

NGUYỄN HOÀNG THANH - ĐỖ THỊ TIẾN



KHAI PHÓNG NĂNG LỰC
TOÁN 9

THĂNG LONG BÌNH TÂN

542/8 TỈNH LỘ 10, BÌNH TÂN, HCM

Mục lục

1	Phương trình và hệ phương trình	5
1.1	Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn	5
1.2	Phương trình bậc nhất hai ẩn	9
1.3	Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn	11
1.4	Ôn tập chương	18
2	Bất đẳng thức. Bất phương trình bậc nhất một ẩn	21
2.1	Bất đẳng thức	21
2.2	Bất phương trình bậc nhất một ẩn	23
2.3	Ôn tập chương	25
3	Căn thức	27
3.1	Căn bậc hai	27
3.2	Căn bậc ba	30
3.3	Phép khai phương (khai căn)	31
3.4	Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai	36
3.5	Ôn tập chương	39
4	Hệ thức lượng trong tam giác vuông	41
4.1	Định nghĩa tỉ số lượng giác góc nhọn	41
4.2	Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông	46
4.3	Ôn tập chương	49
5	Đường tròn	51
5.1	Đường tròn	51
5.2	Tiếp tuyến của đường tròn	57
5.3	Góc ở tâm và góc nội tiếp	63
5.4	Hình quạt tròn. Hình vành khuyên	69
5.5	Ôn tập chương	71
6	Hàm số $y = ax^2$	73
6.1	Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đồ thị.	73
6.2	Phương trình bậc hai một ẩn	76
6.3	Định lý Vi-ét	81
6.4	Ôn tập chương	84
7	Thống kê	87
7.1	Bảng tần số. Biểu đồ tần số	87
7.2	Bảng tần số tương đối và biểu đồ tần số tương đối	92
7.3	Biểu diễn số liệu ghép nhóm	96
7.4	Ôn tập chương	101
8	Xác suất	105
8.1	Không gian mẫu và biến cố	105
8.2	Xác suất của biến cố	108
8.3	Ôn tập chương	110

9	Tứ giác nội tiếp. Đa giác đều	113
9.1	Đường tròn ngoại tiếp tam giác. Đường tròn nội tiếp tam giác	113
9.2	Tứ giác nội tiếp. Đa giác đều	116
9.3	Đa giác đều. Phép quay	120
9.4	Ôn tập chương	124
10	Các hình khối trong thực tiễn	127
10.1	Hình trụ	127
10.2	Hình nón	130
10.3	Hình cầu	134
10.4	Ôn tập chương	137

Chương 1

Phương trình và hệ phương trình

1.1 Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn

1.1.1 Phương trình tích

Phương pháp giải

Để giải phương trình tích $(ax + b)(cx + d) = 0$, ta giải từng phương trình

$$ax + b = 0,$$

$$cx + d = 0.$$

Rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

❖ BÀI TẬP ❖

A. Phương trình có dạng tích

Bài tập 1.1. Giải các phương trình sau

a) $(x - 2)(x + 3) = 0$.

b) $(2x - 3)(x^2 + 1) = 0$.

c) $(x + 1)(2x - 1)(x - 2) = 0$.

d) $(x - 1)(3x - 6) = 0$.

e) $(x + 1)(2x - 3)(3x - 5) = 0$.

f) $(2x + 5)(1 - 3x) = 0$.

g) $6(x - 2)(x - 4)(1 - 7x) = 0$.

h) $(x + 1)^2(3x - 1) = 0$.

i) $(3x - 2)^2(x + 1)(x - 2) = 0$.

j) $(5 - x)^2(3x - 1) = 0$.

k) $(14 - 2x)^2(3 - x)(2x - 4) = 0$.

l) $(5x - 6)^2(x + 2)(x + 10) = 0$.

m) $(3x - 3)^3(x + 4) = 0$.

n) $(2x - 1)^3(4x + 5) = 0$.

o) $(8 - x)^3(3x + 6) = 0$.

B. Đưa về dạng tích giải phương trình

Bài tập 1.2. Giải các phương trình sau

a) $x^2 = 5$.

b) $(-x)^2 = 6$.

c) $(-x)^2 = 7$.

d) $(-x)^2 = 8$.

e) $(-x)^2 = 9$.

f) $(-x)^2 = 10$.

g) $x^2 = -11$.

h) $x^2 = 12$.

i) $x^2 = 13$.

j) $x^2 = 14$.

k) $(-x)^2 = -15$.

l) $x^2 = 16$.

m) $x^2 = 25$.

n) $x^2 = 36$.

o) $x^2 = 49$.

p) $x^2 = 64$.

Bài tập 1.3. Giải các phương trình sau

- a) $-3x^2 = -48$. b) $4x^2 = -16$. c) $5x^2 = 125$. d) $-6x^2 = -216$.
- e) $7x^2 = -7$. f) $-2x^2 = -128$. g) $\frac{2}{3}x^2 = \frac{8}{3}$. h) $-\frac{4}{5}x^2 = -\frac{1}{5}$.
- i) $\frac{1}{2}x^2 = 32$. j) $-\frac{1}{3}x^2 = -3$. k) $2x^2 = 6$. l) $-3x^2 = 6$.
- m) $-5x^2 = -10$. n) $4x^2 = 20$. o) $\frac{1}{2}x^2 = 4$. p) $-\frac{1}{3}x^2 = -2$.

Bài tập 1.4. Giải các phương trình sau

- a) $x^3 = 1$. b) $x^3 = 8$. c) $x^3 = 27$. d) $x^3 = 64$.
- e) $x^3 = 125$. f) $x^3 = -1$. g) $x^3 = -8$. h) $x^3 = -27$.
- i) $(-x)^3 = -64$. j) $(-x)^3 = -125$. k) $(-x)^3 = -216$. l) $(-x)^3 = -343$.
- m) $(2x - 1)^2 = 49$. n) $(3x + 4)^2 = 25$. o) $(2x + 7)^2 = 1$. p) $(6 - 4x)^2 = 16$.
- q) $(7x - 5)^2 = 36$. r) $(5x - 7)^2 = 4$. s) $(10x - 7)^2 = 64$. t) $(13 - 25x)^2 = 81$.

Bài tập 1.5. Giải các phương trình sau

- a) $(2y + 7)^2 = (y + 3)^2$. b) $(4y + 14)^2 = (7y + 21)^2$. c) $(13y - 7)^2 = (7y + 9)^2$.
- d) $(6 - 9y)^2 = (5y - 7)^2$. e) $(27y + 9)^2 = (24y - 7)^2$. f) $(-5y - 1)^2 = (y - 2)^2$.
- g) $(3 - y)^2 = (y + 3)^2$. h) $(4y - 6)^2 = (6 + 4y)^2$. i) $(1 + y)^2 = (y - 1)^2$.
- j) $\left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - 2y\right)^2$. k) $(5y - 4)^2 = (4 - 5y)^2$. l) $\left(\frac{9}{5} - 2y\right)^2 = \left(2y - \frac{9}{5}\right)^2$.

Bài tập 1.6. Giải các phương trình sau

- a) $8t^2 - 4t = 0$. b) $2t^2 - 16 = 0$. c) $5t^2 + 7t = 0$. d) $-6t + 9t^2 = 0$.
- e) $64t^2 - 8t = 0$. f) $18t - 9t^2 = 0$. g) $2t^2 = t$. h) $-t = 3t^2$.
- i) $3t^2 = 2t$. j) $4t^2 = 3t$. k) $t^3 = t^2$. l) $2t^3 = 3t^2$.
- m) $-t^2 = 4t^3$. n) $-7t^2 = 14t^3$. o) $t^3 - 8t^2 = 0$. p) $27t^2 - 54t^3 = 0$.

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 1.7. Giải các phương trình sau

- a) $x^2 + 4x - 5 = 0$. b) $2x^2 + 5x + 3 = 0$. c) $x^2 + 7x + 12 = 0$. d) $x^2 - 7x + 10 = 0$.
- e) $4x^2 + 9x - 13 = 0$. f) $6x^2 + 7x - 3 = 0$. g) $7x^2 + 13x - 2 = 0$. h) $x^2 - 5x - 14 = 0$.
- i) $x^2 + x - 6 = 0$. j) $3x^2 + 4x - 4 = 0$. k) $x^2 + 2x - 2 = 0$. l) $x^2 - 4x - 6 = 0$.
- m) $x^2 - 6x + 7 = 0$. n) $3x^2 - x - 1 = 0$. o) $4x^2 - 7x + 2 = 0$. p) $7x^2 + 2x + 1 = 0$.
- q) $x^2 - x + 1 = 0$. r) $x^2 + x + 1 = 0$. s) $x^2 - 4x + 5 = 0$. t) $9x^2 + x + 1 = 0$.

1.1.2 Phương trình chứa ẩn ở mẫu quy về phương trình bậc nhất

🔍 Phương pháp giải

Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

- Tìm điều kiện xác định của phương trình;
- Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức;
- Giải phương trình vừa nhận được;
- Kiểm tra điều kiện và kết luận nghiệm của phương trình.

🔗 BÀI TẬP 🔗

Bài tập 1.8. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau

a) $\frac{2x-1}{x+3} = 1$. b) $\frac{-2x}{2x+5} = \frac{1}{4-x} - 1$. c) $\frac{2x-1}{x+3} = 1$. d) $\frac{5}{x+7} = \frac{-14}{x-5}$.

Bài tập 1.9. Giải các phương trình sau

a) $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$. b) $\frac{x^2-2}{x+1} = \frac{x^2-2x+3}{x+1}$. c) $\frac{x^2+4x}{x-1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$.
d) $\frac{2x-1}{x+3} = 1$. e) $\frac{5}{x+7} = \frac{-14}{x-5}$. f) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-2}{x} = 2$.
g) $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}$. h) $\frac{x+6}{x+5} + \frac{3}{2} = 2$; i) $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-3} = \frac{3x-20}{(x-3)(x-2)}$.

Bài tập 1.10. Giải các phương trình sau

a) $\frac{x+3}{x-2} + \frac{x+2}{x-3} = 2$. b) $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2}{x+2} + \frac{16}{x^2-4}$. c) $\frac{-2y}{2y+5} = \frac{1}{4-y} - 1$.
d) $\frac{3}{3z-2} = \frac{z}{z+2} - 1$. e) $\frac{t+3}{t-3} + \frac{t-2}{t} = 2$. f) $\frac{a+3}{a-2} + \frac{a+2}{a-3} = 2$.
g) $\frac{3}{y-2} + \frac{2}{y+1} = \frac{2y+5}{(y-2)(y+1)}$. h) $\frac{t+2}{t-2} - \frac{t-2}{t+2} = \frac{16}{t^2-4}$. i) $\frac{x}{x+1} = \frac{x^2+3x-1}{(x+1)(x+3)}$.

Bài tập 1.11. Hai thành phố A và B cách nhau 120 km. Một ô tô di chuyển từ A đến B, rồi quay trở về A với tổng thời gian đi và về là 4 giờ 24 phút. Tính tốc độ lượt đi của ô tô, biết tốc độ lượt về lớn hơn tốc độ lượt đi 20%.

Bài tập 1.12. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 60 km. Sau 1 giờ 40 phút, một xe máy cũng đi từ A đến B và đến B sớm hơn xe đạp 1 giờ. Tính tốc độ của mỗi xe, biết rằng tốc độ của xe máy gấp 3 lần tốc độ của xe đạp.

Bài tập 1.13. Một xí nghiệp dự định chia đều 12 600 000 đồng để thưởng cho các công nhân tham gia hội thao nhân ngày thành lập xí nghiệp. Khi đến ngày hội thao chỉ có 80% số công nhân tham gia, vì thế mỗi người tham gia hội thao được nhận thêm 105 000 đồng. Tính số công nhân dự định tham gia lúc đầu.

🔗 LUYỆN TẬP 🔗

Bài tập 1.14. Giải các phương trình sau

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 1$; b) $\frac{2x}{x-1} + \frac{7}{2-x} = 4$;
c) $\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$; d) $\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x+3}{(x+1)(x-3)}$.

Bài tập 1.15. Giải các phương trình sau

a) $\frac{1}{x-2} + \frac{4}{x+1} = 1;$

b) $\frac{x}{2x-1} + \frac{1}{2-x} = 3;$

c) $\frac{x^2 - x - 1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3};$

d) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{x+4}{(x+1)(x+2)}.$

1.2 Phương trình bậc nhất hai ẩn

1.2.1 Phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 1.2.1.

- Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức có dạng $ax + by = c$, trong đó a, b, c là các số thực ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).
- Cặp số $(x_0; y_0)$ gọi là nghiệm của phương trình $ax + by = c$ nếu đẳng thức $ax_0 + by_0 = c$ đúng.

Định lý 1.2.1.

- Một phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c(*)$ có vô số nghiệm.
- Tập hợp các nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn là một đường thẳng.

❖ BÀI TẬP ❖

A. Nhận dạng

Bài tập 1.16. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn? Xác định các hệ số a, b và c của phương trình bậc nhất hai ẩn đó.

- a) $y = \sqrt{2}x$. b) $y - \frac{1}{2}x = 0$. c) $y = \sqrt{3}x + 2$. d) $x - \frac{1}{3}y + 2 = 0$.
- e) $0x + 0y = -1$. f) $4x - 0y = 12$. g) $y = 3x$. h) $y - 3x = 0$.

Bài tập 1.17. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn? Xác định các hệ số a, b, c của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đó.

- a) $2x + 5y = -7$. b) $0x - 0y = 5$. c) $0x - \frac{5}{4}y = 3$. d) $0,2x + 0y = -1,5$.
- e) $y = 2x + 1$. f) $x - 2y + 1 = 0$. g) $0x + y = 5$. h) $4x + 0y = 14$.

B. Kiểm tra nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn hay không

Bài tập 1.18. Cho các cặp số $(0; 0), (2; -1), (0; -1), (3; -1)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình:

- a) $y = 2x$. b) $x - y + 2 = 0$. c) $0 \cdot x + y = -1$. d) $4x - 0 \cdot y = 12$.
- e) $y = 3x$. f) $-x - 2y + 1 = 0$. g) $0 \cdot x + y + 1 = 0$. h) $3x + 0 \cdot y = 9$.

Bài tập 1.19. Trong các cặp số $(1; 1), (-2; 5), (0; 2)$, cặp số nào là nghiệm của mỗi phương trình sau?

- a) $4x + 3y = 7$. b) $3x - 4y = -1$. c) $x + y = 2$. d) $3x - 4y = -8$.

C. Tìm một nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài tập 1.20. Tìm một nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn trong các trường hợp sau:

- a) $y = 2x$. b) $x - y + 2 = 0$. c) $0 \cdot x + y = -1$. d) $4x - 0 \cdot y = 12$.
- e) $y = 3x$. f) $-x - 2y + 1 = 0$. g) $0 \cdot x + y + 1 = 0$. h) $3x + 0 \cdot y = 9$.

Bài tập 1.21. Trong mỗi trường hợp sau hãy tìm giá trị của m để:

- a) Điểm $A(1; 2)$ thuộc đường thẳng $3x + my = 5$;

- b) Điểm $B(-1;3)$ thuộc đường thẳng $mx + 5y = 7$;
c) Điểm $B(2;5)$ thuộc đường thẳng $-x + my = 5$;
d) Điểm $C(1;1)$ thuộc đường thẳng $mx + (m + 1)y = 3m + 2$;

D. Biểu diễn tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài tập 1.22. Biểu diễn tất cả các nghiệm của các phương trình sau đây lên mặt phẳng Oxy

- a) $y = 2x - 1$. b) $x = 2y - 1$ c) $-3x + y = 2$. d) $0x + y = -2$.
e) $2x + 0y = 3$. f) $2x + y = 3$. g) $0x - y = 3$. h) $-3x + 0y = 2$.
i) $-2x + y = 0$. j) $x - 2y = \frac{1}{2}$. k) $\frac{x - y}{2} = 1$. l) $\frac{x - 1}{3} = 2y$.

Bài tập 1.23. Vẽ mỗi cặp đường thẳng sau trong cùng một mặt phẳng tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó:

- a) $x - y = 3$ và $x - 2 = 0$. b) $4x - 3y = 13$ và $0,25x + 4y = 5$.
c) $2x - y = -1$ và $y = 3$. d) $4x + 5y = 9$ và $2x + 2,5y = 0,5$.
e) $x - 2y = -1$ và $x = -1$. f) $4x + 5y = 9$ và $y = 1$.

1.3 Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

1.3.1 Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 1.3.1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2). \end{cases}$$

Trong đó $a_1x + b_1y = c_1$ và $a_2x + b_2y = c_2$ là các phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Nếu hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình.
- Giải hệ phương trình là tìm tất cả các cặp $(x; y)$ (tìm tập nghiệm) thỏa mãn hai phương trình (1) và (2).

❖ BÀI TẬP ❖

A. Nhận dạng

Bài tập 1.24. Trong các hệ phương trình sau, hệ nào là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

B. Kiểm tra nghiệm của hệ phương trình

Bài tập 1.25. Xét hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$, cho biết cặp số $(1; 1)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình hay không?

Bài tập 1.26. Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$, cho biết cặp số $(1; 2)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình hay không?

Bài tập 1.27. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$, và các cặp số $(0; 1)$, $(0; \frac{2}{3})$, $(4; 5)$. Cặp nào là nghiệm của hệ phương trình?

Bài tập 1.28. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$, và các cặp số $(0; -1)$, $(2; 3)$, $(3; -5)$. Cặp nào là nghiệm của hệ phương trình hay không?

Bài tập 1.29. Cho hai đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 2$ và $y = -2x - 1$.

- Vẽ hai đường thẳng đó trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Xác định tọa độ giao điểm A của hai đường thẳng trên.
- Tọa độ của điểm A có là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ không? Tại sao?

1.3.2 Giải bằng phương pháp thế

🔍 Phương pháp giải

- Đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y giải bằng phương pháp thế có thể lựa chọn việc rút x theo y hoặc rút y theo x từ một phương trình, rồi thế vào phương trình còn lại giải.
- Giải phương trình một ẩn, rồi suy ra nghiệm của hệ.

🔗 BÀI TẬP 🔗**Bài tập 1.30.** Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} 3x + y = 3 \\ -2x - 3y = 5 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases} \\ \text{e)} \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} & \text{g)} \begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 7x - 4y = 1 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \end{array}$$

Bài tập 1.31. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} x - \frac{1}{3}y = 4 \\ 2x - y = \frac{1}{3} \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 4 \\ x - y = \frac{1}{3} \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2y}{3} = 7 \\ \frac{4x}{7} + \frac{y}{5} = -1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x - \frac{y}{3} = 4 \\ 2x - 3y = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \text{e)} \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 5 \\ \frac{4x}{7} + \frac{y}{5} = -1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x - \frac{y}{4} = 3 \\ 2x - 3y = \frac{1}{3} \end{cases} & \text{g)} \begin{cases} 0,25x - 0,36y = 4 \\ 0,7x - 0,4y = 1 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} 0,1x - 0,4y = 3 \\ 0,2x - 0,25y = -1 \end{cases} \end{array}$$

Bài tập 1.32. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 5 \\ x + (1 + \sqrt{2})y = 2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 2 \\ x + (1 - \sqrt{2})y = 1 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} (1 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y = 4 \\ (1 + \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 3 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 2 \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y = 3 \end{cases} \end{array}$$

1.3.3 Giải bằng phương pháp cộng đại số**🔍 Phương pháp giải**

- Bước 1. Biến đổi để các hệ số của một ẩn bằng nhau hoặc đối nhau ở cả hai phương trình;
- Bước 2. Cộng hoặc trừ vế với vế của hai phương trình để làm mất (khử) đi một ẩn;
- Bước 3. Giải phương trình tìm giá trị của ẩn còn lại, suy ra nghiệm của hệ phương trình.

🔗 BÀI TẬP 🔗**Bài tập 1.33.** Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x + y = 3 \\ -2x - 3y = 5 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases} \\ \text{g)} \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \text{i)} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \end{array}$$

Bài tập 1.34. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x\sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})y = 1 \\ (1 - \sqrt{3})x + y\sqrt{3} = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{2y}{5} = 19 \\ 4x + \frac{3y}{2} = 21 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}y = 3 \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = -2 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} -\frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = \frac{1}{12} \\ \frac{4x}{5} + \frac{y}{2} = \frac{3}{10} \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 1,2x + 1,5y = 3 \\ 2,8x - 3,5y = -2 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} -7,5x + 3,6y = 1,2 \\ 2x - 0,9y = -3 \end{cases} \end{array}$$

Bài tập 1.35. Xác định a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

- a) $A(1;2)$ và $B(3;8)$. b) $A(2;1)$ và $B(4;-2)$. c) $A(0;1)$ và $B(4;0)$. d) $A(1;1)$ và $B(2;-2)$.

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 1.36. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 1 = x + 2y \\ x - y = 2x + y + 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2(x - 2y) + 3(x + 2y) = 4 \\ (x - y) + 2(x + y) = 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + 1 - y = 2x + y \\ 3x + y = x - y + 2 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} 2(x - 2) + 3(1 + 2y) = -3 \\ 3(x + 2) + 2(1 - 2y) = -1 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} (x - y) + 2(x + y) = 3 \\ (x + 2y) + 2(x - 2y) = 1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2(x - 1) - 3(1 + y) = 3 \\ 3(x + 1) + 2(1 - y) = 2 \end{cases} \\ \text{g)} \begin{cases} \frac{x - y - 1}{2} + \frac{x - 2y}{4} = 1 \\ \frac{x + 2y}{3} - \frac{y - x - 3}{6} = 2 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} \frac{x - 1}{6} + \frac{2x - y}{4} = 1 \\ \frac{x + y}{2} - \frac{y - x - 1}{3} = 2 \end{cases} & \text{i)} \begin{cases} (2x - 1)(y + 1) = (x - 3)(2y - 5) \\ (3x + 1)(y - 1) = (x - 1)(3y + 1) \end{cases} \end{array}$$

Bài tập 1.37. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{8}{x} + \frac{15}{y} = 1; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{1}{x - y} + \frac{1}{2x + y} = 2 \\ \frac{3}{x - y} - \frac{2}{2x + y} = -2; \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} \frac{3x}{x - 1} - \frac{2}{y + 3} = 3 \\ \frac{4x}{x - 1} + \frac{1}{y + 3} = 5; \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} \frac{2}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} = 2 \\ \frac{6}{x + 1} - \frac{2}{y + 1} = 1; \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} \frac{1}{x - y + 2} + \frac{1}{x + y - 1} = 8 \\ \frac{2}{x - y + 2} - \frac{1}{x + y - 1} = 6. \end{cases} \end{array}$$

1.3.4 Giải toán bằng cách lập phương trình

🔍 Phương pháp giải

Bước 1. Lập hệ phương trình

- Chọn các ẩn số, đặt điều kiện và đơn vị phù hợp cho ẩn số;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết qua ẩn số;
- Thiết lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa ẩn số và các đại lượng đã biết;

Bước 2. Giải hệ phương trình vừa lập được;

Bước 3. Đối chiếu nghiệm của phương trình với điều kiện của ẩn số (nếu có) ở Bước 1, từ đó đưa ra kết luận cần tìm.

❖ BÀI TẬP ❖

A. Các bài toán số học

Bài tập 1.38. Cho một số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng hai chữ số của số đó bằng 13 và nếu chia chữ số hàng chục cho hàng đơn vị thì được thương là 2 dư 1. Tìm số đó.

Bài tập 1.39. Cho hai số tự nhiên biết tổng của chúng là 33 và nếu lấy số lớn chia cho số bé thì được thương là 4 dư 3. Tìm hai số đã cho.

Bài tập 1.40. Cho một số tự nhiên có hai chữ số, 2 lần chữ số hàng chục lớn hơn 3 lần chữ số hàng đơn vị là 1. Nếu đổi chỗ hai chữ số của số đó cho nhau ta được một số mới nhỏ hơn số đã cho 18 đơn vị. Tìm số đó.

Bài tập 1.41. Tổng chữ số hàng đơn vị và 5 lần chữ số hàng chục của một số có hai chữ số là 21. Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số ban đầu là 27 đơn vị. Tìm số đó.

B. Bài toán về nội dung hình học **Lưu ý.**

Chú ý sử dụng các công thức tính chu vi, diện tích các hình (tam giác, hình chữ nhật, hình vuông,...) hoặc vận dụng tính chất đặc biệt của các hình này để thiết lập được hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các ẩn, từ đó tìm được các đại lượng trong bài toán.

Bài tập 1.42. Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh của nó lên 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật tăng thêm 19 cm^2 . Nếu chiều rộng tăng thêm 1 cm, chiều dài giảm đi 2 cm thì diện tích hình chữ nhật giảm đi 8 cm^2 . Tính chiều dài và chiều rộng ban đầu của hình chữ nhật.

Bài tập 1.43. Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi 160 m. Nếu tăng chiều rộng thêm 10 m và giảm chiều dài đi 10 m thì diện tích miếng đất tăng thêm 100 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh đất.

Bài tập 1.44. Một mảnh vườn hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 10 m, chiều dài lớn hơn chiều rộng là 2 m. Tính chiều dài và chiều rộng mảnh vườn đó.

Bài tập 1.45. Một khu đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m, chiều dài lớn hơn chiều rộng là 7 m. Tính chiều dài và chiều rộng của khu đất đó.

C. Bài toán về chuyển động

Bài tập 1.46. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 60 km. Sau 1 giờ 40 phút, một xe máy cũng đi từ A đến B và đến B sớm hơn xe đạp 1 giờ. Tính tốc độ của mỗi xe, biết rằng tốc độ của xe máy gấp 3 lần tốc độ của xe đạp.

Bài tập 1.47. Một ô tô đi từ A đến B cách nhau 115 km gồm hai đoạn đường nhựa và đường sỏi. Thời gian xe đi trên đoạn đường nhựa và sỏi lần lượt là 1 giờ và 2 giờ. Tính vận tốc của ô tô đi trên từng đoạn đường, biết trên đoạn đường nhựa vận tốc ô tô lớn hơn trên đoạn đường sỏi là 25 km/h .

Bài tập 1.48. Một ô tô xuất phát từ tỉnh A và đi đến tỉnh B với vận tốc là 30 km/h . Sau khi đến B người đó quay trở về A với vận tốc 40 km/h . Tính thời gian của ô tô lúc đi và lúc về, biết tổng thời gian cả đi lẫn về là 7 giờ.

Bài tập 1.49. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Nếu người đó tăng vận tốc thêm 20 km/h thì đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Nếu người đó giảm vận tốc 10 km/h thì đến B muộn hơn 1 giờ. Tính vận tốc, thời gian dự định và độ dài quãng đường AB.

Bài tập 1.50. Một người đi xe máy dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định, nếu người này tăng tốc thêm 15 km/h thì sẽ đến B sớm hơn 1 giờ, còn nếu xe chạy với vận tốc giảm đi 15 km/h thì sẽ đến B chậm hơn 2 giờ. Tính quãng đường AB.

Bài tập 1.51. Một ca nô chạy trên sông trong 3 giờ xuôi dòng 38 km và ngược dòng 64 km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó ca nô này chạy trong 1 giờ xuôi dòng 19 km và ngược dòng 16 km. Hãy tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước, biết rằng các vận tốc này không đổi.

Bài tập 1.52. Hai bến sông A, B cách nhau 200 km. Một ca nô xuôi dòng từ bên A đến bến B rồi ngược từ B trở về A hết tổng thời gian là 9 giờ. Biết thời gian ca nô xuôi dòng 5 km bằng thời gian ca nô ngược dòng 4 km. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng và vận tốc của dòng nước.

Bài tập 1.53. Hai xe khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 100 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ. Nếu xe thứ nhất khởi hành trước xe thứ hai 2 giờ 30 phút thì hai xe gặp nhau khi xe thứ hai đi được 30 phút. Tìm vận tốc của mỗi xe.

Bài tập 1.54. Hai địa điểm A và B cách nhau 120 km. Một xe đạp và xe máy khởi hành cùng lúc đi từ A đến B , sau 3 giờ thì khoảng cách giữa hai xe là 30 km. Tìm vận tốc hai xe, biết thời gian để đi hết quãng đường AB của xe đạp nhiều hơn xe máy là 2 giờ.

Bài tập 1.55. Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 200 km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy 30 km/h nên ô tô đến sớm hơn xe máy 6 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

Bài tập 1.56. Một xe khách và một xe Du lịch khởi hành cùng một lúc từ Hà Nội đi đến Hải Phòng. Xe Du lịch có vận tốc lớn hơn xe khách là 10 km/h, do đó xe đã đến Hải Phòng trước xe khách 30 phút. Tính vận tốc mỗi xe, biết khoảng cách giữa Hà Nội và Hải Phòng là 100 km.

Bài tập 1.57. Cho hai số có tổng bằng 57. Bốn lần của số bé lớn hơn 2 lần của số lớn là 6. Tìm hai số đã cho.

Bài tập 1.58. Tìm 2 số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 112 và nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 4, số dư là 2.

Bài tập 1.59. Cho một số có hai chữ số, nếu đổi chỗ hai chữ số của nó ta được một số mới lớn hơn số đã cho là 18. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành là 132. Tìm số đã cho.

Bài tập 1.60. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Nếu người đó tăng vận tốc thêm 25 km/h thì đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Nếu người đó giảm vận tốc 20 km/h thì đến B muộn hơn 2 giờ. Tính vận tốc, thời gian dự định và độ dài quãng đường AB .

Bài tập 1.61. Hai xe khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B , cách nhau 120 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 3 giờ. Nếu xe thứ nhất khởi hành trước xe thứ hai 2 giờ 40 phút thì hai xe gặp nhau khi xe thứ hai đi được 1 giờ. Tìm vận tốc của mỗi xe.

Bài tập 1.62. Một ca nô chạy trên sông, xuôi dòng 66 km và ngược dòng 54 km hết tất cả 4 giờ. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó, xuôi dòng 11 km và ngược dòng 18 km hết tất cả 1 giờ. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi.

Bài tập 1.63. Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 280 km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 30 km/h nên ô tô đến sớm hơn xe máy 3 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

D. Bài toán năng xuất

Bài tập 1.64. Trong tháng thứ nhất, hai tổ sản xuất được 800 chi tiết máy. So với tháng thứ nhất, trong tháng thứ hai, tổ một sản xuất vượt 15%, tổ hai sản xuất vượt 20% nên trong tháng này, cả hai tổ đã sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi trong tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Bài tập 1.65. Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo khoác xuất khẩu. Nếu tổ thứ nhất may trong 7 ngày và tổ thứ hai may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1540 chiếc áo. Biết rằng mỗi ngày tổ thứ hai may được nhiều hơn tổ thứ nhất 20 chiếc áo. Hỏi trong một ngày mỗi tổ may được bao nhiêu chiếc áo? (Năng suất may áo của mỗi tổ trong các ngày là như nhau.)

Bài tập 1.66. Trên một cánh đồng, người ta cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ thu hoạch được tất cả 660 tấn thóc. Hỏi năng suất lúa giống mới trên 1 ha bằng bao nhiêu? Biết rằng 3 ha trồng lúa giống mới thu hoạch được ít hơn 4 ha trồng lúa giống cũ là 3 tấn.

Bài tập 1.67. Nhà máy luyện thép hiện có sẵn loại thép chứa 10% carbon và loại thép chứa 20% carbon. Giả sử trong quá trình luyện thép các nguyên liệu không bị hao hụt. Tính khối lượng thép mỗi loại cần dùng để luyện được 1000 tấn thép chứa 16% carbon từ hai loại thép trên.

Bài tập 1.68. Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 140 sản phẩm trong một số ngày quy

định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 2 sản phẩm nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 8 ngày. Hỏi mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Bài tập 1.69. Một xưởng may lập kế hoạch may một lô hàng, theo dự định mỗi ngày may xong 60 áo. Nhưng nhờ cải tiến kỹ thuật, xưởng đã may được 120 áo mỗi ngày. Do đó xưởng không những hoàn thành trước thời hạn 8 ngày mà còn may thêm 240 áo. Hỏi theo kế hoạch phân xưởng phải may bao nhiêu áo?

Bài tập 1.70. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 800 sản phẩm trong thời gian nhất định. Do cải tiến kỹ thuật tổ I đã vượt mức 18%, tổ II vượt mức 25%. Do vậy trong thời gian quy định hai tổ vượt mức 165 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao theo kế hoạch của mỗi tổ là bao nhiêu?

Bài tập 1.71. Trong tháng đầu hai tổ công nhân sản xuất được 300 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai tổ I sản xuất vượt mức 25%, tổ II vượt mức 20%. Do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 370 chi tiết máy. Hỏi rằng trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

E. Bài toán liên môn

Bài tập 1.72. (1 điểm). “Vàng 24K còn được gọi là vàng ròng (là loại vàng tinh khiết nhất, gần như không có pha lẫn tạp chất, có giá trị cao nhất trong các loại vàng) là một kim loại có ánh kim đậm nhất nhưng khá mềm. Trong ngành công nghệ chế tạo trang sức, người ta ít dùng vàng 24K mà thay thế bằng vàng 14K là hợp kim của vàng và đồng để dễ đánh bóng và tạo ra nhiều kiểu dáng đa dạng”. Một món trang sức được làm từ vàng 14K có thể tích 10 cm^3 và nặng 151,8 g. Hãy tính thể tích vàng nguyên chất và đồng được dùng để làm ra món trang sức; biết khối lượng riêng của vàng nguyên chất là $19,3 \text{ g/cm}^3$, khối lượng riêng của đồng là 9 g/cm^3 và công thức liên hệ giữa khối lượng riêng và thể tích là $m = D \cdot V$.

Bài tập 1.73. Biển Chết là hồ nước mặn nhất trên trái đất. Đây là nơi hoàn toàn bị bao bọc mà không có nước biển thoát ra ngoài. Điểm độc đáo của Biển Chết là sở hữu độ mặn cao gấp 9,6 lần so với nước biển thường. Đây là một trong những điểm du lịch độc đáo, du khách không bao giờ bị chìm và tận hưởng công dụng của muối biển đối với sức khỏe. (Biết rằng, nước biển thường có độ mặn là 3,5%) Thầy Tường lấy 500 g nước biển chết và 400 g nước biển thường rồi đổ chung vào một cái thùng. Sau đó, thầy cho thêm vào thùng 10 lít nước ngọt nữa. Hỏi nước trong thùng có thể là nước lợ được không? Biết nước lợ có độ mặn dao động từ 0.5% - 17/30%, xem lượng muối trong nước ngọt không đáng kể.

Bài tập 1.74. Hồ Giáo (1930 - 14 tháng 10 năm 2015), là đại biểu Quốc hội các khoá IV, V và VI. Ông là người duy nhất trong ngành chăn nuôi gia súc được nhà nước Việt Nam phong danh hiệu Anh hùng Lao động hai lần vào năm 1966 và 1986. Trong câu truyện “đàn bê của anh Hồ Giáo” (tiếng việt lớp 2). Giả sử anh Hồ Giáo thả đàn bê trên một cánh đồng cỏ mọc dày như nhau, mọc cao đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng trong suốt thời gian bê ăn cỏ trên cánh đồng ấy. Biết rằng, 9 con bê ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 2 tuần, 6 con bê ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 4 tuần. Hỏi bao nhiêu con bê ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 6 tuần? (xem như mỗi con bê ăn số cỏ như nhau)

Bài tập 1.75. Có hai loại quặng sắt: quặng loại A chứa 60% sắt, quặng loại B chứa 50% sắt. Người ta trộn một lượng quặng loại A với một lượng quặng loại B thì được hỗn hợp chứa $\frac{8}{15}$ sắt. Nếu lấy tăng hơn lúc đầu là 10 tấn quặng loại A và lấy giảm hơn lúc đầu là 10 tấn quặng loại B thì được hỗn hợp quặng chứa $\frac{17}{30}$ sắt. Tính khối lượng quặng mỗi loại đem trộn lúc đầu.

Bài tập 1.76. Hai dung dịch có khối lượng tổng cộng bằng 220 kg. Lượng muối trong dung dịch I là 5 kg, lượng muối trong dung dịch II là 4,8 kg. Biết nồng độ % muối trong dung dịch I nhiều hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 1%. Tính khối lượng mỗi dung dịch nói trên.

Bài tập 1.77. Nguyên tử lưu huỳnh có tổng cộng 48 hạt cơ bản. Trong đó, tổng số hạt mang điện nhiều hơn tổng số hạt không mang điện là 16 hạt. Tính số lượng mỗi hạt có trong nguyên tử lưu huỳnh. Biết rằng, trong nguyên tử có 3 loại hạt cơ bản là: Hạt electron (ký hiệu e), hạt proton (ký hiệu p), hạt notron (ký hiệu n). Trong 3 loại hạt cơ bản đó thì hạt proton mang điện tích dương và hạt electron mang điện tích âm, còn hạt notron không mang điện. Số hạt proton bằng số hạt electron.

Bài tập 1.78. Một chiếc vòng nữ trang được làm từ vàng và bạc với thể tích là 10 cm^3 và cân nặng 171g. Biết vàng có khối lượng riêng là $19,3 \text{ g/cm}^3$ còn bạc có khối lượng riêng là $10,5 \text{ g/cm}^3$. Hỏi thể tích của

vàng và bạc được sử dụng để làm chiếc vòng?

Bài tập 1.79. Có 2 thỏi thép vụn loại một thỏi chứa 10% niken và thỏi còn lại chứa 35% niken, cần lấy bao nhiêu tấn thép vụn mỗi loại trên để luyện được 140 tấn thép chứa 30% Niken?

Bài tập 1.80. Bạn An muốn có 1 lít nước ở nhiệt độ 35°C . Hỏi bạn cần phải đổ bao nhiêu lít nước đang sôi vào bao nhiêu lít nước ở nhiệt độ 15°C . Lấy nhiệt dung riêng của nước là 4190 J/kgK ? Biết công thức nhiệt dung riêng $C = \frac{Q}{m(t_2 - t_1)}$.

Bài tập 1.81. Một vật có khối lượng 244 gam và thể tích 46 cm^3 là hợp kim của đồng và kẽm. Tính xem trong đó có bao nhiêu gam đồng và bao nhiêu gam kẽm, biết rằng cứ 90 gam đồng thì có thể tích 11 cm^3 và 8 gam kẽm có thể tích 3 cm^3 .

Bài tập 1.82. Vào thế kỉ III trước Công nguyên, vua xứ Xi-ra-cut giao cho Ác-si-mét kiểm tra chiếc vương miện bằng vàng của nhà vua có bị pha thêm bạc hay không. Chiếc vương miện có trọng lượng 5N (theo trọng lượng hiện nay, nhưng trong nước thì trọng lượng giảm 0,3 N. Biết rằng khi cân trong nước vàng giảm $\frac{1}{20}$ trọng lượng, bạc giảm $\frac{1}{10}$ trọng lượng. (Vật có khối lượng 100 g thì có trọng lượng 1 N).

Bài tập 1.83. Người ta hòa lẫn 7 kg chất lỏng I với 5kg chất lỏng II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng 600 kg/m^3 . Biết khối lượng riêng của chất lỏng I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng II là 200 kg/m^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Bài tập 1.84. (1 điểm) Để tính toán thời gian một chu kỳ đồng đưa (một chu kỳ đồng đưa dây đu được tính từ lúc dây đu bắt đầu được đưa lên cao đến khi dừng hẳn) của một dây đu, người ta sử dụng công thức

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Trong đó, T là thời gian một chu kỳ đồng đưa (s), L là chiều dài của dây đu (m) và $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

- Một sợi dây đu có chiều dài $L = (2 + \sqrt{3}) \text{ m}$, hỏi chu kỳ đồng đưa dài bao nhiêu giây?
- Một người muốn thiết kế một dây đu sao cho một chu kỳ đồng đưa kéo dài 4 giây. Hỏi người đó phải làm một sợi dây đu dài bao nhiêu?

Bài tập 1.85. Nước biển là dung dịch có nồng độ muối là 3,5% (giả sử không có tạp chất). Có 10 kg nước biển. Hỏi phải thêm bao nhiêu kg nước (nguyên chất) để được dung dịch có nồng độ 2%.

Bài tập 1.86. (1 điểm). “Vàng 24K còn được gọi là vàng ròng (là loại vàng tinh khiết nhất, gần như không có pha lẫn tạp chất, có giá trị cao nhất trong các loại vàng) là một kim loại có ánh kim đậm nhất nhưng khá mềm. Trong ngành công nghệ chế tạo trang sức, người ta ít dùng vàng 24K mà thay thế bằng vàng 14K là hợp kim của vàng và đồng để dễ đánh bóng và tạo ra nhiều kiểu dáng đa dạng”. Một món trang sức được làm từ vàng 14K có thể tích 10 cm^3 và nặng 151,8 g. Hãy tính thể tích vàng nguyên chất và đồng được dùng để làm ra món trang sức; biết khối lượng riêng của vàng nguyên chất là $19,3 \text{ g/cm}^3$, khối lượng riêng của đồng là 9 g/cm^3 và công thức liên hệ giữa khối lượng riêng và thể tích là $m = D \cdot V$.

Bài tập 1.87. Gen B có 3600 liên kết Hidro và có hiệu giữa Nucleotit loại T với loại Nucleotit không bổ sung với nó là 300 Nucleotit. Tính số Nucleotit từng loại của gen B. Biết rằng, để tính số lượng Nucleotit (A, T, G, X) trong phân tử AND, ta áp dụng nguyên tắc bổ sung: “A liên kết với T bằng 2 liên kết Hidro và G liên kết với X bằng 3 liên kết Hidro” và $\%A = \%T$, $\%G = \%X$. Tổng số Nucleotit trong gen B: $N = A + T + G + X = 2A + 2G = 2T + 2X$.

Bài tập 1.88. Người ta trộn 8 g chất lỏng này với 6 g chất lỏng khác có khối lượng riêng lớn hơn nó là $0,2 \text{ g/cm}^3$ để được hỗn hợp có khối lượng riêng $0,7 \text{ g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng?

Bài tập 1.89. Cân bằng các phương trình hoá học sau bằng phương pháp đại số.

- $\text{Ag} + \text{Cl}_2 \rightarrow \text{AgCl}$.
- $\text{CO}_2 + \text{C} \rightarrow \text{CO}$.

1.4 Ôn tập chương

❖ TRẮC NGHIỆM ❖

Câu 1.1. Tất cả các nghiệm của phương trình $(x + 3)(2x - 6) = 0$ là

- A. $x = -3$. B. $x = 3$. C. $x = 3$ hay $x = -3$. D. $x = 2$.

Câu 1.2. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x+3}{x-4} + 2 = \frac{1}{x-3}$

- A. $x \neq 4$. B. $x \neq 3$. C. $x \neq 4$ và $x \neq 3$. D. $x = 4$ và $x = 3$.

Câu 1.3. Nghiệm của phương trình $\frac{x+2}{x-4} - 1 = \frac{30}{(x+3)(x-4)}$ là

- A. $x = 2$. B. $x = -3$. C. $x = 4$. D. $x = -2$.

Câu 1.4. Phương trình nào sau đây **không** phải là phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $5x - y = 3$. B. $\sqrt{5}x + 0y = 0$. C. $0x - 4y = \sqrt{6}$. D. $0x + 0y = 12$.

