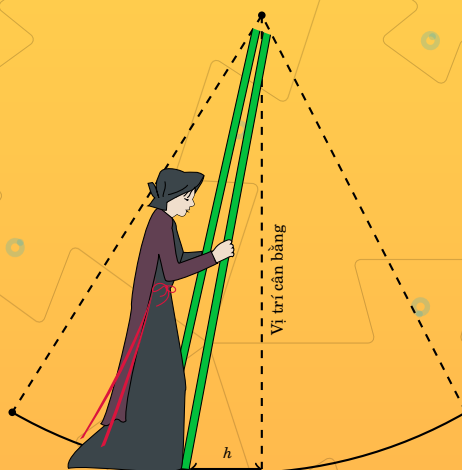
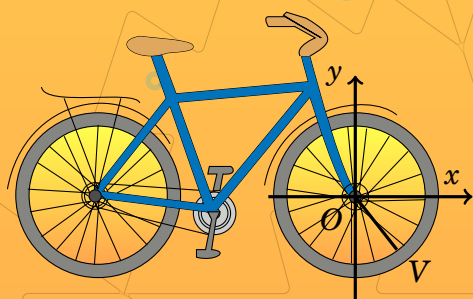
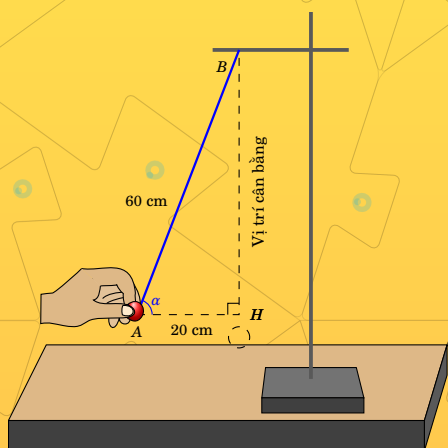




ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng chủ biên kiêm chủ biên)
LÊ TUẤN ANH - ĐỖ TIẾN ĐẠT - NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN - PHẠM SỸ NAM - PHẠM ĐỨC QUANG

TOÁN

9



MỤC LỤC



Chương 1. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT _ 1

§1 – PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN 1

- (A) PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CÓ DẠNG $(ax + b)(cx + d) = 0$ ($a \neq 0; c \neq 0$) _____ 1
- (B) PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU _____ 3
- (C) BÀI TẬP _____ 5

§2 – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN 10

- (A) PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN _____ 10
- (B) HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN _____ 13
- (C) BÀI TẬP _____ 15

§3 – GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN 20

- (A) GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ _____ 20
- (B) GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ _____ 22
- (C) SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN _____ 25
- (D) BÀI TẬP _____ 26

§4 – BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I 31

Chương 2. BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN 39

§1 – BẤT ĐẲNG THỨC 39

- (A) NHẮC LẠI VỀ THỨ TỰ TRONG TẬP HỢP SỐ THỰC _____ 39
- (B) BẤT ĐẲNG THỨC _____ 40
- (C) BÀI TẬP _____ 44

§2 – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN 47

- (A) MỞ ĐẦU VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN _____ 47
- (B) BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN _____ 48

Ⓒ	CÁCH GIẢI	48
Ⓓ	BÀI TẬP	52
§3 –	BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II	56
Chương 3.	CĂN THỨC	62
§1 –	CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA CỦA SỐ THỰC	62
Ⓐ	CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC KHÔNG ÂM	62
Ⓑ	CĂN BẬC BA	64
Ⓒ	SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ	65
Ⓓ	BÀI TẬP	67
§2 –	CĂN THỨC	70
Ⓐ	MỘT SỐ PHÉP TÍNH VỀ CĂN BẬC HAI	70
Ⓑ	BÀI TẬP	74
§3 –	CĂN THỨC BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC BA CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ	78
Ⓐ	CĂN THỨC BẬC HAI	78
Ⓑ	CĂN THỨC BẬC BA	80
Ⓒ	BÀI TẬP	83
§4 –	MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ	86
Ⓐ	CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG	86
Ⓑ	CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH	86
Ⓒ	CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT THƯƠNG	87
Ⓓ	TRỰC CĂN THỨC Ở MẪU	88
Ⓔ	BÀI TẬP	90
§5 –	BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III	93
Chương 4.	HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG	98
§1 –	TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN	98
Ⓐ	TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN	98
Ⓑ	TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU	100

(C)	SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN.....	103
(D)	BÀI TẬP.....	104
§2 –	MỘT SỐ HỆ THỨC LƯỢNG VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG	108
(A)	TÍNH CẠNH GÓC VUÔNG THEO CẠNH HUYỀN VÀ TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN.....	108
(B)	TÍNH CẠNH GÓC VUÔNG THEO CẠNH GÓC VUÔNG CÒN LẠI VÀ TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN.....	110
(C)	ÁP DỤNG TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN ĐỂ GIẢI TAM GIÁC VUÔNG	110
(D)	BÀI TẬP.....	113
§3 –	ỨNG DỤNG CỦA TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN	117
(A)	ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CÁCH.....	117
(B)	BÀI TẬP.....	120
§4 –	BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV	123
Chương 5.	ĐƯỜNG TRÒN	126
§1 –	ĐƯỜNG TRÒN. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN	126
(A)	KHÁI NIỆM ĐƯỜNG TRÒN.....	126
(B)	LIÊN HỆ GIỮA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN.....	127
(C)	TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN.....	128
(D)	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN.....	130
(E)	BÀI TẬP.....	130
§2 –	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN	134
(A)	ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU.....	134
(B)	ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU.....	134
(C)	ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG GIAO NHAU.....	135
(D)	BÀI TẬP.....	136
§3 –	TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN	139
(A)	NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN.....	139
(B)	TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU.....	142
(C)	BÀI TẬP.....	144

§4 – GÓC Ở TÂM - GÓC NỘI TIẾP	148
(A) GÓC Ở TÂM.....	148
(B) CUNG. SỐ ĐO CUNG.....	149
(C) GÓC NỘI TIẾP.....	153
(D) BÀI TẬP.....	155
§5 – ĐỘ DÀI CUNG TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHUYÊN	159
(A) ĐỘ DÀI CUNG TRÒN.....	159
(B) DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN.....	160
(C) DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHUYÊN.....	163
(D) BÀI TẬP.....	164
§6 – BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V	167
Chương 6. MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT	172
§1 – MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG, BIỂU ĐỒ	172
(A) BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BẢNG THỐNG KÊ, BIỂU ĐỒ TRANH.....	172
(B) BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BIỂU ĐỒ CỘT, BIỂU ĐỒ CỘT GHÉP.....	173
(C) BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG.....	175
(D) BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN.....	177
(E) BÀI TẬP.....	180
§2 – TẦN SỐ. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI	186
(A) TẦN SỐ. BẢNG TẦN SỐ. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ.....	186
(B) TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI.....	189
(C) BÀI TẬP.....	192
§3 – TẦN SỐ GHÉP NHÓM. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM	196
(A) MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM.....	196
(B) TẦN SỐ GHÉP NHÓM. BẢNG TẦN SỐ GHÉP NHÓM.....	197
(C) TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM.....	199
(D) BÀI TẬP.....	202
§4 – PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ	207

(A) PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU	207
(B) XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ	208
(C) BÀI TẬP	211

§5 – ÔN TẬP CHƯƠNG VI 215

Chương 7. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 220

§1 – HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 220

(A) HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)	220
(B) ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)	221
(C) BÀI TẬP	224

§2 – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN 228

(A) ĐỊNH NGHĨA	228
(B) GIẢI PHƯƠNG TRÌNH	228
(C) ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN	232
(D) SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN	235
(E) BÀI TẬP	235

§3 – ĐỊNH LÝ VI-ÉT 240

(A) ĐỊNH LÝ VI-ÉT	240
(B) TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH	242
(C) BÀI TẬP	243

§4 – BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII 247

Chương 8. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP 253

§1 – ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC 253

(A) ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC	253
(B) ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC	256
(C) BÀI TẬP	258

§2 – TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN 263

(A) ĐỊNH NGHĨA	263
(B) TÍNH CHẤT	264
(C) HÌNH CHỮ NHẬT, HÌNH VUÔNG NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN	264

(D) BÀI TẬP	265
§3 – BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII	270
Chương 9. ĐA GIÁC ĐỀU	272
§1 – ĐA GIÁC ĐỀU. HÌNH ĐA GIÁC ĐỀU TRONG THỰC TIỄN	272
(A) ĐA GIÁC. ĐA GIÁC LỒI	272
(B) ĐA GIÁC ĐỀU	274
(C) HÌNH ĐA GIÁC ĐỀU TRONG THỰC TIỄN	275
(D) BÀI TẬP	276
§2 – PHÉP QUAY	278
(A) KHÁI NIỆM	278
(B) PHÉP QUAY GIỮ NGUYÊN HÌNH ĐA GIÁC ĐỀU	279
(C) BÀI TẬP	280
§3 – BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX	283
Chương 10. HÌNH HỌC TRỰC QUAN	287
§1 – HÌNH TRỤ	287
(A) HÌNH TRỤ	287
(B) DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH TRỤ	289
(C) THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ	290
(D) BÀI TẬP	290
§2 – HÌNH NÓN	294
(A) HÌNH NÓN	294
(B) DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH NÓN	294
(C) THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN	295
(D) BÀI TẬP	296
§3 – HÌNH CẦU	299
(A) HÌNH CẦU	299
(B) DIỆN TÍCH MẶT CẦU	300
(C) THỂ TÍCH CỦA KHỐI CẦU	301
(D) BÀI TẬP	301
§4 – BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG X	303

Chương 1.



PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Chủ đề 1. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CÓ DẠNG $(ax + b)(cx + d) = 0$ ($a \neq 0; c \neq 0$)

Định nghĩa

Để giải phương trình tích $(ax + b)(cx + d) = 0$ ($a \neq 0$ và $c \neq 0$) ta có thể làm như sau

Bước 1. Giải hai phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ và $cx + d = 0$.

Bước 2. Kết luận nghiệm: Lấy tất cả các nghiệm của hai phương trình bậc nhất vừa giải ở Bước 1.

Ví dụ 1. Giải phương trình $(x + 5)(3x - 9) = 0$.

Hướng dẫn giải.

Để giải phương trình đã cho, ta giải hai phương trình sau

$$\begin{aligned} \textcircled{v} x + 5 &= 0 \\ x &= -5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{v} 3x - 9 &= 0 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -5$ và $x = 3$. □

Ví dụ 2. Giải các phương trình

a) $(2x - 3)^2 = (x + 7)^2$.

b) $x^2 - 9 = 3(x + 3)$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} (2x - 3)^2 &= (x + 7)^2 \\ (2x - 3)^2 - (x + 7)^2 &= 0 \\ [(2x - 3) - (x + 7)][(2x - 3) + (x + 7)] &= 0 \\ (x - 10)(3x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau

$$\begin{aligned}\textcircled{v} x - 10 &= 0 \\ x &= 10.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{v} 3x + 4 &= 0 \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 10$ và $x = -\frac{4}{3}$.

b) Ta có $x^2 - 9 = 3(x + 3)$
 $(x - 3)(x + 3) - 3(x + 3) = 0$
 $(x + 3)[(x - 3) - 3] = 0$
 $[(x + 3)(x - 6)] = 0.$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau

$$\begin{aligned}\textcircled{v} x + 3 &= 0 \\ x &= -3.\end{aligned}$$

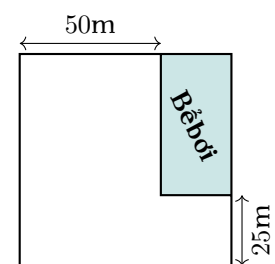
$$\begin{aligned}\textcircled{v} x - 6 &= 0 \\ x &= 6.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -3$ và $x = 6$.

□

🔴 Ví dụ 3.

Trong một khu đất có dạng hình vuông, người ta dành một mảnh đất, có dạng hình chữ nhật ở góc khu đất để làm bể bơi (Hình 1). Biết diện tích bể bơi bằng $1\,250\text{ m}^2$. Tính độ dài cạnh khu đất đó.



Hình 1

🔵 Hướng dẫn giải.

Gọi độ dài cạnh khu đất có dạng hình vuông là x (m). Khi đó, mảnh đất dạng hình chữ nhật để làm bể bơi có các kích thước là $x - 50$ (m), ($x > 50$) và $x - 25$ (m). Do đó, diện tích của mảnh đất là $(x - 50)(x - 25)$ (m^2).

Vì vậy, ta có phương trình $(x - 50)(x - 25) = 1\,250$.

Giải phương trình $(x - 50)(x - 25) = 1\,250$

$$(x - 50)(x - 25) - 1\,250 = 0$$

$$x^2 - 75x = 0$$

$$x(x - 75) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = 75.$$

Do $x > 50$ nên $x = 75$. Vậy độ dài cạnh khu đất là 75 (m).

□

B PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU**Điều kiện xác định**

Trong phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 được gọi là điều kiện xác định của phương trình.

❶ Ví dụ 4. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau

a) $\frac{2x+1}{x-2} = 5.$

b) $\frac{2}{5x-3} = 1 + \frac{1}{x+2}.$

📁 Hướng dẫn giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x+1}{x-2} = 5$ là $x-2 \neq 0$ hay $x \neq 2.$

b) Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2}{5x-3} = 1 + \frac{1}{x+2}$ là $5x-3 \neq 0$ và $x+2 \neq 0$ hay $x \neq \frac{3}{5}$ và $x \neq -2.$

□

Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta có thể làm như sau

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình vừa tìm được.

Bước 4. Kết luận nghiệm: Trong các giá trị của ẩn vừa tìm được ở Bước 3, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

❶ Ví dụ 5. Giải các phương trình

a) $\frac{x^2}{2-x} + \frac{3x-1}{3} = \frac{5}{3}.$

b) $\frac{4}{x(x-1)} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x-1}.$

📁 Hướng dẫn giải.

a) Điều kiện xác định $2 - x \neq 0$ hay $x \neq 2$. b) Điều kiện xác định $x \neq 0$ và $x \neq 1$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2-x} + \frac{3x-1}{3} &= \frac{5}{3} \\ \frac{3x^2}{3(2-x)} + \frac{(3x-1)(2-x)}{3(2-x)} &= \frac{5(2-x)}{3(2-x)} \\ 3x^2 + (3x-1)(2-x) &= 5(2-x) \\ 3x^2 + 6x - 3x^2 - 2 + x &= 10 - 5x \\ 7x - 2 &= 10 - 5x \\ 12x &= 12 \\ x &= 1.\end{aligned}$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{4}{x(x-1)} + \frac{3}{x} &= \frac{4}{x-1} \\ \frac{4}{x(x-1)} + \frac{3(x-1)}{x(x-1)} &= \frac{4x}{x(x-1)} \\ 4 + 3(x-1) &= 4x \\ 4 + 3x - 3 &= 4x \\ 3x + 1 &= 4x \\ x &= 1.\end{aligned}$$

Ta thấy $x = 1$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

□

❶ Ví dụ 6. Hai bạn Phong và Khang cùng hẹn nhau đạp xe đến một vị trí cách vị trí bạn Phong 6 km và cách vị trí bạn Khang 7 km. Hai bạn cùng xuất phát và đến địa điểm đã hẹn cùng một lúc. Tính tốc độ của mỗi bạn, biết tốc độ của bạn Khang hơn tốc độ bạn Phong là 6 km/h.

➡ Hướng dẫn giải.

Gọi tốc độ của bạn Phong là x km/h, ($x > 0$). Khi đó, tốc độ của bạn Khang là $x + 2$ km/h.
Thời gian đi của bạn Phong là $\frac{6}{x}$ (giờ).

Thời gian đi của bạn Khang là $\frac{7}{x+2}$ (giờ).

Do hai bạn cùng xuất phát và đến địa điểm đã hẹn cùng một lúc nên thời gian đi của hai bạn là như nhau. Ta có phương trình

$$\frac{6}{x} = \frac{7}{x+2}.$$

Giải phương trình $\frac{6}{x} = \frac{7}{x+2}$.

$$\begin{aligned}\frac{6}{x} &= \frac{7}{x+2} \\ \frac{6(x+2)}{x(x+2)} &= \frac{7x}{x(x+2)} \\ 6(x+2) &= 7x \\ 6x + 12 &= 7x\end{aligned}$$

$$x = 12. \text{ (thỏa mãn } x > 0).$$

Vậy tốc độ của bạn Phong là 12 km/h, tốc độ của bạn Khang là 14 km/h.

□

❶ Ví dụ 7. Biết nồng độ muối của nước biển là 3,5% và khối lượng riêng của nước biển là 1 020 g/ml. Từ 2 lít nước biển như thế, người ta hòa tan thêm muối để được dung dịch có nồng độ muối là 20%. Tính khối lượng muối cần thêm.

➡ Hướng dẫn giải.

Khối lượng của 2 lít nước biển là $1\,020 \cdot 2 = 2\,040$ (g).

Khối lượng muối trong 2 lít nước biển là $2\,040 \cdot 3,5\% = 71,4$ (g).

Gọi khối lượng muối cần hòa thêm vào 2 lít nước biển như thế để được dung dịch có nồng độ muối là 20% là x (g) ($x > 0$). Ta có phương trình

$$\frac{71,4 + x}{2040} = \frac{20}{100}.$$

Giải phương trình $\frac{71,4 + x}{2040} = \frac{20}{100}$.

$$\begin{aligned}\frac{71,4 + x}{2040 + x} &= \frac{20}{100} \\ \frac{100 \cdot (71,4 + x)}{100 \cdot (2040 + x)} &= \frac{20 \cdot (2040 + x)}{100 \cdot (2040 + x)} \\ 100 \cdot (71,4 + x) &= 20 \cdot (2040 + x) \\ 7140 + 100x &= 40800 = 7140 \\ 80x &= 33660 \\ x &= 420,75 \text{ (thỏa mãn } x > 0\text{)}.\end{aligned}$$

Vậy cần thêm 420,75 (g) muối vào 2 lít nước biển ban đầu để được dung dịch có nồng độ muối là 20%. $\square$

BÀI TẬP

 **Bài 1.** Giải các phương trình

a) $(9x - 4)(2x + 5) = 0$;

b) $(1,3x + 0,26)(0,2x - 4) = 0$;

c) $2x(x + 3) - 5(x + 3) = 0$;

d) $x^2 - 4 + (x + 2)(2x - 1) = 0$.

Hướng dẫn giải.

a) Để giải phương trình đã cho, ta giải hai phương trình sau

$$\text{🔵 } 9x - 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{9};$$

$$\text{🟢 } 2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-5}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{4}{9}$ và $x = \frac{-5}{2}$.

b) Để giải phương trình đã cho, ta giải hai phương trình sau

$$\text{🟢 } 1,3x + 0,26 = 0$$

$$x = \frac{-1}{5};$$

$$\text{🟠 } 0,2x - 4 = 0$$

$$x = 20.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{-1}{5}$ và $x = 20$.

c) $2x(x + 3) - 5(x + 3) = 0$

$$(x + 3)(2x - 5) = 0.$$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau

$$\begin{aligned} x + 3 &= 0 \\ x &= -3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 0 \\ x &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -3$ và $x = \frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad x^2 - 4 + (x + 2)(2x - 1) &= 0 \\ x - 2)(x + 2) + (x + 2)(2x - 1) &= 0 \\ (x + 2)(x - 2 + 2x - 1) &= 0 \\ (x + 2)(3x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau

$$\begin{aligned} x + 2 &= 0 \\ x &= -2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 3 &= 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$.

□

Bài 2. Giải các phương trình

$$\text{a)} \quad \frac{1}{x} = \frac{5}{3(x+2)};$$

$$\text{b)} \quad \frac{x}{2x-1} = \frac{x-2}{2x+5};$$

$$\text{c)} \quad \frac{5x}{x-2} = 7 + \frac{10}{x-2};$$

$$\text{d)} \quad \frac{x^2-6}{x} = x + \frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn giải.

a) Điều kiện xác định: $x \neq 0$ và $x \neq -2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{5}{3(x+2)} \\ \frac{3(x+2)}{3x(x+2)} &= \frac{5x}{3x(x+2)} \\ 3(x+2) &= 5x \\ 3x + 6 &= 5x \\ 2x &= 6 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 3$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$.

b) Điều kiện xác định: $x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq \frac{-5}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2x-1} &= \frac{x-2}{2x+5} \\ \frac{x(2x+5)}{(2x-1)(2x+5)} &= \frac{(x-2)(2x-1)}{(2x+5)(2x-1)} \\ x(2x+5) &= (x-2)(2x-1) \\ 2x^2 + 5x &= 2x^2 - x - 4x + 2 \\ 10x &= 2 \\ x &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Ta thấy $x = \frac{1}{5}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{5}$.

c) Điều kiện xác định: $x \neq 2$.

$$\begin{aligned}\frac{5x}{x-2} &= 7 + \frac{10}{x-2} \\ \frac{5x}{x-2} &= \frac{7(x-2)}{x-2} + \frac{10}{x-2} \\ 5x &= 7(x-2) + 10 \\ 5x &= 7x - 14 + 10 \\ -2x &= -4 \\ x &= 2.\end{aligned}$$

Ta thấy $x = 2$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-6}{x} &= x + \frac{3}{2} \\ \frac{2(x^2-6)}{2x} &= \frac{2x^2}{2x} + \frac{3x}{2x} \\ 2(x^2-6) &= 2x^2 + 3x \\ 2x^2 - 12 &= 2x^2 + 3x \\ 3x &= -12 \\ x &= -4.\end{aligned}$$

Ta thấy $x = -4$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -4$.

□

Bài 3. Một ca nô đi xuôi dòng từ địa điểm A đến địa điểm B, rồi lại đi ngược dòng từ địa điểm B trở về địa điểm A. Thời gian cả đi và về là 3 giờ. Tính tốc độ của dòng nước. Biết tốc độ của ca nô khi nước yên lặng là 27km/h và độ dài quãng đường AB là 40 km.

Hướng dẫn giải.

Gọi tốc độ của dòng nước là x km/h ($0 < x < 27$).

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $27 + x$ (km/h).

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là $27 - x$ (km/h).

Thời gian ca nô xuôi dòng từ A đến B là $\frac{40}{27+x}$ (giờ).

Thời gian ca nô ngược dòng từ B về A là $\frac{40}{27-x}$ (giờ).

Vì thời gian cả đi và về là 3 giờ nên ta có phương trình

$$\begin{aligned}\frac{40}{27+x} + \frac{40}{27-x} &= 3 \\ \frac{40(27-x)}{(27+x)(27-x)} + \frac{40(27+x)}{(27-x)(27+x)} &= \frac{3(27-x)(27+x)}{(27-x)(27+x)} \\ 40(27-x) + 40(27+x) &= 3(27-x)(27+x) \\ 40(27-x+27+x) &= 3(27^2 - x^2) \\ 40 \cdot 2 \cdot 27 &= 3 \cdot 27^2 - 3x^2 \\ 3x^2 &= 27 \\ x^2 &= 9\end{aligned}$$

$$x = 3 \text{ hoặc } x = -3.$$

Ta thấy $x = 3$ thỏa mãn điều kiện xác định; $x = -3$ không thỏa mãn điều kiện xác định. Vậy tốc độ của dòng nước là 3 km/h. $\square$

Bài 4. Một doanh nghiệp sử dụng than để sản xuất sản phẩm. Doanh nghiệp đó lập kế hoạch tài chính cho việc loại bỏ chất ô nhiễm trong khí thải theo dự kiến sau: Để loại bỏ $p\%$ chất ô nhiễm trong khí thải thì chi phí C (triệu đồng) được tính theo công thức: $C = \frac{80}{100-p}$ với $0 \leq p < 100$ (Nguồn: John W. Cell, *Engineering Problems Illustrating Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, năm 1943). Với chi phí là 420 triệu đồng thì doanh nghiệp loại bỏ được bao nhiêu phần trăm chất gây ô nhiễm trong khí thải (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải.

Theo đề bài ta có phương trình

$$\begin{aligned}420 &= \frac{80}{100-p} \\ \frac{420(100-p)}{100-p} &= \frac{80}{100-p} \\ 420(100-p) &= 80 \\ 42000 - 420p &= 80 \\ 420p &= 41920 \\ p &= \frac{41920}{420} \approx 99,8 \text{ (thỏa mãn } 0 \leq p < 100\text{)}.\end{aligned}$$

Vậy với 420 triệu đồng thì doanh nghiệp loại bỏ được 99,8% chất gây ô nhiễm trong khí thải. $\square$

Bài 5. Bạn Hoa dự định dùng hết số tiền 600 nghìn đồng để mua một số chiếc áo đồng giá tặng các bạn có hoàn cảnh khó khăn. Khi đến cửa hàng, loại áo mà bạn Hoa dự định mua được giảm giá 30 nghìn đồng/chiếc. Do vậy bạn Hoa đã mua được số lượng áo gấp 1,25 lần so với số lượng dự định. Tính giá tiền mỗi chiếc áo mà bạn Hoa đã mua.

Hướng dẫn giải.

Gọi giá tiền ban đầu mỗi chiếc áo là x (nghìn đồng) ($x > 30$).

Số áo Hoa dự định mua được là $\frac{600}{x}$ (chiếc).

Số tiền mỗi chiếc áo sau khi giảm giá là $x - 30$ (nghìn đồng).

Số áo Hoa mua được sau khi giảm giá là $\frac{600}{x-30}$ (chiếc).

Theo đề bài số áo thực tế mua được gấp $1,25 = \frac{5}{4}$ lần số áo dự định mua được. Do đó, ta có

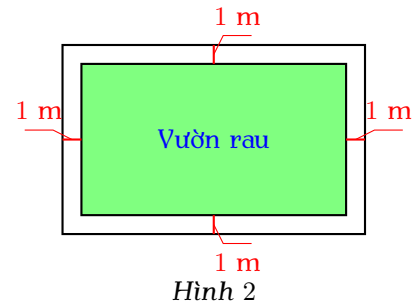
$$\begin{aligned}
 \text{phương trình} \quad \frac{600}{x-30} &= \frac{5}{4} \cdot \frac{600}{x} \\
 \frac{600 \cdot 4 \cdot x}{4x(x-30)} &= \frac{5 \cdot 600 \cdot (x-30)}{4x(x-30)} \\
 2\,400x &= 3\,000(x-30) \\
 2\,400x &= 3\,000x - 90\,000 \\
 600x &= 90\,000
 \end{aligned}$$

$$x = 150 \text{ (thỏa mãn } x > 30).$$

Vậy giá tiền mỗi chiếc áo mà bạn Hoa đã mua là $150 - 30 = 120$ nghìn đồng. $\square$

Bài 6.

Một mảnh đất có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 52 m. Trên mảnh đất đó, người ta làm một vườn rau có dạng hình chữ nhật với diện tích là 112 m^2 và một lối đi xung quanh vườn rộng 1 m (Hình 2). Tính các kích thước của mảnh đất đó.



Hướng dẫn giải.

Nửa chu vi của hình chữ nhật là $52 : 2 = 26 \text{ (m)}$.

Gọi độ dài một cạnh của mảnh đất hình chữ nhật là $x \text{ (m)}$ ($x > 0$).

Suy ra độ dài cạnh còn lại là $26 - x \text{ (m)}$.

Do lối đi được là xung quanh vườn và rộng 1 m nên các kích thước của vườn rau lần lượt là $x - 2 \text{ m}$ và $26 - x - 2 = 24 - x \text{ m}$.

Theo đề bài, diện tích của vườn rau là 112 m^2 nên ta có phương trình $(x - 2)(24 - x) = 112$.

Giải phương trình $(x - 2)(24 - x) = 112$

$$24x - x^2 - 48 + 2x = 112$$

$$x^2 - 26x + 160 = 0$$

$$x^2 - 10x - 16x + 160 = 0$$

$$x(x - 10) - 16(x - 10) =$$

$$(x - 10)(x - 16) = 0$$

$$x - 10 = 0 \text{ hoặc } x - 16 = 0$$

$$x = 10 \text{ hoặc } x = 16.$$

Với $x = 10$ thì độ dài cạnh còn lại là $26 - 10 = 16 \text{ m}$.

Với $x = 16$ thì độ dài cạnh còn lại là $26 - 16 = 10 \text{ m}$.

Vậy độ dài hai cạnh của mảnh đất là 10 m và 16 m. $\square$

Chủ đề 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

❖ **Định nghĩa 2.1.** Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là hệ thức dạng $ax + by = c$, trong đó a, b, c là những số cho trước, $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$.

❖ **Ví dụ 1.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là bậc nhất hai ẩn x, y ?

- a) $2x - y = 1$. b) $0x + 3y = 9$. c) $5x + 0y = -2$. d) $3x^2 - y = 7$.

Hướng dẫn giải.

Phương trình ở các câu a, b, c là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y . Phương trình ở câu d không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y . $\square$

LUYỆN TẬP 1

Cho phương trình bậc nhất hai ẩn x, y :

$$3x - 2y = 6. \quad (1)$$

Tính giá trị của biểu thức ở vế trái của phương trình (1) tại $x = 4; y = 3$. Giá trị đó có bằng 6 hay không?

Hướng dẫn giải.

Tại $x = 4; y = 3$ ta có $3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 12 - 6 = 6$. Vậy giá trị của biểu thức bằng 6. $\square$

❖ **Định nghĩa 2.2.** Cho phương trình bậc nhất hai ẩn $x, y: ax + by = c$. Nếu $ax_0 + by_0 = c$ là một đẳng thức đúng thì cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

❖ **Ví dụ 2.** Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của phương trình $2x - 3y = 5$?

- a) $(1; -1)$. b) $(0; 5)$. c) $(-2; -3)$.

Hướng dẫn giải.

- a) Thay $x = 1; y = -1$, ta có $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 5$.
Vậy $(1; -1)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.
- b) Thay $x = 0; y = 5$, ta có $2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = -15 \neq 5$.
Vậy $(0; 5)$ không là nghiệm của phương trình đã cho.
- c) Thay $x = -2; y = -3$, ta có $2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) = 5$.
Vậy $(-2; -3)$ là một nghiệm của phương trình đã cho. $\square$

❖ Nhận xét 2.1.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , mỗi nghiệm của phương trình $ax + by = c$ được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm $(x_0; y_0)$ được biểu diễn bởi điểm có tọa độ $(x_0; y_0)$.

Ta cũng áp dụng được quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân đã biết ở phương trình bậc nhất một ẩn để biến đổi phương trình bậc nhất hai ẩn.

◉ Ví dụ 3. Cô Hạnh có hai khoản đầu tư với lãi suất là 8% và 10% mỗi năm. Cô Hạnh thu được tiền lãi từ hai khoản đầu tư đó là 160 triệu đồng mỗi năm. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn cho hai khoản đầu tư của cô Hạnh và chỉ ra ba nghiệm của phương trình đó.

📁 Hướng dẫn giải.

Gọi x (triệu đồng) là khoản đầu tư với lãi suất là 8% mỗi năm ($x > 0$). Khi đó, tiền lãi thu được mỗi năm từ khoản đầu tư này là

$$8\% \cdot x = \frac{2x}{25} \text{ (triệu đồng).}$$

Gọi y (triệu đồng) là khoản đầu tư với lãi suất là 10% mỗi năm ($y > 0$). Khi đó, tiền lãi thu được mỗi năm từ khoản đầu tư này là

$$10\% \cdot y = \frac{y}{10} \text{ (triệu đồng).}$$

Ta có phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho hai khoản đầu tư của cô Hạnh là

$$\frac{2x}{25} + \frac{y}{10} = 160 \text{ hay } 4x + 5y = 8000.$$

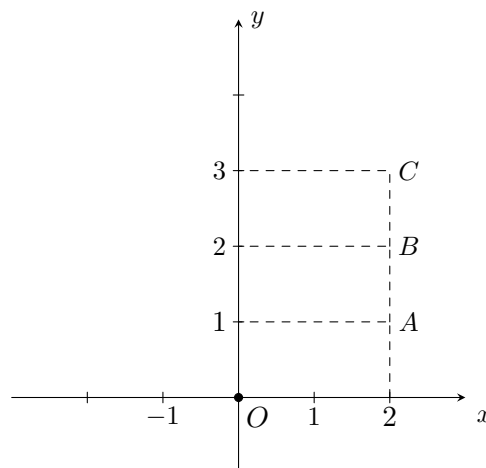
Ba nghiệm của phương trình trên là $(100; 1\,520), (500; 1\,200), (1\,000; 800)$. □

◉ Ví dụ 4. Cho phương trình $x + 0y = 2$.

- Chúng tỏ rằng các cặp số $(2; 1), (2; 2), (2; 3)$ là nghiệm của phương trình trên.
- Trong mặt phẳng Oxy , hãy biểu diễn các nghiệm $(2; 1), (2; 2), (2; 3)$ của phương trình trên.

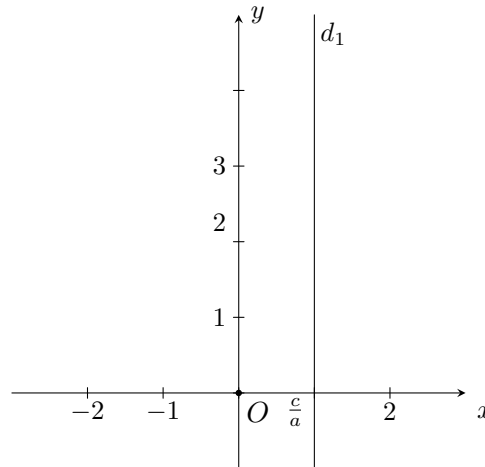
📁 Hướng dẫn giải.

- Do $1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$ là khẳng định đúng nên cặp số $(2; 1)$ là nghiệm của phương trình trên. Tương tự, các cặp số $(2; 2), (2; 3)$ cũng là nghiệm của phương trình trên.
- Các nghiệm $(2; 1), (2; 2), (2; 3)$ lần lượt được biểu diễn bởi các điểm $A(2; 1), B(2; 2), C(2; 3)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy như hình bên.



🔗 **Nhận xét 2.2.**

Mỗi nghiệm của phương trình $ax + 0y = c$ ($a \neq 0$) được biểu diễn có tọa độ $\left(\frac{c}{a}; y_0\right)$ ($y_0 \in \mathbb{R}$) nằm trên đường thẳng $d_1 : x = \frac{c}{a}$. Đường thẳng d_1 là đường thẳng đi qua điểm $\frac{c}{a}$ trên trục Ox và vuông góc với trục Ox .

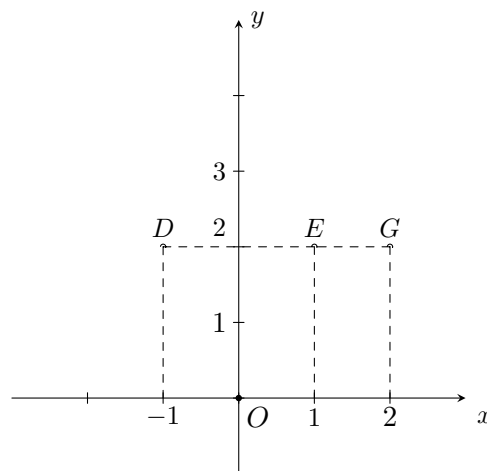


□

❶ Ví dụ 5. Cho phương trình $0x + 2y = 4$.

- Chứng tỏ rằng các cặp số $(-1; 2)$, $(1; 2)$, $(2; 2)$ là nghiệm của phương trình trên.
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy biểu diễn các nghiệm $(-1; 2)$, $(1; 2)$, $(2; 2)$ của phương trình trên.

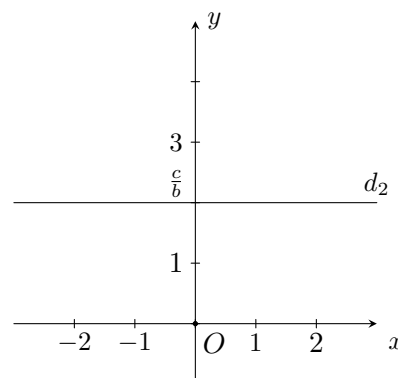
➡ Hướng dẫn giải.



- Do $0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4$ là khẳng định đúng nên cặp số $(-1; 2)$ là nghiệm của phương trình đó. Tương tự, các cặp số $(1; 2)$, $(2; 2)$ cũng là nghiệm của phương trình trên.
- Các nghiệm $(-1; 2)$, $(1; 2)$, $(2; 2)$ lần lượt được biểu diễn bởi các điểm $D(-1; 2)$, $E(1; 2)$, $G(2; 2)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

❧ Nhận xét 2.3.

Mỗi nghiệm của phương trình $0x + by = c$ ($b \neq 0$) được biểu diễn bởi điểm có tọa độ $\left(x_0; \frac{c}{b}\right)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) nằm trên đường thẳng $d_2 : y = \frac{c}{b}$. Đường thẳng d_2 là đường thẳng đi qua điểm $\frac{c}{b}$ trên trục Oy và vuông góc với trục Oy .

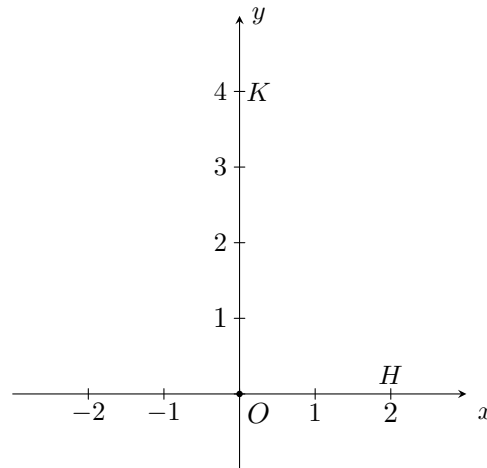




❶ Ví dụ 6. Cho phương trình $2x + y = 4$.

- Chứng minh rằng các cặp số $(2; 0)$, $(0; 4)$ là nghiệm của phương trình trên.
- Trong mặt phẳng Oxy , hãy biểu diễn các nghiệm $(2; 0)$, $(0; 4)$ của phương trình trên.

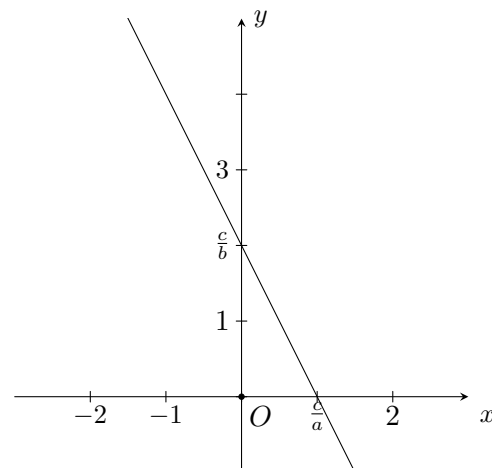
📁 Hướng dẫn giải.



- Do $2 \cdot 2 + 0 = 4$ là khẳng định đúng nên cặp số $(2; 0)$ là nghiệm của phương trình trên. Tương tự, cặp số $(0; 4)$ cũng là nghiệm của phương trình trên.
- Các nghiệm $(2; 0)$, $(0; 4)$ lần lượt được biểu diễn bởi các điểm $H(2; 0)$, $K(0; 4)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

❧ Nhận xét 2.4.

Mỗi nghiệm của phương trình $ax + by = c$ ($a \neq 0, b \neq 0$) được biểu diễn bởi điểm nằm trên đường thẳng $d_3 : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Đường thẳng d_3 là đồ thị của hàm số $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.



B HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

LUYỆN TẬP 2

Hai bạn Dũng, Huy vào mua siêu thị mua vở và bút bi để ủng hộ các bạn học sinh vùng lũ lụt. Bạn Dũng mua 5 quyển vở và 3 chiếc bút bi với tổng số tiền phải trả là 39 000 đồng. Bạn Huy mua 6 quyển vở và 2 chiếc bút bi với tổng số tiền phải trả là 42 000 đồng. Giả sử giá của mỗi quyển vở là x đồng ($x > 0$), giá của mỗi chiếc bút bi

là y đồng ($y > 0$).

- Viết hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y lần lượt biểu thị tổng số tiền phải trả của bạn Dũng, bạn Huy.
- Cặp số $(x; y) = (6\,000; 3\,000)$ có phải là nghiệm của từng phương trình bậc nhất đó hay không? Vì sao?

Hướng dẫn giải.

- Hai phương trình tương ứng là $5x + 3y = 39\,000$ và $6x + 2y = 42\,000$.
- Vì x, y đồng thời thỏa mãn cả hai phương trình nói trên nên ta nói cặp $(x; y) = (6\,000; 3\,000)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x + 3y = 39\,000 \\ 6x + 2y = 42\,000. \end{cases}$$

□

Định nghĩa 2.3.

-  Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} (I)$, ở đó mỗi phương trình $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ đều là phương trình bậc nhất hai ẩn.
-  Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của từng phương trình trong hệ (I) thì cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của hệ (I) .
-  Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó.

Ví dụ 7. Trong những trường hợp sau, hãy chỉ ra các hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

- $$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 3y = -11; \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x = -6; \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 9y = -27 \\ x + 3y = -11; \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 121 \\ x + 3y = -11. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải.

Hệ phương trình ở các câu a, b, c là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Trường hợp ở câu d không phải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. □

Ví dụ 8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 3y = -11. \end{cases}$

Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

- $(-2; -3)$.
- $(1; -1)$.

Hướng dẫn giải.

- Thay giá trị $x = -2, y = -3$ vào mỗi phương trình trong hệ ta có $2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) = 5$, $-2 + 3 \cdot (-3) = -11$.
Suy ra cặp số $(-2; -3)$ là nghiệm của từng phương trình trong hệ.
Do đó cặp số $(-2; -3)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

b) Thay giá trị $x = 1, y = -1$ vào mỗi phương trình trong hệ ta có $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 5$,
 $1 + 3 \cdot (-1) = -2 \neq -11$.

Suy ra cặp số $(1; -1)$ không là nghiệm của phương trình thứ hai trong hệ.
Do đó cặp số $(1; -1)$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

☐

LUYỆN TẬP 3

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ x + y = 6. \end{cases}$

Kiểm tra xem cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình đã cho

a) $(3; 3)$.

b) $(4; 2)$.

Hướng dẫn giải.

a) Thay giá trị $x = 3, y = 3$ vào mỗi phương trình trong hệ ta có

$$2 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = -9 \neq 2.$$

Suy ra cặp số $(3; 3)$ không là nghiệm hệ phương trình đã cho.

b) Thay giá trị $x = 4, y = 2$ vào mỗi phương trình trong hệ ta có

$$2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = -2, 4 + 2 = 6.$$

Suy ra cặp số $(4; 2)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

☐

 BÀI TẬP

 **Bài 7.** Trong các cặp số $(8; 1)$, $(-3; 6)$, $(4; -1)$, $(0; 2)$, cho biết cặp số nào là nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $x - 2y = 6$;

b) $x + y = 3$.

Hướng dẫn giải.

a) Thay cặp số $(x_0; y_0)$ vào phương trình $x - 2y = 6$ (1).

 Với $(8; 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$ thay vào (1), ta có $8 - 2 \cdot 1 = 6$
 $\Rightarrow (8; 1)$ là một nghiệm của phương trình (1).

Với $(-3; 6) \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$ thay vào (1), ta có $-3 - 2 \cdot 6 = -15 \neq 6$
 $\Rightarrow (-3; 6)$ không là nghiệm của phương trình (1).

 Với $(4; -1) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ thay vào (1), ta có $4 - 2 \cdot (-1) = 6$
 $\Rightarrow (4; -1)$ là một nghiệm của phương trình (1).

Với $(0; 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ thay vào (1), ta có $0 - 2 \cdot 2 = -4 \neq 6$
 $\Rightarrow (0; 2)$ không là nghiệm của phương trình (1).

b) Thay cặp số $(x_0; y_0)$ vào phương trình $x + y = 3$ (2).

Với $(8; 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$ thay vào (2), ta có $8 + 1 = 9 \neq 3$
 $\Rightarrow (8; 1)$ không là nghiệm của phương trình (2).

Với $(-3; 6) \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$ thay vào (2), ta có $-3 + 6 = 3$
 $\Rightarrow (-3; 6)$ là một nghiệm của phương trình (2).

Với $(4; -1) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ thay vào (2), ta có $4 + (-1) = 3$
 $\Rightarrow (4; -1)$ là một nghiệm của phương trình (2).

Với $(0; 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ thay vào (2), ta có $0 + 2 = 2 \neq 3$
 $\Rightarrow (0; 2)$ không là nghiệm của phương trình (2).

□

Bài 8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$

Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

a) $(3; -1);$

b) $(1; 0).$

Hướng dẫn giải.

a) Thay giá trị $x = 3; y = -1$ vào mỗi phương trình trong hệ, ta có

$$3 + 2 \cdot (-1) = 1.$$

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 11.$$

Suy ra cặp số $(3; -1)$ là nghiệm của phương trình thứ nhất mà không phải là nghiệm của phương trình thứ hai trong hệ.

Do đó cặp số $(3; -1)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

b) Thay giá trị $x = 1; y = 0$ vào mỗi phương trình trong hệ, ta có

$$1 + 2 \cdot 0 = 1.$$

$$1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 3.$$

Suy ra cặp số $(1; 0)$ là nghiệm của mỗi phương trình trong hệ.

Do đó cặp số $(1; 0)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

□

Bài 9.

Nhân dịp tết Trung thu, một doanh nghiệp dự định sản xuất hai loại bánh: bánh nướng và bánh dẻo. Lượng đường cần cho mỗi chiếc bánh nướng, bánh dẻo lần lượt là 60g và 50g. Gọi x và y lần lượt là số lượng bánh nướng và bánh dẻo mà doanh nghiệp dự định sản xuất để lượng đường sản xuất bánh là 500kg. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn x, y và chỉ ra ba nghiệm của phương trình đó.



Bánh nướng



Bánh dẻo

Hướng dẫn giải.

Ta có $500\text{kg} = 500\,000\text{g}$.

Lượng đường để doanh nghiệp sản xuất x cái bánh nướng là $60x$ (g).

Lượng đường để doanh nghiệp sản xuất y cái bánh dẻo là $50y$ (g).

Lượng đường để doanh nghiệp sản xuất cả hai loại bánh là $500\,000$ (g).

Do đó ta có phương trình

$$60x + 50y = 500\,000 \text{ hay } 6x + 5y = 50\,000. \quad (1)$$

 Thay $x = 5000, y = 4000$ vào phương trình (1) ta có $6 \cdot 5000 + 5 \cdot 4000 = 50\,000$.
 $\Rightarrow (5000; 4000)$ là một nghiệm của phương trình (1).

 Thay $x = 4000, y = 5200$ vào phương trình (1) ta có $6 \cdot 4000 + 5 \cdot 5200 = 50\,000$.
 $\Rightarrow (4000; 5200)$ là một nghiệm của phương trình (1).

 Thay $x = 2500, y = 7000$ vào phương trình (1) ta có $6 \cdot 2500 + 5 \cdot 7000 = 50\,000$.
 $\Rightarrow (2500; 7000)$ là một nghiệm của phương trình (1).

□

 **Bài 10.** Năm bạn Châu, Hà, Khang, Minh, Phong cùng đi mua sticker để trang trí vở. Có hai loại sticker: loại I giá 2 nghìn đồng/chiếc và loại II giá 3 nghìn đồng/chiếc. Mỗi bạn mua 1 chiếc và tổng số tiền năm bạn phải trả là 12 nghìn đồng. Gọi x và y lần lượt là số sticker loại I và loại II mà năm bạn đã mua.

a) Viết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y .

b) Cặp số $(3; 2)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

Hướng dẫn giải.

a) Gọi x và y lần lượt là số sticker loại I và loại II mà năm bạn đã mua.

Do đó ta có phương trình $x + y = 5 \quad (1)$.

Số tiền trả cho sticker loại I là $2x$ nghìn đồng.

Số tiền trả cho sticker loại II là $3y$ nghìn đồng.

Do tổng số tiền năm bạn phải trả là 12 nghìn đồng nên ta có phương trình

$$2x + 3y = 12. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

b) Thay giá trị $x = 3, y = 2$ vào hai phương trình trong hệ, ta có

 $3 + 2 = 5.$

 $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12.$

Suy ra cặp số $(3; 2)$ là nghiệm của cả hai phương trình trong hệ.

Do đó cặp số $(3; 2)$ là nghiệm của hệ phương trình trên.

□

Bài 11. Để chuẩn bị cho buổi liên hoan của gia đình, bác Ngọc mua hai loại thực phẩm là thịt lợn và cá chép. Giá tiền thịt lợn là 130 nghìn đồng/kg, giá tiền cá chép là 50 nghìn đồng/kg. Bác Ngọc đã chi 295 nghìn đồng để mua 3,5 kg hai loại thực phẩm trên. Gọi x và y lần lượt là số kilôgam thịt lợn và cá chép mà bác Ngọc đã mua.

- a) Viết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y .
- b) Cặp số $(1,5; 2)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

Hướng dẫn giải.

- a) Gọi x và y lần lượt là số kilôgam thịt lợn và cá chép mà bác Ngọc đã mua.
Do bác Ngọc mua 3,5 kg cả hai loại thịt lợn và cá chép nên ta có

$$x + y = 3,5. \quad (1)$$

Số tiền để mua x kg thịt lợn là $130x$ nghìn đồng.

Số tiền để mua y kg cá chép là $50y$ nghìn đồng.

Bác Ngọc đã chi 295 nghìn đồng để mua hai loại thực phẩm trên nên ta có

$$130x + 50y = 295 \text{ hay } 26x + 10y = 59. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 3,5 \\ 26x + 10y = 59. \end{cases}$$

- b) Thay giá trị $x = 1,5, y = 2$ vào hai phương trình trong hệ, ta có

$$1,5 + 2 = 3,5.$$

$$26 \cdot 1,5 + 10 \cdot 2 = 59.$$

Suy ra cặp số $(1,5; 2)$ là nghiệm của cả hai phương trình trong hệ.

Do đó cặp số $(1,5; 2)$ là nghiệm của hệ phương trình trên.

□

Bài 12. Người ta cần sơn hai loại sản phẩm A, B bằng hai loại sơn: sơn xanh và sơn vàng. Lượng sơn để sơn mỗi loại sản phẩm được cho ở bảng (đơn vị: kg/1 sản phẩm).

Loại sản phẩm \ Loại sơn	Sơn xanh	Sơn vàng
	Sơn xanh	Sơn vàng
Sản phẩm loại A	0,6	0,3
Sản phẩm loại B	0,5	0,4

Người ta dự định sử dụng 85 kg sơn xanh và 50 kg sơn vàng để sơn tất cả sản phẩm của hai loại đó. Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại A và số sản phẩm loại B được sơn.

- a) Viết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y .
- b) Cặp số $(100; 50)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

Hướng dẫn giải.

- a) Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại A và số sản phẩm loại B được sơn.
Sơn x sản phẩm loại A cần: $0,6x$ kg sơn màu xanh và $0,3x$ kg sơn màu vàng.
Sơn y sản phẩm loại B cần: $0,5y$ kg sơn màu xanh và $0,4y$ kg sơn màu vàng.
Cần sử dụng 85 kg sơn xanh để sơn tất cả sản phẩm của hai loại nên ta có

$$0,6x + 0,5y = 85 \text{ hay } 6x + 5y = 850. \quad (1)$$

Cần sử dụng 50 kg sơn vàng để sơn tất cả sản phẩm của hai loại nên ta có

$$0,3x + 0,4y = 50 \text{ hay } 3x + 4y = 500. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x + 5y = 850 \\ 3x + 4y = 500. \end{cases}$$

- b) Thay giá trị $x = 100, y = 50$ vào hai phương trình trong hệ, ta có

 $6 \cdot 100 + 5 \cdot 50 = 850.$

 $3 \cdot 100 + 4 \cdot 50 = 500.$

Suy ra cặp số $(100; 50)$ là nghiệm của cả hai phương trình trong hệ.
Do đó cặp số $(100; 50)$ là nghiệm của hệ phương trình trên.

□

Chủ đề 3. GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

❖ **Định nghĩa 3.1.** Ta có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế theo các bước sau:

- 🏠 **Bước 1. (Thế)** Từ một phương trình của hệ đã cho, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình một ẩn.
- 🔍 **Bước 2. (Giải phương trình một ẩn)** Giải phương trình (một ẩn) nhận được ở Bước 1 để tìm giá trị của ẩn đó.
- 🔍 **Bước 3. (Tìm ẩn còn lại và kết luận)** Thế giá trị vừa tìm được của ẩn đó ở Bước 2 vào biểu thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia ở Bước 1 để tìm giá trị của ẩn còn lại. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

🔴 **Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ 3x - 2y = 11 & (2) \end{cases}$$

🔵 **Hướng dẫn giải.**

Từ phương trình (1), ta có $y = 5 - 2x$.

Thay vào phương trình (2), ta được

(3)

$$\begin{aligned} 3x - 2 \cdot (5 - 2x) &= 11 \\ 3x - 10 + 4x &= 11 \\ 7x &= 21 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Thay giá trị $x = 3$ vào phương trình (3), ta có

$$y = 5 - 2 \cdot 3 = -1.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; -1)$. □

LUYỆN TẬP 1

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1. \end{cases}$$

🔵 **Hướng dẫn giải.**

Đặt
$$\begin{cases} x - 3y = 2 & (1) \\ -2x + 5y = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta có $x = 3y + 2$.

Thay vào phương trình (2), ta được

(3)

$$\begin{aligned} -2 \cdot (3y + 2) + 5y &= 1 \\ -6y - 4 + 5y &= 1 \\ -y &= 5 \\ y &= -5. \end{aligned}$$

Thay giá trị $y = -5$ vào phương trình (3), ta có

$$x = 3 \cdot (-5) + 2 = -13.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-13; -5)$. $\square$

❶ Ví dụ 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + 12y = -5 & (1) \\ x + 4y = 3 & (2). \end{cases}$$

📁 Hướng dẫn giải.

Từ phương trình (2), ta có $x = 3 - 4y$. (3)

Thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned} 3 \cdot (3 - 4y) + 12y &= -5 \\ 9 - 12y + 12y &= -5 \\ 0y &= -14 \text{ (vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm. $\square$

LUYỆN TẬP 2

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} -2x + 4y = 5 \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$$

📁 Hướng dẫn giải.

Đặt
$$\begin{cases} -2x + 4y = 5 & (1) \\ -x + 2y = 1 & (2). \end{cases}$$

Từ phương trình (2), ta có $x = 2y - 1$. (3)

Thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned} -2 \cdot (2y - 1) + 4y &= 5 \\ -4y + 2 + 4y &= 5 \\ 0y &= 3 \text{ (vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm. $\square$

❶ Ví dụ 3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 12x - 4y = -16 & (1) \\ 3x - y = -4 & (2) \end{cases}$$

📁 Hướng dẫn giải.

Từ phương trình (2), ta có $y = 3x + 4$. (3)

Thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned} 12x - 4 \cdot (3x + 4) &= -16 \\ 12x - 12x - 16 &= -16 \\ 0x &= 0 \text{ (vô số nghiệm)}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm. $\square$

LUYỆN TẬP 3

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = -8. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x - 3y = 4 & (1) \\ -2x + 6y = -8 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta có $x = 3y + 4$.

Thay vào phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned} -2 \cdot (3y + 4) + 6y &= -8 \\ -6y - 8 + 6y &= -8 \\ 0y &= 0 \text{ (vô số nghiệm)}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm. $\square$

❖ **Nhận xét 3.1.** Ta có thể viết phương trình (1) về dạng: $3x - y = -4$.

Do đó, hệ phương trình đã cho có thể viết về dạng: $\begin{cases} 3x - y = -4 \\ 3x - y = -4. \end{cases}$

Vì vậy, nghiệm của hệ phương trình đã cho cũng là nghiệm của phương trình $3x - y = -4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x + 4. \end{cases}$

Chú ý

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có thể có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

B GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

❖ **Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 6y = -9 & (1) \\ 3x + 4y = -5 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải.

Trừ từng vế hai phương trình (1) và (2), ta nhận được phương trình

$$2y = -4, \text{ tức là } y = -2.$$

Thế $y = -2$ vào phương trình (2), ta được phương trình

$$\begin{aligned} 3x + 4 \cdot (-2) &= -5 \\ 3x - 8 &= -5 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -2)$. $\square$

❖ **Ví dụ 5.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x + 2y = 7. \end{cases}$

Hướng dẫn giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \\ 5x + 2y = 7 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình (1) và (2), ta nhận được phương trình

$$-2x = -2, \text{ tức là } x = 1.$$

Thế $x = 1$ vào phương trình (1), ta được phương trình

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 + 2y &= 5 \\ 3 + 2y &= 5 \\ 2y &= 2 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$. □

Chú ý

Cách giải hệ phương trình như trên được gọi là giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.

❶ Ví dụ 6. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 & (1) \\ -2x + 3y = -7 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải.

Nhân hai vế của phương trình (1) với 2 và nhân hai vế của phương trình (2) với 3, ta được

$$\text{hệ phương trình } \begin{cases} 6x + 4y = 8 & (3) \\ -6x + 9y = -21 & (4) \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình (3) và (4), ta nhận được phương trình

$$\begin{aligned} 13y &= -13 \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Thế giá trị $y = -1$ vào phương trình (1), ta được phương trình:

$$\begin{aligned} 3x + 2 \cdot (-1) &= 4 \\ 3x - 2 &= 4 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; -1)$. □

Chú ý

Cách giải hệ phương trình như trên cũng được gọi là giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.

❧ Định nghĩa 3.2.

 **Bước 1.** (Làm cho hai hệ số của một ẩn nào đó bằng nhau hoặc đối nhau)
Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

 **Bước 2.** (Đưa về phương trình một ẩn) Cộng (hay trừ) từng vế hai phương trình của hệ phương trình nhận được ở Bước 1 để nhận được một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0, tức là nhận được phương trình một ẩn. Giải phương trình một ẩn đó.

 **Bước 3.** (Tìm ẩn còn lại và kết luận) Thế giá trị vừa tìm được ở Bước 2 vào một trong hai phương trình của hệ đã cho để tìm giá trị của ẩn còn lại. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

 **Ví dụ 7.** Một trường trung học cơ sở mua 500 quyển vở để làm phần thưởng cho học sinh. Giá bán của mỗi quyển vở loại thứ nhất, loại thứ hai lần lượt là 8 000 đồng, 9 000 đồng. Hỏi nhà trường đã mua mỗi loại bao nhiêu quyển vở? Biết rằng số tiền nhà trường đã dùng để mua 500 quyển vở đó là 4 200 000 đồng.

 **Hướng dẫn giải.**

Gọi số quyển vở loại thứ nhất, loại thứ hai lần lượt là x, y ($x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$).

Theo giả thiết, ta có phương trình: $x + y = 500$.

Mặt khác, ta có phương trình: $8\,000x + 9\,000y = 4\,200\,000$, tức là $8x + 9y = 4200$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 500 & (1) \\ 8x + 9y = 4\,200 & (2) \end{cases}$$

Nhân phương trình (1) cho 8, ta được
$$\begin{cases} 8x + 8y = 4\,000 & (3) \\ 8x + 9y = 4\,200 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế phương trình (3) cho phương trình (2), ta được $y = 200$.

Thay giá trị $y = 200$ vào phương trình (1), ta được:

$$x + 200 = 500, \text{ tức là } x = 300.$$

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (300; 200)$.

Vậy nhà trường đã mua 300 quyển vở loại thứ nhất và 200 quyển vở loại thứ hai. □

LUYỆN TẬP 4

(Bài toán mở đầu:) Một nhóm khách vào cửa hàng bán trà sữa. Nhóm khách đó đã mua 6 cốc trà sữa gồm trà sữa trân châu và trà sữa phô mai. Giá mỗi cốc trà sữa trân châu, trà sữa phô mai lần lượt là 33 000 đồng, 28 000 đồng. Tổng số tiền nhóm khách thanh toán cho cửa hàng là 188 000 đồng. Hỏi nhóm khách đó mua bao nhiêu cốc trà sữa mỗi loại?

 **Hướng dẫn giải.**

Gọi x, y (cốc) lần lượt là số cốc trà sữa trân châu và trà sữa phô mai mà nhóm khách đã mua ($x, y \in \mathbb{N}, x < 6, y < 6$).

Vì nhóm khách đã mua 6 cốc trà sữa nên ta có phương trình: $x + y = 6$.

Lại vì nhóm khách thanh toán cho cửa hàng là 188 000 đồng nên ta lại có phương trình

$$33\,000x + 28\,000y = 188\,000 \text{ hay } 33x + 28y = 188.$$

Do đó, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 6 & (1) \\ 33x + 28y = 188 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta có $x = 6 - y$.

Thế (3) và (2), ta được

$$33 \cdot (6 - y) + 28y = 188$$

$$198 - 33y + 28y = 188$$

$$10 = 5y$$

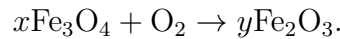
$$y = 2.$$

Thay giá trị $y = 2$ vào phương trình (3), ta có $x = 6 - 2 = 4$.

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 2)$.

Vậy nhóm khách đó đã mua 4 cốc trà sữa trân châu và 2 cốc trà sữa phô mai. $\square$

❶ Ví dụ 8. Tìm các hệ số x, y để cân bằng phương trình phản ứng hóa học:



Hướng dẫn giải.

Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với Fe và O, ta có:
$$\begin{cases} 3x = 2y & (1) \\ 4x + 2 = 3y & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta suy ra $y = \frac{3}{2}x$.

Thế (3) và (2), ta được

$$4x + 2 = 3 \cdot \frac{3}{2}x$$

$$4x + 2 = \frac{9}{2}x$$

$$2 = \frac{1}{2}x$$

$$x = 4.$$

Thay giá trị $x = 4$ vào phương trình (3), ta có

$$y = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6.$$

Do đó, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 6)$.

Vậy ta có phương trình sau cân bằng: $4\text{Fe}_3\text{O}_4 + \text{O}_2 \rightarrow 6\text{Fe}_2\text{O}_3$. $\square$

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

❶ Ví dụ 9. Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải.

Sử dụng loại máy tính phù hợp (chẳng hạn đối với CASIO FX570-VN PLUS), ấn liên tiếp các phím sau:

MODE **5** **1** **1** **=** **-** **3** **=** **2** **=** **-** **2** **=** **5** **=** **1** **=** **=**

Ta thấy trên màn hình hiện ra $x = -13$.

Ấn tiếp phím **=** ta thấy trên màn hình hiện ra $y = -5$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (-13; -5)$. $\square$

LUYỆN TẬP 5

Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + y = 3. \end{cases}$$

 Hướng dẫn giải.

Sử dụng loại máy tính phù hợp (chẳng hạn đối với CASIO FX570-VN PLUS), ấn liên tiếp các phím sau:

MODE **5** **1** **3** **=** **-** **2** **=** **1** **=** **-** **6** **=** **1** **=** **3** **=** **=**

Ta thấy trên màn hình hiện ra $x = -\frac{7}{9}$.

Ấn tiếp phím **=** ta thấy trên màn hình hiện ra $y = -\frac{5}{3}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(-\frac{7}{9}; -\frac{5}{3}\right)$. □

D BÀI TẬP

 **Bài 13.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 8. \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = -2 \\ \frac{3}{2}x - y = 4. \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ -2x + y = 0. \end{cases} \end{array}$$

 Hướng dẫn giải.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 8 \\ x = 2y \\ 3 \cdot 2y + 2y = 8 \\ x = 2y \\ 8y = 8 \\ x = 2 \\ y = 1. \end{cases} \end{array}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \text{b) } \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = -2 \\ \frac{3}{2}x - y = 4 \\ -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}x - 4\right) = -2 \\ y = \frac{3}{2}x - 4 \\ 0x = 0 \\ y = \frac{3}{2}x - 4. \end{cases} \end{array}$$

Phương trình $0x = 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

Các nghiệm của hệ được viết như sau
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{3}{2}x - 4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} 4x - 2.2x = 1 \\ y = 2x \end{cases} \\ & \begin{cases} 0x = 1 \\ -2x + y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình $0x = 1$ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

□

 **Bài 14.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 12x + 18y = -24 \\ -2x - 3y = 4. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - 3y = 5 \\ -2x + 6y = 10. \end{cases}$$

 **Hướng dẫn giải.**

a) Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $3x = 6$. Suy ra $x = 2$.
Thay $x = 2$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $2 - y = 2$. Do đó $y = 0$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(2; 0)$.

b) Nhân hai vế của phương trình thứ hai với -2 , ta được $\begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ -4x + 6y = 0. \end{cases}$
Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $11y = 11$. Suy ra $y = 1$.
Thay $y = 1$ vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được $4x + 5 = 11$. Do đó $x = \frac{3}{2}$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

c) Nhân hai vế của phương trình thứ hai với 6 , ta được $\begin{cases} 12x + 18y = -24 \\ -12x - 18y = 24. \end{cases}$
Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $0 = 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

d) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 , ta được $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases}$
Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $0x = 10$ là phương trình vô nghiệm.
Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

□

 **Bài 15.** Xác định a, b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A, B trong mỗi trường hợp sau

a) $A(1; -2)$ và $B(-2; -11)$;

b) $A(2; 8)$ và $B(-4; 5)$.

Hướng dẫn giải.a) Gọi đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là d .

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \in d \\ B \in d \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} -2 = a + b \\ -11 = -2a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2 - a \\ -11 = -2a - 2 - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2 - a \\ -3a = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -5. \end{cases}$$

b) Gọi đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là d .

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \in d \\ B \in d \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} 8 = 2a + b \\ 5 = -4a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 8 - 2a \\ 5 = -4a + 8 - 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 8 - 2a \\ -6a = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 7. \end{cases}$$

□

Bài 16. Một ca nô đi xuôi dòng một quãng đường 42 km hết 1 giờ 30 phút và ngược dòng quãng đường đó hết 2 giờ 6 phút. Tính tốc độ của ca nô khi nước yên lặng và tốc độ của dòng nước. Biết rằng tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không đổi trên suốt quãng đường và tốc độ của dòng nước cũng không đổi khi ca nô chuyển động.

Hướng dẫn giải.Gọi a (km/h) là tốc độ dòng nước và b (km/h) là tốc độ của ca nô khi nước yên lặng ($x, y > 0$)Khi đó, tốc đi xuôi dòng là $a + b$ và tốc độ đi ngược dòng là $b - a$.

Thời gian đi xuôi dòng là 1 giờ 30 phút, tức 1,5 giờ nên

$$1,5 \cdot (a + b) = 42 \text{ hay } a + b = 28. \quad (1)$$

Thời gian đi ngược dòng là 2 giờ 6 phút, tức 2,1 giờ nên

$$2,1 \cdot (b - a) = 42 \text{ hay } -a + b = 20. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b = 28 \\ -a + b = 20. \end{cases}$

Giải hệ phương trình, ta được $\begin{cases} x = 4 \\ y = 24. \end{cases}$

Vậy tốc độ của dòng nước là 4 km/h và tốc độ của ca nô khi nước yên lặng là 24 km/h. □

Bài 17. Bác Phương chia số tiền 800 triệu đồng của mình cho hai khoản đầu tư. Sau một năm, tổng số tiền lãi thu được là 54 triệu đồng. Lãi suất cho khoản đầu tư thứ nhất

là 6% năm và khoản đầu tư thứ hai là 8% năm. Tính số tiền bác Phương đầu tư cho mỗi khoản.

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y lần lượt là số tiền hai khoản đầu tư của bác Phương ($x, y > 0$).

Tổng số tiền của bác Phương ban đầu là 800 triệu đồng, nên ta có phương trình

$$x + y = 800. \quad (1)$$

Lãi suất cho khoản đầu tư thứ nhất là 6% năm và khoản đầu tư thứ hai là 8% năm, nên ta có phương trình

$$0,06 \cdot x + 0,08 \cdot y = 54 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 800 \\ 0,06 \cdot x + 0,08 \cdot y = 54. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} x = 500 \\ y = 300 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy bác Phương đầu tư cho khoản thứ nhất và thứ hai lần lượt là 500 triệu đồng và 300 triệu đồng. $\square$

Bài 18. Nhân dịp ngày Giỗ Tổ Hùng Vương, một siêu thị điện máy đã giảm giá nhiều mặt hàng để kích cầu mua sắm. Giá niêm yết của một chiếc tủ lạnh và một chiếc máy giặt có tổng số tiền là 25,4 triệu đồng. Tuy nhiên, trong dịp này tủ lạnh giảm 40% giá niêm yết và máy giặt giảm 25% giá niêm yết. Vì thế, cô Liên đã mua hai mặt hàng trên với tổng số tiền là 16,77 triệu đồng. Hỏi giá niêm yết của mỗi mặt hàng trên là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y là giá trị của tủ lạnh và máy giặt khi chưa giảm giá ($x, y > 0$).

Tổng số tiền của một chiếc tủ lạnh và một chiếc máy giặt trước khi giảm giá là 25,4, nên ta có phương trình

$$x + y = 25,4. \quad (1)$$

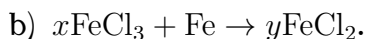
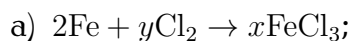
Tổng số tiền của một chiếc tủ lạnh và một chiếc máy lạnh sau khi được giảm là 16,77, nên ta có phương trình

$$0,6 \cdot x + 0,75 \cdot y = 16,77. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 25,4 \\ 0,6 \cdot x + 0,75 \cdot y = 16,77. \end{cases}$$

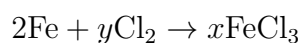
Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} x = 12,5 \\ y = 10,2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).} \quad \square$$

Bài 19. Tìm các hệ số x, y để cân bằng mỗi phương trình phản ứng hoá học sau



Hướng dẫn giải.

a) Gọi x, y lần lượt là hệ số của Fe và Cl_2 thỏa mãn cân bằng phương trình hóa học

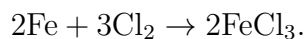


Cân bằng số nguyên tử Fe và số nguyên tử Cl_2 ở hai vế ta được hệ

$$\begin{cases} 2 = x \\ 2y = 3x. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $x = 2$ và $y = 3$.

Đưa các hệ số tìm được vào phương trình hóa học, ta có



b) Gọi x, y lần lượt là hệ số của Fe và Cl thỏa mãn cân bằng phương trình hóa học



Cân bằng số nguyên tử Fe và số nguyên tử Cl ở hai vế ta được hệ

$$\begin{cases} x + 1 = y \\ 3x = 2y. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $x = 2$ và $y = 3$.

Đưa các hệ số tìm được vào phương trình hóa học, ta có



□

Chủ đề 4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

- ❖ **Câu 1.** Nghiệm của phương trình $\frac{1}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{6}$ là
 (A) $x = 3$. (B) $x = -3$. (C) $x = 6$. (D) $x = -6$.

📁 **Hướng dẫn giải.**

Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - \frac{3}{2x} &= \frac{1}{6} \\ \frac{6}{6x} - \frac{9}{6x} &= \frac{x}{6x} \\ 6 - 9 &= x \\ x &= -3.\end{aligned}$$

Ta thấy $x = -3$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -3$.

Chọn đáp án (B)

□

B

- ❖ **Câu 2.** Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$ là
 (A) $(x; y) = (4; 5)$. (B) $(x; y) = (5; 4)$. (C) $(x; y) = (-5; -4)$. (D) $(x; y) = (-4; -5)$.

📁 **Hướng dẫn giải.**

$$\begin{aligned}\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = 8 \\ x - y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 5. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (4; 5)$.

Chọn đáp án (A)

□

A

✍ **Bài 20.** Giải các phương trình:

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $(3x + 7)(4x - 9) = 0$; | b) $(5x - 0, 2)(0, 3x + 6) = 0$; |
| c) $x(2x - 1) + 5(2x - 1) = 0$; | d) $x^2 - 9 - (x + 3)(3x + 1) = 0$; |
| e) $x^2 - 10x + 25 = 5(5 - x)$; | f) $4x^2 = (x - 12)^2$. |

📁 **Hướng dẫn giải.**

$$\begin{aligned}\text{a) } (3x + 7)(4x - 9) &= 0 \\ 3x + 7 &= 0 & \text{ hoặc } & 4x - 9 = 0 \\ 3x &= -7 & \text{ hoặc } & 4x = 9 \\ x &= -\frac{7}{3} & \text{ hoặc } & x = \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\frac{7}{3}$ và $x = \frac{9}{4}$.

b) $(5x - 0,2)(0,3x + 6) = 0$

$5x - 0,2 = 0$ hoặc $0,3x + 6 = 0$

$5x = 0,2$ hoặc $0,3x = -6$

$x = 0,04$ hoặc $x = -20$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0,04$ và $x = -20$.

c) $x(2x - 1) + 5(2x - 1) = 0$

$(2x - 1)(x + 5) = 0$

$2x - 1 = 0$ hoặc $x + 5 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -5$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{1}{2}$ và $x = -5$.

d) $x^2 - 9 - (x + 3)(3x + 1) = 0$

$(x - 3)(x + 3) - (x + 3)(3x + 1) = 0$

$(x + 3)(x - 3 - 3x - 1) = 0$

$(x + 3)(-2x - 4) = 0$

$x = -3$ hoặc $x = -2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -3$ và $x = -2$.

e) $x^2 - 10x + 25 = 5(5 - x)$

$(x - 5)^2 + 5(x - 5) = 0$

$(x - 5)(x - 5 + 5) = 0$

$x(x - 5) = 0$

$x = 0$ hoặc $x = 5$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 5$.

f) $4x^2 = (x - 12)^2$

$(2x)^2 - (x - 12)^2 = 0$

$(2x - x + 12)(2x + x + 12) = 0$

$(x + 12)(3x + 12) = 0$

$x = -12$ hoặc $x = -4$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -12$ và $x = -4$.

□

 **Bài 21.** Giải các phương trình:

a) $\frac{-6}{x+3} = \frac{2}{3};$

b) $\frac{x-2}{2} + \frac{1}{2x} = 0;$

c) $\frac{8}{3x-4} = \frac{1}{x+2};$

d) $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} = 1;$

e) $\frac{3x-2}{x+1} = 4 - \frac{x+2}{x-1};$

f) $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = 1 - \frac{1}{x-1}.$

 **Hướng dẫn giải.**

a) $\frac{-6}{x+3} = \frac{2}{3}.$

Điều kiện xác định: $x \neq -3$.

$$\begin{aligned}\frac{-6}{x+3} &= \frac{2}{3} \\ \frac{-18}{3(x+3)} &= \frac{2(x+3)}{3(x+3)} \\ -18 &= 2x+6 \\ 2x &= -24 \\ x &= -12.\end{aligned}$$

Ta thấy $x = -12$ thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -12$.

b) $\frac{x-2}{2} + \frac{1}{2x} = 0$.
Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{x(x-2)}{2x} + \frac{1}{2x} &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ x-1 &= 0 \\ x &= 1.\end{aligned}$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

c) $\frac{8}{3x-4} = \frac{1}{x+2}$.
Điều kiện xác định: $x \neq -2$; $x \neq \frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned}\frac{8}{3x-4} &= \frac{1}{x+2} \\ 8(x+2) &= 3x-4 \\ 8x+16 &= 3x-4 \\ 5x &= -20 \\ x &= -4.\end{aligned}$$

Ta thấy $x = -4$ thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -4$.

d) $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} = 1$.
Điều kiện xác định: $x \neq 2$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} &= 1 \\ x(x-2) + 2 &= (x-2)^2 \\ x^2 - 2x + 2 &= x^2 - 4x + 4 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1.\end{aligned}$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

e) $\frac{3x-2}{x+1} = 4 - \frac{x+2}{x-1}$.
Điều kiện xác định: $x \neq -1$ và $x \neq 1$.

$$\begin{aligned}\frac{3x-2}{x+1} &= 4 - \frac{x+2}{x-1} \\ (3x-2)(x-1) &= 4(x^2-1) - (x+2)(x+1) \\ 3x^2-3x-2x+2 &= 4x^2-4-x^2-3x-2 \\ -2x &= -8 \\ x &= 4.\end{aligned}$$

Ta thấy $x = 4$ thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 4$.

f) $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = 1 - \frac{1}{x-1}$.
Điều kiện xác định: $x \neq 1$ và $x \neq 2$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} &= 1 - \frac{1}{x-1} \\ x^2 &= (x-1)(x-2) - (x-2) \\ x^2 &= x^2 - 3x + 2 - x + 2 \\ 4x &= 4 \\ x &= 1.\end{aligned}$$

Ta thấy $x = 1$ không thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

□

 **Bài 22.** Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x+3y=-2 \\ 5x+8y=11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 3x-2y=-3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-4y=-1 \\ -3x+6y=2. \end{cases}$

 **Hướng dẫn giải.**

a) $\begin{cases} x+3y=-2 \\ 5x+8y=11 \\ -5x-15y=10 \\ 5x+8y=11 \\ -7y=21 \\ 5x+8y=11 \\ y=-3 \\ 5x+8 \cdot (-3)=11 \\ y=-3 \\ 5x=35 \\ y=-3 \\ x=7. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (7; -3)$.

b) $\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 3x-2y=-3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x + 6y = -4 \\ 9x - 6y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x = -13 \\ 9x - 6y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ 9 \cdot (-1) - 6y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (-1; 0)$.

c) $\begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x - 12y = -3 \\ -6x + 12y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0x + 0y = 1 \text{ (phương trình vô nghiệm)} \\ -6x + 12y = 0. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

□

Bài 23. Một nhóm bạn trẻ cùng tham gia khởi nghiệp và dự định góp vốn là 240 triệu đồng, số tiền góp mỗi người là như nhau. Nếu có thêm 2 người tham gia cùng thì số tiền mỗi người góp giảm đi 4 triệu đồng. Hỏi nhóm bạn trẻ đó có bao nhiêu người?

Hướng dẫn giải.

Gọi x (người) là số người, y (triệu đồng) là số tiền mỗi bạn góp lúc đầu (điều kiện: $x \in \mathbb{N}^*$, $y > 0$).

Tổng số tiền nhóm người góp là 240 triệu đồng nên ta có phương trình:

$$x \cdot y = 240 \text{ hay } x = \frac{240}{y}. \quad (1)$$

Khi thêm 2 người tham gia cùng thì số tiền mỗi người góp giảm đi 4 triệu đồng nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} (x + 2)(y - 4) &= 240 \\ 2y - 4x + 2y - 8 &= 240 \\ 240 - 4 \cdot \frac{240}{y} + 2y - 8 &= 240 \\ 2y^2 - 8y - 960 &= 0 \\ y &= -20 \text{ (loại)} \text{ hoặc } y = 24. \end{aligned}$$

Thay $y = 24$ vào (1) ta được $x = 10$. Vậy nhóm bạn trẻ có 10 người.

□

Bài 24. Một nhóm công nhân cần phải cắt cỏ ở một số mặt sân cỏ. Nếu nhóm công nhân đó sử dụng 3 máy cắt cỏ ngồi lái và 2 máy cắt cỏ đẩy tay trong 10 phút thì cắt được 2990 m² cỏ. Nếu nhóm công nhân đó sử dụng 4 máy cắt cỏ ngồi lái và 3 máy cắt cỏ đẩy tay trong 10 phút thì cắt được 4060 m² cỏ. Hỏi trong 10 phút, mỗi loại máy trên sẽ cắt được bao nhiêu mét vuông cỏ?

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y lần lượt là số mét vuông cỏ cắt được trong 10 phút của máy cắt cỏ ngồi lái và máy cắt cỏ đẩy tay ($x > 0, y > 0$).

Vì khi sử dụng 3 máy cắt cỏ ngồi lái và 2 máy cắt cỏ đẩy tay trong 10 phút thì cắt được 2990 m^2 cỏ nên ta có phương trình

$$3x + 2y = 2990. \quad (1)$$

Vì khi sử dụng 4 máy cắt cỏ ngồi lái và 3 máy cắt cỏ đẩy tay trong 10 phút thì cắt được 4060 m^2 cỏ nên ta có phương trình

$$4x + 3y = 4060. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 2y = 2990 \\ 4x + 3y = 4060. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được
$$\begin{cases} x = 850 \\ y = 220. \end{cases}$$

Vậy trong 10 phút, máy cắt cỏ ngồi lái cắt được 850 m^2 và máy cắt cỏ đẩy tay cắt được 220 m^2 .

□

Bài 25. Tại một buổi biểu diễn nhằm gây quỹ từ thiện, ban tổ chức đã bán được 500 vé. Trong đó có hai loại vé: vé loại I giá 100 000 đồng; vé loại II giá 75 000 đồng. Tổng số tiền thu được từ bán vé là 44 500 000 đồng. Tính số vé bán ra của mỗi loại.

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y lần lượt là số vé loại I, II mà ban tổ chức bán ra ($x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$).

Vì ban tổ chức bán được 500 vé nên ta có phương trình

$$x + y = 500. \quad (1)$$

Vì tổng số tiền thu được từ bán vé là 44 500 000 đồng nên ta có phương trình

$$100\,000x + 75\,000y = 44\,500\,000. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 100\,000x + 75\,000y = 44\,500\,000. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được
$$\begin{cases} x = 280 \\ y = 220. \end{cases}$$

Vậy số vé loại I bán được là 280 vé, số vé loại II bán được là 220 vé.

□

Bài 26. Trong một đợt khuyến mãi, siêu thị giảm giá cho mặt hàng A là 20% và mặt hàng B là 15% so với giá niêm yết. Một khách hàng mua 2 món hàng A và 1 món hàng B thì phải trả số tiền là 362 000 đồng. Nhưng nếu mua trong khung giờ vàng thì mặt hàng A được giảm giá 30% và mặt hàng B được giảm giá 25% so với giá niêm yết. Một khách hàng mua 3 món hàng A và 2 món hàng B trong khung giờ vàng nên phải trả số tiền là 552 000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi mặt hàng A và B.

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y (đồng) lần lượt là giá niêm yết của mỗi mặt hàng A và B ($x > 0, y > 0$).

Một khách hàng mua 2 món hàng A và 1 món hàng B thì phải trả số tiền là 362 000 đồng nên ta có

$$80\%x \cdot 2 + 85\%y = 362\,000 \text{ hay } 1,6x + 0,85y = 362\,000. \quad (1)$$

Trong giờ vàng, khách hàng mua 3 món hàng A và 2 món hàng B phải trả số tiền là 552 000

đồng nên ta có

$$70\%x \cdot 3 + 75\%y \cdot 2 = 552\,000 \text{ hay } 2,1x + 1,5y = 552\,000. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 1,6x + 0,85y = 362\,000 \\ 2,1x + 1,5y = 552\,000. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được
$$\begin{cases} x = 120\,000 \\ y = 200\,000. \end{cases}$$

Vậy giá niêm yết của mặt hàng A là 120 000 đồng, mặt hàng B là 200 000 đồng. $\square$

Bài 27. Trong phòng thí nghiệm, cô Linh muốn tạo ra 500 g dung dịch HCl 19% từ hai loại dung dịch HCl 10% và HCl 25%. Hỏi cô Linh cần dùng bao nhiêu gam cho mỗi loại dung dịch đó?

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y lần lượt là số gam dung dịch HCl 10% và HCl 25% cô Linh cần dùng ($x > 0, y > 0$). Vì dung dịch tạo thành có 500 g nên ta có phương trình

$$x + y = 500. \quad (1)$$

Vì nồng độ dung dịch sau khi tạo là HCl 19% nên ta có

$$\frac{10\%x + 25\%y}{500} = 19\% \text{ hay } 0,1x + 0,25y = 95. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 0,1x + 0,25y = 95. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được
$$\begin{cases} x = 200 \\ y = 300. \end{cases}$$

Vậy cô Linh đã dùng 200 gam dung dịch HCl 10%, và 300 gam dung dịch HCl 25%. $\square$

Bài 28. Một ca nô đi xuôi dòng từ địa điểm A đến địa điểm B và lại ngược dòng từ địa điểm B về địa điểm A mất 9 giờ, tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không đổi trên suốt quãng đường đó và tốc độ của dòng nước cũng không đổi khi ca nô chuyển động. Biết thời gian ca nô đi xuôi dòng 5 km bằng thời gian ca nô đi ngược dòng 4 km và quãng đường AB là 160 km. Tính tốc độ của ca nô khi nước yên lặng và tốc độ của dòng nước.

Hướng dẫn giải.

Gọi vận tốc xuôi dòng của ca nô là x (km/h), thời gian đi xuôi dòng của ca nô là y (giờ) ($x > 0, y > 0$).

Vì quãng đường AB là 160 km nên ta có phương trình $xy = 160. \quad (1)$

Vì ca nô đi xuôi dòng 5 km bằng thời gian ca nô đi ngược dòng 4 km nên vận tốc ngược dòng là $\frac{4}{5}x$.

Vì ca nô đi xuôi dòng từ địa điểm A đến địa điểm B và lại ngược dòng từ địa điểm B về địa điểm A mất 9 giờ nên thời gian đi ngược dòng là $9 - y$.

Khi đó ta có phương trình $\frac{4}{5}x \cdot (9 - y) = 160. \quad (2).$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} xy = 160 \\ \frac{4}{5}x \cdot (9 - y) = 160 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} xy = 160 \\ \frac{36}{5}x - \frac{4}{5}xy = 160 \end{cases}$$

Thay $xy = 160$ vào phương trình $\frac{36}{5}x - \frac{4}{5}xy = 160$, ta được $\frac{36}{5}x - \frac{4}{5} \cdot 160 = 160$.

Giải phương trình trên, ta được $x = 40$ (km/h). Do đó $x = \frac{160}{40} = 4$ (giờ).

Do đó vận tốc xuôi dòng là 40 km/h, vận tốc ngược dòng $\frac{4}{5} \cdot 40 = 32$ km/h.

Vận tốc của dòng nước là $(40 - 32) : 2 = 4$ km/h.

Vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là $40 - 4 = 36$ km/h. □

Chương 2.



BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chủ đề 1. BẤT ĐẲNG THỨC

A NHẮC LẠI VỀ THỨ TỰ TRONG TẬP HỢP SỐ THỰC

Nếu số thực a nhỏ hơn số thực b , ta viết $a < b$ hay $b > a$.

Số thực lớn hơn 0 gọi là số thực dương.

Số thực nhỏ hơn 0 gọi là số thực âm.

Ta đã có kết quả sau:

Trên trục số nằm ngang, nếu số thực a nằm bên trái số thực b thì $a < b$ hay $b > a$.



Tổng của hai số thực dương là số thực dương. Tổng của hai số thực âm là số thực âm.

Với hai số thực a, b ta có

+) $ab > 0$ thì a, b cùng dương hoặc cùng âm (hay a, b cùng dấu và ngược lại).

+) $ab < 0$ thì a, b trái dấu và ngược lại.

Với a, b là hai số thực dương, nếu $a > b$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Ví dụ 1. So sánh:

a) $3\frac{1}{7}$ và 3,14; b) 4 và $\sqrt{17}$.

