

MỤC LỤC

PHẦN THỨ NHẤT: ĐẶT VẤN ĐỀ.....	1
I. Cơ sở khoa học của vấn đề.	1
1. Cơ sở lí luận.	1
2. Cơ sở thực tiễn	1
II. Mục đích viết sáng kiến kinh nghiệm.	1
III. Đối tượng nghiên cứu, phạm vi nghiên cứu và áp dụng đề tài.....	2
1. Đối tượng nghiên cứu:	2
2. Phạm vi nghiên cứu và áp dụng đề tài:	2
3. Phương pháp nghiên cứu:	2
PHẦN THỨ HAI: QUÁ TRÌNH TRIỂN KHAI THỰC HIỆN.....	2
I. Tình trạng khi chưa thực hiện đề tài.	2
2. Số liệu điều tra trước khi thực hiện.	2
II. Các biện pháp thực hiện.	3
1. Chuẩn bị của giáo viên và học sinh.....	3
III. Nội dung đề tài:	4
1. Phương pháp giúp học sinh tiếp cận dạng toán phương trình vô tỷ trong bài thi vào lớp 10 THPT.....	4
2. Nội dung cụ thể:	4
III. Kết quả thực hiện có so sánh đối chứng.	18
PHẦN THỨ BA: KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ SAU QUÁ TRÌNH THỰC HIỆN.	19
I. Kết luận.....	19
II. Những khuyến nghị sau quá trình thực hiện đề tài.....	19
1. Đối với giáo viên dạy toán:	19
2. Đối với nhà trường:	19
3. Đối với phòng giáo dục	19
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	21

PHẦN THỨ NHẤT: ĐẶT VẤN ĐỀ

I. Cơ sở khoa học của vấn đề.

1. Cơ sở lí luận.

Trong chương trình toán phổ thông, phương trình vô tỷ là một trong những dạng toán quan trọng, thường xuyên có mặt trong các đề kiểm tra định kỳ hay đề thi tuyển sinh vào các cấp. Qua việc giải các bài toán phương trình vô tỷ, học sinh học được rèn luyện nhiều loại hình tư duy khác nhau: phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hóa, đặc biệt hóa, trừu tượng hóa, cụ thể hóa và qua đó kích thích được năng lực sáng tạo, tích cực, chủ động của học sinh.

Chuyên đề phương trình vô tỉ lớp 9 nâng cao là một phần trong chương trình toán học thú vị và thách thức cho học sinh. Việc học phương trình vô tỉ không chỉ giúp các em rèn luyện kỹ năng giải toán mà còn khuyến khích sự sáng tạo, logic và tư duy phản biện. Chuyên đề này với những dạng toán phức tạp sẽ giúp học sinh khám phá thêm về toán học và phát triển khả năng giải quyết vấn đề.

2. Cơ sở thực tiễn

Trong đề thi vào 10 THPT, có rất nhiều câu hỏi ở các chủ đề khác nhau với các cấp độ khác nhau. Trong các câu phân loại ở mức cao nhất, phương trình vô tỉ là một trong những dạng toán có mặt và đã được đưa vào đề thi tuyển sinh vào các năm 2009-2010, 2010-2011 và gần đây nhất là 2020-2021. Bài phương trình vô tỉ phân loại cấp độ cao nhất trong đề thi vào 10 Hà Nội thường chiếm từ 0,5 điểm. Đây là một trong những bài toán phân loại học sinh một cách rõ nét nhất. Đa phần các em sẽ không làm được ý này, rất ít học sinh có thể làm được ý cuối cùng.

Phương trình vô tỷ ở mức độ này ngoài việc học sinh cần đầu tư thời gian, tư duy thì cần có cách tiếp cận thích hợp. Đặc biệt dạng toán này gồm rất nhiều các dạng toán con, khiến cho học sinh nếu không có cái nhìn tổng quát sẽ khó khăn để tiếp cận lời giải. Điều này đòi hỏi khi dạy toán và học toán, đối với giáo viên ngoài việc hướng dẫn học sinh làm bài tập cần tạo được thói quen, trang bị cho học sinh phân loại các dạng cùng các bài toán cơ bản (bài toán đơn vị) để giúp người học hiểu sâu sắc kiến thức, phát triển tư duy sáng tạo và tiếp thu tốt những kiến thức mới và gây hứng thú với học sinh trong dạng toán này.

II. Mục đích viết sáng kiến kinh nghiệm.

Khi chọn đề tài: ***“phương pháp giúp học sinh tiếp cận dạng toán phương trình vô tỷ trong bài thi vào lớp 10- THPT”***, tôi muốn đưa ra một số kinh nghiệm của mình trong quá trình giảng dạy, tích lũy mà tôi đã thực hiện trong những năm qua, nhằm nâng cao hơn nữa chất lượng dạy học giúp các em có cái nhìn tổng quát, nắm được các dạng thường gặp từ đó có cơ hội giải được cao hơn trong kì thi vào lớp 10 THPT.

Đề tài này giúp học sinh:

- Nắm chắc kiến thức cơ bản; nắm vững các dạng toán cơ bản, các bài toán cơ bản, các kỹ thuật sử dụng để giải phương trình vô tỉ.
- Rèn luyện kỹ năng quan sát, kỹ năng khai thác, kỹ năng biến đổi và xử lý bài toán.
- Nâng cao năng lực tư duy, biết cách học toán, giải toán một cách thông minh, sáng tạo.

