a + b$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{7}{4}$. Do đó BC : $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$.

Trung trực của BC là đường thẳng (d) vuông góc với BC tại trung điểm I của BC.

Tọa độ của điểm I là : $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = 1$; $y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = 2$ hay $I(1 ; 2)$.

Do đường trung trực (d) : $y = -4x + m$ đi qua $I(1 ; 2)$ nên ta được $m = 6$.

Vậy đường thẳng (d) là : $y = -4x + 6$.

- b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khi đó ta có $M(-1 ; 3)$.

Vì $MN \parallel BC$ nên MN có dạng : $y = \frac{1}{4}x + n$ ($n \neq \frac{7}{4}$). Do $M(-1 ; 3)$ thuộc MN nên $n = \frac{13}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy MN có phương trình : $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$.

7. Phương trình đường thẳng MN là : $y = -2x + 4$.

Vì $AB \parallel MN$ nên phương trình đường thẳng AB có dạng : $y = -2x + b'$ ($b' \neq 2$).

Vì đường thẳng AB đi qua $P(-1 ; -2)$ nên $-2 = -2 \cdot (-1) + b' \Leftrightarrow b' = -4$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là : $y = -2x - 4$.

8. Cách 1. $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{3} \\ m = m^2 + \sqrt{3} \end{cases}$ (1) (2)

Thay (1) vào (2) ta được : $0 = 3$ (vô lí). Do đó (d_1) không trùng (d_2) với mọi m.

Cách 2. Giả sử : $b = b' \Leftrightarrow m = m^2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow m^2 - m + \frac{1}{4} + \sqrt{3} - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right) = 0$ (vô lí). Do đó điều giả sử là sai. Vậy (d_1) không trùng (d_2) với mọi m.

Chú ý. Chỉ cần $a \neq a'$ hoặc $b \neq b'$ thì $(d_1) : y = ax + b$ không trùng $(d_2) : y = a'x + b'$.

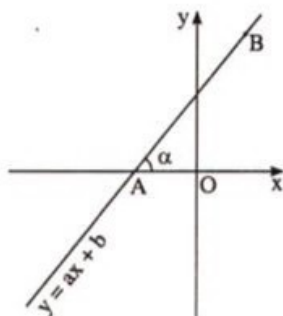
9. Đáp số : D $(-2 ; -2)$.

§5. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Hệ số góc của đường thẳng

+ Góc α tạo bởi tia Ax (A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox) và tia AB, trong đó tia AB là phần của đường thẳng $y = ax + b$ nằm trong nửa mặt phẳng có bờ x'x và chứa tia Oy được gọi là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox (hình 16).



Hình 16

+ Vì có sự liên quan giữa hệ số a với góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox nên người ta gọi a là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$.

Khi góc α nhọn thì $a = \operatorname{tg} \alpha$.

Khi góc α tù thì $a = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$.

+ Các đường thẳng có cùng hệ số góc a thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau.

Các đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì có hệ số góc bằng nhau.

+ Khi $a > 0$ thì góc α nhọn, hệ số a càng lớn thì α càng lớn.

Khi $a < 0$ thì góc α tù, hệ số a càng lớn thì α càng lớn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. XÁC ĐỊNH HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải

Vận dụng định nghĩa hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$); góc giữa đường thẳng và trục Ox; vận dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn.

Ví dụ 1. Đường thẳng $y = (m + 1)x + 5$ đi qua điểm $F(-1; 3)$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

Giải

Kí hiệu (d) là đường thẳng $y = (m + 1)x + 5$.

Vì $F(-1; 3) \in (d)$ nên $3 = (m + 1).(-1) + 5 \Leftrightarrow m = 1$.

Hệ số góc của đường thẳng (d) là $a = m + 1 = 1 + 1 = 2$.

Ví dụ 2. Tính hệ số góc của đường thẳng $(d) : y = (m - 2)x + 3$, biết nó song song với đường thẳng $(d') : 2x - y - 1 = 0$. Vẽ đồ thị (d) vừa tìm được.

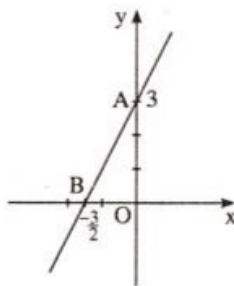
Giải

* Đường thẳng (d') có phương trình $2x - y - 1 = 0$
hay $y = 2x - 1$.

Vì $(d) \parallel (d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$ nên $m - 2 = 2$ và $3 \neq -1$.

Do đó hệ số góc của đường thẳng (d) là 2.

* Ta có $(d) : y = 2x + 3$. Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm $A(0; 3)$ và $B(-\frac{3}{2}; 0)$ là đường thẳng (d) cần vẽ (h.17).



Hình 17

Ví dụ 3. Tính hệ số góc của đường thẳng $(d) : y = (1 - m)x + 1$, biết nó vuông góc với đường thẳng $(d') : x - 2y - 4 = 0$. Vẽ đồ thị (d) vừa tìm được.

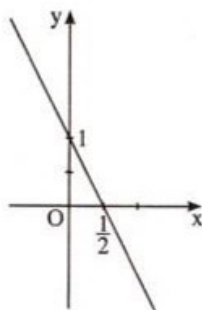
Giải

* Đường thẳng (d') có phương trình $x - 2y - 4 = 0$
hay $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Vì $(d) \perp (d') \Leftrightarrow a.a' = -1$ nên $(1 - m). \frac{1}{2} = -1$
 $\Rightarrow 1 - m = -2$.

Do đó hệ số góc của đường thẳng (d) là -2.

* Ta có $(d) : y = -2x + 1$. Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm $A(0; 1)$ và $B(\frac{1}{2}; 0)$ là đường thẳng (d) cần vẽ (h.18).



Hình 18

Ví dụ 4. Tính hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(2; -3)$.

Giải

Giả sử phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(2; -3)$ là $AB : y = ax + b$.

$$\text{Ta có : } A \in AB \text{ nên : } 1 = a \cdot (-1) + b \Leftrightarrow -a + b = 1 \Leftrightarrow b = a + 1 \quad (1)$$

$$B \in AB \text{ nên : } -3 = a \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = -2a - 3. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } -2a - 3 = a + 1 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy hệ số góc của đường thẳng AB là } a = -\frac{4}{3}.$$

Dạng 2. XÁC ĐỊNH GÓC

Phương pháp giải

Vận dụng định nghĩa góc giữa đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox ; vận dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn ; vận dụng tam giác đồng dạng.

Ví dụ 1. Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = -2x + 3$ và trục Ox .

Giải

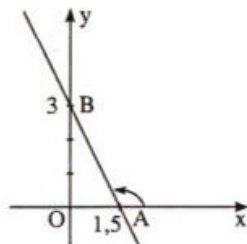
Vẽ đường thẳng $y = -2x + 3$. Khi đó $\widehat{BAx}$ là góc tạo bởi đường thẳng $y = -2x + 3$ với trục Ox (hình 19).

Xét tam giác vuông ABO , ta có :

$$\tan \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = \frac{3}{1,5} = 2 \Leftrightarrow \widehat{OAB} \approx 63^\circ 26'$$

$$\Rightarrow \widehat{BAx} = 180^\circ - \widehat{OAB} \approx 116^\circ 34'.$$

(Trong đó 2 chính là giá trị tuyệt đối của hệ số góc của đường thẳng $y = -2x + 3$).



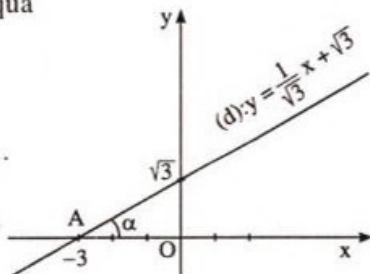
Hình 19

Ví dụ 2. Cho đường thẳng $(d) : y = mx + \sqrt{3}$. Tính góc tạo bởi (d) với trục Ox , biết (d) đi qua điểm $A(-3 ; 0)$.

Giải

$$\text{Vì } A(-3 ; 0) \in (d) : y = mx + \sqrt{3} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Khi đó (d) có phương trình } y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}.$$



Hình 20

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng (d) với trục Ox. Khi đó ta có :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ}.$$

Vậy góc tạo bởi đường thẳng (d) với trục Ox là 30° .

Ví dụ 3. Cho hai đường thẳng $(d_1) : y = -2x$ và $(d_2) : y = \frac{1}{2}x$. (d) là đường thẳng song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 3 ; (d) cắt (d_1) và (d_2) lần lượt tại A và B. Chứng minh rằng : $\widehat{AOB} = 90^{\circ}$.

Giải

Vẽ ba đường thẳng (d_1) , (d_2) và (d) như hình 21.

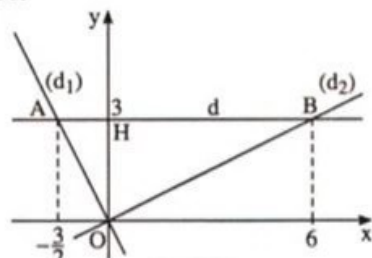
Xét hai tam giác AHO và OHB, ta có :

$$\widehat{AHO} = \widehat{OHB} = 90^{\circ} ; \frac{HA}{HO} = \frac{HO}{HB} = \frac{1}{2}.$$

Do đó : $\triangle AHO \sim \triangle OHB \Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{OBH}$.

Mà $\widehat{OBH} + \widehat{HOB} = 90^{\circ}$ nên

$$\widehat{AOH} + \widehat{HOB} = 90^{\circ} \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^{\circ}.$$



Hình 21

Chú ý. $(d_1) : y = -2x$ có hệ số góc $a_1 = -2$; $(d_2) : y = \frac{1}{2}x$ có hệ số góc $a_2 = \frac{1}{2}$.

Ta thấy : $a_1 \cdot a_2 = (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1$, do đó : $(d_1) \perp (d_2)$.

Dạng 3. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải

- Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$. Ta cần xác định a và b.
- Chú ý rằng : Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) với trục Ox, ta có :
 - Khi góc α nhọn thì $a = \operatorname{tg} \alpha$;
 - Khi góc α tù thì $a = -\operatorname{tg}(180^{\circ} - \alpha)$.

Ví dụ 1. Xác định đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-2 ; 3)$ và có hệ số góc bằng -2 .

Giải

Gọi phương trình đường thẳng (d) là : $y = ax + b$.

Vì (d) có hệ số góc là -2 nên $a = -2 \Rightarrow (d) : y = -2x + b$.

Vì $A(-2 ; 3) \in (d)$ nên $3 = (-2) \cdot (-2) + b \Leftrightarrow b = -1$.

Do đó phương trình đường thẳng (d) là $y = -2x - 1$.

Ví dụ 2. Xác định đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1 ; 1)$ và tạo với trục Ox một góc bằng 45° .

Giải

Đường thẳng (d) có dạng : $y = ax + b$. Vì $A(-1 ; 1) \in (d)$ nên $1 = a \cdot (-1) + b$ hay $b = a + 1$.

Vì (d) tạo với trục Ox một góc bằng 45° nên $a = \tan \alpha = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow b = 2$, do đó (d) : $y = x + 2$.

Ví dụ 3. Xác định đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0 ; 1)$ và tạo với đường thẳng $y = 2$ một góc bằng 60° .

Giải

Đường thẳng (d) có dạng : $y = ax + b$.

Vì $A(0 ; 1) \in (d)$ nên $1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$.

Vì đường thẳng $y = 2$ song song với trục hoành nên từ đề bài ta có (d) tạo với trục Ox một góc bằng 60° .

Ta có $a = \tan \alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Vậy (d) : $y = \sqrt{3}x + 1$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Đường thẳng (d) đi qua giao điểm của hai đường thẳng $y = x + 1$, $y = 2x$ và song song với đường thẳng $y = \sqrt{2}x + 2 + \sqrt{2}$ là :
- (A) $y = \sqrt{4}x + 2 - \sqrt{2}$; (B) $y = (2 + \sqrt{2})x + 1$;
- (C) $y = \sqrt{2}x + 2 - \sqrt{2}$; (D) $y = x + \sqrt{2}$.

2. Đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ vuông góc với đường thẳng nào dưới đây ?
- (A) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; (B) $y = 2x - \frac{3}{2}$;
 (C) $y = -2x + \frac{3}{2}$; (D) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.
3. Đường thẳng $y = (m + 1)x - 2$ vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 2011$ thì m bằng :
- (A) -2 ; (B) -3 ; (C) -1 ; (D) 1 .
4. Xác định đường thẳng (d) biết nó có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $A(-3 ; 2)$.
5. Tính hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1 ; 2)$ và $B(3 ; 4)$.
6. Cho đường thẳng (d) : $y = mx + 3$. Tính góc α tạo bởi (d) với trục Ox , biết :
- a) (d) đi qua điểm $A(-\sqrt{3} ; 0)$;
 b) (d) đi qua điểm $B(6 ; -3)$.
7. Xác định đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0 ; 3)$ và tạo với đường thẳng $y = 2$ một góc bằng 60° .

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. (C).
 2. (C).
 3. (B).
 4. $y = 2x + 8$.
 5. $AB : y = x + 1 \Rightarrow$ đường thẳng AB có hệ số góc $a = 1$.
 6. a) $\alpha = 60^\circ$.
 b) $m = -1 < 0$ nên $-\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -1 \Leftrightarrow 180^\circ - \alpha = 45^\circ \Leftrightarrow \alpha = 135^\circ$.
 7. $y = \sqrt{3}x + 3$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Hàm số

+ Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x theo quy tắc f sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y mà $y = f(x)$ thì y được gọi là hàm số của x và x được gọi là biến số.

+ Cách cho hàm số : Hàm số thường được cho bằng công thức.

Chú ý. Có một số cách khác cho hàm số như : bảng, sơ đồ Ven, đồ thị.

+ Đồ thị của hàm số : Tập hợp $\mathcal{G}$ các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x ; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

+ Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D là một khoảng, nửa khoảng hay đoạn, với mọi $x_1, x_2 \in D$:

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên D .

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên D .

2. Hàm số bậc nhất

+ Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.

+ Tập xác định : $\mathbb{R}$.

+ Khi $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; khi $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

+ Đồ thị của hàm số bậc nhất là một đường thẳng.

+ Hệ số a ($a \neq 0$) được gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$.

+ Cho hai đường thẳng $(d) : y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $(d') : y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$). Ta có :

$$(d) // (d') \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b \neq b'.$$

$$(d) \equiv (d') \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b = b'.$$

$$(d) \text{ và } (d') \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow a \neq a'.$$

$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow a \cdot a' = -1.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

Phương pháp giải

Bước 1 : Tìm TXĐ (TXĐ của hàm số bậc nhất là $\mathbb{R}$).

Bước 2 : Vẽ đồ thị $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Cách 1. + Xác định hai điểm phân biệt bất kì của đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Cách 2. + Xác định giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ :

- Cho $x = 0 \Rightarrow y = a \cdot 0 + b = b \Rightarrow M(0; b)$ thuộc trục tung.

- Cho $y = 0 \Rightarrow 0 = a \cdot x + b \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow N(-\frac{b}{a}; 0)$ thuộc trục hoành.

+ Vẽ đường thẳng MN ta được đồ thị của hàm số.

Ví dụ 1. Cho các hàm số (d) : $y = x - 1$ và (d') : $y = -x + 3$.

Vẽ đồ thị (d) và (d') trên cùng một hệ trục tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của (d) và (d').

Giải

+ TXĐ : $\mathbb{R}$.

+ Vẽ (d) :

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0 - 1 = -1 \Rightarrow A(0; -1)$ thuộc trục tung.

Cho $y = 0 \Rightarrow 0 = x - 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1; 0)$ thuộc trục hoành.

Vẽ đường thẳng AB ta được đồ thị (d) (hình 22).

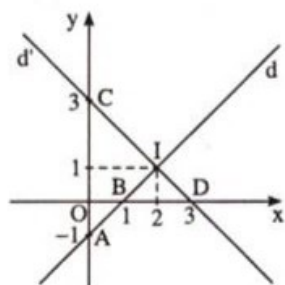
+ Vẽ (d') :

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0 + 3 = 3 \Rightarrow C(0; 3)$ thuộc trục tung.

Cho $y = 0 \Rightarrow 0 = -x + 3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow D(3; 0)$ thuộc trục hoành.

Vẽ đường thẳng CD ta được đồ thị (d').

+ Xác định tọa độ giao điểm I của (d) và (d') :



Hình 22

Cách 1. Từ giao điểm I vẽ các đường thẳng vuông góc với hai trục tọa độ ta xác định được I(2 ; 1).

Cách 2. Gọi tọa độ giao điểm I là $(x_I; y_I)$.

Vì I là giao điểm của (d) và (d') nên I vừa thuộc (d), vừa thuộc (d').

Vì $I(x_I; y_I) \in (d) : y = x - 1$ nên $y_I = x_I - 1$.

Vì $I(x_I; y_I) \in (d') : y = -x + 3$ nên $y_I = -x_I + 3$.

Suy ra : $x_I - 1 = -x_I + 3 \Leftrightarrow 2x_I = 4 \Leftrightarrow x_I = 2 \Rightarrow y_I = -x_I + 3 = -2 + 3 = 1$.

Vậy tọa độ giao điểm I là (2 ; 1).

Chú ý.

- Hoành độ giao điểm I là nghiệm của phương trình $x - 1 = -x + 3$.
- Số giao điểm của (d) : $y = f(x)$ và (d') : $y = g(x)$ là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ và ngược lại.

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = |x - 2|$.

Giải

$$\text{Vẽ (G) : } y = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & (x \geq 2) \\ -x + 2 & (x < 2). \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Đồ thị (G) gồm hai nhánh (1) và (2).

Nhánh (1) của (G) : điều kiện là $x \geq 2$.

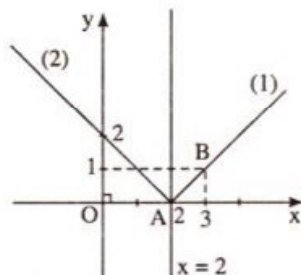
Cho $x = 2 \Rightarrow y = 2 - 2 = 0 \Rightarrow A(2 ; 0)$ thuộc trục hoành.

Cho $x = 3 \Rightarrow y = 3 - 2 = 1 \Rightarrow B(3 ; 1)$.

Vẽ tia AB ta được nhánh (1) của đồ thị (G).

Tương tự, vẽ nhánh (2) ta thu được đồ thị (G) có hình chữ V như hình 23.

Chú ý. Hai nhánh của (G) đối xứng với nhau qua đường thẳng $x = 2$.



Hình 23

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x + |2x - 2|$.

a) Vẽ đồ thị (G) của hàm số trên.

b) Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $x + |2x - 2| = m$.

Giải

$$\text{a) Vẽ (G) : } y = x + |2x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & (x \geq 1) \\ -x + 2 & (x < 1). \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Đồ thị (G) gồm hai nhánh (1) và (2).

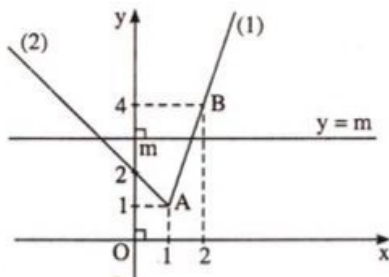
Nhánh (1) của (G) : điều kiện là $x \geq 1$.

$$\text{Cho } x = 1 \Rightarrow y = 3.1 - 2 = 1 \Rightarrow A(1; 1).$$

$$\text{Cho } x = 2 \Rightarrow y = 3.2 - 2 = 4 \Rightarrow B(2; 4).$$

Vẽ tia AB ta được nhánh (1) của đồ thị (G).

Tương tự, vẽ nhánh (2) ta thu được đồ thị (G) như hình 24.



Hình 24

b) Số nghiệm của phương trình $x + |2x - 2| = m$ (*)

là số giao điểm của đường thẳng (d) : $y = m$ và đồ thị (G) : $y = x + |2x - 2|$.

Từ đồ thị ta thấy :

+ Nếu $m < 1$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

+ Nếu $m = 1$ thì phương trình (*) có 1 nghiệm.

+ Nếu $m > 1$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 4. Với giá trị nào của tham số a thì phương trình $|2x - a| + 1 = |x + 3|$ (*) có nghiệm duy nhất ?

(Thi vào Khối PT Chuyên Toán - Tin ĐHSPhN năm học 1997 - 1998)

Giải

$$+ \text{Ta có : } (*) \Leftrightarrow |2x - a| = |x + 3| - 1. \quad (1)$$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị (G) : $y = |2x - a|$ và đồ thị (G') : $y = |x + 3| - 1$.

Vẽ hai đồ thị (G) và (G') như hình 25.

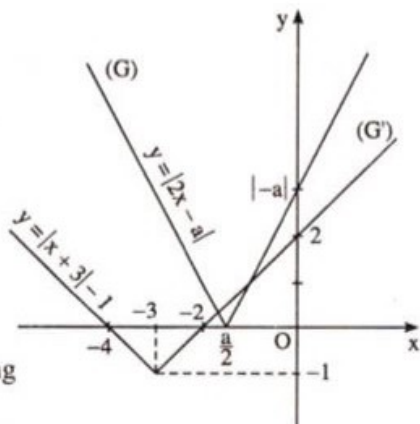
Phương trình (*) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có nghiệm duy nhất}$$

$$\Leftrightarrow (G) \text{ và } (G') \text{ có duy nhất một điểm chung}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = -4 \text{ hoặc } \frac{a}{2} = -2$$

$$\Leftrightarrow a = -8 \text{ hoặc } a = -4.$$



Hình 25

Dạng 2. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải

1. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước.
2. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và có hệ số góc cho trước.
3. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước.
4. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Ví dụ 1. Tìm m và n để đường thẳng $(d) : y = (m - 1)x + 2 - n$ đi qua hai điểm $A(2 ; -1)$ và $B(-3 ; -6)$.

Giải

Ta có : $A \in (d)$ nên $-1 = (m - 1).2 + 2 - n \Leftrightarrow 2m - n = -1 \Leftrightarrow n = 2m + 1$ (1)

$B \in (d)$ nên $-6 = (m - 1).(-3) + 2 - n \Leftrightarrow -3m - n = -11$. (2)

Thay (1) vào (2) được : $-3m - (2m + 1) = -11 \Leftrightarrow -5m = -10 \Leftrightarrow m = 2$

$\Rightarrow n = 2m + 1 = 2.2 + 1 = 5$.

Vậy $m = 2$ và $n = 5$ thì $(d) : y = x - 3$ đi qua $A(2 ; -1)$ và $B(-3 ; -6)$.

Ví dụ 2. Viết phương trình đường thẳng (d) cắt $(d') : y = x - 3$ tại điểm có tung độ bằng -1 và biết (d) có hệ số góc bằng 2 .

Giải

Gọi A là giao điểm của (d) và (d') . Vì A có tung độ bằng -1 nên hoành độ của A là : $-1 = x - 3$ hay $x = 2$. Do đó : $A(2 ; -1)$.

Gọi phương trình đường thẳng (d) là : $y = ax + b$.

Ta có (d) có hệ số góc là 2 nên $a = 2 \Rightarrow (d) : y = 2x + b$.

Vì $A(2 ; -1) \in (d)$ nên $-1 = 2.2 + b \Leftrightarrow b = -5$.

Do đó phương trình đường thẳng (d) là $y = 2x - 5$.

Ví dụ 3. Cho đường thẳng $(d) : y = 3x - 2$ và điểm $M(-1 ; 1)$. Viết phương trình đường thẳng (d') đi qua điểm M và song song với (d) .

Giải

Gọi phương trình đường thẳng (d') là $y = ax + b$.

Vì (d') // (d) : $y = 3x - 2$ nên $a = 3$ và $b \neq -2$.

Mặt khác (d') đi qua $M(-1; 1)$ nên :

$$1 = a.(-1) + b \Leftrightarrow -a + b = 1 \Leftrightarrow -3 + b = 1 \text{ (vì } a = 3) \Leftrightarrow b = 4 \text{ (thoả mãn).}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là : $y = 3x + 4$.

Ví dụ 4. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho $M(2; 4)$, $N(0; 2)$. Tìm các điểm A trên mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $AM = AN$.

Giải

Cách 1. Tọa độ trung điểm I của đoạn MN là :

$$x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = 1; y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = 3 \text{ hay } I(1; 3).$$

Gọi phương trình đường trung trực của đoạn MN là (d) : $y = mx + n$.

Gọi phương trình đường thẳng MN là : $y = ax + b$. Ta có

$$M(2; 4) \in MN \Rightarrow 4 = a.2 + b \text{ hay } b = -2a + 4;$$

$$N(0; 2) \in MN \Rightarrow 2 = a.0 + b \text{ hay } b = 2 \Rightarrow a = 1.$$

Do đó phương trình đường thẳng MN là : $y = x + 2$.

Vì $AM = AN \Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của đoạn MN hay $A \in (d)$.

Vì (d) là trung trực của MN nên $(d) \perp MN \Rightarrow m.1 = -1 \Rightarrow m = -1$

$$\Rightarrow (d) : y = -x + n.$$

Vì $I(1; 3)$ là trung điểm của đoạn MN nên đường thẳng (d) đi qua $I(1; 3)$

$$\Rightarrow 3 = (-1).1 + n \Rightarrow n = 4.$$

Vậy tập hợp các điểm A là đường thẳng (d) : $y = -x + 4$.

Cách 2. Gọi tọa độ của A là $(x; y)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } AM = AN &\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (4-y)^2} = \sqrt{(0-x)^2 + (2-y)^2} \\ &\Leftrightarrow (2-x)^2 + (4-y)^2 = (0-x)^2 + (2-y)^2 \\ &\Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 + 16 - 8y + y^2 = x^2 + 4 - 4y + y^2 \\ &\Leftrightarrow 16 - 4x = 4y \\ &\Leftrightarrow y = -x + 4. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm A trên mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa mãn bài toán là đường thẳng có phương trình : $y = -x + 4$.

Dạng 3. CỰC TRỊ

Phương pháp giải

- Vận dụng bất đẳng thức đại số.
- Vận dụng quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc.
- Vận dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông.
- Vận dụng đồ thị.

Ví dụ 1. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0; 0)$ đến đường thẳng (d) có phương trình $y = \frac{2m-2}{m-2}x + \frac{2}{m-2}$ đạt giá trị lớn nhất (với $m \neq 2$).

Giải

Vì tung độ gốc $b = \frac{2}{m-2} \neq 0$ nên (d) không đi qua gốc tọa độ.

Trường hợp 1 : Xét $m = 1$. Khi đó (d) : $y = -2$. Do đó khoảng cách từ $O(0; 0)$ đến (d) là 2.

Trường hợp 2 : Xét $m \neq 1$.

Khi đó (d) cắt trục hoành tại điểm $A(\frac{-1}{m-1}; 0)$ và cắt trục tung tại điểm

$$B(0; \frac{2}{m-2}) \Rightarrow OA = \frac{1}{|m-1|} \text{ và } OB = \frac{2}{|m-2|}.$$

Kẻ OH vuông góc với (d) tại H thì độ dài OH là khoảng cách từ O đến (d).

Áp dụng hệ thức $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ vào tam giác vuông ABO ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{OA^2 \cdot OB^2}{OA^2 + OB^2} = \frac{4}{(m-2)^2 + 4(m-1)^2} \\ \Rightarrow OH &= \frac{2}{\sqrt{5m^2 - 12m + 8}} = \frac{2}{\sqrt{5(m-\frac{6}{5})^2 + \frac{4}{5}}} \leq \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{5}}} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

(dấu “=” xảy ra khi $m = \frac{6}{5}$).

Kết hợp hai trường hợp ta có khi $m = \frac{6}{5}$ thì $OH_{\max} = \sqrt{5}$.

Ví dụ 2. Trên mặt phẳng tọa độ cho hai điểm A, B đều có hoành độ và tung độ thỏa mãn đẳng thức $|x-1|+|y-2|=3$ (*). Chứng minh rằng khoảng cách $AB \leq 6$.

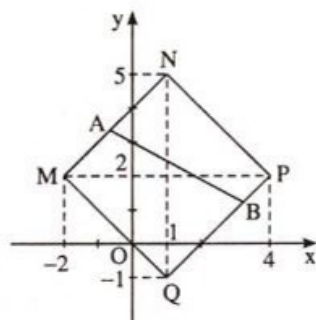
Giải

$$\text{Điều kiện (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 & (x \geq 1; y \geq 2) \\ x-y=2 & (x \geq 1; y \leq 2) \\ -x+y=4 & (x \leq 1; y \geq 2) \\ -x-y=0 & (x \leq 1; y \leq 2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán là hình vuông MNPQ như hình 26

$$\Rightarrow AB \leq MP = 6.$$

Dấu “=” xảy ra khi A, B là hai đỉnh đối nhau của hình vuông MNPQ.



Hình 26

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ không xác định với :
(A) $x = 2$; (B) $x > 2$; (C) $x < 2$; (D) mọi x thuộc $\mathbb{R}$.
- Với giá trị nào của m thì hàm số $y = (m^2 - 2)x + 1$ là hàm số bậc nhất đồng biến ?
(A) $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$; (B) $m > \sqrt{2}$ hoặc $m < -\sqrt{2}$;
(C) $m \neq \pm 2$; (D) Với mọi giá trị của m thuộc $\mathbb{R}$.
- Cho hàm số $y = f(x) = ax^5 + bx^3 + 2007x + 1$ với $a, b \in \mathbb{R}^*$, biết $f(\sqrt{2}) = 2$, tính $f(-\sqrt{2})$.

4. Cho hàm số $y = (m - 3)x^2 + m(x - 1) + 2$.
- Với giá trị nào của m thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất ?
 - Với giá trị vừa tìm được của m ở câu a, thì hàm số đã cho đồng biến hay nghịch biến ?
5. Cho đường thẳng $(d) : y = \frac{3}{4}x + 3$.
- Vẽ đường thẳng (d) .
 - Tính góc tạo bởi đường thẳng (d) và trục Ox .
 - Tính diện tích tam giác do đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ.
6. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết rằng đồ thị của nó song song với đồ thị của hàm số $y = -2x$ và đi qua điểm $A(1; -3)$.
7. Cho các đường thẳng $(d_1) : y = -2x + 3$; $(d_2) : y = \frac{1}{2}x + 1$; $(d_3) : y = -2x - 1$.
- Không vẽ đồ thị của các hàm số đó, hãy cho biết vị trí tương đối giữa các đường thẳng đó đối với nhau như thế nào ?
8. Cho các đường thẳng $(d_1) : y = (2m - 1)x + m^2 - 1$; $(d_2) : y = (m + 3)x - 3$.
- Tìm các giá trị của m để $(d_1) \parallel (d_2)$.
 - Tìm các giá trị của m để (d_1) đi qua gốc tọa độ.
9. Tìm điểm M trên đường thẳng $(d) : y = -2x + 25$ sao cho khoảng cách OM nhỏ nhất, với O là gốc tọa độ.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

- (D).
- (B).
- $f(-\sqrt{2}) = 0$.
- a) $m = 3$. b) Đồng biến.
- b) $36^\circ 52'$; c) 6 (đvdt).
- $y = -2x - 1$.

7. $(d_1) \parallel (d_3)$; $(d_1) \perp (d_2)$; $(d_2) \perp (d_3)$.

8. a) $m = 4$; b) $m = \pm 1$.

9. Gọi tọa độ của điểm M là $(a; b)$. Khoảng cách $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ta có $M(a; b) \in (d) : y = -2x + 25$ nên $b = -2a + 25$ hay $2a + b = 25$.

Áp dụng bất đẳng thức $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ (với $(x; y) = (2; 1)$), ta có :

$$25^2 = (2a + b)^2 \leq (2^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 5 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow OM \geq \sqrt{5}.$$

$$\text{Do đó } OM_{\min} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 25 \\ \frac{a}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow M(10; 5).$$

Chú ý. Ta có thể giải bài toán như sau : $OM_{\min} \Leftrightarrow OM \perp (d)$ tại M.

Ta xác định tọa độ điểm M bằng cách :

+ Lập đường thẳng (d') đi qua $O(0; 0)$ và vuông góc với đường thẳng (d) .

+ M là giao điểm của (d') và (d) .

PHẦN HÌNH HỌC

CHƯƠNG I

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Trong hình 1, xét tam giác ABC vuông tại A, b' và c' lần lượt là hình chiếu của hai cạnh góc vuông b và c trên cạnh huyền.