Hướng dẫn giải.

a) Do $3\frac{1}{7} = 3,1428\dots$ nên $3\frac{1}{7} > 3,14$.

b) Ta có $4 = \sqrt{16}$.
Do $16 < 17$ nên $\sqrt{16} < \sqrt{17}$ hay $4 < \sqrt{17}$.

LUYỆN TẬP 1

So sánh:

a) $5\frac{1}{4}$ và 5,251; b) $\sqrt{5}$ và $\sqrt{\frac{26}{5}}$.

Hướng dẫn giải.

a) Do $5\frac{1}{4} = 5,25$ nên $5\frac{1}{4} < 5,251$.

b) Do $5 < \frac{26}{5}$ nên $\sqrt{5} < \sqrt{\frac{26}{5}}$.

□

B BẤT ĐẲNG THỨC

1 Khái niệm

Khái niệm

Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ (hay $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

Chú ý

a) Hai bất đẳng thức $a < b$ và $c < d$ (hay $a > b$ và $c > d$) được gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều.

b) Hai bất đẳng thức $a < b$ và $c > d$ (hay $a > b$ và $c < d$) được gọi là hai bất đẳng thức ngược chiều.

Ví dụ 2. Trong các cặp bất đẳng thức sau đây, cặp bất đẳng thức nào cùng chiều?

a) $3 < 4$ và $11 < 23$;

b) $\sqrt{50} > 7$ và $6 > \sqrt{34}$.

c) $\sqrt{17} > \sqrt{13}$ và $\sqrt{82} < \sqrt{97}$.

Hướng dẫn giải.

Cặp bất đẳng thức ở các câu a, b là cặp bất đẳng thức cùng chiều. Cặp bất đẳng thức ở câu c là cặp bất đẳng thức ngược chiều. □

LUYỆN TẬP 2

Hãy viết hai cặp bất đẳng thức cùng chiều.

Hướng dẫn giải.

Ví dụ

$5 < 9,18$ và $\sqrt{27} < 9$;

$-5 > -19,18$ và $\sqrt{7} > 2$.

□

2 TÍNH CHẤT

Ta thừa nhận các khẳng định sau

Với hai số thực a và b , ta có

🏠 Nếu $a > b$ thì $a - b > 0$. Ngược lại, nếu $a - b > 0$ thì $a > b$.

🏠 Nếu $a < b$ thì $a - b < 0$. Ngược lại, nếu $a - b < 0$ thì $a < b$.

🏠 Nếu $a \geq b$ thì $a - b \geq 0$. Ngược lại, nếu $a - b \geq 0$ thì $a \geq b$.

🏠 Nếu $a \leq b$ thì $a - b \leq 0$. Ngược lại, nếu $a - b \leq 0$ thì $a \leq b$.

🔗 **Nhận xét 1.1.** Do khẳng định nêu trên, để chứng minh $a > b$, ta có thể chứng minh $a - b > 0$ hoặc $b - a < 0$.

🔗 **Ví dụ 3.** Cho $a < b$. Chứng minh

a) $a + b > 2a$;

b) $5a - b < 4a$;

c) $a - 1 < b + 6$.

📁 **Hướng dẫn giải.**

Do $a < b$ nên $b - a > 0$ và $a - b < 0$.

a) Xét hiệu $a + b - 2a = b - a > 0$. Vậy $a + b > 2a$.

b) Xét hiệu $(5a - b) - 4a = a - b < 0$. Vậy $5a - b < 4a$.

c) Xét hiệu $(b + 6) - (a - 1) = b - a + 7$.

Do $b - a > 0$ và $7 > 0$ nên $(b - a) + 7 > 0$.

Vậy $(b + 6) - (a - 1) > 0$ hay $a - 1 < b + 6$.

□

LUYỆN TẬP 3

Cho $a \geq 2b$. Chứng minh:

a) $2a - 1 \geq a + 2b - 1$;

b) $4b + 4a \leq 5a + 2b$.

📁 **Hướng dẫn giải.**

Do $a \geq 2b$ nên $a - 2b \geq 0$.

a) Xét hiệu $(2a - 1) - (a + 2b - 1) = a - 2b \geq 0$. Vậy $2a - 1 \geq a + 2b - 1$.

b) Xét hiệu $(5a + 2b) - (4b + 4a) = a - 2b \geq 0$. Vậy $5a + 2b \geq 4b + 4a$ hay $4b + 4a \leq 5a + 2b$.

□

Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức, ta được một bất đẳng mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

🏠 Như vậy, nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$ với mọi số thực c .

🏠 Tương tự, nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$ với mọi số thực c .

○ Ví dụ 4. Chứng minh $\frac{2024}{2023} > \frac{2025}{2024}$.

➤ Hướng dẫn giải.

Do $\frac{1}{\frac{2023}{2024}} > \frac{1}{\frac{2024}{2025}}$ nên $\frac{1}{2023} + 1 > \frac{1}{2024} + 1$.

Vậy $\frac{2024}{2023} > \frac{2025}{2024}$. □

○ Ví dụ 5. Cho $a^2 \leq 1$. Chứng minh $(a+1)^2 \leq 2a+2$.

➤ Hướng dẫn giải.

Do $a^2 \leq 1$ nên $a^2 + 2a + 1 \leq 1 + 2a + 1$, suy ra $(a+1)^2 \leq 2a+2$

Vậy $(a+1)^2 \leq 2a+2$. □

LUYỆN TẬP 4

Chứng minh:

a) $\sqrt{11} - \sqrt{3} > \sqrt{10} - \sqrt{3}$;

b) $(a-1)^2 \geq 4-2a$ với $a^2 \geq 3$.

➤ Hướng dẫn giải.

a) Do $\sqrt{11} > \sqrt{10}$ nên $\sqrt{11} - \sqrt{3} > \sqrt{10} - \sqrt{3}$.

b) Do $a^2 \geq 3$ nên $a^2 - (2a-1) \geq 3 - (2a-1)$, suy ra $a^2 - 2a + 1 \geq 4 - 2a$.

Vậy $(a-1)^2 \geq 4-2a$ với $a^2 \geq 3$. □

Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số a, b, c mà $c > 0$, ta có

⊗ Nếu $a > b$ thì $ac > bc$.

⊗ Nếu $a < b$ thì $ac < bc$.

⊗ Nếu $a \geq b$ thì $ac \geq bc$.

⊗ Nếu $a \leq b$ thì $ac \leq bc$.

○ Ví dụ 6. Cho $a < b$. Chứng minh $2a+1 < 2b+1$.

➤ Hướng dẫn giải.

Do $a < b$ nên $2a < 2b$. Vậy $2a+1 < 2b+1$. □

LUYỆN TẬP 5

Cho $a \geq b$. Chứng minh $5b-2 \leq 5a-2$.

➤ Hướng dẫn giải.

Vì $a \geq b$ nên $5a \geq 5b$, suy ra $5a \geq 5b$.

Do đó $5a-2 \geq 5b-2$ hay $5b-2 \leq 5a-2$. Vậy $5b-2 \leq 5a-2$. □

Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số âm, ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

Như vậy, với ba số a, b, c mà $c < 0$, ta có

🟢 Nếu $a > b$ thì $ac < bc$.

🟢 Nếu $a < b$ thì $ac > bc$.

🟢 Nếu $a \geq b$ thì $ac \leq bc$.

🟢 Nếu $a \leq b$ thì $ac \geq bc$.

🔴 **Ví dụ 7.** Cho $a < b$. Chứng minh

a) $3a + 19 > -3b + 19$;

b) $-2a - 8 > -2b - 8$.

📖 **Hướng dẫn giải.**

a) Do $a < b$ nên $-3a > -3b$, suy ra $-3a + 19 > -3b + 19$.

b) Do $a < b$ nên $-2a > -2b$, suy ra $-2a - 8 > -2b - 8$.

□

LUYỆN TẬP 6

Cho $a \leq 1$. Chứng minh $(a - 1)^2 \geq a^2 - 1$.

📖 **Hướng dẫn giải.**

Vì $a \leq 1$ nên $-2a \geq -2$, suy ra $-2a + a^2 + 1 \geq -2 + a^2 + 1$.

Do đó $(a - 1)^2 \geq a^2 - 1$.

□

🔴 **Ví dụ 8.** Cho $a > b$ và $c > d$. Chứng minh $a + c > b + d$.

📖 **Hướng dẫn giải.**

Do $a > b$ nên $a + c > b + c$.

Lại có $c > d$ nên $b + c > b + d$.

Vậy $a + c > b + d$.

□

LUYỆN TẬP 7

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a > b$ và $c > d$. Chứng minh: $ac > bd$.

📖 **Hướng dẫn giải.**

Do $a > b$ nên $ac > bc$ (vì $c > 0$).

Lại có $c > d$ nên $bc > bd$ (vì $b > 0$).

Vậy $ac > bd$.

□

🔴 **Ví dụ 9.** Một ca nô đi xuôi dòng trong 2 giờ 30 phút. Biết rằng tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không quá 40 km/h và tốc độ của dòng nước là 6 km/h. Chứng minh quãng đường ca nô đi được trong thời gian trên không vượt quá 115 km/h.

📖 **Hướng dẫn giải.**

Gọi tốc độ của ca nô khi nước yên lặng là x (km/h) ($x > 6$). Tốc độ ca nô đi xuôi dòng là $x + 6$ (km/h).

Ta có $x \leq 40$ nên $x + 6 \leq 40 + 6$, tức là $x + 6 \leq 46$.

Gọi s (km) là quãng đường ca nô đi được trong 2 giờ 30 phút = 2,5 giờ.

Ta có $s = 2,5 \cdot (x + 6)$ (km). Do $x + 6 \leq 46$ nên $2,5 \cdot (x + 6) \leq 2,5 \cdot 46 = 115$ hay $s \leq 115$.

Vậy quãng đường ca nô đi được trong 2 giờ 30 phút không vượt quá 115 km.

□

❶ Ví dụ 10. Chỉ số cơ thể, thường được biết đến với tên viết tắt **BMI** (tiếng anh là *Body Mass Index*) cho phép đánh giá thể trạng của một người là gầy, bình thường hay béo. Chỉ số cơ thể của người được tính theo công thức sau $BMI = \frac{m}{h^2}$, trong đó m là khối lượng cơ thể tính theo kilôgam, h là chiều cao tính theo mét. Căn cứ vào bảng đánh giá thể trạng ở người lớn theo BMI đối với khu vực châu Á - Thái Bình Dương, một người đàn ông có $BMI \geq 30$ sẽ bị béo phì độ II (trung bình) hoặc độ III (nặng), người đó cần phải có biện pháp tập thể dục, thể thao, thay đổi chế độ dinh dưỡng để có được cơ thể khỏe mạnh (Nguồn: Toán 7—Tập Hai, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017). Bác Dũng có chiều cao 1,65 và cân nặng ít nhất là 82 kg. Hỏi bác Dũng có bị béo phì độ II hoặc độ III không?

➤ Hướng dẫn giải.

Gọi m (kg) là khối lượng cơ thể của bác Dũng, h (m) là chiều cao của bác Dũng. Theo giả thiết, ta có $m \geq 82$; $h = 1,65$. Do đó chỉ số BMI của bác Dũng là

$$BMI = \frac{m}{(1,65)^2} = \frac{m}{2,7225}$$

Do $m \geq 82$ nên $\frac{m}{2,7225} \geq \frac{82}{2,7225}$.

Vì $\frac{82}{2,7225} \approx 30,11938$ và $30,11938 > 30$ nên $\frac{m}{2,7225} > 30$.

Như vậy bác Dũng có thể đã bị béo phì độ II hoặc độ III. □

© BÀI TẬP

✎ Bài 1. Chứng minh

a) $\sqrt{29} - \sqrt{6} > \sqrt{28} - \sqrt{6}$;

b) $26,2 < 2a + 3,2 < 26,4$ với $11,5 < a < 11,6$.

➤ Hướng dẫn giải.

a) Ta có

$$\sqrt{29} > \sqrt{28} \text{ (vì } 29 > 28)$$

Cộng hai vế cho $-\sqrt{6}$ ta được

$$\sqrt{29} - \sqrt{6} > \sqrt{28} - \sqrt{6}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{29} - \sqrt{6} > \sqrt{28} - \sqrt{6}.$$

b) Ta có $11,5 < a < 11,6$

Nhân 2 vào hai vế ta được

$$23 < 2a < 23,2$$

Cộng 3,2 vào hai vế ta được

$$26,2 < 2a + 3,2 < 26,4.$$

□

✎ Bài 2. Chứng minh

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} < a^2 + \frac{4}{5}$ với $a \neq 0$;

b) $2m + 4 > 2n + 3$ với $m > n$.

➤ Hướng dẫn giải.

a) Ta có $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{5}{20}$.

Mà $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$ nên $\frac{5}{20} < \frac{16}{20}$.

Do đó $\frac{1}{4} < \frac{4}{5} < a^2 + \frac{4}{5}$ với $a \neq 0$.

Vậy $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} < a^2 + \frac{4}{5}$ với $a \neq 0$.

b) $2m + 4 > 2n + 3$ với $m > n$.

Ta có $m > n$

Nhân 2 vào hai vế

Ta được $2m > 2n$

Cộng 4 vào hai vế

Ta được $2m + 4 > 2n + 3$.

□

Bài 3.

a) Cho $a > b > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

b) Áp dụng kết quả trên, hãy so sánh $\frac{2022}{2023}$ và $\frac{2023}{2024}$.

Hướng dẫn giải.

a) Cho $a > b > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Ta có $a > b > 0$ nên $ab > 0$ do đó $\frac{1}{ab} > 0$.

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức $a > b$ cho $\frac{1}{ab}$

Ta được $a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab}$ hay $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

Do đó $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

b) Áp dụng kết quả trên, hãy so sánh $\frac{20022}{2023}$ và $\frac{2023}{2024}$.

Ta có
 $\frac{2022}{2023} = 1 - \frac{1}{2023}$.

$\frac{2023}{2024} = 1 - \frac{1}{2024}$.

Vì $\frac{1}{2023} > \frac{1}{2024}$ nên $1 - \frac{1}{2023} < 1 - \frac{1}{2024}$ hay $\frac{2022}{2023} < \frac{2023}{2024}$.

□

Bài 4. Chứng minh $x^2 + y^2 \geq 2xy$ với mọi số thực x, y .

Hướng dẫn giải.

Ta có $(x - y)^2 \geq 0$ với mọi số thực x, y

Suy ra $x^2 + y^2 \geq 2xy$

Suy ra $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$.

Dấu "=" khi $(x - y)^2 = 0$ suy ra $x = y$.

□

 Bài 5. Nồng độ trong máu (tiếng anh là *Blood Alcohol Content*, viết tắt: BAC) được định nghĩa là tỉ lệ phần trăm lượng rượu (ethyl alcohol hoặc rthanol) trong máu của một người. Chẳng hạn, nồng độ cồn trong máu là 0,05% nghĩa là có 50 mg rượu trong 100 ml máu. Càng uống nhiều rượu bia thì nồng độ cồn trong máu càng cao và càng nguy hiểm

khi tham gia giao thông. Nghị định 100/2019/NĐCP-CP quy định mức xử phạt vi phạm chính đối với người điều khiển xe gắn máy uống rượu bia khi tham gia giao thông như sau

Mức độ xử phạt	Hình thức xử phạt
Mức 1: Nồng độ trong máu dương và chưa vượt quá 50 mg/100 ml máu	Từ 2 triệu đồng đến 3 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 10 tháng đến 12 tháng
Mức 2: Nồng độ trong máu dương và vượt quá 50 mg/100 ml máu và chưa vượt quá 80 mg/100 ml máu	Từ 4 triệu đồng đến 5 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 16 tháng đến 18 tháng
Mức 3: Nồng độ trong máu dương và chưa vượt quá 80 mg/100 ml máu	Từ 6 triệu đồng đến 8 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 22 tháng đến 24 tháng

Giả sử nồng độ cồn trong máu của một người sau khi uống rượu bia được tính theo công thức sau: $y = 0,076 - 0,008t$, trong đó y được tính theo đơn vị % và t là số giờ tính từ khi uống rượu bia. Hỏi 3 giờ sau khi uống rượu bia, nếu người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ bị xử phạt ở mức nào?



Hướng dẫn giải.

Nồng độ cồn máu của người này là $y = 0,076 - 0,008 \cdot 3 = 0,0736\%$.

Nghĩa là có 73,6 ml rượu trong 100 ml máu.

Vậy người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ bị xử phạt ở mức 2.

□

Chủ đề 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A MỞ ĐẦU VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

⇔ Định nghĩa 2.1.

✎ Một bất phương trình với ẩn x có dạng $A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$, $A(x) \geq B(x)$, $A(x) \leq B(x)$) trong đó về trái $A(x)$ và về phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x .

🍯 Khi thay giá trị $x = a$ vào bất phương trình với ẩn x , ta được một khẳng định đúng thì số a (hay giá trị $x = a$) gọi là nghiệm của bất phương trình đó.

Chú ý

Giải bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

🔴 Ví dụ 1. Trong các giá trị sau của x , giá trị nào là nghiệm của bất phương trình

$$x + 4 > 2x - 12$$

a) $x = 1$.

b) $x = 17$.

📁 Hướng dẫn giải.

- a) Khi thay giá trị $x = 1$ vào bất phương trình đã cho, ta được $1 + 4 > 2 \cdot 1 - 12$ là khẳng định đúng. Vậy giá trị $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- b) Khi thay giá trị $x = 17$ vào bất phương trình đã cho, ta được $17 + 4 > 2 \cdot 17 - 12$ là khẳng định không đúng. Vậy giá trị $x = 17$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

□

LUYỆN TẬP 1

Cho biết giá trị $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau:

a) $5x + 4 > 4x - 12$

b) $x^2 - 3x + 5 \leq 4$.

📁 Hướng dẫn giải.

- a) Khi thay $x = 3$ vào bất phương trình $5x + 4 > 4x - 12$, ta được $5 \cdot 3 + 4 > 4 \cdot 3 - 12$ là khẳng định đúng. Vậy giá trị $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- b) Khi thay $x = 3$ vào bất phương trình $x^2 - 3x + 5 \leq 4$, ta được $3^2 - 3 \cdot 3 + 5 \leq 4$ là khẳng định không đúng. Vậy giá trị $x = 3$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

□

B BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

⇔ **Định nghĩa 2.2.** Bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$) với a, b là hai số đã cho và $a \geq 0$ được gọi là **bất phương trình bậc nhất một ẩn**.

❶ **Ví dụ 2.** Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $3x - 6 > 0$.

b) $-13x + 20 < 0$.

c) $7y \geq 0$.

d) $2x^2 - 19 \leq 0$.

➡ **Hướng dẫn giải.**

Bất phương trình ở các câu a, b, c là bất phương trình bậc nhất một ẩn. Bất phương trình ở câu d không là bất phương trình bậc nhất một ẩn. □

LUYỆN TẬP 2

Nêu hai ví dụ về bất phương trình bậc nhất một ẩn x .

➡ **Hướng dẫn giải.**

Hai bất phương trình bậc nhất một ẩn x là

a) $2x + 4 \leq$.

b) $-x - 3 > 0$. □

❶ **Ví dụ 3.** Kiểm tra xem giá trị $x = 5$ có phải là nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất sau hay không?

a) $6x - 29 > 0$.

b) $11x - 52 > 0$.

c) $x - 2 \leq 0$.

➡ **Hướng dẫn giải.**

a) Thay $x = 5$, ta có: $6 \cdot 5 - 29 > 0$ là khẳng định đúng.

Vậy $x = 5$ là nghiệm của bất phương trình $6x - 29 > 0$.

b) Thay $x = 5$, ta có: $11 \cdot 5 - 52 > 0$ là khẳng định đúng.

Vậy $x = 5$ là nghiệm của bất phương trình $11x - 52 > 0$.

c) Thay $x = 5$, ta có: $5 - 2 \leq 0$ là khẳng định không đúng.

Vậy $x = 5$ không là nghiệm của bất phương trình $x - 2 \leq 0$. □

C CÁCH GIẢI

Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a > 0$) được giải như sau:

$$\begin{aligned} ax + b &> 0 \\ ax &> -b \\ x &> -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$x > -\frac{b}{a}.$$

Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a < 0$) được giải như sau:

$$\begin{aligned} ax + b &> 0 \\ ax &> -b \\ x &< -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -\frac{b}{a}$.

Chú ý

Các bất phương trình bậc nhất $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$ được giải bằng cách tương tự.

❶ Ví dụ 4. Giải các bất phương trình:

a) $-0,3x + 12 > 0$.

b) $\frac{3}{4}x - 6 \leq 0$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $-0,3x + 12 > 0$

$$-0,3x > -12$$

$$x < \frac{-12}{-0,3}$$

$$x < 40.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < 40$.

b) Ta có $\frac{3}{4}x - 6 \leq 0$

$$\frac{3}{4}x \leq 6$$

$$x \leq 6 \cdot \frac{4}{3}$$

$$x \leq 8.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \leq 8$.

□

LUYỆN TẬP 3

Giải các bất phương trình:

a) $-8x - 27 < 0$.

b) $\frac{5}{4}x + 20 \geq 0$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $-8x - 27 < 0$

$$-8x < 27$$

$$x > \frac{-27}{8}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > \frac{-27}{8}$.

b) Ta có $\frac{5}{4}x + 20 \geq 0$

$$\frac{5}{4}x \geq -20$$

$$x \geq -20 \cdot \frac{4}{5}$$

$$x \geq -16.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \geq -16$.

□

❶ Ví dụ 5. Giải bất phương trình $3x - (6 + 2x) \leq 3(x + 4)$.

➡ Hướng dẫn giải.

Ta có $3x - (6 + 2x) \leq 3(x + 4)$

$$3x - 6 - 2x \leq 3x + 12$$

$$x - 6 \leq 3x + 12$$

$$-6 - 12 \leq 3x - x$$

$$-18 \leq 2x$$

$$x \geq -9.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \geq -9$.

□

LUYỆN TẬP 4

Giải bất phương trình: $2(x - 0,5) - 1,4 \geq 1,5 - (x + 1,2)$.

➡ Hướng dẫn giải.

Ta có $2(x - 0,5) - 1,4 \geq 1,5 - (x + 1,2)$

$$2x - 1 - 1,4 \geq 1,5 - x - 1,2$$

$$2x - 1,5 \geq 0,3 - x$$

$$2x + x \geq 0,3 + 1,5$$

$$3x \geq 1,8$$

$$x \geq 0,6.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \geq 0,6$.

□

❶ Ví dụ 6. Tìm chỗ sai trong lời giải sau và giải lại cho đúng:

$$3x - 5 - 2x > 25 + 4x$$

$$3x - 2x - 4x > 25 + 5$$

$$-3x > 30$$

$$x > 30 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$x > -10.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > -10$.

➡ Hướng dẫn giải.

Khi nhân cả hai vế của bất phương trình $-3x > 30$ với $-\frac{1}{3}$, ta phải đổi chiều bất phương trình vì $-\frac{1}{3} < 0$. Vì vậy, lời giải trên sai ở bước thứ tư. Ta có thể giải lại như sau:

$$3x - 5 - 2x > 25 + 4x$$

$$\begin{aligned}
 3x - 2x - 4x &> 25 + 5 \\
 -3x &> 30 \\
 x &< 30 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\
 x &< -10.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -10$. □

◉ Ví dụ 7. Bác Ngọc gửi tiền tiết kiệm kì hạn 12 tháng ở một ngân hàng với lãi suất 7,2%/năm. Bác Ngọc dự định tổng số tiền nhận được sau khi gửi 12 tháng ít nhất là 21440000 đồng. Hỏi bác Ngọc phải gửi số tiền tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu để đạt được dự định đó?

📁 Hướng dẫn giải.

Giả sử bác Ngọc gửi x (đồng) tiền tiết kiệm kì hạn 12 tháng ($x > 0$). Khi đó, tổng số tiền bác Ngọc nhận được sau khi gửi 12 tháng là

$$x + 7,2\% \cdot x = \left(1 + \frac{7,2}{100}\right)x = \frac{1072}{1000}x = \frac{134}{125}x \text{ (đồng)}.$$

Theo giả thiết, ta có $\frac{134}{125}x \geq 21440000$.

Giải bất phương trình trên, ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{134}{125}x &\geq 21440000 \\
 x &\geq 21440000 \cdot \frac{125}{134}
 \end{aligned}$$

$$x \geq 20000000$$

Vậy bác Ngọc phải gửi số tiền tiết kiệm ít nhất là 20 triệu đồng để đạt được dự định. □

◉ Ví dụ 8. Tổng chi phí của một doanh nghiệp sản xuất áo sơ mi là 410 triệu đồng/tháng. Giá bán của mỗi chiếc áo sơ mi là 350 nghìn đồng. Hỏi trung bình mỗi tháng doanh nghiệp phải bán được ít nhất bao nhiêu chiếc áo sơ mi để thu được lợi nhuận ít nhất là 1,38 tỉ đồng sau 1 năm?

📁 Hướng dẫn giải.

Giả sử trung bình mỗi tháng doanh nghiệp bán được x chiếc áo sơ mi ($x \in \mathbb{N}^*$). Lợi nhuận của doanh nghiệp sau 12 tháng là

$$12(350000x - 410000000) \text{ (đồng)}.$$

Do đó, để doanh nghiệp thu được lợi nhuận ít nhất là 1,38 tỉ đồng thì

$$12(350000x - 410000000) \geq 1380000000.$$

Giải bất phương trình trên, ta có

$$\begin{aligned}
 12(350000x - 410000000) &\geq 1380000000 \\
 350000x - 410000000 &\geq 115000000 \\
 350000x &\geq 115000000 + 410000000 \\
 350000x &\geq 525000000 \\
 x &\geq \frac{525000000}{350000} \\
 x &\geq 1500.
 \end{aligned}$$

Vậy trung bình mỗi tháng doanh nghiệp phải bán được ít nhất 1500 chiếc áo sơ mi để doanh nghiệp thu được lợi nhuận ít nhất là 1,38 tỉ đồng sau 1 năm. $\square$

D BÀI TẬP

 **Bài 6.** Kiểm tra xem số nào là nghiệm của mỗi bất phương trình tương ứng sau đây.

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$ với $x = -3; x = 1,5$.

b) $2 - 2x < 3x + 1$ với $x = \frac{2}{5}; x = \frac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải.

a) Thay $x = -3$, ta có $(-3)^2 - 3(-3) + 2 > 0$ là khẳng định đúng.

Vậy $x = -3$ là nghiệm của bất phương trình.

Thay $x = -1,5$, ta có $(-1,5)^2 - 3(-1,5) + 2 > 0$ là khẳng định không đúng.

Vậy $x = -1,5$ không là nghiệm của bất phương trình.

b) Thay $x = \frac{2}{5}$, ta có $2 - 2 \cdot \frac{2}{5} < 3 \cdot \frac{2}{5} + 1$ là khẳng định đúng.

Vậy $x = \frac{2}{5}$ là nghiệm của bất phương trình.

Thay $x = \frac{1}{5}$, ta có $2 - 2 \cdot \frac{1}{5} < 3 \cdot \frac{1}{5} + 1$ là khẳng định không đúng.

Vậy $x = \frac{1}{5}$ không là nghiệm của bất phương trình.

$\square$

 **Bài 7.** Giải các bất phương trình

a) $2x + 6 > 1;$

b) $0,6x + 2 > 6x + 9;$

c) $1,7x + 4 \geq 2 + 1,5x.$

Hướng dẫn giải.

a) $2x + 6 \geq 1$

$$2x \geq 1 - 6$$

$$2x \geq -5$$

$$x \geq -\frac{5}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -\frac{5}{2}$.

$$\text{b)} \quad 0,6x + 2 > 6x + 9$$

$$0,6x - 6x > 9 - 2$$

$$-5,4x > 7$$

$$-5,4x > 7$$

$$x < 7 : (-5,4)$$

$$x < -\frac{35}{27}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -\frac{35}{27}$.

$$\text{c)} \quad 1,7x + 4 \geq 2 + 1,5x$$

$$1,7x - 1,5x \geq 2 - 4$$

$$0,2x \geq -2$$

$$x \geq -2 : 0,2$$

$$x \geq -10$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -10$.

□

 **Bài 8.** Giải các bất phương trình:

$$\text{a)} \quad \frac{8-3x}{2} - x < 5;$$

$$\text{b)} \quad 3 - 2x - \frac{6+4x}{3} > 0;$$

$$\text{c)} \quad 0,7x + \frac{2x-4}{3} - \frac{x}{6} > 1.$$

 **Hướng dẫn giải.**

$$\text{a)} \quad \frac{8-3x}{2} - x < 5$$

$$(8-3x) - 2x < 10$$

$$8-3x-2x < 10$$

$$-5x < 10-8$$

$$x > 2 : (-5)$$

$$x > -0,4.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -0,4$.

$$\text{b)} \quad 3 - 2x - \frac{6+4x}{3} > 0$$

$$9 - 6x - (6+4x) > 0$$

$$9 - 6x - 6 - 4x > 0$$

$$-10x > -3$$

$$x < (-3) : (-10)$$

$$x < -0,3.$$

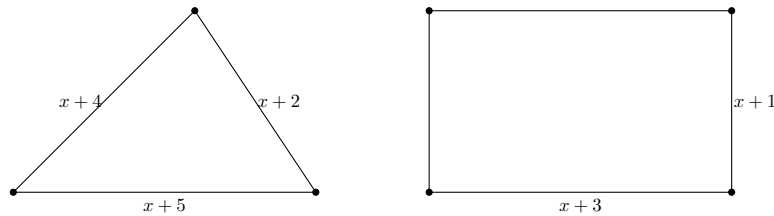
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -0,3$.

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & 0,7x + \frac{2x-4}{3} - \frac{x}{6} > 1 \\
 & 4,2x + 2(2x-4) - x > 6 \\
 & 4,2x + 4x - 8 - x > 6 \\
 & 4,2x + 4x - x > 6 + 8 \\
 & 7,2x > 14 \\
 & x > 14 : 7,2 \\
 & x > \frac{35}{18}.
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{35}{18}$.

□

Bài 9. Tìm $x > 0$ sao cho ở Hình 2 chu vi của hình tam giác luôn hơn chu vi của hình chữ nhật



Hình 2

Hướng dẫn giải.

Chu vi tam giác là $x + 2 + x + 4 + x + 5 = 3x + 11$.

Chu vi hình chữ nhật là $2(x + 3 + x + 1) = 4x + 8$.

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned}
 3x + 11 &> 4x + 8 \\
 3x - 4x &> 8 - 11 \\
 -x &> -3 \\
 x &< 3
 \end{aligned}$$

Vậy $0 < x < 3$.

□

Bài 10. Một kho chứa 100 tấn xi măng, mỗi ngày đều xuất đi 20 tấn xi măng. Gọi x là số ngày xuất xi măng của kho đó. Tìm x sao cho khối lượng xi măng còn lại trong kho ít nhất là 10 tấn sau x ngày xuất hàng.

Hướng dẫn giải.

Sau x ngày khối lượng xi măng được xuất đi là $20x$.

Khối lượng xi măng còn lại trong kho sau x ngày là $100 - 20x$.

Theo bài ra ta có $100 - 20x \geq x$.

$$\begin{aligned}
 100 - 20x &\geq x \\
 -20x - x &\geq -100 \\
 -21x &\geq -100 \\
 x &\leq (-100) : (-21) \\
 x &\leq \frac{100}{21}
 \end{aligned}$$

Vậy $0x \in \{1; 2; 3; 4\}$.

□

TÌM TÒI-MỞ RỘNG (ĐỌC THÊM)

QUY TẮC CHUYỂN VẾ VÀ QUY TẮC NHÂN ĐỐI VỚI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Tương tự như bất đẳng thức đối với bất phương trình, ta cũng có các quy tắc sau:

-  Quy tắc chuyển vế: Trong một bất phương trình, ta có thể chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia và đổi dấu số hạng đó.
-  Quy tắc nhân với một số (gọi tắt là quy tắc nhân): Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải:
 -  Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương;
 -  Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

Chú ý: Nhân cả hai vế với $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$) cũng có nghĩa là chia cả hai vế cho a . Do đó quy tắc nhân còn có thể phát biểu như sau:

Khi chia hai vế của bất phương trình cho cùng một số khác 0, ta phải:

-  Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương;
-  Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

Chủ đề 3. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

 **Bài 11.** Cho bất đẳng thức $a > b$. Kết luận nào sau đây là **không** đúng?

- a) $2a > 2b$. b) $-a < -b$. c) $a - 3 < b - 3$. d) $a - b > 0$.

 **Hướng dẫn giải.**

Kết luận không đúng là c. Vì $a > b$ thì $a - 3 > b - 3$. □

 **Bài 12.** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

- a) Bất phương trình $ax + b < 0$ với $a > 0$ có nghiệm là $x < \frac{-b}{a}$.
 b) Bất phương trình $ax + b < 0$ với $a \neq 0$ có nghiệm là $x < \frac{-b}{a}$.
 c) Bất phương trình $ax + b < 0$ với $a < 0$ có nghiệm là $x > \frac{-b}{a}$.
 d) Bất phương trình $ax + b < 0$ với $a \neq 0$ có nghiệm là $x > \frac{-b}{a}$.

 **Hướng dẫn giải.**

 Các phát biểu đúng là: a, c.

 Các phát biểu sai là: b, d. □

 **Bài 13.** Chứng minh:

- a) Nếu $a > 5$ thì $\frac{a-1}{2} - 2 > 0$;
 b) Nếu $b > 7$ thì $4 - \frac{b+3}{5} < 2$;

 **Hướng dẫn giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a-1}{2} - 2 &> 0 \\ \frac{a-1-4}{2} &> 0 \\ \frac{a-5}{2} &> 0\end{aligned}$$

Vì $a > 5$ nên $a - 5 > 0$ và $2 > 0$, suy ra $\frac{a-5}{2} > 0$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có

$$\begin{aligned}4 - \frac{b+3}{5} &< 2 \\2 - \frac{b+3}{5} &< 0 \\ \frac{10-b-3}{5} &< 0 \\ \frac{7-b}{5} &< 0.\end{aligned}$$

Vì $b > 7$ nên $7 - b < 0$ và $5 > 0$, suy ra $\frac{7-b}{5} < 0$.

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

 **Bài 14.** Cho $4,2 < a < 4,3$. Chứng minh $13,8 < 3a + 1,2 < 14,1$.

 **Hướng dẫn giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}4,2 &< a < 4,3 \\12,6 &< 3a < 12,9 \\13,8 &< 3a + 1,2 < 14,1.\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

 **Bài 15.** Cho $a \geq 2$. Chứng minh:

a) $a^2 \geq 2a$;

b) $(a+1)^2 \geq 4a+1$.

 **Hướng dẫn giải.**

a)

$$\begin{aligned}a^2 &\geq 2a \\a^2 - 2a &\geq 0 \\a(a-2) &\geq 0.\end{aligned}$$

Vì $a \geq 2$ nên $a > 0$ và $a - 2 \geq 0$, suy ra $a(a-2) \geq 0$ đúng.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b)

$$\begin{aligned}(a+1)^2 &\geq 4a+1 \\a^2 + 2a + 1 - 4a - 1 &\geq 0 \\a^2 - 2a &\geq 0 \\a(a-2) &\geq 0.\end{aligned}$$

Vì $a \geq 2$ nên $a > 0$ và $a - 2 \geq 0$, suy ra $a(a-2) \geq 0$ đúng.

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

 **Bài 16.** Chứng minh nửa chu vi của một tam giác lớn hơn độ dài mỗi cạnh của tam giác đó.

 **Hướng dẫn giải.**

Gọi độ dài 3 cạnh của một tam giác lần lượt là a, b, c ($a, b, c > 0$).

Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $a + b > c, b + c > a, c + a > b$.

Nửa chu vi của tam giác: $p = \frac{a + b + c}{2} > \frac{a + a}{2} = a$.

Tương tự, ta có $p > b, p > c$.

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

 **Bài 17.** Giải các bất phương trình:

a) $5 + 7x \leq 11;$

b) $2,5x - 6 > 9 + 4x;$

c) $2x - \frac{x-7}{3} < 9;$

d) $\frac{3x+5}{2} + \frac{x}{5} - 0,2x \geq 4.$

 **Hướng dẫn giải.**

a)

$$\begin{aligned} 5 + 7x &\leq 11 \\ 7x &\leq 11 - 5 \\ 7x &\leq 6 \\ x &\leq 6 : 7 \\ x &\leq \frac{6}{7}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2,5x - 6 &> 9 + 4x \\ \frac{5}{2}x - 4x &> 9 + 6 \\ -\frac{3}{2}x &> 15 \\ x &< 15 : \frac{-3}{2} \\ x &< -10 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x - \frac{x-7}{3} &< 9 \\ 6x - (x-7) &< 27 \\ 6x - x + 7 &< 27 \\ 5x &< 27 - 7 \\ 5x &< 20 \\ x &< 20 : 5 \\ x &< 4. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{3x+5}{2} + \frac{x}{5} - 0,2x &\geq 4 \\ \frac{3x+5}{2} + \frac{x}{5} - \frac{1}{5}x &\geq 4 \\ \frac{3x+5}{2} &\geq 4 \\ 3x + 5 &\geq 8 \\ 3x &\geq 8 - 5 \\ 3x &\geq 3 \\ x &\geq 3 : 3 \\ x &\geq 1. \end{aligned}$$

□

 **Bài 18.** Để đổi từ độ Fahrenheit (độ F) sang độ Celsius (độ C), người ta dùng công thức sau:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

- a) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là $95^{\circ}F$. Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ C ?
- b) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là $36^{\circ}C$. Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ F ?

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $C = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32$.

Gọi x là nhiệt độ (theo độ C) ngoài trời khi đó, ta có bất phương trình

$$\begin{aligned}\frac{9}{5}x + 32 &\geq 95 \\ \frac{9}{5}x &\geq 95 - 32 \\ \frac{9}{5}x &\geq 63 \\ x &\geq 63 : \frac{9}{5} \\ x &\geq 35.\end{aligned}$$

Vậy nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là 35 độ C .

- b) Gọi y là nhiệt độ ngoài trời của ngày mùa hè (theo độ F), ta có bất phương trình.

$$\begin{aligned}\frac{5}{9}(y - 32) &\geq 36 \\ y - 32 &\geq 36 : \frac{5}{9} \\ y - 32 &\geq \frac{324}{5} \\ y &\geq \frac{324}{5} + 32 \\ y &\geq \frac{484}{5} \\ y &\geq 96,8.\end{aligned}$$

Vậy nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là 96,8 độ F .

□

Bài 19. Một nhà máy sản xuất xi măng mỗi ngày đều sản xuất được 100 tấn xi măng. Lượng xi măng tồn trong kho của nhà máy là 300 tấn. Hỏi nhà máy đó cần ít nhất bao nhiêu ngày để có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng (tính cả lượng xi măng tồn trong kho)?

Hướng dẫn giải.

Gọi x là số ngày cần để nhà máy đó có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng ($x \in \mathbb{N}^*$).

Theo đề bài, ta có bất phương trình sau

$$\begin{aligned}300 + 100x &\geq 15\,300 \\ 100x &\geq 15\,300 - 300 \\ 100x &\geq 15\,000 \\ x &\geq 15\,000 : 100\end{aligned}$$

$$x \geq 150.$$

Vậy nhà máy đó cần ít nhất 150 ngày để có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng. $\square$

Bài 20. Đến ngày 31/12/2022, gia đình bác Hoa đã tiết kiệm được số tiền là 250 triệu đồng. Sau thời điểm đó, mỗi tháng gia đình bác Hoa đều tiết kiệm được 10 triệu đồng. Gia đình bác Hoa dự định mua một chiếc ô tô tải nhỏ để vận chuyển hàng hoá với giá tối thiểu là 370 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng gia đình bác Hoa có thể mua được chiếc ô tô tải đó bằng số tiền tiết kiệm được?

Hướng dẫn giải.

Gọi x là số tháng để gia đình bác Hoa tiết kiệm đủ tiền mua chiếc ô tô tải.
Theo đề bài, ta có bất phương trình

$$\begin{aligned} 250 + 10x &\geq 370 \\ 10x &\geq 370 - 250 \\ 10x &\geq 120 \\ x &\geq 120 : 10 \\ x &\geq 12. \end{aligned}$$

Vậy sau ít nhất 12 tháng gia đình bác Hoa có thể mua được chiếc ô tô tải đó bằng số tiền tiết kiệm được. $\square$

Bài 21. Chỉ số khối cơ thể, thường được biết đến với tên viết tắt BMI (tiếng Anh là Body Mass Index) cho phép đánh giá thể trạng của một người là gầy, bình thường hay béo. Chỉ số khối cơ thể của một người được tính theo công thức sau

$$\text{BMI} = \frac{m}{h^2}$$

trong đó m là khối lượng cơ thể tính theo kilôgam, h là chiều cao tính theo mét.
Dưới đây là bảng đánh giá thể trạng ở người lớn theo BMI đối với khu vực châu Á – Thái Bình Dương

Nam	Nữ
BMI < 20: Gầy	BMI < 18: Gầy
$20 \leq \text{BMI} < 25$: Bình thường	$18 \leq \text{BMI} < 23$: Bình thường
$25 \leq \text{BMI} < 30$: Béo phì độ I (nhẹ)	$23 \leq \text{BMI} < 30$: Béo phì độ I (nhẹ)
$30 \leq \text{BMI} < 40$: Béo phì độ II (trung bình)	$30 \leq \text{BMI} < 40$: Béo phì độ II (trung bình)
$40 \leq \text{BMI}$: Béo phì độ III (nặng)	$40 \leq \text{BMI}$: Béo phì độ III (nặng)

- Giả sử một người đàn ông có chiều cao 1,68 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của người đó dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.
- Giả sử một người phụ nữ có chiều cao 1,6 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của người đó dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.

Hướng dẫn giải.

- Ta có $\text{BMI} = \frac{m}{h^2} \Rightarrow m = \text{BMI} \cdot h^2$. Từ đó ta lập được bảng về thể trạng dựa trên chỉ số cân nặng của một người đàn ông cao 1,68 m như sau

Cân nặng (kg)	Thể trạng
$m < 56,448$	Gầy
$56,448 \leq m < 70,56$	Bình thường
$70,56 \leq m < 84,672$	Béo phì độ I (nhẹ)
$84,672 \leq m < 112,896$	Béo phì độ II (trung bình)
$112,896 \leq m$	Béo phì độ III (nặng)

b) Ta lập được bảng về thể trạng dựa trên chỉ số cân nặng của một người phụ nữ 1,6 m như sau

Cân nặng (kg)	Thể trạng
$m < 46,08$	Gầy
$46,08 \leq m < 58,88$	Bình thường
$58,88 \leq m < 76,8$	Béo phì độ I (nhẹ)
$76,8 \leq m < 102,4$	Béo phì độ II (trung bình)
$102,4 \leq m$	Béo phì độ III (nặng)

□

Chương 3.



CĂN THỨC

Chủ đề 1. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA CỦA SỐ THỰC

A CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC KHÔNG ÂM

⇔ **Định nghĩa 1.1.** Căn bậc hai của một số thực a không âm là số thực x sao cho $x^2 = a$.

❶ Ví dụ 1.

- a) Số 2 và -2 có phải là căn bậc hai của 4 hay không?
- b) Số 0,7 và $-0,7$ có phải là căn bậc hai của 0,49 hay không?
- c) Số $\frac{1}{9}$ và $-\frac{1}{9}$ có phải là căn bậc hai của $\frac{1}{3}$ hay không?

➡ Hướng dẫn giải.

- a) Ta thấy $2^2 = 4$ và $(-2)^2 = 4$ nên số 2 và -2 là các căn bậc hai của 4.
- b) Ta thấy $(0,7)^2 = 0,49$ và $(-0,7)^2 = 0,49$ nên số 0,7 và $-0,7$ là căn bậc hai của 0,49.
- c) Vì $\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81} \neq \frac{1}{3}$ và $\left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81} \neq \frac{1}{3}$ nên các số $\frac{1}{9}$ và $-\frac{1}{9}$ không phải là căn bậc hai của $\frac{1}{3}$.

□

Chú ý

Chú ý.

- ⚙ Khi $a > 0$, số a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$; và số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$. Ta gọi $\sqrt{a}$ là căn bậc hai số học của a .
- ⚙ Căn bậc hai của số 0 bằng 0.
- ⚙ Số âm không có căn bậc hai.

❶ Ví dụ 2.

- a) Số 8 và -8 có phải là căn bậc hai của 64 hay không?
- b) Từ đó, hãy sử dụng kí hiệu căn bậc hai để biểu thị giá trị 8 và giá trị -8 .

➡ Hướng dẫn giải.

- a) Ta thấy $8^2 = 64$ và $(-8)^2 = 64$ nên số 8 và -8 là các căn bậc hai của 64.
 b) Ta có $\sqrt{64} = 8$ và $-\sqrt{64} = -8$.

□

❶ Ví dụ 3. Chỉ ra câu trả lời đúng trong các câu trả lời sau

- a) $\sqrt{49} = 7$; b) $-\sqrt{0,25} = -0,5$; c) $\sqrt{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{4}$.

📁 Hướng dẫn giải.

- a) Do 7 là căn bậc hai số học của 49 nên $\sqrt{49} = 7$ là câu trả lời đúng.
 b) Do 0,5 là căn bậc hai số học của 0,25 nên $-\sqrt{0,25} = -0,5$ là câu trả lời đúng.
 c) Do $-\frac{1}{4}$ không phải là căn bậc hai số học của $\frac{1}{16}$ nên $\sqrt{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{4}$ là câu trả lời sai.

□

❶ Ví dụ 4. Tìm

- a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; b) $-\sqrt{0,01}$; c) Căn bậc hai của 144.

📁 Hướng dẫn giải.

- a) Do $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ nên $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.
 b) Vì $(0,1)^2 = 0,01$ nên $-\sqrt{0,01} = -0,1$.
 c) Do $12^2 = (-12)^2 = 144$ nên căn bậc hai của 144 có hai giá trị là 12 và -12 . Cụ thể, ta có $\sqrt{144} = 12$ và $-\sqrt{144} = -12$.

□

LUYỆN TẬP 1

Tìm căn bậc hai của 256; 0,04; $\frac{121}{36}$.

📁 Hướng dẫn giải.

- 🟢 Do $16^2 = (-16)^2 = 256$ nên căn bậc hai của 256 có hai giá trị là 16 và -16 . Cụ thể, ta có $\sqrt{256} = 16$ và $-\sqrt{256} = -16$.
 🟢 Do $(0,2)^2 = (-0,2)^2 = 0,04$ nên căn bậc hai của 0,04 có hai giá trị là 0,2 và $-0,2$. Cụ thể, ta có $\sqrt{0,04} = 0,2$ và $-\sqrt{0,04} = -0,2$.
 🟢 Do $\left(\frac{11}{6}\right)^2 = \left(-\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{121}{36}$ nên căn bậc hai của $\frac{121}{36}$ có hai giá trị là $\frac{11}{6}$ và $-\frac{11}{6}$.
 Cụ thể, ta có $\sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{11}{6}$ và $-\sqrt{\frac{121}{36}} = -\frac{11}{6}$.

□

Chú ý

Với hai số a, b không âm, ta có

 Nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;

 Nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì $a < b$.

○ Ví dụ 5. So sánh:

a) $\sqrt{3}$ và $\sqrt{5}$;

b) 3 và $\sqrt{10}$.

➡ Hướng dẫn giải.

a) Do $3 < 5$ nên $\sqrt{3} < \sqrt{5}$.

b) Ta có $3 = \sqrt{9}$. Do $9 < 10$ nên $\sqrt{9} < \sqrt{10}$ hay $3 < \sqrt{10}$.

□

○ Ví dụ 6. Trong một thí nghiệm, một vật rơi tự do từ độ cao 80 m so với mặt đất. Biết quãng đường dịch chuyển được của vật đó tính theo đơn vị mét được cho bởi công thức $h = 5t^2$ với t là thời gian vật đó rơi, tính theo đơn vị giây ($t > 0$). Hỏi sau bao nhiêu lâu kể từ lúc rơi thì vật đó chạm đất?

➡ Hướng dẫn giải.

Khi vật chạm đất thì quãng đường dịch chuyển được của vật đó là 80 m.

Ta có $80 = 5t^2$ hay $t^2 = 16$. Do đó $t = \sqrt{16} = 4$ hoặc $t = -\sqrt{16} = -4$.

Vì $t > 0$ nên $t = 4$. Vậy sau 4 giây kể từ lúc rơi thì vật đó chạm đất.

□

B CĂN BẬC BA

↔ Định nghĩa 1.2. Căn bậc ba của một số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$. Căn bậc ba của số thực a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.

Chú ý

Chú ý.

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

○ Ví dụ 7.

a) Số 2 có phải là căn bậc ba của 8 hay không?

b) Số -5 có phải là căn bậc ba của -125 hay không?

c) Số 0,1 có phải là căn bậc ba của 0,01 hay không?

➡ Hướng dẫn giải.

a) Ta có $2^3 = 8$ nên số 2 là căn bậc ba của 8.

b) Ta có $(-5)^3 = -125$ nên số -5 là căn bậc ba của -125 .

c) Vì $(0,1)^3 = 0,001 \neq 0,01$ nên số 0,1 không phải là căn bậc ba của 0,01.

□

Chú ý

Chú ý. Người ta chứng minh được rằng: Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba.

❶ Ví dụ 8. Tìm giá trị của

a) $\sqrt[3]{1000}$;

b) $\sqrt[3]{-0,064}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$.

📖 Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt[3]{1000} = 10$;

b) $\sqrt[3]{-0,064} = -0,4$;

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$.

□

LUYỆN TẬP 2

Tìm giá trị của

a) $\sqrt[3]{-8}$;

b) $\sqrt[3]{0,125}$;

c) $\sqrt[3]{0}$.

📖 Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$;

b) $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$;

c) $\sqrt[3]{0} = 0$.

□

❶ Ví dụ 9. So sánh

a) $\sqrt[3]{-11,35}$ và $\sqrt[3]{-13,12}$;

b) 3 và $\sqrt[3]{27\frac{1}{4}}$.

📖 Hướng dẫn giải.

a) Do $-11,35 > -13,12$ nên $\sqrt[3]{-11,35} > \sqrt[3]{-13,12}$.

b) Ta có $3 = \sqrt[3]{27}$. Do $27 < 27\frac{1}{4}$ nên $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{27\frac{1}{4}}$ hay $3 < \sqrt[3]{27\frac{1}{4}}$.

□

Chú ý

Chú ý. Với hai số a, b , ta có

❖ Nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$;

❖ Nếu $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ thì $a < b$.

🕒 SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

❶ Ví dụ 10. Dùng máy tính cầm tay để tính giá trị (đúng hoặc gần đúng)

a) $\sqrt{0,35}$;

b) $\sqrt[3]{-512}$.

📖 Hướng dẫn giải.

Ta có

Phép tính	Nút nhấn	Kết quả
$\sqrt{0,35}$	$\sqrt{\square}$ 0 . 3 5 $\square$	0,5916079783
$\sqrt[3]{-512}$	SHIFT $\sqrt{\square}$ $\square$ 5 1 2 $\square$	-5,990726415

□

LUYỆN TẬP 3

Sử dụng máy tính cầm tay tính giá trị (đúng hoặc gần đúng) trong mỗi trường hợp sau

a) $\sqrt{2,37}$;

b) $\sqrt[3]{\frac{-7}{11}}$.

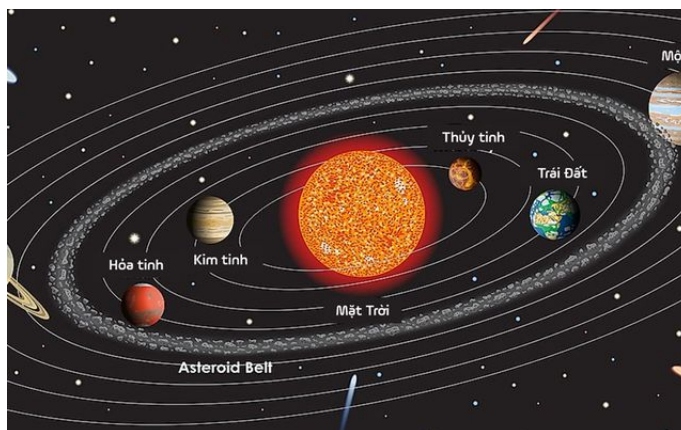
Hướng dẫn giải.

Ta có

Phép tính	Nút nhấn	Kết quả
$\sqrt{2,37}$	$\sqrt{\square}$ 2 . 3 7 $\square$	1,539480432
$\sqrt[3]{\frac{-7}{11}}$	SHIFT $\sqrt{\square}$ $\square$ $\square$ - 7 $\square$ 1 1 $\square$	-0,8601386275

□

❶ Ví dụ 11. Dùng định luật thứ ba của Kepler về sự chuyển động của các hành tinh trong hệ Mặt Trời cho biết khoảng cách trung bình d (triệu dặm) từ một hành tinh quay xung quanh Mặt Trời đến Mặt Trời được tính bởi công thức $d = \sqrt[3]{6r^2}$ với t (ngày Trái Đất) là thời gian hành tinh đó quay quanh Mặt Trời đúng một vòng (Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>).



Hệ Mặt Trời

- Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời trong khoảng 365 ngày Trái Đất. Hỏi khoảng cách trung bình giữa Trái Đất và Mặt Trời là bao nhiêu triệu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)? Biết 1 dặm = 1,609344 km.
- Một năm Sao Hỏa dài bằng 687 ngày trên Trái Đất, nghĩa là Sao Hỏa quay xung quanh Mặt trời đúng một vòng với thời gian bằng 687 ngày Trái Đất. Hỏi khoảng cách trung bình giữa Sao Hỏa và Mặt Trời là bao nhiêu triệu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải.

a) Thay $t = 365$ vào công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$, ta có

$$d = \sqrt[3]{6 \cdot 365^2} = \sqrt[3]{799\,350} \approx 92,807 \text{ (triệu dặm)}.$$

Đổi 92,807 triệu dặm $\approx 149,4$ triệu km.

Vậy khoảng cách trung bình giữa Trái Đất và Mặt Trời là khoảng 149,4 triệu km.

b) Thay $t = 687$ vào công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$, ta có

$$d = \sqrt[3]{6 \cdot 687^2} = \sqrt[3]{2\,831\,814} \approx 141,4787 \text{ (triệu dặm)}.$$

Đổi 141,478 triệu dặm $\approx 227,7$ triệu km.

Vậy khoảng cách trung bình giữa Sao Hỏa và Mặt Trời là khoảng 227,7 triệu km.

□

D BÀI TẬP

Bài 1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

- a) Mỗi số dương có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau.
- b) Số âm không có căn bậc hai.
- c) Số âm không có căn bậc ba.
- d) Căn bậc ba của một số dương là một số dương.
- e) Căn bậc ba của một số âm là một số âm.

Hướng dẫn giải.

- a) Đúng. b) Đúng. c) Sai. d) Đúng. e) Đúng.

□

Bài 2. Tìm căn bậc hai của

- a) 289; b) 0,81; c) 1,69; d) $\frac{49}{121}$.

Hướng dẫn giải.

- a) Căn bậc hai của 289 là $\sqrt{289} = 17$ và $-\sqrt{289} = -17$.
- b) Căn bậc hai của 0,81 là $\sqrt{0,81} = 0,9$ và $-\sqrt{0,81} = -0,9$.
- c) Căn bậc hai của 1,69 là $\sqrt{1,69} = 1,3$ và $-\sqrt{1,69} = -1,3$.
- d) Căn bậc hai của $\frac{49}{121}$ là $\sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{7}{11}$ và $-\sqrt{\frac{49}{121}} = -\frac{7}{11}$.

□

Bài 3. Tìm căn bậc ba của:

- a) 1331; b) -27; c) -0,216; d) $\frac{8}{343}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt[3]{1331} = \sqrt[3]{11^3} = 11;$

b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3;$

c) $\sqrt[3]{-0,216} = \sqrt[3]{(-0,6)^3} = -0,6;$

d) $\sqrt[3]{\frac{8}{343}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{7}\right)^3} = \frac{2}{7}.$

□

Bài 4. So sánh:

a) $\sqrt{\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{\frac{3}{4}};$

b) $\sqrt{0,48}$ và $0,7;$

c) $\sqrt[3]{-45}$ và $\sqrt[3]{-50};$

d) -10 và $\sqrt[3]{-999}.$

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $\frac{4}{3} > \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{3}} > \sqrt{\frac{3}{4}}.$ Vậy $\sqrt{\frac{4}{3}} > \sqrt{\frac{3}{4}}.$

b) Ta có $0,49 > 0,48 \Rightarrow \sqrt{0,49} > \sqrt{0,48} \Rightarrow 0,7 > \sqrt{0,48}.$ Vậy $0,7 > \sqrt{0,48}.$

c) Ta có $-45 > -50 \Rightarrow \sqrt[3]{-45} > \sqrt[3]{-50}.$ Vậy $\sqrt[3]{-45} > \sqrt[3]{-50}.$

d) Ta có $\sqrt[3]{-999} > \sqrt[3]{-1000} = -10.$ Vậy $-10 < \sqrt[3]{-999}.$

□

Bài 5. Chứng minh:

a) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1;$

b) $(\sqrt[3]{2} + 1) [(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1] = 3.$

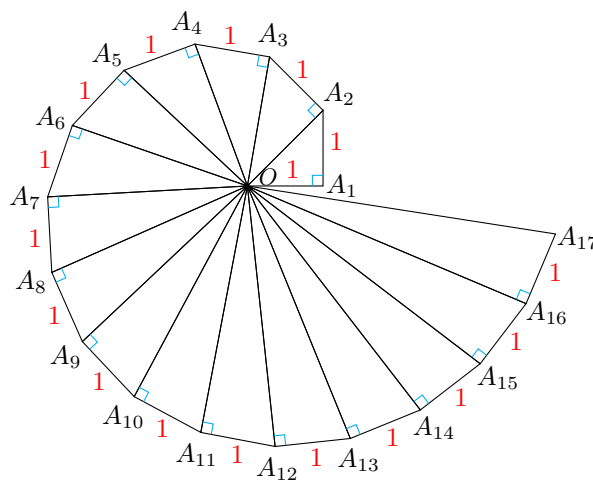
Hướng dẫn giải.

a) Ta có $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1.$

b) Ta có $(\sqrt[3]{2} + 1) [(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1] (\sqrt[3]{2})^3 + 1^3 = 2 + 1 = 3.$

□

Bài 6. Tính độ dài cạnh huyền của mỗi tam giác vuông trong Hình 2.



Hướng dẫn giải.

✿ Xét $\triangle OA_1A_2$ có $OA_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

✪ Xét $\triangle OA_2A_3$ có $OA_3 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

✪ Xét $\triangle OA_3A_4$ có $OA_4 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

✪

✪ Xét $\triangle OA_{16}A_{17}$ có $OA_{17} = \sqrt{(\sqrt{16})^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.

□

Bài 7. Đại Kim tự tháp Giza là Kim tự tháp Ai Cập lớn nhất và là lăng mộ của Vương triều thứ Tư của pharaoh Khufu. Nền kim tự tháp có dạng hình vuông với diện tích khoảng $53\,052 \text{ m}^2$ (Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>). Hỏi độ dài cạnh nền của kim tự tháp đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải.

Gọi cạnh hình vuông (nền kim tự tháp) là x , điều kiện $x > 0$, đơn vị m.

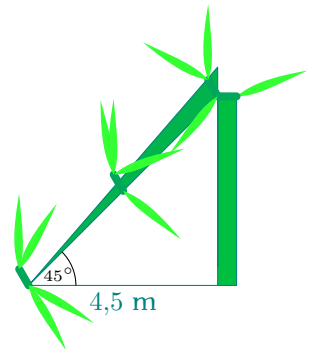
Diện tích hình vuông $x^2 = 53\,052 \Rightarrow x = \sqrt{53\,052} \approx 230,3 \text{ m}$.

Vậy độ dài cạnh nền của kim tự tháp đó xấp xỉ $230,3 \text{ m}$.

□

Bài 8.

Giông bão thổi mạnh, một cây bị gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và tạo với phương nằm ngang một góc 45° (minh họa ở Hình 3). Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây là $4,5 \text{ m}$. Giả sử cây mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây đó theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 3

Hướng dẫn giải.

Xem đoạn bị gãy là CB ; đoạn còn lại (thẳng đứng) là AC .

Như vậy, độ dài của cây khi chưa bị gãy là $AC + BC$.

Do $\triangle ABC$ vuông tại A và $\widehat{ABC} = 45^\circ$, suy ra $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

Suy ra $AC = AB = 4,5 \text{ m}$.

Áp dụng định lý Pytagore trong $\triangle ABC$ vuông tại A , ta được

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2 \cdot (4,5)^2} = \sqrt{40,5} \text{ m}.$$

Chiều cao cây trước khi gãy là $4,5 + \sqrt{40,5} \approx 10,9 \text{ m}$.

□

Bài 9. Thể tích của một khối bê tông có dạng hình lập phương là khoảng $220\,348 \text{ cm}^3$. Hỏi độ dài cạnh của khối bê tông đó là bao nhiêu centimet (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

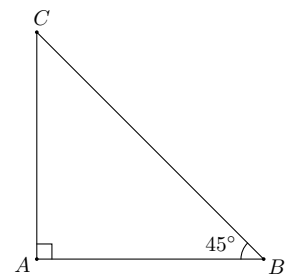
Hướng dẫn giải.

Gọi x (m) là chiều dài cạnh khối bê tông.

Ta có $x^3 = 220\,348 \Rightarrow x = \sqrt[3]{220\,348} \approx 60,4 \text{ cm}$.

Vậy khối bê tông có cạnh gần bằng $60,4 \text{ cm}$.

□



Chủ đề 2. CĂN THỨC

A MỘT SỐ PHÉP TÍNH VỀ CĂN BẬC HAI

1 Căn bậc hai của một bình phương

✎ **Định nghĩa 2.1.** Với mọi số a , ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$.

🔴 **Ví dụ 1.** Tính:

a) $\sqrt{13^2}$;

b) $\sqrt{(-8)^2}$;

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

📖 **Hướng dẫn giải.**

a) $\sqrt{13^2} = |13| = 13$.

b) $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$.

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2|$.

Do $\sqrt{3} < \sqrt{4}$ hay $\sqrt{3} < 2$ nên $\sqrt{3} - 2 < 0$. Vì thế, ta có $|\sqrt{3}-2| = 2 - \sqrt{3}$.

Vậy $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2 - \sqrt{3}$.

□

VẬN DỤNG 1

Tính:

a) $\sqrt{35^2}$;

b) $\sqrt{\left(-\frac{7}{9}\right)^2}$;

c) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

📖 **Hướng dẫn giải.**

a) $\sqrt{35^2} = |35| = 35$.

b) $\sqrt{\left(-\frac{7}{9}\right)^2} = \left|-\frac{7}{9}\right| = \frac{7}{9}$.

c) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$ vì $1-\sqrt{2} < 0$.

□

2 Căn bậc hai của một tích

Chú ý

Với hai số không âm a, b ta có $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Quy tắc trên có thể mở rộng cho tích có nhiều thừa số không âm.

🔴 **Ví dụ 2.** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{81 \cdot 49}$;

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$;

c) $\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{13}$.

📖 **Hướng dẫn giải.**

a) $\sqrt{81 \cdot 49} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{49} = 9 \cdot 7 = 63$.

$$b) \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10.$$

$$c) \sqrt{1,3} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{1,3 \cdot 10 \cdot 13} = \sqrt{13 \cdot 13} = 13.$$

□

VẬN DỤNG 2

Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

$$a) \sqrt{25 \cdot 121};$$

$$b) \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{8}}$$

$$c) \sqrt{10} \cdot \sqrt{5,2} \cdot \sqrt{52}.$$

Hướng dẫn giải.

$$a) \sqrt{25 \cdot 121} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{121} = 5 \cdot 11 = 55.$$

$$b) \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{8}} = \sqrt{2 \cdot \frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

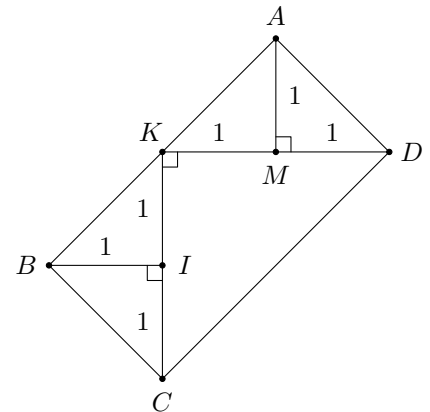
$$c) \sqrt{10} \cdot \sqrt{5,2} \cdot \sqrt{52} = \sqrt{10 \cdot 5,2 \cdot 52} = \sqrt{52 \cdot 52} = \sqrt{52^2} = 52.$$

□

Ví dụ 3.

Bạn Lan cắt một hình chữ nhật $ABCD$ thành những hình tam giác như Hình 4 (đơn vị tính theo centimét).

- Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$.
- Sau đó, bạn Lan muốn cắt một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật $ABCD$. Tính độ dài cạnh của hình vuông đó.

**Hướng dẫn giải.**

- Trong tam giác vuông cân BIC , ta có:

$$BC^2 = BI^2 + CI^2 \text{ (theo định lí Pythagore).}$$

Suy ra $BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Do đó $BC = \sqrt{2}$ cm.

Ta có $CK = 1 + 1 = 2$ (cm); $DK = 1 + 1 = 2$ cm.

Trong tam giác vuông cân CKD , ta có $CD^2 = CK^2 + DK^2$ (theo định lí Pythagore).

Suy ra $CD^2 = 2^2 + 2^2 = 8$. Do đó $CD = \sqrt{8}$ cm.

Vậy hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = BC = \sqrt{2}$ cm, $AB = CD = \sqrt{8}$ cm.

- Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là

$$BC \cdot CD = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}^2.$$

Gọi độ dài cạnh của hình vuông là x (cm) với $x > 0$.

Ta có $x^2 = 4$. Do $x > 0$ nên $x = \sqrt{4}$ hay $x = 2$.

Vậy độ dài cạnh của hình vuông là 2 cm.

**3 Căn bậc hai của một thương****Chú ý**

Với $a \geq 0, b > 0$, ta có $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

❶ Ví dụ 4. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$;

b) $\sqrt{\frac{1,69}{0,25}}$;

c) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}}$.

➡ Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$.

b) $\sqrt{\frac{1,69}{0,25}} = \frac{\sqrt{1,69}}{\sqrt{0,25}} = \frac{1,3}{0,5} = 2,6$.

c) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{216}{6}} = \sqrt{36} = 6$.

**4 Đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai****Chú ý**

Ta có quy tắc sau (còn được gọi là phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai): Cho hai số a, b với $b \geq 0$. Khi đó $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$. Cụ thể ta có

❶ Nếu $a \geq 0$ thì $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$;

❷ Nếu $a < 0$ thì $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$.

❶ Ví dụ 5. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{7^2 \cdot 2}$;

b) $\sqrt{(-11)^2 \cdot 3}$;

c) $\sqrt{50}$.

➡ Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{7^2 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{(-11)^2 \cdot 3} = |-11| \cdot \sqrt{3} = 11\sqrt{3}$.

c) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$.



❶ Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức: $\sqrt{20} - \sqrt{5}$.

➡ Hướng dẫn giải.

Ta có $\sqrt{20} - \sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$.



VẬN DỤNG 3

Rút gọn biểu thức $\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{27}$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{27} = \sqrt{3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$. $\square$

Ví dụ 7. Để tính giá trị của biểu thức $M = \frac{\sqrt{(-4)^2 \cdot 5}}{(-4) + 5}$, bạn Ngân làm như sau:

Ta có $M = \frac{\sqrt{(-4)^2 \cdot 5}}{(-4) + 5} = \frac{(-4) \cdot \sqrt{5}}{1} = -4\sqrt{5}$.

Cách làm của bạn Ngân là đúng hay sai? Vì sao?

Hướng dẫn giải.

Cách làm của bạn Ngân là sai vì $\sqrt{(-4)^2 \cdot 5} = |-4| \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \neq (-4) \cdot \sqrt{5}$.

Cách làm đúng sẽ là $M = \frac{\sqrt{(-4)^2 \cdot 5}}{(-4) + 5} = \frac{|-4| \cdot \sqrt{5}}{1} = 4\sqrt{5}$. $\square$

5) Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai

Chú ý

Ngược với phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn là phép đưa thừa số vào trong dấu căn. Ta có quy tắc sau (còn được gọi là phép đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai):

Với $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$.

Với $a < 0$ và $b \geq 0$, ta có $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$.

Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức:

a) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;

b) $5\sqrt{\frac{7}{5}} - \sqrt{35}$

Hướng dẫn giải.

a) $3\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3^2 \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt{3}$.

b) $5\sqrt{\frac{7}{5}} - \sqrt{35} = \sqrt{5^2 \cdot \frac{7}{5}} - \sqrt{35} = \sqrt{5 \cdot 7} - \sqrt{35} = \sqrt{35} - \sqrt{35} = 0$. $\square$

VẬN DỤNG 4

Rút gọn biểu thức:

a) $-7\sqrt{\frac{1}{7}}$;

b) $6\sqrt{\frac{11}{6}} - \sqrt{66}$.

Hướng dẫn giải.

a) $-7\sqrt{\frac{1}{7}} = -\sqrt{7^2 \cdot \frac{1}{7}} = -\sqrt{7}$.

b) $6\sqrt{\frac{11}{6}} - \sqrt{66} = \sqrt{6^2 \cdot \frac{11}{6}} - \sqrt{66} = \sqrt{66} - \sqrt{66} = 0$. $\square$

B) BÀI TẬP**Bài 10.** Tính:

a) $\sqrt{25^2}$;

b) $\sqrt{(-0,16)^2}$;

c) $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{25^2} = |25| = 25$.

b) $\sqrt{(-0,16)^2} = |-0,16| = 0,16$.

c) $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} = |\sqrt{7}-3| = 3-\sqrt{7}$, vì $\sqrt{7}-3 < 0$.

□

Bài 11. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{36 \cdot 81}$;

b) $\sqrt{49 \cdot 121 \cdot 169}$;

c) $\sqrt{50^2 - 14^2}$;

d) $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{81} = \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{9^2} = 6 \cdot 9 = 54$.

b) $\sqrt{49 \cdot 121 \cdot 169} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{121} \cdot \sqrt{169} = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$.

c) $\sqrt{50^2 - 14^2} = \sqrt{(50-14)(50+14)} = \sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = 6 \cdot 8 = 48$.

d) $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$.

□

Bài 12. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{\frac{49}{36}}$;

b) $\sqrt{\frac{13^2 - 12^2}{81}}$;

c) $\frac{\sqrt{9^3 + 7^3}}{\sqrt{9^2 - 9 \cdot 7 + 7^2}}$;

d) $\frac{\sqrt{50^3 - 1}}{\sqrt{50^2 + 51}}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$;

b) $\sqrt{\frac{13^2 - 12^2}{81}} = \sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{5}{9}$;

c) $\frac{\sqrt{9^3 + 7^3}}{\sqrt{9^2 - 9 \cdot 7 + 7^2}} = \frac{\sqrt{(9+7)(9^2 - 9 \cdot 7 + 7^2)}}{\sqrt{9^2 - 9 \cdot 7 + 7^2}} = \sqrt{9+7} = 4$;

d) $\frac{\sqrt{50^3 - 1}}{\sqrt{50^2 + 51}} = \frac{\sqrt{(50-1)(50^2 + 50 \cdot 1 + 1^2)}}{\sqrt{50^2 + 50 \cdot 1 + 1^2}} = \sqrt{50-1} = 7$.

□

Bài 13. Áp dụng quy tắc đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75}$; b) $2\sqrt{80} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{20}$; c) $\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{0,7}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{3^2 \cdot 3} + \sqrt{5^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$;

b) $2\sqrt{80} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{20} = 2\sqrt{4^2 \cdot 5} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2^2 \cdot 5} = 8\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 0$;

c) $\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{0,7} = \sqrt{\frac{28}{10} \cdot \frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 7^2}}{10} = 14$.

□

Bài 14. Áp dụng quy tắc đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai, hãy rút gọn biểu thức:

a) $9\sqrt{\frac{2}{9}} - 3\sqrt{2}$;

b) $(2\sqrt{3} + \sqrt{11})(\sqrt{12} - \sqrt{11})$.

Hướng dẫn giải.

a) $9\sqrt{\frac{2}{9}} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0$;

b) $(2\sqrt{3} + \sqrt{11})(\sqrt{12} - \sqrt{11}) = (\sqrt{12} + \sqrt{11})(\sqrt{12} - \sqrt{11}) = (\sqrt{12})^2 - 11 = 1$.

□

Bài 15. So sánh:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$ và $\sqrt{22}$;

b) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{2}}$ và 5;

c) $3\sqrt{7}$ và $\sqrt{65}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21} < \sqrt{22}$;

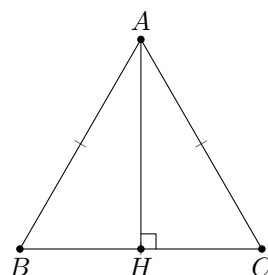
b) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{26 \cdot 2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{26} > \sqrt{25}$;

c) $3\sqrt{7} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{63} < \sqrt{65}$.

□

Bài 16. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh là a . Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC theo a .

Hướng dẫn giải.



Ta có tam giác ABC đều cạnh a , gọi H là trung điểm cạnh BC suy ra AH vuông góc với BC và $BC = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác vuông AHC , áp dụng định lý py-ta-go ta có:

$$AH = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy đường cao $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. □

Bài 17. Trong Vật lí, ta có định luật Joule - Lenz để tính nhiệt lượng toả ra ở dây dẫn khi có dòng điện chạy qua:

$$Q = I^2 R t$$

Trong đó:

❖ Q là nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn tính theo Jun (J);

❖ I là cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn tính theo Ampe (A);

❖ R là điện trở dây dẫn tính theo Ohm(Ω);

❖ t là thời gian dòng điện chạy qua dây dẫn tính theo giây.

Áp dụng công thức trên để giải bài toán sau: Một bếp điện khi hoạt động bình thường có điện trở $R = 80 \Omega$. Tính cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn, biết nhiệt lượng mà dây dẫn toả ra trong 1 giây là 500 J.

Hướng dẫn giải.

Áp dụng công thức $Q = I^2 R t$, cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn:

$$I = \sqrt{\frac{Q}{Rt}} = \sqrt{\frac{500}{80 \cdot 1}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Vậy cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn là $I = \sqrt{\frac{Q}{Rt}} = \frac{5}{2}$. □

Bài 18. Tốc độ gần đúng của một ô-tô ngay trước khi đạp phanh được tính theo công thức $v = \sqrt{2\lambda g d}$, trong đó v (m/s) là tốc độ của ô-tô, d (m) là chiều dài của vết trượt tính từ thời điểm đạp phanh cho đến khi ô tô dừng lại trên đường, λ là hệ số cản lăn của mặt đường, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ (Nguồn: J. Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017). Nếu một chiếc ô-tô để lại vết trượt dài khoảng 20 m trên đường nhựa thì tốc độ của ô-tô trước khi đạp phanh là khoảng bao nhiêu mét trên giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng hệ số cản lăn của đường nhựa là $\lambda = 0,7$.



Vết trượt của xe ô-tô

Hướng dẫn giải.

Tốc độ của ô-tô trước khi đạp phanh là

$$v = \sqrt{2\lambda g d} = \sqrt{2 \cdot 0,7 \cdot 9,8 \cdot 20} = \sqrt{\frac{2^3 \cdot 7^3}{10}} = \frac{14\sqrt{35}}{5}.$$

□

Chủ đề 3. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC BA CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A CĂN THỨC BẬC HAI

◀ **Định nghĩa 3.1.** Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc hai hay biểu thức dưới dấu căn.

Chú ý

Các số, biến số được nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa, khai căn bậc hai làm thành một biểu thức đại số.

🔴 **Ví dụ 1.** Mỗi biểu thức sau có phải là một căn thức bậc hai hay không?

- a) $\sqrt{x+1}$; b) $\sqrt{5}$; c) $2x-1$.

🔵 **Hướng dẫn giải.**

- a) Biểu thức $\sqrt{x+1}$ là một căn thức bậc hai vì $x+1$ là một biểu thức đại số.
b) Biểu thức $\sqrt{5}$ là một căn thức bậc hai vì 5 cũng là một biểu thức đại số.
c) Biểu thức $2x-1$ không là một căn thức bậc hai.

□

LUYỆN TẬP 1

Mỗi biểu thức sau có phải là một căn thức bậc hai hay không?

- a) $\sqrt{2x-5}$. b) $\sqrt{\frac{1}{x}}$. c) $\frac{1}{x+1}$.

🔵 **Hướng dẫn giải.**

- a) Biểu thức $\sqrt{2x-5}$ là một căn thức bậc hai vì $2x-5$ là một biểu thức đại số.
b) Biểu thức $\sqrt{\frac{1}{x}}$ là một căn thức bậc hai vì $\frac{1}{x}$ cũng là một biểu thức đại số.
c) Biểu thức $\frac{1}{x+1}$ không là một căn thức bậc hai.

□

🔴 **Ví dụ 2.** Tính giá trị của $\sqrt{x^2-9}$ tại

- a) $x=5$; b) $x=-7$; c) $x=\sqrt{10}$.

🔵 **Hướng dẫn giải.**

- a) Thay $x=5$ vào biểu thức, ta được

$$\sqrt{5^2-9} = \sqrt{16} = 4.$$

b) Thay $x = -7$ vào biểu thức, ta được

$$\sqrt{(-7)^2 - 9} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}.$$

c) Thay $x = \sqrt{10}$ vào biểu thức, ta được

$$\sqrt{(\sqrt{10})^2 - 9} = \sqrt{1} = 1.$$

□

LUYỆN TẬP 2

Tính giá trị của $\sqrt{2x^2 + 1}$ tại

a) $x = 2$;

b) $x = -\sqrt{12}$.

 **Hướng dẫn giải.**

a) Thay $x = 2$ vào biểu thức ta được:

$$\sqrt{2(2)^2 + 1} = \sqrt{2(4) + 1} = \sqrt{8 + 1} = \sqrt{9} = 3.$$

b) Thay $x = -\sqrt{12}$ vào biểu thức ta được:

$$\sqrt{2(-\sqrt{12})^2 + 1} = \sqrt{2(12) + 1} = \sqrt{24 + 1} = \sqrt{25} = 5.$$

□

 **Định nghĩa 3.2.** Điều kiện xác định cho căn thức bậc hai $\sqrt{A}$ là $A \geq 0$.

 **Ví dụ 3.** Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc hai sau

a) $\sqrt{4x}$;

b) $\sqrt{x - 3}$.

 **Hướng dẫn giải.**

a) $\sqrt{4x}$ Xác định khi $4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$. Vậy điều kiện xác định là $x \geq 0$.

b) $\sqrt{x - 3}$ Xác định khi $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Vậy điều kiện xác định là $x \geq 3$.

□

LUYỆN TẬP 3

Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc hai sau

a) $\sqrt{x + 1}$;

b) $\sqrt{x^2 + 1}$.

 **Hướng dẫn giải.**

a) $\sqrt{x + 1}$ Xác định khi $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$, Vậy điều kiện xác định là $x \geq -1$.

b) $\sqrt{x^2 + 1}$ Luôn xác định với mọi x vì $x^2 + 1 > 0$.

□

❶ Ví dụ 4. Để lái xe an toàn khi đi qua đoạn đường có dạng cung tròn, người lái cần biết tốc độ tối đa cho phép là bao nhiêu. Vì thế, ở những đoạn đường đó thường có bảng chỉ dẫn cho tốc độ tối đa cho phép của ô tô. Tốc độ tối đa cho phép v (m/s) được tính bởi công thức $v = \sqrt{rg\mu}$, trong đó r (m) là bán kính của cung đường, $g = 9,8\text{m/s}^2$, $\mu = 0,12$ là hệ số ma sát trượt của đường. Tính tốc độ tối đa cho phép v (m/s) để lái xe an toàn khi đi qua đoạn đường có dạng cung tròn với bán kính $r = 400$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

➡ Hướng dẫn giải.

Ta có công thức:

$$v = \sqrt{rg\mu}$$

Thay: $r = 400$, $g = 9,8$, và $\mu = 0,12$, ta có:

$$v = \sqrt{400 \cdot 9,8 \cdot 0,12} \approx 22 \text{ m/s}$$

Vậy tốc độ tối đa cho phép là khoảng 22m/s. □

B CĂN THỨC BẬC BA

❧ Định nghĩa 3.3. Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là căn thức bậc ba của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc ba hay biểu thức dưới dấu căn.

Chú ý

Các số, biến số được nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa, khai căn (bậc hai hoặc bậc ba) làm thành một biểu thức đại số.

❶ Ví dụ 5. Mỗi biểu thức sau có phải là một căn thức bậc ba hay không?

a) $\sqrt[3]{x}$;

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x+1}}$;

c) $8x + \sqrt[3]{2}$.

➡ Hướng dẫn giải.

a) Biểu thức $\sqrt[3]{x}$ là một căn thức bậc ba vì x là một biểu thức đại số.

b) Biểu thức $\sqrt[3]{\frac{1}{x+1}}$ là một căn thức bậc ba vì $\frac{1}{x+1}$ là một biểu thức đại số.

c) Biểu thức $8x + \sqrt[3]{2}$ không là một căn thức bậc ba. □

LUYỆN TẬP 4

Mỗi biểu thức sau có phải là một căn bậc ba hay không?

a) $\sqrt[3]{2x^2 - 7}$.

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{5x - 4}}$.

c) $\frac{1}{7x + 1}$.

➡ Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt[3]{2x^2 - 7}$ là một căn bậc ba vì nó được viết dưới dạng $\sqrt[3]{\text{biểu thức}}$.

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{5x - 4}}$ là một căn bậc ba vì nó có dạng $\sqrt[3]{\text{biểu thức}}$.

c) $\frac{1}{7x+1}$ Không phải là một căn bậc ba vì nó không có dạng $\sqrt[3]{\text{biểu thức}}$.

□

❶ Ví dụ 6. Tính giá trị của $\sqrt[3]{6x+4}$ tại

a) $x = -2$;

b) $x = 10$.

📖 Hướng dẫn giải.

a) Thay $x = -2$ vào biểu thức, ta được:

$$\sqrt[3]{6 \cdot (-2) + 4} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

b) Thay $x = 10$ vào biểu thức, ta được:

$$\sqrt[3]{6 \cdot 10 + 4} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

□

LUYỆN TẬP 5

Tính giá trị của $\sqrt[3]{x^3}$ tại $x = 3$; $x = -2$; $x = -10$.

📖 Hướng dẫn giải.

a) Thay $x = 3$ vào biểu thức, ta được:

$$\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

b) Thay $x = -2$ vào biểu thức, ta được:

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

c) Thay $x = -10$ vào biểu thức, ta được:

$$\sqrt[3]{(-10)^3} = \sqrt[3]{-1000} = -10.$$

□

❖ Định nghĩa 3.4. Điều kiện xác định của căn thức bậc ba $\sqrt[3]{A}$ chính là điều kiện xác định của biểu thức A .

❶ Ví dụ 7. Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc ba sau

a) $\sqrt[3]{5x-11}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$.

📖 Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt[3]{5x-11}$ Xác định khi $5x - 11 \geq 0$.

Giải bất phương trình:

$$5x - 11 \geq 0$$

$$5x \geq 11$$

$$x \geq \frac{11}{5}.$$

Vậy biểu thức $\sqrt[3]{5x-11}$ xác định khi $x \geq \frac{11}{5}$.

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ xác định khi $x \neq 0$. Vậy biểu thức $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ xác định khi $x \neq 0$.

□

LUYỆN TẬP 6

Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc ba sau

a) $\sqrt[3]{x^2+x}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x-9}}$

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt[3]{x^2+x}$ Xác định khi $x^2+x \geq 0$

Giải bất phương trình:

$$x^2+x \geq 0$$

$$x(x+1) \geq 0$$

$$x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 0.$$

Vậy biểu thức $\sqrt[3]{x^2+x}$ xác định khi $x \leq -1$ hoặc $x \geq 0$.

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x-9}}$ Xác định khi $x-9 \neq 0 \Rightarrow x \neq 9$.

Vậy biểu thức $\sqrt[3]{\frac{1}{x-9}}$ xác định khi $x \neq 9$.

□

❶ Ví dụ 8. Công thức $h = 0,4 \cdot \sqrt[3]{x}$ biểu diễn mối liên hệ giữa cân nặng $x(\text{kg})$ và chiều cao $h(\text{m})$ của một con hươu cao cổ ở tuổi trưởng thành (Nguồn: J. Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017)

a) Một con hươu cao cổ cân nặng 180 kg thì cao bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

b) Một con hươu cao cổ có chiều cao 2,56 m thì nặng bao nhiêu kilôgam (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hướng dẫn giải.

a) Với $x = 180(\text{ kg})$, chiều cao của con hươu cao cổ là:

$$h = 0,4 \cdot \sqrt[3]{180} \approx 2,26(\text{ m}).$$

Vậy chiều cao của hươu cao cổ là khoảng 2,26 m.

b) Với $h = 2,56$ (m), ta có:

$$2,56 = 0,4 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[3]{x} = 6,4$$

$$x = (6,4)^3$$

$$x = 262,144.$$

Vậy cân nặng của con hươu cao cổ là khoảng 262 kg.

□

BÀI TẬP

 **Bài 19.** Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau

a) $\sqrt{17 - x^2}$ tại $x = 1$; $x = -3$; $x = 2\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{x^2 + x + 1}$ tại $x = 0$; $x = -1$; $x = -7$.

 **Hướng dẫn giải.**

a) Tại $x = 1$:

$$\sqrt{17 - 1^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Tại $x = -3$:

$$\sqrt{17 - (-3)^2} = \sqrt{17 - 9} = \sqrt{8}.$$

Tại $x = 2\sqrt{2}$:

$$\sqrt{17 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17 - 8} = \sqrt{9} = 3.$$

b) Tại $x = 0$:

$$\sqrt{0^2 + 0 + 1} = \sqrt{1} = 1$$

Tại $x = -1$:

$$\sqrt{(-1)^2 + (-1) + 1} = \sqrt{1 - 1 + 1} = \sqrt{1} = 1.$$

Tại $x = -7$:

$$\sqrt{(-7)^2 + (-7) + 1} = \sqrt{49 - 7 + 1} = \sqrt{43}.$$

□

 **Bài 20.** Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc hai sau

a) $\sqrt{x - 6}$;

b) $\sqrt{17 - x}$;

c) $\sqrt{\frac{1}{x}}$

 **Hướng dẫn giải.**

a) $\sqrt{x - 6}$ xác định khi $x - 6 \geq 0$ hay $x \geq 6$;

b) $\sqrt{17 - x}$ xác định khi $17 - x \geq 0$ hay $x \leq 17$;

c) $\sqrt{\frac{1}{x}}$ xác định khi $\frac{1}{x} \geq 0$ hay $x > 0$.