III. Đối tượng nghiên cứu, phạm vi nghiên cứu và áp dụng đề tài.

1. Đối tượng nghiên cứu:

Các dạng toán trong chủ đề phương trình vô tỷ.

2. Phạm vi nghiên cứu và áp dụng đề tài:

Đề tài này tôi xin được đề cập đến các kết quả, các dạng toán từ cơ bản tới nâng cao.

Đề tài được áp dụng từ tháng 9 năm 2023 đến tháng 3 năm 2024.

3. Phương pháp nghiên cứu:

- Nghiên cứu tài liệu.
- Kinh nghiệm giảng dạy.
- Trao đổi với đồng nghiệp.
- Thống kê kết quả, so sánh và đối chứng.

PHẦN THỨ HAI: QUÁ TRÌNH TRIỂN KHAI THỰC HIỆN

I. Khảo sát thực tế.

1. Tình trạng khi chưa thực hiện đề tài.

- **Về phía giáo viên:** tuy đã có nhiều cố gắng trong giảng dạy nhưng thời gian không đáp ứng được yêu cầu của dạng toán.

- **Về phía học sinh:** Đối với học sinh bậc THCS hiện nay thì thời gian ở trên lớp không đủ để học sinh có thể học chủ đề này một cách đầy đủ nhất, nguồn tài liệu hiện nay ở trên mạng quá nhiều khiến cho học sinh khó khăn khi chọn lựa.

Những vấn đề này có nhiều lý do: dạng toán này khó nên nhiều học sinh bỏ qua, tập trung cho các dạng toán dễ hơn; một số học sinh có tư duy nhưng chưa có phương pháp, hệ thống bài toán để tiếp cận.

2. Số liệu điều tra trước khi thực hiện.

Trước khi triển khai chuyên đề tôi đã tiến hành thử nghiệm với các em học sinh khá, giỏi của khối lớp 9 thông qua bài tập sau:

Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = x^2 + 1$. (Đề TS 10 HN 2020-2021).

- **Kết quả trước khi áp dụng đề tài: (số học sinh làm được)**

Tổng số học sinh	Giỏi		Khá	
	SL	%	SL	%
34	1	2,9	0	0

• **Nhận xét:**

Hầu hết học sinh khá giỏi đều gặp khó khăn ở bài toán này nếu chưa có kinh nghiệm cũng như phương pháp giải.

II. Các biện pháp thực hiện.

1. Chuẩn bị của giáo viên và học sinh.

1.1. Đối với giáo viên.

Để giúp học sinh vượt qua các dạng toán khó, rèn kỹ năng giải toán, phát triển các năng lực tư duy sáng tạo giáo viên phải chú ý một số vấn đề cơ bản sau:

- Thường xuyên học tập để nâng cao trình độ chuyên môn.
- Nghiên cứu kỹ sách giáo khoa, sách giáo viên và một số tài liệu có liên quan đến bài học.
- Lập kế hoạch dạy học cho từng bài, từng chương.
- Động viên khuyến khích, tạo cơ hội, điều kiện cho học sinh tham gia vào quá trình dạy – học một cách tích cực, giúp các em phát triển tối đa năng lực, tiềm năng ở bản thân.
- Hướng dẫn học sinh kỹ năng đọc, nghiên cứu sgk và sách tham khảo.
- Giáo viên phải thiết kế, tổ chức, hướng dẫn học sinh thực hiện các hoạt động học tập với hình thức đa dạng, phong phú, có sức hấp dẫn phù hợp với đặc trưng bài học với đặc điểm và trình độ nhận thức của học sinh.
- Sử dụng các phương pháp và các hình thức tổ chức dạy học một cách hợp lý, hiệu quả linh hoạt, phù hợp với đặc trưng của môn học, tính chất của bài học, đặc điểm và phù hợp với trình độ của học sinh.
- Đặc biệt phải chú ý đến khâu soạn giáo án: Giáo án phải xây dựng kế hoạch bài dạy theo quan điểm đổi mới. Trong giáo án cần thiết kế đủ các hoạt động của cả giáo viên và học sinh trong quá trình dạy – học.

1.2. Đối với học sinh.

Để học sinh tích cực, chủ động, tự tin, say mê hứng thú , giải tốt các bài toán phương trình vô tỷ học sinh phải chú ý một số vấn đề sau:

- + Nắm vững các các dạng toán phương trình vô tỷ cơ bản
- + Học sinh cần được làm nhiều bài tập từ cơ bản tới nâng cao, nhiều dạng bài
- + Học sinh trình bày bài rõ ràng chặt chẽ

+ Học sinh nắm vững kỹ thuật giải các dạng toán thường gặp, biến đổi thành thạo để đưa các dạng lạ về quen.

III. Nội dung đề tài:

1. Phương pháp giúp học sinh tiếp cận dạng toán phương trình vô tỷ trong bài thi vào lớp 10 THPT

Để giải quyết tốt các phương trình vô tỷ, ngoài việc người học cần nắm vững các phương pháp giải các phương trình vô tỷ cơ bản, học sinh cần nắm được các dạng toán nâng cao khác cùng với cách quan sát, nhận dạng, các kỹ thuật, và kinh nghiệm xử lý tương ứng.

Để người học nắm vững, các bài tập cần được sắp xếp từ cơ bản tới nâng cao và các ý trước có liên quan tới ý sau giúp người học nhìn được hệ thống các bài toán, sự khác nhau về các kiểu biến hóa của dạng toán.