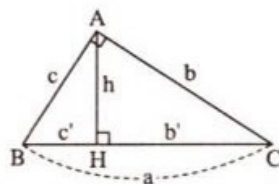
Bạn cần nhớ bốn hệ thức sau :

$$(1) b^2 = ab' ; c^2 = ac'.$$

$$(2) h^2 = b'c'.$$

$$(3) ah = bc.$$

$$(4) \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$



Hình 1

Lưu ý :

- Từ hệ thức (1) ta có thể suy ra định lý Py-ta-go :

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

- Hệ thức (1) còn được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông là trung bình nhân của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

- Hệ thức (2) còn được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền là trung bình nhân của hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. BIẾT HAI TRONG NĂM YẾU TỐ a, b, c, b', c' , TÍNH MỘT SỐ YẾU TỐ CÒN LẠI

Phương pháp giải

Trước tiên tính cạnh huyền (nếu cần) rồi vận dụng hệ thức (1) :

$$b^2 = ab' ; \quad c^2 = ac'.$$

Ví dụ 1. Tính các độ dài x, y trong hình 2.

Giải

- Áp dụng định lí Py-ta-go ta được :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 7,5^2 + 10^2 = 156,25.$$

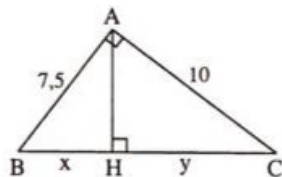
Do đó $BC = 12,5$.

- Áp dụng hệ thức $c^2 = ac'$ ta được :

$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow 7,5^2 = 12,5x$$

$$\Rightarrow x = 4,5.$$

Suy ra $y = BC - BH = 12,5 - 4,5 = 8$.



Hình 2

Ví dụ 2. Tính các độ dài x, y trong hình 3.

Giải

- Ta có $BC = 1 + 3 = 4$.

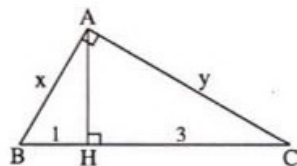
- Áp dụng hệ thức $c^2 = ac'$ ta được :

$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow x^2 = 4.1 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 ;$$

$$AC^2 = BC.CH \Rightarrow y^2 = 4.3$$

$$\Rightarrow y = 2\sqrt{3}.$$



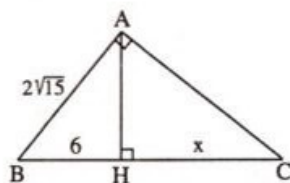
Hình 3

Ví dụ 3. Tính độ dài x trong hình 4.

Giải

Áp dụng hệ thức $c^2 = ac'$ ta được :

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= BC \cdot BH \\
 (2\sqrt{15})^2 &= (x+6) \cdot 6 \\
 60 &= (x+6) \cdot 6 \\
 x+6 &= 10 \Rightarrow x=4.
 \end{aligned}$$



Hình 4

Ví dụ 4. Một tam giác vuông có tỉ số hai cạnh góc vuông bằng $\frac{4}{9}$. Tính tỉ số hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

Giải

Áp dụng hệ thức (1) ta có :

$$b^2 = ab' ; c^2 = ac'$$

$$\text{suy ra } \frac{b^2}{c^2} = \frac{ab'}{ac'} = \frac{b'}{c'}.$$

$$\text{Nếu } \frac{b}{c} = \frac{4}{9} \text{ thì } \frac{b'}{c'} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}.$$

Ví dụ 5. Một tam giác vuông có tỉ số hai cạnh góc vuông bằng $\frac{3}{4}$, cạnh huyền dài 10cm. Tính độ dài các hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Giải

Áp dụng hệ thức (1) ta có :

$$b^2 = ab' ; c^2 = ac'$$

$$\text{suy ra } \frac{b^2}{c^2} = \frac{ab'}{ac'} = \frac{b'}{c'}.$$

$$\text{Nếu } \frac{b}{c} = \frac{3}{4} \text{ thì } \frac{b'}{c'} = \frac{9}{16}$$

$$\text{suy ra } \frac{b'}{9} = \frac{c'}{16} = \frac{b'+c'}{9+16} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Do đó } b' = \frac{2}{5} \cdot 9 = 3,6 ; c' = \frac{2}{5} \cdot 16 = 6,4.$$

Dạng 2. TÍNH ĐƯỜNG CAO ỨNG VỚI CẠNH HUYỀN KHI BIẾT HAI TRONG NĂM YẾU TỐ a, b, c, b', c' . NGƯỢC LẠI, BIẾT ĐƯỜNG CAO VÀ MỘT TRONG NĂM YẾU TỐ NÓI TRÊN, TÍNH MỘT SỐ YẾU TỐ CÒN LẠI

Phương pháp giải

$$\text{Vận dụng các hệ thức } h^2 = b'.c'; a.h = bc; \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Ví dụ 1. Tính các độ dài x, y trong hình 5.

Giải

Áp dụng định lí Py-ta-go ta được

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36$$

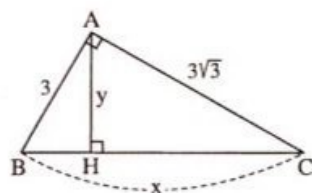
$$\Rightarrow x = 6.$$

Áp dụng hệ thức $ah = bc$ ta được

$$BC.AH = AC.AB$$

$$\Rightarrow 6y = 3\sqrt{3}.3$$

$$\Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$



Hình 5

Ví dụ 2. Tính diện tích tam giác ABC trong hình 6.

Giải

Áp dụng hệ thức $h^2 = b'.c'$ ta được

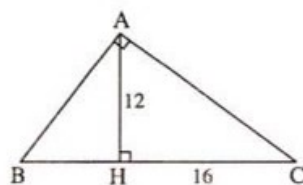
$$AH^2 = HB.HC \Rightarrow 12^2 = HB.16$$

$$\Rightarrow HB = 9.$$

Do đó $BC = 9 + 16 = 25$.

Diện tích tam giác ABC là :

$$S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}.25.12 = 150 \text{ (dvd)}.$$



Hình 6

Ví dụ 3. Tính độ dài AH trong hình 7.

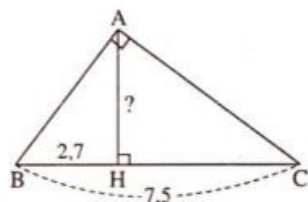
Giải

Ta có $HC = 7,5 - 2,7 = 4,8$.

Áp dụng hệ thức $h^2 = b'c'$ ta được :

$$AH^2 = HB.HC = 2,7.4,8 = 12,96$$

$$\Rightarrow AH = 3,6.$$



Hình 7

Ví dụ 4. Tính độ dài HC trong hình 8.

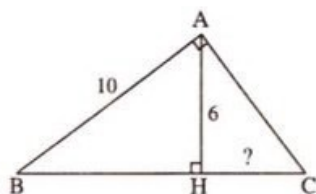
Giải

$$\text{Ta có } BH^2 = AB^2 - AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64$$

$$\Rightarrow BH = 8.$$

$$\text{Ta có } AH^2 = HB.HC$$

$$\Rightarrow 6^2 = 8.HC \Rightarrow HC = 4,5.$$



Hình 8

Ví dụ 5. Tính tích $HA.HB.HC$ trong hình 9.

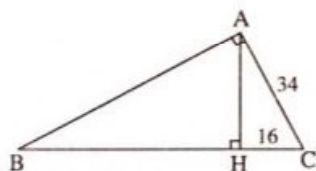
Giải

$$\text{Ta có } AH^2 = AC^2 - HC^2 = 34^2 - 16^2 = 900.$$

$$\Rightarrow AH = 30.$$

$$\text{Ta có } HA.HB.HC = HA.HA^2 = HA^3$$

$$= 30^3 = 27000.$$



Hình 9

Dạng 3. CHỨNG MINH MỘT SỐ HỆ THỨC HÌNH HỌC

Phương pháp giải

Xem hệ thức cần chứng minh giống hoặc gần giống với hệ thức nào trong bốn hệ thức (1), (2), (3), (4) để tìm cách vận dụng hệ thức đó. Nếu cần thì vẽ thêm đường phụ (thường là vẽ thêm đường thẳng vuông góc) sao cho trong hình vẽ có tam giác vuông, có đường cao ứng với cạnh huyền để vận dụng các hệ thức nói trên.

Ví dụ 1. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{D} = 90^\circ$ và $AC \perp BD$. Chứng minh rằng AD là trung bình nhân của hai đáy.

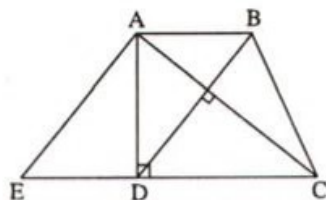
Giải

Qua A vẽ một đường thẳng vuông góc với AC cắt đường thẳng CD tại E (h.10).

Ta có $AE \parallel BD$ (vì cùng vuông góc với AC). Mặt khác $AB \parallel DE$ nên tứ giác ABDE là hình bình hành. Suy ra $DE = AB$.

Áp dụng hệ thức $h^2 = b'c'$ ta có $AD^2 = DE \cdot DC$

Suy ra $AD^2 = AB \cdot DC$ (đpcm).



Hình 10

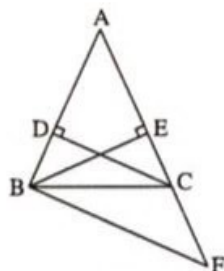
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ các đường cao BE và CD. Từ B vẽ một đường thẳng song song với CD cắt tia AC tại F. Chứng minh rằng $AC^2 = AE \cdot AF$.

Giải

$BF \parallel CD$ mà $CD \perp AB$ nên $BF \perp AB$ (h.11).

Xét $\triangle ABF$ vuông tại B có BE là đường cao ứng với cạnh huyền AF nên $AB^2 = AE \cdot AF$.

Suy ra $AC^2 = AE \cdot AF$ (vì $AB = AC$).



Hình 11

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh rằng $DE^3 = BD \cdot CE \cdot BC$.

Giải

Áp dụng hệ thức $b^2 = ab'$ vào các tam giác vuông HAB và HAC ta được :

$$HB^2 = AB \cdot BD ; HC^2 = AC \cdot CE.$$

Mặt khác $AH^2 = HB \cdot HC$

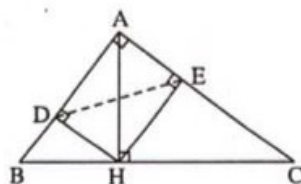
$$\begin{aligned} \Rightarrow AH^4 &= HB^2 \cdot HC^2 \\ &= AB \cdot BD \cdot AC \cdot CE. \end{aligned}$$

Nhưng $AB \cdot AC = BC \cdot AH$ nên $AH^4 = BD \cdot CE \cdot BC \cdot AH$

$$\Rightarrow AH^3 = BD \cdot CE \cdot BC.$$

Dễ thấy tứ giác ADHE là hình chữ nhật nên $AH = DE$.

Do đó $DE^3 = BD \cdot CE \cdot BC$.



Hình 12

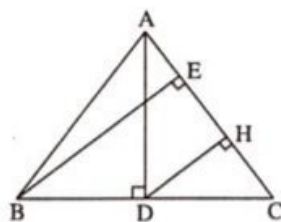
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường cao AD và BE. Cho biết $BE = 2k$; $BC = 2m$; $AD = n$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$.

Giải

Tam giác ABC cân tại A nên đường cao AD cũng là đường trung tuyến, do đó $DB = DC = m$.

Vẽ $DH \perp AC$ thì $DH \parallel BE$ và DH là đường trung bình của $\triangle EBC$ (hình 13), do đó $DH = \frac{1}{2}BE = k$.



Hình 13

Áp dụng hệ thức $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ vào $\triangle DAC$ vuông tại D, ta được

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{AD^2} \text{ hay } \frac{1}{k^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}.$$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Lấy điểm M trên đoạn thẳng HC sao cho $HM = AH$. Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với BC, cắt AC tại D. Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2}$.

Giải

Vẽ $DK \perp AH$ (h.14), tứ giác KDMH là hình chữ nhật nên $KD = HM$, do đó $KD = AH$.

Xét $\triangle KAD$ và $\triangle HBA$ có :

$$\widehat{K} = \widehat{H} = 90^\circ ; KD = AH ;$$

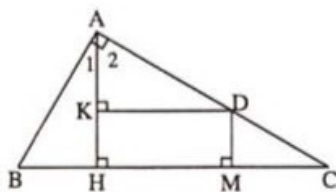
$$\widehat{A_2} = \widehat{B} \text{ (cùng phụ với } \widehat{A_1}).$$

Do đó $\triangle KAD = \triangle HBA$ (g.c.g)

suy ra $AD = AB$.

Áp dụng hệ thức $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ ta được

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}, \text{ dẫn tới } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2}.$$



Hình 14

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ $HK \perp AB$ ($K \in AB$). Chứng minh rằng :

a) $AB.AK = HB.HC$; b) $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $BC = 5\text{cm}$ và tỉ số hai hình chiếu của AB, AC trên cạnh huyền bằng $\frac{9}{16}$. Tính diện tích tam giác ABC.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 15\text{cm}$; $BC = 25\text{cm}$. Tính độ dài hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền và tính đường cao ứng với cạnh huyền.

4. Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AD = 5\text{cm}$; $AC = 12\text{cm}$ và $CD = 13\text{cm}$. Biết diện tích hình thang là 45cm^2 .

a) Tính chiều cao của hình thang.

b) Chứng minh rằng $AB = \frac{1}{2}CD$.

- 5*. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ $HD \perp AB$, $HE \perp AC$

($D \in AB$, $E \in AC$). Chứng minh rằng $\frac{BD}{CE} = \frac{AB^3}{AC^3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

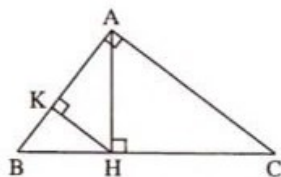
1. a) (h.15) Xét $\triangle HAB$ vuông tại H, ta có $AH^2 = AB.AK$ (1).

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có

$$AH^2 = HB.HC \quad (2).$$

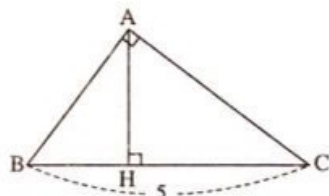
Từ (1) và (2) suy ra $AB.AK = HB.HC$.

- b) Tính AB^2 ; AC^2 rồi lập tỉ số của chúng và rút gọn ta được điều phải chứng minh.



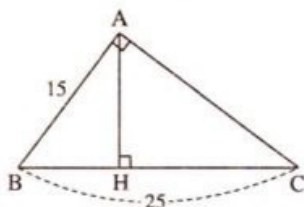
Hình 15

2. (h.16) Vẽ $AH \perp BC$, tính được $HB = 1,8\text{cm}$;
 $HC = 3,2\text{cm}$. Từ đó tính được $AH = 2,4\text{cm}$.
 Diện tích $\triangle ABC$ là 6cm^2 .



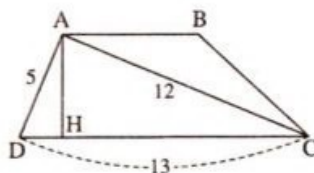
Hình 16

3. (h.17) Vận dụng hệ thức $c^2 = ac'$, ta tính
 được $BH = 9\text{cm}$, từ đó suy ra $CH = 16\text{cm}$.
 Vận dụng hệ thức $h^2 = b'c'$, ta tính được
 $AH = 12\text{cm}$.



Hình 17

4. a) (h. 18) Vẽ $AH \perp BC$. Xét $\triangle ADC$ có
 $AD^2 + AC^2 = CD^2$ (vì $5^2 + 12^2 = 13^2$)
 nên $\triangle ADC$ là tam giác vuông tại A. Vận
 dụng hệ thức $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2}$, ta tính
 được $AH = 4\frac{8}{13}\text{cm}$.



Hình 18

- b) Vận dụng công thức $S = \frac{(AB + CD) \cdot AH}{2}$,
 ta tính được $AB = 6,5\text{cm}$. Do đó $AB = \frac{1}{2}CD$.

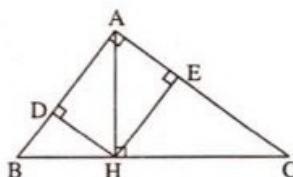
- 5*. (h.19) Trước hết, vận dụng các hệ thức $b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$ để tính tỉ số $\frac{AB^2}{AC^2}$,

$$\text{ta được } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{AB^4}{AC^4} = \frac{HB^2}{HC^2}.$$

$$\text{Ta có } HB^2 = AB \cdot BD ; HC^2 = AC \cdot CE.$$

$$\text{Do đó } \frac{AB^4}{AC^4} = \frac{AB \cdot BD}{AC \cdot CE}. \text{ Suy ra } \frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BD}{CE}.$$



Hình 19

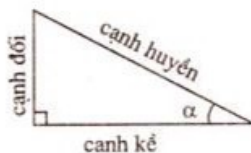
§2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn α

$$\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}.$$



Hình 20

Nhận xét :

- $0 < \sin \alpha < 1$; $0 < \cos \alpha < 1$.
- Nếu hai góc nhọn α và β có : $\sin \alpha = \sin \beta$; hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$; hoặc $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$; hoặc $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$ thì $\alpha = \beta$.
- Nếu $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$; $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$; $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.
- Nếu α tăng thì $\sin \alpha$ tăng, $\operatorname{tg} \alpha$ tăng còn $\cos \alpha$ giảm, $\operatorname{cotg} \alpha$ giảm.

2. Một số hệ thức lượng giác cơ bản

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (1); \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (2);$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1 \quad (3); \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (4).$$

3. Tỉ số lượng giác của một số góc đặc biệt

α Tỉ số lượng giác	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{cotg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC NHỌN TRONG MỘT TAM GIÁC VUÔNG KHI BIẾT HAI CẠNH

Phương pháp giải

- Tính độ dài cạnh thứ ba (theo định lý Py-ta-go).
- Tính các tỉ số lượng giác của một góc nhọn (theo định nghĩa).
- Suy ra các tỉ số lượng giác của góc nhọn còn lại theo định lý về tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

Ví dụ 1. Tam giác ABC vuông tại A, $AB = 1,5$; $BC = 3,5$. Tính các tỉ số lượng giác của góc C rồi suy ra các tỉ số lượng giác của góc B.

Giải

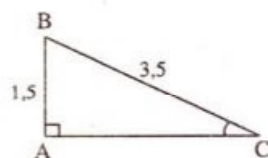
Ta có $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 3,5^2 - 1,5^2 = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$.

$$\text{Do đó } \cos B = \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{1,5}{3,5} \approx 0,4286 ;$$

$$\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{3,5} \approx 0,9035 ;$$

$$\cotg B = \tg C = \frac{AB}{AC} = \frac{1,5}{\sqrt{10}} \approx 0,4743 ;$$

$$\tg B = \cotg C = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{1,5} \approx 2,1082 .$$



Hình 21

Ví dụ 2. Tính các tỉ số lượng giác của góc B trong hình 22.

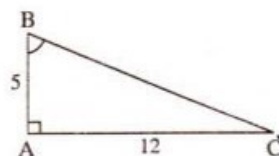
Giải

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

$$\Rightarrow BC = 13.$$

$$\text{Do đó } \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13} ; \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13} ;$$

$$\tg B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{5} ; \cotg B = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{12} .$$



Hình 22

Ví dụ 3. Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2AB$. Tính các tỉ số lượng giác của góc C.

Giải

Ta đặt $AB = m$ thì $BC = 2m$

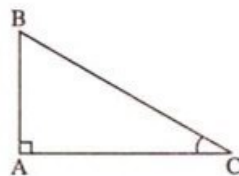
$$\text{suy ra } AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4m^2 - m^2 = 3m^2$$

$$\Rightarrow AC = m\sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có } \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2};$$

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{m\sqrt{3}}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{m\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{m\sqrt{3}}{m} = \sqrt{3}.$$



Hình 23

Ví dụ 4. Tam giác ABC cân tại A, có $BC = 6$, đường cao $AH = 4$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B.

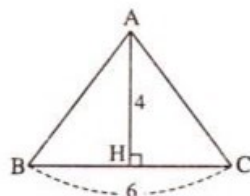
Giải

Ta có $BH = 6 : 2 = 3$;

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

$$\text{Do đó } \sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5} = 0,8; \cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{3}{5} = 0,6;$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{3}; \cot B = \frac{BH}{AH} = \frac{3}{4} = 0,75.$$



Hình 24

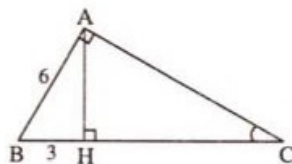
Ví dụ 5. Tính $\operatorname{tg} C$ trong hình 25.

Giải

$$\text{Ta có } AH^2 = AB^2 - BH^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

$$\Rightarrow AH = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó } \operatorname{tg} C = \cot B = \frac{BH}{AH} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Hình 25

Ví dụ 6. Tính $\sin M + \cos N$ trong hình 26.

Giải

$$\text{Ta có } OH^2 = HM \cdot HN = 1 \cdot 3 = 3$$

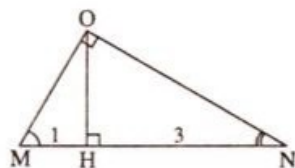
$$\Rightarrow OH = \sqrt{3} ;$$

$$OM = \sqrt{1+3} = 2.$$

$$\text{Do đó } \sin M = \frac{OH}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } \cos N = \sin M = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{nên } \sin M + \cos N = \sqrt{3}.$$



Hình 26

Dạng 2. DỰNG GÓC NHỌN α BIẾT MỘT TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC ĐÓ BẰNG $\frac{m}{n}$

Phương pháp giải

Dựng một tam giác vuông có hai cạnh là m và n (m và n tương ứng là cạnh góc vuông và cạnh huyền nếu tỉ số lượng giác đã cho là $\sin$ hoặc $\cos$; m và n là hai cạnh góc vuông nếu tỉ số lượng giác đã cho là $\tan$ hoặc $\cot$) rồi vận dụng định nghĩa để nhận ra góc α .

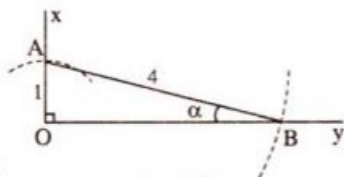
Ví dụ 1. Dựng góc α , biết $\sin \alpha = 0,25$.

Giải

$$\text{Ta có } 0,25 = \frac{1}{4}.$$

- Dựng góc vuông xOy ;
- Trên cạnh Ox đặt $OA = 1$;
- Dựng đường tròn $(A ; 4)$ cắt cạnh Oy tại B .

$$\text{Khi đó } \widehat{ABO} = \alpha \text{ (vì } \sin \alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{1}{4} \text{) (h.27)}$$



Hình 27

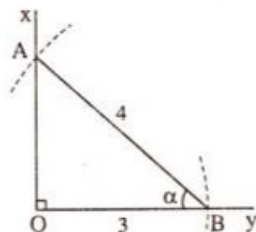
Ví dụ 2. Dựng góc α , biết $\cos \alpha = 0,75$.

Giải

$$\text{Ta có } 0,75 = \frac{3}{4}.$$

- Dựng góc vuông xOy ;
- Trên cạnh Oy đặt $OB = 3$;
- Dựng đường tròn $(B ; 4)$ cắt cạnh Ox tại A .

Khi đó $\widehat{ABO} = \alpha$ (vì $\cos \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{3}{4}$) (h.28).



Hình 28

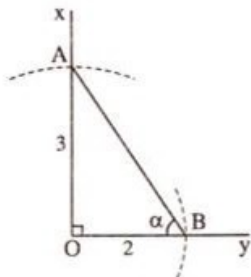
Ví dụ 3. Dựng góc α , biết $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$.

Giải

Ta có $1,5 = \frac{3}{2}$.

- Dựng góc vuông xOy ;
- Trên cạnh Ox đặt $OA = 3$;
- Trên cạnh Oy đặt $OB = 2$.

Khi đó $\widehat{ABO} = \alpha$ (vì $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{2}$) (h.29).



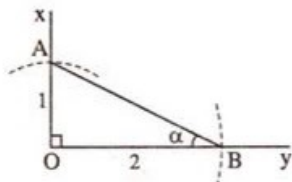
Hình 29

Ví dụ 4. Dựng góc α , biết $\cot \alpha = 2$.

Giải

- Dựng góc vuông xOy ;
- Trên cạnh Ox đặt $OA = 1$;
- Trên cạnh Oy đặt $OB = 2$.

Khi đó $\widehat{ABO} = \alpha$ (vì $\cot \alpha = \frac{OB}{OA} = 2$) (h.30).



Hình 30

Dạng 3. CHỨNG MINH HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa của các tỉ số lượng giác và một số hệ thức lượng giác cơ bản đã biết.

Ví dụ 1. Cho góc nhọn α . Chứng minh rằng :

a) $\sin \alpha < \operatorname{tg} \alpha$;

b) $\cos \alpha < \cot \alpha$.

Giải

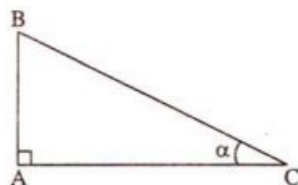
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, $\widehat{C} = \alpha$ (h.31).

a) Ta có $\sin \alpha = \frac{AB}{BC}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{AC}$.

Vì $BC > AC$ nên $\frac{AB}{BC} < \frac{AB}{AC}$, suy ra $\sin \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.

b) Ta có $\cos \alpha = \frac{AC}{BC}$; $\cot \alpha = \frac{AC}{AB}$.

Vì $BC > AB$ nên $\frac{AC}{BC} < \frac{AC}{AB}$, suy ra $\cos \alpha < \cot \alpha$.



Hình 31

Ví dụ 2. Chứng minh các hệ thức

a) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$;

b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Giải

a) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

b) $1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng :

a) $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$;

b) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1} = \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha}$.

Giải

a) Ta có $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \Leftrightarrow (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng nên đẳng thức đã cho là đúng.

b) Xét vế trái $T = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}$; vế phải $P = \frac{1 + \operatorname{cotg} \alpha}{1 - \operatorname{cotg} \alpha}$,

$$T = \left(\frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha} + 1 \right) : \left(\frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha} - 1 \right)$$

$$T = \frac{1 + \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{cotg} \alpha} : \frac{1 - \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{cotg} \alpha}$$

$$T = \frac{1 + \operatorname{cotg} \alpha}{1 - \operatorname{cotg} \alpha}.$$

Rõ ràng $T = P$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng : $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$.

Giải

Ta biến đổi vế trái T :

$$\begin{aligned} T &= \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Ta thấy vế trái bằng vế phải.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng : $\frac{1 - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$.

Giải

Xét vế trái T :

$$\begin{aligned} T &= \frac{(1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)(1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} \\ T &= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} \\ T &= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 (\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} \end{aligned}$$

$$T = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2.$$

Ta thấy vế trái đúng bằng vế phải.

Dạng 4. BIẾT MỘT TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỎ, TÍNH CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC KHÁC CỦA GÓC ĐÓ

Phương pháp giải

Vận dụng các hệ thức cơ bản :

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} ; \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} ; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} ;$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} ; \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} ; \frac{1}{\sin \alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha} .$$

Ví dụ 1. Cho biết $\sin \alpha = 0,6$; tính $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$.

Giải

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (0,6)^2} = 0,8 ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75 ;$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 2. Cho biết $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, tính $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$.

Giải

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2} ;$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ví dụ 3. Cho biết $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tính $\cot\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

Giải

$$\text{Ta có } \cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} ;$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó } \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4. Cho biết $\cot x = 2$, tính $\operatorname{tg}x$, $\sin x$, $\cos x$.

Giải

$$\text{Ta có } \operatorname{tg}x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{2} ;$$

$$\frac{1}{\sin x} = \sqrt{1 + \cot^2 x} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Do đó } \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} ;$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Dạng 5. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC VỚI CÁC GÓC ĐẶC BIỆT (KHÔNG DÙNG MÁY TÍNH HOẶC BẢNG SỐ)

Phương pháp giải

- Căn cứ vào bảng giá trị các tỉ số lượng giác của các góc 30° ; 45° ; 60° .
- Căn cứ vào tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.
- Căn cứ vào các hệ thức lượng giác cơ bản.

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức

a) $M = 4\cos^2 45^\circ + \sqrt{3} \cot 30^\circ - 16\cos^3 60^\circ$;

b) $N = \frac{2\sin 30^\circ - \sin 60^\circ}{\cos^2 30^\circ - \cos 60^\circ}$.

Giải

a) $M = 4\cos^2 45^\circ + \sqrt{3} \cot 30^\circ - 16\cos^3 60^\circ$

$$\begin{aligned} &= 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= 2 + 3 - 2 = 3. \end{aligned}$$

b) $N = \frac{2\sin 30^\circ - \sin 60^\circ}{\cos^2 30^\circ - \cos 60^\circ}$

$$N = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức

a) $P = \sin^2 30^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ + \sin^2 60^\circ$;

b) $Q = \cos^2 25^\circ - \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ - \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ$.

Giải

a) $P = \sin^2 30^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ + \sin^2 60^\circ$

$$= (\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ) - (\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ)$$

$$= (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) - (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ)$$

$$= 1 - 1 = 0.$$

b) $Q = \cos^2 25^\circ - \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ - \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ$

$$= (\cos^2 25^\circ + \cos^2 65^\circ) - (\cos^2 35^\circ + \cos^2 55^\circ) + \cos^2 45^\circ$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ) - (\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&= 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức sau với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$:

$$A = \cos^2 \alpha - \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{cotg} 45^\circ - 2 \sin 30^\circ + \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Giải

$$A = \cos^2 \alpha - \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{cotg} 45^\circ - 2 \sin 30^\circ + \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha - \sqrt{3} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$A = \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \sqrt{3} + 1 - 1$$

$$A = \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sqrt{3}$$

$$A = 1 - \sqrt{3}.$$

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$:

$$\text{a) } B = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha ;$$

$$\text{b) } C = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Giải

$$\text{a) } B = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1.$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } C &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
&= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\
&= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = 1.
\end{aligned}$$

Ví dụ 5. Cho biểu thức $A = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}$.

$$\text{a) Chứng minh rằng } A = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

$$\text{b) Tính giá trị của } A, \text{ biết } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}.$$

Giải

$$a) A = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$$

$$A = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

b) Chia cả tử và mẫu của A cho $\cos \alpha$, ta được :

$$A = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3} + 1} = -\frac{1}{5}.$$

Dạng 6. SO SÁNH CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC MÀ KHÔNG DÙNG MÁY TÍNH HOẶC BẢNG SỐ

Phương pháp giải

Dùng định lý tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau (nếu cần) và căn cứ vào những tính chất sau :

a) Khi góc nhọn α tăng từ 0° đến 90° thì :

- $\sin \alpha$ tăng và $\operatorname{tg} \alpha$ tăng ;
- $\cos \alpha$ giảm và $\operatorname{cotg} \alpha$ giảm.

b) $\sin \alpha < \operatorname{tg} \alpha$; $\cos \alpha < \operatorname{cotg} \alpha$.

Ví dụ 1. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần :

a) $\sin 70^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\cos 40^\circ$, $\sin 51^\circ$;

b) $\cos 34^\circ$, $\sin 57^\circ$, $\operatorname{cotg} 32^\circ$.

Giải

a) Ta có $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$; $\cos 40^\circ = \sin 50^\circ$.

Vì $\sin 50^\circ < \sin 51^\circ < \sin 60^\circ < \sin 70^\circ$

nên $\cos 40^\circ < \sin 51^\circ < \cos 30^\circ < \sin 70^\circ$.

b) Ta có $\cos 34^\circ = \sin 56^\circ$; $\operatorname{cotg} 32^\circ = \operatorname{tg} 58^\circ$.

Vì $\sin 56^\circ < \sin 57^\circ < \sin 58^\circ < \operatorname{tg} 58^\circ$

nên $\cos 34^\circ < \sin 57^\circ < \operatorname{cotg} 32^\circ$.

Ví dụ 2. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần :

- a) $\cotg 40^\circ$, $\sin 40^\circ$, $\cotg 43^\circ$, $\tg 42^\circ$;
 b) $\tg 52^\circ$, $\cotg 63^\circ$, $\tg 72^\circ$, $\cotg 31^\circ$, $\sin 27^\circ$.

Giải

- a) Ta có $\cotg 40^\circ = \tg 50^\circ$; $\cotg 43^\circ = \tg 47^\circ$.

Vì $\sin 40^\circ < \tg 40^\circ < \tg 42^\circ < \tg 47^\circ < \tg 50^\circ$

nên $\sin 40^\circ < \tg 42^\circ < \cotg 43^\circ < \cotg 40^\circ$.

- b) Ta có $\cotg 63^\circ = \tg 27^\circ$; $\cotg 31^\circ = \tg 59^\circ$.

Vì $\sin 27^\circ < \tg 27^\circ < \tg 52^\circ < \tg 59^\circ < \tg 72^\circ$

nên $\sin 27^\circ < \cotg 63^\circ < \tg 52^\circ < \cotg 31^\circ < \tg 72^\circ$.

