

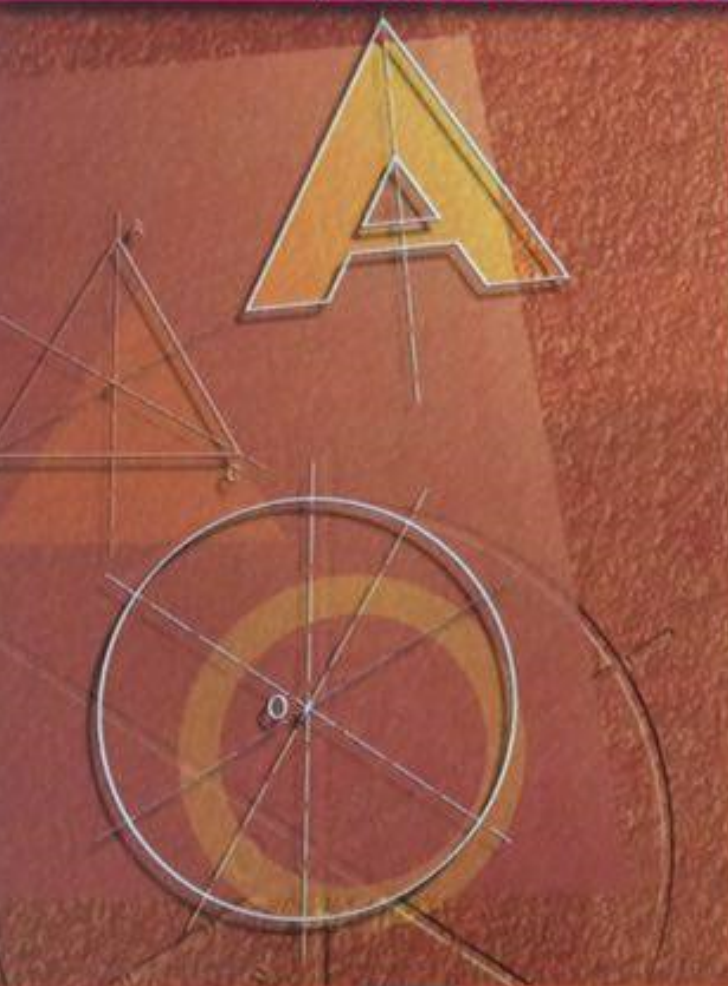
PHAN DOÃN THOẠI (Chủ biên)
NGUYỄN NGỌC TÚ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 8

THEO CHỦ ĐỀ

PHẦN ĐẠI SỐ

(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHAN DOÃN THOẠI (Chủ biên) – NGUYỄN NGỌC TÚ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 8

THEO CHỦ ĐỀ

PHẦN ĐẠI SỐ

(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG)

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Chương trình toán trung học cơ sở được trình bày theo các chủ đề. Trong mỗi chủ đề có quy định chuẩn (mức độ cần đạt) về kiến thức và kỹ năng tương đối chi tiết. Do những quy định về thời lượng dạy học, mỗi chủ đề được phân phối trong một hoặc nhiều bài học của SGK. Để giúp học sinh THCS nắm vững kiến thức và phương pháp giải toán, chúng tôi biên soạn bộ sách :

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN THEO CHỦ ĐỀ

Bộ sách gồm 8 quyển. Mỗi lớp hai quyển, một quyển bao gồm các chủ đề Số học (lớp 6), Đại số (lớp 7, 8, 9), một quyển bao gồm các chủ đề Hình học.

Sách được phân chia thành các chương với tên chương như trong SGK. Mỗi chương gồm các chủ đề. Mỗi chủ đề gồm hai phần :

A. Kiến thức cần nhớ. Phần này trình bày tóm tắt những kiến thức cơ bản và nâng cao cần thiết cho việc giải toán.

B. Các dạng bài tập cơ bản. Dựa vào những nội dung cơ bản của từng chủ đề, chúng tôi đưa ra các dạng bài tập để thực hành và luyện tập các nội dung phục vụ cho chủ đề. Trong mỗi dạng bài tập có ba nội dung chính sau đây : **Phương pháp giải; Ví dụ; Bài tập.** Mỗi phương pháp giải đưa ra một số ví dụ minh họa tiêu biểu.

Hệ thống bài tập, về cơ bản gồm hai loại : Loại 1, áp dụng trực tiếp phương pháp và các ví dụ nêu trên; Loại 2, gồm các bài tập vận dụng một cách tổng hợp các phương pháp đó.

Các tác giả đã dành nhiều thời gian để sắp xếp các chủ đề theo thứ tự logic của chương trình; lựa chọn các ví dụ và bài tập từ dễ đến khó và cố gắng đáp ứng nhu cầu nắm vững kiến thức cơ bản của đa số học sinh, đồng thời hướng học sinh đi sâu (ở một số bài tập có dấu **), phát triển những kiến thức được truyền thụ và rèn luyện kỹ năng.

Mặc dù bộ sách đã được các tác giả nhiều năm kinh nghiệm giảng dạy dày công biên soạn nhưng cũng không thể tránh khỏi thiếu sót, rất mong được bạn đọc góp ý.

Mọi thư từ góp ý xin gửi về :

P. Khai thác và Quản lý Đề tài – Công ty CP Sách Giáo dục tại Tp Hà Nội.

Địa chỉ : Lô B1 DN 14/3 – Nguyễn Khánh Toàn – Quan Hoa – Cầu Giấy – Hà Nội.

Hà Nội, ngày 01 tháng 01 năm 2011.

Các tác giả

PHÉP NHÂN VÀ CHIA ĐA THỨC

Chủ đề 1

NHÂN ĐA THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Quy tắc nhân một số với một tổng : $A \cdot (B + C) = AB + AC$.
- Quy tắc nhân hai lũy thừa của cùng cơ số: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
- Quy tắc nhân đơn thức với đa thức : Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.
- Quy tắc nhân đa thức với đa thức : Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân từng hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Nhân đơn thức với đa thức

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính sau :

$$a) 2x^3 \left(5x^3 - x - \frac{1}{2} \right);$$

$$b) (3xy - 2x^2 + xy^2) \frac{2}{3} x^2 y;$$

$$c) (4x^3 - 5x^2y + 2xy) \left(-\frac{1}{2} xy \right).$$

Lời giải

a) Ta có : $2x^3 \left(5x^3 - x - \frac{1}{2} \right) = 10x^6 - 2x^4 - x^3;$

b) Ta có : $\left(3xy - 2x^2 + xy^2 \right) \frac{2}{3} x^2 y = 2x^3 y^2 - \frac{4}{3} x^4 y^2 + \frac{2}{3} x^3 y^3;$

c) Ta có : $\left(4x^3 - 5x^2 y + 2xy \right) \left(-\frac{1}{2} xy \right) = -2x^4 y + \frac{5}{2} x^3 y^2 - x^2 y^2.$

Ví dụ 2. Tìm giá trị của x biết :

a) $3x(8x - 4) - 6x(4x - 3) = 30;$ b) $3x(5 - 2x) + 2x(3x - 5) = 20.$

Lời giải

a) Ta có : $3x(8x - 4) - 6x(4x - 3) = 30$

$$\Rightarrow 24x^2 - 12x - 24x^2 + 18x = 30$$

$$\Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5.$$

b) Ta có : $3x(5 - 2x) + 2x(3x - 5) = 20$

$$\Rightarrow 15x - 6x^2 + 6x^2 - 10x = 20$$

$$\Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $xy(x^5 - y^3) - x^2y(x^4 - y^3);$ b) $x^3y^4(x^2 - y^3) - x^3y^3(x^4 - y^4).$

Lời giải

a) Ta có : $xy(x^5 - y^3) - x^2y(x^4 - y^3)$

$$= x^6y - xy^4 - x^6y + x^2y^4 = x^2y^4 - xy^4.$$

b) Ta có : $x^3y^4(x^2 - y^3) - x^3y^3(x^4 - y^4)$

$$= x^5y^4 - x^3y^7 - x^7y^3 + x^3y^7 = x^5y^4 - x^7y^3.$$

Ví dụ 4. Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức :

a) $M = x^3(x^2 - y^3) - y^3(y^2 - x^3)$ với $x = 2; y = -2;$

b) $N = (-x^2y)(x^2y^2 - 2x) + xy^3(x^3 - xy^3)$ với $x = 3; y = 2.$

Lời giải

a) Ta có : $M = x^3(x^2 - y^3) - y^3(y^2 - x^3) = x^5 - x^3y^3 - y^5 + x^3y^3 = x^5 - y^5$.

Thay giá trị $x = 2; y = -2$ vào biểu thức cuối ta được $M = 64$.

b) Ta có : $N = (-x^2y)(x^2y^2 - 2x) + xy^3(x^3 - xy^3)$

$$= -x^4y^3 + 2x^3y + x^4y^3 - x^2y^6 = 2x^3y - x^2y^6.$$

Thay giá trị $x = 3; y = 2$ vào biểu thức cuối ta được $N = -468$.

III. BÀI TẬP

1. Thực hiện các phép tính sau :

a) $5x^2(3x^2 - 7x + 2)$;

b) $\frac{2}{3}xy(2x^2y - 3xy + y^2)$;

c) $2x^2(x - 2) + 3x(x^2 - x - 2) - 5(3 - x^2)$;

d) $3x^n(4x^{n-1} - 1) - 2x^{n+1}(6x^{n-2} - 1)$.

2. Tìm giá trị x thoả mãn mỗi điều kiện sau :

a) $2x(7x + 5) - 7x(2x - 3) = 93$;

b) $5x(3 - 7x) + 7x(5x + 6) = 114$.

3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $M = 90.10^n - 10^{n+2} + 10^{n+1}$;

b) $N = x(x + y) - y(x + y)$;

c) $P = y(x^{n-1} + y^{n-1}) - x^{n-1}(x + y)$.

4. Rút gọn rồi tính giá trị mỗi biểu thức sau tương ứng với các giá trị đã cho :

a) $A = x^3y(x^4 - y^3) - x^2y(x^5 - y^3)$ với $x = -1, y = 2$;

b) $B = x^3y^3(x^4 - y^4) - x^3y^4(x^2 - y^3)$ với $x = 1, y = -2$.

5. Cho biểu thức $M = \frac{3}{229} \left(2 + \frac{1}{433} \right) - \frac{1}{229} \cdot \frac{432}{433} - \frac{4}{229 \cdot 433}$.

a) Đặt $a = \frac{1}{229}$, $b = \frac{1}{433}$, rút gọn M theo a, b ;

b) Tính giá trị của M.

6. Tính giá trị của biểu thức $P = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ khi $x = 16$.

7*. Chứng tỏ rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x :

a) $x(2x + 1) - x^2(x + 2) + (x^3 - x + 3)$;

b) $4(x - 6) - x^2(2 + 3x) + x(5x - 4) + 3x^2(x - 1)$.

DẠNG 2. Nhân đa thức với đa thức

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Nhân từng hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau :

a) $(x^2y^2 - \frac{1}{2}xy + 2y)(x - 2y)$; b) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.

Lời giải

a) Ta có : $(x^2y^2 - \frac{1}{2}xy + 2y)(x - 2y)$

$$= x^3y^2 - \frac{1}{2}x^2y + 2xy - 2x^2y^3 + xy^2 - 4y^2.$$

b) Ta có : $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$

$$= x^3 + x^2y - x^2y - xy^2 + xy^2 + y^3 = x^3 + y^3.$$

Ví dụ 2. Thực hiện phép tính rồi tính giá trị các biểu thức sau :

a) $A = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ với $x = 10$; $y = -2$.

b) $B = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ với $x = -3$; $y = 5$.

Lời giải

a) Ta có : $A = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$$= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3.$$

Thay $x = 10$; $y = -2$ vào biểu thức cuối ta được $A = 1000 - (-8) = 1008$.

b) Ta có : $B = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$$= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3 = x^3 + y^3.$$

Thay $x = -3$; $y = 5$ vào biểu thức cuối ta được $B = -27 + 125 = 98$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x :

$$(x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7.$$

Lời giải

Ta có $(x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7$

$$= 2x^2 + 3x - 10x - 15 - 2x^2 + 6x + x + 7$$

$$= -7x - 15 + 7x + 7 = -8.$$

Vậy giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến x (luôn bằng -8).

Ví dụ 4. Tìm x , biết :

$$(12x - 5)(4x - 1) + (3x - 7)(1 - 16x) = 81.$$

Lời giải

Ta có : $(12x - 5)(4x - 1) + (3x - 7)(1 - 16x) = 81$

$$\Leftrightarrow 48x^2 - 12x - 20x + 5 + 3x - 48x^2 - 7 + 112x = 81$$

$$\Leftrightarrow 83x = 83 \Rightarrow x = 1.$$

Vậy giá trị cần tìm là $x = 1$.

Ví dụ 5. Tính giá trị của biểu thức :

$$A = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 1 \text{ khi } x = 4.$$

Lời giải

Cách 1. Thay $x = 4$ vào biểu thức A , ta có

$$A = 4^5 - 5 \cdot 4^4 + 5 \cdot 4^3 - 5 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 - 1$$

$$= 1024 - 5 \cdot 256 + 5 \cdot 64 - 5 \cdot 16 + 20 - 1$$

$$= 1024 - 1280 + 320 - 80 + 20 - 1 = 3.$$

Cách 2. Ta thấy $x = 4$ thì $5 = x + 1$, nên trong A ta thay $5 = x + 1$.

Ta có $A = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

$$= x^5 - (x + 1)x^4 + (x + 1)x^3 - (x + 1)x^2 + (x + 1)x - 1$$

$$= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 + x^2 + x - 1$$

$$= x - 1 = 3.$$

Cách 3. Ta thấy $x = 4$ nên $x - 4 = 0$, từ đó ta biến đổi biểu thức A để chứa các thừa số là $x - 4$. Ta có :

$$A = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 1$$

$$= x^5 - 4x^4 - x^4 + 4x^3 + x^3 - 4x^2 - x^2 + 4x + x - 4 + 3$$

$$= x^4(x - 4) - x^3(x - 4) + x^2(x - 4) - x(x - 4) + (x - 4) + 3.$$

Do các số hạng chứa $(x - 4)$ đều bằng 0 nên $A = 3$.

III. BÀI TẬP

1. Cho biểu thức $A = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Tính giá trị của biểu thức A trong mỗi trường hợp sau đây :

a) Khi $x = -10, y = 2$;

b) Khi $x = 1, y = 0$;

c) Khi $x = -2, y = 1$.

2. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $(x + 3)(x - 3) - (x - 5)(x + 2)$;

b) $(3x + 1)^2 + (2x - 3)^2 - 2(3x + 1)(2x - 3)$.

3. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = ab + bc + ca - x^2$, với $2x = a + b + c$.

b) $a(a^2 - bc) + b(b^2 - ca) + c(c^2 - ab) = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(a + b + c)$.

4. Thực hiện phép tính sau :

a) $A \cdot B$ với $A = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ và $B = x^2 + 3x - 4$;

b) $C \cdot D$ với $C = x^3 + 2x - 1$ và $D = x^3 + x$.

5. Tìm x biết :

a) $(2x + 3)(x - 4) + (x - 5)(x - 2) = (3x - 5)(x - 4)$;

b) $(8x - 3)(3x + 2) - (4x + 7)(x + 4) = (2x + 1)(5x - 1)$.

6. Thực hiện các phép tính sau :

a) $(y - 1)(y^2 + y + 1) + \left(\frac{1}{3}x^2y - y\right)(2x + y^2)$;

b) $(x - 1)(x - 3) - (4 - x)(2x + 1) - 3x^2 + 2x - 5$.

7. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$;

b) $(x + 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 2)^3 - 6(x - 1)(x + 1)$.

8. Chứng minh rằng giá trị các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

a) $A = (3x - 5)(2x + 11) - (2x + 3)(3x + 7)$;

b) $B = (x^2 + 2x + 3)(3x^2 - 2x + 1) - 3x^2(x^2 + 2) - 4x(x^2 - 1)$.

Chủ đề 2

MỘT SỐ HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$1) (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$2) (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$3) A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$4) (A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$5) (A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$6) A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$7) A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2).$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Vận dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để làm các bài tập.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Khai triển các biểu thức sau :

a) $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^3$;

b) $(2x^2 + 3y)^3$.

Lời giải

a) Ta có $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^3 = \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot 3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) \cdot 3^2 - 3^3$
 $= \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x - 27$.

b) Ta có $(2x^2 + 3y)^3 = (2x^2)^3 + 3 \cdot (2x^2)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x^2 \cdot (3y)^2 + (3y)^3$
 $= 8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3$.

Ví dụ 2. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau tại giá trị chỉ ra :

a) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$ tại $x = 6$;

b) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ tại $x = 22$.

Lời giải

a) Ta có $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 + 4^3 = (x + 4)^3$.

Thay $x = 6$ vào biểu thức cuối ta được kết quả là 1000.

b) Ta có $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = (x - 2)^3$.

Thay $x = 22$ vào biểu thức cuối ta được kết quả là 8000.

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (54 + x^3)$;

b) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$.

Lời giải

a) Ta có $(x+3)(x^2-3x+9)-(54+x^3)$

$$= (x^3+3^3)-(54+x^3) = x^3+27-54-x^3 = -27.$$

b) Ta có $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)-(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

$$= (2x)^3+y^3-((2x)^3-y^3) = (2x)^3+y^3-(2x)^3+y^3 = 2y^3.$$

Ví dụ 4. Tính nhanh giá trị các biểu thức sau :

a) $34^2 + 66^2 + 68.66$;

b) $74^2 + 24^2 - 48.74$.

Lời giải

a) Ta có $34^2 + 66^2 + 68.66 = 34^2 + 2.34.66 + 66^2$

$$= (34+66)^2 = 100^2 = 10000.$$

b) Ta có $74^2 + 24^2 - 48.74 = 74^2 - 2.24.74 + 24^2$

$$= (74-24)^2 = 50^2 = 2500.$$

Ví dụ 5. So sánh các cặp số sau :

a) $A = 2008 \cdot 2010$ với $B = 2009^2$;

b) $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ với $B = 2^{32}$.

Lời giải

a) Ta có $A = (2009-1)(2009+1) = 2009^2 - 1$.

Vậy $A < B$.

b) Ta có $A = A(2-1) = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$= (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$= (2^{16}-1)(2^{16}+1) = 2^{32} - 1.$$

Vậy $A < B$.

III. BÀI TẬP

1. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - (18 + x^3)$;

b) $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) - (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$.

2. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau :

a) $A = x^2 + 10x + 26$ với $x = 45$.

b) $B = x^2 - 0,2x + 0,01$ với $x = 1,1$.

3. Tính nhanh giá trị các biểu thức :

a) $x^2 + 9y^2 - 6xy$ tại $x = 16$ và $y = 2$;

b) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$ tại $x = 14$ và $y = 2$.

4. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $(x - 3)(x + 3) - (x + 5)(x - 1)$;

b) $(3x - 2)^2 + (x + 1)^2 + 2(3x - 2)(x + 1)$.

5. Tìm giá trị của x thoả mãn :

a) $(2x - 1)^2 - (2x + 3)(2x - 1) = 0$;

b) $(x + 5)(x - 2) - (x - 3)(x + 3) = 0$.

6. Chứng minh rằng :

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 > 0$ với mọi giá trị thực của x và y ;

b) $x - x^2 - 1 < 0$ với mọi số thực x .

Chủ đề 3

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Sử dụng các hằng đẳng thức cơ bản để phân tích đa thức thành nhân tử.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dùng các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt thừa số chung, dùng hằng đẳng thức đáng nhớ, nhóm các hạng tử hoặc phối hợp các phương pháp đó để giải bài tập loại này.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $14x^2y - 21xy^2 + 28x^2y^2$;

b) $10x(x - y) - 8y(y - x)$;

c) $(x + y)^3 - (x - y)^3$;

d) $3a^2 + 6ab + 3b^2 - 3c^2$

Lời giải

a) Ta có : $14x^2y - 21xy^2 + 28x^2y^2 = 7xy(2x - 3y + 4xy)$.

b) Ta có : $10x(x - y) - 8y(y - x) = 10x(x - y) + 8y(x - y)$
 $= 2(x - y)(5x + 4y).$

c) Ta có: $(x + y)^3 - (x - y)^3$

$$= [(x + y) - (x - y)][(x + y)^2 + (x + y)(x - y) + (x - y)^2]$$

$$= 2y(x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - y^2 + x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= 2y(3x^2 + y^2).$$

d) Ta có : $3a^2 + 6ab + 3b^2 - 3c^2 = 3(a^2 + 2ab + b^2 - c^2)$

$$= 3[(a + b)^2 - c^2] = 3(a + b + c)(a + b - c).$$

Ví dụ 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^2 - 5x + 6$;

b) $x^2 + x - 6$:

c) $x^3 + 2x^2y + xy^2 - 9x$;

d) $x^4 + 4$.

Lời giải

a) Ta có : $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6$

$$= x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3).$$

b) Ta có : $x^2 + x - 6 = x^2 - 2x + 3x - 6$

$$= x(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x + 3).$$

c) Ta có : $x^3 + 2x^2y + xy^2 - 9x = x(x^2 + 2xy + y^2 - 9)$

$$= x[(x + y)^2 - 3^2] = x(x + y + 3)(x + y - 3).$$

d) Ta có : $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$

$$= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$

$$= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x).$$

Ví dụ 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $a^2 - 4 + (a - 2)^2$;

b) $a^3 - 2a^2 + a - ab^2$;

$a^3 - 4a^2 - 12a + 27$;

d) $2a - 2b - a^2 + 2ab - b^2$.

Lời giải

a) Ta có : $a^2 - 4 + (a - 2)^2 = (a - 2)(a + 2) + (a - 2)^2$

$$= (a - 2)[(a + 2) + (a - 2)] = 2a(a - 2).$$

b) Ta có : $a^3 - 2a^2 + a - ab^2 = a(a^2 - 2a + 1 - b^2)$

$$= a[(a - 1)^2 - b^2] = a(a - 1 + b)(a - 1 - b).$$

c) Ta có : $a^3 - 4a^2 - 12a + 27 = a^3 + 27 - 4a(a + 3) = (a^3 + 3^3) - 4a(a + 3)$

$$= (a + 3)(a^2 - 3a + 9) - 4a(a + 3) = (a + 3)(a^2 - 7a + 9).$$

d) Ta có : $2a - 2b - a^2 + 2ab - b^2 = 2(a - b) - (a^2 - 2ab + b^2)$

$$= 2(a - b) - (a - b)^2 = (a - b)(2 - a + b).$$

Ví dụ 4. Tính nhanh giá trị mỗi biểu thức tại các giá trị chỉ ra :

a) $A = a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}$ tại $a = 49,75$;

b) $B = a^2 - b^2 - 2b - 1$ tại $a = 93, b = 6$.

Lời giải

a) Ta có $A = a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16} = a^2 + 2\frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{4}\right)^2$.

Thay giá trị $a = 49,75 = 49\frac{3}{4}$ vào, ta được : $A = \left(49\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 = 50^2 = 2500$.

b) Ta có $B = a^2 - b^2 - 2b - 1 = a^2 - (b^2 + 2b + 1)$
 $= a^2 - (b + 1)^2 = (a + b + 1)(a - b - 1)$.

Thay giá trị $a = 93, b = 6$ vào biểu thức cuối, ta được :

$$B = (93 + 6 + 1)(93 - 6 - 1) = 100.86 = 8600.$$

Ví dụ 5. Tìm giá trị của x biết :

a) $2x(x - 2009) - x + 2009 = 0$; b) $x^3 - 25x = 0$.

Lời giải

a) Ta có : $2x(x - 2009) - x + 2009 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x(x - 2009) - (x - 2009) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2009)(2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 2009; x = \frac{1}{2}.$$

b) Ta có : $x^3 - 25x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 25) = 0 \Rightarrow x(x + 5)(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0; x = 5; x = -5.$$

III. BÀI TẬP

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $3x^2 + 6x + 3 - 3y^2$;

b) $25 - x^2 - y^2 + 2xy$.

2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $3x - 3y - x^2 + 2xy - y^2$;

b) $x^2 - y^2 + 2x - 2y$.

3. Tìm giá trị x thoả mãn :

a) $x^3 = x$;

b) $2x^3 + 2\sqrt{2}x^2 + x = 0$.

4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$;

b) $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$.

5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^2(1 - x^2) - 4 - 4x^2$;

b) $x^2 + y^2 - x^2y^2 + xy - x - y$.

6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $(1 + 2x)(1 - 2x) - x(x + 2)(x - 2)$; b) $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$.

7. Tìm x biết :

a) $\frac{2}{3}x(x^2 - 9) = 0$;

b) $(x + 2)^2 - (x - 2)(x + 2) = 0$;

8*. Chứng minh rằng $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

Từ đó tính :

a) $(a + b)^2$, biết $a - b = 3$ và $a.b = 4$;

b) $(a - b)^2$, biết $a + b = 6$ và $a.b = 8$.

9*. a) Phân tích thành nhân tử biểu thức : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

b) Áp dụng phân tích $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

10*. Phân tích thành nhân tử biểu thức :

$$A = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y).$$

Chủ đề 4

PHÉP CHIA ĐA THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

a) Quy tắc chia hai lũy thừa cùng cơ số :

Với m, n là các số tự nhiên ($m > n$), ta có $x^m : x^n = x^{m-n}$.

• Quy tắc chia đơn thức cho đơn thức : Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B) ta làm như sau :

- + Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B.
- + Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B.
- + Nhân các kết quả tìm được với nhau.
- Đơn thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi biến của đơn thức B đều là biến của đơn thức A với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A.
- Quy tắc chia đa thức cho đơn thức : Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B), ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả lại.
- Quy tắc nhân một đơn thức với một đa thức, nhân đa thức với đa thức.
- Bảy hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Với hai đa thức tùy ý A và B của cùng một biến (B khác 0), tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A = B \cdot Q + R$, trong đó $R = 0$ hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B.
 - + A : Đa thức bị chia ;
 - + B : Đa thức chia ;
 - + Q : Đa thức thương ;
 - + R : Đa thức dư ;
 - + Khi $R = 0$ thì phép chia A cho B là phép chia hết.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Chia đa thức cho đơn thức

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Lấy từng hạng tử của đa thức chia cho đơn thức rồi cộng các kết quả lại.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức :

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } (49)^{12} : 7^4 ; & \text{b) } \left(\frac{3}{4}\right)^{25} : \left(\frac{9}{16}\right)^{10} ; & \text{c) } \frac{125^{100} \cdot 2^{160}}{5^{298} \cdot 4^{80}} ; \\
 \text{d) } (15 \cdot 3^{11} + 4 \cdot 27^4) : 9^7 ; & & \text{e) } \frac{8(x+2y)^5}{2x+4y} .
 \end{array}$$

Lời giải

a) Ta có : $(49)^{12} : 7^4 = (7^2)^{12} : 7^4 = 7^{24} : 7^4 = 7^{24-4} = 7^{20}$.

b) Ta có : $\left(\frac{3}{4}\right)^{25} : \left(\frac{9}{16}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{25} : \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{25} : \left(\frac{3}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3}{4}\right)^{25-20} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$.

c) Ta có : $\frac{125^{100} \cdot 2^{160}}{5^{298} \cdot 4^{80}} = \frac{5^{3 \cdot 100} \cdot 2^{160}}{5^{298} \cdot 2^{160}} = 5^2 = 25$.

d) Ta có : $(15 \cdot 3^{11} + 4 \cdot 27^4) : 9^7 = (5 \cdot 3 \cdot 3^{11} + 4 \cdot 3^{12}) : 3^{14} = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$.

e) Ta có : $\frac{8(x+2y)^5}{2x+4y} = \frac{8(x+2y)^5}{2(x+2y)} = 4(x+2y)^4$.

Ví dụ 2. Làm phép tính chia :

a) $5a^2b^4 : 10a^2b$;

b) $\frac{3}{4}a^3b^3 : \left(\frac{-1}{2}a^2b^2\right)$;

c) $(-ab)^{10} : (-ab)^5$.

Lời giải

a) Ta có $5a^2b^4 : 10a^2b = \frac{1}{2}b^3$.

b) Ta có $\frac{3}{4}a^3b^3 : \left(\frac{-1}{2}a^2b^2\right) = \frac{-3}{2}ab$.

c) Ta có $(-ab)^{10} : (-ab)^5 = (-ab)^5$.

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức $A = 15a^4b^3c^2 : 5ab^2c^2$ tại $a = 2$; $b = -10$ và $c = 2009$.

Lời giải

Ta có : $A = 15a^4b^3c^2 : 5ab^2c^2 = 3a^3b$.

Thay $a = 2$; $b = -10$ và $c = 2009$ vào biểu thức, ta được

$$A = 3 \cdot 2^3 \cdot (-10) = -240.$$

Ví dụ 4. Làm phép tính chia :

a) $(a^3 - 2a^2b + 3ab^2) : \frac{1}{2}a$;

b) $[3(x-y)^4 + 2(x-y)^3 - 5(x-y)^2] : (x-y)^2$.

Lời giải

a) Ta có $(a^3 - 2a^2b + 3ab^2) : \frac{1}{2}a = 2a^2 - 4ab + 6b^2$.

b) Đặt $A = [3(x-y)^4 + 2(x-y)^3 - 5(x-y)^2] : (x-y)^2$.

Coi $t = (x - y)$, ta có

$$\begin{aligned} A &= [3(x-y)^4 + 2(x-y)^3 - 5(x-y)^2] : (x-y)^2 \\ &= (3t^4 + 2t^3 - 5t^2) : t^2 = 3t^2 + 2t - 5. \end{aligned}$$

Thay trở lại $t = (x - y)$, ta được $A = 3(x-y)^2 + 2(x-y) - 5$.

III. BÀI TẬP

1. Thực hiện phép chia :

a) $(21x^2y - 7xy^2 + xy) : xy$;

b) $(5x^4 + 3x^5 - 2x^6) : \left(-\frac{1}{2}x^2\right)$;

c) $(4x^4 - 8x^3y^2 + 15x^2y^3) : (-4x^2)$.

2. Thực hiện phép chia :

a) $(2x^2y^2 + 6x^2y^3 - 15xy) : 3xy$;

b) $(23x^3y^2 - 18x^2y^3 + 6xy^5) : 4xy^2$.

3. Thực hiện phép chia :

a) $(15x^4y^5 - 17x^3y^4 + 8x^2y^6) : 2xy^2$;

b) $(5a^3b^2c + 7a^2b^3c^2 - 4abc^2) : a^2bc$.

4*. Thực hiện phép chia :

a) $[6(x-2)^3 + 7(x-2)^4 - 9(x-2)^5] : (2-x)^2 ;$

b) $[5(x-y)^6 + 2(x-y)^5 - 7(x-y)^3] : (y-x)^2 .$

5*. Áp dụng hằng đẳng thức, thực hiện phép chia :

$$(x^2 + 6)(x^2 + 4) : (x^2 + 5).$$

6*. Thực hiện phép tính chia :

a) $[7(x^2 - 1)^4 + 2(1 - x)^3 - 3(x - 1)^2] : 2(x - 1)^2 ;$

b) $[5(x^3 - y^3)^4 + (x - y)^3] : (x^2 - 2xy + y^2).$

DẠNG 2. Chia đa thức đã sắp xếp

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần của lũy thừa của biến ;
- Đặt phép chia như phép chia các số ;
- Lấy hạng tử cao nhất của đa thức bị chia chia cho hạng tử cao nhất của đa thức chia ;
- Lấy thương nhân với đa thức chia và đặt kết quả dưới dòng đa thức bị chia ;
- Lấy hiệu của đa thức bị chia với tích vừa tìm được ;
- Tiếp tục làm như vậy đến khi được dư bằng 0 hoặc dư là đa thức có bậc nhỏ hơn đa thức chia.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Thực hiện các phép chia :

a) $(x^2 - 5x + 4) : (x - 1) ;$

b) $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (x + 1) ;$

c) $(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) : (x^2 + 3x + 2) ;$

d) $(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x^2 + 2x - 3) .$

Lời giải

a) Ta có $(x^2 - 5x + 4) : (x - 1)$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 5x + 4 \quad | \quad x - 1 \\
 - \quad x^2 - \quad x \quad | \quad \hline
 \hline
 -4x + 4 \\
 - \quad -4x + 4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Vậy đa thức $(x^2 - 5x + 4)$ chia hết cho $(x - 1)$ được thương là $(x - 4)$.

Ngoài ra ta có thể phân tích thành nhân tử $(x^2 - 5x + 4) = (x - 1)(x - 4)$.

Khi đó ta thấy ngay thương của đa thức $(x^2 - 5x + 4)$ với đa thức $(x - 1)$ là $(x - 4)$.

b) Ta có $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad | \quad x + 1 \\
 - \quad x^3 + \quad x^2 \quad | \quad \hline
 \hline
 2x^2 + 3x + 1 \\
 - \quad 2x^2 + 2x \quad | \quad \hline
 \hline
 x + 1 \\
 - \quad x + 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Vậy đa thức $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$ chia hết cho $(x + 1)$ được thương là $(x^2 + 2x + 1)$.

