

NGUYỄN ĐỨC TẤN - TẠ TOÀN

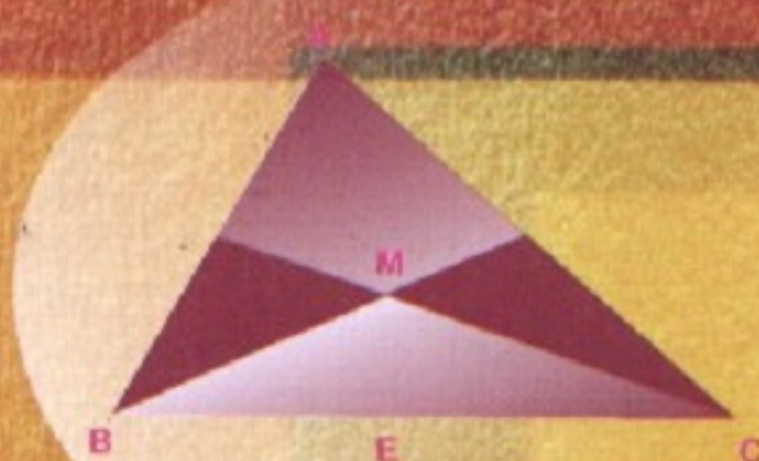
500

Bài toán cơ bản và nâng cao

6

(Tái bản lần thứ ba)

- BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
- LUYỆN THI HỌC SINH GIỎI CÁC CẤP - QUỐC GIA
- LUYỆN THI GIẢI LỄ QUÝ ĐÓN - LƯƠNG THẾ VINH



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

NGUYỄN ĐỨC TẤN – TẠ TOÀN

TK 51(073)
322

500 BÀI TOÁN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO 6

(Tái bản lần thứ 2)

TRƯỜNG THCS GHỀNH RĂNG
THƯ VIỆN

- BỒ I DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
- LUYỆN THI HỌC SINH GIỎI CẤP QUẬN (HUYỆN),
THI GIẢI LÊ QUÝ ĐÔN, GIẢI LƯƠNG THẾ VINH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2007

500 BÀI TOÁN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO 6

Nguyễn Đức Tấn - Tạ Toàn

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
KP 6, P. Linh Trung, Q. Thủ Đức, TPHCM
ĐT: 7242181 + 1421, 1422, 1423, 1425, 1426
Fax: 7242194; **Email:** vnuhp@vnuhcm.edu.vn



Chịu trách nhiệm xuất bản
PGS-TS NGUYỄN QUANG ĐIỂN

Biên tập
NGUYỄN TIẾN NAM
NGUYỄN HUỲNH

Sửa bản in
TRẦN VĂN THẮNG

Trình bày bìa
XUÂN VIỆT

Đơn vị/Người liên kết:

Công ty Đức Trí



TK.02T(V)
ĐHQG.HCM-07

279-2006/CXB/138-28

T.TK.823-06(T)

In 3.000 cuốn khổ 16 x 24cm. In tại Công ty in Hưng Phú. Số đăng ký kế hoạch xuất bản: 279 - 2006/CXB/138 - 28/ĐHQGTPHCM. Quyết định xuất bản số: 14/QĐ-ĐHQGTPHCM/TB cấp ngày 04/1/2007 của NXB ĐHQGTPHCM. In xong và nộp lưu chiểu Quý II/2007.

LỜI NÓI ĐẦU

Quyển sách “500 bài toán cơ bản và nâng cao 6” được biên soạn nhằm giúp các em học sinh giỏi toán có một tài liệu ôn tập, rèn luyện giải toán để chuẩn bị cho các kỳ thi giải toán cấp quận (huyện), giải Lương Thế Vinh, giải Lê Quý Đôn.

Quyển sách gồm hai phần:

- **Phần số học**

Chương I: Ôn tập và bổ túc về số tự nhiên

Chương II: Số nguyên

Chương III: Phân số

- **Phần hình học**

Chương I: Đoạn thẳng

Chương II: Góc

Mặc dù đã rất cố gắng trong quá trình biên soạn song chắc hẳn không tránh khỏi thiếu sót. Rất mong nhận được ý kiến đóng góp từ bạn đọc.