Câu 1.5. Đường thẳng biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $3x - y = 2$

- A. vuông góc với trục tung. B. vuông góc với trục hoành.
C. đi qua gốc tọa độ. D. đi qua điểm $A(1; 1)$.

Câu 1.6. Cặp số $(-2; -3)$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$. C. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$. D. $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 1.90. Giải các hệ phương trình:

- a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 7y = -13 \end{cases}$. b) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases}$. c) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$. d) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - \frac{2}{3}y = 3\frac{1}{3} \end{cases}$.

Bài tập 1.91. Giải các phương trình:

- a) $(5x + 2)(2x - 7) = 0$. b) $\left(\frac{1}{2}x + 5\right)\left(-\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right) = 0$.
c) $y^2 - 5y + 2(y - 5) = 0$. d) $9x^2 - 1 = (3x - 1)(2x + 7)$.

Bài tập 1.92. Giải các phương trình:

- a) $\frac{5}{x+2} + \frac{3}{x-1} = \frac{3x+4}{(x+2)(x-1)}$. b) $\frac{4}{2x-3} + \frac{3}{x(2x-3)} = \frac{5}{x}$.
c) $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{3x-5}{x^2-9}$. d) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{8}{x^2-1}$.

Bài tập 1.93. Tìm hai số nguyên dương biết tổng của chúng bằng 1006, nếu lấy số lớn chia cho số bé được thương là 2 và số dư là 124.

Bài tập 1.94. Ở giải bóng đá Ngoại hạng Anh mùa giải 2003 – 2004, đội Arsenal đã thi đấu 38 trận mà không thua trận nào và giành chức vô địch với 90 điểm. Biết rằng với mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua không có điểm và nếu hai đội hoà nhau thì mỗi đội được 1 điểm. Mùa giải đó đội Arsenal đã giành được bao nhiêu trận thắng?

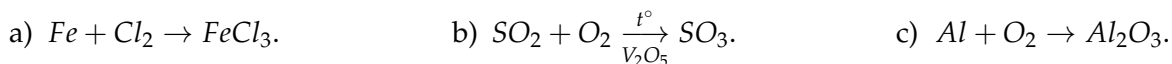
Bài tập 1.95. Nhân kỉ niệm ngày Quốc khánh 2/9, một nhà sách giảm giá mỗi cây bút bi là 20% và mỗi quyển vở là 10% so với giá niêm yết. Bạn Thanh vào nhà sách mua 20 quyển vở và 10 cây bút bi. Khi tính tiền, bạn Thanh đưa 175000 đồng và được trả lại 3000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi quyển vở và mỗi cây bút bi, biết rằng tổng số tiền phải trả nếu không được giảm giá là 195000 đồng.

Bài tập 1.96. Trong một xí nghiệp, hai tổ công nhân A và B lắp ráp cùng một loại bộ linh kiện điện tử. Nếu tổ A lắp ráp trong 5 ngày, tổ B lắp ráp trong 4 ngày thì xong 1900 bộ linh kiện. Biết rằng mỗi ngày tổ A lắp ráp nhiều hơn tổ B là 20 bộ linh kiện. Hỏi trong một ngày mỗi tổ ráp được bao nhiêu bộ linh kiện điện tử? (Năng suất lắp ráp của mỗi tổ trong các ngày là như nhau).

Bài tập 1.97. Giải bài toán cổ sau:

*Quýt, cam mười bảy quả tươi
Đem chia cho một trăm người cùng vui
Chia ba mỗi quả quýt rồi
Còn cam mỗi quả chia mười vừa xinh
Trăm người, trăm miếng ngọt lành
Quýt, cam mỗi loại tính rành là bao?*

Bài tập 1.98. Cân bằng các phương trình hoá học sau bằng phương pháp đại số.



Bài tập 1.99. Nhà máy luyện thép hiện có sẵn loại thép chứa 10% carbon và loại thép chứa 20% carbon. Giả sử trong quá trình luyện thép các nguyên liệu không bị hao hụt. Tính khối lượng thép mỗi loại cần dùng để luyện được 1000 tấn thép chứa 16% carbon từ hai loại thép trên.

Chương 2

Bất đẳng thức. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

2.1 Bất đẳng thức

2.1.1 Khái niệm

Khi cho hai số thực x và y thì ta có một trong các trường hợp sau

- $x = y$,
- $x > y, x \geq y$,
- $x < y, x \leq y$.

Trường hợp $x = y$ được gọi là đẳng thức. Trường hợp $x < y, x \leq y, x > y$ hoặc $x \geq y$ được gọi là bất đẳng thức.

Định nghĩa 2.1.1. Hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b, a \geq b, a \leq b$) được gọi là *bất đẳng thức* và a được gọi là *vế trái*, b được gọi là *vế phải* của bất đẳng thức.

2.1.2 Tính chất của bất đẳng thức

A. Tính chất bắc cầu và tính cộng của bất đẳng thức

Tính chất 2.1.1.

- Cho ba số a, b, c . Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$ (tính chất bắc cầu).
- Cho ba số a, b, c . Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$.
- Khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của bất đẳng thức thì ta phải đổi dấu của nó.

B. Tính nhân của bất đẳng thức

Tính chất 2.1.2.

- Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một *số dương* thì được một bất đẳng thức mới *cùng chiều* với bất đẳng thức đã cho.
- Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một *số âm* thì được một bất đẳng thức mới *ngược chiều* với bất đẳng thức đã cho.

Bài tập liên quan đến tính cộng

Bài tập 2.1. Hãy viết một bất đẳng thức diễn tả số a lớn hơn 3. Về trái, về phải của bất đẳng thức đó là gì?

Bài tập 2.2. So sánh hai số x và y , biết $x > 3,4$ và $y < 3,4$.

Bài tập 2.3. Chứng minh $2023 + (-2^{29}) > 2022 + (-2^{29})$.

Bài tập 2.4. So sánh hai số $-3 + 23^{50}$ và $-2 + 23^{50}$.

Bài tập 2.5. Cho hai số a và b thỏa mãn $a < b$. Chứng tỏ $a + 3 < b + 5$.

Bài tập 2.6. Cho hai số m và n thỏa mãn $m > n$. Chứng tỏ $m + 5 > n + 4$.

Bài tập 2.7. Gọi a là số tuổi của bạn Na, b là số tuổi của bạn Toàn, biết rằng bạn Toàn lớn tuổi hơn bạn Na. Hãy dùng bất đẳng thức để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn đó ở hiện tại và sau ba năm nữa.

Bài tập liên quan đến tính nhân

Bài tập 2.8. Không thực hiện phép tính, hãy so sánh: $1962 \cdot 12$ và $1963 \cdot 12$.

Bài tập 2.9. Không thực hiện phép tính, hãy so sánh: $47 \cdot (-19)$ và $50 \cdot (-19)$.

Bài tập 2.10. Cho hai số a, b thỏa mãn $a^2 > b^2 > 0$. Chứng tỏ $5a^2 > 4b^2$.

Bài tập 2.11. Hãy so sánh: $(-163) \cdot (-75)^{15}$ và $(-162) \cdot (-75)^{15}$.

Bài tập 2.12. Cho hai số m, n thỏa mãn $0 < m^2 < n^2$. Chứng tỏ $\frac{3}{2}m^2 < 2n^2$.

Bài tập 2.13. Cho biết $-10m \leq -10n$, hãy so sánh m và n .

🔗 LUYỆN TẬP 🔗

Bài tập 2.14. Dùng các kí hiệu $>, <, \geq, \leq$ để diễn tả:

- Tốc độ v đúng quy định với biển báo giao thông ở Hình 4a.
- Trọng tải P của toàn bộ xe khi đi qua cầu đúng quy định với biển báo giao thông ở Hình 4b.



Hình 4a)



Hình 4b)

Bài tập 2.15. Hãy chỉ ra các bất đẳng thức diễn tả mỗi khẳng định sau:

- m lớn hơn 8;
- n nhỏ hơn 21;
- x nhỏ hơn hoặc bằng 4;
- y lớn hơn hoặc bằng 0.

Bài tập 2.16. Hãy cho biết các bất đẳng thức được tạo thành khi:

- Cộng hai vế của bất đẳng thức $m > 5$ với -4 ;
- Cộng hai vế của bất đẳng thức $x^2 \leq y + 1$ với 9;
- Nhân hai vế của bất đẳng thức $x > 1$ với 3, rồi tiếp tục cộng với 2;
- Cộng vào hai vế của bất đẳng thức $m \leq -1$ với -1 , rồi tiếp tục cộng với -7 .

Bài tập 2.17. So sánh hai số x và y trong mỗi trường hợp sau:

- $x + 5 > y + 5$;
- $-11x \leq -11y$;
- $3x - 5 < 3y - 5$;
- $-7x + 1 > -7y + 1$.

2.2 Bất phương trình bậc nhất một ẩn

2.2.1 Khái niệm

Định nghĩa 2.2.1. Bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$), với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là *bất phương trình bậc nhất một ẩn* (ẩn là x).

- Số x_0 được gọi là *ng nghiệm* của bất phương trình nếu ta thay $x = x_0$ thì nhận được một khẳng định đúng.
- Giải bất phương trình là tìm *tất cả các ng nghiệm* của nó.

2.2.2 Các bước giải

Phương pháp giải

Xét bất phương trình $ax + b > 0$ ($a \neq 0$).

- Chuyển về b sang về phải ta được $ax > -b$.
- Chia hai vế phương trình cho a ta được

- Nếu $a > 0$ thì nhận được ng nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > -\frac{b}{a}$.
- Nếu $a < 0$ thì nhận được ng nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -\frac{b}{a}$.

BÀI TẬP

Bài tập 2.18. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

- a) $a + 2023 > 0$. b) $0x - 5 < 0$. c) $5x - 7 \leq 0$. d) $x^2 + 1 \leq 0$.
- e) $0x < 0$. f) $3x < 0$. g) $x^3 + 1 \geq 0$. h) $-x + 1 \leq 0$.

Bài tập 2.19. Trong hai giá trị $x = 1$ và $x = 2$, giá trị nào là ng nghiệm của bất phương trình $3x - 4 \leq 0$?

Bài tập 2.20. Tìm một số là ng nghiệm và một số không phải là ng nghiệm của bất phương trình $4x + 5 > 0$.

Bài tập 2.21. Giải các bất phương trình sau:

- a) $2x + 1 > 0$. b) $-2x + 1 < 0$. c) $0,5x - 6 \leq 0$. d) $-2x + 3 \leq 0$.
- e) $2(x + 1) + 3 > 0$. f) $-2(x + 3) + 1 < 0$. g) $0,5x - 6(x - 2) \leq 0$. h) $-2x + 3(x - 1) \leq 0$.
- i) $2t - 5 > 0$. j) $3y + 1 \geq 0$. k) $2v - 3 < 0$. l) $2z - 3 > 0$.

Bài tập 2.22. Giải các bất phương trình sau:

- a) $x + 2 \leq 2 + 3x$ b) $4 + x > 5 - 3x$. c) $-x + 7 \geq x - 3$. d) $6 < \frac{x - 3}{3}$.
- e) $\frac{1}{2} \cdot x > 5$. f) $7 < \frac{2x + 1}{5}$. g) $2x - 5 \leq 4x + 3$. h) $5 + 7x > 4x - 7$.

Bài tập 2.23. Giải các bất phương trình sau:

- a) $5 - 7x > 4(x - 3) - 7$. b) $2(x + 1) + 3 > x - 1$.
- c) $-2(x + 3) + 5(x - 1) < 2x + 3$. d) $0,5x + 7(x - 2) \leq \frac{1}{2}x - 1$.
- e) $-2x - 5(x - 1) \leq \frac{5}{3}x - 1$. f) $2(x + 3) + 5(x - 1) < \frac{1}{2}x - 33$.

Bài tập 2.24. Tìm x sao cho:

- a) Giá trị của biểu thức $2x + 1$ là số dương. b) Giá trị của biểu thức $3x - 5$ là số âm.
- c) Giá trị của biểu thức $-3x + 1$ là số không âm. d) Giá trị của biểu thức $\frac{1}{2}x - 5$ là số dương.
- e) Giá trị của biểu thức $\frac{1}{2}x + 1$ nhỏ hơn 2. f) Giá trị của biểu thức $2(x + \frac{1}{3}) + 1$ lớn hơn 1.

Bài tập 2.25. Trong một kì thi gồm ba môn Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh, điểm số môn Toán và Ngữ văn tính theo hệ số 2, điểm số môn Tiếng Anh tính theo hệ số 1. Để trúng tuyển, điểm số trung bình của ba môn ít nhất phải bằng 8. Bạn Na đã đạt 9,1 điểm môn Toán và 6,9 điểm môn Ngữ văn. Hãy lập và giải bất phương trình để tìm điểm số Tiếng Anh tối thiểu mà bạn Na phải đạt để trúng tuyển.

Bài tập 2.26. Để hưởng ứng phong trào “Trồng cây gây rừng”, lớp 9A có kế hoạch trồng ít nhất 1 000 cây xanh. Lớp 9A đã trồng được 540 cây. Để đạt được kế hoạch đề ra, lớp 9A cần trồng thêm ít nhất bao nhiêu cây xanh nữa?

Bài tập 2.27. Một kì thi Tiếng Anh gồm bốn kĩ năng: nghe, nói, đọc và viết. Kết quả của bài thi là điểm số trung bình của bốn kĩ năng này. Bạn Hà đã đạt được điểm số của ba kĩ năng nghe, đọc, viết lần lượt là 6, 5, 6, 5, 5, 5. Hỏi bạn Hà cần đạt bao nhiêu điểm trong kĩ năng nói để kết quả đạt được của bài thi ít nhất là 6,25?

2.3 Ôn tập chương

➡ TRẮC NGHIỆM ➡

Câu 2.1. Bất đẳng thức $n \leq 3$ có thể được phát biểu là

- A. n lớn hơn 3. B. n nhỏ hơn 3. C. n không nhỏ hơn 3. D. n không lớn hơn 3.

Câu 2.2. Cho các số thực x, y, z biết $x < y$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $x + z < y + z$. B. $xz < yz$ nếu z âm.
C. $xz < yz$ nếu z dương. D. $x - z < y - z$.

Câu 2.3. Hệ thức nào sau đây là bất đẳng thức?

- A. $1 - x = 0$. B. $x^2 - 5x + 6 = 0$. C. $y^2 \geq 0$. D. $x = y$.

Câu 2.4. Bất phương trình $3x - 5 > 4x + 2$ có nghiệm là

- A. $x > -7$. B. $x < -7$. C. $x < 7$. D. $x \leq -7$.

Câu 2.5. Bất phương trình $2x - 1 \leq x + 4$ có nghiệm là

- A. $x \leq 5$. B. $x \geq 5$. C. $x \leq -5$. D. $x < 5$.

⬅ BÀI TẬP ⬅

Bài tập 2.28. Cho $a > b$, chứng minh:

- a) $a - 2 > b - 2$; b) $-5a < -5b$; c) $2a + 3 > 2b + 3$; d) $10 - 4a < 10 - 4b$.

Bài tập 2.29. Giải các bất phương trình sau:

- a) $3 - 0,2x < 13$. b) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \geq \frac{1}{4}$. c) $3 < \frac{2x - 2}{8}$. d) $\frac{2x - 3}{3} \leq \frac{3x - 2}{4}$.

Bài tập 2.30. Tìm x sao cho:

- a) Giá trị của biểu thức $2x + 1$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $3x - 5$;
b) Giá trị của biểu thức $2x + 1$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $3x - 5$.

Bài tập 2.31. Trong cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi thí sinh phải trả lời 12 câu hỏi của ban tổ chức. Mỗi câu hỏi gồm bốn phương án, trong đó chỉ có một phương án đúng. Với mỗi câu hỏi, nếu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm, trả lời sai bị trừ 2 điểm. Khi bắt đầu cuộc thi mỗi thí sinh có sẵn 20 điểm. Thí sinh nào đạt từ 50 điểm trở lên sẽ được vào vòng tiếp theo. Hỏi thí sinh phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu thì được vào vòng thi tiếp theo?

Bài tập 2.32. Tìm lỗi **sai** trong các lời giải sau:

- a) Giải bất phương trình $-3x > 9$.
Ta có:

$$\begin{aligned} -3x &> 9 \\ x &> 9 + 3 \\ x &> 12. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 12$.

- b) Giải bất phương trình $-\frac{2}{3}x \leq 5$.
Ta có

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x &\leq 5 \\ \left(-\frac{2}{3}\right)x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) &\leq 5 \left(-\frac{3}{2}\right) \\ x &\leq -\frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq -\frac{15}{2}$.

Chương 3

Căn thức

3.1 Căn bậc hai

3.1.1 Căn bậc hai của một số

Định nghĩa 3.1.1. Căn bậc hai của số thực a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

Tính chất 3.1.1. Cho số thực a

- Nếu $a > 0$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.
- Nếu $a = 0$ có đúng một căn bậc hai là 0.
- Nếu $a < 0$ thì không có căn bậc hai.

Định nghĩa 3.1.2. Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a .

Tính chất 3.1.2. Cho $a, b \geq 0$ nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

❖ BÀI TẬP ❖

A. Tìm căn bậc hai, căn bậc hai số học của một số

Bài tập 3.1. Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc hai của chúng.

- | | | | |
|----------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| a) 0. | b) 81. | c) -196. | d) 4,41. |
| e) 0,25. | f) $\frac{169}{49}$. | g) $\frac{36}{121}$. | h) $3\frac{6}{25}$. |
| i) 1. | j) 64. | k) -144. | l) 2,25. |
| m) 0,16. | n) $\frac{25}{36}$. | o) $\frac{256}{225}$. | p) $1\frac{15}{49}$. |

Bài tập 3.2. Dùng máy tính cầm tay, thực hiện phép tính. Giải thích vì sao (bằng định nghĩa)?

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $\sqrt{4}$. | b) $\sqrt{9}$. | c) $\sqrt{16}$. | d) $\sqrt{25}$. |
| e) $\sqrt{36}$. | f) $\sqrt{49}$. | g) $\sqrt{64}$. | h) $\sqrt{81}$. |
| i) $\sqrt{121}$. | j) $\sqrt{144}$. | k) $\sqrt{169}$. | l) $\sqrt{225}$. |
| m) $\sqrt{0,04}$. | n) $\sqrt{0,09}$. | o) $\sqrt{1,21}$. | p) $\sqrt{2,25}$. |

Bài tập 3.3. Sử dụng máy tính cầm tay, tính (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư)

- a) $\sqrt{54}$. b) $\sqrt{24}$ c) $\sqrt{24,68}$. d) $3\sqrt{15}$.
- e) $-2\sqrt{28}$ f) $2\sqrt{6} + \sqrt{7}$. g) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{6}$. h) $\sqrt{5} + \sqrt{6} + 3\sqrt{7}$.

Bài tập 3.4. Tính giá trị của các biểu thức (không dùng máy tính)

- a) $3 + (-\sqrt{1,75})^2$. b) $1 - 2(-\sqrt{1,5})^2$. c) $(\sqrt{5,25})^2 + (-\sqrt{1,75})^2$. d) $(\sqrt{102})^2 - \sqrt{98^2}$.

B. So sánh căn bậc hai số học

Bài tập 3.5. So sánh:

- a) 6 và $\sqrt{37}$. b) 4 và $\sqrt{37} - 2$. c) $\sqrt{10} + 3$ và 6. d) 4 và $\sqrt{26} - 1$.
- e) 6 và $\sqrt{41}$. f) $3\sqrt{2}$ và 5. g) $\sqrt{5} + 1$ và 3. h) 4 và $\sqrt{17} - 2$.

3.1.2 Căn thức bậc hai

Định nghĩa 3.1.3. Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.

❖ BÀI TẬP ❖

A. Điều kiện có nghĩa của biểu thức. Tính giá trị biểu thức

Bài tập 3.6. Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

- a) $\sqrt{72a}$. b) $\sqrt{\frac{-13}{3a}}$. c) $\sqrt{19 + 4a}$. d) $\sqrt{27 - 6a}$.
- e) $\sqrt{86a}$. f) $\sqrt{\frac{-10}{9}a}$. g) $\sqrt{24 + 10a}$. h) $\sqrt{17 - 5a}$.

Bài tập 3.7. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

- a) $\sqrt{\frac{15}{x-2}}$. b) $\sqrt{\frac{-17}{12-x}}$. c) $\sqrt{\frac{1}{x+3}}$. d) $\sqrt{\frac{-22}{5-x}}$.
- e) $\sqrt{\frac{10-30x}{3x^2+1}}$. f) $\sqrt{\frac{4x+2}{x^2+4x+5}}$. g) $\sqrt{\frac{22-5x}{x^2+1}}$. h) $\sqrt{\frac{x-2}{x^2+2x+3}}$.

Bài tập 3.8. Cho biểu thức $A = \sqrt{5-2x}$.

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = -2$ và khi $x = 3$.
- b) Với giá trị nào của x thì biểu thức A xác định?

Bài tập 3.9. Với giá trị nào của x thì biểu thức $A = \sqrt{3x+6}$ xác định? Tính giá trị của A khi $x = 5$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài tập 3.10. Cho biểu thức $P = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Tính giá trị của P khi

- a) $a = 3, b = 10, c = 3$. b) $a = 2, b = 6, c = 5$.

Bài tập 3.11. Cho biểu thức $P = \sqrt{a^2 - b^2}$. Tính giá trị của P khi:

- a) $a = 5, b = 0$. b) $a = 5, b = -5$. c) $a = 2, b = -4$.

Bài tập 3.12. Tính giá trị của các biểu thức sau khi $x = 16, y = 9$.

- a) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. b) $\sqrt{x+y}$. c) $\frac{1}{2}\sqrt{xy}$. d) $\frac{1}{6}x\sqrt{y}$.

Bài tập 3.13. Cho biểu thức $P = \sqrt{x^2 - xy} + 1$. Tính giá trị của P khi

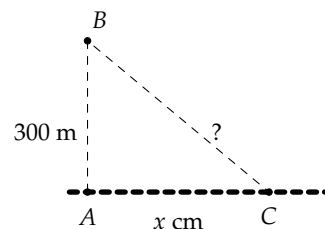
a) $x = 3, y = -2$.

b) $x = 1, y = 4$.

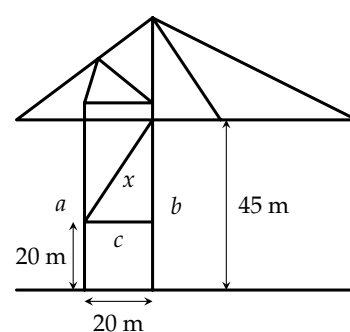
B. Toán ứng dụng

Bài tập 3.14. Một trạm phát sóng được đặt ở vị trí B cách đường tàu một khoảng $AB = 300$ (m). Đầu tàu đang ở vị trí C, cách vị trí A một khoảng $AC = x$ (m).

- Viết biểu thức biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu.
- Tính khoảng cách trên khi $x = 400, x = 1000$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



Bài tập 3.15. Trên cần trục ở Hình 5, hai trụ a và b đứng cách nhau 20 m, hai xà ngang c và d lần lượt có độ cao 20 m và 45 m so với mặt đất. Xà chéo x có độ dài bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Hình 5

3.2 Căn bậc ba

3.2.1 Căn bậc ba của một số

Định nghĩa 3.2.1. Căn bậc ba của số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$, kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.

Tính chất 3.2.1. Mọi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 3.16. Thực hiện phép tính

a) $\sqrt[3]{3^3}$.

b) $\sqrt[3]{27}$.

c) $\sqrt[3]{5^3}$.

d) $\sqrt[3]{125}$.

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$.

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{5^3}}$.

g) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$.

h) $\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}}$.

i) $\sqrt[3]{\frac{3^3}{5^3}}$.

j) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$.

k) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$.

l) $\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}}$.

Bài tập 3.17. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = 2\sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{4^3} + 3\sqrt[3]{3^3}$.

b) $B = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{27}$.

c) $C = \frac{1}{\sqrt[3]{5^3}} + \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^3}}$.

d) $D = \sqrt[3]{\frac{1}{125}} + \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$.

e) $E = \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} - \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{5^3}}$.

f) $F = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27} - \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}$.

3.2.2 Căn thức bậc ba

Định nghĩa 3.2.2. Với A là biểu thức đại số, ta gọi căn bậc ba của A là $\sqrt[3]{A}$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 3.18. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt[3]{(x-1)^3}$.

b) $B = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$.

c) $C = \sqrt[3]{(2x-1)^3}$.

d) $D = \sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}$.

e) $A = \sqrt[3]{(x+1)^3}$.

f) $B = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$.

Bài tập 3.19. Tìm x

a) $x^3 = 27$.

b) $2x^3 = \frac{1}{4}$.

c) $(x-1)^3 = -64$.

d) $(2x-1)^3 = -125$.

3.3 Phép khai phương (khai căn)

3.3.1 Căn bậc hai của một bình phương

Định lý 3.3.1. Với mọi số thực a , ta có $\sqrt{a^2} = |a|$.

Định lý 3.3.2. Với A là một biểu thức đại số ta có $\sqrt{A^2} = |A|$.

- Với $A > 0$ ta được $\sqrt{A^2} = A$.
- Với $A < 0$ ta được $\sqrt{A^2} = -A$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 3.20. Thực hiện phép tính:

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|----------------------|------------------------|
| a) $\sqrt{16}$. | b) $\sqrt{0,81}$. | c) $\sqrt{25}$. | d) $\sqrt{0,16}$. |
| e) $(\sqrt{75})^2$. | f) $(\sqrt{0,4})^2$. | g) $\sqrt{36}$. | h) $\sqrt{(2,5)^2}$. |
| i) $\sqrt{13^2}$. | j) $\sqrt{(-2)^2}$. | k) $(\sqrt{19})^2$. | l) $(\sqrt{0,16})^2$. |

Bài tập 3.21. Thực hiện phép tính:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $3 + 10\sqrt{9} - 19\sqrt{4}$. | b) $3\sqrt{25} + 10\sqrt{9} - 19\sqrt{4}$. | c) $2 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} + 5 \cdot \sqrt{0,64}$. |
| d) $\frac{2}{3}\sqrt{81} - \frac{3}{2}\sqrt{16} + 13$. | e) $3\sqrt{\frac{4}{9}} - 50\sqrt{\frac{-1}{-4}} + 1$. | f) $0,5\sqrt{64} - 2\sqrt{25}$. |
| g) $10 \cdot \sqrt{1,69} + 5 \cdot \sqrt{1\frac{11}{25}}$. | h) $\frac{1}{3}\sqrt{9} - \frac{2}{5}\sqrt{25}$. | i) $9\sqrt{\frac{121}{9}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{196}{9}} - 27$. |

Bài tập 3.22. Rút gọn các biểu thức sau

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---|
| a) $3\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$. | b) $3\sqrt{a^2}$ với $a < 0$. | c) $\sqrt{81a^2} + 9a$ với $a \leq 0$. |
| d) $\sqrt{25a^4} - 3a^2$. | e) $\sqrt{9a^6} - 2a^3$ với $a < 0$. | f) $-2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$. |
| g) $\sqrt{16a^2} + 4a$ với $a < 0$. | h) $\sqrt{a^4} - 4a^2$. | i) $\sqrt{a^6} + a^3$ với $a < 0$. |

Bài tập 3.23. Rút gọn các biểu thức sau

- | | |
|--|--|
| a) $\sqrt{(a-4)^2}$ với $a \geq 4$. | b) $\sqrt{(5-a)^2} + 4a$ với $a < 5$. |
| c) $\sqrt{(a-1)^2}$ với $a \geq 1$. | d) $\sqrt{(2-a)^2} + a$ với $a < 2$. |
| e) $\sqrt{a^2 + 6a + 9}$ với $a \geq -3$. | f) $\sqrt{4a^2 - 4a + 1} + 2a$ với $a < \frac{1}{2}$. |
| g) $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$ với $a \geq -1$. | h) $\sqrt{9a^2 - 6a + 1} + 3a$ với $a < \frac{1}{3}$. |

Bài tập 3.24. Phân tích đa thức thành nhân tử

- | | | | |
|----------------|-----------------|-----------------------------|------------------------------|
| a) $x^2 - 7$. | b) $4x^2 - 3$. | c) $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7$. | d) $9x^2 + 6\sqrt{2}x + 2$. |
| e) $x^2 - 3$. | f) $9x^2 - 5$. | g) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$. | h) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3$. |

3.3.2 Căn bậc hai một tích

Định lý 3.3.3. Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

b) $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \sqrt{b}$.

Hai công thức trên vẫn đúng cho trường hợp a, b là các biểu thức.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 3.25. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{36 \cdot 0,81}$. b) $\sqrt{49 \cdot \frac{64}{625}}$. c) $\sqrt{5^4 \cdot (-13)^2}$. d) $\sqrt{0,04 \cdot 256}$.

e) $\sqrt{4 \cdot \frac{144}{81}}$. f) $\sqrt{7 \cdot 63}$. g) $\sqrt{3^4 \cdot (-4)^2}$. h) $\sqrt{8 \cdot 11 \cdot 22}$.

Bài tập 3.26. Biến đổi biểu thức dưới dấu căn rồi tính:

a) $\sqrt{65^2 - 16^2}$. b) $\sqrt{29^2 - 20^2}$. c) $\sqrt{20^2 - 16^2}$. d) $\sqrt{50^2 - 14^2}$.

e) $\sqrt{10^2 - 6^2}$. f) $\sqrt{26^2 - 10^2}$. g) $\sqrt{17^2 - 8^2}$. h) $\sqrt{25^2 - 24^2}$.

Bài tập 3.27. Áp dụng quy tắc nhân các căn thức bậc hai, hãy tính:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{80}$. b) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{32}$. c) $\sqrt{3,6} \cdot \sqrt{8,1}$. d) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{0,5}$.

e) $\sqrt{17} \cdot \sqrt{68}$. f) $\sqrt{1,6} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{18}$. g) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{2,5}$. h) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1,8}$.

Bài tập 3.28. Tính giá trị biểu thức:

a) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{169} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$. b) $(\sqrt{27} - \sqrt{243}) \cdot \sqrt{3}$.

c) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{49} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$. d) $(\sqrt{8} - \sqrt{32}) \cdot \sqrt{2}$.

Bài tập 3.29. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{0,81a^2}$ với $a \geq 0$. b) $\sqrt{32 \cdot 50(3-a)^2}$ với $a \leq 3$.

c) $\sqrt{\frac{4}{9}a^4(a-5)^2}$ với $a < 5$. d) $\frac{1}{a-3}\sqrt{4a^4(a-3)^2}$ với $a > 3$.

e) $\sqrt{2,25(9-6a+a^2)}$ với $a < 3$. f) $\sqrt{1,44a^2}$ với $a < 0$.

g) $\sqrt{\frac{9}{25}a^4(a-1)^2}$ với $a < 1$. h) $\sqrt{48 \cdot 27(2-a)^2}$ với $a \leq 2$.

i) $\frac{1}{a+1}\sqrt{4a^4(a+1)^2}$ với $a > -1$. j) $\sqrt{a^2+2a+1}$ với $a \geq -1$.

Bài tập 3.30. Giải các phương trình sau

a) $x^2 = 289$. b) $25x^2 = 16$. c) $0,49x^2 = 2,56$. d) $9x^2 + 10 = 0$.

e) $x^2 = 324$. f) $9x^2 = 16$. g) $0,25x^2 = 1,96$. h) $4x^2 + 19 = 0$.

i) $x^2 = 17$. j) $x^2 - 31 = 0$. k) $81x^2 = 23$. l) $27x^2 - 6 = 0$.

m) $x^2 = 2$. n) $x^2 - 15 = 0$. o) $64x^2 = 13$. p) $49x^2 - 26 = 0$.

Bài tập 3.31. Giải các phương trình sau, biết x không âm

a) $\sqrt{x} = 21$. b) $2\sqrt{x} = -1$. c) $(\sqrt{x} + 1)^2 = 4$. d) $|\sqrt{x} - 1| = 2$.

e) $\sqrt{x} = 6$. f) $\sqrt{x} + 2 = 1$. g) $(\sqrt{x} - 1)^2 = 4$. h) $|\sqrt{x} + 1| = 4$.

3.3.3 Căn bậc hai của một thương

Định lý 3.3.4. Nếu $a \geq 0$ và $b > 0$ thì

$$a) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$b) \sqrt{\frac{a}{b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{|b|}.$$

Hai công thức trên vẫn đúng cho trường hợp a, b là các biểu thức.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 3.32. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính:

- a) $\sqrt{0,81 : 0,36}$. b) $\sqrt{49 : \frac{64}{25}}$. c) $\sqrt{\frac{49}{81}}$. d) $\sqrt{1\frac{23}{121}}$.
- e) $\sqrt{0,04 : 2,56}$. f) $\sqrt{4 : \frac{64}{81}}$. g) $\sqrt{\frac{16}{25}}$. h) $\sqrt{1\frac{15}{49}}$.
- i) $\frac{\sqrt{12,1}}{\sqrt{22,5}}$. j) $\frac{\sqrt{170}}{\sqrt{1,7}}$. k) $\frac{\sqrt{12^3}}{\sqrt{3^3 \cdot 2^2}}$. l) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{80}}$.

Bài tập 3.33. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính:

- a) $\left(\sqrt{\frac{4}{81}}\right)^2$. b) $\left(\sqrt{\frac{-19}{-16}}\right)^2$. c) $\left(\sqrt{\frac{10}{9}}\right)^2$. d) $\left(\sqrt{\frac{-27}{-4}}\right)^2$.
- e) $\left(\sqrt{\frac{-27}{-4}}\right)^2$. f) $\frac{\sqrt{0,03}}{\sqrt{0,27}}$. g) $\frac{\sqrt{470}}{\sqrt{4,7}}$. h) $\frac{\sqrt{10^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 5}}$.
- i) $\sqrt{\frac{81}{100}}$. j) $\sqrt{\frac{64}{25}}$. k) $\sqrt{-\left(\frac{-36}{169}\right)}$. l) $\sqrt{\frac{324}{289}}$.
- m) $\sqrt{\frac{-625}{-64}}$. n) $\sqrt{\frac{25}{81}}$. o) $\sqrt{\frac{-64}{-49}}$. p) $\sqrt{-\left(\frac{121}{-49}\right)}$.

Bài tập 3.34. Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn rồi tính:

- a) $\sqrt{\frac{26^2 - 17^2}{688}}$. b) $\sqrt{\frac{7^2 - 3^2}{32}}$. c) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$. d) $\sqrt{\frac{125^2 - 61^2}{101^2 - 85^2}}$.

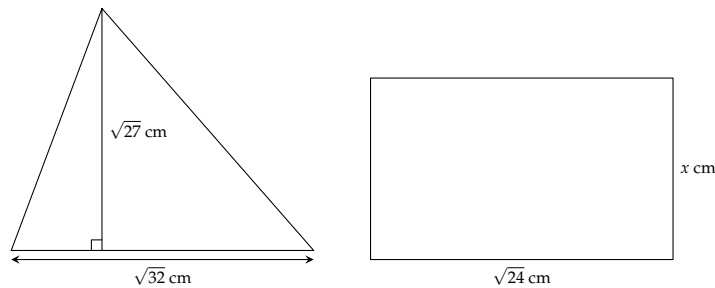
Bài tập 3.35. Tính giá trị biểu thức

- a) $\frac{\sqrt{16,9}}{\sqrt{2,5}} - \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$. b) $(\sqrt{27} - \sqrt{18}) : \sqrt{3}$. c) $\sqrt{\frac{49}{16}} + \frac{\sqrt{2,8}}{\sqrt{0,7}}$. d) $(\sqrt{8} + \sqrt{18}) : \sqrt{2}$.

Bài tập 3.36. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\sqrt{3a^2}$ với $a \leq 0$. b) $\sqrt{\frac{9a^2}{16}}$ với $a \leq 0$. c) $\sqrt{\frac{(a-5)^2}{a^4}}$ với $a \geq 5$.
- d) $\frac{\sqrt{243a}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$. e) $\frac{\sqrt{32(3-a)^4}}{\sqrt{50(a-3)^2}}$ với $a < 3$. f) $\sqrt{\frac{25a^2}{49}}$ với $a \leq 0$.
- g) $\sqrt{\frac{(a+3)^2}{a^4}}$ với $a \leq -3$. h) $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{50a}}$ với $a > 0$. i) $\frac{\sqrt{27(1-a)^2}}{\sqrt{48(a-1)^4}}$ với $a < 1$.

Bài tập 3.37. Biết rằng hình tam giác và hình chữ nhật ở Hình 3 có diện tích bằng nhau. Tính chiều rộng x của hình chữ nhật.



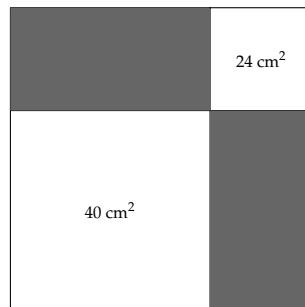
Hình 3

Bài tập 3.38. Hình chữ nhật có chiều rộng là a cm, chiều dài b cm và diện tích S cm²,

a) Tìm S biết $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{2}$.

b) Tìm b , biết $S = 3\sqrt{2}$, $a = 2\sqrt{3}$.

Bài tập 3.39. Từ một tấm thép hình vuông, người thợ cắt ra hai mảnh hình vuông có diện tích lần lượt là 24 cm² và 40 cm² như Hình 4. Tính diện tích phần còn lại của tấm thép.



Hình 4

❖ LUYỆN TẬP ❖

A. Phá căn hai lớp

Bài tập 3.40. Tính:

a) $\sqrt{(3 - \sqrt{2})^2}$.

b) $\sqrt{(\sqrt{11} + 3)^2}$.

c) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

d) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

e) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

f) $\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}$.

g) $\sqrt{(\sqrt{7} + 3)^2}$.

h) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$.

i) $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$.

j) $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2} - \sqrt{10}$.

k) $\sqrt{(5 + \sqrt{7})^2} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$.

l) $\sqrt{(5 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$.

Bài tập 3.41. Hãy viết các đa thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu

a) $11 - 6\sqrt{2}$.

b) $11 + 6\sqrt{2}$.

c) $14 - 4\sqrt{10}$.

d) $13 + 4\sqrt{3}$.

e) $12 + 8\sqrt{2}$.

f) $10 - 4\sqrt{6}$.

g) $17 + 12\sqrt{2}$.

h) $22 - 8\sqrt{6}$.

i) $12 + 6\sqrt{3}$.

j) $7 + 4\sqrt{3}$.

k) $14 - 6\sqrt{5}$.

l) $18 + 8\sqrt{2}$.

m) $18 + 8\sqrt{2}$.

n) $35 - 10\sqrt{10}$.

o) $3 - 2\sqrt{2}$.

p) $26 - 8\sqrt{10}$.

q) $20 - 6\sqrt{11}$.

r) $27 - 8\sqrt{11}$.

s) $22 + 8\sqrt{6}$.

t) $11 + 4\sqrt{7}$.

Bài tập 3.42. Biến đổi biểu thức trong căn bậc hai về dạng bình phương một tổng (hiệu) từ đó phá một lớp căn

a) $\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2}$. b) $\sqrt{1^2 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}$. c) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$. d) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$.

e) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$. f) $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$. g) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$. h) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

i) $\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}$. j) $\sqrt{21 - 4\sqrt{17}}$. k) $\sqrt{11 + 2\sqrt{30}}$. l) $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$.

m) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. n) $\sqrt{10 + 2\sqrt{21}}$. o) $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}$. p) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

q) $\sqrt{16 - 2\sqrt{55}}$. r) $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$. s) $\sqrt{35 - 12\sqrt{6}}$. t) $\sqrt{33 + 20\sqrt{2}}$.

Bài tập 3.43. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$. b) $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$. c) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

d) $\sqrt{15 + 6\sqrt{6}} + \sqrt{35 - 12\sqrt{6}}$. e) $(3 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$. f) $(\sqrt{2} - 3) \cdot \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

g) $(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$. h) $(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{21}}$. i) $\sqrt{10 + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{6}}$.

3.4 Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai

3.4.1 Căn đồng dạng

Định lý 3.4.1.

- $m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m + n)\sqrt{a}$.
- $m\sqrt{a} - n\sqrt{a} = (m - n)\sqrt{a}$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 3.44. Rút gọn

- | | |
|---|---|
| a) $\sqrt{8} - 3\sqrt{32} + \sqrt{72}$. | b) $6\sqrt{12} - 2\sqrt{48} + 5\sqrt{75}$. |
| c) $-\sqrt{20} - 3\sqrt{45} - 6\sqrt{80}$. | d) $2\sqrt{5} - 3\sqrt{125} + \sqrt{80}$. |
| e) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{8} + \sqrt{50} - 4\sqrt{32}$. | f) $\sqrt{3} - \sqrt{75} + 2\sqrt{12} - 3\sqrt{147}$. |
| g) $\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 2\sqrt{450} - \frac{1}{3}\sqrt{392}$. | h) $\sqrt{128} - 3\sqrt{32} + 2\sqrt{200} - 3\sqrt{98}$. |
| i) $\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{48} - 3\sqrt{75}$. | j) $\sqrt{27} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{48} - 3\sqrt{75}$. |
| k) $\sqrt{196} \cdot \sqrt{25} - 5\sqrt{81}$. | l) $(32 : \sqrt{16} + \sqrt{289}) \cdot \sqrt{49}$. |

Bài tập 3.45. Rút gọn

- | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------|--|--|
| a) $2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$. | b) $3\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$. | c) $\sqrt{4x} - 5\sqrt{x}$. | d) $\sqrt{4x} - \sqrt{9x}$. |
| e) $\sqrt{25x} - \sqrt{0,16x}$. | f) $2\sqrt{9yx} + \sqrt{xy}$. | g) $\sqrt{xz} - \frac{1}{2}\sqrt{9xz}$. | h) $\sqrt{4xyz} - \frac{3}{2}\sqrt{xyz}$. |

3.4.2 Trục căn thức

🔍 Phương pháp giải

Trục căn thức ở mẫu là kỹ thuật biến đổi làm cho mẫu thức không còn chứa dấu căn, thông thường ta áp dụng một số tính chất sau.

- Với các biểu thức A, B mà $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.
- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$.
- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 3.46. Trục căn thức ở mẫu:

- | | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|--|---|
| a) $\frac{5}{\sqrt{75}}$. | b) $\frac{-3}{2 - \sqrt{10}}$. | c) $\frac{\sqrt{2} + 2}{3 + \sqrt{2}}$. | d) $\frac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$. |
| e) $\frac{3}{\sqrt{20}}$. | f) $\frac{-5}{1 - \sqrt{6}}$. | g) $\frac{\sqrt{11} - 2}{4 - \sqrt{11}}$. | h) $\frac{-16}{\sqrt{19} - \sqrt{3}}$. |
| i) $\frac{13}{\sqrt{18}}$. | j) $\frac{-1}{2 - \sqrt{3}}$. | k) $\frac{\sqrt{13} - 3}{3 - \sqrt{13}}$. | l) $\frac{-7}{\sqrt{10} - \sqrt{3}}$. |

Bài tập 3.47. Rút gọn biểu thức sau:

- a) $\frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-2}$. b) $\frac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{7}-1}$. c) $\frac{6+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$. d) $\frac{5+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3}$.
- e) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. f) $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. g) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$. h) $\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}$.
- i) $\frac{1}{\sqrt{7}+1}$. j) $\frac{12}{\sqrt{3}-5}$. k) $\frac{1}{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}$. l) $\frac{1}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$.