Ví dụ 3. Cho $25^\circ < \alpha < 50^\circ$, hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự giảm dần : $\sin \alpha$; $\cos(\alpha + 40^\circ)$; $\tg(\alpha + 10^\circ)$.

Giải

Vì $25^\circ < \alpha < 50^\circ$ nên $\alpha + 10^\circ > \alpha > 50^\circ - \alpha$.

Mặt khác góc $50^\circ - \alpha$ phụ với góc $\alpha + 40^\circ$.

Ta có $\tg(\alpha + 10^\circ) > \sin(\alpha + 10^\circ) > \sin \alpha > \sin(50^\circ - \alpha)$

Do đó $\tg(\alpha + 10^\circ) > \sin \alpha > \cos(\alpha + 40^\circ)$.

Ví dụ 4. So sánh hai số m và n, biết $m = \frac{\sin 50^\circ}{\cos 65^\circ}$; $n = \frac{\cotg 70^\circ}{\tg 35^\circ}$.

Giải

$$\text{Ta có } m = \frac{\sin 50^\circ}{\cos 65^\circ} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 25^\circ} > \frac{\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ} = 1 ; \quad (1)$$

$$n = \frac{\cotg 70^\circ}{\tg 35^\circ} = \frac{\tg 20^\circ}{\tg 35^\circ} < \frac{\tg 35^\circ}{\tg 35^\circ} = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $m > n$.

Dạng 7. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Phương pháp giải

- Vận dụng các hệ thức lượng giác cơ bản để biến đổi phương trình về dạng phương trình cơ bản : $\sin x = m$; $\cos x = m$; $\tan x = m$; $\cot x = m$.
- Giải phương trình lượng giác cơ bản, chẳng hạn $\sin x = m$ theo mẫu :
$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha.$$

Ví dụ 1. Tìm góc nhọn x , biết :

a) $4\sin x - 1 = 1$; b) $2\sqrt{3} - 3\tan x = \sqrt{3}$.

Giải

a) $4\sin x - 1 = 1$;

$$\Leftrightarrow 4\sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin 30^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ.$$

b) $2\sqrt{3} - 3\tan x = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow -3\tan x = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \tan 30^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ.$$

Ví dụ 2. Tìm góc nhọn x , biết :

a) $7\sin x - 3\cos(90^\circ - x) = 2,5$; b) $(2\sin x - \sqrt{2})(4\cos x - 5) = 0$.

Giải

a) $7\sin x - 3\cos(90^\circ - x) = 2,5$

$$\Leftrightarrow 7\sin x - 3\sin x = 2,5$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x = 2,5 \Leftrightarrow \sin x = 0,625$$

$$\Leftrightarrow \sin x \approx \sin 38^\circ 41' \Leftrightarrow x \approx 38^\circ 41'.$$

b) $(2\sin x - \sqrt{2})(4\cos x - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - \sqrt{2} = 0 \\ 4\cos x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

- Xét $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin 45^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ$.
- Xét $\cos x = \frac{5}{4}$: không có góc nhọn nào mà cosin của nó lớn hơn 1.

Kết luận : $x = 45^\circ$.

Ví dụ 3. Tìm góc nhọn x , biết :

a) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0,19$;

b) $\frac{1}{3}\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{3}{8}$.

Giải

a) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0,19$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = 0,19$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 3 + 3\cos^2 x = 0,19$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x = 3,19$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 0,7975$$

$$\Leftrightarrow \cos x \approx 0,8930 \text{ (vì } \cos x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos x \approx \cos 26^\circ 45'$$

$$\Leftrightarrow x \approx 26^\circ 45'.$$

b) $\frac{1}{3}\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{3}{8}$

$$\Leftrightarrow 8\cos^2 x + 12\sin^2 x = 9$$

$$\Leftrightarrow 8(1 - \sin^2 x) + 12\sin^2 x = 9$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ (vì } \sin x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin 30^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ.$$

Ví dụ 4. Tìm góc nhọn x , biết :

a) $\sin x - \cos x = 0$;

b) $\sin x + \cos x = 1$.

Giải

a) $\sin x - \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin(90^\circ - x)$$

$$\Leftrightarrow x = 90^\circ - x$$

$$\Leftrightarrow 2x = 90^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ.$$

b) $\sin x + \cos x = 1$

$$\Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0. \end{cases}$$

Không có góc nhọn x nào mà $\sin x = 0$, $\cos x = 0$.

Ví dụ 5. Tìm góc nhọn x , biết : $\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x = 1$.

Giải

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} x = 1. \end{cases}$$

Xét $\operatorname{tg} x = 0$: Không có góc nhọn x nào mà $\operatorname{tg} x = 0$.

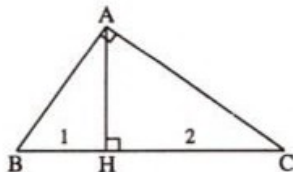
Xét $\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 45^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hình 32. Tính $\sin C$ và $\operatorname{tg} B$.

2. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{1 - 2\cos^2 \alpha}{1 + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$



Hình 32

3. Cho góc nhọn α .

a) Biết $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, hãy tính $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$.

b) Biết $\tan \alpha = 2$, hãy tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

4. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy

a) Tính giá trị của biểu thức

$$M = \sin^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin^2 70^\circ.$$

b) Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần

$$\sin 41^\circ; \cos 58^\circ; \cot 49^\circ; \cos 75^\circ; \sin 25^\circ.$$

5*. Cho tam giác nhọn ABC, độ dài các cạnh BC, CA, AB lần lượt bằng a, b, c.

a) Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

b) Chứng minh rằng nếu $a + b = 2c$ thì $\sin A + \sin B = 2\sin C$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Ta có $AB^2 = BC \cdot BH = 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$;

$$AH^2 = BH \cdot CH = 1 \cdot 2 = 2 \Rightarrow AH = \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{1 - 2\cos^2 \alpha}{1 + 2\sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$3. \quad a) \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad \tan \alpha = 2\sqrt{2}.$$

$$b) \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

4. a) 1 ; b) $\cos 75^\circ < \sin 25^\circ < \cos 58^\circ < \sin 41^\circ < \cotg 49^\circ$.

5. a) Vẽ $CH \perp AB$ (hình 33). Ta có :

$$\sin A = \frac{CH}{AC} ; \sin B = \frac{CH}{BC}.$$

$$\text{Do đó } \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{CH}{AC} : \frac{CH}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

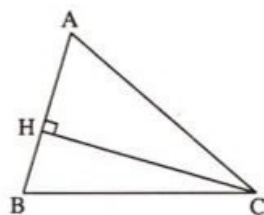
$$\text{Chứng minh tương tự ta được } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

b) Từ kết quả $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ suy ra

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2c}{2 \sin C} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B}.$$

$$\text{Vì } a + b = 2c \text{ nên } \sin A + \sin B = 2 \sin C.$$



Hình 33

§4. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§5. ỨNG DỤNG THỰC TẾ CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lí

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng :

a) Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cosin góc kề ;

b) Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với cotang góc kề.

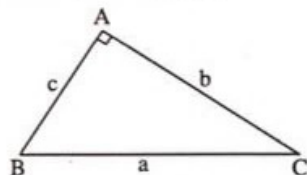
Trong hình 34, ta có :

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C ;$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B ;$$

$$b = c \cdot \tg B = c \cdot \cotg C ;$$

$$c = b \cdot \tg C = b \cdot \cotg B.$$



Hình 34

2. Giải tam giác vuông

Giải tam giác vuông là tìm tất cả các cạnh còn lại và các góc còn lại của tam giác vuông đó nếu biết trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. GIẢI TAM GIÁC VUÔNG

Phương pháp giải

Dùng các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông và dùng bảng lượng giác hoặc máy tính để tính các yếu tố còn lại. Nói chung, nếu biết hai cạnh của tam giác thì nên tìm góc nhọn trước, cạnh kia sau bằng cách dùng định lý Py-ta-go hoặc một trong bốn hệ thức trên.

Kết quả, cần làm tròn đến phút (đối với góc) và đến chữ số thập phân thứ nhất (đối với độ dài).

Ví dụ 1. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 3,5$; $AC = 4,2$.

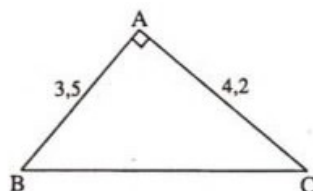
Giải

$$\text{Ta có } \operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = \frac{4,2}{3,5} \approx \operatorname{tg} 50^{\circ} 12'.$$

$$\text{Vậy } \hat{B} \approx 50^{\circ} 12'; \hat{C} \approx 90^{\circ} - 50^{\circ} 12' = 39^{\circ} 48';$$

$$BC = \sqrt{3,5^2 + 4,2^2} \approx 5,5$$

$$(\text{hoặc } a = \frac{b}{\sin B} = \frac{4,2}{\sin 50^{\circ} 12'} \approx 5,5).$$



Hình 35

Ví dụ 2. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 3,0$; $BC = 4,5$.

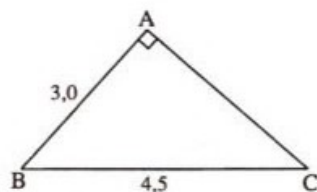
Giải

$$\text{Ta có } \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3,0}{4,5} \approx \sin 41^{\circ} 49'.$$

$$\text{Vậy } \hat{C} \approx 41^{\circ} 49'; \hat{B} \approx 90^{\circ} - 41^{\circ} 49' = 48^{\circ} 11';$$

$$AC = \sqrt{4,5^2 - 3,0^2} \approx 3,4$$

$$(\text{hoặc } AC = BC \cdot \sin B = 4,5 \cdot \sin 48^{\circ} 11' \approx 3,4).$$



Hình 36

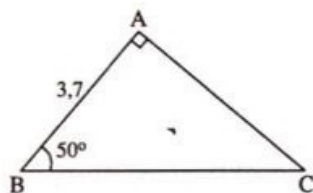
Ví dụ 3. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết $\hat{B} = 50^\circ$; $AB = 3,7$.

Giải

Ta có $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$;

$$AC = AB.tgB = 3,7.tg50^\circ \approx 4,4 ;$$

$$BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{3,7}{\cos 50^\circ} \approx 5,8 .$$



Hình 37

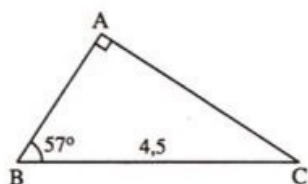
Ví dụ 4. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết $\hat{B} = 57^\circ$; $BC = 4,5$.

Giải

Ta có $\hat{C} = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$;

$$AB = BC.\cos B = 4,5.\cos 57^\circ \approx 2,5 ;$$

$$AC = BC.\sin B = 4,5.\sin 57^\circ \approx 3,8 .$$



Hình 38

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB = 2,5$; $BH = 1,5$. Tính $\hat{B}$, $\hat{C}$ và AC.

Giải

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H (hình 39), ta có

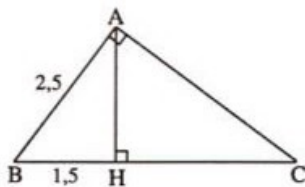
$$\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{1,5}{2,5} \approx \cos 53^\circ 8' .$$

Do đó $\hat{B} \approx 53^\circ 8'$;

$$\hat{C} = 90^\circ - 53^\circ 8' = 36^\circ 52' .$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có

$$AC = AB.tgB = 2,5.tg53^\circ 8' \approx 3,3 .$$



Hình 39

Dạng 2. GIẢI TAM GIÁC NHỌN

Phương pháp giải

Vẽ thêm đường cao để vận dụng các hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông (dùng độ dài đường cao làm trung gian).

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 65^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$; $AB = 2,8\text{cm}$. Tính các góc và các cạnh còn lại của tam giác đó (gọi là giải tam giác ABC).

Giải

Ta có $\hat{A} = 180^\circ - (65^\circ + 45^\circ) = 70^\circ$.

Vẽ đường cao AH (hình 40).

- Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có

$$AH = AB \cdot \sin B = 2,8 \cdot \sin 65^\circ \approx 2,54 \text{ (cm)} ;$$

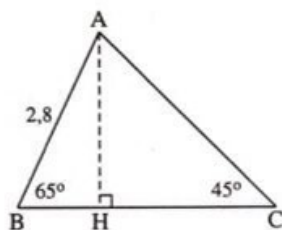
$$BH = AB \cdot \cos B = 2,8 \cdot \cos 65^\circ \approx 1,18 \text{ (cm)}.$$

Tam giác HAC vuông cân tại H nên $AH = HC$.

Do đó $BC \approx 2,54 + 1,18 = 3,7 \text{ (cm)}$.

- Xét $\triangle AHC$ vuông tại H, ta có

$$AC = \frac{AH}{\sin C} \approx \frac{2,54}{\sin 45^\circ} \approx 3,6 \text{ (cm)}.$$



Hình 40

Ví dụ 2. Giải tam giác ABC, biết $\hat{B} = 65^\circ$; $\hat{C} = 40^\circ$ và $BC = 4,2\text{cm}$.

Giải

Ta có $\hat{A} = 180^\circ - (65^\circ + 40^\circ) = 75^\circ$.

Vẽ $BH \perp AC$ (hình 41).

- Xét $\triangle HBC$ vuông tại H, ta có

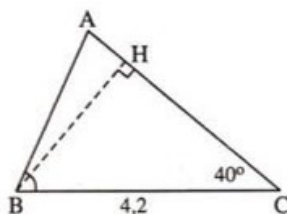
$$BH = BC \cdot \sin C = 4,2 \cdot \sin 40^\circ \approx 2,70 \text{ (cm)}.$$

- Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có

$$AB = \frac{BH}{\sin A} \approx \frac{2,70}{\sin 75^\circ} \approx 2,8 \text{ (cm)}.$$

Ta có $AC = AH + CH = BH \cdot (\cotg A + \cotg C)$

$$\approx 2,70 \cdot (\cotg 75^\circ + \cotg 40^\circ) \approx 3,9 \text{ (cm)}.$$



Hình 41

Ví dụ 3. Giải tam giác nhọn ABC, biết $AB = 2,1$; $AC = 3,8$; $\hat{B} = 70^\circ$.

Giải

Vẽ $AH \perp BC$ (hình 42).

- Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có

$$AH = AB.\sin B = 2,1.\sin 70^\circ \approx 1,97;$$

$$BH = AB.\cos B = 2,1.\cos 70^\circ \approx 0,72.$$

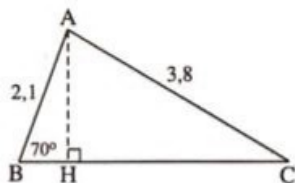
- Xét $\triangle AHC$ vuông tại H, ta có

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \approx \frac{1,97}{3,8} \approx \sin 31^\circ 14'$$

$$\text{do đó } \hat{C} \approx 31^\circ 14'; \hat{A} \approx 180^\circ - (70^\circ + 31^\circ 14') = 78^\circ 46'.$$

$$\text{Ta có } HC = AC.\cos C \approx 3,80.\cos 31^\circ 14' \approx 3,25;$$

$$\text{suy ra } BC = BH + HC = 0,72 + 3,25 = 3,97 \approx 4,0.$$



Hình 42

Ví dụ 4. Giải tam giác nhọn ABC, biết $\hat{B} = 60^\circ$; $AB = 3,0$; $BC = 4,5$.

Giải

Vẽ $AH \perp BC$ (hình 43).

$$\text{Ta có } AH = AB.\sin B = 3,0.\sin 60^\circ \approx 2,6;$$

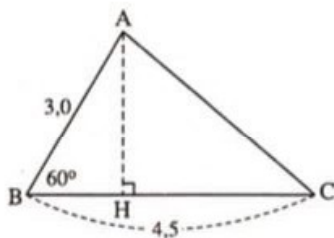
$$BH = AB.\cos B = 3,0.\cos 60^\circ = 1,5.$$

$$\text{Suy ra } HC = 4,5 - 1,5 = 3,0.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AC &= \sqrt{HC^2 + AH^2} \\ &= \sqrt{3,0^2 + 2,6^2} \approx 4,0; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{AH}{HC} \approx \frac{2,6}{3,0} \approx \operatorname{tg} 40^\circ 55' \Rightarrow \hat{C} \approx 40^\circ 55'.$$

$$\text{Do đó } \hat{A} \approx 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ 55') = 79^\circ 5'.$$



Hình 43

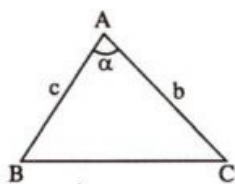
Dạng 3. TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC, TỨ GIÁC

Phương pháp giải

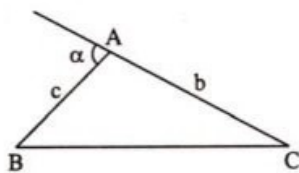
Tính các yếu tố cần thiết rồi thay vào công thức tính diện tích và thực hiện các phép tính.

Ví dụ 1. Cho hình 44. Chứng minh rằng tam giác ABC có diện tích là

$$S = \frac{1}{2}b.c.\sin \alpha.$$



a)

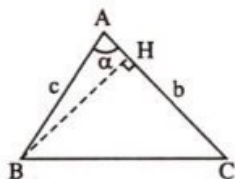


b)

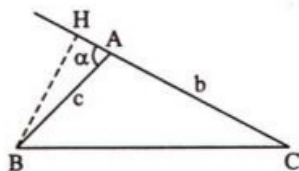
Hình 44

Giải

Vẽ đường cao BH của $\triangle ABC$ (hình 45).



a)



b)

Hình 45

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có

$$BH = AB \cdot \sin A = c \cdot \sin \alpha.$$

Diện tích tam giác ABC là :

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

Nhận xét : Qua ví dụ này ta có thêm một cách tính diện tích tam giác :

Diện tích tam giác bằng nửa tích hai cạnh nhân với sin của góc nhọn xen giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh đó.

Ví dụ 2. Tứ giác ABCD trong hình 46 có $AC = 3,8$; $BD = 5,0$ và $\alpha = 65^\circ$. Tính diện tích của tứ giác đó.

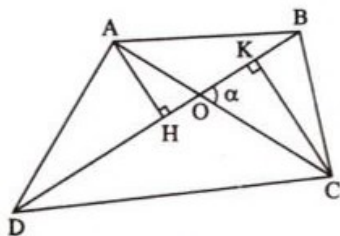
Giải

Vẽ $AH \perp BD$; $CK \perp BD$.

Ta có $AH = OA \cdot \sin \alpha$;

$$CK = OC \cdot \sin \alpha.$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AH = \frac{1}{2} BD \cdot OA \cdot \sin \alpha.$$



Hình 46

$$S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2} BD \cdot CK = \frac{1}{2} BD \cdot OC \cdot \sin \alpha .$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2} BD \cdot \sin \alpha (OA + OC) \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot AC \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 3,8 \sin 65^\circ \approx 8,6 \text{ (dvd)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tam giác ABC có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$; $AB = 3$; $AC = 6$. Tính độ dài của đường phân giác AD.

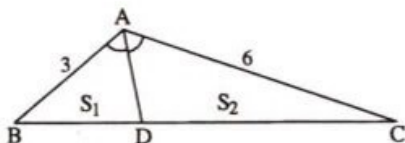
Giải

Vì $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$ nên $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = 60^\circ$.

• Diện tích ΔABC là

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{18}{2} \cdot \sin 60^\circ . \end{aligned} \tag{1}$$



Hình 47

• Diện tích ΔABD là $S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{2} AD \sin 60^\circ$. (2)

• Diện tích ΔACD là $S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{6}{2} AD \sin 60^\circ$. (3)

Vì $S = S_1 + S_2$ nên từ (1), (2), (3) suy ra

$$\frac{18}{2} \sin 60^\circ = \frac{9}{2} AD \sin 60^\circ$$

Do đó $AD = 2$.

Ví dụ 4. Hình bình hành ABCD có $AC \perp AD$ và $AD = 3,5$; $\widehat{D} = 50^\circ$. Tính diện tích của hình bình hành.

Giải

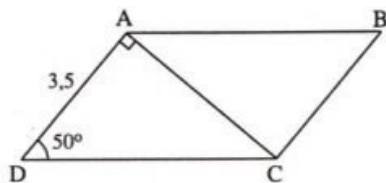
Xét $\triangle ADC$ vuông tại A (h.48), ta có :

$$\begin{aligned} AC &= AD \cdot \operatorname{tg} D \\ &= 3,5 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ. \end{aligned}$$

Diện tích hình bình hành là

$$S = AD \cdot AC = 3,5 \cdot 3,5 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$$

$$S \approx 14,6 \text{ (đvdt)}.$$



Hình 48

Ví dụ 5. Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{D} = 90^\circ$; $\widehat{C} = 38^\circ$; $AB = 3,5$; $AD = 3,1$.

Tính diện tích của hình thang đó.

Giải

Vẽ $BH \perp CD$ (h.49), ta được $BH = 3,1$;

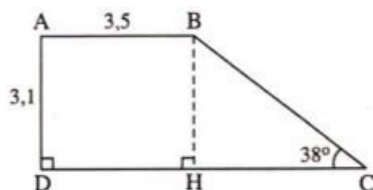
$DH = 3,5$. Xét tam giác BHC vuông tại H,

ta có : $HC = BH \cdot \operatorname{cotg} C = 3,1 \cdot \operatorname{cotg} 38^\circ \approx 4,0$.

Ta có $CD = DH + HC = 3,5 + 4,0 = 7,5$.

Diện tích hình thang ABCD là :

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot BH}{2} = \frac{(3,5 + 7,5) \cdot 3,1}{2} \approx 17,1 \text{ (đvdt)}.$$



Hình 49

Dạng 4. XÁC ĐỊNH KHOẢNG CÁCH VÀ CHIỀU CAO KHÔNG TỚI ĐƯỢC

Phương pháp giải

Xác định các số liệu cần thiết rồi tính toán theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông.

Ví dụ 1. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B trên bờ một hồ nước sâu, biết

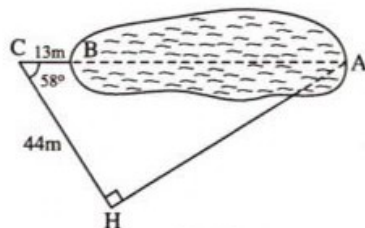
$\widehat{C} = 58^\circ$; $CB = 13\text{m}$; $CH = 44\text{m}$ (hình 50).

Giải

Xét $\triangle HAC$ vuông tại H, ta có :

$$AC = \frac{HC}{\cos C} = \frac{44}{\cos 58^\circ} \approx 83 \text{ (m)}.$$

Do đó $AB = AC - BC \approx 83 - 13 = 70 \text{ (m)}.$



Hình 50

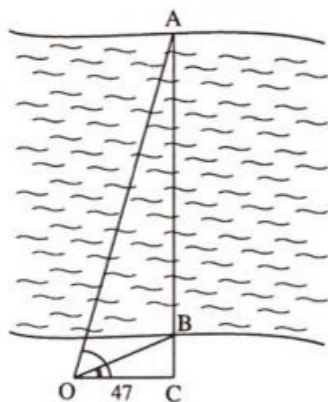
Ví dụ 2. Trong hình 51, tính chiều rộng AB của con sông, biết $OC = 47\text{m}$;
 $\widehat{AOC} = 74^\circ$; $\widehat{BOC} = 23^\circ$.

Giải

Ta có $AC = OC.tg74^\circ$; $BC = OC.tg23^\circ$.

Do đó $AC - BC = OC(tg74^\circ - tg23^\circ)$

hay $AB = 47.(tg74^\circ - tg23^\circ) \approx 144,0 \text{ (m)}$.



Hình 51

Ví dụ 3. Khoảng cách giữa hai chân tháp AB và MN là a (hình 52). Từ đỉnh A của tháp AB nhìn lên đỉnh M của tháp MN ta được góc α . Từ đỉnh A nhìn xuống chân N của tháp MN ta được góc β (so với phương nằm ngang AH). Hãy tìm chiều cao MN nếu $a = 120\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 20^\circ$.

Giải

Xét $\triangle MAH$ vuông tại H, ta có :

$$HM = AH.tg\alpha.$$

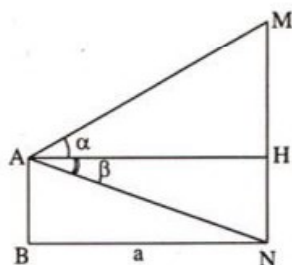
Xét $\triangle NAH$ vuông tại H, ta có :

$$HN = AH.tg\beta.$$

Vậy $MN = HM + HN$

$$= AH(tg\alpha + tg\beta)$$

$$= 120.(tg30^\circ + tg20^\circ) \approx 113,0 \text{ (m)}.$$



Hình 52

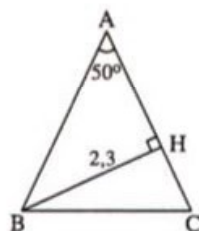
C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Giải tam giác ABC vuông tại A, biết :
 a) $AB = 2,7$; $AC = 4,5$; b) $AC = 4,0$; $BC = 4,8$.
- Giải tam giác ABC vuông tại A, biết :
 a) $BC = 4,5$; $\widehat{C} = 35^\circ$; b) $AB = 3,1$; $\widehat{B} = 65^\circ$.

3. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao BH. Biết $\widehat{A} = 50^\circ$, $BH = 2,3$. Tính chu vi của ΔABC .
4. Hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$. Biết $AB = 2,6$; $CD = 4,7$ và $\widehat{C} = 35^\circ$. Tính diện tích hình thang.
- 5*. Cho tam giác nhọn ABC, $AB > AC$, đường cao AH và đường trung tuyến AM. Gọi α là số đo góc HAM. Chứng minh rằng :
- a) $HB - HC = 2HM$; b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cot B - \cot C}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

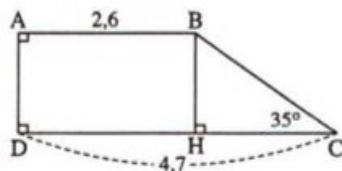
1. a) $\widehat{B} \approx 59^\circ 2'$; $\widehat{C} \approx 30^\circ 58'$; $BC \approx 5,2$.
 b) $\widehat{B} \approx 56^\circ 27'$; $\widehat{C} \approx 33^\circ 33'$; $AB \approx 2,7$.
2. a) $\widehat{B} = 55^\circ$; $AB \approx 2,6$; $AC \approx 3,7$.
 b) $\widehat{C} = 25^\circ$; $AC \approx 6,6$; $BC \approx 7,3$.



Hình 53

3. (h.53) Tính được góc C rồi tính $AB \approx 3,0$; $BC \approx 2,5$.
 Đáp số : 8,5.

4. (h.54) Vẽ $BH \perp CD$, tính được $DH = 2,6$;
 $HC = 2,1$; $BH \approx 1,5$.
 $S \approx 5,5$ (đvdt).



Hình 54

- 5*. (h.55) a) Ta có $HB - HC$
 $= (HM + MB) - (MC - MH) = 2HM$.
 b) Ta đặt $AH = h$ thì :
 $HB = h \cdot \cot B$;
 $HC = h \cdot \cot C$.

Suy ra $HB - HC = h(\cotg B - \cotg C)$

hay $2HM = h(\cotg B - \cotg C). \quad (1)$

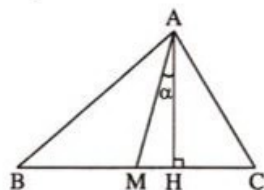
Xét $\triangle AMH$ vuông tại H, ta có

$HM = h.tg\alpha \Rightarrow 2HM = 2h.tg\alpha. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$2h.tg\alpha = h(\cotg B - \cotg C).$

Do đó $tg\alpha = \frac{\cotg B - \cotg C}{2}.$



Hình 55

ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

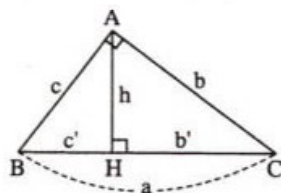
1. Các hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

• $b^2 = ab' ; c^2 = ac'.$ (1)

• $h^2 = b'c'.$ (2)

• $ah = bc.$ (3)

• $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$ (4)



Hình 56

2. Định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn

• $\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} ; \quad \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} ;$

• $tg\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} ; \quad \cotg\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}.$

3. Một số tính chất của các tỉ số lượng giác

• Nếu $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì :

$\sin \alpha = \cos \beta ; \cos \alpha = \sin \beta ; tg\alpha = \cotg \beta ; \cotg \alpha = tg\beta.$

- Nếu $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì :

$$0 < \sin \alpha < 1 ; 0 < \cos \alpha < 1 ; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} ; \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} ; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

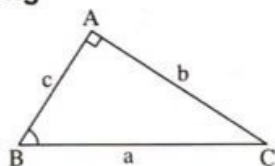
4. Các hệ thức về góc và cạnh trong tam giác vuông

$$b = a \cdot \sin B ; \quad c = a \cdot \sin C$$

$$b = a \cdot \cos C ; \quad c = a \cdot \cos B$$

$$b = c \cdot \operatorname{tg} B ; \quad c = b \cdot \operatorname{tg} C$$

$$b = c \cdot \cotg C ; \quad c = b \cdot \cotg B.$$



Hình 57

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. SO SÁNH CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

Phương pháp giải

Có thể dựa vào những tính chất sau :

- a) Với hai góc nhọn α và β mà $\alpha < \beta$ thì :

$$\sin \alpha < \sin \beta ; \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta ;$$

$$\cos \alpha > \cos \beta ; \cotg \alpha > \cotg \beta.$$

- b) Với góc nhọn α thì :

$$\sin \alpha < \operatorname{tg} \alpha ; \cos \alpha < \cotg \alpha.$$

Ví dụ 1. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần : $\cos 72^\circ, \sin 65^\circ, \sin 10^\circ, \cotg 25^\circ, \sin 40^\circ$.

Giải

Ta có $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ ; \sin 65^\circ = \cos 25^\circ ; \sin 40^\circ = \cos 50^\circ$.

Vì $\cos 80^\circ < \cos 72^\circ < \cos 50^\circ < \cos 25^\circ < \cotg 25^\circ$

nên $\sin 10^\circ < \cos 72^\circ < \sin 40^\circ < \sin 65^\circ < \cotg 25^\circ$.

Ví dụ 2. So sánh :

a) $\sin 55^\circ ; \cos 55^\circ ; \operatorname{tg} 55^\circ ;$

b) $\cotg 20^\circ ; \sin 20^\circ ; \cos 20^\circ$.

Giải

a) Ta có $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ < \sin 55^\circ$.

Do đó $\cos 55^\circ < \sin 55^\circ < \operatorname{tg} 55^\circ$.

b) Ta có $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$.

Vì $\cos 70^\circ < \cos 20^\circ < \operatorname{cotg} 20^\circ$

nên $\sin 20^\circ < \cos 20^\circ < \operatorname{cotg} 20^\circ$.

Ví dụ 3. Cho $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. Chứng minh rằng :

a) $\sin \alpha < \cos \alpha$;

b) $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{cotg} \alpha$.

Giải

Vì $\alpha < 45^\circ$ nên $90^\circ - \alpha > 45^\circ$.

Suy ra $\alpha < 90^\circ - \alpha$.

a) Ta có $\sin \alpha < \sin(90^\circ - \alpha) \Rightarrow \sin \alpha < \cos \alpha$.

b) Ta có $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{cotg} \alpha$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} > \hat{C}$.

Hãy sắp xếp theo thứ tự tăng dần : $\sin B, \cos B, \operatorname{tg} B, \sin C, \cos C, \operatorname{cotg} C$.

Giải

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$.

Ta có $\sin C = \cos B$; $\cos B < \cos C$; $\cos C = \sin B$;

$\sin B < \operatorname{tg} B$; $\operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C$.

Do đó $\sin C = \cos B < \cos C = \sin B < \operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C$.

Dạng 2. RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Phương pháp giải

Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản, tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau ta biến đổi biểu thức đã cho về dạng đơn giản hơn rồi sử dụng tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt để tính giá trị.

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức

a) $\sin^2 \alpha \cdot \cotg^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 1$;

b) $(\tg \alpha - \cotg \alpha)^2 - (\tg \alpha + \cotg \alpha)^2$;

c) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha$.

Giải

a) $\sin^2 \alpha \cdot \cotg^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 1$

$$= \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha + 1$$

$$= \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 1 = 1.$$

b) $(\tg \alpha - \cotg \alpha)^2 - (\tg \alpha + \cotg \alpha)^2$

$$= \tg^2 \alpha - 2 + \cotg^2 \alpha - (\tg^2 \alpha + 2 + \cotg^2 \alpha) = -4.$$

c) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - \cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha$$

$$= 1 \cdot (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - \cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha$$

$$= -2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -2.$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức

a) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \tg 45^\circ + 4\cos^2 30^\circ$;

b) $\cos^2 30^\circ - \cotg^2 60^\circ + \tg^2 30^\circ - 1$;

c) $\frac{\cotg^2 45^\circ - \cos^2 45^\circ}{2\sin^2 60^\circ}$.