2. Nội dung cụ thể:

1.2) Dạng 1. Các phương trình vô tỷ cơ bản và cách giải

+ $\sqrt{A} = B$. Điều kiện có nghiệm: $B \geq 0$.

Phương trình tương đương với $A = B^2$.

+ $\sqrt{A} = \sqrt{B}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ B \geq 0 \end{cases}.$$

$$+ \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x) \end{cases}$$

(không cần điều kiện của $h(x)$).

$$+ \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$+ \sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 1. Giải phương trình $x - \sqrt{2x+3} = 0$.

Lời giải. Phương trình tương đương với:

$$\sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x^2-4} = 0$

$$\text{HD:ĐK: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 3\sqrt{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \cdot (1-3\sqrt{x+2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ (1-3\sqrt{x+2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-17}{9} \end{cases} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được: $x = 2$

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

$$\text{Lời giải. Điều kiện: } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Phương trình tương đương với:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy $S = \{0\}$.

Bài 4. Giải phương trình: $x = \sqrt{\sqrt{3x^2+1}-1}$.

$$\text{Lời giải. Phương trình tương đương với: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \sqrt{3x^2+1}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{3x^2+1} = x^2+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2+1 = (x^2+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2(x^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy $S = \{0;1\}$.

Bài 5. Giải phương trình: $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$.

Lời giải. Ta có: $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = -x^2 + 3x - 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ 2x-1 = (-x^2 + 3x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ (x-1)^2(x^2 - 4x + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ x = 1 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Vậy $S = \{1; 2 - \sqrt{2}\}$

2.2) Dạng 2: Đưa về phương trình trị tuyệt đối

Sử dụng hằng đẳng thức Sau:

$$:\sqrt{f^2(x)} = g(x) \Leftrightarrow |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) & (f(x) \geq 0) \\ f(x) = -g(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8$ (1)

HD: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 8-x \Leftrightarrow |x-2| = 8-x$

– Nếu $x < 2$: (1) $\Rightarrow 2-x = 8-x$ (vô nghiệm)

– Nếu $x \geq 2$: (1) $\Rightarrow x-2 = 8-x \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn) Vậy: $x = 5$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} - 6\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1}$ (2)

HD: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + 1 + \sqrt{x+1} - 2.3\sqrt{x+1} + 9 = 2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} + 1 + |\sqrt{x+1} - 3| = 2|\sqrt{x+1} - 1| \end{cases} (*)$$

Đặt $y = \sqrt{x+1}$ ($y \geq 0$) $\Rightarrow$ phương trình(*) đã cho trở thành:
 $y+1+|y-3|=2|y-1|$

– Nếu $0 \leq y < 1$: $y+1+3-y=2-2y \Leftrightarrow y=-1$ (loại)

– Nếu $1 \leq y \leq 3$: $y+1+3-y=2y-2 \Leftrightarrow y=3$

– Nếu $y > 3$: $y+1+y-3=2y-2$ (vô nghiệm)

Với $y=3 \Leftrightarrow x+1=9 \Leftrightarrow x=8$ (thỏa mãn) Vậy: $x=8$

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} = 7\sqrt{2}$

HD:ĐK: $x \geq \frac{5}{2}$

PT $\Leftrightarrow \sqrt{2x-5} + 2\sqrt{2x-5} + 1 + \sqrt{2x-5} + 6\sqrt{2x-5} + 9 = 14$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{2x-5} + 1| + |\sqrt{2x-5} + 3| = 14 \Leftrightarrow \sqrt{2x-5} = 5 \Leftrightarrow x = 15 \text{ (Thỏa mãn)} \quad \text{Vậy: } x = 15$$

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} = 2$

HD:ĐK: $x \geq 1$

Pt $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} + 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1| = 2$

Nếu $x > 2$ pt $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 2$ (Loại)

Nếu $x \leq 2$ pt $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow 0x = 0$ (Luôn đúng với $\forall x$)

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\}$

3.2) Dạng 3. Đưa về phương trình tích

Phương pháp: ghép nhóm thích hợp đưa về phương trình tích, có thể đặt ẩn phụ để dễ dàng nhìn ra hơn.

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x+9} + 2012\sqrt{x+6} = 2012 + \sqrt{(x+9)(x+6)}$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -6$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 2012\sqrt{x+6} - 2012 + \sqrt{x+9} - \sqrt{(x+9)(x+6)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2012(\sqrt{x+6} - 1) - \sqrt{x+9}(\sqrt{x+6} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+6} - 1)(\sqrt{x+9} - 2012) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -5, x = 4048135 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-5; 4048135\}$.

Bài 2. Giải phương trình $x^3 + (4 + x^2)\sqrt{4 - x^2} = 8 - 2x\sqrt{4 - x^2}$

Lời giải. Điều kiện: $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow x^3 - 8 + (4 + x^2)\sqrt{4 - x^2} + 2x\sqrt{4 - x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + (x^2 + 2x + 4)\sqrt{4 - x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 4)(x - 2 + \sqrt{4 - x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)^2 + 3](x - 2 + \sqrt{4 - x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 4 - x^2 = 4 - 4x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0; 2\}$.

4.2) Dạng 4. Sử dụng phương pháp liên hợp

Bài 1. (HSGTP HN 2011 – 2012) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$

Lời giải. Ta có: $\sqrt{x^2 + 5} + 3x = \sqrt{x^2 + 12} + 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5} - 3 + 3x - 6 - \sqrt{x^2 + 12} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} + 3(x - 2) - \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} + 3 - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} \right) = 0$$

Từ PT suy ra $3x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$; do đó $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} > \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}$; vì vậy biểu thức trong ngoặc luôn dương. Suy ra $x-2 \Leftrightarrow x=2$.