Bài tập 3.48. Rút gọn biểu thức sau:

- a) $\frac{6-6\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$. b) $\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$. c) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} + \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.
- d) $\frac{3\sqrt{2}-6}{\sqrt{2}-1} + \frac{6\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}-3}$. e) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - \sqrt{3}$. f) $\frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.
- g) $\frac{1}{1-\sqrt{5}} + \frac{1}{1+\sqrt{5}}$. h) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$. i) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.
- j) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$. k) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} + \frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$. l) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2} + \frac{6+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Bài tập 3.49. Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

- a) $\sqrt{\frac{x^3}{36y}}$ với $x \geq 0, y > 0$. b) $-\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x^3}}$ với $xy > 0$. c) $\sqrt{\frac{4x^3}{49y}}$ với $x \geq 0, y > 0$.
- d) $\frac{2x}{y}\sqrt{\frac{y^3}{x}}$ với $xy > 0$. e) $xy\sqrt{\frac{-x}{y}}$ với $x < 0, y > 0$. f) $\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}$ với $x > 0$.
- g) $2xy\sqrt{\frac{-3}{xy}}$ với $xy < 0$. h) $\frac{1}{2xy}\sqrt{\frac{xy}{7}}$ với $xy > 0$. i) $\frac{1}{2}xy\sqrt{-\frac{x}{y}}$ với $x < 0, y > 0$.

Bài tập 3.50. Trục căn thức ở mẫu (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa)

- a) $\frac{1}{\sqrt{8a}}$. b) $\frac{3}{2\sqrt{9a}}$. c) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. d) $\frac{1}{\sqrt{3a}-\sqrt{b}}$.
- e) $\frac{-3ab}{\sqrt{4a}+\sqrt{b}}$. f) $\frac{a+\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}-1}$. g) $\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}$. h) $\frac{-2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.
- i) $\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$. j) $\frac{25}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. k) $\frac{-ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. l) $\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$.

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 3.51. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{5}$. b) $B = \sqrt{80} + \sqrt{45} - \sqrt{5}$. c) $C = \frac{5}{\sqrt{10}} + 3,5 \cdot \sqrt{40}$.
- d) $D = \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{20}$. e) $E = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{90}$. f) $F = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18}$.
- g) $G = \frac{2}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{8}$. h) $H = \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{300}}{10} - \sqrt{12}$. i) $B = \sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{2}$.

j) $C = \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{18}.$

k) $D = \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{27}.$

l) $E = \sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60}.$

m) $F = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{24}.$

n) $G = \frac{2}{(\sqrt{5} + 2)} + \sqrt{45}.$

o) $H = \frac{4}{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{48}.$

Bài tập 3.52. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x^2} - \sqrt{16x}$ với $x \geq 0$.

b) $B = 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - \sqrt{25x}$ với $x \geq 0$.

c) $C = \sqrt{25x + 25} - \sqrt{9x + 9} + \sqrt{4x + 4}$ với $x \geq -1$.

d) $D = \sqrt{25x - 25} - \sqrt{9x - 9} + \sqrt{4x - 4}$ với $x \geq 1$.

e) $E = \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

f) $F = \frac{a - 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2}$ với $a \geq 0; a \neq 4$.

Bài tập 3.53. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$. Tìm x để $A = 2$.

Bài tập 3.54. Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tìm x để $B = 2$.

Bài tập 3.55. Cho biểu thức $A = \frac{x + 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tìm x để $A = 3$.

Bài tập 3.56. Cho biểu thức $B = \frac{x + 4}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tìm x để $B = 4$.

3.5 Ôn tập chương

❖ TRẮC NGHIỆM ❖

Câu 3.1. Biểu thức nào sau đây có giá trị khác với các biểu thức còn lại?

- A. $(-\sqrt{5})^2$. B. $\sqrt{5^2}$. C. $\sqrt{(-5)^2}$. D. $-(\sqrt{5})^2$.

Câu 3.2. Có bao nhiêu số tự nhiên x để $\sqrt{16-x}$ là số nguyên?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 3.3. Giá trị của biểu thức $\sqrt{16} + \sqrt[3]{-64}$ bằng

- A. 0. B. -2. C. 8. D. -4.

Câu 3.4. Đẳng thức nào sau đây không đúng?

- A. $\sqrt{16} + \sqrt{144} = 16$. B. $\sqrt{0,64} \cdot \sqrt{9} = 2,4$.
C. $\sqrt{(-18)^2} : \sqrt{6^2} = 3$. D. $\sqrt{(-3)^2} - \sqrt{7^2} = -10$.

Câu 3.5. Biết rằng $2,6^2 = 6,76$. Giá trị của biểu thức $\sqrt{0,0676}$ bằng

- A. 0,0026. B. 0,026. C. 0,26. D. 2,6.

Câu 3.6. Rút gọn biểu thức $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{64a}$ với $a \geq 0$, ta có kết quả

- A. $15\sqrt{a}$. B. $15a$. C. $7\sqrt{a}$. D. $7a$.

Câu 3.7. Cho $a = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$. Rút gọn biểu thức $\sqrt{3}a - \sqrt{2}b$, ta có kết quả

- A. $3\sqrt{6}$. B. $-\sqrt{6}$. C. $6\sqrt{3}$. D. $12 - \sqrt{6}$.

Câu 3.8. Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$, ta có kết quả

- A. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{a}}$. B. $\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})\sqrt{a}}{3a}$. C. $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{a}}{a}$. D. $\sqrt{2a} - \sqrt{a}$.

Câu 3.9. Kết quả của phép tính $\sqrt{27} : \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{18}$ là

- A. 12. B. 18. C. 72. D. 144.

Câu 3.10. Rút gọn biểu thức $\frac{1}{2\sqrt{a} + \sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{a} - \sqrt{2}}$ với $a \geq 0, a \neq \frac{1}{2}$, ta có kết quả

- A. $\frac{\sqrt{2}}{1-2a}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2a-1}$. C. $\frac{\sqrt{a}}{2a-1}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{1-a}$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 3.57. Tìm x , biết:

- a) $x^2 = 10$; b) $\sqrt{x} = 8$; c) $x^3 = -0,027$; d) $\sqrt[3]{x} = -\frac{2}{3}$.

Bài tập 3.58. Biết rằng $1 < a < 5$, rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a-5)^2}$.

Bài tập 3.59. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau

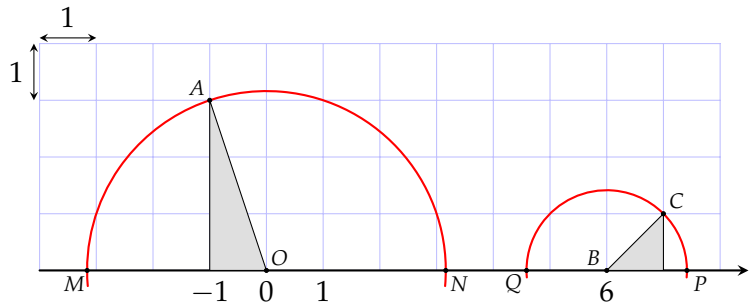
- a) $\frac{4-2\sqrt{6}}{\sqrt{48}}$; b) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ c) $\frac{a}{a-\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Bài tập 3.60. Biết rằng $a > 0, b > 0$ và $ab = 16$. Tính giá trị của biểu thức $A = a\sqrt{\frac{12b}{a}} + b\sqrt{\frac{3a}{b}}$.

Bài tập 3.61. Tính $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Bài tập 3.62. Một trục số được vẽ trên lưới ô vuông như Hình 1.

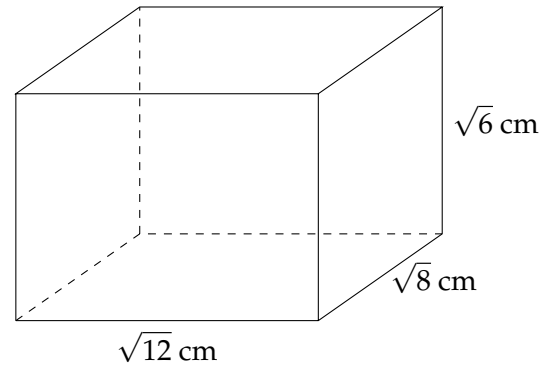
- Đường tròn tâm O bán kính OA cắt trục số tại hai điểm M và N . Hai điểm M và N biểu diễn hai số thực nào?
- Đường tròn tâm B bán kính BC cắt trục số tại hai điểm P và Q . Hai điểm P và Q biểu diễn hai số thực nào?



Hình 1

Bài tập 3.63. Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài $\sqrt{12}$ cm, chiều rộng $\sqrt{8}$ cm, chiều cao $\sqrt{6}$ cm như Hình 2.

- Tính thể tích của hình hộp chữ nhật đó.
- Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.



Hình 2

Bài tập 3.64. Rút gọn các biểu thức sau

- $\left(a\sqrt{\frac{3}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{3}} + \sqrt{12a^3}\right) : \sqrt{3a}$ với $a > 0$;
- $\frac{1-a}{1+\sqrt{a}} + \frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

Bài tập 3.65. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{a+\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}+1}\right) : \frac{\sqrt{a}-1}{a+2\sqrt{a}+1}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức P .
- Tính giá trị của P khi $a = 0,25$.

Bài tập 3.66. Cho biểu thức $M = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức M .
- So sánh M với 1.
- Tìm x nguyên để M nhận giá trị nguyên.

Bài tập 3.67. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 25$.

- Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

Bài tập 3.68. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+1}{x+\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.
- Tìm giá trị của x để $2P = 1$.

Chương 4

Hệ thức lượng trong tam giác vuông

4.1 Định nghĩa tỉ số lượng giác góc nhọn

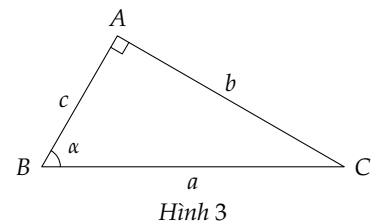
4.1.1 Khái niệm

Định nghĩa 4.1.1. Cho góc nhọn α . Xét tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = \alpha$, ta có

- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là *sin* của góc α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là *côsin* của góc α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là *tang* của góc α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là *côtang* của góc α , kí hiệu $\cot \alpha$.

Cụ thể đối với tam giác vuông ABC trong Hình 3, ta có

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}, & \tan \alpha &= \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \\ \cos \alpha &= \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}, & \cot \alpha &= \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}. \end{aligned}$$

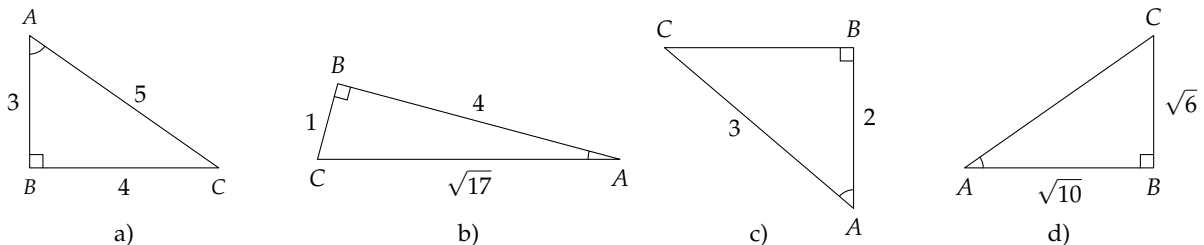


Tính chất 4.1.1. Với góc nhọn α , ta có

$$\begin{aligned} \text{a) } 0 < \sin \alpha < 1. & \quad \text{b) } 0 < \cos \alpha < 1. & \quad \text{c) } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}. \end{aligned}$$

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 4.1. Tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn A trong mỗi tam giác vuông ABC có $\widehat{B} = 90^\circ$ ở Hình 5 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hình 5

Bài tập 4.2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , tính tỉ số lượng giác góc B trong các trường hợp sau

- a) $AB = 4$ và $BC = 5$. b) $AC = 3$ và $AB = 4$. c) $AC = 3$ và $BC = 5$.

Bài tập 4.3. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 1. Gọi H là trung điểm BC . Tính giá trị lượng giác góc $\widehat{BAH}$ và $\widehat{ABH}$.

Bài tập 4.4. Cho $\triangle ABC$ cân cạnh bằng $AB = AC = 1$ và $BC = 2$. Gọi H là trung điểm BC . Tính giá trị lượng giác góc $\widehat{BAH}$ và $\widehat{ABH}$.

Bài tập 4.5. Cho tam giác ABC vuông tại C , có $BC = 12\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B . Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A .

Bài tập 4.6. Cho tam giác MNP vuông tại M , có $MN = 16\text{cm}$, $MP = 12\text{cm}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc N . Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc P .

Bài tập 4.7. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AC = AB\sqrt{3}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B và góc C . Từ đó suy ra số đo của góc B và góc C .

Bài tập 4.8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có $BC = 12\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$. Tính tỉ số lượng giác của góc B .

Bài tập 4.9. Cho tam giác DEF vuông tại D , $DE = 5\text{ cm}$, $\widehat{E} = \alpha$. Biết $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, hãy tính các cạnh còn lại của tam giác DEF (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài tập 4.10. Cho tam giác ABC vuông tại C . Biết $\cos A = \frac{5}{13}$ và $BC = 10\text{ cm}$. Hãy tính độ dài các cạnh góc vuông.

4.1.2 Tỉ số lượng giác góc nhọn đặc biệt

Bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt (góc 30° , 45° , 60°)

Góc α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

❖ BÀI TẬP ❖

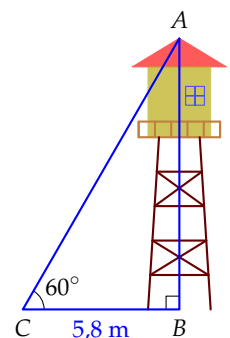
Bài tập 4.11. Tra bảng tỉ số lượng giác, đọc giá trị lượng giác của các góc 30° , 45° , 60° và 90° .

Bài tập 4.12. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$\text{a) } P = \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\tan 45^\circ}. \quad \text{b) } A = \frac{2 \cos 45^\circ}{\sqrt{2}} + \sqrt{3} \tan 30^\circ. \quad \text{c) } B = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{3}} - \cot 45^\circ.$$

Bài tập 4.13. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AC = \sqrt{3}\text{ cm}$. Tính độ dài các cạnh BC và AB .

Bài tập 4.14. Tìm chiều cao của tháp canh trong Hình 7 (kết quả là tròn đến hàng phần trăm).



Hình 7

4.1.3 Tỷ số lượng giác góc nhọn phụ nhau

Định nghĩa 4.1.2. Hai góc phụ nhau là hai góc có tổng số đo bằng 90° .

Tính chất 4.1.2. Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia

$$\bullet \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

$$\bullet \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha.$$

$$\bullet \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

$$\bullet \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$$

Từ nay khi viết các tỷ số lượng giác của một góc nhọn trong tam giác ta có thể viết sin A thay cho $\sin \widehat{A}$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 4.15. So sánh

a) $\sin 25^\circ$ và $\cos 65^\circ$. b) $\cos 25^\circ$ và $\sin 65^\circ$. c) $\tan 25^\circ$ và $\cot 65^\circ$. d) $\cot 25^\circ$ và $\tan 65^\circ$.

e) $\sin 72^\circ$ và $\cos 18^\circ$. f) $\cos 72^\circ$ và $\sin 18^\circ$. g) $\cos 15^\circ$ và $\sin 75^\circ$. h) $\tan 72^\circ$ và $\cot 18^\circ$.

Bài tập 4.16. Cho biết $\sin 18^\circ \approx 0,31$, $\tan 18^\circ \approx 0,32$. Tính $\cos 72^\circ$ và $\cot 72^\circ$.

4.1.4 Tính tỷ số lượng giác góc nhọn bằng máy tính cầm tay

A. Tính các tỷ số lượng giác của các góc nhọn

Bài tập 4.17. Sử dụng máy tính cầm tay, tính (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

a) $\sin 15^\circ$. b) $\cos 64^\circ 24'$. c) $\tan 20^\circ$. d) $\cot 23^\circ$.

B. Xác định số đo của góc nhọn khi biết một tỷ số lượng giác của góc đó

Bài tập 4.18. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm α biết $\sin \alpha = 0,72$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm hoặc đến phút).

Bài tập 4.19. Sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính tỷ số lượng giác của các góc sau (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)

a) 22° . b) 52° . c) $15^\circ 20'$. d) $52^\circ 18'$.

Bài tập 4.20. Vẽ một tam giác vuông có một góc bằng 40° . Đo độ dài các cạnh rồi dùng các số đo để tính các tỷ số lượng giác của góc 40° . Kiểm tra lại các kết quả vừa tính bằng máy tính cầm tay.

Bài tập 4.21. Vẽ một tam giác vuông có ba cạnh bằng 3 cm, 4 cm, 5 cm. Tính các tỷ số lượng giác của mỗi góc nhọn. Dùng thước đo góc để đo các góc nhọn. Kiểm tra lại các kết quả bằng máy tính cầm tay.

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 4.22. Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính các tỷ số lượng giác của góc B trong mỗi trường hợp sau

a) $BC = 5$ cm; $AB = 3$ cm; b) $BC = 13$ cm; $AC = 12$ cm;

c) $BC = 5\sqrt{2}$ cm; $AB = 5$ cm; d) $AB = a\sqrt{3}$, $AC = a$.

Bài tập 4.23. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\cot 45^\circ}$.

b) $B = \frac{\tan 30^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ}$.

Bài tập 4.24. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°

- a) $\sin 60^\circ$. b) $\cos 75^\circ$. c) $\cot 72^\circ$. d) $\tan 80^\circ$.

Bài tập 4.25. Sử dụng máy tính cầm tay, tính tỉ số lượng giác của các góc sau

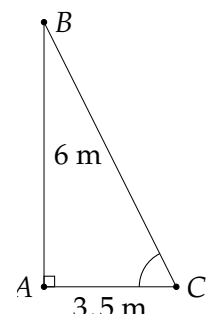
- a) 26° . b) 15° . c) 72° . d) $81^\circ 27'$

Bài tập 4.26. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm góc nhọn α trong mỗi trường hợp sau đây

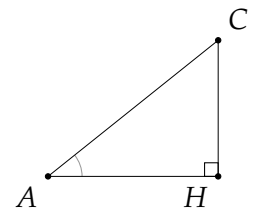
- a) $\cos \alpha = 0,6$. b) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. c) $\tan \alpha = 1,6$. d) $\cot \alpha = \frac{1}{4}$.

C. Toán ứng dụng

Bài tập 4.27. Một cột đèn điện AB cao 6 m có bóng in trên mặt đất là AC dài 3,5 m. Hãy tính góc $\widehat{BCA}$ (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.

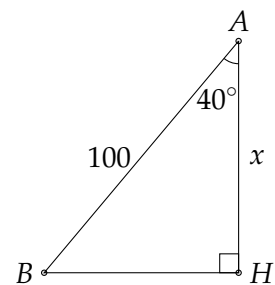


Bài tập 4.28. Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° , và có độ cao là 2,1 m. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

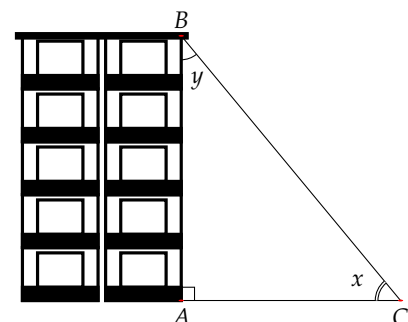


Bài tập 4.29. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,5 m. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42° . Tính chiều cao của cột đèn.

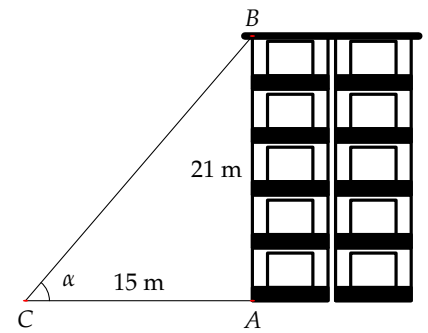
Bài tập 4.30. Một chiếc diều với đoạn dây thả diều AB dài 100 m, dây thả diều tạo với phương thẳng đứng một góc 40° (hình bên). Tính chiều cao của diều.



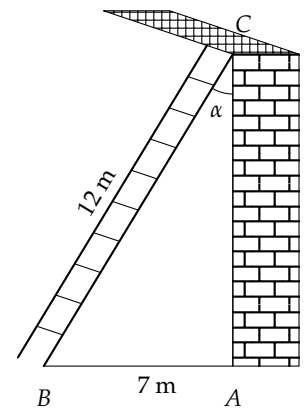
Bài tập 4.31. Tia nắng chiếu qua điểm B của nó tòa nhà tạo với mặt đất một góc x và tạo với cạnh AB của tòa nhà một góc y (Hình 9). Cho biết $\cos x \approx 0,78$ và $\cot x \approx 1,25$. Tính $\sin y$ và $\tan y$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



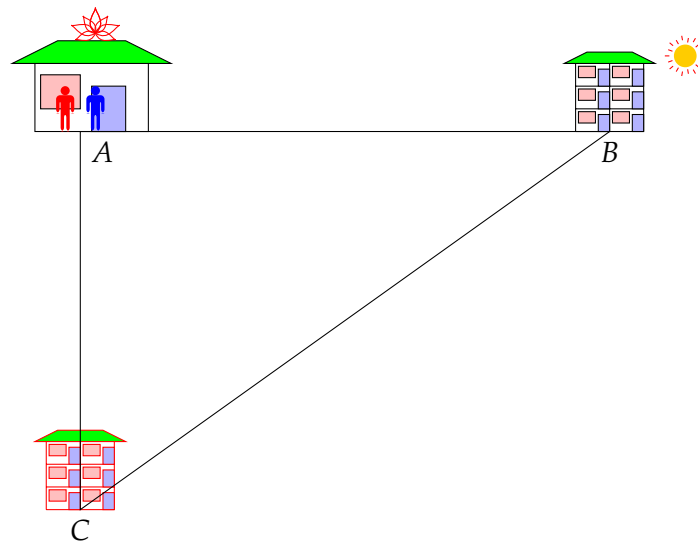
Bài tập 4.32. Tia nắng chiếu qua nóc của một tòa nhà hợp với mặt đất một góc α . Cho biết tòa nhà cao 21 m và bóng của nó trên mặt đất dài 15 m. Tính góc α . (kết quả làm tròn đến độ).



Bài tập 4.33. Một cái thang dài 12 m được đặt dựa vào một bức tường sao cho chân thang cách tường 7 m. Tính góc α tạo bởi thang và tường.



Bài tập 4.34. Hằng ngày, hai anh em An và Bình cùng đi bộ từ nhà ở A để đến trường. Trường của An ở vị trí B, trường của Bình ở vị trí C theo hai hướng vuông góc nhau. An đi với vận tốc 4 km/h và đến trường sau 15 phút. Bình đi với vận tốc 3 km/h và đến trường sau 12 phút. Tính khoảng cách BC giữa hai trường (làm tròn đến mét).

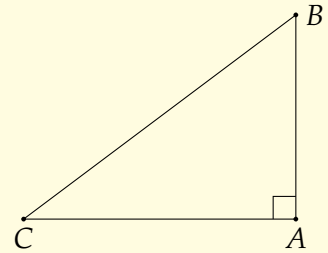


4.2 Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

4.2.1 Định lý

Định lý 4.2.1. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Khi đó

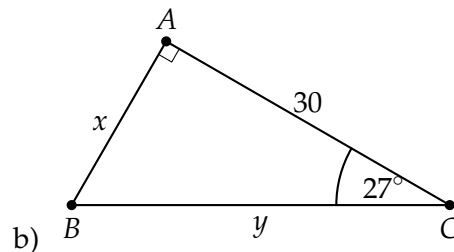
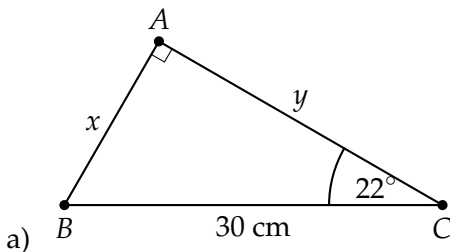
- a) $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$.
- b) $b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$.
- c) $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$.
- d) $c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$.



❖ BÀI TẬP ❖

A. Tính cạnh và góc của tam giác vuông

Bài tập 4.35. Cho hình vẽ bên, tính độ dài x và y trong các hình sau



Bài tập 4.36. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có cạnh góc vuông $AC = 10$ cm. Tính AB trong các trường hợp sau

- a) $\widehat{C} = 34^\circ$.
- b) $\widehat{B} = 25^\circ$.
- c) $\widehat{C} = 65^\circ$.
- d) $\widehat{B} = 55^\circ$.

Bài tập 4.37. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có cạnh huyền bằng 10 cm. Tính độ dài hai cạnh góc vuông trong các trường hợp sau

- a) $\widehat{C} = 41^\circ$.
- b) $\widehat{B} = 36^\circ$.
- c) $\widehat{C} = 50^\circ$.
- d) $\widehat{B} = 70^\circ$.

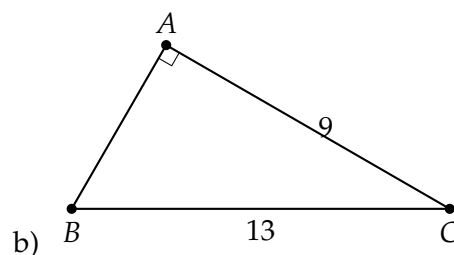
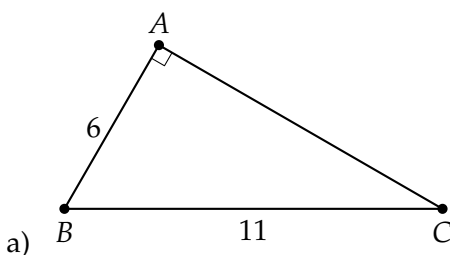
Bài tập 4.38. Cho tam giác ABC , trong đó $BC = 11$ cm, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC . Hãy tính độ dài đoạn thẳng AN .

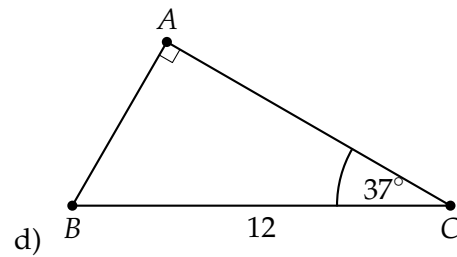
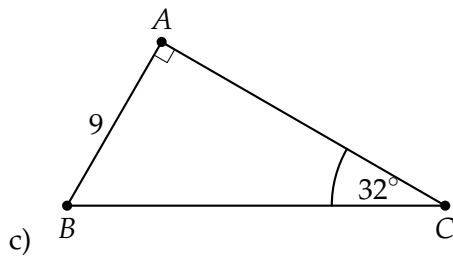
Bài tập 4.39. Cho tam giác ABC có $BC = 6$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Hãy tính

- a) Chiều cao CH và cạnh AC .
- b) Diện tích tam giác ABC .

B. Giải tam giác vuông

Bài tập 4.40. Giải tam giác vuông trong các hình sau





Bài tập 4.41. Cho tam giác ABC với các cạnh góc vuông $AB = 5$, $AC = 8$. Hãy giải tam giác vuông ABC .

Bài tập 4.42. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\widehat{P} = 36^\circ$, $PQ = 7$. Hãy giải tam giác vuông OPQ .

Bài tập 4.43. Cho tam giác ABC vuông tại A , giải tam giác ABC biết:

a) $\widehat{B} = 35^\circ$ và $BC = 40$ cm;

b) $AB = 70$ cm và $AC = 60$ cm.

Bài tập 4.44. Cho tam giác ABC vuông tại A , giải tam giác ABC biết

a) $AB = 6$ cm và $\widehat{B} = 60^\circ$;

b) $AB = 6$ cm và $BC = 7$ cm.

Bài tập 4.45. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12$ cm, $\widehat{C} = 40^\circ$. Hãy tính độ dài

a) AC .

b) BC .

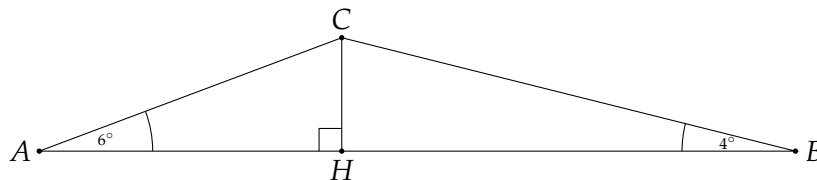
c) Phân giác BD .

C. Toán ứng dụng

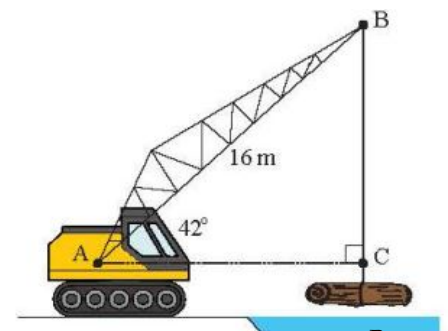
Bài tập 4.46. Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B). Khi đi từ A đến B , An phải lên dốc AC và xuống dốc CB . Biết $AB = 762$ m, $\widehat{A} = 6^\circ$, $\widehat{B} = 4^\circ$

a) Tính chiều cao h của con dốc.

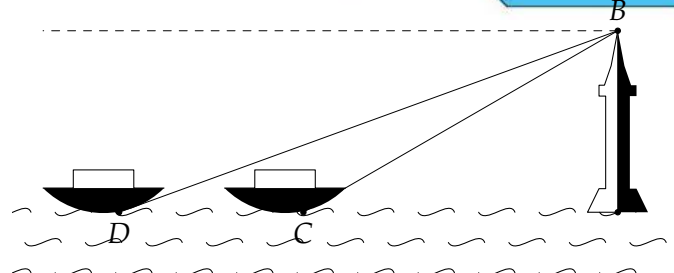
b) Hỏi An đến trường lúc mấy giờ? Biết tốc độ lên dốc là 4 km/h và xuống dốc là 19 km/h.



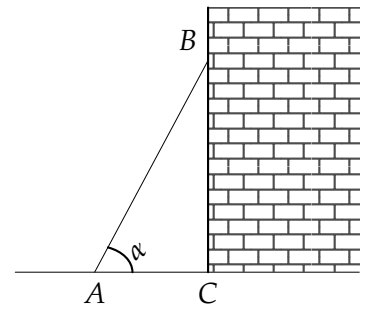
Bài tập 4.47. Một cần cẩu nâng một khối gỗ trên sông. Biết tay cần AB có chiều dài 16 m và nghiêng với góc 42° so với phương nằm ngang (hình bên). Tính chiều dài BC của đoạn dây cáp.



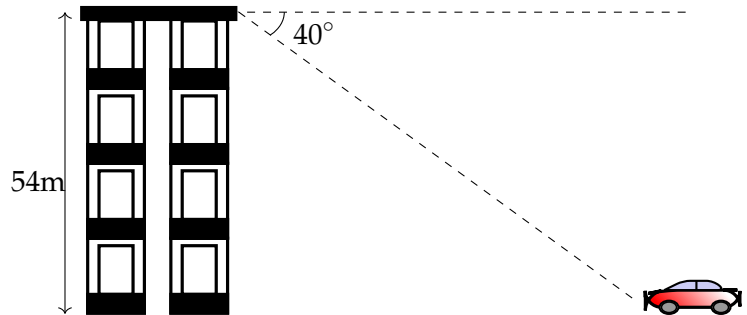
Bài tập 4.48. Từ trên một ngọn hải đăng cao 75 m ở vị trí B , người ta quan sát hai lần ở vị trí D và C thấy một chiếc thuyền đang hướng về phía hải đăng với góc hạ lần lượt là 30° và 45° . Hỏi chiếc thuyền đi được bao nhiêu mét giữa hai lần quan sát?



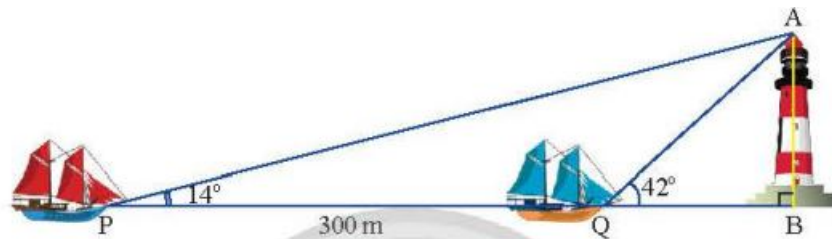
Bài tập 4.49. Một cái thang khi dựa vào tường thì góc α giữa thang và mặt đất trong khoảng từ 60° đến 65° thì an toàn. Hỏi một cái thang AB dài 3 m dựng vào tường thì chân thang A cách chân tường C trong khoảng nào thì an toàn? (làm tròn đến hai chữ số thập phân).



Bài tập 4.50. Một người đứng trên tầng của một tòa nhà với độ cao 54m nhìn thấy một xe ô tô dưới đất với góc nghiêng 40° so với phương ngang. Hỏi chiếc ô tô cách tòa nhà bao nhiêu m? (làm tròn đến hàng đơn vị).

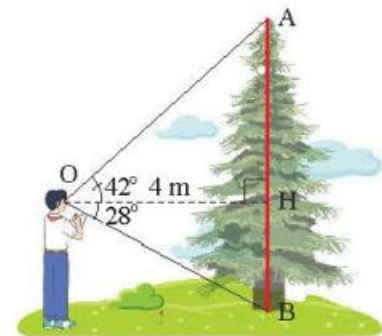


Bài tập 4.51. Hai con thuyền P và Q cách nhau 300 m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng trên bờ biển. Từ P và Q , người ta nhìn thấy hải đăng dưới góc $\widehat{BPA} = 14^\circ$ và $\widehat{BQA} = 42^\circ$. Đặt $h = AB$ là chiều cao hải đăng



- Tính BQ và BP theo h .
- Tính chiều cao của tháp hải đăng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Bài tập 4.52. Quan sát hình bên, cho $OH = 4$, $\widehat{AOH} = 42^\circ$, $\widehat{HOB} = 28^\circ$. Tính AB (chiều cao của cây).



4.3 Ôn tập chương

➡ TRẮC NGHIỆM ➡

Câu 4.1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 10$ cm, $\widehat{C} = 60^\circ$. Độ dài hai cạnh còn lại là

- A. $AB = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm; $BC = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm. B. $AB = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm; $BC = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm.
C. $AB = 10\sqrt{3}$ cm; $BC = 20$ cm. D. $AB = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm; $BC = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

Câu 4.2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 8$ cm, $AC = 6$ cm. Tỷ số lượng giác $\tan C$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) là

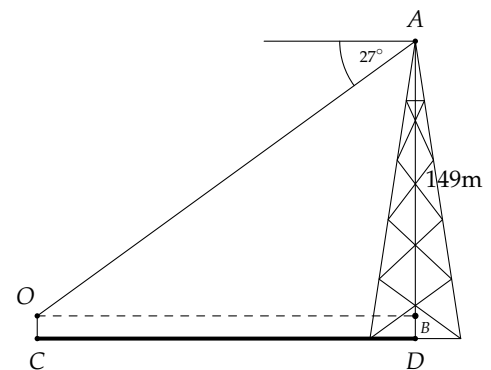
- A. 0,87. B. 0,86. C. 0,88. D. 0,89.

Câu 4.3. Giá trị của biểu thức $B = \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

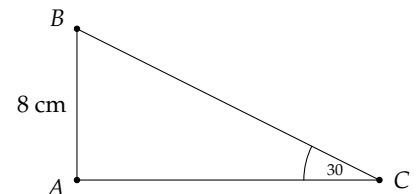
Câu 4.4. Một người quan sát ngọn hải đăng ở vị trí cao 149 m so với mặt nước biển thì thấy một du thuyền ở xa với góc nghiêng xuống là 27° . Hỏi thuyền cách xa chân hải đăng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

- A. 292 m. B. 288 m. C. 312 m. D. 151 m.



Câu 4.5. Cho Hình 2. Độ dài cạnh BC là

- A. 4 cm. B. $8\sqrt{3}$ cm. C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. D. 16 cm.



Hình 2

Câu 4.6. Cho tam giác MNP có $\widehat{N} = 70^\circ$, $\widehat{P} = 38^\circ$, đường cao $MI = 11,5$ cm. Độ dài cạnh NP của tam giác MNP (kết quả làm tròn đến hàng phần mười) bằng

- A. 20,9 cm. B. 18,9 cm. C. 40,6 cm. D. 16,9 cm.

Câu 4.7. Một cái thang dài 3 m đặt sát bờ tường, biết góc tạo bởi thang và bờ tường là 40° . Hỏi chân thang đặt ở vị trí cách tường bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

- A. 1,9 m. B. 2,3 m. C. 1,8 m. D. 2,5 m.

Câu 4.8. Một chiếc máy bay lên với tốc độ 450 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° . Hỏi sau 3 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay cách mặt đất bao nhiêu kilômét theo phương thẳng đứng?

- A. 10,5 km. B. 12,75 km. C. 12 km. D. 11,25 km.

↔ BÀI TẬP ↔

Trong các bài tập dưới đây, nếu không nói gì thêm thì làm tròn kết quả đến hàng phần mười hoặc đến phút.

Bài tập 4.53. Tìm số đo góc α biết rằng

- a) $\sin \alpha = 0,25$; b) $\cos \alpha = 0,75$; c) $\tan \alpha = 1$; d) $\cot \alpha = 2$.

Bài tập 4.54. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 18$ cm, $AC = 24$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B , từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc C .

Bài tập 4.55. Cho tam giác ABC vuông tại A . Chứng minh rằng $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$.

Bài tập 4.56. Cho góc nhọn α biết $\sin \alpha = 0,8$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

Bài tập 4.57. Tính giá trị của biểu thức

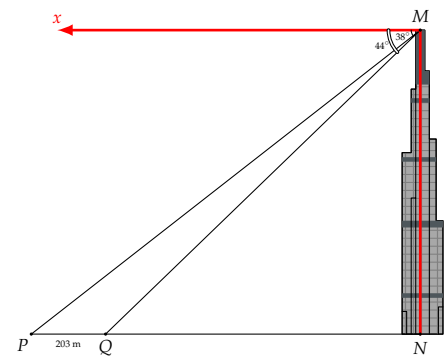
a) $A = 4 - \sin^2 45^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \cot^2 45^\circ$;

b) $B = \tan 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cot 30^\circ$;

c) $C = \sin 15^\circ + \sin 75^\circ - \cos 15^\circ - \cos 75^\circ + \sin 30^\circ$.

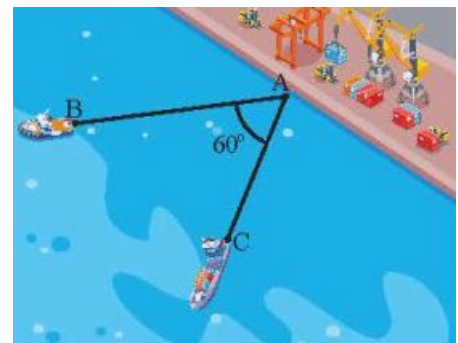
Bài tập 4.58. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\hat{P} = 39^\circ$ và $PQ = 10$ cm. Hãy giải tam giác vuông OPQ .

Bài tập 4.59. Hai điểm P và Q cách nhau 203 m và thẳng hàng với chân của một toà tháp (Hình 3). Từ đỉnh của toà tháp đó, một người nhìn thấy hai điểm P, Q với hai góc nghiêng xuống lần lượt là 38° và 44° . Tính chiều cao của toà tháp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



Hình 3

Bài tập 4.60. Hai chiếc tàu thủy B và C cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hướng tạo thành một góc 60° (Hình 4). Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí/giờ, tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí/giờ. Hỏi sau 1,5 giờ hai tàu B và C cách nhau bao nhiêu hải lí (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Chương 5

Đường tròn

5.1 Đường tròn

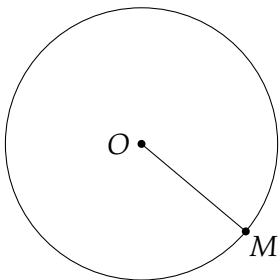
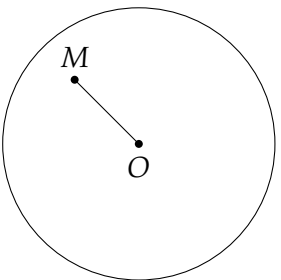
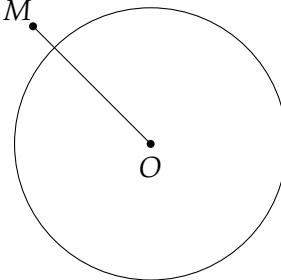
5.1.1 Điểm và đường tròn

Định nghĩa 5.1.1. Đường tròn tâm O bán kính R , ($R > 0$), kí hiệu $(O; R)$, là hình gồm tất cả các điểm trong mặt phẳng cách O một khoảng bằng R .

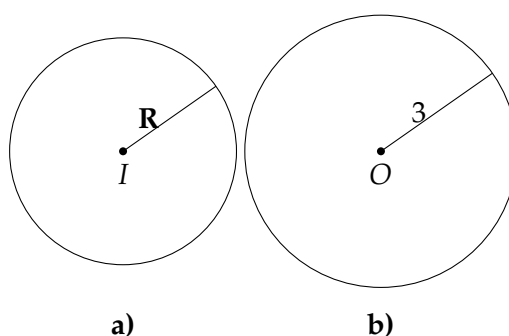
 Lưu ý.

Khi không cần chú ý đến bán kính, đường tròn $(O; R)$ còn được kí hiệu là (O) .

5.1.2 Vị trí tương đối giữa điểm và đường tròn

		
$OM = R$ thì điểm M nằm trên đường tròn hay M thuộc đường tròn.	$OM < R$ thì điểm M nằm trong đường tròn.	$OM > R$ thì điểm M nằm ngoài đường tròn.

❖ BÀI TẬP ❖



Hình 1

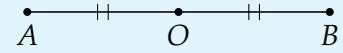
Bài tập 5.1. Hãy gọi tên, xác định tâm và bán kính của các đường tròn có trong Hình 1.

Bài tập 5.2. Cho đường tròn (O) , bán kính 5 cm và bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn $OA = 3$ cm, $OB = 4$ cm, $OC = 7$ cm, $OD = 5$ cm. Hãy cho biết mỗi điểm A, B, C, D nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài đường tròn (O) .

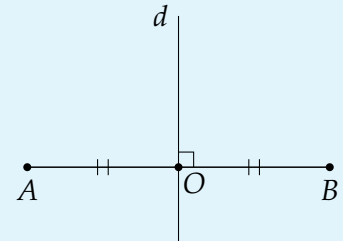
Bài tập 5.3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 18$ cm và $CD = 12$ cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

5.1.3 Tính đối xứng

Định nghĩa 5.1.2. Nếu điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB thì ta nói hai điểm A và B đối xứng nhau qua O .