Ta có thể thấy ngay là hằng đẳng thức $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = (x + 1)^3$, nên thương của đa thức $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$ với đa thức $(x + 1)$ có kết quả là $(x + 1)^2$ hay $(x^2 + 2x + 1)$.

c) Ta có $(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) : (x^2 + 3x + 2)$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \quad | \quad x^2 + 3x + 2 \\
 - \quad x^3 + 3x^2 + 2x \quad | \quad x + 3 \\
 \hline
 3x^2 + 9x + 6 \\
 - \quad 3x^2 + 9x + 6 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Vậy đa thức $(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$ chia hết cho $(x^2 + 3x + 2)$ được thương là $(x + 3)$.

d) Ta có $(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x^2 + 2x - 3)$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3x^2 - x - 3 \quad | \quad x^2 + 2x - 3 \\
 - \quad x^3 + 2x^2 - 3x \quad | \quad x + 1 \\
 \hline
 x^2 + 2x - 3 \\
 - \quad x^2 + 2x - 3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Vậy đa thức $(x^3 + 3x^2 - x - 3)$ chia hết cho $(x^2 + 2x - 3)$ được thương là $(x + 1)$.

Ví dụ 2. Thực hiện các phép chia :

a) $(6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x + 1) ;$

b) $(x^4 - x^3 + x^2 + 3x) : (x^2 - 2x + 3) ;$

c) $(x^2 - y^2 + 6x + 9) : (x + y + 3).$

Lời giải

a) Ta có $(6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x + 1)$

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - 7x^2 - x + 2 \quad | \quad 2x + 1 \\
 - \quad 6x^3 + 3x^2 \quad | \quad 3x^2 - 5x + 2 \\
 \hline
 -10x^2 - x + 2 \\
 - \quad -10x^2 - 5x \\
 \hline
 6x + 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4x + 2 \\
 - \\
 4x + 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Vậy đa thức $(6x^3 - 7x^2 - x + 2)$ chia hết cho $(2x + 1)$ được thương là $(3x^2 - 5x + 2)$.

b) Ta có $(x^4 - x^3 + x^2 + 3x) : (x^2 - 2x + 3)$

$$\begin{array}{r}
 x^4 - x^3 + x^2 + 3x \quad | \quad x^2 - 2x + 3 \\
 - \quad x^4 - 2x^3 + 3x^2 \quad | \quad x^2 + x \\
 \hline
 x^3 - 2x^2 + 3x \\
 - \quad x^3 - 2x^2 + 3x \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Vậy đa thức $(x^4 - x^3 + x^2 + 3x)$ chia hết cho $(x^2 - 2x + 3)$ được thương là $(x^2 + x)$.

c) Ta có $(x^2 - y^2 + 6x + 9) : (x + y + 3)$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - y^2 + 6x + 9 \quad | \quad x + y + 3 \\
 - \quad x^2 + xy + 3x \quad | \quad x - y + 3 \\
 \hline
 -xy - y^2 + 3x + 9 \\
 - \quad -xy - y^2 - 3y \\
 \hline
 3x + 3y + 9 \\
 - \quad 3x + 3y + 9 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Vậy đa thức $(x^2 - y^2 + 6x + 9)$ chia hết cho $(x + y + 3)$ được thương là $(x - y + 3)$.

Cách 2. Ta có thể dùng phương pháp phân tích đa thức bị chia thành nhân tử (trong đó có chứa nhân tử chia), rồi coi như thực hiện phép chia đa thức cho đơn thức.

Áp dụng cho câu c), ta có :

$$\begin{aligned}
 &(x^2 - y^2 + 6x + 9) : (x + y + 3) \\
 &= (x^2 + 6x + 9 - y^2) : (x + y + 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [(x+3)^2 - y^2] : (x+y+3) \\
 &= (x+3+y)(x+3-y) : (x+y+3) = x+3-y.
 \end{aligned}$$

Ta được kết quả như cách 1.

Ví dụ 3. Tìm đa thức dư trong phép chia sau :

a) $(x^2 + 5x + 6) : (x - 4)$; b) $(2x^3 - x^2 - x + 1) : (x^2 + 2x)$.

Lời giải

a) Ta có $(x^2 + 5x + 6) : (x - 4)$

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 + 5x + 6 & x - 4 \\
 - x^2 - 4x & \hline
 9x + 6 & \\
 - 9x - 36 & \\
 \hline
 42 &
 \end{array}$$

Vậy đa thức $(x^2 + 5x + 6)$ chia cho $(x - 4)$ thì được $(x + 9)$ và dư bằng 42.

b) Ta có $(2x^3 - x^2 - x + 1) : (x^2 + 2x)$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - x^2 - x + 1 & x^2 + 2x \\
 - 2x^3 + 4x^2 & \hline
 - 5x^2 - x + 1 & \\
 - - 5x^2 - 10x & \\
 \hline
 9x + 1 &
 \end{array}$$

Vậy đa thức $(2x^3 - x^2 - x + 1)$ chia cho $(x^2 + 2x)$ thì được $(2x - 5)$ và có dư bằng $(9x + 1)$.

Ví dụ 4. Xác định giá trị của a để $10x^2 - 7x + a$ chia hết cho $2x - 3$.

Lời giải

Ta có : $(10x^2 - 7x + a) : (2x - 3)$

$$\begin{array}{r|l}
 10x^2 - 7x + a & 2x - 3 \\
 - (10x^2 - 15x) & \hline
 8x + a & \\
 - (8x - 12) & \\
 \hline
 a + 12 &
 \end{array}$$

Vậy để đa thức $(10x^2 - 7x + a)$ chia hết cho $(2x - 3)$ thì dư $a + 12 = 0$, hay $a = -12$.

Ví dụ 5. Tìm số nguyên n để $2n^2 - n + 2$ chia hết cho $2n + 1$.

Lời giải

Ta có $(2n^2 - n + 2) : (2n + 1)$

$$\begin{array}{r|l}
 2n^2 - n + 2 & 2n + 1 \\
 - (2n^2 + n) & \hline
 -2n + 2 & \\
 - (-2n - 1) & \\
 \hline
 3 &
 \end{array}$$

Như vậy $(2n^2 - n + 2) : (2n + 1) = n - 1 + \frac{3}{2n + 1}$.

Để $2n^2 - n + 2$ chia hết cho $2n + 1$ thì $2n + 1$ phải là ước của 3.

Hay $2n + 1 = \pm 1; \pm 3$. Từ đó ta tìm được $n = 0, \pm 1, -2$.

Vậy với $n = 0; \pm 1; -2$ thì $2n^2 - n + 2$ chia hết cho $2n + 1$.

III. BÀI TẬP

1. Thực hiện phép chia :

a) $(6x^2 - 11x - 10) : (3x + 2)$;

b) $(x^4 + 2x^3 + 10x - 25) : (x^2 + 5)$.

2. Tìm giá trị a sao cho :

a) $2x^2 + ax + 1$ chia cho $x - 3$ dư 4 ;

b) $ax^5 + 4x^4 - 9$ chia hết cho $x - 1$.

3. Tìm các giá trị nguyên của n để :
- a) Biểu thức $2n^2 + n - 7$ chia hết cho $n - 2$;
- b) Biểu thức $10n^2 - 7n - 5$ chia hết cho $2n - 3$.
4. Thực hiện phép chia đa thức $x^3 - 7x + 6$ cho đa thức $x + 3$.
5. Thực hiện phép chia đa thức $2x^3 - 26x - 24$ cho đa thức $x^2 + 4x + 3$.
6. Thực hiện phép chia đa thức $3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ cho đa thức $x^2 - 2$.
- 7*. Cho biểu thức $A(x) = a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a$ với a là số hữu tỉ. Với giá trị nào của a thì biểu thức $A(x)$ chia hết cho $(x + 1)$.
- 8*. Thực hiện phép chia : $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3) : (x^2 + y^2)$.
- 9*. Tìm m để đa thức $(x^3 + 3x^2 - 5x + m)$ chia hết cho đa thức $(x - 2)$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Chủ đề 1

DẠNG 1.

1. a) Ta có : $5x^2(3x^2 - 7x + 2) = 15x^4 - 35x^3 + 10x^2$.
- b) Ta có : $\frac{2}{3}xy(2x^2y - 3xy + y^2) = \frac{4}{3}x^3y^2 - 2x^2y^2 + \frac{2}{3}xy^3$.
- c) Ta có : $2x^2(x - 2) + 3x(x^2 - x - 2) - 5(3 - x^2)$
 $= 2x^3 - 4x^2 + 3x^3 - 3x^2 - 6x - 15 + 5x^2$
 $= 5x^3 - 2x^2 - 6x - 15$.
- d) Ta có : $3x^n(4x^{n-1} - 1) - 2x^{n+1}(6x^{n-2} - 1)$
 $= 12x^{2n-1} - 3x^n - 12x^{2n-1} + 2x^{n+1}$
 $= 2x^{n+1} - 3x^n = x^n(2x - 3)$.

2. a) $2x(7x + 5) - 7x(2x - 3) = 93$ hay $14x^2 + 10x - 14x^2 + 21x = 93$, tức là $31x = 93$, do đó $x = 3$.

Giá trị $x = 3$ thoả mãn biểu thức đã cho.

b) $5x(3 - 7x) + 7x(5x + 6) = 114$

Nghĩa là $15x - 35x^2 + 35x^2 + 42x = 114$, hay $57x = 114$, do đó $x = 2$.

Giá trị $x = 2$ thoả mãn biểu thức đã cho.

3. a) Ta có $M = 90 \cdot 10^n - 10^{n+2} + 10^{n+1} = 10^n (90 - 10^2 + 10)$
 $= 10^n (90 - 100 + 10) = 10^n \cdot 0 = 0$.

b) Ta có $N = x(x + y) - y(x + y) = x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2$.

c) Ta có $P = y(x^{n-1} + y^{n-1}) - x^{n-1}(x + y)$
 $= yx^{n-1} + y^n - x^n - x^{n-1}y$
 $= y^n - x^n$.

4. a) Xét biểu thức $A = x^3y(x^4 - y^3) - x^2y(x^5 - y^3)$
 $= x^7y - x^3y^4 - x^7y + x^2y^4$
 $= x^2y^4 - x^3y^4 = x^2y^4(1 - x)$.

Thay giá trị $x = -1, y = 2$ vào biểu thức cuối, ta được

$$A = (-1)^2 2^4 (1 + 1) = 32.$$

Vậy với $x = -1, y = 2$ thì $A = 32$.

b) Xét biểu thức $B = x^3y^3(x^4 - y^4) - x^3y^4(x^2 - y^3)$
 $= x^7y^3 - x^3y^7 - x^5y^4 + x^3y^7$
 $= x^7y^3 - x^5y^4 = x^5y^3(x^2 - y)$.

Thay giá trị $x = 1, y = -2$ vào biểu thức cuối, ta được

$$B = 1^5 (-2)^3 (1^2 + 2) = -24.$$

Vậy với $x = 1, y = -2$ thì $B = -24$.

5. a) Xét biểu thức $M = \frac{3}{229} \left(2 + \frac{1}{433} \right) - \frac{1}{229} \cdot \frac{432}{433} - \frac{4}{229 \cdot 433}$.

Đặt $a = \frac{1}{229}$; $b = \frac{1}{433}$ ta có:

$$\begin{aligned} M &= 3a(2+b) - a(1-b) - 4ab \\ &= 6a + 3ab - a + ab - 4ab = 5a. \end{aligned}$$

b) Với $a = \frac{1}{229}$, giá trị của biểu thức là $M = \frac{5}{229}$.

6. $P = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ khi $x = 16$.

Cách 1. Ta có $P = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$

$$\begin{aligned} &= x^4 - 16x^3 - x^3 + 16x^2 + x^2 - 16x - x + 16 + 4 \\ &= x^3(x-16) - x^2(x-16) + x(x-16) - (x-16) + 4. \end{aligned}$$

Ta thấy các số hạng có chứa nhân tử $(x-16)$ đều bằng 0.

Vậy $P = 4$.

Cách 2. Ta thấy $x = 16$ nên $17 = x + 1$ và $20 = x + 4$, ta thay vào biểu thức P , ta được

$$\begin{aligned} P &= x^4 - (x+1)x^3 + (x+1)x^2 - (x+1)x + 20 \\ &= x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 4 = 4. \end{aligned}$$

Vậy $P = 4$.

7*. a) Ta có $x(2x+1) - x^2(x+2) + (x^3 - x + 3)$

$$= 2x^2 + x - x^3 - 2x^2 + x^3 - x + 3 = 3.$$

Vậy biểu thức luôn bằng 3, tức là không phụ thuộc vào biến x .

d) Ta có $4(x-6) - x^2(2+3x) + x(5x-4) + 3x^2(x-1)$

$$= 4x - 24 - 2x^2 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 3x^3 - 3x^2 = -24.$$

Vậy biểu thức luôn bằng -24, tức là không phụ thuộc vào biến x .

DẠNG 2.

1. Ta có : $A = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$
 $= x^3 - y^3.$

a) Thay $x = -10, y = 2$ vào biểu thức cuối, ta được $A = -1000 - 8 = -1008.$

b) Thay $x = 1, y = 0$ vào biểu thức cuối, ta được $A = 1.$

c) Thay $x = -2, y = 1$ vào biểu thức cuối, ta được $A = -9.$

2. a) Ta có : $(x + 3)(x - 3) - (x - 5)(x + 2)$
 $= x^2 - 3x + 3x - 9 - (x^2 + 2x - 5x - 10)$
 $= x^2 - 9 - x^2 + 3x + 10 = 3x + 1.$

b) Ta có : $(3x + 1)^2 + (2x - 3)^2 - 2(3x + 1)(2x - 3)$
 $= (3x + 1)^2 - 2(3x + 1)(2x - 3) + (2x - 3)^2$
 $= [(3x + 1) - (2x - 3)]^2 = (x + 4)^2.$

3. a) Biến đổi vế trái :

$$\begin{aligned} VT &= (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) \\ &= x^2 - bx - ax + ab + x^2 - cx - bx + bc + x^2 - ax - cx + ca \\ &= 3x^2 - 2x(a + b + c) + ab + bc + ca. \end{aligned}$$

Thay $2x = a + b + c$ vào biểu thức cuối, ta được

$$VT = 3x^2 - 4x^2 + ab + bc + ca = ab + bc + ca - x^2 = VP.$$

Sau khi biến đổi ta thấy vế trái (VT) bằng vế phải (VP), đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế phải :

$$\begin{aligned} VP &= (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(a + b + c) \\ &= a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - ca^2 + a^2b + b^3 + c^2b \\ &\quad - ab^2 - b^2c - abc + a^2c + b^2c + c^3 - abc - bc^2 - c^2a \\ &= a^3 - abc + b^3 - abc + c^3 - abc \\ &= a(a^2 - bc) + b(b^2 - ca) + c(c^2 - ab) = VT. \end{aligned}$$

Sau khi biến đổi ta thấy VP bằng VT, đẳng thức được chứng minh.

4. a) *Cách 1.* Ta thực hiện phép tính nhân đa thức bình thường

$$\text{Ta có } (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 4)$$

$$= x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3x - 4x^3 + 8x^2 - 12x - 4$$

$$= x^5 + x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 9x - 4.$$

Cách 2. Ta viết phép nhân từng số hạng của đa thức này dưới đa thức kia khi thực hiện phép nhân sao cho các số hạng đồng dạng thẳng cột (số hạng nào không có thì để trống, chỉ dùng cách này khi nhân các đa thức cùng ẩn và đã sắp xếp các đa thức theo lũy thừa tăng hoặc giảm của ẩn).

Ta có

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \\ \times \quad x^2 + 3x - 4 \\ \hline x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x^2 \\ + \quad 3x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3x \\ \quad - 4x^3 + 8x^2 - 12x - 4 \\ \hline x^5 + x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 9x - 4 \end{array}$$

- b) *Cách 1.* Ta thực hiện phép tính nhân đa thức bình thường

$$(x^3 + 2x - 1)(x^3 + x) = x^6 + 2x^4 - x^3 + x^4 + 2x^2 - x$$

$$= x^6 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x.$$

Cách 2. Thực hiện nhân theo dòng, ta được

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x - 1 \\ \times \quad x^3 + x \\ \hline x^6 + 2x^4 - x^3 \\ + \quad x^4 \quad + 2x^2 - x \\ \hline x^6 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x \end{array}$$

5. a) Ta có $(2x + 3)(x - 4) + (x - 5)(x - 2) = (3x - 5)(x - 4)$, hay

$$2x^2 - 8x + 3x - 12 + x^2 - 2x - 5x + 10 = 3x^2 - 12x - 5x + 20, \text{ tức là}$$

$$5x = -22, \text{ từ đó } x = -\frac{22}{5} \text{ là giá trị cần tìm của } x.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } & (8x - 3)(3x + 2) - (4x + 7)(x + 4) = (2x + 1)(5x - 1) \\
 & \Leftrightarrow 24x^2 + 16x - 9x - 6 - 4x^2 - 16x - 7x - 28 = 10x^2 - 2x + 5x - 1 \\
 & \Leftrightarrow 20x^2 - 16x - 34 = 10x^2 + 3x - 1 \\
 & \Leftrightarrow 10x^2 - 19x - 33 = 0 \Leftrightarrow 10x(x - 3) + 11(x - 3) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x - 3)(10x + 11) = 0.
 \end{aligned}$$

Từ đó ta có $x = 3$; $x = -\frac{11}{10}$ là giá trị cần tìm của x .

$$\begin{aligned}
 \text{6. a) Ta có } & (y - 1)(y^2 + y + 1) + \left(\frac{1}{3}x^2y - y\right)(2x + y^2) \\
 & = y^3 - 1 + \frac{2}{3}x^3y - 2xy + \frac{1}{3}x^3y^3 - y^3 \\
 & = \frac{2}{3}x^3y - 2xy + \frac{1}{3}x^2y^3 - 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } & (x - 1)(x - 3) - (4 - x)(2x + 1) - 3x^2 + 2x - 5 \\
 & = x^2 - 4x + 3 - 7x + 2x^2 - 4 - 3x^2 + 2x - 5 \\
 & = -9x - 6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{7. a) Ta có } & (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) \\
 & = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = x^8 - y^8.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } & (x + 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 2)^3 - 6(x - 1)(x + 1) \\
 & = (x + 2)^3 - (x - 2)^3 - 6(x^2 - 1) \\
 & = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 6 \\
 & = 22 + 6x^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{8. Ta có } & A = (3x - 5)(2x + 11) - (2x + 3)(3x + 7) \\
 & = (6x^2 + 33x - 10x - 55) - (6x^2 + 14x + 9x + 21) = -76.
 \end{aligned}$$

Vậy $A = -76$ không phụ thuộc vào biến x .

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } & B = (x^2 + 2x + 3)(3x^2 - 2x + 1) - 3x^2(x^2 + 2) - 4x(x^2 - 1) \\
 & = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 6x^3 - 4x^2 + 2x + 9x^2 - 6x + 3 \\
 & \quad - 3x^4 - 6x^2 - 4x^3 + 4x = 3.
 \end{aligned}$$

Vậy $B = 3$ không phụ thuộc vào biến x .

Chủ đề 2

1. a) Ta có $(x+2)(x^2-2x+4)-(18+x^3)=x^3+2^3-18-x^3=-10$.

b) Ta có $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)-(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$
 $= (2x-y)[(2x)^2+(2x)y+y^2]-(2x+y)[(2x)^2-(2x)y+y^2]$
 $= [(2x)^3-y^3]-[(2x)^3+y^3]$
 $= (8x^3-y^3)-(8x^3+y^3)$
 $= 8x^3-y^3-8x^3-y^3=-2y^3$.

2. a) Ta có $A=x^2+10x+26=(x+5)^2+1$.

Với $x=45$, ta được $A=(45+5)^2+1=50^2+1=2501$.

b) Ta có $B=x^2-0,2x+0,01=(x-0,1)^2$.

Với $x=1,1$, ta được $B=(1,1-0,1)^2=1$.

3. a) Ta có $x^2+9y^2-6xy=x^2-2.x.3y+(3y)^2=(x-3y)^2$.

Từ đó thay $x=16$ và $y=2$ vào biểu thức, ta được

$$x^2+9y^2-6xy=(16-3.2)^2=10^2=100.$$

b) Ta có $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3=x^3-3.x^2.2y+3.x.(2y)^2-(2y)^3$
 $= (x-2y)^3$.

Từ đó thay $x=14$ và $y=2$ vào biểu thức, ta được

$$x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3=(14-2.2)^3=10^3=1000.$$

4. a) Ta có $(x-3)(x+3)-(x+5)(x-1)$

$$= x^2-9-x^2+x-5x+5=-4x-4.$$

b) Ta có $(3x-2)^2+(x+1)^2+2(3x-2)(x+1)$

$$= (3x-2)^2+2(3x-2)(x+1)+(x+1)^2$$

$$= (3x-2+x+1)^2=(4x-1)^2.$$

5. a) Cách 1. Ta có $(2x-1)^2-(2x+3)(2x-1)=0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 2x - 6x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 4 = 0, \text{ hay } 8x = 4, \text{ tức là } x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị $x = \frac{1}{2}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Ta có $(2x - 1)^2 - (2x + 3)(2x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)[2x - 1 - 2x - 3] = 0 \Leftrightarrow 4(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị $x = \frac{1}{2}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có $(x + 5)(x - 2) - (x - 3)(x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 5x - 10 - x^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0, \text{ tức là } x = \frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị $x = \frac{1}{3}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

$$\begin{aligned} 6. \quad a) \quad \text{Ta có } x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + 1 \\ &= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1. \end{aligned}$$

Do $(x - 1)^2 \geq 0, (y - 1)^2 \geq 0$ với mọi số thực x, y nên $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1 > 0$.

Vậy $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 > 0$ với mọi giá trị thực x và y .

$$b) \quad \text{Ta có } x - x^2 - 1 = -x^2 + x - 1 = -(x^2 - x + 1) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}.$$

$$\text{Do } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ nên } -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

$$\text{Vậy } x - x^2 - 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0 \text{ với mọi số thực } x.$$

Chủ đề 3

1. a) Ta có $3x^2 + 6x + 3 - 3y^2 = 3(x^2 + 2x + 1 - y^2)$
 $= 3[(x^2 + 2x + 1) - y^2] = 3[(x + 1)^2 - y^2]$
 $= 3(x + 1 + y)(x + 1 - y).$
b) Ta có $25 - x^2 - y^2 + 2xy = 5^2 - (x^2 + y^2 - 2xy)$
 $= 5^2 - (x - y)^2 = (5 + x - y)(5 - x + y).$
2. a) Ta có $3x - 3y - x^2 + 2xy - y^2 = 3(x - y) - (x^2 - 2xy + y^2)$
 $= 3(x - y) - (x - y)^2 = (x - y)(3 - x + y).$
b) Ta có $x^2 - y^2 + 2x - 2y = (x^2 - y^2) + 2(x - y)$
 $= (x - y)(x + y) + 2(x - y) = (x - y)(x + y + 2).$
3. a) Ta có $x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0$, hay $x(x - 1)(x + 1) = 0$.
Vậy $x = 0$, $x = 1$ và $x = -1$ là các giá trị cần tìm.
b) Ta có $2x^3 + 2\sqrt{2}x^2 + x = 0$, hay $x(2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1) = 0$.
Tức là $x(\sqrt{2}x + 1)^2 = 0$. Vậy $x = 0, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. a) Ta có $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y = (x^2 - 4y^2) + (-2x - 4y)$
 $= (x + 2y)(x - 2y) - 2(x + 2y) = (x + 2y)(x - 2y - 2).$
b) Ta có $x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = (x^4 - 4) + (2x^3 - 4x)$
 $= (x^2 + 2)(x^2 - 2) + 2x(x^2 - 2) = (x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)$
 $= (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^2 + 2x + 2).$
5. a) Ta có $x^2(1 - x^2) - 4 - 4x^2 = x^2(1 - x^2) - 4(1 - x^2)$
 $= (1 - x^2)(x^2 - 4) = (1 + x)(1 - x)(x + 2)(x - 2).$
b) Ta có $x^2 + y^2 - x^2y^2 + xy - x - y = (x^2 - x) + (y^2 - x^2y^2) + (xy - y)$
 $= x(x - 1) + y^2(1 - x^2) + y(x - 1) = (x - 1)[x + y - y^2(x + 1)]$
 $= (x - 1)(x + y - xy^2 - y^2) = (x - 1)[x(1 - y^2) + y(1 - y)]$
 $= (x - 1)(1 - y)(x + y + xy).$

$$6. \quad a) \text{ Ta có } (1+2x)(1-2x) - x(x+2)(x-2) = 1 - 4x^2 - x(x^2 - 4) \\ = 1 - x^3 + 4x(1-x) = (1-x)(1+5x+x^2).$$

$$b) \text{ Ta có } (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\ = (a+b)(ab+bc+ca) + c(ab+bc+ca) - abc \\ = (a+b)(ab+bc+ca) + abc + c^2(a+b) \\ = (a+b)(ab+bc+ca+c^2) \\ = (a+b)[a(b+c) + c(b+c)] = (a+b)(b+c)(c+a).$$

$$7. \quad a) \text{ Ta có } \frac{2}{3}x(x^2-9) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x(x-3)(x+3) = 0.$$

Ta thấy một tích bằng 0 khi một trong các thừa số bằng 0, nên

$$\frac{2}{3}x(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3, x = -3.$$

Vậy giá trị của x cần tìm là $x = 0, x = 3, x = -3$.

$$b) \text{ Ta có : } (x+2)^2 - (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow (x+2)[(x+2) + (x-2)] = 0, \\ \text{hay } (x+2)2x = 0. \text{ Từ đó ta tìm được } x = 0, x = -2.$$

$$8*. \text{ Ta có } (a+b)^2 - (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\ = 4ab.$$

$$\text{Ta có } (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = 3^2 + 4 \cdot 4 = 25.$$

$$\text{Ta có } (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 6^2 - 4 \cdot 8 = 4.$$

$$9*. \quad a) \text{ Ta có } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc \\ = [(a+b)^3 + c^3] - 3ab(a+b+c) \\ = (a+b+c)[(a+b)^2 - c(a+b) + c^2] - 3ab(a+b+c) \\ = (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) \\ = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

$$b) \text{ Đặt } a = x - y; b = y - z; c = z - x, \text{ thì ta có } a + b + c = 0.$$

$$\text{Từ đó theo câu a, ta có } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0, \text{ nên } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

$$\text{Vậy } (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

10*. *Cách 1.* Ở đây ta thấy vai trò của x, y, z như nhau nên ta biến đổi hai số hạng sau để xuất hiện thừa số $(y - z)$:

$$\begin{aligned} A &= x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = x^2(y - z) + y^2z - xy^2 + xz^2 - yz^2 \\ &= x^2(y - z) + yz(y - z) - x(y^2 - z^2) = x^2(y - z) + yz(y - z) - x(y - z)(y + z) \\ &= (y - z)(x^2 + yz - xy - xz) = (y - z)[x(x - y) - z(x - y)] \\ &= (y - z)(x - y)(x - z). \end{aligned}$$

Cách 2. Ta thực hiện tách : $z - x = -[(y - z) + (x - y)]$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) \\ &= x^2(y - z) - y^2[(y - z) + (x - y)] + z^2(x - y) \\ &= (y - z)(x^2 - y^2) - (x - y)(y^2 - z^2) \\ &= (y - z)(x + y)(x - y) - (x - y)(y + z)(y - z) \\ &= (y - z)(x - y)(x + y - y - z) \\ &= (y - z)(x - y)(x - z). \end{aligned}$$

Cách 3. Ta nhận thấy trong biểu thức A , nếu ta thay x bởi y thì $A = 0$. Do đó A chứa thừa số $(x - y)$.

Tương tự, A chứa thừa số $(y - z)$ và $(z - x)$.

Như vậy A phải có dạng $A = k(y - z)(x - y)(x - z)$.

Ta thấy k phải là hằng số (không chứa biến x, y, z) vì nó có bậc ba đối với các biến x, y, z và đồng thời biểu thức $(y - z)(x - y)(x - z)$ cũng có bậc ba đối với các biến x, y, z .

Từ đó, ta có $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = k(y - z)(x - y)(x - z)$ đúng với mọi giá trị của x, y, z . Ta cho các biến x, y, z nhận các giá trị đặc biệt, chẳng hạn $x = 2, y = 1, z = 0$, ta được :

$$4 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 = k \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2), \text{ hay } 2 = -2k, \text{ nên } k = -1.$$

$$\text{Vậy } A = -(x - y)(y - z)(z - x) = (y - z)(x - y)(x - z).$$

Chú ý: Các giá trị x, y, z có thể lấy tùy ý chỉ cần chúng đôi một khác nhau sao cho tích $(x - y)(y - z)(z - x) \neq 0$.

Chủ đề 4

DẠNG 1.

1. a) Ta có $(21x^2y - 7xy^2 + xy) : xy = 21x - 7y + 1$.

b) Ta có $(5x^4 + 3x^5 - 2x^6) : (-\frac{1}{2}x^2) = -10x^2 - 6x^3 + 4x^4$.

c) Ta có $(4x^4 - 8x^3y^2 + 15x^2y^3) : (-4x^2) = -x^2 + 2xy^2 - \frac{15}{4}y^3$.

2. Ta có $(2x^2y^2 + 6x^2y^3 - 15xy) : 3xy = \frac{2}{3}xy + 2xy^2 - 5$.

Ta có $(23x^3y^2 - 18x^2y^3 + 6xy^5) : 4xy^2 = \frac{23}{4}x^2 - \frac{9}{2}xy + \frac{3}{2}y^3$.

3. Ta có $(15x^4y^5 - 17x^3y^4 + 8x^2y^6) : 2xy^2 = \frac{15}{2}x^3y^3 - \frac{17}{2}x^2y^2 + 4xy^4$.

Ta có $(5a^3b^2c + 7a^2b^3c^2 - 4abc^2) : a^2bc = 5ab + 7b^2c - 4c$.

4*. Ta có $[6(x-2)^3 + 7(x-2)^4 - 9(x-2)^5] : (2-x)^2$
 $= [6(x-2)^3 + 7(x-2)^4 - 9(x-2)^5] : (x-2)^2$
 $= 6(x-2) + 7(x-2)^2 - 9(x-2)^3$.

Chú ý: Ở đây ta coi $(x-2)$ như là một biến z nào đó.

b) Ta có $[5(x-y)^6 + 2(x-y)^5 - 7(x-y)^3] : (y-x)^2$
 $= [5(x-y)^6 + 2(x-y)^5 - 7(x-y)^3] : (x-y)^2$
 $= 5(x-y)^4 + 2(x-y)^3 - 7(x-y)$.

Lưu ý: Ở đây ta coi $(x-y)$ như là một biến z nào đó.

5*. Ta thấy $x^2 + 6$ và $x^2 + 4$ hơn kém $x^2 + 5$ một đơn vị, nên nếu coi $y = x^2 + 5$ thì ta có $(y+1)(y-1) : y$, hay là $(y^2 - 1) : y = y - \frac{1}{y}$.

Thay trở lại $y = x^2 + 5$, ta được :

$$(x^2 + 6)(x^2 + 4) : (x^2 + 5) = x^2 + 5 - \frac{1}{x^2 + 5}.$$

Lưu ý: Ta có thể giải bài 4, bài 5 theo cách chia đa thức ở Dạng 2.

6*. Thực hiện phép tính chia :

$$\begin{aligned} \text{a) } & [7(x^2 - 1)^4 + 2(1 - x)^3 - 3(x - 1)^2] : 2(x - 1)^2 \\ &= [7(x - 1)^4(x + 1)^4 - 2(x - 1)^3 - 3(x - 1)^2] : 2(x - 1)^2 \\ &= \frac{7}{2}(x - 1)^2(x + 1)^4 - (x - 1) - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & [5(x^3 - y^3)^4 + (x - y)^3] : (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= [5(x - y)^4(x^2 + xy + y^2)^4 + (x - y)^3] : (x - y)^2 \\ &= 5(x - y)^2(x^2 + xy + y^2)^4 + (x - y). \end{aligned}$$

DẠNG 2.

1. a) Ta có $(6x^2 - 11x - 10) : (3x + 2)$

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 11x - 10 \quad | \quad 3x + 2 \\ - \quad 6x^2 + 4x \quad | \quad 2x - 5 \\ \hline -15x - 10 \\ - \quad -15x - 10 \\ \hline 0 \end{array}$$

Vậy đa thức $(6x^2 - 11x - 10)$ chia hết cho $(3x + 2)$ được thương là $(2x - 5)$.

Ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp phân tích thành nhân tử, như sau :

$$\begin{aligned} (6x^2 - 11x - 10) : (3x + 2) &= (6x^2 - 15x + 4x - 10) : (3x + 2) \\ &= [3x(2x - 5) + 2(2x - 5)] : (3x + 2) = (2x - 5)(3x + 2) : (3x + 2) = 2x - 5. \end{aligned}$$

b) Ta có $(x^4 + 2x^3 + 10x - 25) : (x^2 + 5)$

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 + 10x - 25 \quad | \quad x^2 + 5 \\ - \quad x^4 + 5x^2 \quad | \quad x^2 + 2x - 5 \\ \hline 2x^3 - 5x^2 + 10x - 25 \\ - \quad 2x^3 + 10x \quad | \quad \\ \hline -5x^2 - 25 \\ - \quad -5x^2 - 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

Vậy đa thức $(x^4 + 2x^3 + 10x - 25)$ chia hết cho $(x^2 + 5)$ được thương là $(x^2 + 2x - 5)$.

Ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp phân tích thành nhân tử, như sau :

$$\begin{aligned} & (x^4 + 2x^3 + 10x - 25) : (x^2 + 5) \\ &= (x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 5x^2 + 10x - 25) : (x^2 + 5) \\ &= [x^2(x^2 + 2x - 5) + 5(x^2 + 2x - 5)] : (x^2 + 5) \\ &= (x^2 + 2x - 5)(x^2 + 5) : (x^2 + 5) = x^2 + 2x - 5. \end{aligned}$$

2. a) Ta có : $(2x^2 + ax + 1) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + ax + 1 & x - 3 \\ - 2x^2 - 6x & \hline (a + 6)x + 1 & 2x + (a + 6) \\ - (a + 6)x - 3(a + 6) & \\ \hline 3a + 19 & \end{array}$$

Để $2x^2 + ax + 1$ chia cho $x - 3$ dư 4 thì $3a + 19 = 4$, hay $a = -5$.

Vậy $a = -5$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có : $(ax^5 + 4x^4 - 9) : (x - 1)$

$$\begin{array}{r|l} ax^5 + 4x^4 - 9 & x - 1 \\ - ax^5 - ax^4 & \hline (a + 4)x^4 - 9 & ax^4 + (a + 4)x^3 \\ - (a + 4)x^4 - (a + 4)x^3 & \hline (a + 4)x^3 - 9 & + (a + 4)x^2 + (a + 4)x \\ - (a + 4)x^3 - (a + 4)x^2 & \hline (a + 4)x^2 - 9 & + (a + 4) \\ - (a + 4)x^2 - (a + 4)x & \hline (a + 4)x - 9 & \\ - (a + 4)x - (a + 4) & \hline a - 5 & \end{array}$$

Để chia hết cho $(x - 1)$ thì $a - 5 = 0$, hay $a = 5$.

3. a) Ta có $(2n^2 + n - 7) : (n - 2)$

$$\begin{array}{r|l} 2n^2 + n - 7 & n - 2 \\ - 2n^2 - 4n & 2n + 5 \\ \hline 5n - 7 & \\ - 5n - 10 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Như vậy $(2n^2 + n - 7) : (n - 2) = 2n + 5 + \frac{3}{n - 2}$.

Để $2n^2 + n - 7$ chia hết cho $n - 2$ thì $n - 2$ phải là ước của 3, nghĩa là $n - 2$ nhận các giá trị $\pm 1; \pm 3$. Từ đó ta tìm được $n = 1; n = 3; n = 5$ và $n = -1$.

Vậy các giá trị nguyên của n cần tìm là: $n = 1; n = 3; n = 5$ và $n = -1$.

b) Ta có $(10n^2 - 7n - 5) : (2n - 3)$

$$\begin{array}{r|l} 10n^2 - 7n - 5 & 2n - 3 \\ - 10n^2 - 15n & 5n + 4 \\ \hline 8n - 5 & \\ - 8n - 12 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

Như vậy $(10n^2 - 7n - 5) : (2n - 3) = 5n + 4 + \frac{7}{2n - 3}$.

Để $10n^2 - 7n - 5$ chia hết cho $2n - 3$ thì $2n - 3$ phải là ước của 7, nghĩa là $2n - 3$ nhận các giá trị $\pm 1; \pm 7$. Từ đó ta tìm được $n = 1; n = 2; n = 5$ và $n = -2$.

Vậy các giá trị nguyên của n cần tìm là: $n = 1, n = 2, n = 5$ và $n = -2$.

4. Ta có $(x^3 - 7x + 6) : (x + 3)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 7x + 6 & x + 3 \\ - x^3 + 3x^2 & x^2 - 3x + 2 \\ \hline - 3x^2 - 7x + 6 & \\ - - 3x^2 - 9x & \\ \hline 2x + 6 & \\ - 2x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Vậy đa thức $(x^3 - 7x + 6)$ chia hết cho $(x + 3)$ được thương là $(x^2 - 3x + 2)$.

5. Ta có $(2x^3 - 26x - 24) : (x^2 + 4x + 3)$

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 26x - 24 \\
 - (2x^3 + 8x^2 + 6x) \\
 \hline
 -8x^2 - 32x - 24 \\
 - (-8x^2 - 32x - 24) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 + 4x + 3 \\
 \hline
 2x - 8
 \end{array}$$

Vậy đa thức $(2x^3 - 26x - 24)$ chia hết cho $(x^2 + 4x + 3)$ được thương là $(2x - 8)$.

6. Ta có $(3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 8) : (x^2 - 2)$

$$\begin{array}{r}
 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\
 - (3x^4 - 6x^2) \\
 \hline
 -2x^3 + 4x^2 + 4x - 8 \\
 - (-2x^3 + 4x) \\
 \hline
 4x^2 - 8 \\
 - (4x^2 - 8) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 - 2 \\
 \hline
 3x^2 - 2x + 4
 \end{array}$$

Vậy đa thức $(3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$ chia hết cho $(x^2 - 2)$ được thương là $(3x^2 - 2x + 4)$.

7*. Cách 1. Thực hiện phép chia $(a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a) : (x + 1)$, ta có :

$$\begin{array}{r}
 a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a \\
 - (a^2x^3 + a^2x^2) \\
 \hline
 a(3-a)x^2 - 6x - 2a \\
 - (a(3-a)x^2 + a(3-a)x) \\
 \hline
 (a^2 - 3a - 6)x - 2a \\
 - ((a^2 - 3a - 6)x + (a^2 - 3a - 6)) \\
 \hline
 -a^2 + 3a + 6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x + 1 \\
 \hline
 a^2x^2 + a(3-a)x + (a^2 - 3a - 6)
 \end{array}$$

Vậy $(a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a)$ chia cho $(x + 1)$ được thương là

$$a^2x^2 + a(3 - a)x + (a^2 - 3a - 6) \text{ và dư là } -a^2 + 3a + 6.$$

Để $(a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a)$ chia hết cho $(x + 1)$ thì dư phải bằng 0, nghĩa là

$$-a^2 + 3a + 6 = 0, \text{ hay } (a + 2)(3 - a) = 0, \text{ tức là } a = 3 \text{ hoặc } a = -2.$$

Vậy để $(a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a)$ chia hết cho $(x + 1)$ thì $a = 3$ hoặc $a = -2$.

Cách 2. Do $(a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a)$ chia hết cho $(x + 1)$, nên ta có thể viết :

$$(a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a) = (mx^2 + nx + p)(x + 1), \quad (1)$$

ở đó thương $(mx^2 + nx + p)$ là tam thức bậc hai.

Ta thấy (1) đúng với mọi giá trị x , nên cũng đúng khi $x = -1$, do đó ta có :

$$-a^2 + 3a + 6 - 2a = 0, \text{ hay } -a^2 + 3a + 6 = 0, \text{ tức là } a = 3 \text{ hoặc } a = -2.$$

Vậy để $(a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a)$ chia hết cho $(x + 1)$ thì $a = 3$ hoặc $a = -2$.

8*. Thực hiện phép chia $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3) : (x^2 + y^2)$.

Ta có $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3) : (x^2 + y^2)$

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 \\ - x^4 \qquad \qquad + x^2y^2 \\ \hline -x^3y \qquad \qquad -xy^3 \\ - -x^3y \qquad \qquad -xy^3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 \\ \hline x^2 - xy \end{array}$$

Vậy đa thức $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3)$ chia hết cho $(x^2 + y^2)$ được thương là $(x^2 - xy)$.

9*. Ta có : $(x^3 + 3x^2 - 5x + m) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 5x + m \\ - x^3 - 2x^2 \\ \hline 5x^2 - 5x + m \\ - 5x^2 - 10x \\ \hline 5x + m \\ - 5x - 10 \\ \hline m + 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 2 \\ \hline x^2 + 5x + 5 \end{array}$$

Vậy đa thức $(x^3 + 3x^2 - 5x + m)$ chia cho $(x - 2)$ được thương là $(x^2 + 5x + 5)$ và dư là $m + 10$.

Để đa thức $(x^3 + 3x^2 - 5x + m)$ chia hết cho đa thức $(x - 2)$ thì $m + 10 = 0$, hay $m = -10$.

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chủ đề 1

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và B khác đa thức 0.

A được gọi là tử thức (hay tử), B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Xét tính bằng nhau của các phân thức

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau :

Với hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$, ta có : $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A \cdot D = B \cdot C$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng tỏ rằng :

$$\text{a) } \frac{3x(x+5)}{2(x+5)} = \frac{3x}{2};$$

$$\text{b) } \frac{x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1};$$

$$\text{c) } \frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1};$$

$$\text{d) } \frac{x^3+8}{x^2-2x+4} = x+2.$$

Lời giải

a) Ta coi $\frac{3x(x+5)}{2(x+5)}$ là $\frac{A}{B} \cdot \frac{3x}{2}$ là $\frac{C}{D}$. Theo định nghĩa hai phân thức bằng nhau ta cần kiểm tra đẳng thức $A \cdot D = B \cdot C$; tức là cần kiểm tra đẳng thức : $3x(x+5) \cdot 2 = 2(x+5) \cdot 3x$.

Ta có : $3x(x+5) \cdot 2 = 6x^2 + 30x$;

$$2(x+5) \cdot 3x = 6x^2 + 30x.$$

Suy ra $3x(x+5) \cdot 2 = 2(x+5) \cdot 3x$.

$$\text{Vậy } \frac{3x(x+5)}{2(x+5)} = \frac{3x}{2}.$$

b) Tương tự như giải câu a, ta cần kiểm tra đẳng thức :

$$(x+2)(x^2-1) = (x-1)(x+2)(x+1).$$

Ta có $(x+2)(x^2-1) = (x+2)(x-1)(x+1) = (x-1)(x+2)(x+1)$.

$$\text{Vậy } \frac{x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1}.$$

c) Tương tự như giải câu a, ta cần kiểm tra đẳng thức :

$$(x^2-x-2)(x-1) = (x+1)(x^2-3x+2).$$

Ta có : $(x^2-x-2)(x-1) = x^3-x^2-2x-x^2+x+2 = x^3-2x^2-x+2$;

$$(x+1)(x^2-3x+2) = x^3-3x^2+2x+x^2-3x+2 = x^3-2x^2-x+2.$$

Suy ra $(x^2-x-2)(x-1) = (x+1)(x^2-3x+2)$.

$$\text{Vậy } \frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1}.$$

d) Vì đa thức $x+2$ cũng là phân thức $\frac{x+2}{1}$ nên có thể viết đẳng thức đã

$$\text{cho dưới dạng: } \frac{x^3+8}{x^2-2x+4} = \frac{x+2}{1}.$$

Giải tương tự như các câu trên, ta có :

$$(x^3 + 8) : 1 = x^3 + 8 ;$$

$$(x^2 - 2x + 4)(x + 2) = x^3 + 8.$$

$$\text{Vậy } \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4} = \frac{x + 2}{1}.$$

Ví dụ 2. Ba phân thức sau có bằng nhau không :

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x} ;$$

$$\frac{x - 3}{x} ;$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x}.$$

Lời giải

Ta chỉ cần xét xem hai đẳng thức $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x} = \frac{x - 3}{x}$ và $\frac{x - 3}{x} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x}$

có đúng hay không ?

• *Xét đẳng thức thứ nhất.*

Tương tự như cách giải ví dụ 1, ta có :

$$(x^2 - 2x - 3)x = x^3 - 2x^2 - 3x ;$$

$$(x^2 + x)(x - 3) = x^3 + x^2 - 3x^2 - 3x = x^3 - 2x^2 - 3x.$$

$$\text{Suy ra } (x^2 - 2x - 3)x = (x^2 + x)(x - 3).$$

$$\text{Vậy } \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x} = \frac{x - 3}{x}.$$

• *Xét đẳng thức thứ hai.*

$$\text{Ta có : } (x - 3)(x^2 - x) = x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x = x^3 - 4x^2 + 3x ;$$

$$x(x^2 - 4x + 3) = x^3 - 4x^2 + 3x.$$

$$\text{Suy ra } (x - 3)(x^2 - x) = x(x^2 - 4x + 3)$$

$$\text{Vậy } \frac{x - 3}{x} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x}.$$

$$\text{Kết luận : } \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x} = \frac{x - 3}{x} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x}.$$

Ví dụ 3. Cho ba đa thức : $x^2 - 4x$, $x^2 + 4$, $x^2 + 4x$. Hãy chọn một đa thức thích hợp rồi điền vào chỗ trống trong đẳng thức dưới đây :

$$\frac{\dots}{x^2 - 16} = \frac{x}{x - 4}.$$

Lời giải

Theo định nghĩa hai phân thức bằng nhau, ta phải có :

$$(\dots)(x - 4) = x(x^2 - 16) \text{ hay } (\dots)(x - 4) = x^3 - 16x.$$

Cách 1. Lần lượt điền ba đa thức đã cho vào chỗ trống của biểu thức $(\dots)(x - 4)$ ở vế trái, ta được:

$$(x^2 - 4x)(x - 4) = x^3 - 4x^2 - 4x^2 + 16x = x^3 - 8x^2 + 16x;$$

$$(x^2 + 4)(x - 4) = x^3 - 4x^2 + 4x - 16;$$

$$(x^2 + 4x)(x - 4) = x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 16x = x^3 - 16x.$$

So sánh với vế phải, ta phải điền đa thức $x^2 + 4x$ vào chỗ trống trong đẳng thức đã cho.

Cách 2. Gọi A là đa thức cần chọn, ta phải có : $A(x - 4) = x(x^2 - 16)$.

Phân tích $x^2 - 16$ thành nhân tử, ta có :

$$A(x - 4) = x(x^2 - 16) = x(x + 4)(x - 4).$$

Vậy đa thức phải chọn là $x(x + 4) = x^2 + 4x$.

Ví dụ 4. Dùng định nghĩa phân thức bằng nhau, chứng tỏ rằng :

$$\text{a) } \frac{x-2}{x+3} = \frac{x^2-5x+6}{x^2-9};$$

$$\text{b) } \frac{x^2-6x+8}{x-2} = \frac{x^2-7x+12}{x-3}.$$

Lời giải

a) Ta có $(x - 2)(x^2 - 9) = (x - 2)(x - 3)(x + 3)$ và

$$(x + 3)(x^2 - 5x + 6) = (x - 2)(x - 3)(x + 3).$$

$$\text{Vậy } \frac{x-2}{x+3} = \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}.$$

b) Ta có $(x-2)(x^2-7x+12) = (x-2)(x-3)(x-4)$ và
 $(x-3)(x^2-6x+8) = (x-2)(x-3)(x-4).$

Vậy $\frac{x^2-6x+8}{x-2} = \frac{x^2-7x+12}{x-3}.$

Ví dụ 5. Hai phân thức sau có bằng nhau không ?

a) $\frac{x^2-2x}{x^2-4}$ và $\frac{x}{x+2}$;

b) $\frac{x+1}{x+3}$ và $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}.$

Lời giải

a) Ta có $(x^2-2x)(x+2) = x(x-2)(x+2).$

Mặt khác $x(x^2-4) = x(x-2)(x+2).$

Vậy hai phân thức đó bằng nhau.

b) Ta có $(x+1)(x^2-x-6) = (x+1)(x+2)(x-3).$

Nhưng $(x+3)(x^2+3x+2) = (x+3)(x+1)(x+2).$

Vậy hai phân thức đó không bằng nhau.

III. BÀI TẬP

1. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1$;

b) $\frac{x^5-1}{x^2-1} = \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}.$

2. Chứng tỏ rằng :

a) x^3+1 chia hết cho $x+1$;

b) $\frac{x^4-x^2}{x^3-1} = \frac{x^3+x^2}{x^2+x+1}.$

3. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\frac{x^3-4x^2+8}{x^2-4} = \frac{x^2-2x-4}{x+2}$;

b) $\frac{x^2-xy-x+y}{x^2+xy-x-y} = \frac{x-y}{x+y}.$

4. a) Chứng tỏ rằng với mọi số nguyên n, ta luôn có $n^3-n \div 3$.

b) Áp dụng : Chứng tỏ rằng với mọi số nguyên a, b ta luôn có $a^3b-ab^3 \div 6$.

5. Chứng tỏ rằng với mọi số nguyên n, ta luôn có $n^5-n \div 5$.

Chủ đề 2

RÚT GỌN PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Sử dụng tính chất cơ bản của phân thức :

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M} \quad (M \text{ là một đa thức khác đa thức } 0).$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N} \quad (N \text{ là một nhân tử chung}).$$

- Dùng quy tắc đổi dấu của phân thức : $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng tính chất cơ bản của phân thức, quy tắc đổi dấu để thực hiện các phép toán rút gọn phân thức.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Dưới đây là những ví dụ về hai phân thức bằng nhau mà các bạn Vui, Vẻ, Hạnh, Phúc đưa ra :

$$\frac{x+3}{2x-5} = \frac{x^2+3x}{2x^2-5x} \quad (\text{Vui});$$

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{x+1}{1} \quad (\text{Vẻ});$$

$$\frac{4-x}{-3x} = \frac{x-4}{3x} \quad (\text{Hạnh});$$

$$\frac{(x-9)^3}{2(9-x)} = \frac{(9-x)^2}{2} \quad (\text{Phúc}).$$

Hãy dùng tính chất cơ bản của phân thức hoặc quy tắc đổi dấu để giải thích ai viết đúng, ai viết sai. Nếu có chỗ nào sai, hãy sửa lại cho đúng.

Lời giải

Ở mỗi ví dụ, ta hãy phân tích tử và mẫu của các phân thức thành nhân tử để biết mỗi bạn đã vận dụng kiến thức như thế nào ?

- (Vui). Phân tích tử và mẫu của phân thức ở vế phải của đẳng thức, ta có

$$\frac{x^2+3x}{2x^2-5x} = \frac{x(x+3)}{x(2x-5)}.$$

Điều đó chứng tỏ bạn Vui đã nhân cả tử và mẫu của phân thức ở vế trái với x để được phân thức ở vế phải.

Vậy bạn Vui viết đúng.

- (Vẻ). Phân tích tử và mẫu của phân thức ở vế trái, ta được

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{(x+1)(x+1)}{x(x+1)}.$$

Để có tử của phân thức ở vế phải là $(x+1)$, ta phải chia cả tử và mẫu của phân thức ở vế trái cho $(x+1)$. Nhưng khi đó ta được phân thức $\frac{(x+1)}{x}$.

Vậy bạn Vẻ viết sai. Sửa lại thành $\frac{(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{x+1}{x}$.

- (Hạnh). Áp dụng quy tắc đổi dấu vào phân thức ở vế trái, ta được

$$\frac{4-x}{-3x} = \frac{x-4}{3x}.$$

Vậy bạn Hạnh viết đúng.

- (Phúc). Áp dụng quy tắc đổi dấu vào phân thức ở vế trái, ta được

$$\frac{(x-9)^3}{2(9-x)} = \frac{-(9-x)^3}{2(9-x)}.$$

Muốn áp dụng tính chất cơ bản của phân thức để biến kết quả vừa được thành phân thức có mẫu là 2 ta phải chia cả tử và mẫu cho $(9-x)$. Khi đó ta được

phân thức $\frac{-(9-x)^2}{2}$.

Nhưng vế phải là $\frac{-(9-x)^2}{2} = \frac{-(x-9)^2}{2}$.

Vậy bạn Phúc viết sai. Sửa lại thành $\frac{-(9-x)^2}{2} = \frac{-(x-9)^2}{2}$.

Ví dụ 2. Điền đa thức thích hợp vào mỗi chỗ trống trong các đẳng thức sau :

a) $\frac{x^3+x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{\dots}{x-1}$; b) $\frac{5(x+y)}{2} = \frac{5x^2-5y^2}{\dots}$.

Lời giải

Phân tích tử và mẫu của các phân thức để biết cần vận dụng tính chất cơ bản của phân thức như thế nào ?

a) Ta có $\frac{x^3 + x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)}$, chia cả tử và mẫu cho $(x+1)$, ta được $\frac{x^3 + x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2}{x-1}$.

Vậy đa thức cần điền vào chỗ trống là x^2 .

b) Phân tích tử của phân thức ở vế phải ta được $5x^2 - 5y^2 = 5(x-y)(x+y)$.
Do đó đẳng thức đã cho có thể viết là

$$\frac{5(x+y)}{2} = \frac{5(x+y)(x-y)}{\dots}$$

Để có tử số là $5(x+y)(x-y)$ phải nhân cả tử và mẫu của phân thức ở vế trái với $(x-y)$ ta được $\frac{5(x+y)(x-y)}{2(x-y)}$.

Vậy đa thức phải điền vào chỗ trống là $2(x-y)$.

Ví dụ 3. Rút gọn các phân thức sau :

a) $\frac{12x^3y^2}{18xy^5}$;

b) $\frac{15x(x+5)^3}{20x^2(x+5)}$;

c) $\frac{7x^2 + 14x + 7}{3x^2 + 3x}$;

d) $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3}$.

Lời giải

a) Ta có : $\frac{12x^3y^2}{18xy^5} = \frac{2x^2 \cdot 6xy^2}{3y^3 \cdot 6xy^2} = \frac{2x^2}{3y^3}$.

b) Ta có : $\frac{15x(x+5)^3}{20x^2(x+5)} = \frac{3(x+5)^2 \cdot 5x(x+5)}{4x \cdot 5x(x+5)} = \frac{3(x+5)^2}{4x}$.

c) Ta có : $\frac{7x^2 + 14x + 7}{3x^2 + 3x} = \frac{7(x^2 + 2x + 1)}{3x(x+1)} = \frac{7(x+1)^2}{3x(x+1)} = \frac{7(x+1)}{3x}$.

d) Ta có : $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3} = \frac{3(3-x)}{(x-3)^3} = \frac{-3(x-3)}{(x-3)^3} = \frac{-3}{(x-3)^2}$.

III. BÀI TẬP

1. Chứng tỏ mỗi cặp phân thức sau bằng nhau :

a) $\frac{3}{2x-3}$ và $\frac{3x+6}{2x^2+x-6}$;

b) $\frac{2}{x+4}$ và $\frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x}$.

2. Chứng tỏ rằng :

a) $\frac{x^2-5x+4}{x^3-1} = \frac{x-4}{x^2+x+1}$;

b) $\frac{x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{1-x}{x+2}$.

3. Rút gọn các phân thức sau :

a) $\frac{y(2x-x^2)}{x(2y+y^2)}$;

b) $\frac{xy^3-yx^3}{x^2+xy}$;

c) $\frac{(x+a)^2-x^2}{a^2+4x^2+4ax}$.

4. Rút gọn các phân thức sau :

a) $\frac{5(x-3)}{-x^2+4x-3}$;

b) $\frac{(2x+3)(3x-5)}{25-9x^2}$.

5. Rút gọn các phân thức sau :

a) $\frac{y(2x-x^2)(y+2)}{x(2y+y^2)(x-2)}$;

b) $\frac{(xy^3-yx^3)(x-y)}{(x^2+xy)(x+y)}$.

6. Rút gọn các phân thức sau :

a) $\frac{(x+a)^2-4x^2}{a^2+9x^2+6ax}$;

b) $\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$.

7*. Rút gọn các phân thức sau :

a) $\frac{x^3-5x^2+6x}{-4x^2+10x-4}$;

b) $\frac{x^2-3xy+2y^2}{x^3+2x^2y-xy^2-2y^3}$.

Chủ đề 3

QUY ĐỒNG MẪU THỨC HAI PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Khi quy đồng mẫu thức nhiều phân thức, muốn tìm mẫu thức chung ta có thể làm như sau :

- 1) Phân tích mẫu thức của các phân thức đã cho thành nhân tử ;
- 2) Mẫu thức chung cần tìm là một tích mà các nhân tử được chọn như sau :
 - Nhân tử bằng số của mẫu thức chung là tích các nhân tử bằng số ở các mẫu thức của các phân thức đã cho. (Nếu các nhân tử bằng số ở các mẫu thức là những số nguyên dương thì nhân tử bằng số của mẫu thức chung là BCNN của chúng) ;
 - Đối với mỗi lũy thừa của cùng một biểu thức có mặt trong các mẫu thức, ta chọn lũy thừa với số mũ cao nhất.
- 3) Muốn quy đồng mẫu thức nhiều phân thức ta có thể làm như sau :
 - Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung ;
 - Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức ;
 - Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Tìm mẫu thức chung (MTC) của các mẫu thức rồi tìm nhân tử phụ của từng mẫu thức. Từ đó quy đồng mẫu thức của các phân thức.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

a) $\frac{5}{x^5y^3}, \frac{7}{12x^3y^4};$

b) $\frac{4}{15x^3y^5}, \frac{11}{12x^4y^2}.$

Lời giải

a) • $MTC = 12x^5y^4.$

Nhân tử phụ của mẫu thức nhất là : $12y.$

Nhân tử phụ của mẫu thức hai là : $x^2.$

- Quy đồng mẫu thức :

$$\frac{5}{x^5 y^3} = \frac{5 \cdot 12y}{x^5 y^3 \cdot 12y} = \frac{60y}{12x^5 y^4};$$

$$\frac{7}{12x^3 y^4} = \frac{7 \cdot x^2}{12x^3 y^4 \cdot x^2} = \frac{7x^2}{12x^5 y^4}.$$

b) Giải tương tự như câu a.

- $MTC = 60x^4 y^5$.

Nhân tử phụ của mẫu thứ nhất là : $4x$.

Nhân tử phụ của mẫu thứ hai là : $5y^3$.

- Quy đồng mẫu thức :

$$\frac{4}{15x^3 y^5} = \frac{4 \cdot 4x}{15x^3 y^5 \cdot 4x} = \frac{16x}{60x^4 y^5};$$

$$\frac{11}{12x^4 y^2} = \frac{11 \cdot 5y^3}{12x^4 y^2 \cdot 5y^3} = \frac{55y^3}{60x^4 y^5}.$$

Ví dụ 2. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

a) $\frac{5}{2x+6}, \frac{3}{x^2-9};$

b) $\frac{2x}{x^2-8x+16}, \frac{x}{3x^2-12x}.$

Lời giải

- a) • Tìm MTC

Phân tích các mẫu thức thành nhân tử :

$$2x + 6 = 2(x + 3);$$

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

$$MTC = 2(x - 3)(x + 3).$$

Nhân tử phụ của mẫu thứ nhất là : $(x - 3)$.

Nhân tử phụ của mẫu thứ hai là : 2.

- Quy đồng mẫu thức :

$$\frac{5}{2x+6} = \frac{5(x-3)}{2(x-3)(x+3)} = \frac{5x-15}{2(x^2-9)};$$

$$\frac{3}{x^2-9} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot (x-3)(x+3)} = \frac{6}{2(x^2-9)}.$$

b) Giải tương tự như câu a.

- Tìm MTC

Ta có : $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2;$

$$3x^2 - 12x = 3x(x - 4).$$

Vậy MTC là $3x(x-4)^2$.

Nhân tử phụ của mẫu thứ nhất là : $3x$.

Nhân tử phụ của mẫu thứ hai là : $x-4$.

• Quy đồng mẫu thức :

$$\frac{2x}{x^2-8x+16} = \frac{2x \cdot 3x}{3x(x-4)^2} = \frac{6x^2}{3x(x-4)^2};$$

$$\frac{x}{3x^2-12x} = \frac{x \cdot (x-4)}{3x(x-4) \cdot (x-4)} = \frac{x(x-4)}{3x(x-4)^2}.$$

Ví dụ 3. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

$$\text{a) } \frac{4x^2-3x+5}{x^3-1}, \frac{1-2x}{x^2+x+1}, -2; \quad \text{b) } \frac{10}{x+2}, \frac{5}{2x-4}, \frac{1}{6-3x}.$$

Lời giải

Chú ý : Có thể đổi dấu ở một phân thức để tìm mẫu thức chung thuận tiện hơn

a) • Tìm MTC.

Phân tích các mẫu thức thành nhân tử :

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

$$\text{MTC} = x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Nhân tử phụ của mẫu thứ nhất là : 1.

Nhân tử phụ của mẫu thứ hai là : $(x-1)$.

Vì mẫu của phân thức thứ ba là 1 nên nhân tử phụ của nó là : $(x-1)(x^2+x+1)$.

• Quy đồng mẫu thức :

$$\frac{4x^2-3x+5}{x^3-1} = \frac{(4x^2-3x+5) \cdot 1}{(x^3-1) \cdot 1} = \frac{4x^2-3x+5}{x^3-1};$$

$$\frac{1-2x}{x^2+x+1} = \frac{(1-2x)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{3x-2x^2-1}{x^3-1};$$

$$-2 = \frac{-2(x^3-1)}{(x^3-1)}.$$

b) Có thể đổi dấu ở phân thức thứ ba để được $\frac{1}{6-3x} = \frac{1}{-(3x-6)} = \frac{-1}{3(x-2)}$.

• Tìm MTC.

Phân tích các mẫu thức : $x+2$, $2x-4=2(x-2)$, $3x-6=3(x-2)$.

MTC = $6(x-2)(x+2)$.

• Quy đồng mẫu thức :

$$\frac{10}{x+2} = \frac{10 \cdot 6(x-2)}{(x+2) \cdot 6(x-2)} = \frac{60(x-2)}{6(x+2)(x-2)} = \frac{60(x-2)}{6(x^2-4)};$$

$$\frac{5}{2x-4} = \frac{5 \cdot 3(x+2)}{2(x-2) \cdot 3(x+2)} = \frac{15(x+2)}{6(x^2-4)};$$

$$\frac{1}{6-3x} = \frac{-1 \cdot 2(x+2)}{3(x-2) \cdot 2(x+2)} = \frac{-2(x+2)}{6(x^2-4)}.$$

Ví dụ 4. Quy đồng mẫu thức các phân thức :

a) $\frac{3x}{2x+4}$ và $\frac{x+3}{x^2-4}$;

b) $\frac{x+5}{x^2+4x+4}$ và $\frac{x}{3x+6}$.

Lời giải

Thực hiện tương tự như giải các ví dụ trên.

a) • Tìm MTC.

Ta có : $2x+4=2(x+2)$; $x^2-4=(x-2)(x+2)$, nên MTC là : $2(x-2)(x+2)$.

• Quy đồng mẫu thức :

$$\frac{3x}{2x+4} = \frac{3x \cdot (x-2)}{2(x-2)(x+2)} = \frac{3x(x-2)}{2(x^2-4)};$$

$$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{(x+3) \cdot 2}{2 \cdot (x-2)(x+2)} = \frac{2(x+3)}{2(x^2-4)}.$$

b) • Tìm MTC

Ta có : $x^2+4x+4=(x+2)^2$; $3x+6=3(x+2)$, nên MTC là : $3(x+2)^2$.

• Quy đồng mẫu thức :

$$\frac{x+5}{x^2+4x+4} = \frac{(x+5) \cdot 3}{3 \cdot (x+2)^2} = \frac{3(x+5)}{3(x+2)^2};$$

$$\frac{x}{3x+6} = \frac{x}{3(x+2)} = \frac{x(x+2)}{3(x+2)(x+2)} = \frac{x(x+2)}{3(x+2)^2}.$$

Ví dụ 5. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

$$a) x^2 + 1 \text{ và } \frac{x^4}{x^2 - 1}; \quad b) \frac{x^3}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3} \text{ và } \frac{x}{y^2 - xy}.$$

Lời giải

a) Coi $x^2 + 1 = \frac{x^2 + 1}{1}$ ta có mẫu thức chung cần tìm là $x^2 - 1$.

$$x^2 + 1 = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}.$$

b) (*Hướng dẫn* : Khi phân tích các mẫu thức thành nhân tử nếu chúng có nhân tử trái dấu thì có thể đổi dấu ở một phân thức để các nhân tử trái dấu trở thành nhân tử chung.)

• Tìm MTC.

Phân tích các mẫu thức thành nhân tử :

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3, \quad y^2 - xy = y(y - x) = -y(x - y).$$

Do đó, ta có thể viết $\frac{x}{y^2 - xy} = \frac{-x}{xy - y^2} = \frac{-x}{y(x - y)}.$

$$\text{MTC} = y(x - y)^3.$$

• Quy đồng mẫu thức :

$$\frac{x^3}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3} = \frac{x^3 \cdot y}{(x - y)^3 \cdot y} = \frac{x^3 y}{y(x - y)^3};$$

$$\frac{x}{y^2 - xy} = \frac{-x}{y(x - y)} = \frac{-x(x - y)^2}{y(x - y)(x - y)^2} = \frac{-x(x - y)^2}{y(x - y)^3}.$$

Ví dụ 6. Cho hai phân thức $\frac{1}{x^2 + 3x - 10}; \frac{x}{x^2 + 7x + 10}.$

Không dùng cách phân tích các mẫu thức thành nhân tử hãy chứng tỏ rằng có thể quy đồng mẫu thức hai phân thức này, với mẫu thức chung là $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$.

Lời giải

Để chứng tỏ rằng có thể chọn $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ làm mẫu thức chung ta phải chứng tỏ rằng có thể chia đa thức này cho mẫu thức của mỗi phân thức đã cho để tìm được nhân tử phụ.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 5x^2 - 4x - 20 & x^2 + 3x - 10 \\ -x^3 + 3x^2 - 10x & \\ \hline 2x^2 + 6x - 20 & \\ -2x^2 + 6x - 20 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^3 + 5x^2 - 4x - 20 & x^2 + 7x + 10 \\ -x^3 + 7x^2 + 10x & \\ \hline -2x^2 - 14x - 20 & \\ -2x^2 - 14x - 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Nhân tử phụ của mẫu thứ nhất là : $x + 2$.