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2} + 2x - 1 = 0$.

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -2$.

Đề ý rằng $x = -1$ là nghiệm của phương trình, khi đó $\sqrt{x+5} = 2, \sqrt{x+2} = 1$.

$$\sqrt{x+5} - 2 + \sqrt{x+2} - 1 + 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(\sqrt{x+5}+2)} + \frac{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}{(\sqrt{x+2}+1)} + 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{(\sqrt{x+5}+2)} + \frac{x+1}{(\sqrt{x+2}+1)} + 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+5}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} + 2 \right) = 0 \quad (*)$$

Với điều kiện $x \geq -2$ thì $\frac{1}{\sqrt{x+5}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} + 2 > 0$. Vậy $x = -1$.

Bài 3. Giải phương trình: $4\sqrt{x+3} + \sqrt{19-3x} = x^2 + 2x + 9$.

Lời giải. Điều kiện: $-3 \leq x \leq \frac{19}{3}$.

Ta nhận được 2 nghiệm là $x = 1, x = -2$ nên ta phân tích để tạo ra nhân tử chung là: $x^2 + x - 2$.

Ta tạo ra $4\sqrt{x+3} - (ax+b) = 0$ để phương trình nhận $x = 1, x = -2$ làm nghiệm.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} a+b=8 \\ -2a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=\frac{20}{3} \end{cases}.$$

Tương tự: $\sqrt{19-3x} - (mx+n) = 0$ nhận $x = 1, x = -2$ là nghiệm.

$$\begin{cases} m+n=5 \\ -2m+n=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{13}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Trình bày: } 4\sqrt{x+3} - \left(\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} \right) + \sqrt{19-3x} - \left(\frac{13}{3} - \frac{x}{3} \right) - (x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}[3\sqrt{x+3}-(x+5)] + \frac{3\sqrt{19-3x}-(13-x)}{3} - (x^2+x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left[\frac{-x^2-x+2}{3\sqrt{x+3}+(x+5)}\right] + \frac{-x^2-x+2}{3[3\sqrt{19-3x}+(13-x)]} - (x^2+x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x^2-x-2)\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{x+3}+(x+5)} + \frac{1}{3[3\sqrt{19-3x}+(13-x)]} + 1\right] = 0$$

Để thấy với $-3 \leq x \leq \frac{19}{3}$ thì $\frac{1}{3\sqrt{x+3}+(x+5)} > 0, \frac{1}{3[3\sqrt{19-3x}+(13-x)]} > 0$

Nên $\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{x+3}+(x+5)} + \frac{1}{3[3\sqrt{19-3x}+(13-x)]} + 1 > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=3, x=-2$.

5.2)Dạng 5. Đặt ẩn phụ

* Loại 1. Đặt một ẩn phụ

Phương pháp : thường đặt căn là ẩn rồi đưa phương trình ban đầu về một phương trình với ẩn với.

Bài 1. Giải phương trình sau: $x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x^2+11}, t \geq 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=6 \\ t=-7 \end{cases}$$

Vì $t \geq 0 \Rightarrow t=6$, thay vào ta có $\sqrt{x^2+11} = 6$

$$x^2 + 11 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 5$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm 5$

Bài 2. Giải phương trình sau: $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2+3x} - 10 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2+3x}, t \geq 0$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-5 \end{cases}$

Vì $t \geq 0 \Rightarrow t=2$, thay vào ta có $\sqrt{x^2+3x} = 2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$ và $x=-4$.

Bài 3. Giải phương trình sau: $\sqrt{4x-1}+4x^2-6x+1=0$.

Lời giải. ĐKXD: $x \geq \frac{1}{4}$. Đặt $t = \sqrt{4x-1}, t \geq 0 \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{4}$

Phương trình trở thành $t+4\left(\frac{t^2+1}{4}\right)^2-6\frac{t^2+1}{4}+1=0$

$$\Leftrightarrow 4t+t^4+2t^2+1-6(t^2+1)+4=0 \Leftrightarrow t^4-4t^2+4t-1=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3+t^2-3t+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+2t-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \text{ (loại } t=-1-\sqrt{2} \text{)}$$

Với $t=1$ ta có $1=\sqrt{4x-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Với $t=-1+\sqrt{2}$ ta có $-1+\sqrt{2}=\sqrt{4x-1} \Leftrightarrow 4x-1=3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\frac{1}{2}$ và $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Bài 4. Giải phương trình: $1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{1-x} \geq 0$ thì $\sqrt{x-x^2}=\frac{t^2-1}{2}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình bậc hai với ẩn là t:

$$1+\frac{t^2-1}{3}=t \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow t=1; t=2. \text{ Vậy ta có:}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{1-x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-x^2}=0 \\ VN(VT < 2) \end{cases} \Leftrightarrow x=0; x=1.$$

*** Loại 2. Đặt một ẩn phụ rồi đưa về tích (ẩn phụ không hoàn toàn)**

Phương pháp: Đặt một ẩn rồi đưa phương trình về dạng tích (thường sử dụng hết số 3 hoặc phương trình đẳng cấp bậc 2)

Đôi khi ta cũng kết hợp với ẩn ban đầu để đưa về tích như ở bài mẫu 2.