Định nghĩa 5.1.3. Nếu đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB thì ta nói hai điểm A và B đối xứng nhau qua d .



Định nghĩa 5.1.4.

- Đường tròn là hình có **tâm đối xứng**.
- Tâm đối xứng của đường tròn chính là tâm của đường tròn.

Định nghĩa 5.1.5.

- Đường tròn là hình có **trục đối xứng**.
- Mọi đường thẳng đi qua tâm của đường tròn đều là trục đối xứng của nó.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 5.4. Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy điểm A nằm trên đường tròn. Vẽ đường thẳng AO cắt đường tròn tại điểm A' khác A .

- Em hãy so sánh OA và OA' .
- Em hãy cho biết điểm O là gì của AA' ?

Bài tập 5.5. Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy điểm B thuộc đường tròn $(O; R)$.

- Tìm điểm B' sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng BB' .
- Điểm B' có thuộc đường tròn $(O; R)$ không? Giải thích.

Bài tập 5.6. Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy hai điểm M, M' nằm trên đường tròn. d là đường thẳng đi qua tâm O và vuông góc với MM'

- Chứng minh d là trung trực của MM' .
- Điểm N thuộc đường tròn, lấy N' đối xứng với N qua d . Chứng minh N' nằm trên đường tròn.



Hình 7

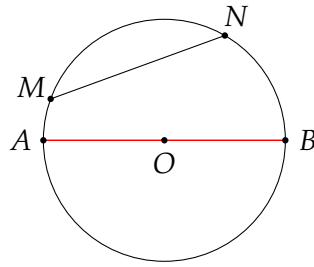


Hình 8

Bài tập 5.7. Xác định tâm đối xứng và trục đối xứng của bánh xe trong (Hình 7). Giải thích cách làm.

Bài tập 5.8. Nêu cách chia một cái bánh có dạng hình tròn tâm O (Hình 8) thành hai phần bằng nhau.

5.1.4 Đường kính và dây cung

**Định nghĩa 5.1.6.**

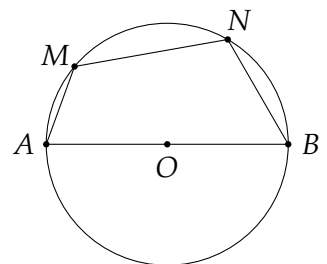
- Đoạn thẳng nối hai điểm trên (thuộc) đường tròn gọi là dây cung.
- Dây cung đi qua tâm được gọi là đường kính.

Định lý 5.1.1. Trong các dây của một đường tròn, đường kính là dây có độ dài lớn nhất.

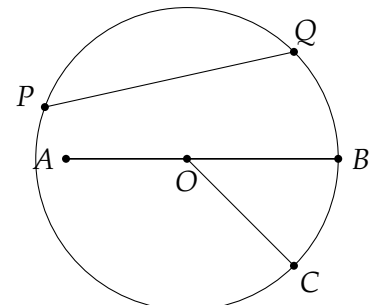
❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 5.9. Quan sát hình vẽ bên,

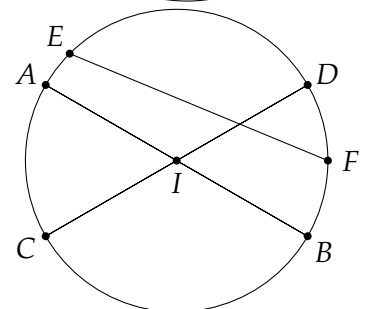
- Hãy kể tên đường kính và dây cung.
- So sánh độ dài của MN và $OM + ON$. Từ đó, so sánh độ dài của MN và AB .



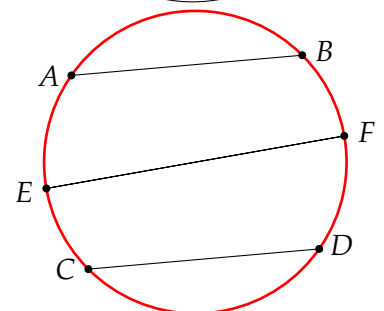
Bài tập 5.10. Trong Hình bên, so sánh độ dài của các đoạn thẳng OC , PQ với AB .



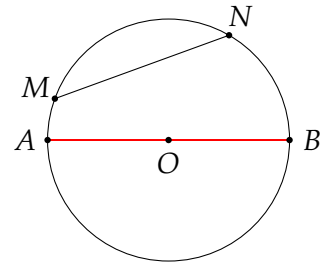
Bài tập 5.11. Cho đường tròn (I) có các dây cung AB , CD , EF . Cho biết AB và CD đi qua tâm I , EF không đi qua I (Hình bên). Hãy so sánh độ dài AB , CD , EF .



Bài tập 5.12. Bạn Mai căng ba đoạn chỉ AB , CD , EF có độ dài lần lượt là 16 cm, 14 cm và 20 cm trên một khung thêu hình tròn bán kính 10 cm (Hình bên). Trong ba dây trên, dây nào đi qua tâm của đường tròn? Giải thích.



Bài tập 5.13. Cho hình vẽ bên. Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$.



❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 5.14. Giải thích tại sao tam giác ABC vuông tại A nếu cạnh BC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$? Chỉ ra vị trí tâm và độ dài bán kính đường tròn đó.

Bài tập 5.15. Cho AC là đường kính của đường tròn tâm O . Vẽ hai dây AB và CD song song nhau. Chứng minh ba điểm B, O, D thẳng hàng. (Hướng dẫn: Tứ giác $ABCD$ là hình gì?)

Bài tập 5.16. Vẽ đường tròn tâm O , bán kính bằng R có dây BC không phải là đường kính. Chứng minh độ dài BC nhỏ hơn đường kính ($BC < 2R$). (Hướng dẫn: sử dụng bất đẳng thức trong tam giác.)

Bài tập 5.17. Cho tam giác ABC đều có I và K là trung điểm của AB và AC . Chứng minh bốn điểm B, I, K, C cùng thuộc một đường tròn đường kính BC .

Bài tập 5.18. Cho tam giác ABC nhọn có hai đường cao BD và CE . Gọi O và I lần lượt là trung điểm của BC và DE .

- Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh OI vuông góc với DE .

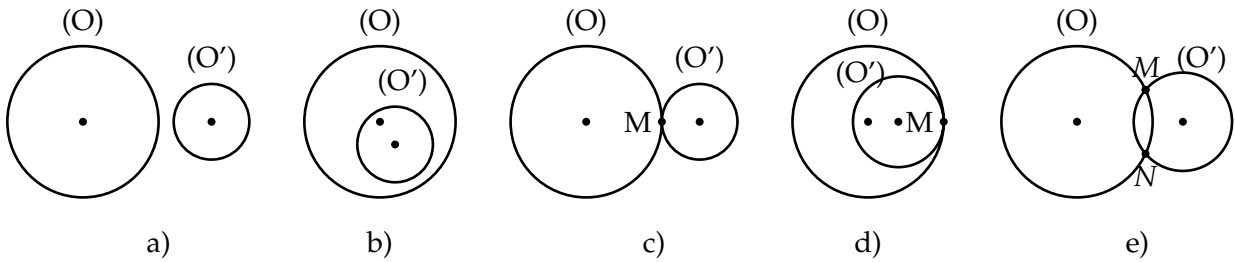
5.1.5 Vị trí tương đối của hai đường tròn

Bảng tóm tắt vị trí tương đối của hai đường tròn phân biệt $(O; R)$ và $(O'; R')$ với $R \geq R'$

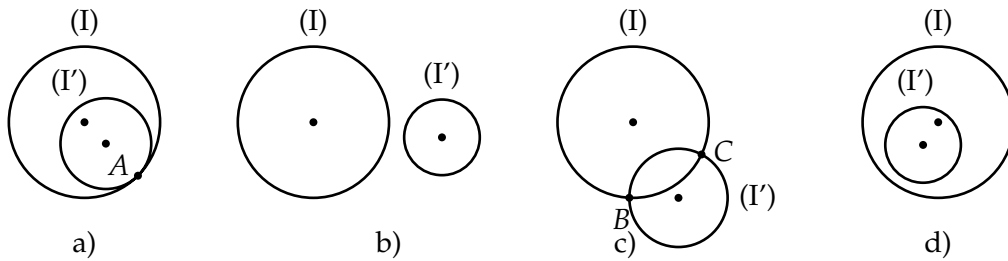
Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ	Hình ảnh
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - R' < OO' < R + R'$	
Hai đường tròn tiếp xúc ngoài	1	$OO' = R + R'$	
Hai đường tròn tiếp xúc trong	1	$OO' = R - R'$	
Hai đường tròn ở ngoài nhau	0	$OO' > R + R'$	
Đường tròn $(O; R)$ đựng đường tròn $(O'; R')$	0	$OO' < R - R'$	

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 5.19. Tìm số điểm chung của hai đường tròn (O) và (O') trong mỗi trường hợp sau:



Bài tập 5.20. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (I) và (I') trong mỗi trường hợp sau:



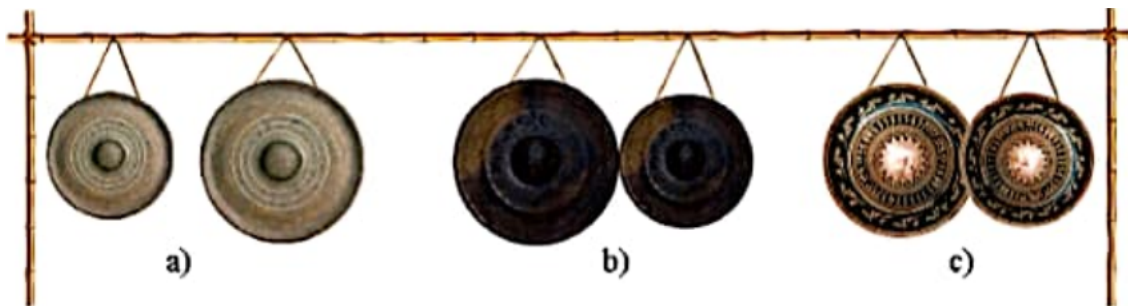
Bài tập 5.21. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $OO' = 12; R = 5; R' = 3;$ b) $OO' = 8; R = 5; R' = 3;$
 c) $OO' = 7; R = 5; R' = 3;$ d) $OO' = 0; R = 5; R' = 4.$

Bài tập 5.22. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn $(I; R)$ và $(J; R')$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $IJ = 5; R = 3; R' = 2;$ b) $IJ = 4; R = 11; R' = 7;$
 c) $IJ = 6; R = 9; R' = 4;$ d) $IJ = 10; R = 4; R' = 1.$

Bài tập 5.23. Mô tả vị trí tương đối giữa mỗi cặp đường tròn trong hình chụp bộ cồng chiêng Tây Nguyên



❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 5.24. Cho tam giác ABC có hai đường cao BB' và CC' . Gọi O là trung điểm BC .

- a) Chứng minh đường tròn tâm O bán kính OB' đi qua B, C, C' ;
 b) So sánh độ dài hai đoạn thẳng BC và $B'C'$.

Bài tập 5.25. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

- a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.
 b) So sánh độ dài của AC và BD .

Bài tập 5.26. Cho hai đường tròn $(O; 2 \text{ cm})$ và $(A; 2 \text{ cm})$ cắt nhau tại C, D , điểm A nằm trên đường tròn tâm O .

- a) Vẽ đường tròn $(C; 2 \text{ cm})$.

b) Đường tròn $(C; 2\text{ cm})$ có đi qua hai điểm O và A không? Vì sao?

Bài tập 5.27. Cho hai đường tròn $(A; 6\text{ cm})$ và $(B; 4\text{ cm})$ cắt nhau tại C và D , $AB = 8\text{ cm}$. Gọi K, I lần lượt là giao điểm của hai đường tròn đã cho với đoạn thẳng AB (Hình 21).

a) Tính độ dài của các đoạn thẳng CA, CB, DA và DB .

b) Điểm I có phải là trung điểm của đoạn thẳng AB không?

c) Tính độ dài của đoạn thẳng IK .

Bài tập 5.28. Xác định vị trí tương đối của $(O; R)$ và $(O'; R')$ trong mỗi trường hợp sau

a) $OO' = 18; R = 10; R' = 6;$

b) $OO' = 2; R = 9; R' = 3;$

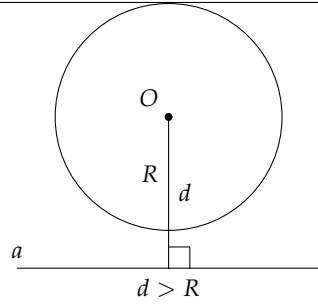
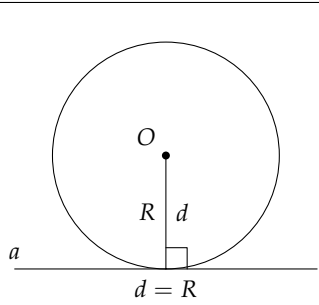
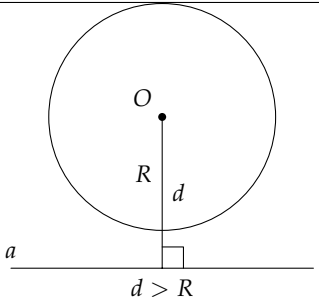
c) $OO' = 13; R = 8; R' = 5;$

d) $OO' = 17; R = 15; R' = 4;$

5.2 Tiếp tuyến của đường tròn

5.2.1 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn $(O; R)$. Gọi d là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a . Ta có kết quả sau

		
Đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ không giao nhau khi $d > R$.	Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ khi $d = R$.	Đường thẳng a cắt đường tròn $(O; R)$ khi $d < R$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 5.29. Cho đường thẳng b và một điểm I cách b một khoảng $d = 6$ cm. Xác định vị trí tương đối của b với các đường tròn sau

- a) Đường tròn $(I; 3\text{cm})$; b) Đường tròn $(I; 6\text{cm})$; c) Đường tròn $(I; 8\text{cm})$.

Bài tập 5.30. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 8 cm. Vẽ đường tròn tâm O , bán kính 10 cm.

- a) Giải thích vì sao a và (O) cắt nhau.
b) Gọi M và N là các giao điểm của đường thẳng a và đường tròn $(O; 10\text{cm})$. Tính độ dài của dây MN .

Bài tập 5.31. Cho đường tròn $(J; 5\text{cm})$ và đường thẳng c . Gọi K là chân đường vuông góc vẽ từ J xuống c , d là độ dài của đoạn thẳng JK . Xác định vị trí tương đối của đường thẳng c và đường tròn $(J; 5\text{cm})$ trong mỗi trường hợp sau

- a) $d = 4$ cm; b) $d = 5$ cm; c) $d = 6$ cm;

Bài tập 5.32. Một diễn viên xiếc đi xe đạp một bánh trên sợi dây cáp căng được cố định ở hai đầu dây. Biết đường kính bánh xe là 72 cm, tính khoảng cách từ trục bánh xe đến dây cáp.

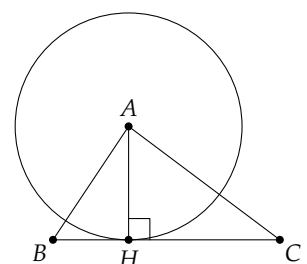
5.2.2 Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Định lý 5.2.1. Một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn khi nó đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 5.33. Cho đường tròn $(O; 2\text{cm})$ và điểm M nằm trên (O) . Vẽ tiếp tuyến d với (O) tại M .

Bài tập 5.34. Cho tam giác ABC có đường cao AH . Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn $(A; AH)$ tại H .



Bài tập 5.35. Một diễn viên xiếc đi xe đạp trên một sợi dây cáp căng. Ta coi sợi dây là tiếp tuyến của mỗi bánh xe, xác định các tiếp điểm.

Bài tập 5.36. Cho đường tròn (O) bán kính 6 cm và điểm A cách O là 10 cm. Kẻ tiếp tuyến AB với (O) (B là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Bài tập 5.37. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Từ A kẻ tiếp tuyến xy . Trên xy lấy điểm C sao cho $AC = R$. Tính độ dài đoạn thẳng BC theo R .

Bài tập 5.38. Cho đường tròn tâm O bán kính 3 cm và điểm M nằm trên đường tròn đó. Từ M vẽ tiếp tuyến xy . Trên xy lấy điểm P sao cho $MP = 4$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng PO .

Bài tập 5.39. Cho đường tròn tâm O bán kính 6 cm. Điểm A nằm ngoài đường tròn và $OA = 10$ cm. Kẻ tiếp tuyến AB với (O) trong đó B là tiếp điểm. Tính chu vi tam giác ABO .

Bài tập 5.40. Cho tam giác ABC vuông tại A , vẽ đường tròn $(B; BA)$. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B) .

Bài tập 5.41. Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ đường tròn tâm O , đường kính AB . Chứng minh DA, BC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài tập 5.42. Một thủy thủ đang ở trên cột buồm của một con tàu, cách mặt nước biển 10 m. Biết bán kính Trái Đất là khoảng 6400 km. Tính tầm nhìn xa tối đa của thủy thủ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lưu ý.

Nếu h rất nhỏ so với R thì $2Rh + h^2 \approx 2Rh$.

Khi đó $AC \approx \sqrt{2Rh} \approx \sqrt{6400 \cdot 2h} = 80\sqrt{2h}$.

Đây là công thức tính nhanh tầm nhìn xa tối đa ứng với độ cao h .

Chẳng hạn, với tình huống trong bài tập 5.42 ta có tầm nhìn xa tối đa của thủy thủ là

$$80\sqrt{2h} = 80\sqrt{2 \cdot 0,01} \approx 11,314(\text{km}).$$

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 5.43. Cho điểm A bên ngoài đường tròn tâm O . Đường tròn đường kính AO có tâm là I cắt (O) tại hai điểm B và C .

- Tam giác OAB và tam giác OAC có gì đặc biệt? Tại sao?
- Chứng minh AB và AC là hai tiếp tuyến của (O) .

Bài tập 5.44. Cho đường tròn tâm O có bán kính bằng 5 cm và điểm B cách O một khoảng 13 cm. Lấy điểm A thuộc (O) sao cho $AB = 12$ cm.

- Tam giác OAB là tam giác gì?
- Chứng minh đường thẳng BA tiếp xúc với (O) .

Bài tập 5.45. Từ điểm A ngoài đường tròn tâm O , vẽ tiếp tuyến với tiếp điểm B . Lấy điểm C thuộc (O) khác B sao cho $AB = AC$.

- So sánh tam giác OAB và tam giác OAC .
- Chứng minh AC là tiếp tuyến của (O) .

Bài tập 5.46. Lấy hai điểm A và B thuộc đường tròn tâm O (A, O, B không thẳng hàng). Tiếp tuyến của (O) tại A cắt tia phân giác của $\widehat{AOB}$ tại C .

- So sánh tam giác OAC và tam giác OBC .
- Chứng minh đường thẳng BC là tiếp tuyến của (O) .

Bài tập 5.47. Cho đường tròn (O, R) có dây AB không là đường kính. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AB , cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở điểm C .

- Chứng minh CB là tiếp tuyến của (O) ;

b) Cho bán kính của (O) bằng 15 cm và dây $AB = 24$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng OC .

Bài tập 5.48. Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA .

- Tứ giác $OCAB$ là hình gì? Vì sao?
- Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B , cắt đường thẳng OA tại E . Tính độ dài BE theo R .

5.2.3 Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau

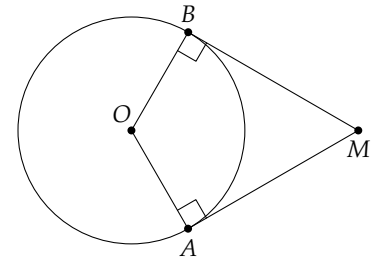
Định lý 5.2.2. Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 5.49. Trong hình vẽ bên. Chứng minh

- $MB = MA$.
- OM là tia phân giác của $\widehat{AMB}$.
- OM là đường trung trực của AB .



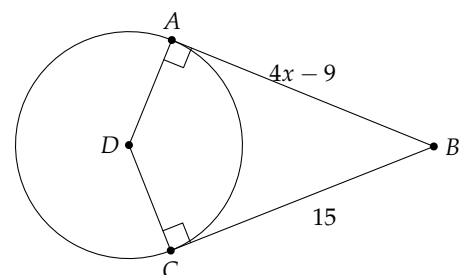
Bài tập 5.50. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường tròn đường kính AO cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm B và C .

- Chứng minh AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.
- Chứng minh $AB = AC$.
- Xác định tia phân giác của $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BOC}$.

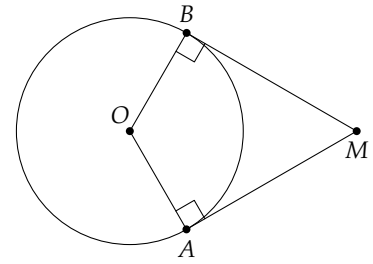
Bài tập 5.51. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(I; 6\text{cm})$ và ME, MF là hai tiếp tuyến của đường tròn này tại E và F . Cho biết $\widehat{EMF} = 60^\circ$.

- Tính số đo $\widehat{EMI}$ và $\widehat{EIF}$.
- Tính độ dài MI .

Bài tập 5.52. Quan sát hình vẽ bên. Tìm giá trị của x .



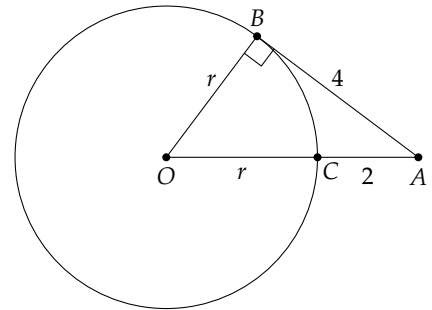
Bài tập 5.53. Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm O , bán kính 15 cm được kéo bởi một dây curoa. Trục của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm M . Cho biết khoảng cách OM là 35 cm.



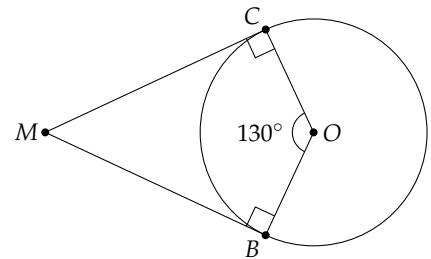
- a) Tính độ dài của hai đoạn dây curoa MA và MB (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).
- b) Tính số đo $\widehat{AMB}$ tạo bởi hai tiếp tuyến AM, BM và số đo $\widehat{AOB}$ (kết quả làm tròn đến phút).

Bài tập 5.54. Trong hình vẽ bên, AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B .

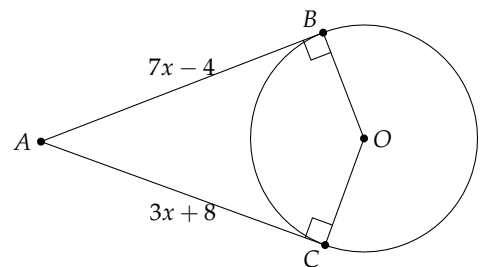
- a) Tính bán kính r của đường tròn (O) .
- b) Tính chiều dài cạnh OA của tam giác ABO .



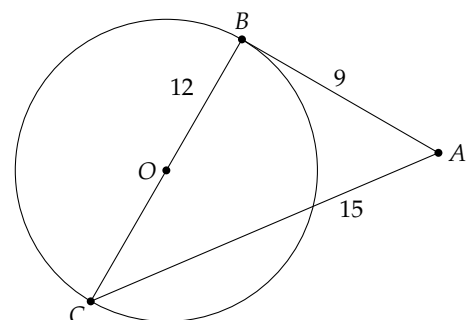
Bài tập 5.55. Ở hình vẽ bên, MB, MC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C ; $\widehat{COB} = 130^\circ$. Tính số đo $\widehat{CMB}$.



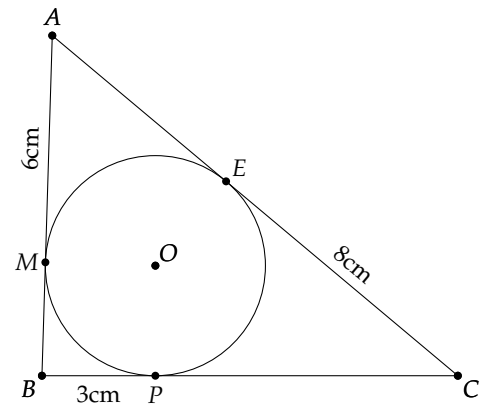
Bài tập 5.56. Quan sát hình bên. Biết AB, AC lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C . Tính giá trị của x .



Bài tập 5.57. Trong hình bên, $AB = 9, BC = 12, AC = 15$ và BC là đường kính của đường. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn (O)



Bài tập 5.58. Cho tam giác ABC có đường tròn (O) nằm trong và tiếp xúc với ba cạnh của tam giác. Biết $AM = 6$ cm, $BP = 3$ cm, $CE = 8$ cm. Tính chu vi tam giác ABC .



Bài tập 5.59. Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB . Vẽ dây AC sao cho $AC = R$. Gọi I là trung điểm của dây AC . Đường thẳng OI cắt tiếp tuyến Ax tại M . Chứng minh rằng

- $\widehat{ACB}$ có số đo bằng 90° , từ đó suy ra độ dài của BC theo R ;
- OM là tia phân giác của $\widehat{COA}$;
- MC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

Bài tập 5.60. Cho đường tròn $(O; 5\text{cm})$, điểm M nằm ngoài (O) sao cho hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp điểm) vuông góc với nhau tại M .

- Tính độ dài của MA và MB .
- Qua giao điểm I của đoạn thẳng MO và đường tròn (O) , vẽ một tiếp tuyến cắt OA, OB lần lượt tại C, D . Tính độ dài của CD .

Bài tập 5.61. Cho đường tròn (O) , điểm M nằm ngoài (O) sao cho MA và MB là hai tiếp tuyến (A, B là hai tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Biết chu vi tam giác MAB là 18 cm, tính độ dài dây AB .

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 5.62. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O) . Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm).

- Chứng minh AO là trung trực của đoạn thẳng BC ;
- Vẽ đường kính CD của (O) . Chứng minh $BD \parallel OA$.

Bài tập 5.63. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax . Điểm M nằm trên (O) sao cho tiếp tuyến tại M cắt Ax tại C .

- Chứng minh OC là trung trực của đoạn thẳng AM ;
- Chứng minh $BM \parallel OC$.

Bài tập 5.64. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến Ax và By . Điểm M thuộc (O) sao cho tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D .

- Chứng minh $CD = AC + BD$;
- Chứng minh $OC \perp AM$;
- Gọi E là giao điểm của AM và OC , F là giao điểm của BM và OD . Tứ giác $MEOF$ là hình gì? Tại sao?

Bài tập 5.65. Cho đường tròn (O) , các điểm B, C thuộc (O) sao cho $\widehat{BOC} = 90^\circ$. Hai tiếp tuyến tại B và C thuộc (O) cắt nhau ở A .

- Tứ giác $ABOC$ là hình gì? Tại sao?

- b) Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC của (O) . Tiếp tuyến tại M của (O) cắt AB, AC lần lượt tại D, E . Chứng minh $DE = BD + CE$;
- c) Biết bán kính đường tròn (O) bằng 5 cm. Tính chu vi của tam giác ADE .

Bài tập 5.66. Cho đường tròn (O, R) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) sao cho $OA = 2R$. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm).

- a) Chứng minh tam giác ABC đều;
- b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC theo R .

Bài tập 5.67. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F .

- a) Tứ giác $AEIF$ là hình gì? Vì sao?
- b) Chứng minh $BC = BF + CE$;
- c) Chứng minh $r = \frac{AB + AC - BC}{2}$.

Bài tập 5.68. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P .

- a) Chứng minh $BC = BP + CN$;
- b) Chứng minh $AN = \frac{AB + AC - BC}{2}$;
- c) Biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm. Tính độ dài CM .

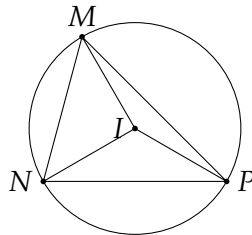
5.3 Góc ở tâm và góc nội tiếp

5.3.1 Góc ở tâm

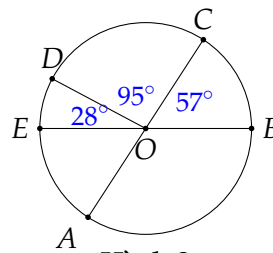
Định nghĩa 5.3.1. Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

❖ BÀI TẬP ❖

Cho hình vẽ



Hình 1



Hình 2

Bài tập 5.69. Dựa vào Hình 1. Xác định các góc ở tâm của đường tròn.

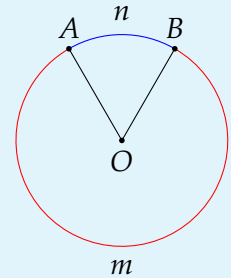
Bài tập 5.70. Tính số đo góc ở tâm $\widehat{EOA}$ và $\widehat{AOB}$ trong Hình 2.

5.3.2 Cung

Định nghĩa 5.3.2. Mỗi phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm A, B trên đường tròn gọi là một *cung* AB , kí hiệu là $\widehat{AB}$.

📌 **Lưu ý.**

Trong hình 3, hai điểm A, B chia đường tròn thành 2 phần là cung $\widehat{AnB}$ và $\widehat{AmB}$. Tuy nhiên góc $\widehat{AON}$ chắn cung $\widehat{AnB}$.



Hình 3

5.3.3 Số đo cung

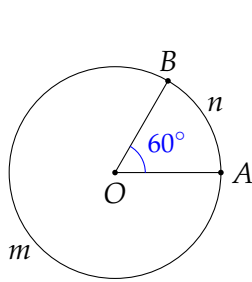
Định nghĩa 5.3.3. Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

📌 **Lưu ý.**

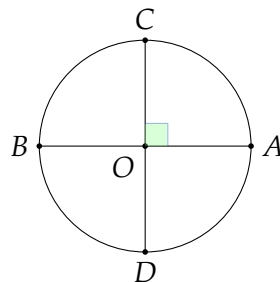
- Số đo của cung AB được kí hiệu là $sđ\widehat{AB}$.
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ có chung hai đầu mút với cung lớn.
- Số đo của cung nửa đường tròn bằng 180° .
- Một cung có số đo n° thường được gọi tắt là cung n° .
- Trong một đường tròn, hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

❖ BÀI TẬP ❖

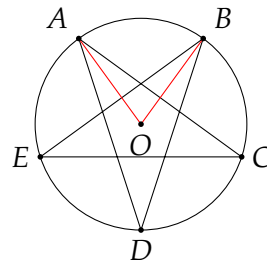
Cho các hình vẽ



Hình 5



Hình 6



Hình 7

Bài tập 5.71. Tính số đo các cung $\widehat{AnB}$ và $\widehat{AmB}$ trong Hình 5.

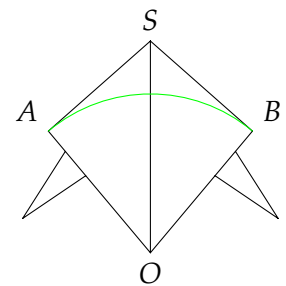
Bài tập 5.72. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau (Hình 6). Xác định số đo của các cung $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ và $\widehat{AD}$.

Bài tập 5.73. Xác định số đo cung AB trong hình ngôi sao năm cánh (Hình 7).

Định lý 5.3.1. Trên đường tròn (O) , cho B là một điểm nằm trên cung AC . Ta nói điểm B chia cung AC thành hai cung $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$. Một cách tổng quát, ta có $sđ\widehat{AC} = sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{BC}$.

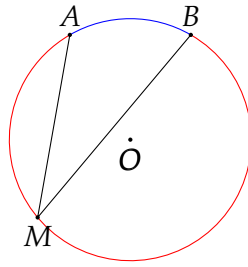
Bài tập 5.74. Trên cung AB có số đo 90° của đường tròn (O) , lấy điểm M sao cho cung AM có số đo 15° . Tính số đo của cung MB .

Bài tập 5.75. Bạn Hùng làm một cái diều với thân diều là hình tứ giác $SAOB$ sao cho OS là đường phân giác của $\widehat{AOB}$ và $\widehat{ASB} = 106^\circ$. Thanh tre màu xanh lá được uốn cong thành cung AB của đường tròn tâm O và SA , SB là hai tiếp tuyến của (O) (Hình 8). Tính số đo của $\widehat{AB}$.



Hình 8

5.3.4 Góc nội tiếp



Định nghĩa 5.3.4. Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là *cung bị chắn*.

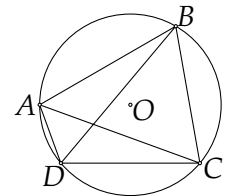
Định lý 5.3.2. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Định lý 5.3.3. Trong một đường tròn

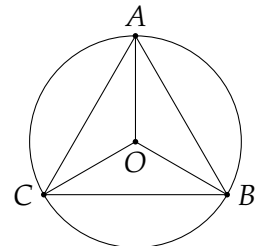
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Góc nội tiếp ($\leq 90^\circ$) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 5.76. Em hãy chỉ ra các cặp góc nội tiếp bằng nhau trong hình bên.



Bài tập 5.77. Tìm góc nội tiếp chắn cung AB của đường tròn (O) trong Hình 9.

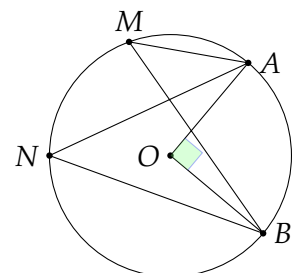


Hình 9

Bài tập 5.78. Cho tam giác đều MNP có ba đỉnh nằm trên đường tròn (I) . Hãy chỉ ra các góc nội tiếp của đường tròn (I) và tính số đo của các góc nội tiếp đó.

Bài tập 5.79. Cho hai điểm E và F nằm trên đường tròn (O) . Có bao nhiêu góc nội tiếp chắn cung EF ?

Bài tập 5.80. Tính số đo của $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ trong Hình 12.



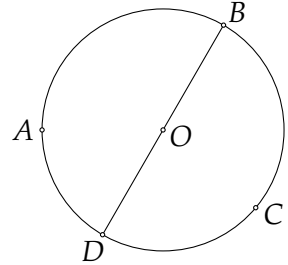
Hình 12

Bài tập 5.81. Cho ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn (O) sao cho $\widehat{AOB} = 50^\circ, \widehat{BOC} = 30^\circ$, điểm B thuộc cung nhỏ AC . Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cung nhỏ $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ và chia mỗi cung đó thành hai cung bằng nhau. Tìm số đo các góc sau:

- a) $\widehat{BCA}, \widehat{BAC}$; b) $\widehat{MBA}, \widehat{BAN}$.

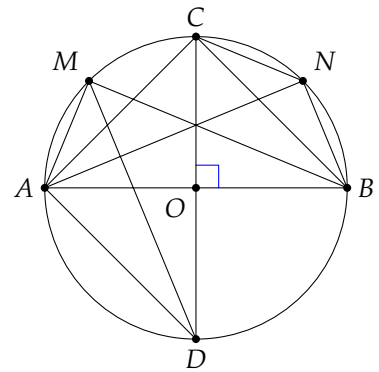
Bài tập 5.82. Cho hình vẽ bên

- a) Em hãy cho biết $\widehat{BAC}, \widehat{BDC}$ là góc nội tiếp chắn cung nào? Hãy so sánh hai góc này.
b) Biết $\widehat{AOB} = 120^\circ$ tính số đo góc $\widehat{ACB}$.
c) Tính số đo góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$.

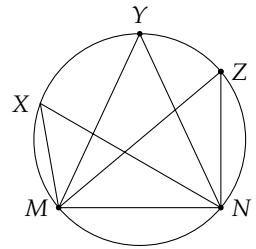


Bài tập 5.83. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn (O) . Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên hai cung nhỏ $\widehat{AC}, \widehat{BC}$ và chia mỗi cung đó thành hai cung bằng nhau. Tìm số đo các góc sau:

- a) $\widehat{ACB}, \widehat{ADC}$;
b) $\widehat{ADM}, \widehat{NCB}$.



Bài tập 5.84. Một huấn luyện viên cho cầu thủ tập sút bóng vào cầu môn MN (Hình 20). Nếu bóng được đặt ở điểm X thì $\widehat{MXN}$ gọi là góc sút từ vị trí X . Hãy so sánh các góc sút $\widehat{MXN}, \widehat{MYN}, \widehat{MZN}$.



❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 5.85. Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và điểm M sao cho $OM = 10 \text{ cm}$. Qua M vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn tại A và B . Tính số đo góc ở tâm được tạo bởi hai tia OA và OB .

Bài tập 5.86. Cho tam giác đều ABC . Vẽ nửa đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E . Hãy so sánh các cung $\widehat{BD}, \widehat{DE}, \widehat{EC}$.

Bài tập 5.87. Dây cung AB chia đường tròn (O) thành hai cung. Cung lớn có số đo bằng ba lần cung nhỏ.

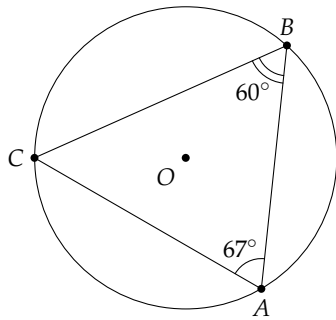
- a) Tính số đo mỗi cung.
b) Chứng minh khoảng cách OH từ tâm O đến dây cung AB có độ dài bằng $\frac{AB}{2}$.

Bài tập 5.88. Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu vào những thời điểm sau?

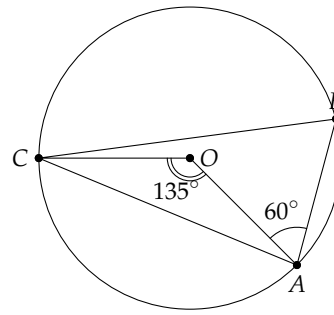
- a) 2 giờ; b) 8 giờ; c) 21 giờ.

Bài tập 5.89. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $\left(O; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Một tiếp tuyến của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại hai điểm A và B . Tính số đo cung AB .

Bài tập 5.90. Xác định số đo các cung $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ trong mỗi hình vẽ sau.



a)



b)

Bài tập 5.91. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy một điểm M trên cung nhỏ AC rồi vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M . Tiếp tuyến này cắt đường thẳng CD tại S . Chứng minh rằng $\widehat{MSD} = 2\widehat{MBA}$.

Bài tập 5.92. Cho tam giác ABC cân ở A và nội tiếp một đường tròn. Lấy D thuộc cung BC không chứa A . Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{ACB}$.

Bài tập 5.93. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC và vẽ đường kính AD . AH là đường cao của tam giác ABC . Chứng minh tam giác AHB đồng dạng với tam giác ACD .

Bài tập 5.94. Cho AB là dây cung của đường tròn tâm O . Trên tia đối của tia BA lấy điểm D . Bán kính OC vuông góc với AB với C thuộc cung lớn AB . CD cắt (O) tại E .

a) Chứng minh $\widehat{CEB} = \widehat{CAB}$

b) Chứng minh $CA^2 = CE \cdot CD$

Bài tập 5.95. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O và có hai đường cao BE, CF lần lượt cắt (O) ở I và K .

a) Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$.

b) Chứng minh OA vuông góc với IK .

Bài tập 5.96. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Đường cao AD của tam giác cắt (O) ở E . Vẽ đường kính AF của đường tròn. Chứng minh $EF \parallel BC$ và $\widehat{BAD} = \widehat{CAF}$.

Bài tập 5.97. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O và có đường cao AD . Gọi H là trực tâm của tam giác. Tia AD cắt (O) ở E . Chứng minh

a) $\widehat{DBE} = \widehat{DAC} = \widehat{DBH}$.

b) Điểm H và điểm E đối xứng nhau qua đường thẳng BC .

Bài tập 5.98. Cho AB là dây cung không chứa tâm của đường tròn tâm O . Vẽ dây AC vuông góc với AB . Chứng minh $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$ và suy ra B, O, C thẳng hàng.

Bài tập 5.99. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AC , có bán kính OB vuông góc với AC . Điểm M thuộc cung AB . Tính $\widehat{BMC}$ và $\widehat{AMB}$.

Bài tập 5.100. Cho hai đường tròn tâm O và O' có cùng bán kính R , cắt nhau ở A và B sao cho O và O' nằm ở hai bên đường thẳng AB . Cắt tuyến đi qua A và vuông góc với AB cắt (O) và (O') lần lượt ở C và D (A nằm giữa C và D). Tứ giác $AOBO'$ là hình gì? Chứng minh $BC = BD$.

Bài tập 5.101. Cho $\widehat{BAC} = 30^\circ$ nội tiếp đường tròn tâm O (B và C thuộc (O)). Vẽ đường tròn tâm I đi qua O sao cho hai điểm B và C nằm ở bên trong (I) . Hai tia OB và OC cắt (I) ở E và F . Tính $\widehat{EIF}$

Bài tập 5.102. Cho AB là đường kính của đường tròn tâm O , bán kính bằng R . Vẽ hai dây cung AD và BC cắt nhau tại E . Vẽ EF vuông góc với AB ở F .

a) Chứng minh tam giác AFE đồng dạng với tam giác ADB ;

b) Chứng minh tam giác BFE đồng dạng với tam giác BCA .

Bài tập 5.103. Cho hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau ở A và B . Vẽ AC và AD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O') . Chứng minh C, B, D thẳng hàng.

Bài tập 5.104. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD . Đường tròn đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại F và E . Chứng minh AD, BE và CF đồng qui.

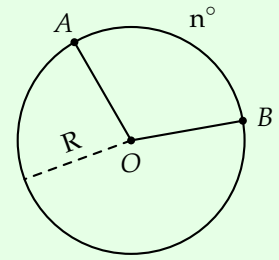
Bài tập 5.105. Cho AB và CD là hai dây song song của một đường tròn (tia AB và tia DC cùng chiều). Chứng minh $s\widehat{AC} = s\widehat{DB}$. Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

5.4 Hình quạt tròn. Hình vành khuyên

5.4.1 Hình quạt tròn

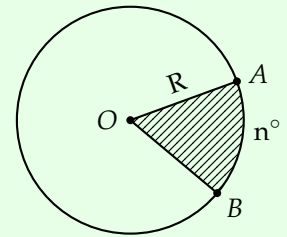
Công thức 5.4.1. Trên đường tròn bán kính R , độ dài l của một cung có số đo n° được tính theo công thức:

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$



Công thức 5.4.2. Hình quạt tròn là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó. Diện tích hình quạt tròn bán kính R , ứng với cung n° được tính theo công thức:

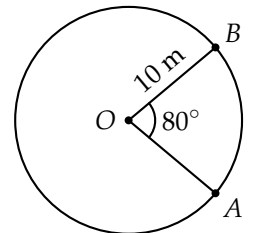
$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$



❖ BÀI TẬP ❖

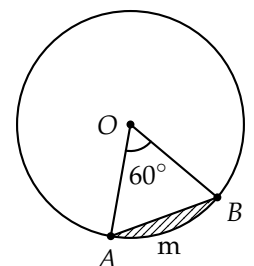
Bài tập 5.106. Tính độ dài cung 30° của một đường tròn có bán kính 10 cm. (Lấy π theo máy tính và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)

Bài tập 5.107. Tính độ dài của đoạn hàng rào từ A đến B của sân cỏ trong hình bên, cho biết $\widehat{AOB} = 80^\circ$.