Nhóm biên soạn

BỒI DƯỠNG TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2+3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

PHẦN SỐ HỌC

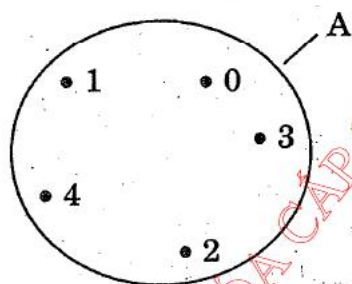
CHƯƠNG I

ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

§1. TẬP HỢP - PHẦN TỬ CỦA TẬP HỢP

- Khái niệm tập hợp thường gặp trong toán học và cả trong đời sống.
- Thường đặt tên tập hợp bằng chữ cái in hoa.
- Nếu phần tử a thuộc tập hợp A , kí hiệu $a \in A$. Nếu phần tử b không thuộc tập hợp A , kí hiệu $b \notin A$.
- Để viết một tập hợp, thường có hai cách:
 - Liệt kê các phần tử của tập hợp.
 - Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

Người ta còn minh họa tập hợp bằng một vòng kín như ở hình sau gọi là biểu đồ Ven.



$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Viết tập hợp A các số tự nhiên lớn hơn 1997 và nhỏ hơn 2003 bằng hai cách.

Điền kí hiệu thích hợp vào ô vuông.

$$1997 \square A$$

$$2002 \square A$$

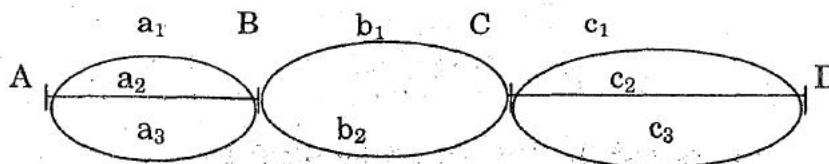
$$2004 \square A$$

Bài 2. Cho hai tập hợp $A = \{10; 8; 2\}$ và $B = \{5; 7; 9; 4\}$

Viết các tập hợp gồm hai phần tử trong đó một phần tử thuộc A , một phần tử thuộc B .

Nếu tập hợp A có m phần tử, tập hợp B có n phần tử, các phần tử của A và của B khác nhau thì có bao nhiêu tập hợp gồm hai phần tử, trong đó một phần tử thuộc A , một phần tử thuộc B ?

Bài 3. Có ba con đường a_1, a_2, a_3 đi từ A đến B, hai con đường b_1, b_2 đi từ B đến C và ba con đường c_1, c_2, c_3 đi từ C đến D (hình vẽ).



Viết tập hợp M các con đường đi từ A đến D lần lượt qua B và qua C.

Bài 4. Cho dãy số 1; 6; 11; 16;.....

a) Nêu quy luật của dãy số trên.

b) Viết tập hợp B gồm 10 số hạng đầu tiên của dãy số đó.

Bài 5. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp đó.

$$C = \{x \in \mathbb{N} / x = m \times (m + 1) \text{ với } m = 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Bài 6. Cho dãy số: 0, 1, 4, 9, 16, ..., 2500. Viết tập hợp D gồm các số hạng của dãy số bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó. Tập hợp D có bao nhiêu phần tử?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1

Cách 1: $A = \{1998; 1999; 2000; 2001; 2002\};$

Cách 2: $A = \{x \in \mathbb{N} / 1997 < x < 2003\};$

$1997 \notin A; 2002 \in A; 2004 \notin A.$

Bài 2. Các tập hợp cần tìm là:

$\{10; 5\}; \{10; 7\}; \{10; 9\}; \{10; 4\}; \{8; 5\}; \{8; 7\}; \{8; 9\}; \{8; 4\}; \{2; 5\}; \{2; 7\}; \{2; 9\}; \{2; 4\}$

Nếu tập hợp A có m phần tử, tập hợp B có n phần tử, các phần tử của A và của B khác nhau thì số lượng tập hợp gồm hai phần tử trong đó một phần tử thuộc A, một phần tử thuộc B là: $m \times n$.

Bài 3

Nếu đi từ A đến B bằng con đường a_1 thì có hai con đường đi đến C là: a_1b_1, a_1b_2 . Tiếp tục đi đến D thì có tất cả sáu con đường đi từ A đến D qua B và qua C là: $a_1b_1c_1, a_1b_1c_2, a_1b_1c_3, a_1b_2c_1, a_1b_2c_2, a_1b_2c_3$.