Nhân tử phụ của mẫu thứ hai là : $x - 2$.

$$\text{Vậy : } \frac{1}{x^2 + 3x - 10} = \frac{1 \cdot (x + 2)}{(x^2 + 3x - 10) \cdot (x + 2)} = \frac{x + 2}{x^3 + 5x^2 - 4x - 20} ;$$
$$\frac{x}{x^2 + 7x + 10} = \frac{x \cdot (x - 2)}{(x^2 + 7x + 10) \cdot (x - 2)} = \frac{x(x - 2)}{x^3 + 5x^2 - 4x - 20} .$$

III. BÀI TẬP

1. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

a) $\frac{x+2}{x-1}$ và $\frac{x+3}{x+1}$;

b) $\frac{2}{x-1}$ và $\frac{x+2}{x^2-1}$.

2. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

a) $\frac{3}{x-2}$ và $\frac{5}{2x-x^2}$;

b) $\frac{x+1}{x-1}$ và $\frac{2x+5}{x^3-1}$.

3. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

a) $a - b$ và $\frac{2b}{a+b}$;

b) $\frac{a-b}{a+b}$ và $\frac{a+b}{a-b}$.

4. Quy đồng mẫu thức các phân thức $\frac{1}{6xy^2}$ và $\frac{3}{10x^3y}$.

5. a) Xác định a, b, c để $\frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$.
- b) *Áp dụng*: Viết phân thức $\frac{10x-4}{x^3-4x}$ dưới dạng tổng của ba phân thức có tử là hằng số, mẫu thức theo thứ tự bằng x, x - 2 và x + 2.

Chủ đề 4

CỘNG VÀ TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu thức ta cộng các tử thức với nhau, giữ nguyên mẫu thức.
- Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau ta quy đồng mẫu thức chung rồi cộng các phân thức cùng mẫu thức vừa tìm được.
- Phân thức đối của phân thức* $\frac{A}{B}$ là phân thức $\frac{-A}{B}$ và kí hiệu là $-\frac{A}{B}$.

Như vậy $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$ và $-\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}$.

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right) = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D}.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Quy đồng mẫu số các phân thức (nếu chúng chưa cùng MTC) rồi thực hiện phép tính.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\frac{5xy-4y}{2x^2y^3} + \frac{3xy+4y}{2x^2y^3};$

b) $\frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{x-5} + \frac{x+2}{x-5}.$

Lời giải

a) Ta có $\frac{5xy-4y}{2x^2y^3} + \frac{3xy+4y}{2x^2y^3} = \frac{5xy-4y+3xy+4y}{2x^2y^3} = \frac{8xy}{2x^2y^3} = \frac{4}{xy^2}$;

b) Ta có $\frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{x-5} + \frac{x+2}{x-5} = \frac{x+1+x-18+x+2}{x-5} = \frac{3x-15}{x-5} = 3$.

Ví dụ 2. Áp dụng quy tắc đổi dấu để các phân thức có cùng mẫu thức rồi

làm tính cộng phân thức : $\frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-2x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-2x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3} &= \frac{4-x^2}{x-3} + \frac{-(2x-2x^2)}{-(3-x)} + \frac{5-4x}{x-3} \\ &= \frac{4-x^2-(2x-2x^2)+5-4x}{x-3} = \frac{x^2-6x+9}{x-3} = \frac{(x-3)^2}{x-3} = x-3.\end{aligned}$$

Chú ý: Để quy đồng mẫu thức hoặc rút gọn phân thức được thuận lợi ta nên nhận xét các mẫu thức để xem có cần đổi dấu một mẫu thức nào đó hay không. Việc đổi dấu này nên thực hiện ngay ở bước đầu trong quá trình

tính toán. Chẳng hạn, khi thực hiện phép tính $\frac{y}{2x^2-xy} + \frac{4x}{y^2-2xy}$, ta

nhắm thấy rằng trong $2x^2-xy$ có nhân tử $2x-y$, còn trong y^2-2xy có nhân tử $y-2x$. Do đó nên đổi dấu ở mẫu thức thứ hai để được :

$$\begin{aligned}\frac{y}{2x^2-xy} + \frac{4x}{y^2-2xy} &= \frac{y}{2x^2-xy} + \frac{-4x}{-(y^2-2xy)} = \frac{y}{x(2x-y)} + \frac{-4x}{y(2x-y)} \\ &= \frac{y^2-4x^2}{xy(2x-y)} = \frac{(y-2x)(y+2x)}{xy(2x-y)} = \frac{-(2x-y)(y+2x)}{xy(2x-y)} = \frac{-(y+2x)}{xy}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\frac{y}{2x^2-xy} + \frac{4x}{y^2-2xy}$;

b) $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2-4} + \frac{x-14}{(x^2+4x+4)(x-2)}$.

Lời giải

a) Chú ý áp dụng quy tắc đổi dấu khi tìm MTC.

$$2x^2 - xy = x(2x - y),$$

$$y^2 - 2xy = y(y - 2x) = -y(2x - y).$$

$$\text{MTC} = xy(2x - y).$$

Thực hiện phép tính, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{y}{2x^2 - xy} + \frac{4x}{y^2 - 2xy} &= \frac{y}{x(2x - y)} + \frac{4x}{-y(2x - y)} \\ &= \frac{y}{x(2x - y)} + \frac{-4x}{y(2x - y)} = \frac{y^2 - 4x^2}{xy(2x - y)} = \frac{(y - 2x)(y + 2x)}{xy(2x - y)} \\ &= \frac{-(2x - y)(y + 2x)}{xy(2x - y)} = \frac{-(y + 2x)}{xy}. \end{aligned}$$

b) Tìm MTC : $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, $(x^2 + 4x + 4)(x - 2) = (x - 2)(x + 2)^2$.

$$\text{MTC} = (x - 2)(x + 2)^2.$$

Thực hiện phép tính, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2-4} + \frac{x-14}{(x^2+4x+4)(x-2)} \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{(x^2+4x+4)(x-2)} + \frac{3(x+2)}{(x^2+4x+4)(x-2)} + \frac{x-14}{(x^2+4x+4)(x-2)} \\ &= \frac{(x-2)(x+2) + 3(x+2) + x-14}{(x^2+4x+4)(x-2)} = \frac{x^2+4x-12}{(x^2+4x+4)(x-2)} \\ &= \frac{(x+6)(x-2)}{(x^2+4x+4)(x-2)} = \frac{x+6}{(x^2+4x+4)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Làm tính cộng các phân thức sau :

a) $\frac{5}{2x^2y} + \frac{3}{5xy^2} + \frac{x}{y^3}$;

b) $\frac{x+1}{2x+6} + \frac{2x+3}{x(x+3)}$;

c) $\frac{3x+5}{x^2-5x} + \frac{25-x}{25-5x}$;

d) $x^2 + \frac{x^4+1}{1-x^2} + 1$.

e) $\frac{4x^2-3x+17}{x^3-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{6}{1-x}$.

Lời giải

(Khi đã quen với việc quy đồng mẫu thức ta có thể giảm bớt bước phân tích mẫu thức thành nhân tử và tìm mẫu thức chung).

a) $MTC = 10x^2y^3$.

Ta có:
$$\frac{5}{2x^2y} + \frac{3}{5xy^2} + \frac{x}{y^3} = \frac{5 \cdot 5y^2 + 3 \cdot 2xy + x \cdot 10x^2}{10x^2y^3} = \frac{25y^2 + 6xy + 10x^3}{10x^2y^3}.$$

b) Ta có:
$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2x+6} + \frac{2x+3}{x(x+3)} &= \frac{x+1}{2(x+3)} + \frac{2x+3}{x(x+3)} \\ &= \frac{x(x+1) + 2(2x+3)}{2x(x+3)} = \frac{x^2 + 5x + 6}{2x(x+3)} = \frac{x^2 + 2x + 3x + 6}{2x(x+3)} \\ &= \frac{x(x+2) + 3(x+2)}{2x(x+3)} = \frac{(x+2)(x+3)}{2x(x+3)} = \frac{x+2}{2x}.\end{aligned}$$

c) Ta có:
$$\begin{aligned}\frac{3x+5}{x^2-5x} + \frac{25-x}{25-5x} &= \frac{3x+5}{x(x-5)} - \frac{25-x}{5(x-5)} \\ &= \frac{5 \cdot (3x+5) - x \cdot (25-x)}{5x(x-5)} = \frac{x^2 - 10x + 25}{5x(x-5)} \\ &= \frac{(x-5)^2}{5x(x-5)} = \frac{x-5}{5x}.\end{aligned}$$

d) Ta có:
$$\begin{aligned}x^2 + \frac{x^4+1}{1-x^2} + 1 &= 1 + x^2 + \frac{x^4+1}{1-x^2} \\ &= \frac{(1+x^2)(1-x^2) + x^4+1}{1-x^2} = \frac{1-x^4+x^4+1}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}.\end{aligned}$$

e) Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{4x^2-3x+17}{x^3-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{6}{1-x} &= \frac{4x^2-3x+17}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} - \frac{6}{x-1} \\ &= \frac{4x^2-3x+17 + (x-1)(2x-1) - 6(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{12-12x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-12(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-12}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Ví dụ 5. Làm phép tính trừ các phân thức sau :

$$a) \frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y};$$

$$b) \frac{2x-7}{10x-4} - \frac{3x+5}{4-10x}.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y} = \frac{4x-1-7x+1}{3x^2y} = \frac{-3x}{3x^2y} = \frac{-1}{xy}.$$

$$b) \frac{2x-7}{10x-4} - \frac{3x+5}{4-10x} = \frac{2x-7}{10x-4} + \frac{3x+5}{10x-4} \\ = \frac{2x-7+3x+5}{10x-4} = \frac{5x-2}{2(5x-2)} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 6. Thực hiện các phép tính sau :

$$a) \frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x};$$

$$b) x^2+1 - \frac{x^4-3x^2+2}{x^2-1}.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có : } \frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x} = \frac{3}{2(x+3)} - \frac{x-6}{2x(x+3)} \\ = \frac{3x-x+6}{2x(x+3)} = \frac{2(x+3)}{2x(x+3)} = \frac{1}{x}.$$

$$b) \text{ Ta có : } x^2+1 - \frac{x^4-3x^2+2}{x^2-1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1) - x^4+3x^2-2}{x^2-1} \\ = \frac{x^4-1-x^4+3x^2-2}{x^2-1} = \frac{3x^2-3}{x^2-1} = \frac{3(x^2-1)}{x^2-1} = 3.$$

Chú ý: Nếu biết cách rút gọn phân thức $\frac{x^4-3x^2+2}{x^2-1}$ thì bài toán sẽ rất đơn giản. Em hãy thực hiện theo cách này!

$$\text{Ta có } \frac{x^4-3x^2+2}{x^2-1} = \frac{x^4-x^2-2x^2+2}{x^2-1} = \frac{x^2(x^2-1)-2(x^2-1)}{x^2-1} \\ = \frac{(x^2-2)(x^2-1)}{x^2-1} = x^2-2.$$

Vì vậy $x^2 + 1 - \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} = x^2 + 1 - x^2 + 2 = 3$. Ta thu được kết quả trên.

III. BÀI TẬP

1. Chứng tỏ rằng mỗi hiệu sau đây bằng một phân thức, với tử số bằng 1 :

a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$;

b) $\frac{1}{xy - x^2} - \frac{1}{y^2 - xy}$.

2. Dùng quy tắc đổi dấu hãy thực hiện phép tính :

$$\frac{1}{x - 5x^2} - \frac{25x - 15}{25x^2 - 1}.$$

3. Thực hiện các phép tính :

a) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{2x(1-x)}{9-x^2}$;

b) $\frac{3x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x+3}{1-x^2}$.

4. Thực hiện các phép tính :

a) $\frac{x}{x+1} - \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 + 1}$;

b) $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2}$.

5*. a) Rút gọn biểu thức : $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$.

b) Xác định a, b để : $\frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$.

6*. a) Xác định a, b để : $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x}$.

b) Áp dụng, rút gọn biểu thức :

$$M = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30}.$$

7*. Xác định a, b, c để ta có : $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.

Chủ đề 5

NHÂN VÀ CHIA CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Muốn nhân hai phân thức đại số ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau :

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$$

Giả sử phân thức $\frac{A}{B} \neq 0$. Phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{A}{B}$ là phân thức $\frac{B}{A}$.

- Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0 ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}, \text{ với } \frac{C}{D} \neq 0.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Áp dụng quy tắc nhân, chia phân thức để thực hiện phép tính.

Lưu ý: Khi thực hiện phép tính nhân, chia các phân thức ta có thể phân tích thành tích các nhân tử rồi đơn giản các nhân tử đồng dạng.

III. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau :

$$\text{a) } \frac{4y^2}{11x^4} \cdot \left(-\frac{3x^2}{8y} \right);$$

$$\text{b) } \frac{x^3 - 8}{5x + 20} \cdot \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x + 4}.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{4y^2}{11x^4} \cdot \left(-\frac{3x^2}{8y} \right) = -\frac{4 \cdot 3x^2y^2}{11 \cdot 8x^4y} = -\frac{3y}{22x^2}.$$

$$b) \text{ Ta có } \frac{x^3 - 8}{5x + 20} \cdot \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x + 4} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{5(x+4)} \cdot \frac{x(x+4)}{x^2 + 2x + 4} = \frac{x(x-2)}{5}.$$

Chú ý: Khi làm tính nhân phân thức, nếu tử và mẫu có nhân tử trái dấu thì cần áp dụng quy tắc đổi dấu để rút gọn. Chẳng hạn,

$$\frac{5x+10}{4x-8} \cdot \frac{4-2x}{x+2} = \frac{5(x+2)}{4(x-2)} \cdot \frac{-2(x-2)}{x+2} = -\frac{5}{2}.$$

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính sau (chú ý về dấu) :

$$a) \frac{5x+10}{8-4x} \cdot \frac{2x-4}{x+2};$$

$$b) \frac{x^2-36}{2x+10} \cdot \frac{3}{6-x}.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \frac{5x+10}{8-4x} \cdot \frac{2x-4}{x+2} = \frac{5(x+2)}{-4(x-2)} \cdot \frac{2(x-2)}{x+2} = -\frac{5}{2}.$$

$$b) \text{ Ta có } \frac{x^2-36}{2x+10} \cdot \frac{3}{6-x} = \frac{x^2-36}{2x+10} \cdot \frac{-3}{x-6} = \frac{(x-6)(x+6) \cdot (-3)}{(2x+10)(x-6)} = -\frac{3(x+6)}{2x+10}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau theo hai cách (sử dụng và không sử dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng) :

$$\frac{x-1}{x} \cdot \left(x^2 + x + 1 + \frac{x^3}{x-1} \right).$$

Lời giải

• **Cách 1.** Áp dụng tính phân phối :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x} \cdot \left(x^2 + x + 1 + \frac{x^3}{x-1} \right) &= \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x} + \frac{(x-1) \cdot x^3}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^3 - 1}{x} + \frac{x^3}{x} = \frac{x^3 - 1 + x^3}{x} = \frac{2x^3 - 1}{x}. \end{aligned}$$

• **Cách 2.** Không áp dụng tính phân phối :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x} \cdot \left(x^2 + x + 1 + \frac{x^3}{x-1} \right) &= \frac{x-1}{x} \cdot \left[\frac{(x^2 + x + 1)(x-1)}{x-1} + \frac{x^3}{x-1} \right] \\ &= \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x^3 - 1 + x^3}{x-1} = \frac{(x-1)(2x^3 - 1)}{x(x-1)} = \frac{2x^3 - 1}{x}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Làm phép tính chia phân thức :

$$\text{a) } \left(-\frac{20x}{3y^2}\right) : \left(-\frac{4x^3}{5y}\right); \quad \text{b) } \frac{4x+12}{(x+4)^2} : \frac{3(x+3)}{x+4}.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \left(-\frac{20x}{3y^2}\right) : \left(-\frac{4x^3}{5y}\right) = -\frac{20x}{3y^2} \cdot \left(-\frac{5y}{4x^3}\right) = \frac{20x \cdot 5y}{3y^2 \cdot 4x^3} = \frac{25}{3x^2y}.$$

$$\text{b) Ta có } \frac{4x+12}{(x+4)^2} : \frac{3(x+3)}{x+4} = \frac{4(x+3)}{(x+4)^2} \cdot \frac{x+4}{3(x+3)} = \frac{4(x+3) \cdot (x+4)}{(x+4)^2 \cdot 3(x+3)} = \frac{4}{3(x+4)}.$$

Chú ý: Khi chia đa thức B cho một đa thức A hoặc khi chia một phân thức cho đa thức A ta coi đa thức A như phân thức $\frac{A}{1}$. Chẳng hạn,

$$\begin{aligned} \frac{5x-10}{x^2+7} : (2x-4) &= \frac{5x-10}{x^2+7} : \frac{2x-4}{1} = \frac{5x-10}{x^2+7} \cdot \frac{1}{2x-4} \\ &= \frac{5(x-2)}{x^2+7} \cdot \frac{1}{2(x-2)} = \frac{5(x-2) \cdot 1}{(x^2+7) \cdot 2(x-2)} = \frac{5}{2(x^2+7)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Thực hiện các phép tính sau :

$$\text{a) } (x^2-25) : \frac{2x+10}{3x-7}; \quad \text{b) } \frac{x^2+x}{5x^2-10x+5} : \frac{3x+3}{5x-5}.$$

Lời giải

a) Coi đa thức x^2-25 như phân thức $\frac{x^2-25}{1}$, ta có

$$\begin{aligned} (x^2-25) : \frac{2x+10}{3x-7} &= \frac{x^2-25}{1} : \frac{2x+10}{3x-7} = \frac{(x-5)(x+5)}{1} \cdot \frac{3x-7}{2(x+5)} \\ &= \frac{(x-5)(x+5) \cdot (3x-7)}{1 \cdot 2(x+5)} = \frac{(x-5)(3x-7)}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^2+x}{5x^2-10x+5} : \frac{3x+3}{5x-5} &= \frac{x(x+1)}{5(x^2-2x+1)} : \frac{3(x+1)}{5(x-1)} = \frac{x(x+1)}{5(x-1)^2} \cdot \frac{5(x-1)}{3(x+1)} \\ &= \frac{x(x+1) \cdot 5(x-1)}{5(x-1)^2 \cdot 3(x+1)} = \frac{x}{3(x-1)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 6. Tìm biểu thức Q biết rằng : $\frac{x^2 + 2x}{x - 1} \cdot Q = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x}$.

Lời giải

Ta có $Q = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} : \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$, nên ta thực hiện phép chia $\frac{x^2 - 4}{x^2 - x}$ cho $\frac{x^2 + 2x}{x - 1}$ ta tìm được biểu thức Q. Từ đó

$$Q = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} : \frac{x^2 + 2x}{x - 1} = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} \cdot \frac{x - 1}{x^2 + 2x} = \frac{(x - 2)(x + 2) \cdot (x - 1)}{x(x - 1) \cdot x(x + 2)} = \frac{x - 2}{x^2}.$$

III. BÀI TẬP

1. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\frac{3x^2}{4y^3} \cdot \frac{8y^2}{x^3}$;

b) $\frac{3y^2}{2x} \cdot \left(-\frac{4x^2}{5y} \right)$;

c) $\frac{x^2 - 9}{3x + 2} \cdot \frac{3x^2 + 4x}{x - 3}$;

d) $\frac{4x^2 - 9}{2x + 8} \cdot \frac{4}{3 - 2x}$.

2. Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức :

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - 1 \right) \cdot \frac{x - y}{2y} \text{ với } x = 14, y = -15.$$

3. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\frac{x - 2}{x^3 + 8} \cdot \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 4x^2 + 4x}$;

b) $\frac{x^3 - 2x^2y + xy^2}{2x + y} \cdot \frac{2xy + y^2}{x^3 - xy^2}$;

c) $\frac{x - 2}{x^2 + 3x + 2} \cdot \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6}$;

d) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 6x + 5} \cdot \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 12}$.

4. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\frac{6x - 2}{x + 5} : (3x - 1)$;

b) $(x^2 + 4x + 4) : \frac{2x + 4}{5x + 3}$;

c) $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 9} : \frac{x - 1}{x - 3}$;

d) $\frac{-2(x + y)^2}{x^2 + y^2} : \frac{x^2 - y^2}{-x}$.

5. Thực hiện các phép tính sau :

$$a) \frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3} : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} ;$$

$$b) \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 1} : \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2} ;$$

$$c) (xy + y^2 - y) : \frac{x^2 + xy - x}{x - y} ;$$

$$d) \frac{x^3y + xy^3}{x^4y} : (x^2 + y^2) .$$

6. Tìm biểu thức A, biết rằng :

$$a) \frac{x^2 - 2xy}{x^2y} . A = \frac{x^2y - 4y^3}{3xy^2} ;$$

$$b) \frac{x - y}{x^3 + y^3} . A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} .$$

7*. Thực hiện phép tính : $\frac{x^5 - 1}{x^2 - 4} : \frac{x - 1}{x + 2} .$

Chủ đề 6

BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ.

GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC HỮU TỈ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Biểu thức hữu tỉ là biểu thức biểu thị một dãy các phép toán cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức.

Muốn biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức ta chỉ cần thực hiện các phép tính trong biểu thức.

- Điều kiện để giá trị của một phân thức được xác định là giá trị tương ứng với mẫu thức của nó khác 0.

Vì thế muốn tìm điều kiện để giá trị của một phân thức được xác định ta tìm giá trị của biến để mẫu thức của nó khác 0.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Thực hiện các phép tính trên phân thức, biến đổi biểu thức đã cho về phân thức.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Biến đổi mỗi biểu thức sau thành một phân thức đại số :

a) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$;

b) $\frac{1 - \frac{2}{x+1}}{1 - \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}}$.

Lời giải

a) Gọi biểu thức đã cho là A, ta có

$$A = \left(1 + \frac{1}{x}\right) : \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{x} : \frac{x-1}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{(x+1).x}{x.(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}.$$

b) Gọi biểu thức đã cho là B, ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) : \left(1 - \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}\right) = \frac{x+1-2}{x+1} : \frac{x^2 - 1 - x^2 + 2}{x^2 - 1} \\ &= \frac{x-1}{x+1} : \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{1} = (x-1)^2. \end{aligned}$$

Chú ý: Muốn tìm điều kiện để giá trị của một phân thức được xác định ta chỉ việc cho mẫu thức khác 0 rồi suy ra giá trị cần tìm của biến.

Ví dụ 2. Với giá trị nào của x thì giá trị của phân thức được xác định :

a) $\frac{5x}{2x+4}$;

b) $\frac{x-1}{x^2-1}$.

Lời giải

a) Giá trị của phân thức $\frac{5x}{2x+4}$ được xác định khi $2x+4 \neq 0$, tức là khi $x \neq -2$.

b) Giá trị của phân thức $\frac{x-1}{x^2-1}$ được xác định khi $x^2-1 \neq 0$ hay $x \neq \pm 1$.

Ví dụ 3. Cho phân thức $\frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$.

a) Với điều kiện nào của x thì giá trị của phân thức được xác định ?

b) Rút gọn phân thức.

c) Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1.

d) Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 0.

Lời giải

a) Điều kiện $x + 2 \neq 0$, hay $x \neq -2$.

b) Với điều kiện $x \neq -2$, ta có $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = x + 2$.

c) Nếu giá trị của phân thức đã cho bằng 1 thì giá trị của phân thức rút gọn cũng bằng 1; tức là $x + 2 = 1$, do đó $x = -1$. Giá trị này thoả mãn điều kiện của x .

Vậy giá trị của phân thức bằng 1 khi $x = -1$.

d) Tương tự, nếu giá trị của phân thức đã cho bằng 0 thì $x + 2 = 0$, hay $x = -2$. Nhưng theo điều kiện đã nêu trong câu a) thì $x \neq -2$.

Vậy không có giá trị nào của x để phân thức có giá trị bằng 0.

Ví dụ 4. Thực hiện phép tính: $(x^2 - 1) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1 \right)$.

Lời giải

Áp dụng tính chất phân phối, ta có:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1 \right) &= \frac{x^2 - 1}{x-1} - \frac{x^2 - 1}{x+1} - x^2 + 1 \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} - x^2 + 1 = x+1 - x+1 - x^2 + 1 = 3 - x^2. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Làm các phép tính sau:

a) $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)$;

b) $\left(\frac{1}{x^2 + 4x + 4} - \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \right) : \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right)$.

Lời giải

a) Ta có $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \right) : \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{xy^2} \right)$

$$= \frac{x^3 + y^3}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2) \cdot xy^2}{xy^2 \cdot (x^2 - xy + y^2)} = x + y.$$

Ta có :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{x^2 + 4x + 4} - \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \right) : \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} \right) : \left(\frac{x-2+x+2}{(x+2)(x-2)} \right) \\ &= \frac{(x-2)^2 - (x+2)^2}{(x+2)^2(x-2)^2} : \frac{2x}{(x+2)(x-2)} = \frac{-8x}{(x+2)^2(x-2)^2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{2x} = \frac{-4}{x^2 - 4}. \end{aligned}$$

III. BÀI TẬP

1. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\left(\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} \right) : \frac{4x}{10x+5} ;$

b) $\left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{2-x}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) ;$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{x^3-x}{x^2+1} \cdot \left(\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{1-x^2} \right).$

2. Thực hiện phép tính : $\left(\frac{x-2}{x+2} + \frac{6x-4}{x^2-4} \right) : \frac{x+1}{x-2}.$

3. Thực hiện phép tính : $\left(\frac{x}{x+1} - \frac{x^3-2x^2}{x^3+1} \right) : \frac{x}{x+1} + \frac{2x+1}{x^3+1}.$

4. Tìm các giá trị của x để giá trị của mỗi phân thức được xác định :

a) $\frac{3x+2}{2x^2-6x} ;$

b) $\frac{5}{x^2-3}.$

5. Cho phân thức $\frac{3x^2+6x+12}{x^3-8}.$

a) Với điều kiện nào của x thì giá trị của phân thức được xác định ?

b) Rút gọn phân thức.

6. Cho biểu thức : $\left(\frac{5x+2}{x^2-10x} + \frac{5x-2}{x^2+10x} \right) \cdot \frac{x^2-100}{x^2+4}$.
- Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định.
 - Rút gọn biểu thức.
 - Tính giá trị của biểu thức tại $x = 20040$.
7. Cho biểu thức $\left(\frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2} \right) \cdot \frac{4x^2-4}{5}$.
- Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định.
 - Chứng minh rằng khi giá trị của biểu thức xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến x .
8. Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức $\frac{x^3-10x^2+25x}{x^2-5x}$ bằng 0.
9. Cho phân thức $\frac{2x^2-2}{x^3-x^2-4x+4}$.
- Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.
 - Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức đã cho bằng 0.
10. Cho biểu thức $B = \frac{3x^2-12}{(x-3)(x^2+4x+4)}$.
- Tìm điều kiện của x để giá trị của B được xác định.
 - Với giá trị nào của x thì giá trị của B bằng 0.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Chủ đề 1

1. a) Ta phải chứng tỏ $(x^3 - 1) \cdot 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$, điều này hiển nhiên có do hằng đẳng thức.

Ta có thể giải bằng cách phân tích thành các nhân tử rồi đơn giản biểu thức như sau :

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1.$$

- b) Ta phải chứng tỏ $(x^2 - 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x^5 - 1) \cdot (x + 1)$.

Thật vậy :

$$\begin{aligned} & (x^2 - 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ &= x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \\ &= x^6 + x^5 - x - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } (x^5 - 1) \cdot (x + 1) = x^6 - x + x^5 - 1 = x^6 + x^5 - x - 1.$$

Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Ta có thể giải bằng cách phân tích thành các nhân tử rồi đơn giản biểu thức như sau :

$$\frac{x^5 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

2. a) Ta có : $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.
b) Ta phải chứng tỏ $(x^4 - x^2) \cdot (x^2 + x + 1) = (x^3 + x^2) \cdot (x^3 - 1)$. Thật vậy :

$$(x^4 - x^2) \cdot (x^2 + x + 1) = x^6 + x^5 + x^4 - x^4 - x^3 - x^2 = x^6 + x^5 - x^3 - x^2.$$

$$\text{Mặt khác } (x^3 + x^2) \cdot (x^3 - 1) = x^6 - x^3 + x^5 - x^2 = x^6 + x^5 - x^3 - x^2.$$

$$\text{Vậy } (x^4 - x^2) \cdot (x^2 + x + 1) = (x^3 + x^2) \cdot (x^3 - 1).$$

Ta có thể giải bằng cách phân tích thành tích các nhân tử rồi đơn giản biểu thức như sau :

$$\frac{x^2(x^2 - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x^2(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x^2(x + 1)}{x^2 + x + 1} = \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x + 1}.$$

3. a) Ta có $(x^3 - 4x^2 + 8) \cdot (x + 2)$

$$= x^4 - 4x^3 + 8x + 2x^3 - 8x^2 + 16$$

$$= x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 8x + 16.$$

Mặt khác $(x^2 - 4) \cdot (x^2 - 2x - 4)$

$$= x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 4x^2 + 8x + 16$$

$$= x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 8x + 16.$$

$$\text{Vậy } \frac{x^3 - 4x^2 + 8}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 2x - 4}{x + 2}.$$

Ta có thể giải bằng cách phân tích thành tích các nhân tử rồi đơn giản biểu thức như sau :

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 4x^2 + 8}{x^2 - 4} &= \frac{x^3 - 8 - 4x^2 + 16}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{(x^2 + 2x + 4)(x - 2) - 4(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4 - 4x - 8)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x^2 - 2x - 4}{x + 2}. \end{aligned}$$

b) Ta có : $(x^2 - xy - x + y) \cdot (x + y)$

$$= x^3 - x^2y - x^2 + xy + x^2y - xy^2 - xy + y^2$$

$$= x^3 - xy^2 - x^2 + y^2.$$

Mặt khác $(x^2 + xy - x - y) \cdot (x - y)$

$$= x^3 + x^2y - x^2 - xy - x^2y - xy^2 + xy + y^2$$

$$= x^3 - xy^2 - x^2 + y^2.$$

$$\text{Vậy } \frac{x^2 - xy - x + y}{x^2 + xy - x - y} = \frac{x - y}{x + y}.$$

Ta có thể giải bằng cách phân tích thành tích các nhân tử rồi đơn giản biểu thức như sau :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - xy - x + y}{x^2 + xy - x - y} &= \frac{(x^2 - xy) - (x - y)}{(x^2 + xy) - (x + y)} \\ &= \frac{x(x - y) - (x - y)}{x(x + y) - (x + y)} = \frac{(x - y)(x - 1)}{(x + y)(x - 1)} = \frac{x - y}{x + y}. \end{aligned}$$

4. a) Ta có $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$.

Với n là số nguyên thì $(n - 1)$, n , $(n + 1)$ là ba số nguyên liên tiếp, trong ba số đó có một số chia hết cho 3.

Vậy $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1) \div 3$.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } a^3b - ab^3 &= a^3b - ab - ab^3 + ab = ba(a^2 - 1) - ab(b^2 - 1) \\ &= ba(a - 1)(a + 1) - ab(b - 1)(b + 1). \end{aligned}$$

Theo câu a, ta có $a(a - 1)(a + 1)$, $b(b - 1)(b + 1)$ chia hết cho 3 ; hơn nữa trong hai số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 2. Do đó $a(a - 1)(a + 1)$, $b(b - 1)(b + 1)$ chia hết cho 6.

Vậy $a^3b - ab^3 = ba(a - 1)(a + 1) - ab(b - 1)(b + 1)$ chia hết cho 6.

5. Cách 1. Ta có $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$

$$= n(n^2 - 1)(n^2 - 4 + 5) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 5n(n^2 - 1)$$

$$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1).$$

Ta thấy số hạng thứ nhất là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 5 ; số hạng thứ hai là $5n(n^2 - 1)$, dễ thấy chia hết cho 5.

Vậy $n^5 - n$ chia hết cho 5.

Cách 2. Ta viết $(n^5 - n) - (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) = 5n^3 - 5n$, hay $(n^5 - n) = 5(n^3 - n) + (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$.

Từ đó, ta có $n^5 - n \div 5$.

Chủ đề 2

1. a) Cách 1. Để chứng minh $\frac{3}{2x-3} = \frac{3x+6}{2x^2+x-6}$, ta chứng minh rằng :

$$3(2x^2 + x - 6) = (2x - 3)(3x + 6).$$

Thật vậy $3(2x^2 + x - 6) = 6x^2 + 3x - 18$.

Mặt khác $(2x - 3)(3x + 6) = 6x^2 + 12x - 9x - 18 = 6x^2 + 3x - 18$.

Vậy $3(2x^2 + x - 6) = (2x - 3)(3x + 6)$, hay $\frac{3}{2x-3} = \frac{3x+6}{2x^2+x-6}$.

Cách 2. Ta có $\frac{3x+6}{2x^2+x-6} = \frac{3(x+2)}{(2x-3)(x+2)} = \frac{3}{2x-3}$.

Do đó $\frac{3}{2x-3} = \frac{3x+6}{2x^2+x-6}$.

- b) Để chứng minh $\frac{2}{x+4} = \frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x}$, ta chứng minh rằng :

$$2(x^3 + 7x^2 + 12x) = (x + 4)(2x^2 + 6x).$$

Ta có $2(x^3 + 7x^2 + 12x) = 2x^3 + 14x^2 + 24x$.

Mặt khác $(x + 4)(2x^2 + 6x) = 2x^3 + 6x^2 + 8x^2 + 24x = 2x^3 + 14x^2 + 24x$.