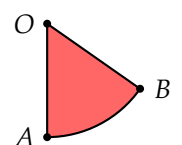
Bài tập 5.108. Tính diện tích hình quạt tròn bán kính $R = 10$ cm, ứng với cung 60° (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^2).

Bài tập 5.109. Phần hình tròn được giới hạn bởi một cung và dây căng cung đó gọi là hình viên phân. Tính diện tích hình viên phân AmB , biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và bán kính đường tròn là 5,1 cm (hình bên) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^2).



Bài tập 5.110. Tính diện tích hình quạt tròn bán kính $R = 20$ cm, ứng với cung 72° .

Bài tập 5.111. Tính diện tích của miếng bánh pizza có dạng hình quạt tròn trong hình bên. Biết $OA = 15$ cm và $\widehat{AOB} = 55^\circ$.



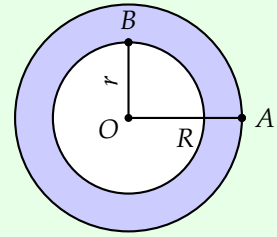
5.4.2 Hình vành khuyên

Công thức 5.4.3. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $(O; r)$ với $R > r$.

Hình vành khuyên là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường tròn $(O; r)$ và $(O; R)$.

Diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; r)$ và $(O; R)$ được tính bởi công thức:

$$S = \pi (R^2 - r^2).$$



❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 5.112. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và $(O; 8 \text{ cm})$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

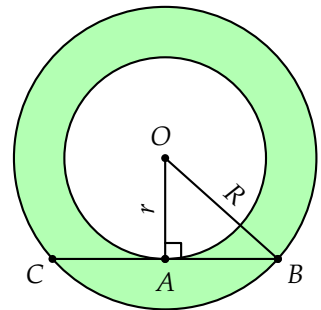
Bài tập 5.113. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 10 \text{ cm})$ và $(O; 20 \text{ cm})$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài tập 5.114.

Cho hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; r)$ và $(O; R)$ với $R > r$. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy hai điểm B, C sao cho BC vừa là dây cung của $(O; R)$, vừa là tiếp tuyến của đường tròn $(O; r)$ tại A (hình bên).

a) Tính độ dài đoạn thẳng BC theo r và R .

b) Cho $BC = a\sqrt{3}$. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; r)$ và $(O; R)$ theo a .



❖ LUYỆN TẬP ❖

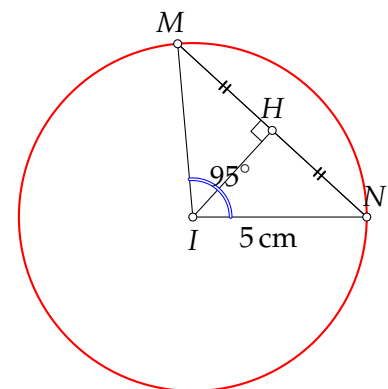
Bài tập 5.115. Tính độ dài các cung $30^\circ; 90^\circ; 120^\circ$ của đường tròn $(O; 6 \text{ cm})$.

Bài tập 5.116. Tính diện tích các hình quạt tròn ứng với cung có số đo lần lượt là $30^\circ; 90^\circ; 120^\circ$ của hình tròn $(O; 12 \text{ cm})$.

Bài tập 5.117. Tính diện tích các hình quạt tròn ứng với cung có độ dài lần lượt là $8 \text{ cm}, 15 \text{ cm}$ của hình tròn $(O; 5 \text{ cm})$.

Bài tập 5.118. Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 9 \text{ cm})$ và $(O; 12 \text{ cm})$.

Bài tập 5.119. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung có độ dài là 55 cm và cung có số đo là 95° .



Bài tập 5.120. Một máy kéo nông nghiệp có đường kính bánh xe sau là 124 cm và đường kính bánh xe trước là 80 cm . Hỏi khi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được bao nhiêu vòng?

Bài tập 5.121. Thành phố Đà Lạt nằm vào khoảng $11^\circ 58'$ vĩ độ Bắc. Mỗi vòng kinh tuyến của Trái Đất dài khoảng $40\,000 \text{ km}$. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến từ Đà Lạt đến xích đạo.

(Nguồn: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Đà-Lạt>)

5.5 Ôn tập chương

➡ TRẮC NGHIỆM ⬅

Câu 5.1. Cho hai đường tròn $(O; 5\text{ cm})$, $(O'; 4\text{ cm})$ với $OO' = 9\text{ cm}$. Kết luận nào sau đây đúng về vị trí tương đối của hai đường tròn?

- A. Hai đường tròn cắt nhau. B. Hai đường tròn ở ngoài nhau.
C. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài. D. Hai đường tròn tiếp xúc trong.

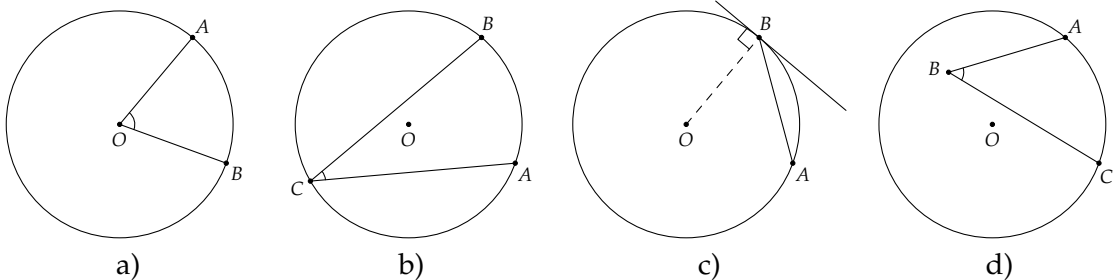
Câu 5.2. Cho đường tròn $(O; 6\text{ cm})$ và đường thẳng a với khoảng cách từ O đến a là 4 cm . Kết luận nào sau đây đúng về vị trí giữa đường tròn (O) và đường thẳng a ?

- A. (O) và a cắt nhau tại hai điểm. B. (O) và a tiếp xúc.
C. (O) và a không có điểm chung. D. (O) và a có duy nhất điểm chung.

Câu 5.3. Góc ở tâm là góc

- A. có đỉnh nằm trên đường tròn.
B. có đỉnh nằm trên bán kính của đường tròn.
C. có hai cạnh là hai đường kính của đường tròn.
D. có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

Câu 5.4. Hình nào dưới đây biểu diễn góc nội tiếp?



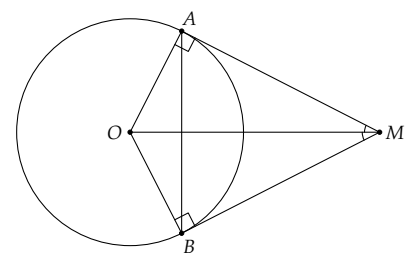
- A. Hình a. B. Hình b. C. Hình c. D. Hình d.

Câu 5.5. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo là

- A. 180° . B. 120° . C. 90° . D. 60° .

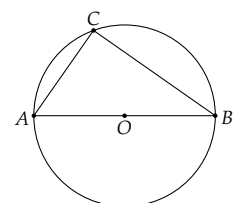
Câu 5.6. Cho hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M (hình bên). Biết $\widehat{AMB} = 50^\circ$. Số đo cung nhỏ AB là

- A. 140° . B. 230° . C. 130° . D. 150° .



Câu 5.7. Trong hình bên $\widehat{ACB}$ là góc

- A. vuông. B. tù. C. nhọn. D. bẹt.



Câu 5.8. Trong một đường tròn, khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.
B. Hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau.
C. Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
D. Hai góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn một cung.

Câu 5.9. Hình quạt tròn bán kính R , ứng với cung 90° có diện tích bằng

- A. πR^2 . B. $\frac{\pi R^2}{2}$. C. $\frac{\pi R^2}{4}$. D. $\frac{\pi R^2}{8}$.

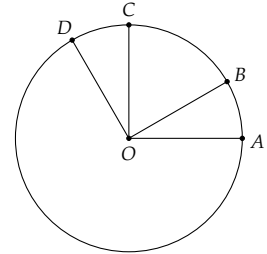
Câu 5.10. Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; 2\text{ cm})$ và $(O; 4\text{ cm})$ có diện tích bằng

- A. 12 cm^2 . B. 24 cm^2 . C. $4\pi\text{ cm}^2$. D. $12\pi\text{ cm}^2$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 5.122. Quan sát hình bên. Biết $\widehat{DOA} = 120^\circ$, $OA \perp OC$, $OB \perp OD$.

- Đọc tên các góc ở tâm có trong hình.
- Tính số đo của mỗi góc ở tâm tìm được ở câu a).
- Tìm các cặp cung bằng nhau và có số đo nhỏ hơn 180° .
- So sánh hai cung nhỏ $\widehat{AB}$ và $\widehat{CD}$.



Bài tập 5.123. Cho tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O) và AH là đường cao. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D . Chứng minh rằng:

- AC vuông góc với DC ;
- $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$;
- $AB \cdot AC = AH \cdot AD$.

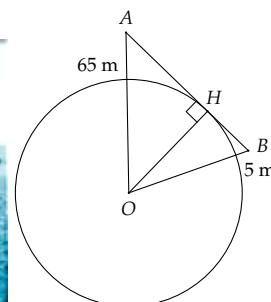
Bài tập 5.124. Hãy hoàn thành bảng số liệu sau vào vở (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bán kính R	20 cm	?	12 cm	32,6 cm	?
Số đo n° của cung tròn	160°	144°	?	42°	15°
Độ dài l của cung tròn	?	16,8 cm	60 cm	?	96 cm

Bài tập 5.125. Trên đường thẳng xy , lấy lần lượt ba điểm A, B, C sao cho $AB > BC$. Vẽ đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính BC .

- Chứng minh rằng hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại B .
- Gọi H là trung điểm của AC . Vẽ dây DE của (O) vuông góc với AC tại H . Chứng minh tứ giác $ADCE$ là hình thoi.
- DC cắt đường tròn (O') tại F . Chứng minh rằng ba điểm F, B, E thẳng hàng.
- Chứng minh rằng HF là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

Bài tập 5.126. Hải đăng Kê Gà tọa lạc tại xã Tân Thanh huyện Hàm Thuận Năm, tỉnh Bình Thuận. Biết ngọn hải đăng cao 65 m so với mực nước biển. Với khoảng cách bao nhiêu kilômét thì người quan sát trên tàu bắt đầu trông thấy ngọn hải đăng này? Cho biết mắt người quan sát ở độ cao 5 m so với mực nước biển và bán kính Trái Đất gần bằng 6 400 km.



Chương 6

Hàm số $y = ax^2$

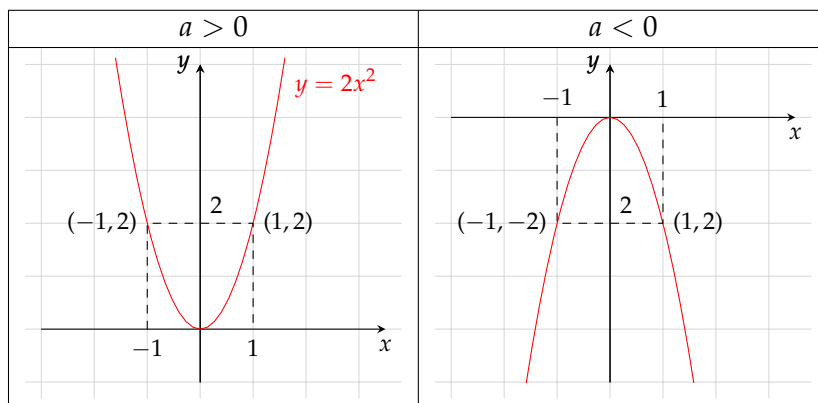
6.1 Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đồ thị.

6.1.1 Đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Định nghĩa 6.1.1. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong đi qua gốc tọa độ, nhận trục tung làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một parabol đỉnh O .

- Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.
- Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

6.1.2 Dạng đồ thị



6.1.3 Các bước vẽ parabol

🔍 Phương pháp giải

Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$), ta thực hiện các bước sau:

- Lập bảng giá trị của hàm số với một số giá trị của x (thường lấy 5 giá trị gồm 0 và hai cặp giá trị đối nhau).
- Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , đánh dấu các điểm $(x; y)$ trong bảng giá trị (gồm điểm $(0; 0)$ và hai cặp điểm đối xứng nhau qua trục Oy).
- Vẽ đường parabol đi qua các điểm vừa được đánh dấu.

🔗 BÀI TẬP 🔗

A. Nhận dạng. Tính giá trị hàm số tại x_0

Bài tập 6.1. Trong các hàm số sau, hàm số nào có dạng $y = ax^2$ ($a \neq 0$)?

- a) $y = 2x$. b) $y = 3x^2$. c) $y = 0x^2$. d) $y = -\frac{x^2}{4}$.

Bài tập 6.2. Xác định hệ số của x^2 trong các hàm số sau:

- a) $y = 2x^2$. b) $y = -0,25x^2$. c) $y = \frac{1}{2}x^2$. d) $y = \sqrt{2}x^2$.
e) $y = 0,75x^2$. f) $y = -3x^2$. g) $y = \frac{1}{4}x^2$. h) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Bài tập 6.3. Tính giá trị hàm số sau đây tại $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ và $x = -2$

- a) $y = 0,75x^2$. b) $y = -3x^2$. c) $y = \frac{1}{4}x^2$. d) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Bài tập 6.4. Gọi x (cm) là chiều dài cạnh của một viên gạch lát nền hình vuông.

- a) Viết công thức tính diện tích S (cm²) của viên gạch đó.
b) Tính S khi $x = 20$; $x = 30$; $x = 60$.

Bài tập 6.5. Lập bảng giá trị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = -\frac{1}{4}x^2$ với x lần lượt bằng -4 ; -2 ; 0 ; 2 ; 4 .

Bài tập 6.6. Một vật rơi tự do từ độ cao 125 m so với mặt đất. Quãng đường chuyển động s (m) của vật phụ thuộc vào thời gian t (giây) được cho bởi công thức $s = 5t^2$.

- a) Sau 2 giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét? Tương tự, sau 3 giây vật cách mặt đất bao nhiêu mét?
b) Sau bao lâu thì vật này tiếp đất?

B. Vẽ đồ thị hàm số

Bài tập 6.7. Cho hàm số $y = -x^2$

- a) Lập bảng giá trị của hàm số tại các giá trị của x bằng -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 .
b) Vẽ đồ thị của hàm số.

Bài tập 6.8. Vẽ đồ thị các hàm số sau

- a) $y = 2x^2$. b) $y = -2x^2$. c) $y = 3x^2$. d) $y = -3x^2$.
e) $y = \frac{1}{2}x^2$. f) $y = -\frac{1}{3}x^2$. g) $y = \sqrt{2}x^2$. h) $y = -0,5x^2$.

Bài tập 6.9. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$

- a) Vẽ đồ thị của hàm số.
b) Trong các điểm $A(-6; -8)$, $B(6; 8)$, $C\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{9}\right)$ điểm nào thuộc đồ thị của hàm số trên?

Bài tập 6.10. Cho hai hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = -\frac{1}{4}x^2$. Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

C. Toán ứng dụng

Bài tập 6.11. Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

- a) Tìm a , biết đồ thị của hàm số đi qua điểm $M(2; 6)$.
b) Vẽ đồ thị của hàm số với a vừa tìm được.
c) Tìm các điểm thuộc đồ thị trên có tung độ $y = 9$.

Bài tập 6.12. Cho một hình lập phương có độ dài cạnh là x (cm).

- Viết công thức tính diện tích toàn phần S của hình lập phương theo x .
- Lập bảng giá trị của hàm số S khi x lần lượt nhận các giá trị: $\frac{1}{2}$; 1 ; $\frac{2}{3}$; 2 ; 3 .

Bài tập 6.13. Động năng (tính bằng J) của một quả bưởi nặng 1 kg rơi với tốc độ v (m/s) được tính bằng công thức $K = \frac{1}{2}v^2$.

- Tính động năng của quả bưởi đạt được khi nó rơi với tốc độ lần lượt là 3 m/s, 4 m/s.
- Tính tốc độ rơi của quả bưởi tại thời điểm quả bưởi đạt được động năng 32 J.

Bài tập 6.14. Khi gió thổi vào cánh buồm của một con thuyền thì lực F (N) của nó tỉ lệ thuận với bình phương tốc độ v (m/s) của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Biết rằng khi tốc độ của gió bằng 3 m/s thì lực tác động lên cánh buồm bằng 180 N.

- Tính hằng số a .
- Với a vừa tìm được, tính lực F khi $v = 15$ m/s và khi $v = 26$ m/s.
- Biết rằng cánh buồm chỉ có thể chịu được một lực tối đa là 14 580 N, hỏi con thuyền có thể đi được trong gió bão với tốc độ gió 90 km/h hay không?

Bài tập 6.15. Viết công thức tính diện tích hình vuông cạnh a rồi thực hiện các yêu cầu sau:

- Tính diện tích hình vuông khi a nhận các giá trị lần lượt là 2; 5; 7 và $3 + 2\sqrt{3}$.
- Nếu độ dài a tăng bốn lần thì diện tích sẽ tăng lên bao nhiêu lần?
- Tìm a , biết rằng $S = 152,4 \text{ cm}^2$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

Bài tập 6.16. Quãng đường chuyển động S (đơn vị tính bằng mét) của một vật rơi từ độ cao 200 m phụ thuộc vào thời gian t (đơn vị tính bằng giây) được cho bởi công thức $S = 2t^2$.

- Hỏi sau các khoảng thời gian lần lượt là 2 giây và 4 giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét?
- Sau thời gian bao nhiêu lâu thì vật tiếp đất?

Bài tập 6.17. Một khách du lịch chơi trò Bungee từ một cây cầu cách mặt đất 120 m. Quãng đường chuyển động S (tính bằng mét) của người rơi phụ thuộc vào thời gian t (tính bằng giây) được cho bởi công thức $S = 4t^2$.

- Hỏi sau khoảng thời gian 3 giây du khách cách mặt đất bao nhiêu mét?
- Sau khoảng thời gian bao lâu thì du khách cách mặt đất 56 mét?

6.2 Phương trình bậc hai một ẩn

6.2.1 Khái niệm

Định nghĩa 6.2.1. Phương trình bậc hai một ẩn (còn gọi là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0$$

trong đó x là ẩn, a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 6.18. Hãy xác định các hệ số a, b, c của mỗi phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 + 2x - 24 = 0$. b) $3y^2 - 2\sqrt{5}y = 0$. c) $-5t^2 + 7 = 0$. d) $\frac{1}{2}v^2 - 3v + 1 = 0$.

Bài tập 6.19. Trong các phương trình sau, phương trình nào phương trình bậc hai một ẩn? Chỉ rõ các hệ số a, b, c của mỗi phương trình bậc hai một ẩn đó.

a) $-7x^2 = 0$. b) $-12x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$.
c) $x^3 + 5x - 6 = 0$. d) $x^2 - (m + 2)x + 7 = 0$ (m là số đã cho).

6.2.2 Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

A. Sử dụng biệt thức Δ

🔍 Phương pháp giải

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 6.20. Giải các phương trình sau

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$. b) $x^2 + x - 2 = 0$. c) $x^2 + 2x = 3$. d) $2x^2 + 4x - 7 = 0$.
e) $4x^2 + 8x - 5 = 0$. f) $2x^2 - 8x + 5 = 0$. g) $4x^2 - 16x - 9 = 0$. h) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.
i) $x^2 - 4x = -5x + 2$. j) $x^2 - 4x = 5$. k) $x^2 + 2x - 8 = 0$. l) $2x^2 + 4x - 5 = 0$.

Bài tập 6.21. Giải các phương trình sau

a) $x^2 - 2x = 0$. b) $\sqrt{2}x^2 - 3x = 0$. c) $\frac{1}{2}x - x^2 = 0$. d) $x^2 - \sqrt{3}x = 0$.
e) $\sqrt{3}x^2 = 2x$. f) $x^2 = \sqrt{2}x$. g) $x^2 - 3x = 0$. h) $x^2 + 2x = 0$.

Bài tập 6.22. Giải các phương trình sau

- a) $-3x^2 + 12 = 0$. b) $x^2 - 5 = 0$. c) $25 - 4x^2 = 0$. d) $4x^2 - 9 = 0$.
 e) $x^2 - 2 = 0$. f) $(x + 1)^2 = 4$. g) $(x - 2)^2 = 9$. h) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 6.23. Giải các phương trình sau

- a) $x^2 - x = 2$. b) $2x^2 - 2x - 5 = 0$. c) $x^2 - x + 1 = 0$. d) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$.
 e) $x^2 - 3x - 4 = 0$. f) $2x^2 - 6x + 3 = 0$. g) $x^2 - 3x + 3 = 0$. h) $x(x - 3) = \sqrt{2}x^2 - 2x$.
 i) $(x - 1)^2 - 3x + 4 = 0$. j) $x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$. k) $x^2 - 2\sqrt{2}x = 2$. l) $x^2 - \sqrt{8}x + 5 = 0$.
 m) $2x^2 - 2x + 0,5 = 0$. n) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$. o) $x^2 - \sqrt{3}x = -1$. p) $\sqrt{2}(x^2 - 2) = 4x$.

Bài tập 6.24. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm bằng $x = 1, x = -1$

- a) $x^2 + m^2 = 4x$. b) $x^2 - (m + 3)x + m^2 = 0$. c) $x^2 - m^2 + 4 = 0$.
 d) $m^2 + 4mx - 5 = 0$. e) $4x^2 - 25m^2 = 0$. f) $x^2 - 3mx + 3m^2 = 0$.

Bài tập 6.25. Tìm điều kiện của tham số m để các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

- a) $x^2 + x + 2m = 0$. b) $2x^2 - x + 1 + m = 0$. c) $-3x^2 + 4x + 2m = 0$.
 d) $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 1 = 0$. e) $x^2 - 2(m + 4)x + m^2 - 8 = 0$. f) $mx^2 - 4x - 1 = 0$.

Bài tập 6.26. Tìm điều kiện của m để phương trình sau có nghiệm kép

- a) $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 3 = 0$. b) $-x^2 - (2m + 1)x - m^2 + 3 = 0$.
 c) $\frac{1}{4}x^2 - (m + 1)x + m^2 + 3 = 0$. d) $x^2 - 2(m - 3)x + m(m - 1) = 0$.

Định lý 6.2.1. Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có a và c trái dấu, tức là $ac < 0$, thì $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 6.27. Không tính Δ , hãy giải thích vì sao các phương trình sau đây có nghiệm

- a) $3x^2 + 2x - 5 = 0$. b) $-x^2 + 3x + \sqrt{2} - 1 = 0$. c) $5x^2 + 2x - m^2 - 1 = \sqrt{2}x + 2$.

Bài tập 6.28. Không giải phương trình, hãy nhận biết số nghiệm của phương trình $x^2 + 3572x - 3573 = 0$.

B. Sử dụng biệt thức Δ'

Trong phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), khi $b = 2b'$ thì $\Delta = b^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$.

Đặt $\Delta' = b'^2 - ac$, ta được $\Delta = 4\Delta'$. Khi đó ta có công thức nghiệm thu gọn như sau:

🔍 Phương pháp giải

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$;
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 6.29. Xác định các hệ số a, b, c , tính biệt thức Δ' , từ đó áp dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

- | | | |
|---|--------------------------------|-----------------------------------|
| a) $3x^2 - 4x + 1 = 0.$ | b) $-4x^2 + 4x + 1 = 0.$ | c) $3x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0.$ |
| d) $x^2 - 6x + 5 = 0.$ | e) $x^2 - 2 = 4x.$ | f) $-3x^2 - 4x + 2 = 0.$ |
| g) $3 - x^2 = 2\sqrt{3}x - 2x^2.$ | h) $2(x - 2)^2 = -2x + 5.$ | i) $4x - x^2 = -5.$ |
| j) $x^2 - \sqrt{8}x + 2 = 0.$ | k) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 4 = 0.$ | l) $x^2 - \sqrt{20}x + 5 = 0.$ |
| m) $\sqrt{8}(x - \sqrt{8}) = (x - \sqrt{2})^2.$ | n) $x^2 = \sqrt{8}x - 3.$ | o) $x^2 - 2\sqrt{3}x = 2x^2 - 1.$ |

Bài tập 6.30. Trả lời câu hỏi: Sau khi được ném theo chiều từ dưới lên, độ cao h (m) của quả bóng theo thời gian t (giây) được xác định bởi công thức $h = 2 + 9t - 5t^2$. Thời gian từ lúc ném cho đến khi bóng chạm đất là bao lâu?



C. Giao điểm của đường thẳng và parabol

Bài tập 6.31. Tìm giao điểm của parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng d có phương trình $y = x + 1$.

Bài tập 6.32. Tìm giao điểm của parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng d có phương trình $y = 3x + 1$.

6.2.3 Giải toán bằng cách lập phương trình bậc hai

🔍 Phương pháp giải

Giải toán bằng cách lập phương trình bậc hai

Bước 1. Lập phương trình

- Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình nói trên.

Bước 3. Kiểm tra các nghiệm tìm được ở Bước 2 có thỏa mãn điều kiện của ẩn hay không, rồi trả lời bài toán.

❖ BÀI TẬP ❖

A. Bài toán về quan hệ các số

Bài tập 6.33. Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 10. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12. Tìm số đã cho.

Bài tập 6.34. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

Bài tập 6.35. Cho một số có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 9. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 58. Tìm số đã cho.

B. Toán có nội dung hình học

Bài tập 6.36. Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm 3 dm và cạnh đáy giảm đi 3 dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm^2 . Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

Bài tập 6.37. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m^2 . Nếu tăng chiều dài thêm 10 m và giảm chiều rộng 6 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng mảnh vườn.

Bài tập 6.38. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta để một lối đi xung quanh vườn rộng 2 m. Phần đất còn lại dùng để trồng rau có diện tích 4256 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn đó.

Bài tập 6.39. Một sân khấu ngoài trời có dạng hình chữ nhật, chiều dài hơn chiều rộng 2 m, độ dài đường chéo là 10 m. Tính diện tích của sân khấu đó.

C. Bài toán về năng suất lao động

 Lưu ý.

Khối lượng công việc = Năng suất $\times$ Thời gian hoàn thành.

Bài tập 6.40. Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Bài tập 6.41. Một người dự định sản xuất 120 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do tăng năng suất 4 sản phẩm mỗi giờ, nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 1 giờ. Hãy tính năng suất dự kiến của người đó.

Bài tập 6.42. Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hàng hết bao nhiêu ngày?

D. Bài toán về công việc làm chung, làm riêng

 Lưu ý.

Ta chú ý rằng:

- Thường coi khối lượng công việc là một đơn vị.
- $\text{Năng suất 1} + \text{Năng suất 2} = \text{Tổng năng suất}.$

Bài tập 6.43. Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc?

Bài tập 6.44. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước và chảy đầy bể trong 4 giờ 48 phút. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất có thể chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 4 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi sẽ chảy đầy bể trong bao lâu?

Bài tập 6.45. Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày thì xong công việc. Nếu đội thứ nhất làm 6 ngày, sau đó đội thứ hai làm tiếp 8 ngày thì được $\frac{2}{5}$ công việc. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì mất bao nhiêu ngày?

E. Bài toán chuyển động (vật lý)

Bài tập 6.46. Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ thành phố A đến thành phố B cách nhau 120 km. Tốc độ của xe thứ nhất nhanh hơn tốc độ xe thứ hai là 10 km/h nên đã đến sớm hơn xe thứ hai 24 phút. Tính tốc độ của mỗi xe.

Bài tập 6.47. Quãng đường đi từ thành phố A đến thành phố B dài 150 km. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc đi từ A đến B. Biết tốc độ ô tô thứ nhất lớn hơn tốc độ ô tô thứ hai là 10 km/h và ô tô thứ nhất đến trước ô tô thứ hai là 30 phút. Tính tốc độ của mỗi ô tô.

Bài tập 6.48. Một công ty vận tải điều một số xe tải để chở 90 tấn hàng. Khi đến kho hàng thì có 2 xe bị hỏng nên để chở hết số hàng thì mỗi xe còn lại phải chở thêm 0,5 tấn so với dự định ban đầu. Hỏi số xe được điều đến chở hàng là bao nhiêu? Biết rằng khối lượng hàng chở ở mỗi xe là như nhau.

Bài tập 6.49. Hai ô tô cùng khởi hành cùng một lúc từ hai đỉnh A và B cách nhau 160 km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của mỗi ô tô biết rằng nếu ô tô đi từ A tăng vận tốc thêm 10 km/h sẽ bằng hai lần vận tốc ô tô đi từ B.

Bài tập 6.50. Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120 km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nên ô tô đến sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

F. Bài toán chuyển động có vận tốc cản

 Lưu ý.

- $\text{Vận tốc xuôi} = \text{Vận tốc thực} + \text{Vận tốc cản}.$
- $\text{Vận tốc ngược} = \text{Vận tốc thực} - \text{Vận tốc cản}.$

Bài tập 6.51. Một ca nô xuôi từ A đến B với vận tốc xuôi dòng là 30 km/h, sau đó lại ngược từ B về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược là 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của ca nô khi xuôi và ngược dòng là không đổi.

Bài tập 6.52. Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120 km, cả đi và về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Bài tập 6.53. Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Bài tập 6.54. Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sông có vận tốc dòng nước là 2 km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

G. Bài toán tích hợp hóa học

Bài tập 6.55. Nếu đổ thêm 250 g nước vào một dung dịch chứa 50 g muối thì nồng độ dung dịch sẽ giảm 10 %. Tính nồng độ dung dịch lúc đầu.

6.3 Định lý Vi-ét

6.3.1 Định lí

Định lý 6.3.1. Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì tổng và tích của hai nghiệm đó là

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 6.56. Đối với mỗi phương trình sau, ký hiệu x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình (nếu có). Không giải phương trình hãy điền vào chỗ trống

- a) $x^2 + 4x - 5 = 0, x_1 + x_2 = \dots, x_1x_2 = \dots$ b) $4x^2 + 4x + 1 = 0, x_1 + x_2 = \dots, x_1x_2 = \dots$
 c) $3x^2 - x - 3 = 0, x_1 + x_2 = \dots, x_1x_2 = \dots$ d) $x^2 - 7x + 5 = 0, x_1 + x_2 = \dots, x_1x_2 = \dots$

Bài tập 6.57. Không giải phương trình sau, tính tổng và tích các nghiệm phương trình sau

- a) $x^2 - 3x - 5 = 0.$ b) $5x^2 + 7x - 12 = 0.$ c) $4x^2 - 7x - 2 = 0.$ d) $\sqrt{3}x^2 - 21x - 12 = 0.$
 e) $x^2 - 2x - 5 = 0.$ f) $-5x^2 + 3x + 7 = 0.$ g) $5x^2 - 7x - 3 = 0.$ h) $\sqrt{2}x^2 - 10x - 2 = 0.$

Bài tập 6.58. Cho phương trình $x^2 - 12x - 13 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu thức:

- a) $x_1x_2 - 2x_1x_2.$ b) $3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2.$ c) $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}.$ d) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$

Bài tập 6.59. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

- a) $A = x_1^2 + x_2^2.$ b) $B = x_1^2x_2 + x_1x_2^2.$ c) $C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$ d) $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}.$

Định lý 6.3.2.

- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$.
- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Bài tập 6.60. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình:

- a) $15x^2 + 7x - 22 = 0.$ b) $18x^2 - 7x - 25 = 0.$ c) $24x^2 - 19x - 5 = 0.$
 d) $2,5x^2 + 7,2x + 4,7 = 0$ e) $\frac{3}{2}x^2 + 5x + \frac{7}{2} = 0.$ f) $2x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0.$

Bài tập 6.61. Tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của mỗi phương trình:

- a) $x^2 - 2\sqrt{7}x + 7 = 0.$ b) $15x^2 - 2x - 7 = 0.$ c) $35x^2 - 12x + 2 = 0.$

Bài tập 6.62. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình:

- a) $-315x^2 - 27x + 342 = 0$ b) $2022x^2 + 2023x + 1 = 0.$

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 6.63. Nếu phương trình sau $x^2 - 2x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thì hãy tính giá trị các đại lượng sau mà không được giải phương trình:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $x_1^2 + x_2^2$. | b) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$. | c) $\frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1}$. |
| d) $\frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2}$. | e) $\frac{x_1 - 1}{x_2} + \frac{x_2 - 1}{x_1}$. | f) $\frac{x_1^2 + 2}{x_1} + \frac{x_2^2 + 2}{x_2}$. |
| g) $\frac{x_2}{x_2^2 - 3} + \frac{x_1}{x_1^2 - 3}$. | h) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$. | i) $x_1^3 + x_2^3$. |
| j) $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$. | k) $\frac{x_1^2 + 4}{x_2} + \frac{x_2^2 + 4}{x_1}$. | l) $\frac{x_1 - 1}{x_2^2} + \frac{x_2 - 1}{x_1^2}$. |
| m) $\frac{x_1^2}{x_1 \cdot x_2 - 1} + \frac{x_2^2}{x_1^2 x_2 - 1}$. | n) $\frac{x_1}{3x_1 \cdot x_2^2 - 1} + \frac{x_2}{3x_1^2 x_2 - 1}$. | o) $(x_1 - x_2)^2$. |
| p) $x_1 - x_2$. | q) $x_1^2 - x_2^2$. | r) $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$. |
| s) $\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}$. | t) $\frac{x_1}{x_2 - 1} - \frac{x_2}{x_1 - 1}$. | u) $\frac{3x_1 - 7}{x_2} - \frac{3x_2 - 7}{x_1}$. |
| v) $x_1^3 - x_2^3$. | w) $\frac{x_1^2}{x_2} - \frac{x_2^2}{x_1}$. | x) $\frac{x_1 + 1}{x_2^2} - \frac{x_2 + 1}{x_1^2}$. |

6.3.2 Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Định lý 6.3.3. Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 6.64. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau

- | | | |
|--|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $u + v = 5$ và $uv = -14$. | b) $u + v = 5$ và $uv = -24$. | c) $u + v = -6$ và $uv = -16$. |
| d) $u + v = 1$ và $uv = \frac{1}{4}$. | e) $u + v = 29, uv = 154$. | f) $u + v = -6, uv = -135$. |

Bài tập 6.65. Tìm hai số (nếu có) trong mỗi trường hợp sau:

- Tổng của chúng bằng 23 và tích của chúng bằng 120.
- Tổng của chúng bằng 10 và tích của chúng bằng 30.

Bài tập 6.66.

- Tìm hai số, biết tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 44.
- Có tồn tại hai số có tổng bằng 7 và tích bằng 13 không?

Bài tập 6.67. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\sqrt{2} - 1$ và $\sqrt{2} + 1$.

Bài tập 6.68. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là 5 và -7 .

Bài tập 6.69. Cho phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ và $x_1^2 + x_2^2$.

Bài tập 6.70. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 116 m, diện tích 805m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.

6.4 Ôn tập chương

TRẮC NGHIỆM

Câu 6.1. Kết luận nào sau đây đúng khi nói về đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)?

- A. Với $a > 0$, đồ thị nằm bên trên trục hoành và O là điểm cao nhất của đồ thị.
- B. Với $a < 0$, đồ thị nằm phía dưới trục hoành và O là điểm thấp nhất của đồ thị.
- C. Với $a > 0$, đồ thị nằm phía dưới trục hoành và O là điểm thấp nhất của đồ thị.
- D. Với $a < 0$, đồ thị nằm phía dưới trục hoành và O là điểm cao nhất của đồ thị.

Câu 6.2. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$?

- A. $(4; 4)$.
- B. $(-4; 8)$.
- C. $(-4; -8)$.
- D. $(4; -4)$.

Câu 6.3. Cho hàm số $y = 2x^2$. Khi $y = 2$ thì

- A. $x = 1$.
- B. $x = 2$ hoặc $x = -2$.
- C. $x = 1$ hoặc $x = -1$.
- D. $x = 2$.

Câu 6.4. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $A(2; -2)$. Giá trị của a bằng

- A. 2.
- B. -2.
- C. $\frac{1}{2}$.
- D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 6.5. Nghiệm của phương trình $x^2 - 14x + 13 = 0$ là

- A. $x_1 = -1; x_2 = 13$.
- B. $x_1 = -1; x_2 = -13$.
- C. $x_1 = 1; x_2 = -13$.
- D. $x_1 = 1; x_2 = 13$.

Câu 6.6. Phương trình nào sau đây **không** là phương trình bậc hai một ẩn?

- A. $x^2 - \sqrt{7}x + 7 = 0$.
- B. $3x^2 + 5x - 2 = 0$.
- C. $2x^2 - 2365 = 0$.
- D. $-7x + 25 = 0$.

Câu 6.7. Gọi S và P là tổng và tích hai nghiệm của phương trình $x^2 + 5x - 10 = 0$. Khi đó giá trị của S và P là

- A. $S = 5; P = 10$.
- B. $S = -5; P = 10$.
- C. $S = -5; P = -10$.
- D. $S = 5; P = -10$.

Câu 6.8. Cho phương trình $x^2 + 7x = 15$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Khi đó giá trị của biểu thức $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ là

- A. 79.
- B. 94.
- C. -94.
- D. -79.

BÀI TẬP

Bài tập 6.71. Cho hai hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -x^2$. Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy .

Bài tập 6.72. Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

- a) Tìm a để đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2; 2)$.
- b) Vẽ đồ thị (P) của hàm số với a vừa tìm được.
- c) Tìm các điểm thuộc đồ thị (P) có tung độ $y = 8$.

Bài tập 6.73. Giải các phương trình

- a) $x^2 - 12x = 0$.
- b) $13x^2 + 25x - 38 = 0$.
- c) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$.
- d) $x(x + 3) = 27 - (11 - 3x)$.

Bài tập 6.74. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau và kiểm tra kết quả bằng máy tính cầm tay.

- a) $14x^2 - 13x - 27 = 0$.
- b) $5,4x^2 + 8x + 2,6 = 0$.
- c) $\frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3} = 0$.
- d) $3x^2 - (3 + \sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0$.

Bài tập 6.75. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau.

a) $u + v = -2; uv = -35$.

b) $u + v = 8; uv = -105$.

Bài tập 6.76. Cho phương trình $2x^2 - 7x + 6 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1) - x_1^2x_2^2$.

Bài tập 6.77. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km. Khi đi từ B về đến A, nhờ xuôi gió nên tốc độ lúc về nhanh hơn tốc độ lúc đi là 4 km/h, vì thế thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút. Tính tốc độ của xe đạp khi đi từ A đến B.

Bài tập 6.78. Một đội thợ mỏ phải khai thác 216 tấn than trong một thời gian nhất định. Ba ngày đầu, mỗi ngày khai thác theo đúng định mức. Sau đó, mỗi ngày họ đề khai thác vượt mức 8 tấn. Do đó đã khai thác được 232 tấn và xong trước thời hạn 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày đội thợ phải khai thác bao nhiêu tấn than?

Bài tập 6.79. Miếng kim loại thứ nhất nặng 585 g, miếng kim loại thứ hai nặng 420 g. Thể tích của miếng thứ nhất nhỏ hơn thể tích miếng thứ hai là 10 cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng thứ nhất lớn hơn khối lượng riêng của miếng thứ hai là 9 g/cm^3 . Biết công thức tính khối lượng riêng của một vật là $D = \frac{m}{V}$, trong đó $D \text{ (g/cm}^3\text{)}$ là khối lượng riêng, $m \text{ (g)}$ là khối lượng của vật, $V \text{ (cm}^3\text{)}$ là thể tích của vật. Tìm khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại.

Bài tập 6.80. Hai dung dịch muối có tổng khối lượng bằng 220 kg. Lượng muối trong dung dịch I là 5 kg, lượng muối trong dung dịch II là 4,8 kg. Biết nồng độ muối trong dung dịch I nhiều hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 1%. Tính khối lượng mỗi dung dịch nói trên.

Chương 7

Thống kê

7.1 Bảng tần số. Biểu đồ tần số

7.1.1 Tần số và bảng tần số

Định nghĩa 7.1.1. *Mẫu dữ liệu* là tập hợp các dữ liệu thu thập được theo tiêu chí cho trước. Số lần xuất hiện của một giá trị trong mẫu dữ liệu được gọi là tần số của giá trị đó.

Nhận xét 7.1. Khi trong mẫu dữ liệu có nhiều giá trị có tần số xuất hiện lớn hơn 1, người ta thường biểu diễn dữ liệu bởi bảng tần số.

Định nghĩa 7.1.2.

- *Bảng tần số* biểu diễn tần số của mỗi giá trị trong mẫu dữ liệu.
- Bảng gồm hai dòng, dòng trên ghi các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu, dòng dưới ghi các tần số tương ứng với mỗi giá trị đó.

Và đây là bảng tần số, mô tả lại số bàn thắng ghi được của một đội bóng trong một mùa giải (26 trận)

Số bàn thắng	0	1	2	3	4	5
Tần số	7	4	8	4	2	1

Người ta, có thể chuyển bảng tần số dạng “ngang” như trên thành bảng tần số dạng “dọc” như sau:

Số bàn thắng	Tần số
0	7
1	4
2	8
3	4
4	2
5	1

Nhận xét 7.2. Bảng tần số giúp chúng ta nhanh chóng quan sát các đặc điểm của mẫu dữ liệu như số lần xuất hiện của mỗi giá trị, giá trị xuất hiện nhiều lần nhất, giá trị xuất hiện ít lần nhất, Bảng tần số cũng rất tiện lợi cho việc tính toán với mẫu dữ liệu.

 **Lưu ý.**

- *Khi dữ liệu là các số thì mẫu dữ liệu còn được gọi là mẫu số liệu.*
- *Số các dữ liệu trong mẫu được gọi là cỡ mẫu, thường được kí hiệu là N . Cỡ mẫu N cũng bằng tổng các tần số (của từng giá trị khác nhau). Chẳng hạn, trong bảng trên, cỡ mẫu $N = 26$.*

↻ **BÀI TẬP** ↻

Bài tập 7.1. Một đội bóng đã thi đấu 26 trận trong một mùa giải. Số bàn thắng mà đội đó ghi được trong từng trận đấu được thống kê lại như sau:

2	3	2	3	3	1	0	3	1	0	1	1	2
2	4	0	0	2	2	0	5	4	2	0	2	0

Mẫu dữ liệu trên có bao nhiêu giá trị khác nhau? Xác định tần số của mỗi giá trị và lập bảng tần số của mẫu dữ liệu.