Nếu đi từ A đến B bằng con đường a_2 thì có hai con đường đi đến C là: a_2b_1, a_2b_2 . Tiếp tục đi đến D thì có tất cả sáu con đường đi từ A đến D qua B và qua C là: $a_2b_1c_1, a_2b_1c_2, a_2b_1c_3, a_2b_2c_1, a_2b_2c_2, a_2b_2c_3$.

Nếu đi từ A đến B bằng con đường a_3 thì có hai con đường đi đến C là: a_3b_1, a_3b_2 . Tiếp tục đi đến D thì có tất cả sáu con đường đi từ A đến D qua B và qua C là: $a_3b_1c_1, a_3b_1c_2, a_3b_1c_3, a_3b_2c_1, a_3b_2c_2, a_3b_2c_3$.

Tập hợp $M = \{a_1b_1c_1; a_1b_1c_2; a_1b_1c_3; a_1b_2c_1; a_1b_2c_2; a_1b_2c_3; a_2b_1c_1; a_2b_1c_2; a_2b_1c_3; a_2b_2c_1; a_2b_2c_2; a_2b_2c_3; a_3b_1c_1; a_3b_1c_2; a_3b_1c_3; a_3b_2c_1; a_3b_2c_2; a_3b_2c_3\}$.

Bài 4

a) Số hạng đầu của dãy là 1.

Số hạng sau hơn số hạng kề trước 5 đơn vị.

b) $B = \{1; 6; 11; 16; 21; 26; 31; 36; 41; 46\}$.

Bài 5

$m = 0$, ta có $m \times (m + 1) = 0 \times (0 + 1) = 0$;

$m = 1$, ta có $m \times (m + 1) = 1 \times (1 + 1) = 2$;

$m = 2$, ta có $m \times (m + 1) = 2 \times (2 + 1) = 6$;

$m = 3$, ta có $m \times (m + 1) = 3 \times (3 + 1) = 12$;

$m = 4$, ta có $m \times (m + 1) = 4 \times (4 + 1) = 20$.

Vậy $C = \{0; 2; 6; 12; 20\}$.

Bài 6

$0 = 0 \times 0; 1 = 1 \times 1; 4 = 2 \times 2$

$9 = 3 \times 3; 16 = 4 \times 4; 2500 = 50 \times 50$

Vậy $D = \{x \in \mathbb{N} / x = a \times a \text{ với } a = 0; 1; 2; \dots; 50\}$

Tập hợp D có 51 phần tử.

§2. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

• Các số $0; 1; 2; \dots$ là các số tự nhiên.

Tập hợp các số tự nhiên, kí hiệu là $\mathbb{N}$.

Tập hợp các số tự nhiên khác 0, kí hiệu là $\mathbb{N}^*$.

• Trong hai số tự nhiên khác nhau, có một số nhỏ hơn số kia. Chú ý rằng $a \leq b$ là $a < b$ hoặc $a = b$.

- Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.
- Mỗi số tự nhiên có một số liền sau duy nhất.
- Số 0 là số tự nhiên nhỏ nhất. Không có số tự nhiên lớn nhất.
- Tập hợp các số tự nhiên có vô số phần tử.

BÀI TẬP

Bài 7

- a) Viết số tự nhiên liền sau mỗi số: 1234; 55555; x (Với $x \in \mathbb{N}$);
- b) Viết số tự nhiên liền trước mỗi số: 2222; 10001; y (Với $y \in \mathbb{N}^*$).

Bài 8

Cho hai số tự nhiên 2002, 2003. Hãy tìm số tự nhiên a để ba số có được tạo thành là ba số tự nhiên liên tiếp.

Bài 9

Tìm các số tự nhiên a, b, c sao cho: $227 \leq a < b < c \leq 230$.

Bài 10

- a) Có bao nhiêu số tự nhiên lớn hơn 2002?
- b) Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 2002?
- c) Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn n ? ($n \in \mathbb{N}^*$).

Bài 11

- a) Có bao nhiêu số chẵn nhỏ hơn 10?
- b) Có bao nhiêu số chẵn nhỏ hơn 11?
- c) Có bao nhiêu số chẵn nhỏ hơn n ? ($n \in \mathbb{N}$).

Bài 12. Cho các số tự nhiên 1; 2; 3; ... ; n ($n \geq 19$). Chia các số đó thành hai nhóm một cách tùy ý.

Chứng minh rằng luôn chọn được từ mỗi nhóm một số sao cho hai số được chọn có ít nhất một chữ số giống nhau.

Bài toán còn đúng không với $n = 18$?