Giải

a) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \tg 45^\circ + 4\cos^2 30^\circ$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3.$$

b) $\cos^2 30^\circ - \cotg^2 60^\circ + \tg^2 30^\circ - 1$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4}.$$

$$c) \frac{\cot^2 45^\circ - \cos^2 45^\circ}{2 \sin^2 60^\circ} = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức

$$a) \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cotg 70^\circ} + \frac{\cotg 50^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ};$$

$$b) \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ.$$

Giải

$$a) \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cotg 70^\circ} + \frac{\cotg 50^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ} + \frac{\operatorname{tg} 40^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ} = 1 + 1 = 2.$$

$$b) \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ = (\operatorname{tg} 46^\circ \cdot \cotg 46^\circ) \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ví dụ 4. Tính giá trị của biểu thức

$$a) \cos^2 33^\circ + \cos^2 41^\circ + \cos^2 49^\circ + \cos^2 57^\circ;$$

$$b) \sin^2 35^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 43^\circ + \sin^2 47^\circ + \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ.$$

Giải

$$\begin{aligned} a) & \cos^2 33^\circ + \cos^2 41^\circ + \cos^2 49^\circ + \cos^2 57^\circ \\ &= (\cos^2 33^\circ + \cos^2 57^\circ) + (\cos^2 41^\circ + \cos^2 49^\circ) \\ &= (\cos^2 33^\circ + \sin^2 33^\circ) + (\cos^2 41^\circ + \sin^2 41^\circ) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) & \sin^2 35^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 43^\circ + \sin^2 47^\circ + \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ \\ &= (\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ) + (\sin^2 39^\circ + \sin^2 51^\circ) + (\sin^2 43^\circ + \sin^2 47^\circ) \\ &= (\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ) + (\sin^2 39^\circ + \cos^2 39^\circ) + (\sin^2 43^\circ + \cos^2 43^\circ) \\ &= 1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $M = \frac{2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}$ với $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,5$;

b) $N = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \sin \alpha - \cos \alpha}$ với $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$.

Giải

a) $M = \frac{2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2(\sin \alpha + \cos \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$

$$M = \frac{2}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}.$$

b) $N = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \sin \alpha - \cos \alpha} = \left(\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \right) : \left(\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \right)$

$$N = (2 \operatorname{tg} \alpha + 1) : (2 \operatorname{tg} \alpha - 1) = \left(2 \cdot \frac{3}{2} + 1 \right) : \left(2 \cdot \frac{3}{2} - 1 \right) = 2.$$

Dạng 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Phương pháp giải

- Biến đổi phương trình về dạng $\sin x = m$ (hoặc $\cos x = m$; $\operatorname{tg} x = m$).
- Dùng máy tính hoặc bảng số, đưa đến phương trình $\sin x = \sin \alpha$ (hoặc $\cos x = \cos \alpha$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$).
- Suy ra $x = \alpha$ (với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

Ví dụ 1. Tìm góc nhọn x , biết $(2 \cos x - 1)(4 \sin x - 2\sqrt{2}) = 0$.

Giải

Ta có $(2 \cos x - 1)(4 \sin x - 2\sqrt{2}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x = 1 \\ 4 \sin x = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos 60^\circ \\ \sin x = \sin 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60^\circ \\ x = 45^\circ. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Tìm góc nhọn x , biết $5\cos x + 4\sin(90^\circ - x) = 2$.

Giải

$$5\cos x + 4\sin(90^\circ - x) = 2$$

$$\Leftrightarrow 5\cos x + 4\cos x = 2 \Leftrightarrow 9\cos x = 2 \Leftrightarrow \cos x = \frac{2}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos x \approx \cos 77^\circ 10' \Leftrightarrow x \approx 77^\circ 10'.$$

Ví dụ 3. Tìm góc nhọn x , biết $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$.

Giải

$$\text{Ta có } \sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin 60^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ.$$

Ví dụ 4. Tìm góc nhọn x , biết

a) $\operatorname{tg} x = \sin x$; b) $\operatorname{tg} x = \cot g x$.

Giải

a) $\operatorname{tg} x = \sin x$

$$\text{Suy ra } \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{\cos x} = 1 \text{ (vì } \sin x \neq 0)$$

$$\text{Vậy } \cos x = 1.$$

Không có góc nhọn x nào mà $\cos x = 1$.

b) Ta có $\operatorname{tg} x = \cot g x$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \text{ (vì } \operatorname{tg} x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 45^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ.$$

Dạng 4. TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

Dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông, hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, định nghĩa của các tỉ số lượng giác.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết $\widehat{A} = 44^\circ$; AH = 9cm. Tính chu vi tam giác ABC.

Giải

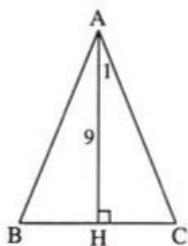
Tam giác ABC cân tại A, AH là đường cao nên AH cũng là đường phân giác, đường trung tuyến (h.58).

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H, ta có :

$$AC = \frac{AH}{\cos A_1} = \frac{9}{\cos 22^\circ} \approx 9,7 \text{ (cm)} ;$$

$$HC = AH \cdot \tan A_1 = 9 \cdot \tan 22^\circ \approx 3,6 \text{ (cm)}.$$

Chu vi tam giác ABC là $(9,7 + 3,6) \cdot 2 \approx 26,6 \text{ (cm)}$.



Hình 58

Ví dụ 2. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), $\widehat{C} = 36^\circ$; $\widehat{D} = 50^\circ$. Biết AB = 4cm; AD = 6cm. Tính chu vi của hình thang.

Giải

Vẽ $AH \perp CD$; $BK \perp CD$ (h.59)

ta được $AH = BK$ và $HK = AB = 4\text{cm}$.

Xét $\triangle ADH$ vuông tại H, ta có :

$$\begin{aligned} DH &= AD \cdot \cos D = 6 \cdot \cos 50^\circ \\ &\approx 3,9 \text{ (cm)} ; \end{aligned}$$

$$AH = AD \cdot \sin D = 6 \cdot \sin 50^\circ \approx 4,6 \text{ (cm)}.$$

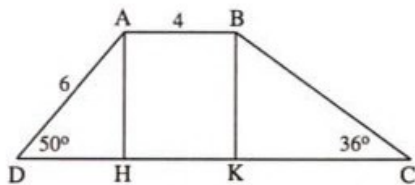
Xét $\triangle BKC$ vuông tại K, ta có :

$$KC = BK \cdot \cot C = 4,6 \cdot \cot 36^\circ \approx 6,3 \text{ (cm)} ;$$

$$BC = \frac{BK}{\sin C} = \frac{4,6}{\sin 36^\circ} \approx 7,8 \text{ (cm)}.$$

Ta có $DC = DH + HK + KC = 3,9 + 4 + 6,3 \approx 14,2 \text{ (cm)}$.

Do đó chu vi của hình thang là : $4 + 7,8 + 14,2 + 6 \approx 32 \text{ (cm)}$.



Hình 59

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ $HM \perp AB$; $HN \perp AC$.
Biết $AB = 3\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$.

- Tính độ dài MN.
- Tính số đo các góc của tam giác AMN.
- Tính diện tích tứ giác BMNC.

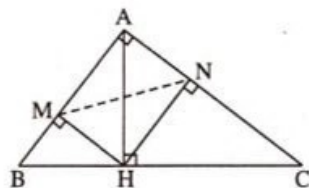
Giải

- (h.60) Áp dụng định lý Py-ta-go ta tính được $BC = 5\text{cm}$.

Áp dụng hệ thức $ah = bc$

ta có $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

$$\begin{aligned}\Rightarrow AH &= \frac{AB \cdot AC}{BC} \\ &= \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4 \text{ (cm)}.\end{aligned}$$



Hình 60

Tứ giác AMHN là hình chữ nhật nên $MN = AH = 2,4 \text{ (cm)}$.

- Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có :

$$AH^2 = AM \cdot AB \Rightarrow AM = \frac{AH^2}{AB} = \frac{2,4^2}{3} = 1,92 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Tương tự, ta có } AN = \frac{AH^2}{AC} = \frac{2,4^2}{4} = 1,44 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Xét } \triangle AMN \text{ vuông tại A, ta có } \tan M = \frac{AN}{AM} = \frac{1,44}{1,92} \approx \tan 36^\circ 52'.$$

$$\text{Do đó } \widehat{M} \approx 36^\circ 52';$$

$$\widehat{N} \approx 90^\circ - 36^\circ 52' = 53^\circ 8'.$$

$$\text{c) } S_{BMNC} = S_{ABC} - S_{AMN}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1,92 \cdot 1,44 \approx 4,6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 4\text{cm}$. Vẽ đường cao AH; vẽ $HI \perp AB$, $HK \perp AC$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác AIHK.

Giải

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có $AH^2 = AI \cdot AB$

$$\Rightarrow AI = \frac{AH^2}{AB}.$$

Xét $\triangle ACH$ vuông tại H, ta có $AH^2 = AK \cdot AC$

$$\Rightarrow AK = \frac{AH^2}{AC}.$$

Tứ giác AIHK là hình chữ nhật, có diện tích là

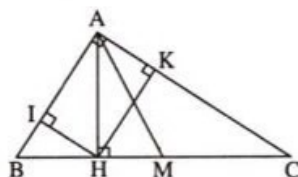
$$S = AI \cdot AK = \frac{AH^2}{AB} \cdot \frac{AH^2}{AC} = \frac{AH^4}{AH \cdot BC} = \frac{AH^3}{BC}.$$

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $AM = \frac{1}{2}BC = 2$ (cm).

Ta có $AH \leq AM = 2$ nên

$$S = \frac{AH^3}{BC} \leq \frac{2^3}{4} = 2 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Do đó $\max S = 2\text{cm}^2$, đạt được khi $AH = AM$ tức là khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A.



Hình 61

Dạng 5. CHỨNG MINH HỆ THỨC GIỮA CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa của các tỉ số lượng giác, các hệ thức lượng giác cơ bản, ta tìm quan hệ giữa vế này với vế kia của hệ thức.

Ví dụ 1. Chứng minh hệ thức $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha} = \cot^4 \alpha$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha(1 - \cos^2 \alpha)} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha(1 - \cos^2 \alpha)} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \cot^2 \alpha \cdot \cot^2 \alpha = \cot^4 \alpha. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Vẽ đường trung tuyến AM. Gọi G là trọng tâm của tam giác. Cho biết $HG \parallel BC$, chứng minh rằng $\text{tg}B \cdot \text{tg}C = 3$.

Giải

- Xét $\triangle ABD$ vuông tại D, ta có

$$\text{tg}B = \frac{AD}{BD}.$$

- Xét $\triangle ACD$ vuông tại D, ta có

$$\text{tg}C = \frac{AD}{CD}.$$

Suy ra $\text{tg}B \cdot \text{tg}C = \frac{AD^2}{BD \cdot CD}. \quad (1)$

Ta có $\triangle BDH \sim \triangle ADC$ (g.g)

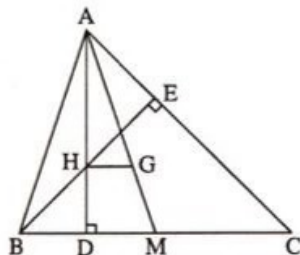
$$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow BD \cdot DC = AD \cdot DH.$$

Thế $BD \cdot CD = AD \cdot DH$ vào (1), ta được

$$\text{tg}B \cdot \text{tg}C = \frac{AD^2}{AD \cdot DH} = \frac{AD}{DH}.$$

Xét $\triangle ADM$ có $HG \parallel BC$ nên $\frac{AD}{DH} = \frac{AM}{GM} = 3$.

Do đó $\text{tg}B \cdot \text{tg}C = 3$.



Hình 62

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho biết $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

a) Tính $\sin \alpha$.

b) Chứng minh rằng $\text{tg} \alpha = 4 \sin \alpha$.

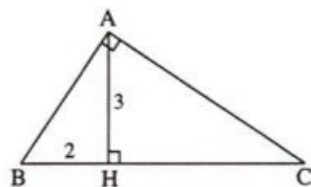
2. Cho biết $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = 5$, tính $\text{tg} \alpha$.

3. Tính số đo của góc nhọn x . biết :

a) $3\cos x + 4\sin(90^\circ - x) = 0,28$;

b) $5\sin^2 x - 3\cos^2 x = -1$.

4. Tính độ dài các cạnh và số đo các góc nhọn của tam giác ABC vuông tại A trong hình 63.



Hình 63

5. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$). Biết $AD = 2,1\text{cm}$; $CD = 6,0\text{cm}$ và $\widehat{D} = 48^\circ$.

a) Tính độ dài AB.

b) Tính diện tích hình thang ABCD.

- 6*. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng $\text{tg} \frac{B}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; b) $\text{tg} \alpha = \sqrt{15}$ suy ra $\text{tg} \alpha = 4\sin \alpha$.

2. $\frac{2}{3}$.

3. a) $87^\circ 42'$; b) 30° .

4. $BC = 6,5$; $AB \approx 3,6$; $AC \approx 5,4$; $\widehat{B} \approx 56^\circ 19'$; $\widehat{C} \approx 33^\circ 41'$.

5. Vẽ các đường cao AH và BK.

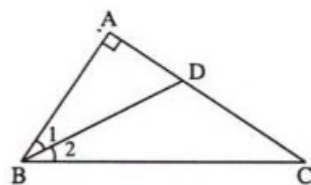
a) $AB \approx 3,2\text{cm}$; b) $S \approx 7,2\text{cm}^2$.

6. Vẽ đường phân giác BD (h.64).

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A, ta có : $\text{tg} \widehat{B}_1 = \frac{AD}{AB}$.

Mặt khác $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{AD + CD}{AB + BC}$,

do đó $\text{tg} \frac{B}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$.



Hình 64

CHƯƠNG II

ĐƯỜNG TRÒN

§1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

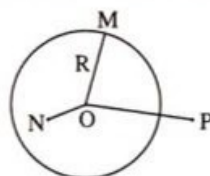
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định nghĩa đường tròn

Đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R .

Kí hiệu : $(O ; R)$ hoặc (O) .

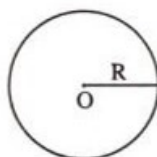
- M nằm trên $(O ; R) \Leftrightarrow OM = R$.
- N nằm trong $(O ; R) \Leftrightarrow ON < R$.
- P nằm ngoài $(O ; R) \Leftrightarrow OP > R$.



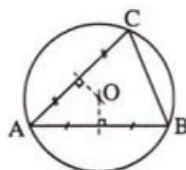
Hình 65

2. Sự xác định đường tròn

- Một đường tròn được xác định khi biết tâm và bán kính hoặc biết đường kính.
- Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.



a)



b)

Hình 66

3. So sánh độ dài của đường kính và dây

Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG NẪM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp giải

Chứng minh các điểm đã cho cách đều một điểm cố định.

Điểm cố định đó là tâm của đường tròn.

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a$, $BC = b$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD (h.67). Theo tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật, ta có :

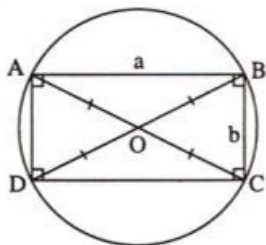
$$OA = OB = OC = OD \left(= \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} BD \right).$$

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc $(O ; \frac{1}{2} AC)$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông ABC, ta có :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2.$$

$$\text{Do đó : } R = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Hình 67

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE. Trên cạnh AC lấy điểm M. Kẻ tia Cx vuông góc với tia BM tại F. Chứng minh rằng năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Giải

Gọi O là trung điểm của BC. Ta có BD là đường cao nên $BD \perp AC$, hay tam giác BDC vuông tại D (h.68).

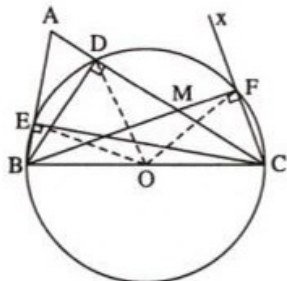
Trong tam giác vuông BDC có DO là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên :

$$OD = OB = OC = \frac{1}{2} BC. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, ta có : } OE = OB = OC = \frac{1}{2} BC \quad (2)$$

$$\text{và } OF = OB = OC = \frac{1}{2} BC. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra : $OB = OC = OD = OE = OF$. Do đó năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc đường tròn $(O ; R)$ với $R = \frac{1}{2} BC$.



Hình 68

Chú ý : 1. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.

2. Một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp nó thì tam giác đó vuông tại đỉnh đối diện với cạnh ấy.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng bốn trung điểm của bốn cạnh hình thoi cùng thuộc một đường tròn.

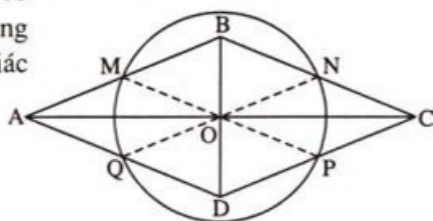
Giải

Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của bốn cạnh AB, BC, CD và DA của hình thoi ABCD (h.69).

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $AC \perp BD$. Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta được :

$$OM = \frac{1}{2} AB; ON = \frac{1}{2} BC;$$

$$OP = \frac{1}{2} CD; OQ = \frac{1}{2} AD.$$



Hình 69

Mặt khác $AB = BC = CD = DA$ nên $OM = ON = OP = OQ$.

Do đó bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Dạng 2. TÍNH BÁN KÍNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp giải

- Sử dụng định lý Py-ta-go.
- Sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn.
- Sử dụng các tính chất của một số hình đặc biệt (ví dụ : tam giác đều, hình thoi, ...).

Ví dụ 1. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đều, cạnh 3cm.

Giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC (h.70). Vì tam giác ABC đều nên O cũng là trực tâm, trọng tâm của $\triangle ABC$.

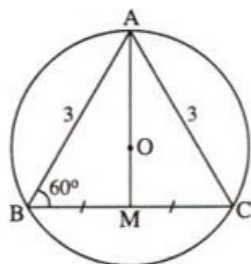
Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông AMC có :

$$AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là :

$$R = OA = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ (cm)}.$$



Hình 70

Chú ý. Ta có cách giải khác như sau :

Trong tam giác vuông ABM có :

$$\sin \widehat{ABM} = \frac{AM}{AB} \text{ hay } \sin 60^\circ = \frac{AM}{3} \Rightarrow AM = 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó : } R = \frac{2}{3} AM = \sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Ví dụ 2. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho các điểm M(-1 ; -2), N(1 ; 2) và P(-5 ; 0).
Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Giải

Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

$$\text{ta tính được } MN = 2\sqrt{5}, MP = 2\sqrt{5}, NP = 2\sqrt{10}.$$

Do đó : $MN^2 + MP^2 = 20 + 20 = NP^2 \Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại M (định lí Py-ta-go đảo).

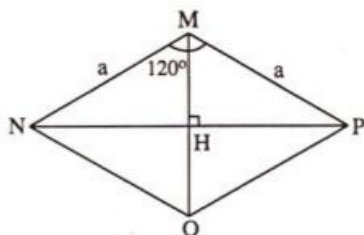
Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMNP là : $R = \frac{1}{2} NP = \sqrt{10}$ (do trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền thì bằng nửa cạnh huyền).

Ví dụ 3. Cho tam giác MNP có $MN = MP = a$ và $\widehat{NMP} = 120^\circ$. Gọi O là tâm và r là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP. Tính tỉ số $\frac{d}{r}$ với $d = NP$.

Giải

Vẽ $MH \perp NP$ thì $\widehat{NMH} = \widehat{HMP} = 60^\circ$ (vì $\triangle NMP$ cân tại M) (h.71). Trên tia MH lấy điểm O sao cho $MO = MN = MP = a$.

Xét tam giác MNO có : $MN = MO = a$; $\widehat{NMO} = 60^\circ$ nên tam giác MNO đều, suy ra $ON = OM = a$.



Hình 71

Tương tự, ta có tam giác OMP đều và $OM = OP = a$. Do đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle NMP$ và bán kính của đường tròn này bằng a ($r = a$). Ta có

$$d = NP = 2NH = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{d}{r} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

Dạng 3. XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM M VỚI ĐƯỜNG TRÒN (O)

Phương pháp giải

Tính khoảng cách $OM = d$.

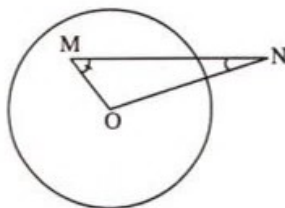
- $d > R \Leftrightarrow M$ nằm ngoài $(O ; R)$;
- $d = R \Leftrightarrow M$ nằm trên $(O ; R)$;
- $d < R \Leftrightarrow M$ nằm trong $(O ; R)$.

Ví dụ. Cho đường tròn $(O ; R)$ và hai điểm M, N sao cho M nằm trong và N nằm ngoài $(O ; R)$. Hãy so sánh $\widehat{OMN}$ và $\widehat{ONM}$.

Giải

(h.72) Ta có M nằm trong $(O ; R)$ nên $OM < R$; N nằm ngoài $(O ; R)$ nên $ON > R$.

Trong tam giác OMN, có $OM < ON$ (vì $OM < R, ON > R$) nên $\widehat{OMN} > \widehat{ONM}$ (trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn thì lớn hơn).



Hình 72

Dạng 4. SO SÁNH ĐỘ DÀI HAI ĐOẠN THẲNG

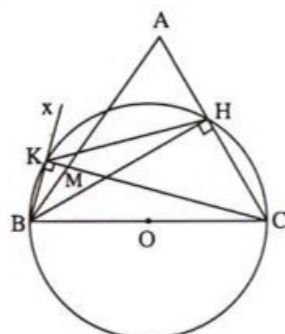
Phương pháp giải

- Xác định đường tròn có hai đoạn thẳng cần so sánh đóng vai trò dây cung và đường kính.
- Sử dụng định lí : Đường kính là dây lớn nhất trong một đường tròn.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, đường cao BH. Lấy một điểm M trên cạnh AB ($M \neq A, M \neq B$). Qua B kẻ tia Bx vuông góc với tia CM tại K. So sánh BC và HK.

Giải

Gọi O là trung điểm của BC (h.73). Vì tam giác BKC vuông tại K, tam giác BHC vuông tại H, nên bốn điểm B, K, H, C cùng thuộc đường tròn tâm O đường kính BC. Do đó : $HK < BC$.



Hình 73

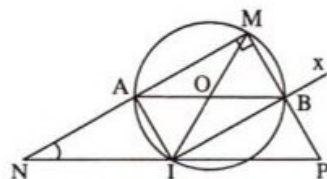
Ví dụ 2. Cho tam giác MNP vuông tại M, $NP = 2a$. Trên cạnh MN lấy điểm A ($A \neq M, A \neq N$), qua trung điểm I của NP vẽ tia Ix vuông góc với IA, tia Ix cắt đường thẳng MP tại B. Xác định vị trí của điểm A để độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Giải

Tam giác vuông MNP có đường trung tuyến MI ứng với cạnh huyền NP nên :

$$MI = NI = IP = \frac{1}{2}NP = \frac{1}{2} \cdot 2a = a.$$

Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ, \widehat{AIB} = 90^\circ$ do đó bốn điểm A, M, B, I cùng thuộc đường tròn đường kính AB. Suy ra $AB \geq MI$ hay $AB \geq a$.



Hình 74

Vì vậy : $\min AB = a \Leftrightarrow MI$ là đường kính $\Leftrightarrow \widehat{MAI} = 90^\circ \Leftrightarrow AI \parallel MP$

$\Leftrightarrow A$ là trung điểm của MN (vì I là trung điểm của NP) (h.74).

Vậy khi A là trung điểm của MN thì $\min AB = a$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

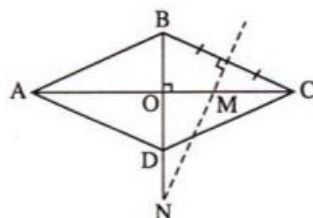
- Bốn đỉnh của một hình chữ nhật kích thước 5×12 cùng nằm trên một đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu ?
- Cho hình thoi ABCD. Đường trung trực của cạnh BC cắt đường thẳng AC tại M và cắt đường thẳng BD tại N. Chứng minh rằng M và N lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ABC.
- Cho tam giác ABC, cạnh BC cố định, $AB = 4\text{cm}$.
 - Hỏi điểm A di động trên đường nào ?
 - Trung điểm M của AC di động trên đường nào ?
- Cho đường tròn (O ; 1,5cm), đường kính AB. Gọi C là một điểm bất kì trên đường tròn. Vẽ điểm M sao cho C là trung điểm của AM. Tính độ dài lớn nhất của AM.
- Trong hệ trục tọa độ Oxy cho $E(0 ; 4)$, $P(2 ; 0)$ và M là điểm thuộc đoạn EP sao cho tung độ của M bằng 2. Vẽ đường tròn tâm M bán kính MO. Xác định vị trí tương đối của E, P so với đường tròn (M ; MO).
- Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi O_1 , O_2 , O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFH, BDH, CEH. Gọi x, y tương ứng là chu vi của các tam giác ABC và $O_1O_2O_3$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

- Ta có $2R = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ nên $R = 6,5$.
- (h.75) Trong hình thoi, mỗi đường chéo là đường trung trực của đường chéo kia.

Điểm M là giao điểm hai đường trung trực của tam giác BCD nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Điểm N là giao điểm hai đường trung trực của tam giác ABC nên N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Hình 75

3. (h.76) a) Điểm B cố định. Điểm A cách B một khoảng là 4cm nên A nằm trên đường tròn (B ; 4cm).

b) Gọi O là trung điểm của BC thì O là một điểm cố định. Ta có $OM = \frac{1}{2} AB = 2\text{cm}$.

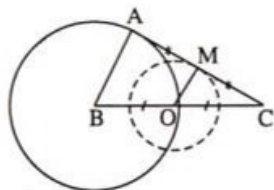
Điểm M cách điểm O một khoảng 2cm nên M nằm trên đường tròn (O ; 2cm).

4. (h.77) Ta có $AC \leq AB = 3\text{cm}$ (liên hệ giữa dây và đường kính). Suy ra $2AC \leq 6\text{cm}$. Do đó $AM \leq 6\text{cm}$. Vậy độ dài lớn nhất của AM là 6cm (khi $C \equiv B$).

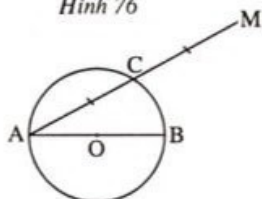
5. (h.78) Tung độ của M bằng 2 nên M là trung điểm của PE. Tam giác POE vuông tại O nên $MO = ME = MP$. Do đó E, P thuộc (O ; MO).

6. Ta có O_1, O_2, O_3 lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC nên :

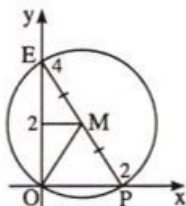
$$\frac{O_1O_2}{AB} = \frac{O_2O_3}{BC} = \frac{O_3O_1}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = 2.$$



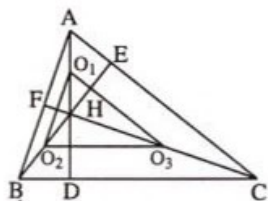
Hình 76



Hình 77



Hình 78



Hình 79

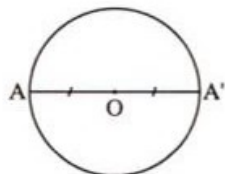
§2. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

§3. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Tính chất đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.



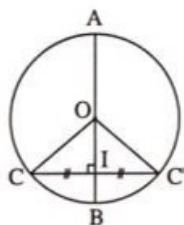
Hình 80

- Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

Định lý 1. Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

Định lý 2. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (dây không đi qua tâm) thì vuông góc với dây ấy.



Hình 81

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Định lý 3. Trong một đường tròn :

- Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
- Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
- Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH ĐỘ DÀI CỦA MỘT DÂY. TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

Phương pháp giải

Vẽ đường kính vuông góc với dây rồi áp dụng định lý Py-ta-go ; hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính toán.

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O ; 10). Lấy một điểm A tùy ý thuộc (O). Vẽ dây MN vuông góc với OA tại trung điểm của OA. Tính độ dài dây MN.

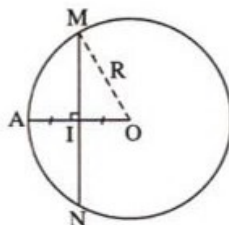
Giải

Gọi I là trung điểm của OA (h.82). Ta có :

$$OI = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông IMO, ta được :

$$IM^2 = OM^2 - OI^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow IM = 5\sqrt{3}.$$



Hình 82

Ta có MN vuông góc với OA tại trung điểm I của OA, nên :

$$IM = IN = \frac{1}{2} MN \Rightarrow MN = 2IM = 2.5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

Ví dụ 2. Trong hình bên có một băng giấy hình chữ nhật che khuất một phần của đường tròn (O). Cho biết AB = 1cm, BC = 4cm, MN = 2cm. Tính độ dài đoạn DN.

Giải

Vẽ $OH \perp BC$ tại H thì $OH \perp ND$ (vì $BC \parallel ND$) (h.83).

Gọi giao điểm của OH và ND là I thì $DN = 2IN$ (định lí đường kính – dây cung).

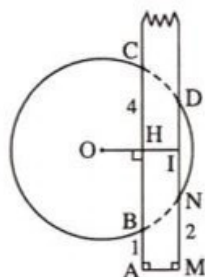
$$\text{Ta có : } HB = HC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} . 4 = 2 \text{ (vì } OH \perp BC).$$

Do tứ giác AMIH là hình chữ nhật nên

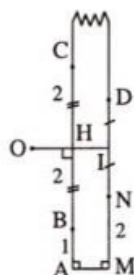
$$IM = AH = AB + HB = 1 + 2 = 3 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow IN = IM - MN = 3 - 2 = 1 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Suy ra } DN = 2IN = 2.1 = 2 \text{ (cm)}.$$



Hình 83



Hình 84

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O ; R) và dây MN = R. Hãy tính khoảng cách từ tâm O đến dây MN.

Giải

$$(h.85) \text{ Vẽ } OH \perp MN \text{ tại H thì } MH = HN = \frac{1}{2} MN = \frac{R}{2}.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác OMH có : $OM^2 = OH^2 + MH^2$

$$\Rightarrow OH^2 = OM^2 - MH^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}$$

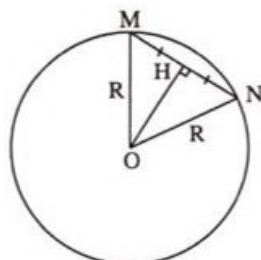
$$\Rightarrow OH = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ tâm O đến dây MN là $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Chú ý : Ta có cách giải khác như sau :

Vì $OM = ON = MN = R$ nên tam giác OMN đều.

Vẽ $OH \perp MN \Rightarrow \widehat{HON} = 30^\circ$.



Hình 85

Trong tam giác vuông OHN có : $\cos 30^\circ = \frac{OH}{ON} \Rightarrow OH = ON \cdot \cos 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O ; OA), đường kính AD = 12,5cm. Lấy điểm B thuộc (O ; OA) sao cho AB = 10cm. Kẻ dây BC vuông góc với đường kính AD của (O ; OA). Tính khoảng cách từ tâm O đến các dây AB và BC.

Giải

Do AD là đường kính của (O ; OA) nên $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (h.86). Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông ABD, ta có :

$$BD^2 = AD^2 - AB^2 = 12,5^2 - 10^2 = 56,25 \Rightarrow BD = 7,5 \text{ (cm)}.$$

Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow OH \parallel BD$ và $OH = \frac{1}{2}BD$ (định lí đường trung bình).

Do đó khoảng cách từ tâm O đến dây AB là

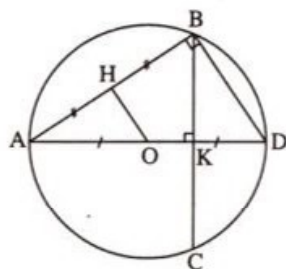
$$OH = \frac{1}{2} \cdot 7,5 = 3,75 \text{ (cm)}.$$

Áp dụng hệ thức $b^2 = a \cdot b'$ vào tam giác vuông ABD, ta có :

$$AB^2 = AK \cdot AD \Rightarrow AK = \frac{AB^2}{AD} = \frac{10^2}{12,5} = 8 \text{ (cm)}.$$

Suy ra khoảng cách từ tâm O đến dây BC là :

$$OK = AK - OA = 8 - \frac{12,5}{2} = 1,75 \text{ (cm)}.$$



Hình 86

Chú ý :

1. Trong ba đại lượng : bán kính, dây và khoảng cách từ tâm đến dây, để tính một trong ba đại lượng thì ta phải biết hai đại lượng kia.
2. Vận dụng linh hoạt định lí Py-ta-go, hệ thức lượng trong tam giác vuông và tỉ số lượng giác của góc nhọn để tính toán.