Bài 1. Giải phương trình: $6x^2+2x+1=3x\sqrt{6x+3}$ (HSG TP HN 2017 - 2018)

Lời giải. Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Do $6x^2+2x+1=5x^2+(x+1)^2 > 0$ nên từ phương trình ta suy ra $x > 0$.

Đặt $a=\sqrt{6x+3}$ ta có $6x^2+2x+1=6x^2+\frac{1}{3}a^2$ nên phương trình đã cho viết lại

thành: $6x^2+\frac{1}{3}a^2=3xa$ hay $(a-6x)(a-3x)=0$.

Từ đây ta có $a=3x$ hoặc $a=6x$.

Với $a=3x$, ta có $9x^2=6x+3$. Từ đây, với chú ý $x > 0$, ta giải được $x=1$.

Với $a = 6x$, ta có $36x^2 = 6x + 3$. Từ đây, với chú ý $yx > 0$ ta giải được $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{12}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{12}$.

Bài 2. Giải phương trình: $6x^2 + 2x + 1 = 3x\sqrt{6x + 3}$.

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 18x^2 + (6x + 3) = 9x\sqrt{6x + 3}$.

Đặt $y = \sqrt{6x + 3} \geq 0$, ta được $18x^2 + y^2 = 9xy$

$$\Leftrightarrow 18x^2 - 9xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow (6x - y)(3x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ y = 6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{6x + 3} = 3x \\ \sqrt{6x + 3} = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 6x - 3 = 0, x \geq 0 \\ 36x^2 - 6x - 3 = 0, x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1, x = \frac{1 + \sqrt{13}}{12}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{1; \frac{1 + \sqrt{13}}{12}\right\}$.

Bài tập tương tự

Bài 1. (HSGTPHN 2013 - 2014) Giải phương trình $x^2 - 2x - 2\sqrt{2x + 1} - 2 = 0$.

*** Loại 3. Đặt một ẩn phụ rồi đưa về hệ**

Bài 1. Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x + 5} = 5$.

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -5$.

Đặt $t = \sqrt{x + 5} \geq 0 \Rightarrow t^2 - x = 5$, ta được hệ $\begin{cases} t^2 - x = 5 \\ x^2 + t = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow t^2 - x^2 - x - t = 0 \Leftrightarrow (t + x)(t - x - 1) = 0.$$

Trường hợp 1: Xét $t + x = 0 \Leftrightarrow t = -x \Rightarrow \sqrt{x + 5} = -x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x + 5 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Trường hợp 2: Xét $t - x - 1 = 0 \Leftrightarrow t = x + 1 \Rightarrow \sqrt{x + 5} = x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 5 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{1 - \sqrt{21}}{2}\right\}$.

Bài 2. Giải phương trình $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$

Lời giải. Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow t^3 + 1 = 2x$, ta được hệ $\begin{cases} t^3 + 1 = 2x \\ x^3 + 1 = 2t \end{cases}$

$$\Rightarrow t^3 - x^3 = 2x - 2t \Leftrightarrow (t-x)(t^2 + tx + x^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-x) \left[\left(t + \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{3x^2}{4} + 2 \right] = 0 \Leftrightarrow t = x$$

$$\Rightarrow x^3 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x^2 - x - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1) + x(x-1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1; x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

*** Loại 4. Chia cả 2 về cho một biểu thức rồi đặt ẩn phụ**

Phương pháp: Xét biểu thức $M = 0$ rồi lập luận tìm x và kiểm tra x nhận được có là nghiệm của phương trình hay không.

Trường hợp $M \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho biểu thức M rồi đặt ẩn phụ.

Để nắm được cơ chế, ta cần để ý đến tương quan, sự tương đồng của bậc cũng như tương quan hệ số của các hạng tử trong căn và bên ngoài.

Bài 1. Giải phương trình: $x^2 = (1 - \sqrt{x})(2x - 3\sqrt{x} + 3)$.

Lời giải. Có một sự tương đồng giữa hệ số và bậc của: $1 - \sqrt{x}$ và $-3\sqrt{x} + 3$ ở trong 2 ngoặc. Điều kiện $x \geq 0$.

Xét $x = 0$ ta được $0 = (1 - 0)(2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 3)$ (sai) do đó $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Chia cả 2 vế cho x ta được:

$$1 = \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{x} \right) \left(\frac{2x - 3\sqrt{x} + 3}{x} \right) \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(2 + 3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right).$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = t \text{ khi đó phương trình trở thành: } 3t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{TH1: } t = -1 \text{ ta có: } \frac{1 - \sqrt{x}}{x} = -1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{TH2: } t = \frac{1}{3} \text{ ta có } \frac{1 - \sqrt{x}}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} (L) \\ \sqrt{x} = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{15 + 3\sqrt{21}}{2}.$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: } x = \frac{15 + 3\sqrt{21}}{2}.$$

Bài 2. Giải phương trình: $5x^2 + 2x + 10 = 7\sqrt{x^4 + 4}$

Lời giải. Ta thấy: có 1 sự tương quan hệ số: trong căn 1:4 còn bên ngoài thì không có, bên ngoài chỉ có $5:10=1:2$ nhưng với khoảng cách bậc nhỏ hơn. Xét $x=0$ ta được: $5.0+2.0+10=7\sqrt{0+4}$ (không đúng) do đó $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Chia cả hai vế cho x ta được: $5\left(x + \frac{2}{x}\right) + 2 = 7\sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$

$$\Leftrightarrow 5\left(x + \frac{2}{x}\right) + 2 = 7\sqrt{\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 4}$$

$$\text{Đặt } \left(x + \frac{2}{x}\right) = t \text{ ta có: } 5t + 2 = 7\sqrt{t^2 - 4} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{-2}{5} \\ 25t^2 + 20t + 4 = 49(t^2 - 4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{-2}{5} \\ 24t^2 - 20t - 200 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{2} (L) \\ t = \frac{10}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Với } x + \frac{2}{x} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{7}}{3}; \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \right\}.$$

*** Loại 5. Đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình tích**

Bài 1. (HSGTPHN 2019-2020) $(4x+2)\sqrt{x^2+2x+5} = (x^2+2x+2)\sqrt{4x+5}$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -\frac{5}{4}$.