□

 **Bài 21.** Tính giá trị của mỗi căn thức bậc ba sau

a) $\sqrt[3]{2x - 7}$ tại $x = -10$; $x = 7,5$; $x = -0,5$;

b) $\sqrt[3]{x^2 + 4}$ tại $x = 0$; $x = 2$; $x = \sqrt{23}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt[3]{2 \cdot (-10) - 7} = \sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[3]{2 \cdot 7,5 - 7} = \sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{2 \cdot (-0,5) - 7} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

b) $\sqrt[3]{0^2 + 4} = \sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{2^2 + 4} = \sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{(\sqrt{23})^2 + 4} = \sqrt[3]{27} = 3$.

□

Bài 22. Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc ba sau

a) $\sqrt[3]{3x + 2}$

b) $\sqrt[3]{x^3 - 1}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2-x}}$.

Hướng dẫn giải.

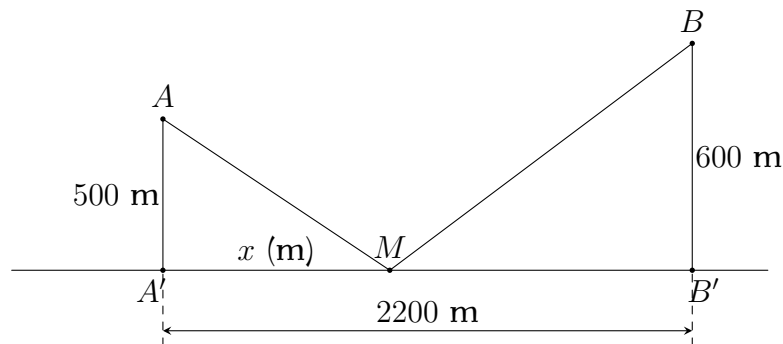
a) $\sqrt[3]{3x + 2}$ xác định với mọi số thực x vì $3x + 2$ xác định với mọi số thực x .

b) $\sqrt[3]{x^3 - 1}$ xác định với mọi số thực x vì $x^3 - 1$ xác định với mọi số thực x .

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2-x}}$ xác định với $x \neq 2$ vì $\frac{1}{2-x}$ xác định với $x \neq 2$.

□

Bài 23. Có hai xã A, B cùng ở bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và người ta đo được $A'B' = 2200$ m. Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Giả sử vị trí của trạm cung cấp nước sạch đó là điểm M trên đoạn $A'B'$ với $MA' = x$ (m), $0 < x < 2200$ (minh họa ở hình bên).



a) Hãy tính tổng khoảng cách $MA + MB$ theo x .

b) Tính tổng khoảng cách $MA + MB$ khi $x = 1200$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Hướng dẫn giải.

a) Xét $\triangle AA'M$ vuông tại A' có $MA = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \sqrt{500^2 + x^2}$ (m).
 Xét $\triangle BB'M$ vuông tại B' có $MB = \sqrt{BB'^2 + B'M^2} = \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$ (m).
 Khi đó $MA + MB = \sqrt{500^2 + x^2} + \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$ (m).

b) Khi $x = 1200$, ta có

$$MA + MB = \sqrt{500^2 + 1200^2} + \sqrt{600^2 + (2200 - 1200)^2} \approx 2466 \text{ (m)}$$

□

Bài 24. Hệ quả của hiện tượng nóng lên toàn cầu là băng của một số sông băng đang tan chảy. Mười hai năm sau khi băng biến mất, những loài thực vật nhỏ bé, được gọi là địa y, bắt đầu mọc trên đá. Mỗi nhóm địa y phát triển ở dạng (gần như) một hình tròn. Đường kính d (mm) của hình tròn này và tuổi của địa y có thể được tính gần đúng bằng công thức $d = 7\sqrt{t - 12}$ với t là số năm tính từ khi băng biến mất ($t \geq 12$) (nguồn: J.Libby, Math for Real Life: Teaching and Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017). Tính đường kính của hình tròn do địa y tạo nên sau khi băng biến mất 13 năm; 16 năm.

Hướng dẫn giải.

Đường kính của hình tròn do địa y tạo nên sau khi băng biến mất 13 năm

$$7\sqrt{13 - 12} = 7 \text{ (mm)}.$$

Đường kính của hình tròn do địa y tạo nên sau khi băng biến mất 16 năm

$$7\sqrt{16 - 12} = 14 \text{ (mm)}.$$

□

Bài 25. Chiều cao ngang vai của một con voi đực ở châu Phi là h (cm) có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $h = 62,5\sqrt[3]{t} + 75,8$ với t là tuổi con voi tính theo năm (Nguồn: J.Libby, Math for Real Life: Teaching and Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017).

- Một con voi đực 8 tuổi thì có chiều cao ngang vai là bao nhiêu centimet?
- Nếu một con voi đực có chiều cao ngang vai là 205 cm thì con voi đó bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hướng dẫn giải.

- Một con voi đực 8 tuổi thì có chiều cao ngang vai là

$$62,5\sqrt[3]{8} + 75,8 = 200,8 \text{ (centimet)}.$$

- Nếu một con voi đực có chiều cao ngang vai là 205 cm thì

$$\begin{aligned} 205 &= 62,5\sqrt[3]{t} + 75,8 \\ \sqrt[3]{t} &= 2,0672 \\ t &= 2,0672^3 \\ t &= 8,733798504. \end{aligned}$$

Vậy con voi đó khoảng 9 tuổi.

□

Chủ đề 4. MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

Định lý 4.1. Với mỗi biểu thức A , ta có $\sqrt{A^2} = |A|$, tức là

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một bình phương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$;

b) $\sqrt{x^4}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2$ (vì $x-2 \geq 0$ khi $x \geq 2$).

b) $\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = |x^2| = x^2$ (vì $x^2 \geq 0$ với mọi số thực x).

□

LUYỆN TẬP 1

Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một bình phương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{x^2 + 6x + 9}$ với $x < -3$;

b) $\sqrt{y^4 + 2y^2 + 1}$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3| = -(x+3) = -x-3$ (vì $x+3 < 0$ khi $x < -3$).

b) $\sqrt{y^4 + 2y^2 + 1} = \sqrt{(y^2)^2 + 2y^2 + 1} = \sqrt{(y^2+1)^2} = |y^2+1| = y^2+1$ (vì $y^2+1 > 0$ với mọi số thực y).

□

B CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH

Định lý 4.2. Với các biểu thức A, B không âm, ta có $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

Ví dụ 2. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một tích, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{4a^2}$;

b) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a}$ với $a > 0$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{4a^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2} = 2|a|.$

b) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a} = \sqrt{2a \cdot 8a} = \sqrt{16a^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{a^2} = 4|a| = 4a \text{ (vì } a > 0).$

□

LUYỆN TẬP 2

Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một tích, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{9x^4};$

b) $\sqrt{3a^3} \cdot \sqrt{27a}$ với $a > 0.$

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{9x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} = 3|x|.$

b) $\sqrt{3a^3} \cdot \sqrt{27a} = \sqrt{3a^3 \cdot 27a} = \sqrt{81a^4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{a^4} = 9 \cdot \sqrt{(a^2)^2} = 9|a^2| = 9a^2 \text{ (vì } a^2 \geq 0 \text{ với mọi số thực } a).$

□

C CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT THƯƠNG

Định lý 4.3. Với biểu thức A không âm và biểu thức B dương, ta có $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$

Ví dụ 3. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một thương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}};$

b) $\frac{\sqrt{125a}}{\sqrt{5a}}$ với $a > 0.$

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}} = \frac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2}}{5} = \frac{2|a|}{5}.$

b) $\frac{\sqrt{125a}}{\sqrt{5a}} = \sqrt{\frac{125a}{5a}} = \sqrt{25} = 5.$

□

LUYỆN TẬP 3

Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một thương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{\frac{9}{(x-3)^2}}$ với $x > 3;$

b) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$ với $x > 0$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{\frac{9}{(x-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{(x-3)^2}} = \frac{3}{|x-3|} = \frac{3}{x-3}$ (vì $x-3 > 0$ với $x > 3$).

b) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}} = \sqrt{\frac{48x^3}{3x^5}} = \sqrt{\frac{16}{x^2}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{x^2}} = \frac{4}{|x|} = \frac{4}{x}$ (vì $x > 0$).

□

D TRỤC CĂN THỨC Ở MẪU

✎ **Nhận xét 4.1.** Phép biến đổi làm mất căn thức bậc hai ở mẫu thức của một biểu thức được gọi là *trục căn thức ở mẫu* của biểu thức đó.

🔴 **Ví dụ 4.** Trục căn thức ở mẫu: $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ với $x > -1$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1 \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1})^2} = \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$.

□

LUYỆN TẬP 4

Trục căn thức ở mẫu: $\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$ với $x > 1$.

Hướng dẫn giải.

Ta có

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{(x^2-1) \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}} = \frac{(x^2-1) \cdot \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2} = \frac{(x-1)(x+1) \cdot \sqrt{x-1}}{x-1} = (x+1)\sqrt{x-1}.$$

□

Chú ý

Với các biểu thức A, B mà $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.

🔴 **Ví dụ 5.** Trục căn thức ở mẫu: $\frac{5}{2+\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\frac{5}{2+\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot (2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3})} = \frac{10-5\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{10-5\sqrt{3}}{4-3} = 10-5\sqrt{3}$.

□

LUYỆN TẬP 5

Trục căn thức ở mẫu: $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 1$.

Hướng dẫn giải.

Ta có

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} = \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1.$$

□

Chú ý

Với các biểu thức A, B, C mà $B \geq 0$ và $A^2 \neq B$, ta có

$$\frac{C}{A + \sqrt{B}} = \frac{C(A - \sqrt{B})}{A^2 - B};$$

$$\frac{C}{A - \sqrt{B}} = \frac{C(A + \sqrt{B})}{A^2 - B};$$

$A - \sqrt{B}$ được gọi là biểu thức liên hợp của $A + \sqrt{B}$ và ngược lại.

Ví dụ 6. Trục căn thức ở mẫu: $\frac{a+1}{\sqrt{2a+3}-\sqrt{a+2}}$ với $a > -1$.

Hướng dẫn giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{\sqrt{2a+3}-\sqrt{a+2}} &= \frac{(a+1)(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2})}{(\sqrt{2a+3}-\sqrt{a+2})(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2})} \\ &= \frac{(a+1)(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2})}{(\sqrt{2a+3})^2 - (\sqrt{a+2})^2} \\ &= \frac{(a+1)(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2})}{(2a+3) - (a+2)} \\ &= \frac{(a+1)(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2})}{a+1} \\ &= \sqrt{2a+3} + \sqrt{a+2}. \end{aligned}$$

□

LUYỆN TẬP 6

Trục căn thức ở mẫu: $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$.

Hướng dẫn giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} &= \frac{1 \cdot (\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(x+1) - x} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{1} \\ &= \sqrt{x+1} + \sqrt{x}. \end{aligned}$$

**Chú ý**

Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B};$$

$$\frac{C}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B};$$

$\sqrt{A} - \sqrt{B}$ được gọi là biểu thức liên hợp của $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ và ngược lại.

E BÀI TẬP

Bài 26. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một bình phương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(5-x)^2}$ với $x \geq 5$; b) $\sqrt{(x-3)^4}$; c) $\sqrt{(y+1)^6}$ với $y < -1$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{(5-x)^2} = |5-x| = -(5-x) = x-5$ (vì $5-x \leq 0$ khi $x \geq 5$).

b) $\sqrt{(x-3)^4} = |(x-3)^2| = (x-3)^2$ (vì $(x-3)^2 \geq 0$ với mọi x).

c) $\sqrt{(y+1)^6} = |(y+1)^3| = -(y+1)^3$ (vì $y < -1$ nên $y+1 < 0$).



Bài 27. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một tích, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{25(a+1)^2}$ với $a > -1$; b) $\sqrt{x^2(x-5)^2}$ với $x > 5$;

c) $\sqrt{2b} \cdot \sqrt{32b}$ với $b > 0$; d) $\sqrt{3c} \cdot \sqrt{27c^3}$ với $c > 0$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{25(a+1)^2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{(a+1)^2} = 5 \cdot |a+1| = 5a+5$ (vì $a > -1$ nên $a+1 > 0$).

b) $\sqrt{x^2(x-5)^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{(x-5)^2} = x \cdot (x-5) = x^2 - 5x$ (vì $x > 5$ nên $x-5 > 0$).

c) $\sqrt{2b} \cdot \sqrt{32b} = \sqrt{2b \cdot 32b} = \sqrt{64b^2} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{b^2} = 8 \cdot |b| = 8b$ (vì $b > 0$).

d) $\sqrt{3c} \cdot \sqrt{27c^3} = \sqrt{3c \cdot 27c^3} = \sqrt{81c^4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{c^4} = 9 \cdot |c^2| = 9c^2$ (vì $c^2 > 0$).



Bài 28. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một thương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{\frac{(3-a)^2}{9}}$ với $a > 3$; b) $\frac{\sqrt{75x^5}}{\sqrt{5x^3}}$ với $x > 0$;

c) $\sqrt{\frac{9}{x^2-2x+1}}$ với $x > 1$; d) $\sqrt{\frac{x^2-4x+4}{x^2+6x+9}}$ với $x \geq 2$.

Hướng dẫn giải.

$$a) \sqrt{\frac{(3-a)^2}{9}} = \frac{\sqrt{(3-a)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{|3-a|}{3} = \frac{-(3-a)}{3} = \frac{a-3}{3} \text{ (vì } a > 3 \text{ nên } 3-a < 0).$$

$$b) \frac{\sqrt{75x^5}}{\sqrt{5x^3}} = \sqrt{\frac{75x^5}{5x^3}} = \sqrt{25x^2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} = 5 \cdot |x| = 5x \text{ (vì } x > 0).$$

$$c) \sqrt{\frac{9}{x^2-2x+1}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{(x-1)^2}} = \frac{3}{|x-1|} = \frac{3}{x-1} \text{ (vì } x > 1 \text{ nên } x-1 > 0).$$

$$d) \sqrt{\frac{x^2-4x+4}{x^2+6x+9}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt{(x+3)^2}} = \frac{|x-2|}{|x+3|} = \frac{x-2}{x+3} \text{ (vì } x \geq 2 \text{ nên } x-2 \geq 0 \text{ và } x+3 > 0).$$

□

Bài 29. Trục căn thức ở mẫu:

$$a) \frac{9}{2\sqrt{3}};$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{a}} \text{ với } a > 0;$$

$$c) \frac{7}{3-\sqrt{2}};$$

$$d) \frac{5}{\sqrt{x}+3} \text{ với } x > 0, x \neq 9;$$

$$e) \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$f) \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \text{ với } x > 0, x \neq 3.$$

Hướng dẫn giải.

$$a) \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{2 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{a}.$$

$$c) \frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{7 \cdot (3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{7 \cdot (3+\sqrt{2})}{7} = 3+\sqrt{2}.$$

$$d) \frac{5}{\sqrt{x}+3} = \frac{5 \cdot (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3) \cdot (\sqrt{x}-3)} = \frac{5(\sqrt{x}-3)}{x-9}.$$

$$e) \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{5-2\sqrt{6}}{1} = 5-2\sqrt{6}.$$

$$f) \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{x-3}.$$

□

Bài 30. Rút gọn biểu thức: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b}$ với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$.**Hướng dẫn giải.**

Với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$, ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b} \\
 = & \frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{b} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{2b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\
 = & \frac{a + \sqrt{ab} - \sqrt{ab} + b - 2b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\
 = & \frac{a-b}{a-b} = 1.
 \end{aligned}$$

□

Chủ đề 5. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

❖ **Câu 1.** Căn bậc hai của 16 là

- (A) 4. (B) 4 và -4. (C) 256. (D) 256 và -256.

📁 **Hướng dẫn giải.**

Căn bậc hai của 16 là 4 và -4.

Chọn đáp án (B) □

❖ **Câu 2.** Nếu $\sqrt{x} = 9$ thì x bằng

- (A) 3. (B) 3 hoặc -3. (C) 81. (D) 81 hoặc -81.

📁 **Hướng dẫn giải.**

Ta có $\sqrt{81} = 9$ nên $x = 81$. □

✍ **Bài 31.** Rút gọn biểu thức

a) $A = \sqrt{40^2 - 24^2};$

b) $B = (\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3};$

c) $C = \frac{\sqrt{63^3 + 1}}{\sqrt{63^2 - 62}};$

d) $D = \sqrt{60} - 5\sqrt{\frac{3}{5}} - 3\sqrt{\frac{5}{3}}.$

📁 **Hướng dẫn giải.**

a) $A = \sqrt{40^2 - 24^2} = \sqrt{(40 + 24)(40 - 24)} = \sqrt{64 \cdot 16} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{16} = 8 \cdot 4 = 32;$

b) $B = (\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{2^2 \cdot 3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3^3}) \cdot \sqrt{3} = (2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3;$

c) $C = \frac{\sqrt{63^3 + 1}}{\sqrt{63^2 - 62}} = \sqrt{\frac{(63 + 1)(63^2 - 63 + 1)}{63^2 - 62}} = \sqrt{\frac{64 \cdot (63^2 - 62)}{63^2 - 62}} = 8;$

d) $D = \sqrt{60} - 5\sqrt{\frac{3}{5}} - 3\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{4 \cdot 15} - \sqrt{5^2 \cdot \frac{3}{5}} - \sqrt{3^2 \cdot \frac{5}{3}} = 2\sqrt{15} - \sqrt{15} - \sqrt{15} = 0.$ □

✍ **Bài 32.** Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{x^2 + x}{\sqrt{x + 1}}$ với $x > -1;$

b) $\frac{3}{\sqrt{x} - 2}$ với $x > 0, x \neq 4;$

c) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}};$

d) $\frac{x^2 - 90}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ với $x > 0, x \neq 3.$

📁 **Hướng dẫn giải.**

a) Với $x > -1$. Ta có $\frac{x^2 + x}{\sqrt{x + 1}} = \frac{x(x + 1)}{\sqrt{x + 1}} = \frac{x \cdot (\sqrt{x + 1})^2}{\sqrt{x + 1}} = x\sqrt{x + 1};$

b) Với $x > 0, x \neq 4$. Ta có $\frac{3}{\sqrt{x} - 2} = \frac{3(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{3(\sqrt{x} + 2)}{x - 4};$

c) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{3 - 5} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{-2} = \sqrt{15} - 4;$

d) Với $x > 0, x \neq 3$.

$$\text{Ta có } \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x + 3)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = (\sqrt{x} + \sqrt{3})(x + 3).$$

□

 **Bài 33.** So sánh

a) $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$;

b) $7\sqrt{\frac{3}{7}}$ và $\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}$;

c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ và $\frac{6}{\sqrt{10}}$.

 **Hướng dẫn giải.**

a) Ta có $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$; $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$.
Mà $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

b) Ta có $7\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{7^2 \cdot \frac{3}{7}} = \sqrt{21}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{11} = \sqrt{2 \cdot 11} = \sqrt{22}$.
Mà $\sqrt{21} < \sqrt{22}$ nên $7\sqrt{\frac{3}{7}} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{11}$.

c) Ta có $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{20}}{5}$; $\frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{90}}{5}$.
Mà $\frac{\sqrt{20}}{5} < \frac{\sqrt{90}}{5}$ nên $\frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{6}{\sqrt{10}}$.

□

 **Bài 34.** Cho biểu thức $M = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ với $a > 0, b > 0$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tính giá trị của biểu thức tại $a = 2, b = 8$.

 **Hướng dẫn giải.**

a) Với $a > 0, b > 0$. Ta có
$$M = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{b^2})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = a + b - \sqrt{ab}.$$

b) Với $a = 2, b = 8$, ta có $M = 2 + 8 - \sqrt{2 \cdot 8} = 6$.

□

 **Bài 35.** Cho biểu thức $N = \frac{x\sqrt{x} + 8}{x - 4} - \frac{x + 4}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức N .

b) Tính giá trị của biểu thức tại $x = 9$.

 **Hướng dẫn giải.**

a)

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{x\sqrt{x}+8}{x-4} - \frac{x+4}{\sqrt{x}-2} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}+8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{x+4}{\sqrt{x}-2} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}+8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}+8 - (x+4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4) - (x+4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+2)[(x-2\sqrt{x}+4) - (x+4)]}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{(x-2\sqrt{x}+4) - (x+4)}{\sqrt{x}-2} \\
 &= \frac{x-2\sqrt{x}+4-x-4}{\sqrt{x}-2} \\
 &= \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.
 \end{aligned}$$

Do đó $N = \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

b) Với $x = 9 \Rightarrow N = \frac{-2\sqrt{9}}{\sqrt{9}-2} = \frac{-6}{1} = -6$.

□

Bài 36. Ngày 28/9/2018, sau trận động đất 7,5 độ Richter, cơn sóng thần (tiếng Anh là Tsunami) cao hơn 6 m đã tràn vào đảo Sulawesicuar (Indonesia) và tàn phá thành phố Palu gây thiệt hại vô cùng to lớn. Tốc độ cơn sóng thần v (m/s) và chiều sâu đại dương d (m) của nơi bắt đầu sóng thần liên hệ bởi công thức $v = \sqrt{dg}$, trong đó $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

- Hãy tính tốc độ cơn sóng thần xuất phát từ Thái Bình Dương, ở độ sâu trung bình 400 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét trên giây).
- Theo tính toán của các nhà khoa học địa chất, tốc độ cơn sóng thần ngày 28/9/2018 là 800 km/h, hãy tính chiều sâu đại dương của nơi tâm chấn động đất gây ra sóng thần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Hướng dẫn giải.

a) $v = \sqrt{dg} = \sqrt{400 \cdot 9,81} \approx 62,64 \text{ (m/s)}.$

b) Đổi đơn vị $800 \text{ (km/h)} = \frac{2000}{9} \text{ (m/s)}.$

Ta có $v = \sqrt{dg} \Rightarrow v^2 = dg \Rightarrow d = \frac{v^2}{g} = \frac{\left(\frac{2000}{9}\right)^2}{9,81} \approx 5033,9 \text{ (m)}.$

□

Bài 37. Khi bay vào không gian, trọng lượng P (N) của một phi hành gia ở vị trí cách mặt đất một độ cao h (m) được tính theo công thức

$$P = \frac{28\,014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2}$$

(Nguồn: Chuyên đề Vật lí 11, NXB Đại học Sư phạm, năm 2023)

- Trọng lượng của phi hành gia là bao nhiêu Newton khi cách mặt đất 10 000 m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
- Ở độ cao bao nhiêu mét thì trọng lượng của phi hành gia là 619 N (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải.

$$a) P = \frac{28\,014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2} = \frac{28\,014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + 10\,000)^2} \approx 681,8 \text{ (N)}.$$

Vậy khi cách mặt đất 10 000 m thì trọng lượng của phi hành gia là 681,8 N.

b)

$$\begin{aligned} 619 &= \frac{28\,014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2} \\ 28\,014 \cdot 10^{12} &= 619 \cdot (64 \cdot 10^5 + h)^2 \\ \frac{28\,014 \cdot 10^{12}}{619} &= (64 \cdot 10^5 + h)^2 \\ \sqrt{\frac{28\,014 \cdot 10^{12}}{619}} &= 64 \cdot 10^5 + h \\ h &= \sqrt{\frac{28\,014 \cdot 10^{12}}{619}} - 64 \cdot 10^5 \\ h &= 327\,322,34. \end{aligned}$$

Vậy ở độ cao 327 322,34 thì trọng lượng của phi hành gia là 619 N.

□

Bài 38. Áp suất P (lb/in²) cần thiết để ép nước qua một ống dài L (ft) và đường kính d (in) với tốc độ v (ft/s) được cho bởi công thức $P = 0,00161 \cdot \frac{v^2 L}{d}$

(Nguồn: John W. Cell, *Engineering Problems Illustrating Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, năm 1943).

- Hãy tính v theo P , L và d .
- Cho $P = 198,5$; $L = 11\,560$; $d = 6$. Hãy tính tốc độ v (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của feet trên giây). Biết rằng 1 in = 2,54 cm; 1 ft(feet) = 0,3048 m; 1 lb(pound) = 0,45359237 kg; 1 lb/in² = 6 894,75729 Pa(Pascal).

Hướng dẫn giải.

a)

$$\begin{aligned}P &= 0,00161 \cdot \frac{v^2 L}{d} \\Pd &= 0,00161 \cdot v^2 \cdot L \\v^2 &= \frac{Pd}{0,00161 \cdot L} \\v &= \sqrt{\frac{Pd}{0,00161 \cdot L}}.\end{aligned}$$

$$\text{b) } v = \sqrt{\frac{Pd}{0,00161 \cdot L}} = \sqrt{\frac{198,5 \cdot 6}{0,00161 \cdot 11\,560}} \approx 8,0.$$

□

Chương 4.



HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Chủ đề 1. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

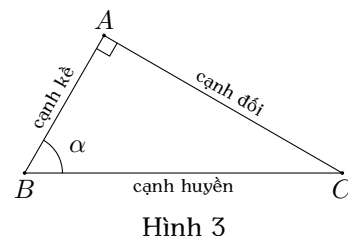
A TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

⇨ **Định nghĩa 1.1.** Cho góc nhọn α . Xét tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = \alpha$ (Hình 3).

- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là **sin** của góc α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là **côsin** của góc α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là **tang** của góc α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là **côtang** của góc α , kí hiệu $\cot \alpha$.

Bốn tỉ số trên được gọi là các tỉ số lượng giác của góc nhọn α . Trong Hình 3, ta có

$$\begin{aligned}\sin \widehat{B} &= \frac{AC}{BC}; & \cos \widehat{B} &= \frac{AB}{BC}; \\ \tan \widehat{B} &= \frac{AC}{AB}; & \cot \widehat{B} &= \frac{AB}{AC}.\end{aligned}$$



⇨ Nhận xét 1.1.

- Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α không phụ thuộc vào việc chọn tam giác vuông có góc nhọn α . Thật vậy, nếu hai tam giác ABC , $A'B'C'$ lần lượt vuông tại A , A' và có $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} = \alpha$ thì $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, suy ra

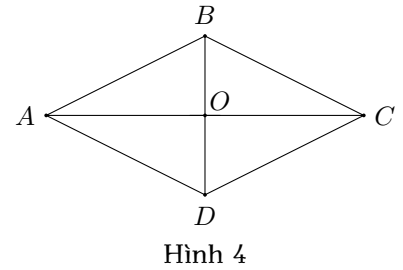
$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}; \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}; \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}; \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

- Khi không sợ nhầm lẫn, ta có thể viết $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$, $\cot B$ lần lượt thay cho các kí hiệu $\sin \widehat{B}$, $\cos \widehat{B}$, $\tan \widehat{B}$, $\cot \widehat{B}$.

- Từ định nghĩa trên, ta thấy các tỉ số lượng giác của góc nhọn α luôn dương và $\sin \alpha < 1$, $\cos \alpha < 1$, $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

○ Ví dụ 1.

Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại điểm O (Hình 4).



a) Tỉ số $\frac{OB}{AB}$ là sin của góc nhọn nào? Tỉ số $\frac{OB}{BC}$ là cosin của góc nhọn nào?

b) Viết tỉ số lượng giác của mỗi góc nhọn sau: $\tan \widehat{OCD}$, $\cot \widehat{OAD}$.

Hướng dẫn giải.

Hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại điểm O nên AC vuông góc với BD tại O .

a) Tam giác OAB vuông tại O nên $\frac{OB}{AB} = \sin \widehat{OAB}$.
Tam giác OBC vuông tại O nên $\frac{OB}{BC} = \cos \widehat{OBC}$.

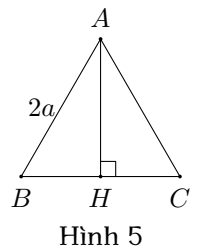
b) Tam giác OCD vuông tại O nên $\tan \widehat{OCD} = \frac{OD}{OC}$.
Tam giác OAD vuông tại O nên $\cot \widehat{OAD} = \frac{OA}{OD}$.

□

❶ Ví dụ 2.

Cho tam giác đều ABC có $AB = 2a$. Kẻ đường cao AH (Hình 5).

- a) Tính độ dài các đoạn thẳng BH , AH .
b) Tính các tỉ số lượng giác của góc 30° .



Hình 5

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $BH = \frac{BC}{2} = a$.
Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

b) Xét tam giác ABH vuông tại H có $\widehat{BAH} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$, suy ra

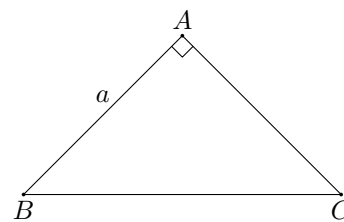
$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \sin \widehat{BAH} = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}; \cos 30^\circ = \cos \widehat{BAH} = \frac{AH}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \tan 30^\circ &= \tan \widehat{BAH} = \frac{BH}{AH} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \cot 30^\circ = \cot \widehat{BAH} = \frac{AH}{BH} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

□

❷ Ví dụ 3.

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$ (Hình 6).

- Tính độ dài các cạnh AC, BC và số đo góc B .
- Tính các tỉ số lượng giác của góc 45° .



Hình 6

Hướng dẫn giải.

- Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AB = AC = a$ và $\widehat{B} = 45^\circ$.
Theo định lý Pythagore, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Suy ra $BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.
Do đó $BC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

- Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có

$$\sin 45^\circ = \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan 45^\circ = \tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = 1;$$

$$\cot 45^\circ = \cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a} = 1.$$

□

LUYỆN TẬP 1

Cho tam giác MNP vuông tại M , $MN = 3$ cm, $MP = 4$ cm. Tính độ dài cạnh NP và các tỉ số lượng giác của góc P .

Hướng dẫn giải.

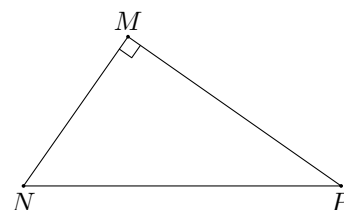
Theo định lý Pythagore trong tam giác MNP vuông tại M , ta có

$$NP = \sqrt{MN^2 + MP^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Xét tam giác MNP vuông tại M , ta có

$$\sin P = \frac{MN}{NP} = \frac{3}{5}; \quad \cos P = \frac{MP}{NP} = \frac{4}{5}$$

$$\tan P = \frac{MN}{MP} = \frac{3}{4}; \quad \cot P = \frac{MP}{MN} = \frac{4}{3}.$$



□

B TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

✎ **Nhận xét 1.2.** Hai góc nhọn có tổng bằng 90° được gọi là hai góc phụ nhau.

🔵 **Định lý 1.1.** Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

✧ **Nhận xét 1.3.** Với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, ta có

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha; \quad \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

🔴 **Ví dụ 4.** Cho tam giác đều ABC có $AB = 2a$. Kẻ đường cao AH (Hình sau). Tính các tỉ số lượng giác của góc 60° .

📁 **Hướng dẫn giải.**

Vì 60° và 30° là hai góc phụ nhau nên ta có

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; & \cos 60^\circ &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \\ \tan 60^\circ &= \cot 30^\circ = \sqrt{3}; & \cot 60^\circ &= \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

□

LUYỆN TẬP 2

Tính

a) $\sin 61^\circ - \cos 29^\circ$;

c) $\tan 28^\circ - \cot 62^\circ$;

b) $\cos 15^\circ - \sin 75^\circ$;

d) $\cot 47^\circ - \tan 43^\circ$.

📁 **Hướng dẫn giải.**

a) $\sin 61^\circ - \cos 29^\circ = \sin 61^\circ - \sin 61^\circ = 0$;

c) $\tan 28^\circ - \cot 62^\circ = \tan 28^\circ - \tan 28^\circ = 0$;

b) $\cos 15^\circ - \sin 75^\circ = \cos 15^\circ - \cos 15^\circ = 0$;

d) $\cot 47^\circ - \tan 43^\circ = \cot 47^\circ - \cot 47^\circ = 0$.

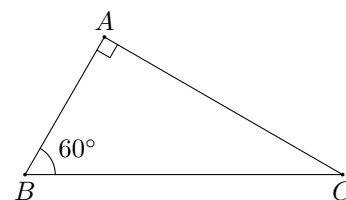
□

🔴 **Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính các tỉ số $\frac{AB}{BC}$ và $\frac{AC}{BC}$.

📁 **Hướng dẫn giải.**

(Hình 8) Xét tam giác ABC với $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \cos B = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \frac{AC}{BC} &= \sin B = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$



Hình 8

□

✧ **Nhận xét 1.4.** Từ các kết quả trên, ta có bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt như sau:

α	30°	45°	60°
Tỉ số lượng giác			
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 6. Sử dụng bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt, tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$;

b) $\tan 30^\circ \cdot \cot 30^\circ$.

Hướng dẫn giải.

a) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

b) $\tan 30^\circ \cdot \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 1.$

□

Chú ý

Ta quy ước:

$$\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$$

$$\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$$

$$\tan^2 \alpha = (\tan \alpha)^2$$

$$\cot^2 \alpha = (\cot \alpha)^2$$

LUYỆN TẬP 3

Sử dụng bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt, tính giá trị của biểu thức:
 $\sin 60^\circ - \cos 60^\circ \cdot \tan 60^\circ$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\sin 60^\circ - \cos 60^\circ \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 0.$

□

🕒 SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN

Cùng với đơn vị đo góc là độ (kí hiệu: $^{\circ}$), người ta còn sử dụng những đơn vị đo góc khác là phút (kí hiệu: $'$); giây (kí hiệu: $''$) với quy ước: $1^{\circ} = 60'$; $1' = 60''$.

Ta có thể tính giá trị lượng giác (đúng hoặc gần đúng) của một góc nhọn bằng cách sử dụng các phím: **[sin]**, **[cos]**, **[tan]** trên máy tính cầm tay. Trước hết, ta đưa máy tính về chế độ "độ". Để nhập độ ($^{\circ}$), phút ($'$), giây ($''$), ta sử dụng phím **[$^{\circ}'''$]**.

Chẳng hạn, để tính $\sin 35^{\circ}$ và $\tan 70^{\circ}25'43''$, ta làm như sau:

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\sin 35^{\circ}$	[sin] [3] [5] [$^{\circ}'''$] [=]	0,5735764364
$\tan 70^{\circ}25'43''$	[tan] [7] [0] [$^{\circ}'''$] [2] [5] [$^{\circ}'''$] [4] [3] [$^{\circ}'''$] [=]	2,812770138

🔴 **Ví dụ 7.** Dùng máy tính cầm tay để tính (gần đúng) các giá trị lượng giác sau:

$$\cos 28^{\circ}; \quad \tan 45^{\circ}75'52'', \quad \sin 84^{\circ}42''$$

📁 Hướng dẫn giải.

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\cos 28^{\circ}$	[cos] [2] [8] [$^{\circ}'''$] [=]	0,8829475929
$\tan 45^{\circ}75'52''$	[tan] [4] [5] [$^{\circ}'''$] [7] [5] [$^{\circ}'''$] [5] [2] [$^{\circ}'''$] [=]	1,045140969
$\sin 84^{\circ}42'$	[sin] [8] [4] [$^{\circ}'''$] [4] [2] [$^{\circ}'''$] [=]	0,994543159

🔴 **Nhận xét 1.5.** Sử dụng tính chất $\cot \alpha = \tan (90^{\circ} - \alpha)$, ta có thể tính được cotang của một góc nhọn hoặc có thể tính $\cot \alpha$ theo công thức: $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$. Chẳng hạn, ta tính $\cot 56^{\circ}$ như sau:

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\cot 56^{\circ}$	[tan] [$\leftarrow$] [5] [6] [$^{\circ}'''$] [=]	0,6745085168
$\cot 56^{\circ}$	[tan] [5] [6] [=] [$\frac{1}{x}$] [=]	0,6745085168

🔴 **Ví dụ 8.** Tìm số đo góc nhọn α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ), biết:

a) $\cos \alpha = 0,97$;

b) $\tan \alpha = 0,68$;

c) $\sin \alpha = 0,45$.

📁 Hướng dẫn giải.

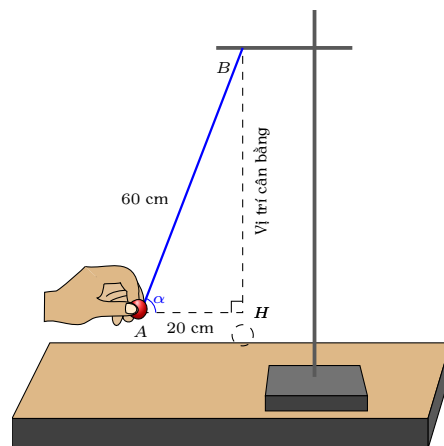
Ta có thể làm như sau:

	Nút ấn	Kết quả
$\cos \alpha = 0,97$	[SHIFT] [cos] [0] [.] [9] [7] [=]	14°
$\tan \alpha = 0,68$	[SHIFT] [tan] [0] [.] [6] [8] [=]	34°
$\sin \alpha = 0,45$	[SHIFT] [sin] [0] [.] [4] [5] [=]	27°



◉ Ví dụ 9.

Treo quả cầu kim loại nhỏ vào giá thí nghiệm bằng sợi dây mảnh nhẹ không dẫn. Khi quả cầu đứng yên tại vị trí cân bằng, dây treo có phương thẳng đứng. Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ rồi buông ra thì quả cầu sẽ chuyển động qua lại quanh vị trí cân bằng. Khi kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng, giả sử tâm A của quả cầu cách B một khoảng $AB = 60$ cm và cách vị trí cân bằng một khoảng $AH = 20$ cm (Hình 9). Tính số đo góc α tạo bởi sợi dây BA và vị trí cân bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



➤ Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có:

$$\sin \alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

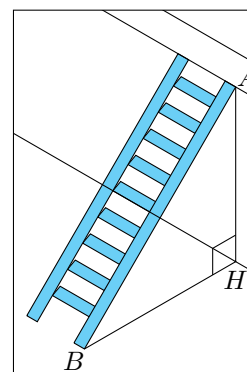
Do đó $\alpha \approx 19^\circ$.

Vậy góc α tạo bởi sợi dây BA và vị trí cân bằng có số đo khoảng 19° .



◉ Ví dụ 10.

Hình 10 mô tả một chiếc thang có chiều dài $AB = 4$ m được đặt dựa vào tường, khoảng cách từ chân thang đến chân tường là $BH = 1,5$ m. Tính góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



➤ Hướng dẫn giải.

Ta có, góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất là $\widehat{ABH}$.

Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có $\cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{1,5}{4} = 0,375$.

Vậy $\widehat{ABH} \approx 68^\circ$.



📁 BÀI TẬP

✍ **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 4$ cm, $BC = 6$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B .

➤ Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có

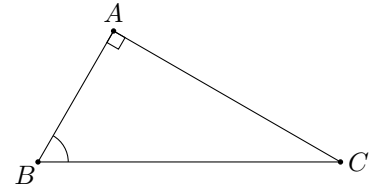
$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\cot \widehat{B} = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2$ cm, $AC = 3$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc C .

Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có

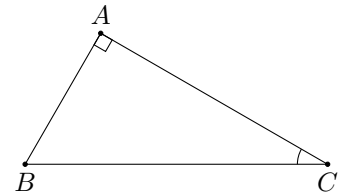
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{13}.$$

$$\sin \widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

$$\tan \widehat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}.$$

$$\cot \widehat{C} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}.$$



□

Bài 3. Cho tam giác MNP có $MN = 5$ cm, $MP = 12$ cm, $NP = 13$ cm. Chứng minh tam giác MNP vuông tại M . Từ đó, tính các tỉ số lượng giác của góc N .

Hướng dẫn giải.

✿ Ta có $\begin{cases} NP^2 = 169 \\ MN^2 + MP^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow NP^2 = MN^2 + MP^2.$

Vậy tam giác MNP vuông tại M .

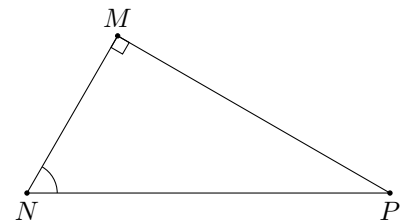
✿ Xét tam giác MNP vuông tại M , ta có

$$\sin \widehat{N} = \frac{MP}{NP} = \frac{12}{13}.$$

$$\cos \widehat{N} = \frac{MN}{NP} = \frac{5}{13}.$$

$$\tan \widehat{N} = \frac{MP}{MN} = \frac{12}{5}.$$

$$\cot \widehat{N} = \frac{NM}{MP} = \frac{5}{12}.$$



□

Bài 4. Mỗi tỉ số lượng giác sau đây bằng tỉ số lượng giác nào của góc 63° ? Vì sao?

a) $\sin 27^\circ$;

b) $\cos 27^\circ$;

c) $\tan 27^\circ$;

d) $\cot 27^\circ$.

Hướng dẫn giải.

Ta thấy $27^\circ + 63^\circ$ nên theo định lý về hai góc phụ nhau ta có

a) $\sin 27^\circ = \cos 63^\circ$;

c) $\tan 27^\circ = \cot 63^\circ$;

b) $\cos 27^\circ = \sin 63^\circ$;

d) $\cot 27^\circ = \tan 63^\circ$.

□

Bài 5. Sử dụng máy tính cầm tay để tính các tỉ số lượng giác của mỗi góc sau (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

a) 41° ;

b) $28^\circ 35'$;

c) $70^\circ 27' 46''$.

Hướng dẫn giải.

Ta có

Tỉ số lượng giác	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
α				
41°	0,66	0,75	0,87	1,15
$28^\circ 35'$	0,48	0,88	0,54	1,84
$70^\circ 27' 46''$	0,94	0,33	2,82	0,35

□

Bài 6. Sử dụng tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, tính giá trị biểu thức

$$A = \sin 25^\circ + \cos 25^\circ - \sin 65^\circ - \cos 65^\circ.$$

Hướng dẫn giải.

Vì $25^\circ + 65^\circ = 90^\circ$ nên ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin 25^\circ + \cos 25^\circ - \sin 65^\circ - \cos 65^\circ \\ &= \sin 25^\circ + \cos 25^\circ - \cos 25^\circ - \sin 25^\circ \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Bài 7. Cho góc nhọn α . Biết rằng, tam giác ABC vuông tại A sao cho $\widehat{B} = \alpha$.

a) Biểu diễn các tỉ số lượng giác của góc nhọn α theo AB, BC, CA .

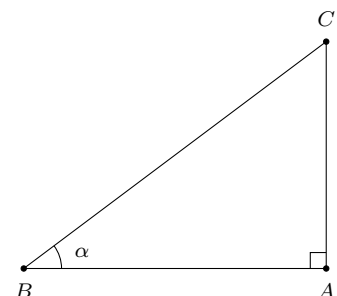
b) Chứng minh $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$; $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.
Từ đó tính giá trị biểu thức $S = \sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ$; $T = \tan 61^\circ \cdot \cot 61^\circ$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $\sin \alpha = \frac{AC}{BC}$, $\cos \alpha = \frac{AB}{BC}$, $\tan \alpha = \frac{AC}{AB}$, $\cot \alpha = \frac{AB}{AC}$.

b) Ta có (sử dụng thêm định lý Pythagore)

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} \\ &= \frac{BC^2}{BC^2} = 1. \end{aligned}$$



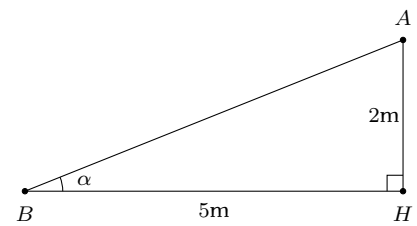
Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{AC}{BC} : \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan \alpha. \\ \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{AB}{BC} : \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AC} = \cot \alpha. \\ \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = 1.\end{aligned}$$

Áp dụng các kết quả trên, ta có ngay $S = 1$ và $T = 1$. □

Bài 8.

Hình bên mô tả tia nắng mặt trời dọc theo AB tạo với phương nằm ngang trên mặt đất một góc $\alpha = \widehat{ABH}$. Sử dụng máy tính cầm tay, tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ), biết $AH = 2\text{m}$, $BH = 5\text{m}$.



Hướng dẫn giải.

Xét tam giác vuông ABH , ta có: $\tan \alpha = \frac{AH}{BH} = \frac{2}{5}$.

Do đó $\alpha = 21,8^\circ$. □

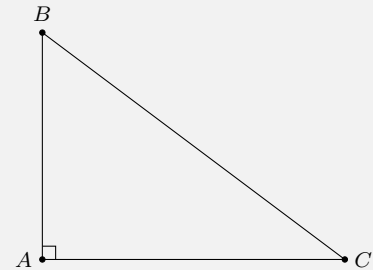
Chủ đề 2. MỘT SỐ HỆ THỨC LƯỢNG VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A TÍNH CẠNH GÓC VUÔNG THEO CẠNH HUYỀN VÀ TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

Định lý 2.1. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin của góc đối hoặc nhân với cosin góc kề.
Trong Hình 13 ta có

$$AC = BC \cdot \sin B = BC \cdot \cos C;$$

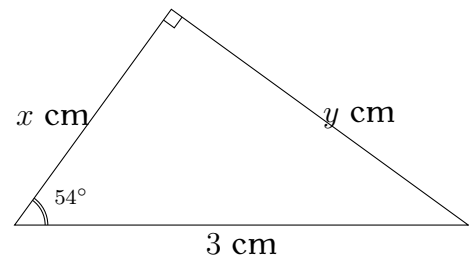
$$AB = BC \cdot \sin C = BC \cdot \cos B.$$



Hình 13

Ví dụ 1.

Tìm x, y trong Hình 14 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của centimét).



Hình 14

Hướng dẫn giải.

Từ Hình 14, ta có

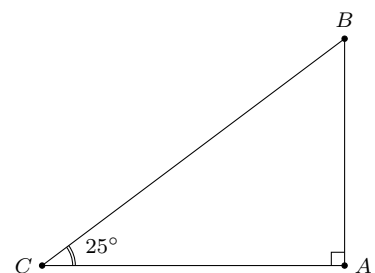
$$x = 3 \cdot \cos 54^\circ \approx 1,76 \text{ (cm)};$$

$$y = 3 \cdot \sin 54^\circ \approx 2,43 \text{ (cm)}.$$

□

LUYỆN TẬP 1

Tính độ cao AC trong Hình 12b khi $BC = 20$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hình 12b

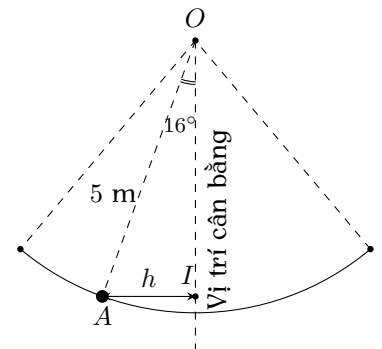
Hướng dẫn giải.

Theo Hình 12b ta có $AC = BC \cdot \cos 25^\circ \approx 18,1$ m.

□

Ví dụ 2.

Trong trò chơi đánh đu của một lễ hội vào mùa xuân, khi người chơi nhún đều. Cây đu sẽ đưa người chơi dao động quanh vị trí cân bằng. Hình 15 minh họa người chơi đang ở vị trí A với $OA = 5\text{ m}$ và dây OA tạo với phương thẳng đứng một góc là $\widehat{AOI} = 16^\circ$. Tính khoảng cách AI (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét)?



Hình 15

Hướng dẫn giải.

Vì tam giác OAI vuông tại I nên

$$AI = OA \cdot \sin \widehat{AOI} = 5 \cdot \sin 16^\circ \approx 1,38 \text{ (m)}.$$

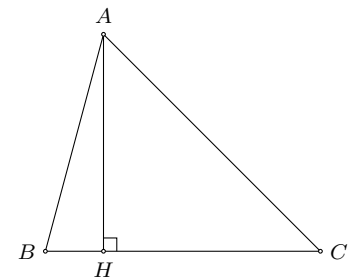
□

❶ Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH .

- Biểu thị AH theo AB và tỉ số lượng giác của góc B .
- Chứng minh $AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C$.

Hướng dẫn giải.

- Vì tam giác ABH vuông tại H nên $AH = AB \cdot \sin B$.
- Vì tam giác ACH vuông tại H nên $AH = AC \cdot \sin C$.
Ta có $AH = AB \cdot \sin B$ và $AH = AC \cdot \sin C$
nên $AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C$.



Hình 16

□

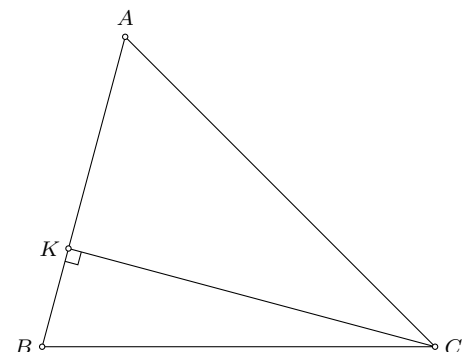
LUYỆN TẬP 2

Cho tam giác nhọn ABC có đường cao CK . Biểu thị CK theo AC và $\sin A$. Từ đó, chứng minh diện tích tam giác ABC bằng $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$.

Hướng dẫn giải.

Vì tam giác CAK vuông tại K nên $CK = AC \cdot \sin A$.
Ta có diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A.$$



□

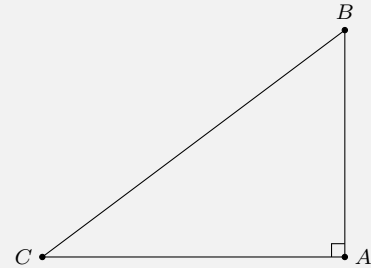
B) TÍNH CẠNH GÓC VUÔNG THEO CẠNH GÓC VUÔNG CÒN LẠI VÀ TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

Định lý 2.2. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang của góc đối hoặc nhân với cotang của góc kề.

Trong Hình 17. ta có

$$AC = AB \cdot \tan B = AB \cdot \cot C;$$

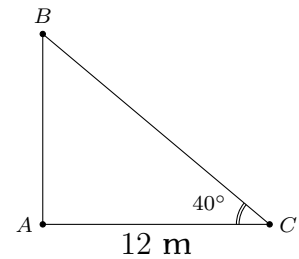
$$AB = AC \cdot \tan C = AC \cdot \cot B.$$



Hình 17

❶ Ví dụ 4.

Tam giác ABC ở Hình 18 (có $\widehat{A} = 90^\circ$) mô tả cột cờ AB và bóng nắng của cột cờ trên mặt đất là AC . Người ta đo được độ dài $AC = 12$ m và $\widehat{C} = 40^\circ$. Tính chiều cao AB của cột cờ (làm tròn kết quả đến phần trăm của mét).



Hình 18

➡ Hướng dẫn giải.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AB = AC \cdot \tan C = 12 \cdot \tan 40^\circ \approx 10,07$ (m). $\square$

LUYỆN TẬP 3

Tính AB trong Hình 17 khi $AC = 4$ cm và $\widehat{B} = 34^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của centimét).

➡ Hướng dẫn giải.

Ta có $AC = AB \cdot \tan B$ suy ra $AB = \frac{AC}{\tan B} = \frac{4}{\tan 34^\circ} \approx 5,9$ cm. $\square$

C) ÁP DỤNG TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN ĐỂ GIẢI TAM GIÁC VUÔNG

Trong một tam giác vuông, nếu cho biết độ dài hai cạnh hoặc độ dài một cạnh và số đo một góc nhọn thì ta sẽ tìm được tất cả độ dài các cạnh và số đo các góc còn lại của tam giác đó. Bài toán đặt ra như thế gọi là bài toán “giải tam giác vuông”.

Lưu ý rằng, trong kết quả của các ví dụ và bài tập dưới đây, nếu không nói gì thêm thì ta làm tròn đến độ (với số đo góc) và đến hàng phần mười (với số đo độ dài).

❶ Ví dụ 5. Tìm độ dài cạnh huyền BC và số đo các góc nhọn B, C của tam giác vuông ABC , biết hai cạnh góc vuông $AB = 4$ cm và $AC = 6$ cm.

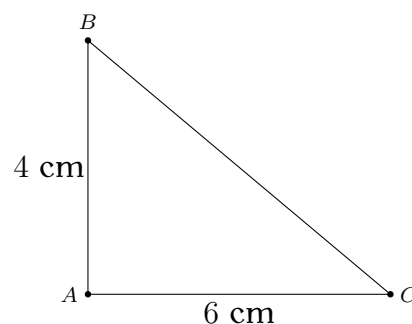
➡ Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có

🟡 $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (theo định lý Pythagore), suy ra $BC^2 = 4^2 + 6^2 = 52$ hay $BC = \sqrt{52} \approx 7,2$ (cm);

🟢 $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, suy ra $\widehat{B} \approx 56^\circ$;

🟣 $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn của tam giác vuông), suy ra $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$.



Hình 19

□

LUYỆN TẬP 4

Tìm độ dài cạnh góc vuông AC và số đo các góc nhọn B, C của tam giác vuông ABC , biết cạnh góc vuông $AB = 5$ cm và cạnh huyền $BC = 13$ cm.

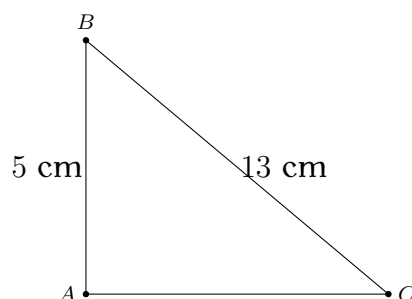
📁 **Hướng dẫn giải.**

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có

🟡 $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (theo định lý Pythagore), suy ra $13^2 = 5^2 + AC^2$ suy ra $AC^2 = 144$ hay $AC = 12$ (cm);

🟢 $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{5}$, suy ra $\widehat{B} \approx 67^\circ$;

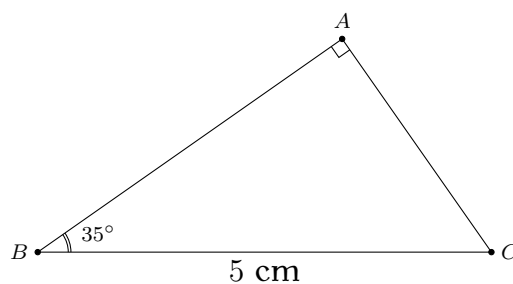
🟣 $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn của tam giác vuông), suy ra $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$.



□

🟡 Ví dụ 6.

Tìm số đo góc nhọn C và độ dài hai cạnh góc vuông AB, AC của tam giác vuông ABC , biết cạnh huyền $BC = 5$ cm và $\widehat{B} = 35^\circ$.



📁 **Hướng dẫn giải.**

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có

🟣 $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn của tam giác vuông), suy ra $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$;

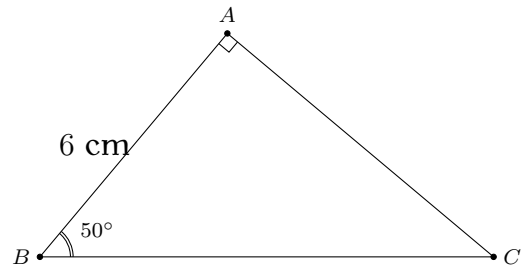
🟢 $AB = BC \cdot \cos B = 5 \cdot \cos 35^\circ \approx 4,1$ (cm);

🟡 $AC = BC \cdot \sin B = 5 \cdot \sin 35^\circ \approx 2,9$ (cm).

□

🟡 Ví dụ 7.

Tìm số đo góc nhọn C và độ dài cạnh góc vuông AC , cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC , biết cạnh góc vuông $AB = 6$ cm và $\widehat{B} = 50^\circ$.



Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \text{ (tổng hai góc nhọn của tam giác vuông),}$$

$$\text{suy ra } \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

$$AC = AB \cdot \tan B = 6 \tan 50^\circ \approx 7,2 \text{ (cm);}$$

$$AB = BC \cdot \cos B \text{ hay } BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{6}{\cos 50^\circ} \approx 9,3 \text{ (cm).}$$

□

LUYỆN TẬP 5

Tìm số đo góc nhọn C và độ dài cạnh góc vuông AB , cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC , biết cạnh góc vuông $AC = 7$ cm và $B = 55^\circ$.

Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \text{ (tổng hai góc nhọn của tam}$$

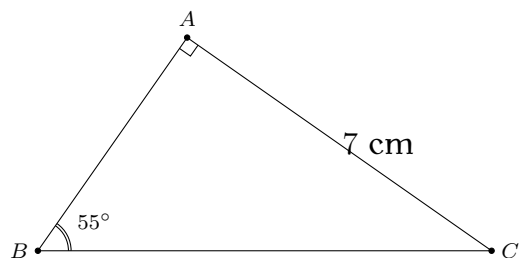
$$\text{giác vuông),}$$

$$\text{suy ra } \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

$$AB = AC \cdot \tan C = 7 \tan 35^\circ \approx 4,9 \text{ (cm);}$$

$$AB = BC \cdot \cos B \text{ hay } BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{4,9}{\cos 55^\circ} \approx 8,5 \text{ (cm).}$$

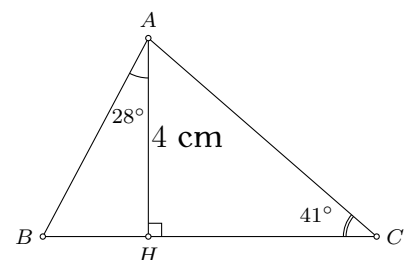
□



Ví dụ 8.

Trong Hình 22, tính độ dài của mỗi đoạn thẳng sau

- HB và HC .
- AH và AC .



Hình 22

Hướng dẫn giải.

- Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có

$$HB = AH \cdot \tan \widehat{BAH} = 4 \cdot \tan 28^\circ \approx 2,1 \text{ (cm).}$$

$$\text{Vì tam giác } ACH \text{ vuông tại } H \text{ nên } HC = AH \cdot \cot C = 4 \cdot \cot 41^\circ \approx 4,6 \text{ (cm).}$$

- Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có

$$\cos \widehat{BAH} = \frac{AH}{AB} \text{ hay } AB = \frac{AH}{\cos \widehat{BAH}} = \frac{4}{\cos 28^\circ} \approx 4,5 \text{ (cm).}$$

$$\text{Do tam giác } ACH \text{ vuông tại } H \text{ nên } \sin C = \frac{AH}{AC} \text{ hay } AC = \frac{AH}{\sin C} = \frac{4}{\sin 41^\circ} \approx 6,1 \text{ (cm).}$$



LUYỆN TẬP 6

Cho hình chữ nhật $ABCD$ thỏa mãn $AC = 6$ cm. $\widehat{BAC} = 47^\circ$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB , AD .

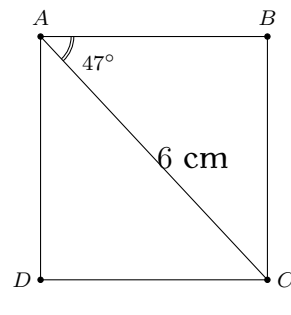
Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABC vuông tại B , ta có

$$AB = AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 6 \cdot \cos 47^\circ \approx 4,1 \text{ (cm)}.$$

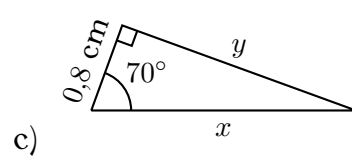
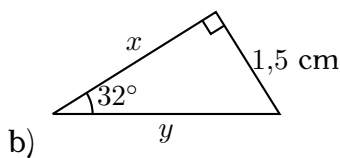
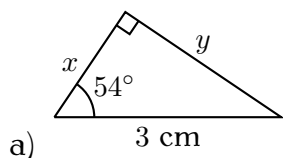
$$BC = AC \cdot \sin \widehat{BAC} = 6 \cdot \sin 47^\circ \approx 4,4 \text{ (cm)}.$$

Vì tam giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AD = BC \approx 4,4$ (cm).



D BÀI TẬP

Bài 9. Tìm x , y trong mỗi hình bên dưới (làm tròn đến hàng phần mười của centimet).



Hướng dẫn giải.

a) Ta có $\sin 54^\circ = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 3 \cdot \sin 54^\circ \approx 2,4$ (cm).
 $\cos 54^\circ = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3 \cdot \cos 54^\circ \approx 1,8$ (cm).

b) Ta có $\sin 32^\circ = \frac{1,5}{y} \Rightarrow y = \frac{1,5}{\sin 32^\circ} \approx 2,8$ (cm).
 $\tan 32^\circ = \frac{1,5}{x} \Rightarrow x = \frac{1,5}{\tan 32^\circ} \approx 2,4$ (cm).

c) Ta có $\tan 70^\circ = \frac{y}{0,8} \Rightarrow y = 0,8 \cdot \tan 70^\circ \approx 2,2$ (cm).
 $\cos 70^\circ = \frac{0,8}{x} \Rightarrow x = \frac{0,8}{\cos 70^\circ} \approx 2,3$ (cm).



Bài 10. Cho tam giác ABC có đường cao $AH = 6$ cm, $\widehat{B} = 40^\circ$, $\widehat{C} = 35^\circ$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB , BH , AC , BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của centimet).

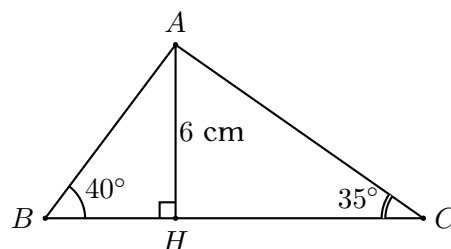
Hướng dẫn giải.

$\triangle ABH$ vuông tại H có

$$BH = \frac{AH}{\tan 40^\circ} = \frac{6}{\tan 40^\circ} \approx 7,2 \text{ (cm)}.$$

$$AB = \frac{AH}{\sin 40^\circ} = \frac{6}{\sin 40^\circ} \approx 9,3 \text{ (cm)}.$$

$\triangle ACH$ vuông tại H có



$$\text{CH} = \frac{AH}{\tan 35^\circ} = \frac{6}{\tan 35^\circ} \approx 8,6 \text{ (cm)}.$$

$$\text{AC} = \frac{AH}{\sin 35^\circ} = \frac{6}{\sin 35^\circ} \approx 10,5 \text{ (cm)}.$$

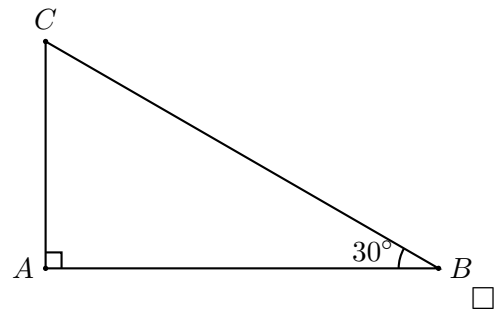
$$BC = BH + HC \approx 7,2 + 8,6 = 15,8 \text{ (cm)}.$$

□

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$. Chứng minh $AC = \frac{1}{2}BC$.

Hướng dẫn giải.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\sin B = \frac{AC}{BC}$ hay $AC = BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}BC$.

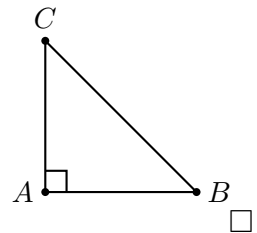


Bài 12. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Chứng minh $AB = AC = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$.

Hướng dẫn giải.

Tam giác ABC vuông cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$.

Ta có $AC = AB = BC \cdot \cos B = BC \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$.



Bài 13.

Trong hình bên cho $\widehat{O} = \alpha$, $AB = m$ và

$$\widehat{OAB} = \widehat{OCA} = \widehat{ODC} = 90^\circ.$$

Chứng minh

a) $OA = m \cdot \cot \alpha$;

b) $AC = m \cdot \cos \alpha$;

c) $CD = m \cdot \cos^2 \alpha$.

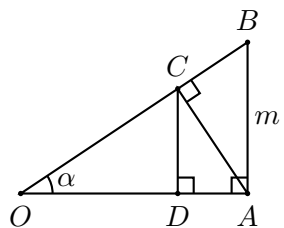
Hướng dẫn giải.

a) Xét $\triangle OAB$ vuông tại A , có $OA = AB \cdot \cot \widehat{BOA} = m \cdot \cot \alpha$.

b) Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ABO} = \alpha$.
Xét $\triangle ABC$ vuông tại C có $AC = AB \cdot \cos \widehat{BAC} = m \cdot \cos \alpha$.

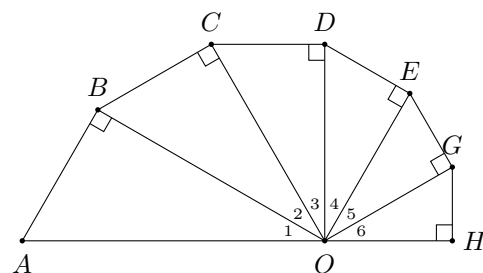
c) Ta có $\widehat{DCA} = 90^\circ - \widehat{CAD} = 90^\circ - \widehat{CAO} = \alpha$.
Xét $\triangle ACD$ vuông tại D có $CD = AC \cdot \cos \widehat{DCA} = AC \cdot \cos \alpha$.
Mà theo câu b) ta lại có $AC = m \cdot \cos \alpha$ nên $CD = m \cdot \cos^2 \alpha$.

□



Bài 14.

Tính độ dài đường gấp khúc $ABCDEFGH$, biết các tam giác $OAB, OBC, OCD, ODE, OEG, OGH$ là các tam giác vuông tại các đỉnh lần lượt là B, C, D, E, G, H ; các góc $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ đều bằng 30° và $OA = 2$ cm.

**Hướng dẫn giải.**

✿ Xét $\triangle OAB$ vuông tại B có

$$AB = OA \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1.$$

$$OB = OA \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}.$$

✿ Xét $\triangle OBC$ vuông tại C có

$$BC = OB \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$OC = OB \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3}{2}.$$

✿ Xét $\triangle OCD$ vuông tại D có

$$CD = OC \cdot \sin 30^\circ = \frac{3}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{3}{4}.$$

$$OD = OC \cdot \cos 30^\circ = \frac{3}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

✿ Xét $\triangle ODE$ vuông tại E có

$$DE = OD \cdot \sin 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \sin 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

$$OE = OD \cdot \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \cos 30^\circ = \frac{9}{8}.$$

✿ Xét $\triangle OEG$ vuông tại G có

$$EG = OE \cdot \sin 30^\circ = \frac{9}{8} \cdot \sin 30^\circ = \frac{9}{16}.$$

$$OG = OE \cdot \cos 30^\circ = \frac{9}{8} \cdot \cos 30^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

✿ Xét $\triangle OGH$ vuông tại H có

$$GH = OG \cdot \sin 30^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{16} \cdot \sin 30^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{32}.$$

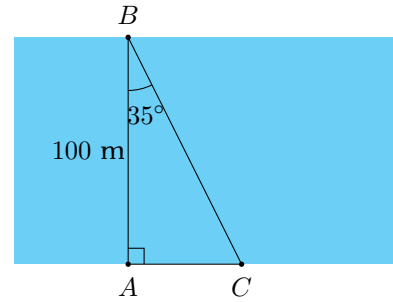
Vậy độ dài đường gấp khúc $ABCDEFGH$ là

$$AB + BC + CD + DE + EG + GH = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \text{ (cm)}.$$

□

Bài 15.

Hình bên minh họa một phần con sông có bề rộng $AB = 100$ m. Một chiếc thuyền đi thẳng từ vị trí B bên này bờ sông đến vị trí C bên kia bờ sông. Tính quãng đường BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét), biết $\widehat{ABC} = 35^\circ$.

**Hướng dẫn giải.**

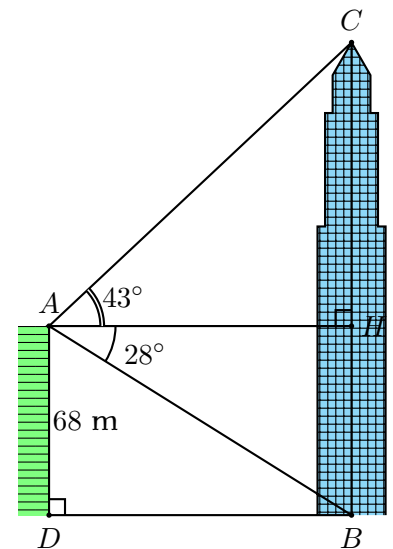
Xét tam giác ABC vuông tại A có $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$.

$$\text{Suy ra } BC = \frac{AB}{\cos \widehat{ABC}} = \frac{100}{\cos 35^\circ} \approx 122,1 \text{ (m).}$$

□

Bài 16.

Từ vị trí A ở phía trên một tòa nhà có chiều cao $AD = 68$ m, bác Duy nhìn thấy vị trí C cao nhất của một tháp truyền hình, góc tạo bởi tia AC và tia AH theo phương nằm ngang là $\widehat{CAH} = 43^\circ$. Bác Duy cũng nhìn thấy chân tháp tại vị trí B mà góc tạo bởi tia AB và tia AH là $\widehat{BAH} = 28^\circ$, điểm H thuộc đoạn thẳng BC . Tính khoảng cách BD từ chân tháp đến chân tòa nhà và chiều cao BC của tháp truyền hình (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).

**Hướng dẫn giải.**

Do $AD \parallel BC$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{BAH} = 28^\circ$ (so le trong).

Xét $\triangle ABD$ vuông tại D có $BD = AD \cdot \cot \widehat{ABD} = 68 \cdot \cot 28^\circ \approx 127,9$ (m).

Do $ADBH$ là hình chữ nhật nên $BD = AH$ và $AD = BH$.

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H có $CH = AH \cdot \tan \widehat{CAH} = 127,9 \cdot \tan 43^\circ \approx 119,3$ (m).

Vậy chiều cao của tháp truyền hình là $BC = BH + HC \approx 68 + 119,3 = 187,3$ (m).

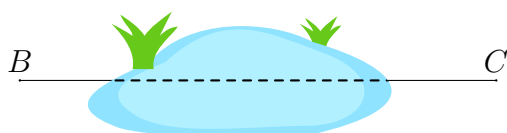
□

Chủ đề 3. ỨNG DỤNG CỦA TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

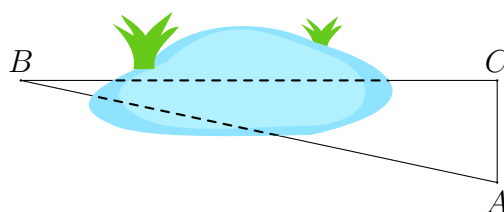
A ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CÁCH

Từ xưa, người ta đã biết cách ứng dụng lượng giác để ước lượng khoảng cách. Bằng cách sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn, ta có thể ước lượng khoảng cách giữa hai vị trí khi khó đo trực tiếp khoảng cách giữa hai vị trí đó.

Ví dụ 1. Để đo khoảng cách giữa hai vị trí B và C khi không thể đo trực tiếp (Hình a) người ta có thể làm như sau (Hình b)

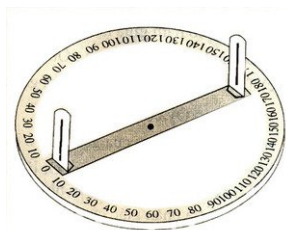


Hình a



Hình b

Sử dụng giác kế (một loại dụng cụ để đo góc) chọn điểm A ở vị trí thích hợp sao cho góc ACB là góc vuông. Đo khoảng cách AC ;



Sử dụng giác kế để đo góc BAC

Từ đó, tính độ dài BC .

- Theo cách làm trên, nêu công thức tính khoảng cách giữa hai vị trí B, C .
- Tính khoảng cách giữa hai vị trí B, C biết $AC = 4$ m và $\widehat{BAC} = 81^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét)

Hướng dẫn giải.

a) Vì $\triangle ABC$ vuông tại C nên $BC = AC \cdot \tan A$.

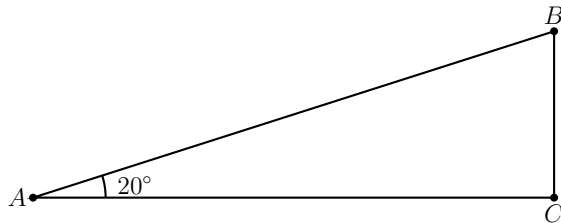
b) Khi $AC = 4$ m và $\widehat{BAC} = 81^\circ$, ta có

$$BC = 4 \cdot \tan 81^\circ \approx 25,26 \text{ (m)}.$$

□

LUYỆN TẬP 1

Một máy bay cất cánh từ vị trí A trên đường băng của sân bay và bay theo đường thẳng AB tạo với phương nằm ngang AC một góc là 20° . Sau 5 giây, máy bay ở độ cao $BC = 110$ m. Em hãy tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng trăm của mét).



Hướng dẫn giải.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại C ta có

$$\sin A = \frac{BC}{AB}. \text{ Suy ra } AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{110}{\sin 20^\circ} \approx 361,62(\text{m})$$

Vậy khoảng cách từ A đến B là khoảng 361,62 m. □

Ví dụ 2.

Năm 1990, tháp nghiêng ở thành phố Pisa (Italia) bắt đầu quá trình trùng tu nhằm giảm độ nghiêng của tháp. Sau 10 năm trùng tu, vào năm 2001, các kĩ sư đã thành công trong việc đưa độ nghiêng của tháp chỉ còn khoảng 4° (Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Leaning_Tower_of_Pisa). Giả sử một người đứng trên tháp (tại vị trí A), cách mặt đất một khoảng là $AH = 45$ m, thả một vật rơi xuống đất (Hình bên). Tính khoảng cách từ vị trí chạm đất (vị trí H) đó đến chân tháp (vị trí B) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



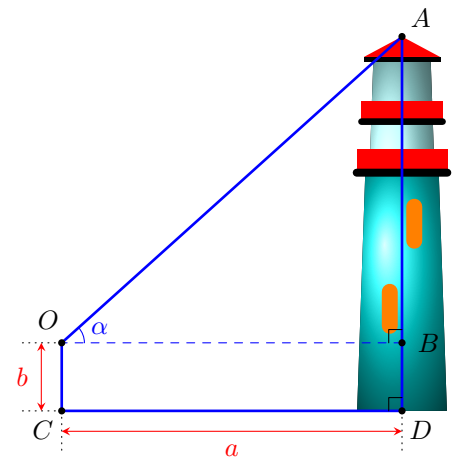
Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có $BH = AH \cdot \tan A = 45 \cdot \tan 4^\circ \approx 3,15$ (m).

Vậy khoảng cách từ vị trí chạm đất đến chân tháp 3,15 m. □

Ví dụ 3.

Để ước lượng chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh tháp, người ta sử dụng giác kế, thước cuộn, máy tính cầm tay. Chẳng hạn, ở hình bên, để đo chiều cao AD của tháp, người ta đặt giác kế tại một điểm quan sát cách chân tháp một khoảng $CD = OB = a$, trong đó chiều cao của điểm đặt giác kế là $OC = b$. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm thanh này ta nhìn thấy đỉnh A của tháp, đọc trên giác kế số đo α của góc AOB . Tính chiều cao của tháp, biết $\alpha = 42^\circ$; $b = 13,81$ m; $a = 90$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



Hướng dẫn giải.

Vì tam giác OAB vuông tại B nên

$$AB = OB \cdot \tan \widehat{AOB} = 90 \cdot \tan 42^\circ \approx 81,04 \text{ (m)}.$$

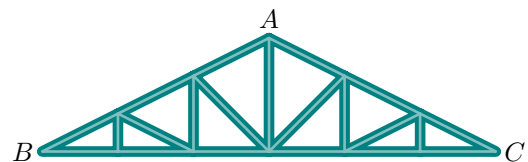
Vậy chiều cao của tháp khoảng

$$81,04 + 13,81 = 94,85 \text{ (m)}.$$

□

LUYỆN TẬP 2

Mặt cắt đứng của khung thép có dạng tam giác cân ABC với $\widehat{B} = 23^\circ$, $AB = 4$ m (như hình bên). Tính độ dài đoạn thẳng BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hướng dẫn giải.

Kẻ $AH \perp BC$ tại H .

Xét $\triangle$ vuông ABH và $\triangle$ vuông ACH có

AH là cạnh chung

$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

Suy ra $\triangle$ vuông $ABH = \triangle$ vuông ACH (cạnh huyền-cạnh góc vuông).

Suy ra $BH = HC$ (2 cạnh tương ứng) suy ra $BC = 2 \cdot BH$.

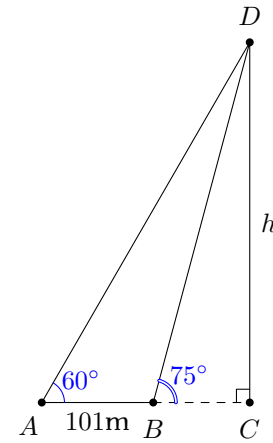
Vì tam giác ABH vuông tại H nên

$$BH = AB \cdot \cos \widehat{B} = 4 \cdot \cos 23^\circ \text{ (m)}.$$

Vậy $BC = 2 \cdot BH = 2 \cdot 4 \cdot \cos 23^\circ \approx 7,4$ (m).

□

Ví dụ 4. Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Vân muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Vân đã minh họa lại kết quả đo đạc ở hình bên. Em hãy giúp bạn Vân tính độ cao h của tháp Eiffel theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ADC vuông tại C , ta có: $AC = h \cdot \cot \widehat{DAC} = h \cdot \cot 60^\circ$ (m).

Xét tam giác BDC vuông tại C , ta có: $BC = h \cdot \cot \widehat{DBC} = h \cdot \cot 75^\circ$ (m).

Do $AC - BC = AB = 101$ nên $h \cdot \cot 60^\circ - h \cdot \cot 75^\circ = 101$

hay $h \cdot (\cot 60^\circ - \cot 75^\circ) = 101$ (m).

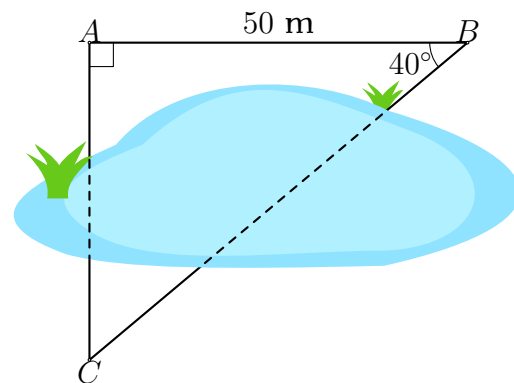
Suy ra $h = \frac{101}{\cot 60^\circ - \cot 75^\circ} \approx 326$ (m).

Vậy tháp Eiffel có độ cao khoảng 326 (m). □

B BÀI TẬP

Bài 17.

Hình 35 mô tả ba vị trí A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông và không đo được trực tiếp các khoảng cách từ C đến A và từ C đến B . Biết $AB = 50$ m, $\widehat{ABC} = 40^\circ$. Tính các khoảng cách CA và CB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Hình 35

Hướng dẫn giải.

$\triangle ABC$ vuông tại A

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

$$AC = AB \cdot \tan \widehat{ABC}$$

$$AC = 50 \cdot \tan 40^\circ$$

$$AC \approx 42$$

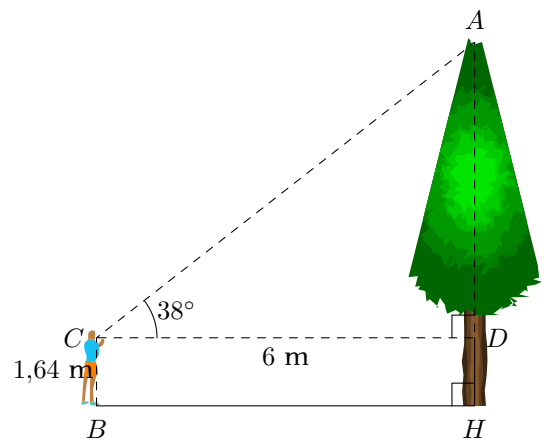
$\triangle ABC$ vuông tại A

$$\begin{aligned}\cos \widehat{ABC} &= \frac{AB}{BC} \\ BC &= \frac{AB}{\cos \widehat{ABC}} \\ BC &= \frac{50}{\cos 40^\circ} \\ BC &\approx 65\end{aligned}$$

Vậy $CA \approx 42$ m và $CB \approx 65$ m. □

Bài 18.

Để ước lượng chiều cao của một cây trong sân trường, bạn Hoàng đứng ở sân trường (theo phương thẳng đứng), mắt bạn Hoàng đặt tại vị trí C cách mặt đất một khoảng $CB = DH = 1,64$ m và cách cây một khoảng $CD = BH = 6$ m. Tính chiều cao AH của cây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét), biết góc nhìn ACD bằng 38° minh họa ở hình bên.



Hướng dẫn giải.

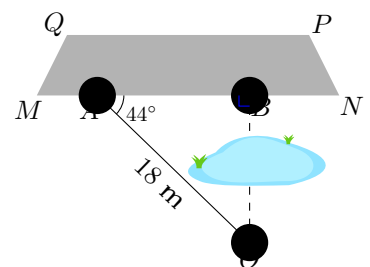
$\triangle ACD$ vuông tại D

$$\begin{aligned}\tan \widehat{ACD} &= \frac{AD}{CD} \\ AD &= CD \cdot \tan \widehat{ACD} \\ AD &= 6 \cdot \tan 38^\circ \\ AH &= AD + DH = 6 \cdot \tan 38^\circ + 1,64 \\ AH &\approx 6,33\end{aligned}$$

Vậy chiều cao của cây $AH \approx 6,33$ m. □

Bài 19.

Trong công việc, người ta cần ước lượng khoảng cách từ vị trí O đến khu đất có dạng hình thang $MNPQ$ nhưng không thể đo được trực tiếp, khoảng cách đó được tính bằng khoảng cách từ O đến đường thẳng MN . Người ta chọn vị trí A ở đáy MN và đo được $OA = 18$ m, $\widehat{OAN} = 44^\circ$ (Hình 37). Tính khoảng cách từ vị trí O đến khu đất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hướng dẫn giải.

Xét $\triangle OAB$ vuông tại B , ta có:

$$OB = OA \cdot \sin A = 18 \cdot \sin 44^\circ \approx 12,5 \text{ m.}$$

Vậy khoảng cách từ O đến khu đất là 12,5 m. □

Bài 20.

Một mảnh gỗ có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với đường chéo $AC = 8$ dm. Do bảo quản không tốt nên mảnh gỗ bị hỏng phía hai đỉnh B và D . Biết $\widehat{BAC} = 64^\circ$ (Hình 38). Người ta cần biết độ dài AB và AD để khôi phục lại mảnh gỗ ban đầu. Độ dài AB , AD bằng bao nhiêu decimét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

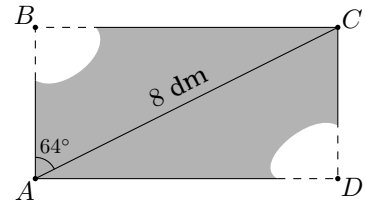
Hướng dẫn giải.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B , ta có:

$$AB = AC \cdot \cos A = 8 \cdot \cos 64^\circ \approx 3,5 \text{ dm.}$$

$$BC = AC \cdot \sin A = 8 \cdot \sin 64^\circ \approx 7,2 \text{ dm.}$$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AD = BC = 7,2$ dm.

**Bài 21.**

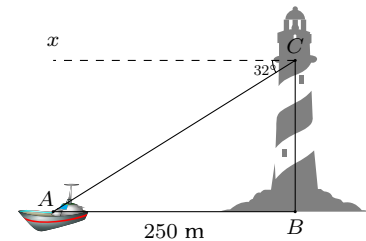
Trên mặt biển, khi khoảng cách AB từ ca nô đến chân tháp hải đăng là 250 m, một người đứng trên tháp hải đăng đó nhìn về phía ca nô theo phương CA tạo với phương nằm ngang Cx một góc là $\widehat{ACx} = 32^\circ$ (Hình 39). Tính chiều cao của tháp hải đăng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét), biết $AB \parallel Cx$ và độ cao từ tầm mắt của người đó đến đỉnh tháp hải đăng là 3,2 m.

Hướng dẫn giải.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B , có $\widehat{A} = \widehat{ACx} = 32^\circ$.

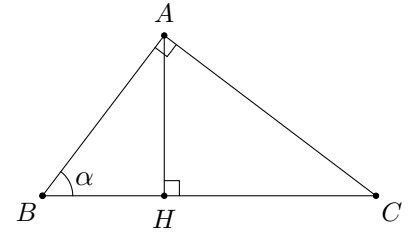
$$BC = AB \cdot \tan A = 250 \cdot \tan 32^\circ = 156,2 \text{ m.}$$

Vậy chiều cao của hải đăng là $156,2 + 3,2 = 159,4$ m.



Chủ đề 4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

Bài 22. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và $\widehat{B} = \alpha$ (hình bên dưới).



a) Tỉ số $\frac{HA}{HB}$ bằng

- (A) $\sin \alpha$. (B) $\cos \alpha$. (C) $\tan \alpha$. (D) $\cot \alpha$.

b) Tỉ số $\frac{HA}{HC}$ bằng

- (A) $\sin \alpha$. (B) $\cos \alpha$. (C) $\tan \alpha$. (D) $\cot \alpha$.

c) Tỉ số $\frac{HA}{AC}$ bằng

- (A) $\sin \alpha$. (B) $\cos \alpha$. (C) $\tan \alpha$. (D) $\cot \alpha$.

Hướng dẫn giải.

a) Xét $\triangle HAB$ vuông tại H , ta có $\tan \alpha = \frac{HA}{HB}$.

Đáp án: C. $\tan \alpha$.

b) Xét $\triangle HAC$ vuông tại H , ta có $\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{HA}{HC}$.

Suy ra $\cot \alpha = \frac{HA}{HC}$.

Đáp án: D. $\cot \alpha$.

c) Xét $\triangle HAC$ vuông tại H , ta có $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{HA}{AC}$.

Suy ra $\cos \alpha = \frac{HA}{AC}$.

Đáp án: B. $\cos \alpha$.

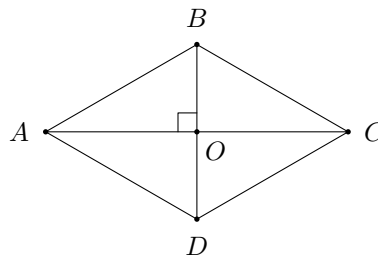
□

Bài 23. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = a$, $\widehat{BAD} = 2\alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Chứng minh:

a) $BD = 2a \cdot \sin \alpha$;

b) $AC = 2a \cdot \cos \alpha$.

Hướng dẫn giải.



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra $AO \perp OB$, $\widehat{BAO} = \frac{\widehat{BAD}}{2} = \alpha$.