Dạng 2. SO SÁNH HAI ĐOẠN THẲNG

Phương pháp giải

- Vận dụng định lí đường kính vuông góc với một dây.
- Vận dụng định lí về liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây.

Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm O bán kính $R = 5\text{cm}$, dây $AB = 8\text{cm}$. Gọi I là điểm trên dây AB sao cho $AI = 1\text{cm}$. Kẻ dây CD đi qua điểm I và vuông góc với dây AB. Chứng minh rằng $AB = CD$.

Giải

Vẽ $OH \perp AB$; $OK \perp CD$ (h.87). Suy ra :

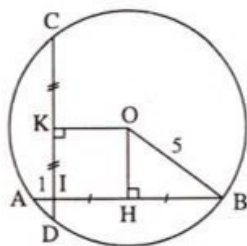
$$HA = HB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.8 = 4 \text{ (cm)}.$$

Ta có : $IH = AH - AI = 4 - 1 = 3 \text{ (cm)}$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông HOB, ta có :

$$OH^2 = OB^2 - HB^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow OH = 3 \text{ (cm)}.$$

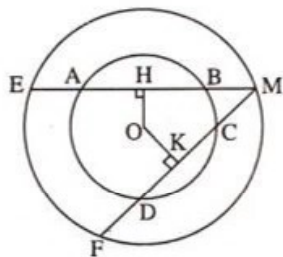
Suy ra tứ giác OHIK là hình vuông. Do đó $OH = OK (= 3\text{cm}) \Rightarrow AB = CD$.



Hình 87

Ví dụ 2. Cho hình 88, biết $AB > CD$. Khẳng định nào dưới đây **sai** ?

- (A). $OH < OK$;
- (B). $MH > MK$;
- (C). $ME < MF$;
- (D). Trong ba khẳng định (A), (B), (C) chỉ có một khẳng định sai.



Hình 88

Giải

Chọn (C) vì trong đường tròn nhỏ có $AB > CD$ nên $OH < OK$. Trong đường tròn lớn có $OH < OK$ nên $ME > MF$. Do đó (C) sai.

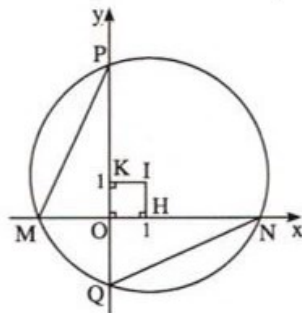
Ví dụ 3. Trong hệ trục tọa độ Oxy vẽ đường tròn tâm $I(1; 1)$ bán kính $R = 3$. Đường tròn (I) cắt trục hoành tại hai điểm M và N, cắt trục tung tại hai điểm P và Q như hình 89.

- a) So sánh MN và PQ.
- b) So sánh MP và NQ.

Giải

a) Kẻ $IH \perp Ox$ tại H, $IK \perp Oy$ tại K thì

$$IH = IK = 1 \text{ (vì } I(1; 1)) \Rightarrow MN = PQ.$$



Hình 89

b) Ta có $MN = PQ \Rightarrow \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}PQ$ hay $MH = HN = PK = KQ$.

Do tứ giác OKIH là hình vuông (hình chữ nhật có hai cạnh bên bằng nhau) nên :

$$ON = OP \text{ và } OM = OQ.$$

Do đó : $\triangle MOP = \triangle QON$ (c.g.c) $\Rightarrow MP = NQ$.

Ví dụ 4. Cho đường tròn tâm O, các dây AB và CD cắt nhau tại một điểm M nằm ngoài đường tròn, trong đó $AB > CD$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng :

a) $MH > MK$; b) $\widehat{OMH} < \widehat{OMK}$.

Giải

a) Ta có H, K tương ứng là trung điểm của AB và CD nên : $OH \perp AB$, $OK \perp CD$. Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông OMH, ta được : $MH^2 = OM^2 - OH^2$. (1)

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông OKM, ta được : $MK^2 = OM^2 - OK^2$. (2)

Trong đường tròn (O) có $AB > CD$ nên $OH < OK$. (3)

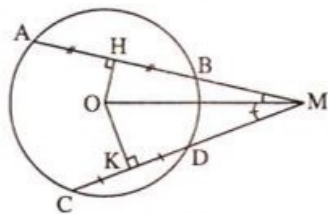
Từ (1), (2) và (3) suy ra $MH^2 > MK^2$, do đó $MH > MK$.

b) Trong tam giác vuông OMH có $\sin \widehat{OMH} = \frac{OH}{OM}$.

Trong tam giác vuông OMK có $\sin \widehat{OMK} = \frac{OK}{OM}$.

Mà $OH < OK$ nên :

$$\sin \widehat{OMH} < \sin \widehat{OMK} \text{ hay } \widehat{OMH} < \widehat{OMK} \text{ (vì } \widehat{OMH}, \widehat{OMK} \text{ nhọn)}.$$



Hình 90

Dạng 3. CHỨNG MINH MỘT SỐ QUAN HỆ HÌNH HỌC – HÌNH ĐẶC BIỆT

Phương pháp giải

- Vận dụng định lí đường kính vuông góc với một dây.
- Vận dụng định lí về liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây.

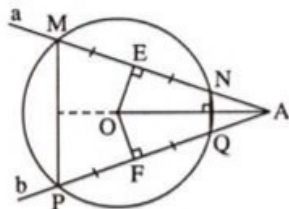
Ví dụ 1. Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai đường thẳng a và b. Đường thẳng a cắt (O) tại M và N ($AN < AM$), đường thẳng b cắt (O) tại P và Q ($AQ < AP$). Nếu $MN = PQ$, chứng minh rằng $OA \perp PM$ và $MP \parallel NQ$.

Giải

Vẽ $OE \perp MN$ tại E, $OF \perp PQ$ tại F (h.91).

Khi đó : $ME = \frac{1}{2}MN, PF = \frac{1}{2}PQ$.

Trong đường tròn (O) có : $MN = PQ \Rightarrow OE = OF$
 $\Rightarrow \triangle OEA = \triangle OFA$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông) $\Rightarrow AE = AF \Rightarrow AE + EM = AF + FP$
 (vì $ME = PF = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}PQ$) hay $AM = AP$.



Hình 91

Mà $OM = OP$ (vì P, Q thuộc (O)) nên OA là trung trực của đoạn MP $\Rightarrow OA \perp MP$.
 Chứng minh tương tự được $OA \perp NQ \Rightarrow MP \parallel NQ$.

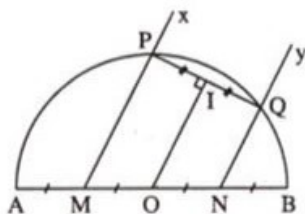
Ví dụ 2. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Từ M và N vẽ hai tia Mx, Ny song song với nhau, cắt nửa đường tròn lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng $PM \perp PQ$.

Giải

Gọi I là trung điểm của PQ $\Rightarrow OI \perp PQ$ tại I (h.92).

Xét hình thang MNQP (vì $MP \parallel NQ$) có I là trung điểm của PQ và O là trung điểm của MN $\Rightarrow OI$ là đường trung bình của hình thang nên $OI \parallel MP \parallel NQ$.

Do đó $PM \perp PQ$ tại P.



Hình 92

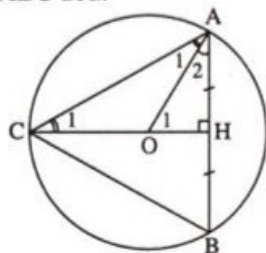
Ví dụ 3. Cho đường tròn (O ; R) và dây $AB = R\sqrt{3}$. Vẽ $OH \perp AB$. Tia đối của tia OH cắt đường tròn tại C. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Giải

Ta có $OH \perp AB$ nên $HA = HB$ (h.93).

Đường thẳng OH là đường trung trực của AB nên $CA = CB$, tam giác CAB cân tại C.

Ta có $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.



Hình 93

Trong tam giác AOH có $\sin \widehat{O_1} = \frac{AH}{OA} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{O_1} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{A_2} = 90^\circ - \widehat{O_1} = 30^\circ.$$

Vì $\widehat{O_1} = \widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 2\widehat{A_1}$ (vì tam giác OAC cân tại O) nên $\widehat{A_1} = 30^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 60^\circ, \text{ do đó tam giác ABC đều.}$$

Chú ý. Ví dụ 3 cho ta một cách vẽ dây $AB = R\sqrt{3}$ của $(O; R)$ như sau :

• *Cách 1* : Vẽ $\widehat{AOB} = 120^\circ$ thì $AB = R\sqrt{3}$.

• *Cách 2* : Vẽ tam giác đều ABC nội tiếp $(O; R)$ thì $AB = R\sqrt{3}$.

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai dây $AB = R\sqrt{3}$ và $AC = R\sqrt{2}$ (B, C nằm khác phía đối với đường thẳng AO). Hãy tính các góc của tam giác ABC.

Giải

Tam giác AOC có $OA = OC = R$, $AC = R\sqrt{2}$ suy ra tam giác AOC vuông cân đỉnh O (định lí Py-ta-go đảo) $\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 45^\circ$ (h.94).

$$\text{Kẻ } OI \perp AB \text{ tại I thì } AI = \frac{1}{2}AB = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{OAI} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ.$$

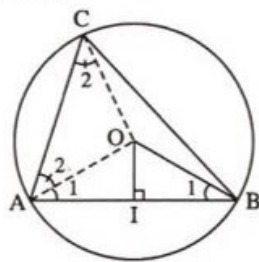
Ta có :

$$2\widehat{OBC} = \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = \widehat{ABC} - \widehat{B_1} + \widehat{ACB} - \widehat{C_2} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} - (\widehat{B_1} + \widehat{C_2})$$

$$= (180^\circ - \widehat{BAC}) - (\widehat{A_1} + \widehat{A_2}) = 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 30^\circ : 2 = 15^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ,$$

$$\widehat{ACB} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ.$$

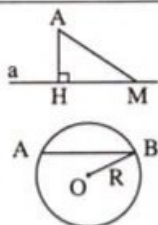


Hình 94

Dạng 4. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Phương pháp giải

- Vận dụng tính chất đường xiên và đường vuông góc $AH \leq AM$ (dấu "=" xảy ra khi $M \equiv H$).
- Vận dụng định lí đường kính và dây $AB \leq 2R$ (dấu "=" xảy ra khi A, O, B thẳng hàng).
- Vận dụng một số bất đẳng thức đại số.



Ví dụ 1. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 10\text{cm}$. Một dây $CD = 8\text{cm}$, có hai đầu mút di chuyển trên nửa đường tròn. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và B trên đường thẳng CD. Xác định vị trí của CD để diện tích tứ giác ABFE lớn nhất.

Giải

Kẻ $OI \perp CD$ thì I là trung điểm của CD (h.95). Do đó :

$$IC = ID = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}.8 = 4 \text{ (cm)}.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông OID, ta được :

$$OI^2 = OD^2 - ID^2 = R^2 - ID^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow OI = 3 \text{ (cm)}.$$

Ta lại có : $AE \parallel OI \parallel BF$ (vì cùng vuông góc với CD) và $OA = OB$ nên OI là đường trung bình của hình thang vuông ABFE. Do đó : $\frac{AE + BF}{2} = OI = 3\text{cm}$.

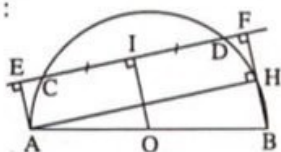
Từ A kẻ $AH \perp BF$ suy ra $AH \leq AB = 2R$ hay $EF \leq AB$ (định lí đường vuông góc và đường xiên). Khi đó :

$$S_{ABFE} = \frac{AE + BF}{2} \cdot EF \leq OI \cdot AB = 3 \cdot 10 = 30 \text{ (cm}^2\text{)} ;$$

$$S_{ABFE} = 30 \Leftrightarrow AH = AB \Leftrightarrow H \equiv B \Leftrightarrow CD \parallel AB.$$

Vậy khi $CD \parallel AB$ thì diện tích tứ giác ABFE đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 2. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm I trong đoạn OA sao cho $OI = x$ ($0 < x < R$). Qua I vẽ đường thẳng d vuông góc với AB và cắt nửa đường tròn tâm O tại M. Xác định x để chu vi tam giác IMO lớn nhất.



Hình 95

Giải

Đặt $IM = y$ ($0 < y < R$) (h.96). Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông IOM, ta được :

$$OM^2 = OI^2 + IM^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$,

ta được : $(x+y)^2 \leq 2R^2 \Rightarrow x+y \leq R\sqrt{2}$.

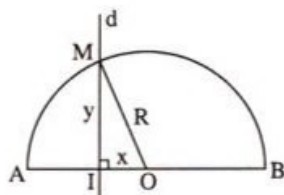
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Chu vi tam giác IMO là :

$$C = OI + IM + OM = x + y + R \leq R\sqrt{2} + R = (\sqrt{2} + 1)R.$$

Vậy : $\max C = (\sqrt{2} + 1)R \Leftrightarrow x = y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Do đó, khi $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ thì chu vi tam giác IMO lớn nhất.



Hình 96

Dạng 5. DÙNG HÌNH

Phương pháp giải

Sử dụng định lí đường kính và dây cung.

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn đồng tâm O, bán kính $R_1 < R_2$. Hãy dựng một đường thẳng cắt hai đường tròn theo thứ tự tại A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$.

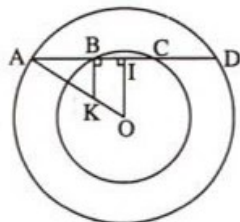
Giải

Phân tích : Giả sử ta dựng được đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán như hình 97. Khi đó : $AB = BC = CD$.

Ta vẽ $OI \perp BC$ thì $BI = IC = \frac{1}{2}BC$

$$\Rightarrow BI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AB = \frac{2}{3}AI.$$

$$\text{Kẻ } BK \parallel OI \text{ (K thuộc AO)} \Rightarrow \frac{AK}{AO} = \frac{AB}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow AK = \frac{2}{3}OA = \frac{2}{3}R_2.$$



Hình 97

Vì $BK \parallel OI$, $OI \perp BC \Rightarrow KB \perp BC \Rightarrow \widehat{ABK} = 90^\circ$ nên B nằm trên đường tròn đường kính AK.

Cách dựng : – Lấy A là điểm tùy ý trên $(O; R_2)$ (đường tròn lớn).

– Lấy K trên OA sao cho $AK = \frac{2}{3} R_2$.

– Dựng đường tròn đường kính AK (gọi là (K)).

– Dựng B là giao điểm của (K) với $(O; R_1)$.

– Đường thẳng AB cắt $(O; R_1)$, $(O; R_2)$ tương ứng tại các điểm thứ hai C, D.

Chứng minh và biện luận : Dành cho bạn đọc (Gợi ý : so sánh R_1 và $\frac{R_2}{3}$).

Ví dụ 2. Cho hai điểm A, B nằm trong góc xOy. Hãy dựng đường tròn đi qua hai điểm A, B và định ra trên Ox, Oy những dây cung bằng nhau.

Giải

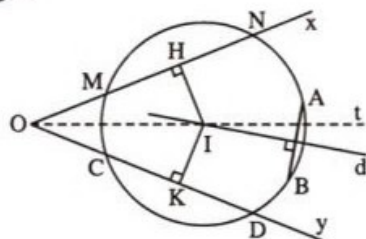
Phân tích : Giả sử dựng được đường tròn (I) thỏa mãn yêu cầu bài toán như hình 98. Khi đó $MN = CD \Rightarrow IH = IK \Rightarrow I$ cách đều hai cạnh Ox, Oy của góc xOy $\Rightarrow I$ nằm trên tia phân giác của góc xOy (tia Ot).

Mà $IA = IB$ nên I nằm trên đường thẳng d là trung trực của AB.

Suy ra I là giao điểm của tia Ot và đường thẳng d.

Cách dựng :

- Dựng tia Ot là phân giác của góc xOy ;
- Dựng đường trung trực d của đoạn AB ;
- Dựng I là giao điểm của tia Ot và đường thẳng d ;
- Dựng đường tròn (I ; IA).



Hình 98

Chứng minh và biện luận : Dành cho bạn đọc.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B nằm bên trong đường tròn và không cùng thuộc một đường kính. Dựng hai dây song song và bằng nhau sao cho điểm A nằm trên một dây và điểm B nằm trên dây còn lại.

Giải

Phân tích : Giả sử dựng được hình thỏa mãn yêu cầu bài toán như hình 99.

Khi đó $CD \parallel EF$ và $CD = EF \Rightarrow AH \parallel BK$ và $OH = OK$.

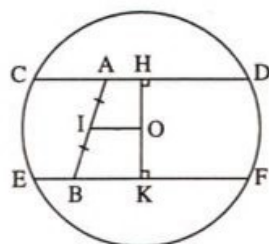
Lấy I là trung điểm của AB $\Rightarrow IO$ là đường trung bình của hình thang AHKB

$\Rightarrow AH \parallel IO \parallel BK \Rightarrow CD \parallel IO \parallel EF$.

Cách dựng :

- Dựng trung điểm I của AB ;
- Dựng dây CD qua A và song song với IO ;
- Dựng dây EF qua B và song song với IO.

Chứng minh và biện luận : Dành cho bạn đọc.



Hình 99

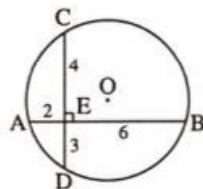
C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trong hình 100, biết $OE = OF$. Chứng minh rằng $AE = BF$.



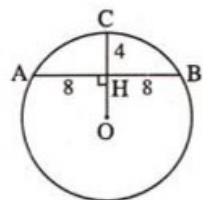
Hình 100

2. Trong hình 101, biết $AB \perp CD$, $AE = 2$, $EB = 6$, $EC = 4$ và $ED = 3$. Tính độ dài đường kính của đường tròn (O).



Hình 101

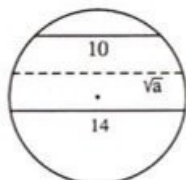
3. Trong hình 102, R có độ dài bằng bao nhiêu ($AH = 8$, $CH = 4$ và $HB = 8$) ?



Hình 102

4. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Vẽ dây CD vuông góc với OA tại trung điểm của OA. Chứng minh rằng tam giác BCD đều.
5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Qua A vẽ đường thẳng song song với OO' , cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D. Chứng minh rằng $OO' = \frac{1}{2}CD$.

6. Cho đường tròn (O ; 2cm), dây AB sao cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB. Hỏi khi A, B di động trên (O) sao cho $\widehat{AOB}$ vẫn luôn bằng 120° thì điểm M di động trên đường nào ?
7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA. Hãy so sánh OD, OE và OF, biết $DF > DE > EF$.
8. Cho điểm M nằm trong đường tròn (O ; R) với $OM = \frac{R}{3}$. Trong các dây của (O) đi qua M hãy tìm dây có độ dài nhỏ nhất.
- 9*. Trong hình 103, cho biết hai dây song song có độ dài lần lượt là 10 và 14, khoảng cách giữa chúng là 6. Một dây cung song song và cách đều hai dây ấy có độ dài là $\sqrt{a}$. Tính a^2 .



Hình 103

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Vẽ $OH \perp AB$ (hình 104), ta được $HA = HB$ (đường kính vuông góc với một dây). Mặt khác, tam giác OEF cân, OH là đường cao nên $HE = HF$.

Suy ra $HA - HE = HB - HF$ hay $AE = BF$.



Hình 104

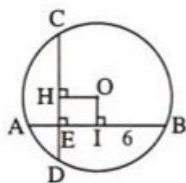
2. Vẽ $OH \perp CD$, vẽ $OI \perp AB$ (h.105), ta được :

$$\begin{aligned} IB &= \frac{AB}{2} = 4 \text{ và } OI = HE = CE - \frac{CD}{2} \\ &= 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } 2R = 2\sqrt{IB^2 + OI^2} = 2\sqrt{4^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{65}.$$

3. Ta có : $OH = R - 4$.

$$\text{Mà } OA^2 = HA^2 + OH^2 \Leftrightarrow R^2 = 8^2 + (R - 4)^2 \Rightarrow R = 10.$$

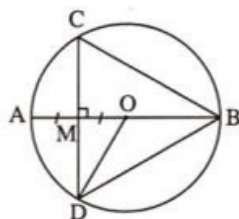


Hình 105

4. Vì đường kính AB vuông góc với CD nên $\triangle BCD$ cân tại B và $MC = MD$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác MOD ta tính được $MD = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CD = R\sqrt{3}$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác MBD ta tính được $BD = R\sqrt{3}$. Vậy $\triangle BCD$ đều.



Hình 106

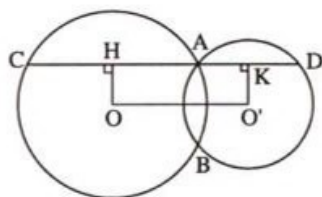
5. Trường hợp O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB (hình 107).

Vẽ $OH \perp AC$; $O'K \perp AD$, ta được :

$$HC = HA = \frac{AC}{2}; \quad KA = KD = \frac{AD}{2}.$$

Tứ giác HKO'O là hình chữ nhật nên $OO' = HK$.

$$\text{Ta có : } HK = HA + KA = \frac{AC}{2} + \frac{AD}{2} = \frac{CD}{2} \Rightarrow OO' = \frac{1}{2}CD.$$



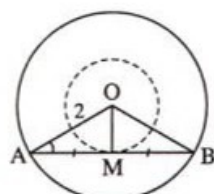
Hình 107

Trường hợp O và O' cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB chứng minh tương tự.

6. Vì $MA = MB$ nên $OM \perp AB$ (h.108). $\triangle AOB$ cân tại O, $\widehat{AOB} = 120^\circ$ nên $\widehat{A} = 30^\circ$, suy ra

$$OM = \frac{1}{2}OA = 1\text{cm}.$$

Điểm M cách điểm O một khoảng 1cm nên M di động trên đường tròn (O ; 1cm).



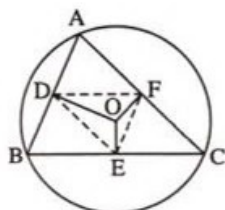
Hình 108

7. Vì D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA nên $OD \perp AB$; $OE \perp BC$; $OF \perp AC$ (h.109). Theo tính chất đường trung bình của tam giác, ta có :

$$DE = \frac{1}{2}AC; \quad EF = \frac{1}{2}AB; \quad DF = \frac{1}{2}BC.$$

Vì $DF > DE > EF$ nên $BC > AC > AB$.

Suy ra $OE < OF < OD$ (trong một đường tròn, dây nào lớn hơn thì gần tâm hơn).



Hình 109

8. Ta có : dây PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow PQ \perp OM$.

Áp dụng định lí Py-ta-go ta tính được $PQ = \frac{4\sqrt{2}R}{3}$.

9. Gọi x, y lần lượt là khoảng cách từ tâm O đến các dây có độ dài 10 và 14. Gọi R là bán kính của đường tròn. Ta có : $x^2 + 25 = R^2$ và $y^2 + 49 = R^2$ suy ra :

$$x^2 + 25 = y^2 + 49 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 24.$$

Vì khoảng cách giữa hai dây bằng 6, nên ta có :

• Trường hợp 1 : $x - y = 6$ (hai dây ở cùng phía so với tâm O) nên $x + y = 4$.
Do đó : $x = 5$ và $y = -1$ (loại).

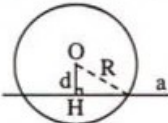
• Trường hợp 2 : $x + y = 6$ (hai dây ở khác phía so với tâm O) nên $x - y = 4$.
Do đó $x = 5$ và $y = 1$, suy ra $R^2 = 50$ và dây có độ dài $\sqrt{a}$ cách tâm là 2.

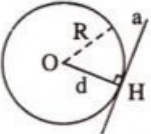
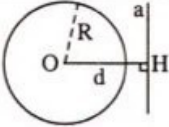
$$\text{Ta có : } R^2 = 2^2 + \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a = 184 \Rightarrow a^2 = 33856.$$

§4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẺ VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Hình vẽ	Số điểm chung	Liên hệ giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau		2	$d < R$

Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau		1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau		0	$d > R$

Trong đó : d là khoảng cách từ tâm O của đường tròn đến đường thẳng ; R là bán kính của đường tròn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp giải

Xác định khoảng cách d từ tâm đường tròn đến đường thẳng và bán kính R của đường tròn. Hãy so sánh d với R :

Nếu $d > R$ ($d < R$ hoặc $d = R$) thì đường thẳng không cắt đường tròn (cắt đường tròn hoặc tiếp xúc với đường tròn) và ngược lại.

Ví dụ 1. Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm $A(4; 3)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn tâm A , bán kính $R = 3$ với các trục tọa độ.

Giải

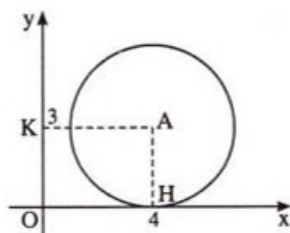
Khoảng cách từ A đến trục Ox là

$$d = AH = OK = 3.$$

Khoảng cách từ A đến trục Oy là

$$d' = AK = OH = 4.$$

Do đó đường tròn $(A; 3)$ tiếp xúc với trục Ox , vì $d = R = 3$; đường tròn $(A; 3)$ không cắt trục Oy vì $d' = 4 > 3 = R$ (h.110).



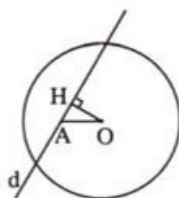
Hình 110

Ví dụ 2. Cho điểm A nằm trong đường tròn (O). Chứng minh rằng mọi đường thẳng d đi qua A đều cắt (O) ở hai điểm phân biệt.

Giải

- Vẽ $OH \perp d$ tại H $\Rightarrow OH \leq OA$ (h.111) (quan hệ đường xiên và đường vuông góc).
- Vì A nằm trong (O) nên $OA < R$.

Suy ra $OH < R \Rightarrow$ đường thẳng d luôn cắt (O) tại hai điểm phân biệt.



Hình 111

Ví dụ 3. Chứng minh rằng một đường thẳng và một đường tròn không thể có quá hai điểm chung.

Giải

Giả sử đường thẳng d và đường tròn (O) có ba điểm chung A, B, C theo thứ tự như hình 112.

Vì A, B, C thuộc (O) nên $OA = OB = OC$.

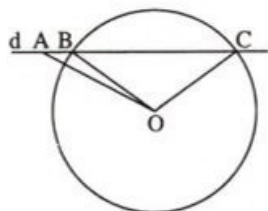
Do đó, tam giác OAB cân tại O

$$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OAB} < 90^\circ ;$$

tam giác OBC cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} < 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{OBA} + \widehat{OBC} < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, điều này vô lí vì A, B, C thẳng hàng theo thứ tự ấy thì $\widehat{OBA} + \widehat{OBC} = 180^\circ$.

Vậy điều giả sử là sai, do đó một đường thẳng và một đường tròn có không quá hai điểm chung.



Hình 112

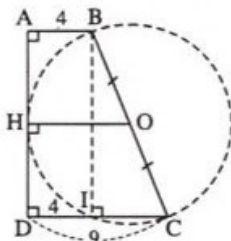
Ví dụ 4. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $AB = 4\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$ và $CD = 9\text{cm}$. Tính AD và chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính là BC.

Giải

Gọi O là trung điểm của BC (h.113).

- Vẽ $BI \perp CD$ tại I $\Rightarrow AD = BI$, vẽ $OH \perp AD$ tại H.
- Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác BIC có :

$$BI = \sqrt{BC^2 - IC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \Rightarrow AD = 12\text{ cm}.$$



Hình 113

- Hình thang ABCD có OH là đường trung bình nên :

$$OH = \frac{AB + CD}{2} = \frac{4 + 9}{2} = 6,5 = \frac{BC}{2} = R.$$

$\Rightarrow$ Đường tròn (O ; R) tiếp xúc với AD.

Dạng 2. BÀI TOÁN VẬN DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TIẾP TUYẾN

Phương pháp giải

Vận dụng tính chất của tiếp tuyến : Nếu đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (O) tại A thì $\Delta \perp OA$ tại A.

Ví dụ 1. Từ điểm A cách O một khoảng d ($d > R$) vẽ tiếp tuyến AB với đường tròn (O ; R) (B là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn AB.

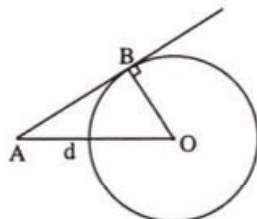
Giải

Vì AB là tiếp tuyến của (O) tại B nên $AB \perp OB$ tại B (h.114).

Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle AOB$ có :

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{d^2 - R^2}.$$

$$\text{Vậy } AB = \sqrt{d^2 - R^2}.$$



Hình 114

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O ; 5cm) và dây AB = 8cm. Một tiếp tuyến của (O) song song với AB cắt tia OA tại E, cắt tia OB tại F. Tính độ dài đoạn EF.

Giải

Gọi C là tiếp điểm của tiếp tuyến EF với (O), H là giao điểm của OC với AB.

Ta có : $OC \perp EF$ tại C mà $AB \parallel EF$ nên $OC \perp AB$ tại H (h.115)

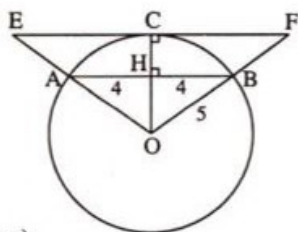
$$\Rightarrow HA = HB = \frac{1}{2} AB = 4 \text{ (cm)}.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle OHA$, ta có :

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (cm)}.$$

Ta có : $AB \parallel EF$ nên theo định lí Ta-lét có :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{OB}{OF} = \frac{OH}{OC} = \frac{3}{5} \Rightarrow EF = \frac{5}{3} \cdot AB = \frac{5 \cdot 8}{3} = \frac{40}{3} \text{ (cm)}.$$



Hình 115

Ví dụ 3. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R_1)$ và $(O; R_2)$ ($0 < R_1 < R_2$). Từ điểm M nằm ngoài $(O; R_2)$, ta vẽ MA là tiếp tuyến của $(O; R_1)$, MB là tiếp tuyến của $(O; R_2)$ (với A, B là các tiếp điểm). Đường trung trực của đoạn AB cắt OM tại I . Tính tỉ số $\frac{MI}{MO}$.

Giải

Gọi I' là trung điểm của OM .

Vì MA là tiếp tuyến của $(O; R_1)$ nên $MA \perp OA$ tại A hay $\widehat{OAM} = 90^\circ$ (h.116).

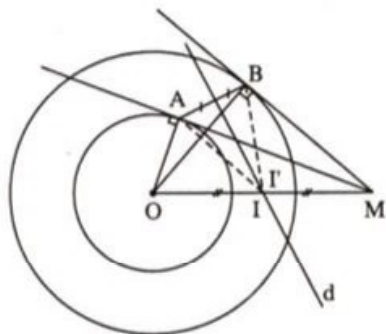
Xét tam giác OAM có $\widehat{OAM} = 90^\circ$, AI' là trung tuyến ứng với cạnh huyền MO nên $AI' = \frac{1}{2}OM$.

Tương tự, ta có :

$$BI' = \frac{1}{2}OM \Rightarrow AI' = BI' = \frac{1}{2}OM$$

$\Rightarrow I'$ thuộc đường trung trực d của đoạn AB

$$\Rightarrow I' = I \Rightarrow \frac{MI}{MO} = \frac{MI'}{MO} = \frac{1}{2}.$$



Hình 116

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho điểm A cách đường thẳng xy một đoạn 12cm . Vẽ đường tròn $(A; 13\text{cm})$. Chứng minh rằng xy cắt (O) tại hai điểm phân biệt B và C . Tính độ dài đoạn BC .
2. Cho trước đường thẳng a . Tâm O của tất cả các đường tròn có đường kính 2cm và tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên đường nào ?
3. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Những điểm M sao cho đường thẳng AM không có điểm chung với đường tròn (O) thì nằm ở đâu ?
4. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi H là chân đường cao vẽ từ đỉnh A và G là trọng tâm của tam giác. Lấy một điểm I bất kì bên trong tam giác CGH rồi vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AC . Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và BC với đường tròn (I) .

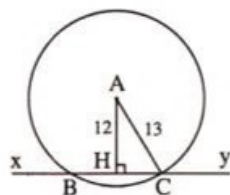
HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Kẻ $AH \perp xy$ tại H (h.117).