Đặt $a = \sqrt{4x+5}$ và $b = \sqrt{x^2+2x+5} (a, b \geq 0)$.

Ta có $4x+2 = a^2 - 3$, $x^2+2x+2 = b^2 - 3$.

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $(a^2 - 3)b = (b^2 - 3)a$, hay

$$(a-b)(ab+3) = 0.$$

Do $ab+3 > 0$ nên từ đây, ta có $a=b$ hay $x^2+2x+5 = 4x+2$.

Giải phương trình này, ta được $x \in \{0, 2\}$.

Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{0, 2\}$.

Bài 2. Giải các phương trình sau : $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$

HD: Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{4x^2 + 5x + 1} \\ b = \sqrt{x^2 - x + 1} \end{cases} \quad (a; b \geq 0)$

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} a^2 - 4b^2 = 9x - 3 \\ a - 2b = 9x - 3 \end{cases}$

Từ đó ta có: $a^2 - 4b^2 = a - 2b \Leftrightarrow (a - 2b)(a + 2b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = 1 - 2b \end{cases}$

Nếu $a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (thỏa mãn)

Nếu $a = 1 - 2b \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}$ (*)

Ta có : VT(*) ≥ 0 (1)

VP(*) $= 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq 1 - \sqrt{3} < 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình (*) vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$

Bài tập tương tự

Bài 1. Giải phương trình: $\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}$.

Bài 2. (HSG TP HN 2010 – 2011) Giải phương trình:

$$2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$$

*** Loại 6. Đặt hai ẩn phụ đưa về hệ phương trình**

Phương pháp: thường sử dụng với 2 căn khác bậc

Bài 1. (HSG TP HN 2018 -2019) Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

Lời giải. ĐKXD: $x \geq 1$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{2-x} \\ b = \sqrt{x-1} \end{cases}$ với $a \leq 1, b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 2-x \\ b^2 = x-1 \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^2 = 1$.

Từ (*) ta có: $a = 1 - b \Rightarrow b = 1 - a$.

Thay $b = 1 - a$ vào thế thức $a^3 + b^2 = 1 \Rightarrow a^3 + (1 - a)^2 = 1 \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 2a + 1 = 1$

$\Leftrightarrow a^3 + a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 + a - 2) = 0 \Leftrightarrow a(a + 2)(a - 1) = 0$.

* Nếu $a = 0$ (Thỏa mãn) $\Rightarrow b = 1$. Ta được $\begin{cases} 2-x=0 \\ x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (Thỏa mãn ĐKXD).

* Nếu $a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow b = 3$. Ta được $\begin{cases} 2-x=-8 \\ x-1=9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10$ (Thỏa mãn ĐKXD).

* Nếu $a-1=0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=0$. Ta được $\begin{cases} 2-x=1 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn ĐKXD).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{1; 2; 10\}$.

Bài 2. (HSGTPHN 2015-2016) Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2+11x+19} + \sqrt{2x^2+5x+7} = 3(x+2)$$

Lời giải. Điều kiện có nghiệm $x \geq -2$.

Đặt $\sqrt{2x^2+11x+19} = a, \sqrt{2x^2+5x+7} = b$ rồi nhân cả hai vế với 2 ta được phương trình: $2(a+b) = 6x+12 \Rightarrow 2(a+b) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a+b)(a-b-2) = 0$.

$\Rightarrow a = b+2 \Rightarrow 2\sqrt{2x^2+11x+19} = 3x+8 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+8 \geq 0 \\ 4(2x^2+11x+19) = (3x+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn). Vậy $x=2$.

*** Loại 7: Giải phương trình vô tỉ bằng cách đưa về hệ đối xứng loại II**

➤ Ta hãy đi tìm nguồn gốc của những bài toán giải phương trình bằng cách đưa về hệ đối xứng loại II

➤ Ta xét một hệ phương trình đối xứng loại II sau : $\begin{cases} (x+1)^2 = y+2 & (1) \\ (y+1)^2 = x+2 & (2) \end{cases}$ việc

giải hệ này thì đơn giản

Bây giờ ta sẽ biến hệ thành phương trình bằng cách đặt $y = f(x)$ sao cho (2)

luôn đúng, $y = \sqrt{x+2} - 1$, khi đó ta có phương trình :

$$(x+1)^2 = (\sqrt{x+2} - 1) + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = \sqrt{x+2}$$

Vậy để giải phương trình : $x^2 + 2x = \sqrt{x+2}$ ta đặt lại như trên và đưa về hệ

Bằng cách tương tự xét hệ tổng quát dạng bậc 2 : $\begin{cases} (\alpha x + \beta)^2 = ay + b \\ (\alpha y + \beta)^2 = ax + b \end{cases}$, ta sẽ xây

dựng được phương trình dạng sau : đặt $\alpha y + \beta = \sqrt{ax+b}$, khi đó ta có phương

$$\text{trình : } (\alpha x + \beta)^2 = \frac{a}{\alpha} \sqrt{ax+b} + b - \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{Tương tự cho bậc cao hơn : } (\alpha x + \beta)^n = \frac{a}{\alpha} \sqrt[n]{ax+b} + b - \frac{\beta}{\alpha}$$

Tóm lại phương trình thường cho dưới dạng khai triển ta phải viết về dạng :

$(\alpha x + \beta)^n = p \sqrt[n]{a'x+b'} + \gamma$ đặt $\alpha y + \beta = \sqrt[n]{ax+b}$ để đưa về hệ, chú ý về dấu của α ???