Bài tập 7.2. Người ta đếm số lượng người ngồi trên mỗi chiếc xe ô tô 5 chỗ đi qua một trạm thu phí trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 10 giờ sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

5	4	5	2	3	2	5	2	1	2	1	1	2	5	1
1	1	3	2	1	1	4	1	1	4	1	2	1	4	1
2	3	2	3	2	3	2	3	3	1	2	1	3	2	2
1	4	3	2	3	1	3	5	1	2	3	5	1	2	1

a) Lập bảng tần số cho mẫu số liệu trên.

b) Hãy cho biết số người ngồi trên xe phổ biến nhất là bao nhiêu?

Bài tập 7.3. Số cuộc gọi đến một tổng đài hỗ trợ khách hàng mỗi ngày trong tháng 4/2022 được ghi lại như sau:

4	2	6	3	6	3	2	5	4	2	5	4	3	3	3
3	5	4	4	3	4	6	5	3	6	3	5	3	5	5

a) Xác định cỡ mẫu.

b) Lập bảng tần số cho mẫu số liệu trên.

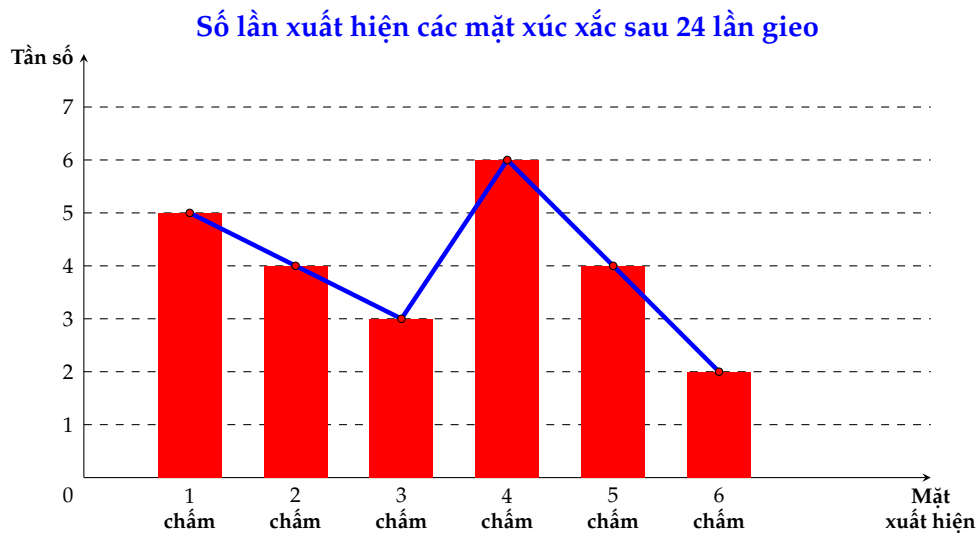
c) Có bao nhiêu giá trị có tần số lớn hơn 4?

7.1.2 BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

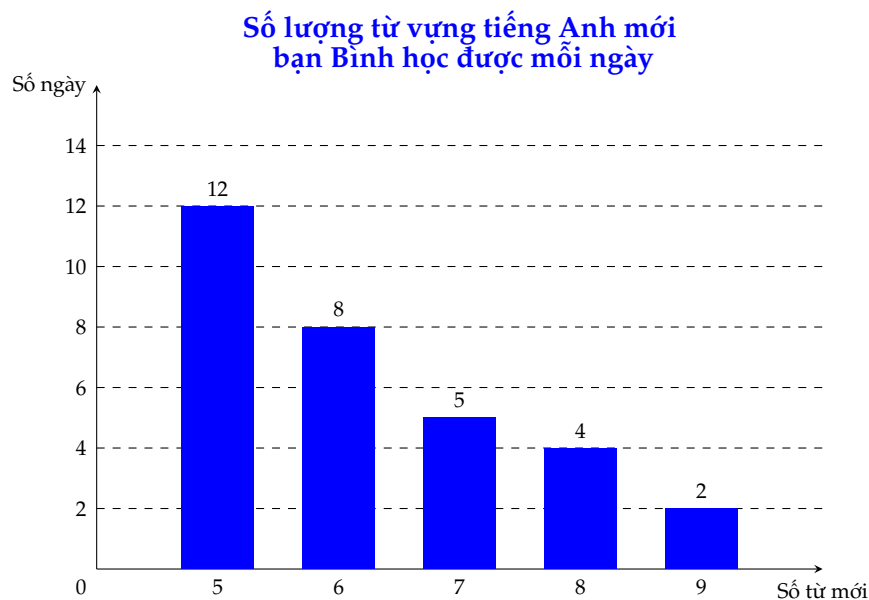
Định nghĩa 7.1.3.

- Biểu đồ biểu diễn tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu gọi là biểu đồ tần số. Biểu đồ tần số thường có dạng cột hoặc dạng đoạn thẳng.
- Trong biểu đồ tần số dạng cột, mỗi cột tương ứng với một giá trị, chiều cao của cột tương ứng tần số của giá trị.
- Trong biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng, đường gấp khúc đi từ trái qua phải nối các điểm có hoành độ là giá trị số liệu và tung độ là tần số của giá trị đó.

Người ta có thể kết hợp biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng trên cùng một biểu đồ như sau:



Bài tập 7.4. Vào đợt nghỉ hè vừa rồi, mỗi ngày bạn Bình đều học thêm một số từ vựng tiếng Anh mới. Số lượng từ vựng mới bạn Bình học mỗi ngày được biểu diễn ở biểu đồ cột như hình bên.



- Số lượng từ vựng mới mà bạn Bình học mỗi ngày nhận những giá trị nào? Tìm tần số của mỗi giá trị đó?
- Bạn Bình đã học từ vựng tiếng Anh mới trong bao nhiêu ngày?
- Có bao nhiêu ngày bạn Bình học nhiều hơn 7 từ vựng mới?

Bài tập 7.5. Một khu vui chơi dành cho trẻ em thống kê lại độ tuổi của một số trẻ em đến chơi trong một ngày ở bảng tần số như sau:

Tuổi	3	4	5	6	7	8
Tần số	4	5	4	5	11	7

- Hãy vẽ các biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu ở bảng tần số.
- Theo biểu đồ ở câu a, trong số các trẻ em đến khu vui chơi, trẻ em ở độ tuổi nào là nhiều nhất?

Bài tập 7.6. Bác An thống kê lại số cuộc gọi điện thoại mà mình thực hiện mỗi ngày trong tháng 7 ở bảng tần số như sau:

Số cuộc gọi	5	6	7	8	9
Tần số (số ngày)	2	5	9	11	4

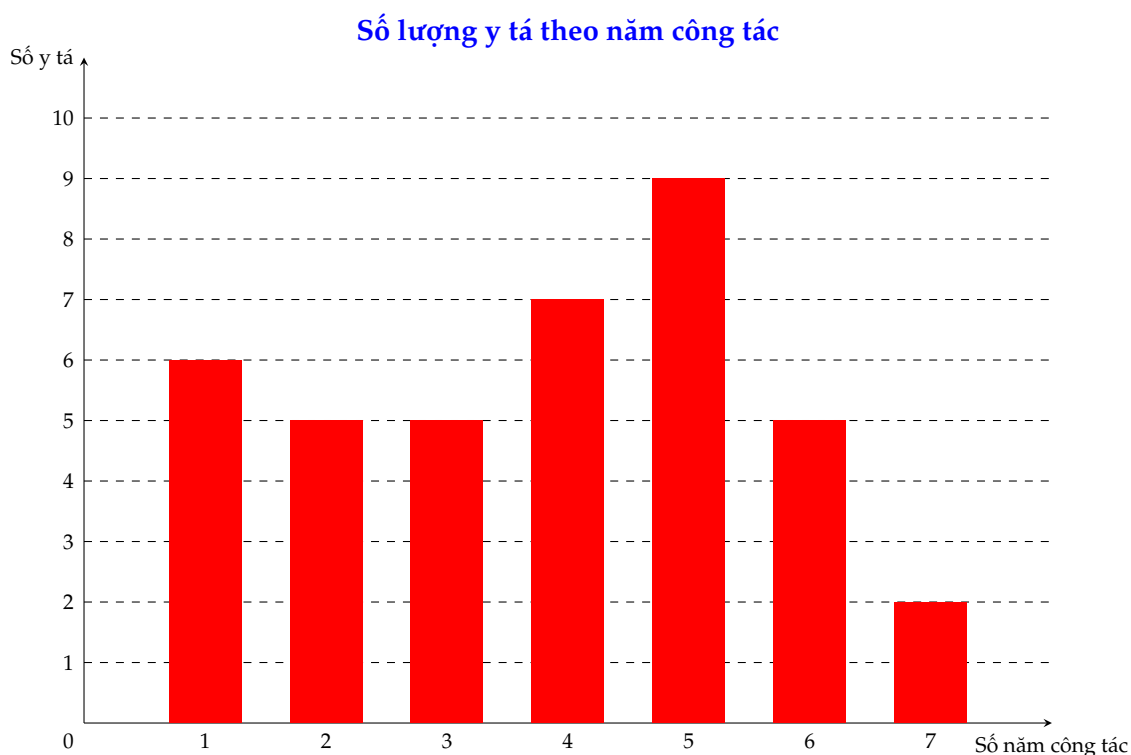
Hãy vẽ biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn mẫu số liệu trên.

Bài tập 7.7. Một địa phương cho trẻ em từ 12 tháng tuổi trở lên tiêm vắc xin viêm não Nhật Bản. Bảng sau thống kê số mũi vắc xin viêm não Nhật Bản mà 50 trẻ em từ 12 đến 24 tháng tuổi tại địa phương này đã tiêm:

Số mũi tiêm	0	1	2	3
Số trẻ	4	?	26	8

- a) Hoàn thành bảng tần số trên.
- b) Trẻ em từ 12 đến 24 tháng tuổi cần hoàn thành 3 mũi tiêm cơ bản của vắc xin viêm não Nhật Bản. Hỏi có bao nhiêu trẻ em đã được thống kê ở trên cần phản hoàn thành lộ trình tiêm vắc xin này?
- c) Hãy vẽ biểu đồ cột biểu diễn mẫu số liệu trên

Bài tập 7.8. Biểu đồ bên thống kê thời gian công tác (theo năm) của các y tá ở một phòng khám.



- a) Các y tá của phòng khám có thời gian công tác nhận những giá trị nào? Tìm tần số của mỗi giá trị đó.
- b) Phòng khám có tổng số bao nhiêu y tá?
- c) Có bao nhiêu y tá đã công tác ở phòng khám ít nhất 3 năm?

Bài tập 7.9. Kết quả của 20 học sinh trường A tham gia vòng chung kết cuộc thi “Tìm hiểu Lịch sử Việt Nam” được cho ở bảng sau:

Số báo danh	Điểm thi	Xếp hạng	Số báo danh	Điểm thi	Xếp hạng
01	9	Nhì	11	7	Ba
02	10	Nhất	12	8	Nhì
03	7	Ba	13	7	Ba
04	6	Ba	14	4	Không đạt giải
05	5	Không đạt giải	15	10	Nhất
06	6	Ba	16	8	Nhì
07	8	Nhì	17	8	Nhì
08	6	Ba	18	7	Ba
09	5	Không đạt giải	19	5	Không đạt giải
10	7	Ba	20	10	Nhất

- a) Hãy lập bảng tần số theo điểm số của học sinh và vẽ biểu đồ đoạn thẳng tương ứng.
- b) Hãy lập bảng tần số theo xếp hạng của học sinh và vẽ biểu đồ cột tương ứng.

7.2 Bảng tần số tương đối và biểu đồ tần số tương đối

7.2.1 Bảng tần số tương đối

Định nghĩa 7.2.1. Tần số tương đối của một giá trị x trong mẫu dữ liệu được tính theo công thức

$$f = \frac{m}{N} \cdot 100\%$$

trong đó m là tần số của x và N là cỡ mẫu.

Lưu ý.

- Bảng tần số tương đối biểu diễn tần số tương đối của mỗi giá trị trong mẫu dữ liệu.
- Bảng gồm hai dòng (hoặc hai cột), dòng (hoặc cột) thứ nhất ghi các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu, dòng (hoặc cột) thứ hai ghi các tần số tương đối tương ứng với mỗi giá trị đó.

Và đây là bảng tần số tương đối

Số lỗi chính tả (giá trị của x)	0	1	2	3	4	5
Tần số tương đối	10,0%	25,0%	17,5%	12,5%	20,0%	15,0%

BÀI TẬP

Bài tập 7.10. Sau bài thi môn Ngữ văn, cô giáo ghi lại số lỗi chính tả mà một số học sinh mắc phải vào bảng thống kê sau:

2	5	2	2	1	3	4	0	5	2	5	1	2	1	3	5	1	0	4	1
4	2	1	4	3	3	2	0	4	5	4	5	1	4	1	1	0	3	1	4

- Mẫu số liệu trên gồm những giá trị khác nhau nào?
- Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối của số lỗi chính tả mà học sinh mắc phải.
- Trong số học sinh được khảo sát, cô giáo muốn chọn ra 35% số học sinh mắc nhiều lỗi nhất. Hỏi cô giáo cần chọn các học sinh mắc bao nhiêu lỗi?

Nhận xét 7.3.

- Bảng tần số tương đối giúp chúng ta nhanh chóng quan sát được đặc điểm của mẫu dữ liệu như tần số tương đối của mỗi giá trị, giá trị xuất hiện thường xuyên nhất, giá trị xuất hiện ít thường xuyên nhất,...
- Bảng tần số tương đối cũng giúp chúng ta so sánh mức độ xuất hiện thường xuyên của một giá trị trong nhiều mẫu số liệu khác nhau.

Lưu ý.

- Tổng tần số tương đối của tất cả các giá trị luôn bằng 100%.
- Có thể ghép bảng tần số và bảng tần số tương đối thành bảng tần số - tần số tương đối như sau:

Số lỗi chính tả	0	1	2	3	4	5
Tần số	4	10	7	5	8	6
Tần số tương đối	10,0%	25,0%	17,5%	12,5%	20,0%	15,0%

Bài tập 7.11. Bạn Linh gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất một số lần và ghi lại tần số tương đối số lần xuất hiện của mỗi mặt trong bảng thống kê sau:

Mặt	1 chấm	2 chấm	3 chấm	4 chấm	5 chấm	6 chấm
Tần số tương đối	15%	18%	12%	21%	16%	13%

Số liệu trong bảng tần số tương đối trên có hợp lí không? Tại sao?

Bài tập 7.12. Trong bảng số liệu sau có một số liệu không chính xác. Hãy tìm số liệu đó và sửa lại cho đúng.

Tần số	4	9	7	5
Tần số tương đối	16%	46%	28%	20%

Bài tập 7.13.

- a) Tại một trại hè thanh thiếu niên quốc tế, người ta tìm hiểu xem mỗi đại biểu tham dự có thể sử dụng được bao nhiêu ngoại ngữ. Kết quả được biểu diễn như bảng sau:

Số ngoại ngữ	1	2	3	4	≥ 5
Số đại biểu	84	64	24	16	12

Hãy lập bảng tần số tương đối cho bài toán trên?

- b) Tại trại hè thanh thiếu niên quốc tế tổ chức một năm trước đó, có 54 trong tổng số 220 đại biểu tham dự có thể sử dụng được từ 3 ngoại ngữ trở lên. Có ý kiến cho rằng: “Tỉ lệ đại biểu sử dụng được từ 3 ngoại ngữ trở lên có tăng giữa hai năm đó”. Ý kiến đó đúng hay sai? Giải thích.

7.2.2 Biểu đồ tần số tương đối

 Lưu ý.

- Biểu đồ biểu diễn tần số tương đối của các giá trị trong mẫu dữ liệu gọi là biểu đồ tần số tương đối.**
- Biểu đồ tần số tương đối thường có dạng hình quạt tròn hoặc dạng cột.**
 - Trong biểu đồ hình quạt tròn, hình quạt tròn biểu thị tần số tương đối $a\%$ có số đo cung tương ứng là $a\% \cdot 360^\circ = 3,6 \cdot a^\circ$.
 - Trong biểu đồ cột, độ cao của mỗi cột tương ứng với tần số tương đối của từng giá trị.

Bài tập 7.14. Bạn Minh thống kê lại số sách mà mỗi bạn trong lớp đã đọc sau tuần lễ đọc sách và ghi lại trong bảng dưới đây:

Số sách	0	1	2	3	4
Số học sinh	2	8	16	4	2

- a) Lập bảng tần số tương đối biểu diễn số liệu trên.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn biểu diễn số liệu trên.

Bài tập 7.15. Đầu năm 2022, một công ty vận tải khảo sát ngẫu nhiên một số khách hàng về mức độ hài lòng khi sử dụng dịch vụ của công ty. Trong năm 2022, công ty đã tiến hành một số cải tiến và đến cuối năm 2022, công ty lại tiến hành khảo sát. Dữ liệu về số lượng phản hồi theo các mức độ của khách hàng trong hai đợt khảo sát được thống kê lại ở bảng sau:

Đợt khảo sát \ Mức độ hài lòng	Không hài lòng	Hài lòng	Rất hài lòng
Đầu năm 2022	24	60	16
Cuối năm 2022	18	84	48

- a) Hãy lựa chọn và vẽ biểu đồ phù hợp để so sánh mức độ hài lòng của khách hàng trong hai đợt khảo sát.

- b) Có người cho rằng các cải tiến của công ty không hiệu quả do tỉ lệ khách hàng đánh giá ở mức "hài lòng" giảm. Theo em nhận định đó có chính xác không? Tại sao?

Bài tập 7.16. Bạn Mai phỏng vấn một số bạn học sinh cùng trường về màu mực mỗi bạn yêu thích nhất. Kết quả được cho ở bảng sau

Màu mực	Xanh đen	Đen	Tím đậm	Tím hồng
Tần số	18	6	16	10

Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn để biểu diễn mẫu số liệu điều tra của bạn Mai.

Bài tập 7.17. Một cửa hàng thống kê lại số điện thoại di động bán được trong tháng 04/2022 và tháng 04/2023 ở bảng sau

Thương hiệu	A	B	C	D	Các thương hiệu khác
Tháng 04/2022	54	48	32	96	20
Tháng 04/2023	60	56	60	120	24

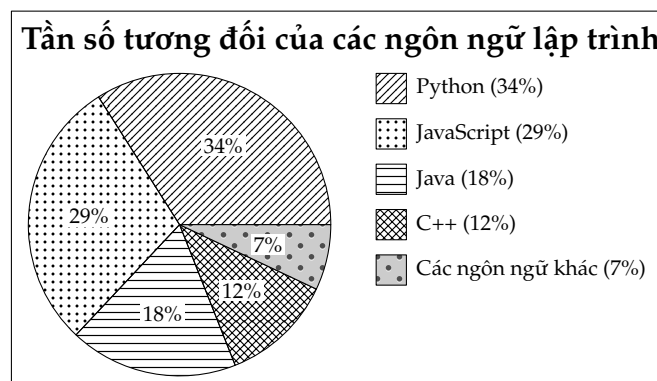
- a) Hãy lựa chọn và vẽ biểu đồ phù hợp để thấy được xu thế thay đổi lựa chọn thương hiệu điện thoại giữa hai đợt thống kê.
- b) Hãy cho biết trong các thương hiệu điện thoại A, B, C, D thương hiệu nào tăng trưởng cao nhất, thương hiệu nào tăng trưởng thấp nhất.

Bài tập 7.18. Bảng sau thống kê số lượt nhấp chuột vào quảng cáo ở một trang web vào tháng 12/2022.

Số lượt nhấp chuột	0	1	2	3	4	5
Số người dùng	25	56	12	9	5	3

- a) Lập bảng tần số tương đối cho mẫu số liệu trên.
- b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn biểu diễn mẫu số liệu trên.

Bài tập 7.19. Biểu đồ hình quạt tròn dưới đây biểu diễn tần số tương đối của các ngôn ngữ lập trình được sử dụng khi viết 200 phần mềm của một công ty công nghệ. Biết rằng, mỗi phần mềm được viết bằng đúng một ngôn ngữ lập trình.



- a) Ngôn ngữ lập trình nào được sử dụng phổ biến nhất khi viết 200 phần mềm đó?
- b) Hãy lập bảng tần số biểu diễn số liệu cho bởi biểu đồ trên.

Bài tập 7.20. Người ta thường đặt tương ứng các mức độ hài lòng của khách hàng với điểm số đánh giá như sau

Điểm	1	2	3	4	5
Mức độ hài lòng	Rất không hài lòng	Không hài lòng	Chấp nhận được	Hài lòng	Rất hài lòng

Chỉ số mức độ hài lòng CSAT (Customer Satisfaction Score) là một chỉ số đo lường sự hài lòng của khách

hàng về một dịch vụ nào đó. Chỉ số này được tính theo công thức

$$CSAT = \frac{\text{Số đánh giá hài lòng và rất hài lòng}}{\text{Tổng số đánh giá}} \cdot 100\%$$

a) Bảng sau cung cấp điểm đánh giá của người dùng dành cho cửa hàng A.

Điểm	1	2	3	4	5
Số người dùng	2	4	2	9	25

Hãy tính chỉ số CSAT của cửa hàng A.

b) Bảng sau cung cấp điểm đánh giá của người dùng dành cho cửa hàng B.

Điểm	1	2	3	4	5
Số người dùng	32	12	10	15	139

Hãy lựa chọn và vẽ biểu đồ phù hợp để so sánh mức độ hài lòng của người dùng dành cho cửa hàng A và cửa hàng B. Có thể nói cửa hàng B được yêu thích hơn do có số lượt đánh giá 4 điểm trở lên nhiều hơn so với cửa hàng A hay không?

Bài tập 7.21. Trong bảng số liệu sau có một số liệu không chính xác. Hãy tìm số liệu đó và sửa lại cho đúng.

Tần số	1	2	3	4
Tần số tương đối	24%	34%	24%	24%

7.3 Biểu diễn số liệu ghép nhóm

7.3.1 Bảng tần số ghép nhóm

Định nghĩa 7.3.1. Kí hiệu $[a; b)$ là nhóm chứa các giá trị X của mẫu số liệu thỏa mãn $a \leq X < b$. Hiệu $b - a$ được gọi là *độ rộng của nhóm* $[a; b)$, giá trị $\frac{a+b}{2}$ được gọi là *giá trị đại diện* của nhóm.

- Số lượng các giá trị của mẫu số liệu thuộc vào một nhóm được gọi là *tần số của nhóm* đó.
- Bảng tần số ghép nhóm biểu diễn tần số của các nhóm số liệu. Bảng gồm hai dòng (hoặc hai cột), dòng (hoặc cột) thứ nhất ghi các nhóm số liệu, dòng (hoặc cột) thứ hai ghi các tần số tương ứng với mỗi nhóm đó.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 7.22. Sau một khóa tập huấn, học viên được xếp loại A, B, C, D theo điểm kiểm tra mà mỗi người đạt được như sau:

Điểm kiểm tra (X)	$0 \leq X < 2,5$	$2,5 \leq X < 5$	$5 \leq X < 7,5$	$7,5 \leq X < 10$
Xếp loại	D	C	B	A

Điểm kiểm tra của các học viên được ghi lại ở bảng sau đây:

6,5	1,4	3,5	6,8	9,2	7,6	7,8	9,3	5,6	9,5
8,3	8,2	6,3	9,1	7,2	4,7	7	7,4	9,1	9,9
8,5	7,5	6,7	1,7	9	8,7	7,2	3,2	8,1	6,4

Hỏi có bao nhiêu học viên được xếp loại A ?

- Hãy chỉ ra các giá trị thuộc nhóm $[0; 2,5)$ và tần số của nhóm này.
- Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu.

Bài tập 7.23. Bảng sau ghi lại thời gian một bác sĩ khám cho một số bệnh nhân (đơn vị: phút):

10,0	7,7	9,4	9,1	6,7	5,9	6,7	11,7	6,9	5,4
6,0	5,8	8,7	6,4	5,3	12,3	7,4	9,1	11,8	6,5

- Hãy chia số liệu thành 5 nhóm, với nhóm thứ nhất là các bệnh nhân có thời gian khám từ 5 phút đến dưới 6,5 phút và lập bảng tần số ghép nhóm.
- Xác định nhóm có tần số cao nhất và nhóm có tần số thấp nhất.

7.3.2 Bảng tần số tương đối ghép nhóm

Định nghĩa 7.3.2. *Tần số tương đối của một nhóm* được tính theo công thức

$$f = \frac{m}{N} \cdot 100\%$$

trong đó m là tần số của nhóm và N là cỡ mẫu.

- Bảng ghi lại tần số tương đối của các nhóm số liệu được gọi là *bảng tần số tương đối ghép nhóm*.
- Bảng tần số tương đối ghép nhóm gồm hai dòng (hoặc hai cột), dòng (hoặc cột) thứ nhất ghi các nhóm số liệu, dòng (hoặc cột) thứ hai ghi các tần số tương đối tương ứng với mỗi nhóm đó.

Bài tập 7.24. Bác Quảng ghi lại thời gian truy cập Internet của mình mỗi ngày (đơn vị: giờ) trong vòng 1 tháng như sau:

1,2	3,2	2,4	2,7	0,5	2,6	4,8	2,4	4,2	2,4
3,7	2,3	3,5	4,9	0,4	0,6	1,5	4,6	1,7	3,4
3,9	2,1	3,4	2,7	1,5	1,8	2,9	3,5	3,9	1,6

Bác Quảng đánh giá mức độ sử dụng Internet mỗi ngày của mình theo bảng tiêu chí sau:

Thời gian (X) (giờ)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)
Mức độ	Rất ít	Ít	Bình thường	Nhiều	Rất nhiều

Hãy lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu về thời gian truy cập Internet của bác Quảng.

Lưu ý.

Tương tự như bảng tần số - tần số tương đối, ta có thể ghép được bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Thời gian (X) (giờ)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)
Tần số	3	6	9	8	4
Tần số tương đối	10,0%	20,0%	30,0%	26,7%	13,3%

Bài tập 7.25. Cô Loan ghi lại chiều cao (đơn vị: cm) của các cây bạch đàn giống vừa được chuyển đến nông trường ở bảng sau:

16,4	19	29,6	18,3	21,8	20,6	22,2	27,1	23,3	19,5
21,2	15,9	28,6	18	29,8	27,2	18,1	28,4	18,8	23,5
29,2	23,8	29,6	25	24,4	15,4	23,8	16	17,2	23,5
23,2	17	17,8	19,8	16,8	18,4	21,9	24,3	27,3	21

Hãy chia dữ liệu trên thành 5 nhóm, với nhóm đầu tiên gồm các cây có chiều cao từ 15cm đến dưới 18cm và lập bảng tần số tương đối ghép nhóm tương ứng.

Bài tập 7.26. Bác Minh thống kê chiều cao của một số cây bạch đàn 5 năm tuổi ở một lâm trường vào bảng dưới đây (đơn vị: mét). Do sơ xuất nên bác Minh ghi thiếu một số số liệu. Hãy giúp bác Minh hoàn thành bảng thống kê.

Chiều cao (X) (m)	[7; 8)	?	[?; 10)
Tần số	?	24	8
Tần số tương đối	?	30%	?

7.3.3 Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm

Lưu ý.

- *Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột gồm các cột kề nhau, mỗi cột tương ứng với một nhóm.*
- *Cột biểu diễn nhóm $[a; b)$ có đầu mút trái là a , đầu mút phải là b và có chiều cao tương ứng với tần số tương đối của nhóm.*

BÀI TẬP

Bài tập 7.27. Thuỷ thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) mình đi bộ mỗi ngày trong tháng 6 ở bảng sau

Quãng đường (X) (km)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)
Tần số (số ngày)	6	12	8	3	1

Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn mẫu số liệu trên.

Bài tập 7.28. Bảng sau thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của các cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường.

Chiều cao (X) (m)	[8, 5; 8, 7)	[8, 7; 8, 9)	[8, 9; 9, 1)	[9, 1; 9, 3)	[9, 3; 9, 5)
Tần số tương đối	15%	25%	25%	20%	15%

Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên.

 Lưu ý.

Tương tự như biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm, người ta cũng sử dụng biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột để biểu diễn trực quan cho bảng tần số ghép nhóm, trong đó chiều cao của cột có đầu mút trái là a và đầu mút phải là b trên trục hoành tương ứng với tần số của nhóm $[a; b)$.

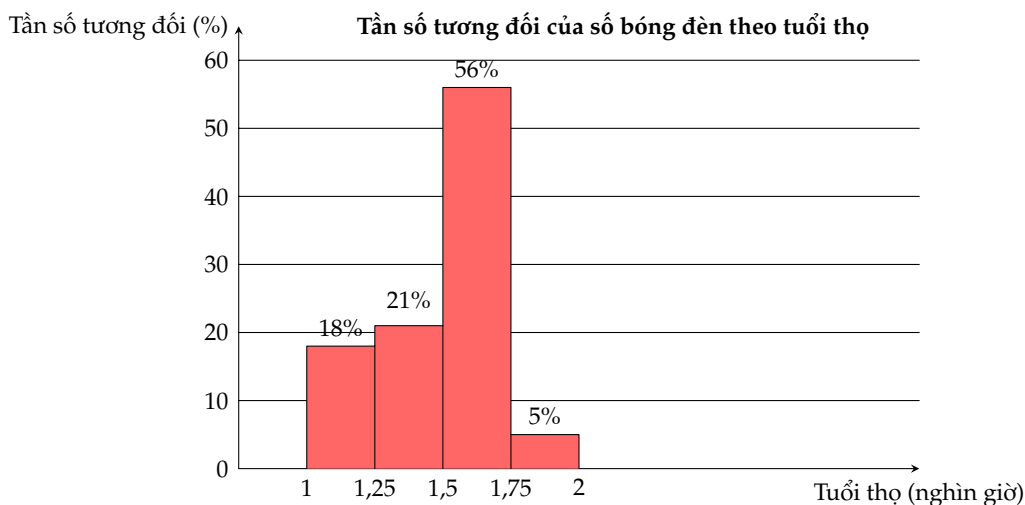
Bài tập 7.29. Biểu đồ dưới đây biểu diễn kết quả khảo sát thành tích chạy 100m của một số học sinh.



a) Có bao nhiêu học sinh chạy 100m hết ít hơn 12 giây?

b) Có tổng số bao nhiêu học sinh tham gia khảo sát?

Bài tập 7.30. Biểu đồ cột bên mô tả tuổi thọ (đơn vị: nghìn giờ) của 100 chiếc bóng đèn dây tóc trong một lô sản xuất.



a) Hãy lập bảng tần số mô tả dữ liệu ở biểu đồ bên.

b) Một bóng đèn được cho là thuộc loại I nếu có tuổi thọ từ 1 500 giờ trở lên. Hỏi có bao nhiêu bóng đèn thuộc loại I trong số các bóng đèn được thống kê?

c) Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu ở biểu đồ bên.

Bài tập 7.31. Bảng tần số ghép nhóm sau biểu diễn kết quả khảo sát cân nặng (đơn vị: kg) của một số trẻ sơ sinh ở một khu vực.

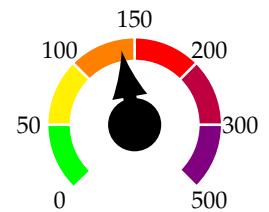
Cân nặng (X) (kg)	[2,9; 3,1)	[3,1; 3,3)	[3,3; 3,5)	[3,5; 3,7)	[3,7; 3,9)
Số trẻ sơ sinh	3	7	5	3	2

a) Hãy lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.

b) Hãy vẽ các biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên.

Bài tập 7.32. Hai bạn Hà và Hồng thống kê lại chỉ số chất lượng không khí (AQI) nơi mình ở tại thời điểm 12 : 00 mỗi ngày trong tháng 9/2022 ở bảng sau:

Chỉ số (X)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)
Tại nơi ở của Hà	12	8	6	4
Tại nơi ở của Hồng	16	6	5	3



a) Hãy vẽ trên cùng một hệ trục hai biểu đồ dạng đoạn thẳng biểu diễn tần số tương đối cho bảng chỉ số chất lượng không khí tại nơi ở của bạn Hà và tại nơi ở của bạn Hồng.

b) Chỉ số AQI từ 150 trở lên được coi là không lành mạnh. Dựa vào biểu đồ tần số tương đối trên, hãy so sánh tỉ lệ số ngày chất lượng không khí được coi là không lành mạnh ở mỗi khu vực.

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 7.33. Bạn Giang ghi lại cự li nhảy xa của các bạn trong câu lạc bộ thể thao ở bảng sau (đơn vị: mét):

5,4	3,6	4,7	4,2	4,4	4,8	3,7	4,7
4,2	3,8	4,2	4,4	4,6	4,8	5,3	4,7
5,4	4,1	3,5	4,7	5,1	4,1	4,4	5,4
4,5	5,4	4,4	4,3	3,6	4,4	4,8	4,8

a) Để thu gọn bảng dữ liệu thì nên chọn bảng tần số không ghép nhóm hay bảng tần số ghép nhóm để biểu thị dữ liệu trên? Tại sao?

b) Hãy chia số liệu thành 4 nhóm, trong đó nhóm đầu tiên là cự li từ 3,5m đến dưới 4m; lập bảng tần số và tần số tương đối ghép nhóm.

Bài tập 7.34. Kết quả đo tốc độ của 25 xe ô tô (đơn vị: km/h) khi đi qua một trạm quan sát được ghi lại ở bảng sau:

48,6	54,2	53,3	45,3	48,2	46,3	57,4	62,6	61,4	55	40,9	45,5	54,3
49,8	60	58,9	53	53	62	49,4	48,4	47,8	41,2	42,8	48,8	

a) Hãy lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng số liệu trên, trong đó nhóm đầu tiên là các xe có tốc độ từ 40km/h đến dưới 45km/h.

b) Hãy xác định nhóm có tần số tương đối cao nhất và nhóm có tần số tương đối thấp nhất.

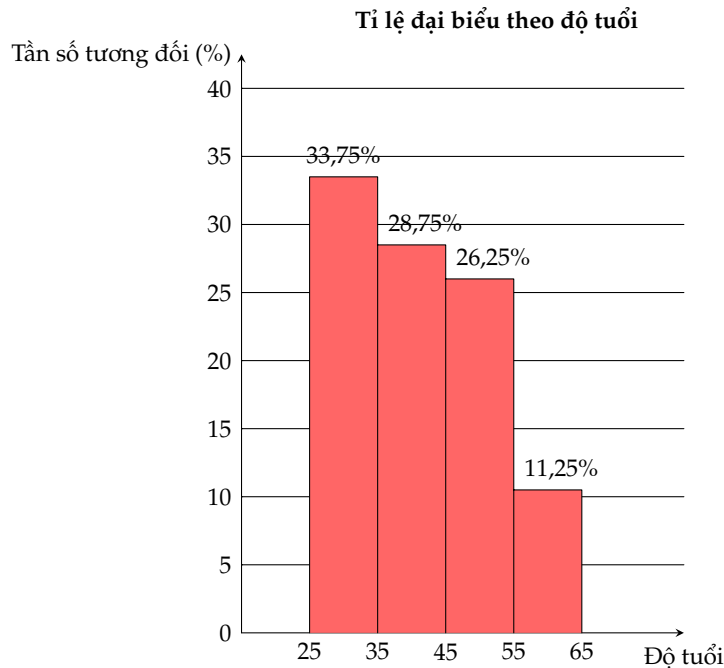
Bài tập 7.35. Thời gian hoàn thành một bài kiểm tra trực tuyến của một số học sinh được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: phút):

Thời gian (X) (phút)	[10; 12)	?	[14; 16)
Tần số	25	?	5
Tần số tương đối	?	?	12,5%

a) Hãy xác định số học sinh tham gia kiểm tra.

b) Hoàn thành bảng trên vào vở.

Bài tập 7.36. Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 đến 35 tuổi.



- Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị?
- Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng.
- Một người cho rằng có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?

Bài tập 7.37. Thời gian đi từ nhà đến trường (đơn vị: phút) của các bạn học sinh lớp 9C được ghi lại ở bảng sau:

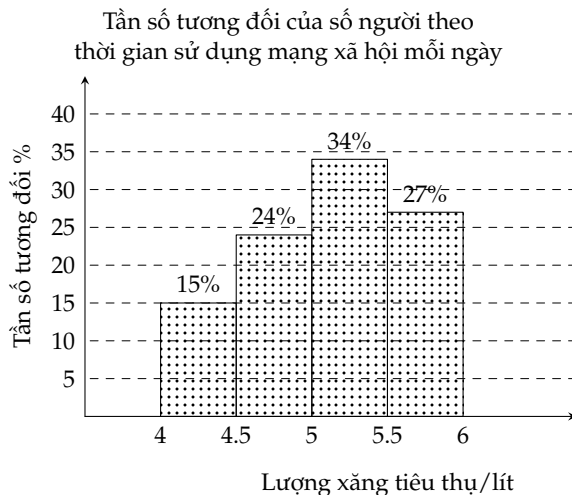
9,5	13,9	5,6	13,2	10,3	15,1	19,5	14,1	11,4	19,7	15,1	11,1
16,6	7,2	18	11,6	6,2	6,2	16,7	7,8	17,7	7,7	7,7	5,5
18,2	7,4	19,8	19	5,2	18,3	14,7	14,1	19,6	10,4	7,2	12,5

- Hãy chia số liệu thành 4 nhóm, với nhóm thứ nhất là khoảng từ 5 phút đến dưới 9 phút và lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm.
- Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng mô tả bảng tần số tương đối ghép nhóm.

7.4 Ôn tập chương

TRẮC NGHIỆM

Bài tập 7.38. Một doanh nghiệp sản xuất xe ô tô khảo sát lượng xăng tiêu thụ trên 100 km của một số loại xe ô tô trên thị trường. Kết quả khảo sát 100 chiếc xe được biểu diễn trong hình dưới đây.



- a) Tần số tương đối của số lượng xe ô tô tiêu thụ dưới 5 lít xăng cho 100 km là
- A. 24%. B. 39%. C. 61%. D. 76%.
- b) Khoảng tiêu thụ xăng phổ biến nhất là
- A. Từ 4 đến dưới 4,5 lít. B. Từ 4,5 đến dưới 5 lít.
C. Từ 5 đến 5,5 lít. D. Từ 5,5 đến 6 lít.
- c) Trong tất cả những chiếc xe được khảo sát, có bao nhiêu chiếc xe tiêu thụ hết từ 5 đến dưới 5,5 lít xăng khi đi hết quãng đường 100 km?
- A. 34. B. 27.
C. 15. D. 14.

Bài tập 7.39. Kết quả khảo sát thời gian sử dụng liên tục (đơn vị: giờ) từ lúc sạc đầy cho đến khi hết pin của một số máy vi tính cùng loại được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian sử dụng pin (X) (giờ)	[7,2; 7,4)	[7,4; 7,6)	[7,6; 7,8)	[7,8; 8)
Tần số	2	4	7	6

- a) Cỡ mẫu của cuộc khảo sát là
- A. 18. B. 19. C. 20. D. 22.
- b) Số lượng máy tính có thời gian sử dụng từ 7,4 đến dưới 7,8 giờ là
- A. 11. B. 12. C. 13. D. 14.
- c) Tỷ lệ máy tính có thời gian sử dụng từ 7,6 giờ trở lên là
- A. 27,7%. B. 68,42%. C. 33,3%. D. 72,3%.

Bài tập 7.40. Bảng dưới đây ghi lại cự li ném tạ (đơn vị: mét) của một vận động viên trước và sau một đợt tập huấn đặc biệt.

Cự li (X) (m)	[20; 20,2)	[20,2; 20,4)	[20,4; 20,6)	[20,6; 20,8)	[20,8; 21)	[21; 21,2)
Tần số trước đợt tập huấn	3	5	5	2	1	0
Tần số sau đợt tập huấn	1	2	4	5	3	1

- a) Tần số tương đối của số lần vận động viên ném dưới 20,4 m trước khi tập huấn là
- A. 18,75%. B. 25%. C. 31,25%. D. 50%.
- b) Tần số tương đối của số lần vận động viên ném từ 20,8 m trở lên sau khi tập huấn là
- A. 20%. B. 25%. C. 30%. D. 35%.
- c) Tần số tương đối của số lần vận động viên ném từ 20,8 m trở lên sau khi tập huấn tăng thêm
- A. 18,75%. B. 30,5%. C. 35%. D. 37,5%.
- d) Tần số tương đối của số lần vận động viên ném dưới 20,2 m sau khi tập huấn giảm đi
- A. 12,5%. B. 15,5%. C. 35%. D. 37,5%.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 7.41. Một cửa hàng ghi lại cỡ của các đôi giày đã bán trong một ngày ở bảng sau:

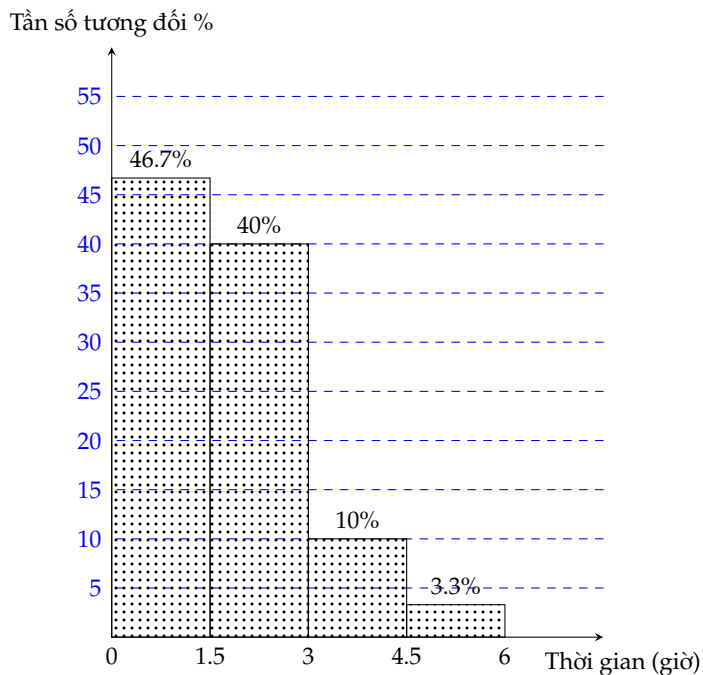
42	38	39	42	39	41	43	41	41	40
37	38	37	38	40	39	38	39	44	43
42	37	40	40	44	41	41	40	42	39
43	41	37	41	40	38	40	41	40	39

- a) Hãy xác định cỡ mẫu, lập bảng tần số và tần số tương đối cho mẫu số liệu trên.
- b) Hãy vẽ biểu đồ dạng cột mô tả bảng số liệu trên.
- c) Cửa hàng nên nhập về để bán cỡ giày nào nhiều nhất, cỡ giày nào ít nhất?
- Bài tập 7.42.** Số bàn thắng một đội bóng ghi được trong 26 trận đấu của Giải vô địch quốc gia được ghi lại ở bảng sau:

1	2	0	4	0	3	0	1	0	0	3	3	0
0	3	0	2	2	3	3	4	3	1	0	0	3

- a) Hãy lập bảng tần số và tần số tương đối cho bảng số liệu trên.
- b) Hãy vẽ biểu đồ hình quạt tròn mô tả tần số tương đối của bảng số liệu trên.
- Bài tập 7.43.** Khảo sát các học sinh lớp 6 của một trường Trung học cơ sở về thời gian sử dụng mạng xã hội trung bình trong một ngày (đơn vị: giờ), kết quả thu được như hình bên.
- a) Có bao nhiêu bạn tham gia cuộc khảo sát, biết rằng có 4 bạn sử dụng mạng xã hội từ 4,5 giờ trở lên.
- b) Một người cho rằng có trên 50% học sinh tham gia khảo sát sử dụng mạng xã hội từ 3 giờ trở lên mỗi ngày. Nhận định của người đó có hợp lí không? Tại sao?