Vậy $2(x^3 + 7x^2 + 12x) = (x + 4)(2x^2 + 6x)$, hay $\frac{2}{x+4} = \frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x}$.

Chú ý: Ta cũng có thể làm theo cách 2 câu a.

2. a) Ta có $(x^2 - 5x + 4)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 - 5x^3 - 5x^2 - 5x + 4x^2 + 4x + 4$
 $= x^4 - 4x^3 - x + 4$.

Mặt khác : $(x^3 - 1)(x - 4) = x^4 - 4x^3 - x + 4.$

Vậy $(x^2 - 5x + 4)(x^2 + x + 1) = (x^3 - 1)(x - 4)$, hay $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 1} = \frac{x - 4}{x^2 + x + 1}.$

b) Ta có : $(x^2 - 3x + 2)(x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2x^2 - 6x + 4$
 $= x^3 - x^2 - 4x + 4.$

Mặt khác : $(4 - x^2)(1 - x) = x^3 - x^2 - 4x + 4.$

Vậy $(x^2 - 3x + 2)(x + 2) = (4 - x^2)(1 - x)$, hay $\frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{1 - x}{x + 2}.$

3. a) Ta có $\frac{y(2x - x^2)}{x(2y + y^2)} = \frac{yx(2 - x)}{xy(2 + y)} = \frac{2 - x}{2 + y}.$

b) Ta có : $\frac{xy^3 - yx^3}{x^2 + xy} = \frac{xy(y^2 - x^2)}{x(x + y)} = \frac{xy(y - x)(y + x)}{x(x + y)} = y(y - x).$

c) Ta có : $\frac{(x + a)^2 - x^2}{a^2 + 4x^2 + 4ax} = \frac{(x + a - x)(x + a + x)}{(a + 2x)^2} = \frac{a(a + 2x)}{(a + 2x)^2} = \frac{a}{a + 2x}.$

4. a) Ta có : $\frac{5(x - 3)}{-x^2 + 4x - 3} = \frac{5(x - 3)}{(x - 3)(1 - x)} = \frac{5}{1 - x}.$

b) Ta có : $\frac{(2x + 3)(3x - 5)}{25 - 9x^2} = \frac{(2x + 3)(3x - 5)}{5^2 - (3x)^2}$
 $= -\frac{(2x + 3)(3x - 5)}{(3x - 5)(3x + 5)} = -\frac{2x + 3}{3x + 5}.$

5. a) Ta có : $\frac{y(2x - x^2)(y + 2)}{x(2y + y^2)(x - 2)} = \frac{yx(2 - x)(y + 2)}{xy(2 + y)(x - 2)} = -1.$

b) Ta có : $\frac{(xy^3 - yx^3)(x - y)}{(x^2 + xy)(x + y)} = \frac{xy(y^2 - x^2)(x - y)}{x(x + y)(x + y)} = -\frac{y(x - y)^2}{x + y}.$

6. a) Ta có : $\frac{(x + a)^2 - 4x^2}{a^2 + 9x^2 + 6ax} = \frac{(x + a)^2 - (2x)^2}{a^2 + 9x^2 + 6ax} = \frac{(x + a - 2x)(x + a + 2x)}{(a + 3x)^2}$
 $= \frac{(a + 3x)(a - x)}{(a + 3x)^2} = \frac{a - x}{a + 3x}.$

$$\text{b) Ta có: } \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x-2}{x^2 + x + 1}.$$

$$\begin{aligned} 7^*. \text{ a) Ta có: } \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{-4x^2 + 10x - 4} &= \frac{x(x^2 - 5x + 6)}{-2(2x^2 - 5x + 2)} \\ &= \frac{x(x-2)(x-3)}{-2(2x-1)(x-2)} = -\frac{x(x-3)}{2(2x-1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } \frac{x^2 - 3xy + 2y^2}{x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3} &= \frac{(x-y)(x-2y)}{x^2(x+2y) - y^2(x+2y)} \\ &= \frac{(x-y)(x-2y)}{(x+2y)(x^2 - y^2)} = \frac{(x-y)(x-2y)}{(x+2y)(x-y)(x+y)} = \frac{x-2y}{(x+2y)(x+y)}. \end{aligned}$$

Chủ đề 3

1. a) Ta có MTC = $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Từ đó, ta có :

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1};$$

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}.$$

b) Ta có MTC = $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Từ đó, ta có :

$$\frac{2}{x-1} = \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+2}{x^2-1}; \quad \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{x+2}{x^2-1}.$$

2. a) Ta có MTC = $x(x-2) = x^2 - 2x$. Từ đó, ta có :

$$\frac{3}{x-2} = \frac{3x}{x(x-2)} = \frac{3x}{x^2 - 2x};$$

$$\frac{5}{2x-x^2} = \frac{-5}{x^2 - 2x}.$$

b) Ta có MTC = $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Từ đó, ta có :

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}; \quad \frac{2x+5}{x^3-1} = \frac{2x+5}{x^3-1}.$$

3. a) Ta có $MTC = a + b$. Từ đó, ta có :

$$a - b = \frac{(a - b)(a + b)}{a + b} ; \quad \frac{2b}{a + b} = \frac{2b}{a + b}.$$

- b) Ta có $MTC = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Từ đó, ta có :

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{(a - b)(a - b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{(a + b)(a + b)}{(a - b)(a + b)} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}.$$

4. Ta có $MTC = 30x^3y^2$. Từ đó, ta có :

$$\frac{1}{6xy^2} = \frac{5x^2}{5x^2 \cdot 6xy^2} = \frac{5x^2}{30x^3y^2} ;$$

$$\frac{3}{10x^3y} = \frac{3 \cdot 3y}{3y \cdot 10x^3y} = \frac{9y}{30x^3y^2}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad a) \quad \text{Ta có} \quad \frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} &= \frac{9x^2 - 16x + 4}{x(x^2 - 3x + 2)} = \frac{9x^2 - 16x + 4}{x(x - 1)(x - 2)} \\ &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x - 2} = \frac{a(x - 1)(x - 2) + b \cdot x(x - 2) + c \cdot x(x - 1)}{x(x - 1)(x - 2)} \\ &= \frac{ax^2 - 3ax + 2a + bx^2 - 2bx + cx^2 - cx}{x(x - 1)(x - 2)} \\ &= \frac{x^2(a + b + c) - x(3a + 2b + c) + 2a}{x(x - 1)(x - 2)}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có hệ sau để tìm a, b, c :

$$\begin{cases} a + b + c = 9 \\ 3a + 2b + c = 16 \\ 2a = 4. \end{cases} \quad \text{Từ đó tìm được} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \text{Ta có} \quad \frac{10x - 4}{x^3 - 4x} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 2} + \frac{c}{x + 2} = \frac{a(x - 2)(x + 2) + bx(x + 2) + cx(x - 2)}{x(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{ax^2 - 4a + bx^2 + 2bx + cx^2 - 2cx}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{x^2(a + b + c) + 2x(b - c) - 4a}{x(x - 2)(x + 2)}. \end{aligned}$$

Từ đó, ta có :
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=10 \\ 4a=4. \end{cases}$$
 Từ đó ta tìm được $a=1; b=\frac{9}{2}; c=-\frac{11}{2}$.

Vậy
$$\frac{10x-4}{x^3-4x} = \frac{1}{x} + \frac{\frac{9}{2}}{(x-2)} - \frac{\frac{11}{2}}{(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{9}{2(x-2)} - \frac{11}{2(x+2)}.$$

Chủ đề 4

1. Thực hiện các phép tính :

a) Ta có $MTC = x(x+1)$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

b) $xy - x^2 = x(y-x), y^2 - xy = y(y-x)$. Do đó $MTC = xy(y-x)$.

$$\frac{1}{xy-x^2} - \frac{1}{y^2-xy} = \frac{1}{x(y-x)} - \frac{1}{y(y-x)} = \frac{y-x}{xy(y-x)} = \frac{1}{xy}.$$

2. Ta có : $x - 5x^2 = x(1-5x); 25x^2 - 1 = (5x-1)(5x+1)$.

Do đó, $MTC = x(1-5x)(1+5x)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-5x^2} - \frac{25x-15}{25x^2-1} &= \frac{1}{x(1-5x)} + \frac{25x-15}{(1-5x)(1+5x)} \\ &= \frac{1+5x+x(25x-15)}{x(1-5x)(1+5x)} = \frac{1-10x+25x^2}{x(1-5x)(1+5x)} \\ &= \frac{(1-5x)^2}{x(1-5x)(1+5x)} = \frac{1-5x}{x(1+5x)}. \end{aligned}$$

3. a) Ta có : $MTC = (x-3)(x+3)$.

Áp dụng đẳng thức $-\frac{A}{B} = \frac{A}{-B}$, ta có :

$$\frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{2x(1-x)}{9-x^2} = \frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} + \frac{2x(1-x)}{(x-3)(x+3)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+1)(x+3) - (1-x)(x-3) + 2x(1-x)}{(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{2x+6}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2}{x-3}.
\end{aligned}$$

b) Ta có: $1-x^2 = (1-x)(1+x) = -(x-1)(x+1)$ nên $MTC = (x-1)^2(x+1)$.

$$\begin{aligned}
\frac{3x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x+3}{1-x^2} &= \frac{(3x+1)(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} - \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2(x+1)} \\
&= \frac{x^2+4x+3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x+3}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

4. a) $MTC = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+1} - \frac{x^3-2x^2}{x^3+1} &= \frac{x(x^2-x+1) - x^3+2x^2}{x^3+1} \\
&= \frac{x^3-x^2+x-x^3+2x^2}{x^3+1} = \frac{x^2+x}{x^3+1} \\
&= \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x}{x^2-x+1}.
\end{aligned}$$

b) $MTC = 2(x^2-1) = 2(x+1)(x-1)$. Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2} &= \frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+3}{2(x+1)} \\
&= \frac{(x+1)^2+6-(x+3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+2x+1+6-x^2-2x+3}{2(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{10}{2(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x^2-1}.
\end{aligned}$$

5*. a) Thực hiện phép tính bằng cách cộng dồn các phân thức từ trái qua phải, ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} \\
&= \frac{1+x+1-x}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} \\
&= \frac{2(1+x^2) + 2(1-x^2)}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} \\
&= \frac{2+2x^2+2-2x^2}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} \\
&= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{4(1+x^4) + 4(1-x^4)}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} \\
&= \frac{4+4x^4+4-4x^4}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} \\
&= \frac{8(1+x^8) + 8(1-x^8)}{1-x^{16}} = \frac{8+8x^8+8-8x^8}{1-x^{16}} = \frac{16}{1-x^{16}}.
\end{aligned}$$

b) Ta có: $\frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{ax+2a+bx-2b}{(x+2)(x+2)} = \frac{(a+b)x+2(a-b)}{x^2-4}.$

Từ đó ta có hệ để tìm a, b: $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b=1. \end{cases}$

Giải hệ này ta tìm được $a = \frac{1}{4}; b = -\frac{1}{4}.$

6*. a) Ta có $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} = \frac{ax+b(x-1)}{x(x-1)}$
 $= \frac{ax+bx-b}{x(x-1)} = \frac{x(a+b)-b}{x(x-1)}.$

Từ đó ta có hệ để tìm a, b: $\begin{cases} a+b=0 \\ b=-1 \end{cases}$, hệ này cho ta nghiệm $\begin{cases} a=1 \\ b=-1. \end{cases}$

Vậy $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}.$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có: } M &= \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \\
 &= \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} \\
 &= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-5} \\
 &= \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-2} = \frac{x-2-x+6}{(x-2)(x-6)} = \frac{4}{(x-2)(x-6)}.
 \end{aligned}$$

7*. Ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x(x^2+1)} &= \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+x(bx+c)}{x(x^2+1)} \\
 &= \frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x(x^2+1)} = \frac{x^2(a+b)+cx+a}{x(x^2+1)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó ta có hệ để tìm } a, b, c: \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1. \end{cases} \text{ Do đó ta được } \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Chủ đề 5

$$1. \quad \text{a) Ta có } \frac{3x^2}{4y^3} \cdot \frac{8y^2}{x^3} = \frac{3x^2 \cdot 8y^2}{4y^3 \cdot x^3} = \frac{6}{xy}.$$

$$\text{b) Ta có } \frac{3y^2}{2x} \cdot \left(-\frac{4x^2}{5y} \right) = -\frac{3y^2 \cdot 4x^2}{2x \cdot 5y} = -\frac{6xy}{5}.$$

$$\text{c) Ta có } \frac{x^2-9}{3x+2} \cdot \frac{3x^2+4x}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{3x+2} \cdot \frac{x(3x+4)}{x-3} = \frac{x(x+3)(3x+4)}{3x+2}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) Ta có } \frac{4x^2-9}{2x+8} \cdot \frac{4}{3-2x} &= \frac{(2x-3)(2x+3)}{2(x+4)} \cdot \left(-\frac{4}{2x-3}\right) \\ &= -\frac{(2x-3)(2x+3) \cdot 4}{2(x+4)(2x-3)} = -\frac{2(2x+3)}{x+4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{Ta có } \left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - 1\right) \cdot \frac{x-y}{2y} &= \frac{x^2+y^2-x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{2y} \\ &= \frac{2y^2(x-y)}{(x-y)(x+y) \cdot 2y} = \frac{y}{x+y}. \end{aligned}$$

Với $x = 14, y = -15$ thì giá trị của biểu thức là: $\frac{-15}{14-15} = 15$.

$$\begin{aligned} 3. \quad \text{a) Ta có } \frac{x-2}{x^3+8} \cdot \frac{x^2+x-2}{x^3-4x^2+4x} &= \frac{x-2}{(x+2)(x^2-2x+4)} \cdot \frac{(x-1)(x+2)}{x(x^2-4x+4)} \\ &= \frac{(x-2)(x-1)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4) \cdot x(x-2)^2} = \frac{x-1}{x(x^2-2x+4)(x-2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \frac{x^3-2x^2y+xy^2}{2x+y} \cdot \frac{2xy+y^2}{x^3-xy^2} &= \frac{x(x-y)^2}{2x+y} \cdot \frac{y(2x+y)}{x(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{xy(x-y)^2(2x+y)}{x(2x+y)(x-y)(x+y)} = \frac{y(x-y)}{x+y}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } \frac{x-2}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x+2}{x^2-5x+6} &= \frac{x-2}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{(x-3)(x-2)} \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)} = \frac{1}{(x+1)(x-3)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Ta có } \frac{x^2-7x+12}{x^2+6x+5} \cdot \frac{x^2+3x-10}{x^2+x-12} &= \frac{(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+5)} \cdot \frac{(x+5)(x-2)}{(x+4)(x-3)} \\ &= \frac{(x-3)(x-4)(x+5)(x-2)}{(x+1)(x+5)(x+4)(x-3)} = \frac{(x-4)(x-2)}{(x+1)(x+4)}. \end{aligned}$$

$$4. \quad \text{a) Ta có } \frac{6x-2}{x+5} : (3x-1) = \frac{2(3x-1)}{x+5} \cdot \frac{1}{(3x-1)} = \frac{2(3x-1)}{(x+5)(3x-1)} = \frac{2}{x+5}.$$

$$\text{b) Ta có } (x^2 + 4x + 4) : \frac{2x+4}{5x+3} = \frac{(x+2)^2}{1} \cdot \frac{5x+3}{2(x+2)} = \frac{(x+2)(5x+3)}{2}.$$

$$\text{c) Ta có } \frac{x^3-1}{x^2-6x+9} : \frac{x-1}{x-3} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{x-1} = \frac{x^2+x+1}{x-3}.$$

$$\text{d) Ta có } \frac{-2(x+y)^2}{x^2+y^2} : \frac{x^2-y^2}{-x} = \frac{-2(x+y)^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{-x}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x(x+y)}{(x^2+y^2)(x-y)}.$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \text{a) Ta có } \frac{a^4-b^4}{a^3-b^3} : \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} &= \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{a^2+b^2} \\ &= \frac{(a^2-b^2)(a+b)}{a^2+ab+b^2} = \frac{(a-b)(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \frac{x^3+8}{x^2-2x+1} : \frac{x^2+3x+2}{1-x^2} &= \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-1)^2} \cdot \left[-\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} \right] \\ &= -\frac{(x+2)(x^2-2x+4)(x-1)}{(x-1)^2(x+2)} = -\frac{x^2-2x+4}{x-1} = \frac{x^2-2x+4}{1-x}. \end{aligned}$$

$$\text{c) Ta có } (xy+y^2-y) : \frac{x^2+xy-x}{x-y} = \frac{y(x+y-1)}{1} \cdot \frac{x-y}{x(x+y-1)} = \frac{y(x-y)}{x}.$$

$$\text{d) Ta có } \frac{x^3y+xy^3}{x^4y} : (x^2+y^2) = \frac{xy(x^2+y^2)}{x^4y} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{x^3}.$$

$$6. \quad \text{a) Ta có } \frac{x^2-2xy}{x^2y} \cdot A = \frac{x^2y-4y^3}{3xy^2}, \text{ nên}$$

$$A = \frac{x^2y-4y^3}{3xy^2} : \frac{x^2-2xy}{x^2y} = \frac{y(x-2y)(x+2y)}{3xy^2} \cdot \frac{x^2y}{x(x-2y)} = \frac{x+2y}{3}.$$

$$\text{b) Ta có } \frac{x-y}{x^3+y^3} \cdot A = \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy+y^2}, \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy+y^2} : \frac{x-y}{x^3+y^3} = \frac{(x-y)^2}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x-y} \\ &= (x+y)(x-y) = x^2-y^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7*. \quad \text{Ta có } x^5 - 1 &= (x^5 - x^4) + (x^4 - x^3) + (x^3 - x^2) + (x^2 - x) + (x - 1) \\
 &= x^4(x - 1) + x^3(x - 1) + x^2(x - 1) + x(x - 1) + (x - 1) \\
 &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).
 \end{aligned}$$

$$\text{Nên } \frac{x^5 - 1}{x^2 - 4} : \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x + 2}{x - 1} = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x - 2}.$$

Chủ đề 6

$$\begin{aligned}
 1. \quad a) \quad &\left(\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} \right) : \frac{4x}{10x+5} = \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} \cdot \frac{10x+5}{4x} \\
 &= \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 4x - 1}{(2x-1)(2x+1)} \cdot \frac{5(2x+1)}{4x} = \frac{8x \cdot 5(2x+1)}{(2x-1)(2x+1) \cdot 4x} = \frac{10}{2x-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad &\left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{2-x}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) = \left[\frac{1}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x+1} \right] : \frac{1+x^2-2x}{x} \\
 &= \frac{1+x(x-2)}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{x^2-2x+1} = \frac{(x^2-2x+1)x}{x(x+1)(x^2-2x+1)} = \frac{1}{x+1}.
 \end{aligned}$$

c) Chú ý đến thứ tự thực hiện các phép tính, ta có :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{x-1} - \frac{x^3-x}{x^2+1} \cdot \left(\frac{1}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x^2-1} \right) = \frac{1}{x-1} - \frac{x(x^2-1)}{x^2+1} \cdot \left[\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right] \\
 &= \frac{1}{x-1} - \frac{x(x-1)(x+1)}{x^2+1} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x(x-1)(x+1)}{x^2+1} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x-1)^2(x+1)} \\
 &= \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{x^2+1-2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{x-1}{x^2+1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \text{Ta có } &\left(\frac{x-2}{x+2} + \frac{6x-4}{x^2-4} \right) : \frac{x+1}{x-2} = \frac{(x-2)^2 + 6x-4}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x-2}{x+1} \\
 &= \frac{x^2-4x+4+6x-4}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{x^2+2x}{(x+2)(x+1)} = \frac{x(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x}{x+1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \text{Ta có} \quad & \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 + 1} \right) : \frac{x}{x+1} + \frac{2x+1}{x^3 + 1} \\
 &= \frac{x(x^2 - x + 1) - x^3 + 2x^2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \cdot \frac{x+1}{x} + \frac{2x+1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\
 &= \frac{x^3 - x^2 + x - x^3 + 2x^2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \cdot \frac{x+1}{x} + \frac{2x+1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\
 &= \frac{x(x+1)}{x(x^2 - x + 1)} + \frac{2x+1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{(x+1)^2 + 2x+1}{(x^2 - x + 1)(x+1)} = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^3 + 1}.
 \end{aligned}$$

4. a) Giá trị của phân thức được xác định khi

$$2x^2 - 6x = 2x(x - 3) \neq 0 \text{ hay } x \neq 0, x \neq 3.$$

- b) Giá trị của phân thức được xác định khi

$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \neq 0 \text{ hay } x \neq \pm\sqrt{3}.$$

5. a) Phân thức được xác định khi $x^3 - 8 \neq 0$, hay $x \neq 2$.

- b) Với điều kiện $x \neq 2$, ta có :

$$\frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8} = \frac{3(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{3}{x-2}.$$

6. a) Giá trị của biểu thức này được xác định khi giá trị của mọi phân thức trong biểu thức đều được xác định.

$$\text{Do đó : } x^2 - 10x \neq 0, x^2 + 10x \neq 0, x^2 + 4 \neq 0.$$

$$x^2 - 10x = x(x - 10) \neq 0 \text{ khi } x \neq 0 \text{ và } x - 10 \neq 0 \text{ hay } x \neq 0 \text{ và } x \neq 10;$$

$$x^2 + 10x = x(x + 10) \neq 0 \text{ khi } x \neq 0 \text{ và } x + 10 \neq 0 \text{ hay } x \neq 0 \text{ và } x \neq -10;$$

$$x^2 + 4 > 0 \text{ với mọi giá trị của } x.$$

Vậy điều kiện của x là : $x \neq 0$; $x \neq \pm 10$.

$$\begin{aligned}
 b) \quad \text{Ta có} \quad & \left(\frac{5x+2}{x^2-10x} + \frac{5x-2}{x^2+10x} \right) \cdot \frac{x^2-100}{x^2+4} = \left[\frac{5x+2}{x(x-10)} + \frac{5x-2}{x(x+10)} \right] \cdot \frac{x^2-100}{x^2+4} \\
 &= \frac{(5x+2)(x+10) + (5x-2)(x-10)}{x(x-10)(x+10)} \cdot \frac{(x-10)(x+10)}{x^2+4}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{5x^2 + 52x + 20 + 5x^2 - 52x + 20}{x(x^2 + 4)} = \frac{10x^2 + 40}{x(x^2 + 4)} = \frac{10(x^2 + 4)}{x(x^2 + 4)} = \frac{10}{x}.$$

c) Vì $x = 20040$ thoả mãn điều kiện của biến nên tại đó giá trị của biểu thức đã cho bằng giá trị của biểu thức rút gọn $\frac{10}{x}$.

Vậy biểu thức đã cho có giá trị là $\frac{10}{20040} = \frac{1}{2004}$.

7. a) Biểu thức xác định khi $2x - 2 = 2(x - 1) \neq 0$ khi $x \neq 1$, và

$$2x^2 - 2 = 2(x - 1)(x + 1) \neq 0 \text{ khi } x \neq \pm 1.$$

Vậy điều kiện của x là: $x \neq \pm 1$.

b) Để chứng minh biểu thức này không phụ thuộc vào biến x ta phải biến đổi nó thành một biểu thức không chứa x . Ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2} \right) \cdot \frac{4x^2-4}{5} \\ &= \left(\frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{3}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+3}{2(x+1)} \right) \cdot \frac{4(x-1)(x+1)}{5} \\ &= \frac{(x+1)^2 + 6 - (x+3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4(x-1)(x+1)}{5} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1 + 6 - x^2 - 2x + 3}{5} \cdot 2 = 4. \end{aligned}$$

Vậy với $x \neq \pm 1$ thì biểu thức bằng 4, tức là biểu thức không phụ thuộc vào biến x .

8. Điều kiện phân thức xác định là: $x^2 - 5x = x(x - 5) \neq 0$ hay khi $x \neq 0$, $x \neq 5$.

Rút gọn phân thức:

$$\frac{x^3 - 10x^2 + 25x}{x^2 - 5x} = \frac{x(x^2 - 10x + 25)}{x(x - 5)} = \frac{x(x - 5)^2}{x(x - 5)} = x - 5.$$

Nếu phân thức đã cho có giá trị bằng 0 thì phân thức rút gọn cũng có giá trị bằng 0; tức là $x - 5 = 0$. Suy ra $x = 5$. Nhưng theo điều kiện thì $x \neq 0$, $x \neq 5$.

Vậy không có giá trị nào của x để phân thức có giá trị bằng 0.

9. a) Điều kiện để phân thức được xác định là $x^3 - x^2 - 4x + 4 \neq 0$, hay $x^2(x-1) - 4(x-1) \neq 0$ tức là $(x-1)(x-2)(x+2) \neq 0$ nên $x \neq 1, x \neq \pm 2$.

Vậy phân thức được xác định khi $x \neq 1, x \neq \pm 2$.

- b) Với $x \neq 1, x \neq \pm 2$, ta có :

$$\frac{2x^2 - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2(x-1) - 4(x-1)} = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{2(x+1)}{x^2 - 4}.$$

Biểu thức ban đầu bằng 0 cũng chính là biểu thức sau cùng bằng 0.

Vậy biểu thức bằng 0 khi $x + 1 = 0$, hay $x = -1$.

10. a) Ta có : Biểu thức xác định khi $(x-3)(x^2 + 4x + 4) \neq 0$, hay $(x-3)(x+2)^2 \neq 0$. Nghĩa là $x \neq 3, x \neq -2$.

Vậy B xác định với $x \neq 3, x \neq -2$.

- b) Với $x \neq 3, x \neq -2$, ta có

$$B = \frac{3x^2 - 12}{(x-3)(x^2 + 4x + 4)} = \frac{3(x^2 - 4)}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{3(x-2)}{(x-3)(x+2)}.$$

Vậy B = 0, khi $x = 2$.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chủ đề 1

KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax + b = 0$ trong đó x là ẩn, a và b là các hằng số đã cho, $a \neq 0$.

Giải phương trình bậc nhất một ẩn ta làm như sau :

Chuyển số hạng tự do sang một vế $ax = -b$.

Chia hai vế cho a (vì $a \neq 0$) ta được $x = \frac{-b}{a}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{-b}{a}$.

C. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP

Vận dụng cách giải phương trình bậc nhất một ẩn và các phép biến đổi đã biết vào giải các phương trình.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

a) $(3x + 5) - (x - 5) - 8 = 0$;

b) $(3 - 5x) + (6x - 10) - 9 = 0$.

Lời giải

a) $(3x + 5) - (x - 5) - 8 = 0 \Leftrightarrow 3x - x + 5 + 5 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1$.

b) $(3 - 5x) + (6x - 10) - 9 = 0 \Leftrightarrow -5x + 6x + 3 - 10 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 16$.
 Vậy phương trình có nghiệm là $x = 16$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x+1}{2} = \frac{x}{6} - x$;

b) $\frac{2+x}{5} - 0,5x = \frac{1-2x}{4} + 0,25$.

Lời giải

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x+1}{2} = \frac{x}{6} - x \Leftrightarrow 2x - 3(2x+1) = x - 6x$

$$\Leftrightarrow 2x - 6x - 3 = x - 6x \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy $x = 3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b) $\frac{2+x}{5} - 0,5x = \frac{1-2x}{4} + 0,25 \Leftrightarrow 4(2+x) - 10x = 5(1-2x) + 5$

$$\Leftrightarrow 8 + 4x - 10x = 5 - 10x + 5 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 3. Giải các phương trình :

a) $3 - 4x(25 - 2x) = 8x^2 + x - 300$;

b) $\frac{2(1-3x)}{5} - \frac{2+3x}{10} = 7 - \frac{3(2x+1)}{4}$.

Lời giải

a) Phương trình đã cho tương đương với $3 - 100x + 8x^2 = 8x^2 + x - 300$, hay
 $101x = 303$.

Phương trình có nghiệm là $x = 3$.

b) Phương trình đã cho tương đương với $\frac{8-24x-4-6x}{20} = \frac{140-30x-15}{20}$, hay

$$4 - 30x = 125 - 30x, \text{ nghĩa là } 0 = 121.$$

Phương trình này vô nghiệm.

Chú ý: Đôi khi trong phương trình các hệ số có chứa chữ (tham số), khi đó giải phương trình còn gọi là giải và biện luận phương trình. Lúc đó

ta phải chia các trường hợp giá trị tham số làm cho hệ số của ẩn khác 0 hay bằng 0 rồi mới thực hiện được phép chia.

Ví dụ 4. Giải phương trình $a(ax + 1) = x(a + 2) + 2$, ở đó a là tham số.

Lời giải

Ta biến đổi phương trình đã cho thành :

$$a^2x + a = ax + 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow a^2x - ax - 2x = 2 - a$$

$$\Leftrightarrow x(a^2 - a - 2) = 2 - a$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)(a - 2)x = 2 - a.$$

- Nếu $a \neq -1, a \neq 2$ thì phương trình có nghiệm là $x = -\frac{1}{a+1}$.
- Nếu $a = -1$ thì phương trình có dạng $0x = 3$, phương trình vô nghiệm.
- Nếu $a = 2$ thì phương trình có dạng $0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị x .

Ví dụ 5. Tìm giá trị của m để :

a) Phương trình $5(m + 3x)(x + 1) - 4(1 + 2x) = 80$ có nghiệm $x = 2$.

b) Phương trình $3(2x + m)(3x + 2) - 2(2x + 1)^2 = 43$ có nghiệm $x = 1$.

Lời giải

a) Phương trình có nghiệm $x = 2$, thì giá trị $x = 2$ thoả mãn phương trình nên thay giá trị $x = 2$ vào phương trình ta có :

$$5(m + 3 \cdot 2) \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 80, \text{ hay } 15m = 10.$$

Coi m là ẩn, ta được $m = \frac{2}{3}$.

Vậy với $m = \frac{2}{3}$ phương trình nhận $x = 2$ là nghiệm.

b) Phương trình có nghiệm $x = 1$, thì giá trị $x = 1$ thoả mãn phương trình nên thay giá trị $x = 1$ vào phương trình ta có :

$$3(2 \cdot 1 + m)(3 \cdot 1 + 2) - 2(2 \cdot 1 + 1)^2 = 43, \text{ hay } 15m = 31.$$

Ta coi m là ẩn, ta được $m = \frac{31}{15}$.

Vậy với $m = \frac{31}{15}$ phương trình nhận $x = 1$ là nghiệm.

III. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau :

a) $(2x - 3) - (3x + 4) = x + 5$;

b) $(3x + 5) - (2x - 1) = 4x - 2$.

2. Giải các phương trình sau :

a) $(x + 5)(x + 2) - 3(4x - 3) = (5 - x)^2$;

b) $(x + 2)^3 - (x - 2)^3 = 12x(x - 1) - 8$.

3. Giải các phương trình sau :

a) $\frac{x-5}{100} + \frac{x-4}{101} + \frac{x-3}{102} = \frac{x-100}{5} + \frac{x-101}{4} + \frac{x-102}{3}$;

b) $\frac{29-x}{21} + \frac{27-x}{23} + \frac{25-x}{25} + \frac{23-x}{27} + \frac{21-x}{29} = -5$.

4. Giải và biện luận các phương trình sau với a là tham số :

a) $4x - 2 = a(a - 1)$;

b) $\frac{x-a}{3} = \frac{x+a}{3} - 2$.

5. Giải và biện luận các phương trình sau với a là tham số :

a) $a(ax - 1) = x - 1$;

b) $a^2x - a = ax - 1$.

6. Giải và biện luận các phương trình sau với a là tham số :

a) $\frac{x-a}{a-4} + \frac{x+a-1}{a+4} + \frac{x-a}{16-a^2} = 0$;

b) $\frac{x-a}{a+1} + \frac{x-1}{a-1} = \frac{2a}{1-a^2}$.

Chủ đề 2

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương trình tích (một ẩn) là phương trình có dạng $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots = 0$, (1) trong đó $A(x)$, $B(x)$, ... là các đa thức.

Để giải (1), ta chỉ cần giải từng phương trình $A(x) = 0$, $B(x) = 0$, ... rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử có vai trò quan trọng trong việc đưa phương trình về dạng phương trình tích. Cách đặt ẩn phụ cũng hay được sử dụng để trình bày cho lời giải gọn gàng hơn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP

Vận dụng các phương pháp phân tích thành nhân tử và cách giải phương trình tích đưa phương trình đã cho về các phương trình bậc nhất đã biết cách giải.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

$$\text{a) } 0,5x(x-3) = (x-3)(2,5x-4); \quad \text{b) } \frac{3}{7}x - 1 = \frac{1}{7}x(3x-7).$$

Lời giải

$$\text{a) } 0,5x(x-3) = (x-3)(2,5x-4).$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-3)(2,5x-4) - 0,5x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2,5x-4-0,5x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x-4) = 0.$$

Hoặc $x-3=0$, hoặc $2x-4=0$. Từ đó ta tìm được $x=3$ hoặc $x=2$.

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là $x=3$ và $x=2$.

$$\text{b) } \frac{3}{7}x - 1 = \frac{1}{7}x(3x-7).$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{7}x(3x-7) - \frac{1}{7}(3x-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-7)\left(\frac{1}{7}x-1\right) = 0.$$

Hoặc $3x-7=0$, hoặc $\frac{1}{7}x-1=0$. Từ đó ta tìm được $x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = 7$.

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là $x = \frac{7}{3}$ và $x = 7$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$;

b) $x^2 + 6x + 5 = 0$.