Bài 13

Cho n số tự nhiên 1; 2; 3; ... ; n ($n \geq 3$). Hãy chỉ ra cách chia các số đã cho thành ba nhóm mà không tìm được cách chọn mỗi nhóm một số sao cho ba số được chọn ra có ít nhất một chữ số giống nhau.

Bài 14

Cho $A = \{7; 9; 0; 4; 8; 1\}$

Trên tia số, những số nào của A ở bên trái số 4? Những số nào ở bên phải số 4?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 7. a) Số tự nhiên liền sau của 1234; 55555; x lần lượt là 1235; 55556; $x + 1$.

b) Số tự nhiên liền trước mỗi số 2222; 10001; y lần lượt là 2221; 10000; $y - 1$ ($y \in \mathbb{N}^*$).

Bài 8

2002; 2003 là hai số tự nhiên liên tiếp. Do đó $a = 2001$ hoặc $a = 2004$.

Bài 9

$227 \leq a < b < c \leq 230$; $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Nếu $a = 227$ ta có $b = 228$ khi đó $c = 229$ hoặc $c = 230$;

Nếu $a = 227$ ta có $b = 229$ thì $c = 230$;

Nếu $a = 228$ ta có $b = 229$ thì $c = 230$.

Bài 10

a) Có vô số số tự nhiên lớn hơn 2002

b) Có 2002 số tự nhiên nhỏ hơn 2002

c) Có n số tự nhiên nhỏ hơn n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Bài 11

a) Có 5 số chẵn nhỏ hơn 10 (đó là 0; 2; 4; 6; 8)

b) Có 6 số chẵn nhỏ hơn 11 (đó là 0; 2; 4; 6; 8; 10)

c) • Xét n chẵn, đặt $n = 2 \times m$ (với $m \in \mathbb{N}$)

Số số chẵn nhỏ hơn n là m ($= n : 2$) (đó là 0; 2; 4; ...; $2 \times (m - 1)$)

• Xét n lẻ, đặt $n = 2 \times p + 1$ (với $p \in \mathbb{N}$)

Số số chẵn nhỏ hơn n là $p + 1$ ($= (n + 1) : 2$) (đó là 0; 2; 4; ...; $2 \times p$).

Bài 12. Giả sử không phân chia được khi $n \geq 19$ và giả sử số 10 ở nhóm 1 khi đó nhóm 1 phải chứa các số 11, 12, 13; ...; 18; 19 ... suy ra các số 1; 2; ...; 9 cũng thuộc nhóm 1.

Do đó nhóm 2 không có chứa số nào. Vô lý!

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Với $n = 18$, bài toán không đúng.

Ví dụ số 9 ở nhóm 1 các số còn lại ở nhóm 2.

Bài 13

Chia $1; 2; \dots; n$ thành ba nhóm như sau:

Nhóm 1 chỉ có số 1.

Nhóm 2 chỉ có số 2.

Nhóm 3 các số còn lại.

Không tìm được cách chọn mỗi nhóm một số mà ba số được chọn ra có ít nhất một chữ số giống nhau.

CHÚ Ý:

Hãy thử tìm cách chia khác và hãy giải bài toán rất hay sau:

BÀI TOÁN: Cho n số tự nhiên $1; 2; \dots; n$ ($n \geq 3$). Có tìm được cách chia nào để các số đã cho tạo thành ba nhóm mà để luôn luôn chọn được từ mỗi nhóm một số sao cho ba số được chọn ra có ít nhất một chữ số giống nhau?

Bài 14. Trên tia số những số của A ở bên trái số 4 là 0; 1; những số ở bên phải số 4 là 7; 8; 9.

§3. GHI SỐ TỰ NHIÊN

Với mười chữ số, ta ghi được mọi số tự nhiên. Một số tự nhiên có thể có một, hai, ba, ... chữ số.

Chú ý:

Khi viết các số tự nhiên có từ năm chữ số trở lên, thường viết tách riêng từng nhóm ba chữ số kể từ phải sang trái cho dễ đọc.

Cần phân biệt: số với chữ số, số chục với chữ số hàng chục, số trăm với chữ số hàng trăm, ...

Cách ghi số nêu trên là cách ghi số trong hệ thập phân. Trong hệ thập phân, cứ mười đơn vị ở một hàng thì làm thành một hàng đơn vị ở hàng liền trước nó.