Tần số tương đối của số người theo thời gian sử dụng mạng xã hội mỗi ngày



Bài tập 7.44. Một bác lái xe muốn ghi lại tổng độ dài quãng đường (đơn vị: km) mình lái xe mỗi ngày trong vòng 1 tháng.

- Hỏi bác lái xe có thể thu thập dữ liệu bằng cách nào?
- Dưới đây là số liệu bác lái xe đã ghi lại được.

23,9	192,7	137,8	125,3	147,5	102,8	105,9	60,1	186,7	129,5
31,6	168,4	97,4	144,7	129	197,3	113,7	10,2	110,3	86,4
77,9	38,6	124,7	199,8	22,8	96,9	30,7	85,1	188,1	122,5

Hãy chia số liệu thành 5 nhóm, với nhóm thứ nhất là từ 10 km đến dưới 50 km và lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm. Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Bài tập 7.45. Trong bảng số liệu sau có một số liệu bị điển sai. Hãy tìm số liệu đó và sửa lại cho đúng.

Tần số	24	16	6	4
Tần số tương đối	48%	32%	15%	8%

Chương 8

Xác suất

8.1 Không gian mẫu và biến cố

8.1.1 Không gian mẫu

Định nghĩa 8.1.1.

- Các hoạt động mà ta không thể biết trước được kết quả của nó, nhưng biết tất cả các kết quả có thể xảy ra được gọi là *phép thử ngẫu nhiên* (còn gọi là *phép thử*).
- *Không gian mẫu*, kí hiệu Ω , là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử

Khi ta tung đồng xu (có hai mặt: mặt hình và mặt chữ) lên không trung, khi rơi xuống đất, đồng xu có thể xuất hiện mặt hình hoặc chữ.

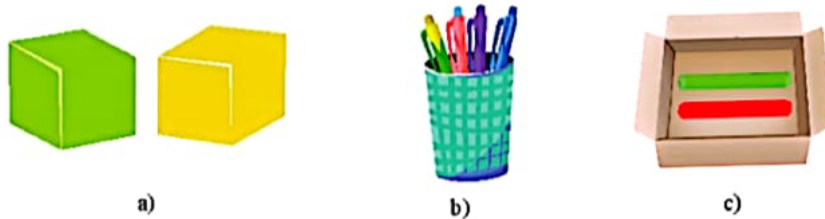
- Mỗi lần tung là ta đã thực hiện một phép thử,
- Đồng xu chỉ có thể xuất hiện mặt hình hay mặt chữ, nên ta nói không gian mẫu là

$$\Omega = \{\text{mặt hình, mặt chữ}\}.$$

✧ BÀI TẬP ✧

Bài tập 8.1. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Tại sao?

- Gieo 2 khối gỗ hình lập phương, mỗi khối được sơn một màu như Hình 1a và quan sát màu sắc của mặt xuất hiện bên trên.
- Chọn bất kì 1 cây bút bi từ hộp có 4 cây bút bi như Hình 1b.
- Chọn ra đồng thời 2 que gỗ từ hộp có 2 que gỗ như Hình 1c.



Hình 1

Bài tập 8.2. Xác định không gian mẫu của các phép thử ngẫu nhiên sau:

- Gieo 1 con xúc sắc một lần.
- Gieo 1 con xúc sắc cân đối và đồng chất hai lần.
- Lấy ra lần lượt 2 quả bóng từ một hộp chứa 3 quả bóng được đánh số 1; 2; 3.

Bài tập 8.3. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Tại sao?

- Chọn ra lần lượt hai tấm thẻ từ hộp có 2 tấm thẻ như Hình 3a.
- Chọn bất kì 1 quyển sách từ giá như Hình 2b.
- Chọn 1 cây bút chì từ hộp bút như Hình 2c.



Hình 2

Bài tập 8.4. Xác định không gian mẫu của các phép thử sau:

- Gieo 2 lần một đồng xu có 1 mặt xanh và 1 mặt đỏ.
- Lấy ra 1 quả bóng từ một hộp chứa 3 quả bóng được đánh số 1; 2; 3, xem số, trả lại hộp rồi lại lấy ra 1 quả bóng từ hộp đó.

Bài tập 8.5. Một túi chứa 4 viên bi, trong đó có 3 viên bi xanh đánh số từ 1 đến 3 và 1 viên bi đỏ được đánh số 4. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ túi. Xác định không gian mẫu của phép thử.

8.1.2 Biến cố

Định nghĩa 8.1.2. Khi thực hiện phép thử, một biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra. Mỗi kết quả có thể của phép thử làm cho biến cố xảy ra được gọi là một *kết quả thuận lợi* cho biến cố đó.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 8.6. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai? Tại sao?

- Biến cố không thể không có kết quả thuận lợi.
- Mọi kết quả của phép thử đều là kết quả thuận lợi cho biến cố chắc chắn.
- Biến cố có ít nhất một kết quả thuận lợi là biến cố ngẫu nhiên.

Bài tập 8.7. Một hộp có chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên cùng một lúc 2 tấm thẻ từ hộp.

- Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử.
- Liệt kê các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:
A: "Trong 2 thẻ lấy ra có đúng 1 thẻ ghi số lẻ";
B: "Trong 2 thẻ lấy ra có ít nhất 1 thẻ ghi số chẵn".

Bài tập 8.8. Một hộp có 4 quả bóng được đánh số lần lượt từ 1 đến 4. Bạn Trọng và bạn Thuý lần lượt lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp.

- Xác định không gian mẫu của phép thử.
- Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:
 - A: "Số ghi trên quả bóng của bạn Trọng lớn hơn số ghi trên quả bóng của bạn Thuý";
 - B: "Tổng các số ghi trên 2 quả bóng lấy ra lớn hơn 7".
- Kí hiệu $(i; j)$ là quả bóng của bạn Trọng và bạn Thuý lần lượt lấy ra. Khi đó không gian mẫu là $\Omega = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 3); (2; 4); (3; 1); (3; 2); (3; 4); (4; 1); (4; 2); (4; 3)\}$.

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố:

- $\Omega_A = \{(2; 1); (3; 1); (3; 2); (4; 1); (4; 2); (4; 3)\}$.
- $\Omega_B = \emptyset$.

Bài tập 8.9. Ba khách hàng M, N, P đến quầy thu ngân cùng một lúc. Nhân viên thu ngân sẽ lần lượt chọn ngẫu nhiên từng người để thanh toán.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

- A : “ M được thanh toán cuối cùng”;
- B : “ N được thanh toán trước P ”;
- C : “ M được thanh toán”.

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 8.10. Một hộp chứa 1 quả bóng màu xanh, 1 quả bóng màu vàng và 1 quả bóng màu đỏ. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Hãy xác định không gian mẫu của các phép thử ngẫu nhiên đó.

- Lấy bất kì 1 quả bóng từ hộp.
- Lấy đồng thời 3 quả bóng từ hộp.
- Lấy lần lượt 3 quả bóng từ hộp một cách ngẫu nhiên.

Bài tập 8.11. Bạn An viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có 2 chữ số.

- Xác định không gian mẫu của phép thử.
- Hãy xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau
 - A : “Số được viết là số tròn chục”;
 - B : “Số được viết là số chính phương”.

Bài tập 8.12. Trên giá có 1 quyển sách Ngữ văn, 1 quyển sách Mĩ thuật và 1 quyển sách Công nghệ. Bạn Hà và bạn Thuý lần lượt lấy ra ngẫu nhiên 1 quyển sách từ giá.

- Xác định không gian mẫu của phép thử.
- Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:
 - A : “Có 1 quyển sách Ngữ văn trong 2 quyển sách được lấy ra”;
 - B : “Cả 2 quyển sách được lấy ra đều là sách Mĩ thuật”;
 - C : “Không có quyển sách Công nghệ nào trong 2 quyển sách được lấy ra”.

Bài tập 8.13. Bạn Việt giải một đề thi gồm có 3 bài được đánh số 1; 2; 3. Việt chọn lần lượt các bài để giải theo một thứ tự ngẫu nhiên.

- Xác định không gian mẫu của phép thử.
- Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:
 - A : “Việt giải bài 2 đầu tiên”;
 - B : “Việt giải bài 1 trước bài 3”.

8.2 Xác suất của biến cố

8.2.1 Kết quả đồng khả năng

Định nghĩa 8.2.1. Trong một phép thử ngẫu nhiên, hai kết quả được gọi đồng khả năng nếu chúng có khả năng xảy ra như nhau.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 8.14. Kết quả của mỗi phép thử sau có đồng khả năng không? Tại sao?

- a) Tung hai đồng xu cân đối và đồng chất.
- b) Gieo con xúc xắc.
- c) Chọn ngẫu nhiên 2 quả bóng bàn từ một hộp 7 quả bóng bàn có cùng kích thước và khối lượng.

Bài tập 8.15. Kết quả của mỗi phép thử sau có đồng khả năng không? Tại sao?

- a) Rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ từ 10 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 10.
- b) Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ danh sách lớp.
- c) Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ một hộp chứa 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ và 8 viên bi trắng rồi quan sát màu của nó, biết rằng các viên bi có cùng kích thước và khối lượng.

Bài tập 8.16. Kết quả của các phép thử sau có cùng khả năng xảy ra không? Tại sao?

- a) Gặp ngẫu nhiên 1 người Đồng Tháp và hỏi xem họ sinh huyện/thành phố nào.
- b) Rút ngẫu nhiên 1 lá bài từ bộ bài 52 lá.

8.2.2 Xác suất của biến cố

Định nghĩa 8.2.2. Giả sử một phép thử có không gian mẫu Ω gồm hữu hạn các kết quả đồng khả năng và A một biến cố. Xác suất của biến cố A , kí hiệu $P(A)$, được xác định bởi công thức:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad (*)$$

Trong đó $n(A)$ là số các kết quả thuận lợi cho A ; $n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra.

📌 Lưu ý.

Để tính xác suất của biến cố A , ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Xác định $n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra.

Bước 2. Đếm số các kết quả thuận lợi cho biến cố $n(A)$.

Bước 3. Tính xác suất của biến cố A bằng công thức (*).

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 8.17. Tính xác suất của biến cố trong các trường hợp sau

- a) Tung đồng xu lên, tính xác suất để đồng xu xuất hiện mặt hình.
- b) Gieo một con xúc xắc, tính xác suất để xuất hiện mặt 1 chấm.
- c) Rút một con bài từ bộ bài tứ lơ khơ (52 lá), tính xác suất để được con bài cơ.

Bài tập 8.18. Hộp thứ nhất đựng 1 quả bóng trắng, 1 quả bóng đỏ. Hộp thứ hai đựng 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả bóng.

- a) Xác định không gian mẫu và số kết quả có thể xảy ra của phép thử.
- b) Biết rằng các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:
- A: "2 quả bóng lấy ra có cùng màu";
 - B: "Có đúng 1 quả bóng màu đỏ trong 2 quả bóng lấy ra".

Bài tập 8.19. Một hộp chứa 5 quả bóng màu đỏ và một số quả bóng màu trắng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp. Biết xác suất của biến cố "Lấy được quả bóng màu đỏ" là 0,25. Hỏi trong hộp có bao nhiêu quả bóng màu trắng?

Bài tập 8.20. Bạn Thắng có n tấm thẻ cùng loại đánh số từ 1 đến n . Bạn Thắng rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ. Biết rằng xác suất của biến cố "Lấy được tấm thẻ ghi số có một chữ số là 0,18. Hỏi bạn Thắng có bao nhiêu tấm thẻ.

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 8.21. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xét hai biến cố sau:

A: "Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm";

B: "Tổng số chấm trên hai con xúc xắc lớn hơn 8".

Biến cố nào có khả năng xảy ra cao hơn?

Bài tập 8.22. Một chiếc hộp có chứa 5 tấm thẻ cùng loại, được đánh số lần lượt là 3; 5; 6; 7; 9. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp.

- a) Xác định không gian mẫu và số kết quả xảy ra của phép thử.
- b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:
- A: "Tích các số ghi trên 2 tấm thẻ chia hết cho 3";
- B: "Tổng các số ghi trên 2 tấm thẻ lớn hơn 13".

Bài tập 8.23. Một chiếc hộp chứa 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ và 1 viên bi trắng. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Dung lần lượt lấy ra ngẫu nhiên từng viên bi từ trong hộp cho đến khi hết bi.

- a) Xác định không gian mẫu của phép thử.
- b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:
- A: "Viên bi màu xanh được lấy ra cuối cùng";
- B: "Viên bi màu trắng được lấy ra trước viên bi màu đỏ";
- C: "Viên bi lấy ra đầu tiên không phải là bi màu trắng".

Bài tập 8.24. Một túi chứa 3 viên bi màu xanh và một số viên bi màu đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Luân lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi. Biết rằng xác suất của biến cố "Lấy được viên bi màu xanh" là 0,6. Hỏi trong hộp có tổng số bao nhiêu viên bi?

8.3 Ôn tập chương

➡ TRẮC NGHIỆM ➡

Câu 8.1. Một hộp chứa 1 quả bóng màu vàng, 1 quả bóng màu trắng và 1 quả bóng màu cam. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Ánh lấy ra ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng từ hộp. Số phần tử của không gian mẫu của phép thử là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 8.2. Một hộp chứa 1 quả bóng màu vàng, 1 quả bóng màu trắng và 1 quả bóng màu cam. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Ánh lấy ra ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng từ hộp. Xác suất của biến cố “Có 1 quả bóng màu vàng trong 2 quả bóng lấy ra” là

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 8.3. Một hộp chứa 1 quả bóng màu vàng, 1 quả bóng màu trắng và 1 quả bóng màu cam. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Ánh lấy ra ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng từ hộp. Xác suất của biến cố “Không có quả bóng nào màu xanh trong 2 quả bóng lấy ra” là

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Câu 8.4. Một hộp chứa 1 quả bóng màu vàng, 1 quả bóng màu trắng và 1 quả bóng màu cam. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Ánh lấy ra ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng từ hộp. Xác suất của biến cố “Quả bóng lấy ra đầu tiên là quả bóng màu trắng” là

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Câu 8.5. Một hộp chứa 1 quả bóng màu vàng, 1 quả bóng màu trắng và 1 quả bóng màu cam. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Ánh lấy ra ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng từ hộp. Xác suất của biến cố “Quả bóng lấy ra lần thứ hai không phải là quả bóng màu cam” là

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Câu 8.6. Bạn Giang gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Số phần tử của không gian mẫu của phép thử là

- A. 6. B. 12. C. 30. D. 36.

Câu 8.7. Bạn Giang gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Số kết quả thuận lợi cho biến cố “Tổng số chấm xuất hiện là 4” là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 8.8. Bạn Giang gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xác suất của biến cố “Lần gieo thứ hai xuất hiện mặt 5 chấm” là

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{36}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 8.9. Bạn Giang gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xác suất của biến cố “Có đúng 1 lần xuất hiện mặt 6 chấm” là

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{5}{18}$. C. $\frac{11}{36}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 8.10. Bạn Giang gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xác suất của biến cố “Tích số chấm xuất hiện của hai lần gieo là số lẻ” là

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

↔ BÀI TẬP ↔

Bài tập 8.25. Một hộp chứa 3 tấm thẻ cùng loại, được đánh số lần lượt là 5; 10; 15. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Hãy xác định không gian mẫu của các phép thử ngẫu nhiên đó.

- a) Lấy bất kì 1 tấm thẻ từ hộp.
- b) Lấy đồng thời 3 tấm thẻ từ hộp.
- c) Lấy lần lượt 3 tấm thẻ từ hộp một cách ngẫu nhiên.

Bài tập 8.26. Bạn Trang chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có ba chữ số.

- a) Xác định không gian mẫu của phép thử.
- b) Xác định tập hợp các kết quả thuận lợi cho các biến cố sau và tính xác suất của mỗi biến cố đó.

A: “Số được chọn là lập phương của một số tự nhiên”;

B: “Số được chọn nhỏ hơn 500”.

Bài tập 8.27. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 12”;

B: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 8”.

Bài tập 8.28. Một chiếc hộp có chứa 5 tấm thẻ cùng loại, được đánh số lần lượt là 1; 4; 9; 10; 16. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp.

- a) Xác định không gian mẫu và số kết quả có thể xảy ra của phép thử.
- b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: “Tích các số ghi trên 2 tấm thẻ chia hết cho 5”;

B: “Tổng các số ghi trên 2 tấm thẻ lớn hơn 14”.

Bài tập 8.29. Một chiếc hộp chứa 1 tấm thẻ màu xanh, 1 tấm thẻ màu vàng và 1 tấm thẻ màu hồng. Các tấm thẻ có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Hương lần lượt lấy ra ngẫu nhiên từng tấm thẻ từ trong hộp cho đến khi hộp hết thẻ.

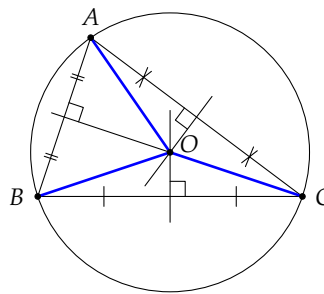
- a) Xác định không gian mẫu của phép thử.
- b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:
 - A: “Tấm thẻ màu hồng được lấy ra đầu tiên”;
 - B: “Tấm thẻ màu xanh được lấy ra trước tấm thẻ màu vàng”;
 - C: “Tấm thẻ lấy ra lần cuối cùng không có màu xanh”.

Chương 9

Tứ giác nội tiếp. Đa giác đều

9.1 Đường tròn ngoại tiếp tam giác. Đường tròn nội tiếp tam giác

9.1.1 Đường tròn ngoại tiếp tam giác

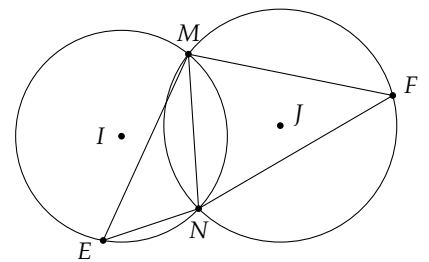


Định nghĩa 9.1.1. Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là *đường tròn ngoại tiếp tam giác*, khi đó tam giác được gọi là *tam giác nội tiếp đường tròn*.

Định lý 9.1.1. Đường tròn ngoại tiếp tam giác có tâm là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác và có bán kính bằng khoảng cách từ giao điểm đó đến một đỉnh bất kì của tam giác.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 9.1. Cho hai đường tròn (I) và (J) cắt nhau tại M, N . Gọi E và F (khác M, N) là hai điểm lần lượt trên (I) và (J) . Tìm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE và đường tròn ngoại tiếp tam giác MNF .



Bài tập 9.2. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác sau:

- a) Tam giác vuông ABC có cạnh huyền $BC = 6$ cm.
- b) Tam giác EFG có $EF = 5$ cm; $EG = 3$ cm; $FG = 4$ cm.

Bài tập 9.3. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác sau:

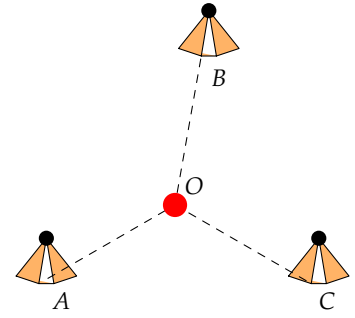
- a) Tam giác đều MNP có cạnh bằng 4 cm.
- b) Tam giác MNP cân tại M có $MN = MP = 6$ cm và $NP = 4$ cm.

❖ LUYỆN TẬP ❖

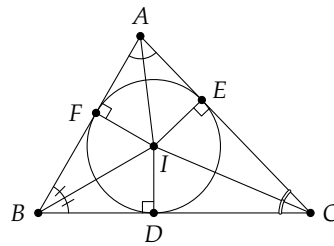
Bài tập 9.4. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh bằng a .

Bài tập 9.5. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A với $BC = 10$ cm.

Bài tập 9.6. Có ba tổ dựng lều ở ba vị trí A, B, C như hình bên. Ban tổ chức đặt ba thùng có dung tích bằng nhau tại một điểm tập kết chung. Mỗi tổ có sáu người, được phát một chiếc gàu giống nhau, các thành viên trong tổ chia thành từng cặp công nhau, mức nước từ trại của mình về đổ vào thùng tại điểm tập kết. Thùng của tổ nào đầy trước thì tổ đó chiến thắng. Để trò chơi công bằng, cần tìm điểm tập kết cách đều ba lều. Hãy xác định điểm đó.



9.1.2 Đường tròn nội tiếp tam giác



Định nghĩa 9.1.2. Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp tam giác*, khi đó tam giác được gọi là *tam giác ngoại tiếp đường tròn*.

Định lý 9.1.2. Đường tròn nội tiếp tam giác có tâm là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác và bán kính bằng khoảng cách từ giao điểm đó đến một cạnh bất kì của tam giác.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 9.7. Cho góc xOy và đường tròn (I) tiếp xúc với hai cạnh Ox, Oy . Vẽ tiếp tuyến d của (I) sao cho d cắt Ox tại A , cắt Oy tại B và I nằm trong tam giác OAB . Tìm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB .

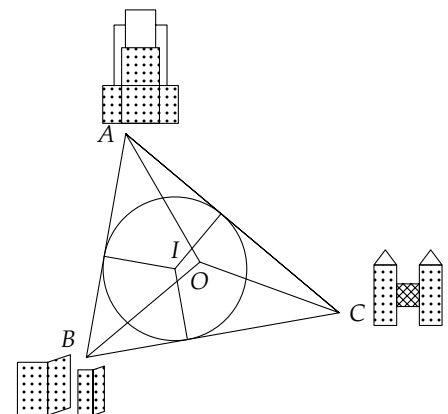
Bài tập 9.8. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng a .

📌 Lưu ý.

Tam giác đều có tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp trùng nhau.

Bài tập 9.9. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều MNP có độ dài cạnh bằng 8.

Bài tập 9.10. Ba cụm dân cư A, B, C nối với nhau bởi ba con đường AB, BC, CA như trong hình bên. Người ta muốn tìm địa điểm O để xây một trường học và địa điểm I để lập một trạm cứu hộ xe, sao cho O cách đều ba điểm A, B, C và I cách đều ba con đường. Làm thế nào để xác định hai điểm O và I ?



❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 9.11. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 6 cm.

- Nêu cách vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Nêu cách vẽ đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Bài tập 9.12. Cho tam giác ABC ($AC < BC$) nội tiếp đường tròn (O) có AB là đường kính. Từ điểm O vẽ đường thẳng song song với AC và cắt đường tròn (O) tại I (điểm I thuộc cung nhỏ CB).

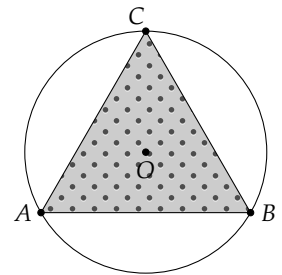
- Chứng minh OI vuông góc với BC .
- Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và cắt đường thẳng OI tại M . Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài tập 9.13. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AB, BC, AC .

- Chứng minh $2AD = AB + AC - BC$.
- Tìm các hệ thức tương tự như hệ thức ở câu a.

Bài tập 9.14. Tính diện tích tam giác đều có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1 cm.

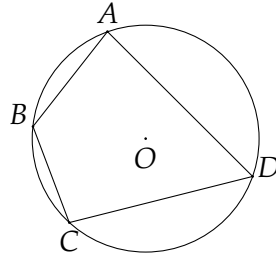
Bài tập 9.15. Một trại nuôi gia súc có dạng hình tam giác đều cạnh 100 m (Hình bên). Người ta muốn đặt một trụ đèn cao áp tại một điểm cách đều ba đỉnh của tam giác. Nêu cách xác định vị trí đặt đèn và tính khoảng cách từ điểm đó đến ba đỉnh của tam giác.



9.2 Tứ giác nội tiếp. Đa giác đều

9.2.1 Tứ giác nội tiếp

A. Khái niệm tứ giác nội tiếp



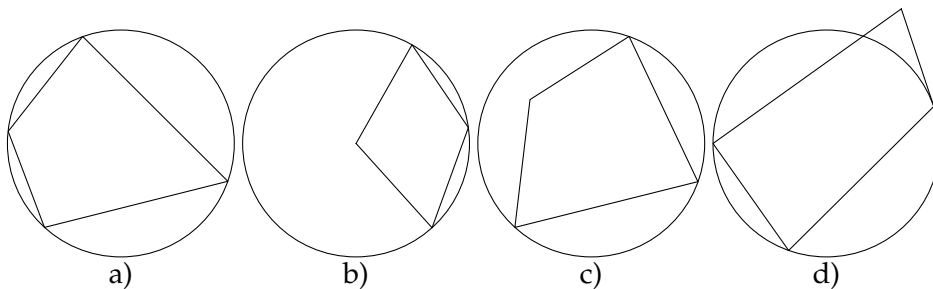
ABCD là tứ giác nội tiếp trong đường tròn (O)

Định nghĩa 9.2.1.

- Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là *tứ giác nội tiếp đường tròn* (gọi tắt là *tứ giác nội tiếp*).
- Đường tròn đi qua bốn đỉnh của tứ giác gọi là *đường tròn ngoại tiếp* tứ giác đó.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 9.16. Tìm tứ giác nội tiếp trong các hình sau:



Hình 2

Bài tập 9.17. Vẽ một tứ giác nội tiếp đường tròn và một tứ giác không nội tiếp đường tròn

Bài tập 9.18. Có nhận xét gì về tứ giác trong hình hoa văn trang trí mặt lưng của chiếc ghế với đường tròn trong Hình



Hình 3

Bài tập 9.19. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BE và CF cắt nhau ở H . Chứng minh hai tứ giác $AEHF$ và $BCEF$ nội tiếp.

Bài tập 9.20. Hai tiếp tuyến tại D và E của đường tròn (O) cắt nhau ở C . Vẽ cát tuyến CBA sao cho D thuộc cung nhỏ AB . Gọi I là trung điểm của AB .

- Chứng minh tứ giác $CDIO$ nội tiếp.
- Chứng minh 5 điểm C, D, I, O, E cùng thuộc một đường tròn.

Bài tập 9.21. Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Điểm A thuộc Ox và B thuộc Oy sao cho $OA = OB$. Lấy M bất kỳ trên tia By . Vẽ BH vuông góc với AM ở H và tia HB cắt tia AO tại C . Chứng minh $OAHB$ và $OCMH$ là hai tứ giác nội tiếp đường tròn.

Bài tập 9.22. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn. Điểm M thuộc cung BC không chứa A . Vẽ MH vuông góc với AB ở H và MK vuông góc với AC ở K . Tứ giác $AHMK$ có tính chất gì?

Bài tập 9.23. Cho tam giác ABC nhọn và nội tiếp trong đường tròn tâm O và có hai đường cao BD và CE . Chứng minh:

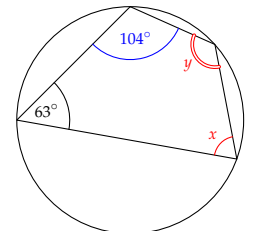
- Tứ giác $BCDE$ nội tiếp.
- DE song song với tiếp tuyến xy tại A của (O) .

B. Tính chất của tứ giác nội tiếp

Định lý 9.2.1. Trong một tứ giác nội tiếp tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° .

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 9.24. Tìm x và y của tứ giác có trong Hình 4.

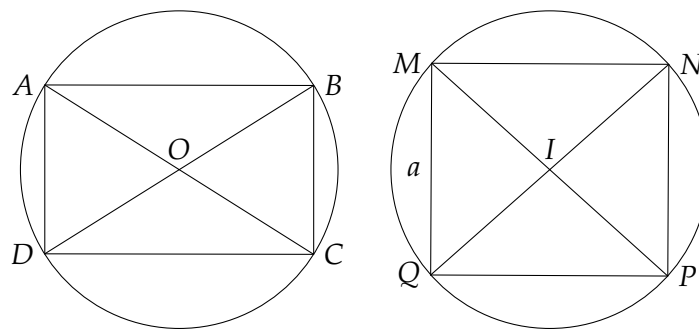


Hình 4

Bài tập 9.25. Tìm số đo các góc chưa biết của tứ giác $ABCD$ trong Hình 6.

Bài tập 9.26. Bức tranh treo tường có vẽ một tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O (Hình 7). Cho biết $\widehat{ABC} = 70^\circ$, $\widehat{ODC} = 50^\circ$. Tìm góc $\widehat{AOD}$.

C. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật - hình vuông



a)

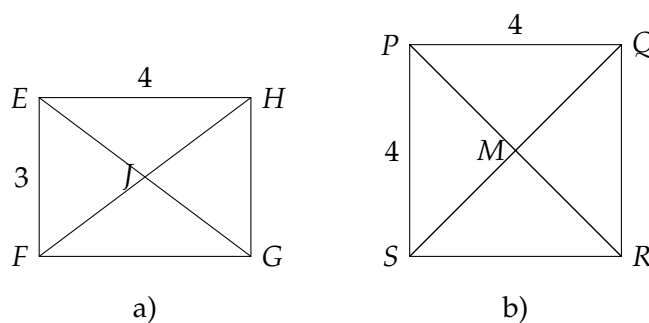
Hình 9

b)

Tính chất 9.2.1. Hình chữ nhật, hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật, hình vuông có tâm là giao điểm của hai đường chéo và có bán kính bằng nửa đường chéo.

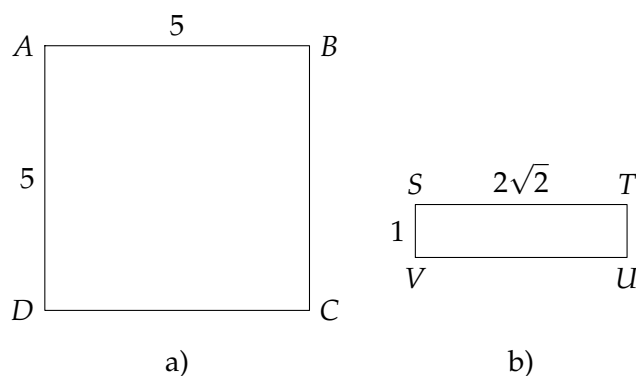
❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 9.27. Xác định tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông trong Hình 10.



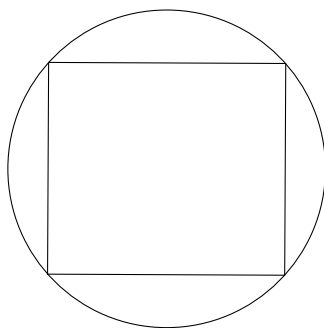
Hình 10

Bài tập 9.28. Xác định tâm và tính bán kính của hình tròn ngoại tiếp hình vuông và hình chữ nhật trong Hình 11.



Hình 11

Bài tập 9.29. Người ta muốn thiết kế một bảng hiệu gồm một hình vuông và nội tiếp một đường tròn có bán kính $R = 3\text{cm}$ (Hình 12). Tính diện tích hình vuông đó.



Hình 12

❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 9.30. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Hãy hoàn thành các giá trị còn thiếu của bảng sau vào vở.

Góc	Trường hợp	1	2	3	4
$\widehat{A}$		90°	?	?	66°
$\widehat{B}$		120°	?	75°	?
$\widehat{C}$		?	80°	89°	?
$\widehat{D}$		?	70°	?	88°

Bài tập 9.31. Cho tam giác nhọn ABC . Gọi A', B', C' lần lượt là chân ba đường cao kẻ từ A, B, C và H là trực tâm của tam giác đó. Hãy chỉ các tứ giác nội tiếp có trong hình

Bài tập 9.32. Xác định tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ trong các trường hợp sau:

a) $AB = 6\text{cm}, BC = 8\text{cm};$

b) $AC = 9\text{cm}.$

Bài tập 9.33. Cho hình vuông $MNPQ$ nội tiếp đường tròn bán kính R . Tính độ dài cạnh và đường chéo của hình vuông theo R .

Bài tập 9.34. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ cát tuyến MBC và tiếp tuyến Mt tiếp xúc với (O) tại A . Gọi I là trung điểm của dây BC . Chứng minh $AMIO$ là một tứ giác nội tiếp.

Bài tập 9.35. Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn AC , đường tròn đường kính CM cắt hai đường thẳng BM và BC lần lượt tại D và N . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

b) Các đoạn thẳng AB, MN, CD cùng đi qua một điểm.

Bài tập 9.36. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a . Góc vuông xAy thay đổi sao cho tia Ax cắt đoạn thẳng BC tại M và tia Ay cắt đoạn thẳng CD kéo dài tại N .

a) Chứng minh hai tam giác ABM và ADN bằng nhau.

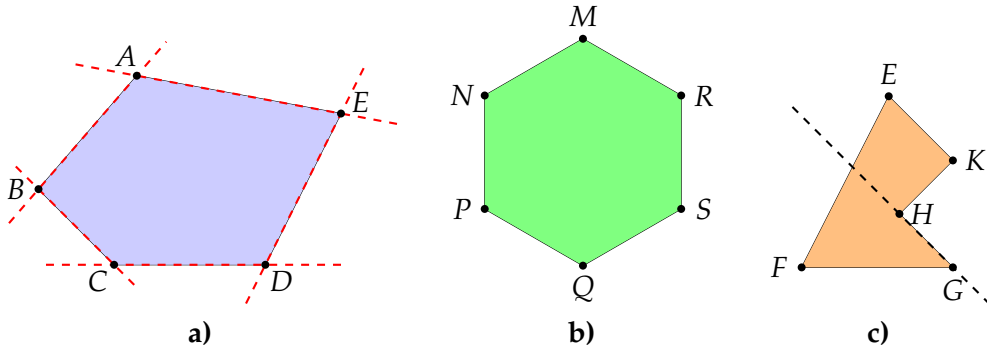
b) Gọi O là trung điểm của MN . Chứng minh $ABMO$ và $ANDO$ là các tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh ba điểm B, D, O thẳng hàng.

9.3 Đa giác đều. Phép quay

9.3.1 Khái niệm đa giác đều

Đa giác $ABCDE$ là hình gồm các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.



Hình 1

Trong Hình 1, ta có các đa giác $ABCDE, MNPQRS, EFGHK$.

Xét đa giác $ABCDE$ (Hình 1a):

- Các điểm A, B, C, D, E gọi là các **đỉnh**.
- Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA gọi là các **cạnh**.
- Các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDE}, \widehat{DEA}$ gọi là các **góc** của đa giác.

Đa giác được gọi là **đa giác lồi** nếu nó luôn nằm về một phía của bất kì đường thẳng nào đi qua một cạnh của đa giác đó. Chẳng hạn, Hình 1a,b là đa giác lồi; Hình 1c không là đa giác lồi.

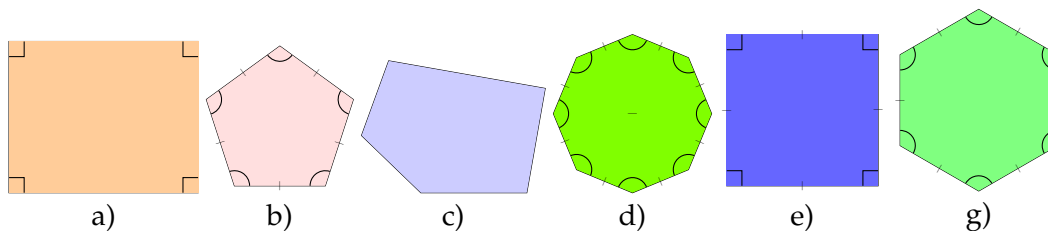
Định nghĩa 9.3.1. Đa giác lồi có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau gọi là **đa giác đều**.

Lưu ý.

- Đa giác đều có số cạnh bằng n gọi là n -giác đều.
- Với n lần lượt bằng 3, 4, 5, 6, 8, ... ta có tam giác đều, tứ giác đều (hình vuông), ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều, ...
- Từ nay, khi nói đến đa giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là đa giác lồi.

BÀI TẬP

Bài tập 9.37. Tìm và gọi tên các đa giác đều có trong Hình 3.



Hình 3

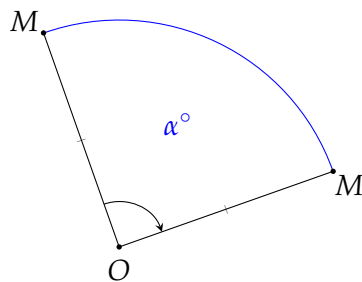
Bài tập 9.38. Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy các điểm A, B, C, D, E, F trên đường tròn $(O; R)$ sao cho số đo các cung $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DE}, \widehat{EF}, \widehat{FA}$ bằng nhau. Đa giác $ABCDEF$ có là đa giác đều không? Vì sao?

Lưu ý.

Người ta chứng minh được, với mỗi đa giác đều có đúng một điểm I cách đều tất cả các đỉnh của đa giác. Điểm I đó gọi là tâm của đa giác đó.

Bài tập 9.39. Cho đường tròn $(O; R)$, trên đó lấy các điểm M, N, P, Q, R sao cho số đo các cung $\widehat{MN}, \widehat{NP}, \widehat{PQ}, \widehat{QR}, \widehat{RM}$ bằng nhau. Đa giác $MNPQR$ có là đa giác đều không? Vì sao?

Bài tập 9.40. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA . Đa giác $MNPQRS$ có là đa giác đều không? Vì sao?

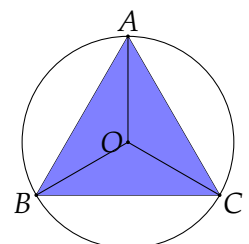
9.3.2 Phép quay**Hình 6**

Định nghĩa 9.3.2. *Phép quay thuận chiều α° ($0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$) tâm O giữ nguyên điểm O , biến điểm M khác điểm O thành điểm M' thuộc đường tròn $(O; OM)$ sao cho tia OM quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OM' thì điểm M tạo nên cung MM' có số đo α° . Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều α° tâm O . Phép quay 0° hay 360° giữ nguyên mọi điểm.*

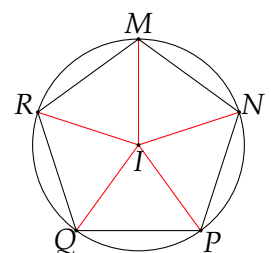
Lưu ý.

Nếu một phép quay biến các điểm M trên hình $\mathcal{H}$ thành các điểm M' thì các điểm M' tạo thành hình $\mathcal{H}'$. Khi đó, ta nói phép quay biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$. Nếu hình $\mathcal{H}'$ trùng với hình $\mathcal{H}$ thì ta nói phép quay biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó.

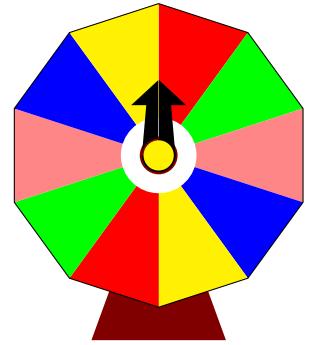
Bài tập 9.41. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hãy chỉ ra các phép quay biến tam giác ABC thành chính nó.

**Hình 7**

Bài tập 9.42. Tìm phép quay biến hình ngũ giác đều tâm I thành chính nó (Hình 8).

**Hình 8**

Bài tập 9.43. Một vòng quay may mắn có dạng hình đa giác đều 10 cạnh (Hình 9). Tìm các phép quay biến đa giác này thành chính nó.

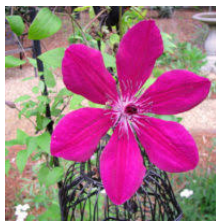
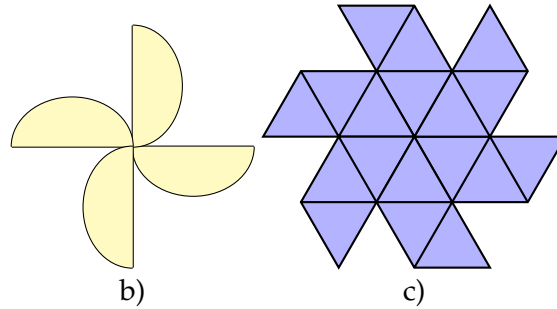


Hình 9

9.3.3 HÌNH PHẪNG ĐỀU TRONG THỰC TẾ

Tương tự như các đa giác đều, trong tự nhiên, sản xuất, thiết kế cũng có các hình phẳng đều.

Ví dụ 9.1. Các hình phẳng dưới đây là các hình phẳng đều.



d)



e)

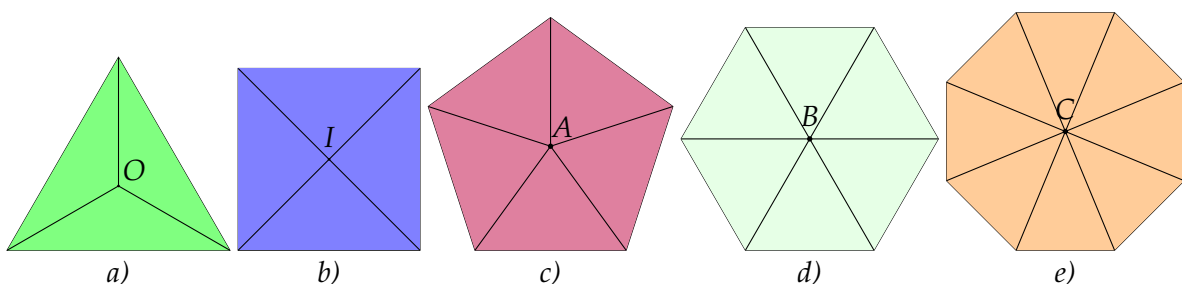


g)

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 9.44. Em hãy tìm một vài hình phẳng đều trong thực tế.

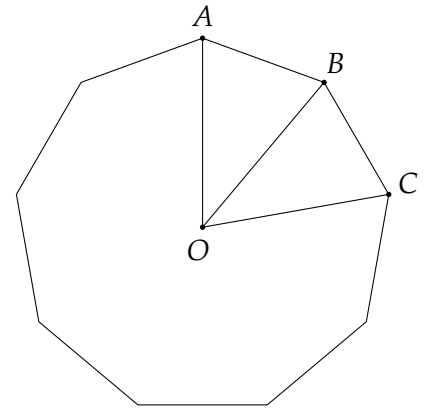
Bài tập 9.45. Gọi tên đa giác đều trong mỗi hình sau và tìm các phép quay có thể biến mỗi hình dưới đây thành chính nó.