Lời giải

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - x - 6x + 6 = 0, \text{ hay } x(x-1) - 6(x-1) = 0.$$

Tức là $(x-1)(x-6) = 0$. Từ đó ta tìm được $x = 1$ hoặc $x = 6$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 6$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + x + 5x + 5 = 0, \text{ hay } x(x+1) + 5(x+1) = 0.$$

Tức là $(x+1)(x+5) = 0$. Từ đó ta tìm được $x = -1$ hoặc $x = -5$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$ và $x = -5$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $4x^2 + 4x + 1 = x^2$;

b) $4x^2 - 1 = (2x+1)(3x-5)$.

Lời giải

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x+1)^2 = x^2, \text{ hay } (2x+1)^2 - x^2 = 0.$$

Tức là $(x+1)(3x+1) = 0$. Từ đó ta tìm được $x = -1$ hoặc $x = -\frac{1}{3}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$ và $x = -\frac{1}{3}$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x - 1)(2x + 1) = (2x + 1)(3x - 5), \text{ hay } (2x + 1)(3x - 5 - 2x + 1) = 0.$$

Tức là $(2x + 1)(x - 4) = 0$. Từ đó ta tìm được $x = 4$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + 2x + 1) - 9 = 0$;

b) $2x^3 - 7x^2 = 3x^2 + 5x$.

Lời giải

a) Xét phương trình $(x^2 + 2x + 1) - 9 = 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x + 1)^2 - 9 = 0$, hay

$$(x + 1 - 3)(x + 1 + 3) = 0, \text{ tức là } (x - 2)(x + 4) = 0.$$

Từ đó ta tìm được $x = 2$, hoặc $x = -4$.

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là $x = 2$ và $x = -4$.

b) Xét phương trình $2x^3 - 7x^2 = 3x^2 + 5x$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - 7x^2 - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 10x + 12) = 0 \text{ hay } x(x - 4)(x - 3) = 0.$$

Từ đó ta tìm được $x = 0$ hoặc $x = 3$ hoặc $x = 4$.

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là $x = 0$, $x = 3$ và $x = 4$.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau :

a) $(2x - 5)^2 = (x + 2)^2$;

b) $(x + 1)^2 = 4(x^2 - 2x + 1)$.

Lời giải

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x - 5)^2 - (x + 2)^2 = 0, \text{ hay } (2x - 5 - x - 2)(2x - 5 + x + 2) = 0.$$

Tức là $(x - 7)(3x - 3) = 0$. Từ đó ta tìm được $x = 1$ hoặc $x = 7$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 7$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$(2(x-1))^2 - (x+1)^2 = 0, \text{ hay } (2x-2+x+1)(2x-2-x-1) = 0.$$

Tức là $(3x-1)(x-3) = 0$. Từ đó ta tìm được $x = 3$ hoặc $x = \frac{1}{3}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$ và $x = \frac{1}{3}$.

Chú ý : Với hai phương trình này có thể giải bằng cách chuyển về phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối (sẽ trình bày ở cuối chương). Chẳng hạn như :

Phương trình $(2x-5)^2 = (x+2)^2$ có thể đưa về dạng $|2x-5| = |x+2|$.

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau :

a) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$;

b) $x(x+1)(x^2 + x + 1) = 42$.

Lời giải

a) Đặt $t = (x^2 - 5x)$ phương trình trở thành

$$t^2 + 10t + 24 = 0 \Leftrightarrow (t+4)(t+6) = 0 \Leftrightarrow t = -4; t = -6.$$

• Với $t = -4$, ta có phương trình $x^2 - 5x = -4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $x = 1$; $x = 4$.

• Với $t = -6$, ta có phương trình $x^2 - 5x = -6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $x = 2$; $x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm $x = 1$; $x = 4$; $x = 2$; $x = 3$.

b) Xét phương trình $x(x+1)(x^2 + x + 1) = 42$.

Phương trình đã cho có thể viết thành $(x^2 + x)(x^2 + x + 1) = 42$.

Đặt $t = x^2 + x$, ta được phương trình

$$t(t+1) = 42 \Leftrightarrow t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow (t-6)(t+7) = 0 \Leftrightarrow t = 6; t = -7.$$

- Với $t = 6$, ta có phương trình $x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $x = 2; x = -3$.

- Với $t = -7$, ta có phương trình $x^2 + x = -7 \Leftrightarrow x^2 + x + 7 = 0$.

Phương trình này vô nghiệm do $x^2 + x + 7 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2; x = -3$.

III. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau :

a) $(x + 2)(x^2 - 3x + 5) = (x + 2)x^2$; b) $2x^2 - x = 3 - 6x$.

2. Cho phương trình $4x^2 - 25 + k^2 + 4kx = 0$, ở đó k là tham số.

a) Giải phương trình khi $k = 0$;

b) Giải phương trình khi $k = -3$;

c) Với giá trị nào của k phương trình nhận $x = -2$ là nghiệm.

3. Giải các phương trình sau :

a) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$;

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

4. Giải các phương trình sau :

a) $3x^2 + 7x - 20 = 0$;

b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

- 5*. Giải các phương trình sau :

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$;

b) $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 24$.

- 6*. Giải phương trình : $(x^2 - 6x + 9)^2 - 15(x^2 - 6x + 10) = 1$.

Chủ đề 3

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương trình chứa ẩn ở mẫu là phương trình có chứa ẩn số ở mẫu thức.

Để giải phương trình này ta làm theo các bước sau :

Bước 1. Tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình (điều kiện của ẩn số để các mẫu số khác 0).

Bước 2. Quy đồng mẫu số ở hai vế của phương trình rồi khử mẫu số.

Bước 3. Giải phương trình nhận được (không còn chứa ẩn ở mẫu số).

Bước 4 (Kết luận). Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thoả mãn ĐKXĐ là nghiệm của phương trình đã cho.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Vận dụng phương pháp giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, đưa về phương trình bậc nhất đã biết cách giải

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{3x-2}{x+7} = \frac{6x+1}{2x-3};$$

$$b) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}.$$

Lời giải

$$a) \frac{3x-2}{x+7} = \frac{6x+1}{2x-3}. \quad (1)$$

ĐKXĐ của phương trình (1) là $x \neq \frac{3}{2}$ và $x \neq -7$.

Mẫu số chung (MSC) của phương trình là $(x+7)(2x-3)$. Khi đó :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{(3x-2)(2x-3)}{(x+7)(2x-3)} = \frac{(6x+1)(x+7)}{(x+7)(2x-3)} \\ &\Leftrightarrow 6x^2 - 9x - 4x + 6 = 6x^2 + 42x + x + 7 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 56x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{56}.$$

So với ĐKXD ta thấy $x = -\frac{1}{56}$ thoả mãn, vậy $x = -\frac{1}{56}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

$$\text{b) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}. \quad (2)$$

ĐKXD của phương trình (2) là $x \neq \pm 1$.

Mẫu số chung của phương trình là $(x-1)(x+1)$. Khi đó :

$$(2) \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1.$$

So với ĐKXD ta thấy giá trị $x = 1$ không thoả mãn nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

$$\text{a) } \frac{6}{x-5} + \frac{2}{x-8} = \frac{18}{(x-5)(8-x)} - 1; \quad \text{b) } \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-2} = \frac{9}{(x+1)(x-2)};$$

$$\text{c) } \frac{x^2-x}{x+3} - \frac{x^2}{x-3} = \frac{7x^2-3x}{9-x^2}.$$

Lời giải

a) ĐKXD của phương trình là $x \neq 5, x \neq 8$.

Mẫu số chung ở hai vế của phương trình là $(x-5)(x-8)$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành

$$6(x-8) + 2(x-5) + 18 + (x-5)(x-8) = 0.$$

Phương trình tương đương với $x(x-5) = 0$.

Phương trình cuối có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 5$.

So với điều kiện thì giá trị $x = 5$ bị loại.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

b) ĐKXĐ của phương trình là $x \neq -1, x \neq 2$.

Mẫu số chung ở hai vế của phương trình là $(x + 1)(x - 2)$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành $3(x - 2) - x - 1 = 9$, hay $2x = 16$.

Phương trình này có nghiệm $x = 8$, giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình đã cho.

c) ĐKXĐ của phương trình là $x \neq \pm 3$.

Mẫu số chung ở hai vế của phương trình là $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành

$$(x^2 - x)(x - 3) - x^2(x + 3) + 7x^2 - 3x = 0.$$

Biến đổi phương trình trở thành $0 = 0$.

Phương trình này nghiệm đúng với mọi giá trị x thoả mãn điều kiện nên nghiệm của phương trình đã cho là mọi $x \neq \pm 3$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau :

a) $\frac{1}{2x - 3} - \frac{3}{x(2x - 3)} = \frac{5}{x}$;

b) $\frac{3}{(x - 1)(x - 2)} - \frac{2}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{1}{(x - 2)(x - 3)}$.

Lời giải

a) ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}$.

Mẫu số chung ở hai vế của phương trình là $x(2x - 3)$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành $x - 3 - 5(2x - 3) = 0$, hay $9x = 12$.

Phương trình có nghiệm $x = \frac{4}{3}$, giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình đã cho.

b) ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 1, x \neq 2, x \neq 3$.

Mẫu số chung ở hai vế của phương trình là $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành $3(x - 3) - 2(x - 2) = x - 1$, hay $0x = 4$.

Phương trình cuối vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau :

$$\text{a) } 2 + \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1); \quad \text{b) } \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2.$$

Lời giải

a) ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 0$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành $x^2 \left(\frac{1}{x} + 2\right) = 0$, hay $x(1 + 2x) = 0$.

Phương trình có nghiệm $x = 0$ và $x = -\frac{1}{2}$. Chỉ có giá trị $x = -\frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện nên nó là nghiệm của phương trình đã cho.

b) ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 0$.

Với điều kiện đó phương trình trở thành $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$.

Biến đổi phương trình trở thành $2x \left(2 + \frac{2}{x}\right) = 0$, hay $x + 1 = 0$.

Phương trình có nghiệm $x = -1$, giá trị đó thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau :

$$\text{a) } \frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1};$$
$$\text{b) } \frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}.$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1}.$$

Ta có $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 1$.

Với điều kiện đó, MSC là $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Quy đồng mẫu số, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} &= \frac{2x}{x^2+x+1} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1-3x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ \Leftrightarrow 4x^2-3x-1=0 &\Leftrightarrow (4x+1)(x-1)=0 \\ \Leftrightarrow x=1; x=-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

So với ĐKXD giá trị $x=1$ bị loại, vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-\frac{1}{4}$.

$$\text{b) } \frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}.$$

ĐKXD của phương trình là $x \neq \pm 3; x \neq -\frac{2}{7}$. Với điều kiện này, ta có

$$\begin{aligned} \frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} &= \frac{6}{(x-3)(x+3)} \\ \Leftrightarrow \frac{13(x+3) + (x+3)(x-3)}{(x-3)(2x+7)(x+3)} &= \frac{6(2x+7)}{(x-3)(2x+7)(x+3)} \\ \Leftrightarrow 13x+39+x^2-9 &= 12x+42 \\ \Leftrightarrow x^2+x-12=0 &\Leftrightarrow (x-3)(x+4)=0 \\ \Leftrightarrow x=3; x=-4. \end{aligned}$$

So với ĐKXD giá trị $x=3$ bị loại, vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-4$.

Ví dụ 6. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có giá trị bằng 2.

$$\text{a) } A = \frac{3x-1}{3x+1} + \frac{x-3}{x+3}; \quad \text{b) } B = \frac{10}{3} - \frac{3x-1}{4x+12} - \frac{7x+2}{6x+18}.$$

Lời giải

a) Ta thấy ĐKXD của biểu thức A là $x \neq -3, x \neq -\frac{1}{3}$.

Với điều kiện đó, ta biến đổi biểu thức A trở thành :

$$\begin{aligned}A &= \frac{(3x-1)(x+3) + (x-3)(3x+1)}{(3x+1)(x+3)} \\&= \frac{(3x^2 + 8x - 3) + (3x^2 - 8x - 3)}{(3x+1)(x+3)} \\&= \frac{6x^2 - 6}{(3x+1)(x+3)}.\end{aligned}$$

Để biểu thức có giá trị bằng 2, ta có :

$$\frac{6x^2 - 6}{(3x+1)(x+3)} = 2, \text{ hay } 6x^2 - 6 = 2(3x+1)(x+3).$$

Tức là $6x^2 - 6 = 6x^2 + 20x + 6$, hay $20x = -12$, nghĩa là $x = -\frac{3}{5}$.

Giá trị này của x thoả mãn điều kiện đặt ra.

Vậy với $x = -\frac{3}{5}$ thì biểu thức A có giá trị bằng 2.

b) Ta thấy ĐKXD của biểu thức B là $x \neq -3$.

Với điều kiện đó, ta biến đổi biểu thức B trở thành :

$$\begin{aligned}B &= \frac{40(x+3) - 3(3x-1) - 2(7x+2)}{12(x+3)} \\&= \frac{40x + 120 - 9x + 3 - 14x - 4}{12(x+3)} = \frac{17(x+7)}{12(x+3)}.\end{aligned}$$

Để biểu thức có giá trị bằng 2, ta có :

$$\frac{17(x+7)}{12(x+3)} = 2, \text{ hay } 7x = 47, \text{ tức là } x = \frac{47}{7}.$$

Giá trị này của x thoả mãn điều kiện đặt ra.

Vậy với $x = \frac{47}{7}$ thì biểu thức B có giá trị bằng 2.

III. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{3}{1-4x} = \frac{2}{4x+1} - \frac{8+6x}{16x^2-1};$$

$$b) \frac{3}{5x-1} + \frac{2}{3-5x} = \frac{4}{(1-5x)(5x-3)}.$$

2. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2} + 1;$$

$$b) \frac{5-x}{4x^2-8x} + \frac{7}{8} = \frac{x-1}{2x(x-2)} + \frac{1}{8x-16}.$$

3. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{x+6}{x-5} + \frac{x-5}{x+6} = \frac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30};$$

$$b) \frac{x^2-x}{x+3} - \frac{x^2}{x-3} = \frac{7x^2-3x}{9-x^2}.$$

4. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2} + 1;$$

$$b) \frac{x+6}{x-5} + \frac{x-5}{x+6} = \frac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}.$$

5. Giải các phương trình sau :

$$a) 1 + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{8+x^3};$$

$$b) (2x+3)\left(\frac{3x+8}{2-7x} + 1\right) = (x-5)\left(\frac{3x+8}{2-7x} + 1\right).$$

6. Giải các phương trình sau với a là tham số :

$$a) \frac{1+a}{1-x} = 1-a;$$

$$b) \frac{x}{2a+x} + \frac{2a+x}{2a-x} = \frac{8a^2}{x^2-4a^2}.$$

Chủ đề 4

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình :

Bước 1. Lập phương trình :

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số ;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết ;
- Lập phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Nhận định kết quả và trả lời : Kiểm tra các nghiệm tìm được, chỉ các giá trị thoả mãn điều kiện đặt ra mới là nghiệm của bài toán.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Vận dụng các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình và giải phương trình lập được để tìm nghiệm của bài toán.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 320m. Nếu tăng chiều dài thêm 10m và tăng chiều rộng thêm 20m thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm $2700m^2$. Tính kích thước của hình chữ nhật.

Lời giải

Gọi chiều dài của hình chữ nhật là x (đơn vị : m).

Điều kiện của ẩn là $0 < x < 160$.

Khi đó chiều rộng hình chữ nhật là $160 - x$ (m).

Diện tích hình chữ nhật ban đầu là $x(160 - x)$ (m^2).

Sau khi tăng chiều dài thêm 10m, chiều rộng thêm 20m thì chiều dài mới là :

$x + 10$ và chiều rộng mới là : $160 - x + 20 = 180 - x$.

Khi đó diện tích hình chữ nhật là $(x + 10)(180 - x)$.

Theo bài ra, diện tích hình chữ nhật tăng thêm $2700m^2$, nên ta có phương trình :

$$(x + 10)(180 - x) - x(160 - x) = 2700.$$

$$\text{Hay } -x^2 + 170x + 1800 + x^2 - 160x = 2700.$$

$$\text{Tức là } 10x = 900 \Leftrightarrow x = 90 \text{ (m)}.$$

Ta thấy giá trị $x = 90$ thoả mãn điều kiện đặt ra.

Vậy chiều dài của hình chữ nhật là 90m, chiều rộng của nó là 70m.

(Có thể thử lại thấy $(90 + 10)(180 - 90) - 90.17 = 2700$ là đúng).

Ví dụ 2. Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông từ bến A đến bến B dài 80 km. Sau đó ngược dòng đến địa điểm C cách bến B là 72 km. Thời gian ca nô đi xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 15 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Lời giải

Cách 1.

Gọi x (km/h) là vận tốc ca nô ($x > 4$).

Khi đó vận tốc ca nô xuôi dòng là $(x + 4)$ (km/h) và vận tốc ca nô ngược dòng là $(x - 4)$ (km/h).

Thời gian ca nô xuôi dòng là $\frac{80}{x+4}$ (h); thời gian ca nô ngược dòng là $\frac{72}{x-4}$ (h).

Theo bài ra thời gian ca nô đi xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 15 phút ($\frac{1}{4}$ (h)) nên ta có phương trình :

$$\frac{80}{x+4} + \frac{1}{4} = \frac{72}{x-4}.$$

Phương trình tương đương với : $x^2 + 32x - 2448 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $x = 36$; $x = -68$.

Kiểm tra điều kiện thấy giá trị $x = 36$ thoả mãn.

Vậy vận tốc ca nô là 36 km/h.

Cách 2.

Gọi x là thời gian ca nô ngược dòng (đơn vị: h; $x > \frac{1}{4}$) thì thời gian ca nô

xuôi dòng là $x - \frac{1}{4}$;

Vận tốc ca nô xuôi dòng là $\frac{80}{x - \frac{1}{4}}$ (km/h); vận tốc ca nô ngược dòng là $\frac{72}{x}$ (km/h).

Do vận tốc dòng nước là 4 km/h nên vận tốc ca nô xuôi hơn vận tốc ca nô ngược là 8 km/h. Vậy ta có phương trình :

$$\frac{80}{x - \frac{1}{4}} - \frac{72}{x} = 8$$

Giải phương trình này được thời gian ca nô ngược dòng $2\frac{1}{4}$ (h) nên vận tốc ca

nô ngược dòng là $\frac{72}{2\frac{1}{4}} = 32$ (km/h) và vận tốc ca nô là $32 + 4 = 36$ (km/h).

Ví dụ 3. Một xe khách và một xe du lịch khởi hành đồng thời từ T.P Hồ Chí Minh đi Tiền Giang. Xe du lịch có vận tốc lớn hơn xe khách là 20 km/h do đó nó đến Tiền Giang trước xe khách 25 phút. Tính vận tốc mỗi xe biết rằng khoảng cách giữa Thành phố Hồ Chí Minh và Tiền Giang là 100 km.

Lời giải

Cách 1.

Gọi x (h) là thời gian xe du lịch đi ($x > 0$), vận tốc xe du lịch đi sẽ là $\frac{100}{x}$;

Thời gian xe khách đi là $\frac{100}{x + \frac{5}{12}}$ (h), nó còn được biểu thị bằng $\frac{100}{x} - 20$ (h).

Từ đó ta có phương trình : $\frac{100}{x} - 20 = \frac{100}{x + \frac{5}{12}}$.

Phương trình tương đương với : $\frac{100}{x} - 20 = \frac{12 \cdot 100}{12x + 5}$

$$\Leftrightarrow 100(12x + 5) - 20x(12x + 5) = 1200x$$

$$\Leftrightarrow 240x^2 + 100x - 500 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 5x - 25 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} ; x = -\frac{5}{3}$$

Giá trị $x = -\frac{5}{3}$ không thoả mãn điều kiện nên bị loại.

Vậy thời gian xe du lịch đi là 1,15 (h) suy ra vận tốc xe du lịch là $\frac{100}{1,15} = 80$ (km/h)

và vận tốc xe khách là $80 - 20 = 60$ km/h.

Cách 2.

Gọi x (km/h, $x > 0$) là vận tốc xe khách thì vận tốc xe du lịch là $x + 20$ (km/h).

Thời gian xe khách chạy là $\frac{100}{x}$ và thời gian xe du lịch chạy là $\frac{100}{x+20}$.

Theo bài ra, xe du lịch đến Tiền Giang trước xe khách 25 phút nên ta có

$$\text{phương trình : } \frac{100}{x} = \frac{100}{x+20} + \frac{5}{12}.$$

Phương trình tương đương với

$$1200(x+20) = 1200x + 5x(x+20)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 100x - 24000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 4800 = 0.$$

Giải phương trình này ta được $x_1 = 60$; $x_2 = -80$.

Đối chiếu với điều kiện, ta thấy $x = 60$ thoả mãn.

Vậy $x = 60$ km/h là vận tốc xe khách và vận tốc xe du lịch là 80km/h.

Ví dụ 4. Học kì I số học sinh giỏi của lớp 8A bằng $\frac{1}{8}$ số học sinh của cả lớp. Sang học kì II có ba bạn phấn đấu trở thành học sinh giỏi nữa. Do đó số học sinh giỏi bằng 20% số học sinh của cả lớp. Hỏi lớp 8A có bao nhiêu học sinh giỏi ?

Lời giải

Ta lập phương trình như sau :

Gọi số học sinh của lớp là x (điều kiện x nguyên dương), thì số học sinh giỏi của học kì I so với số học sinh của cả lớp bằng $\frac{1}{8}x$, số học sinh giỏi của học kì II so với số học sinh của cả lớp bằng 20% số học sinh của cả lớp hay bằng

$\frac{1}{5}x$ và số học sinh giỏi học kì II hơn số học sinh giỏi học kì I là 3 em nên ta

có phương trình : $\frac{1}{8}x + 3 = \frac{1}{5}x$.

Giải phương trình này ta tìm được $x = 40$. Giá trị này thoả mãn điều kiện đặt ra nên là nghiệm của phương trình.

Vậy số học sinh của lớp 8A là 40 em.

Ví dụ 5. Khi mới nhận lớp 8A, cô giáo chủ nhiệm dự định chia lớp thành ba tổ có số học sinh như nhau. Nhưng sau đó lớp nhận thêm 4 học sinh nữa do đó cô chủ nhiệm đã chia đều số học sinh cả lớp thành bốn tổ. Hỏi lớp 8A hiện có bao nhiêu học sinh. Biết rằng so với phương án dự định ban đầu số học sinh hiện nay của một tổ ít hơn 2 học sinh.

Lời giải

Cách 1.

Ta lập phương trình như sau:

Gọi số học sinh ban đầu của lớp là x (điều kiện x nguyên, dương).

Khi đó số học sinh mỗi tổ là $\frac{x}{3}$.

Số học sinh sau khi nhận thêm là $(x + 4)$, số học sinh mỗi tổ sau khi nhận thêm là $\frac{x + 4}{4}$.

Theo bài ra so với phương án dự định ban đầu số học sinh hiện nay của một tổ ít hơn 2 học sinh nên ta có phương trình :

$$\frac{x + 4}{4} = \frac{x}{3} - 2.$$

Giải phương trình này ta được $x = 36$. Vậy số học sinh ban đầu của lớp là 36.

Vậy số học sinh của lớp 8A hiện nay là 40 em.

Cách 2.

Ta lập phương trình như sau:

Gọi số học sinh mỗi tổ theo dự định là x (điều kiện x nguyên, dương) thì số học sinh mỗi tổ hiện nay là $(x - 2)$.

Số học sinh của lớp trước đây là $3x$ (vì dự kiến chia làm ba tổ).

Số học sinh của lớp hiện nay là $4(x - 2)$.

Vì số học sinh của lớp trước đây thêm 4 em thì bằng số học sinh của lớp hiện nay nên ta có phương trình :

$$4(x - 2) = 3x + 4.$$

Giải phương trình này ta được $x = 12$, giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình.

Vậy số học sinh mỗi tổ theo dự định là $x = 12$ nên số học sinh của lớp hiện nay là : $3 \cdot 12 + 4 = 40$ (em).

III. BÀI TẬP

1. Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách ở giá thứ hai bằng $\frac{4}{5}$ số sách ở giá thứ nhất. Tìm số sách trong mỗi giá.
2. Năm nay tuổi mẹ gấp ba lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ chỉ gấp hai lần tuổi Phương. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi ?
3. Trên một công trình thuỷ lợi, một đội dân công phải đào đắp 500 m^3 đất. Nếu vắng 5 người thì mỗi người còn lại phải đào đắp thêm 5 m^3 mới hoàn thành kế hoạch. Tính xem đội dân công có bao nhiêu người ? (Coi như mỗi người đều đào đắp được số đất như nhau).
4. Một đội xe ô tô cần chở 30 tấn hàng từ thành phố này đến thành phố kia. Khi sắp chở thì có thêm một ô tô nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn theo dự kiến. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu ô tô ?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Chủ đề 1

1. a) Biến đổi phương trình đã cho thành $2x = -12$ hay $x = -6$ là nghiệm của phương trình.

b) Biến đổi phương trình đã cho thành $3x = 8$, hay $x = \frac{8}{3}$ là nghiệm của phương trình.

2. a) Biến đổi phương trình đã cho thành

$$x^2 + 7x + 10 - 12x + 9 = 25 - 10x + x^2, \text{ hay } 5x = 6.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{6}{5}$.

- b) Biến đổi phương trình đã cho thành

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 12x^2 - 12x - 8,$$

hay $12x = -24$. Phương trình này có nghiệm $x = -2$.

3. a) **Nhận xét**: Nếu giải phương trình này bằng cách quy đồng mẫu số chung thì rất phức tạp. Nên ta biến đổi “đặc biệt” bằng cách trừ cả hai vế phương trình cho 3 và tách thành tổng của ba số -1, khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} \frac{x-5}{100} - 1 + \frac{x-4}{101} - 1 + \frac{x-3}{102} - 1 &= \frac{x-100}{5} - 1 + \frac{x-101}{4} - 1 + \frac{x-102}{3} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x-105}{100} + \frac{x-105}{101} + \frac{x-105}{102} &= \frac{x-105}{5} + \frac{x-105}{4} + \frac{x-105}{3} \\ \Leftrightarrow (x-105) \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Ta thấy hằng số thứ hai trong tích trên khác 0, nên $x = 105$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- b) Cũng có nhận xét như trên, ta chuyển -5 sang vế trái và tách tổng thành năm số 1 phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{29-x}{21} + 1 + \frac{27-x}{23} + 1 + \frac{25-x}{25} + 1 + \frac{23-x}{27} + 1 + \frac{21-x}{29} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{50-x}{21} + \frac{50-x}{23} + \frac{50-x}{25} + \frac{50-x}{27} + \frac{50-x}{29} = 0 \\ \Leftrightarrow & (50-x) \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ta thấy hằng số thứ hai trong tích trên khác 0, nên $x = 50$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4. a) Biến đổi phương trình đã cho trở thành $4x = a^2 - a + 2$.

Phương trình này có nghiệm là $x = \frac{a^2 - a + 2}{4}$ với mọi giá trị của a .

b) Biến đổi phương trình đã cho trở thành $3x - 3a = 3x + 3a - 6$, hay $2a = 6$.

Ta thấy nếu $a = 3$ thì mọi giá trị của x đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Nếu $a \neq 3$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

5. a) Ta có: $a^2x - a = x - 1 \Leftrightarrow x(a^2 - 1) = a - 1$.

- Nếu $a \neq \pm 1$ thì phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{a+1}$.

- Nếu $a = -1$ thì phương trình có dạng $0x = -2$, phương trình vô nghiệm.

- Nếu $a = 1$ thì phương trình có dạng $0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị x .

b) Ta có: $a^2x - a = ax - 1 \Leftrightarrow ax(a - 1) = a - 1$.

- Nếu $a \neq 1, a \neq 0$ thì phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{a}$.

- Nếu $a = 0$ thì phương trình có dạng $0x = -1$, phương trình vô nghiệm.

- Nếu $a = 1$ thì phương trình có dạng $0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị x .

6. a) Điều kiện để phương trình có nghĩa là $a \neq \pm 4$.

Với điều kiện đó, biến đổi phương trình đã cho trở thành

$$\frac{x-a}{a-4} + \frac{x+a-1}{a+4} - \frac{x-a}{a^2-16} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-a)(a+4) + (x+a-1)(a-4) - x + a}{a^2-16} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax + 4x - a^2 - 4a + ax + a^2 - a - 4x - 4a + 4 - x + a}{a^2-16} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2a-1)x - 8a + 4}{a^2-16} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)x = 4(2a-1).$$

Vậy từ phương trình cuối, ta có :

- Nếu $a \neq \frac{1}{2}$, $a \neq \pm 4$ thì phương trình có nghiệm $x = 4$.
- Nếu $a = \frac{1}{2}$ phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị của x .

b) Điều kiện để phương trình có nghĩa là $a \neq \pm 1$.

Với điều kiện đó, biến đổi phương trình đã cho trở thành

$$\frac{x-a}{a+1} + \frac{x-1}{a-1} + \frac{2a}{a^2-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(a-1) + (x-1)(a+1) + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow 2ax = a^2 - 2a + 1.$$

Vậy từ phương trình cuối, ta có :

- Nếu $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{a^2 - 2a + 1}{2a}$.
- Nếu $a = 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chủ đề 2

1. a) Phương trình đã cho biến đổi thành $(x + 2)(x^2 - 3x + 5 - x^2) = 0$, hay $(x + 2)(5 - 3x) = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2$ và $x = \frac{5}{3}$.

- b) Phương trình đã cho biến đổi thành $x(2x - 1) = -3(2x - 1)$, hay $(2x - 1)(x + 3) = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3$ và $x = \frac{1}{2}$.

2. a) Khi $k = 0$, ta có phương trình $4x^2 - 25 = 0$, hay $(2x - 5)(2x + 5) = 0$.

Vậy khi $k = 0$ phương trình có nghiệm là $x = \frac{5}{2}$ và $x = -\frac{5}{2}$.

- b) Khi $k = -3$, ta có phương trình $4x^2 - 12x - 16 = 0$, hay $(x + 1)(x - 4) = 0$.

Vậy khi $k = -3$ phương trình có nghiệm là $x = -1$ và $x = 4$.

- c) Thay giá trị $x = -2$ vào phương trình, ta được $k^2 - 8k - 9 = 0$.

Coi đây là phương trình ẩn k , ta có $(k + 1)(k - 9) = 0$.

Từ đó ta có $k = -1$ và $k = 9$ là các giá trị cần tìm.

Vậy với $k = -1$ và $k = 9$ phương trình có nghiệm là $x = -2$.

3. a) Biến đổi phương trình đã cho, ta có

$$x^2(x + 2) + (x + 2) = 0, \text{ hay } (x + 2)(x^2 + 1) = 0.$$

Ta thấy $x^2 + 1 > 0$ với mọi giá trị x , nên phương trình trở thành $x + 2 = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2$.

- b) Biến đổi phương trình đã cho, ta có

$$x^2(x + 2) - (x + 2) = 0, \text{ hay } (x + 2)(x^2 - 1) = 0.$$

Tức là $(x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -2$ và $x = \pm 1$.

4. a) Biến đổi phương trình đã cho, ta có

$$3x^2 + 12x - 5x - 20 = 0, \text{ hay } 3x(x + 4) - 5(x + 4) = 0.$$

$$\text{Tức là } (x + 4)(3x - 5) = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -4$ và $x = \frac{5}{3}$.

b) Biến đổi phương trình đã cho, ta có

$$3x^2 - 6x + x - 2 = 0, \text{ hay } 3x(x - 2) + (x - 2) = 0.$$

$$\text{Tức là } (x - 2)(3x + 1) = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{1}{3}$ và $x = 2$.

5*. a) Đặt $x^2 + x = y$, ta có phương trình $y^2 + 4y - 12 = 0$.

Biến đổi phương trình đã cho, ta có $(y + 6)(y - 2) = 0$.

Phương trình có nghiệm $y = -6$ và $y = 2$.

- Với $y = -6$, ta có $x^2 + x = -6$, hay $x^2 + x + 6 = 0$.

Phương trình có thể viết dưới dạng $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{21}{4} = 0$, nên phương trình vô nghiệm.

- Với $y = 2$, ta có $x^2 + x = 2$, hay $x^2 + x - 2 = 0$.

Phương trình có thể viết dưới dạng $(x - 1)(x + 2) = 0$.

Phương trình có nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$.

b) Biến đổi phương trình đã cho, ta có

$$(x^2 + x)(x^2 + x - 2) = 24.$$

Đặt $x^2 + x = y$, ta có phương trình $y(y - 2) = 24$, hay $y^2 - 2y - 24 = 0$.

Tức là ta có $(y + 4)(y - 6) = 0$. Phương trình có nghiệm $y = -4$ và $y = 6$.

- Với $y = -4$, ta có phương trình $x^2 + x = -4$, hay $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} = 0$, nên phương trình vô nghiệm.

• Với $y = 6$, ta có phương trình $x^2 + x = 6$, hay $(x - 2)(x + 3) = 0$. Phương trình này có nghiệm là $x = -3$ và $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -3$ và $x = 2$.

6*. Ta viết lại phương trình dưới dạng $(x^2 - 6x + 9)^2 - 15(x^2 - 6x + 9) - 16 = 0$.

Đặt $y = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0$, ta có phương trình $y^2 - 15y - 16 = 0$.

Hay $(y + 1)(y - 16) = 0$, phương trình này có nghiệm $y = -1$ và $y = 16$.