Trong cách ghi số này, mỗi chữ số trong một số ở những vị trí khác nhau có những giá trị khác nhau.

Có những cách ghi số khác, chẳng hạn cách ghi số La Mã.

Kí hiệu	I	V	X	L	C	D	M
Giá trị tương ứng trong hệ thập phân	1	5	10	50	100	500	1000

Có sáu số đặc biệt

IV	IX	XL	XC	CD	CM
4	9	40	90	400	900

BÀI TẬP

Bài 15

- Viết số tự nhiên lớn nhất có sáu chữ số
- Viết số tự nhiên lớn nhất có năm mươi chữ số
- Viết số tự nhiên lớn nhất có n chữ số ($n \in \mathbb{N}^*$).

Bài 16

- Viết số tự nhiên nhỏ nhất có năm chữ số
- Viết số tự nhiên nhỏ nhất có một trăm chữ số
- Viết số tự nhiên nhỏ nhất có n chữ số ($n \in \mathbb{N}^*$).

Bài 17

- Viết số tự nhiên lớn nhất có mười chữ số khác nhau
- Viết số tự nhiên nhỏ nhất có mười chữ số khác nhau.

Bài 18

- Có bao nhiêu số có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 8?
- Có bao nhiêu số có ba chữ số mà tổng các chữ số của số đó bằng 6?

Bài 19

Muốn viết tất cả các số tự nhiên từ 100 đến 999 dùng bao nhiêu chữ số 6?

Bài 20

Số A được tạo thành bằng cách viết liền nhau các số tự nhiên từ 1

đến 60 theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

$$A = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \dots\ 5\ 8\ 5\ 9\ 6\ 0$$

a) Hãy chỉ ra cách xóa 100 chữ số của A sao cho số A_1 tạo bởi các chữ số còn lại là nhỏ nhất.

b) Hãy chỉ ra cách xóa 100 chữ số của A sao cho số A_2 tạo bởi các chữ số còn lại là lớn nhất.

Bài 21

- Viết số La Mã lớn nhất
- Viết số La Mã nhỏ nhất.
- Viết số La Mã có nhiều chữ số nhất.

Bài 22

- Với hai chữ số I và X có thể viết được những số nào?
- Với hai chữ số X và C có thể viết được những số nào?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 15

- Số tự nhiên lớn nhất có sáu chữ số là 999999.
- Số tự nhiên lớn nhất có năm mươi chữ số là $\underbrace{99\dots99}_{50\text{ chữ số } 9}$
- Số tự nhiên lớn nhất có n chữ số là $\underbrace{99\dots9}_{n\text{ chữ số } 9}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Bài 16

- Số tự nhiên nhỏ nhất có năm chữ số là 10000.
- Số tự nhiên nhỏ nhất có một trăm chữ số là $\underbrace{100\dots00}_{99\text{ chữ số } 0}$
- Số tự nhiên nhỏ nhất có n chữ số là $1\ \underbrace{00\dots0}_{n-1\text{ chữ số } 0}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Bài 17

- Số tự nhiên lớn nhất có mười chữ số khác nhau là 9876543210.
- Số tự nhiên nhỏ nhất có mười chữ số khác nhau là 1023456789.

Bài 18

a) Chia làm ba loại số.

- Số có dạng $\overline{8ab}$ số a có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 8), chữ số b có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 8).

Do vậy có $9 \times 9 = 81$ số thuộc dạng này.

- Số có dạng $\overline{a8b}$ chữ số a có 8 cách chọn (từ 1 đến 9 nhưng khác 8), chữ số b có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 8).

Do vậy có $8 \times 9 = 72$ số thuộc dạng này.

- Số có dạng $\overline{ab8}$ chữ số a có 8 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 8), chữ số b có 9 cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác 8).

Do vậy có $8 \times 9 = 72$ số thuộc dạng này.

Vậy có tất cả $81 + 72 + 72 = 225$ số có ba chữ số trong đó có đúng một chữ số 8.

b) Số 6 có thể viết thành tổng ba số như sau:

$$\begin{aligned} 6 &= 6 + 0 + 0 = 5 + 1 + 0 = 4 + 2 + 0 \\ &= 4 + 1 + 1 = 3 + 3 + 0 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2 \end{aligned}$$

Ta lập được 21 số: 600; 510; 501; 150; 105; 420; 402; 240; 204; 411; 141; 114; 330; 303; 321; 312; 231; 213; 123; 132; 222.