Việc chọn $\alpha; \beta$ thông thường chúng ta chỉ cần viết dưới dạng :

$$(\alpha x + \beta)^n = p \sqrt[n]{a'x+b'} + \gamma \text{ là chọn được.}$$

Bài 1: Giải phương trình: $x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$

HD:Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$

Ta có phương trình được viết lại là: $(x-1)^2 - 1 = 2\sqrt{2x-1}$

Đặt $y-1 = \sqrt{2x-1}$ thì ta đưa về hệ sau:
$$\begin{cases} x^2 - 2x = 2(y-1) \\ y^2 - 2y = 2(x-1) \end{cases}$$

Trừ hai vế của phương trình ta được $(x-y)(x+y) = 0$

Giải ra ta tìm được nghiệm của phương trình là: $x = 2 + \sqrt{2}$

Cách 2: Đặt $\sqrt{2x-1} = t + a \Rightarrow 2x-1 = t^2 + 2at + a^2$

Chọn $a = -1$ ta được: $t^2 - 2t = 2x - 2$

kết hợp với đầu bài ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2x = 2t - 2 \\ t^2 - 2t = 2x - 2 \end{cases}$$

Giải hệ này ta sẽ tìm được x.

Bài 2. Giải phương trình: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$

HD:Điều kiện $x \geq -\frac{5}{4}$

Ta biến đổi phương trình như sau:

$$4x^2 - 12x - 2 = 2\sqrt{4x+5} \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 2\sqrt{4x+5} + 11$$

Đặt $2y-3 = \sqrt{4x+5}$ ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (2x-3)^2 = 4y+5 \\ (2y-3)^2 = 4x+5 \end{cases} \Rightarrow (x-y)(x+y-1) = 0$$

$$\text{Với } x=y \Rightarrow 2x-3 = \sqrt{4x+5} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{Với } x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x \Leftrightarrow -2x-1 = \sqrt{4x+5} \text{ (vô nghiệm)}$$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x = 2 + \sqrt{3}$

Bài 3:Giải phương trình: $x^2 - \sqrt{x+5} = 5$

HD:ĐK: $x \geq -5$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow x^2 - 5 = \sqrt{x+5} \quad ; |x| \geq \sqrt{5} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x+5} = t + a \Leftrightarrow x+5 = t^2 + 2at + a^2$$

Chọn $a = 0$ ta được: $t^2 - 5 = x$ và kết hợp với (*) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 5 = t \\ t^2 - 5 = x \end{cases} \text{ từ đây ta sẽ tìm được nghiệm.}$$

6.2) Dạng 6. Phương pháp đánh giá

* Loại 1. Đưa về tổng các bình phương

Bài (HSG TP HN 2020 - 2021) Giải phương trình $x^2 - x + 8 = 4\sqrt{x+3}$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -3$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$(x^2 - 2x + 1) + (x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{x+3} - 2)^2 = 0 \quad (1)$$

Vì $(x-1)^2 \geq 0$ và $(\sqrt{x+3}-2)^2 \geq 0$ nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $(x-1)^2 = (\sqrt{x+3}-2)^2 = 0$, tức $x=1$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài tập tương tự

Bài 1. (HSGTPHN 2014 - 2015) Giải phương trình: $x\sqrt{3-2x} = 3x^2 - 6x + 4$.

Bài 2. (TS 10 HN 2020 - 2021) Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = x^2 + 1$

*** Loại 2. Đánh giá bằng bất đẳng thức Cosi, Cauchy Schwartz**

Phương pháp: kết hợp sử dụng điểm rơi để đánh giá. Thông thường các biểu thức trong căn có dấu hiệu triệt tiêu một hạng tử nào đó.

Chú ý: bất Cô si có tên quốc tế là AM-GM.

+ **Bất đẳng thức Bunhiakôpxki:**

Cho hai bộ số : $(a, b), (x, y)$ thì ta có: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

+ **Bất đẳng thức côsi:**

a) Với hai số $a, b \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

b) Với ba số $a, b, c \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

c) Với bốn số $a, b, c, d \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d$

e) Với n số $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ thì ta có: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Bài 1. (HSGTPHN 2016-2017) Giải phương trình $\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} = 1 + \frac{3}{2x}$

Phân tích: Phương trình đã cho có chứa hai căn thức và có ẩn ở mẫu. Quan sát kỹ phương trình ta nhận thấy $\left(2x - \frac{3}{x}\right) + \left(\frac{6}{x} - 2x\right) = \frac{3}{x}$ có mối liên hệ với vế phải của phương trình, do đó ta sử dụng các đánh giá để làm mất căn thức hoặc đưa hai biểu thức trong căn vào cùng một căn thức.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \leq \frac{1}{2} \left(1 + 2x - \frac{3}{x}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{6}{x} - 2x\right) = 1 + \frac{3}{2x}.$$

Đến đây ta giải quyết được phương trình.