Do $y = (x - 3)^2 \geq 0$, nên chỉ có giá trị $y = 16$ thích hợp.

Với $y = 16$, ta có phương trình $(x - 3)^2 = 16$.

Hay $(x - 7)(x + 1) = 0$, phương trình có nghiệm $x = -1$ và $x = 7$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 7$.

Chủ đề 3

1. a) Xét phương trình: $\frac{3}{1-4x} = \frac{2}{4x+1} - \frac{8+6x}{16x^2-1}$.

Điều kiện: $x \neq \pm \frac{1}{4}$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với:

$$3(4x+1) = 2(1-4x) + (8+6x), \text{ hay } 14x = 7, \text{ tức là } x = \frac{1}{2}.$$

Ta thấy giá trị $x = \frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện $x \neq \pm \frac{1}{4}$ nên là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Xét phương trình: $\frac{3}{5x-1} + \frac{2}{3-5x} = \frac{4}{(1-5x)(5x-3)}$.

Điều kiện: $x \neq \frac{1}{5}, x \neq \frac{3}{5}$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với:

$$3(3-5x) + 2(5x-1) = 4, \text{ hay } 5x = 3, \text{ tức là } x = \frac{3}{5}.$$

Ta thấy giá trị $x = \frac{3}{5}$ không thoả mãn điều kiện $x \neq \frac{3}{5}$ nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2. a) Xét phương trình: $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2} + 1$.

Điều kiện : $x \neq 2, x \neq -1$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với :

$$\frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{(x-2)(x+1)} + 1$$

tức là phương trình $(x+2)(x-2) + 3(x+1) = 3 + (x-2)(x+1)$, hay $4x = 2$,

nghĩa là $x = \frac{1}{2}$.

Ta thấy giá trị $x = \frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện $x \neq 2, x \neq -1$ nên là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Xét phương trình: $\frac{5-x}{4x^2-8x} + \frac{7}{8} = \frac{x-1}{2x(x-2)} + \frac{1}{8x-16}$

Điều kiện : $x \neq 2, x \neq 0$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với :

$$\frac{5-x}{4x(x-2)} + \frac{7}{8} = \frac{x-1}{2x(x-2)} + \frac{1}{8(x-2)}, \text{ tức là phương trình}$$

$$2(5-x) + 7x(x-2) = 4(x-1) + x, \text{ hay } 7(x^2 - 3x + 2) = 0,$$

nghĩa là $x = 1, x = 2$.

So với điều kiện, ta thấy giá trị $x = 2$ không thoả mãn nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

3. a) Xét phương trình: $\frac{x+6}{x-5} + \frac{x-5}{x+6} = \frac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$.

Điều kiện : $x \neq 5, x \neq -6$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với :

$$\frac{x+6}{x-5} + \frac{x-5}{x+6} = \frac{2x^2+23x+61}{(x-5)(x+6)}, \text{ tức là phương trình}$$

$$(x+6)^2 + (x-5)^2 = 2x^2 + 23x + 61, \text{ hay } 21x = 0, \text{ nghĩa là } x = 0.$$

Ta thấy giá trị $x = 0$ thoả mãn điều kiện $x \neq 5, x \neq -6$ nên là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Xét phương trình:
$$\frac{x^2-x}{x+3} - \frac{x^2}{x-3} = \frac{7x^2-3x}{9-x^2}.$$

Điều kiện: $x \neq \pm 3$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với:

$$\frac{x^2-x}{x+3} + \frac{x^2}{3-x} = \frac{7x^2-3x}{(3-x)(x+3)},$$

$$\text{hay } (x^2-x)(3-x) + x^2(x+3) = 7x^2-3x, \text{ nghĩa là } 0 = 0.$$

Ta thấy mọi giá trị x thoả mãn điều kiện $x \neq \pm 3$ đều thoả mãn phương trình đã cho.

Vậy mọi $x \neq \pm 3$ đều là nghiệm của phương trình.

4. a) Ta có $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, nên ĐKXĐ của phương trình là $x \neq -1, x \neq 2$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với:

$$\frac{x^2-4+3(x+1)}{x^2-x-2} = \frac{3+x^2-x-2}{x^2-x-2}.$$

$$\text{Hay } 4x = 2, \text{ tức là } x = \frac{1}{2}.$$

So với điều kiện ta thấy $x = \frac{1}{2}$ thoả mãn nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

- b) Ta có $x^2 + x - 30 = (x+6)(x-5)$, nên ĐKXĐ của phương trình là $x \neq -6, x \neq 5$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với :

$$\frac{(x+6)^2 + (x-5)^2}{x^2 + x - 30} = \frac{2x^2 + 23x + 61}{x^2 + x - 30}, \text{ hay } 21x = 0, \text{ tức là } x = 0.$$

So với điều kiện ta thấy $x = 0$ thoả mãn nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

5. a) Ta có $8 + x^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$, nên ĐKXĐ của phương trình là $x \neq -2$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với :

$$\begin{aligned} 8 + x^3 + x^2 - 2x + 4 &= 12 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) &= 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2) = 0. \end{aligned}$$

Phương trình cuối có nghiệm $x = 0, x = 1, x = -2$.

Chỉ có các giá trị $x = 0, x = 1$ thoả mãn điều kiện đặt ra nên là nghiệm của phương trình đã cho.

- b) Ta có ĐKXĐ của phương trình là $x \neq \frac{2}{7}$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với :

$$(2x+3)(10-4x) = (x-5)(10-4x) \Leftrightarrow 2(5-2x)(x+8) = 0.$$

Phương trình cuối có nghiệm $x = \frac{5}{2}, x = -8$, các giá trị này thoả mãn điều kiện đặt ra nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{5}{2}, x = -8$.

6. a) Ta có ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 1$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với :

$$1 + a = (1-a)(1-x), \text{ hay } x(a-1) = 2a.$$

- Nếu $a = 1$ phương trình có dạng $0x = 2$, trường hợp này phương trình vô nghiệm.
- Nếu $a \neq 1$ phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{2a}{a-1}$.

b) Ta có ĐKXD của phương trình là $x \neq \pm 2a$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với :

$$\frac{x}{x+2a} - \frac{2a+x}{x-2a} = \frac{8a^2}{(x+2a)(x-2a)}$$

$$\Leftrightarrow x(x-2a) - (2a+x)^2 = 8a^2 \Leftrightarrow 6ax = -12a^2.$$

- Nếu $a = 0$ phương trình có dạng $0x = 0$, trường hợp này phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị $x \neq 0$.

Vậy $a = 0$ phương trình đã cho có nghiệm là mọi $x \neq 0$.

- Nếu $a \neq 0$ phương trình có nghiệm là $x = -2$, giá trị này thoả mãn điều kiện $x \neq \pm 2a$ với $a \neq \pm 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -2$ với $a \neq \pm 1$.

Chủ đề 4

1. Ta lập phương trình như sau:

Gọi số sách ở giá thứ nhất trước khi chuyển là x (cuốn) (x nguyên, $x > 50$).

Khi đó số sách ở giá thứ hai trước khi chuyển là $450 - x$ (cuốn).

Số sách ở giá thứ hai sau khi chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang bằng

$$450 - x + 50 = 500 - x.$$

Vì số sách sau khi chuyển bằng $\frac{4}{5}$ số sách còn lại của giá thứ nhất (đã chuyển) tức là bằng $\frac{4}{5}(x - 50)$, nên ta có phương trình :

$$500 - x = \frac{4}{5}(x - 50).$$

Giải phương trình này ta được $x = 300$, giá trị này thoả mãn điều kiện.

Vậy số sách ở giá thứ nhất là 300 và giá thứ hai là 150 cuốn.

2. Ta lập phương trình như sau :

Gọi tuổi của Phương hiện nay là x (x nguyên, $x > 0$).

Khi đó tuổi của Phương sau 13 năm là $x + 13$.

Tuổi của mẹ hiện nay là $3x$ (vì tuổi mẹ gấp ba lần tuổi Phương hiện nay), và sau 13 năm nữa tuổi của mẹ là $3x + 13$.

Vì sau 13 năm tuổi của mẹ gấp hai lần tuổi của Phương, nên ta có phương trình :

$$3x + 13 = 2(x + 13).$$

Giải phương trình này ta được $x = 13$, giá trị này thoả mãn điều kiện.

Vậy năm nay Phương là 13 tuổi.

3. Cách 1.

Ta lập phương trình như sau:

Gọi số người trong đội dân công dự kiến là x (x nguyên, $x > 5$).

Khi đó số đất dự kiến mỗi người làm là $\frac{500}{x}$.

Số người thực làm của đội là $x - 5$, khi đó số đất thực mỗi người làm là $\frac{500}{x - 5}$.

Vì số đất thực làm của mỗi người hơn số đất dự kiến là 5 m^3 nên ta có phương trình :

$$\frac{500}{x} = \frac{500}{x - 5} - 5.$$

Giải phương trình này ta được $x = -20$ và $x = 25$. So với điều kiện chỉ có giá trị $x = 25$ là thoả mãn.

Vậy đội dân công có 25 người.

Cách 2.

Ta lập phương trình như sau:

Gọi số đất dự kiến mỗi người là $x \text{ (m}^3\text{)}$ (điều kiện : $x > 0$).

Khi đó số người dự kiến là $\frac{500}{x}$.

Số đất mỗi thực làm người làm là $x + 5 \text{ (m}^3\text{)}$;

Số người thực làm bằng $\frac{500}{x + 5}$.

Vì số người thực làm ít hơn số người dự kiến là 5 người, nên ta có phương trình :

$$\frac{500}{x} = \frac{500}{x+5} + 5.$$

Giải phương trình này ta được $x = -25$ và $x = 20$. So với điều kiện chỉ có giá trị $x = 20$ thoả mãn. Vậy số đất dự kiến mỗi người làm là 20 m^3 . Do đó đội dân công có 25 người.

4. Cách 1.

Ta lập phương trình như sau:

Gọi số hàng dự kiến một xe chở là x (đơn vị : tấn), (điều kiện : $x > 1$).

Khi đó số xe ô tô dự kiến ban đầu là $\frac{30}{x}$;

Số hàng thực tế một xe chở là $x - 1$ (do số hàng mỗi xe thực chở ít hơn dự kiến 1 tấn).

Số xe thực chở là $\frac{30}{x-1}$.

Vì số xe thực chở hơn số xe dự kiến 1 xe nên ta có phương trình :

$$\frac{30}{x} = \frac{30}{x-1} - 1.$$

Giải phương trình này ta được $x = 6$ và $x = -5$. Chỉ có giá trị $x = 6$ thoả mãn điều kiện.

Do đó mỗi xe dự kiến chở 6 tấn hàng nên đội xe ban đầu có 5 xe.

Cách 2.

Ta có thể coi số xe của đoàn ban đầu là ẩn, làm giống cách 1.

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chủ đề 1

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bất đẳng thức là hệ thức có dạng $a > b$ (hoặc $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$).

Để chứng minh bất đẳng thức $a > b$, ta xét hiệu $a - b$ và chứng minh hiệu này là số dương. Phương pháp này gọi là chứng minh bất đẳng thức (BĐT) bằng định nghĩa.

Phương pháp chứng minh BĐT bằng phương pháp biến đổi tương đương : Để chứng minh $a > b$ ta có $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ và chứng minh BĐT này đúng.

Ngoài ra còn có phương pháp phản chứng, chứng minh xuất phát từ BĐT đúng và phương pháp dựa vào các bất đẳng thức cơ bản như bất đẳng thức Côsi, Bunhiacôski,

Các tính chất của bất đẳng thức :

- $a > b ; b > c \Rightarrow a > c$. (tính chất bắc cầu)
- $a > b \Rightarrow a + c > b + c$. (tính chất cộng với một số)
- $a > b ; c > 0 \Rightarrow ac > bc$. (tính chất nhân hai vế với cùng một số)
 $a > b ; c < 0 \Rightarrow ac < bc$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng khái niệm bất đẳng thức, các phương pháp chứng minh bất đẳng thức để chứng minh bất đẳng thức.

Lưu ý: Nếu bất đẳng thức có dạng $a \geq b$, $a \leq b$ thì khi chứng minh phải xét trường hợp xảy ra dấu bằng.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $a < b$, hãy chứng minh :

a) $3a + 1 < 3b + 1$;

b) $-2a - 5 > -2b - 5$.

Lời giải

a) Chứng minh : $3a + 1 < 3b + 1$.

Cách 1.

Xét hiệu $3b + 1 - (3a + 1) = 3b + 1 - 3a - 1 = 3(a - b) > 0$, do $a > b$.

Vậy $3b + 1 > 3a + 1$.

Cách 2.

Ta có $a < b$, $3 > 0$ nên $3a < 3b$ (theo tính chất nhân hai vế với số dương).

Do đó $3a + 1 < 3b + 1$ (theo tính chất cộng với một số).

Cách 3.

Giả sử $3a + 1 \geq 3b + 1$ (phản chứng).

Từ đó, ta có $3a + 1 + (-1) \geq 3b + 1 + (-1)$, hay $3a \geq 3b$ nên $3a \frac{1}{3} \geq 3b \frac{1}{3}$

tức là $a \geq b$.

Điều này trái với giả thiết $a < b$, điều giả sử trên là sai.

Vậy $3a + 1 < 3b + 1$.

b) Chứng minh : $-2a - 5 > -2b - 5$.

Cách 1.

Xét hiệu $-2a - 5 - (-2b - 5) = -2a - 5 + 2b + 5 = -2(a - b)$.

Do $a < b$ nên $a - b < 0$, mặt khác $-2 < 0$ nên $-2(a - b) > 0$.

Vậy theo định nghĩa thì $-2a - 5 > -2b - 5$.

Cách 2.

Ta có $a < b$, $-2 < 0$ do đó $-2a > -2b$, nên $-2a + (-5) > -2b + (-5)$.

Tức là $-2a - 5 > -2b - 5$.

Ví dụ 2. Cho $a > b$ chứng minh rằng :

a) $a + 5 > b + 5$;

b) $4 - 3a < 4 - 3b$.

Lời giải

a) Xét hiệu $a + 5 - (b + 5) = a - b > 0$ do giả thiết.

Vậy $a + 5 > b + 5$.

b) Xét hiệu $4 - 3a - (4 - 3b) = 3b - 3a = 3(b - a)$.

Do giả thiết $a > b$ nên $b - a < 0$, do đó $3(b - a) < 0$.

Vậy $4 - 3a < 4 - 3b$.

Lưu ý: Ta cũng có thể dùng phương pháp khác để chứng minh các bất đẳng thức này.

Chẳng hạn, từ $a > b$ ta có $a + 5 > b + 5$.

Ví dụ 3. So sánh a với b :

a) Nếu $5a - 7 \leq 5b - 7$;

b) Nếu $5 - 3a \geq 5 - 3b$.

Lời giải

a) Ta có $5a - 7 \leq 5b - 7$, nên $5a - 7 + 7 \leq 5b - 7 + 7$ hay là $5a \leq 5b$.

Vậy $a \leq b$.

b) Ta có $5 - 3a \geq 5 - 3b$, nên $5 - 3a - 5 \geq 5 - 3b - 5$, tức là $-3a \geq -3b$.

Từ đó ta có $-3(b - a) \geq 0$, nghĩa là $b - a \geq 0$ hay $b \geq a$.

Ví dụ 4. Chứng tỏ với mọi số thực a, b bất kì ta luôn có:

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$;

b) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.

Lời giải

a) Xét hiệu $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$.

Ta thấy $(a - b)^2 \geq 0$, đúng với mọi a, b nên $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

b) Xét hiệu $\frac{a^2 + b^2}{2} - ab = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} = \frac{(a - b)^2}{2}$.

Ta thấy $\frac{(a - b)^2}{2} \geq 0$, đúng với mọi a, b nên $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

Chú ý: Hai bất đẳng thức này có tên là "Bất đẳng thức Côsi" mà sau này thường được sử dụng để chứng minh các bất đẳng thức.

Ví dụ 5. Chứng tỏ với mọi số thực a, b cùng dấu ta luôn có :

$$\text{a) Nếu } a > b \text{ thì } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}; \quad \text{b) } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Lời giải

$$\text{a) Xét hiệu } \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, \text{ ta có } \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} > 0 \text{ do } a > b \text{ và } a, b \text{ cùng dấu.}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

$$\text{b) Xét hiệu } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2, \text{ ta có}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0 \text{ do } a, b \text{ cùng dấu.}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \text{ dấu "=" xảy ra khi } a = b.$$

Lưu ý: Đây cũng là hai bất đẳng thức hay được sử dụng, bất đẳng thức câu b) là dạng khác của bất đẳng thức Côsi.

Ví dụ 6. Cho a, b là các số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Do a, b là các số dương nên

$$\frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0, \text{ điều này luôn đúng.}$$

$$\text{Vậy với } a, b \text{ là các số dương thì } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } a = b.$$

Lưu ý: Đây cũng là dạng khác của bất đẳng thức Côsi.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ với mọi a, b, x, y .

Lời giải

Xét hiệu $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$, ta có

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \\ &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - a^2y^2 - 2axby \\ &= (ax - by)^2 \geq 0, \text{ nên } (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $ax - by = 0$, hay $\frac{x}{b} = \frac{y}{a}$.

Bất đẳng thức này là bất đẳng thức Bunhiacôpski, rất hay được sử dụng trong chứng minh bất đẳng thức.

III. BÀI TẬP

1. Cho a, b là các số dương chứng tỏ rằng $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
2. Chứng tỏ rằng với mọi số thực a , ta luôn có $a(a + 2) < (a + 1)^2$.
3. Chứng minh các bất đẳng thức sau :
 - a) $(m + 1)^2 \geq 4m$ với mọi số thực m .
 - b) $m^2 + n^2 + 2 \geq 2(m + n)$ với mọi số thực m, n .
4. Cho a, b là các số dương chứng tỏ rằng $(a + b)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 4$.
5. Chứng tỏ rằng diện tích hình vuông có cạnh là 10m không nhỏ hơn diện tích hình chữ nhật có cùng chu vi.
6. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta luôn có : $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

Chú ý: Ta đã sử dụng cách xuất phát từ bất đẳng thức đúng đi đến bất đẳng thức cần chứng minh. Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng cách dùng định nghĩa, tuy nhiên phải thêm bớt cho xuất hiện các bất đẳng thức đã biết.
7. Chứng minh :
 - a) $a^2 - 2ab + b^2 + 1 > 0$ với mọi số thực a, b .
 - b) $a - a^2 - 1 < 0$ với mọi số thực a .

Chủ đề 2

KHÁI NIỆM VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$), trong đó x là ẩn, a và b là các số đã cho, $a \neq 0$.

Giải bất phương trình là đi tìm tập hợp nghiệm của bất phương trình đó.

Hai bất phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Khi giải bất phương trình, ta có thể :

- Chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu của hạng tử đó.
- Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số dương.
- Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số âm và đổi chiều của bất phương trình.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dùng các phép biến đổi tương đương để biến đổi bất phương trình đã cho về bất phương trình bậc nhất đơn giản, nghiệm của bất phương trình đó là nghiệm của bất phương trình đã cho.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau :

a) $3x - 5 < 4$;

b) $3 - 4x \geq 19$.

Lời giải

a) Ta có $3x - 5 < 4 \Leftrightarrow 3x < 4 + 5$, hay $3x < 9 \Leftrightarrow x < 3$.

Vậy $x < 3$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Ta có $3 - 4x \geq 19 \Leftrightarrow 3 - 19 \geq 4x$

$$\Leftrightarrow 4x \leq -16 \Leftrightarrow x \leq -\frac{16}{4} \Leftrightarrow x \leq -4.$$

Vậy $x \leq -4$ là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên trục số :

a) $\frac{3x-1}{4} > 2;$

b) $\frac{6-4x}{5} < 1.$

Lời giải

a) Ta có : $\frac{3x-1}{4} > 2 \Leftrightarrow 3x-1 > 8$

$$\Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy $x > 3$ là nghiệm của bất phương trình.

Ta có biểu diễn nghiệm của bất phương trình trên trục số như sau :

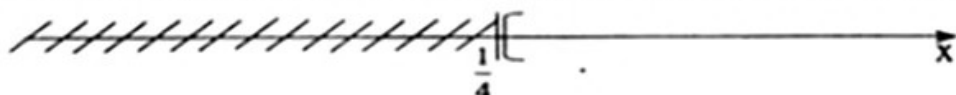


b) Ta có : $\frac{6-4x}{5} < 1 \Leftrightarrow 6-4x < 5$

$$\Leftrightarrow 4x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}.$$

Vậy $x > \frac{1}{4}$ là nghiệm của bất phương trình.

Ta có biểu diễn nghiệm của bất phương trình trên trục số như sau :



Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau :

a) $(x-1)^2 > x(x+3);$

b) $(x-2)(x+2) < x(x-4).$

Lời giải

a) Ta có $(x-1)^2 > x(x+3) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > x^2 + 3x$

$$\Leftrightarrow 5x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{5}.$$

Vậy $x > \frac{1}{5}$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Ta có $(x-2)(x+2) < x(x-4)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 < x^2 - 4x \Leftrightarrow 4x < 4 \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy $x < 1$ là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 4. Giải các bất phương trình sau :

a) $2x + 3 < 6 - (3 - 4x)$;

b) $2 - 7x > (3 + 2x) - (5 - 6x)$.

Lời giải

a) Ta có $2x + 3 < 6 - (3 - 4x)$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 < 6 - 3 + 4x$$

$$\Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Vậy $x > 0$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Ta có $2 - 7x > (3 + 2x) - (5 - 6x)$

$$\Leftrightarrow 2 - 7x > 3 + 2x - 5 + 6x$$

$$\Leftrightarrow 15x < 4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{15}.$$

Vậy $x < \frac{4}{15}$ là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 5. Giải các bất phương trình sau :

a) $\frac{1-2x}{4} - 2 < \frac{1-5x}{8}$;

b) $\frac{x-1}{4} - 1 > \frac{x+1}{3} + 8$.

Lời giải

a) Ta có $\frac{1-2x}{4} - 2 < \frac{1-5x}{8}$

$$\Leftrightarrow 2 - 4x - 16 < 1 - 5x$$

$$\Leftrightarrow x < 15.$$

Vậy $x < 15$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Ta có : $\frac{x-1}{4} - 1 > \frac{x+1}{3} + 8 \Leftrightarrow 3(x-1) - 12 > 4(x+1) + 96$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 - 12 > 4x + 4 + 96$$

$$\Leftrightarrow -x > 115 \Leftrightarrow x < -115.$$

Vậy $x < -115$ là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 6. Tìm giá trị của x để :

a) Biểu thức $5 - 2x$ là số dương ?

b) Giá trị của biểu thức $x + 3$ nhỏ hơn giá trị của biểu thức $4x - 5$?

Lời giải

a) Biểu thức $5 - 2x$ là số dương, nghĩa là $5 - 2x > 0$, hay $2x < 5$ tức là $x < \frac{5}{2}$.

Vậy với $x < \frac{5}{2}$ thì biểu thức $5 - 2x$ là số dương.

b) Biểu thức $x + 3$ có giá trị nhỏ hơn giá trị của biểu thức $4x - 5$,

nghĩa là $x + 3 < 4x - 5$, hay $3x > 8$ tức là $x > \frac{8}{3}$.

Ví dụ 7. Với giá trị nào của x thì giá trị phân thức $\frac{5-2x}{6}$ lớn hơn giá trị phân thức $\frac{5x-2}{3}$.

Lời giải

Ta phải tìm x (giải bất phương trình) sao cho $\frac{5-2x}{6} > \frac{5x-2}{3}$.

Bất phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}\frac{5-2x}{6} - \frac{5x-2}{3} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5-2x-2(5x-2)}{6} &> 0 \Leftrightarrow \frac{9-12x}{6} > 0.\end{aligned}$$

Ta thấy trong bất phương trình cuối do $6 > 0$, nên bất phương trình đó tương đương với $9 - 12x > 0$, nghiệm của bất phương trình này là $x < \frac{9}{12}$ hay $x < \frac{3}{4}$.

Vậy với $x < \frac{3}{4}$ thì giá trị phân thức $\frac{5-2x}{6}$ lớn hơn giá trị phân thức $\frac{5x-2}{3}$.

Ví dụ 8. Giải bất phương trình $ax + 1 \geq a^2 + x$ với a là tham số.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $(a-1)x \geq a^2 - 1$, hay

$$(a-1)x \geq (a-1)(a+1).$$

- Nếu $a - 1 > 0$ hay $a > 1$, bất phương trình có nghiệm là $x \geq a + 1$.
- Nếu $a - 1 < 0$ hay $a < 1$, bất phương trình có nghiệm là $x \leq a + 1$.

• Nếu $a - 1 = 0$ hay $a = 1$, bất phương trình có dạng $0x \geq 0$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị của x .

Lưu ý: Việc giải bất phương trình có chứa tham số, tùy thuộc vào giá trị của tham số ta sẽ tìm được nghiệm của bất phương trình hoặc bất phương trình vô nghiệm quá trình đó được gọi là giải và biện luận bất phương trình.

Ví dụ 9. Tìm giá trị x thỏa mãn đồng thời hai bất phương trình :

$$\frac{2x}{5} + \frac{3-2x}{3} \geq \frac{3x+2}{2} \text{ và } \frac{x}{2} + \frac{3-2x}{5} \geq \frac{3x-5}{6}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{2x}{5} + \frac{3-2x}{3} \geq \frac{3x+2}{2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 12x + 10(3-2x) \geq 15(3x+2)$$

$$\Leftrightarrow 12x + 30 - 20x \geq 45x + 30$$

$$\Leftrightarrow 53x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{x}{2} + \frac{3-2x}{5} \geq \frac{3x-5}{6} \quad (2)$$

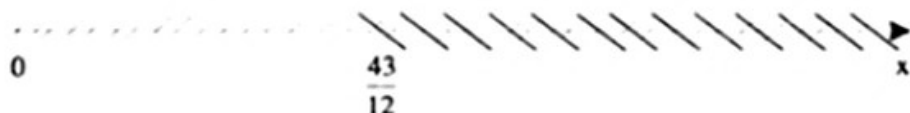
$$\Leftrightarrow 15x + 6(3-2x) \geq 5(3x-5)$$

$$\Leftrightarrow 15x + 18 - 12x \geq 15x - 25$$

$$\Leftrightarrow 12x \leq 43 \Leftrightarrow x \leq \frac{43}{12}.$$

Giá trị x thỏa mãn đồng thời hai bất phương trình trên là $x \leq 0$.

Lưu ý: Trong ví dụ này ta phải đi tìm giá trị của ẩn số thỏa mãn hai bất phương trình, ta phải tìm giá trị của ẩn thỏa mãn từng bất phương trình, từ đó tìm giá trị của ẩn thỏa mãn cả hai bất phương trình. Ta gọi đó là giải hệ bất phương trình, để giải hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi kết hợp nghiệm của hai bất phương trình trên trục số tìm các giá trị chung thỏa mãn đồng thời hai bất phương trình. Quá trình biểu diễn nghiệm của hai bất phương trình trên trục số và kết hợp nghiệm như sau :



III. BÀI TẬP

1. Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $9x - 3(2x + 1) > 5x + 2(1 - 5x)$; b) $4x + 3(x + 5) < 3x - 5(x + 1)$.

c) $\frac{15 - 6x}{3} > 5$; d) $\frac{2 - x}{3} < \frac{3 - 2x}{5}$.

2. Giải các bất phương trình sau :

a) $8x + 3(x + 1) > 5x - (2x - 6)$; b) $2x(6x - 1) > (3x - 2)(4x + 3)$.

3. Giải các bất phương trình sau :

a) $(x - 3)^2 < x^2 - 3$; b) $(x - 3)(x + 3) > (x + 2)^2 + 3$.

4. Giải các bất phương trình sau :

a) $(3x - 5)^2 > (3x + 2)(5 - 3x)$; b) $(x - 3)^2 > (x + 2)^2$.

5. Với giá trị nào của a nghiệm của phương trình sau là số dương :

$$\frac{a + 1}{x - 1} = 1 - a.$$

6. Tìm giá trị x thoả mãn hai bất phương trình sau :

$$2x + 1 > x + 4 \text{ và } x + 3 < 3x - 5.$$

7. Tìm giá trị nguyên của x thoả mãn hai bất phương trình sau :

$$\frac{3x - 2}{5} > \frac{x}{2} + 0,8 \text{ và } 1 - \frac{2x - 5}{6} > \frac{3 - x}{4}.$$

8. Tìm giá trị nguyên của x thoả mãn hai bất phương trình sau :

$$2(3x - 4) < 3(4x - 3) + 16 \text{ và } 4(1 + x) < 3x + 5.$$

9. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{2}{x + 1} - \frac{5}{1 - x^2} \right) : \frac{1 - 2x}{x^2 - 1}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của x để $A > 0$.

10. Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2 - 3x} \right) : \left(\frac{x^2}{27 - 3x^2} + \frac{1}{x + 3} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tìm giá trị của x để $B < -1$.

Chủ đề 3

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, ta cần khử dấu giá trị tuyệt đối. Ta có : Giá trị tuyệt đối của một biểu thức bằng chính nó nếu biểu thức không âm, bằng số đối của nó nếu biểu thức âm :

$$|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

Vì thế, để khử dấu giá trị tuyệt đối, ta cần xét các giá trị của biến làm cho biểu thức âm hay không âm (tức là xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối).

Ta có định lí dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$ ($a \neq 0$) : Nhị thức $ax + b$ ($a \neq 0$)

Cùng dấu với hệ số a với những giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức ;

Trái dấu với hệ số a với những giá trị của x bé hơn nghiệm của nhị thức.

Gọi x_0 là nghiệm của nhị thức $ax + b$ thì $x_0 = -\frac{b}{a}$ và ta có bảng mô tả dấu của nhị thức :

x	$x_0 = -\frac{b}{a}$		
$ax + b$	Trái dấu của a	0	Cùng dấu của a

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng khái niệm giá trị tuyệt đối, các phép biến đổi tương đương và định lí dấu nhị thức bậc nhất biến đổi phương trình đã cho về phương trình đơn giản đã biết cách Lời giải Từ đó tìm được nghiệm của phương trình ban đầu.

Lưu ý : Nếu dùng phép biến đổi không tương đương thì khi tìm được nghiệm phải thử lại vào phương trình ban đầu.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xét dấu các nhị thức $3x + 5$ và $-2x + 7$.

Lời giải

Nghiệm của nhị thức $3x + 5$ là $x_0 = -\frac{5}{3}$ và nghiệm của nhị thức $-2x + 7$ là

$x_0 = \frac{7}{2}$, nên ta có bảng xét dấu của các nhị thức này như sau :

x	$x_0 = -\frac{5}{3}$ $x_0 = \frac{7}{2}$		
$3x + 5$	-	0	+
$-2x + 7$	+	+	0

Ví dụ 2. Giải các phương trình :

a) $|x + 3| = 3x - 1$;

b) $|x - 4| + 3x = 5$.

Lời giải

a) Xét phương trình $|x + 3| = 3x - 1$. (1)

Ta có $|x + 3| = x + 3$ khi $x + 3 \geq 0$ hay $x \geq -3$:

$$|x + 3| = -(x + 3) = -x - 3 \text{ khi } x + 3 < 0 \text{ hay } x < -3.$$

Vậy để giải phương trình (1), ta quy về giải hai phương trình sau :

- $x + 3 = 3x - 1$ với điều kiện $x \geq -3$.

Ta có $x + 3 = 3x - 1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Giá trị $x = 2$ thoả mãn điều kiện $x \geq -3$ nên $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1).

- $-x - 3 = 3x - 1$ với điều kiện $x < -3$.

Ta có $-x - 3 = 3x - 1 \Leftrightarrow 4x = -2$ hay $x = -\frac{1}{2}$.

Giá trị $x = -\frac{1}{2}$ không thoả mãn điều kiện $x < -3$ nên bị loại.

Vậy phương trình (1) có nghiệm $x = 2$.

b) Xét phương trình $|x - 4| + 3x = 5$. (2)

Cách 1.

Ta có $|x - 4| = x - 4$ khi $x - 4 \geq 0$ hay $x \geq 4$.

$$|x - 4| = -(x - 4) = 4 - x \text{ khi } x - 4 < 0 \text{ hay } x < 4.$$

Vậy để giải phương trình (2) ta quy về giải hai phương trình

- $x - 4 + 3x = 5$ với điều kiện $x \geq 4$.

$$x - 4 + 3x = 5 \Leftrightarrow 4x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.$$

Giá trị $x = \frac{9}{4}$ không thoả mãn điều kiện $x \geq 4$ nên bị loại.

- $4 - x + 3x = 5$ với điều kiện $x < 4$.

$$4 - x + 3x = 5 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Giá trị $x = \frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện $x < 4$ nên $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình (2) có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Cách 2.

Ta có thể trình bày cách giải khác như sau :

$$\begin{aligned} |x - 4| + 3x = 5 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 + 3x = 5 & \text{với } x \geq 4 \\ 4 - x + 3x = 5 & \text{với } x < 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 9 & \text{với } x \geq 4 \\ 2x = 1 & \text{với } x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} & \text{với } x \geq 4 \\ x = \frac{1}{2} & \text{với } x < 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta thấy giá trị $x = \frac{9}{4}$ không thoả mãn điều kiện $x \geq 4$ nên bị loại.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình :

a) $|x - 5| = 3x$;

b) $|x + 2| = 2x - 10$.