Trong tam giác vuông ABO theo tỉ số lượng giác ta có

$$\sin \widehat{BAO} = \frac{BO}{AB}$$

$$BO = AB \cdot \sin \widehat{BAO}$$

$$BO = AB \cdot \sin \alpha$$

Suy ra $BD = 2BO = 2a \sin \alpha$.

b) Trong tam giác vuông ABO theo tỉ số lượng giác ta có

$$\cos \widehat{BAO} = \frac{AO}{AB}$$

$$AO = AB \cdot \cos \widehat{BAO}$$

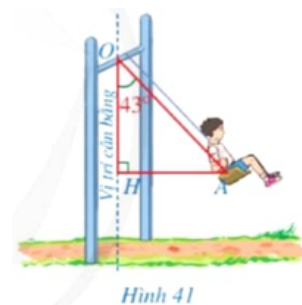
$$AO = a \cdot \cos \alpha$$

Suy ra $AC = 2AO = 2a \cdot \cos \alpha$.

□

Bài 24.

Trong trò chơi xích đu ở Hình 41, khi dây căng xích đu (không dẫn) $OA = 3$ m tạo với phương thẳng đứng một góc là $\widehat{AOH} = 43^\circ$ thì khoảng cách AH từ em bé đến vị trí cân bằng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hướng dẫn giải.

Theo hình vẽ ta có khoảng cách từ em bé đến vị trí cân bằng là đoạn AH .

Theo tỉ số lượng giác trong tam giác vuông OAH vuông tại H ta có

$$\sin \widehat{HOA} = \frac{HA}{OA}$$

$$HA = OA \cdot \sin \widehat{HOA}$$

$$HA = 3 \cdot \sin 43^\circ$$

$$HA \approx 2,05.$$

Vậy khoảng cách cần tìm là $AH \approx 2,05$ (m).

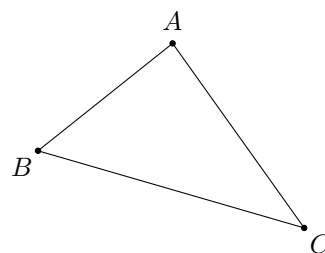
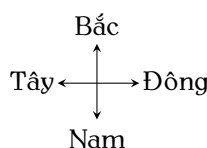
□

 Bài 25. Một người đứng ở vị trí B trên bờ sông muốn sử dụng la bàn để ước lượng khoảng cách từ vị trí đó đến một vị trí A ở trên một cù lao giữa dòng sông.

Người đó đã làm như sau

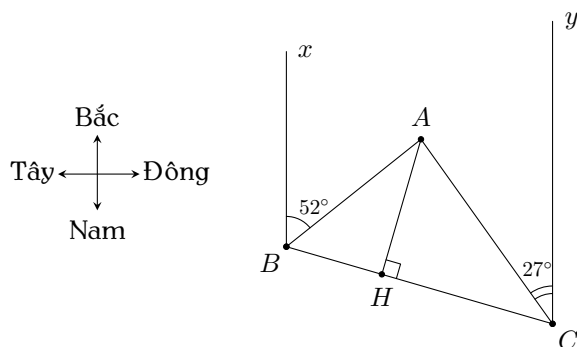
-  Sử dụng la bàn, xác định được phương BA lệch với phương Nam - Bắc về hướng Đông 52° .

-  Người đó di chuyển đến vị trí C , cách B một khoảng là 187 m. Sử dụng la bàn, xác định được phương CA lệch với phương Nam - Bắc về hướng Tây 27° ; CB lệch với phương Nam - Bắc về hướng Tây 70° (Hình bên).



Em hãy giúp người đó tính khoảng cách AB từ những dữ liệu trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Hướng dẫn giải.



Theo đề bài, ta có $\widehat{ABx} = 52^\circ$, $\widehat{ACy} = 27^\circ$, $\widehat{BCy} = 70^\circ$.

Suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{BCy} - \widehat{ACy} = 70^\circ - 27^\circ = 43^\circ$.

Hơn nữa, vì $Bx \parallel Cy$ nên $\widehat{CBx} + \widehat{BCy} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CBx} = 180^\circ - \widehat{BCy} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{CBx} - \widehat{ABx} = 110^\circ - 52^\circ = 58^\circ$.

Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$.

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{AH}{\tan \widehat{ABH}} = \frac{AH}{\tan 58^\circ}.$$

Xét $\triangle ACH$ vuông tại H , ta có

$$\tan \widehat{ACH} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow CH = \frac{AH}{\tan \widehat{ACH}} = \frac{AH}{\tan 43^\circ}.$$

Mặt khác, ta có

$$BH + CH = BC \Rightarrow \frac{AH}{\tan 58^\circ} + \frac{AH}{\tan 43^\circ} = 187 \Rightarrow AH = \frac{187}{\frac{AH}{\tan 58^\circ} + \frac{AH}{\tan 43^\circ}} \approx 110 \text{ (m)}.$$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$\sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin \widehat{ABH}} = \frac{110}{\sin 58^\circ} \approx 130 \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách AB gần bằng 130 mét. □

Chương 5.



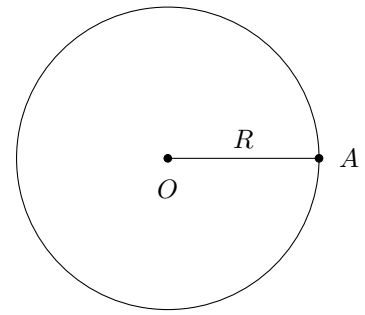
ĐƯỜNG TRÒN

Chủ đề 1. ĐƯỜNG TRÒN. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A KHÁI NIỆM ĐƯỜNG TRÒN

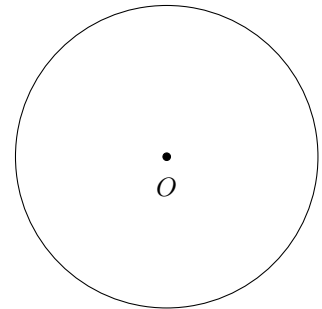
Khái niệm 1.1.

Trong mặt phẳng, đường tròn tâm O bán kính R là tập hợp các điểm cách điểm O một khoảng bằng R ($R > 0$), kí hiệu là $(O; R)$.

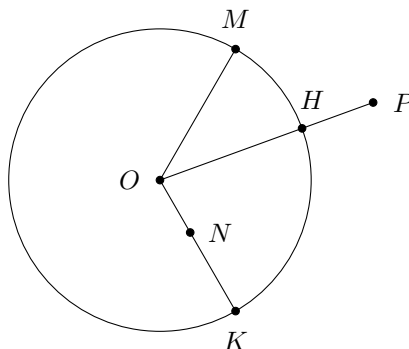


Chú ý

- Một đường tròn hoàn toàn xác định khi biết tâm và bán kính.
- Khi không quan tâm đến bán kính của đường tròn $(O; R)$, ta cũng có thể kí hiệu đường tròn là (O) .



Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và năm điểm $M; N; P; H; K$. So sánh độ dài các đoạn thẳng $OM; ON; OH; OK; OP$ với R .



Hướng dẫn giải.

Vì M, H, K thuộc $(O; R)$ nên $OM = OH = OK = R$.

Ta có: $ON < OK$ nên $ON < R$; $OP > OH$ nên $OP > R$. □

⇒ Nhận xét 1.1.

- 🟡 Nếu điểm M thuộc đường tròn (O) (hay ta còn nói điểm M nằm trên đường tròn (O) , hoặc đường tròn (O) đi qua điểm M) thì $OM = R$ và ngược lại.
- 🟢 Nếu điểm M nằm bên trong (hay nằm trong, ở trong) đường tròn (O) thì $OM < R$ và ngược lại.
- 🟠 Nếu điểm M nằm bên ngoài (hay nằm ngoài, ở ngoài) đường tròn (O) thì $OM > R$ và ngược lại.

LUYỆN TẬP 1

Hãy chỉ ra một số đồ vật trong thực tiễn gọi nên hình ảnh của đường tròn.

📁 Hướng dẫn giải.

Một số đồ vật có hình ảnh của đường tròn

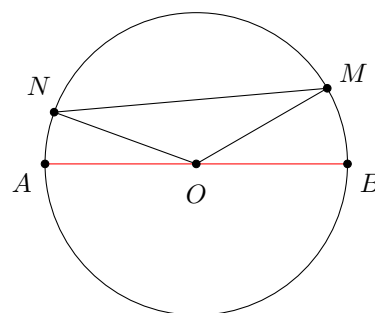
- 🟡 Đồng hồ.
- 🟢 Cái mâm.
- 🟢 Mặt trống.
- 🟠 ...

□

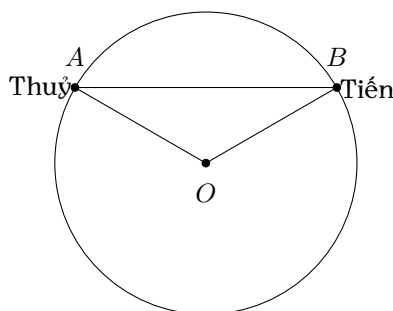
B LIÊN HỆ GIỮA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Chú ý

- 🟡 Đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt thuộc đường tròn được gọi là dây (hay dây cung) của đường tròn.
- 🟢 Dây đi qua tâm là đường kính của đường tròn. Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.



🟡 **Ví dụ 2.** Trong một trò chơi, hai bạn Thủy và Tiến cùng chạy trên một đường tròn tâm O có bán kính 20 m. Có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41 m hay không? Vì sao?



Hướng dẫn giải.

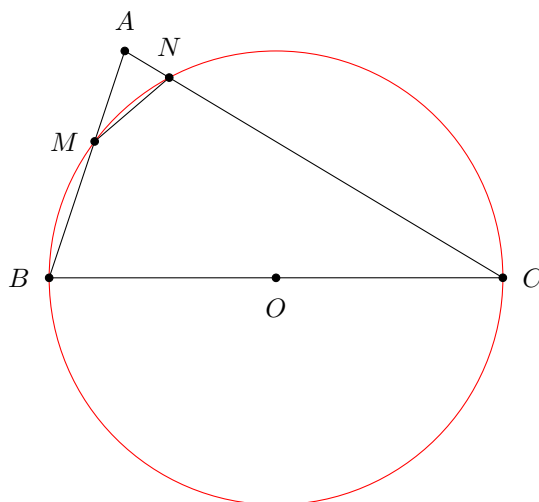
Đường tròn tâm O có đường kính là $2 \cdot 20 = 40$ m.

Vì độ dài dây AB không vượt quá độ dài đường kính của đường tròn nên $AB \leq 40$.

Vậy không có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41 m. $\square$

LUYỆN TẬP 2

Cho tam giác nhọn ABC . Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N . Chứng minh $MN < BC$.

Hướng dẫn giải.

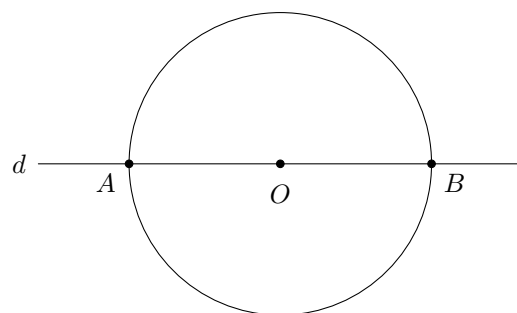
Xét (O) có BC là dây đường kính.

Suy ra BC là dây lớn nhất của đường tròn.

Suy ra $MN < BC$. $\square$

C TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN**Nhận xét 1.2.**

Điểm đối xứng của một điểm tùy ý trên đường tròn qua tâm của đường tròn cũng nằm trên đường tròn đó.



Nhận xét 1.3. Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

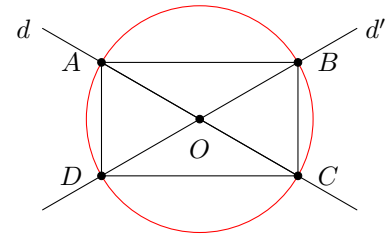
Nhận xét 1.4. Điểm đối xứng của một điểm tùy ý trên đường tròn qua một đường thẳng đi qua tâm của đường tròn cũng nằm trên đường tròn đó.

**Kiến thức trọng tâm**

Đường tròn là hình có trục đối xứng. Mỗi đường thẳng đi qua tâm là một trục đối xứng của đường tròn đó.

Ví dụ 3.

Cho đường tròn $(O; R)$. Đường thẳng d đi qua tâm O , cắt đường tròn (O) tại hai điểm $A; C$. Đường thẳng d' ($d' \neq d$) đi qua tâm O , cắt đường tròn (O) tại hai điểm $B; D$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.



Hướng dẫn giải.

Do $OA = OC$ và $OB = OD$ nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
Hình bình hành $ABCD$ có $AC = BD = 2R$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật. $\square$

❖ **Nhận xét 1.5.** Điểm đối xứng của một điểm tùy ý trên đường tròn qua một đường thẳng đi qua tâm của đường tròn cũng nằm trên đường tròn đó.

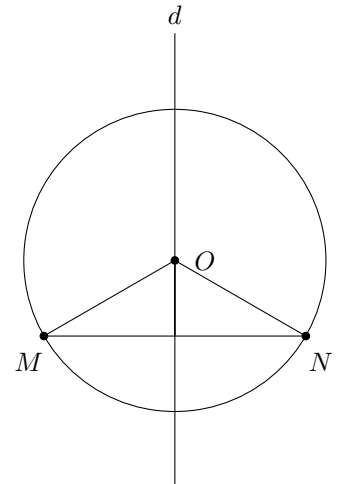
❖ **Nhận xét 1.6.** Đường tròn là hình có trục đối xứng. Mỗi đường thẳng đi qua tâm là một trục đối xứng của đường tròn đó.

🔴 **Ví dụ 4.** Cho dây MN của đường tròn (O) . Gọi d là đường trung trực của đoạn thẳng MN . Chứng tỏ rằng đường thẳng d là một trục đối xứng của đường tròn (O) .

Hướng dẫn giải.

Vì $OM = ON$ nên điểm O nằm trên đường trung trực d của đoạn thẳng MN .

Do đường thẳng d đi qua tâm của đường tròn (O) nên đường thẳng d là một trục đối xứng của đường tròn (O) .



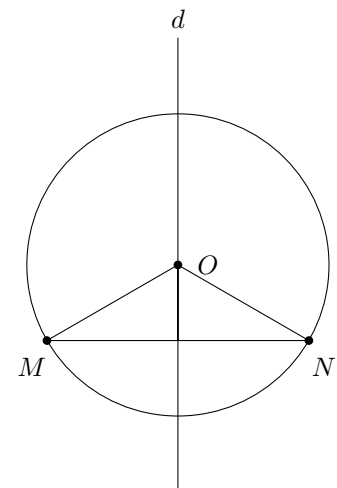
LUYỆN TẬP 3

Bạn Hoa có một tờ giấy hình tròn. Nêu cách gấp giấy để xác định tâm của hình tròn đó.

Hướng dẫn giải.

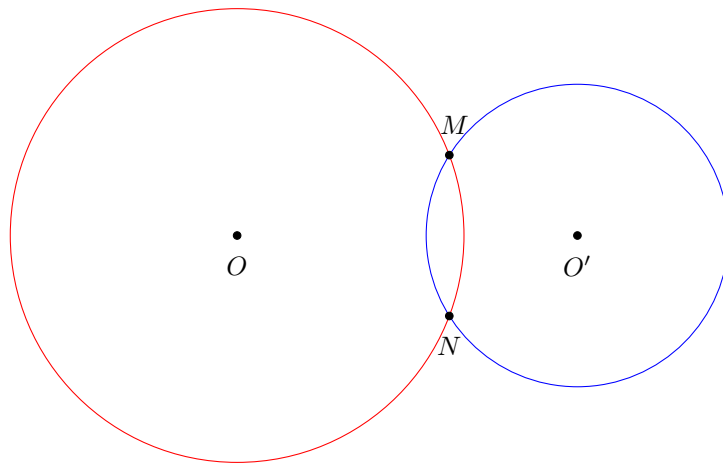
Vẽ dây MN bất kỳ của hình tròn sau đó vẽ đường trung trực của đoạn thẳng MN .

Sau đó xác định trung điểm của AB , giả sử là O . Khi đó O là tâm của hình tròn.



D VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

⇔ **Định nghĩa 1.1.** Hai đường tròn có đúng hai điểm chung gọi là hai đường tròn cắt nhau.



⇔ **Nhận xét 1.7.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R \geq r$. Người ta chứng minh được khẳng định sau “Nếu hai đường tròn đó cắt nhau thì $R - r < OO' < R + r$. Điều ngược lại cũng đúng.”

🔴 **Ví dụ 5.** Cho hai đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$ và $(O'; 3 \text{ cm})$. Biết rằng $OO' = 5 \text{ cm}$. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn đó.

📘 **Hướng dẫn giải.**

Ta thấy bán kính của hai đường tròn $(O); (O')$ lần lượt là $R = 4 \text{ cm}; r = 3 \text{ cm}$.

Do $R - r = 4 - 3 = 1; R + r = 4 + 3 = 7 \text{ cm}$ và $1 < 5 < 7$ nên $R - r < OO' < R + r$.

Vậy hai đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$ và $(O'; 3 \text{ cm})$ cắt nhau. □

LUYỆN TẬP 4

Cho hai đường tròn $(O; 14 \text{ cm}); (O'; 5 \text{ cm})$ với $OO' = 8 \text{ cm}$. Hỏi hai đường tròn đó có cắt nhau hay không?

📘 **Hướng dẫn giải.**

Ta thấy bán kính của hai đường tròn $(O); (O')$ lần lượt là $R = 14 \text{ cm}; r = 5 \text{ cm}$.

Do $R - r = 14 - 5 = 9; R + r = 14 + 5 = 19 \text{ cm}$ và $8 < 9 < 14$.

Vậy hai đường tròn $(O; 14 \text{ cm})$ và $(O'; 5 \text{ cm})$ không cắt nhau. □

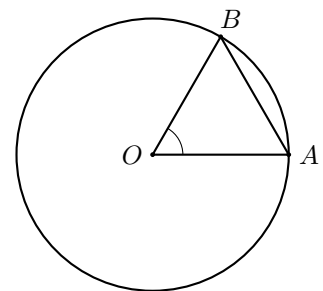
E BÀI TẬP

✍ **Bài 1.** Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = R$. Tính số đo góc AOB .

📘 **Hướng dẫn giải.**

Ta có $OA = OB = AB = R$ nên tam giác OAB là tam giác đều.

Khi đó góc AOB bằng 60° .



✍ **Bài 2.**

Chiếc đồng hồ trang trí ở Hình 18 gợi nên vị trí tương đối của các đường tròn. Quan sát Hình 18 và chỉ ra một cặp đường tròn:

- Cắt nhau.
- Tiếp xúc ngoài.
- Tiếp xúc trong.
- Không giao nhau.



Hình 18

Hướng dẫn giải.

- Cặp đường tròn cắt nhau là vòng tròn màu tím và vòng tròn màu vàng.
- Cặp đường tròn tiếp xúc ngoài là vòng tròn màu xanh lá cây và vòng tròn màu xanh.
- Cặp đường tròn tiếp xúc trong là vòng tròn màu vàng và vòng tròn của đồng hồ.
- Cặp đường tròn không giao nhau là vòng tròn màu xanh và vòng tròn màu đỏ.

□

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB khác đường kính. Gọi M là trung điểm của AB .

- Đường thẳng OM có phải là đường trung trực của đoạn thẳng AB hay không? Vì sao?
- Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng AB , biết $R = 5$ cm, $AB = 8$ cm.

Hướng dẫn giải.

- Ta có $\triangle OAB$ cân tại O vì $OA = OB = R$.
Mà M là trung điểm của AB nên OM là đường trung tuyến của tam giác OAB .
Khi đó OM cũng là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

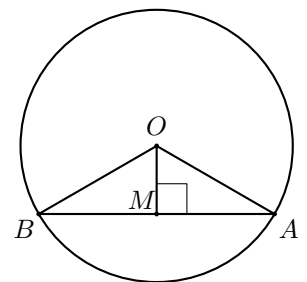
- Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng AB chính là đoạn thẳng OM .

M là trung điểm của AB nên $AM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$ cm.

Xét tam giác OAM vuông tại M , có $OA^2 = AM^2 + OM^2$ (pitago).

Suy ra $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm.

□



Bài 4. Cho hai đường tròn cùng tâm $(O; R), (O; r)$ với $R > r$. Các điểm A, B thuộc đường tròn $(O; R)$, các điểm A', B' thuộc đường tròn $(O; r)$ sao cho O, A, A' thẳng hàng; O, B, B' thẳng hàng và điểm O không thuộc đường thẳng AB . Chứng minh:

- $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.

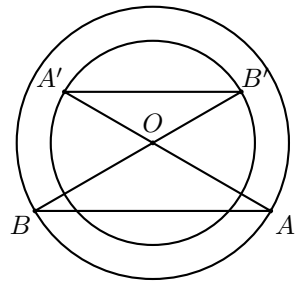
b) $AB \parallel A'B'$.

Hướng dẫn giải.

a) Từ giả thuyết, ta luôn có $\frac{OA'}{OA} = \frac{r}{R}, \frac{OB'}{OB} = \frac{r}{R}$.

Suy ra $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.

b) Vì $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ nên theo hệ quả của định lý Ta-lét ta có $AB \parallel A'B'$.



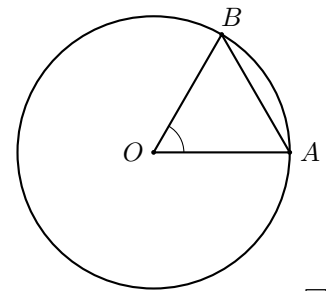
□

Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = R$. Tính số đo góc AOB .

Hướng dẫn giải.

Ta có $OA = OB = AB = R$ nên tam giác OAB là tam giác đều.

Khi đó góc AOB bằng 60° .



□

Bài 6.

Chiếc đồng hồ trang trí ở Hình 18 gợi nên vị trí tương đối của các đường tròn. Quan sát Hình 18 và chỉ ra một cặp đường tròn:

- Cắt nhau.
- Tiếp xúc ngoài.
- Tiếp xúc trong.
- Không giao nhau.



Hình 18

Hướng dẫn giải.

- Cặp đường tròn cắt nhau là vòng tròn màu tím và vòng tròn màu vàng.
- Cặp đường tròn tiếp xúc ngoài là vòng tròn màu xanh lá cây và vòng tròn màu xanh.
- Cặp đường tròn tiếp xúc trong là vòng tròn màu vàng và vòng tròn của đồng hồ.
- Cặp đường tròn không giao nhau là vòng tròn màu xanh và vòng tròn màu đỏ.

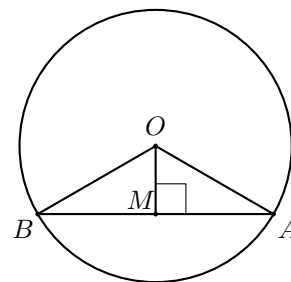
□

Bài 7. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB khác đường kính. Gọi M là trung điểm của AB .

- a) Đường thẳng OM có phải là đường trung trực của đoạn thẳng AB hay không? Vì sao?
 b) Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng AB , biết $R = 5$ cm, $AB = 8$ cm.

Hướng dẫn giải.

- a) Ta có $\triangle OAB$ cân tại O vì $OA = OB = R$.
 Mà M là trung điểm của AB nên OM là đường trung tuyến của tam giác OAB .
 Khi đó OM cũng là đường trung trực của đoạn thẳng AB .



- b) Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng AB chính là đoạn thẳng OM .

$$M \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên } AM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm.}$$

Xét tam giác OAM vuông tại M , có $OA^2 = AM^2 + OM^2$ (pitago).

$$\text{Suy ra } OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm.}$$

□

Bài 8. Cho hai đường tròn cùng tâm $(O; R), (O; r)$ với $R > r$. Các điểm A, B thuộc đường tròn $(O; R)$, các điểm A', B' thuộc đường tròn $(O; r)$ sao cho O, A, A' thẳng hàng; O, B, B' thẳng hàng và điểm O không thuộc đường thẳng AB . Chứng minh:

a) $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.

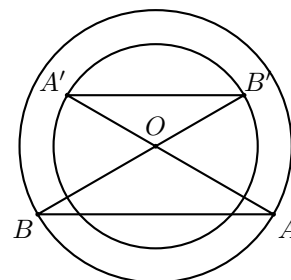
b) $AB \parallel A'B'$.

Hướng dẫn giải.

a) Từ giả thuyết, ta luôn có $\frac{OA'}{OA} = \frac{r}{R}, \frac{OB'}{OB} = \frac{r}{R}$.

$$\text{Suy ra } \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}.$$

b) Vì $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ nên theo hệ quả của định lí Ta-lét ta có $AB \parallel A'B'$.



□

Chủ đề 2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU

✧ **Định nghĩa 2.1.** Khi đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn cắt nhau.

Nếu đường thẳng và đường tròn cắt nhau thì mỗi điểm chung được gọi là một *giao điểm*.

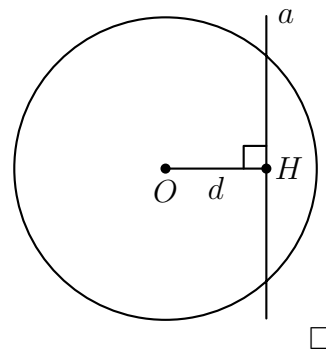
✧ **Nhận xét 2.1.** Đường thẳng a cắt đường tròn $(O; R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a nhỏ hơn R và ngược lại.

🔴 **Ví dụ 1.** Cho đường tròn $(O; R)$, điểm H nằm trong $(O; R)$, $OH = d$. Đường thẳng a đi qua H và vuông góc với OH . Đường thẳng a có cắt đường tròn $(O; R)$ hay không? Vì sao?

🔵 **Hướng dẫn giải.**

Vì điểm H nằm trong đường tròn $(O; R)$ nên $d < R$.

Do đường thẳng OH vuông góc với đường thẳng a tại điểm H (thuộc a) nên khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a bằng $OH = d$. Suy ra khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a nhỏ hơn R . Vậy đường thẳng a cắt đường tròn $(O; R)$.



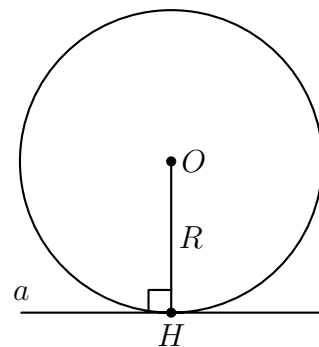
B ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU

✧ **Định nghĩa 2.2.** Khi đường thẳng và đường tròn có đúng một điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm chung đó.

Nếu đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng được gọi là *tiếp tuyến* của đường tròn, điểm chung được gọi là *tiếp điểm*.

✧ **Nhận xét 2.2.**

Nhận xét: Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a bằng R và ngược lại.

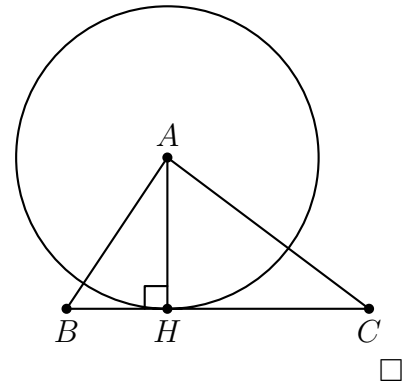


🔴 **Ví dụ 2.** Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH . Đường thẳng BC có tiếp xúc với đường tròn $(A; AH)$ hay không? Vì sao?

🔵 **Hướng dẫn giải.**

Vì $AH \perp BC$ và H thuộc đường thẳng BC nên khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC bằng AH . Do đó, khoảng cách từ tâm A của đường tròn $(A; AH)$ đến đường thẳng BC bằng bán kính AH của đường tròn.

Vậy đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn $(A; AH)$.

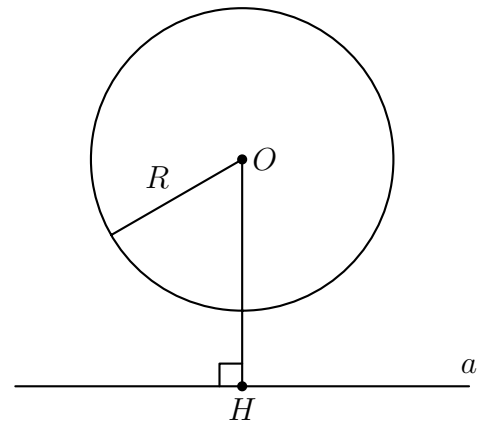


ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG GIAO NHAU

❖ **Định nghĩa 2.3.** Khi đường thẳng và đường tròn không có điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn *không giao nhau*.

❖ Nhận xét 2.3.

Đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ không giao nhau khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a lớn hơn R và ngược lại.



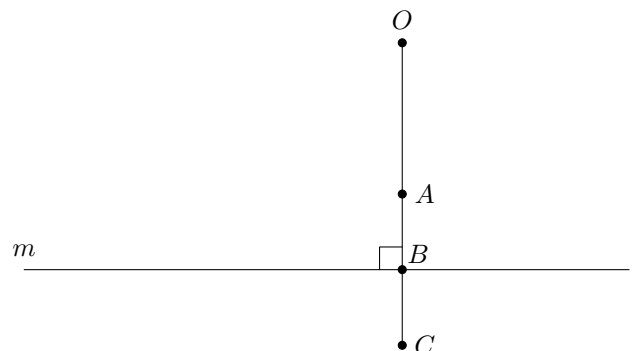
❖ **Ví dụ 3.** Cho điểm O và đường thẳng a thỏa mãn khoảng cách từ O đến đường thẳng a bằng 3cm. Giải thích vì sao đường thẳng a và đường tròn $(O; 2\text{ cm})$ không giao nhau.

📁 Hướng dẫn giải.

Vì $3 > 2$ nên khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a lớn hơn bán kính của đường tròn $(O; 2\text{ cm})$. Vậy đường thẳng a và đường tròn $(O; 2\text{ cm})$ không giao nhau. □

❖ Ví dụ 4.

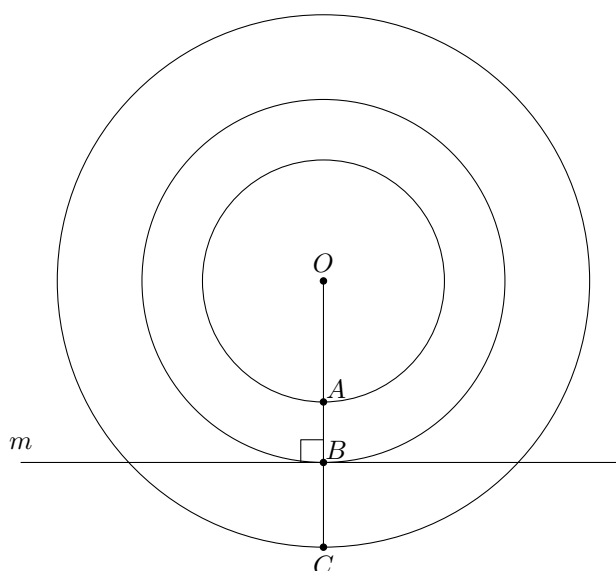
Cho bốn điểm O, A, B, C thẳng hàng như trong Hình. Giả sử đường thẳng m đi qua B và vuông góc với đường thẳng OC . Nêu vị trí tương đối của đường thẳng m và ba đường tròn cùng tâm O lần lượt đi qua các điểm A, B, C .



📁 Hướng dẫn giải.

Đặt $OB = d$. Khi đó, d là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng m .

- ✪ Vì $OA < OB$ và $OB = d$ nên $OA < d$. Vậy đường thẳng m và đường tròn $(O; OA)$ không giao nhau.
- ✪ Vì $OB = d$ nên đường thẳng m và đường tròn $(O; OB)$ tiếp xúc nhau.
- ✪ Vì $OC > OB$ và $OB = d$ nên $OC > d$. Vậy đường thẳng m và đường tròn $(O; OC)$ cắt nhau.



□

✧ **Nhận xét 2.4.** Ta có thể nhận biết vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ thông qua hệ thức giữa khoảng cách d từ tâm O đến đường thẳng a và bán kính R được tóm tắt trong bảng sau:

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

D BÀI TẬP

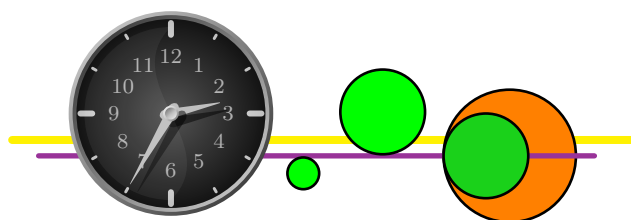
✍ Bài 9.

Đồng hồ treo tường trang trí ở Hình 29 gợi nên vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Quan sát Hình 29 và chỉ ra hình ảnh đường thẳng và đường tròn:

- a) Cắt nhau.
- b) Tiếp xúc nhau.
- c) Không giao nhau.

➡ Hướng dẫn giải.

- a) Đường thẳng màu vàng phía trên cắt các hình tròn gồm: Mặt đồng hồ, đường tròn xanh lá phía trên, và 2 đường tròn đứng nhau ngoài cùng bên phải. Đường thẳng màu tím ở dưới cắt các hình tròn gồm: Mặt đồng hồ và 2 đường tròn đứng nhau ngoài cùng bên phải.
- b) Đường thẳng màu tím ở dưới tiếp xúc với 2 đường tròn xanh lá thứ 2 và thứ 3 từ bên trái qua.
- c) Đường thẳng màu xanh lá phía trên và đường tròn xanh da trời ở dưới thứ 2 từ bên trái qua.



Hình 29

□

Bài 10.

Trong Hình 30, mép ngoài cửa ra vào có dạng một phần của đường tròn bán kính 1,6 m. Hãy tính chiều cao HK của cửa đó, biết $AH = 0,9$ m.

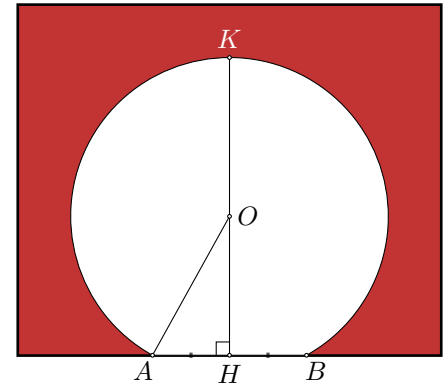
Hướng dẫn giải.

Áp dụng pytago vào tam giác vuông $\triangle HAO$.

$$\text{Ta có } OH^2 = OA^2 - AH^2 = 1,6^2 - 0,9^2 = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Nên } OH = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ m.}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó suy ra } HK &= KO + OH = 1,6 + \frac{\sqrt{7}}{2} \\ &= \frac{16 + 5\sqrt{7}}{10} \approx 2,92 \text{ m} \end{aligned}$$



Hình 30

Bài 11. Trên mặt phẳng, một vật nhỏ chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính 2 m, một vật nhỏ khác chuyển động trên đường thẳng a sao cho khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a bằng 3 m. Hai vật nhỏ có bao giờ gặp nhau không?

Hướng dẫn giải.

Vì khoảng cách từ tâm O đường tròn đến đường thẳng a bằng 3 m luôn lớn hơn bán kính của đường tròn là 2 m. Nên hai quỹ đạo chuyển động của 2 vật này không thể giao nhau. Suy ra hai vật nhỏ này không bao giờ gặp nhau.

Bài 12. Cho bốn điểm O, M, N, P cùng nằm trên một đường thẳng sao cho điểm M nằm giữa hai điểm O và N ; điểm N nằm giữa hai điểm M và P . Gọi a, b, c lần lượt là các đường thẳng đi qua M, N, P và vuông góc với đường thẳng OP . Xác định vị trí tương đối của mỗi đường thẳng a, b, c và đường tròn $(O; ON)$.

Hướng dẫn giải.

Xét $(O; ON)$ có bán kính $R = ON$.

❖ M nằm giữa O và N nên $OM < ON$ hay $OM < R$ suy ra đường thẳng a cắt đường tròn $(O; ON)$.

❖ Hiển nhiên N nằm trên đường tròn $(O; ON)$ cho nên đường thẳng b tiếp xúc đường tròn $(O; ON)$.

❖ N nằm giữa M và P nên $OM < ON < OP$ hay $R < OP$ suy ra đường thẳng c không cắt đường tròn $(O; ON)$.

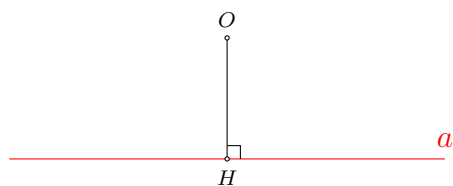
Bài 13. Cho điểm O và đường thẳng a không đi qua O .

a) Vẽ điểm H là hình chiếu của điểm O trên đường thẳng a .

b) Từ đó, vẽ ba đường tròn tâm O lần lượt: không giao với đường thẳng a tiếp xúc với đường thẳng a cắt đường thẳng a tại hai điểm phân biệt.

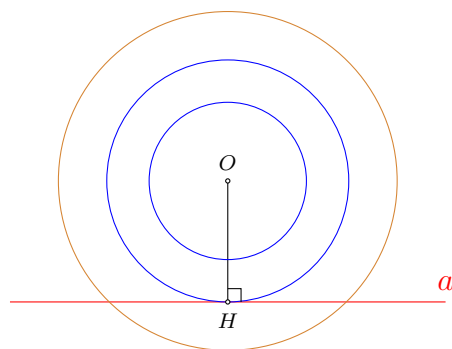
Hướng dẫn giải.

a) Ta có hình vẽ sau.



Hình bài tập 5a

b) Ta có hình vẽ sau.

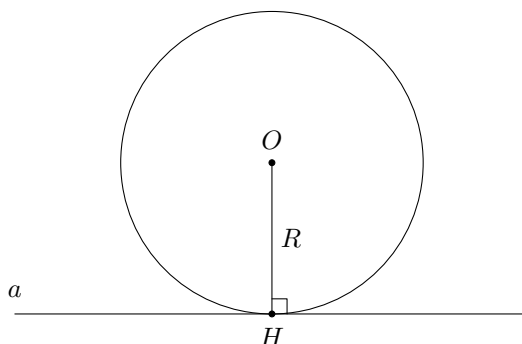


Hình bài tập 5b

□

Chủ đề 3. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN



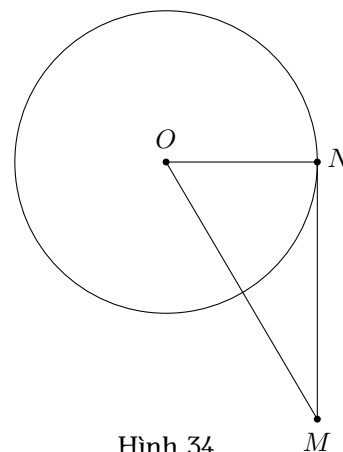
Hình 33

❖ **Nhận xét 3.1.** Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì đường thẳng đó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

🔴 Ví dụ 1.

Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; 3\text{ cm})$ thỏa mãn $OM = 5\text{ cm}$. Đường thẳng MN đi qua M và tiếp xúc với đường tròn (O) tại N .

- Tam giác OMN có phải là tam giác vuông hay không? Vì sao?
- Tính độ dài đoạn thẳng MN .



Hình 34

📁 Hướng dẫn giải.

- Vì đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn (O) tại N nên $ON \perp MN$. Suy ra tam giác OMN vuông tại N .
- Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác OMN vuông tại N , ta có $OM^2 = ON^2 + MN^2$.
Suy ra $5^2 = 3^2 + MN^2$.

Do đó $MN^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.
Vậy $MN = \sqrt{16} = 4\text{ (cm)}$.

□

LUYỆN TẬP 1

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, trong đó B nằm giữa A và C . Đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng AB tại điểm C . Chứng minh

$$AO^2 + BC^2 = BO^2 + AC^2.$$

📁 Hướng dẫn giải.

Vì AB tiếp xúc với (O) tại C nên $AC \perp OC$.

Khi đó áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle AOC$ vuông tại C ta được

$$AO^2 = AC^2 + CO^2$$

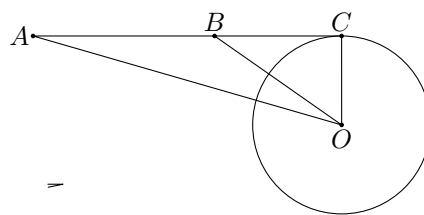
$$\text{Suy ra } OC^2 = AO^2 - AC^2 \quad (1).$$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle BOC$ vuông tại C ta được

$$BO^2 = BC^2 + CO^2 \Rightarrow CO^2 = BO^2 - BC^2 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow AO^2 - AC^2 = BO^2 - BC^2$$

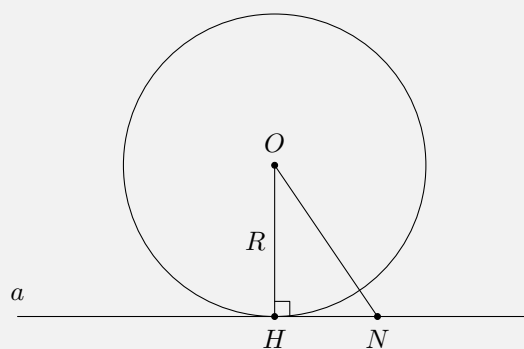
$$\text{Vậy } AO^2 + BC^2 = BO^2 + AC^2.$$



□

Định lý 3.1.

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

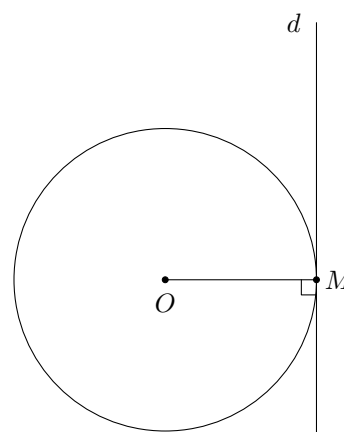


Hình 35

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và điểm M thuộc đường tròn. Hãy nêu cách vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm M .

Hướng dẫn giải.

Vẽ đường thẳng d đi qua M và vuông góc với OM . Do điểm M thuộc đường tròn $(O; OM)$ và $d \perp OM$ nên đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O) (Hình 36).



Hình 36

□

LUYỆN TẬP 2

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài nhau tại điểm I . Gọi d là tiếp tuyến của $(O; R)$ tại điểm I . Chứng minh d là tiếp tuyến của $(O'; R')$.

Hướng dẫn giải.

Vì (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau tại I nên O, I, O' thẳng hàng.

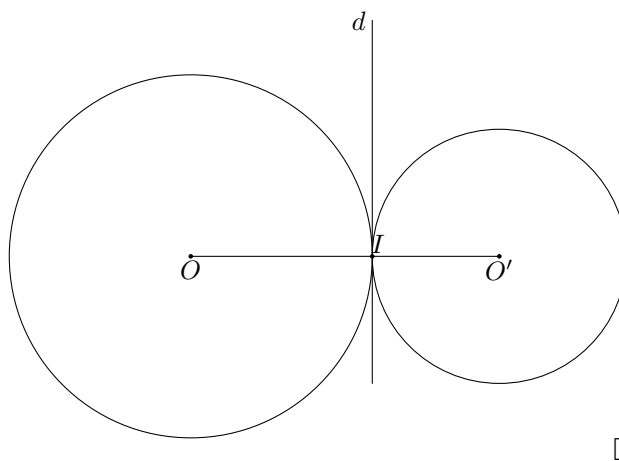
d là tiếp tuyến của $(O; R)$ tại điểm I nên $IO \perp d$.

Hay $\widehat{OId} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{OId} + \widehat{dIO'} = 180^\circ$

Do đó $\widehat{dIO'} = 180^\circ - \widehat{OId} = 90^\circ$.

Hay $d \perp O'I$. Vậy d là tiếp tuyến của (O') .



□

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) và điểm I ở ngoài đường tròn. Gọi M là giao điểm của đường tròn tâm K đường kính IO và đường tròn (O) . Chứng minh đường thẳng IM là tiếp tuyến của (O) tại M .

Hướng dẫn giải.

Vì IO, KM lần lượt là đường kính, bán kính của đường tròn (K) nên

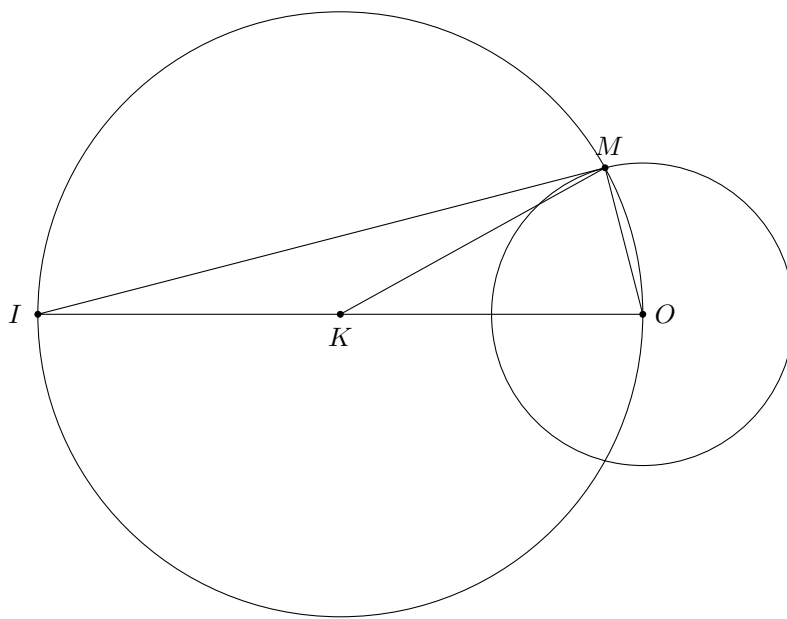
$$KM = \frac{1}{2}IO.$$

Xét tam giác IMO , ta có đường trung tuyến MK ứng với cạnh IO bằng nửa cạnh ấy.

Suy ra tam giác IMO vuông tại M .

Do đó $IM \perp MO$ tại M với $M \in (O)$.

Vậy đường thẳng IM là một tiếp tuyến của (O) tại M .



Hình 37

□

LUYỆN TẬP 3

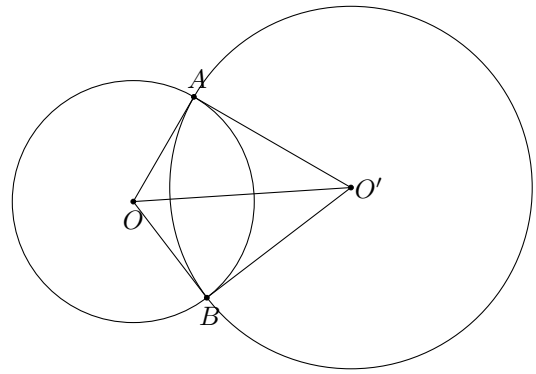
Cho hai đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O') . Chứng minh đường thẳng $O'B$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Hướng dẫn giải.

OA là tiếp tuyến của đường tròn $(O') \Rightarrow OA \perp O'A$ suy ra $\widehat{OAO'} = 90^\circ$.
Xét $\triangle OAO'$ và $\triangle OBO'$ có

-  $OA = OB$ (bán kính (O))
-  OO' chung
-  $O'A = O'B$ (bán kính (O'))

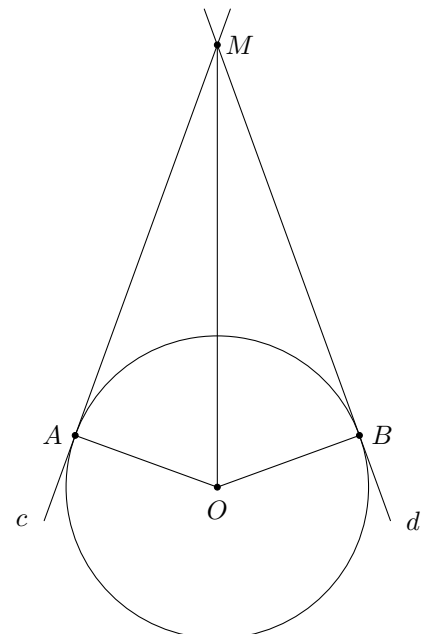
Do đó $\triangle OAO' = \triangle OBO'$ suy ra $\widehat{OAO'} = \widehat{OBO'}$.
Mà $\widehat{OAO'} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{OBO'} = 90^\circ$.
Hay $OB \perp O'B$.
Vậy $O'B$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) . □



B TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

 **Định lý 3.2.** Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì

-  Điểm đó cách đều hai tiếp điểm;
-  Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm đường tròn là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến;
-  Tia kẻ từ tâm đường tròn đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

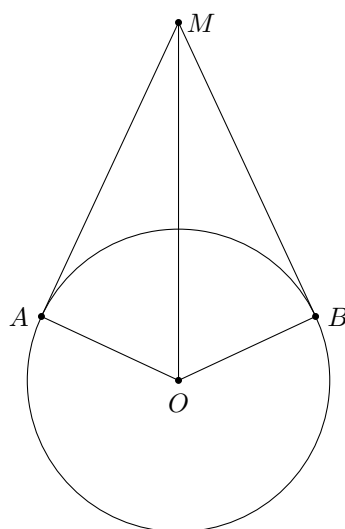


Hình 38

 **Ví dụ 4.** Một chiếc gương có dạng hình tròn được treo bằng hai sợi dây không dẫn, mỗi sợi dây đều tiếp xúc với gương (Hình 39). Biết tổng độ dài hai dây treo là 6 dm và góc giữa hai sợi dây là 60° . Hỏi bán kính của chiếc gương là bao nhiêu decimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 39



Hình 40

Hướng dẫn giải.

Giả sử chiếc gương được minh họa bởi đường tròn (O) , hai sợi dây treo là hai tiếp tuyến cắt nhau MA, MB của đường tròn (O) , trong đó $MA + MB = 6 \text{ dm}$ và $\widehat{AMB} = 60^\circ$ (Hình 40). Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $MA = MB$ và $\widehat{OMA} = \widehat{OMB}$, suy ra $MA = 3 \text{ dm}$ và $\widehat{OMA} = 30^\circ$.

Xét tam giác OMA vuông tại A , ta có $OA = MA \cdot \tan \widehat{OMA} = 3 \cdot \tan 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1,73 \text{ (dm)}$.

Vậy bán kính của chiếc gương là khoảng 1,73 dm. □

LUYỆN TẬP 4

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Hai đường thẳng c, d qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B . Biết $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Chứng minh $AB = R$.

 Hướng dẫn giải.

Đường thẳng c, d qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B nên $MB \perp OB$ và $MA \perp OA$.

Đường thẳng c, d là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M .

Khi đó OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$

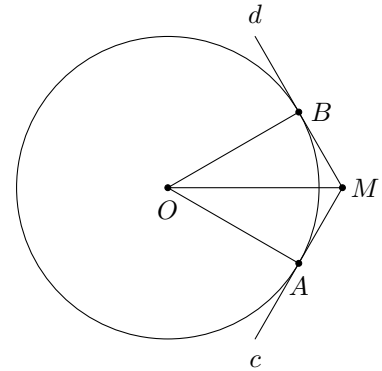
MO là tia phân giác của góc $\widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{BMO} = \widehat{AMO} = 60^\circ$.

Xét $\triangle OMB$ có $\widehat{BOM} + \widehat{OMB} + \widehat{MBO} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{OBM} = 30^\circ$.

OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$ nên $\widehat{AOM} = \widehat{MOB} = 30^\circ$.

Xét $\triangle AOB$ có $\begin{cases} OA = OB \\ \widehat{AOB} = 60^\circ \end{cases}$ suy ra $\triangle AOB$ đều.

Do đó $AB = R$.

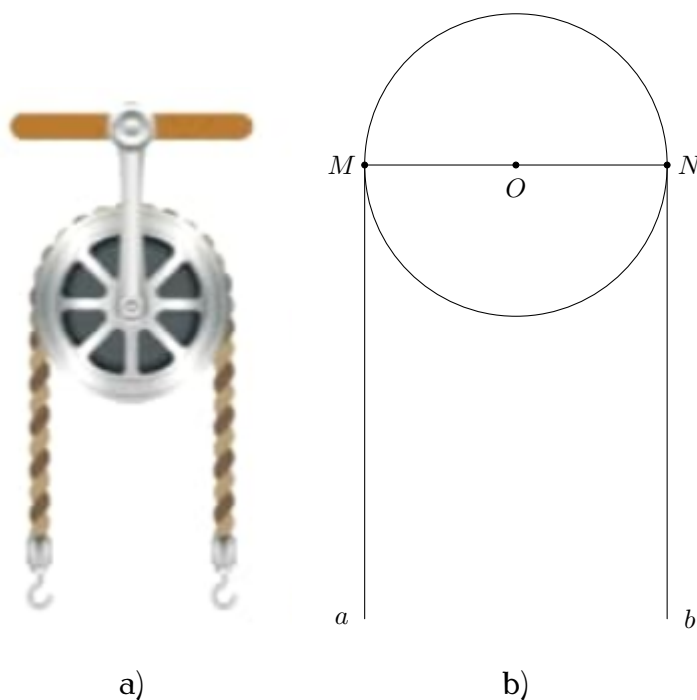


□

BÀI TẬP

 **Bài 14.** Ròng rọc là một loại máy cơ đơn giản có rãnh và có thể quay quanh một trục, được sử dụng rộng rãi trong công việc nâng lên và hạ xuống vật nặng trong cuộc sống. Trong Hình 41a, có một sợi dây không dẫn vắt qua ròng rọc.

Giả sử ròng rọc được minh họa bởi đường tròn (O) , sợi dây vắt qua ròng rọc được minh họa bởi cung MtN và hai tiếp tuyến Ma, Nb của đường tròn (O) (Hình 41b). Chứng minh $Ma \parallel Nb$.



Hình 41

Hướng dẫn giải.

Vì Ma, Nb của đường tròn (O) nên $Ma \perp MN$ và $Nb \perp MN$.
Do đó $Ma \parallel Nb$. □

Bài 15. Cho đường tròn (O) và dây AB . Điểm M nằm ngoài đường tròn (O) thỏa mãn điểm B nằm trong góc MAO và $\widehat{MAB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. Chứng minh đường thẳng MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Hướng dẫn giải.

$$\widehat{MAB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} \text{ suy ra } \widehat{AOB} = 2\widehat{MAB}.$$

Xét $\triangle AOB$ có $OA = OB$ nên $\triangle AOB$ cân tại O .

$$\text{Suy ra } \widehat{OAB} = \widehat{OBA}.$$

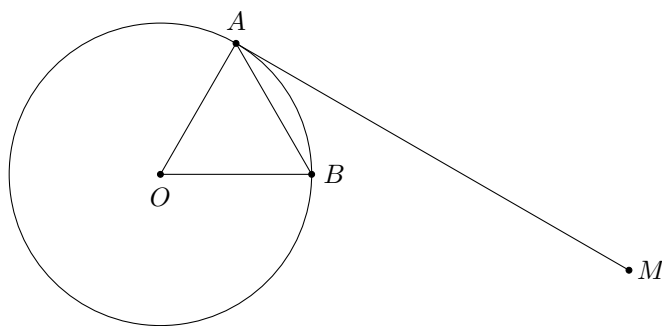
$$\text{Xét } \triangle AOB \text{ có } \widehat{AOB} + \widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 180^\circ$$

$$\text{Hay } 2\widehat{MAB} + 2\widehat{OAB} = 180^\circ$$

$$\text{suy ra } 2(\widehat{MAB} + \widehat{OAB}) = 180^\circ \text{ hay } \widehat{MAB} + \widehat{OAB} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{MAB} + \widehat{OAB} = \widehat{OAM}.$$

Hay $AO \perp AM$ suy ra AM là tiếp tuyến của (O) . □



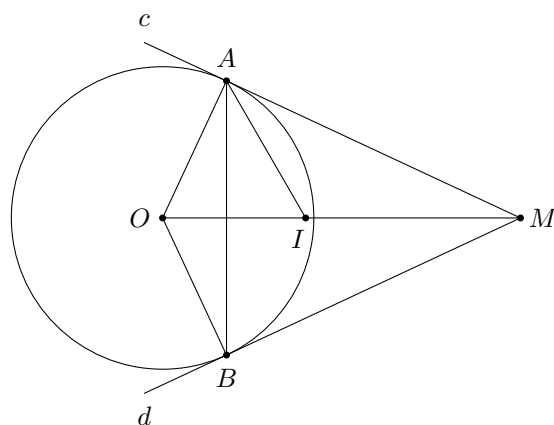
Bài 16. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Hai đường thẳng c, d đi qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B . Tia phân giác của góc MAB cắt MO tại I . Chứng minh điểm I cách đều ba đường thẳng MA, MB và AB .

Hướng dẫn giải.

c, d đi qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B . Do đó c, d là hai tiếp tuyến nên MO là tia phân giác của góc AMB .

Lại có AI là tia phân giác của góc MAB .

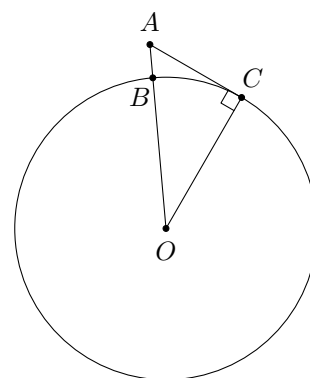
Mà ba đường phân giác của một tam giác đi qua một điểm và điểm đó cách đều ba cạnh của tam giác. Do đó I cách đều ba đường thẳng MA, MB và AB .



□

✍ Bài 17.

Một người quan sát đặt mắt ở vị trí A có độ cao cách mực nước biển là $AB = 5$ m. Cắt bề mặt Trái Đất bởi một mặt phẳng đi qua điểm A và tâm của Trái Đất thì phần chung giữa chúng là một đường tròn lớn tâm O như Hình 42. Tầm quan sát tối đa từ vị trí A là đoạn thẳng AC , trong đó C là tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A với đường tròn (O) . Tính độ dài đoạn thẳng AC (theo đơn vị kilômét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười), biết bán kính Trái Đất là $OB = OC \approx 6400$ (km)



Hình 42

➡ Hướng dẫn giải.

Vì AC là tiếp tuyến của đường tròn tại C nên $\triangle AOC$ vuông tại C .

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác AOC vuông tại C ta được

$$OA^2 = OC^2 + AC^2$$

$$AC^2 = OA^2 - OC^2 = 6405^2 - 6400^2 = 64025.$$

$$\text{Do đó } AC = \sqrt{64025} \approx 253 \text{ (km).}$$

□

✍ Bài 18.

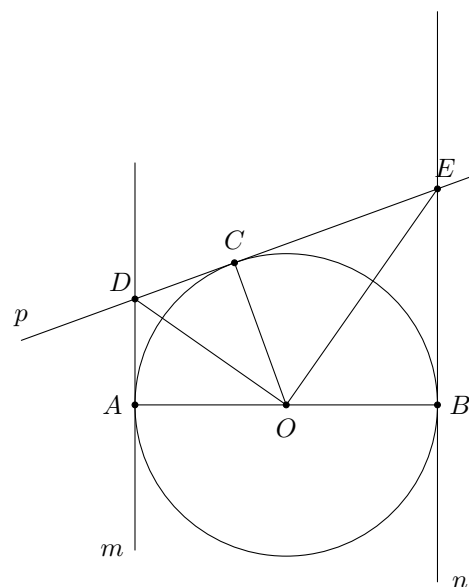
Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và các đường thẳng m, n, p lần lượt tiếp xúc với đường tròn tại A, B, C (Hình 43). Chứng minh

a) $AD + BE = DE$;

b) $\widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$ và $\widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$;

c) Tam giác ODE vuông;

d) $\frac{OD \cdot OE}{DE} = R$.



Hình 43

Hướng dẫn giải.

- a) Đường thẳng m, n, p tiếp xúc với đường tròn tại các điểm A, B, C . Do đó m, n, p là các tiếp tuyến của đường tròn.

Hai tiếp tuyến p và m cắt nhau tại D , suy ra $DA = DC$ (1).

Hai tiếp tuyến n và p cắt nhau tại E , suy ra $EB = EC$ (2).

Khi đó $DE = DC + CE = DA + EB$.

Vậy $AD + BE = DE$.

- b) Hai tiếp tuyến p và m cắt nhau tại D , suy ra OD là tia phân giác của góc AOC .

Hay $\widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$.

Hai tiếp tuyến n và p cắt nhau tại E , suy ra OE là tia phân giác của góc BOC .

Hay $\widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$.

- c) Ta có $\widehat{AOD} + \widehat{DOC} + \widehat{COE} + \widehat{EOB} = 180^\circ$.

OD là tia phân giác của góc AOC

OE là tia phân giác của góc BOC

nên $2\widehat{DOC} + 2\widehat{COE} = 180^\circ$ hay $\widehat{DOE} = 90^\circ$.

Do đó tam giác ODE vuông;

- d) $\triangle DOE$ vuông tại O có OC là đường cao.

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle DOE$ ta được $OD \cdot OE = OC \cdot DE$

Suy ra $OC = \frac{OD \cdot OE}{DE} = R$.

□

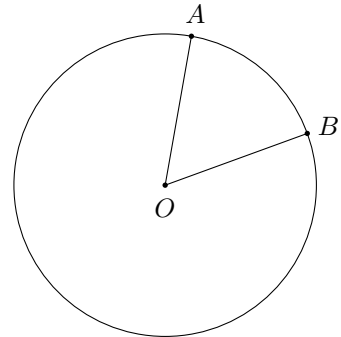
Chủ đề 4. GÓC Ở TÂM - GÓC NỘI TIẾP

A GÓC Ở TÂM

Định nghĩa 4.1.

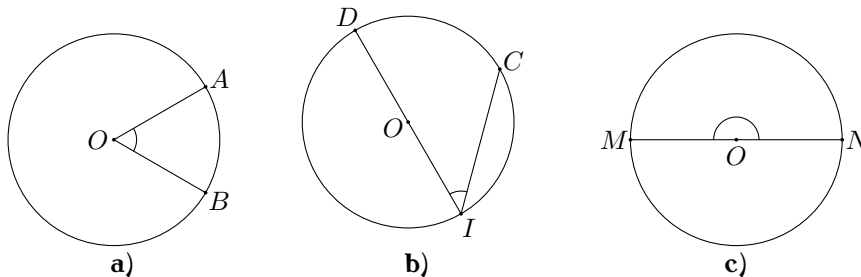
Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.

Ở Hình 45, góc AOB là góc ở tâm.



Hình 45

Ví dụ 1. Trong các góc AOB , CID , MON ở các hình 46a, 46b, 46c, góc nào là góc ở tâm, góc nào không là góc ở tâm?



Hình 46;

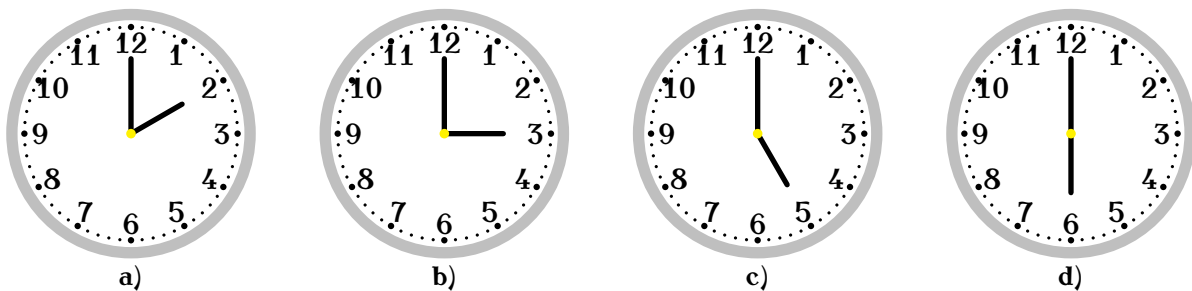
Hướng dẫn giải.

Hai góc AOB và MON là góc ở tâm vì có đỉnh trùng với tâm đường tròn. Góc CID không là góc ở tâm vì có đỉnh không trùng với tâm đường tròn. $\square$

Nhận xét 4.1. Đường kính chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần được gọi là một nửa đường tròn.

LUYỆN TẬP 1

Trong Hình 47, coi mỗi khung đồng hồ là một đường tròn, kim giờ, kim phút là các tia. Số đo góc ở tâm trong mỗi hình 47a, 47b, 47c, 47d là bao nhiêu?



Hình 47

Hướng dẫn giải.

a) Hình 47a): Góc ở tâm tạo bởi kim giờ và kim phút tạo thành góc có số đo bằng 60° .

- b) Hình 47b): Góc ở tâm tạo bởi kim giờ và kim phút tạo thành góc có số đo bằng 90° .
- c) Hình 47c): Góc ở tâm tạo bởi kim giờ và kim phút tạo thành góc có số đo bằng 150° .
- d) Hình 47d): Góc ở tâm tạo bởi kim giờ và kim phút tạo thành góc có số đo bằng 180° .

□

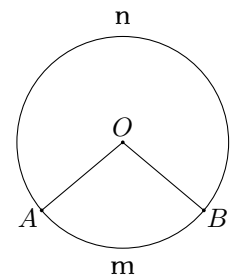
B CUNG. SỐ ĐO CUNG.

1 Cung

Chú ý



Phần đường tròn nối liền hai điểm A, B trên đường tròn được gọi là một cung (hay cung tròn) AB , kí hiệu là $\widehat{AB}$.



Hình 48



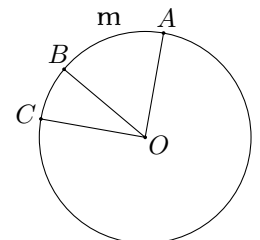
Trong Hình 48:

- Cung nằm bên trong góc ở tâm AOB được gọi là cung nhỏ, kí hiệu là $\widehat{AmB}$. Ta còn nói $\widehat{AmB}$ là cung bị chắn bởi góc AOB hay góc AOB chắn cung nhỏ $\widehat{AmB}$.
- Cung nằm bên ngoài góc ở tâm AOB được gọi là cung lớn, kí hiệu là $\widehat{AnB}$.
- Nếu có điểm C (khác A và B) thuộc $\widehat{AmB}$ thì ta cũng nói cung này là $\widehat{ACB}$.
- Nếu có điểm D (khác A và B) thuộc $\widehat{AnB}$ thì ta cũng nói cung này là $\widehat{ADB}$.

○ Ví dụ 2.

Trong Hình 49, hãy cho biết:

- a) Cung $\widehat{AmB}$ bị chắn bởi góc ở tâm nào?
- b) Góc ở tâm AOC chắn cung nào?



Hình 49

Hướng dẫn giải.

- a) Cung $\widehat{AmB}$ bị chắn bởi góc ở tâm AOB .
- b) Góc ở tâm AOC chắn cung $\widehat{ABC}$.

□

2 Số đo của cung

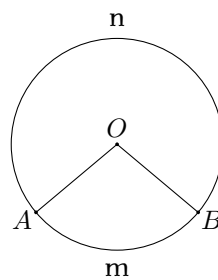
Như ta đã biết, mỗi góc có một số đo. Tương tự như đối với các góc, mỗi cung cũng có một số đo. Cụ thể, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 4.2.

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).
- Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .
- Số đo của cung AB được kí hiệu là $sđ \widehat{AB}$.

Ta quy ước: Khi hai mút của cung trùng nhau, ta có “cung không” với số đo 0° và cung cả đường tròn có số đo 360° .

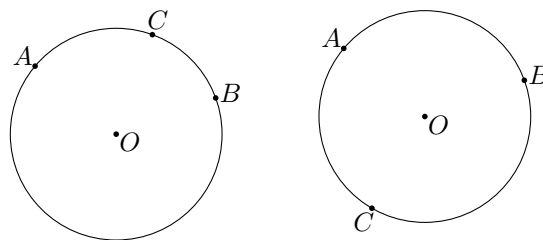
Nhận xét 4.2. Góc ở tâm chắn một cung mà cung đó là nửa đường tròn thì có số đo bằng 180° .



Hình 50

Trong Hình 50, ta có:

$$sđ \widehat{AmB} = \widehat{AOB}; sđ \widehat{AnB} = 360^\circ - sđ \widehat{AmB} = 360^\circ - \widehat{AOB}.$$

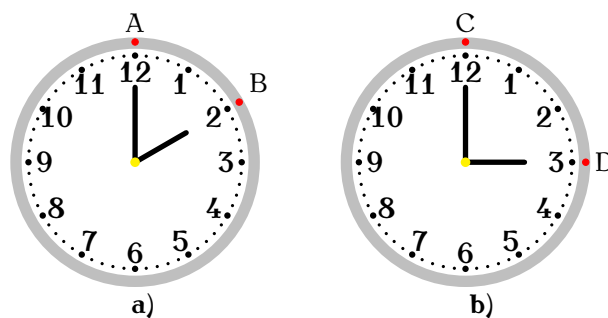


Hình 51

Cho C là một điểm nằm trên cung AB (Hình 51), khi đó ta nói: Điểm C chia cung AB thành hai cung AC và CB .

Nhận xét 4.3. Ta có thể chứng minh được rằng nếu C là một điểm nằm trên cung AB (Hình 51) thì $sđ \widehat{ACB} = sđ \widehat{AC} + sđ \widehat{CB}$.

Ví dụ 3. Trong Hình 52, coi mỗi vành đồng hồ là một đường tròn. Tìm số đo của cung nhỏ AB và cung lớn CD .



Hình 52

Hướng dẫn giải.

- ✎ Vì số đo của cung cả đường tròn gấp sáu lần số đo cung nhỏ AB và cung cả đường tròn có số đo 360° nên

$$\text{sđ } \widehat{AB} = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ.$$

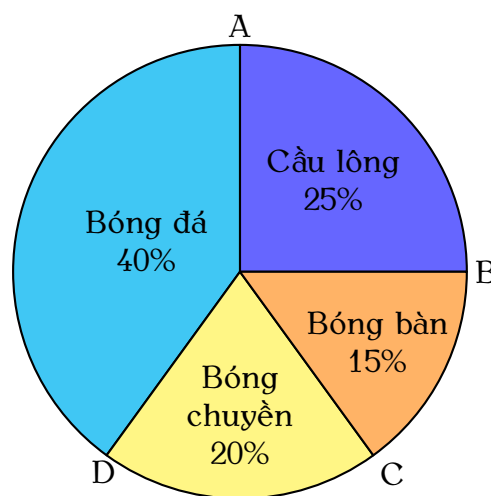
- ✎ Vì số đo của cung cả đường tròn gấp bốn lần số đo cung nhỏ CD và cung cả đường tròn có số đo 360° nên

$$\text{sđ } \widehat{CD} = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ.$$

Vậy $\text{sđ } \widehat{CnD} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$. □

❶ Ví dụ 4.

Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 53 biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) chọn môn thể thao ưa thích nhất trong bốn môn: Cầu lông, Bóng bàn, Bóng chuyền, Bóng đá của 300 học sinh khối lớp 9 ở một trường trung học cơ sở (mỗi học sinh chỉ được chọn một môn thể thao khi được hỏi ý kiến). Tìm số đo của các góc ở tâm: $\widehat{AOB}$; $\widehat{COD}$.



Hình 53

Hướng dẫn giải.

- ✎ Do số học sinh chọn môn Cầu lông chiếm 25% số lượng học sinh nên số đo cung nhỏ AB bằng 25% số đo của cung cả đường tròn.

$$\text{Vì thế, } \text{sđ } \widehat{AB} = \frac{25}{100} \cdot 360^\circ = 90^\circ.$$

Vì số đo của cung nhỏ AB bằng số đo của góc ở tâm AOB chắn cung đó nên $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

- ✎ Do số học sinh chọn môn Bóng chuyền chiếm 20% số lượng học sinh nên số đo cung nhỏ AB bằng 20% số đo của cung cả đường tròn.

$$\text{Vì thế, } \text{sđ } \widehat{CD} = \frac{20}{100} \cdot 360^\circ = 72^\circ.$$

Vì số đo của cung nhỏ CD bằng số đo của góc ở tâm COD chắn cung đó nên $\widehat{COD} = 72^\circ$



LUYỆN TẬP 2

Trong Hình 53, tìm số đo của các góc ở tâm: $\widehat{BOC}$; $\widehat{DOA}$.

Hướng dẫn giải.

- a) Do số học sinh chọn môn Bóng bàn chiếm 15% số lượng học sinh nên số đo cung nhỏ AB bằng 15% số đo của cung cả đường tròn.

$$\text{Vì thế, số đo } \widehat{BC} = \frac{15}{100} \cdot 360^\circ = 54^\circ.$$

Vì số đo của cung nhỏ AB bằng số đo của góc ở tâm BOC chắn cung đó nên $\widehat{BOC} = 54^\circ$.

- b) Do số học sinh chọn môn Bóng đá chiếm 40% số lượng học sinh nên số đo cung nhỏ AD bằng 40% số đo của cung cả đường tròn.

$$\text{Vì thế, số đo } \widehat{AD} = \frac{40}{100} \cdot 360^\circ = 144^\circ.$$

Vì số đo của cung nhỏ AD bằng số đo của góc ở tâm AOD chắn cung đó nên $\widehat{AOD} = 144^\circ$.



Chú ý

Khác với so sánh hai góc, ta chỉ so sánh hai cung trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau. Cụ thể:

❖ Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau;

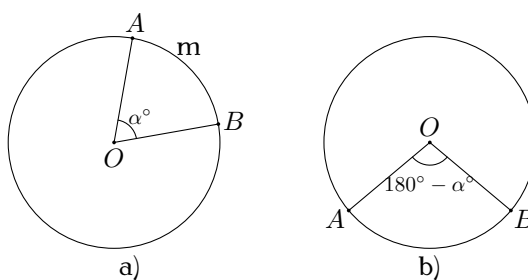
❖ Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

Hai cung AB và CD bằng nhau được kí hiệu là $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

Cung EG nhỏ hơn cung HK được kí hiệu là $\widehat{EG} < \widehat{HK}$. Trong trường hợp này, ta cũng nói cung HK lớn hơn cung EG và kí hiệu là $\widehat{HK} > \widehat{EG}$.

❖ Cho điểm A thuộc đường tròn (O) và số thực α với $0 < \alpha < 360$. Sử dụng thước thẳng và thước đo độ, ta vẽ điểm B thuộc đường tròn (O) như sau:

❖ Nếu $0 < \alpha \leq 180$ thì ta vẽ theo chiều quay của kim đồng hồ góc ở tâm AOB có số đo bằng α° . Khi đó số đo $\widehat{AmB} = \alpha^\circ$ (Hình 54a).



Hình 54

❖ Nếu $180 < \alpha \leq 360$ thì ta vẽ theo ngược chiều quay của kim đồng hồ góc ở tâm AOB có số đo bằng $\alpha^\circ - 180^\circ$. Khi đó số đo $\widehat{AnB} = \alpha^\circ$ (Hình 54b).

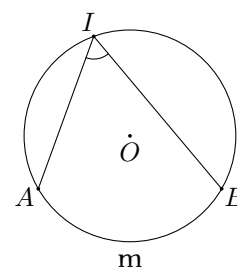
C GÓC NỘI TIẾP

Định nghĩa 4.3.

Góc nội tiếp là góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

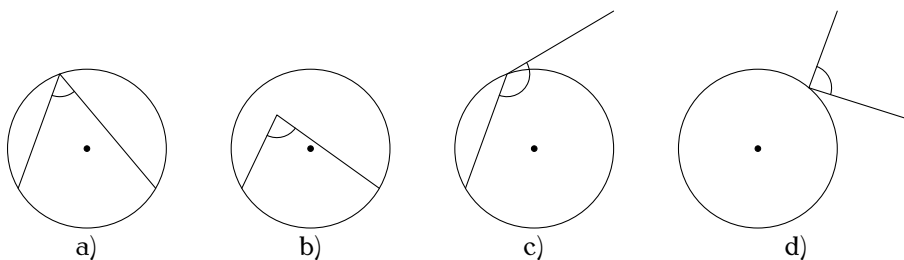
Hình 55, góc AIB là góc nội tiếp.

Cung bị chắn là cung AmB .



Hình 55

Ví dụ 5. Quan sát các hình 56a, 56b, 56c, 56d, góc ở hình nào là góc nội tiếp, góc ở hình nào không là góc nội tiếp? Vì sao?



Hình 56

Hướng dẫn giải.

Góc ở Hình 56a là góc nội tiếp vì góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Góc ở Hình 56b không là góc nội tiếp vì đỉnh không thuộc đường tròn.

Góc ở Hình 56c không là góc nội tiếp vì một cạnh không chứa dây cung.

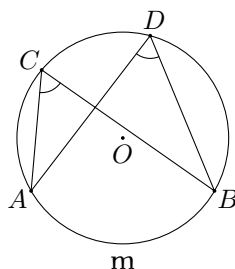
Góc ở Hình 56d không là góc nội tiếp vì cả hai cạnh không chứa dây cung. □

LUYỆN TẬP 3

Hãy vẽ một đường tròn và hai góc nội tiếp trong đường tròn đó.

Hướng dẫn giải.

Hai góc nội tiếp là ACB và ADB .



□

Định lý 4.1. Mỗi góc ở tâm có số đo gấp hai lần số đo góc nội tiếp cùng chắn một cung.

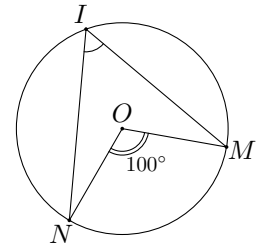
Nhận xét 4.4. Số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.

Vì số đo của góc ở tâm bằng số đo của cung bị chắn nên từ định lý trên ta có hệ quả sau:

↔ **Hệ quả 4.1.** Số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90° .

❶ Ví dụ 6.

Tính số đo góc MIN ở Hình 58.



Hình 58

➤ Hướng dẫn giải.

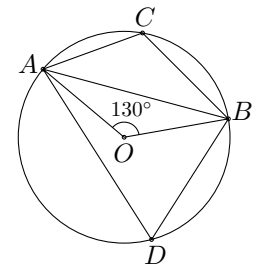
Xét đường tròn (O) có $\widehat{MON}$ là góc ở tâm và $\widehat{MIN}$ là góc nội tiếp cùng chắn cung MN nên

$$\widehat{MIN} = \frac{1}{2}\widehat{MON} = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ.$$

Vậy $\widehat{MIN} = 50^\circ$. □

❶ Ví dụ 7.

Tìm số đo cung ADB và số đo góc ACB ở Hình 59.



Hình 59

➤ Hướng dẫn giải.

Xét đường tròn (O) , ta có:

$$\begin{aligned}\text{sđ } \widehat{ADB} &= 360^\circ - \text{sđ } \widehat{ACB} \\ &= 360^\circ - \widehat{AOB} = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ.\end{aligned}$$

Vì $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn cung ADB nên

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{ADB} = \frac{1}{2} \cdot 230^\circ = 115^\circ.$$

Vậy $\text{sđ } \widehat{ADB} = 230^\circ$; $\widehat{ACB} = 115^\circ$. □

LUYỆN TẬP 4

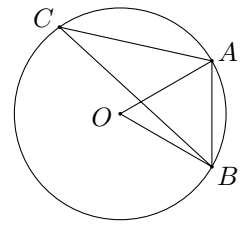
Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $AB = R$. Điểm C thuộc cung lớn AB , C khác A và B . Tính số đo góc ACB .

➤ Hướng dẫn giải.

Ta có $OA = OB = AB$ nên tam giác AOB đều nên $\widehat{BOC} = 60^\circ$.
Xét đường tròn (O) có $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm và $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp cùng chắn cung AB nên

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

Vậy $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

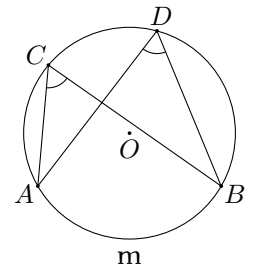


□

❖ **Nhận xét 4.5.** Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

🔴 **Ví dụ 8.**

Một huấn luyện viên cho cầu thủ tập sút bóng vào cầu môn. Giả sử bóng được đặt ở các vị trí C, D trên cung tròn AB với A, B là hai chân cột của cầu môn như Hình 61. Các góc sút ACB và ADB có bằng nhau hay không? Vì sao?



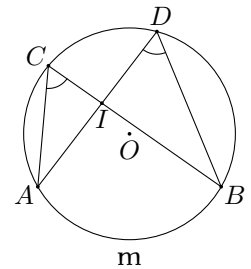
Hình 61

📖 **Hướng dẫn giải.**

Xét đường tròn (O) chứa cung ACB và xét cung AmB không chứa C, D . Vì $\widehat{ACB}$ và $\widehat{ADB}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung AmB nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. □

LUYỆN TẬP 5

Trong Hình 61, gọi I là giao điểm của AD và BC . Chứng minh $IA \cdot ID = IB \cdot IC$.



Hình 61

📖 **Hướng dẫn giải.**

Xét đường tròn (O) , ta có:

- Các góc nội tiếp ACB và ADB cùng chắn cung AB nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ hay $\widehat{ACI} = \widehat{ADI}$.

- Các góc nội tiếp CAD và CBD cùng chắn cung CD nên $\widehat{CDA} = \widehat{CBD}$ hay $\widehat{CAI} = \widehat{DBI}$.

Xét hai tam giác IAC và IDB có $\widehat{ACI} = \widehat{ADI}$ và $\widehat{CAI} = \widehat{DBI}$ nên $\triangle IAC \sim \triangle IDB$ (gg).

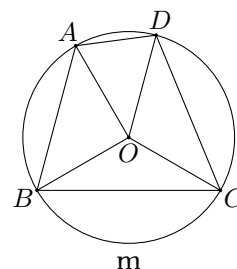
Suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{IC}{ID}$ hay $IA \cdot ID = IB \cdot IC$. □

D BÀI TẬP

📝 **Bài 19.**

Quan sát Hình 62, hãy cho biết:

- 6 góc ở tâm có hai cạnh lần lượt chứa hai điểm trong bốn điểm A, B, C, D ;
- 4 góc nội tiếp có hai cạnh lần lượt chứa ba điểm trong bốn điểm A, B, C, D .



Hình 61

Hướng dẫn giải.

- 6 góc ở tâm là $\widehat{AOB}$; $\widehat{AOD}$; $\widehat{AOC}$; $\widehat{DOC}$; $\widehat{BOC}$; $\widehat{BOD}$.
- 4 góc nội tiếp là $\widehat{BAC}$; $\widehat{BDC}$; $\widehat{ADB}$; $\widehat{ACB}$.

□

Bài 20. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Giả sử M, N lần lượt là các điểm thuộc cung lớn AB và cung nhỏ AB (M, N khác A và B).

- Tính độ dài đoạn thẳng AB theo R .
- Tính số đo các góc ANB và AMB .

Hướng dẫn giải.

- Tam giác ABC vuông tại O , ta có $AB^2 = OA^2 + OB^2$.
Suy ra $AB = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$.
- Xét đường tròn (O) có $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm và $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp cùng chắn cung AB nên

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm và $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên số đo $\widehat{AB} = 90^\circ$.

Suy ra số đo cung lớn AB là $360^\circ - \widehat{AB} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

Mà $\widehat{ANB}$ là góc nội tiếp cùng chắn cung lớn AB nên

$$\widehat{ANB} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \cdot 270^\circ = 135^\circ.$$

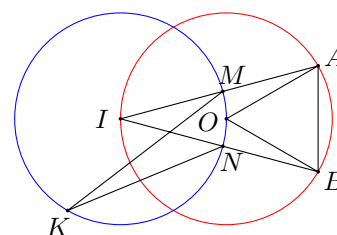
□

Bài 21.

Trong Hình 63, cho biết $AB = OA$.

- Tính số đo góc AOB .
- Tính số đo cung nhỏ AB và cung lớn AB của (O) .
- Tính số đo góc MIN .
- Tính số đo cung nhỏ MN và cung lớn MN của (I) .
- Tính số đo góc MKN .

Hướng dẫn giải.



Hình 63

a) Ta có $OA = OB = AB$ (gt), suy ra $\triangle OAB$ đều, suy ra $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

b) Ta có góc ở tâm AOB bằng 60° , suy ra $\widehat{AB} = 60^\circ$.
Suy ra số đo cung lớn AB là $360^\circ - \text{sđ } \widehat{AB} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

c) Ta có góc MIN là góc nội tiếp của (O) và góc ở tâm AOB cùng chắn một cung là AB ,
suy ra $\widehat{MIN} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

d) Xét đường tròn (I) có $\widehat{MIN}$ là góc ở tâm chắn cung MN nên

$$\text{sđ } \widehat{MN} = \widehat{MIN} = 30^\circ.$$

Suy ra số đo cung lớn MN là $360^\circ - \text{sđ } \widehat{MN} = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$.

e) Xét đường tròn (I) có $\widehat{MIN}$ là góc ở tâm và $\widehat{MKN}$ là góc nội tiếp cùng chắn cung MN nên

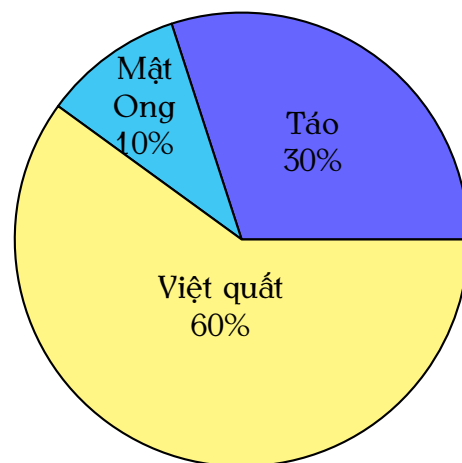
$$\widehat{MKN} = \frac{1}{2}\widehat{MIN} = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ.$$

Vậy $\widehat{MKN} = 15^\circ$.

□

Bài 22.

Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 64 mô tả các thành phần của một chai nước ép hoa quả (tính theo tỉ số phần trăm). Hãy cho biết các cung tương ứng với phần biểu diễn thành phần việt quất, táo, mật ong lần lượt có số đo là bao nhiêu độ.



Hình 64

Hướng dẫn giải.

Hình vẽ bên.

- a) Do thành phần Táo quất chiếm 30% nên số đo cung nhỏ AB bằng 30% số đo của cung cả đường tròn.