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq 0; 2x - \frac{3}{x} \geq 0; \frac{6}{x} - 2x \geq 0$ hay

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \leq \frac{1}{2} \left(1 + 2x - \frac{3}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{6}{x} - 2x \right) = 1 + \frac{3}{2x}.$$

Kết hợp với phương trình đã cho suy ra dấu bằng của các bất đẳng thức trên xảy

ra. Do đó ta có
$$\begin{cases} 2x - \frac{3}{x} = 1 \\ \frac{6}{x} - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, \text{ thỏa mãn điều kiện xác định.}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \frac{3}{2}$.

Bài 2. Giải phương trình : $13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} = 16$

HD:Đk: $-1 \leq x \leq 1$

Biến đổi pt ta có : $x^2 \left(13\sqrt{1 - x^2} + 9\sqrt{1 + x^2} \right)^2 = 256$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\left(\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{1 - x^2} + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \sqrt{1 + x^2} \right)^2 \leq (13 + 27)(13 - 13x^2 + 3 + 3x^2) = 40(16 - 10x^2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $10x^2(16 - 10x^2) \leq \left(\frac{16}{2} \right)^2 = 64$

$$\text{Dấu bằng} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{3} \\ 10x^2 = 16 - 10x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Bài tập tương tự

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{12 - \frac{3}{x^2}} + \sqrt{4x^2 - \frac{3}{x^2}} = 4x^2$.

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

III. Kết quả thực hiện có so sánh đối chứng.

Qua việc phân loại, hướng dẫn học sinh tiếp cận với phương trình vô tỷ trong đề thi TS THPT giúp học sinh hứng thú trong học tập. Khi áp dụng đề tài này vào giảng dạy, đối tượng học sinh khá giỏi lớp 9 đã tiếp thu khá tốt, số lượng học sinh khá, giỏi đã biết khai thác, phân tích kết quả của bài toán để tổng

kết thành các phương pháp giải bài toán đã tăng lên. Học sinh có hứng thú suy nghĩ, tìm tòi các bài toán có nội dung tương tự và từ chỗ bỏ hẵn thì các em đã có hứng thú học hơn. Có thể nói rằng, việc phân dạng toán cũng như hệ thống các # bài tập đã giúp các em đã tiến bộ rõ rệt. Chất lượng bộ môn ngày càng được cải thiện. Học sinh có thêm tự tin khi làm đề thi thử, đề thi chính thức trong kì thi vào lớp 10 sắp tới.

Kết quả sau khi áp dụng đề tài .

• **Kết quả sau khi áp dụng đề tài:**

	Tổng số học sinh	Giỏi		Khá	
		SL	%	SL	%
Trước khi thực hiện	34	1	2,9%	0	0
Sau khi thực hiện	34	5	14,7%	2	5,8 %

PHẦN THỨ BA: KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ SAU QUÁ TRÌNH THỰC HIỆN.

I. Kết luận.

- Đề sáng kiến này được áp dụng rộng rãi thì nhà trường nên thường xuyên tổ chức các chuyên đề áp dụng đề tài kinh nghiệm để giáo viên có điều kiện tham gia trao đổi lẫn nhau, nâng cao chuyên môn nghiệp vụ.

- Sau một thời gian thực hiện đề tài tôi nhận thấy việc phân loại, hệ thống hóa chủ đề góp phần giúp học sinh có thêm tài liệu cũng như hướng đi tốt tiếp cận với các bài toán khó

- Với kinh nghiệm rút ra từ đề tài này cùng với việc đổi mới phương pháp dạy và học môn toán sẽ giúp tôi nâng cao chất lượng giảng dạy bộ môn trong những năm tiếp theo.

II. Những khuyến nghị sau quá trình thực hiện đề tài.

1. Đối với giáo viên dạy toán:

Phải thường xuyên trao đổi chuyên môn nghiệp vụ, tích lũy kinh nghiệm giảng dạy, biết tổ chức cho học sinh học tập có nề nếp... và đặc biệt phải biết xây dựng tài liệu, lựa chọn phương pháp giảng dạy một cách thích hợp.

2. Đối với nhà trường:

Nhà trường thường xuyên tổ chức chuyên đề để giáo viên có điều kiện trau dồi chuyên môn nghiệp vụ, tích lũy kinh nghiệm, nâng cao chuyên môn nghiệp vụ.

3. Đối với phòng giáo dục

Cần tăng cường các chuyên đề có giờ dạy minh họa thể hiện được sự đổi mới phương pháp dạy học, phù hợp với thực tế địa phương để giáo viên có thể nâng cao về trình độ chuyên môn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn!

Phú Xuyên, ngày 15 tháng 3 năm 2024

Người viết

Đỗ Thị Huệ

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa toán 9 - NXB GD - Phan Đức Chính, Tôn Thân,...
2. Ôn tập thi vào lớp 10 môn Toán – NXB GDVN – Nguyễn Ngọc Đạm,...
3. Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Hà Nội
4. Đề thi chọn HSG thành phố Hà Nội
5. Toán chọn lọc ôn thi vào lớp 10- NXB ĐHQGHN – Nguyễn Thế Chinh, ...
6. Tổng hợp chuyên đề trọng tâm thi vào 10 chuyên & học sinh giỏi đại số 9 – NXB ĐHQGHN – Nguyễn Trung Kiên.