Lời giải

a) Xét phương trình $|x - 5| = 3x$, ta có :

- Với $x < 5$ phương trình có dạng $5 - x = 3x$, hay $4x = 5$.

Phương trình này có nghiệm $x = \frac{5}{4}$, so với điều kiện thì giá trị này thoả mãn nên là nghiệm của phương trình.

- Với $x \geq 5$ phương trình có dạng $x - 5 = 3x$, hay $2x = -5$.

Phương trình này có nghiệm $x = -\frac{5}{2}$, so với điều kiện giá trị này không thoả mãn nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{5}{4}$.

b) Xét phương trình $|x + 2| = 2x - 10$, ta có

- Với $x < -2$ phương trình có dạng $-x - 2 = 2x - 10$, hay $3x = 8$.

Phương trình này có nghiệm $x = \frac{8}{3}$, so với điều kiện giá trị này không thoả mãn nên bị loại.

- Với $x \geq -2$ phương trình có dạng $x + 2 = 2x - 10$, hay $x = 12$.

Giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 12$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $|x - 1| = |3x - 5|$.

Lời giải

Ta có thể giải phương trình này bằng phương pháp chia khoảng như ví dụ trên.

Tuy nhiên ta có thể giải bằng phương pháp dựa vào định nghĩa giá trị tuyệt đối, cách này nhanh và gọn hơn vì $|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$.

Việc giải phương trình đưa về giải hai phương trình sau :

- $x - 1 = 3x - 5$, phương trình này cho ta nghiệm $x = 2$.

- $x - 1 = 5 - 3x$, phương trình này cho ta nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình : $|x - 5| + |x + 3| = 3x - 1$. (1)

Lời giải

Ta lập bảng xét dấu hai nhị thức $x - 5$ và $x + 3$ để khử dấu giá trị tuyệt đối :

x	-3	5
$x - 5$	-	0
$x + 3$	-	0

Như vậy, ta xét ba khoảng giá trị của biến x :

- Với $x < -3$ phương trình (1) có dạng :

$$(5 - x) - (x + 3) = 3x - 1, \text{ ta tìm được } x = \frac{3}{5} \text{ giá trị này bị loại vì}$$

không thuộc khoảng đang xét.

- Với $-3 \leq x < 5$ phương trình (1) có dạng :

$(5 - x) + (x + 3) = 3x - 1$, hay $3x = 9$ ta tìm được $x = 3$, giá trị này thuộc khoảng đang xét.

- Với $x \geq 5$ phương trình (1) có dạng :

$(x - 5) + (x + 3) = 3x - 1$, hay $x = -1$, giá trị này không thuộc khoảng đang xét nên bị loại.

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x = 3$.

III. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau :

a) $|3x| = x + 8$;

b) $2x = |4x + 8|$;

c) $|x - 3| - x = 7$;

d) $|x + 2| = 3 - 5x$.

2. Giải các phương trình sau :

a) $2|x - 3| + 5x - 1 = 0$;

b) $7|x + 2| - (4x - 3) = 0$.

3. Giải các phương trình sau :

a) $|x - 1| = |x - 5|$;

b) $|x - 1| = |3x - 5|$.

4. Giải các phương trình sau :

a) $|x - 4| + |x + 1| = 9$;

b) $|x - 3| + |x + 4| = 2$.

5. Giải các phương trình sau :

a) $|x| - |2x + 3| = x - 1$;

b) $x - |x + 2| + 2|x - 1| = 0$.

Chủ đề 4

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Trong chủ đề này ta đề cập đến giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức đơn giản hay gặp trong Đại số lớp 8. Đó là biểu thức dạng đa thức mà thường dưới dạng tam thức bậc hai ; hoặc dạng phân thức mà mẫu số có dạng tam thức bậc hai.

Ta hay sử dụng biến đổi tam thức bậc hai về dạng hằng đẳng thức là bình phương nhị thức, như sau :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} .$$

Do $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$, nên ta có :

• Nếu $a > 0$ thì $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, hay

$ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

• Nếu $a < 0$ thì $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, hay

$ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Đối với biểu thức phân thức, nếu tử thức là hằng số thì giá trị của biểu thức là nhỏ nhất khi mẫu thức lớn nhất và ngược lại, giá trị phân thức là lớn nhất khi mẫu thức nhỏ nhất.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dựa vào kiến thức cần nhớ, biến đổi biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất về dạng cơ bản, sau đó đánh giá biểu thức và suy ra giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của biểu thức.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -x^2 + 3x - 5$.

Lời giải

Ta có $A = -x^2 + 3x - 5 = -(x^2 - 3x + 5)$

$$= -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right] = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4} \leq -\frac{11}{4}.$$

Vậy A đạt giá trị lớn nhất bằng $-\frac{11}{4}$ khi $x = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 2x^2 - 10x + 7$.

Lời giải

Ta có $B = 2x^2 - 10x + 7 = 2\left(x^2 - 5x + \frac{7}{2}\right)$

$$= 2\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}\right] = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{11}{2} \geq -\frac{11}{2}.$$

Vậy B đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{11}{2}$ khi $x = \frac{5}{2}$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = \frac{3}{x^2 + x + 1}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Vì vậy $C \leq 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$. Hay biểu thức C đạt giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = -\frac{1}{2}$.

Chú ý: Ở đây ta sử dụng bất đẳng thức a, b cùng dấu $a > b$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ đã được chứng minh trong phần bất đẳng thức.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng mỗi phương trình sau đây không có nghiệm thực.

a) $x^2 + x + 1 = 0$;

b) $-x^2 + 5x - 7 = 0$.

Lời giải

a) Ta có $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$.

Do đó với mọi giá trị thực của x , ta luôn có $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

Vậy không tồn tại giá trị thực của x để $x^2 + x + 1 = 0$, tức là phương trình không có nghiệm thực.

b) Tương tự câu a, ta có

$$-x^2 + 5x - 3 = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4}.$$

Do đó với mọi giá trị thực của x , ta luôn có $-x^2 + 5x - 7 \leq -\frac{3}{4}$.

Vậy không tồn tại giá trị thực của x để $-x^2 + 5x - 7 = 0$, tức là phương trình không có nghiệm thực.

Ví dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2} = \frac{-2}{9x^2 - 6x + 5} = \frac{-2}{(3x - 1)^2 + 4}.$$

Do $(3x-1)^2 + 4 \geq 4$ nên $\frac{1}{(3x-1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{(3x-1)^2 + 4} \geq \frac{-1}{4}$.

Từ đó $\frac{-2}{(3x-1)^2 + 4} \geq \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $-\frac{1}{2}$ khi $x = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \frac{x^2 - 2x + 1995}{x^2}$.

Lời giải

Cách 1.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } D &= \frac{x^2 - 2x + 1995}{x^2} = \frac{1995(x^2 - 2x + 1995)}{1995x^2} \\ &= \frac{1995x^2 - 2x \cdot 1995 + 1995^2}{1995x^2} = \frac{(x^2 - 2x \cdot 1995 + 1995^2) + 1994x^2}{1995x^2} \\ &= \frac{(x - 1995)^2}{1995x^2} + \frac{1994}{1995} \geq \frac{1994}{1995}. \end{aligned}$$

Vậy D đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1994}{1995}$ khi $x = 1995$.

Cách 2.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } D &= \frac{x^2 - 2x + 1995}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1995}{x^2} \\ &= 1995 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{1995x} \right) + 1 = 1995 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1995} \right)^2 + \frac{1994}{1995} \geq \frac{1994}{1995}. \end{aligned}$$

Vậy D đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1994}{1995}$ khi $x = 1995$.

Ví dụ 7*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $N = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } N = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2).$$

Đặt $y = x^2 + 3x$, ta đưa biểu thức về dạng

$$N = y(y + 2) = y^2 + 2y + 1 - 1 = (y + 1)^2 - 1 \geq -1.$$

Dấu bằng xảy ra khi $y = -1$. Tức là khi $x^2 + 3x = -1$.

$$\text{Ta có } x^2 + 3x = -1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ hay } x = -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vậy với $x = -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ thì biểu thức N đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

Ví dụ 8. Chứng minh rằng nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

Áp dụng: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^2(18 - x^2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (x + y)^2 \geq 2xy \text{ (Bất đẳng thức Côsi)}, \text{ hay } xy \leq \frac{(x + y)^2}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

Vậy nếu hai số có tổng không đổi ($x + y = k$, k không đổi) thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

Áp dụng:

Ta có $x^2 + 18 - x^2 = 18$ không đổi, vậy A lớn nhất khi $18 - x^2 = x^2$, tức là khi $x^2 = 9$ hay $x = \pm 3$.

Chú ý: Ví dụ này là ứng dụng trực tiếp bất đẳng thức Côsi.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

$$\text{Áp dụng:} \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } B = \frac{9x^2 + 1}{x}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } (x + y)^2 \geq 2xy \text{ (Bất đẳng thức Côsi)}, \text{ hay } x + y \geq \sqrt{2xy} \text{ (do } x, y \text{ dương)}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

Vậy hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

Áp dụng: Ta có $B = \frac{9x^2 + 1}{x} = 9x + \frac{1}{x}$.

Do $9x \cdot \frac{1}{x} = 9$ không đổi, nên B đạt giá trị nhỏ nhất khi $9x = \frac{1}{x}$, tức là

$$x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (do } x \text{ dương)}.$$

Khi đó $B = 9 \cdot \frac{1}{3} + 3 = 6$.

Vậy B đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi $x = \frac{1}{3}$.

Chú ý: Ví dụ này là ứng dụng trực tiếp bất đẳng thức Côsi.

Ví dụ 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = |x - 2| + |x - 3|$.

Lời giải

Cách 1. Ta lập bảng xét dấu để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối như sau :

x	2		3	
$x - 2$	-		+	0
$x - 3$	-	0	-	

Xét khoảng $x < 2$, ta có $C = 2 - x + 3 - x = 5 - 2x$.

Do $x < 2$ nên $-2x > -4$, do đó $C > 1$. (1)

Xét khoảng $2 \leq x \leq 3$, ta có $C = x - 2 + 3 - x = 1$. (2)

Xét khoảng $x > 3$, ta có $C = x - 2 + x - 3 = 2x - 5$.

Do $x > 3$ nên $2x > 6$, do đó $C > 1$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta được giá trị nhỏ nhất của C bằng 1 khi $2 \leq x \leq 3$.

Cách 2. Ta có $|x - 2| \geq x - 2$;

$$|x - 3| = |3 - x| \geq 3 - x.$$

Do đó $C = |x - 2| + |x - 3| \geq x - 2 + 3 - x = 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$

Chú ý: Nhiều bạn dùng cách đánh giá :

$|x - 2| \geq 0 : |x - 3| \geq 0$ nên $C = |x - 2| + |x - 3| \geq 0$, từ đó kết luận giá trị nhỏ nhất của C là bằng 0 thì sai do dấu bằng trong hai bất đẳng thức $|x - 2| \geq 0$ và $|x - 3| \geq 0$ không xảy ra đồng thời.

III. BÀI TẬP

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 - 5x + 2.$
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = 5x - x^2 + 3.$
3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{2x + 1}{x^2}.$
4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \frac{5x^2 - 2x + 1}{x^2}.$
- 5*. Tìm giá trị nhất của biểu thức $E = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6).$
- 6*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 7.$

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Chủ đề 1

1. Xét hiệu $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a - b)^2}{ab}.$

Ta thấy do a, b là các số dương, nên $\frac{(a - b)^2}{ab} \geq 0.$

Vậy $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với a, b là các số dương. Dấu “=” xảy ra khi $a = b.$

Chú ý: Ta cũng có thể dùng phương pháp biến đổi tương đương hay phương pháp phản chứng để chứng minh bất đẳng thức này.

2. Xét hiệu $a(a+2) - (a+1)^2 = a^2 + 2a - a^2 - 2a - 1 = -1$.

Rõ ràng $-1 < 0$, nên $a(a+2) < (a+1)^2$.

Chú ý: Ta cũng có thể dùng phương pháp biến đổi tương đương hay phương pháp phản chứng để chứng minh bất đẳng thức này. Hoặc có thể chứng minh bằng định nghĩa bằng cách xét hiệu $(a+1)^2 - a(a+2)$ và chứng minh kết quả hiệu này là số dương.

3. a) Ta có $(m+1)^2 \geq 4m \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng với mọi số thực m , nên $(m+1)^2 \geq 4m$ với mọi số thực m . Dấu “=” xảy ra khi $m = 1$.

- b) Ta có $m^2 + n^2 + 2 \geq 2(m+n) \Leftrightarrow m^2 + n^2 + 2 - 2(m+n) \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + n^2 + 2 - 2m - 2n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + n^2 - 2n + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 + (n-1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi số thực m, n , nên $m^2 + n^2 + 2 \geq 2(m+n)$ với mọi số thực m, n . Dấu “=” xảy ra khi $m = n = 1$.

4. Ta có $a+b \geq 2$ và $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với mọi số dương a, b .

Sử dụng tính chất của bất đẳng thức “nhân hai vế của hai bất đẳng thức có các vế đều dương”, ta được $(a+b)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 4$ với mọi số dương a, b .

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.

5. Gọi chiều dài của hình chữ nhật là x (m) (điều kiện $0 < x < 20$) (do nửa chu vi hình chữ nhật bằng nửa chu vi hình vuông và bằng $20m$).

Khi đó chiều rộng hình chữ nhật đó là $20 - x$ (m).

Bài toán trở thành : Chứng minh rằng $x(20 - x) \leq 10^2 = 100$.

Ta có : $x(20 - x) \leq 10^2 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 10)^2 \geq 0. \text{ Bất đẳng thức này đúng với mọi } x.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 10$, tức là hình chữ nhật trở thành hình vuông.

Bài toán được chứng minh.

6. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$a^2 + b^2 \geq 2ab;$$

$$a^2 + 1 \geq 2a;$$

$$b^2 + 1 \geq 2b.$$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên, ta được

$$2(a^2 + b^2 + 1) \geq 2(ab + a + b).$$

Từ đó, ta có $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

7. a) Ta có $a^2 - 2ab + b^2 + 1 = (a - b)^2 + 1$.

Do $(a - b)^2 \geq 0$, nên $(a - b)^2 + 1 \geq 1$.

Vậy $a^2 - 2ab + b^2 + 1 > 0$ với mọi số thực a, b .

$$\text{b) Ta có: } a - a^2 - 1 = -a^2 + a - 1 = -(a^2 - a + 1) = -\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right].$$

$$\text{Do } \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \text{ nên } -\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \leq -\frac{3}{4}.$$

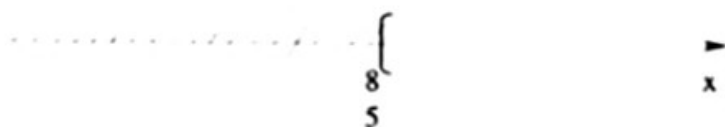
$$\text{Vậy } -\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] < 0, \text{ hay } a - a^2 - 1 < 0 \text{ với mọi số thực } a.$$

Chủ đề 2

1. a) Xét bất phương trình $9x - 3(2x + 1) > 5x + 2(1 - 5x)$, bất phương trình tương đương với $9x - 6x - 3 > 5x + 2 - 10x$, hay $8x > 5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{5}{8}$.

Biểu diễn trên trục số, ta được :



b) Xét bất phương trình $4x + 3(x + 5) < 3x - 5(x + 1)$, bất phương trình tương đương với $4x + 3x + 15 < 3x - 5x - 5$, hay $9x < -20$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -\frac{20}{9}$.

Biểu diễn trên trục số, ta được :



c) Xét bất phương trình $\frac{15-6x}{3} > 5$, bất phương trình tương đương với :

$$\frac{15-6x}{3} - 5 > 0, \text{ hay } -2x > 0.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 0$. Biểu diễn trên trục số, ta được :



d) Xét bất phương trình : $\frac{2-x}{3} < \frac{3-2x}{5}$, bất phương trình tương đương với :

$$\frac{3-2x}{5} - \frac{2-x}{3} > 0, \text{ hay } \frac{-x-1}{15} > 0.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -1$.

Biểu diễn trên trục số, ta được :



2. a) Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$8x + 3x + 3 > 5x - 2x + 6, \text{ hay } 8x > 3.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{3}{8}$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$12x^2 - 2x > 12x^2 + x - 6, \text{ hay } 3x < 6.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 2$.

3. a) Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$x^2 - 6x + 9 < x^2 - 3, \text{ hay } 6x > 12.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 2$.

- b) Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$x^2 - 9 > x^2 + 4x + 4 + 3, \text{ hay } 4x < 16.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 4$.

4. a) Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$(3x - 5)^2 > -(3x + 2)(3x - 5), \text{ tức là } (3x - 5)(6x - 3) > 0.$$

Xảy ra một trong hai trường hợp sau :

- Trường hợp 1: $3x - 5 > 0$ và $6x - 3 > 0$.

Các giá trị thoả mãn trường hợp này là $x > \frac{5}{3}$.

- Trường hợp 2: $3x - 5 < 0$ và $6x - 3 < 0$.

Các giá trị thoả mãn trường hợp này là $x < \frac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > \frac{5}{3}$.

- b) Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$(x - 3)^2 - (x + 2)^2 > 0, \text{ tức là } -5(2x - 1) < 0.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{1}{2}$.

5. Điều kiện để phương trình có nghĩa là $x \neq 1$.

Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với :

$$\frac{a+1}{x-1} - 1 + a = 0, \text{ hay } \frac{a+1-x+1+ax-a}{x-1} = 0.$$

Đưa phương trình về dạng $x(a-1) = -2$.

Với $a = 1$, phương trình cuối vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $a \neq 1$, phương trình có nghiệm là $x = \frac{2}{1-a}$.

Để nghiệm của phương trình là số dương thì nó phải thoả mãn điều kiện

$$x > 0, \text{ nghĩa là } \frac{2}{1-a} > 0, \text{ tức là } 1-a > 0, \text{ nên } a < 1.$$

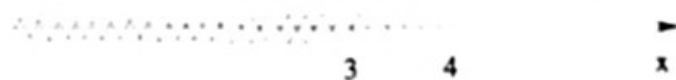
Vậy $a < 1$ để nghiệm của phương trình đã cho là số dương.

6. Giải từng bất phương trình, ta có

$$\text{Bất phương trình } 2x + 1 > x + 4 \text{ có nghiệm là } x > 3. \quad (1)$$

$$\text{Bất phương trình } x + 3 < 3x - 5 \text{ có nghiệm là } x > 4. \quad (2)$$

Biểu diễn nghiệm của (1) và (2) trên trục số, ta được :



Vậy giá trị x thoả mãn hai bất phương trình là $x > 4$.

7. Giải từng bất phương trình, ta có :

$$\frac{3x-2}{5} > \frac{x}{2} + 0,8 \Leftrightarrow 6x - 4 > 5x + 8 \Leftrightarrow x > 12. \quad (1)$$

$$1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4} \Leftrightarrow 12 - 4x + 10 > 9 - 3x \Leftrightarrow x < 13. \quad (2)$$

Biểu diễn nghiệm (1), (2) của hai bất phương trình trên trục số, ta được :



Vậy giá trị x thoả mãn hai bất phương trình là : $12 < x < 13$.

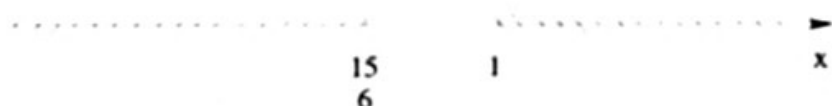
8. Giải từng bất phương trình, ta có

$$\text{Bất phương trình } 2(3x - 4) < 3(4x - 3) + 16. \quad (1)$$

$$(1) \text{ có nghiệm là } x > -\frac{15}{6}.$$

$$\text{Bất phương trình } 4(1 + x) < 3x + 5 \text{ có nghiệm là } x < 1. \quad (2)$$

Biểu diễn nghiệm của (1) và (2) trên trục số, ta được :



Vậy giá trị của x thoả mãn hai bất phương trình là $-\frac{15}{6} < x < 1$.

Ta thấy với giá trị x như trên thì có các giá trị nguyên của x là

$$x = -2; x = -1; x = 0.$$

9. a) Điều kiện để biểu thức A có nghĩa là $x \neq \pm 1$.

Với điều kiện đó ta biến đổi biểu thức A :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1} \\ &= \frac{x+1+2(1-x)-5}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^2}{2x-1} = \frac{-x-2}{2x-1} = \frac{x+2}{1-2x}. \end{aligned}$$

- b) Để $A > 0$, ta có $\frac{x+2}{1-2x} > 0$, nghĩa là $x+2$ và $1-2x$ cùng dấu.

Trường hợp 1 : $x+2 > 0$ và $1-2x > 0$, tức là $-2 < x < \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2 : $x+2 < 0$ và $1-2x < 0$, trường hợp này vô nghiệm.

Vậy để $A > 0$ thì $-2 < x < \frac{1}{2}$.

10. a) Điều kiện để biểu thức B có nghĩa là $x \neq \pm 3, x \neq 0$.

Với điều kiện đó ta biến đổi biểu thức B :

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2-3x} \right) : \left(\frac{x^2}{27-3x^2} + \frac{1}{x+3} \right) \\ &= \left(\frac{x^2-3x+9}{3(x^2-3x)} \right) : \left(\frac{x^2}{3(9-x^2)} + \frac{1}{x+3} \right) \\ &= \left(\frac{x^2-3x+9}{3(x^2-3x)} \right) : \left(\frac{x^2+9-3x}{3(9-x^2)} \right) \\ &= \frac{x^2-3x+9}{3x(x-3)} \cdot \frac{3(3-x)(3+x)}{x^2+9-3x} = -\frac{3(3+x)}{x}. \end{aligned}$$

- b) Để $B < -1$ thì $-\frac{3(3+x)}{x} < -1$, hay $\frac{3(3+x)}{x} > 1$, tức là

$$\frac{3(3+x)}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{9+2x}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0; x < -\frac{9}{2}.$$

Vậy để $B < -1$ thì $x > 0; x < -\frac{9}{2}$.

Chủ đề 3

1. a) Xét phương trình $|3x| = x + 8$, ta có :

- Trường hợp $x \geq 0$, ta có $3x = x + 8$, nghĩa là $x = 4$.

Giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình.

- Trường hợp $x < 0$, ta có $-3x = x + 8$, nghĩa là $x = -2$.

Giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 4$ và $x = -2$.

b) Ta có :

- Với $x \geq -2$, phương trình tương đương với $2x = 4x + 8$, hay $x = -4$.

Giá trị này không thoả mãn điều kiện nên bị loại.

- Với $x < -2$, phương trình tương đương với $2x = -4x - 8$, hay $x = -\frac{4}{3}$.

Giá trị này không thoả mãn điều kiện nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Xét phương trình $|x - 3| - x = 7$, ta có :

- Với $x \geq 3$, phương trình tương đương với $x - 3 - x = 7$, hay $-3 = 7$.

Phương trình này vô nghiệm.

- Với $x < 3$, phương trình tương đương với $3 - x - x = 7$, hay $x = -2$.

Giá trị này thoả mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -2$.

d) Xét phương trình $|x + 2| = 3 - 5x$, ta có :

- Với $x \geq -2$, phương trình tương đương với $x + 2 = 3 - 5x$, hay $6x = 1$.

Phương trình này có nghiệm $x = \frac{1}{6}$ vì giá trị này thoả mãn điều kiện đặt ra.

- Với $x < -2$, phương trình tương đương với $-x - 2 = 3 - 5x$, hay $4x = 5$.

Giá trị $x = \frac{5}{4}$ không thoả mãn điều kiện nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{6}$.

2. a) Xét phương trình $2|x - 3| + 5x - 1 = 0$, ta có

- Với $x \geq 3$, phương trình tương đương với $2(x - 3) + 5x - 1 = 0$, hay $7x = 7$.

Giá trị $x = 1$ không thoả mãn điều kiện nên bị loại.

- Với $x < 3$, phương trình tương đương với $-2(x - 3) + 5x - 1 = 0$, hay $3x = -5$.

Giá trị $x = -\frac{5}{3}$ thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{5}{3}$.

- b) Xét phương trình $7|x + 2| - (4x - 3) = 0$, ta có

- Với $x \geq -2$, phương trình tương đương với

$$7(x + 2) - 4x + 3 = 0, \text{ hay } 3x = -17.$$

Giá trị $x = -\frac{17}{3}$ không thoả mãn điều kiện nên bị loại.

- Với $x < -2$, phương trình tương đương với

$$-7(x + 2) - 4x + 3 = 0, \text{ hay } -11x = 11.$$

Giá trị $x = -1$ không thoả mãn điều kiện nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

3. a) Xét phương trình $|x - 1| = |x - 5|$, ta có

Cách 1.

Bình phương hai vế phương trình, ta được

$$(x - 1)^2 = (x - 5)^2, \text{ hay } x^2 - 2x + 1 = x^2 - 10x + 25.$$

Phương trình đã cho trở thành $8x = 24$, phương trình có nghiệm $x = 3$.

Cách 2.

Áp dụng tính chất giá trị tuyệt đối, ta có :

Phương trình $|x - 1| = |x - 5|$ tương đương với

$$\begin{cases} x - 1 = x - 5 \\ x - 1 = -(x - 5), \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -1 = -5 \\ 2x - 1 = 5. \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất vô nghiệm, phương trình thứ hai cho ta nghiệm $x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

b) Xét phương trình $|x - 1| = |3x - 5|$.

Bình phương hai vế phương trình, ta được

$$(x - 1)^2 = (3x - 5)^2, \text{ hay } (3x - 5 + x - 1)(3x - 5 - x + 1) = 0.$$

Phương trình đã cho trở thành $(4x - 6)(2x - 4) = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$ và $x = \frac{3}{2}$.

Chú ý: Ở đây ta không khai triển bình phương nhị thức, làm cách đó sẽ dẫn đến phương trình bậc hai, để giải nó ta lại phải phân tích thành tích. Ta vận dụng hằng đẳng thức đưa về phương trình tích nhanh hơn.

Ta cũng có thể giải bằng cách hai như câu a, cũng sẽ được kết quả tương tự.

4. a) Xét phương trình $|x - 4| + |x + 1| = 9$, ta có :

x	-1	4	
x - 4	-	0	+
x + 1	-	0	+

- Với $x < -1$, phương trình đã cho trở thành $4 - x - x - 1 = 9$, hay $2x = -6$, trường hợp này phương trình có nghiệm $x = -3$.
- Với $-1 \leq x < 4$, phương trình đã cho trở thành $4 - x + x + 1 = 9$, hay $5 = 9$, trường hợp này phương trình vô nghiệm.
- Với $x \geq 4$, phương trình đã cho trở thành $x - 4 + x + 1 = 9$, hay $2x = 12$, trường hợp này phương trình có nghiệm $x = 6$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -3$ và $x = 6$.

b) Xét phương trình $|x - 3| + |x + 4| = 2$, ta có :

x	-4		3	
x + 4	-	1	+	0
x - 3	-	0	-	1

- Với $x < -4$, phương trình đã cho trở thành $3 - x - x - 4 = 2$, hay

$2x = 1$, phương trình này có nghiệm $x = \frac{1}{2}$, nhưng giá trị này không thoả mãn điều kiện $x < -4$ nên bị loại.

- Với $-4 \leq x < 3$, phương trình đã cho trở thành $3 - x + x + 4 = 2$, hay

$7 = 2$, trường hợp này phương trình vô nghiệm.

- Với $x \geq 3$, phương trình đã cho trở thành $x - 3 + x + 4 = 2$, hay $2x = 1$, phương trình này có nghiệm $x = \frac{1}{2}$, nhưng giá trị này không thoả mãn điều kiện $x \geq 3$ nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

5. Giải các phương trình sau :

a) Xét phương trình $|x| - |2x + 3| = x - 1$, ta có

x	$-\frac{3}{2}$		0	
2x + 3	-	0	+	1
x	-	1	-	0

- Với $x < -\frac{3}{2}$, phương trình đã cho trở thành $-x + 2x + 3 = x - 1$, hay

$3 = -1$, phương trình này vô nghiệm.

- Với $-\frac{3}{2} \leq x < 0$, phương trình đã cho trở thành $-x - 2x - 3 = x - 1$, hay

$4x = -2$, phương trình này có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$, giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình đã cho.

- Với $x \geq 0$, phương trình đã cho trở thành $x - 2x - 3 = x - 1$, hay $2x = -2$, phương trình này có nghiệm $x = -1$, nhưng giá trị này không thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$ nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

b) Xét phương trình $x - |x + 2| + 2|x - 1| = 0$.

x	-2		1	
$x + 2$	$-$	$ $	$+$	0
$x - 1$	$-$	0	$-$	$ $

- Với $x < -2$, phương trình đã cho trở thành $x + x + 2 - 2x + 2 = 0$, hay $4 = 0$, phương trình này vô nghiệm.
- Với $-2 \leq x < 1$, phương trình đã cho trở thành $x - x + 2 + 2x - 2 = 0$, hay $2x = 0$, trường hợp này phương trình có nghiệm $x = 0$, giá trị này thỏa mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình đã cho.
- Với $x \geq 1$, phương trình đã cho trở thành $x - x - 2 + 2x - 2 = 0$, hay $2x = 4$, phương trình này có nghiệm $x = 2$, giá trị này thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$ nên là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 2$.

Chủ đề 4

1. Ta có $A = x^2 - 5x + 2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} \geq -\frac{17}{4}$.

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{17}{4}$ khi $x = \frac{5}{2}$.

2. Ta có $B = 5x - x^2 + 3 = \frac{37}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{37}{4}$.

Vậy B đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{37}{4}$ khi $x = \frac{5}{2}$.

3. *Cách 1.* Ta có $C = \frac{2x+1}{x^2} = \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 1 \geq -1.$

Vậy C đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $x = -1.$

Cách 2. Ta có $C = \frac{2x+1}{x^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$

Đặt $y = \frac{1}{x}$, ta có $C = (y+1)^2 - 1 \geq -1.$

Vậy C đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $y = -1$, tức là khi $x = -1.$

4. Ta có $D = \frac{5x^2 - 2x + 1}{x^2} = 5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$

Đặt $y = \frac{1}{x}$, ta có $D = (y-1)^2 + 4 \geq 4.$

Vậy D đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 khi $y = 1$, tức là khi $x = 1.$

5*. Ta có $E = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) = (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x - 6)$
 $= (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36.$

Vậy E đạt giá trị nhỏ nhất bằng -36 khi $x^2 + 5x = 0$, tức là khi $x = 0$ hoặc $x = -5.$

6*. Ta có $M = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 7 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + 2 \geq 2.$

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$ và $y = -2.$

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
<i>Lời nói đầu</i>	3
Chương 1. PHÉP NHÂN VÀ CHIA ĐA THỨC	
Chủ đề 1. Nhân đa thức	5
Dạng 1. Nhân đơn thức với đa thức	5
Dạng 2. Nhân đa thức với đa thức	8
Chủ đề 2. Một số hằng đẳng thức đáng nhớ	11
Chủ đề 3. Phân tích đa thức thành nhân tử	15
Chủ đề 4. Phép chia đa thức	18
Dạng 1. Chia đa thức cho đơn thức	19
Dạng 2. Chia đa thức đã sắp xếp	22
Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số	28
Chương 2. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ	
Chủ đề 1. Khái niệm và tính chất cơ bản của phân thức đại số	45
Chủ đề 2. Rút gọn phân thức	50
Chủ đề 3. Quy đồng mẫu thức hai phân thức đại số	54
Chủ đề 4. Cộng và trừ các phân thức đại số	60
Chủ đề 5. Nhân và chia các phân thức đại số	66
Chủ đề 6. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ. Giá trị của một biểu thức hữu tỉ	70
Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số	75

Chương 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chủ đề 1. Khái niệm phương trình. Giải phương trình bậc nhất một ẩn	92
Chủ đề 2. Phương trình tích	96
Chủ đề 3. Phương trình chứa ẩn ở mẫu	101
Chủ đề 4. Giải bài toán bằng cách lập phương trình	108
Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số	114

Chương 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chủ đề 1. Chứng minh bất đẳng thức	126
Chủ đề 2. Khái niệm về bất phương trình một ẩn.	
Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn	131
Chủ đề 3. Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối	137
Chủ đề 4. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức	142
Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số	148

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng biên tập PHAN DOãn THOẠI
Giám đốc CTCP Sách giáo dục tại TP Hà Nội CẦN HỮU HẢI

Biên tập nội dung :

NGUYỄN TRỌNG THIỆP – MAI MINH TUÂN

Sửa bản in :

MAI MINH TUÂN

Trình bày bìa :

HOÀNG MẠNH DỪA

Thiết kế sách và chế bản :

CÔNG TY CP DỊCH VỤ VĂN HÓA TRUYỀN THÔNG DIỄM TƯỜNG

Công ty CP Sách giáo dục tại TP Hà Nội - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam
giữ quyền công bố tác phẩm

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 8 THEO CHỦ ĐỀ - PHẦN ĐẠI SỐ
(BẮM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KỸ NĂNG)

Mã số: T8T67s2 - TTS

In 4.000 bản, (14TK) khổ 17 x 24 cm, tại công ty CP In Khoa học Công nghệ mới

Địa chỉ: 181 Lạc Long Quân, Nghĩa Đô, Cầu Giấy, Hà Nội

Số đăng ký KHXB: 57 -2012/CXB/615 - 23/GD

In xong nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2012