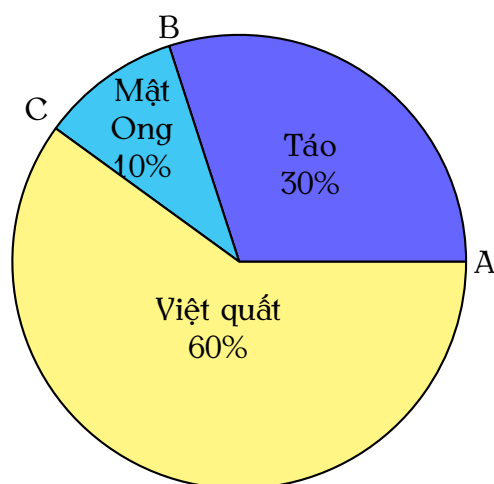
$$\text{Vì thế, số đo } \widehat{AB} = \frac{30}{100} \cdot 360^\circ = 108^\circ.$$

- b) Do thành phần Mật Ong chiếm 10% nên số đo cung nhỏ BC bằng 10% số đo của cung cả đường tròn.

$$\text{Vì thế, số đo } \widehat{BC} = \frac{10}{100} \cdot 360^\circ = 36^\circ.$$

- c) Số đo cung BC là số đo $\widehat{BC} = \widehat{AB} + \widehat{AC} = 108^\circ + 36^\circ = 144^\circ$.

Suy ra số đo cung tròn của phần Việt quất là $360 - \widehat{BC} = 360^\circ - 144^\circ = 216^\circ$.



□

Bài 23. Cho hai đường tròn $(O), (I)$ cắt nhau tại hai điểm A, B . Kẻ các đoạn thẳng AC, AD lần lượt là các đường kính của hai đường tròn $(O), (I)$. Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.

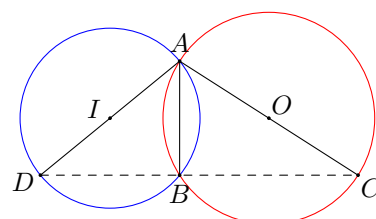
Hướng dẫn giải.

Ta có $\widehat{ABD}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường (I) nên $\widehat{ABD} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{ABC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường (O) nên $\widehat{ABC} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ hay $\widehat{DBC} = 180^\circ$.

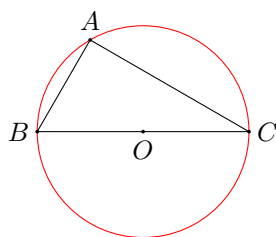
Vậy ba điểm B, D, C thẳng hàng.



□

Bài 24. Hãy sử dụng compa và thước thẳng để vẽ tam giác ABC vuông tại A và giải thích kết quả.

Hướng dẫn giải.



- Dùng compa vẽ đường tròn (O) , trên đường tròn lấy điểm A bất kì (khác B và C).

- Dùng thước thẳng vẽ các đoạn thẳng AB, BC, CA ta được tam giác ABC vuông.

- Giải thích: Ta có góc BAC là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Vậy tam giác ABC vuông tại A .

□

Chủ đề 5. ĐỘ DÀI CUNG TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHUYÊN

A ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Tỉ số giữa chu vi C của mỗi đường tròn và đường kính d của đường tròn đó là một hằng số, kí hiệu là π . Số π là số vô tỉ, cụ thể $\pi = 3,1415\dots$

Chu vi đường tròn đường kính d là $C = \pi d$.

Chu vi đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$.

Ví dụ 1. Một chất điểm chuyển động trên một đường tròn có bán kính $r = 0,3$ m với tốc độ không đổi. Chất điểm chuyển động hết một vòng quanh đường tròn đó trong 20 s. Tính tốc độ của chất điểm (theo đơn vị mét trên giây và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải.

Chu vi của đường tròn là $C = 2\pi \cdot 0,3 = 0,6\pi$ (m).

Vậy tốc độ của chất điểm là $v = \frac{0,6\pi}{20} \approx 0,09$ (m/s).

□

LUYỆN TẬP 1

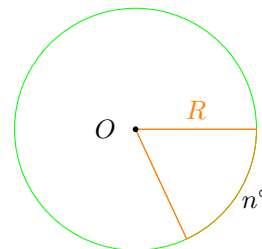
Tính chu vi của đường tròn bán kính 5 cm (theo đơn vị centimét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải.

Chu vi của đường tròn $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 5 \approx 31,4$ (cm).

□

Định lý 5.1. Trong một đường tròn bán kính R , độ dài của cung tròn có số đo n° là $l = \frac{\pi R n}{180}$.



Hình 68

Ví dụ 2. Cung có số đo 100° của đường tròn bán kính 8 cm dài bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

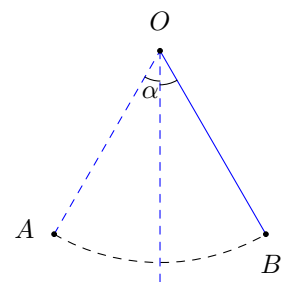
Hướng dẫn giải.

Độ dài cung tròn đó là $\frac{100 \cdot \pi \cdot 8}{180} = \frac{40\pi}{9} \approx 14$ (cm).

□

LUYỆN TẬP 2

Một con lắc di chuyển từ vị trí A đến vị trí B (Hình 69). Tính độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển, biết rằng sợi dây OA có độ dài bằng l và tia OA tạo với phương thẳng đứng góc α .



Hình 69

Hướng dẫn giải.

Góc được tạo thành khi con lắc di chuyển từ vị trí A đến vị trí B là 2α .

Khi đó độ dài quãng đường con lắc đi được là $AB = \frac{\pi R \cdot 2\alpha}{180} = \frac{\pi R \cdot \alpha}{90}$ (đvdd). $\square$

B) DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN

Chú ý

- Hình tròn tâm O bán kính R bao gồm đường tròn $(O; R)$ và tất cả các điểm nằm trong đường tròn đó.
- Diện tích của hình tròn bán kính R là $S = \pi R^2$.

Ví dụ 3.

Bề mặt phía trên của một chiếc trống có dạng hình tròn bán kính 8 cm (Hình 70). Diện tích bề mặt phía trên của trống đó bằng bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

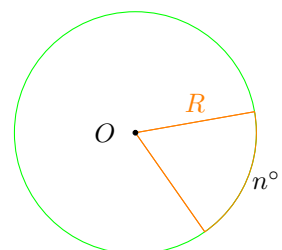


Hướng dẫn giải.

Diện tích bề mặt phía trên của chiếc trống đó là $S = \pi \cdot 8^2 = 64\pi \approx 201$ (cm²). $\square$

Định lý 5.2. Hình quạt tròn (hay còn gọi tắt là hình quạt) là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

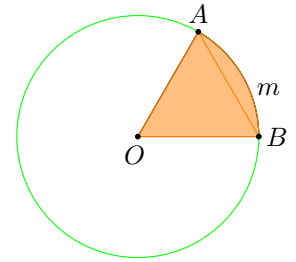
Trong Hình 72, ta có hình quạt tròn AOB , tâm O , bán kính R , cung ứng với hình quạt có số đo n° (số đo n° được hiểu là số đo cung AB giới hạn hình quạt tròn đó).



Hình 72

○ Ví dụ 4.

Cho hình quạt tròn AOB giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung AmB sao cho $OA = AB$ (Hình 73). Hãy tìm số đo cung AmB ứng với hình quạt đó.



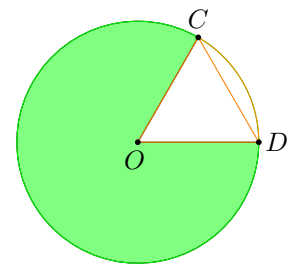
Hình 73

➤ Hướng dẫn giải.

Do $OA = AB$ nên tam giác AOB là tam giác đều, suy ra $\widehat{AOB} = 60^\circ$.
Vì góc AOB là góc ở tâm chắn cung AmB nên $sđ\widehat{AOB} = 60^\circ$. □

LUYỆN TẬP 3

Cho hình quạt tròn COD giới hạn bởi hai bán kính OC, OD và cung CnD sao cho $OC = CD$ (Hình 74). Hãy tìm số đo cung CmD ứng với hình quạt đó.



Hình 74

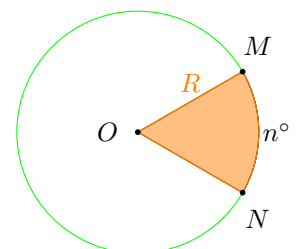
➤ Hướng dẫn giải.

Do $OC = CD$ nên tam giác COD là tam giác đều, suy ra $\widehat{COD} = 60^\circ$.
Vì góc COD là góc ở tâm chắn cung CnD nên $sđ\widehat{COD} = 60^\circ$.
Do đó $sđ\widehat{CmD} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$. □

○ Định lý 5.3. Diện tích hình quạt tròn bán kính R cung có số đo n° là $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$.

↔ Nhận xét 5.1. Gọi l là độ dài của cung tròn có số đo n° thì diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung có số đo n° là

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180} \cdot \frac{R}{2} = \frac{lR}{2}.$$



Hình 75

○ Ví dụ 5.

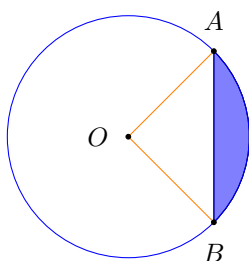
Một hoạ tiết trang trí có dạng hình tròn bán kính 4 dm được chia thành nhiều hình quạt tròn (Hình 76), mỗi hình quạt tròn có góc ở tâm là $7,5^\circ$. Diện tích của mỗi hình quạt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hướng dẫn giải.

Diện tích của mỗi hình quạt là $\frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 7,5}{360} \approx 1,05 \text{ (dm}^2\text{)}$. □

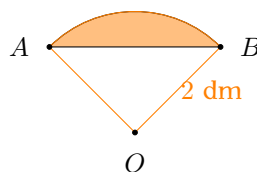
❶ Ví dụ 6. Hình viên phân là hình giới hạn bởi một cung tròn và dây cung (tương ứng của đường tròn (mình hoạ bởi phần màu xanh ở Hình 77)). Người ta làm một hoạ tiết trang trí bằng cách ghép hai hình viên phân bằng nhau (Hình 78), mỗi hình viên phân đó có góc ở tâm tương ứng là 90° và bán kính đường tròn tương ứng là 2 dm (Hình 79). Tính diện tích của hoạ tiết trang trí đó (theo đơn vị decimét vuông và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 77



Hình 78



Hình 79

Hướng dẫn giải.

Trong Hình 79, ta có

❶ Diện tích tam giác OAB là $S_1 = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ (dm}^2\text{)}$;

❷ Do $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên diện tích hình quạt tròn AOB tương ứng là $S_2 = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90}{360} = \pi \text{ (dm}^2\text{)}$.

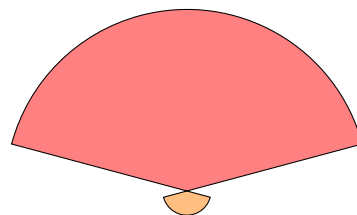
Suy ra diện tích hình viên phân là $S_3 = S_2 - S_1 = \pi - 2 \text{ (dm}^2\text{)}$.

Vậy diện tích của hoạ tiết trang trí đó là $S = 2S_3 = 2(\pi - 2) \approx 2,28 \text{ (dm}^2\text{)}$. □

LUYỆN TẬP 4

Hình quạt tô màu đỏ ở Hình 65 có bán kính bằng 2 dm và góc ở tâm bằng 150° .

- Tính diện tích của hình quạt đó theo đơn vị decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Tính chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó.



Hình 65

Hướng dẫn giải.

a) Diện tích của hình quạt là $\frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 150}{360} \approx 5,24 \text{ (dm}^2\text{)}.$

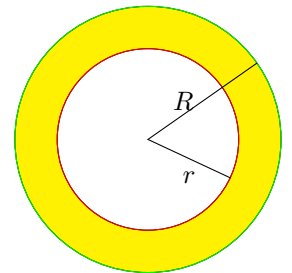
b) Ta có $S = \frac{lR}{2}$ nên chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn là
 $l = \frac{2S}{R} = \frac{2 \cdot 5,24}{2} \approx 5,24 \text{ (dm)}.$

□

C DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHUYÊN

Định lý 5.4. Hình giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm được gọi là hình vành khuyên.

Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; R)$ và $(O; r)$ (với $R > r$) có diện tích là $S = \pi(R^2 - r^2)$

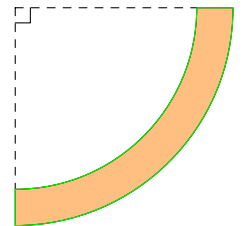


Hình 81

Trong Hình 81, diện tích của hình vành khuyên tô màu vàng là $S = \pi(R^2 - r^2)$.

Ví dụ 7.

Hình 82 mô tả mặt cắt của một khúc gỗ có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 4 dm và 3 dm. Diện tích mặt cắt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 82

Hướng dẫn giải.

Diện tích của mặt cắt là $\frac{1}{4}\pi(4^2 - 3^2) = \frac{7\pi}{4} \approx 5,5 \text{ (dm}^2\text{)}.$

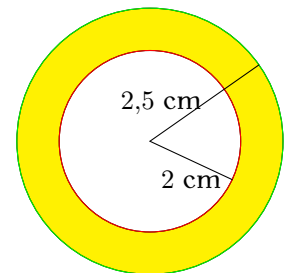
□

LUYỆN TẬP 5

Tính diện tích của hình vành khuyên, biết hình vành khuyên đó giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 2,5 cm; 2 cm.

Hướng dẫn giải.

Diện tích của hình vành khuyên là $\frac{1}{4}\pi(2,5^2 - 2^2) = \frac{9\pi}{16} \approx 1,77 \text{ (cm}^2\text{)}.$

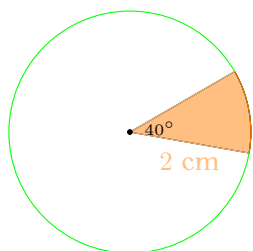


Hình 81

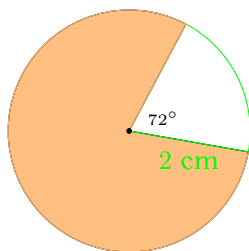
□

D BÀI TẬP

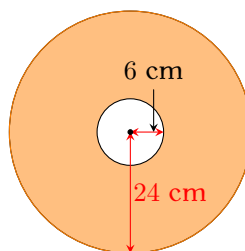
Bài 25. Quan sát các hình 83, 84, 85, 86.



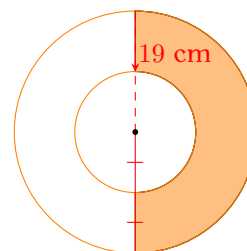
Hình 83



Hình 84



Hình 85



Hình 86

- Tính diện tích phần được tô màu trong mỗi hình đó.
- Tính độ dài cung tròn được tô màu xanh ở mỗi hình 83, 84.

Hướng dẫn giải.

- a) Xét hình 83.

$$S = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 40}{360} = \frac{4}{9}\pi \approx 1,4 \text{ cm}^2.$$

- Xét hình 84.

$$S = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 72}{360} = \frac{4}{5}\pi \approx 2,5 \text{ cm}^2.$$

- Xét hình 85.

$$S = \frac{1}{4}\pi (24^2 - 6^2) = 135 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

- Xét hình 86.

$$S = \frac{\frac{1}{4}\pi (38^2 - 19^2)}{2} = \frac{1083}{3} \approx 361 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

- b) Xét hình 83.

$$S = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 320}{360} = \frac{32}{9}\pi \approx 11,2 \text{ cm}^2.$$

- Xét hình 84.

$$S = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 288}{360} = \frac{16}{5}\pi \approx 10,1 \text{ cm}^2.$$

□

Bài 26.

Hình 87 mô tả mặt cắt của một chiếc đèn led có dạng hai hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là 15 cm, 18 cm, 21 cm, 24 cm. Tính diện tích hai hình vành khuyên đó.



(Ảnh: Nekrasov Eugene)

Hình 87

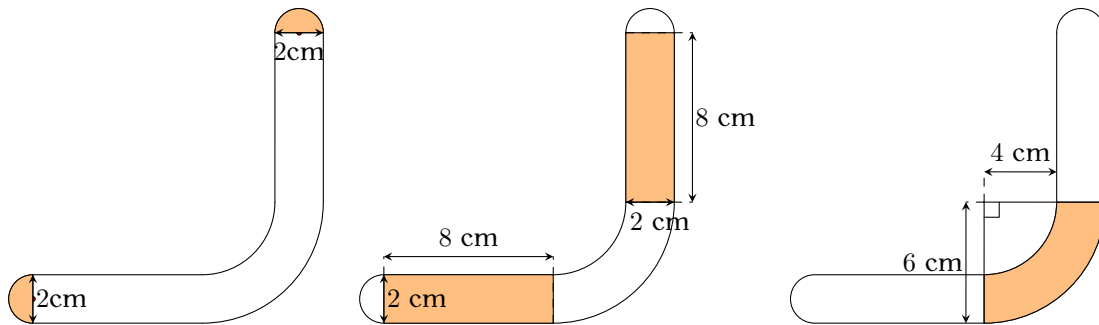
Hướng dẫn giải.

$$S_1 = \frac{1}{4}\pi (18^2 - 15^2) = \frac{99\pi}{4} \approx 77,8 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\pi (24^2 - 21^2) = \frac{135\pi}{4} \approx 106 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

□

Bài 27. Hình 88 mô tả mặt cắt của một khung gỗ có dạng ghép của năm hình: hai nửa đường tròn đường kính 2 cm; hai hình chữ nhật kích thước 2 cm × 8 cm; một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 dm và 6 dm. Tính diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó.



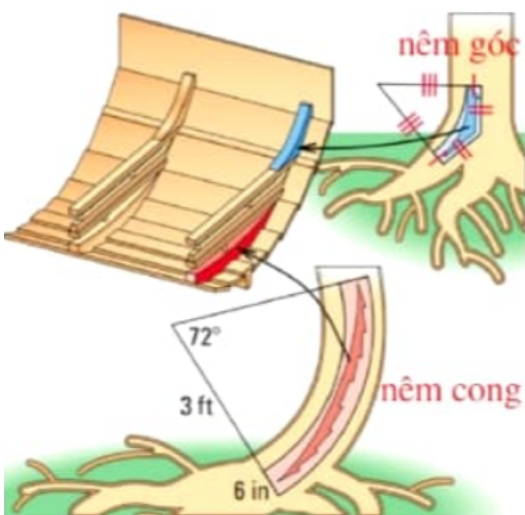
Hình 88

Hướng dẫn giải.

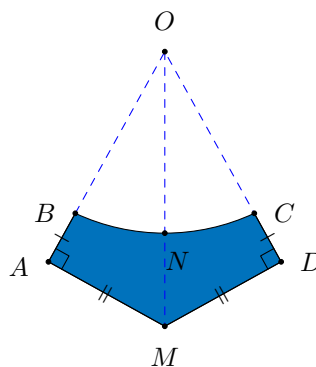
$$\text{Diện tích mặt cắt } S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 8 + \frac{1}{4}\pi(6^2 - 4^2) \approx 50,85 \text{ cm}^2.$$

□

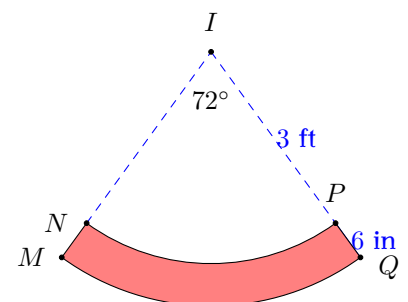
Bài 28. Khi đóng đáy thuyền cho những con thuyền vượt biển, người Vikings sử dụng hai loại nệm nệm góc và nệm cong (lần lượt tô màu xanh, màu đỏ trong hình 89). Mặt cắt $ABCD$ của nệm góc có dạng hai tam giác vuông OAE , ODE bằng nhau với cạnh huyền chung và bỏ đi hình quạt tròn OBC (Hình 90), được làm từ những thân cây mọc thẳng. Mặt cắt $MNPQ$ của nệm cong có dạng một phần của hình vành khuyên (Hình 91), được làm từ những thân cây cong. Kích thước của nệm cong được cho như ở Hình 91.



Hình 89



Hình 90



Hình 91

- Diện tích của nệm cong là bao nhiêu centimet vuông (lấy 1ft = 30 cm, 1in = 2,54 cm, $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?
- Cần phải biết những kích thước nào của nệm góc để tính được diện tích của nệm đó?

 Hướng dẫn giải.

a) Diện tích của nôm cong là

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 2,54 \approx 2,4 \text{ cm}^2.$$

b) Cần phải biết OA , OB và OM thì tính được diện tích của nôm.

$$\text{Khi đó } S_{(\text{nôm})} = 2(S_{\triangle OAM} - S_{\text{quạt}BON}).$$



 Bài 29. **Hướng dẫn giải.**



 Bài 30. **Hướng dẫn giải.**

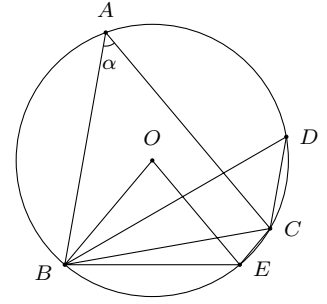


Chủ đề 6. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

❖ Câu 1.

Trong Hình 92, cho các điểm A, B, C, D, E thuộc đường tròn (O) . Số đo góc BOC là

- (A) α . (B) 2α . (C) $180^\circ - \alpha$. (D) $180^\circ - 2\alpha$.



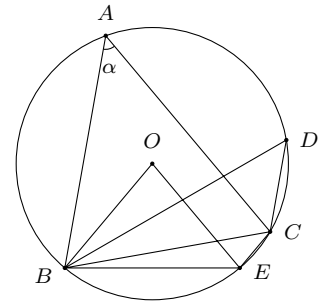
📖 Hướng dẫn giải.

Vì BOC là góc ở tâm chắn cung $\widehat{BC}$ nên $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\alpha$.
Chọn đáp án (B) □

❖ Câu 2.

Trong hình bên, cho các điểm A, B, C, D, E thuộc đường tròn (O) . Số đo góc BDC là

- (A) α . (B) $\frac{\alpha}{2}$. (C) $180^\circ - \alpha$. (D) $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$.



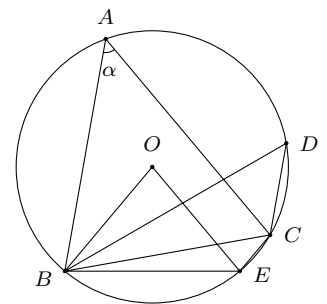
📖 Hướng dẫn giải.

Vì BDC là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{BC}$ nên $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = \alpha$.
Chọn đáp án (A) □

❖ Câu 3.

Trong hình bên, cho các điểm A, B, C, D, E thuộc đường tròn (O) . Số đo góc BEC là

- (A) α . (B) 2α . (C) $180^\circ - \alpha$. (D) $360^\circ - \alpha$.



📖 Hướng dẫn giải.

Vì BEC là góc nội tiếp chắn cung lớn $\widehat{BC}$ nên $\widehat{BEC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - \alpha$.
Chọn đáp án (C) □

❖ Câu 4. Độ dài cung tròn có số đo 30° của đường tròn bán kính R là

- (A) $\frac{\pi R}{180}$. (B) $\frac{\pi R}{360}$. (C) $30\pi R$. (D) $\frac{\pi R}{6}$.

📖 Hướng dẫn giải.

Độ dài cung tròn là $30 \cdot \frac{\pi}{180} R = \frac{\pi R}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

❖ Câu 5. Diện tích của hình quạt tròn tâm O , bán kính R , cung có số đo 45° là

- (A) $\frac{\pi R^2}{45}$. (B) $\frac{\pi R^2}{4}$. (C) $\frac{\pi R^2}{8}$. (D) $\frac{\pi R^2}{16}$.

Hướng dẫn giải.

Diện tích hình quạt tròn là $S = \frac{\pi R^2 \cdot 45}{360} = \frac{\pi R^2}{8}$.

Chọn đáp án **C**

□

Bài 31. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh r và đường tròn $(C; r)$. Giả sử M là một điểm nằm trên đường tròn $(C; r)$ sao cho điểm M nằm trong hình vuông $ABCD$. Tiếp tuyến của đường tròn $(C; r)$ tại tiếp điểm M cắt các đoạn thẳng AB, AD lần lượt tại N, P . Chứng minh:

a) Các đường thẳng NB, PD là các tiếp tuyến của đường tròn $(C; r)$;

b) $\widehat{NCP} = \widehat{NCB} + \widehat{PCD} = 45^\circ$.

Hướng dẫn giải.

a) Vì $ABCD$ là hình vuông nên $NB \perp CB$, do đó NB là tiếp tuyến của $(C; r)$.

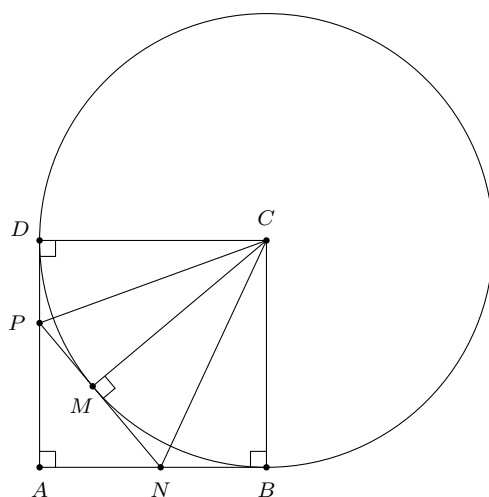
Tương tự PD là tiếp tuyến của $(C; r)$.

b) Ta có $\widehat{MCN} = \widehat{NCB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Tương tự, $\widehat{PCM} = \widehat{PCD}$.

Do đó $\widehat{NCP} = \widehat{NCM} + \widehat{MCP} = \widehat{NCB} + \widehat{PCD}$.

Ta lại có $\widehat{BCN} + \widehat{NCM} + \widehat{MCP} + \widehat{PCD} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{NCP} = 45^\circ$.



□

Bài 32. Chứng minh trong một đường tròn:

a) Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy;

b) Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy;

c) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm;

d) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Hướng dẫn giải.

a) Giả sử đường kính MN vuông góc với dây AB tại I .

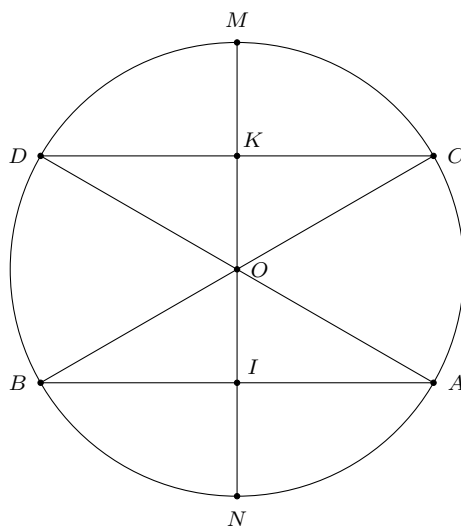
Khi đó $\triangle OIA = \triangle OIB$ (c-g-c). Suy ra $IA = IB$ hay I là trung điểm của AB .

b) Giả sử đường kính MN đi qua trung điểm I của dây không đi qua tâm O .

Khi đó $\triangle OIA = \triangle OIB$ (c-c-c). Suy ra $\widehat{OIA} = \widehat{OIB} = 90^\circ$ hay $OI \perp AB$.

c) Cho hai dây $AB = CD$. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của O trên AB, CD .

Khi đó ta có $IA = IB = KC = KD$. Sử dụng tam giác bằng nhau suy ra $OI = OK$ hay hai dây cách đều tâm.



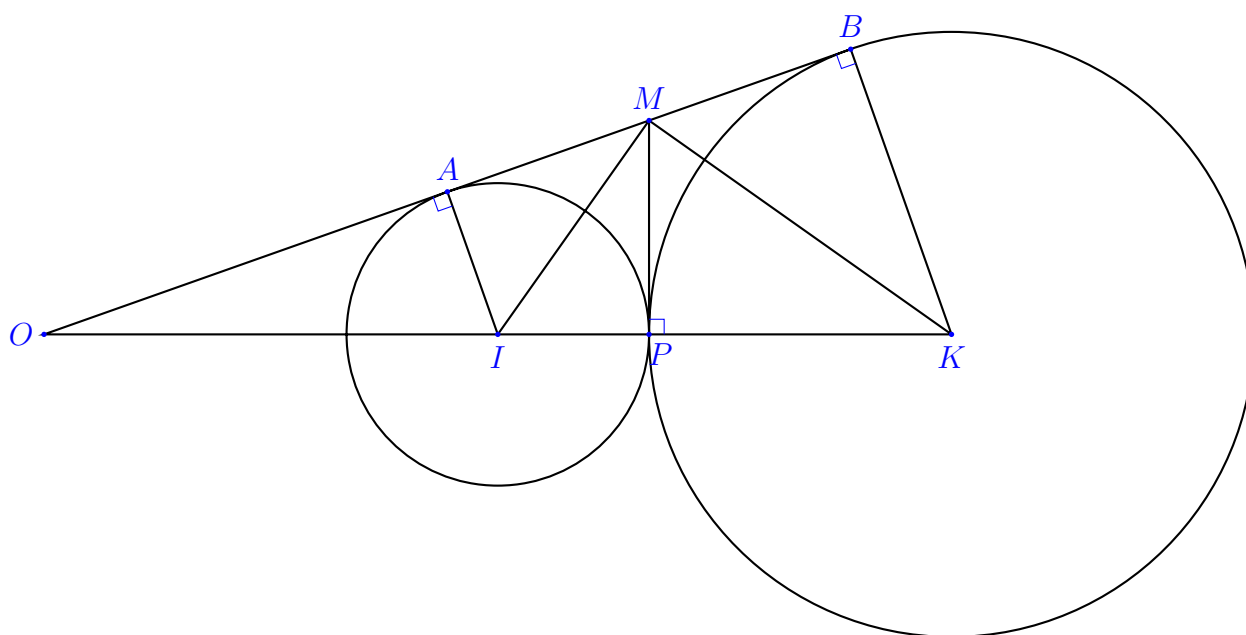
- d) Cho hai dây AB, CD có I, K lần lượt là hình chiếu của O trên AB, CD và $OI = OK$. Sử dụng tam giác bằng nhau ta có $IA = IB = KC = KD$ hay $AB = CD$.

□

Bài 33. Cho hai đường tròn $(I; r)$ và $(K; R)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại P với $R \neq r$, đường thẳng a lần lượt tiếp xúc với $(I; r)$ và $(K; R)$ tại A và B , a cắt KI tại O . Đường thẳng qua P vuông góc với IK cắt đường thẳng a tại M . Chứng minh:

- a) $\frac{OI}{OK} = \frac{r}{R}$; b) $AB = 2MP$; c) $\widehat{IMK} = 90^\circ$.

Hướng dẫn giải.



- a) Vì IA là tiếp tuyến của $(I; r)$ nên $IA \perp OA$.

Tương tự $KB \perp OB$.

Do đó $\triangle OAI \sim \triangle OBK$ (g-g).

Suy ra $\frac{OI}{OK} = \frac{IA}{IB} = \frac{r}{R}$.

- b) Ta có $MA = MP$ (hai tiếp tuyến cắt nhau) và $MB = MP$ (hai tiếp tuyến cắt nhau). Suy ra

$$AB = MA + MB = 2MP.$$

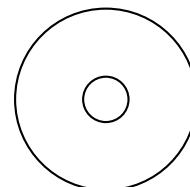
- c) Ta có $\triangle AMI = \triangle PMI$ nên $\widehat{AMI} = \widehat{PMI}$. Tương tự $\widehat{BMK} = \widehat{PMK}$.

Khi đó $\widehat{IMK} = \widehat{IMP} + \widehat{PMK} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = 90^\circ$.

□

Bài 34.

Mặt đĩa CD ở hình bên có dạng hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là 1,5cm và 6cm. Hình vành khuyên đó có diện tích bằng bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hướng dẫn giải.

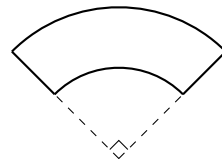
Diện tích đường tròn to là $S_1 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$ (cm²).

Diện tích đường tròn nhỏ là $S_2 = \pi \cdot 1,5^2 = 2,25\pi$ (cm²).

Diện tích hình vành khuyên là $S_1 - S_2 = (36 - 2,25)\pi = 33,75 \cdot 3,14 \approx 106$ (cm²). □

✍ Bài 35.

Hình bên mô tả mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có các bán kính lần lượt là 3dm và 5dm. Diện tích của mảnh vải đó bằng bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



👉 Hướng dẫn giải.

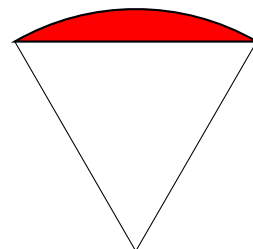
Diện tích hình quạt to là $S_1 = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 90}{360} = 6,25\pi$ (dm²).

Diện tích hình quạt nhỏ là $S_2 = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 90}{360} = 2,25\pi$ (dm²).

Diện tích mảnh vải là $S_1 - S_2 = (6,25 - 2,25)\pi = 4 \cdot 3,14 = 12,6$ (dm²). □

✍ Bài 36.

Logo ở hình bên có dạng một hình quạt tròn bán kính 8cm và góc ở tâm bằng 60°. Tính diện tích mỗi hình sau (theo đơn vị centimet vuông và làm tròn kết quả đến hàng phần mười):



- Toàn bộ logo;
- Phần logo màu đỏ có dạng hình viên phân.

👉 Hướng dẫn giải.

a) Diện tích toàn bộ logo là $S_1 = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 60}{360} = 10,67 \cdot 3,14 = 33,5$ (cm²).

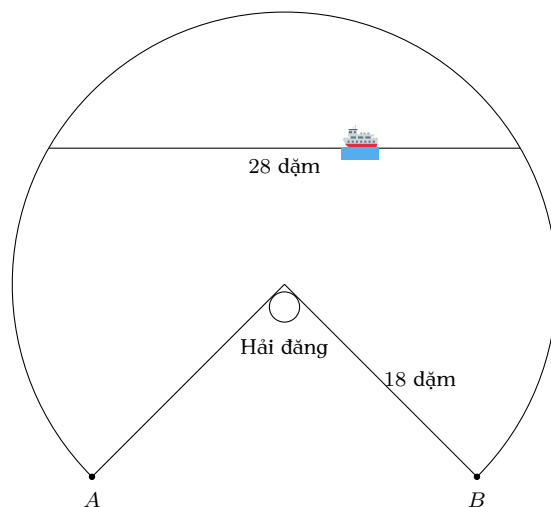
b) Diện tích tam giác là $S_2 = \frac{8^2 \sqrt{3}}{4} = 27,7$ (cm²).

Suy ra diện tích phần logo màu đỏ là $S_1 - S_2 = 5,8$ (cm²). □

✍ Bài 37.

Hình bên biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán kính 18 dặm, cung AmB có số đo 245°.

- Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1 600m, $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



👉 Hướng dẫn giải.

Đổi 18 dặm = 28,8 km; 28 dặm = 44,8 km.

a) Diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng là

$$\frac{\pi \cdot 28,8^2 \cdot 245}{360} = 1\,722,5 \text{ (km}^2\text{)}.$$

b) Khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến ngọn hải đăng là khoảng cách từ tâm đến dây cung và bằng $\sqrt{18^2 - \left(\frac{28}{2}\right)^2} = \sqrt{128} = 11,3$ (dặm).

□

Chương 6.



MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chủ đề 1. MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG, BIỂU ĐỒ

A BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BẢNG THỐNG KÊ, BIỂU ĐỒ TRANH

Cách biểu diễn

Để biểu diễn dữ liệu trên bảng thống kê, ta có thể làm như sau

Bước 1. Các đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở cột đầu tiên, trong khi các tiêu chí thống kê lần lượt được biểu diễn ở dòng đầu tiên hoặc ngược lại.

Bước 2. Các số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê lần lượt được biểu diễn ở dòng (hoặc cột) tương ứng.

❶ Ví dụ 1. Trị giá xuất khẩu hải sản (đơn vị: nghìn đô-la Mỹ) của Việt Nam sang cộng đồng các nước châu Âu (EU) trong các tháng 9, 10, 11, 12 của năm 2022 lần lượt như sau 90 154, 89 412, 72 134, 81 904. (Nguồn: <http://www.gso.gov.vn>).

Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

➡ Hướng dẫn giải.

Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó như sau

Tháng	9	10	11	12
Trị giá xuất khẩu hải sản (đơn vị: nghìn đô la Mỹ)	90 154	89 412	72 134	81 904

Bảng 2

□

❶ Ví dụ 2. Bảng 3 thống kê khối lượng thanh long bán được trong các tháng 6, 7, 8, 9 năm 2022 của một hệ thống siêu thị.

Tháng	6	7	8	9
Khối lượng thanh long bán được (đơn vị: tạ)	10	30	40	25

Bảng 3

Vẽ biểu đồ tranh biểu diễn các số liệu đó.

➡ Hướng dẫn giải.

Biểu đồ tranh biểu diễn các số liệu ở Bảng 3 được cho trong hình bên

Tháng 6	
Tháng 7	
Tháng 8	
Tháng 9	
 : 10 tạ  : 5 tạ	

B BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BIỂU ĐỒ CỘT, BIỂU ĐỒ CỘT GHEP

Cách biểu diễn

Để biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ cột, ta có thể làm như sau

Bước 1. Vẽ hai trục vuông góc với nhau

-  Trên trục nằm ngang biểu diễn các đối tượng thống kê.
-  Trên trục thẳng đứng xác định độ dài đơn vị để biểu diễn số liệu thống kê và cần chọn độ dài đơn vị thích hợp với số liệu.

Bước 2. Tại vị trí các đối tượng thống kê trên trục nằm ngang, vẽ các cột hình chữ nhật; cách đều nhau; có cùng chiều rộng; có chiều cao thể hiện số liệu thống kê theo tiêu chí của mỗi đối tượng thống kê.

Bước 3. Hoàn thiện biểu đồ: ghi tên các trục và ghi số liệu tương ứng trên mỗi cột (nếu cần).

Ví dụ 3. Dựa theo báo cáo của Tổ chức Y tế Thế giới, bạn An thống kê tuổi thọ trung bình của người dân ở In-đô-nê-xi-a, My-an-mar, Thái Lan, Việt Nam lần lượt là 71,3 năm; 69,1 năm; 932,4 tháng; 75,4 năm.

- a) Nếu vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó thì số liệu nào được viết chưa hợp lí?
- b) Viết lại dãy số liệu thống kê đó rồi lập bảng thống kê và vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó.

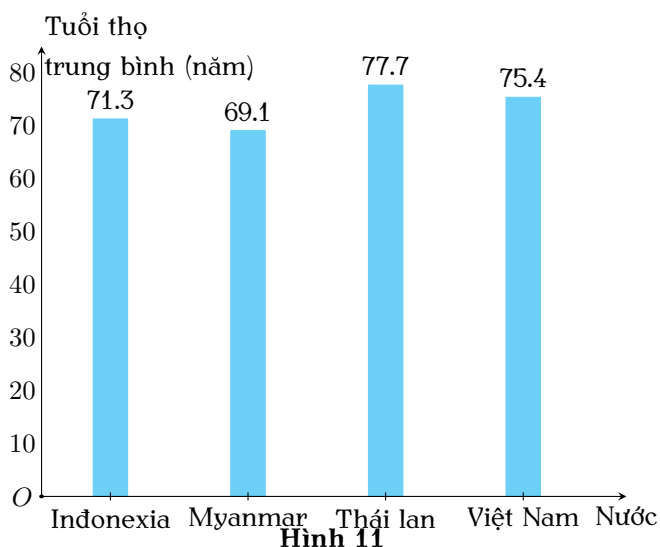
Hướng dẫn giải.

- a) Để vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu, các số liệu đó cần được tính theo cùng một đơn vị. Nếu các số liệu đó được tính theo đơn vị năm thì số liệu 932,4 tháng được viết chưa hợp lí.
- b) Tuổi thọ trung bình (đơn vị: năm) của người dân ở In-đô-nê-xi-a, My-an-mar, Thái Lan, Việt Nam lần lượt là 71,3; 69,1; 77,7; 75,4.

Nước	Indonesia	Myanma	Thái Lan	Việt Nam
Tuổi thọ trung bình (đơn vị: năm)	71,3	69,1	77,7	75,4

Bảng 4

Biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó như sau (Hình 3)



Hình 11

□

Ví dụ 4. Ở Việt Nam, tuổi thọ trung bình (đơn vị: năm) của nam và nữ trong các năm 2017, 2017, 2018, 2019, 2020 lần lượt là 70,9 và 76,6; 70,9 và 76,2; 71 và 76,3; 71 và 76,4. (Nguồn: Tổng cục thống kê)

- Lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.
- Vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó.

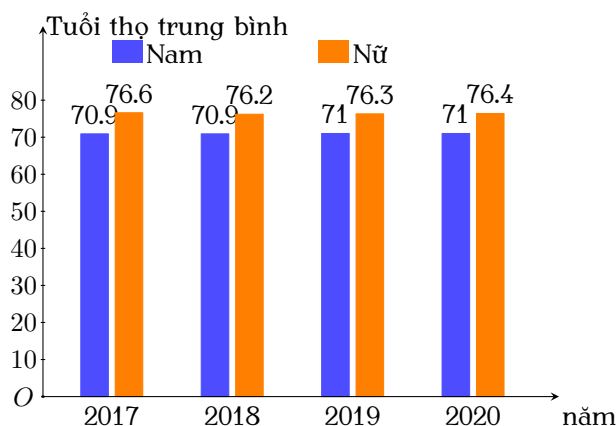
Hướng dẫn giải.

- Bảng thống kê biểu diễn các số liệu như sau (Bảng 5)

Tuổi thọ trung bình \ Năm	2017	2018	2019	2020
Tuổi thọ trung bình (đơn vị: năm) của nam	70,9	70,9	71	71
Tuổi thọ trung bình (đơn vị: năm) của nữ	76,6	76,2	76,3	76,4

Bảng 5

- Biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó như sau (Hình 5)



Hình 5



© BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

Cách biểu diễn

Để biểu diễn dữ liệu trên biểu đồ đoạn thẳng, ta có thể làm như sau

Bước 1. Vẽ hai trục vuông góc với nhau tại O

-  Trên trục nằm ngang: mỗi đối tượng thống kê được đánh dấu bằng một điểm và các điểm này thường được vẽ cách đều nhau.
-  Trên trục thẳng đứng xác định độ dài đơn vị để biểu diễn số liệu thống kê và cần chọn độ dài đơn vị thích hợp với số liệu, đánh dấu điểm theo tiêu chí của đối tượng thống kê tương ứng.

Bước 2. Với mỗi đối tượng thống kê, ta tiếp tục:

-  Xác định điểm A đánh dấu số liệu thống kê trên trục thẳng đứng của đối tượng thống kê đó.
-  Kẻ bằng nét đứt một đoạn thẳng có độ dài bằng OA , vuông góc với trục nằm ngang và đi qua điểm đánh dấu đối tượng thống kê đó trên trục nằm ngang. Đầu mút trên của đoạn thẳng đó là mốc của đối tượng thống kê.

Bước 3. Vẽ đường gấp khúc gồm các đoạn thẳng nối liên tiếp các mốc.

Bước 4. Hoàn thiện biểu đồ: ghi tên các trục và ghi số liệu tương ứng trên mỗi điểm mốc (nếu cần).

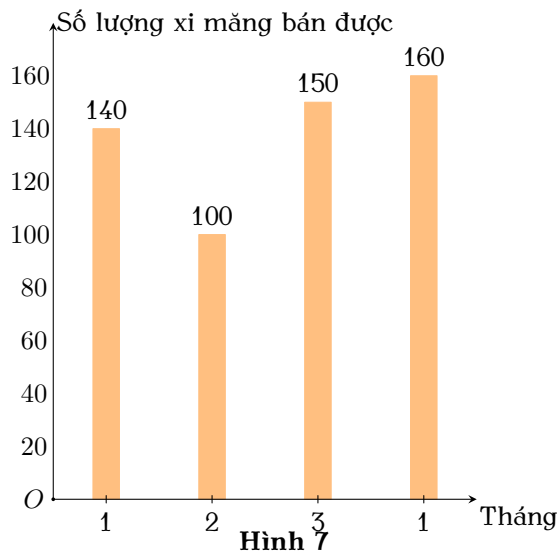
❶ Ví dụ 5. Bảng 6 thống kê số lượng xi măng bán được (đơn vị: tấn) của một cửa hàng kinh doanh vật liệu xây dựng trong bốn tháng đầu năm

Tháng	1	2	3	4
Số lượng xi măng bán được (đơn vị: tấn)	140	100	150	160

- a) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.
- b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.
- c) Một người đưa ra nhận định: Số xi măng bán được trong tháng 4 nhiều hơn 30% số xi măng bán được trong cả bốn tháng. Hỏi nhận định của người đó là đúng hay sai?

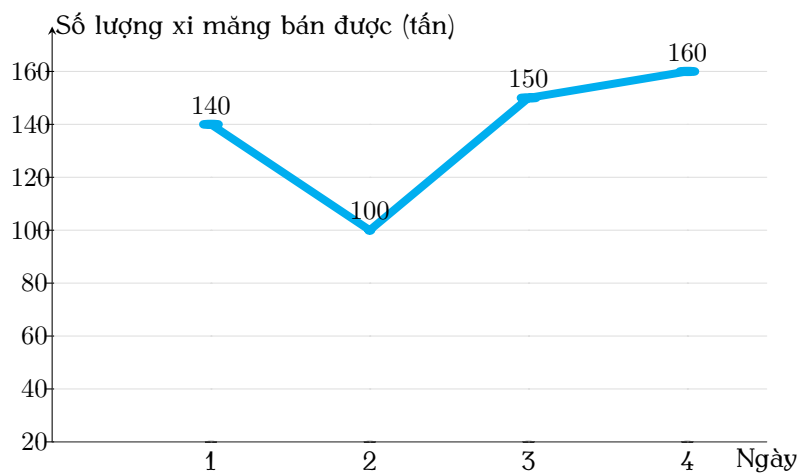
Hướng dẫn giải.

- a) Biểu đồ cột ở Hình 7 biểu diễn các dữ liệu thống kê ở Bảng 6



Hình 7

b) Biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 8 biểu diễn các dữ liệu thống kê ở Bảng 6.



Hình 8

c) Tỷ lệ phần trăm của số xi măng bán được trong tháng 4 và số xi măng bán được trong cả bốn tháng là $\frac{160 \cdot 100}{550} \% \approx 29,1\% < 30\%$.

Do đó số xi măng bán được trong tháng 4 ít hơn 30% số xi măng bán được trong cả bốn tháng.

Vậy nhận định của người đó là sai.

□

❖ **Nhận xét 1.1.** Để biểu diễn sự thay đổi số liệu của các đối tượng thống kê theo thời gian, ta thường dùng biểu đồ đoạn thẳng.

D BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN**Cách biểu diễn**

Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các số liệu thống kê tính theo tỉ lệ phần trăm, ta có thể làm như sau

Bước 1. Vẽ đường tròn tâm O bán kính R .

Bước 2. Chuyển đổi số liệu của một đối tượng thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) về số đo cung tương ứng với đối tượng thống kê đó (tính theo độ) dựa trên nguyên tắc sau: $x\%$ tương ứng với $x\% \cdot 360^\circ$.

Các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê được cho ở bảng sau

Đối tượng thống kê	1	2	...	k
Số đo cung tương ứng (đơn vị: độ)	n_1	n_2	...	n_k

Bảng 7

Chú ý

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = 360^\circ.$$

Bước 3.  Vẽ tia gốc OA theo phương thẳng đứng.

 Căn cứ vào Bảng 7, sử dụng thước thẳng và thước đo độ, vẽ theo chiều quay của kim đồng hồ các cung AA_1 , AA_2 , ..., $A_{k-2}A_{k-1}$ lần lượt có số đo là n_1 , n_2 , ..., n_{k-1} . Khi đó cung $A_{k-1}A_k$ có số đo là

$$360^\circ - (n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}) = n_k.$$

Bước 4. Hoàn thiện biểu đồ: ghi tên đối tượng thống kê vào hình quạt tương ứng; ghi số liệu tương ứng trên mỗi hình quạt; các hình quạt được tô màu khác nhau (nếu cần) và xóa đi những thông tin không cần thiết trong biểu đồ

Chú ý

Bán kính R của đường tròn $(O; R)$ được vẽ ở Bước 1 nên chọn phù hợp với tính thẩm mỹ của biểu đồ.

Ví dụ 6. Bảng 8 cho biết tỉ lệ mỗi loại quả bán được của một cửa hàng

Loại quả	Lê	Táo	Nhãn	Nho
Tỉ lệ bán được (đơn vị: %)	20	30	40	10

Bảng 8

Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng số liệu thống kê trên.

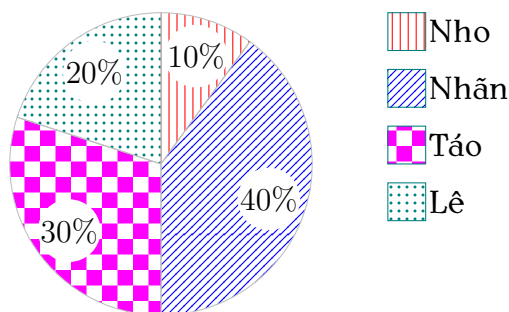
Hướng dẫn giải.

Từ các số liệu thống kê tính theo tỉ lệ phần trăm ở Bảng 8, ta có các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê ở bảng sau

Loại quả	Lê	Táo	Nhãn	Nho
Số đo (đơn vị: độ)	72	108	144	36

Bảng 9

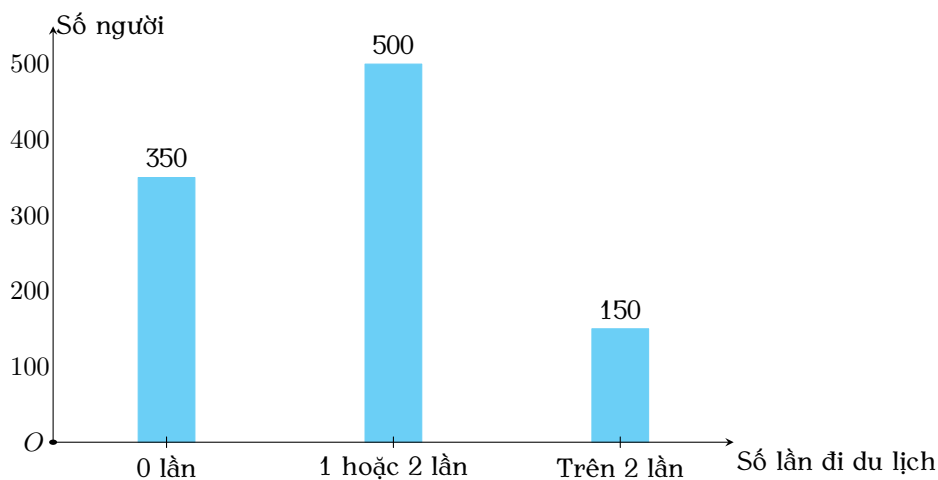
Căn cứ vào dữ liệu Bảng 9, biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các số liệu thống kê được cho ở Hình 10.



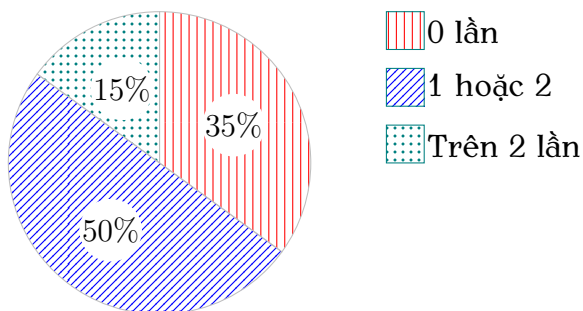
Hình 10

□

Ví dụ 7. Biểu đồ hình cột ở Hình 11 biểu diễn kết quả phỏng vấn 1 000 người về số lần đi du lịch trong một năm



Hình 11



Hình 12

Căn cứ vào dữ liệu Bảng 9, biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các số liệu thống kê được cho ở Hình 10.

- a) Bạn Ngân đã vẽ biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 12 để biểu diễn những dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở Hình 11. Hãy giải thích vì sao những số liệu mà bạn Ngân nêu ra mang biểu đồ hình quạt tròn đó là chưa chính xác.
- b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn những dữ liệu thống kê trong biểu đồ cột ở Hình 11.

Hướng dẫn giải.

- a) Trong biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 12, ta có

$$35\% + 50\% + 10\% = 95\% < 100\%.$$

Vì vậy, những số liệu mà bạn Ngân nêu ra trong biểu đồ đó là chưa chính xác.

- b) Từ biểu đồ cột ở Hình 11, ta có bảng thống kê kết quả phỏng vấn 1 000 người về số lần đi du lịch trong một năm như sau

Số lần đi du lịch	0	1 – 2	Trên 2
Số người	350	500	150

Bảng 10

Chuyển đổi số liệu thống kê ở Bảng 10 về số liệu thống kê theo tỉ lệ phần trăm, ta có Bảng 11 như sau

Số lần đi du lịch	0	1 – 2	Trên 2
Tỉ lệ (đơn vị: %)	35	50	15

Bảng 11

Từ các số liệu thống kê tính theo tỉ lệ phần trăm ở Bảng 11, ta có các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê ở bảng sau

Số lần đi du lịch	0	1 – 2	Trên 2
Số đo (đơn vị: độ)	126	180	54

Bảng 12

Cứn cứ vào Bảng 12, ta có biểu đồ quạt tròn biểu diễn bảng thống kê được cho ở Hình 13.

□

❖ Nhận xét 1.2.

-  Biểu đồ hình quạt tròn cho phép nhận biết nhanh chóng mỗi đối tượng thống kê chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng thể thống kê.
-  Bảng thống kê hoặc biểu đồ cột cho phép nhận biết nhanh chóng số liệu thống kê (theo tiêu chí) của mỗi đối tượng thống kê và so sánh các số liệu đó.
-  Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn từ bảng thống kê (hoặc từ biểu đồ cột), trước hết từ các số liệu ở bảng đó (hoặc ở biểu đồ cột đó) cần xác định các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê.

E BÀI TẬP

Bài 1. Kim ngạch xuất khẩu (đơn vị: nghìn đô-la Mỹ) của Việt Nam trong sáu tháng cuối năm 2002 lần lượt là 31 309 161; 35 257 448; 29 748 102; 30 597 155; 29 250 026; 29 110 462.

(Nguồn: www.gso.gov.vn)

Hãy lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

Hướng dẫn giải.

Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó như sau

Tháng	7	8	9	10	11	12
Kim ngạch xuất khẩu	31 309 161	35 257 448	29 748 102	30 597 155	29 250 026	29 110 462

□

Bài 2. Khối lượng thịt lợn bán được trong các tháng 8; 9; 10; 11; 12 năm 2002 của một hệ thống siêu thị lần lượt là 10 tạ; 10 tạ; 25 tạ; 20 tạ; 35 tạ.

a) Hãy lập bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó.

b) Vẽ biểu đồ tranh biểu diễn các số liệu đó.

Hướng dẫn giải.

a) Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó như sau

Tháng	8	9	10	11	12
Khối lượng thịt bán được (đơn vị: tạ)	10	10	25	20	35

b) Vẽ biểu đồ tranh biểu diễn các số liệu đó.

Tháng 8	 
Tháng 9	 
Tháng 10	    
Tháng 11	   
Tháng 12	      
 : 5 tạ	

□

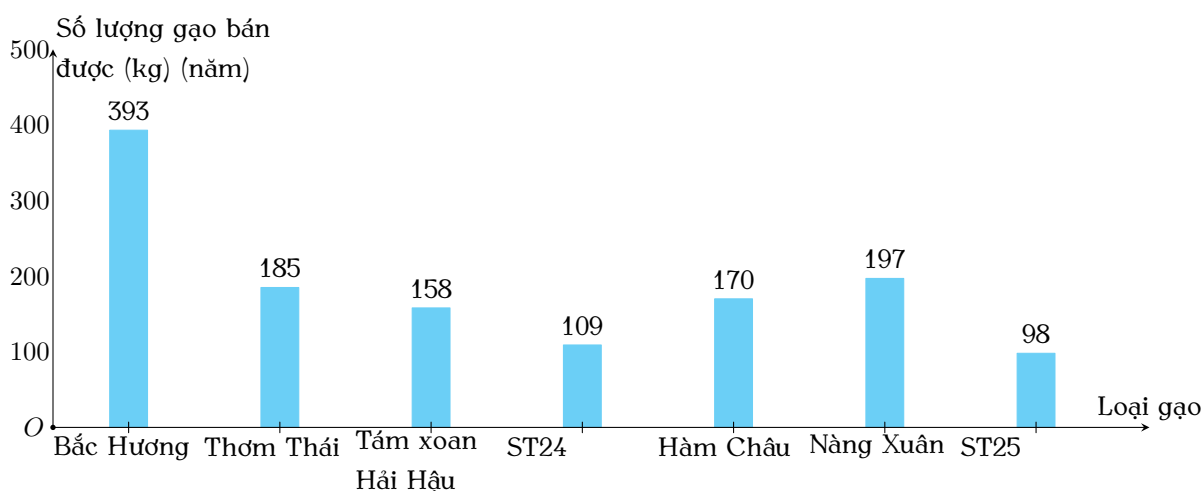
Bài 3. Bảng 13 biểu diễn số lượng các loại gạo (đơn vị: kí-lô-gam) đã bán trong tháng 1/2023 của một đại lí kinh doanh gạo

Loại gạo \ Trị giá	Bắc Hương	Thơm Thái	Tám xoan Hải Hậu	ST24	Hàm Châu	Nàng Xuân	ST25
Số lượng bán được (đơn vị: kg)	393	185	158	109	170	197	98

Bảng 13

Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các số liệu đó.

Hướng dẫn giải.



□

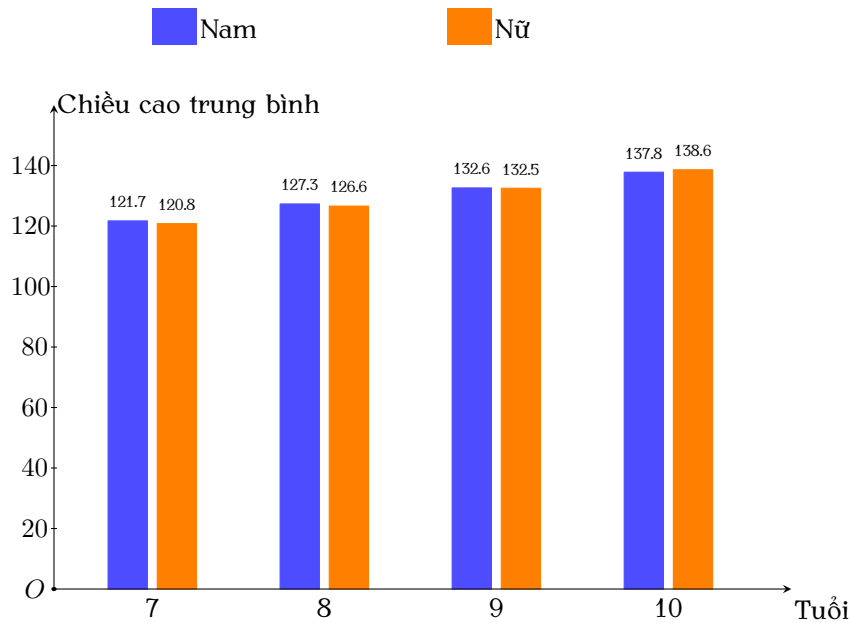
Bài 4. Bảng 14 thống kê chiều cao trung bình (đơn vị: cen-ti-mét) cho trẻ em từ 7 đến 10 tuổi theo tiêu chuẩn của Tổ chức Y Tế Thế giới (WHO)

Tuổi \ Chiều cao	7	8	9	10
Chiều cao (đơn vị: cm) của bé trai	121,7	127,3	132,6	137,8
Chiều cao (đơn vị: cm) của bé gái	120,8	126,6	132,5	138,6

Bảng 14

Vẽ biểu đồ cột kép biểu diễn các số liệu đó.

Hướng dẫn giải.



□

Bài 5. Dựa theo nguồn <https://www.worldometers>, bạn Bình thống kê dân số Việt Nam (đơn vị: người) qua các năm 1921; 1960; 1980; 1990; 2000; 2020 lần lượt là 16 triệu, 33 triệu, 540 trăm nghìn, 68 triệu, 80 triệu, 97 triệu.

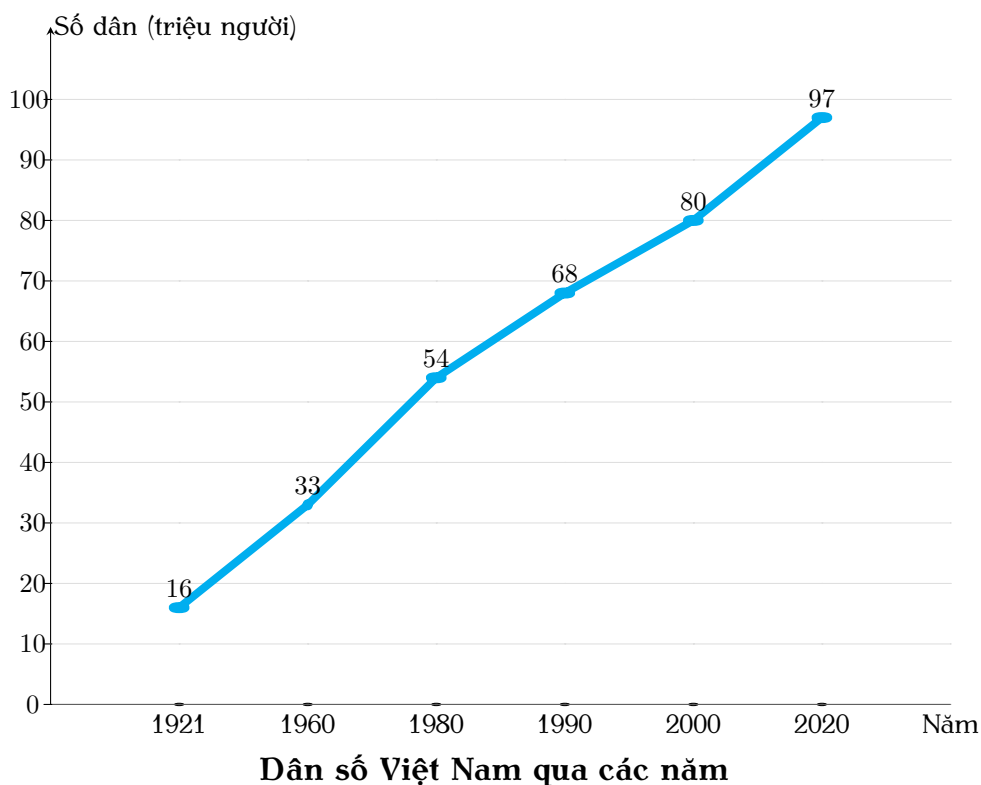
- Nếu vẽ lại biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các số liệu đó thì số liệu nào được viết chưa được hợp lý?
- Viết lại dãy số liệu thống kê trên và vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các số liệu đó.

Hướng dẫn giải.

- Để vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các số liệu, các số liệu cần được tính cùng đơn vị. Nếu các số liệu đó được tính theo đơn vị triệu người thì số liệu 540 trăm nghìn được viết chưa được hợp lý.
- Dân số Việt Nam qua các năm (đơn vị: triệu người) 1921; 1960; 1980; 1990; 2000; 2020. Bảng thống kê biểu diễn các số liệu đó

Số dân	Năm					
	1921	1960	1980	2000	1990	2020
Số dân (đơn vị: triệu người)	16	33	54	68	80	97

Biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các số liệu trên



□

Bài 6. Bảng 15 thống kê dân số thế giới (đơn vị: triệu người) phân theo các châu lục tính đến tháng 7/2021

Châu lục	Châu Âu	Châu Á	Châu Mỹ	Châu Phi	Châu Đại dương
Dân số (đơn vị: triệu người)	744	4 651	1 0276	1 373	43

(Nguồn: <https://World population data sheet 2021.www.prb.org>)

Bảng 15

Vẽ biểu đồ hình quạt tròn thể hiện dân số thế giới theo Bảng 15.

Hướng dẫn giải.

Chuyển đổi số liệu thống kê ở bảng 15 về số liệu thống kê tính tỉ lệ phần trăm, ta có bảng thống kê như sau

Châu lục	Châu Âu	Châu Á	Châu Mỹ	Châu Phi	Châu Đại dương
Tỉ lệ (đơn vị: %)	9,5	53,3	13,1	17,5	6,6

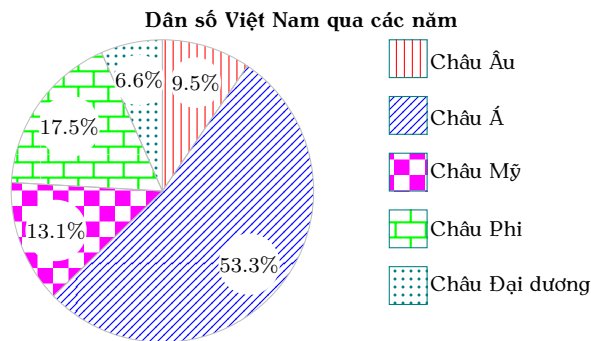
Bảng 15.1

Từ các số liệu thống kê tính theo tỉ lệ phần trăm ở Bảng 15.1, ta có các số đo cung tương ứng với các đối tượng thống kê ở Bảng 15.2 như sau

Châu lục	Châu Âu	Châu Á	Châu Mỹ	Châu Phi	Châu Đại dương
Số đo (đơn vị: độ)	34,2	191,9	47,2	63	23,8

Bảng 15.2

Căn cứ vào Bảng 15.2, ta có biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng thống kê được ở Hình vẽ sau



□

Bài 7. Bảng 16 thống kê số người tham gia bảo hiểm y tế (BHYT) của Việt Nam ở một số năm trong giai đoạn từ năm 2010 đến năm 2019.

Năm	2010	2013	2016	2019
Số người tham gia (BHYT) (đơn vị: triệu người)	52 407,1	61 746,3	75 915,2	85 745,4

(Nguồn: Tổng cục thống kê)

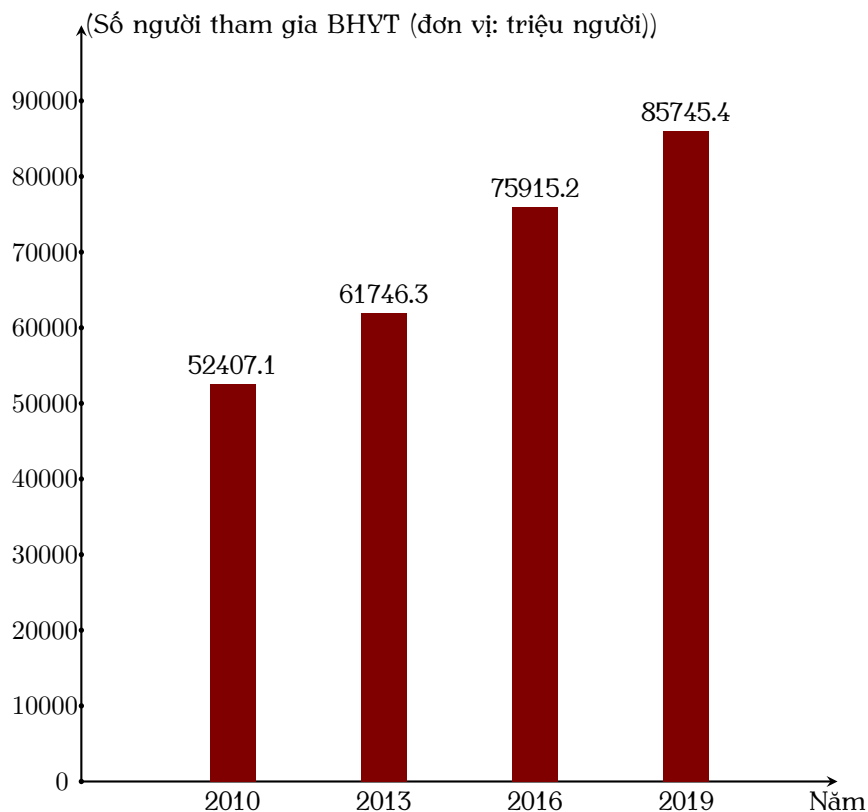
Bảng 15

- Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.
- Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.
- Một người nhận định: Từ năm 2010 đến năm 2019, số người tham gia bảo hiểm y tế của nước ta đã tăng lên 65%. Hỏi nhận định của người đó đúng hay sai?

Hướng dẫn giải.

- Biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

Số người tham gia BHYT qua các năm



b) Biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

c) Số người tham gia BHYT từ năm 2010 đến năm 2019 tăng 33338,3 triệu người, ứng với $38,9\% < 65\%$.
Do đó, nhận định trên là sai.

□

Chủ đề 2. TẦN SỐ. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

A TẦN SỐ. BẢNG TẦN SỐ. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

1 Tần số và bảng tần số

✧ **Định nghĩa 2.1.** Số lần xuất hiện của một giá trị trong mẫu dữ liệu thống kê được gọi là *tần số* của giá trị đó.

Các bước lập bảng tần số

Để lập bảng tần số ở dạng bảng ngang ta có thể làm như sau:

Bước 1. Xác định các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu và tìm tần số của mỗi giá trị đó.

Bước 2. Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột.
Theo thứ tự từ trên xuống dưới ta lần lượt ghi:

- 🟡 Cột đầu tiên: Tên các giá trị (x), Tần số (n);
- 🟢 Các cột tiếp theo lần lượt ghi các giá trị và tần số của giá trị đó;
- 🟢 Cột cuối cùng: Cộng, $N = \dots$

Chú ý

Bảng tần số ở dạng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

🟡 **Ví dụ 1.** Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 9C như sau

5	5	5	7	7	8	8	8	5	8	8	8	6	6	6	6	8	9	5	7
6	6	7	7	6	8	9	9	7	8	8	5	7	7	7	7	6	8	8	9

- Trong 40 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau?
- Tìm tần số của mỗi giá trị đó.
- Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê ở trên.

📌 Hướng dẫn giải.

- Trong 40 số liệu thống kê ở trên, có 5 giá trị khác nhau là $x_1 = 5$; $x_2 = 6$; $x_3 = 7$; $x_4 = 8$; $x_5 = 9$.
- Tần số của các giá trị x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5 là $n_1 = 6$; $n_2 = 8$; $n_3 = 10$; $n_4 = 12$; $n_5 = 4$.
- Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên như sau

Điểm (x)	5	6	7	8	9	Cộng
Tần số (n)	6	8	10	12	4	$N = 40$

□

✧ **Nhận xét 2.1.** Đối với một mẫu dữ liệu thống kê, tần số của một giá trị phản ánh số lần lặp đi lặp lại giá trị đó trong mẫu dữ liệu thống kê đã cho.

LUYỆN TẬP 1

Thống kê thâm niên công tác (đơn vị: năm) của 33 nhân viên ở một công ti như sau.

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1	8
9	4	2	8	5	5	7	3	14	8	8

Lập bảng tần số ở dạng bảng dọc của mẫu số liệu thống kê đó.

Hướng dẫn giải.

❖ Các giá trị khác nhau là $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$; $x_6 = 6$; $x_7 = 7$; $x_8 = 8$; $x_9 = 9$; $x_{10} = 10$; $x_{11} = 14$.

❖ Tần số tương ứng là $n_1 = 1$; $n_2 = 3$; $n_3 = 2$; $n_4 = 7$; $n_5 = 5$; $n_6 = 1$; $n_7 = 5$; $n_8 = 5$; $n_9 = 2$; $n_{10} = 1$; $n_{11} = 1$.

❖ Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê trên như hình bên

Số năm công tác (x)	Tần số (n)
1	1
2	3
3	2
4	7
5	5
6	1
7	5
8	5
9	2
10	1
14	1
Cộng	$N = 33$

2) Biểu đồ tần số

Các bước vẽ biểu đồ tần số

Người ta thường vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng và có thể thực hiện các bước như sau:

Bước 1. Lập bảng tần số của mẫu dữ liệu thống kê đó.

Bước 2. Vẽ biểu đồ cột hoặc biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số nhận được ở Bước 1.

❖ **Ví dụ 2.** Thống kê lượng hàng tồn kho (đơn vị: sản phẩm) của 30 mặt hàng ở một cửa hàng kinh doanh như sau.

4	4	3	5	3	3	3	4	4	5	3	3	5	5	5
2	2	3	4	2	2	3	3	3	5	5	5	4	3	2

a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.

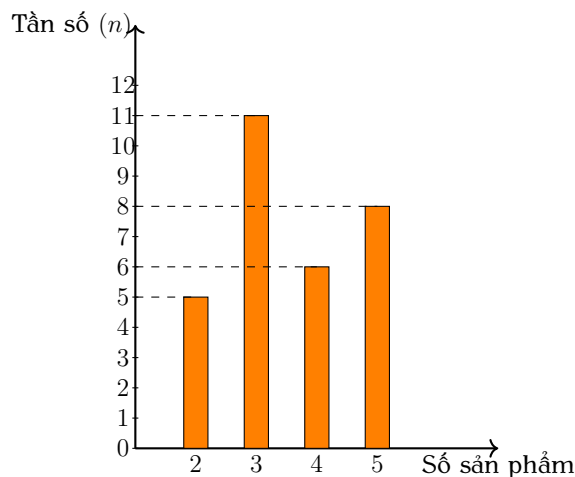
b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Hướng dẫn giải.

- a) Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó như sau

Số sản phẩm (x)	2	3	4	5	Cộng
Tần số (n)	5	11	6	8	$N = 30$

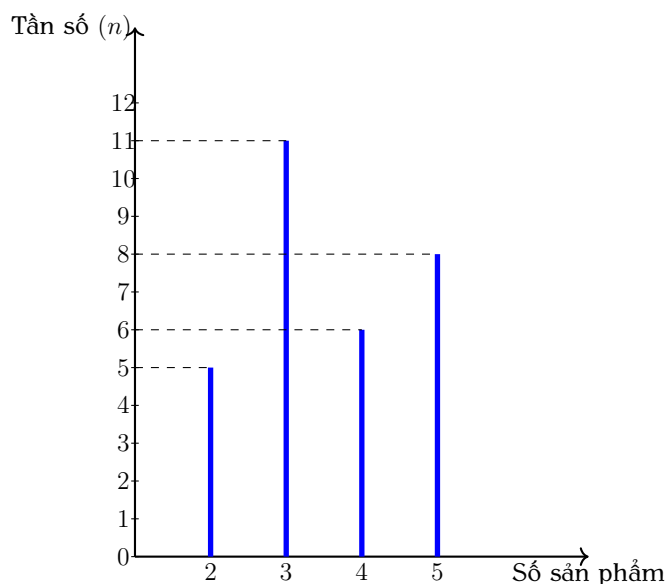
- b) Biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó được cho trong hình bên.



□

Chú ý

Ta cũng có thể vẽ biểu đồ tần số của mẫu số liệu thống kê trong Ví dụ 2 ở dạng sau

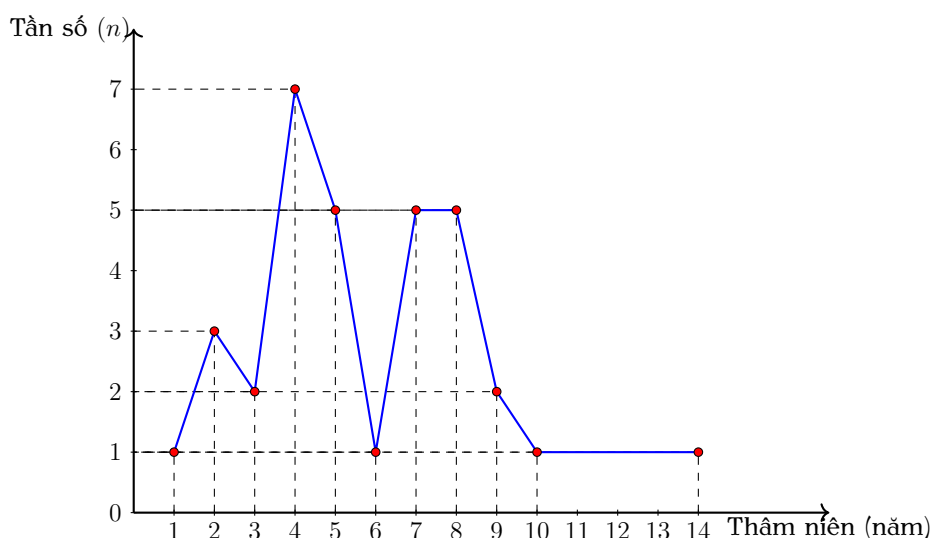


LUYỆN TẬP 2

Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu thống kê ở *Luyện tập* 1.

Hướng dẫn giải.

Biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu thống kê đã cho như hình



□

B TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

1 Tần số tương đối và bảng tần số tương đối

❖ **Định nghĩa 2.2.** Tần số tương đối f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số n_i của giá trị đó và số lượng N các dữ liệu trong mẫu dữ liệu thống kê: $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Ta thường viết tần số tương đối dưới dạng phần trăm.

Các bước lập bảng tần số tương đối

Bước 1. Xác định các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu và tìm tần số tương đối của mỗi giá trị đó.

Bước 2. Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột.

Theo thứ tự từ trên xuống dưới ta lần lượt ghi:

- 📊 Cột đầu tiên: Tên các giá trị (x), Tần số tương đối (%);
- 📊 Các cột tiếp theo lần lượt ghi các giá trị và tần số tương đối của giá trị đó;
- 📊 Cột cuối cùng: Cộng, 100.

Chú ý

Bảng tần số tương đối ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

🔴 **Ví dụ 3.** Trong tác phẩm “Truyện Kiều” bất hủ của nhà thơ Nguyễn Du có hai câu thơ

“Dưới trăng quên đã gọi hè
Đầu tường lửa lựu lập lòe đâm bông”

Mẫu dữ liệu thống kê các chữ cái G; L; N; T lần lượt xuất hiện trong hai câu thơ trên là

T N G N G T N G L L L L N G

Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

Hướng dẫn giải.

Mẫu dữ liệu thống kê đó có 14 dữ liệu ($N = 14$) và có 4 giá trị khác nhau là G; L; N; T. Các giá trị G; L; N; T lần lượt có tần số, tần số tương đối là $n_1 = 4$; $n_2 = 4$; $n_3 = 4$; $n_4 = 2$;

$$f_1 = \frac{4 \cdot 100}{14} \% \approx 28,57\%;$$

$$f_3 = \frac{4 \cdot 100}{14} \% \approx 28,57\%;$$

$$f_2 = \frac{4 \cdot 100}{14} \% \approx 28,57\%;$$

$$f_4 = \frac{2 \cdot 100}{14} \% \approx 14,29\%.$$

Bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê trên là

Chữ cái (x)	G	L	N	T	Cộng
Tần số tương đối (%)	28,57%	28,57%	28,57%	14,29%	100

□

❖ **Nhận xét 2.2.** Đối với một mẫu dữ liệu thống kê, tần số tương đối của một giá trị phản ánh giá trị đó chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng thể thống kê.

LUYỆN TẬP 3

Sau khi điều tra 60 hộ gia đình tại một vùng dân cư về số nhân khẩu của mỗi hộ gia đình, người ta được dãy số liệu thống kê (hay còn gọi là mẫu số liệu thống kê) như sau

6	6	6	7	5	5	4	5	6	4	4	8	6	6	6	6	5	5	5	4
6	6	7	7	5	5	5	5	6	4	4	6	6	6	6	6	5	5	5	4
8	6	6	5	5	5	5	6	6	4	5	6	7	6	8	6	5	5	6	5

Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê trên.

Hướng dẫn giải.

Mẫu dữ liệu thống kê có 60 dữ liệu ($N = 60$) và có 5 giá trị khác nhau là 4, 5, 6, 7, 8.

Tần số là $n_1 = 8$; $n_2 = 21$; $n_3 = 24$; $n_4 = 4$; $n_5 = 3$.

Tần số tương đối là

$$f_1 = \frac{8 \cdot 100}{60} \% \approx 13,33\%; \quad f_3 = \frac{24 \cdot 100}{60} \% = 40\%; \quad 6,67\%;$$

$$f_2 = \frac{21 \cdot 100}{60} \% = 35\%; \quad f_4 = \frac{4 \cdot 100}{60} \% \approx 6,67\%; \quad f_5 = \frac{3 \cdot 100}{60} \% = 5\%.$$

Bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê trên là

Số nhân khẩu (x)	4	5	6	7	8	Cộng
Tần số tương đối (%)	13,33%	35%	40%	6,67%	5%	100

□

② Lập biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột hoặc biểu đồ hình quạt tròn

Các bước vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng biểu đồ cột

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của một mẫu dữ liệu thống kê, ta có thể thực hiện các bước sau

Bước 1. Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

Bước 2. Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số tương đối nhận được ở Bước 1.

Các bước vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng biểu đồ hình quạt tròn

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của một mẫu dữ liệu thống kê, ta có thể thực hiện các bước sau

Bước 1. Lập bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê đó.

Bước 2. Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số tương đối nhận được ở Bước 1.

❶ Ví dụ 4. Một doanh nghiệp thu thập mức độ yêu thích của người tiêu dùng về một loại sản phẩm theo các mức: 1, 2, 3, 4, 5. Mẫu số liệu thống kê phản ánh ý kiến của 50 người tiêu dùng như sau

4	4	1	4	5	2	2	5	5	5	2	4	3	4	4	4	5
3	3	4	4	4	5	1	5	4	4	4	2	4	4	2	5	5
1	1	1	4	4	4	3	2	4	3	3	3	4	4	4	4	5

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Hướng dẫn giải.

a) Mẫu dữ liệu thống kê đó có 50 số liệu ($N = 50$) và có 5 giá trị khác nhau là $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$.

Các giá trị $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$ lần lượt có tần số, tần số tương đối là $n_1 = 5$; $n_2 = 6$; $n_3 = 7$; $n_4 = 22$; $n_5 = 10$;

$$\text{🟦 } f_1 = \frac{5 \cdot 100}{50} \% = 10\%;$$

$$\text{🟪 } f_3 = \frac{7 \cdot 100}{50} \% = 14\%;$$

$$\text{🟩 } f_5 = \frac{10 \cdot 100}{50} \% = 20\%.$$

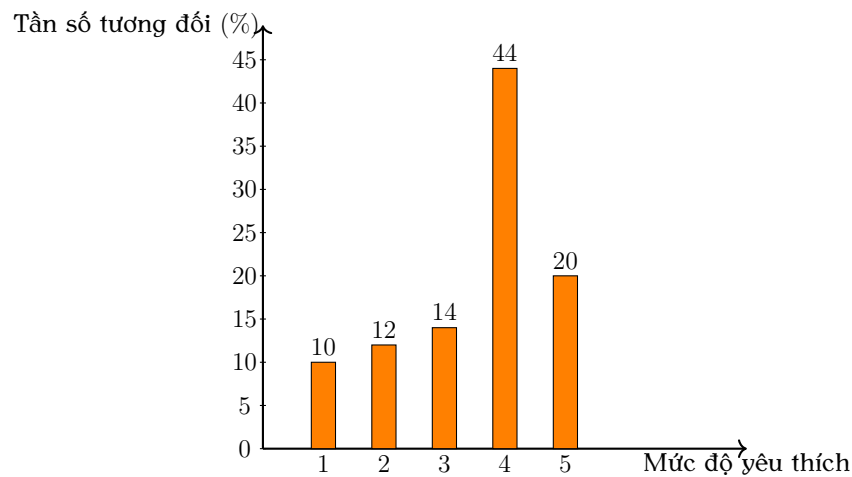
$$\text{🟪 } f_2 = \frac{6 \cdot 100}{50} \% = 12\%;$$

$$\text{🟩 } f_4 = \frac{22 \cdot 100}{50} \% = 44\%;$$

Bảng tần số tương đối của mẫu dữ liệu thống kê trên là

Mức độ yêu thích (x)	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số tương đối (%)	10%	12%	14%	44%	20%	100

- b) Biểu đồ tần số tương đối (dạng biểu đồ cột) của mẫu số liệu thống kê đó được cho ở hình sau.



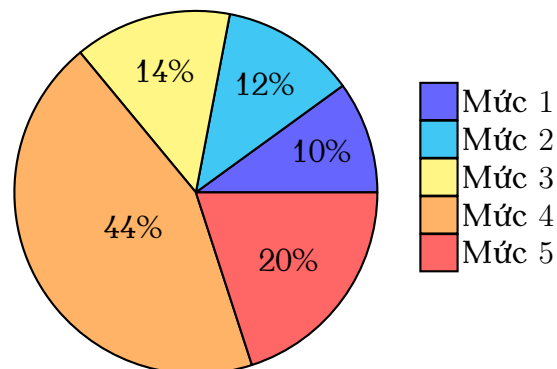
□

LUYỆN TẬP 4

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê trong Ví dụ 4.

Hướng dẫn giải.

Biểu đồ tần số tương đối (dạng biểu đồ hình quạt tròn) của mẫu số liệu thống kê ở Ví dụ 4 được cho ở hình sau.



□

© BÀI TẬP

Bài 8. Thống kê 46 lần bắn bia của một xạ thủ như sau:

8	9	10	9	9	8	7	7	8	10	10	7	10	9	8	9
9	8	8	9	9	9	8	10	8	9	8	7	10	7	7	9
9	7	9	8	10	8	7	10	8	8	9	10	8	9		

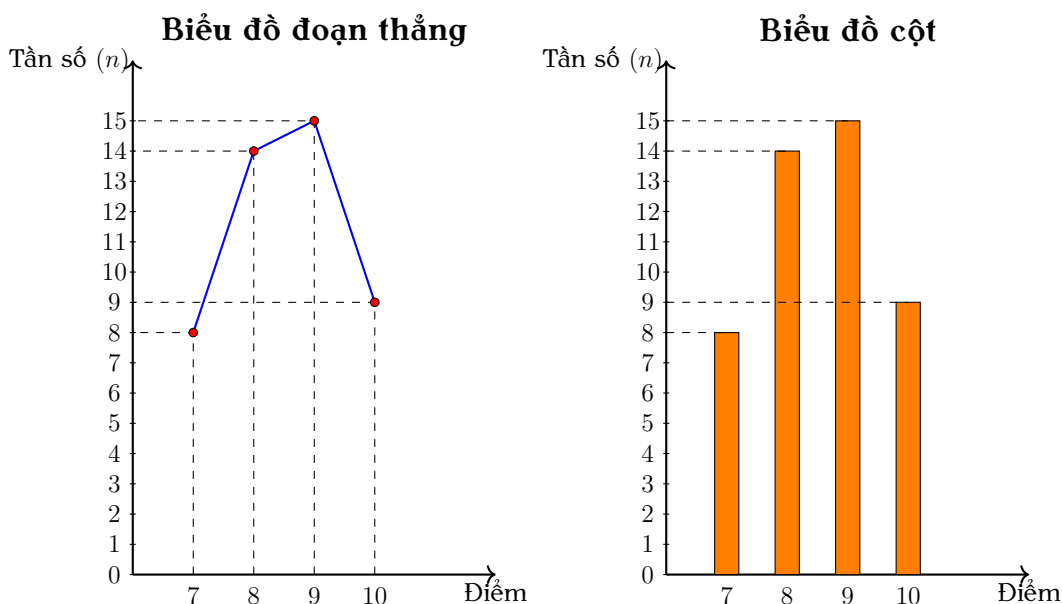
- a) Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.
- b) Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ đoạn thẳng và biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.