Vì $AH = 12\text{cm}$ (gt) $< 13\text{cm} = R$ nên đường thẳng xy cắt đường tròn (A ; 13cm) tại hai điểm phân biệt B và C.

Vì $AH \perp BC$ tại H nên $BH = HC = \frac{1}{2}BC$.

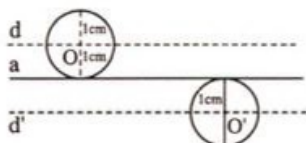
$$\text{Mặt khác } HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ (cm)} \\ \Rightarrow BC = 10\text{cm}.$$



Hình 117

2. Đường kính bằng 2cm nên bán kính bằng 1cm.

Tâm O nằm trên hai đường thẳng d và d' song song với a và cách a là 1cm (h.118).



Hình 118

3. Vẽ đường tròn đường kính OA, đường tròn này cắt (O) tại B và C (h.119).

Vì B thuộc đường tròn đường kính OA nên $\widehat{ABO} = 90^\circ$.

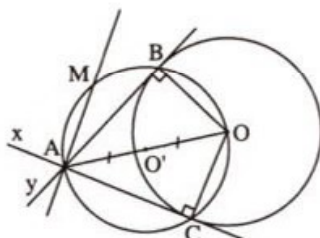
$$\Rightarrow OB \perp AB$$

$\Rightarrow$ khoảng cách từ O đến đường thẳng AB bằng bán kính R

$\Rightarrow AB$ tiếp xúc với (O) tại B.

Tương tự, ta có AC tiếp xúc với (O) tại C.

Do đó, M nằm trong góc $\widehat{xAB}$ và $\widehat{yAC}$ thì AM không cắt (O).



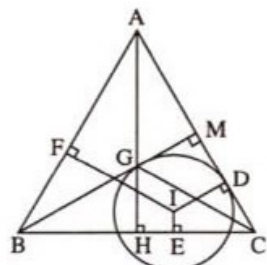
Hình 119

4. Kẻ ID, IE, IF lần lượt vuông góc với các cạnh AC, BC, AB của ΔABC (h.120). Vì I nằm trong tam giác CGH và CG là phân giác của $\widehat{BCA}$ nên $\widehat{ICE} < \widehat{ICD} \Rightarrow \sin \widehat{ICE} < \sin \widehat{ICD}$

$$\Rightarrow \frac{IE}{IC} < \frac{ID}{IC} \Rightarrow IE < ID \Rightarrow \text{đường thẳng BC cắt}$$

(I ; ID) tại hai điểm phân biệt.

Tương tự, ta có $IF > ID$ nên đường thẳng AB và (I ; ID) không có điểm chung.



Hình 120

§5. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

§6. TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Tiếp tuyến của đường tròn

Định nghĩa. Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

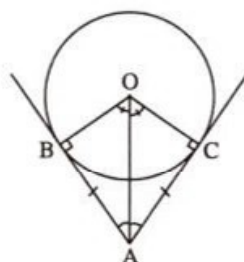
Định lý 1. Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

Định lý 2. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

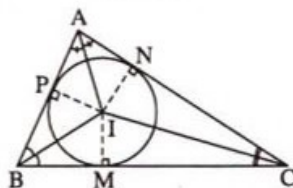
2. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Định lý. Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :

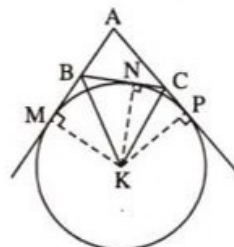
- + Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
 - + Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
 - + Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.
- Đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác, tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn (h.122).
Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong của tam giác.
 - Đường tròn bàng tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh kia (h.123).
Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài của tam giác (mỗi tam giác có ba đường tròn bàng tiếp).



Hình 121



Hình 122



Hình 123

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN TIẾP TUYẾN

Phương pháp giải

- Nhận biết góc vuông nhờ tính chất của tiếp tuyến hoặc tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.
- Áp dụng định lý Py-ta-go hoặc hệ thức lượng trong tam giác vuông.

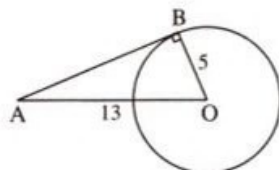
Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 5\text{cm}$ và một điểm A cách O bằng 13cm . Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn AB.

Giải

Ta có AB là tiếp tuyến của (O) nên $AB \perp OB$ (h.124). Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông ABO, ta có :

$$AB^2 = OA^2 - OB^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow AB = 12.$$

Vậy $AB = 12\text{cm}$.



Hình 124

Ví dụ 2. Cho đường tròn (I ; r) với điểm I cố định và $r = 20$. Từ một điểm M nằm ngoài (I) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (I) (A, B là các tiếp điểm). Nếu $AB = 24$ thì điểm M di động trên đường nào ?

Giải

Ta có MA, MB là hai tiếp tuyến của (I) nên $MA = MB$ và $\widehat{MAI} = 90^\circ$ (h.125).

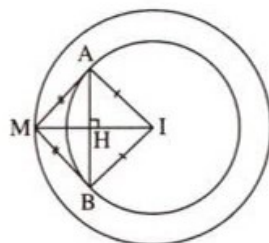
Do A, B thuộc (I) nên : $IA = IB = 20$.

Vì $IA = IB$ và $MA = MB$ nên MI là đường trung trực của đoạn thẳng AB, do đó :

$$AH = \frac{1}{2} AB = 12.$$

Áp dụng hệ thức $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ vào tam giác vuông MAI, ta được :

$$\frac{1}{MA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225} \Rightarrow MA = 15.$$



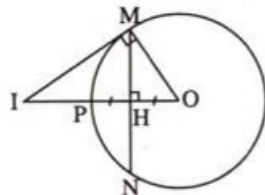
Hình 125

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông MAI, ta được :

$$MI = \sqrt{MA^2 + AI^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25.$$

Điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi bằng 25, nên điểm M di động trên đường tròn (I ; 25).

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O), bán kính R = 3, dây MN vuông góc với bán kính OP tại trung điểm của OP. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt tia OP tại I. Tính độ dài MI.



Hình 126

Giải

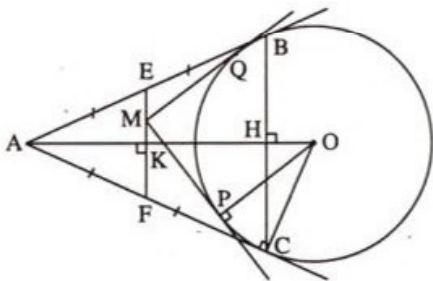
Gọi H là giao điểm của MN và OP (h.126).

$$\text{Ta có : } MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó : } \sin \widehat{OMH} = \frac{OH}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OMH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MIO} = 30^\circ.$$

$$\text{Từ đó suy ra : } MI = 2MH = 3\sqrt{3}.$$

Ví dụ 4. Cho AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các tiếp điểm B, C. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. Lấy M (M ≠ E, F) bất kì trên đoạn EF, vẽ các tiếp tuyến MP, MQ tới (O) với P, Q là các tiếp điểm. Chứng minh rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.



Hình 127

Giải

Gọi giao điểm của AO với BC và EF lần lượt là H, K (h.127).

Vì AB, AC là tiếp tuyến của (O) suy ra $OA \perp BC$ tại H.

Vì E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra $EF \parallel BC$ (tính chất đường trung bình).

Vì MP là tiếp tuyến của (O) nên $OP \perp MP$ tại P.

$$\text{Trong các tam giác OMP và OMK có : } MP^2 = MO^2 - OP^2 = MK^2 + OK^2 - OP^2.$$

Trong tam giác AMK có : $AM^2 = AK^2 + MK^2$.

Suy ra :

$$\begin{aligned} MP^2 - MA^2 &= OK^2 - OP^2 - AK^2 = (OK^2 - AK^2) - OP^2 \\ &= (OK - AK)(OK + AK) - OP^2 \\ &= (OK - KH).OA - OP^2 \quad (\text{vì } AK = KH) \\ &= OH.OA - OC^2 \quad (\text{vì } OP = OC). \end{aligned}$$

Trong tam giác OAC có : $OC^2 = OH.OA$.

Do đó : $MP^2 - MA^2 = 0 \Rightarrow MP = MA$.

Mặt khác $MP = MQ \Rightarrow MA = MP = MQ$.

Vậy M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

Dạng 2. NHẬN BIẾT MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp giải

- Chứng minh khoảng cách từ tâm đến đường thẳng đó bằng bán kính ($d = R$).
- Chứng minh đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

Ví dụ 1. Cho tam giác MNP có $\widehat{M} = 90^\circ$, $MN = 3$, $MP = 4$. Chứng minh rằng đường thẳng NP là tiếp tuyến của đường tròn $(M; \frac{12}{5})$.

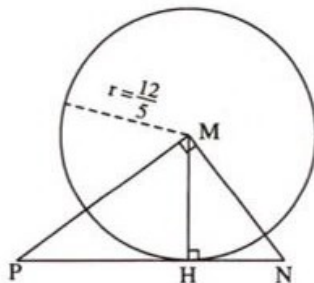
Giải

Vẽ $MH \perp NP$ tại H (h.128).

Áp dụng hệ thức $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ vào tam giác

vuông MNP, đường cao MH, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{MH^2} &= \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{25}{144} \\ \Rightarrow MH &= \frac{12}{5} = r. \end{aligned}$$



Hình 128

Vậy MH bằng bán kính của đường tròn $(M; \frac{12}{5})$ và $MH \perp NP$ tại H nên NP là tiếp tuyến của đường tròn $(M; \frac{12}{5})$.

Ví dụ 2. Cho tam giác MNP có $\widehat{N} = 90^\circ$ và $NP = \frac{1}{2} MP = a$. Vẽ đường tròn tâm P tiếp xúc với MN tại N. Qua N vẽ tia Nx vuông góc với MP cắt (P) tại điểm thứ hai Q ($Q \neq N$). Chứng minh rằng MQ là tiếp tuyến của (P) và MNQ là tam giác đều.

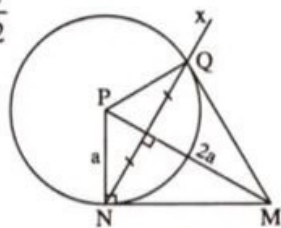
Giải

Tam giác vuông MNP (h.129) có : $\sin \widehat{NMP} = \frac{NP}{MP} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{NMP} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MNQ} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Ta có hai điểm N, Q đối xứng với nhau qua MP nên $\widehat{MQP} = \widehat{MNP} = 90^\circ$ và $\widehat{MNQ} = \widehat{MQN}$.

Do đó, MQ là tiếp tuyến của (P) và MNQ là tam giác đều.



Hình 129

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài (O). Vẽ đường tròn đường kính OA, đường tròn này cắt (O) tại hai điểm phân biệt B và C. Kẻ BI là đường kính của đường tròn đường kính OA, kẻ BK là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh rằng :

- AB, AC là hai tiếp tuyến của (O) ;
- IK là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BC)$.

Giải

a) B thuộc đường tròn đường kính OA nên $\widehat{ABO} = 90^\circ$ (h.130).

Mà B thuộc (O) nên AB là tiếp tuyến của (O).

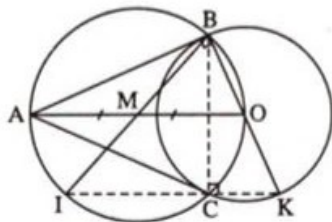
Tương tự, ta có AC là tiếp tuyến của (O).

b) C thuộc đường tròn đường kính BI nên $\widehat{BCI} = 90^\circ$.

C thuộc đường tròn đường kính BK nên $\widehat{BCK} = 90^\circ$.

Từ đó suy ra ba điểm I, K, C thẳng hàng và $IK \perp BC$ tại C.

Mà C thuộc đường tròn $(B; BC)$ nên IK là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BC)$.



Hình 130

Ví dụ 4*. Cho tam giác ABC cân tại A và đường tròn (O) có tâm O nằm trên cạnh đáy BC ; (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC. Gọi P, Q là hai điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB và AC. Chứng minh rằng PQ tiếp xúc với đường tròn (O)

khi và chỉ khi $BP.CQ = \frac{BC^2}{4}$.

Giải

Phân thuận : Giả sử PQ tiếp xúc (O) tại H.

Ta sẽ chứng minh $BP.CQ = \frac{BC^2}{4}$.

Kí hiệu các tiếp điểm, các góc như hình 131.

Ta có : $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}, \widehat{O_4} = \widehat{O_5}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $\widehat{O_1} = \widehat{O_6}$ (vì cùng phụ với hai góc bằng nhau).

Suy ra $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_4} = \widehat{O_3} + \widehat{O_5} + \widehat{O_6} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

Xét tam giác OPI vuông tại I nên $\widehat{OPI} = 90^\circ - \widehat{O_2}$;

tam giác COQ có $\widehat{COQ} = \widehat{O_5} + \widehat{O_6} = 90^\circ - \widehat{O_3}$.

Mà $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$ nên $\widehat{OPI} = \widehat{COQ}$ hay $\widehat{OPB} = \widehat{COQ}$.

Do đó $\triangle BPO \sim \triangle COQ$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BP}{CO} = \frac{BO}{CQ}$

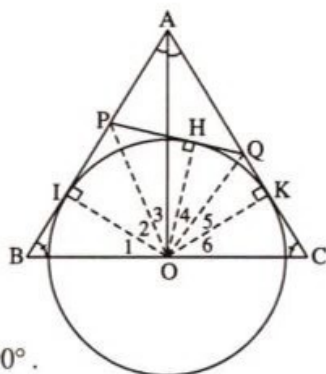
hay $BP.CQ = BO.CO = \frac{BC}{2} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{BC^2}{4}$.

Phản đảo : Cho P, Q tương ứng thuộc hai cạnh AB, AC thỏa mãn

$$BP.CQ = \frac{BC^2}{4}.$$

Ta phải chứng minh PQ tiếp xúc với (O).

Giả sử PQ không tiếp xúc với (O) thì ta dựng được P'Q' song song với PQ và tiếp xúc với (O). Theo phần thuận ta có : $BP'.CQ' = \frac{BC^2}{4}$.



Hình 131

Ta xét hai khả năng sau :

$$TH 1 : PQ \text{ cắt } (O) : BP < BP' \text{ và } CQ < CQ' \text{ suy ra } BP.CQ < \frac{BC^2}{4}.$$

$$TH 2 : PQ \text{ không cắt } (O) : BP > BP' \text{ và } CQ > CQ' \text{ suy ra } BP.CQ > \frac{BC^2}{4}.$$

Do đó $BP.CQ \neq \frac{BC^2}{4}$ (mâu thuẫn với đề bài) $\Rightarrow$ điều giả sử là sai.

Vậy PQ tiếp xúc với (O) khi và chỉ khi $BP.CQ = \frac{BC^2}{4}$.

Dạng 3. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Phương pháp giải

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân (bất đẳng thức Cô-si) :

Với mọi a, b không âm, ta có : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (dấu "=" xảy ra khi $a = b$).

Hoặc : $a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (dấu "=" xảy ra khi $a = b$).

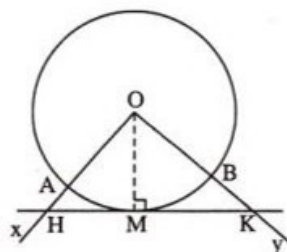
Ví dụ 1. Cho đường tròn (O ; R) và góc vuông Oxy. Tia Ox cắt (O) tại A, tia Oy cắt (O) tại B. Lấy điểm M trên cung nhỏ AB, vẽ tiếp tuyến tại M với (O). Tiếp tuyến này cắt Ox, Oy lần lượt tại H và K. Xác định vị trí của M để độ dài đoạn HK nhỏ nhất.

Giải

Ta có HK là tiếp tuyến của (O) tại M (h.132), nên $HK \perp OM$ tại M. Áp dụng hệ thức $a'.b' = h^2$ vào tam giác vuông HOK, ta có : $HM.MK = R^2$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$HK = HM + MK \geq 2\sqrt{HM.MK} = 2\sqrt{R^2} = 2R.$$

Dấu "=" xảy ra khi : $HM = MK \Leftrightarrow OM$ vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của tam giác OHK $\Leftrightarrow OM$ là đường phân giác của góc xOy.



Hình 132

Vậy nếu M trên cung nhỏ AB sao cho OM là đường phân giác của góc AOB thì HK đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2R$.

Ví dụ 2. Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính MN. Vẽ tiếp tuyến Nx tại N của (O) . Gọi K là một điểm tùy ý trên tia Nx , nối MK cắt (O) tại I. Tìm giá trị nhỏ nhất của $(2MI + MK)$.

Giải

Vì Nx là tia tiếp tuyến của (O) nên $Nx \perp MN$ tại N $\Rightarrow \widehat{MKN} = 90^\circ$ (h.133).

Vì I thuộc đường tròn đường kính MN nên $\widehat{MIN} = 90^\circ$ hay $NI \perp MK$ tại I.

Áp dụng hệ thức $b'.a = b^2$ vào tam giác vuông MKN, ta có :

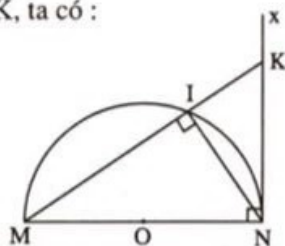
$$MI.MK = MN^2 = (2R)^2 = 4R^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$2MI + MK \geq 2\sqrt{2MI.MK} = 2\sqrt{2.4R^2} = 4\sqrt{2}R.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2MI = MK \Leftrightarrow MI = IK$

$$\Leftrightarrow NK = 2R.$$



Hình 133

Vậy giá trị nhỏ nhất của $(2MI + MK)$ bằng $4\sqrt{2}R$ khi $NK = 2R$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn cố định tâm O, bán kính $R = 1\text{cm}$. Tam giác ABC thay đổi nhưng luôn ngoại tiếp $(O; 1\text{cm})$. Một đường thẳng đi qua tâm O cắt các đoạn AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

Giải

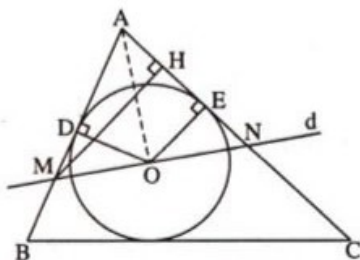
Giả sử (O) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D và E (h.134).

$\Rightarrow OD \perp AB, OE \perp AC$ và $OD = OE = 1\text{cm}$
(tính chất tiếp tuyến).

$$\Rightarrow S_{OAM} = \frac{1}{2}OD.AM = \frac{1}{2}AM;$$

$$S_{AON} = \frac{1}{2}OE.AN = \frac{1}{2}AN$$

$$\Rightarrow S_{AMN} = S_{OAM} + S_{AON} = \frac{1}{2}(AM + AN).$$



Hình 134

Vẽ $MH \perp AC$ tại $H \Rightarrow MH \leq MA$ (tính chất đường xiên và đường vuông góc)

$$\text{và } S_{AMN} = \frac{1}{2} MH \cdot AN.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si; ta có :

$$S_{AMN} = \frac{AM + AN}{2} \geq \sqrt{AM \cdot AN} \geq \sqrt{MH \cdot AN} = \sqrt{2S_{AMN}}$$

$$\Leftrightarrow S_{AMN}^2 \geq 2S_{AMN} \Leftrightarrow S_{AMN} \geq 2 \text{ (vì } S_{AMN} > 0).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} AM = AN \\ AM = MH \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \perp OA \text{ tại } O \\ \widehat{BAC} = 90^\circ. \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN là 2cm^2 đạt được khi $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và $d \perp OA$ tại O (hay $MN \perp OA$ tại O).

Chú ý : Người ta còn sử dụng một số bất đẳng thức đại số khác để giải bài toán cực trị hình học, ví dụ như :

$$1. (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$$

$$2. \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \text{ (với } x, y > 0).$$

$$3. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \text{ (với } x, y, z > 0).$$

Dạng 4. CHỨNG MINH MỘT SỐ TÍNH CHẤT VÀ HỆ THỨC HÌNH HỌC

Phương pháp giải

- Chứng minh hai đường thẳng vuông góc nhờ tính chất của tiếp tuyến.
- Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau nhờ tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.
- Áp dụng định lý Py-ta-go, hệ thức lượng trong tam giác vuông để chứng minh đẳng thức về đoạn thẳng, diện tích,...

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài (O) . Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) . Vẽ đường kính CD . Chứng minh rằng :

- a) $OA \perp BC$; b) $BD \parallel OA$.

Giải

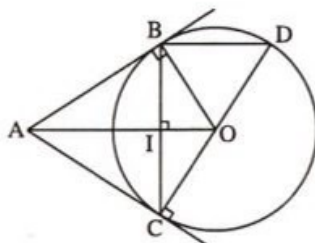
a) (h.135) Ta có AB, AC là tiếp tuyến của (O) nên : $AB = AC$. (1)

B, C thuộc (O) nên : $OB = OC = R$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra A và O cách đều hai đầu đoạn thẳng BC nên AO là đường trung trực của đoạn BC. Suy ra $OA \perp BC$.

b) Gọi I là giao điểm của OA và BC, vì OA là trung trực của BC nên I là trung điểm của BC. Do đó OI là đường trung bình của tam giác BCD. Suy ra $BD \parallel OI$ hay $OA \parallel BD$.

(Có thể chứng minh bằng cách chỉ ra BD, OA cùng vuông góc với BC).



Hình 135

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại D. Chứng minh rằng : $S_{\triangle ABC} = BD \cdot DC$

Giải

Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (I là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác ABC). Gọi E, F là các điểm tiếp xúc của (I) với AC, AB (h.136). Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có : $BD = BF$, $CD = CE$, $AE = AF$.

Mặt khác, ta lại có :

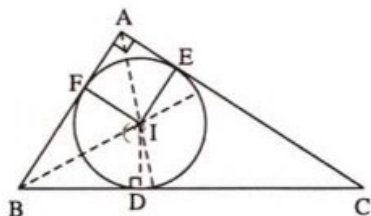
$$BD + BF = AB + BC - (AF + CD)$$

$$\Leftrightarrow 2BD = BA + BC - (AE + CE)$$

$$\Leftrightarrow 2BD = c + a - b$$

$$\Leftrightarrow BD = \frac{a+c-b}{2} = \frac{a-(b-c)}{2}.$$

Tương tự, ta có : $DC = \frac{a+(b-c)}{2}.$



Hình 136

$$\text{Do đó : } BD \cdot DC = \frac{a-(b-c)}{2} \cdot \frac{a+(b-c)}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4}$$

$$= \frac{[a^2 - (b^2 + c^2)] + 2bc}{4} = \frac{2bc}{4} = \frac{bc}{2} \quad (\text{vì } a^2 = b^2 + c^2)$$

$$= S_{\triangle ABC}.$$

Ví dụ 3. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O ; R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ B xuống đường kính CD của (O). Chứng minh rằng $IB = IH$ với I là giao điểm của AD và BH.

Giải

Gọi E là giao điểm của CA và DB (h.137).

Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên ta có $AB = AC$, suy ra tam giác ABC cân tại A
 $\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$.

Vì B thuộc đường tròn đường kính CD nên $\widehat{CBD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CBE} = 90^\circ$.

Do đó : $\widehat{AEB} + \widehat{BCA} = \widehat{ABE} + \widehat{ABC} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$

$\Rightarrow$ tam giác ABE cân tại A

$\Rightarrow AE = AB \Rightarrow AB = AC = AE$.

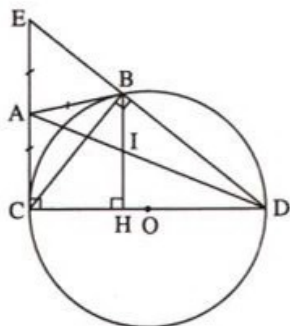
Vì AC là tiếp tuyến của (O) nên $AC \perp CD$

$\Rightarrow AC \parallel BH$ (vì cùng vuông góc với CD).

Xét tam giác ACD có $IH \parallel AC$ nên $\frac{IH}{AC} = \frac{DI}{DA}$. (1)

Xét tam giác ADE có $IB \parallel AE$ nên $\frac{IB}{AE} = \frac{DI}{DA}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{IH}{AC} = \frac{IB}{AE} \Rightarrow IH = IB$ (vì $AC = AE$).



Hình 137

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $AB > AC$, $\widehat{A} > 90^\circ$; trung tuyến AM. Các đường tròn nội tiếp tam giác ABM và tam giác ACM tiếp xúc với AM lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng :

$$\text{a) } ME = \frac{MA + MB - AB}{2}; \quad \text{b) } EF = \frac{AB - AC}{2}.$$

Giải

a) Gọi G, H là tiếp điểm của BM, BA với (O_1) (đường tròn nội tiếp tam giác ABM) (h.138).

Vì MG, ME là hai tiếp tuyến của (O_1) nên $MG = ME$.

Tương tự, ta có $AH = AE$ và $BH = BG$.

Ta có : $ME = MA - AE = MA - AH$;

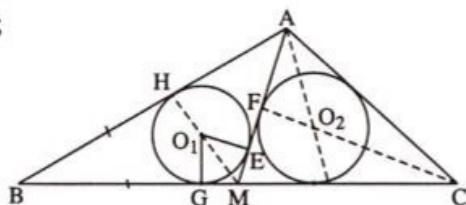
$ME = MG = MB - BG = MB - BH$

$\Rightarrow 2ME = ME + MG$

$= MA + MB - (AH + BH)$

$= MA + MB - AB$

$\Rightarrow ME = \frac{MA + MB - AB}{2}$.



Hình 138

b) Tương tự câu a), ta có : $MF = \frac{MA + MC - AC}{2}$

$\Rightarrow EF = MF - ME = \frac{MA + MC - AC}{2} - \frac{MA + MB - AB}{2} = \frac{AB - AC}{2}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho góc vuông xOy và đường tròn tâm I tiếp xúc với hai cạnh của góc xOy tương ứng tại M và N . Biết $OI = a$, tính OM .
- Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và $\frac{a}{7} = \frac{b}{8} = \frac{c}{9}$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC , CA và AB lần lượt tại D , E , F . Chứng minh rằng tam giác có ba cạnh độ dài là AE , BF và CD là tam giác vuông.
- Cho hệ trục tọa độ xOy , điểm $A(-1 ; 2)$. Vẽ đường tròn tâm A , bán kính $r = \sqrt{5}$, đường tròn này cắt trục tung tại điểm N ($N \neq O$). Lấy điểm $M(x ; 0)$ trên trục hoành. Xác định x để MN là tiếp tuyến của $(A ; r)$.
- Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy với nửa đường tròn. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B trên xy . Chứng minh rằng :
a) M là trung điểm của HK ;
b) Đường tròn đường kính HK tiếp xúc với AB .
- Cho đường tròn $(O ; R)$. Từ một điểm A cách O một khoảng $2R$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB , AC (B, C là tiếp điểm). Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.
- Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi D là điểm đối xứng của B qua H . Vẽ $DE \parallel AB$ (E thuộc AC). Chứng minh rằng :

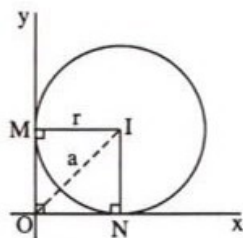
- a) Tam giác HAE cân tại H ;
 b) HE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.
7. Cho đường tròn $(O ; R)$ và đường thẳng xy không giao nhau. Trên xy lấy điểm M . Từ M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(O ; R)$ (A, B là các tiếp điểm). Vẽ $OH \perp xy$ ($H \in xy$). Dây AB cắt OH tại E , cắt OM tại F . Chứng minh rằng :
- a) $OE.OH = OF.OM$;
 b) $OE.OH = R^2$, từ đó suy ra dây AB luôn đi qua một điểm cố định là điểm E .
8. Cho $(O ; R)$ và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Qua A vẽ đường thẳng d cắt $(O ; R)$ tại B, C ($AB \leq AC$), vẽ tiếp tuyến AM với $(O ; R)$ (với M là tiếp điểm). Chứng minh rằng : $AB + AC \geq 2AM$.
9. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) (bốn cạnh AB, BC, CD và DA đều tiếp xúc với (O)). Chứng minh rằng : $AB + CD = AD + BC$.
10. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ngoại tiếp đường tròn $(O ; R)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $AB + CD$ theo R .

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Ta có Ox là tiếp tuyến của (I) nên $\widehat{M} = 90^\circ$; Oy là tiếp tuyến của (I) nên $\widehat{N} = 90^\circ$ và $IM = IN = r$ (h.139). Do đó tứ giác $OMIN$ là hình vuông, suy ra :

$$OM = MI = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$



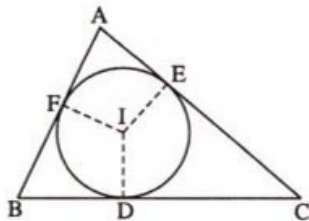
Hình 139

2. Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC . Vì (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F nên $AE = AF$, $CE = CD$ và $BF = BD$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) (h.140).

$$\Rightarrow AE + BF + CD = p \Rightarrow AE = p - a.$$

Tương tự, ta có : $BF = p - b$; $CD = p - c$.

Đặt $k = \frac{a}{7} = \frac{b}{8} = \frac{c}{9} \Rightarrow p = 12k, a = 7k, b = 8k, c = 9k$ ($k > 0$).



Hình 140

Suy ra : $AE = 5k, BF = 4k, CD = 3k$.

Áp dụng định lí Py-ta-go đảo suy ra điều phải chứng minh.

3. Ta có $(A; \sqrt{5})$ cắt Oy tại $N(0; 4)$. Do đó :

$$AN^2 = r^2 = 5; MN^2 = x^2 + 4^2; AM^2 = (x+1)^2 + 2^2.$$

MN là tiếp tuyến của (A) khi : $MN \perp AN$

$$\Leftrightarrow AM^2 = MN^2 + AN^2 \Leftrightarrow x = 8.$$

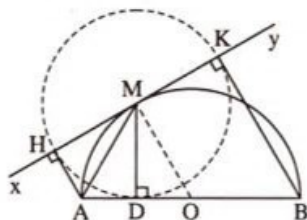
4. (h.141) a) Vì xy là tiếp tuyến nên $OM \perp xy$. Suy ra $AH \parallel BK \parallel OM$. Mà $OA = OB$ nên $MH = MK$.

b) Vẽ $MD \perp AB, D \in AB$, ta có $\widehat{MAH} = \widehat{AMO}$ (so le trong), mà $\widehat{AMO} = \widehat{MAO}$ nên $\widehat{MAH} = \widehat{MAO}$.

$\Delta MAH = \Delta MAD$ nên $MH = MD = MK$.

Do đó đường tròn đường kính HK đi qua D.

Ta có $AB \perp MD$ tại D nên AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính HK.



Hình 141

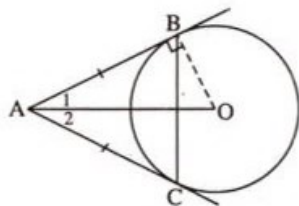
5. Vì AB, AC là hai tiếp tuyến nên $AB = AC$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (h.142). Ta có $OB \perp AB$.

Xét tam giác AOB vuông tại B có

$OB = \frac{1}{2}OA$ nên $\widehat{A_1} = 30^\circ$, suy ra

$\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Tam giác ABC cân tại A, lại có $\widehat{A} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.



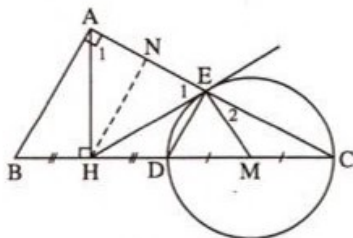
Hình 142

6. a) Vẽ $HN \parallel AB$ (hình 143).

Xét hình thang ABDE, ta chứng minh được $NA = NE$ và $HN \perp AE$. Suy ra tam giác HAE cân tại H.

b) Gọi M là trung điểm của CD. Vì tam giác CDE vuông tại E nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

Ta có $\widehat{E_2} = \widehat{C}$ và $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}$ nên



Hình 143

$$\widehat{E_2} + \widehat{E_1} = \widehat{C} + \widehat{A_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HEM} = 90^\circ.$$

Do đó HE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

7. a) (h.144) Ta có $MA = MB$ và $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ suy ra $MO \perp AB$.

Tam giác FOE đồng dạng với tam giác HOM

$$\Rightarrow \frac{OE}{OM} = \frac{OF}{OH} \Rightarrow OE.OH = OF.OM. \quad (1)$$

b) Ta có $OA \perp MA$ (tính chất tiếp tuyến).