Hình 11

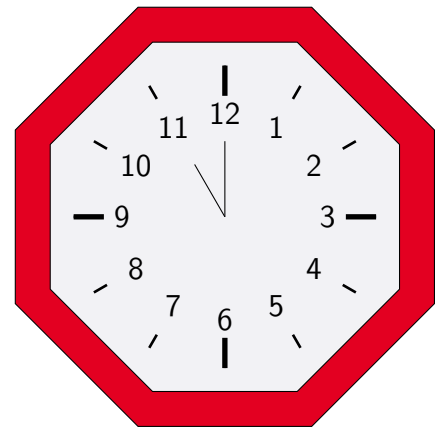
Bài tập 9.46. Cho đa giác đều 9 cạnh có tâm O và AB, BC là hai cạnh của đa giác (Hình 12).

- Tìm số đo các góc $\widehat{AOB}, \widehat{ABO}, \widehat{ABC}$.
- Tìm các phép quay biến đa giác thành chính nó.



Hình 12

Bài tập 9.47. Đường viền ngoài của chiếc đồng hồ trong Hình 13 được làm theo hình đa giác đều nào? Tìm phép quay biến đa giác này thành chính nó.



Hình 13

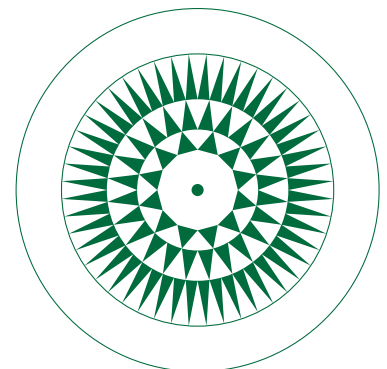
Bài tập 9.48. Cho đường tròn $(O; R)$.

- Vẽ hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều có các đỉnh nằm trên $(O; R)$.
- Tính các cạnh của các hình vừa vẽ theo R .

Bài tập 9.49. Tìm các hình phẳng có tính đều:

- Trong tự nhiên;
- Trong sản xuất, thiết kế, mỹ thuật.

Bài tập 9.50. Vòng trong của mái giếng trời hình hoa sen của nhà ga Bến Thành (Thành phố Hồ Chí Minh) có dạng đa giác đều 12 cạnh (Hình 14). Hãy chỉ ra các phép quay biến đa giác đều có thành chính nó.



Hình 14

9.4 Ôn tập chương

TRẮC NGHIỆM

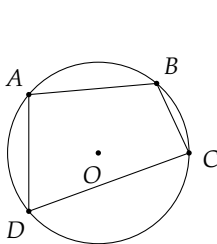
Câu 9.1. Cho tam giác đều ABC có đường cao $AH = 9$ cm. Bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác có độ dài là

- A. 6 cm. B. 3 cm. C. 4,5 cm. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

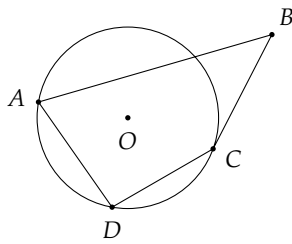
Câu 9.2. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = 4$ cm. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác có độ dài là

- A. $2\sqrt{2}$ cm. B. $\sqrt{2}$ cm. C. $4\sqrt{2}$ cm. D. $8\sqrt{2}$ cm.

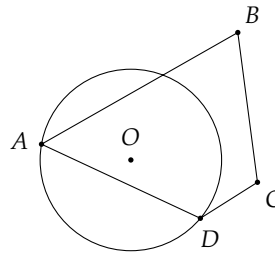
Câu 9.3. Tứ giác ở hình nào dưới đây là tứ giác nội tiếp trong đường tròn (O)?



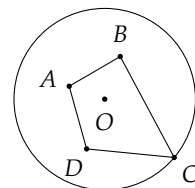
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 2. B. Hình 3. C. Hình 1. D. Hình 4.

Câu 9.4. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

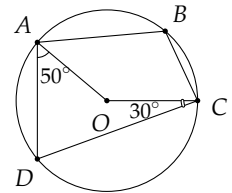
- A. Mọi tứ giác luôn nội tiếp được đường tròn.
B. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 90° .
C. Tổng số đo hai góc đối của một tứ giác nội tiếp luôn bằng 180° .
D. Tất cả các hình thang đều là tứ giác nội tiếp.

Câu 9.5. Cho tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn ($O; R$) và $\widehat{M} = 60^\circ$. Số đo của $\widehat{P}$ là

- A. 30° . B. 120° . C. 180° . D. 90° .

Câu 9.6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Biết $\widehat{DAO} = 50^\circ$, $\widehat{OCD} = 30^\circ$ (Hình 5). Số đo của $\widehat{ABC}$ là

- A. 80° . B. 90° . C. 100° . D. 110° .



Hình 5

Câu 9.7. Cho tứ giác $ABDC$ nội tiếp có $\widehat{ACD} = 60^\circ$. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

- A. $\widehat{ADC} = 60^\circ$. B. $\widehat{ADC} = 120^\circ$. C. $\widehat{ABD} = 60^\circ$. D. $\widehat{ABD} = 120^\circ$.

Câu 9.8. Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn bán kính R . Độ dài cạnh AB bằng

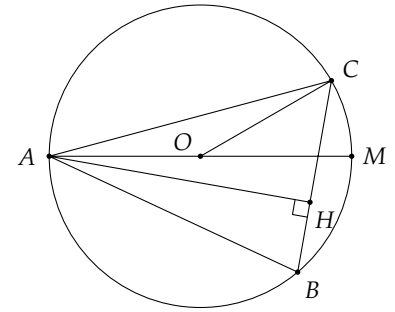
- A. R . B. $R\sqrt{3}$. C. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{R}{2}$.

Câu 9.9. Phép quay nào với O là tâm biến tam giác đều thành chính nó?

- A. 90° . B. 100° . C. 110° . D. 120° .

BÀI TẬP

Bài tập 9.51. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH ($H \in BC$) và nội tiếp đường tròn tâm O có đường kính AM (Hình 6). Chứng minh $\widehat{OAC} = \widehat{BAH}$.



Hình 6

Bài tập 9.52. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AH là đường cao. Lần lượt vẽ đường tròn (O) đường kính BH và đường tròn (O') đường kính HC .

- Xét vị trí tương đối của đường tròn (O) và (O') .
- Đường tròn (O) cắt AB tại E , đường tròn (O') cắt AC tại F . Chứng minh rằng tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của đường tròn (O) và đồng thời là tiếp tuyến của đường tròn (O') .
- Đường trung tuyến AM của tam giác ABC cắt EF tại N . Cho biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính diện tích tam giác ANF .

Bài tập 9.53. Mái nhà trong hình bên được đỡ bởi khung hình đa giác đều. Gọi tên đa giác đó. Tìm phép quay biến đa giác đó thành chính nó.

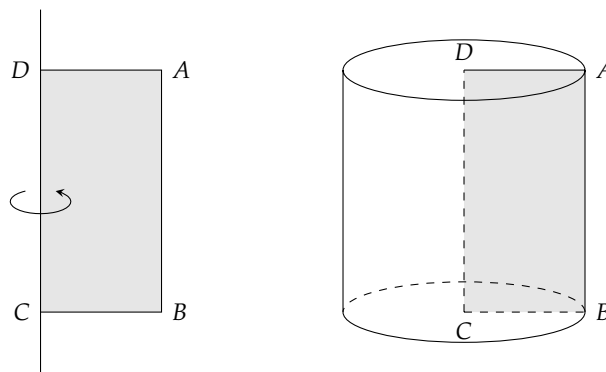


Chương 10

Các hình khối trong thực tiễn

10.1 Hình trụ

10.1.1 Khái niệm



Định nghĩa 10.1.1. Khi ta quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh CD cố định ta được hình trụ (hình trên),

- Cạnh CB, AD tạo thành hai hình tròn có cùng bán kính gọi là hai đáy hình trụ. Bán kính đáy, gọi là bán kính hình trụ.
- Cạnh AB quét thành mặt xung quanh của hình trụ, mỗi vị trí của AB được gọi là đường sinh.
- Độ dài CD gọi là chiều cao hình trụ. Các đường sinh có độ dài bằng nhau và bằng chiều cao hình trụ.

10.1.2 Công thức tính

Công thức 10.1.1.

- Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi Rh$.
- Diện tích toàn phần $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

Công thức 10.1.2. Thể tích hình trụ $V = \pi R^2 h$.

❖ **BÀI TẬP** ❖

A. Tính toán các giá trị

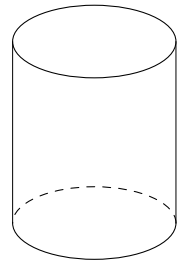
Bài tập 10.1. Bổ sung vào ô còn trống trong bảng sau để được bảng hoàn thiện (đơn vị tính là m)

	$R = 3$ và $h = 4$	$R = 2$ và $h = 3R$
Diện tích xung quanh		
Diện tích đáy		
Diện tích toàn phần		
Thể tích hình trụ		

Bài tập 10.2. Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính của đường tròn đáy. Diện tích xung quanh của hình trụ là 314 cm^2 . Tính

- Bán kính của đường tròn đáy.
- Thể tích của khối trụ. (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài tập 10.3. Một cái trụ lăn có dạng hình trụ như hình bên. Đường kính của đường tròn đáy là 42 cm , chiều dài trục lăn là 2 m . Sau khi lăn tròn 10 vòng thì trụ lăn tạo trên mặt sân mặt phẳng một diện tích là bao nhiêu? (lấy $\pi = \frac{22}{7}$).



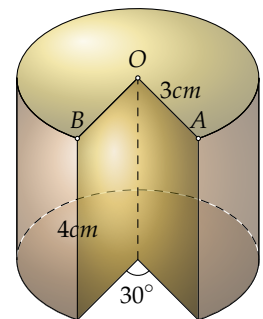
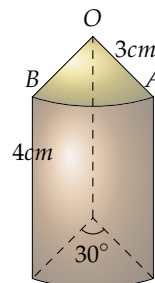
Bài tập 10.4. Một hình trụ có bán kính đáy đường tròn đáy là 16 cm , chiều cao là 9 cm . Tính

- Diện tích xung quanh của hình trụ.
- Thể tích của hình trụ (Lấy $\pi = 3,142$ làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

B. Toán ứng dụng

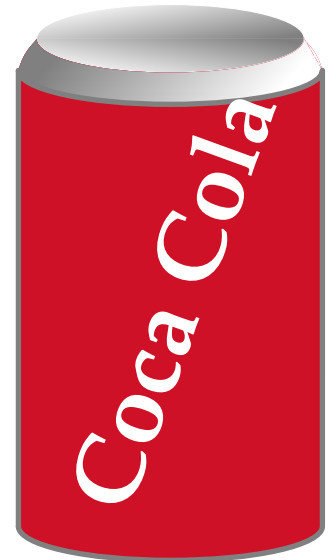
Bài tập 10.5. Một hình trụ có bán kính đáy là 3 cm , chiều cao 4 cm được đặt đứng trên mặt bàn. Một phần của hình trụ bị cắt rời theo các bán kính OA, OB và theo chiều dài thẳng đứng từ trên xuống dưới với $\widehat{AOB} = 30^\circ$.

- Tính thể tích của phần bị cắt.
- Tính thể tích của phần còn lại.
- Diện tích toàn phần của hình trụ sau khi đã bị cắt.



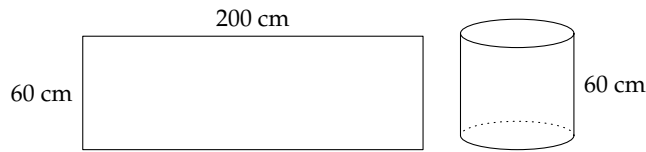
Bài tập 10.6. Nước giải khát thường đựng trong lon nhôm và cỡ lon phổ biến chứa được khoảng 330 ml chất lỏng, được thiết kế hình trụ với chiều cao khoảng $10,2 \text{ cm}$ (phần chứa chất lỏng), đường kính đáy khoảng $6,42 \text{ cm}$. Nhưng hiện nay các nhà sản xuất có xu hướng tạo ra những lon nhôm với kiểu dáng cao thon hơn. Tuy chi phí sản xuất những chiếc lon cao này tốn kém hơn, nhưng nó lại dễ đánh lừa thị giác và được người tiêu dùng ưa chuộng hơn.

- Một lon nước ngọt cao $13,41 \text{ cm}$ (phần chứa chất lỏng), đường kính đáy là $5,6 \text{ cm}$. Hỏi lon nước ngọt cao này có thể chứa được hết lượng nước ngọt của một lon có cỡ phổ biến không? Vì sao? Biết thể tích hình trụ: $V = \pi R^2 h$, với $\pi \approx 3,14$.
- Biết chi phí sản xuất một chiếc lon tỉ lệ thuận với diện tích toàn phần của lon. Hỏi chi phí sản xuất chiếc lon cao tăng bao nhiêu phần trăm so với chi phí sản xuất chiếc lon cỡ phổ biến? (làm tròn 1 chữ số thập phân). Biết diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình trụ được tính theo công thức: $S_{xq} = 2\pi R \cdot h$ và $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}$.



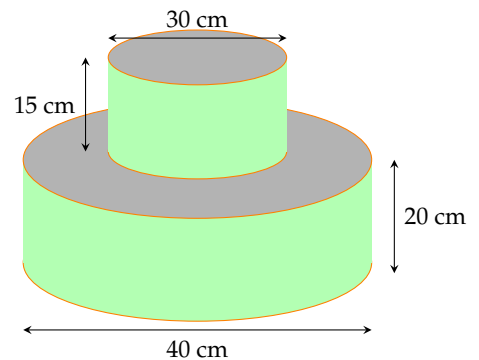
Bài tập 10.7. (1 điểm) Từ một tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $60(\text{cm}) \times 200(\text{cm})$, người ta làm một thùng nước hình trụ có chiều cao bằng $60(\text{cm})$, bằng cách gò tấm nhôm ban đầu thành mặt xung quanh

của thùng (như hình vẽ), đáy và nắp làm bằng tấm nhôm khác (giả sử các mối nối có kích thước không đáng kể).

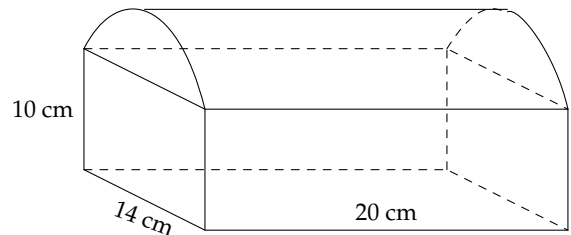


- Tính bán kính của hình tròn đáy thùng nước sau khi gò tấm nhôm hình chữ nhật thành hình trụ. (ghi kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân)
- Hỏi lượng nước của thùng có thể chứa đầy khoảng bao nhiêu lít? Biết thể tích hình trụ tròn là: $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$ với R là bán kính đáy, h là chiều cao hình trụ và $1 (\text{dm})^3 = 1 \text{ lít}$. (ghi kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài tập 10.8. (1,0 điểm) Để tổ chức sinh nhật cho con gái, chị Linh đã đặt thợ làm bánh tại cửa hàng bánh ngọt với yêu cầu bánh được làm hai tầng, tầng phía trên cao 15 (cm), bán kính tầng trên là 15 (cm), tầng phía dưới cao 20 (cm) đường kính tầng dưới là 40 (cm). Hỏi với kích thước yêu cầu của chị Linh, khi chiếc bánh được hoàn thành thì người thợ có tất cả bao nhiêu diện tích bề mặt để trang trí bánh? (mặt đáy của bánh sinh nhật không trang trí).



Bài tập 10.9. Một vật thể hình học có hình vẽ như hình bên. Phần trên là một nửa hình trụ, phần dưới là một hình hộp chữ nhật. Với các kích thước cho như hình vẽ. Thể tích của vật thể hình học này bằng bao nhiêu?

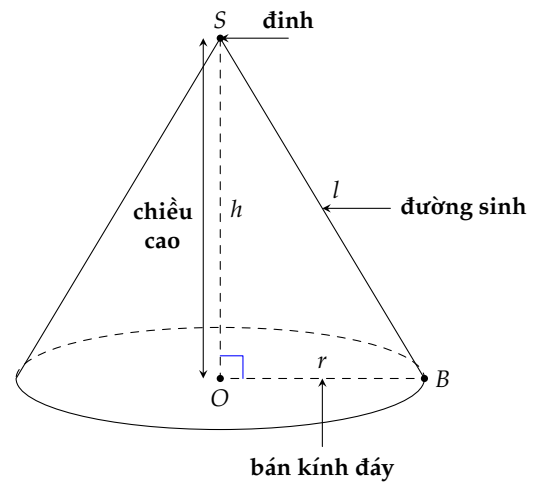


10.2 Hình nón

10.2.1 Khái niệm

Định nghĩa 10.2.1. Khi quay tam giác vuông SOB một vòng quanh cạnh góc vuông SO cố định ta được một hình nón.

- S gọi là *đỉnh* của hình nón.
- Cạnh OB quét thành hình tròn gọi là *đáy* của hình nón. Bán kính của đáy gọi là *bán kính đáy* của hình nón.
- Cạnh SB quét thành mặt xung quanh của hình nón. Mỗi vị trí của SB là một *đường sinh*.
- Độ dài SO là *chiều cao* của hình nón.



Công thức 10.2.1. Độ dài đường sinh l của hình nón có bán kính đáy r và chiều cao h được tính bởi công thức

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

10.2.2 Công thức tính diện tích và thể tích

Công thức 10.2.2. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có bán kính đáy r , độ dài đường sinh l là

$$S_{xq} = \pi r l.$$

Công thức 10.2.3. Diện tích toàn phần của hình nón bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.

Công thức 10.2.4. Thể tích V của hình nón có bán kính đáy r và chiều cao h là:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

(S là diện tích đáy của hình nón).

❖ BÀI TẬP ❖

A. Bài tập tính toán

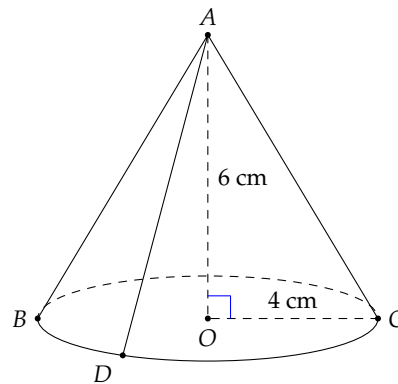
Bài tập 10.10. Điền vào ô trống giá trị thích hợp để hoàn thiện bảng tính

	$R = 3, h = 5$	$R = 3, l = 5$	$h = 3, l = 5$
Diện tích xung quanh			
Diện tích toàn phần			
Thể tích			

Bài tập 10.11. Quan sát hình nón (Hình 3) và cho biết:

- a) Đỉnh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón.

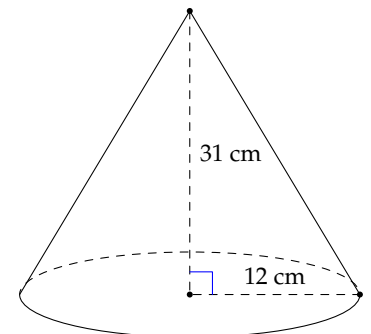
- b) Trên hình vẽ có những đường sinh nào? Tính độ dài đường sinh.
- c) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình nón.
- d) Tính thể tích hình nón.



Hình 3

Bài tập 10.12. Chiếc mũ ở Hình 4 có dạng hình nón.

- a) Xác định độ dài chiều cao và bán kính đáy của mũ.
- b) Tính diện tích xung quanh hình nón.
- c) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần hình nón.
- d) Tính thể tích hình nón.



Hình 4

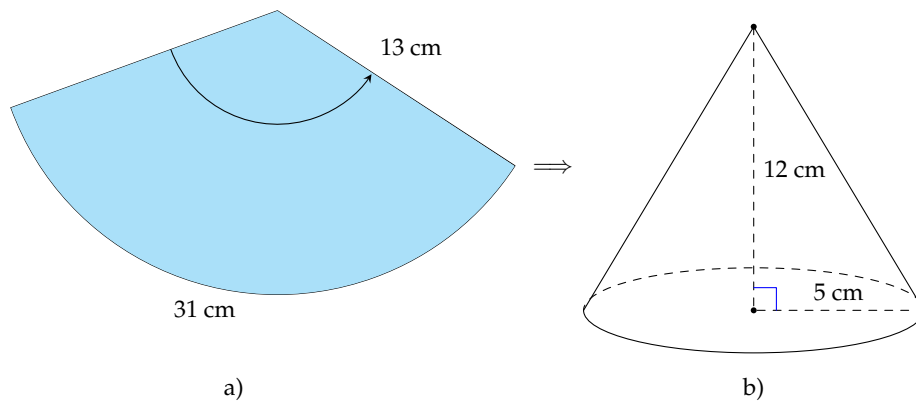
Bài tập 10.13. Các em hãy vẽ hình, sau đó tính diện tích xung quanh, thể tích của hình nón trong các trường hợp sau

- a) Bán kính đáy $r = 3$ cm, chiều cao $h = 4$ cm.
- b) Đường kính của đáy $d = 10$ m và chiều cao $h = 12$ m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- c) Bán kính đáy 3 cm, chiều cao 5 cm.
- d) Bán kính đáy 6 cm, chiều cao 4 cm.

B. Toán ứng dụng

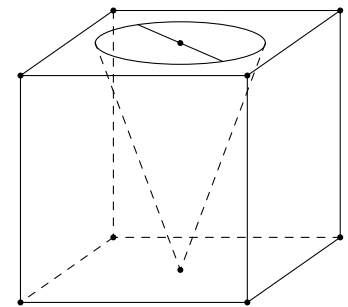
Bài tập 10.14. Tạo lập hình nón có chiều cao 12 cm và bán kính đáy 5 cm theo hướng dẫn sau:

- Cắt tấm bìa hình quạt tròn có bán kính bằng độ dài đường sinh $l = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (cm), độ dài cung của hình quạt tròn bằng 10π cm ≈ 31 cm (Hình 5a).
- Cắt tấm bìa hình tròn bán kính 5 cm.
- Ghép và dán hai mép hình quạt tròn lại với nhau sao cho cung của nó tạo thành đường tròn, rồi dán tấm bìa hình tròn ở trên vào làm đáy, ta được hình nón như Hình 5b.



Hình 5

Bài tập 10.15. Từ một khối gỗ có dạng hình lập phương cạnh 6 cm, người ta khoét một hình nón có đường kính mặt đáy là 4 cm và đỉnh của hình nón chạm vào mặt đáy của khối gỗ (Hình 10). Hãy tính thể tích của phần khối gỗ còn lại (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

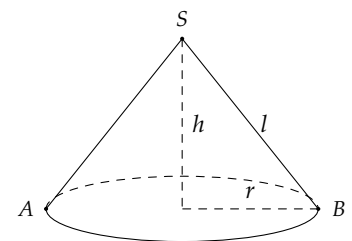


Hình 10

Bài tập 10.16. (1 điểm) Nón lá là biểu tượng cho sự dịu dàng, bình dị, thân thiện của người Phụ nữ Việt Nam từ ngàn đời nay; nón lá bài thơ là một đặc trưng của xứ Huế. Một chiếc nón lá hoàn thiện cần qua nhiều công đoạn từ lên rừng hái lá, rồi sấy lá, mở, ủi, chọn lá, xây độn vành, chằm, cắt lá, nức vành, cắt chỉ, ... Nhằm làm đẹp và tôn vinh thêm cho chiếc nón lá xứ Huế, các nghệ nhân còn ép tranh và vài dòng thơ vào giữa hai lớp lá.

Khung của nón lá có dạng hình nón được làm bởi các thanh gỗ nối từ đỉnh tới đáy như các đường sinh l , 16 vành nón được làm từ những thanh tre mảnh nhỏ, dẻo dai uốn thành những vòng tròn có đường kính to, nhỏ khác nhau, cái nhỏ nhất to bằng đồng xu.

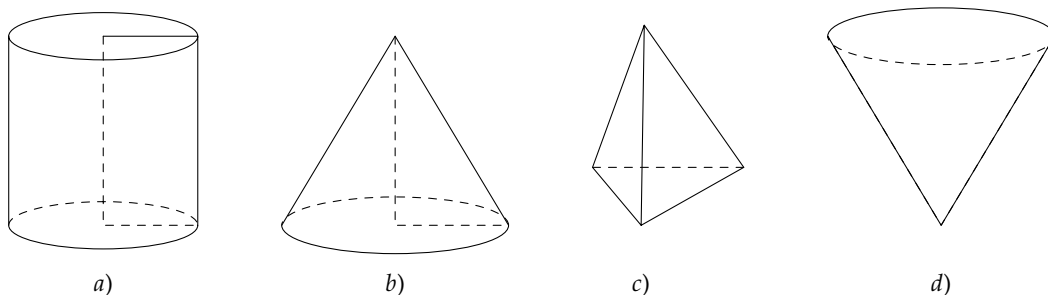
- Đường kính $d = 2r$ của vành nón lớn nhất khoảng 40 cm;
- Chiều cao h của chiếc nón lá khoảng 18 cm.



- Tính độ dài của thanh tre uốn thành vòng tròn lớn nhất của vành chiếc nón lá (không kể phần chập nối), biết $\pi = 3,14$.
- Tính diện tích phần lá phủ xung quanh của chiếc nón lá (không kể phần chập nối tính gần đúng đến hàng đơn vị). Biết diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi \cdot r \cdot l$.

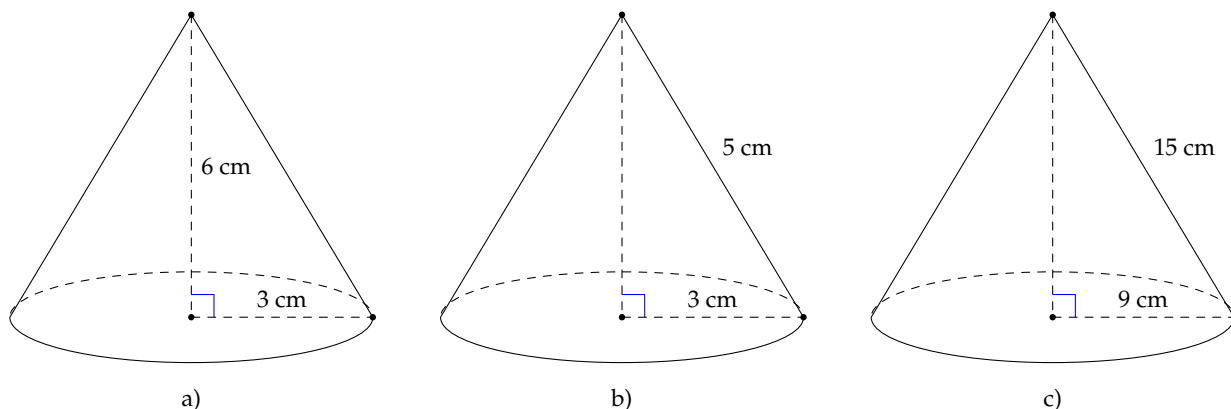
❖ LUYỆN TẬP ❖

Bài tập 10.17. Trong các hình sau đây, hình nào là hình nón?



Hình 11

Bài tập 10.18. Hãy cho biết chiều cao, bán kính đáy, độ dài đường sinh và diện tích xung quanh của mỗi hình nón sau:



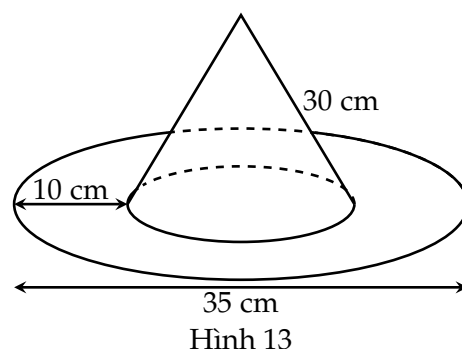
Hình 12

Bài tập 10.19. Tạo lập hình nón có bán kính đáy bằng 4 cm, chiều cao bằng 7 cm.

Bài tập 10.20. Tính thể tích của hình nón cho biết

- Bán kính đáy 6 cm, chiều cao 12 cm;
- Đường kính của mặt đáy là 7 m, chiều cao 10 m;
- Diện tích đáy 152 cm^2 , chiều cao 6 cm;
- Chu vi đáy 130 cm, chiều cao 24 cm.

Bài tập 10.21. Một cái mũ chú hề có kích thước như Hình 13. Hãy tính tổng diện tích giấy làm nên chiếc mũ (không tính phần hao hụt, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



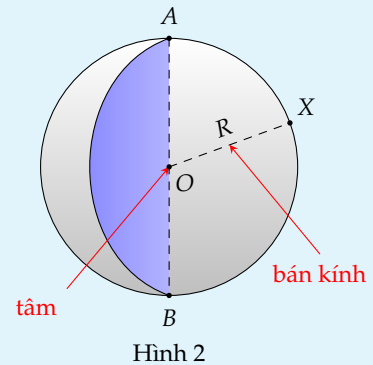
Hình 13

10.3 Hình cầu

10.3.1 Khái niệm

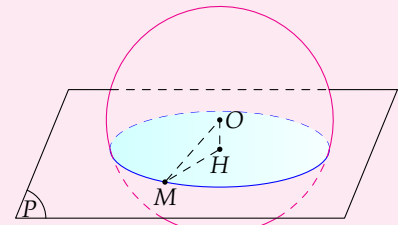
Định nghĩa 10.3.1.

- Khi quay nửa hình tròn tâm O , bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định ta được một *hình cầu* tâm O , bán kính R (Hình 2).
- Khi đó, nửa đường tròn quét thành *mặt cầu*. Ta cũng gọi O và R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu đó.
- Đoạn thẳng đi qua tâm của hình cầu với hai đầu mút nằm trên mặt cầu gọi là đường kính của hình cầu (hay mặt cầu).



Hình 2

Tính chất 10.3.1. Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần chung của mặt cầu và mặt phẳng (còn gọi là mặt cắt) là một hình tròn (Hình 6).



Hình 6

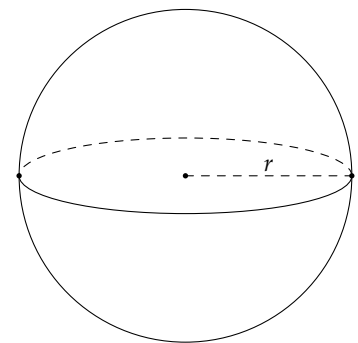
10.3.2 Diện tích và thể tích

Công thức 10.3.1. Diện tích S của mặt cầu có bán kính r là

$$S = 4\pi r^2.$$

Công thức 10.3.2. Thể tích của hình cầu có bán kính R là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



Hình 11

❖ BÀI TẬP ❖

A. Bài tập tính toán

Bài tập 10.22. Điền vào ô trống để hoàn thiện bảng

	$R = 2$	$R = \sqrt{3}$	$R = \frac{1}{3}$	$R = 2\sqrt{2}$
Diện tích				
Thể tích				

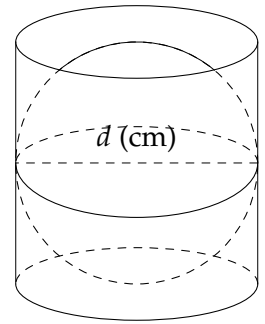
Bài tập 10.23. Tính diện tích của mặt cầu có bán kính 1 m.

Bài tập 10.24. Tìm diện tích bề mặt của Mặt Trăng, biết đường kính của Mặt Trăng là khoảng 3474 km.

Bài tập 10.25. Tính thể tích của hình cầu có bán kính 6 cm.

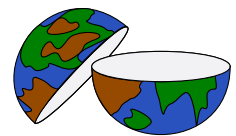
Bài tập 10.26. Một quả bóng rổ (khi bơm căng) có đường kính 24 cm . Tìm thể tích của quả bóng rổ đó (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài tập 10.27. Một hình cầu đặt vừa khít vào bên trong một hình trụ như hình vẽ (chiều cao của hình trụ bằng độ dài đường kính của hình cầu) thì thể tích của nó bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình trụ. Nếu đường kính của hình cầu là d thì thể tích của hình trụ là bao nhiêu?



B. Nhận dạng mặt cắt (thiết diện)

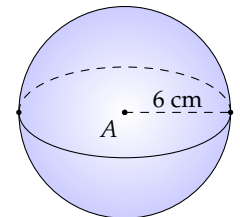
Bài tập 10.28. Một khối đá hình cầu được cắt đôi để tạo các vật trang trí (Hình 7). Mặt cắt của chúng có dạng hình gì?



Bài tập 10.29. Mặt trên của bình gốm (Hình 8) được xem là phần chung của mặt phẳng và mặt cầu. Mặt trên của bình gốm có dạng hình gì?



Bài tập 10.30. Quan sát hình cầu ở Hình 16 . Hãy cho biết tâm, bán kính, diện tích mặt cầu và thể tích của hình cầu đó.



Hình 16

Bài tập 10.31. Bể cá ở Hình 17 là một phần của một hình cầu. Hỏi mặt nước trong bể cá có dạng hình gì?



Hình 17

Bài tập 10.32. Cắt một hình cầu có bán kính 5 cm bằng một mặt phẳng đi qua tâm ta sẽ được hai nửa hình cầu. Nam cần sơn tất cả các mặt của một nửa hình cầu này (Hình 18). Hỏi diện tích Nam cần sơn là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

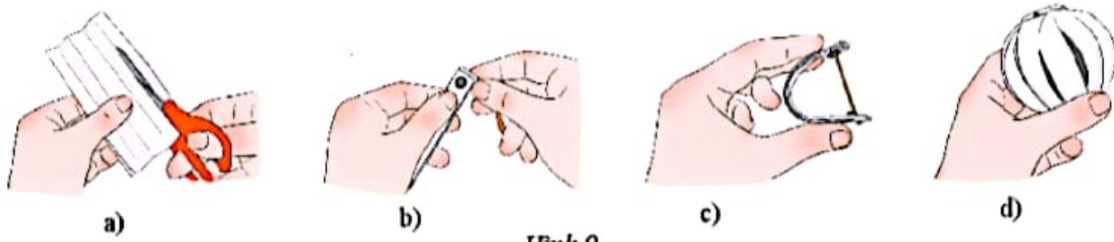


Hình 18

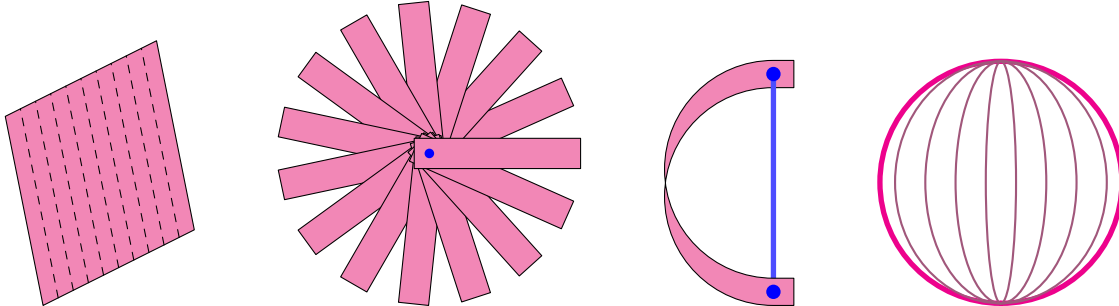
C. Toán ứng dụng

Bài tập 10.33. Tạo lập hình cầu (mặt cầu) bằng cách gấp giấy theo hướng dẫn sau:

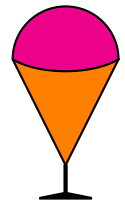
- Cắt các mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài 20 cm, chiều rộng 1 cm (Hình 9a).
- Đục lỗ rồi dùng nút gắn vào nhau (Hình 9b).
- Cố định hai lỗ bằng que tre có độ dài bằng $\frac{2x}{\pi}$ (khoảng 0,6x) với x là khoảng cách giữa hai cái lỗ (Hình 9c).
- Tách các mảnh giấy ra và trải đều, hình được tạo thành có dạng hình cầu (Hình 9d).



Hình 9

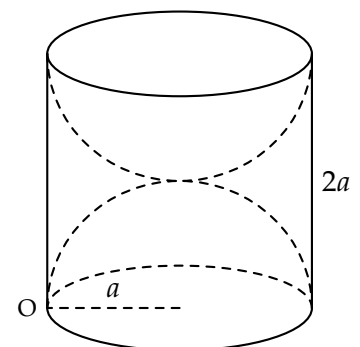


Bài tập 10.34. Phần bên trong của một cái li có dạng hình nón có bán kính đáy 2 cm, độ dài đường sinh 8 cm. Người ta đựng đầy kem trong li và thêm một nửa hình cầu kem phía trên (Hình 19). Tính thể tích của phần kem (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

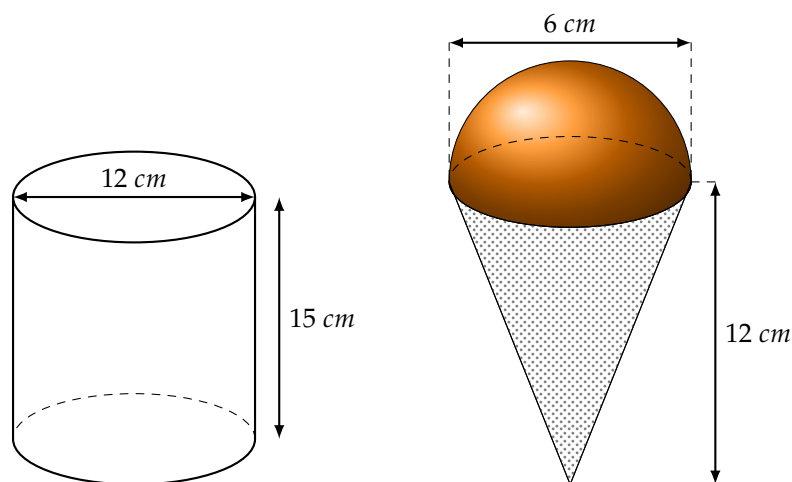


Hình 19

Bài tập 10.35. Một khối gỗ dạng hình trụ đứng, bán kính đường tròn đáy là a (cm), chiều cao là $2a$ (cm). Người ta khoét rỗng hai nửa hình cầu như hình vẽ. Diện tích toàn bộ của khối gỗ là bao nhiêu?



Bài tập 10.36. Một hộp kem hình trụ có đường kính 12 cm và chiều cao 15 cm đựng đầy kem. Kem sẽ được chia vào các bánh ốc quế hình nón có chiều cao 12 cm và đường kính 6 cm, có hình bán cầu trên đỉnh như hình vẽ. Hãy tìm số que kem có thể chia được.



10.4 Ôn tập chương

❖ TRẮC NGHIỆM ❖

Câu 10.1. Trong một hình trụ

- A. độ dài của đường sinh là chiều cao của hình trụ.
- B. đoạn nối hai điểm bất kì trên hai đáy là đường sinh.
- C. chiều cao là độ dài đoạn nối hai điểm bất kì trên hai đáy.
- D. hai đáy có độ dài bán kính khác nhau.

Câu 10.2. Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy là 4 cm và chiều cao 8 cm là

- A. $32\pi \text{ cm}^2$.
- B. $48\pi \text{ cm}^2$.
- C. $64\pi \text{ cm}^2$.
- D. $128\pi \text{ cm}^2$.

Câu 10.3. Thể tích của hình trụ có bán kính đáy 6 cm, chiều cao 10 cm là

- A. $360\pi \text{ cm}^3$.
- B. $600\pi \text{ cm}^3$.
- C. $720\pi \text{ cm}^3$.
- D. $1200\pi \text{ cm}^3$.

Câu 10.4. Hình nón có chiều cao 3 cm, bán kính đáy 4 cm, thì độ dài đường sinh là

- A. 3 cm.
- B. 4 cm.
- C. 7 cm.
- D. 5 cm.

Câu 10.5. Diện tích xung quanh của hình nón có chiều cao 12 cm, bán kính đáy 5 cm là

- A. $130\pi \text{ cm}^2$.
- B. $60\pi \text{ cm}^2$.
- C. $65\pi \text{ cm}^2$.
- D. $90\pi \text{ cm}^2$.

Câu 10.6. Thể tích của hình nón có chiều cao 9 cm, bán kính đáy 12 cm là

- A. $432\pi \text{ cm}^3$.
- B. $324\pi \text{ cm}^3$.
- C. $324\pi \text{ cm}^2$.
- D. $432\pi \text{ cm}^2$.

Câu 10.7. Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trên mặt cầu bán kính 20 cm và đi qua tâm là

- A. 40 m.
- B. 20 m.
- C. 40 cm.
- D. 80 cm.

Câu 10.8. Diện tích của mặt cầu bán kính 5 cm là

- A. $25\pi \text{ cm}^2$.
- B. $50\pi \text{ cm}^2$.
- C. $100\pi \text{ cm}^2$.
- D. $125\pi \text{ cm}^2$.

Câu 10.9. Thể tích của hình cầu bán kính là 12 cm là

- A. $120\pi \text{ cm}^3$.
- B. $2304\pi \text{ m}^3$.
- C. $1000\pi \text{ cm}^3$.
- D. $2304\pi \text{ cm}^3$.

❖ BÀI TẬP ❖

Bài tập 10.37. Người ta cần sơn mặt bên trong của một chao đèn có dạng hình nón (không tính đáy) với bán kính đáy là 20 cm, độ dài đường sinh là 30 cm (Hình 1c). Hỏi diện tích cần sơn là bao nhiêu?

Bài tập 10.38. Bạn Nam được tặng một quả bóng đá có đường kính 24 cm (Hình 2). Em hãy giúp bạn ấy tính xem cần bao nhiêu mét vuông da để chế tạo quả bóng, giả sử rằng diện tích các mép nối không đáng kể.



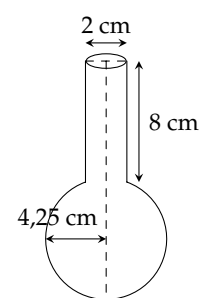
Bài tập 10.39. Hộp phô mai hình trụ có đường kính đáy 12,2 cm, chiều cao 2,4 cm.

- a) Biết rằng 8 miếng phô mai được xếp nằm sát nhau vừa khít trong hộp (Hình 3). Hỏi thể tích một miếng phô mai là bao nhiêu?
- b) Người ta gói từng miếng phô mai bằng một loại giấy đặc biệt. Giả sử phần giấy gói vừa khít miếng phô mai. Hãy tính diện tích phần giấy gói mỗi miếng phô mai.



Hình 3

Bài tập 10.40. Ta coi một ống nghiệm có phần trên là hình trụ và phần dưới là hình cầu (Hình 4). Hãy tính thể tích nước cần để đổ đầy vào ống nghiệm, coi bề dày của ống nghiệm không đáng kể.



Hình 4

Tài liệu tham khảo

- [1] Đặng Đức Trọng. *Bồi dưỡng năng lực tự học toán 9*, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh, 2018.
- [2] Trần Nam Dũng. *Toán 9, Chân Trời Sáng Tạo*, Nhà xuất bản Giáo Dục 2023.
- [3] Hà Huy Khoái. *Toán 9, Kết Nối Tri Thức với Cuộc Sống*, Nhà xuất bản Giáo Dục 2023.
- [4] Đỗ Đức Thái. *Toán 9, Cánh Diều*, Nhà xuất bản Giáo Dục 2023