Hướng dẫn giải.

a) Bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó là

Điểm (x)	7	8	9	10	Cộng
Tần số (n)	8	14	15	9	$N = 46$

b) Biểu đồ tần số của mẫu số liệu thống kê đó là



□

Bài 9. Gieo một con xúc xắc 32 lần liên tiếp, ghi lại số chấm trên mặt xuất hiện của xúc xắc, ta được mẫu số liệu thống kê như sau:

1	6	4	4	6	6	5	5	4	2	2	3	1	1	4	4
5	1	2	3	3	2	4	4	5	2	3	4	2	6	4	4

a) Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

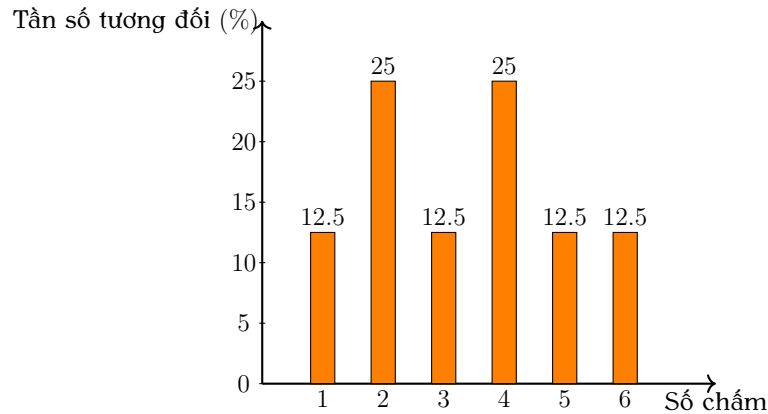
Hướng dẫn giải.

a) Bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó là

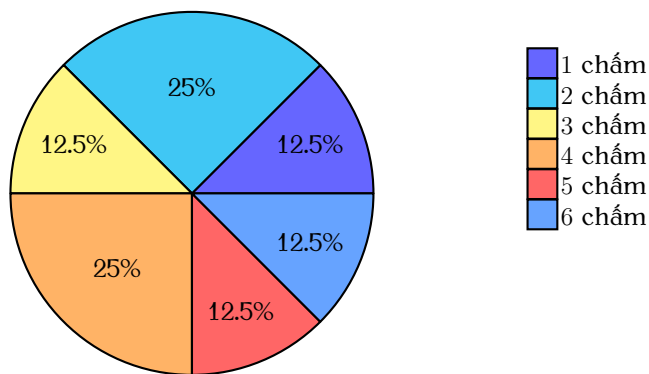
Số chấm (x)	1	2	3	4	5	5	Cộng
Tần số tương đối (%)	12,5%	25%	12,5%	25%	12,5%	12,5%	100

b) Biểu đồ tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó là

Biểu đồ cột



Biểu đồ hình quạt tròn



□

Bài 10.

Kết quả đánh giá chất lượng bằng điểm của 40 sản phẩm được cho trong bảng bên.

Điểm (x)	7	8	9	10	Cộng
Tần số (n)	6	14	16	4	$N = 40$

- Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

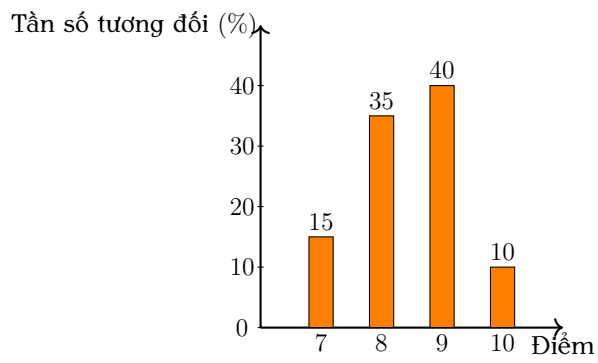
Hướng dẫn giải.

- Bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó là

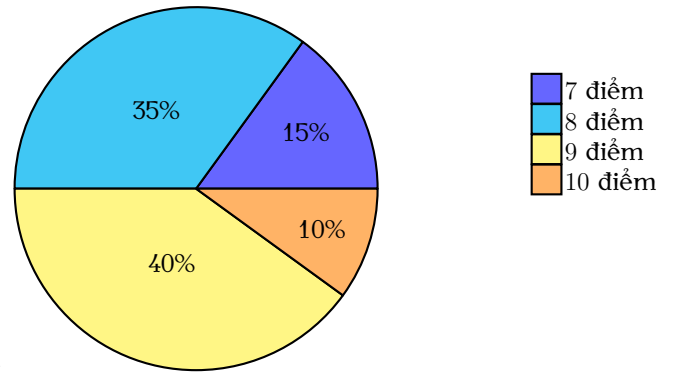
Điểm (x)	7	8	9	10	Cộng
Tần số tương đối (%)	15%	35%	40%	10%	100

- Biểu đồ tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó là

Biểu đồ cột



Biểu đồ hình quạt tròn



Chủ đề 3. TẦN SỐ GHÉP NHÓM. TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM

A MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Trong thống kê quy ước:

-  Nửa khoảng $[a; b)$ là tập hợp các giá trị của x của số liệu sao cho $x \geq a$ và $x < b$;
-  Độ dài của nửa khoảng $[a; b)$ là $b - a$;
-  Khi một nhóm ứng với nửa khoảng $[a; b)$ thì ta gọi a là đầu mút trái và b là đầu mút phải của nhóm đó.

Ví dụ 1. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ (đơn vị: km/h) của 44 ô tô khi đi qua một trạm tốc độ:

48,5	43	50	55	45	60	53	55,5	44	65	54,5
51	62,5	41	44,5	57	57	68	49	46,5	53,5	49
61	49,5	54	62	59	56	47	50	59,5	61	46,5
49,5	52,5	57	47	59	55	45	47,5	48	61,5	48,5

Hãy ghép các số liệu thành sáu nhóm với sáu nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Hướng dẫn giải.

Trong mẫu số liệu đó, số liệu có giá trị nhỏ nhất là 41, số liệu có giá trị lớn nhất là 68. Vì thế ta có thể chọn nửa khoảng $[40; 70)$ sao cho giá trị của mỗi số liệu trong mẫu số liệu đều thuộc nửa khoảng $[40; 70)$. Vì độ dài của nửa khoảng $[40; 70)$ bằng $70 - 40 = 30$ nên ta có thể phân chia nửa khoảng đó thành sáu nửa khoảng có độ dài bằng nhau là $[40; 45)$, $[45; 50)$, $[50; 55)$, $[55; 60)$, $[60; 65)$, $[65; 70)$.

Vậy ta có thể ghép nhóm mẫu số liệu đã cho theo sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng đó.

□

LUYỆN TẬP 1

Chiều cao (đơn vị: mét) của 35 cây bạch đàn được cho như sau

6,6	7,2	8,0	8,0	7,5	7,5	7,7
6,6	7,2	8,0	8,0	7,5	7,5	7,7
8,2	8,3	7,8	7,9	8,2	7,4	8,3
7,8	8,7	8,6	8,5	7,9	7,7	8,1
9,0	7,0	8,1	8,0	8,9	9,4	9,2

Hãy ghép các cặp số liệu thành năm nhóm ứng với năm nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Hướng dẫn giải.

Trong mẫu số liệu đó, số liệu có giá trị nhỏ nhất là 6,6, số liệu có giá trị lớn nhất là 9,4. Vì thế ta có thể chọn nửa khoảng $[6,6; 9,6)$ sao cho giá trị của mỗi số liệu trong mẫu số liệu đều thuộc nửa khoảng $[6,6; 9,6)$. Vì độ dài của nửa khoảng $[6,6; 9,6)$ bằng $9,6 - 6,6 = 3$ nên ta có thể phân chia nửa khoảng đó thành năm nửa khoảng có độ

dài bằng nhau là

$$[6,6; 7,2), [7,2; 7,8), [7,8; 8,4), [8,4; 9,0), [9,0; 9,6).$$

Vậy ta có thể ghép nhóm mẫu số liệu đã cho theo sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng đó. $\square$

Các bước chuyển mẫu số liệu ghép nhóm

-  Tìm nửa khoảng $[a; b)$ sao cho giá trị của mỗi số liệu trong mẫu số liệu đều thuộc nửa khoảng $[a; b)$.
-  Ta thường phân chia nửa khoảng $[a; b)$ thành các nửa khoảng có độ dài bằng nhau.

Chú ý

Khi ghép nhóm số liệu, đầu mút của các nhóm có thể không phải là giá trị của mẫu số liệu.

B TẦN SỐ GHEP NHÓM. BẢNG TẦN SỐ GHEP NHÓM

✧ **Định nghĩa 3.1.** Trong một mẫu số liệu ghép nhóm, *tần số ghép nhóm* (hay *tần số*) của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm đó. Tần số của nhóm 1, nhóm 2, ..., nhóm m kí hiệu lần lượt là $n_1, n_2, \dots, n_m$. Ta có thể trình bày gọn gàng trong mẫu số liệu ghép nhóm trong *bảng tần số ghép nhóm*.

Các bước lập bảng tần số ghép nhóm dạng bảng ngang

-  **Bước 1.** Xác định các nhóm của mẫu dữ liệu ghép nhóm và tìm tần số của mỗi nhóm đó.
-  **Bước 2.** Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột. Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:
 -  Cột đầu tiên: Nhóm, Tần số (n);
 -  Các cột tiếp theo lần lượt ghi tên nhóm và tần số của nhóm đó;
 -  Cột cuối cùng: Cộng, $N = \dots$

Chú ý

Bảng tần số ghép nhóm ở dạng bảng dọc được lập bằng cách tương tự như trên.

○ **Ví dụ 2.** Xét mẫu số liệu ở Ví dụ 1 được ghép nhóm theo sáu nhóm sau

$$[40; 45), [45; 50), [50; 55), [55; 60), [60; 65), [65; 70).$$

- a) Tìm tần số của mỗi nhóm đó.
- b) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Hướng dẫn giải.

a) Tần số của nhóm 1, nhóm 2, nhóm 3, nhóm 4, nhóm 5, nhóm 6 lần lượt là

$$n_1 = 4; n_2 = 14; n_3 = 8; n_4 = 10; n_5 = 6; n_6 = 2.$$

b) Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó như sau

Nhóm	Tần số (n)
[40; 45)	4
[45; 50)	14
[50; 55)	8
[55; 60)	10
[60; 65)	6
[65; 70)	2
Cộng	$N = 44$

□

⇒ **Nhận xét 3.1.** a) Đối với một mẫu dữ liệu thống kê ghép nhóm, tần số của một nhóm phản ánh số lượng số liệu trong mẫu số liệu thuộc vào nhóm đó.

b) Cũng như mẫu số liệu không ghép nhóm, để trình bày mẫu số liệu ghép nhóm một cách trực quan sinh động, dễ nhớ và gây ấn tượng, người ta sử dụng *biểu đồ tần số ghép nhóm*. Chẳng hạn, đối với mẫu số liệu ghép nhóm ở Ví dụ 2, biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong Bảng 29.

LUYỆN TẬP 2

Thống kê số lần truy cập Internet của 30 người trong một tuần là

85	81	65	58	47	30	51	89	85	42
55	37	31	82	63	33	44	88	77	57
44	74	63	67	46	73	52	53	47	35

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đó sau khi được ghép nhóm theo sáu nhóm sau

$$[30; 40), [40; 50), [50; 60), [60; 70), [70; 80), [80; 90).$$

Hướng dẫn giải.

Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu.

Nhóm	Tần số (n)
[30; 40)	5
[40; 50)	6
[50; 60)	6
[60; 70)	4
[70; 80)	3
[80; 90)	6
Cộng	$N = 30$

□

📌 TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM. BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHEP NHÓM

🔗 **Định nghĩa 3.2.** Tần số tương đối ghép nhóm (hay *tần số tương đối*) f_i của nhóm i là tỉ số giữa tần số n_i của nhóm đó và số lượng N các số liệu trong mẫu số liệu thống kê

$$f_i = \frac{n_i}{N}.$$

Ta thường viết tần số tương đối dưới dạng phần trăm.

Ta có thể trình bày gọn gàng một mẫu số liệu ghép trong *bảng tần số tương đối ghép nhóm* của mẫu số liệu đó.

Các bước lập bảng tần số tương đối ghép nhóm

- 🏠 **Bước 1:** Xác định các nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm và tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.
- 🏠 **Bước 2:** Lập bảng gồm 2 dòng và một số cột. Theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta lần lượt ghi:
 - 🍃 Cột đầu tiên: Nhóm, Tần số tương đối (%).
 - 🍃 Các cột tiếp theo lần lượt ghi nhóm và tần số tương đối của nhóm đó.
 - 🍃 Cột cuối cùng: Cộng, 100.

🔴 **Ví dụ 3.** Xét mẫu số liệu ghép nhóm có bảng tần số ghép nhóm được cho ở bảng sau

Nhóm	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	Cộng
Tần số (n)	4	12	7	8	9	$N = 40$

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

📁 Hướng dẫn giải.

Tần số tương đối của các nhóm lần lượt là:

$$f_1 = \frac{4 \cdot 100}{40} \% = 10\%; \quad f_2 = \frac{12 \cdot 100}{40} \% = 30\%; \quad f_3 = \frac{7 \cdot 100}{40} \% = 17,5\%;$$

$$f_4 = \frac{8 \cdot 100}{40} \% = 20\%; \quad f_5 = \frac{9 \cdot 100}{40} \% = 22,5\%.$$

Bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu trên.

Nhóm	Tần số tương đối (%)
[10; 15)	10
[15; 20)	30
[20; 25)	17,5
[25; 30)	20
[30; 35)	22,5
Cộng	$N = 100$

□

↔ **Nhận xét 3.2.** Đối với một mẫu số liệu ghép nhóm, tần số tương đối của một nhóm phản ánh nhóm đó chiếm bao nhiêu phần trăm trong tổng thể thống kê.

1 Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm

↔ **Định nghĩa 3.3.** Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của một mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện các bước sau:

- 🟢 **Bước 1:** Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.
- 🟢 **Bước 2:** Vẽ biểu đồ cột biểu diễn số liệu thống kê trong bảng tần số tương đối ghép nhóm nhận được ở **Bước 1**.

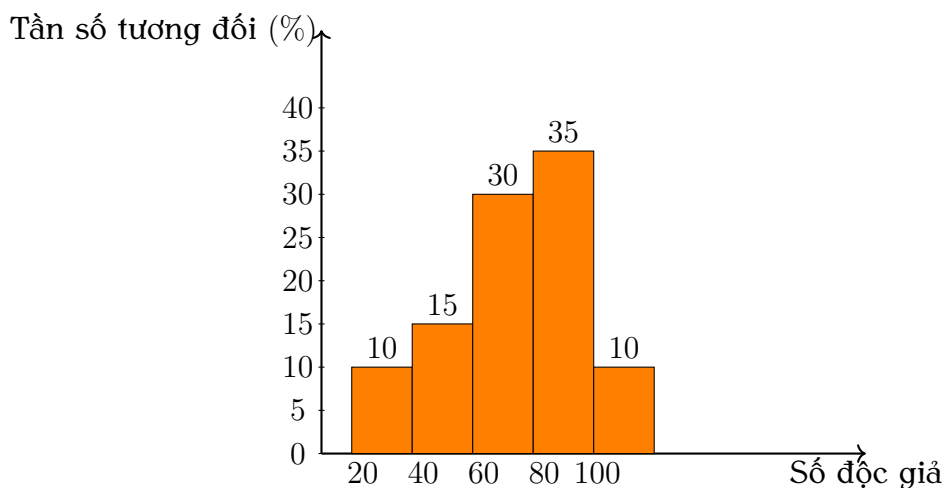
🔴 **Ví dụ 4.** Một thư viện thống kê số lượng người đến đọc sách mỗi ngày trong 100 ngày liên tiếp. Sau khi ghép nhóm mẫu số liệu thu được, người ta nhận được bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau

Nhóm	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)	Cộng
Tần số (n)	10	15	30	35	10	$N = 100$

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm trong bảng.

🔵 Hướng dẫn giải.

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm.



□

⇨ **Định nghĩa 3.4.** Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm, ta có thể thực hiện các bước sau:

- 🟡 **Bước 1:** Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép đã cho.
- 🟢 **Bước 2:** Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các số liệu trong bảng tần số ghép nhóm nhận được ở Bước 1.

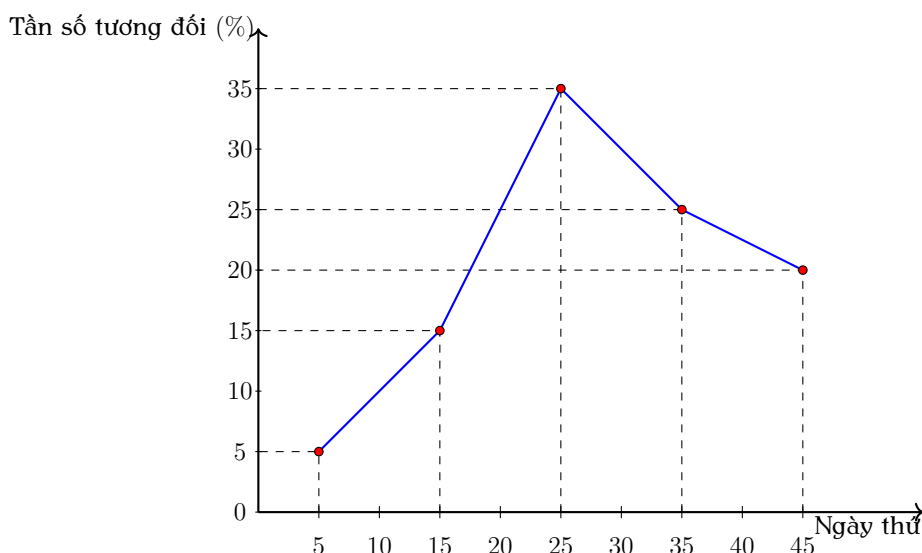
🔴 **Ví dụ 5.** Một câu lạc bộ thể hình thống kê số lượng người đến tập mỗi ngày trong 60 ngày liên tiếp. Sau khi ghép nhóm mẫu số liệu thu được, người ta nhận được bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau

Nhóm	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	Cộng
Tần số tương đối(%)	5	15	35	25	20	$N = 100$

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm trong bảng.

📁 **Hướng dẫn giải.**

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm nêu trong bảng.



□

LUYỆN TẬP 3

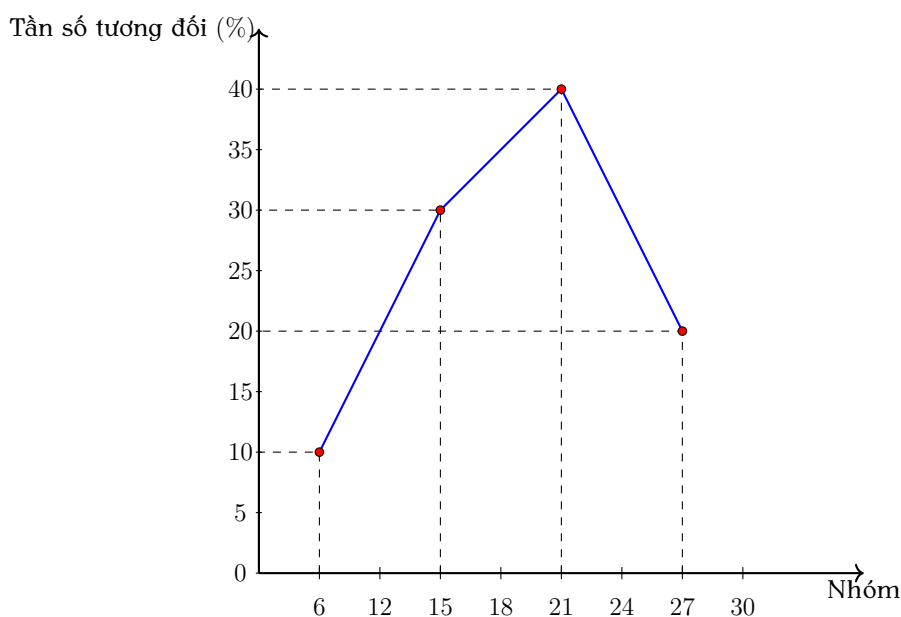
Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm của một mẫu số liệu ghép nhóm sau

Nhóm	Tần số tương đối(%)
[0; 12)	10
[12; 18)	30
[18; 24)	40
[24; 30)	20
Cộng	$N = 100$

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm.

Hướng dẫn giải.

Biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm.



□

D BÀI TẬP

Bài 11. Khối lượng (đơn vị: gam) của 30 củ khoai tây thu hoạch ở gia đình bác Ngọc là

90	73	88	93	101	104	111	95	78	95
81	97	96	92	95	83	90	101	103	117
109	110	112	87	75	90	82	97	86	96

a) Hãy ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau

$[70; 80)$, $[80; 90)$, $[90; 100)$, $[100; 110)$, $[110; 120)$.

Tìm tần số của mỗi nhóm đó.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có các tần số tương ứng với các nhóm $[70; 80)$, $[80; 90)$, $[90; 100)$, $[100; 110)$, $[110; 120)$ lần lượt là 3, 6, 12, 5, 4.

b) Ta có bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên là

Nhóm	$[70; 80)$	$[80; 90)$	$[90; 100)$	$[100; 110)$	$[110; 120)$	Cộng
Tần số	3	6	12	5	4	30

□

Bài 12. Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 60 lá dương xỉ trưởng thành, người ta có bảng tần số ghép nhóm như sau

Nhóm	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	Cộng
Tần số (n)	8	18	24	10	60

- Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.
- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

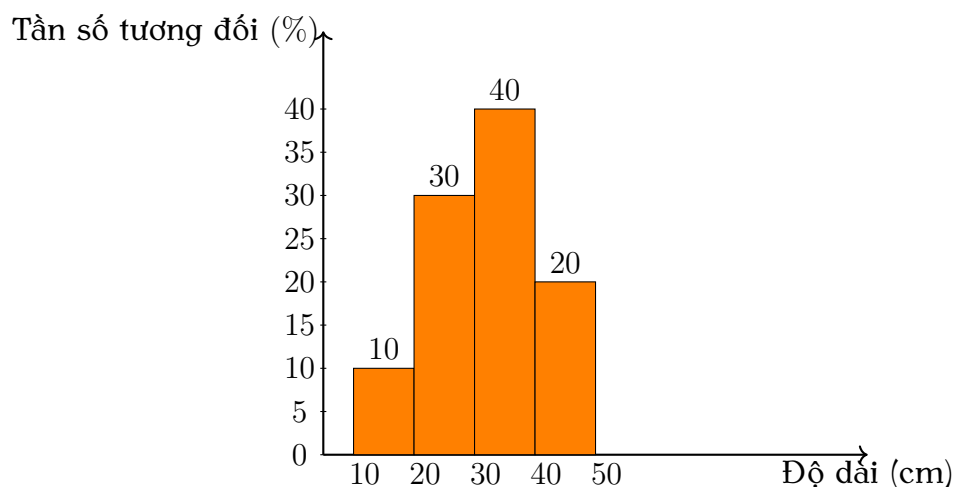
Hướng dẫn giải.

a) Ta có $f_1 = \frac{8}{60} \approx 10\%$; $f_2 = \frac{18}{60} \approx 30\%$; $f_3 = \frac{24}{60} \approx 40\%$; $f_4 \approx \frac{10}{60} \approx 20\%$.

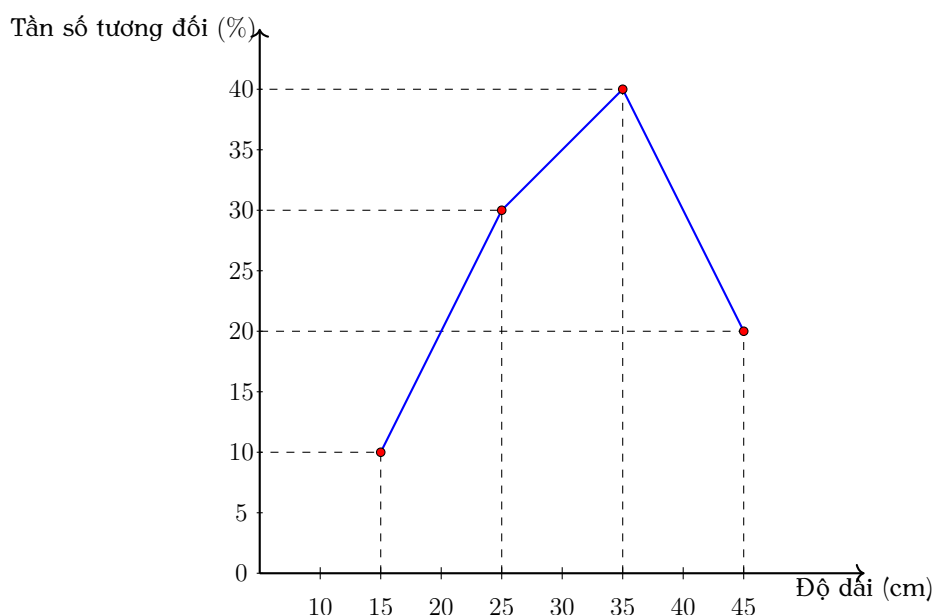
b) Bảng tần số tương đối của mỗi nhóm

Nhóm	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	Cộng
Tần số tương đối (%)	10	30	40	20	100

c) Biểu đồ cột độ dài của lá dương xỉ.



Biểu đồ đoạn thẳng độ dài của lá dương xỉ.



□

Bài 13. Sau khi điều tra về số học sinh trong 100 lớp học (đơn vị: học sinh), người ta có bảng tần số ghép nhóm như trong bảng.

Nhóm	[36; 38)	[38; 40)	[40; 42)	[42; 44)	[44; 46)	Cộng
Tần số (%)	20	15	25	30	10	$N = 100$

- Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.
- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

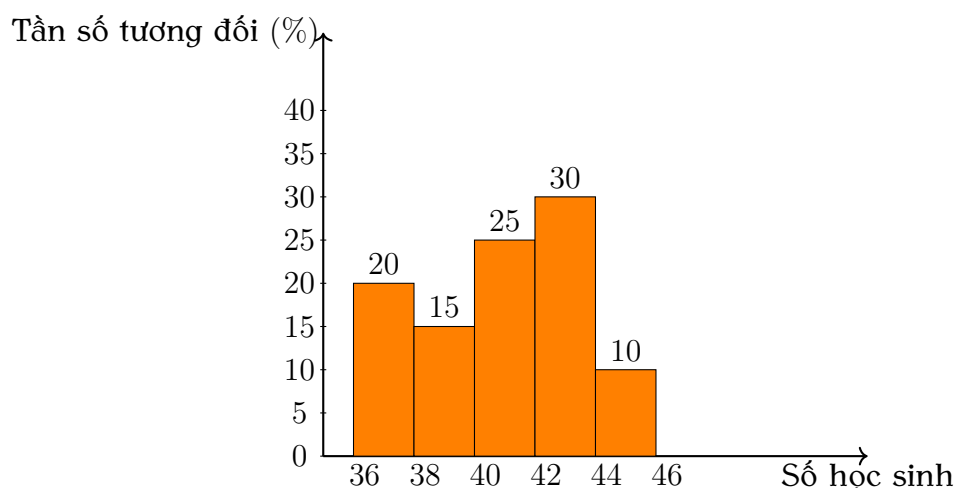
Hướng dẫn giải.

a) Ta có $f_1 = \frac{8}{60} \approx 10\%$; $f_2 = \frac{18}{60} \approx 30\%$; $f_3 = \frac{24}{60} \approx 40\%$; $f_4 \approx \frac{10}{60} \approx 20\%$.

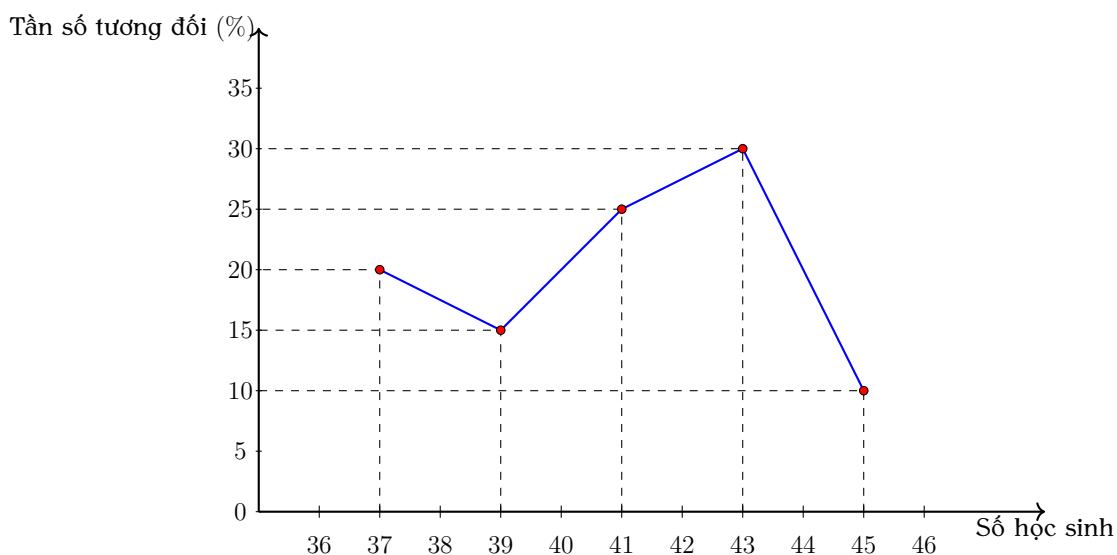
b) Bảng tần số tương đối của mỗi nhóm

Nhóm	[36; 38)	[38; 40)	[40; 42)	[42; 44)	[44; 46)	Cộng
Tần số tương đối (%)	20	15	25	30	10	100

c) Vẽ biểu đồ cột.

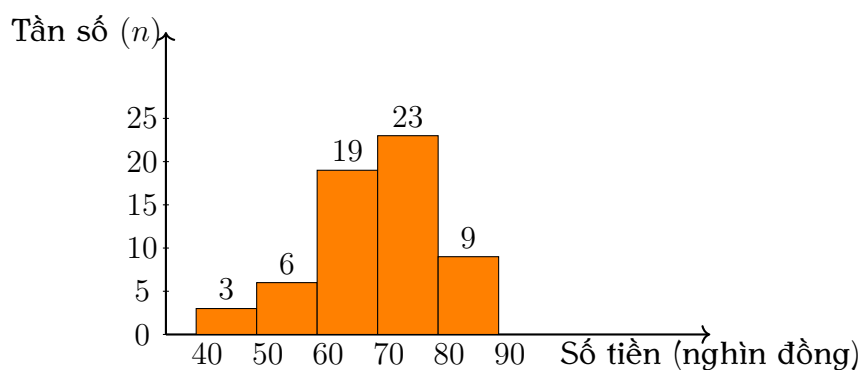


Vẽ biểu đồ đoạn thẳng.



□

Bài 14. Một cửa hàng sách thống kê số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở cửa hàng đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số ghép nhóm ở hình sau:



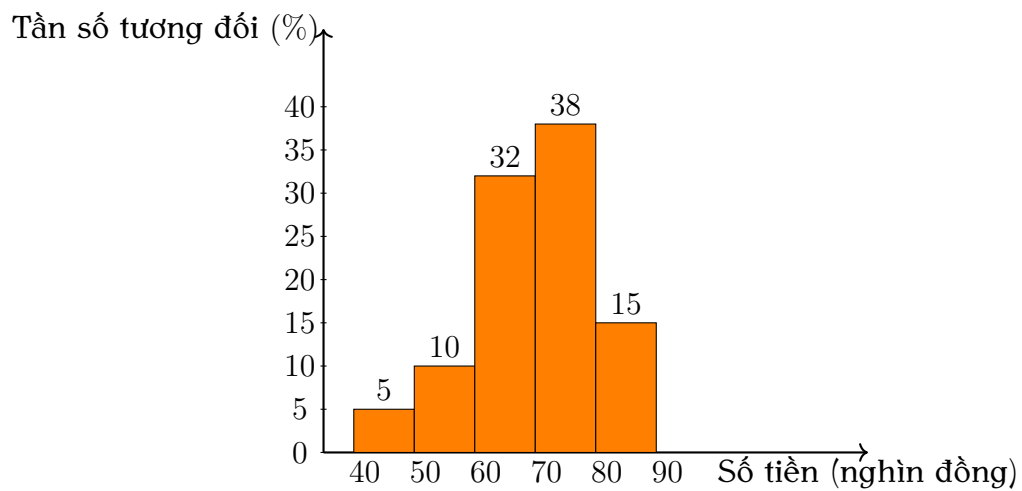
- Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Hướng dẫn giải.

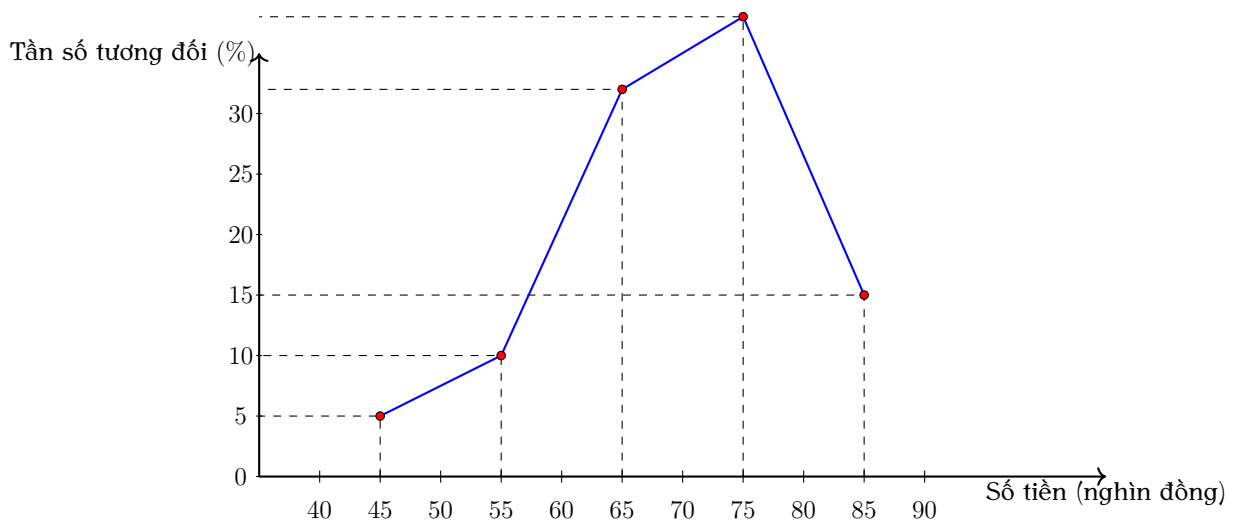
a) Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Nhóm	Tần số tương đối(%)
[40; 50)	5
[50; 60)	10
[60; 70)	32
[70; 80)	38
[80; 90)	15
Cộng	$N = 100$

b) Biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm.



Biểu đồ đoạn thẳng.



□

Chủ đề 4. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

❖ **Định nghĩa 4.1.** Có những phép thử mà tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó hoàn toàn xác định. Tuy nhiên, các kết quả xảy ra có tính ngẫu nhiên, ta không thể đoán trước được. Những phép thử như thế gọi là *phép thử ngẫu nhiên* (gọi tắt là phép thử) và tập hợp Ω gọi là *không gian mẫu* của phép thử.

Chú ý

- 🎲 Các kết quả có thể xảy ra của một phép thử có khả năng xuất hiện như nhau được gọi là *đồng khả năng*.
- 🎲 Kết quả thuận lợi cho biến cố A là một kết quả có thể của phép thử làm cho biến cố A xảy ra.

🔴 **Ví dụ 1.** Xét phép thử “Gieo một xúc xắc một lần”.

- a) Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.
- b) Viết không gian mẫu của phép thử.

📁 Hướng dẫn giải.

- a) Các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc là

mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm.

- b) Không gian mẫu của phép thử là:

$\Omega = \{\text{mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm}\}.$

□

LUYỆN TẬP 1

Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1; 2; 3; ...; 12, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Xét phép thử “Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp”.

- a) Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.
- b) Viết không gian mẫu của phép thử đó.

📁 Hướng dẫn giải.

- a) Những kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra là

số 1; số 2; số 3; số 4; số 5; số 6;
số 7; số 8; số 9; số 10; số 11; số 12.

b) Không gian mẫu của phép thử là

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}.$$

□

B XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

⇨ **Định nghĩa 4.2.** Giả thiết rằng các kết quả có thể xảy ra trong một phép thử là đồng khả năng. Khi đó, xác suất của biến cố A , kí hiệu là $P(A)$, bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố A và tổng số kết quả có thể xảy ra.

$$P(A) = \frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho biến cố } A}{\text{Tổng số kết quả có thể xảy ra}}.$$

Nhận xét

Để tính xác suất của biến cố A , ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1. Kiểm tra tính đồng khả năng đối với các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

Bước 2. Đếm số kết quả có thể xảy ra, tức là đếm số phần tử của không gian mẫu Ω .

Bước 3. Đếm số kết quả thuận lợi cho biến cố A .

Bước 4. Lập tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố A và tổng số kết quả có thể xảy ra.

🔴 **Ví dụ 2.** Hai bạn nam Hùng, Dũng và hai bạn nữ Dung, Nguyệt tham gia hội văn nghệ của lớp 9A. Cô giáo phụ trách đội chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca.

a) Liệt kê các cách chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca.

b) Tính xác suất của các biến cố sau

🎲 B : “Trong hai bạn được chọn, có một bạn nam và một bạn nữ”.

🎲 C : “Trong hai bạn được chọn, có bạn Nguyệt”.

🔵 Hướng dẫn giải.

Xét phép thử “Chọn ngẫu nhiên hai bạn để hát song ca”.

Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

a) Có 6 cách để chọn ra hai bạn hát song ca là

Hùng và Dũng; Hùng và Dung; Hùng và Nguyệt;
Dũng và Dung; Dũng và Nguyệt; Dung và Nguyệt.

b) Tính xác suất của các biến cố

🎲 Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố B là

Hùng và Dung; Hùng và Nguyệt; Dũng và Dung; Dũng và Nguyệt.

$$\text{Vậy } P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố C là

Hùng và Nguyệt; Dũng và Nguyệt; Dung và Nguyệt.

$$\text{Vậy } P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

□

LUYỆN TẬP 2

Hình 25 một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia thành 12 phần bằng nhau và ghi các số $1; 2; 3; \dots; 12$, chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Xét phép thử “Quay đĩa tròn một lần”. Tính xác suất của biến cố D : “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số nguyên tố”.



Hình 25

Hướng dẫn giải.

Xét phép thử “Quay đĩa tròn một lần”.

Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

Có 12 kết quả đồng khả năng có thể xảy ra của phép thử là $\Omega = \{1; 2; 3; \dots; 12\}$.

Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố D là $D = \{2; 3; 5; 7; 11\}$.

$$\text{Vậy } P(D) = \frac{5}{12}.$$

□

Ví dụ 3. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lẻ có hai chữ số.

a) Tìm số phần tử của tập hợp Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.

b) Tính xác suất của biến cố E : “Số tự nhiên được viết ra là bội của 9”.

Hướng dẫn giải.

Xét phép thử “Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lẻ có hai chữ số”.

Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

a) Tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra của phép thử là

$$\Omega = \{11; 13; 15; \dots; 99\}.$$

Số phần tử của tập hợp Ω là 45.

b) Các kết quả thuận lợi của biến cố E là

$$E = \{27; 45; 63; 81; 99\}.$$

Do đó, có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố E .

$$\text{Vậy } P(E) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}.$$

□

LUYỆN TẬP 3

Nền ẩm thực Việt Nam được đánh giá cao trên thế giới, thu hút nhiều người sành ăn trong nước và quốc tế. 16 món đặc sản đến từ các tỉnh, thành phố được chọn ra như sau: phở Thìn (Hà Nội), bánh đa Ké (Bắc Ninh), bánh đậu xanh (Hải Dương), bún cá cay (Hải Phòng), gà đồi Yên Thế (Bắc Giang), nộm da trâu (Sơn La), thắng cố (Lào Cai), miến lươn (Nghệ An), cơm hến (Huế), cá mực nháy (Hà Tĩnh), bánh mì Hội An (Quảng Nam), sủi cảo (Thành phố Hồ Chí Minh), bánh canh Trảng Bàng (Tây Ninh), cá lóc nướng (Cần Thơ), cơm dừa (Bến Tre), gỏi cá (Kiên Giang).

Chọn ngẫu nhiên một món trong 16 món đó. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- S : “Món ngon được chọn thuộc miền Bắc”.
- T : “Món ngon được chọn thuộc miền Trung”.
- U : “Món ngon được chọn thuộc miền Nam”.

Hướng dẫn giải.

Xét phép thử “Chọn ngẫu nhiên một món trong 16 món”.

Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

Tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra của phép thử là

phở Thìn (Hà Nội), bánh đa Ké (Bắc Ninh), bánh đậu xanh (Hải Dương),
bún cá cay (Hải Phòng), gà đồi Yên Thế (Bắc Giang), nộm da trâu (Sơn La),
thắng cố (Lào Cai), miến lươn (Nghệ An), cơm hến (Huế),
cá mực nháy (Hà Tĩnh), bánh mì Hội An (Quảng Nam),
sủi cảo (Thành phố Hồ Chí Minh), bánh canh Trảng Bàng (Tây Ninh),
cá lóc nướng (Cần Thơ), cơm dừa (Bến Tre), gỏi cá (Kiên Giang).

Do đó, số phần tử của tập hợp Ω là 16.

- Các kết quả thuận lợi của biến cố S là

phở Thìn (Hà Nội), bánh đa Ké (Bắc Ninh), bánh đậu xanh (Hải Dương),
bún cá cay (Hải Phòng), gà đồi Yên Thế (Bắc Giang), nộm da trâu (Sơn La),
thắng cố (Lào Cai).

Do đó, có 7 kết quả thuận lợi cho biến cố S .

$$\text{Vậy } P(S) = \frac{7}{16}.$$

- Các kết quả thuận lợi của biến cố T là

miến lươn (Nghệ An), cơm hến (Huế),
cá mực nháy (Hà Tĩnh), bánh mì Hội An (Quảng Nam).

Do đó, có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố T .

$$\text{Vậy } P(T) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

c) Các kết quả thuận lợi của biến cố U là

sủi cảo (Thành phố Hồ Chí Minh), bánh canh Trảng Bàng (Tây Ninh),
cá lóc nướng (Cần Thơ), cơm dừa (Bến Tre), gỏi cá (Kiên Giang).

Do đó, có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố U .

$$\text{Vậy } P(U) = \frac{5}{16}.$$

□

BÀI TẬP

 **Bài 15.** Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các bi đó các số 1; 2; 3; ... ; 20, hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau. Xét phép thử “Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp”.

- Liệt kê các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên viên bi được lấy ra.
- Viết không gian mẫu của phép thử đó.
- Tính xác suất của biến cố “Số xuất hiện trên viên bi lấy ra chia cho 7 dư 1”.

Hướng dẫn giải.

Xét phép thử “Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp”.

Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

- Các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên viên bi được lấy ra là

$$1; 2; 3; \dots; 20.$$

- Không gian mẫu của phép thử đó là

$$\Omega = \{1; 2; 3; \dots; 20\}.$$

- Số phần tử của tập hợp Ω là 20.

Các kết quả thuận lợi của biến cố A : “Số xuất hiện trên viên bi lấy ra chia cho 7 dư 1” là

$$1; 8; 15.$$

Do đó, có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố A .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{3}{20}.$$

□

 **Bài 16.** Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lớn hơn 499 và nhỏ hơn 1000.

- Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra của phép thử trên?
- Tính xác suất của các biến cố sau

 A : “Số tự nhiên được viết ra chia hết cho 100”.

 B : “Số tự nhiên được viết ra là lập phương của một số tự nhiên”.

Hướng dẫn giải.

Xét phép thử “Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên lớn hơn 499 và nhỏ hơn 1000”.
Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

a) Các kết quả có thể xảy ra của phép thử trên là

$$\Omega = \{500; 501; 502; \dots; 999\}.$$

Do đó, số phần tử của tập hợp Ω là 500.

b) Tính xác suất của các biến cố

🟡 Các kết quả thuận lợi của biến cố A là $\{500; 600; 700; 800; 900\}$.
Do đó, có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{5}{500} = \frac{1}{100}.$$

🟢 Các kết quả thuận lợi của biến cố B là $\{512; 729\}$.
Do đó, có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố B .

$$\text{Vậy } P(B) = \frac{2}{500} = \frac{1}{250}.$$

□

Bài 17. Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1; 2; 3; \dots; 52$, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp.
Tính xác suất của các biến cố sau

a) “Số xuất hiện trên thẻ được rút là số nhỏ hơn 27”.

b) “Số xuất hiện trên thẻ được rút là số lớn hơn 19 và nhỏ hơn 51”.

Hướng dẫn giải.

Xét phép thử “Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp”.

Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

Các kết quả có thể xảy ra của phép thử trên là

$$\Omega = \{1; 2; 3; \dots; 52\}.$$

Do đó, số phần tử của tập hợp Ω là 52.

a) Xét biến cố A : “Số xuất hiện trên thẻ được rút là số nhỏ hơn 27”.

Các kết quả thuận lợi của biến cố A là $\{1; 2; 3; \dots; 26\}$.

Do đó, có 26 kết quả thuận lợi cho biến cố A .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}.$$

b) Xét biến cố B : “Số xuất hiện trên thẻ được rút là số lớn hơn 19 và nhỏ hơn 51”.

Các kết quả thuận lợi của biến cố B là $\{20; 21; 23; \dots; 50\}$.

Do đó, có 31 kết quả thuận lợi cho biến cố B .

$$\text{Vậy } P(B) = \frac{31}{52}.$$

□

Bài 18. Nhóm học sinh tình nguyện khối 9 của một trường trung học cơ sở có 6 bạn trong đó có 3 bạn nam là: Trung (lớp 9A); Quý (lớp 9A); Việt (lớp 9C) và 3 bạn nữ là: An (lớp 9A); Châu (lớp 9B); Hương (lớp 9D). Chọn ngẫu nhiên một bạn trong nhóm đó để tham gia hoạt động tình nguyện của trường.

a) Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử trên. Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

b) Tính xác suất của các biến cố sau

 A : “Bạn được chọn ra là nữ”.

 B : “Bạn được chọn ra thuộc lớp 9A”.

Hướng dẫn giải.

Xét phép thử “Chọn ngẫu nhiên một bạn trong nhóm”.

Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

a) Tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử trên là

Trung (lớp 9A); Quý (lớp 9A); Việt (lớp 9C);
An (lớp 9A); Châu (lớp 9B); Hương (lớp 9D).

Do đó, số phần tử của tập hợp Ω là 6.

b) Tính xác suất của các biến cố sau

 Các kết quả thuận lợi của biến cố A là

An (lớp 9A); Châu (lớp 9B); Hương (lớp 9D).

Do đó, có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố A .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

 Các kết quả thuận lợi của biến cố B là

Trung (lớp 9A); Quý (lớp 9A); An (lớp 9A).

Do đó, có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố B .

$$\text{Vậy } P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

□

 **Bài 19.** Trên mặt phẳng cho năm điểm $A; B; C; D; E$, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Hai điểm $A; B$ được tô màu đỏ, ba điểm $C; D; E$ được tô màu xanh. Bạn Châu chọn ra ngẫu nhiên một điểm tô màu đỏ và một điểm tô màu xanh (trong năm điểm đó) để nối thành một đoạn thẳng.

a) Liệt kê các cách chọn mà bạn Châu có thể thực hiện.

b) Tính xác suất của các biến cố sau

 P : “Trong hai điểm được chọn ra, có điểm A ”.

 Q : “Trong hai điểm được chọn ra, không có điểm C ”.

Hướng dẫn giải.

Xét phép thử “Chọn ra ngẫu nhiên một điểm tô màu đỏ và một điểm tô màu xanh”.

Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

a) Tất cả các cách chọn mà bạn Châu có thể thực hiện là

$AC; AD; AE; BC; BD; BE$.

Do đó, số phần tử của tập hợp Ω là 6.

b) Tính xác suất của các biến cố

❖ Các kết quả thuận lợi của biến cố P là

$$AC; AD; AE.$$

Do đó, có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố P .

$$\text{Vậy } P(P) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

❖ Các kết quả thuận lợi của biến cố Q là

$$AD; AE; BD; BE.$$

Do đó, có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố Q .

$$\text{Vậy } P(Q) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

□

Bài 20. Một bó hoa gồm 3 bông hoa màu đỏ và 1 bông hoa màu vàng. Bạn Linh chọn ngẫu nhiên 2 bông hoa từ bó hoa đó.

a) Liệt kê các cách chọn mà bạn Linh có thể thực hiện.

b) Tính xác suất của các biến cố sau

❖ R : “Trong 2 bông hoa được chọn ra, có đúng 1 bông hoa màu đỏ”.

❖ T : “Trong 2 bông hoa được chọn ra, có ít nhất 1 bông hoa màu đỏ”.

Hướng dẫn giải.

Xét phép thử “Chọn ngẫu nhiên 2 bông hoa từ bó hoa đó”.

Ta thấy, các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng.

a) Giả sử 3 bông hoa màu đỏ là đỏ 1; đỏ 2; đỏ 3.

Tất cả các cách chọn mà bạn Linh có thể thực hiện là

đỏ 1 và vàng; đỏ 2 và vàng; đỏ 3 và vàng;
đỏ 1 và đỏ 2; đỏ 1 và đỏ 3; đỏ 2 và đỏ 3.

Do đó, số phần tử của tập hợp Ω là 6.

b) Tính xác suất của các biến cố

❖ Các kết quả thuận lợi của biến cố R là

đỏ 1 và vàng; đỏ 2 và vàng; đỏ 3 và vàng.

Do đó, có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố R .

$$\text{Vậy } P(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

❖ Các kết quả thuận lợi của biến cố T là

đỏ 1 và vàng; đỏ 2 và vàng; đỏ 3 và vàng;
đỏ 1 và đỏ 2; đỏ 1 và đỏ 3; đỏ 2 và đỏ 3.

Do đó, có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố T .

$$\text{Vậy } P(T) = \frac{6}{6} = 1.$$

□

Chủ đề 5. ÔN TẬP CHƯƠNG VI

Câu 1. Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu sản phẩm mới. Người điều tra yêu cầu mỗi người được phỏng vấn cho điểm mẫu sản phẩm đó theo thang điểm là 100. Kết quả thống kê như sau

50	60	62	64	71	73	70	70	70	75
75	52	55	69	80	75	75	78	79	73
55	72	71	85	82	90	78	78	75	75
65	85	87	77	81	79	99	75	70	72

Ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau

$$[50; 60), [60; 70), [70; 80), [80; 90), [90; 100).$$

a) Tần số ghép nhóm của nhóm $[70; 80)$ là

(A) 20.

(B) 21.

(C) 22.

(D) 23.

b) Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[50; 60)$ là

(A) 10%.

(B) 12,5%.

(C) 5%.

(D) 15%.

Hướng dẫn giải.

Ta có bảng số liệu ghép nhóm như sau.

Nhóm	$[50; 60)$	$[60; 70)$	$[70; 80)$	$[80; 90)$	$[90; 100)$	Tổng
Tần số (n)	4	5	23	6	2	40

a) Tần số ghép nhóm của nhóm $[70; 80)$ là 23.

b) Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[50; 60)$ là $\frac{4}{40} \times 100\% = 10\%$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Một hộp có 25 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 2, 4, 6, ..., 48, 50. Hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Xác suất của biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nhỏ hơn 26” là

(A) $\frac{14}{25}$.

(B) $\frac{13}{25}$.

(C) $\frac{12}{25}$.

(D) $\frac{24}{25}$.

Hướng dẫn giải.

Không gian mẫu: $\Omega = 25$.

Các khả năng xảy biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nhỏ hơn 26” là

$$2, 4, 6, \dots, 24.$$

Ta thấy có 12 khả năng.

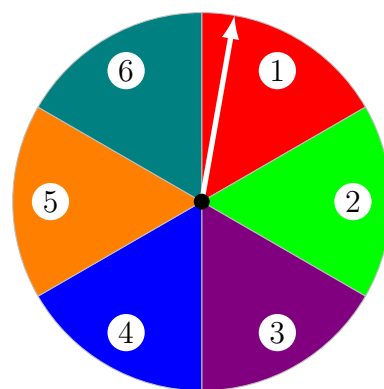
Vậy xác suất của biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nhỏ hơn 26” là $P = \frac{12}{25}$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 3.

Hình 26 mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm sáu phần bằng nhau và ghi các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Quay đĩa tròn và ghi lại số ở hình quạt mà chiếc kim chỉ vào khi đĩa dừng lại. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại số liệu sau 40 lần quay đĩa tròn.

1 1 3 5 4 6 1 2 6 4
 1 5 5 2 4 3 3 6 5 2
 5 6 2 3 3 4 2 3 3 4
 4 5 4 6 1 2 3 5 6 6

**Hình 26**

- Trong 40 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau?
- Tìm tần số của mỗi giá trị đó.
 Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê đó.
 Vẽ biểu đồ tần số ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu thống kê đó.
- Tìm tần số tương đối của mỗi giá trị đó.
 Lập bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê đó.
 Vẽ biểu đồ tần số tương đối ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn của mẫu số liệu thống kê đó.

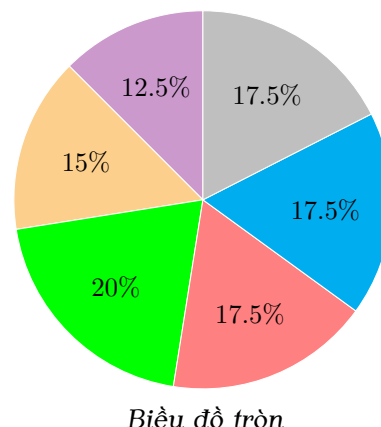
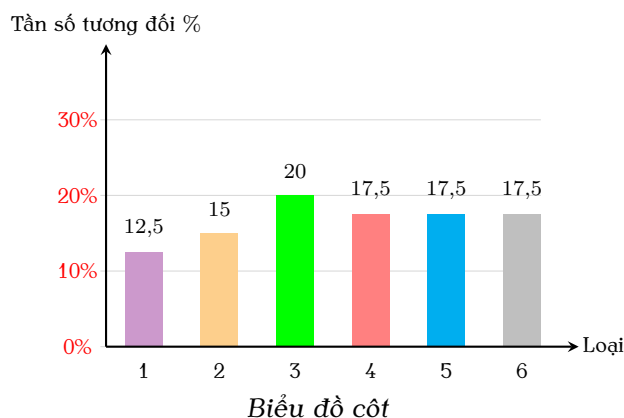
Hướng dẫn giải.

- Trong 40 số liệu thống kê ở trên, có 6 giá trị khác nhau. Gồm 1; 2; 3; 4; 5; 6.
- Lập bảng tần số của mẫu số liệu thống kê.

Loại	1	2	3	4	5	6	Tổng
Tần số (n)	5	6	8	7	7	7	40

- Bảng tần số tương đối của mẫu số liệu.

Loại	1	2	3	4	5	6	Tổng
Tần số tương đối (%)	12,5	15	20	17,5	17,5	17,5	100

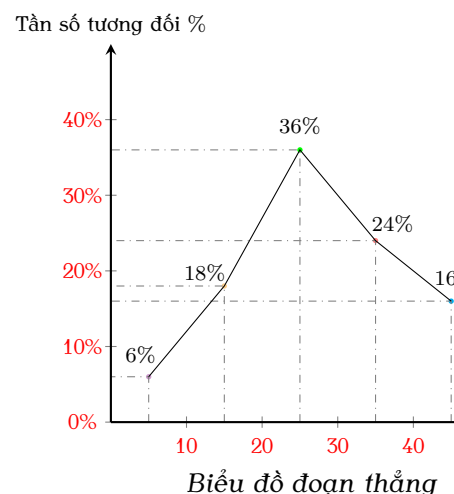
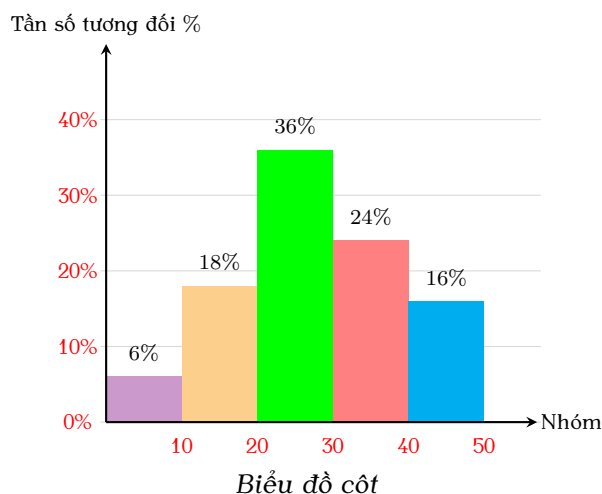


Bài 4. Sau khi thống kê độ dài (đơn vị: centimét) của 50 cây con ở vườn thí nghiệm, người ta nhận được bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau.

Nhóm	$[0; 10)$	$[10; 20)$	$[20; 30)$	$[30; 40)$	$[40; 50)$	Cộng
Tần số tương đối (%)	6	18	36	24	16	100

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm.

Hướng dẫn giải.



□

Bài 5. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại độ dài quãng đường di chuyển trong một tuần (đơn vị: kilômét) của 60 chiếc ô tô.

100 105 115 116 130 135 138 132 135 120 118 118
 125 128 120 124 140 140 146 145 142 142 135 135
 145 148 150 150 159 155 151 156 155 151 157 155
 154 152 153 160 162 175 176 165 188 198 175 178
 121 124 128 142 144 151 159 151 155 172 170 195

Ghép các số liệu trên thành năm nhóm sau.

$[100; 120)$, $[120; 140)$, $[140; 160)$, $[160; 180)$, $[180; 200)$.

a) Tìm tần số của mỗi nhóm đó.

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

b) Tìm tần số tương đối của mỗi nhóm đó.

Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

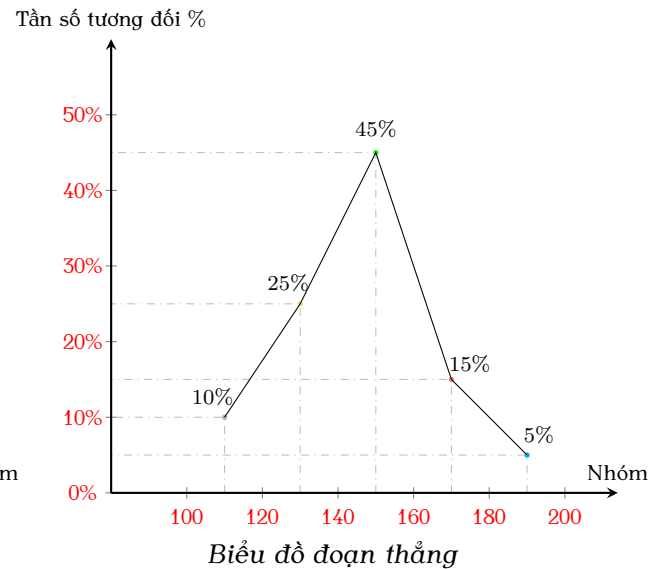
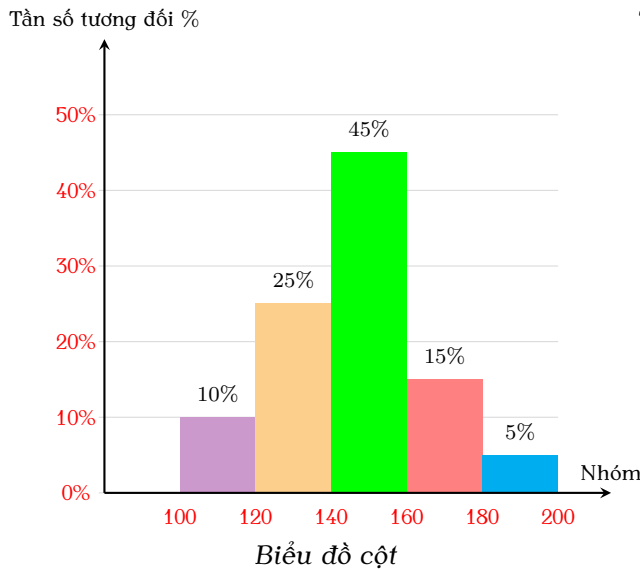
Hướng dẫn giải.

a) Bảng tần số ghép nhóm.

Nhóm	$[100; 120)$	$[120; 140)$	$[140; 160)$	$[160; 180)$	$[180; 200)$	Cộng
Tần số (n)	6	15	27	9	3	60

b) Bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Nhóm	[100; 120)	[120; 140)	[140; 160)	[160; 180)	[180; 200)	Cộng
Tần số tương đối (%)	10	25	45	15	5	100



□

Bài 6.

Mỗi nhân viên của một công ty làm việc ở một trong năm bộ phận của công ty đó là

Hành chính - Nhân sự.

Truyền thông - Quảng cáo.

Kinh doanh.

Sản xuất.

Dịch vụ.

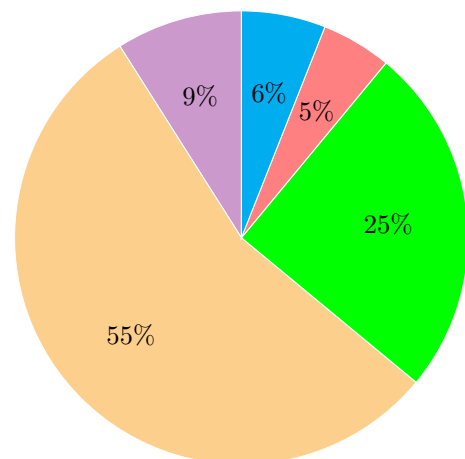
Biểu đồ hình quạt tròn trong hình 27 thống kê tỉ lệ nhân viên thuộc mỗi bộ phận.

Chọn ngẫu nhiên một nhân viên của công ty.

Tính xác suất của mỗi biến cố sau.

A: “Nhân viên được chọn thuộc bộ phận Kinh doanh”.

B: “Nhân viên được chọn không thuộc bộ phận Hành chính - Nhân sự hay Dịch vụ”



Hành chính - Nhân sự

Truyền thông - Quảng cáo

Sản xuất Kinh doanh Dịch vụ

Hướng dẫn giải.

Xác suất của biến cố A: “Nhân viên được chọn thuộc bộ phận Kinh doanh” là 55%

Xác suất của biến cố B: “Nhân viên được chọn không thuộc bộ phận Hành chính - Nhân sự hay Dịch vụ” là 94%. □

Bài 7.

Biểu đồ cột kép ở Hình 28 biểu diễn số lượng học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của một trường trung học cơ sở.

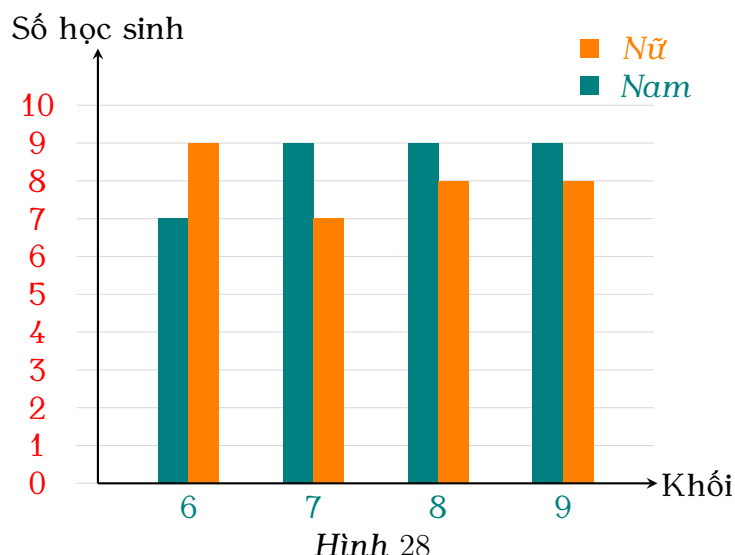
Chọn ngẫu nhiên một học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của trường đó.

Tính xác suất của mỗi biến cố sau

A: “Học sinh được chọn là nam”.

B: “Học sinh được chọn thuộc khối 6”.

C: “Học sinh được chọn là nữ và không thuộc khối 9”.



Hướng dẫn giải.

Dựa vào biểu đồ ta thấy.

Có tất cả $(7 + 9) + (9 + 7) + (9 + 8) + (9 + 8) = 66$ học sinh.

Có $7 + 9 + 9 + 9 = 34$ học sinh nam.

Có $7 + 9 = 16$ học sinh khối 6.

Có $9 + 7 + 8 = 24$ học sinh nữ không thuộc khối 9.

Như vậy ta tính được.

Xác suất của biến cố A: “Học sinh được chọn là nam” là $P(A) = \frac{n(A)}{\Omega} = \frac{34}{66} = \frac{17}{33}$.

Xác suất của biến cố B: “Học sinh được chọn thuộc khối 6” là $P(B) = \frac{n(B)}{\Omega} = \frac{16}{66} = \frac{8}{33}$.

Xác suất của biến cố C: “Học sinh được chọn là nữ và không thuộc khối 9” là

$$P(C) = \frac{n(C)}{\Omega} = \frac{24}{66} = \frac{4}{11}.$$

□

Bài 8. Trong một kì thi học sinh giỏi Toán, tỉ lệ học sinh đạt giải là 35%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh đã tham gia kì thi đó. Tính xác suất của biến cố: “Học sinh được chọn đạt giải”

Hướng dẫn giải.

Vì tỉ lệ học sinh đạt giải là 35% nên xác suất việc chọn ngẫu nhiên một học sinh đã tham gia kì thi đó thì biến cố “Học sinh được chọn đạt giải” là 35%. □

Chương 7.



HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Chủ đề 1. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

A HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Ví dụ 1. Hàm số nào sau đây có dạng $y = ax^2$ ($a \neq 0$)? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của x^2 .

a) $y = x^2$;

b) $y = -3x^2$;

c) $y = \frac{4x^2}{9}$;

d) $y = \frac{2}{x^2}$.

Hướng dẫn giải.

Các hàm số có dạng $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là

a) $y = x^2$, có $a = 1$;

b) $y = -3x^2$, có $a = -3$;

c) $y = \frac{4x^2}{9}$, có $a = \frac{4}{9}$.

□

LUYỆN TẬP 1

Hàm số nào sau đây có dạng $y = ax^2$ ($a \neq 0$)? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của x^2 .

a) $y = -x^2$;

b) $y = \frac{x^2}{2}$.

Hướng dẫn giải.

Các hàm số có dạng $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là

a) $y = -x^2$, có $a = -1$;

b) $y = \frac{x^2}{2}$, có $a = \frac{1}{2}$.

□

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = 4x^2$. Tính giá trị của y khi:

a) $x = 0$;

b) $x = 2$;

c) $x = -2$.

Hướng dẫn giải.

a) Với $x = 0$ thì $y = 4 \cdot 0^2 = 0$.

b) Với $x = 2$ thì $y = 4 \cdot 2^2 = 16$.

c) Với $x = -2$ thì $y = 4 \cdot (-2)^2 = 16$.

□

LUYỆN TẬP 2

Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^2$. Tính giá trị của y khi:

a) $x = -3$;

b) $x = 0$;

c) $x = 3$.

Hướng dẫn giải.

a) Với $x = -3$ thì $y = \frac{2}{3} \cdot (-3)^2 = 6$.

b) Với $x = 0$ thì $y = \frac{2}{3} \cdot (0)^2 = 0$.

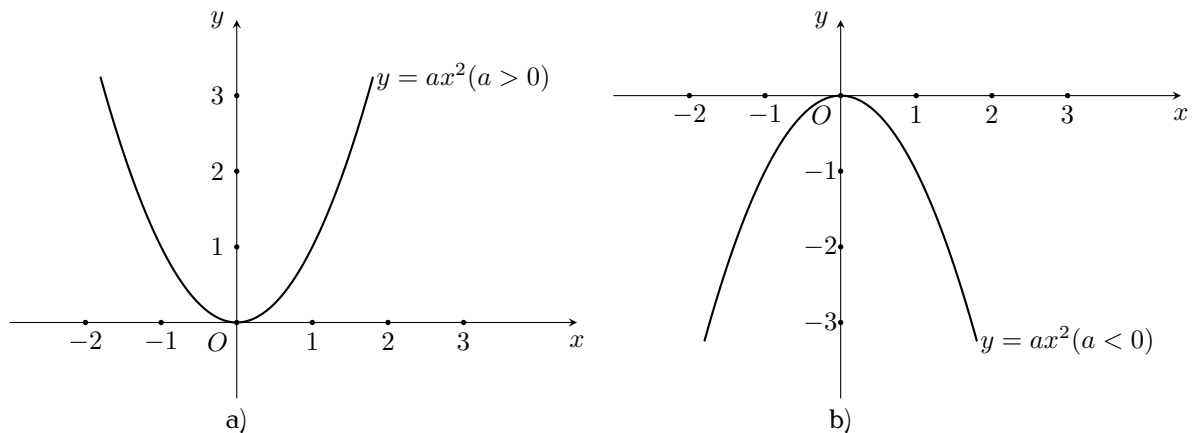
c) Với $x = 3$ thì $y = \frac{2}{3} \cdot 3^2 = 6$.

□

❖ **Nhận xét 1.1.** Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi giá trị x thuộc $\mathbb{R}$.

B ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

❖ **Nhận xét 1.2.** Trong trường hợp tổng quát, đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong được gọi là parabol. Parabol đó luôn đi qua gốc tọa độ và có dạng như sau:



Hình 3

❖ Nếu $a > 0$ thì đồ thị đó nằm phía trên trục hoành (Hình 3a). Ngược lại, nếu $a < 0$ thì đồ thị đó nằm phía dưới trục hoành (Hình 3b).

Định lý 1.1. Để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$), ta có thể thực hiện các bước sau:

- ❖ **Bước 1.** Lập bảng giá trị để tìm giá trị của y tương ứng với một số giá trị cụ thể của x .
- ❖ **Bước 2.** Căn cứ vào bảng giá trị, vẽ một số điểm cụ thể thuộc đồ thị của hàm số đó.
- ❖ **Bước 3.** Vẽ parabol đi qua gốc tọa độ và các điểm đã xác định ở Bước 2, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Vi dụ 3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

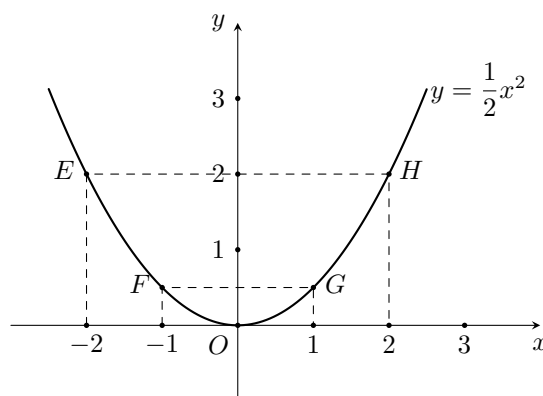
Hướng dẫn giải.

Ta có bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Vẽ các điểm $E(-2; 2)$, $F(-1; \frac{1}{2})$, $O(0; 0)$, $G(1; \frac{1}{2})$, $H(2; 2)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Vẽ đường parabol đi qua 5 điểm E, F, O, G, H , ta nhận được đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ (Hình 4).



Hình 4

□

LUYỆN TẬP 3

Vẽ đồ thị của hàm số $y = -3x^2$.

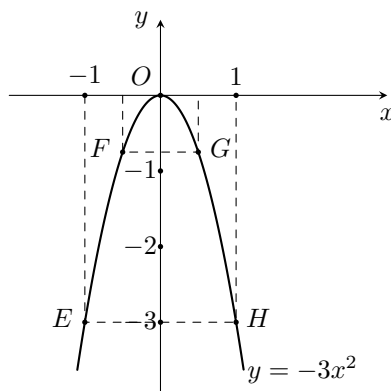
Hướng dẫn giải.

Ta có bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = -3x^2$	-3	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	-3

Vẽ các điểm $E(-1; -3)$, $F(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4})$, $O(0; 0)$, $G(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4})$, $H(1; -3)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = -3x^2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Vẽ đường parabol đi qua 5 điểm E, F, O, G, H , ta nhận được đồ thị của hàm số $y = -3x^2$.



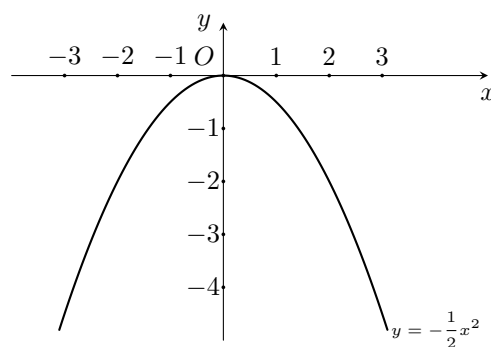
□

❖ **Nhận xét 1.3.** Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một parabol đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng.

🔴 **Ví dụ 4.**

Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol được cho ở Hình 5.

- Các điểm $M(-2; -2)$; $N(2; -2)$ có thuộc parabol đó hay không?
- Nêu nhận xét về vị trí cặp điểm M và N đối với trục Oy .



📁 **Hướng dẫn giải.**

- Do $-2 = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2$ và $-2 = -\frac{1}{2} \cdot 2^2$ nên các điểm $M(-2; -2)$; $N(2; -2)$ thuộc parabol đó.
- Ta thấy hai điểm M và N đối xứng nhau qua trục Oy .

□

🔴 **Ví dụ 5.** Lực F (N) của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương tốc độ v (m/s) của gió theo công thức: $F = av^2$, ở đó a là một hằng số. Biết rằng, khi tốc độ gió là 2 (m/s) thì lực tác động lên cánh buồm của con thuyền bằng 120 N.



Thuyền buồm

- a) Tính hằng số a .
- b) Khi tốc độ của gió là $v = 10$ m/s thì lực F của gió tác động lên cánh buồm là bao nhiêu?
- c) Cánh buồm của thuyền chỉ chịu được lực tác động tối đa là 12000 N. Hỏi con thuyền có thể ra khơi khi tốc độ của gió là 90 km/h hay không? Vì sao?

Hướng dẫn giải.

- a) Thay $v = 2$, $F = 120$ vào công thức $F = av^2$, ta được $120 = a \cdot 2^2$ hay $4a = 120$.
Suy ra $a = 30$.
- b) Do $a = 30$ nên $F = 30v^2$. Với $v = 10$, ta có

$$F = 30 \cdot 10^2 = 3000 \text{ (N)}.$$

- c) Đổi $90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$. Với $v = 25$, ta có

$$F = 30 \cdot 25^2 = 18750 \text{ (N)}.$$

Ta thấy $18750 > 12000$ nên con thuyền không thể ra khơi khi tốc độ gió là 90 km/h.

□

BÀI TẬP

 **Bài 1.** Cho hàm số $y = ax^2$. Tìm a biết rằng khi $x = -3$ thì $y = 5$.

Hướng dẫn giải.

Thay $x = -3$ và $y = 5$ vào hàm số $y = ax^2$ ta được $5 = a \cdot (-3)^2$.

Suy ra $5 = 9a$ hay $a = \frac{5}{9}$.

□

 **Bài 2.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$

- a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{3}x^2$	?	?	?	?	?	?	?

- b) Dựa vào bảng giá trị trên, vẽ đồ thị của hàm số đó.
- c) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có hoành độ lần lượt bằng -6; 10.
- d) Tìm những điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ bằng 27.

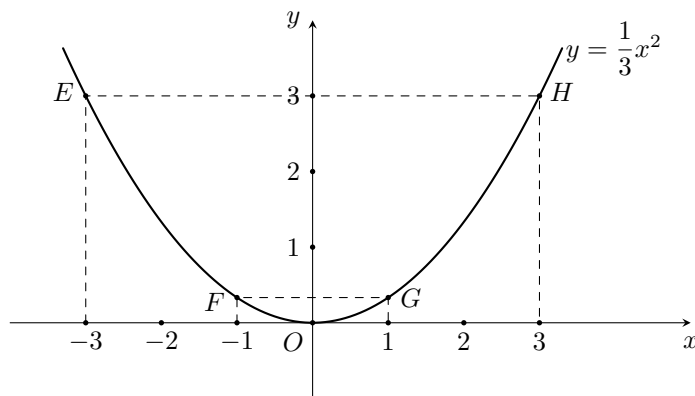
Hướng dẫn giải.

- a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{3}x^2$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3

- b) Vẽ các điểm $E(-3; 3)$, $F(-1; \frac{1}{3})$, $O(0; 0)$, $G(1; \frac{1}{3})$, $H(3; 3)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Vẽ đường parabol đi qua 5 điểm E, F, O, G, H , ta nhận được đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$.



- c) Thay $x = -6$ vào hàm số, ta được $y = \frac{1}{3} \cdot (-6)^2 = 12$.
Điểm $A(-6; 12)$ thuộc đồ thị hàm số.
Thay $x = 10$ vào hàm số, ta được $y = \frac{1}{3} \cdot 10^2 = \frac{100}{3}$.
Điểm $B(10; \frac{100}{3})$ thuộc đồ thị hàm số.
- d) Thay $y = 27$ vào hàm số, ta được $27 = \frac{1}{3}x^2$ suy ra $x^2 = 81$ nên $x = 9$ hoặc $x = -9$.
Điểm $C(9; 27)$ và $D(-9; 27)$ thuộc đồ thị hàm số.

□

Bài 3. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy điểm $M(2; -1)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

- Tìm hệ số a ;
- Điểm $A(4; -4)$ có thuộc đồ thị của hàm số hay không?
- Hãy tìm một số điểm (không kể điểm O) thuộc đồ thị của hàm số, rồi vẽ đồ thị của hàm số.

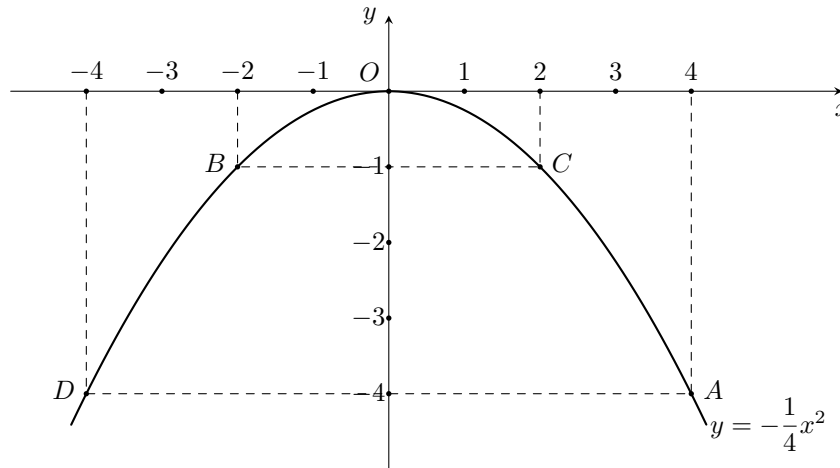
Hướng dẫn giải.

- Thay $x = 2$ và $y = -1$ vào hàm số $y = ax^2$ ta được $-1 = a \cdot 2^2$.
Suy ra $-1 = 4a$ hay $a = -\frac{1}{4}$.
Khi đó $y = -\frac{1}{4}x^2$.
- Ta có $-4 = -\frac{1}{4} \cdot 4^2$ nên điểm $A(4; -4)$ thuộc đồ thị hàm số.
- Ta có bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Vẽ các điểm $A(4; -4)$, $B(-2; -1)$, $O(0; 0)$, $C(2; -1)$, $D(-4; -4)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Vẽ đường parabol đi qua 5 điểm A, B, O, C, D , ta nhận được đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$.



□

Bài 4. Hàm số $y = at^2$ biểu thị quãng đường (đơn vị: mét) mà một chiếc xe đua đi được trong khoảng thời gian t (giây). Giả sử một chiếc xe đua đi được 125 m sau khoảng thời gian là 5 giây.

- Tìm hệ số a
- Vẽ đồ thị của hàm số đó.

Hướng dẫn giải.

- Thay $y = 125$ và $t = 5$ vào hàm số $y = at^2$, ta được $125 = a \cdot (5)^2$.

Suy ra $125 = 25a$ hay $a = 5$.

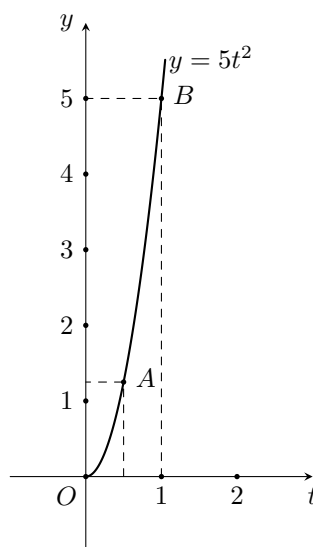
Do đó $y = 5t^2$.

- Ta có bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của $t \geq 0$ như sau:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = 5t^2$	0	$\frac{5}{4}$	5

Vẽ các điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$, $(1; 5)$, $O(0; 0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = 5t^2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

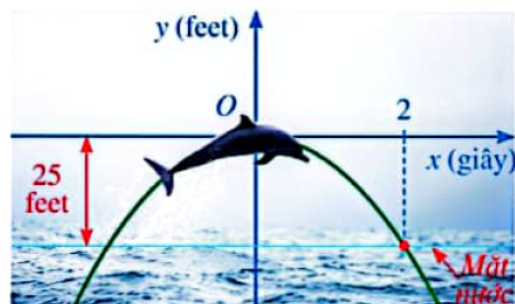
Vẽ 1 nhánh đường parabol đi qua 3 điểm A, B, O , ta nhận được đồ thị của hàm số $y = 5t^2$ với $t \geq 0$.



□

Bài 5.

Cá heo có thể nhảy cao tới 25 feet và thực hiện các thủ thuật như nhảy qua vòng, lộn nhào trong không trung. Giả sử quỹ đạo nhảy của cá heo là parabol $y = ax^2$ với gốc tọa độ là vị trí cao nhất mà cá heo đạt được, cách mặt nước 25 feet, trong đó y được tính theo đơn vị feet và x được tính theo đơn vị giây (Hình 6). Biết rằng sau 2 giây kể từ vị trí cao nhất đó, cá heo rơi chạm mặt nước. Tìm hàm số biểu thị quỹ đạo nhảy của cá heo.

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 6

Hướng dẫn giải.

Vì sau 2 giây kể từ vị trí cao nhất, cá heo rơi chạm mặt nước nên quỹ đạo nhảy của cá heo là parabol $y = ax^2$ đi qua điểm $(2; -25)$.

Thay $x = 2$ và $y = -25$ vào hàm số $y = ax^2$ ta được $-25 = a \cdot 2^2$ suy ra $-25 = 4a$ hay $a = -\frac{25}{4}$.

Vậy hàm số biểu thị quỹ đạo nhảy của cá heo là $y = -\frac{25}{4}x^2$. □

Chủ đề 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A ĐỊNH NGHĨA

❖ **Định nghĩa 2.1.** Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

❖ **Ví dụ 1.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc hai một ẩn? Đối với những phương trình bậc hai một ẩn đó, xác định hệ số a của x^2 hệ số b của x hệ số tự do c .

- a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; b) $0x^2 + 8x + 6 = 0$; c) $3x^2 - 8 = 0$.

➡ Hướng dẫn giải.

- a) Phương trình $2x^2 - 5x + 3 = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x và có $a = 2, b = -5, c = 3$.
 b) Phương trình $0x^2 + 8x + 6 = 0$ không phải là phương trình bậc hai một ẩn vì $a = 0$.
 c) Phương trình $3x^2 - 8 = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x và có $a = 3, b = 0, c = -8$.

□

LUYỆN TẬP 1

Cho hai ví dụ về:

- a) Phương trình bậc hai ẩn t ;
 b) Phương trình không phải là phương trình bậc hai một ẩn.

➡ Hướng dẫn giải.

- a) Phương trình bậc hai ẩn t là $6t^2 + 10t + 2023 = 0$; $13t^2 + 4t + 1 = 0$.
 b) Phương trình không phải là phương trình bậc hai một ẩn là $2x + 1 = 0$; $3x^3 + 2y = 0$.

□

B GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

❖ **Nhận xét 2.1.** Cho m, n là hai số thực. Ta có thể giải phương trình $(x - n)^2 = m$ như sau:

🟢 Khi $m > 0$, ta có $(x - n)^2 = m$.

$$\begin{aligned} x - n &= \sqrt{m} \text{ hoặc } x - n = -\sqrt{m} \\ x &= n + \sqrt{m} \text{ hoặc } x = n - \sqrt{m}. \end{aligned}$$

Như vậy, phương trình có hai nghiệm là $x_1 = n + \sqrt{m}$ và $x_2 = n - \sqrt{m}$.

🟢 Khi $m = 0$, phương trình có nghiệm $x_1 = x_2 = n$ (nghiệm kép).

🟢 Khi $m < 0$, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình $(x - 1)^2 = 3$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $(x - 1)^2 = 3$

$x - 1 = \sqrt{3}$ hoặc $x - 1 = -\sqrt{3}$

$x = 1 + \sqrt{3}$ hoặc $x = 1 - \sqrt{3}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ và $x_2 = 1 - \sqrt{3}$. □

LUYỆN TẬP 2

Giải phương trình $(x - 4)^2 = 11$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $(x - 4)^2 = 11$

$x - 4 = \sqrt{11}$ hoặc $x - 4 = -\sqrt{11}$

$x = 4 + \sqrt{11}$ hoặc $x = 4 - \sqrt{11}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 4 + \sqrt{11}$ và $x_2 = 4 - \sqrt{11}$. □

Nhận xét 2.2. Ta có thể giải phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) theo các bước sau

Bước 1. Chia hai vế của phương trình cho a , ta được phương trình

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (3)$$

Bước 2. Viết lại số hạng $\frac{b}{a}x = 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$ và thêm số hạng $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ vào hai vế của phương trình (3) để vế trái thành bình phương của một biểu thức

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Bước 3. Kí hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$ và gọi nó là biệt thức của phương trình (Δ là một chữ cái Hy Lạp, đọc là “đenta”). Khi đó, phương trình (3) viết được về dạng

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \quad (4)$$

Bước 4. Giải phương trình (4). Từ đó, kết luận nghiệm của phương trình đã cho.