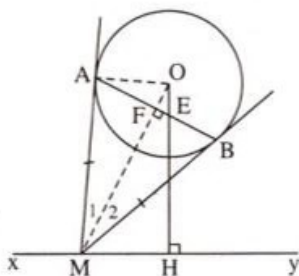
Xét tam giác AOM vuông tại A ta có

$$OA^2 = OF.OM. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $OE.OH = OA^2 = R^2$.

$$\Rightarrow OE = \frac{R^2}{OH} \text{ (không đổi)}.$$

Điểm E nằm trên tia OH cố định, mà OE không đổi nên E là điểm cố định.



Hình 144

8. (h.145) Kẻ $OH \perp BC$ tại H $\Rightarrow HB = HC$

$$\Rightarrow AB + AC = 2AH.$$

Ta sẽ chứng minh $AH \geq AM$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông AOH và tam giác vuông AOM, ta có :

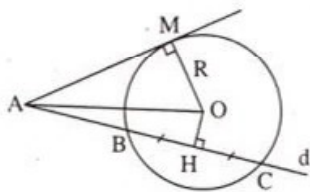
$$OA^2 = OH^2 + AH^2; OA^2 = OM^2 + AM^2.$$

Vì đường thẳng d có điểm chung với đường tròn (O) nên

$$OH \leq R = OM \Rightarrow OH^2 \leq OM^2 \text{ mà } OH^2 + AH^2 = OM^2 + AM^2$$

$$\text{nên } AH^2 \geq AM^2 \text{ hay } AH \geq AM \Rightarrow AB + AC \geq 2AM.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OH = R \Leftrightarrow d$ tiếp xúc với (O).

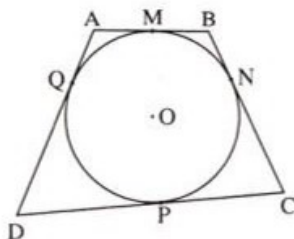


Hình 145

9. Vì tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O) nên AB, BC, CD và DA tiếp xúc với (O). Gọi các tiếp điểm lần lượt là M, N, P, Q (h.146).

Vì AM, AQ là tiếp tuyến của (O) nên $AM = AQ$.

Tương tự ta có : $BM = BN, CN = CP, DP = DQ$.



Hình 146

$$\begin{aligned}
 \text{Suy ra : } AB + CD &= AM + MB + CP + DP \\
 &= AQ + BN + CN + DQ \\
 &= (AQ + DQ) + (BN + NC) \\
 &= AD + BC \text{ (đpcm)}.
 \end{aligned}$$

10. (h.147) Dễ thấy $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$; $\widehat{O_3} = \widehat{O_4} \Rightarrow \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ$.

Áp dụng hệ thức $h^2 = b'.c'$ vào tam giác vuông AOD, ta có :

$$OF^2 = AF.FD = AE.DK = \frac{AB}{2} \cdot \frac{CD}{2}$$

$$\Rightarrow AB.CD = 4OF^2 = 4R^2 \text{ (vì } AF = AE = \frac{1}{2}AB,$$

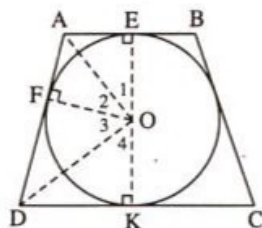
$$DF = DK = \frac{1}{2}DC \text{ và } OF = R).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$AB + CD \geq 2\sqrt{AB.CD} = 2\sqrt{4R^2} = 4R.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $AB = CD (= 2R)$.

Vậy $AB + CD$ nhỏ nhất bằng $4R$ khi $ABCD$ là hình vuông.



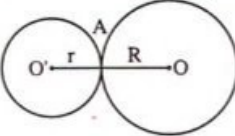
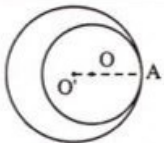
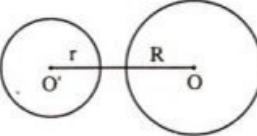
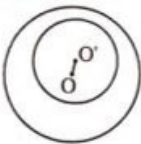
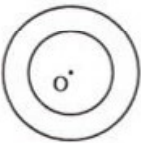
Hình 147

§7. §8. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Ba vị trí tương đối của hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) ($R \geq r$)

Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hình vẽ	Liên hệ giữa OO' với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2		$R - r < OO' < R + r$

Hai đường tròn tiếp xúc nhau : • Tiếp xúc ngoài • Tiếp xúc trong	1		$OO' = R + r$
			$OO' = R - r > 0$
Hai đường tròn không giao nhau : • (O) và (O') ở ngoài nhau. • (O) đựng (O').	0		$OO' > R + r$
			$OO' < R - r$
			$OO' = 0$ và $R \neq r$

2. Tính chất của đường nối tâm

Cho hai đường tròn (O) và (O') có tâm không trùng nhau. Đường thẳng OO' gọi là đường nối tâm, đoạn thẳng OO' gọi là đoạn nối tâm.

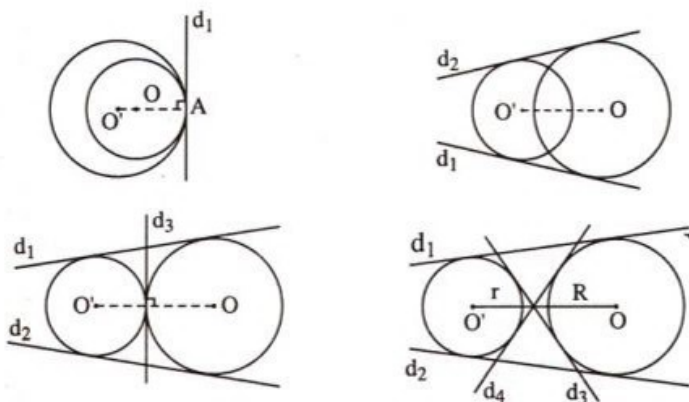
Định lý. Đường nối tâm là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn.

Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm OO' . Tức là, đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

Nếu hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

- Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.



Hình 148

- Tiếp tuyến chung trong là tiếp tuyến cắt đoạn nối tâm.
- Tiếp tuyến chung ngoài là tiếp tuyến không cắt đoạn nối tâm.
- Hai đường tròn đựng nhau không có tiếp tuyến chung.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp giải

- Xác định hai đường tròn cần xét, sau đó xác định độ lớn các bán kính và độ dài đoạn nối tâm.
- Xác định hệ thức liên hệ giữa độ lớn các bán kính và độ dài đoạn nối tâm. Từ đó kết luận vị trí tương đối của hai đường tròn.

Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Lấy điểm A tùy ý trên (O). Vẽ đường tròn đường kính OA. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

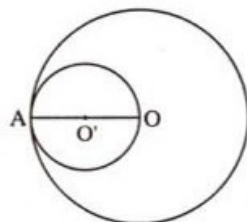
Giải

Gọi O' là tâm đường tròn đường kính OA (h.149). Ta có O' là trung điểm của OA và

$$\text{bán kính đường tròn (O')} \text{ là } R' = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}.$$

$$\text{Độ dài đoạn nối tâm : } d = OO' = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}.$$

Ta có $R - R' = \frac{R}{2} = d$ nên (O) và (O') tiếp xúc trong tại A.



Hình 149

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho hai điểm A(-1 ; 1) và B(3 ; 0). Vẽ các đường tròn (A ; r) và (B ; r'). Khi r = 3 và r' = 1, hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

Giải

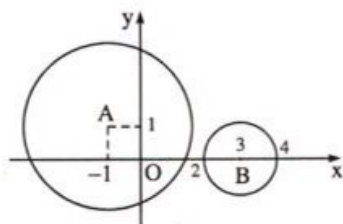
Độ dài đoạn nối tâm (h.150) :

$$d = AB = \sqrt{(3+1)^2 + 1^2} = \sqrt{17}. \quad (1)$$

Tổng hai bán kính :

$$r + r' = 3 + 1 = 4. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy $\sqrt{17} > 4$ nên hai đường tròn không giao nhau ; hai đường tròn (A) và (B) nằm ngoài nhau.



Hình 150

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ ($\hat{B}, \hat{C} \neq 90^\circ$), đường cao AH. Từ H kẻ HK vuông góc với AB tại K, HI vuông góc với AC tại I. Xác định vị trí tương đối của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHK$ và đường tròn ngoại tiếp $\triangle CHI$.

Giải

Trường hợp 1 : Xét $\triangle ABC$ có $\hat{B} < 90^\circ$ và $\hat{C} < 90^\circ$. Gọi O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của BH và CH (h.151).

Vì $\triangle BKH$ vuông tại K, O_1 là trung điểm của cạnh huyền BH nên

$$KO_1 = O_1B = O_1H = \frac{1}{2}BH = R_1$$

$\Rightarrow (O_1 ; R_1)$ là đường tròn ngoại tiếp $\triangle BKH$.

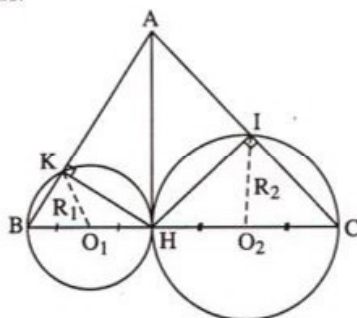
Tương tự, ta có $(O_2 ; R_2)$ là đường tròn ngoại tiếp $\triangle CHI$.

Ta có $R_1 + R_2 = O_1H + O_2H = O_1O_2$ nên (O_1, R_1) tiếp xúc ngoài tại H với $(O_2 ; R_2)$.

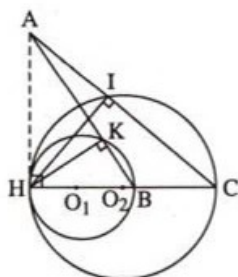
Trường hợp 2 : Xét $\triangle ABC$ có $\hat{B} = 90^\circ$ (h.152) (hoặc $\hat{C} > 90^\circ$) (Các hình vẽ khác ta chứng minh tương tự). Lập luận tương tự như trường hợp 1 ta có :

$$O_1O_2 = R_2 - R_1$$

nên $(O_1 ; R_1)$ và $(O_2 ; R_2)$ tiếp xúc trong tại H.



Hình 151



Hình 152

Chú ý : Khi $\hat{B} = 90^\circ$ thì H trùng với B nên ba điểm H, K, B trùng nhau. Do đó đường tròn $(O_1 ; R_1)$ suy biến thành điểm B.

Dạng 2. CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT VÀ HỆ THỨC HÌNH HỌC

Phương pháp giải

- Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.
- Dựa vào các tính chất đã biết để suy ra các tính chất và hệ thức hình học cần chứng minh.

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $(O ; R)$ và $(O' ; R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC tại I. Chứng minh rằng :

- a) $\widehat{OIO'} = 90^\circ$; b) $BC = 2\sqrt{RR'}$.

Giải

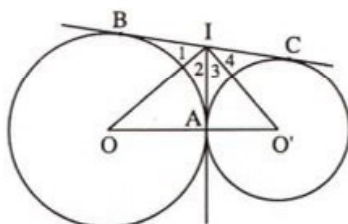
a) Ta có IB, IA là hai tiếp tuyến của (O) nên $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$; IC, IA là hai tiếp tuyến của (O') nên $\hat{I}_3 = \hat{I}_4$ (h.153). Suy ra :

$$\widehat{OIO'} = \hat{I}_2 + \hat{I}_3 = 180^\circ : 2 = 90^\circ.$$

b) Ta có IB, IA là hai tiếp tuyến của (O) nên $IB = IA$ và $IA \perp OA$; IC, IA là hai tiếp tuyến của (O') nên $IC = IA$ và $IA \perp O'A$. Suy ra : $IA = IB = IC$.

Ba điểm O, A, O' thẳng hàng và $IA \perp OO'$. Áp dụng hệ thức : $h^2 = b'.c'$ vào tam giác vuông OIO', ta có : $IA^2 = OA.O'A \Rightarrow IA = \sqrt{R.R'}$.

Mặt khác : $BC = IB + IC = 2IA$ nên $BC = 2\sqrt{R.R'}$.



Hình 153

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, trong đó O' nằm trên đường tròn (O) . Kẻ đường kính O'C của đường tròn (O) .

- a) Chứng minh rằng CA, CB là hai tiếp tuyến của (O') .
- b) Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB tại I. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng O'B ở K. Chứng minh rằng ba điểm O, I, K thẳng hàng.

Giải

a) Tam giác CAO' có đường trung tuyến AO ứng với cạnh CO' bằng nửa cạnh CO' nên $\widehat{CAO'} = 90^\circ$ (h.154). Mà $A \in (O')$ nên CA là tiếp tuyến của (O') tại A .

Tương tự, ta có CB là tiếp tuyến của (O') .

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì :

$$\widehat{C_1} = \widehat{C_2}. \quad (1)$$

Ta có $CA \parallel IO'$ (cùng vuông góc với $O'A$) nên :

$$\widehat{C_1} = \widehat{O'_1}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{C_2} = \widehat{O'_1}$. Do đó :

$$IC = IO'. \quad (3)$$

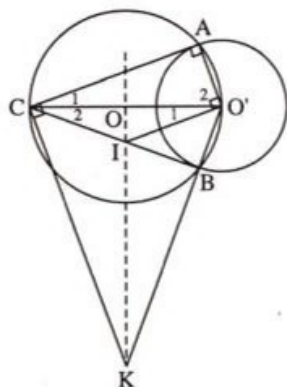
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $\widehat{O'_2} = \widehat{CO'B}$. Mặt khác $CK \parallel AO'$ (cùng vuông góc với AC) nên $\widehat{O'_2} = \widehat{O'CK}$. Suy ra $\widehat{CO'B} = \widehat{O'CK}$. Do đó :

$$KC = KO'. \quad (4)$$

Mà : $OC = OO'$ (vì O', C cùng thuộc (O)). (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra O, I, K cùng thuộc đường trung trực của CO' .

Vậy ba điểm I, O, K thẳng hàng.



Hình 154

Ví dụ 3. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ (với $R_1 \neq R_2$) tiếp xúc ngoài tại A .

Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài BC và DE (với B, D thuộc (O_1) ; C, E thuộc (O_2)). Chứng minh rằng : $BC + DE = BD + CE$.

Giải

Vẽ tiếp tuyến chung tại A lần lượt cắt BC, DE tại M và N (h.155). Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O_1) nên $MA = MB$.

Vì MA, MC là tiếp tuyến của (O_2) nên

$$MA = MC \Rightarrow MA = MB = MC.$$

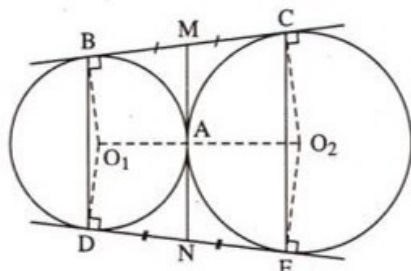
Chứng minh tương tự, ta có :

$$NA = ND = NE.$$

$$\Rightarrow BC + DE = 2MN. \quad (1)$$

Gọi giao điểm của BC và DE là K , khi đó K thuộc đường thẳng O_1O_2

$$\Rightarrow KB = KD \text{ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).}$$



Hình 155

Mà $O_1B = O_1D = R_1$ nên KO_1 là trung trực của đoạn $BD \Rightarrow O_1O_2 \perp BD$.

Chứng minh tương tự ta được $O_1O_2 \perp CE$

$\Rightarrow$ tứ giác $BCED$ là hình thang (vì $BD \parallel CE$).

Vì M, N lần lượt là trung điểm của BC và DE nên $2MN = BD + CE$ (2) (tính chất đường trung bình).

Từ (1) và (2) suy ra : $BC + DE = BD + CE$.

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ ngoài nhau. Vẽ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD (với A, D thuộc (O_1) ; B, C thuộc (O_2)). Nối AC cắt (O_1) tại M ; cắt (O_2) tại N ($M \neq A, N \neq C$). Chứng minh rằng : $AM = NC$.

Giải

Vẽ đường trung trực d của đoạn AB , d cắt O_1O_2 tại I (h.156). Khi đó $IA = IB$.

Ta có B và C đối xứng nhau qua $O_1O_2 \Rightarrow IB = IC \Rightarrow IA = IC$.

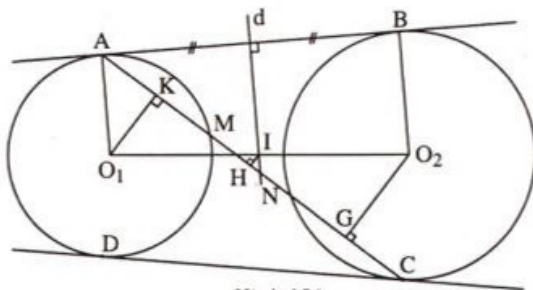
Kẻ $IH \perp AC$ tại H ta có $HA = HC$ (vì $\triangle IAC$ cân tại I).

Kẻ $O_1K \perp AC$ tại $K, O_2G \perp AC$ tại $G \Rightarrow O_1K \parallel IH \parallel O_2G$.

Xét hình thang ABO_2O_1 (vì $O_1A \parallel O_2B$ do cùng vuông góc với AB) ta có $d \parallel AO_1 \parallel BO_2$ và d đi qua trung điểm của AB nên d đi qua trung điểm của O_1O_2 hay I là trung điểm của O_1O_2 .

Xét hình thang O_1KO_2G có $IH \parallel O_1K \parallel O_2G$ và I là trung điểm của O_1O_2 nên H là trung điểm của $KG \Rightarrow HK = HG \Rightarrow HA - HK = HC - HG$ hay $AK = GC \Rightarrow 2AK = 2GC \Rightarrow AM = CN$.

Chú ý : Trong ví dụ 4 ở trên ta đã sử dụng tính chất đường thẳng song song với hai đáy của hình thang và đi qua trung điểm của một đường chéo thì đi qua trung điểm của đường chéo còn lại.



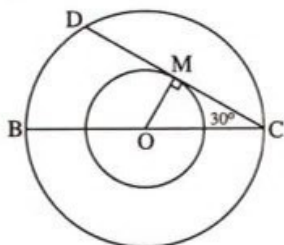
Hình 156

Dạng 3. TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG

Phương pháp giải

- Vận dụng tính chất tiếp tuyến, tiếp tuyến chung, hai tiếp tuyến cắt nhau và tính chất đoạn nối tâm.
- Áp dụng định lý Py-ta-go, hệ thức lượng trong tam giác vuông và tỉ số lượng giác của góc nhọn.

Ví dụ 1. Trong hình 157 cho hai đường tròn đồng tâm O. Cho biết BC là đường kính của đường tròn lớn và có độ dài bằng 8. Dây CD là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ và $\widehat{BCD} = 30^\circ$. Hãy tính bán kính của đường tròn nhỏ.



Hình 157

Giải

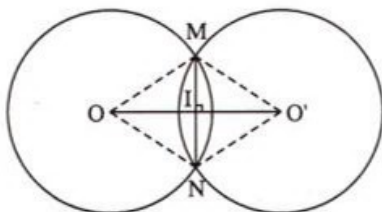
Ta có $BC = 8$ nên bán kính đường tròn lớn là $OC = 4$. Vì CD là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ, nên $CD \perp OM$.

$$\text{Do đó } OM = OC \cdot \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ cắt nhau tại M và N. Biết $OO' = 24\text{cm}$, $MN = 10\text{cm}$. Tính R.

Giải

Gọi giao điểm của OO' và MN là I (h.158). Vì $OM = ON = O'M = O'N = R$ nên tứ giác $OMON'$ là hình thoi $\Rightarrow OO' \perp MN$ tại điểm I là trung điểm của mỗi đoạn OO' và MN .



Hình 158

$$\text{Do đó : } IM = \frac{1}{2}MN = 5\text{cm}, IO = \frac{1}{2}OO' = 12\text{cm}.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle MIO$, ta có :

$$R = OM = \sqrt{IM^2 + IO^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13(\text{cm}).$$

Vậy $R = 13\text{cm}$.

Ví dụ 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) , N thuộc (O') . Biết $R = 9\text{cm}$, $R' = 4\text{cm}$. Tính độ dài đoạn MN.

Giải

Ta có : $OO' = OA + O'A = 9 + 4 = 13(\text{cm})$.

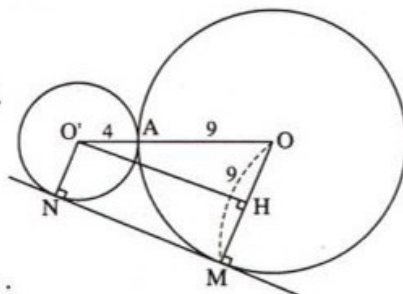
Kẻ $OH \perp OM$ tại H (h.159)

$\Rightarrow$ tứ giác $O'NMH$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow MH = O'N = 4(\text{cm})$; $MN = O'H$

$\Rightarrow OH = OM - MH = 9 - 4 = 5(\text{cm})$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle OO'H$, ta có :



Hình 159

$$MN = O'H = \sqrt{OO'^2 - OH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (cm)}.$$

Vậy $MN = 12\text{cm}$.

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn $(O; 3\text{cm})$ và $(O'; 4\text{cm})$ cắt nhau tại A và B . Qua A kẻ một cát tuyến cắt (O) tại M ($M \neq A$), cắt (O') tại N ($N \neq A$). Nếu $OO' = 5\text{cm}$, hãy tính giá trị lớn nhất của MN .

Giải

Kẻ $OH \perp AM$ tại H , $O'K \perp AN$ tại K và $OI \perp O'K$ tại I (h.160).

$\Rightarrow HM = HA$, $KA = KN$ và tứ giác $HOIK$ là hình chữ nhật

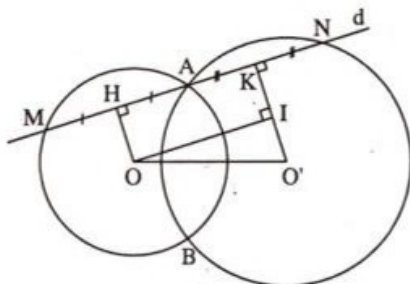
$\Rightarrow MN = 2HK$ và $HK = OI$.

Ta có: $OI \leq OO'$ (đường vuông góc và đường xiên)

$\Rightarrow MN = 2HK = 2OI \leq 2OO' = 10 \text{ (cm)}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OI = OO' \Leftrightarrow I \equiv O' \Leftrightarrow d \parallel OO'$.

Vậy giá trị lớn nhất của MN bằng 10cm khi cát tuyến d song song với OO' .



Hình 160

Dạng 4. DỤNG HÌNH

Phương pháp giải

- Sử dụng các tính chất, định lý về tiếp tuyến chung, điều kiện tiếp xúc, ...

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; 2R)$ có $OO' = d > 3R$. Dụng tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn đó.

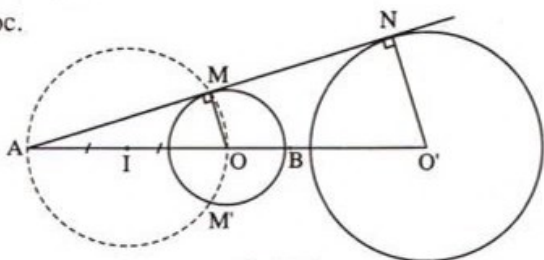
Giải

* **Phân tích**: Dành cho bạn đọc.

* **Cách dựng**: (h.161)

– Dụng điểm A trên đường thẳng OO' sao cho O là trung điểm của AO' .

– Dụng đường tròn đường kính AO , đường tròn này cắt (O) tại M và M' .



Hình 161

– Nối các đường AM, AM' ta được hai tiếp tuyến chung ngoài của $(O; R)$ và $(O'; 2R)$.

* **Chứng minh và biện luận** : Dành cho bạn đọc.

Chú ý :

- Điểm A là điểm chia ngoài của OO' với tỉ số $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} = \frac{R}{2R} = \frac{OM}{O'N} = \frac{AO}{AO'} \right)$.
- Ta có thể dựng được hai tiếp tuyến chung trong của $(O; R)$ và $(O'; 2R)$ bằng cách vẽ tiếp tuyến qua B là điểm chia trong của OO' với tỉ số $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} = \frac{R}{2R} = \frac{OB}{BO'} \right)$.

Ví dụ 2. Cho trước đường tròn $(O; R)$, một điểm A thuộc (O) và một đường thẳng d không có điểm chung với (O) . Hãy dựng đường tròn (I) tiếp xúc với (O) tại A và tiếp xúc với đường thẳng d.

Giải

Gọi d' là tiếp tuyến tại A của $(O; R)$ (h.162).

Trường hợp 1 : Nếu $d' \parallel d$.

- Kéo dài OA cắt d tại B.
- Dựng đường tròn đường kính AB thì đó là đường tròn cần dựng.

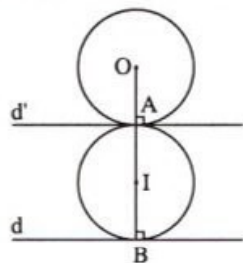
Trường hợp 2 : Nếu d' không song song với d (h.163, h.164).

- Dựng B là giao điểm của d' và d.
- Dựng Bx là tia phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d và d' (có 2 tia Bx).
- Dựng I là giao điểm của Bx và đường thẳng OA.
- Dựng đường tròn $(I; IA)$ đó là đường tròn cần dựng.

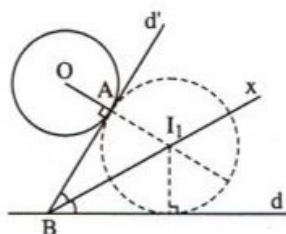
• Phân phân tích, chứng minh và biện luận dành cho bạn đọc.

Chú ý : + Trường hợp 1 có một nghiệm hình (tiếp xúc ngoài).

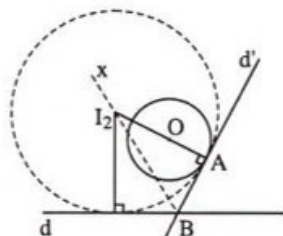
+ Trường hợp 2 có hai nghiệm (tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài).



Hình 162



Hình 163



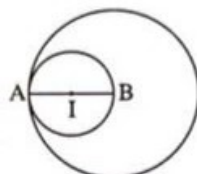
Hình 164

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(I; IA)$ và $(B; BA)$.
2. Cho hai đường tròn $(O; 8\text{cm})$ và $(O'; 3\text{cm})$. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB (với A thuộc (O) ; B thuộc (O')). Tính độ dài đoạn AB nếu $OO' = 13\text{cm}$.
3. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó và dựng các đường tròn đường kính AB, BC . Từ A vẽ tiếp tuyến AD với đường tròn đường kính BC (D là tiếp điểm), tiếp tuyến AD cắt đường tròn đường kính AB tại E ($E \neq A$). Chứng minh rằng tia BD là tia phân giác của góc EBC .
4. Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm M bất kì trên đường chéo BD ($M \neq B$; $M \neq D$). Vẽ đường tròn (O) qua M và tiếp xúc với AB tại B , vẽ đường tròn (O') qua M và tiếp xúc với AD tại D . Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại điểm thứ hai N (với $N \neq M$).
a) Chứng minh rằng $O'N$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) và ON là tiếp tuyến của đường tròn (O') .
b) Khi M di động trên BD , tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn OO' theo cạnh hình vuông $ABCD$.
5. Cho $(O; 4\text{cm})$, $(O'; 2\text{cm})$ và $OO' = 9\text{cm}$. Dựng tiếp tuyến chung trong của (O) và (O') .
6. Cho đường thẳng d . Lấy điểm O thuộc d , vẽ hai nửa đường tròn $(O; r)$ và $(O; R)$ (với $0 < r < R$) trên cùng một nửa mặt phẳng bờ d . Chứng minh rằng : điều kiện cần và đủ để có hai điểm A, D thuộc $(O; r)$ và hai điểm B, C thuộc $(O; R)$ sao cho $ABCD$ là một hình vuông là $r < R \leq r(\sqrt{2} + 1)$.

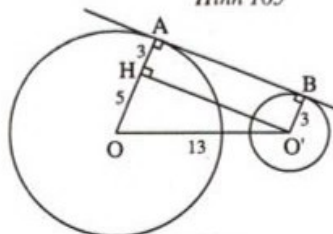
HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Ta có : *) A, I, B thẳng hàng ;
*) $BI = BA - IA$ suy ra $(I; IA)$ tiếp xúc trong với $(B; BA)$ tại A (h.165).



Hình 165

2. +) Kẻ $O'H \perp OA$ tại H (h.166)
 $\Rightarrow$ tứ giác $ABO'H$ là hình chữ nhật
 $\Rightarrow AB = O'H, AH = O'B = 3$.
+) Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle HOO'$ có :
 $O'H = \sqrt{OO'^2 - OH^2} = \sqrt{13^2 - (8-3)^2} = 12$.



Hình 166

Vậy $AB = 12\text{cm}$.

3. Kẻ tiếp tuyến chung Bx ; Bx cắt DE tại F như hình 167.

+ Vì E thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AEB} = 90^\circ$.

(1)

+ Vì BF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB tại B nên $BF \perp AB$ tại B

hay $\widehat{ABF} = 90^\circ$.

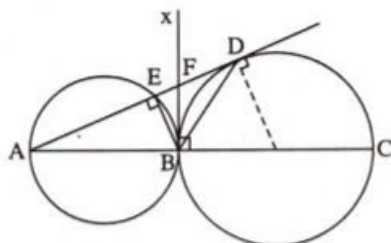
(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FAB} = \widehat{FBE}$ (cùng phụ với $\widehat{AFB}$) hay $\widehat{DAB} = \widehat{EBF}$.

+ Vì FD, FB là hai tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC nên $FD = FB$ suy ra $\triangle FDB$ cân tại F $\Rightarrow \widehat{FDB} = \widehat{FBD}$.

Do đó : $\widehat{EBD} = \widehat{EBF} + \widehat{FBD} = \widehat{DAB} + \widehat{FDB}$.

Mà $\widehat{DBC} = \widehat{FDB} + \widehat{DAB}$ (tính chất góc ngoài của $\triangle ABD$) nên $\widehat{EBD} = \widehat{DBC}$, do đó BD là tia phân giác của $\widehat{EBC}$.



Hình 167

4. a) Vì AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên tâm O của (O) phải nằm trên đường thẳng vuông góc với AB tại B. Mà $BC \perp AB$ tại B (vì ABCD là hình vuông) nên O thuộc BC (h.168).

Vì M thuộc (O) nên $OB = OM \Rightarrow \triangle OBM$ cân tại O.

$\Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{OBM} = \widehat{CBD} = 45^\circ \Rightarrow \triangle OBM$ vuông cân tại O.

$\Rightarrow \widehat{BOM} = 90^\circ$ hay $\widehat{COM} = 90^\circ$.

Tương tự ta có : $\widehat{CO'M} = 90^\circ$.

Từ đó suy ra tứ giác OCO'M là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{OMO'} = 90^\circ$.

+ Vì $\triangle OMO' = \triangle ONO'$ (c.c.c) nên $\widehat{ONO'} = \widehat{OMO'} = 90^\circ$

$\Rightarrow ON$ là tiếp tuyến của (O') và O'N là tiếp tuyến của (O).

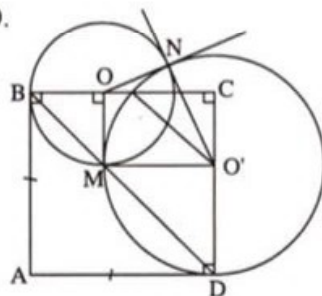
- b) Vì tứ giác OCO'M là hình chữ nhật nên $OO' = CM$.

$\Rightarrow OO'$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow CM$ nhỏ nhất.

$\Leftrightarrow CM \perp BD$ tại M

$\Leftrightarrow M$ là giao điểm của AC và BD.

Do đó : $OO'_{\min} = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (với $AB = BC = CD = DA = a$) khi M là tâm của hình vuông ABCD.



Hình 168

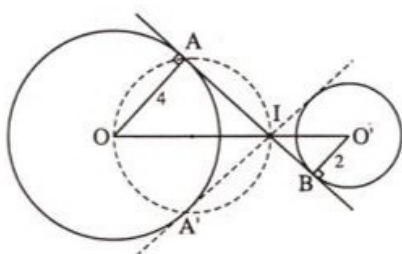
5. (h.169) + Các phần : Phân tích, chứng minh và biện luận dành cho bạn đọc.
+ Dụng điểm I là điểm chia trong của đoạn

OO' với tỉ số $\frac{R}{R'} = \frac{2}{1}$, tức là I nằm trong

$$\text{đoạn } OO' \text{ và } \frac{IO}{IO'} = \frac{R}{R'} = \frac{2}{1} \text{ hay } \frac{IO}{IO' + IO} = \frac{2}{2+1} \Leftrightarrow \frac{IO}{9} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow IO = 6 \text{ (cm).}$$

+ Dụng đường tròn đường kính IO, đường tròn này cắt đường tròn (O) tại A và A'.