Tóm lại, ta có kết luận chung sau

Định nghĩa 2.2. Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

🔲 Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

🔲 Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

🔴 **Ví dụ 3.** Giải các phương trình:

a) $2x^2 - x - 3 = 0;$

b) $-3x^2 + x - 5 = 0;$

c) $9x^2 + 6x + 1 = 0.$

🔵 **Hướng dẫn giải.**

a) Phương trình có các hệ số $a = 2, b = -1, c = -3,$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 > 0.$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}; x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -1.$$

b) Phương trình có các hệ số $a = -3, b = 1, c = -5,$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-5) = -59 < 0.$$

Do $\Delta < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Phương trình có các hệ số $a = 9, b = 6, c = 1,$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0.$$

Do $\Delta = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-6}{2 \cdot 9} = -\frac{1}{3}.$$

□

LUYỆN TẬP 3

Giải các phương trình:

a) $3x^2 - x - 0,5 = 0;$

b) $4x^2 + 10x + 15 = 0;$

c) $-x^2 + x - \frac{1}{4} = 0.$

🔵 **Hướng dẫn giải.**

a) Phương trình có các hệ số $a = 3, b = -1, c = -0,5,$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-0,5) = 7 > 0.$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{7}}{2 \cdot 3} = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}; x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{7}}{2 \cdot 3} = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}.$$

b) Phương trình có các hệ số $a = 4, b = 10, c = 15$,

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = -500 < 0.$$

Do $\Delta < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Phương trình có các hệ số $a = -1, b = 1, c = -\frac{1}{4}$,

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 0.$$

Do $\Delta = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}.$$

□

❖ **Nhận xét 2.3.** Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

❖ Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

❖ Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$.

❖ Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Công thức nghiệm vừa viết trên đây được gọi là **công thức nghiệm thu gọn**.

🔴 **Ví dụ 4.** Giải các phương trình:

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$; b) $-16x^2 + 24x - 9 = 0$; c) $3x^2 - 2x + 9 = 0$.

📁 **Hướng dẫn giải.**

a) Phương trình có các hệ số $a = 3, b = -4, c = -2$. Do $b = -4$ nên $b' = -2$.

Ta có $\Delta' = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) = 10 > 0$.

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{10}}{3} = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}; \quad x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{10}}{3} = \frac{2 - \sqrt{10}}{3}.$$

b) Phương trình có các hệ số $a = -16, b = 24, c = -9$. Do $b = 24$ nên $b' = 12$.

Ta có $\Delta' = 12^2 - (-16) \cdot (-9) = 0$.

Do $\Delta' = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-12}{-16} = \frac{3}{4}$.

c) Phương trình có các hệ số $a = 3, b = -2, c = 9$. Do $b = -2$ nên $b' = -1$.

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 3 \cdot 9 = -26 < 0$.

Do $\Delta' < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

□

LUYỆN TẬP 4

Giải các phương trình:

a) $x^2 - 6x - 5 = 0$; b) $-3x^2 + 12x - 35 = 0$; c) $-25x^2 + 30x - 9 = 0$.

 Hướng dẫn giải.

a) Phương trình có các hệ số $a = 1$, $b = -6$, $c = -5$. Do $b = -6$ nên $b' = -3$.

Ta có $\Delta' = (-3)^2 - 1 \cdot (-5) = 14 > 0$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{14}}{1} = 3 - \sqrt{14}; \quad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{14}}{1} = 3 + \sqrt{14}.$$

b) Phương trình có các hệ số $a = -3$, $b = 12$, $c = -35$. Do $b = 12$ nên $b' = 6$.

Ta có $\Delta' = 6^2 - (-3) \cdot (-35) = -69$.

Do $\Delta' < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Phương trình có các hệ số $a = -25$, $b = 30$, $c = -9$. Do $b = 30$ nên $b' = 15$.

Ta có $\Delta' = 15^2 - 25 \cdot (-9) = 0$.

Do $\Delta' = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-15}{-25} = \frac{3}{5}$.

□

 **Ví dụ 5.** Giải phương trình $3x^2 - 4x - 2 = 2x^2 + x - 8$.

 Hướng dẫn giải.

Chuyển các số hạng ở vế phải của phương trình sang vế trái, ta nhận được phương trình

$$x^2 - 4x - 2 - 2x^2 - x + 8 = 0 \text{ hay } x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Ta giải phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Phương trình trên có các hệ số $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$,

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0.$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là

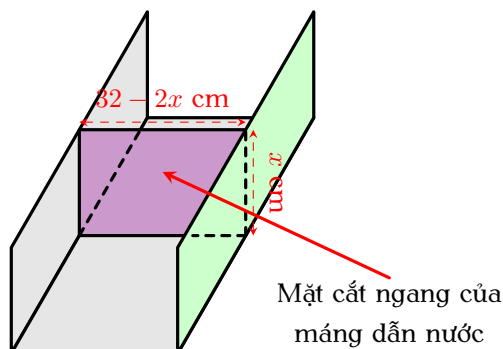
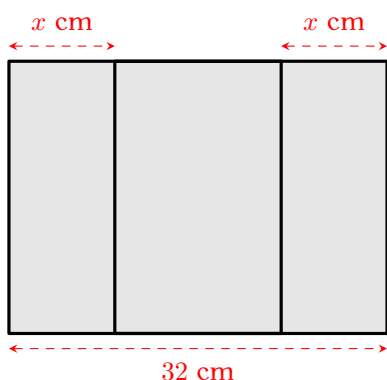
$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 3; \quad x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 3$; $x_2 = 2$.

□

ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

 **Ví dụ 6.** Bác Nam muốn uốn một tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang là 32 cm thành một máng dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như Hình 7 với $0 < x < 16$. Bác Nam muốn diện tích mặt cắt ngang của máng dẫn nước bằng 120 cm^2 .



- a) Thiết lập phương trình bậc hai ẩn x biểu thị diện tích mặt cắt ngang của máng dẫn nước.
- b) Tìm chiều cao của máng dẫn nước.

Hướng dẫn giải.

- a) Mặt cắt ngang của máng dẫn nước có kích thước là x cm và $32 - 2x$ cm. Do đó, diện tích mặt cắt ngang là $(32 - 2x) \cdot x$ (cm²).
Để diện tích mặt cắt ngang của máng dẫn nước bằng 120 cm² thì $(32 - 2x) \cdot x = 120$ hay ta có phương trình ẩn x biểu thị diện tích mặt cắt ngang của máng dẫn nước là

$$-2x^2 + 32x - 120 = 0 \text{ hay } x^2 - 16x + 60 = 0. \quad (1)$$

- b) Phương trình (1) có các hệ số $a = 1$, $b = -16$, $c = 60$. Do $b = -16$ nên $b' = -8$.
Ta có $\Delta' = (-8)^2 - 1 \cdot 60 = 4 > 0$.
Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{1} = 10; x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{1} = 6 \text{ (thoả mãn điều kiện } 0 < x < 16).$$

Vậy chiều cao của máng dẫn nước là 10 cm hoặc 6 cm.

□

✧ **Nhận xét 2.4.** Để giải bài toán trên bằng cách lập phương trình bậc hai, ta có thể làm như sau:

 Bước 1. Lập phương trình bậc hai.

-  Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số.
-  Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
-  Lập phương trình bậc hai biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

 Bước 2. Giải phương trình bậc hai.

 Bước 3. Kết luận.

-  Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn, nghiệm nào không thoả mãn điều kiện của ẩn.
-  Đưa ra câu trả lời.

❶ Ví dụ 7. Bác Hoa gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng ở một ngân hàng. Sau kì hạn 12 tháng, tiền lãi của kì hạn đó được cộng vào tiền vốn, rồi bác Hoa tiếp tục đem gửi cho kì hạn 12 tháng tiếp theo. Tổng số tiền mà bác Hoa nhận được sau khi gửi 24 tháng trên là 113 635 600 đồng. Tìm lãi suất tính theo năm của ngân hàng đó, biết trong 24 tháng đó, lãi suất ngân hàng không thay đổi và bác Hoa không rút tiền ra khỏi ngân hàng.

➡ Hướng dẫn giải.

Gọi lãi suất tính theo năm của ngân hàng đó là $x\%$ năm ($x > 0$).

Số tiền bác Hoa có được sau khi gửi tiết kiệm 12 tháng đầu tiên là

$$100 + 100 \cdot \frac{x}{100} = 100 \left(1 + \frac{x}{100}\right) \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền bác Hoa có được sau khi gửi tiết kiệm 24 tháng là

$$100 \left(1 + \frac{x}{100}\right) + 100 \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{x}{100} = 100 \left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 + \frac{x}{100}\right) \text{ (triệu đồng)}.$$

Vì sau 24 tháng gửi tiết kiệm bác Hoa có tổng số tiền là 113 635 600 đồng nên ta có phương trình

$$100 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 = 113,6356 \text{ hay } \frac{1}{100}(100 + x)^2 = 113,6356; \text{ tức là } (100 + x)^2 = 11363,56.$$

Giải phương trình trên với $x > 0$, ta có

$$100 + x = \sqrt{11363,56}$$

$$100 + x = 106,6$$

$$x = 6,6 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > 0).$$

Vậy lãi suất tính theo năm của ngân hàng đó là 6,6%/năm. □

LUYỆN TẬP 5

Giả sử khi ném một quả bóng vào rổ, độ cao y (feet) của quả bóng và thời gian x (giây) liên hệ với nhau bởi công thức

$$y = -0,07(x + 6,14)^2 + 4,64 \text{ (Nguồn: https://askiitians.com)}.$$

Khi quả bóng chạm đất, ta có thời gian x thỏa mãn phương trình

$$-0,07(x + 6,14)^2 + 4,64 = 0.$$

Hỏi sau bao lâu thì quả bóng chạm đất?

➡ Hướng dẫn giải.

Ta giải phương trình $-0,07(x + 6,14)^2 + 4,64 = 0$ hay $-0,07(x + 6,14)^2 = -4,64$ tức là

$$(x + 6,14)^2 = \frac{464}{7}.$$

Giải phương trình trên với $x > 0$, ta có

$$\begin{aligned}x + 6,14 &= \sqrt{\frac{464}{7}} \\x + 6,14 &= 4\sqrt{\frac{29}{7}} \\x &\approx 2 \text{ (giây)}.\end{aligned}$$

Vậy sau khoảng 2 giây thì quả bóng chạm đất. $\square$

D SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Ta có thể tìm nghiệm (đúng hoặc gần đúng) của phương trình bậc hai một ẩn bằng cách sử dụng máy tính cầm tay. Mỗi loại máy tính khác nhau có thể có các phím khác nhau. Tuy nhiên, chúng đều có quy tắc chung là phải mở chương trình giải phương trình bậc hai một ẩn rồi mới nhập dữ liệu. Chẳng hạn, ấn liên tiếp các phím **MODE** **5** **3**.

❶ Ví dụ 8. Sử dụng máy tính cầm tay tìm nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn (làm tròn kết quả đến hàng phần mười):

$$\sqrt{3}x^2 - 4x - 7 = 0.$$

Hướng dẫn giải.

Sử dụng loại máy tính phù hợp, ấn liên tiếp các phím:

MODE **5** **3** **$\sqrt{}$** **3** **=** **-** **4** **=** **-** **7** **=** **=**

Ta thấy trên màn hình hiện ra (kết quả gần đúng) $x_1 = 3,473058841$.

Ấn tiếp phím **=** ta thấy trên màn hình hiện ra (kết quả gần đúng) $x_2 = -1,163657764$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 \approx 3,5$; $x_2 \approx -1,2$. $\square$

❷ Ví dụ 9. Sử dụng máy tính cầm tay tìm nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn (làm tròn kết quả đến hàng phần mười):

$$\sqrt{2}x^2 - 4x - \sqrt{3} = 0.$$

Hướng dẫn giải.

Ấn liên tiếp các phím:

MODE **5** **3** **$\sqrt{}$** **2** **=** **-** **4** **=** **-** **$\sqrt{}$** **3** **=** **=**

Ta thấy trên màn hình hiện ra (kết quả gần đúng) $x_1 = 3,209971027$.

Ấn tiếp phím **=** ta thấy trên màn hình hiện ra (kết quả gần đúng) $x_2 = -0,3815439022$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 \approx 3,2$; $x_2 \approx -0,4$. $\square$

E BÀI TẬP

✎ Bài 6. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc hai một ẩn? Đối với những phương trình bậc hai một ẩn đó, xác định hệ số a của x^2 hệ số b của x hệ số tự do c .

a) $0,5x^2 - 5x + \sqrt{3} = 0$;

b) $0x^2 - 0,25x + 6 = 0$;

c) $-x^2 + \sqrt{5}x = 0$.

c) Phương trình có các hệ số $a = -16$; $b = 8$; $c = -1$. Do $b = 8$ nên $b' = 4$.

$$\Delta' = 4^2 - (-16) \cdot (-1) = 0.$$

Do $\Delta = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-6}{2 \cdot 9} = \frac{-1}{3}.$$

d) Phương trình có các hệ số $a = -2$; $b = 5$; $c = -4$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = -7 < 0.$$

Do $\Delta < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

e) Phương trình có các hệ số $a = \frac{1}{5}$; $b = 0$; $c = -5$.

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot (-5) = 4 > 0.$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-0 - \sqrt{4}}{2 \cdot \frac{1}{5}} = -5; x_2 = \frac{-0 + \sqrt{4}}{2 \cdot \frac{1}{5}} = 5.$$

Cách khác

Ta có $\frac{1}{5}x^2 - 5 = 0$

Hay $x^2 = 25$

$x = -5$ hoặc $x = 5$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x_1 = -5$ và $x_2 = 5$.

f) Phương trình có các hệ số $a = 3$; $b = -\sqrt{2}$; $c = 0$.

$$\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0 = 2 > 0.$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-(-\sqrt{2}) - \sqrt{2}}{2 \cdot 3} = 0; x_2 = \frac{-(-\sqrt{2}) + \sqrt{2}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Cách khác

Ta có $3x^2 - \sqrt{2}x = 0$

Hay $x(3x - \sqrt{2}) = 0$

$x = 0$ hoặc $3x - \sqrt{2} = 0$

$x = 0$ hoặc $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x_1 = 0$ và $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

□

Bài 9. Ra đa của một máy bay trực thăng theo dõi chuyển động của một ô tô trong 10 phút, phát hiện rằng tốc độ v km/h của ô tô thay đổi phụ thuộc vào thời gian t (phút) bởi công thức $v = 3t^2 - 30t + 135$ (Nguồn: Toán 9-tập 2, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2020).

- Tính tốc độ của ô tô khi $t = 5$.
- Tính giá trị của t khi tốc độ ô tô bằng 120 km/h (theo đơn vị phút và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải.

- Thay $t = 5$ vào công thức $v = 3t^2 - 30t + 135$ ta được

$$v = 3 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + 135 = 60.$$

Vậy tốc độ của ô tô khi $t = 5$ là 60 km/h.

- Khi tốc độ ô tô bằng 120 km/h hay $v = 120$.

Thay $v = 120$ vào công thức $v = 3t^2 - 30t + 135$ ta được

$$3t^2 - 30t + 135 = 120 \text{ hay } 3t^2 - 30t + 15 = 0, \text{ tức là } t^2 - 10t + 5 = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn t có các hệ số $a = 1$, $b = -10$, $c = 5$. Do $b = -10$ nên $b' = -5$.

Ta có $\Delta' = (-5)^2 - 1 \cdot 5 = 20 > 0$.

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{20}}{1} = 5 - 2\sqrt{5} \approx 1 \text{ (phút); } x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{20}}{1} = 5 + 2\sqrt{5} \approx 9 \text{ (phút).}$$

Vậy tốc độ ô tô bằng 120 km/h khi t khoảng 1 phút hoặc 9 phút.

□

Bài 10. Một nhà máy chuyên sản xuất một loại sản phẩm. Năm 2019 nhà máy sản xuất được 5000 sản phẩm. Do ảnh hưởng của dịch bệnh nên sản lượng của nhà máy trong các năm 2020 và 2021 đều giảm, cụ thể: Số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2020 giảm $x\%$ so với số lượng sản phẩm sản xuất được của năm 2019; Số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2021 giảm $x\%$ so với số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2020. Biết rằng số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2021 giảm 51% so với số lượng sản phẩm sản xuất được của năm 2019. Tìm x .

Hướng dẫn giải.

Vì số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2020 giảm $x\%$ so với số lượng sản phẩm sản xuất được của năm 2019 nên số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2020 là $5000 - 5000x\% = 5000 \left(1 - \frac{x}{100}\right)$.

Vì số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2021 giảm $x\%$ so với số lượng sản phẩm sản xuất được của năm 2020 nên số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2021 là $5000 \left(1 - \frac{x}{100}\right) - 5000 \left(1 - \frac{x}{100}\right) x\% = 5000 \left(1 - \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 5000 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2$.

Vì số lượng sản phẩm thực tế sản xuất được của năm 2021 giảm 51% so với số lượng sản phẩm sản xuất được của năm 2019 nên ta có phương trình

$$5000 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 5000 - 5000 \cdot 51\% \text{ hay } \left(\frac{100 - x}{100}\right)^2 = \frac{49}{100}$$

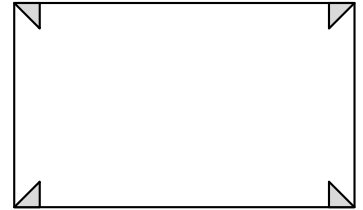
$$\frac{100 - x}{100} = \frac{7}{10} \text{ hoặc } \frac{100 - x}{100} = \frac{-7}{10}$$

$$x = 30 \text{ hoặc } x = 170 \text{ (loại vì } x < 100) \text{ .}$$

Vậy $x = 30$. □

Bài 11.

Mảnh đất của bác An có dạng hình chữ nhật với chiều dài hơn chiều rộng 10 m. Ở mỗi góc của mảnh đất, bác An đã dành một phần đất có dạng tam giác vuông cân với cạnh góc vuông bằng $\frac{1}{8}$ chiều rộng của mảnh đất để trồng hoa (Hình 8). Tính chiều rộng mảnh đất đó, biết diện tích còn lại của mảnh đất không tính phần đất trồng hoa là 408 m^2 .



Hình 8

Hướng dẫn giải.

Gọi x (m) là chiều rộng của mảnh đất ($x > 0$).

Chiều dài của mảnh đất là $x + 10$ (m).

Độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{x}{8}$ (m).

Diện tích phần đất trồng hoa là $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{8} \cdot \frac{x}{8} = \frac{x^2}{128} \text{ (m}^2\text{)}.$

Diện tích của mảnh đất là $x(x + 10) = x^2 + 10x \text{ (m}^2\text{)}.$

Vì diện tích còn lại của mảnh đất không tính phần đất trồng hoa là 408 m^2 nên ta có phương trình

$$x^2 + 10x - \frac{x^2}{128} = 408 \text{ hay } \frac{127}{128}x^2 + 10x - 408 = 0. \quad (1)$$

Giải phương trình (1) là phương trình bậc hai với $a = \frac{127}{128}$, $b = 10$, $c = -408$. Do $b = 10$ nên $b' = 5$.

Ta có $\Delta' = 5^2 - \frac{127}{128} \cdot (-408) = \frac{6877}{16} > 0$.

Do $\Delta > 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-(5) - \sqrt{\frac{6877}{16}}}{\frac{127}{128}} \approx -25,9 \text{ (loại); } x_2 = \frac{-(5) + \sqrt{\frac{6877}{16}}}{\frac{127}{128}} \approx 15,9 \text{ (nhận).}$$

Vậy chiều rộng mảnh đất khoảng 15,9 mét. □

Chủ đề 3. ĐỊNH LÝ VI-ÉT

A ĐỊNH LÝ VI-ÉT

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ví dụ 1. Cho phương trình $5x^2 - 7x - 3 = 0$.

- Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Tính $x_1 + x_2; x_1 x_2$. Chứng minh cả hai nghiệm x_1, x_2 đều khác 0.
- Tính $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Hướng dẫn giải.

- Phương trình có các hệ số $a = 5, b = -7, c = -3$ và $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) = 109 > 0$.
Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Theo định lý Viét, ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-7)}{5} = \frac{7}{5}; \quad x_1 x_2 = \frac{-3}{5}.$$

Vì $x_1 x_2 = \frac{-3}{5} \neq 0$ nên $x_1 \neq 0$ và $x_2 \neq 0$.

$$\text{c) Ta có } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{-7}{3}.$$

□

LUYỆN TẬP 1

Cho phương trình $-4x^2 + 9x + 1 = 0$.

- Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Tính $x_1 + x_2; x_1 x_2$.
- Tính $x_1^2 + x_2^2$.

Hướng dẫn giải.

- Phương trình có các hệ số $a = -4, b = 9, c = 1$ và $\Delta = 9^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 1 = 97 > 0$.
Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Theo định lý Viét, ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{9}{-4} = \frac{9}{4}; \quad x_1 x_2 = \frac{1}{-4}.$$

c) Ta có $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{89}{16}$.

□

❶ Ví dụ 2. Cho phương trình $3x^2 - 4x + 1 = 0$.

- Xác định các hệ số a, b, c rồi tính $a + b + c$.
- Chứng tỏ $x_1 = 1$ là một nghiệm của phương trình.
- Dùng định lý Viét để tìm nghiệm x_2 còn lại của phương trình.

📁 Hướng dẫn giải.

- Phương trình có các hệ số $a = 3, b = -4, c = 1$. Do đó $a + b + c = 3 + (-4) + 1 = 0$.
- Ta thấy $3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 0$ nên $x_1 = 1$ là một nghiệm của phương trình.
- Theo định lý Viét, ta có $x_1x_2 = \frac{1}{3}$. Do $x_1 = 1$ nên $1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$ suy ra $x_2 = \frac{1}{3}$.

□

❶ Ví dụ 3. Cho phương trình $2x^2 + 5x + 3 = 0$.

- Xác định các hệ số a, b, c rồi tính $a - b + c$.
- Chứng tỏ $x_1 = -1$ là một nghiệm của phương trình.
- Dùng định lý Viét để tìm nghiệm x_2 còn lại của phương trình.

📁 Hướng dẫn giải.

- Phương trình có các hệ số $a = 2, b = 5, c = 3$. Do đó $a - b + c = 2 - 5 + 3 = 0$.
- Ta thấy $2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 3 = 0$ nên $x_1 = -1$ là một nghiệm của phương trình.
- Theo định lý Viét, ta có $x_1x_2 = \frac{3}{2}$. Do $x_1 = -1$ nên $(-1) \cdot x_2 = \frac{3}{2}$ suy ra $x_2 = -\frac{3}{2}$.

□

❧ Nhận xét 3.1.  Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$.

 Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

❶ Ví dụ 4. Không tính Δ , giải phương trình $\sqrt{3}x^2 + (2 - \sqrt{3})x - 2 = 0$.

📁 Hướng dẫn giải.

Phương trình có các hệ số $a = \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3}, c = -2$.

Ta thấy $a + b + c = \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) + (-2) = 0$.

Do đó phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{-2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

□

LUYỆN TẬP 2

Giải phương trình $4x^2 - 7x + 3 = 0$.

Hướng dẫn giải.

Phương trình có các hệ số $a = 4, b = -7, c = 3$.

Ta thấy $a + b + c = 4 + (-7) + 3 = 0$.

Do đó phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{3}{4}$. □

Ví dụ 5. Không tính Δ , giải phương trình $\sqrt{2}x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải.

Phương trình có các hệ số $a = \sqrt{2}, b = 1 + \sqrt{2}, c = 1$.

Ta thấy $a - b + c = \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2}) + 1 = 0$.

Do đó, phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

LUYỆN TẬP 3

Giải phương trình $2x^2 - 9x - 11 = 0$.

Hướng dẫn giải.

Phương trình có các hệ số $a = 2, b = -9, c = -11$.

Ta thấy $a - b + c = 2 - (-9) + (-11) = 0$.

Do đó, phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{(-11)}{2} = \frac{11}{2}$. □

B TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH

Định nghĩa 3.1. Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Chú ý

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ 6. Cho hai số có tổng bằng -2 và tích bằng -8 .

- Lập phương trình bậc hai ẩn x nhận hai số trên làm nghiệm.
- Tìm hai số đó.

Hướng dẫn giải.

- Hai số cần tìm là nghiệm phương trình

$$x^2 - (-2)x + (-8) = 0 \text{ hay } x^2 + 2x - 8 = 0.$$

- Phương trình (1) có các hệ số $a = 1, b = 2, c = -8$. Do $b = 2$ nên $b' = 1$.
Ta có $\Delta' = 1^2 - 1 \cdot (-8) = 9 > 0$.
Do $\Delta' > 0$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{1} = 2; \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{1} = -4.$$

Vậy hai số cần tìm là 2 và -4 .

□

LUYỆN TẬP 4

Đà Lạt là thành phố du lịch, có khí hậu rất mát mẻ. Nơi đây trồng rất nhiều loại hoa. Để trồng hoa, người ta thường tạo các nhà kính được bao quanh bởi hàng rào hình chữ nhật và tạo mái che bên trên. Giả sử một nhà kính có độ dài các hàng rào bao quanh là 68 m, diện tích trồng hoa là 240 m^2 . Hãy xác định chiều dài, chiều rộng của nhà kính trồng hoa trên.

Hướng dẫn giải.

Gọi x_1, x_2 (m) lần lượt là chiều dài và chiều rộng của nhà kính đã cho.

Theo giả thiết, ta có $S = x_1 + x_2 = \frac{68}{2} = 34$ và $P = x_1x_2 = 240$.

Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$ hay $x^2 - 34x + 240 = 0$.

Giải phương trình trên, ta được $x_1 = 24$ và $x_2 = 10$.

Vậy chiều dài của nhà kính là 24 m và chiều rộng là 10 m.

□

C BÀI TẬP

Bài 12. Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì

(A) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 = -\frac{c}{a}$.

(B) $x_1 + x_2 = \frac{c}{a}; x_1x_2 = -\frac{b}{a}$.

(C) $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}; x_1x_2 = -\frac{c}{a}$.

(D) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Hướng dẫn giải.

Theo định lý Viét, ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Bài 13. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$.

b) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$.

c) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

d) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng.

b) Sai vì $x_2 = -\frac{c}{a}$.

c) Đúng.

d) Sai vì $x_2 = \frac{c}{a}$.

□

Bài 14. Giải thích vì sao nếu $ac < 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm là hai số trái dấu nhau.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$.

Mà $b^2 \geq 0$ với mọi b , $ac < 0$ nên $-4ac > 0$.

Suy ra $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Viét, ta có $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Mà $ac < 0$ suy ra $\frac{a}{c} < 0$ do đó $x_1 x_2 < 0$.

Vì $x_1 x_2 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu nhau.

□

Bài 15. Cho phương trình $2x^2 - 3x - 6 = 0$.

- Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Tính $x_1 + x_2$; $x_1 x_2$. Chứng minh cả hai nghiệm x_1, x_2 đều khác 0.
- Tính $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
- Tính $x_1^2 + x_2^2$.
- Tính $|x_1 - x_2|$.

Hướng dẫn giải.

- Phương trình có các hệ số $a = 2$, $b = -3$, $c = -6$ và $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 57 > 0$. Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Theo định lý Viét, ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}; \quad x_1 x_2 = \frac{-6}{2} = -3.$$

Vì $x_1 x_2 = -3 \neq 0$ nên $x_1 \neq 0$ và $x_2 \neq 0$.

$$\text{c) Ta có } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{3}{2}}{-3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{d) Ta có } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot (-3) = \frac{33}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{e) Ta có } (x_1 - x_2)^2 &= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot (-3) = \frac{57}{4}. \\ \Rightarrow |x_1 - x_2| &= \frac{\sqrt{57}}{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 16. Không tính Δ , giải các phương trình:

- $3x^2 - x - 2 = 0;$
- $-4x^2 + x + 5 = 0;$
- $2\sqrt{3}x^2 + (5 - 2\sqrt{3})x - 5 = 0;$
- $-3\sqrt{2}x^2 + (4 - 3\sqrt{2})x + 4 = 0.$

Hướng dẫn giải.

- a) Phương trình có các hệ số $a = 3, b = -1, c = -2$.
Ta thấy $a + b + c = 3 + (-1) + (-2) = 0$.
Do đó phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{-2}{3}$.
- b) Phương trình có các hệ số $a = -4, b = 1, c = 5$.
Ta thấy $a - b + c = -4 - 1 + 5 = 0$.
Do đó phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{5}{4}$.
- c) Phương trình có các hệ số $a = 2\sqrt{3}, b = 5 - 2\sqrt{3}, c = -5$.
Ta thấy $a + b + c = 2\sqrt{3} + (5 - 2\sqrt{3}) + (-5) = 0$.
Do đó, phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{(-5)}{2\sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{6}$.
- d) Phương trình có các hệ số $a = -3\sqrt{2}, b = 4 - 3\sqrt{2}, c = 4$.
Ta thấy $a - b + c = -3\sqrt{2} - (4 - 3\sqrt{2}) + 4 = 0$.
Do đó, phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{4}{-3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6}$.

□

Bài 17. Tìm hai số trong mỗi trường hợp sau:

- a) Tổng của chúng bằng 7 và tích của chúng bằng 12;
b) Tổng của chúng bằng 1 và tích của chúng bằng -6.

Hướng dẫn giải.

- a) Hai số cần tìm là nghiệm phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$.
Phương trình có các hệ số $a = 1, b = -7, c = 12$.
Ta có $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1 > 0$.
Do $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 4; \quad x_2 = \frac{7 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 3.$$

Vậy hai số cần tìm là 4 và 3.

- b) Hai số cần tìm là nghiệm phương trình $x^2 - x - 6 = 0$.
Phương trình có các hệ số $a = 1, b = -1, c = -6$.
Ta có $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$.
Do $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = 3; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = -2.$$

Vậy hai số cần tìm là 3 và -2.

□

 **Bài 18.** Bác Đạt muốn thiết kế cửa sổ có dạng hình chữ nhật với diện tích bằng $2,52 \text{ m}^2$ và chu vi bằng $6,4 \text{ m}$. Tìm kích thước của cửa sổ đó.

 **Hướng dẫn giải.**

Vì chu vi hình chữ nhật bằng $6,4 \text{ m}$ nên ta có tổng chiều dài và chiều rộng là $6,4 : 2 = 3,2 \text{ m}$. Chiều dài và chiều rộng cần tìm là nghiệm phương trình $x^2 - 3,2x + 2,52 = 0$.

Phương trình có các hệ số $a = 1$, $b = -3,2$, $c = 2,52$.

Ta có $\Delta = (-3,2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2,52 = 0,16 > 0$.

Do $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{3,2 + \sqrt{0,16}}{2 \cdot 1} = 1,8; \quad x_2 = \frac{3,2 - \sqrt{0,16}}{2 \cdot 1} = 1,4.$$

Vậy chiều dài cửa sổ là $1,8 \text{ m}$ và chiều rộng cửa sổ là $1,4 \text{ m}$.

□

Chủ đề 4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

❖ **Câu 1.** Cho phương trình $x^2 + 2x + c = 0$. Điều kiện của c để phương trình có hai nghiệm phân biệt là

- (A) $c < 1$. (B) $c > 1$. (C) $c \leq 1$. (D) $c \geq 1$.

📁 **Hướng dẫn giải.**

Phương trình có các hệ số $a = 1$, $b = 2$, c . Do $b = 2$ nên $b' = 1$.

Ta có $\Delta' = 1^2 - 1 \cdot c = 1 - c$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0$. Do đó $1 - c > 0$ hay $c < 1$.

Chọn đáp án (A) □

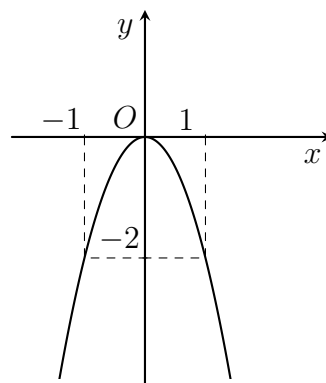
A

❖ **Câu 2.**

Giả sử đồ thị hàm số $y = ax^2$ là parabol ở Hình 9.

Giá trị của a bằng

- (A) 2. (B) -2. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.



Hình 9

📁 **Hướng dẫn giải.**

Vì đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $(-1; -2)$ nên ta có $-2 = a \cdot (-1)^2$. Do đó $a = -2$.

Chọn đáp án (B) □

B

✍ **Bài 19.** Cho hàm số $y = -\frac{2}{3}x^2$.

a) Tìm giá trị của y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-3	-1	0	1	3
$y = -\frac{2}{3}x^2$	?	?	?	?	?

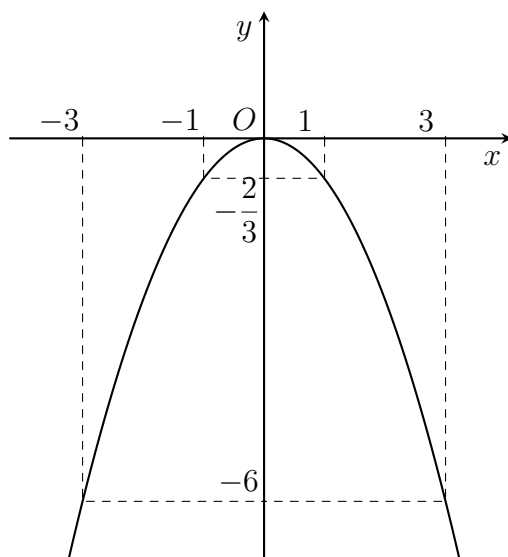
b) Dựa vào bảng trên, vẽ đồ thị của hàm số.

📁 **Hướng dẫn giải.**

a) Ta có bảng giá trị của y tương ứng với giá trị của x như sau:

x	-3	-1	0	1	3
$y = -\frac{2}{3}x^2$	-6	$-\frac{2}{3}$	0	-6	$-\frac{2}{3}$

b) Đồ thị hàm số $y = -\frac{2}{3}x^2$ là parabol (P) đi qua 5 điểm $(-3; -6)$, $(-1; -\frac{2}{3})$, $(0; 0)$, $(1; -\frac{2}{3})$ và $(3; -6)$.

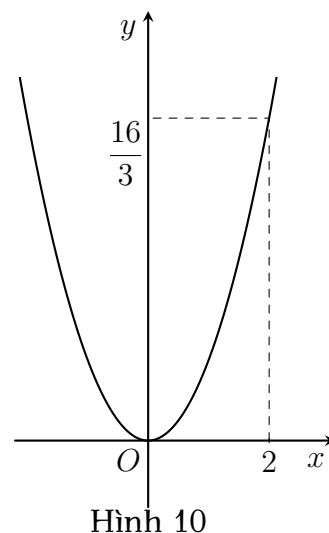


□

Bài 20.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , đường parabol ở Hình 10 biểu diễn đồ thị hàm số $y = ax^2$.

- Tìm hệ số a .
- Tìm điểm thuộc đồ thị có hoành độ bằng 3.
- Tìm điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 4.



Hình 10

Hướng dẫn giải.

a) Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(2; \frac{16}{3}\right)$ nên ta có $\frac{16}{3} = a \cdot 2^2$. Suy ra $a = \frac{4}{3}$.

b) Vì $a = \frac{4}{3}$ nên ta có hàm số $y = \frac{4}{3}x^2$.

Thay $x = 3$ vào hàm số trên ta được $y = \frac{4}{3} \cdot 3^2 = 12$.

Vậy điểm thuộc đồ thị có hoành độ bằng 3 là điểm $(3; 12)$.

c) Thay $y = 4$ vào hàm số trên ta được $4 = \frac{4}{3} \cdot x^2$.

$\Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ hoặc $x = -\sqrt{3}$.

Vậy điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 4 là điểm $(\sqrt{3}; 4)$ và $(-\sqrt{3}; 4)$.

□

Bài 21. Giải các phương trình:

a) $3x^2 - 2x - 4 = 0$; b) $9x^2 - 24x + 16 = 0$; c) $2x^2 + x + \sqrt{2} = 0$.

Hướng dẫn giải.

a) Xét phương trình $3x^2 - 2x - 4 = 0$ có hệ số $a = 3$; $b = -2$; $c = -4$.

Khi đó $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 52 > 0$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{52}}{6} = \frac{1 + \sqrt{13}}{3};$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{52}}{6} = \frac{1 - \sqrt{13}}{3}.$$

b) Xét phương trình $9x^2 - 24x + 16 = 0$ có hệ số $a = 9$; $b = -24$; $c = 16$.

Khi đó $\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16 = 0$.

Do đó phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$.

c) Xét phương trình $2x^2 + x + \sqrt{2} = 0$ có hệ số $a = 2$; $b = 1$; $c = \sqrt{2}$.

Khi đó $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 1 - 8\sqrt{2} < 0$.

Do đó phương trình vô nghiệm.

□

Bài 22. Không tính Δ hãy giải các phương trình:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; b) $-3x^2 + 5x + 8 = 0$; c) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} = 0$.

Hướng dẫn giải.

a) Xét phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$.

Ta thấy $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$.

Do đó phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$.

b) Xét phương trình $-3x^2 + 5x + 8 = 0$ có $a = -3$, $b = 5$, $c = 8$.

Ta thấy $a - b + c = -3 - 5 + 8 = 0$.

Do đó phương trình có hai nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{8}{3}$.

c) Xét phương trình $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} = 0$ có $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{6}$, $c = -\frac{1}{2}$.

Ta thấy $a + b + c = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = 0$.

Do đó phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{-3}{2}$.

□

Bài 23. Tìm hai số biết tổng của chúng bằng $4\sqrt{2}$ và tích của chúng bằng 6.

Hướng dẫn giải.

Hai số cần tìm là nghiệm của phương trình $x^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0$.

Phương trình có các hệ số $a = 1$, $b = -4\sqrt{2}$, $c = 6$. Do $b = -4\sqrt{2}$ nên $b' = -2\sqrt{2}$.

Ta có $\Delta' = (-2\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 6 = 2$.

Do $\Delta' = 2 > 0$ nên phương trình trên có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{1} = 3\sqrt{2}; \quad x_2 = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

□

Bài 24. Giải thích vì sao nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Áp dụng: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 2x - 3$;

b) $3x^2 + 5x - 2$.

Hướng dẫn giải.

Ta có

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2.$$

Do x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ nên ta có $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ và $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

$$\text{Suy ra } a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - ax \cdot \frac{-b}{a} + a \cdot \frac{c}{a} = ax^2 + bx + c.$$

a) Phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$ có $a = 1, b = -2, c = -3$.

Ta thấy $a - b + c = 1 + 2 - 3 = 0$.

Do đó phương trình có hai nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = 3$.

Khi đó $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.

b) Phương trình $3x^2 + 5x - 2 = 0$ có $a = 3, b = 5, c = -2$.

Khi đó $\Delta = 5^2 + 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 > 0$.

Do đó phương trình có hai nghiệm là

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{6} = \frac{1}{3} \text{ và } x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{6} = -2.$$

Khi đó $3x^2 + 5x - 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) = (3x - 1)(x + 2)$.

□

Bài 25. Một chiếc áo có giá niêm yết là 120000 đồng. Để thanh lí chiếc áo, đầu tiên người ta giảm giá $x\%$ so với giá niêm yết. Do vẫn chưa bán được chiếc áo nên người ta tiếp tục giảm giá $x\%$ so với giá vừa giảm. Sau hai đợt giảm, giá của chiếc áo còn 76800 đồng. Tìm x .

Hướng dẫn giải.

Số tiền áo bán sau lần giảm thứ nhất là

$$120000 - 120000 \cdot x\% = 120000 - 1200x \text{ (đồng)}.$$

Số tiền áo bán sau lần giảm thứ hai là

$$120000 - 1200x - (120000 - 1200x) \cdot x\% = 120000 - 1200x - (1200 - 12x) \cdot x \text{ (đồng)}.$$

Ta có $120000 - 1200x - (1200 - 12x) \cdot x = 76800$

$$\text{Suy ra } 12x^2 - 2400x + 43200 = 0.$$

Phương trình trên có $\Delta' = 1200^2 - 12 \cdot 43200 = 921600$ nên phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{1200 + \sqrt{921600}}{12} = 180; x_2 = \frac{1200 - \sqrt{921600}}{12} = 20.$$

Do $x < 100$ nên $x = 20$.

□

Bài 26. Một công ty sản xuất các khay có dạng hình hộp chữ nhật để trồng rau trong chung cư ở các thành phố. Biết diện tích mặt đáy của khay đó là 2496 cm^2 và chu vi mặt đáy của khay là 220 cm. Tìm các kích thước mặt đáy của khay đó.

Hướng dẫn giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng mặt đáy của khay lần lượt là u, v (đơn vị: cm, điều kiện $u > v > 0$).

Vì diện tích mặt đáy của khay đó là 2496 cm^2 và chu vi mặt đáy của khay là 220 cm nên

ta có $2(u + v) = 220$ và $u \cdot v = 2496$ hay $u + v = 110$ và $u \cdot v = 2496$.

Khi đó u, v là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 110x + 2496 = 0$.

Xét phương trình $x^2 - 220x + 2496 = 0$ có các hệ số $a = 1, b = -110, c = 2496$.

Do đó $\Delta = (-110)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2496 = 2116 > 0$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{110 + \sqrt{2116}}{2} = 78; x_2 = \frac{110 - \sqrt{2116}}{2} = 32.$$

Do u, v là hai nghiệm của phương trình và $u > v$ nên $u = 78$ cm, $v = 32$ cm.

Vậy kích thước mặt đáy của khay đó là 78 cm và 32 cm.

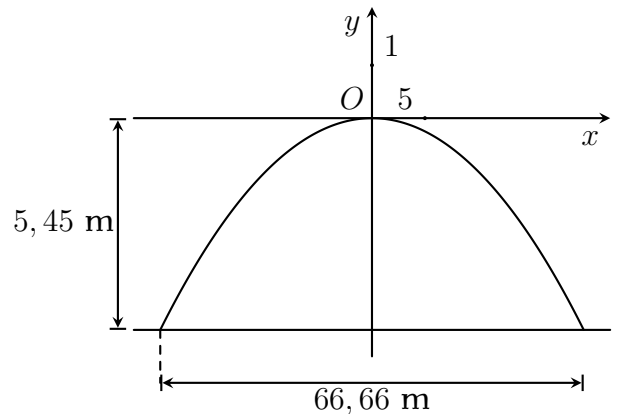
□

Bài 27. Cầu Trường Tiền (hay cầu Tràng Tiền) ở thành phố Huế được khởi công vào tháng 5/1899 và được khánh thành vào ngày 18/12/1900. Cầu được thiết kế theo cấu trúc Gothic, bắc qua sông Hương. Từ Festival Huế năm 2002, cầu Trường Tiền được lắp đặt một hệ thống chiếu sáng đổi màu hiện đại. Cầu dài 402,60 m, gồm 6 nhịp dầm thép.

Giả sử một nhịp dầm thép có dạng parabol $y = ax^2$ trong hệ trục tọa độ Oxy , ở đó Ox song song với mặt cầu. Biết rằng, hai chân nhịp dầm thép đến mặt cầu là 5,45 m (Hình 11).



Cầu Trường Tiền (cầu Tràng Tiền)

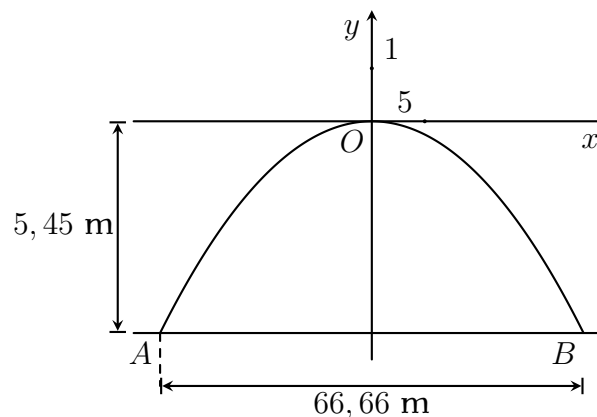


Hình 11

- Xác định tọa độ của hai chân nhịp dầm trên.
- Tính a (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Hướng dẫn giải.

- Gọi hai điểm A và B là hai chân của nhịp dầm. Ta có độ dài đoạn AB là 66,66 m.



Dựa vào đồ thị ta có $A(-33,33, -5,45)$ và $B(33,33, -5,45)$.

- Vì đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm A nên ta có

$$-5,45 = a \cdot (33,33)^2 \Rightarrow a = \frac{-5,45}{(33,33)^2} = 0,4914824...$$

Làm tròn a đến hàng nghìn ta được $a = 0,491$.



Chương 8.



ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

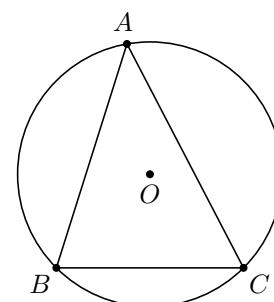
Chủ đề 1. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

A ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1.

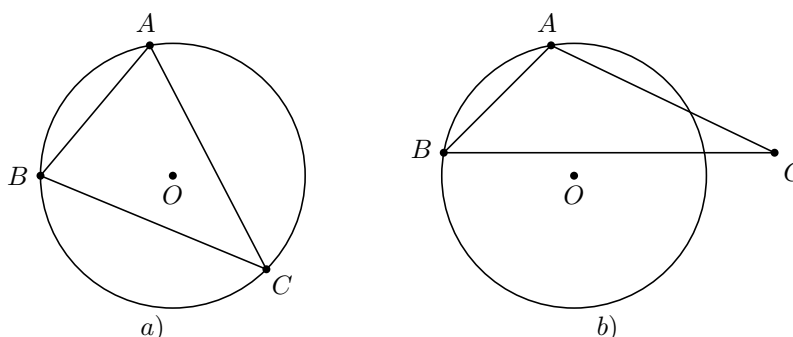
Đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.



Chú ý

Khi đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC , ta còn nói tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) .

Ví dụ 1. Trong các hình 3a, 3b, ở hình nào ta có đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ? Vì sao?



Hình 3

Hướng dẫn giải.

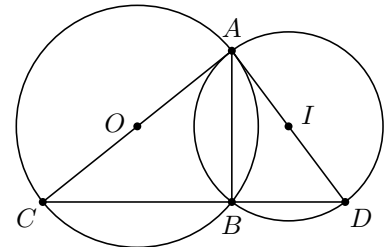
- a) Ở Hình 3a, đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC vì nó đi qua cả ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

- b) Ở Hình 3b, đường tròn (O) không là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC vì nó không đi qua đỉnh C của tam giác ABC .

□

LUYỆN TẬP 1

Quan sát Hình 4 và cho biết trong hai đường tròn (O) và (I) , đường tròn nào ngoại tiếp tam giác ABC , đường tròn nào ngoại tiếp tam giác ABD ?



Hình 4

Hướng dẫn giải.

- Đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC vì nó đi qua cả ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC .
- Đường tròn (I) là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABD vì nó đi qua cả ba đỉnh A, B, D của tam giác ABD .

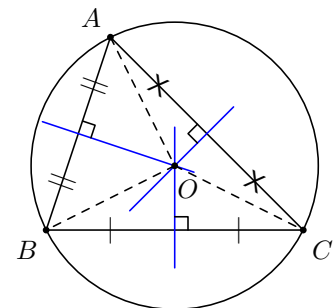
□

2 Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

Định nghĩa 1.2.

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm ba đường trung trực của tam giác đó.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường trung trực đến mỗi đỉnh của tam giác đó.



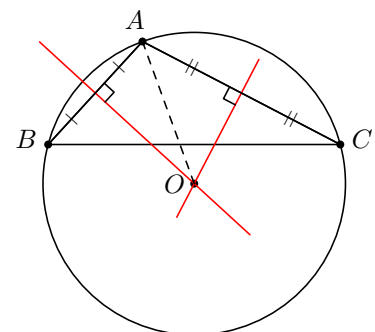
Nhận xét 1.1.

- Vì ba đường trung trực của tam giác cùng đi qua một điểm nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm hai đường trung trực bất kì của tam giác đó.
- Mỗi tam giác có đúng một đường tròn ngoại tiếp.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có góc A tù. Dùng thước thẳng và compa vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Hướng dẫn giải.

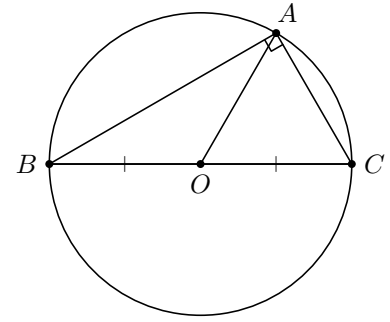
- a) Dùng thước thẳng và compa vẽ hai đường trung trực của các cạnh AB và AC . Gọi điểm O là giao điểm của hai đường trung trực đó.
- b) Dùng compa vẽ đường tròn $(O; OA)$. Đường tròn $(O; OA)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .





Định nghĩa 1.3.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng nửa cạnh huyền của tam giác vuông đó.



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3a$, $AC = 4a$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo a .

Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Pythagore).

Suy ra $BC^2 = (3a)^2 + (4a)^2 = 25a^2$.

Do đó $BC = \sqrt{25a^2} = 5a$.

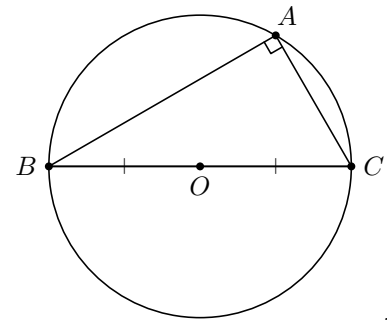
Vì tam giác ABC vuông tại A nên bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng nửa cạnh huyền BC . Vậy $R = \frac{5a}{2} = 2,5a$. □

LUYỆN TẬP 2

Nêu cách sử dụng ê ke để xác định tâm của một đường tròn bất kì khi chưa biết tâm của nó.

Hướng dẫn giải.

- Dùng ê ke vuông vẽ tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn cần xác định tâm.
- Xác định trung điểm O của cạnh huyền BC , đó là tâm của đường tròn.



Định nghĩa 1.4.

- Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

- Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 4. Ba vị trí A, B, C ở một công viên là ba đỉnh của một tam giác đều cạnh 15 m. Người ta cần chọn vị trí O cách đều ba vị trí A, B, C để làm một cột đèn. Tính khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C .

Hướng dẫn giải.

Vì O cách đều ba đỉnh A, B, C của tam giác đều ABC nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC .

Suy ra khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C là

$$\frac{15 \cdot \sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

□

LUYỆN TẬP 3

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; 2 \text{ cm})$. Tính AB .

Hướng dẫn giải.

Tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; 2 \text{ cm})$ nên $2 = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $AB = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$.

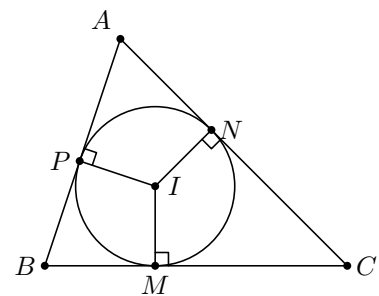
□

B ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

1 Định nghĩa

⇔ **Định nghĩa 1.5.**

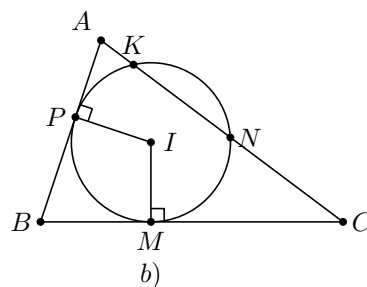
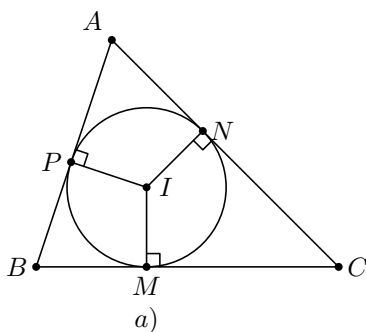
Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác đó.



Chú ý

Khi đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC , ta còn nói tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) .

Ví dụ 5. Trong các hình 10a, 10b, ở hình nào đường tròn (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC ? Vì sao?



Hình 10

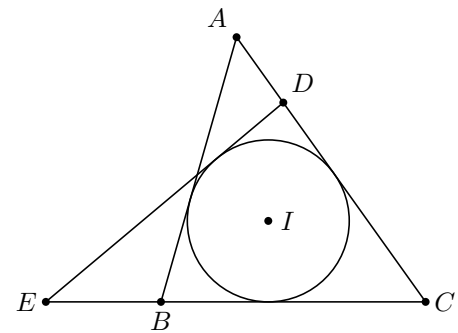
Hướng dẫn giải.

- a) Ở Hình 10a, đường tròn (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC vì nó tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA lần lượt tại P, M, N .
- b) Ở Hình 10b, đường tròn (I) không là đường tròn nội tiếp tam giác ABC vì nó không tiếp xúc với cạnh AC .

□

LUYỆN TẬP 4

Trong Hình 11, đường tròn (I) là đường tròn nội tiếp những tam giác nào?



Hình 11

Hướng dẫn giải.

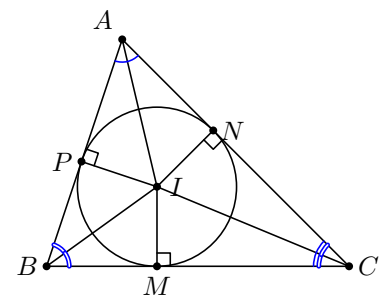
- Đường tròn (I) tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA nên (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- Đường tròn (I) tiếp xúc với ba cạnh DE, EC, DC nên (I) là đường tròn nội tiếp tam giác CDE .

□

2 Xác định tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác

Định nghĩa 1.6.

- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác đó.
- Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh của tam giác đó.



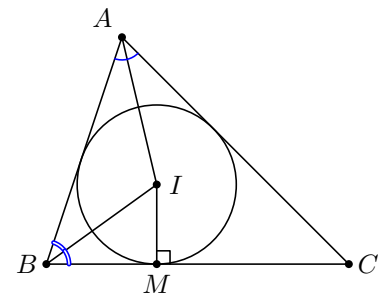
Nhận xét 1.2.

- Vì ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm nên tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm hai đường phân giác bất kì của tam giác đó.
- Mỗi tam giác có đúng một đường tròn nội tiếp.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC . Dùng thước thẳng, ê ke và compa vẽ đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Hướng dẫn giải.

- 🌀 Dùng thước thẳng và compa vẽ hai đường phân giác của các góc BAC và ABC . Gọi điểm I là giao điểm của hai đường phân giác đó.
- 🌀 Dùng ê ke vẽ đường vuông góc IM kẻ từ I đến đường thẳng BC .
- 🌀 Dùng compa vẽ đường tròn $(I; IM)$. Đường tròn $(I; IM)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC .



□

🔗 Định nghĩa 1.7.

- 🌀 Trong một tam giác đều, trọng tâm của tam giác đồng thời là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó.
- 🌀 Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn nội tiếp là $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

🔴 **Ví dụ 7.** Một mảnh vườn có dạng tam giác đều ABC cạnh 12 m. Người ta muốn trồng hoa ở phần đất bên trong đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính diện tích phần đất trồng hoa đó.

🔗 Hướng dẫn giải.

Gọi $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC .
Suy ra bán kính của phần đất trồng hoa đó là

$$r = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3} \text{ (m)}$$

Diện tích phần đất trồng hoa đó là $S = \pi r^2 = \pi(2\sqrt{3})^2 = 12\pi \text{ (m}^2\text{)}$.

□

LUYỆN TẬP 5

Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn $(O; 6 \text{ cm})$. Tính AB .

🔗 Hướng dẫn giải.

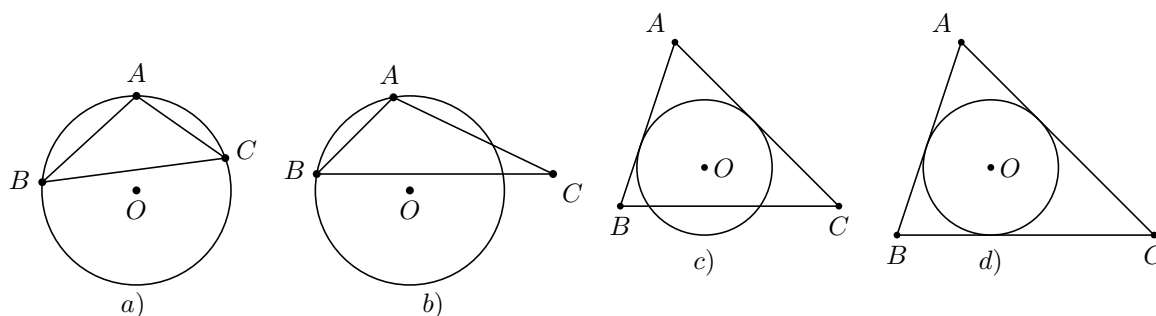
Tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn $(O, 6 \text{ cm})$ nên ta có $6 = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{6}$.

Suy ra $AB = \frac{6 \cdot 6}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} \text{ (cm)}$.

□

📌 BÀI TẬP

🔴 **Bài 1.** Trong các hình a, b, c, d , ở hình nào ta có đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ? Ở hình nào ta có đường tròn (O) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC ? Vì sao?



Hướng dẫn giải.

- a) Ở hình a), đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC vì nó đi qua cả ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC .
- b) Ở hình b), đường tròn (O) không là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC vì nó đi qua hai đỉnh A, B nhưng không đi qua đỉnh C của tam giác ABC .
- c) Ở hình c), đường tròn (O) không là đường tròn nội tiếp tam giác ABC vì nó tiếp xúc với hai cạnh AB, AC nhưng không tiếp xúc với cạnh BC của tam giác ABC .
- d) Ở Hình d), đường tròn (O) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC vì nó tiếp xúc với hai cạnh AB, AC, BC của tam giác ABC .

□

Bài 2. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm.

Hướng dẫn giải.

Tam giác ABC vuông tại A , áp dụng định lí Pythagore ta có:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm.}$$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC có đường kính là cạnh huyền BC , do đó có bán kính là $R = \frac{BC}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$ (cm).

□

Bài 3. Cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều bằng 4 cm. Tính cạnh của tam giác đều đó.

Hướng dẫn giải.

Gọi cạnh của tam giác đều ngoại tiếp đường tròn đó là a (cm), ta có $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

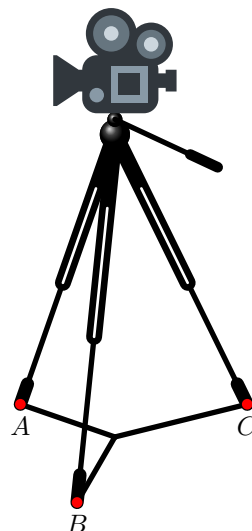
$$\text{Suy ra } a = \frac{r \cdot 6}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 6}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \text{ (cm).}$$

Vậy cạnh của tam giác đó là $8\sqrt{3}$ (cm).

□

Bài 4.

Một chiếc máy quay ở đài truyền hình được đặt trên giá đỡ ba chân, các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là ba đỉnh A, B, C của tam giác đều ABC (Hình bên). Tính khoảng cách giữa hai vị trí A và B , biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là 4 dm.



Hướng dẫn giải.

Tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4$ dm nên ta có: $4 = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $AB = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ (dm).

Vậy khoảng cách giữa hai vị trí A và B là $4\sqrt{3} \approx 6,93$ (dm). $\square$

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AD = 2R$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh:

- $DB \perp AB$ và $CD \perp AC$;
- Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành;
- $AC^2 + BH^2 = 4R^2$;
- Ba điểm H, M, D thẳng hàng và $AH = 2OM$.

Hướng dẫn giải.

- Tam giác OBD có $OB = OD = R$ nên cân tại O . Do đó $\widehat{OBD} = \widehat{ODB}$.

Tam giác OAB có $OA = OB = R$ nên cân tại O . Do đó $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

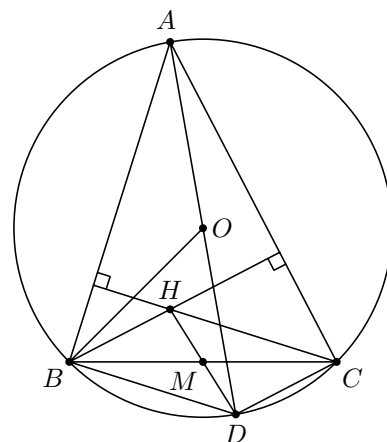
Trong tam giác ABC , ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BAD} + \widehat{ABD} + \widehat{BDA} &= 180^\circ \\ \widehat{OAB} + \widehat{OBA} + \widehat{OBD} + \widehat{ODB} &= 180^\circ \\ 2 \cdot (\widehat{OBA} + \widehat{OBD}) &= 180^\circ \\ \widehat{OBA} + \widehat{OBD} &= 90^\circ \\ \widehat{ABD} &= 90^\circ\end{aligned}$$

Vậy $DB \perp AB$.

Tương tự $CD \perp AC$ chứng minh tương tự.

- Ta có $DC \perp AC$ (theo câu a); $BH \perp AC$ (vì H là trực tâm tam giác ABC). Do đó $DC \parallel BH$.



Ta có $DB \perp AB$ (theo câu a); $CH \perp AB$ (vì H là trực tâm tam giác ABC). Do đó $DB \parallel CH$.

Tứ giác $BHCD$ có $DC \parallel BH$ và $DB \parallel CH$ nên là hình bình hành.

c) Vì $BHCD$ là hình bình hành nên $BH = DC$.

Xét tam giác ACD vuông tại H , theo Pythagore ta có

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 \\ (2R)^2 &= AC^2 + BH^2 \\ 4R^2 &= AC^2 + BH^2. \end{aligned}$$

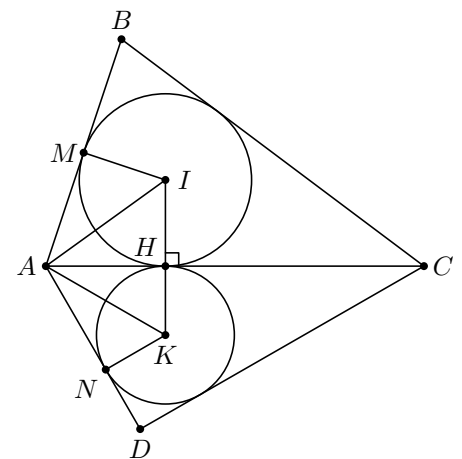
Vậy $AC^2 + BH^2 = 4R^2$.

d) Ba điểm H, M, D thẳng hàng và $AH = 2OM$. Ta có $BHCD$ là hình bình hành (theo câu a); M là trung điểm của BC (giả thiết), do đó M cũng là trung điểm của HD . Hay H, M, D thẳng hàng.

□

📌 Bài 6.

Cho tứ giác $ABCD$ có các tam giác ABC và ADC lần lượt ngoại tiếp các đường tròn (I) và (K) sao cho hai đường tròn này cùng tiếp xúc với đường thẳng AC tại điểm H thuộc đoạn thẳng AC . Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M , đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AD tại N (Hình bên). Chứng minh:



a) Ba điểm I, H, K thẳng hàng;

b) $AM = AN$;

c) $\widehat{IAK} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}$.

📁 Hướng dẫn giải.

a) Hai đường tròn $(I), (K)$ tiếp xúc với cạnh AC tại H nên ta có $IH \perp AC, KH \perp AC$. Qua H có $IH \perp AC, KH \perp AC$ nên ba điểm I, H, K thẳng hàng.

b) Ta có $IH \perp AC$ tại H (theo câu a) nên AH là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

Ta có (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M (giả thiết) nên $IM \perp AB$ tại M , suy ra AM là tiếp tuyến của (I) .

Vì AM, AH là tiếp tuyến kẻ từ A của (I) nên $AM = AH$. (1)

Chứng minh tương tự ta có $AH = AN$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AM = AN$.

c) Xét (I) có AM, AH là hai tiếp tuyến kẻ từ A nên AI là tia phân giác của $\widehat{MAH}$.

Suy ra $\widehat{IAH} = \frac{1}{2}\widehat{MAH}$. (3)

Tương tự ta có $\widehat{KAH} = \frac{1}{2}\widehat{NAH}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra

$$\widehat{IAK} = \widehat{IAH} + \widehat{KAH} = \frac{1}{2}\widehat{MAH} + \frac{1}{2}\widehat{NAH} = \frac{1}{2}(\widehat{MAH} + \widehat{NAH}) = \frac{1}{2}\widehat{BAD}.$$

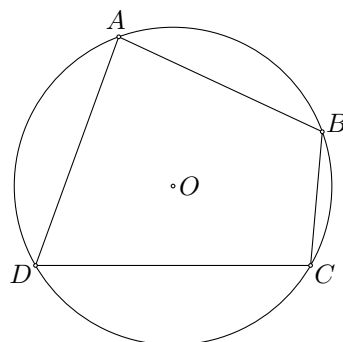
$$\text{Vậy } \widehat{IAK} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}.$$

□

Chủ đề 2. TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

A ĐỊNH NGHĨA

✧ **Định nghĩa 2.1.** Tứ giác có bốn đỉnh thuộc một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hay còn gọi là tứ giác nội tiếp).

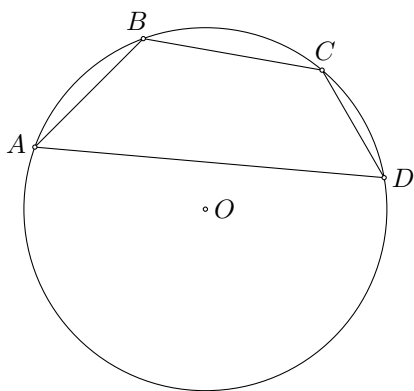


Hình 20

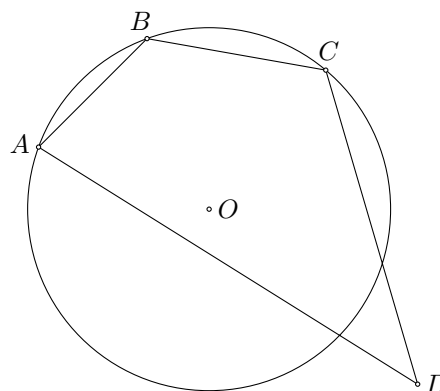
Chú ý

Trong Hình 20, tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và đường tròn (O) được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

🔴 **Ví dụ 1.** Trong các hình 21 a, 21 b, ở hình nào ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) ? Vì sao?



Hình 21 a



Hình 21 b

Hướng dẫn giải.

🔴 Ở Hình 21 a, đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ vì nó đi qua cả bốn đỉnh A, B, C, D của tứ giác đó.

🟢 Ở Hình 21 b, đường tròn (O) không là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ vì nó không đi qua đỉnh D của tứ giác đó.

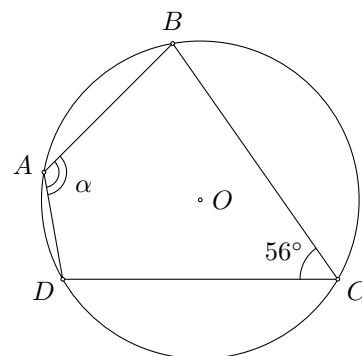
□

B TÍNH CHẤT

↔ **Tính chất 2.1.** Trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, tổng số đo hai góc đối bằng 180° .

❶ Ví dụ 2.

Tìm α trong Hình 23.



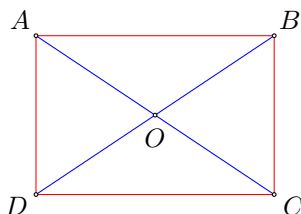
Hình 23

➤ Hướng dẫn giải.

Từ Hình 23, ta có $\alpha + 56^\circ = 180^\circ$ (tổng hai góc đối của tứ giác nội tiếp).

Suy ra $\alpha = 180^\circ - 56^\circ \Rightarrow \alpha = 124^\circ$

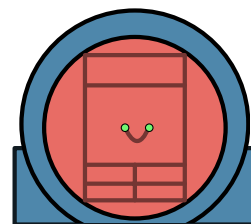
□

C HÌNH CHỮ NHẬT, HÌNH VUÔNG NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN**❶ Hình chữ nhật nội tiếp đường tròn****Ghi nhớ**

- Mỗi hình chữ nhật là một tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Tâm của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó.

❶ Ví dụ 3.

Cửa ra vào ở Hình 25 gợi nên hình ảnh hình chữ nhật nội tiếp đường tròn. Biết hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 2 m và 1,2 m. Hỏi đường kính d của đường tròn đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 25

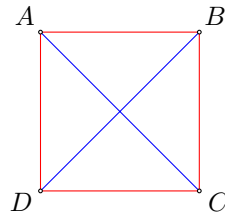
➤ Hướng dẫn giải.

Áp dụng định lý Pythagore, ta có $d^2 = 1,2^2 + 2^2 = 5,44$, suy ra $d = \sqrt{5,44} \approx 2,33$ (m).

Vậy đường kính d của đường tròn đó khoảng 2,33 m.

□

② Hình vuông nội tiếp đường tròn



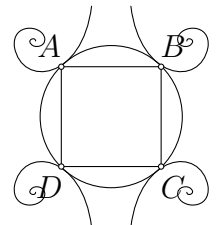
Hình 26

Chú ý

- ❖ Mỗi hình vuông là một tứ giác nội tiếp đường tròn.
- ❖ Tâm của đường tròn ngoại tiếp hình vuông là giao điểm của hai đường chéo và mỗi đường chéo là một đường kính của đường tròn đó.
- ❖ Bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh a là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

❖ Ví dụ 4.

Quan sát khung sắt ở Hình 27, bạn Nam thấy hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Bạn Nam đo được độ dài cạnh của hình vuông đó là 2 dm. Hỏi chu vi của vòng sắt ứng với đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó bằng bao nhiêu decimét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 27

➤ Hướng dẫn giải.

Vì độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$ là 2 dm nên bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó là $\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ (dm).

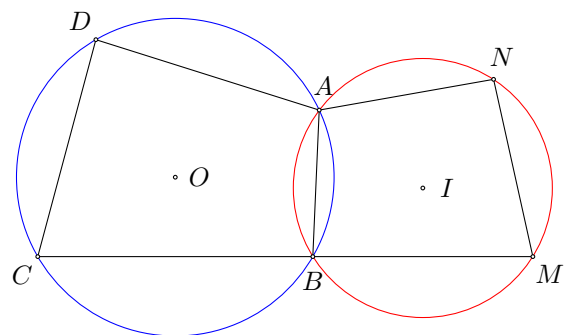
Vậy chu vi của vòng sắt ứng với đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó là $2\sqrt{2}\pi \approx 8,9$ (dm).

□

ⓓ BÀI TẬP

✍ Bài 7.

Quan sát Hình 28 và cho biết trong hai đường tròn (O) và (I) , đường tròn nào ngoại tiếp tứ giác $ABCD$, đường tròn nào ngoại tiếp tứ giác $ABMN$.



Hình 28

➤ Hướng dẫn giải.

- ❖ Đường tròn (O) ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.
- ❖ Đường tròn (I) ngoại tiếp tứ giác $ABMN$.

□

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{A} = 60^\circ$ và $\widehat{B} = 125^\circ$;

c) $\widehat{C} = 75^\circ$ và $\widehat{D} = 115^\circ$;

b) $\widehat{B} = 95^\circ$ và $\widehat{C} = 67^\circ$;

d) $\widehat{D} = 103^\circ$ và $\widehat{A} = 117^\circ$.

Hướng dẫn giải.

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn

a) $\widehat{A} = 60^\circ$ và $\widehat{B} = 125^\circ$;

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 120^\circ.$$

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow 125^\circ + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 55^\circ.$$

b) $\widehat{B} = 95^\circ$ và $\widehat{C} = 67^\circ$;

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow 95^\circ + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 85^\circ.$$

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 67^\circ + \widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 113^\circ.$$

c) $\widehat{C} = 75^\circ$ và $\widehat{D} = 115^\circ$;

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} + 75^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 105^\circ.$$

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow 115^\circ + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 65^\circ.$$

d) $\widehat{D} = 103^\circ$ và $\widehat{A} = 117^\circ$.

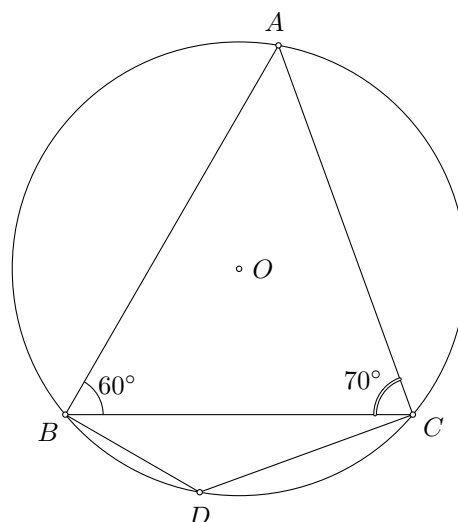
$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow 103^\circ + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 77^\circ.$$

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} + 117^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 63^\circ.$$

□

Bài 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $\widehat{ACB} = 70^\circ$. Giả sử D là điểm thuộc cung BC không chứa A . Tính số đo góc BDC .

Hướng dẫn giải.



$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ có} \\ \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{BAC} + 60^\circ + 70^\circ &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{BAC} &= 50^\circ. \end{aligned}$$

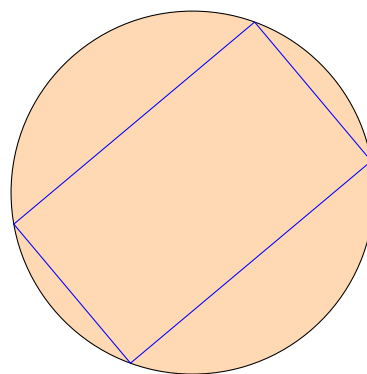
Vì tứ giác $ABDC$ nội tiếp ta có

$$\begin{aligned} \widehat{BAC} + \widehat{BDC} &= 180^\circ \\ \Rightarrow 50^\circ + \widehat{BDC} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{BDC} &= 130^\circ. \end{aligned}$$

□

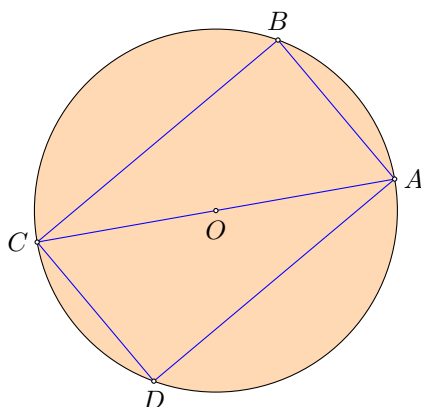
Bài 10.

Mặt trên của tấm đệm có dạng hình tròn ở Hình 29 gợi nên hình ảnh đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật. Biết hình chữ nhật đó có chiều rộng, chiều dài lần lượt là 3 dm, 5 dm. Tính độ dài đường kính mặt trên của tấm đệm, từ đó tính diện tích mặt trên của tấm đệm (theo đơn vị decimet vuông và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 29

Hướng dẫn giải.



Hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên đường chéo hình chữ nhật cũng là đường kính của đường tròn (O) .

$\triangle ABC$ có

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AC^2 &= 3^2 + 5^2 \\ AC^2 &= 34 \\ AC &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

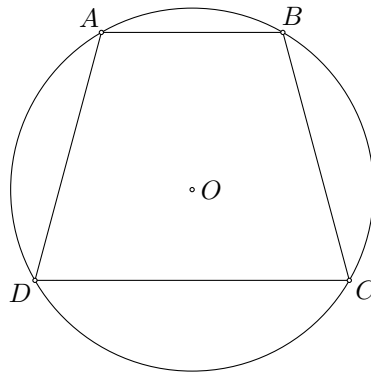
Vậy độ dài đường kính mặt bên của tấm đệm là $\sqrt{34} \approx 5,83$ dm.

Diện tích mặt bên của tấm đệm là $S = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2 \approx 9,16$ dm².

□

 Bài 11. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) nội tiếp đường tròn. Chứng minh rằng hình thang $ABCD$ là hình thang cân.

Hướng dẫn giải.



$ABCD$ là hình thang nên $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.

$ABCD$ nội tiếp (O) nên $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

Vậy $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.

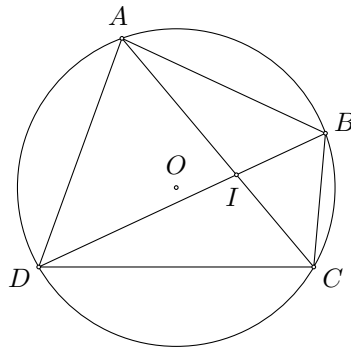
Hình thang $ABCD$ có $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ nên là hình thang cân. □

Bài 12. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I .

a) Hai góc ABD và ACD có bằng nhau hay không? Vì sao?

b) Chứng minh $\triangle IAB \sim \triangle IDC$ và $IA \cdot IC = IB \cdot ID$.

Hướng dẫn giải.



a) $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ vì hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD .

b) Xét $\triangle IAB$ và $\triangle IDC$

$$\begin{cases} \widehat{AIB} = \widehat{DIC} \text{ (hai góc đối đỉnh)} \\ \widehat{ABD} = \widehat{ACD} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle IAB \sim \triangle IDC \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{IB}{IC} \Rightarrow IA \cdot IC = IB \cdot ID.$$

□

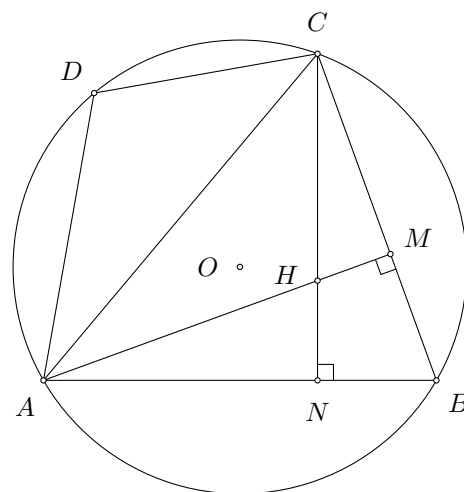
Bài 13.

Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác nhọn. Hai đường cao AM và CN của tam giác ABC cắt nhau tại H (Hình 30). Chứng minh:

a) $\widehat{MHN} + \widehat{ABC} = 180^\circ$;

b) $\widehat{AHC} = \widehat{ADC}$;

c) $\widehat{ADC} = \widehat{BAM} + 90^\circ$.



Hình 30

Hướng dẫn giải.

a) Tứ giác $BMHN$ có

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} + \widehat{BMH} + \widehat{BNH} + \widehat{MHN} &= 360^\circ \\ \widehat{ABC} + 90^\circ + 90^\circ + \widehat{MHN} &= 360^\circ \\ \widehat{MHN} + \widehat{ABC} &= 180^\circ. \end{aligned}$$

b) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$.

Ta có $\begin{cases} \widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \\ \widehat{MHN} + \widehat{ABC} = 180^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{MHN}$.

Mà $\widehat{MHN} = \widehat{AHC}$ (hai góc đối đỉnh).

Vậy $\widehat{AHC} = \widehat{ADC}$.

c) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn

$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC}$ (1)

$\triangle AMB$ vuông tại M

$\widehat{BAM} + \widehat{AMB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

$\widehat{BAM} + 90^\circ = 180^\circ - \widehat{ABC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{BAM} + 90^\circ$.

□

Chủ đề 3. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

Bài 14. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có $\widehat{C} = 80^\circ$. Số đo góc A là:

- (A) 80° . (B) 160° . (C) 40° . (D) 100° .

Hướng dẫn giải.

Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{C} = 100^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Bài 15. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC và lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC , CA , AB tại M , N , P . Chứng minh: $\widehat{AIN} = \widehat{PMN} = \frac{1}{2}\widehat{PIN}$.

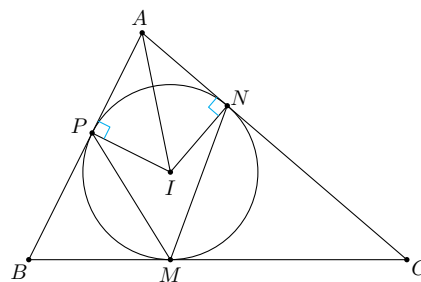
Hướng dẫn giải.

Xét hai tam giác API vuông tại P và ANI vuông tại N , ta có: AI chung, $IP = IN$ nên $\triangle API = \triangle ANI$.

Do đó $\widehat{AIP} = \widehat{AIN} = \frac{1}{2}\widehat{PIN}$.

Mặt khác $\widehat{PMN} = \frac{1}{2}\widehat{PIN}$ (góc nội tiếp) nên:

$$\widehat{AIN} = \widehat{PMN} = \frac{1}{2}\widehat{PIN}.$$



□

Bài 16. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AK , BM cắt nhau tại trực tâm H của tam giác ABC . Tia AK cắt đường tròn (O) tại điểm N (khác A). Chứng minh:

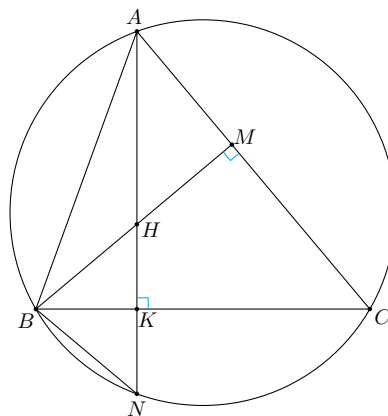
- $\widehat{CBM} = \widehat{CAK}$;
- Tam giác BHN cân;
- BC là đường trung trực của HN .

Hướng dẫn giải.

- Xét hai tam giác CBM vuông tại M và CAK vuông tại K , ta có:
 $\widehat{CBM} = \widehat{CAK}$ (cùng phụ $\widehat{C}$).

- Ta có $\widehat{CBN} = \widehat{CAN}$ (góc nội tiếp cùng chắn CN) nên $\widehat{CBN} = \widehat{CBM}$.
Xét tam giác BHN có BK là đường cao đồng thời là đường phân giác nên cân tại B .

- Tam giác BHN cân tại B có BK là đường cao và cũng là đường trung tuyến nên BK hay BC là đường trung trực của HN . □



Bài 17. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có hai tia CD và BA cắt nhau tại I . Chứng minh:

- $\widehat{IAD} = \widehat{BCD}$;
- $IA \cdot IB = ID \cdot IC$.

Hướng dẫn giải.

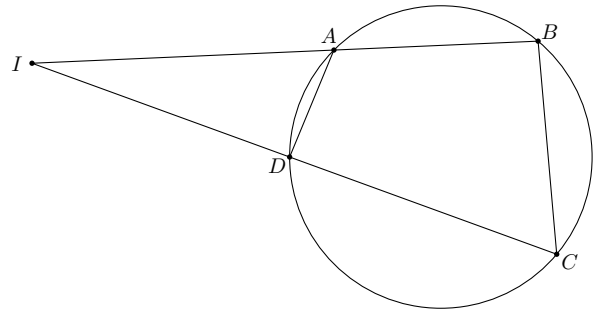
a) Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ.$$

Ta cũng có $\widehat{IAD} + \widehat{BAD} = 180^\circ$ (góc kề bù) suy ra $\widehat{IAD} = \widehat{BCD}$.

b) Xét hai tam giác IAD và ICB có $\widehat{I}$ chung và $\widehat{IAD} = \widehat{BCD}$ nên đồng dạng.

$$\text{Suy ra } \frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB} \text{ hay } IA \cdot IB = ID \cdot IC.$$



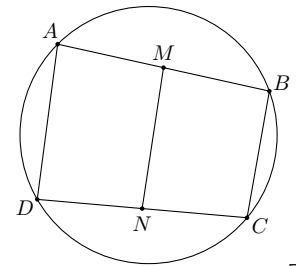
□

Bài 18. Cho tứ giác $ABCD$ và các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và CD sao cho các tứ giác $AMND, BMNC$ là các tứ giác nội tiếp. Chứng minh $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$.

Hướng dẫn giải.

Vì $AMND$ và $BMNC$ là các tứ giác nội tiếp nên:

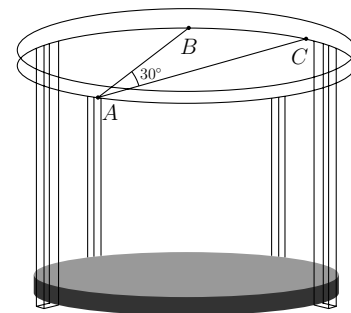
$$\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{MND} = 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{MNC} = 180^\circ \\ \widehat{MND} + \widehat{MNC} = 180^\circ \end{cases} \quad \text{suy ra } \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ.$$



□

Bài 19.

Khung thép của một phần sân khấu có dạng đường tròn bán kính 15 m. Mắt của một người thợ ở vị trí A nhìn hai đèn ở các vị trí B, C (A, B, C cùng thuộc đường tròn bán kính 15 m), bằng cách nào đó, người thợ thấy rằng góc nhìn $\widehat{BAC} = 30^\circ$ (Hình 31). Khoảng cách giữa hai vị trí B, C bằng bao nhiêu mét?



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 31

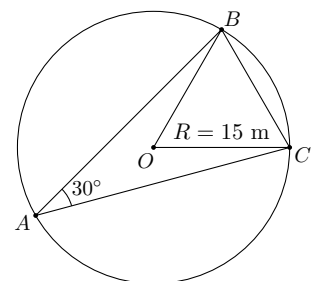
Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) (hình bên).

Ta có, $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ (góc ở tâm).

Mặt khác $OB = OC = R$ nên $\triangle BOC$ là tam giác đều.

Suy ra $BC = OB = R = 15$ m.



□

Chương 9.



ĐA GIÁC ĐỀU

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: đa giác đều, hình đa giác đều trong thực tiễn; phép quay.

Chủ đề 1. ĐA GIÁC ĐỀU. HÌNH ĐA GIÁC ĐỀU TRONG THỰC TIỄN

A ĐA GIÁC. ĐA GIÁC LỒI

Ở lớp dưới, ta đã làm quen với tam giác đều (Hình 1), hình vuông (Hình 2), lục giác đều (Hình 3). Đó là những đa giác đều?