+ Dụng đường thẳng AI và A'I là hai tiếp tuyến chung trong cần dựng.



Hình 169

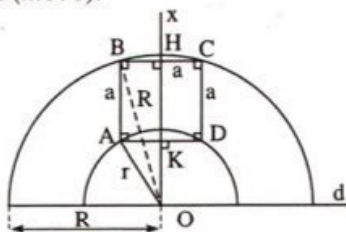
6. Kẻ $Ox \perp d$ tại O ; Ox cắt BC tại H, cắt AD tại K (h.170).

Ta có :

$$OK = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$OH = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

(với $a = AB = BC = CD = DA$).



Hình 170

$$\text{Vì } OH = OK + KH \text{ nên } \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + a.$$

$$\Rightarrow 2a^4 - 2(R^2 + r^2).a^2 + (R^2 - r^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[a^2 - \frac{1}{2}(R^2 + r^2) \right]^2 = 4R^2r^2 - (R^2 - r^2)^2. \quad (*)$$

Do đó, để tồn tại hình vuông ABCD thì phải tồn tại a

$$\Rightarrow (*) \text{ phải có nghĩa hay } 4R^2r^2 - (R^2 - r^2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4R^2r^2 \geq (R^2 - r^2)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4R^2r^2} \geq \sqrt{(R^2 - r^2)^2} \Leftrightarrow 2Rr \geq R^2 - r^2 \text{ (vì } R > r > 0)$$

$$\Leftrightarrow r^2 \geq R^2 - 2Rr \Leftrightarrow 2r^2 \geq (R - r)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}r \geq R - r$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{2})r \geq R.$$

Kết hợp với điều kiện $R > r$, ta có : $r < R \leq (1 + \sqrt{2})r$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Các định nghĩa

- 1.1. Đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0$) là hình gồm các điểm cách đều điểm O một khoảng bằng R.
- 1.2. Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

2. Các định lí

- 2.1. Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.
- 2.2. Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.
- 2.3. Trong một đường tròn :
 - a) Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.
 - b) Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.
- 2.4. Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm và ngược lại.
- 2.5. Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :
 - a) Điểm đó cách đều hai tiếp điểm ;
 - b) Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến ;
 - c) Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.
- 2.6. Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG

Phương pháp giải

- Vận dụng linh hoạt các tính chất của tiếp tuyến, quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung, tính chất đường nối tâm và dây chung của hai đường tròn, ...
- Vận dụng định lí Pi-ta-go, hệ thức lượng trong tam giác vuông, tỉ số lượng giác của góc nhọn.

Ví dụ 1. Trong hình vẽ 171, cho biết ba đường tròn (I), (K), (L) có bán kính bằng nhau và bằng 2cm ; (I) tiếp xúc với (K) ; (K) tiếp xúc với (L) và IM, NP là tiếp tuyến của (L). Tính độ dài đoạn MN.

Giải

Vì IM là tiếp tuyến của đường tròn (L) nên $IM \perp ML$ tại M

$$\Rightarrow \widehat{IML} = 90^\circ \Rightarrow \sin I = \frac{ML}{IL} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos I = \sqrt{1 - \sin^2 I} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

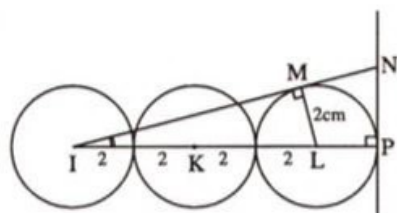
$$\text{Do đó : } \operatorname{tg} I = \frac{\sin I}{\cos I} = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } \operatorname{tg} I = \frac{NP}{IP} = \frac{NP}{10} = \frac{MN}{10} \quad (2)$$

(vì NM, NP là tiếp tuyến của (L) nên $MN = NP$).

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } \frac{MN}{10} = \frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow MN = \frac{10}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

$$\text{Vậy } MN = \frac{2\sqrt{15}}{3} \text{ (cm).}$$



Hình 171

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn (O_1 ; 13cm) và (O_2 ; 15cm) cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN = 24$ cm. Tính độ dài đoạn nối tâm O_1O_2 .

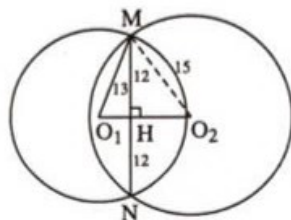
Giải

Ta xét hai trường hợp sau :

Trường hợp 1 : O_1 và O_2 nằm khác phía so với dây chung MN (h.172). Vì O_1O_2 là đường trung trực của MN nên $O_1O_2 \perp MN$ tại H và $MH = NH = \frac{1}{2}MN = 12$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔO_1MH có :

$$O_1H = \sqrt{O_1M^2 - MH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$



Hình 172

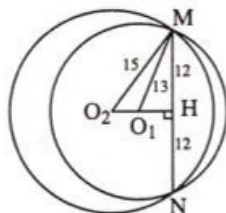
Tương tự có : $O_2H = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.

$$\Rightarrow O_1O_2 = O_1H + O_2H = 5 + 9 = 14 \text{ (cm)}.$$

Trường hợp 2 : O_1 và O_2 nằm cùng phía so với dây chung MN (h.173). Tính toán tương tự như trên ta có :

$$\begin{aligned} O_1O_2 &= O_2H - O_1H \\ &= 9 - 5 \\ &= 4 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

Vậy $O_1O_2 = 14\text{cm}$ hoặc $O_1O_2 = 4\text{cm}$.



Hình 173

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O ; 6cm) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến MN và MP với (O) (N, P các là tiếp điểm). Lấy điểm T bất kì trên đường tròn (O) sao cho T và O nằm khác phía với NP . Vẽ tiếp tuyến tại T của (O) cắt MN, MP lần lượt tại E và F . Nếu $MO = 10\text{cm}$, tính chu vi tam giác MEF .

Giải

Ta có MN là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow MN \perp NO$ tại N (h.174).

Áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔMNO có :

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{MO^2 - ON^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

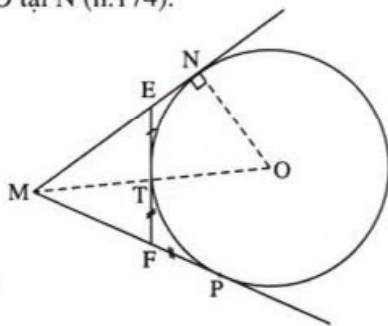
Vì MN, MP là tiếp tuyến của (O) nên $MN = MP$;

EN, ET là tiếp tuyến của (O) nên $EN = ET$;

FT, FP là tiếp tuyến của (O) nên $FT = FP$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } ME + EF + MF &= ME + ET + FT + MF \\ &= ME + EN + FP + MF \\ &= MN + MP \\ &= 2MN = 2 \cdot 8 = 16 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

Vậy chu vi ΔMEF bằng 16cm .



Hình 174

Dạng 2. CHỨNG MINH HỆ THỨC – TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Phương pháp giải

- Vận dụng linh hoạt các tính chất, định lí trong chương II.

Ví dụ 1. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Trên đoạn OB lấy điểm N sao cho $BN = 2ON$. Đường trung trực của đoạn thẳng CN cắt OA tại M.

Chứng minh rằng : $OA = 3AM$.

Giải

Ta có AB, AC là tiếp tuyến của (O) nên $AB = AC$

và $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ hay $\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$

$$\Rightarrow \triangle MAB = \triangle MAC \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow MB = MC. \quad (1)$$

Vì M thuộc đường trung trực d của NC nên

$$MN = MC. \quad (2)$$

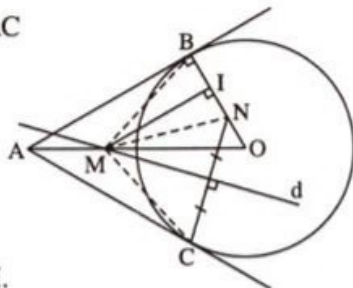
Từ (1) và (2) $\Rightarrow MB = MN \Rightarrow \triangle MBN$ cân tại M.

Lấy I là trung điểm của BN $\Rightarrow MI \perp BN$ tại I.

$$\text{Vì } BN = 2ON \text{ nên } BI = IN = NO = \frac{1}{3}BO.$$

Vì AB là tiếp tuyến của (O) nên $AB \perp BO$ tại B.

$$\text{Do đó } AB \parallel MI \Rightarrow \frac{AM}{AO} = \frac{BI}{BO} = \frac{1}{3} \Rightarrow AO = 3AM.$$



Hình 175

Ví dụ 2. Cho đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA và AB. Kẻ DH vuông góc với EF tại H. Chứng minh rằng tia HD là tia phân giác của góc BHC.

Giải

$$\text{Ta sẽ chứng minh } \frac{BD}{DC} = \frac{BH}{HC} \quad (\text{h.176}).$$

Kẻ $BK \perp EF$ tại K, $CL \perp EF$ tại L.

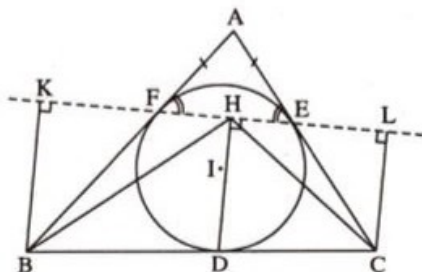
Vì AE, AF là tiếp tuyến của (I) nên

$$AE = AF \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AFE}.$$

Do đó : $\widehat{BFK} = \widehat{CEL}$ (vì đối đỉnh với hai góc bằng nhau)

$$\Rightarrow \triangle BKF \sim \triangle CLE \quad (\text{g-g})$$

$$\Rightarrow \frac{BK}{CL} = \frac{BF}{CE}. \text{ Mà } BF = BD, CD = CE \text{ nên } \frac{BK}{CL} = \frac{BD}{DC}. \quad (1)$$



Hình 176

Vì $BK \perp EF$, $DH \perp EF$, $CL \perp EF$ nên $BK \parallel DH \parallel CL$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{KH}{HL}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BD}{DC} = \frac{BK}{CL} = \frac{KH}{HL}$.

Xét $\triangle BKH$ và $\triangle CLH$ có :

$$\widehat{BKH} = \widehat{CLH} = 90^\circ$$

$$\frac{KB}{CL} = \frac{KH}{LH} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle BKH \sim \triangle CLH \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{BK}{CL} = \frac{KH}{LH}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra : $\frac{BD}{DC} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow$ tia HD là tia phân giác của $\widehat{BHC}$.

Ví dụ 3. Trong hình vẽ 177, cho biết AB là tiếp tuyến chung ngoài ; CD là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn (O) và (O') . Chứng minh rằng : $AC \perp BD$.

Giải

+ Gọi I là giao điểm của AC và BD .

+ Gọi giao điểm của hai đường thẳng AB và CD là M (h.178). Vì MA , MC là tiếp tuyến của (O) nên OM là đường trung trực của đoạn AC và

$$\widehat{AMO} = \widehat{CMO} = \frac{1}{2} \widehat{AMC}$$

$$\Rightarrow OM \perp AC \text{ tại } H.$$

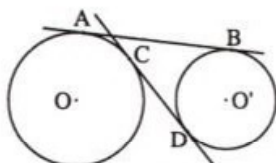
Tương tự : $O'M \perp BD$ tại K và $\widehat{DMO'} = \widehat{BMO'} = \frac{1}{2} \widehat{DMB}$

$$\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{OMO'} = \widehat{OMC} + \widehat{DMO'}$$

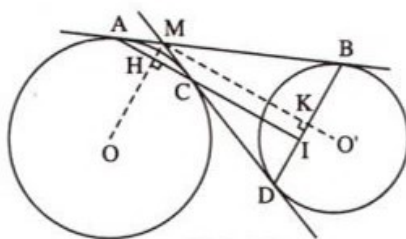
$$= \frac{1}{2} \widehat{AMC} + \frac{1}{2} \widehat{DMB} = \frac{1}{2} (\widehat{AMC} + \widehat{DMB}) = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $HMKI$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow \widehat{HIK} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BD.$$



Hình 177



Hình 178

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(O ; R)$ và đường thẳng d cố định (d và (O) không có điểm chung). Lấy ba điểm M, N, P phân biệt trên d . Từ M, N, P lần lượt kẻ các tiếp tuyến MA, MB, NC, ND, PE và PF đến (O) (với A, B, C, D, E, F là các tiếp điểm). Chứng minh rằng ba đường thẳng AB, CD và EF đồng quy.

Giải

Ta sẽ chứng minh AB, CD và EF cùng đi qua một điểm cố định. Do vai trò của M, N, P như nhau nên ta chỉ cần chứng minh AB đi qua một điểm cố định I . Từ đó suy ra CD và EF cũng đi qua I . Kẻ $OH \perp d$ tại $H \Rightarrow H$ cố định. Gọi I là giao điểm của AB với OH ; K là giao điểm của AB với OM .

Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $OM \perp AB$ tại K

$$\Rightarrow \triangle IOK \sim \triangle OMH \text{ (g-g)}.$$

$$\Rightarrow IO.OH = OM.OK.$$

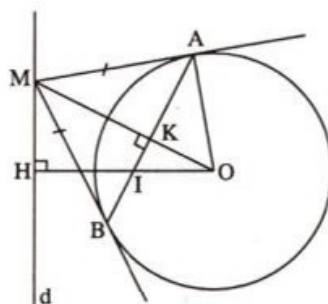
Mặt khác, trong tam giác vuông OMA có :

$$OK.OM = OA^2 = R^2$$

$$\Rightarrow OI.OH = R^2 \Rightarrow OI = \frac{R^2}{OH} \Rightarrow I \text{ cố định.}$$

Vậy AB, CD và EF đồng quy tại I với I

thuộc đoạn OH và $OI = \frac{R^2}{OH}$.



Hình 179

Dạng 3. CỤC TRỊ HÌNH HỌC

Phương pháp giải

- Vận dụng : + Quan hệ đường vuông góc và đường xiên ;
- + Quan hệ đường kính và dây cung ;
- + Bất đẳng thức tam giác (quy tắc ba điểm) ;
- + Bất đẳng thức đại số.

Ví dụ 1. Cho điểm A và đường tròn $(O ; R)$ cố định ($OA > R$). Tìm điểm M thuộc (O) sao cho :

a) AM lớn nhất ;

b) AM nhỏ nhất.

Giải

Kẻ AO cắt (O) tại B, C (với $AB < AC$) $\Rightarrow B, C$ cố định (h.180).

a) Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào ba điểm A, O, M có :

$AM \leq OA + OM$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ O nằm giữa A và M)

$\Leftrightarrow AM \leq OA + OC$ (vì $OM = OC = R$)

$\Leftrightarrow AM \leq AC$

$\Rightarrow \max AM = AC$ khi M trùng C.

b) Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào ba điểm A, O, M có :

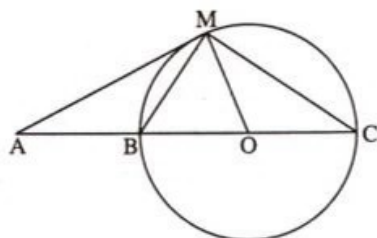
$AM \geq AO - OM$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ M nằm giữa A và O)

$\Leftrightarrow AM \geq AO - OB$ (vì $OM = OB = R$)

$\Leftrightarrow AM \geq AB$

$\Rightarrow \min AM = AB$ khi M trùng B.

Chú ý : Nếu đặt $d = OA$ ta có : $d - R \leq AM \leq d + R$.



Hình 180

Ví dụ 2. Cho ΔABC nội tiếp (O ; R). Gọi S là diện tích của ΔABC . Chứng minh

rằng $S \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Giải

Vẽ $AH \perp BC$ tại H, $OK \perp BC$ tại K (h.181).

Đặt $OK = x \Rightarrow BK = \sqrt{R^2 - x^2}$

$\Rightarrow BC = 2BK = 2\sqrt{R^2 - x^2}$.

Ta có $AH \leq AK$ (quan hệ đường vuông góc và đường xiên)

$AK \leq AO + OK$ (quy tắc ba điểm)

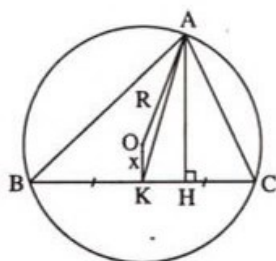
$\Rightarrow AH \leq AO + OK = R + x$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ A, O, K thẳng hàng (O nằm giữa A và K).

Do đó : $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC \leq \frac{1}{2}(R + x) \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} = (R + x) \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$.

Ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức đại số

$$S = (R + x) \cdot \sqrt{R^2 - x^2}.$$



Hình 181

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } S &= \sqrt{(R+x)^2 \cdot (R-x)(R+x)} \\
&= \sqrt{(R+x)^3 (R-x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(R+x)(R+x)(R+x)(3R-3x)} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{(R+x) + (R+x) + (R+x) + (3R-3x)}{4} \right]^2 \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{9R^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow R+x = 3R-3x$

$$\Leftrightarrow x = \frac{R}{2}.$$

Suy ra : $S_{\Delta ABC} \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{R}{2} \\ O \text{ nằm giữa A và K} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Chú ý : Với a, b, c, d không âm, ta có :

a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$);

b) $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d$).

Dạng 4. TẬP HỢP ĐIỂM – ĐIỂM NẸM TRÊN MỘT ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

Phương pháp giải

- Vận dụng : + Định nghĩa đường tròn, các cách xác định đường tròn ;
- + Đường thẳng song song cách đều,

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và dây BC cố định (BC không đi qua O). Lấy điểm A thuộc (O) sao cho A và O thuộc cùng một phía so với BC. Lấy M là trung điểm của AB, vẽ MH vuông góc với AC tại H. Chứng minh rằng H nằm trên một đường tròn cố định khi A di động trên (O).

Giải

Kẻ đường kính CD của (O) $\Rightarrow$ D cố định (h.182).

Lấy N là trung điểm của BD $\Rightarrow$ N cố định.

Vì M là trung điểm của AB

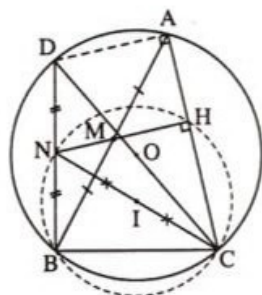
N là trung điểm của BD

nên MN là đường trung bình của $\triangle BAD \Rightarrow NM \parallel DA$.

Mà $DA \perp AC$ (vì CD là đường kính) nên $NM \perp AC$.

Từ đó suy ra ba điểm N, M, H thẳng hàng

(vì $MH \perp AC$).



Hình 182

Gọi I là trung điểm của NC, vì N, C cố định nên I cố định và $IN = \frac{1}{2}NC = R$ (không đổi).

Xét $\triangle NHC$ vuông tại H và trung tuyến HI ứng với cạnh huyền NC nên

$HI = \frac{1}{2}NC = R$ (không đổi) $\Rightarrow H \in (I; R)$ cố định (với $R = \frac{1}{2}NC$).

Vậy khi A di động trên (O) thì H chạy trên một đường tròn cố định.

Ví dụ 2. Cho A, B nằm ngoài đường tròn (O; R) cố định (đường thẳng AB không có điểm chung với (O)). Lấy M bất kì trên (O), gọi G là trọng tâm $\triangle MAB$. Chứng minh rằng G chạy trên một đường tròn cố định khi M di động trên (O).

Giải

Lấy I là trung điểm của AB $\Rightarrow$ I cố định (h.183).

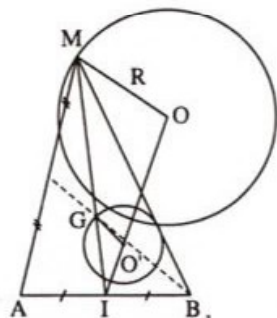
Qua G kẻ GO' song song với OM (O' thuộc IO).

Ta có: $GO' \parallel MO$ nên $\frac{IO'}{IO} = \frac{O'G}{OM} = \frac{IG}{IM}$.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABM$ nên $\frac{IG}{IM} = \frac{1}{3}$ nên $\frac{O'G}{OM} = \frac{1}{3} = \frac{IO'}{IO}$

$$\Rightarrow O'G = \frac{1}{3}OM = \frac{1}{3}R$$

$$IO' = \frac{1}{3}IO \Rightarrow O' \text{ cố định (vì I, O cố định)}$$



Hình 183

Suy ra G thuộc $\left(O'; \frac{1}{3}R\right)$.

Vậy khi M di động trên $(O; R)$ thì G chạy trên một đường tròn cố định.

Chú ý : Ta có thể thay yêu cầu bài toán bằng câu hỏi : Tìm vị trí của điểm M để độ dài đoạn GA lớn nhất (hoặc nhỏ nhất).

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định thuộc (O) . Vẽ tiếp tuyến d tại A của (O) . Lấy M bất kỳ thuộc d , gọi N là trung điểm của đoạn OM . Chứng minh rằng khi M di động trên d thì N chạy trên một đường cố định.

Giải

Vì d là tiếp tuyến của (O) tại A nên $OA \perp d$ tại A (h.184).

Gọi I là trung điểm của đoạn OA .

Trường hợp 1 : M trùng A .

Vì M trùng A nên N trùng I .

Trường hợp 2 : M khác A .

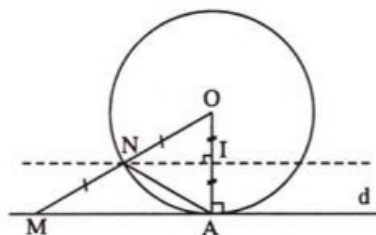
Xét tam giác vuông OAM có trung tuyến AN ứng với cạnh huyền OM nên

$$AN = \frac{1}{2}OM = ON = OA$$

$$\Rightarrow NA = NO \left(= \frac{1}{2}MO \right)$$

$\Rightarrow N$ thuộc đường trung trực của đoạn OA (cố định vì O, A cố định).

Vậy khi M di động trên d thì N chạy trên một đường thẳng cố định.



Hình 184

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D sao cho $AC = AD$. Gọi M là trung điểm của OO' . Chứng minh rằng đường tròn $(M; MA)$ tiếp xúc với CD .
- Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Vẽ $AH \perp MB, BK \perp MA$ ($H \in MB, K \in MA$). Gọi C là giao điểm của AH và BK . Chứng minh rằng :
 - Tứ giác $AOBC$ là hình thoi ;
 - Ba điểm M, O, C thẳng hàng.

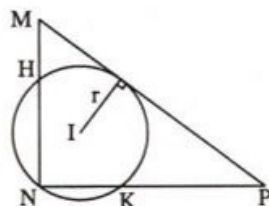
3. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Qua A vẽ một đường thẳng cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt tại B và C . Từ B vẽ tiếp tuyến Bx với (O) và từ C vẽ tiếp tuyến Cy với (O') . Chứng minh rằng $Bx \parallel Cy$.

4. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in (O)$ và $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung tại A cắt BC tại M .

a) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.

b) Chứng minh rằng $\triangle OMO'$ vuông.

5. Trong hình 185, tam giác MNP có $MP = 5$, $NP = 4$, $MN = 3$. Đường tròn (I) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất đi qua N và tiếp xúc với MP . Gọi H và K lần lượt là giao điểm của (I) với MN và NP (khác N). Tính độ dài đoạn HK .



Hình 185

6. Cho đường tròn bán kính r nội tiếp một tam giác vuông cân và cho đường tròn bán kính R ngoại tiếp tam giác ấy. Khi đó, tỉ số $\frac{r}{R}$ bằng bao nhiêu ?

7. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường thẳng AO, BO, CO lần lượt cắt BC, CA, AB tại A', B', C' . Chứng minh rằng : $OA' + OB' + OC' \geq \frac{3R}{2}$.

8. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm) ; D là một điểm tùy ý trên cung nhỏ BC . Tiếp tuyến tại D của đường tròn cắt đường trung trực của đoạn thẳng AD ở E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Gọi H là giao điểm của OA và BC .

Chứng minh rằng : a) $\triangle ODH \sim \triangle OAD$;

b) Ba điểm M, E, N thẳng hàng.

9. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) , ta kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là một điểm bất kì trên đường thẳng đi qua các trung điểm của AB, AC . Kẻ tiếp tuyến MK với (O) . Chứng minh rằng : $MK = MA$.

10. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ tiếp xúc ngoài tại A . BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (B thuộc (O_1) , C thuộc (O_2)). Tính độ dài các cạnh của $\triangle ABC$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Kẻ $OH \perp AC$ tại H, $O'K \perp AD$ tại K (h.186)

$$\Rightarrow HA = HC = \frac{1}{2} CA ;$$

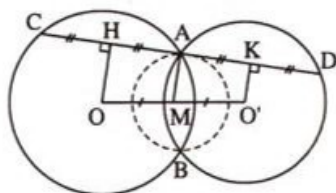
$$KA = KD = \frac{1}{2} AD.$$

Mà $AC = AD$ (giả thiết) nên $AH = AK$

$\Rightarrow MA$ là đường trung bình của hình thang $OHKO'$

$\Rightarrow MA \perp HK \Rightarrow MA \perp CD$

$\Rightarrow CD$ tiếp xúc với $(M; MA)$.



Hình 186

2. a) Ta có MA là tiếp tuyến của (O) (h.187)

$\Rightarrow OA \perp MA$ tại A

$\Rightarrow OA \parallel BC$ (vì cùng vuông góc với AM).

Tương tự có $OB \parallel CA$

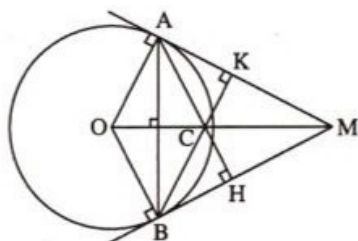
$\Rightarrow OACB$ là hình bình hành.

Mà $OA = OB = R$ nên $OACB$ là hình thoi.

- b) Vì $OACB$ là hình thoi nên $OC \perp AB$.

Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $OM \perp AB$

$\Rightarrow O, C, M$ thẳng hàng.



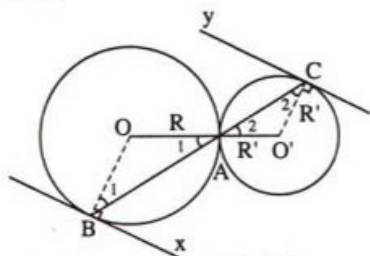
Hình 187

3. Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_2}$$

$$\Rightarrow OB \parallel O'C \text{ (h.188).}$$

Vì $Bx \perp OB, Cy \perp O'C$ nên $Bx \parallel Cy$.



Hình 188

4. a) Ta có $MA = MB; MA = MC$

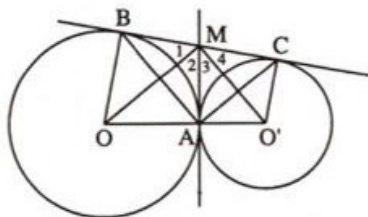
$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A (h.189).

- b) Ta có: $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}; \widehat{M_3} = \widehat{M_4}$.

Mà $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} + \widehat{M_3} + \widehat{M_4} = 180^\circ$ nên

$$\widehat{OMO'} = \widehat{M_2} + \widehat{M_3} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle MOO'$ vuông tại M.



Hình 189

Chú ý : Ta đã sử dụng bất đẳng thức đại số “rất quen thuộc” là

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \text{ với mọi } a, b, c > 0.$$

8. (h.193) a) Ta có : $OH.OA = OB^2 = R^2 = OD^2$

$$\Rightarrow \frac{OD}{OH} = \frac{OA}{OD}$$

$$\Rightarrow \triangle OHD \sim \triangle ODA \text{ (c-g-c)}.$$

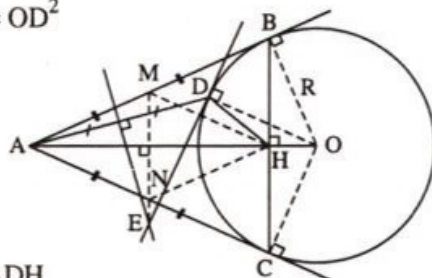
- b) Từ $\triangle OHD \sim \triangle ODA$

$$\Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OAD}$$

$$\Rightarrow E \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp } \triangle ADH$$

$$\Rightarrow EA = EH$$

$$\Rightarrow E \text{ thuộc đường trung trực của } AH.$$



Hình 193

Mà M, N thuộc đường trung trực của AH nên ba điểm M, E, N thẳng hàng.

9. Gọi I là giao điểm của OA với BC (h.194).

Gọi E, F tương ứng là trung điểm của AB, AC.

Gọi H là giao điểm của OA và EF.

$$\text{Ta có : } MK^2 = MO^2 - OK^2$$

$$= OH^2 + MH^2 - OK^2.$$

$$\text{Ta có : } AM^2 = AH^2 + MH^2$$

$$\Rightarrow MK^2 - AM^2 = (OH^2 - AH^2) - OK^2$$

$$= (OH - AH)(OH + AH) - OC^2 \text{ (vì } OC = OK = R)$$

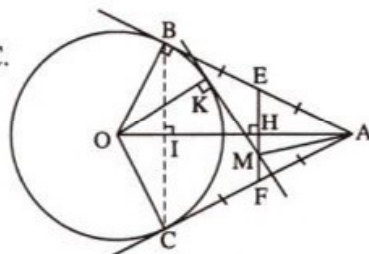
$$= (OI + IH - AH).OA - OC^2$$

$$= OI.OA - OC^2 \text{ (vì } IH = AH).$$

Mặt khác, trong tam giác vuông OAC có

$$OC^2 = OI.OA \text{ nên ta có } MK^2 - AM^2 = 0$$

$$\Rightarrow MK = MA.$$



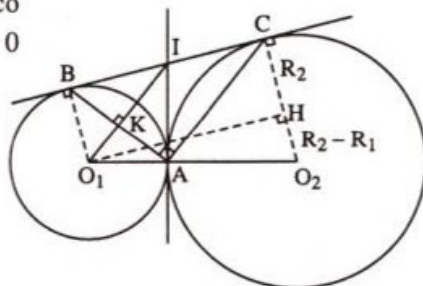
Hình 194

10. Giả sử $R_2 > R_1$ (h.195).

$$\text{Đặt } O_1O_2 = d = R_1 + R_2.$$

Ta có :

$$BC = O_1H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2}$$



Hình 195

$$= \sqrt{d^2 - (R_2 - R_1)^2}$$

$$= \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_2 - R_1)^2} = 2\sqrt{R_1 R_2}.$$

Vẽ tiếp tuyến chung của (O_1) , (O_2) tại A cắt BC tại I

$\Rightarrow O_1 I \perp AB$ tại K.

$$\Rightarrow KA = KB = \frac{1}{2} AB \text{ và } IB = IC = \frac{1}{2} BC = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Áp dụng hệ thức $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ vào $\Delta O_1 B I$ có :

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{O_1 B^2} + \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1^2 R_2}$$

$$\Rightarrow BK = \sqrt{\frac{R_1^2 R_2}{R_1 + R_2}} = R_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$\Rightarrow AB = 2BK = 2R_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Dễ thấy ΔABC vuông tại A nên

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4R_1 R_2 - \frac{4R_1^2 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4R_1 R_2^2}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow AC = 2R_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}.$$

$$\text{Vậy } BC = 2\sqrt{R_1 R_2} ; AB = 2R_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} ; AC = 2R_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}.$$

MỤC LỤC

Lời nói đầu	3
-------------	---

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I. CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

§1. Căn bậc hai	5
§2. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = A $	5
§3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương	15
§4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương	27
§6. §7. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai	34
§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai	48
§9. Căn bậc ba	65
Ôn tập chương I	72

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

§1. Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số	85
§2. Hàm số bậc nhất	85
§3. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)	101
§4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau	111
§5. Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)	121
Ôn tập chương II	127

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông	137
§2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn	146
§4. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông	163
§5. Ứng dụng thực tế các tỉ số lượng giác của góc nhọn	163
Ôn tập chương I	173

Chương II. ĐƯỜNG TRÒN

§1. Sự xác định đường tròn	185
§2. Đường kính và dây của đường tròn	192
§3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây	192
§4. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	206
§5. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn	212
§6. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau	212
§7. §8. Vị trí tương đối của hai đường tròn	227
Ôn tập chương II	240

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

Giám đốc Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

Biên tập lần đầu và tái bản :

ĐẶNG VĂN TUYẾN

Trình bày bìa :

LƯƠNG QUỐC HIỆP

Sửa bản in :

ĐẶNG VĂN TUYẾN

Biên tập kỹ thuật :

NGUYỄN NAM THÀNH

Chế bản :

CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TOÁN 9 - TẬP MỘT

Mã số : T9T78h3-NBE

Số đăng ký KHXB : 11-2013/CXB/130-1947/GD

In 3.000 cuốn (QĐ in số: 01TK), khổ 17 x 24cm.

In tại Công ty TNHH MTV In Quân đội 1. Số in: 3033.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2013.