Hình 1



Hình 2



Hình 3

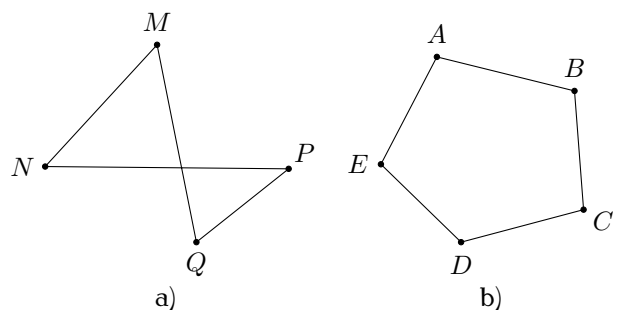
Vậy đa giác đều là đa giác như thế nào? Ở lớp dưới, ta đã làm quen với tam giác đều (Hình 1), hình vuông (Hình 2), lục giác đều (Hình 3). Đó là những đa giác đều?

Vậy đa giác đều là đa giác như thế nào?

1 Đa giác

Tứ giác $MNPQ$ ở Hình 4a gồm 4 đỉnh M, N, P, Q và 4 cạnh MN, NP, PQ, QM . Ngũ giác $ABCDE$ ở Hình 4b gồm 5 đỉnh A, B, C, D, E và 5 cạnh AB, BC, CD, DE, EA . Quan sát hai hình đó, hãy cho biết các phát biểu sau là đúng hay sai?

- Mỗi đỉnh là điểm chung của đúng hai cạnh.
- Không có hai cạnh nào nằm trên cùng một đường thẳng.



Hình 4

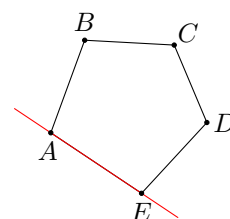
Ta nói tứ giác $MNPQ$ và ngũ giác $ABCDE$ là những đa giác.

⇒ **Nhận xét 1.1.** Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) là một hình gồm n đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, sao cho mỗi điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ là điểm chung của đúng hai đoạn thẳng và không có hai đoạn thẳng nào nằm trên cùng một đường thẳng. Trong đa giác

$A_1A_2 \dots A_n$, các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các đỉnh, các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ là các cạnh.

2 Đa giác lồi

Nêu đặc điểm về vị trí của ngũ giác $ABCDE$ so với đường thẳng chứa một cạnh bất kì của ngũ giác đó (Hình 5).



Hình 5

Chú ý

Do ngũ giác $ABCDE$ luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của ngũ giác đó nên ta nói ngũ giác $ABCDE$ là **ngũ giác lồi**.

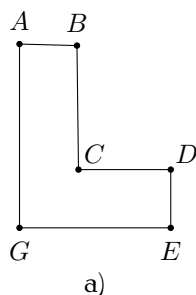
Trong trường hợp tổng quát, ta nói: **Đa giác lồi** là đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác đó.

Với ngũ giác lồi $ABCDE$ ở Hình 5, các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDE}, \widehat{DEA}, \widehat{EAB}$ gọi là các góc của đa giác.

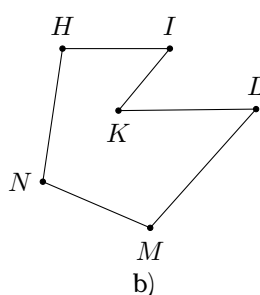
Chú ý

Đa giác lồi có n cạnh ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) cũng là đa giác lồi có n góc. Khi n lần lượt bằng 3; 4; 5; 6;... ta có tam giác, tứ giác lồi, ngũ giác lồi, lục giác lồi,...

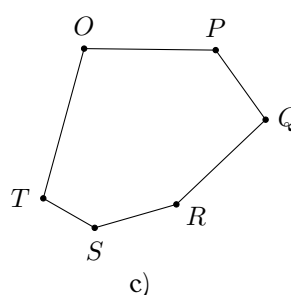
Ví dụ 1. Quan sát các đa giác ở Hình 6 và cho biết đa giác nào là đa giác lồi? Nêu tên các cạnh, các đỉnh, các góc của đa giác lồi đó.



a)



b)



c)

Hướng dẫn giải.

Ở Hình 6c, do đa giác $OPQRST$ luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác đó nên đa giác này là đa giác lồi. Hai đa giác còn lại ở Hình 6 không phải là đa giác lồi.

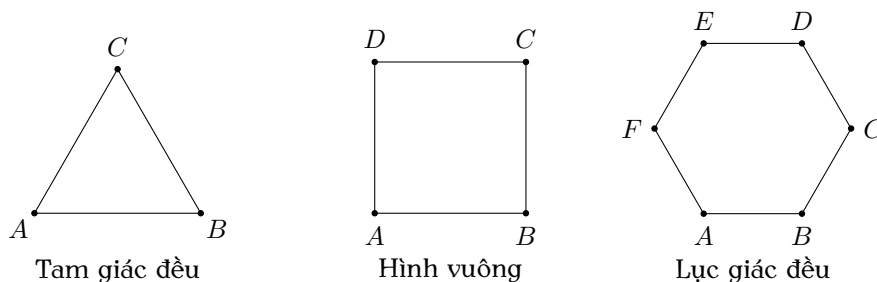
Đa giác lồi $OPQRST$ có: các cạnh là OP, QR, RS, ST, TO ; các đỉnh là O, P, Q, R, S, T ; các góc là $\widehat{OPQ}, \widehat{PQR}, \widehat{QRS}, \widehat{RST}, \widehat{STO}, \widehat{TOP}$.

□

Quy ước: Từ nay về sau, khi nói về đa giác mà không chú thích gì thêm thì ta hiểu đó là đa giác lồi.

B ĐA GIÁC ĐỀU

Quan sát Hình 7 và nêu đặc điểm về cạnh và góc của tam giác đều, hình vuông, lục giác đều.



Hình 7

Ta có định nghĩa sau

❖ **Định nghĩa 1.1.** Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

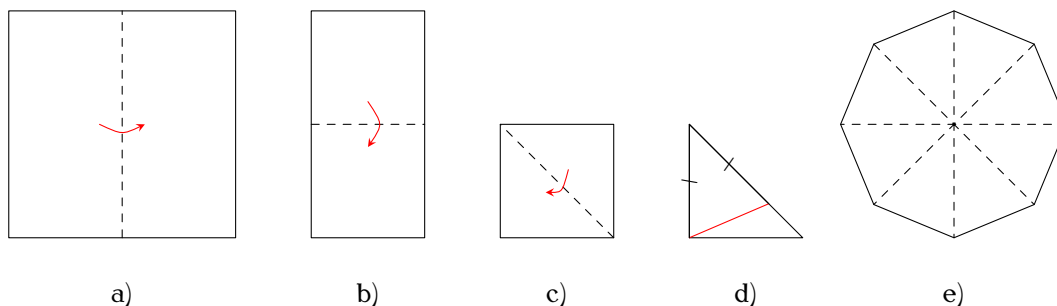
Chẳng hạn, tam giác đều, hình vuông, lục giác đều là các đa giác đều vì mỗi đa giác đó có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

❖ **Nhận xét 1.2.** Ta có thể chứng minh được rằng đối với mỗi đa giác đều, có đúng một điểm O cách đều tất cả các đỉnh của đa giác đó. Điểm O đó được gọi là *tâm* của đa giác đều.

Chú ý

Phần mặt phẳng giới hạn bởi đa giác đều được gọi là *hình đa giác đều*. Vì mỗi hình đa giác đều cũng là một phần của mặt phẳng nên đa giác đều còn gọi là *hình phẳng đều*.

❖ **Ví dụ 2.** Bạn Thảo gấp một tờ giấy (có dạng hình vuông) lần lượt theo các hình 8a, 8b, 8c, rồi cắt theo đoạn thẳng màu đỏ ở Hình 8d, sau đó mở ra và được tờ giấy như Hình 8e. Bạn Thảo cho rằng đó là một *đa giác đều có 8 cạnh*. Theo em, bạn Thảo nói đúng hay không?



Hình 8

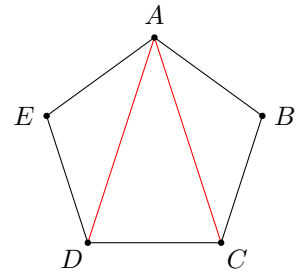
Hướng dẫn giải.

Theo các mà bạn Thảo làm thì 8 tam giác ở Hình 8e là các tam giác cân bằng nhau, suy ra đa giác ở Hình 8e có 8 cạnh bằng nhau và 8 góc bằng nhau nên là một đa giác đều có 8 cạnh. Vậy bạn Thảo nói đúng. □

❖ **Ví dụ 3.** Tính số đo mỗi góc của một ngũ giác đều.

Hướng dẫn giải.

Xét ngũ giác đều $ABCDE$ (Hình 9), ta thấy: Tổng 5 góc của ngũ giác đều đó bằng tổng các góc trong ba tam giác ABC , ACD , ADE , tức bằng $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Do tất cả các góc của ngũ giác đều bằng nhau nên số đo mỗi góc của ngũ giác đều bằng $\frac{540^\circ}{5}$.

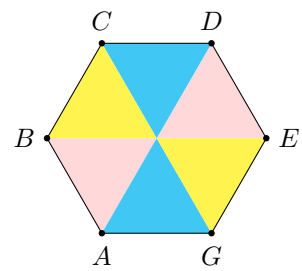


Hình 9

□

LUYỆN TẬP 1

Ghép sáu miếng phẳng hình tam giác đều có cạnh bằng nhau để tạo thành hình lục giác $ABCDEG$ như ở Hình 10. Lục giác $ABCDEG$ có là lục giác đều hay không? Vì sao?



Hình 10

Hướng dẫn giải.

Vì lục giác $ABCDEG$ được ghép từ sáu miếng phẳng hình tam giác đều có cạnh bằng nhau do đó 6 cạnh của lục giác $ABCDEG$ sẽ bằng nhau.

Hơn nữa, mỗi góc được tạo bởi hai góc của tam giác đều nên đều bằng nhau và bằng 120° .

Vậy lục giác $ABCDEG$ là lục giác đều. □

C HÌNH ĐA GIÁC ĐỀU TRONG THỰC TIỄN

Trong thế giới tự nhiên, xuất hiện nhiều vật thể có hình ảnh liên quan đến hình đa giác đều. Dưới đây chúng ta sẽ tìm hiểu những vật thể có hình ảnh liên quan đến hình đa giác đều trong thế giới tự nhiên, trong nghệ thuật, kiến trúc và thiết kế, công nghệ.

1 Hình đa giác đều trong thế giới tự nhiên

Trong tự nhiên, vật thể có hình ảnh liên quan đến hình đa giác đều rất đa dạng, phong phú, chẳng hạn: bông hoa (Hình 11), con sao biển (Hình 22) có hình ảnh liên quan đến ngũ giác đều; tổ ong (Hình 13) có hình ảnh liên quan đến lục giác đều; ...



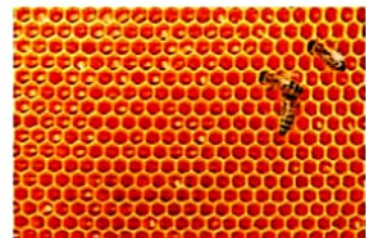
(Ảnh: Tadashi Okabe)

Hình 11



(Ảnh: Ohshurat)

Hình 12



(Ảnh: Kosolovskyy)

Hình 13

2 Hình đa giác đều trong nghệ thuật, kiến trúc

Ngay từ xa xưa, con người trong quá trình chinh phục thế giới tự nhiên luôn khát khao tạo dựng được những công trình hài hòa và bền vững. Để làm được điều đó, họ đã nghiên cứu phân tích cấu trúc của những hình khối cân đối nhất.

Một trong các nguyên tắc quan trọng nhất với nghệ thuật, hay kiến trúc là *nguyên tắc cân bằng*. Theo đó, các thiết kế về kiến trúc, đồ họa hay một tác phẩm nghệ thuật cần thực hiện tốt về cân bằng. Vì thế, bố cục kiểu đối xứng, cân bằng thường được sử dụng trong các tác phẩm nghệ thuật hay kiến trúc. Chẳng hạn, về trang trí hình tứ giác đều hay lục giác đều, bát giác đều như ở các hình 14, 15, 16.



(Ảnh: Mrfiza)

Hình 14



(Minh họa: Shcheglova)

Hình 15



(Minh họa: LiukasArt)

Hình 16

Trong thiết kế hay kiến trúc ta cũng thấy hình phẳng đều thể hiện rất đa dạng, phong phú, chẳng hạn: *Palmanova* là một thị trấn thuộc Italia, được UNESCO công nhận là một di sản thế giới, điểm độc đáo nhất ở đây chính là kiến trúc của thị trấn gợi nên hình ảnh đa giác đều 18 cạnh (Hình 17). Toàn bộ thị trấn như một tổ hợp các pháo đài có kiến trúc cổ kính ở bên trong kết hợp với tổng thể tạo nên vẻ đẹp kì diệu.



(Minh họa: SamKal)

Hình 17

3 Hình đa giác đều trong thiết kế, công nghệ

Trong thiết kế, công nghệ, chúng ta cũng dễ dàng nhận ra các vật thể mà cấu trúc của chúng có dạng hình phẳng đều. Các công trình hay máy móc muốn tồn tại, ổn định, bền vững và có được vẻ đẹp thì phải chú trọng đến tính cân xứng, đều đặn. Theo đó, hình phẳng đều thường được sử dụng chẳng hạn: các viên gạch lát nền (Hình 18) có dạng hình vuông; bề mặt của ốc và đai ốc (Hình 19) có dạng lục giác đều; chiếc đĩa (Hình 20) có dạng hình đa giác đều tám cạnh; ...



(Ảnh: Anton Starikov)

Hình 18



(Ảnh: Mr.Anuwat)

Hình 19



(Ảnh: Luisrftc)

Hình 20

D BÀI TẬP

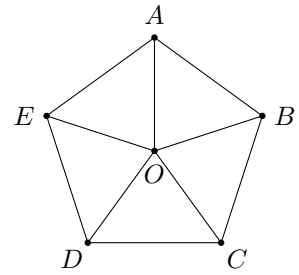
Bài 1. Cho ngũ giác $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 108^\circ$. Ngũ giác $ABCDE$ có phải là ngũ giác đều hay không?

Hướng dẫn giải.

Gọi O là tâm của ngũ giác.

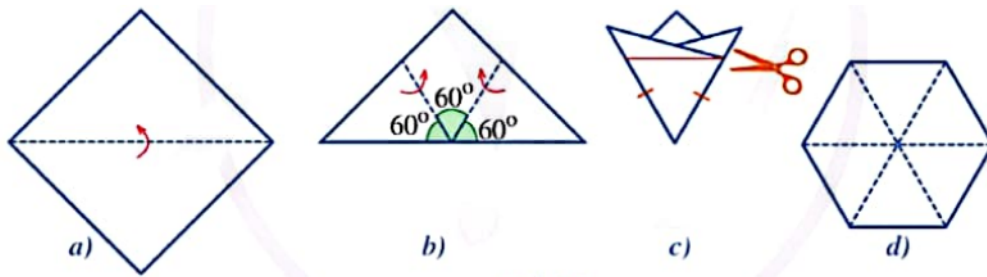
Vì ngũ giác $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 108^\circ$ nên $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{EOA} = 72^\circ$.

Do đó, ngũ giác $ABCDE$ là ngũ giác đều.



□

Bài 2. Bạn Đan gấp một tờ giấy (có dạng hình vuông) lần lượt theo Hình 21a và Hình 21b để được Hình 21c, rồi cắt theo đoạn thẳng màu đỏ như ở Hình 21c, sau đó mở ra và được tờ giấy như Hình 21d. Bạn Đan cho rằng đó là một lục giác đều. Theo em, bạn Đan nói đúng hay không?



Hình 21

Hướng dẫn giải.

Theo cách bạn Đan cắt thì hình lục giác được ghép từ 6 hình tam giác cân có 1 góc bằng 60° hay hình lục giác trên được ghép từ 6 hình tam giác đều.

Do đó, bạn Đan nói đúng.

□

Bài 3. Hãy tìm hiểu trong tự nhiên hay trong nghệ thuật, trang trí, thiết kế, công nghệ,... những vật thể mà cấu trúc của nó có dạng hình đa giác đều.

Hướng dẫn giải.

Trong cuộc sống, ta có thể bắt gặp nhiều đồ vật có dạng hình đa giác đều, ví dụ như biển báo giao thông hình tam giác đều, biển thông báo giao thông có hình vuông, hộp bánh mứt tết hình lục giác đều, ...

□

Bài 4. Thiết kế một đồ vật từ những hình có dạng đa giác đều. Chẳng hạn, vẽ trên giấy 20 hình tam giác đều bằng nhau rồi cắt ra và dán lại để tạo thành chao đèn (hình 20 mặt đều), như ở Hình 22.

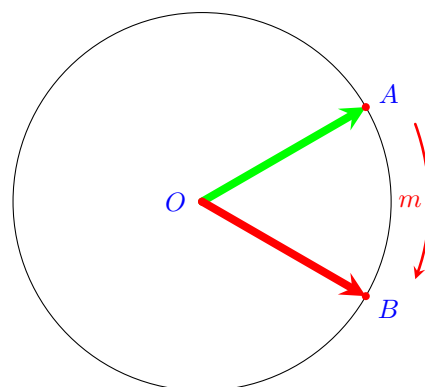


Hình 22

Chủ đề 2. PHÉP QUAY

Bạn Ánh cắt một miếng bìa có dạng hình tròn tâm O , ghim miếng bìa đó lên bảng tại tâm O và gắn một đầu của chiếc kim vào tâm O của hình tròn.

Giả sử chiếc kim đi qua điểm A thuộc đường tròn (O) . Bạn Ánh quay chiếc kim quanh điểm O , theo chiều kim đồng hồ, sao cho chiếc kim đi qua điểm B thuộc đường tròn (O) với cung AmB có số đo 60° (Hình 23).



Hình 23

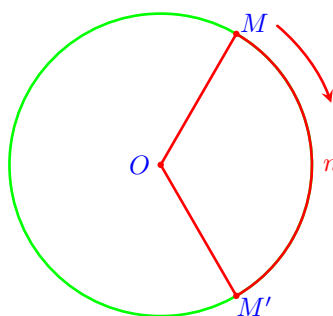
A KHÁI NIỆM

⇒ Nhận xét 2.1.

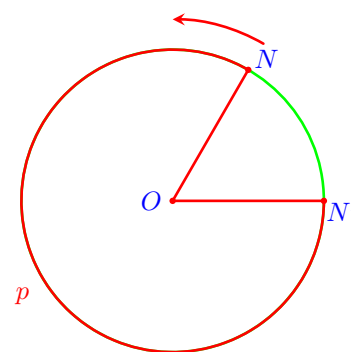
Ở Hình 24, ta có phép quay thuận chiều 120° tâm O .

Ở Hình 25, ta có phép quay ngược chiều 300° tâm O .

Cho điểm O cố định và số thực α . Bằng cách tương tự như trên, ta nhận được:



Hình 24



Hình 25

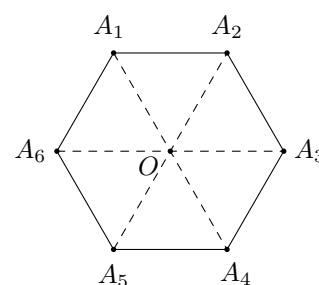
Phép quay thuận chiều α° ($0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$) tâm O giữ nguyên điểm O , biến điểm M (khác điểm O) thành điểm M' thuộc đường tròn $(O; OM)$ sao cho tia OM quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OM' thì điểm M tạo nên cung MM' có số đo α° . Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều α° tâm O .

Lưu ý rằng phép quay 0° và phép quay 360° giữ nguyên mọi điểm.

● Ví dụ 1.

Cho hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có tâm O (Hình 26)

- Tìm điểm đối xứng của mỗi điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ qua tâm O .
- Chỉ ra phép quay thuận chiều tâm O sao cho phép quay đó biến mỗi điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ thành điểm đối xứng với nó qua tâm O .



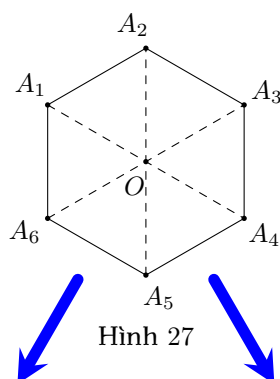
Hình 26

➡ Hướng dẫn giải.

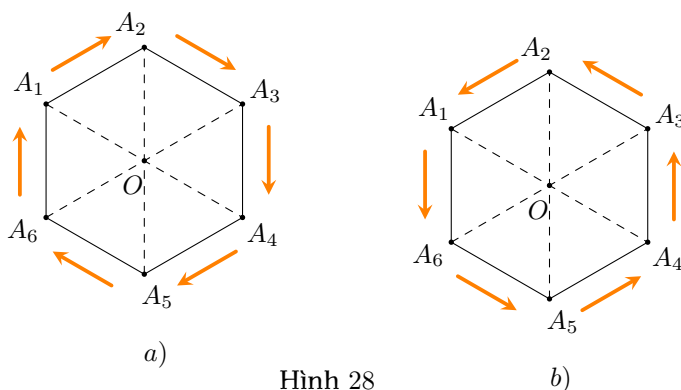
- Điểm đối xứng của mỗi điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ qua tâm O lần lượt là $A_4, A_5, A_6, A_1, A_2, A_3$.
- Phép quay thuận chiều 180° tâm O sẽ biến mỗi điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ thành điểm đối xứng với nó qua tâm O .

□

B PHÉP QUAY GIỮ NGUYÊN HÌNH ĐA GIÁC ĐỀU



Hình 27



Hình 28

✧ **Nhận xét 2.2.** Ở Hình 28a, có 6 phép quay thuận chiều α° tâm O giữ nguyên hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, với α° lần lượt nhận các giá trị $\alpha_1^\circ = 60^\circ$; $\alpha_2^\circ = 120^\circ$; ...; $\alpha_6^\circ = 360^\circ$.

✧ Ở Hình 28b, có 6 phép quay ngược chiều α° tâm O giữ nguyên hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, với α° lần lượt nhận các giá trị $\alpha_1^\circ = 60^\circ$; $\alpha_2^\circ = 120^\circ$; ...; $\alpha_6^\circ = 360^\circ$.



Cho hình đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) có tâm O . Phép quay giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ là phép quay tâm O biến mỗi đỉnh của hình đa giác đều thành một đỉnh của hình đa giác đều đó.

Chú ý

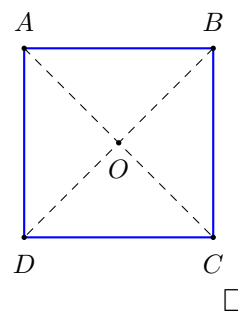
Người ta chứng minh được rằng chỉ có các phép quay sau đây giữ nguyên hình đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) với tâm O : các phép quay thuận chiều α° tâm O và các phép quay ngược chiều α° tâm O , với α° lần lượt nhận các giá trị

$$\alpha_1^\circ = \frac{360^\circ}{n}; \alpha_2^\circ = \frac{2 \cdot 360^\circ}{n}; \dots; \alpha_n^\circ = \frac{n \cdot 360^\circ}{n} = 360^\circ.$$

○ **Ví dụ 2.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Chỉ ra phép quay thuận chiều tâm O sao cho phép quay đó biến mỗi điểm A, B, C, D thành điểm đối xứng với nó qua tâm O .

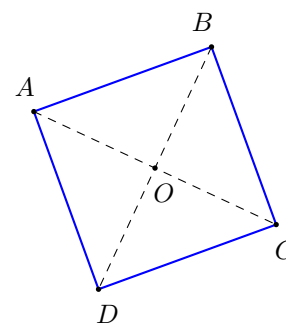
📖 **Hướng dẫn giải.**

- Phép quay thuận chiều 180° tâm O biến điểm A thành điểm C , biến điểm B thành D , biến điểm C thành A , biến điểm D thành B .



❶ Ví dụ 3.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (Hình 29). Nêu các phép quay giữ nguyên hình vuông đó.



Hình 29

➤ Hướng dẫn giải.

Các phép quay giữ nguyên hình vuông $ABCD$ là

- Bốn phép quay thuận chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị 90° , 180° , 270° , 360° .
- Bốn phép quay ngược chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị 90° , 180° , 270° , 360° .

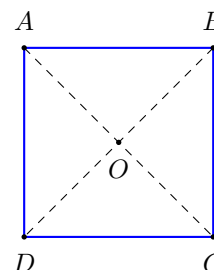
□

© BÀI TẬP

✍ Bài 5.

Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O (Hình 30).

Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm D thì các điểm B, C, D tương ứng biến thành các điểm nào?



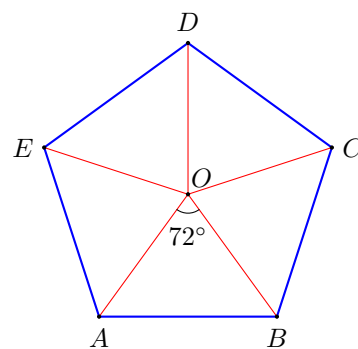
➤ Hướng dẫn giải.

Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành D là phép quay thuận chiều 270° tâm O . Vậy phép quay thuận chiều 270° tâm O biến B thành A , C thành B và D thành C . □

✍ Bài 6.

Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O (Hình 31).

- Phép quay ngược chiều tâm O biến điểm A thành điểm B thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?
- Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.



Hướng dẫn giải.

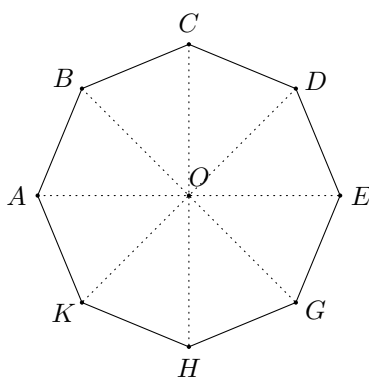
- Phép quay ngược chiều 72° tâm O biến điểm A thành điểm B .
Phép quay ngược chiều 72° tâm O biến điểm B thành điểm C .
Phép quay ngược chiều 72° tâm O biến điểm C thành điểm D .
Phép quay ngược chiều 72° tâm O biến điểm D thành điểm E .
Phép quay ngược chiều 72° tâm O biến điểm E thành điểm A .

- Các phép quay giữ nguyên hình lục giác $ABCDE$ là

- Năm phép quay thuận chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị $72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ, 360^\circ$.
- Năm phép quay ngược chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị $72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ, 360^\circ$.

□

Bài 7. Cho hình đa giác đều có 8 cạnh $ABCDEFGHK$ với tâm O (Hình 32). Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình đa giác đều đã cho.



Hình 32

Hướng dẫn giải.

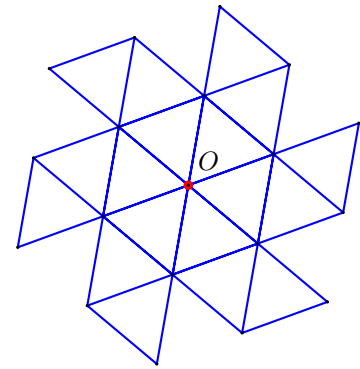
Các phép quay giữ nguyên hình bát giác $ABCDEFGHK$ là

- tám phép quay thuận chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ, 360^\circ$.
- tám phép quay ngược chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ, 360^\circ$.

□

Bài 8.

Vẽ trên giấy 18 hình tam giác đều bằng nhau và ở vị trí như Hình 33 (còn gọi là hình chong chóng).

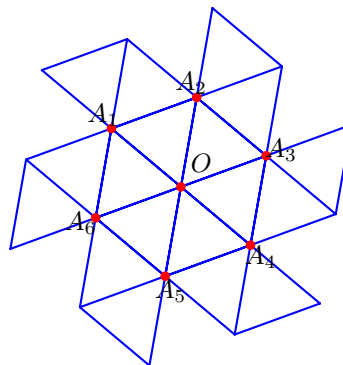


Hình 33

- Hãy đánh dấu 6 điểm nút của hình chong chóng sao cho 6 điểm nút đó là các đỉnh của một hình lục giác đều tâm O .
- Hãy chỉ ra những phép quay tâm O giữ nguyên hình chong chóng.

Hướng dẫn giải.

- 6 điểm nút là lục giác đều tâm O là $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



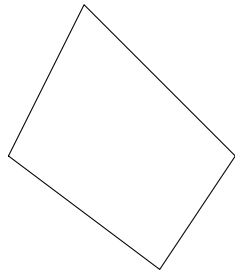
Hình 33

- Các phép quay giữ nguyên hình chong chóng là
 - ☑ sáu phép quay thuận chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ$.
 - ☑ sáu phép quay ngược chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ$.

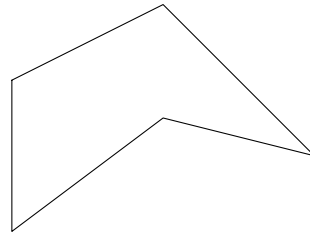
□

Chủ đề 3. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

Bài 9. Quan sát các đa giác ở hình sau và cho biết đa giác nào là đa giác lồi.



Hình a



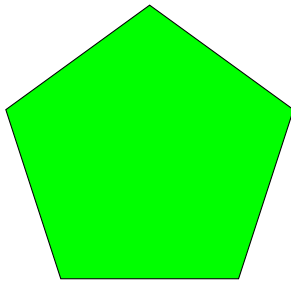
Hình b

Hướng dẫn giải.

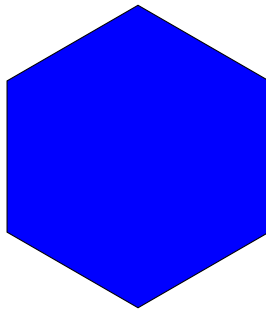
Hình a là đa giác lồi.



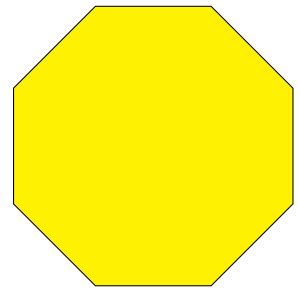
Bài 10. Cho các vật thể có dạng đa giác đều như ở sau. Gọi tên từng đa giác đều đó.



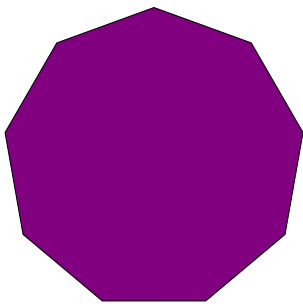
a



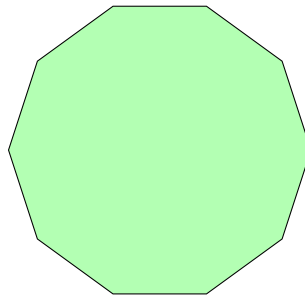
b



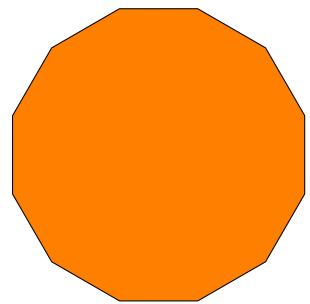
c



d



e



f

Hướng dẫn giải.

- a) Ngũ giác đều.
- b) Lục giác đều.
- c) Bát giác đều.
- d) Cửu giác đều.
- e) Thập giác đều.
- f) Hình 12 cạnh đều.



Bài 11. Mỗi phát biểu sau đây có đúng hay không? Vì sao?

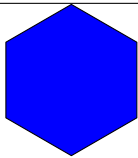
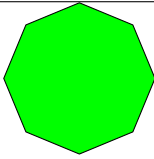
- Đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác đó là đa giác lồi.
- Tứ giác có tất cả các cạnh bằng nhau là tứ giác đều.
- Tứ giác có tất cả các góc bằng nhau là tứ giác đều.

Hướng dẫn giải.

- “Đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác đó là đa giác lồi” là phát biểu **đúng**.
- “Tứ giác có tất cả các cạnh bằng nhau là tứ giác đều” là phát biểu **sai**.
- “Tứ giác có tất cả các góc bằng nhau là tứ giác đều” là phát biểu **sai**.

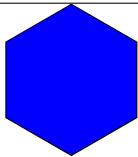
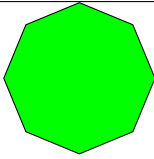
□

Bài 12. Quan sát từng đa giác đều và tìm số thích hợp cho? trong bảng sau

Đa giác đều	Số cạnh	Số góc	Số đo mỗi góc (°)
	?	?	?
	?	?	?

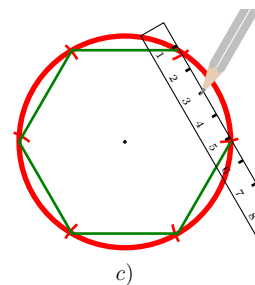
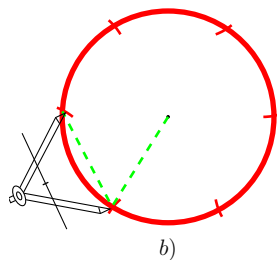
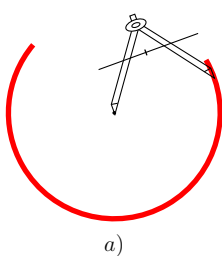
Hướng dẫn giải.

Ta có

Đa giác đều	Số cạnh	Số góc	Số đo mỗi góc (°)
	6	6	120
	8	8	135

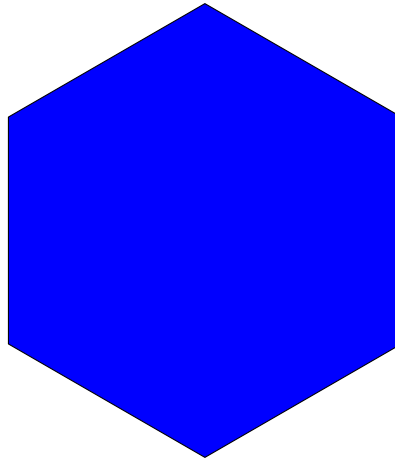
□

Bài 13. Quan sát các hình sau và dùng compa, thước thẳng để vẽ lục giác đều theo cách đó.



Hướng dẫn giải.

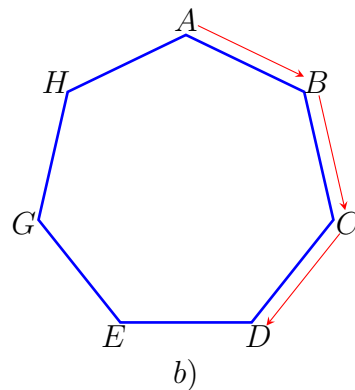
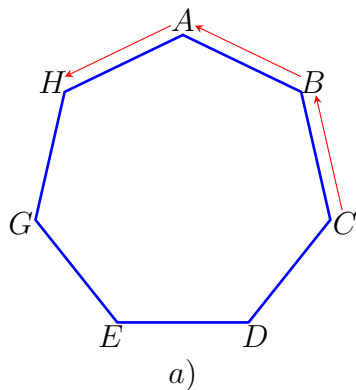
Dùng compa và thước thẳng ta vẽ được hình lục giác đều sau.



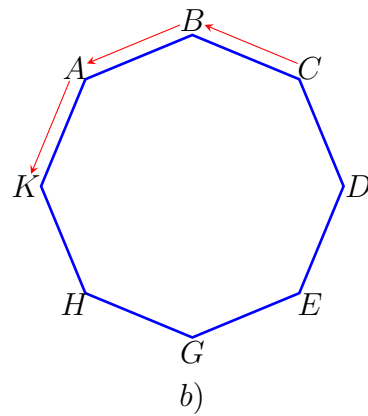
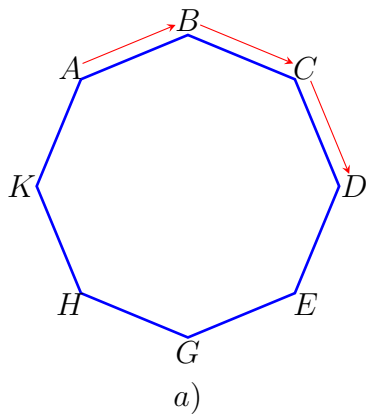
□

Bài 14.

- a) Ở Hình 37a, ta thực hiện phép quay ngược chiều giữ nguyên hình đa giác đều $ABCDEFGH$ (có 7 cạnh) và biến các điểm $A; B; C; D; E; G; H$ lần lượt thành các điểm $H; A; B; C; D; E; G$. Phép quay đó là phép quay nào?
- b) Ở Hình 37b, ta thực hiện phép quay thuận chiều giữ nguyên hình đa giác đều $ABCDEFGH$ (có 7 cạnh) và biến các điểm $A; B; C; D; E; G; H$ lần lượt thành các điểm $B; C; D; E; G; H; A$. Phép quay đó là phép quay nào?



- c) Ở Hình 38a, ta thực hiện phép quay thuận chiều giữ nguyên hình đa giác đều $ABCDEFGHK$ (có 8 cạnh) và biến các điểm A, B, C, D, E, G, H, K lần lượt thành các điểm B, C, D, E, G, H, K, A . Phép quay đó là phép quay nào?
- d) Ở Hình 38b, ta thực hiện phép quay ngược chiều giữ nguyên hình đa giác đều $ABCDEFGHK$ (có 8 cạnh) và biến các điểm A, B, C, D, E, G, H, K lần lượt thành các điểm K, A, B, C, D, E, G, H . Phép quay đó là phép quay nào?



Hướng dẫn giải.

- a) Ở hình 37a thực hiện phép quay ngược chiều α° tâm O với $\alpha^\circ = \frac{360^\circ}{7}$.
- b) Ở hình 37b thực hiện phép quay thuận chiều α° tâm O với $\alpha^\circ = \frac{360^\circ}{7}$.
- c) Ở hình 38a thực hiện phép quay ngược chiều α° tâm O với $\alpha^\circ = \frac{360^\circ}{8}$.
- d) Ở hình 38b thực hiện phép quay thuận chiều α° tâm O với $\alpha^\circ = \frac{360^\circ}{8}$.

□

Bài 15. Hãy tìm hiểu và chỉ ra những vật thể trong thực tiễn mà cấu trúc của nó có dạng hình đa giác đều.

Hướng dẫn giải.

Những vật thể trong thực tiễn mà cấu trúc của nó có dạng hình đa giác đều là

-  Viên gạch men lát nền nhà.
-  Gạch hình lục giác lát vỉa hè.
-  Biển báo hình tam giác.

□

Chương 10.



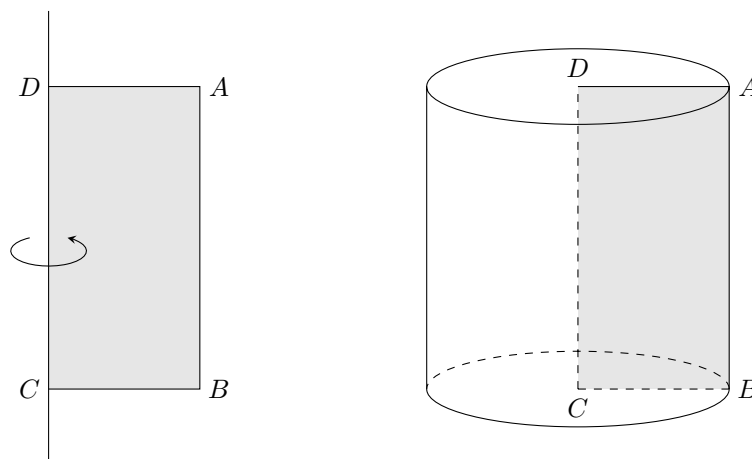
HÌNH HỌC TRỰC QUAN

Chủ đề 1. HÌNH TRỤ

A HÌNH TRỤ

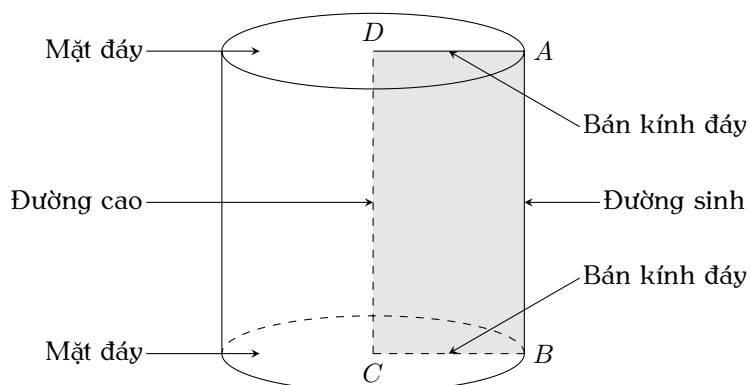
1 Nhận biết hình trụ

⇒ **Nhận xét 1.1.** Hình được tạo ra khi quay một hình chữ nhật một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa một cạnh của nó là hình trụ.



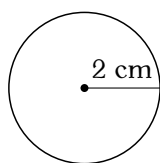
Từ hình vẽ ta có

- Hình tròn tâm D bán kính DA và hình tròn tâm C bán kính CB là hai *mặt đáy*; hai mặt đáy của hình trụ bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song;
- Độ dài cạnh DA được gọi là *bán kính đáy*;
- Độ dài cạnh CD được gọi là *chiều cao*;
- Cạnh AB quét nên mặt xung quanh của hình trụ, mỗi vị trí của cạnh AB được gọi là một *đường sinh*; độ dài đường sinh bằng chiều cao của hình trụ.

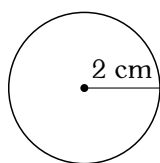


2 Tạo lập hình trụ

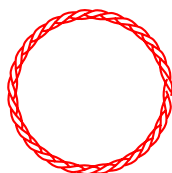
- a) Cắt hai miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính bằng 2 cm (Hình a).



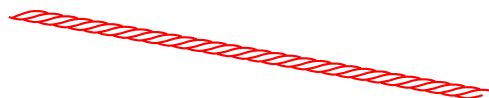
Hình a



Hình b

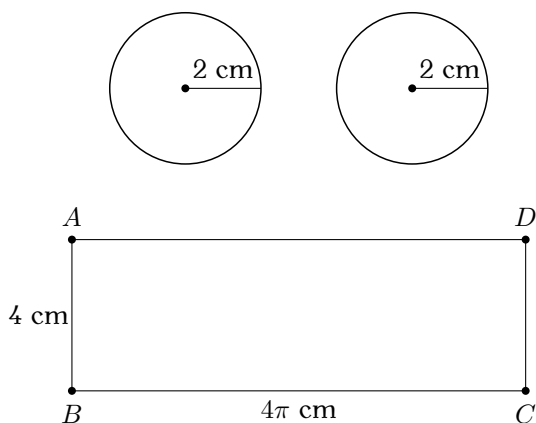


Hình c

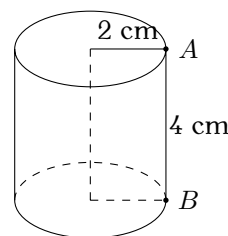


- b) Lấy một sợi dây dài mảnh không dẫn và tạo vòng dây cuốn quanh (một vòng) miếng bìa tròn thứ nhất (Hình b), cắt vòng dây và kéo thẳng vòng dây đó để nhận được đoạn dây như ở Hình c.

Cắt một miếng bìa có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài bằng độ dài đoạn dây ở Hình c và chiều rộng bằng 4 cm.



Hình d

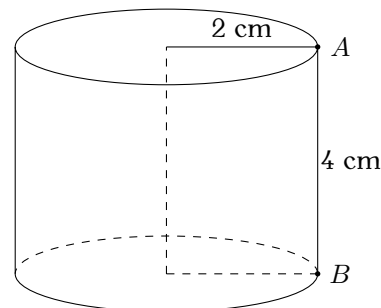


Hình e

- c) Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở câu a, b (Hình d) để được một hình trụ như ở Hình e.

❶ Ví dụ 1. Đối với hình trụ nhận được ở (Hình vẽ), hãy chỉ ra:

- Một đường sinh của hình trụ;
- Độ dài bán kính đáy, chiều cao của hình trụ.



➡ Hướng dẫn giải.

- Đoạn thẳng AB là một đường sinh của hình trụ đó.
- Độ dài bán kính đáy, chiều cao của hình trụ đó lần lượt là 2 cm, 4 cm.

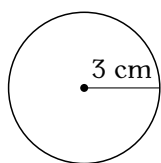
□

LUYỆN TẬP 1

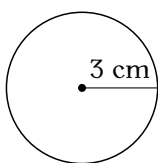
Tạo lập một hình trụ có bán kính đáy là 3 cm, chiều cao là 5 cm.

➡ Hướng dẫn giải.

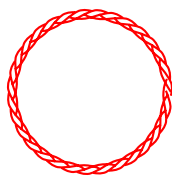
- Cắt hai miếng bìa có dạng hình tròn với bán kính bằng 3 cm (Hình a).



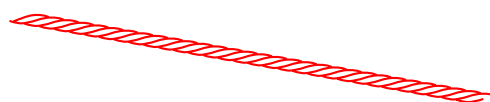
Hình a



Hình b

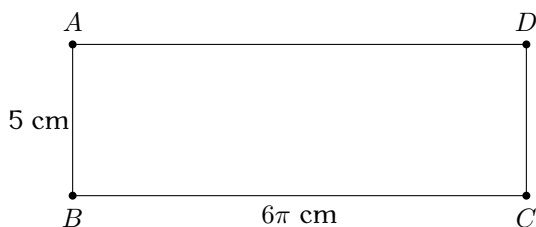
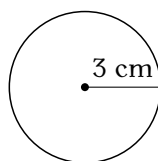
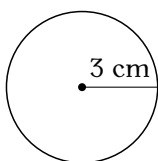


Hình c

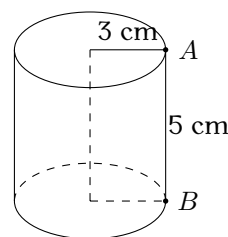


- b) Lấy một sợi dây dài mảnh không dẫn và tạo vòng dây cuốn quanh (một vòng) miếng bìa tròn thứ nhất (Hình b), cắt vòng dây và kéo thẳng vòng dây đó để nhận được đoạn dây như ở Hình c.

Cắt một miếng bìa có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài bằng độ dài đoạn dây ở Hình c và chiều rộng bằng 4 cm.



Hình d



Hình e

- c) Ghép và dán các miếng bìa vừa cắt ở câu a, b (Hình d) để được một hình trụ như ở Hình e.

□

B DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH TRỤ

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích của chu vi đáy với chiều cao:

$$S_{xq} = C \cdot h = 2\pi rh,$$

trong đó S_{xq} là diện tích xung quanh, C là chu vi đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao của hình trụ.

Ví dụ 2. Cho một hình trụ có bán kính đáy là 4 cm và chiều cao là 10 cm. Hỏi diện tích xung quanh của hình trụ đó là bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ đó là

$$S_{xq} = 2\pi \cdot 4 \cdot 10 = 80\pi \approx 251,33 \text{ cm}^2.$$

□

Chú ý

Chú ý: Tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy của hình trụ gọi là diện tích toàn phần của hình trụ. Diện tích toàn phần S_t của hình trụ được tính theo công thức: $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$, trong đó r là bán kính đáy và h là chiều cao của hình trụ

LUYỆN TẬP 2

Bác An muốn sơn mặt xung quanh của một cây cột có dạng hình trụ với đường kính đáy là 30 cm và chiều cao là 350 cm. Chi phí để sơn cây cột đó là 40 000 đồng/m². Hỏi chi phí bác An cần bỏ ra để sơn mặt xung quanh của cây cột đó là bao nhiêu đồng (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Hướng dẫn giải.

Diện tích xung quanh của cây cột là

$$S_{xq} = \pi dh = 3,14 \cdot 0,3 \cdot 3,5 = 3,297 \text{ m}^2.$$

Chi phí để sơn cây cột là

$$40\,000 \cdot 3,297 = 13\,188 \text{ đồng} \approx 13\,000 \text{ đồng}.$$

□

C THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

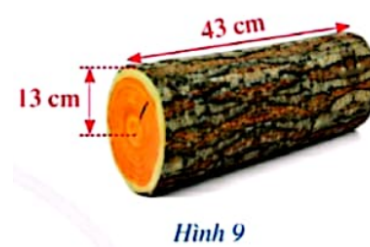
Thể tích của hình trụ bằng tích của diện tích đáy với chiều cao:

$$V = S \cdot h = \pi r^2 h,$$

trong đó V là thể tích, S là diện tích đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao của hình trụ.

Ví dụ 3.

Một khối gỗ có dạng hình trụ với bán kính đáy khoảng 13 cm và chiều cao khoảng 43 cm (Hình vẽ). Hỏi thể tích của khối gỗ đó là bao nhiêu centimet khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 9

Hướng dẫn giải.

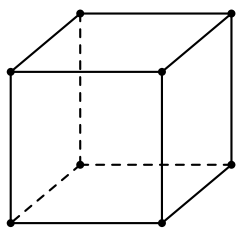
Thể tích của khối gỗ đó là

$$V = \pi \cdot 13^2 \cdot 43 = 7\,267\pi \approx 22\,829,95 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

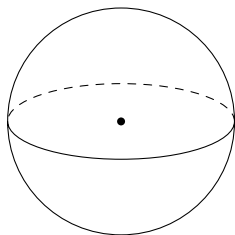
□

D BÀI TẬP

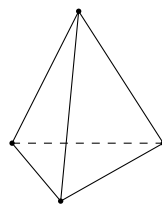
Bài 1. Trong những vật thể ở các hình a, b, c, d, e , vật thể nào có dạng hình trụ?



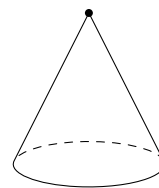
Hình a



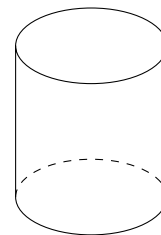
Hình b



Hình c



Hình d

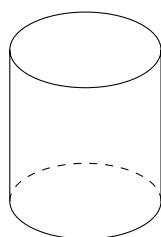


Hình e

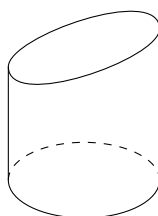
Hướng dẫn giải.

Trong các vật thể ở các hình a, b, c, d, e, vật thể ở hình e có dạng hình trụ. □

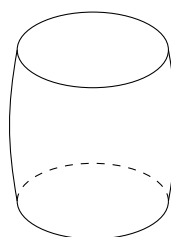
Bài 2. Trong những vật thể ở các hình a, b, c, d, vật thể ở hình nào có dạng hình trụ?



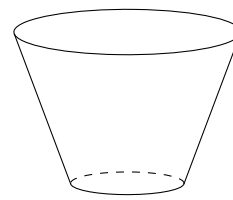
Hình a



Hình b



Hình c



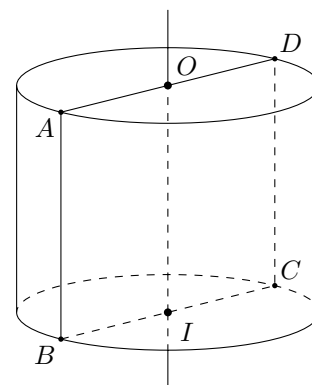
Hình d

Hướng dẫn giải.

Trong các vật thể ở các hình a, b, c, d, vật thể ở hình a có dạng hình trụ. □

Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$, các điểm O, I lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC . Xét hình trụ được tạo ra khi quay hình chữ nhật $AOIB$ một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa cạnh OI của hình chữ nhật đó (Hình vẽ). Quan sát hình vẽ, hãy chỉ ra:

- Bốn bán kính đáy của hình trụ;
- Chiều cao của hình trụ;
- Hai đường sinh của hình trụ.



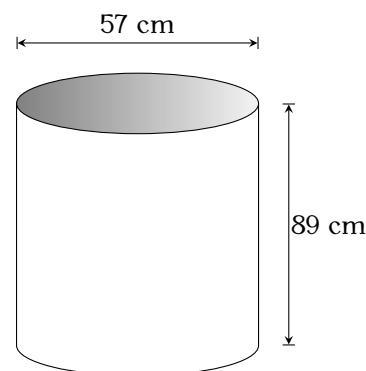
Hướng dẫn giải.

- Bốn bán kính đáy của hình trụ là $IB; IC; OA; OD$.
- Chiều cao của hình trụ là OI .
- Hai đường sinh của hình trụ là AB và CD .

□

Bài 4.

Một doanh nghiệp sản xuất vỏ hộp bằng tôn có dạng hình trụ với hai đáy (Hình vẽ). Hình trụ đó có đường kính đáy khoảng 57 cm và chiều cao khoảng 89 cm. Chi phí để sản xuất vỏ hộp đó là 100 000 đồng/m². Hỏi số tiền mà doanh nghiệp cần chi để sản xuất 1 000 vỏ hộp đó là bao nhiêu đồng (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?



Hướng dẫn giải.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \pi dh + 2\pi \frac{d^2}{4} = \pi \left(dh + \frac{d^2}{2} \right) = 3,14 \cdot \left(0,57 \cdot 0,89 + \frac{0,57^2}{2} \right) \approx 2,103 \text{ m}^2.$$

Chi phí để sản xuất một vỏ hộp là

$$100\,000 \cdot 2,103 = 210\,300 \text{ đồng.}$$

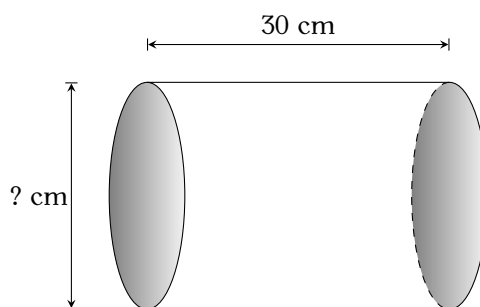
Chi phí để sản xuất 1000 vỏ hộp là

$$1\,000 \cdot 210\,300 = 210\,300\,000 \text{ đồng.}$$

□

Bài 5.

Một đường ống nối hai bể cá trong một thủy cung có dạng hình trụ (không có hai đáy), với độ dài (hay chiều cao) là 30 m và có dung tích là 1 800 000 l (Hình vẽ). Hỏi đường kính đáy của đường ống đó là bao nhiêu mét (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hướng dẫn giải.

Dung tích của đường ống là 1800000 lít nên thể tích của đường ống là 1800 m³.

Ta có

$$V = S_d \cdot h = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \Rightarrow d^2 = \frac{4V}{\pi \cdot h}.$$

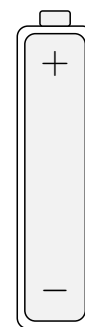
Vậy đường kính đáy của đường ống là

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi \cdot h}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1800}{\pi \cdot 30}} \approx 8,74 \text{ m.}$$

□

Bài 6.

Pin là nguồn năng lượng phổ biến được sử dụng trong nhiều dụng cụ và thiết bị trong gia đình. Pin AAA (hay pin 3A) là một loại pin khô, thường được dùng trong những thiết bị điện tử cầm tay, chẳng hạn, điều khiển từ xa ti vi, máy nghe nhạc MP3, ... Mỗi chiếc pin 3A có dạng hình trụ (Hình vẽ), với kích cỡ tiêu chuẩn: chiều cao khoảng 44,5 mm và đường kính đáy khoảng 10,5 mm. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần (theo đơn vị centimet vuông) và thể tích (theo đơn vị centimet khối) của một chiếc pin 3A đó (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hướng dẫn giải.

Diện tích đáy chiếc pin là

$$S_d = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,05^2}{4} \approx 0,9 \text{ cm}^2.$$

Diện tích xung quanh của chiếc pin là

$$S_{xq} = \pi \cdot d \cdot h = 3,14 \cdot 1,05 \cdot 4,45 \approx 14,7 \text{ cm}^2.$$

Diện tích toàn phần của chiếc pin là

$$S_{tp} = 2 \cdot S_d + S_{xq} = 2 \cdot 0,9 + 14,7 = 16,5 \text{ cm}^2.$$

Thể tích của chiếc pin là

$$V = S_d \cdot h = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,05^2 \cdot 4,45}{4} \approx 3,9 \text{ cm}^3.$$

□

Chủ đề 2. HÌNH NÓN

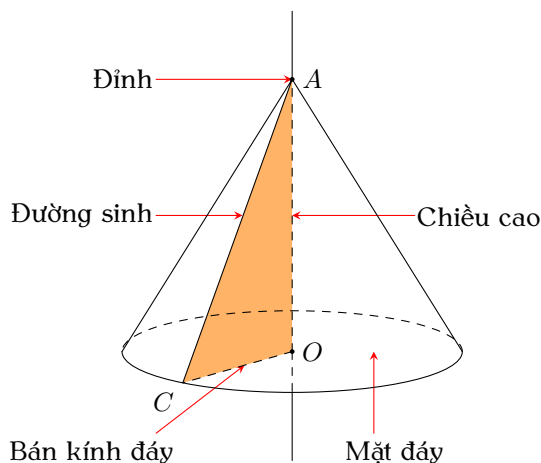
A HÌNH NÓN

1 Nhận biết hình nón

⇒ **Nhận xét 2.1.** Hình được tạo ra khi quay một hình tam giác vuông một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa một cạnh góc vuông của tam giác đó là *hình nón*.

Với hình nón như ở bên, ta có:

- 🟢 Điểm A là đỉnh;
- 🟢 Hình tròn tâm O bán kính OC là *mặt đáy*;
- 🟢 Độ dài cạnh OC được gọi là *bán kính đáy*;
- 🟡 Độ dài cạnh AO được gọi là *chiều cao*;
- 🟡 Cạnh AC quét nên *mặt xung quanh* của hình nón, mỗi vị trí của cạnh AC được gọi là một *đường sinh*.



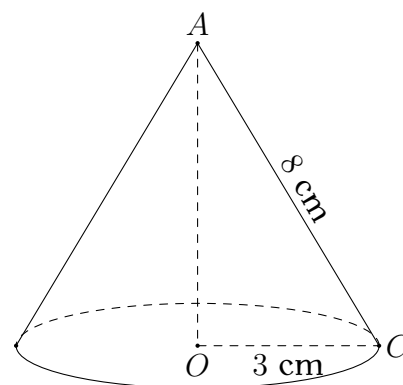
Chú ý: Nếu gọi độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón lần lượt là l , h và r thì theo định lý Pythagore ta có $l^2 = h^2 + r^2$.

2 Tạo lập hình nón

● Ví dụ 1.

Đối với hình nón nhận được ở hình bên, hãy chỉ ra:

- a) Một đường sinh của hình nón và tính độ dài đường sinh đó;
- b) Độ dài bán kính đáy, chiều cao của hình nón.



📖 Hướng dẫn giải.

- a) Đoạn thẳng AC là một đường sinh của hình nón đó, suy ra $l = 8$ cm.
- b) Độ dài bán kính đáy của hình nón đó là 3 cm, suy ra $r = 3$ cm.
 Áp dụng công thức $l^2 = h^2 + r^2$, ta có:
 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$ (cm).
 Vậy chiều cao của hình nón đó là $h = \sqrt{55}$ cm.

□

B DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH NÓN

⇒ **Định nghĩa 2.1.** Diện tích xung quanh của hình nón bằng nửa tích của chu vi đáy với độ dài đường sinh $S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot l = \pi r l$, trong đó S_{xq} là diện tích xung quanh, r là bán kính đáy, C là chu vi đáy, l là độ dài đường sinh của hình nón.

❶ Ví dụ 2. Cho một hình nón có bán kính đáy là 4 cm và độ dài đường sinh là 10 cm. Hỏi diện tích xung quanh của hình nón đó là bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

📖 Hướng dẫn giải.

Diện tích xung quanh của hình nón đó là:

$$S_{xq} = \pi \cdot 4 \cdot 10 = 40\pi \approx 125,66 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

□

VẬN DỤNG 1

Một chiếc nón lá có dạng hình nón với đường kính đáy khoảng 44 cm, chiều cao khoảng 20 cm. Hỏi diện tích xung quanh của chiếc nón đó bằng bao nhiêu centimet vuông (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



📖 Hướng dẫn giải.

Bán kính đáy $r = \frac{44}{2} = 22$ cm.

Độ dài đường sinh là $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{22^2 + 20^2} = 2\sqrt{221}$ cm.

Diện tích xung quanh của hình nón đó là

$$S_{xq} = \pi \cdot 22 \cdot 2\sqrt{221} \approx 2054 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

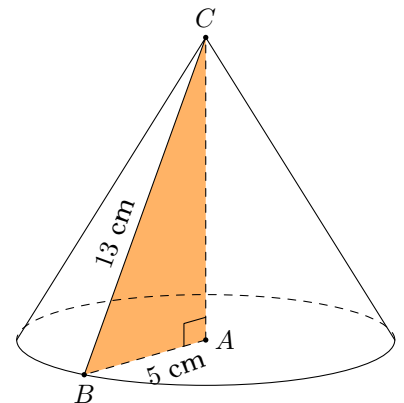
□

📐 THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN

🔗 Định nghĩa 2.2. Thể tích của hình nón bằng một phần ba tích của diện tích đáy với chiều cao $V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, trong đó V là thể tích, S là diện tích đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao của hình nón.

❶ Ví dụ 3.

Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = 5$ cm, $BC = 13$ cm. Quay tam giác vuông ABC một vòng xung quanh đường thẳng AC ta được hình nón (hình bên). Hỏi thể tích của hình nón đó bằng bao nhiêu centimet khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



📖 Hướng dẫn giải.

Do tam giác ABC vuông tại A nên theo định lý Pythagore, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Suy ra $AC^2 = BC^2 - AB^2$.

Do đó $AC^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ hay $AC = \sqrt{144} = 12$ (cm).

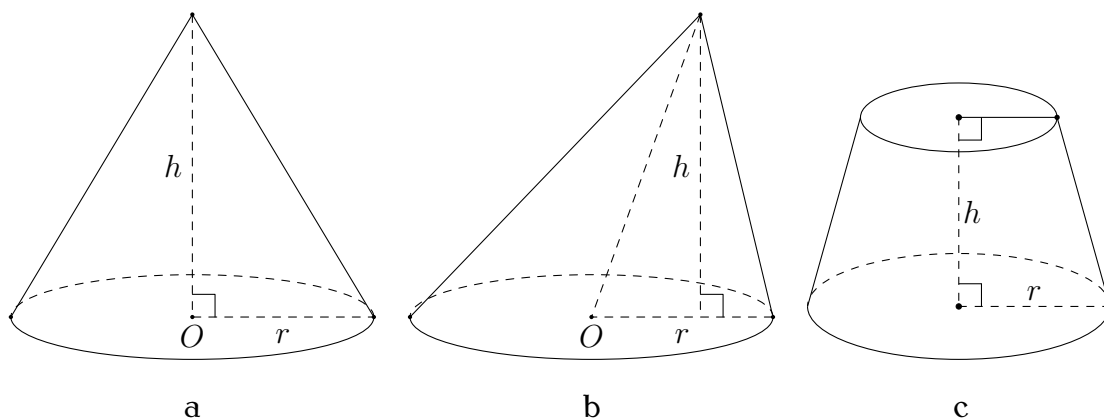
Thể tích của hình nón đó là

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \approx 314,16 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

□

D BÀI TẬP

Bài 7. Trong những vật thể ở các hình a, b, c , vật thể ở hình nào có dạng hình nón (trong đó, O là tâm của mặt đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao)?



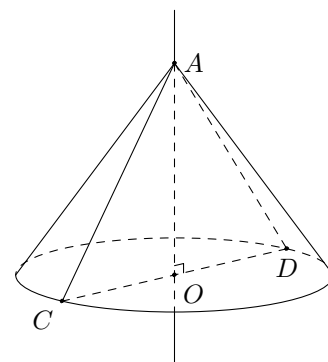
Hướng dẫn giải.

Vật thể ở Hình a có dạng hình nón.

□

Bài 8.

Cho tam giác cân ACD có O là trung điểm cạnh đáy CD . Xét hình nón được tạo ra khi quay tam giác vuông AOC một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa cạnh AO của tam giác vuông đó. Quan sát hình bên, hãy chỉ ra:



- Đỉnh của hình nón;
- Hai bán kính đáy của hình nón;
- Chiều cao của hình nón;
- Hai đường sinh của hình nón.

Hướng dẫn giải.

- Đỉnh của hình nón A ;
- Hai bán kính đáy của hình nón OC và OD ;
- Chiều cao của hình nón AO ;
- Hai đường sinh của hình nón AC và AD .

□

Bài 9.

Phần mái lá của một ngôi nhà có dạng hình nón (không có đáy) với đường kính đáy khoảng 12 m và độ dài đường sinh khoảng 8,5 m (Hình bên). Chi phí để làm phần mái lá đó là 250 000 đồng/1m². Hỏi tổng chi phí để làm toàn bộ phần mái nhà đó là bao nhiêu đồng (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn đến kết quả hàng nghìn)?



Hướng dẫn giải.

Bán kính đáy $r = \frac{12}{2} = 6$.

Diện tích xung quanh của hình nón đó là

$$S_{xq} = \pi \cdot 6 \cdot 8,5 = 160,14 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Chi phí để làm toàn bộ phần mái nhà là

$$250\,000 \cdot 160,14 = 40\,035\,000 \text{ đồng.}$$

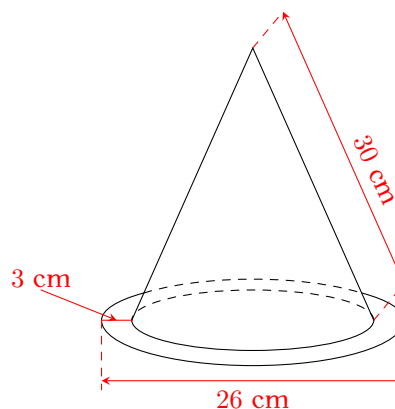
□

Bài 10. Chú hề trên sân khấu thường có trang phục như *Hình a*. Mũ của chú hề có dạng hình nón. Có thể mô phỏng cấu tạo, kích thước chiếc mũ của chú hề như *Hình b*.

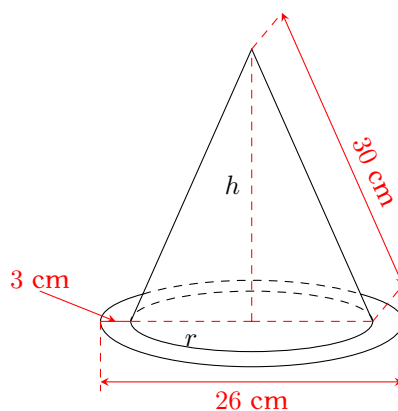
- Để phủ kín mặt ngoài của chiếc mũ chú hề như *Hình b* cần bao nhiêu centimét vuông giấy màu (không tính phần mép dán) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?
- Hỏi thể tích phần có dạng hình nón của chiếc mũ chú hề ở *Hình b* bằng bao nhiêu centimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



a



b

Hướng dẫn giải.

Bán kính đáy của khối nón là $r = \frac{26 - 2 \cdot 3}{2} = 10 \text{ (cm)}$.

Chiều cao của khối nón là $h = \sqrt{30^2 - 10^2} = 20\sqrt{2} \text{ (cm)}$.

- Diện tích xung quanh của hình nón đó là:

$$S_{xq} = \pi \cdot 10 \cdot 30 \approx 942,48 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy để phủ kín mặt ngoài của chiếc mũ chú hề như *Hình b* cần 942,48 (cm²) vuông giấy màu.

b) Thể tích của hình nón đó là:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 20\sqrt{2} = 2961,92 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vậy thể tích phần có dạng hình nón của chiếc mũ chú hề ở *Hình b* là 2961,92 (cm³).

□

Chủ đề 3. HÌNH CẦU

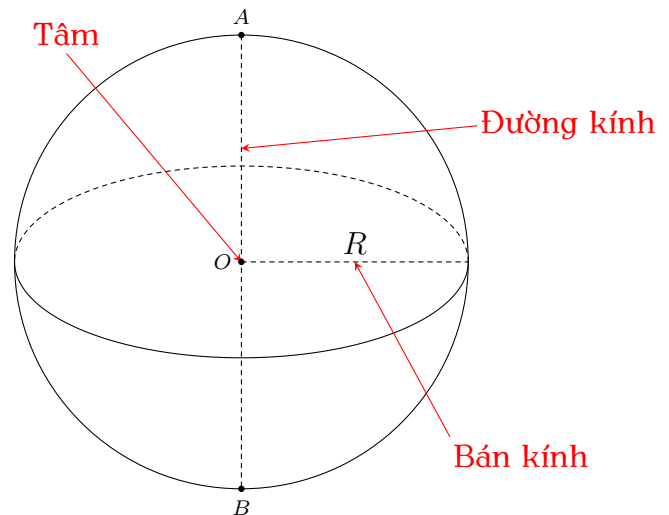
A HÌNH CẦU

1 Nhận biết hình cầu

Hình được tạo ra khi quay một nửa hình tròn một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa đường kính của nó là hình cầu.

Với hình cầu như ở Hình 30, ta có

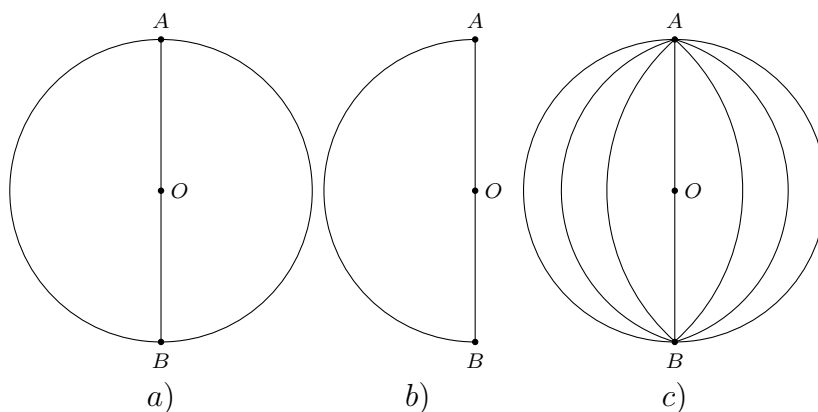
- ❖ Nửa đường tròn đường kính AB quét nên mặt cầu; như vậy, mặt cầu là hình được tạo ra khi quay một nửa đường tròn một vòng xung quanh đường thẳng cố định chứa đường kính của nó;
- ❖ Điểm O là tâm của hình cầu (hay tâm của mặt cầu);
- ❖ Đoạn thẳng AB là đường kính của hình cầu (hay đường kính của mặt cầu);
- ❖ R là bán kính của hình cầu (hay bán kính của mặt cầu).



Hình 30

2 Tạo lập hình cầu

Cắt một số miếng bìa có dạng hình tròn có cùng đường kính. Mỗi miếng bìa tròn đó được cắt làm hai nửa hình tròn. Ghép các miếng bìa có dạng nửa hình tròn đó để được một hình cầu như ở Hình 31.



Hình 31

Ví dụ 1. Đối với hình cầu nhận được ở (Hình 31c), hãy chỉ ra

- a) Tâm của hình cầu;
- b) Một đường kính của hình cầu.

Hướng dẫn giải.

- a) Điểm O là tâm của hình cầu đó.

b) Đoạn thẳng AB là một đường kính của hình cầu đó.

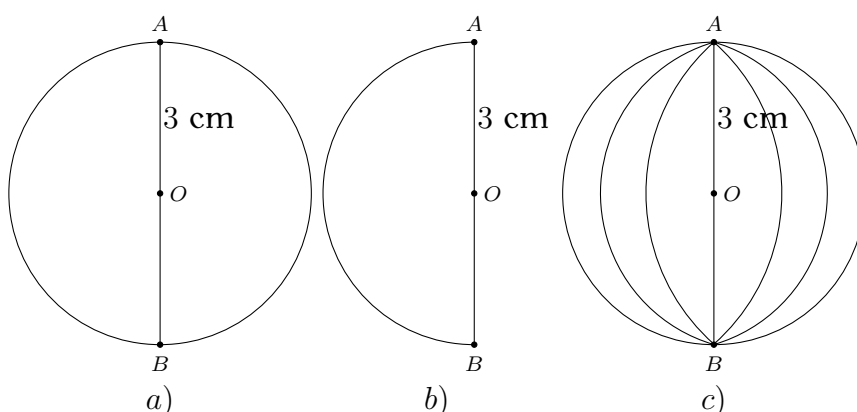
□

LUYỆN TẬP 1

Tạo lập một hình cầu có bán kính là 3 cm.

Hướng dẫn giải.

- 🌀 Vẽ các đường tròn bán kính bằng 3 cm.
- 🌀 Mỗi đường tròn đó được cắt làm hai nửa hình tròn.
- 🌀 Ghép các nửa hình tròn đó để được một hình cầu.

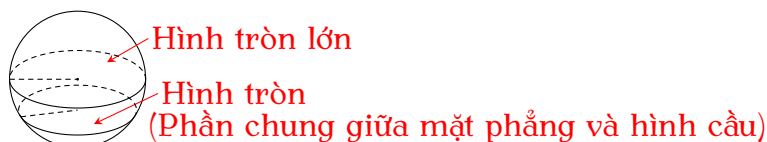


□

3 Nhận biết phần chung giữa mặt phẳng và hình cầu

- 🌀 Nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một hình tròn như Hình 34.

Đặc biệt, nếu cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng đi qua tâm hình cầu thì phần chung giữa chúng là một hình tròn lớn như Hình 34.



Hình 34

- 🌀 Nếu cắt một mặt cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung giữa chúng là một đường tròn.

B DIỆN TÍCH MẶT CẦU

Diện tích mặt cầu có bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

Ví dụ 2. Cho một hình cầu có bán kính là 10 cm. Diện tích mặt cầu đó bằng bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải.

Diện tích mặt cầu đó là $S = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi \approx 1\,256,64 \text{ (cm}^2\text{)}$.

□

LUYỆN TẬP 2

Một quả bóng đá theo tiêu chuẩn chuyên nghiệp (cho cả nam và nữ, từ khoảng 11, 12 tuổi trở lên), thường nặng khoảng 450 g, có chu vi đường tròn lớn khoảng 70 cm. Diện tích bề mặt của quả bóng đá như thế bằng bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải.

Ta có chu vi đường tròn lớn là $2\pi R = 70 \Rightarrow R = \frac{35}{\pi} \approx 11,14$ (cm).

Diện tích bề mặt quả bóng là $S = 4\pi R^2 \approx 4\pi \cdot 11,14^2 \approx 1\,559,48$ (cm²). □

C THỂ TÍCH CỦA KHỐI CẦU

Thể tích của hình cầu có bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ví dụ 3. Bạn Lan cắt một trái cam có dạng hình cầu thành hai phần như nhau, đường kính của nửa trái cam vừa cắt (tính cả vỏ) đo được khoảng 7 cm, biết vỏ cam dày khoảng 4 mm. Hỏi thể tích phần ruột của quả cam đó khoảng bao nhiêu centimet khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

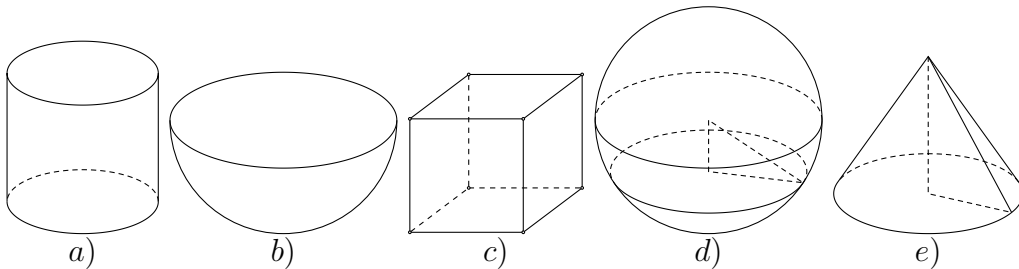
Hướng dẫn giải.

Đổi 4 mm = 0,4 cm.

Thể tích phần ruột của quả cam đó là $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{7}{2} - 0,4\right)^3 \approx 124,79$ (cm³). □

D BÀI TẬP

Bài 11. Trong những vật thể ở các hình 37a, 37b, 37c, 37d, 37e vật thể ở hình nào có dạng hình cầu?



Hình 37

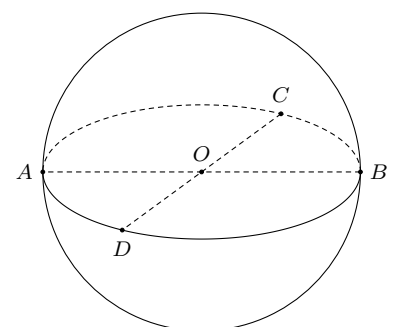
Hướng dẫn giải.

Vật thể có dạng hình cầu là Hình 37d). □

Bài 12.

Cho một mặt phẳng đi qua tâm O của một hình cầu (Hình 38). Quan sát Hình 38, hãy chỉ ra

- Hai đường kính của hình cầu;
- Bốn bán kính của hình cầu;
- Hình tròn lớn của hình cầu.



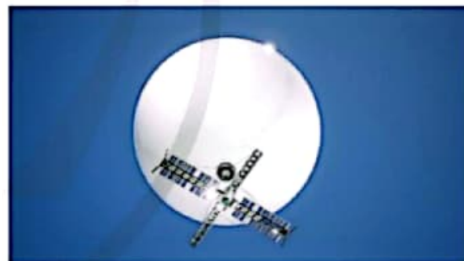
Hướng dẫn giải.

- a) Hai đường kính của hình cầu là AB, CD .
- b) Bốn bán kính của hình cầu là OA, OB, OC, OD .
- c) Hình tròn lớn của hình cầu là hình tròn chứa hai đường kính AB, CD .

□

Bài 13.

Để dự báo thời tiết, người ta sử dụng các bóng thám không, đó là một loại bóng bay mang theo các dụng cụ đo thời tiết như đo áp suất khí quyển, nhiệt độ, độ ẩm và tốc độ gió. Giả sử một quả bóng thám không có dạng hình cầu với bán kính 10 m. Hỏi diện tích bề mặt của quả bóng thám không đó là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Bóng thám không

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)**Hướng dẫn giải.**

Diện tích bề mặt của quả bóng thám không đó là $S = 4\pi \cdot 10^2 = 400 \cdot 3,14 = 1256 \text{ m}^2$.

□

Bài 14.

Một bình nuôi cá cảnh có dạng hình cầu với đường kính khoảng 40 cm. Người ta đổ nước vào bình cá sao cho nước ngập khoảng 20 cm (Hình 39). Hỏi cần phải đổ vào bình bao nhiêu lít nước (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 39

Hướng dẫn giải.

Bán kính hình cầu là $R = 40 : 2 = 20 \text{ cm}$.

Thể tích của hình cầu $V_c = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 20^3 \approx 33493,3 \text{ cm}^3$.

Thể tích của nước đổ vào $V_n = \frac{1}{2} \cdot V_c \approx 16746,65 \text{ cm}^3 \approx 16,7 \text{ dm}^3 = 16,7 \text{ lít}$.

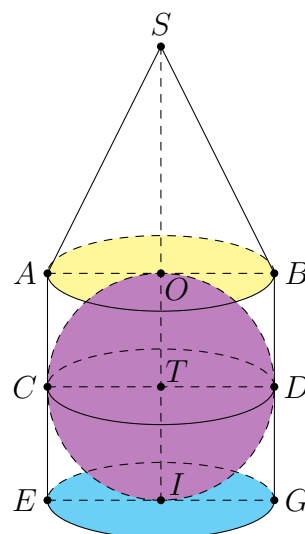
□

Chủ đề 4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG X

Bài 15.

Hình bên gồm một hình cầu nằm khít trong hình trụ, một hình nón có mặt đáy là mặt đáy trên của hình trụ và đặt phía trên hình trụ. Quan sát hình bên, hãy chỉ ra

- Bốn bán kính đáy, hai đường sinh và chiều cao của hình trụ.
- Đỉnh, hai bán kính đáy, hai đường sinh và chiều cao của hình nón.
- Tâm, hai đường kính, bốn bán kính và hình tròn lớn của hình cầu.



Hướng dẫn giải.

- a) Hình trụ có

- Bốn bán kính $OA = OB = IE = IG$.
- Chiều cao OI .
- Hai đường sinh $AE = BG$.

- b) Hình nón có

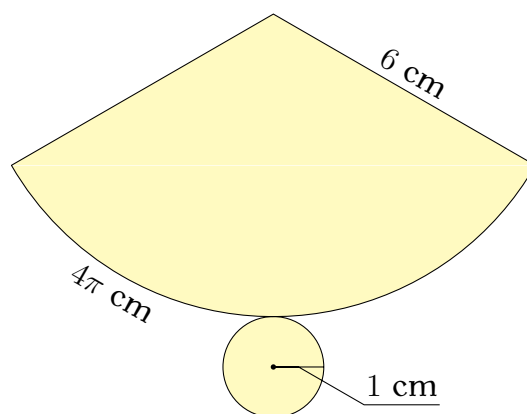
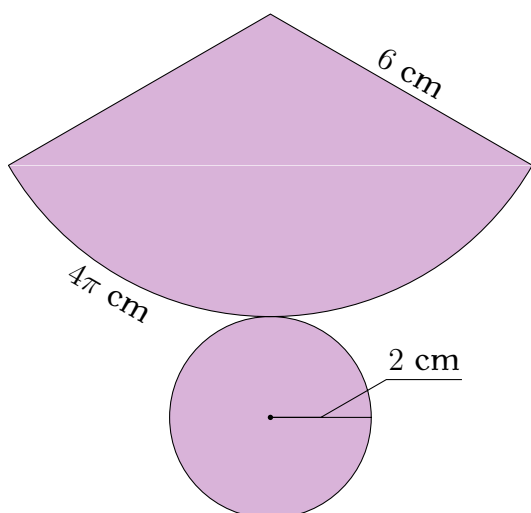
- Đỉnh S .
- Hai bán kính đáy $OA = OB$.
- Hai đường sinh $SA = SB$.
- Chiều cao SO .

- c) Hình cầu có

- Tâm T .
- Bốn bán kính $TO = TC = TI = TD$.
- Hai đường kính $OI = CD$.
- Hình tròn lớn tâm T .

□

Bài 16. Trong số những miếng bìa có dạng như các hình bên dưới, miếng bìa nào có thể gấp và dán lại để được hình nón có đáy?

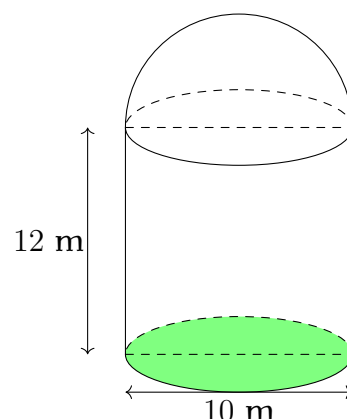


Hướng dẫn giải.

Ta có chu vi hình tròn đáy là $2\pi \cdot 2 = 4\pi$ bằng với độ dài cung tròn của miếng bìa. Do đó, miếng bìa này có thể gấp và dán lại để được hình nón có đáy. □

Bài 17.

Một kho chứa ngũ cốc có dạng một hình trụ và một mái vòm có dạng nửa hình cầu. Phần hình trụ có đường kính đáy là 10 m và chiều cao là 12 m. Phần mái vòm là nửa hình cầu đường kính 10 m. Hỏi dung tích của kho đó là bao nhiêu mét khối (bỏ qua bề dày của tường nhà kho, lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

**Hướng dẫn giải.**

Bán kính đáy của hình trụ là $r = 5$ (m).

Thể tích của hình trụ là $V = \pi r^2 h = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 12 = 942$ (m³).

Thể tích của mái vòm là $V' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^3 = \frac{785}{3}$ (m³).

Vậy dung tích của kho là $942 + \frac{785}{3} \approx 1\,203,67$ (m³). □

Bài 18. Cho một hình trụ và một hình nón có cùng bán kính đáy là r và cùng chiều cao là h . Hình nào trong hai hình có thể tích lớn hơn.

Hướng dẫn giải.

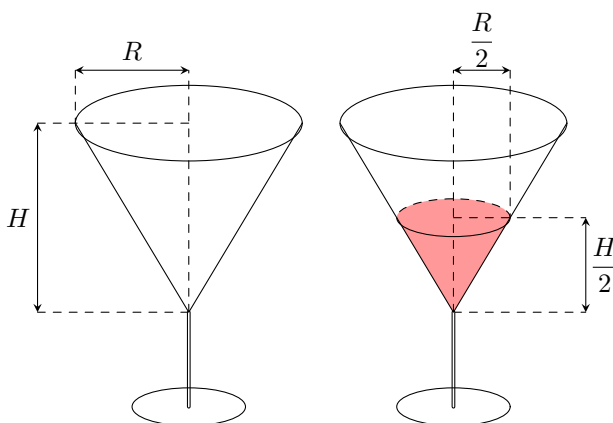
Thể tích hình trụ là $V = \pi r^2 h$.

Thể tích hình nón là $V' = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Do đó, thể tích hình trụ lớn hơn thể tích hình nón. □

Bài 19.

Phần đựng được nước của một chiếc ly có dạng hình nón với bán kính đáy là R và chiều cao là H (hình 43a). Người ta đổ nước vào ly đó sao cho chiều cao của khối nước đó bằng $\frac{H}{2}$ và bán kính đáy của khối nước bằng $\frac{R}{2}$. Tính theo R và H thể tích phần không chứa nước của chiếc ly ở hình 43b.



Hình 43a

Hình 43b

Hướng dẫn giải.

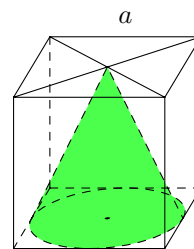
Thể tích phần không chứa nước của chiếc ly là

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \cdot \frac{H}{2} = \frac{7}{24} \pi R^2 H.$$

□

Bài 20.

Hình 44 mô tả cách người ta cắt bỏ đi từ một khối gỗ có dạng hình lập phương cạnh a để được một khối gỗ có dạng hình nón. Tính thể tích của phần gỗ bị cắt bỏ đi theo a .

**Hướng dẫn giải.**

Thể tích phần gỗ bị cắt bỏ là

$$V = a^3 - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \left(1 - \frac{\pi}{12}\right) a^3.$$

□

Bài 21.

Có một quả bóng rổ (loại số 7 cho nam) và một quả bóng tennis (hình 45). Biết rằng diện tích bề mặt của quả bóng rổ khoảng $1\,884,75\text{ cm}^2$ và bán kính của quả bóng gấp khoảng 2 lần đường kính của quả bóng tennis. Hỏi diện tích bề mặt của quả bóng tennis đó là bao nhiêu centimet vuông (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

**Bóng rổ****Bóng tennis****Hướng dẫn giải.**

Do bán kính quả bóng rổ gấp khoảng 2 lần đường kính của quả bóng tennis nên là bán kính của quả bóng rổ gấp 4 lần bán kính của quả tennis.

Khi đó, diện tích bề mặt của quả bóng rổ sẽ gấp $4^2 = 16$ lần diện tích bề mặt của quả bóng tennis.

Vậy, diện tích bề mặt của quả bóng tennis là $\frac{1\,884,75}{16} \approx 117,8\text{ (cm}^2\text{)}$.

□