Bài 19

Chữ số 6 ở hàng trăm có 100 số là: 600; 601; 602; ..., 699 (vì $99 - 00 + 1 = 100$)

Chữ số 6 ở hàng chục có 90 số là: 160; 161; 162; ..., 969 (vì $99 - 10 + 1 = 90$)

Chữ số 6 ở hàng đơn vị có 90 số là: 106; 116; 126; ..., 996 (vì $99 - 10 + 1 = 90$)

Vậy tất cả có $100 + 90 + 90 = 280$ chữ số 6 cần dùng.

Bài 20

a) Số A có $9 + 2 \times 51 = 111$ chữ số. Có hai khả năng:

Khả năng thứ nhất: Khi xóa 100 chữ số của A, ta còn 11 chữ số. A có sáu chữ số 0 phân bố như sau:

1 ... 10 ... 20 ... 30 ... 40 ... 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60

Để A_1 nhỏ nhất, ta chọn 5 chữ số đầu tiên cho A_1 đều bằng 0 (nghĩa là phải xóa hết các chữ số $\neq 0$ trong các số từ 1 đến 50). Ta sẽ xác định thêm 6 chữ số còn lại cho A_1 từ dãy số 51525354555657585960.

Để thấy rằng $A_1 = 00000123450$ là số nhỏ nhất cần tìm.

Khả năng thứ hai: Số A_1 phải là số có nghĩa, nghĩa là chữ số đầu tiên của A_1 phải là số khác không, do đó ta chọn số 1 làm chữ số đầu tiên, sau đó chọn 5 số 0. Ta sẽ xác định thêm 5 chữ số còn lại cho A_1 từ dãy số.

51525354555657585960

Để thấy rằng $A_1 = 10000012340$ là số nhỏ nhất cần tìm.

b) Khi xóa 100 chữ số A, ta còn 11 chữ số. A có sáu chữ số 9 phân bố như sau:

1 ... 9 ... 19 ... 29 39 ... 495051525354555657585960

Để A_2 lớn nhất, ta chọn 5 chữ số đầu tiên cho A_2 đều bằng 9 (nghĩa là phải xóa hết các chữ số $\neq 9$ trong các số từ 1 đến 49). Ta sẽ xác định thêm 6 chữ số còn lại cho A_2 từ dãy số 5051525354555657585960

Để thấy rằng $A_2 = 99999785960$ là số lớn nhất cần tìm.

Bài 21

a) Số La Mã lớn nhất là MMM CMXCIX (3999).

b) Số La Mã nhỏ nhất là I (1).

c) Số La Mã có nhiều chữ số nhất là:

MMM DCCC LXXX VIII (3888).

Bài 22

a) Với hai chữ số I và X có thể viết được các số sau IX (9); XI (11); XII (12); XIII (13); XIX (19); XXI (21); XXII (22); XXIII (23); XXIX (29); XXXI (31); XXXII (32); XXXIII (33); XXXIX (39)

Có tất cả 13 số.

b) Với hai chữ số X và C có thể viết được các số sau XC (90); CX (110); CXX (120); CXXX (130); CXC (190); CCX (210); CCXX (220); CCXXX (230); CCXC (290); CCCX (310); CCCXX (320); CCCXXX (330); CCCXC (390).

Có tất cả 13 số.

§4. SỐ PHẦN TỬ CỦA MỘT TẬP HỢP - TẬP HỢP CON

Một tập hợp có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử, cũng có thể không có phần tử nào.

Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B thì tập hợp A gọi là tập hợp con của tập hợp B.

Kí hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$ đọc là A là tập hợp con của tập hợp B hoặc A được chứa trong B hoặc B chứa A.

Chú ý: $A \subset B$ và $B \subset A$ thì $A = B$.

$$\emptyset \subset A$$

BÀI TẬP

Bài 23

Đọc các cách ghi sau và cho biết cách ghi nào đúng cách ghi nào sai?

a) $A \subset N$. b) $N \subset A$. c) $N \subset N$.

trong đó $A = \{x \in N / x \leq 2002\}$.

Bài 24

Cho hai tập hợp A và B. Biết số phần tử của tập A nhỏ hơn số phần tử của tập hợp B. Hỏi A có là tập hợp con của B không?

Bài 25

Viết tất cả các tập hợp con của các tập hợp sau:

a) $C = \{5; 7\}$; b) $D = \{5; 1; 17\}$.

Bài 26

Cho các tập hợp $E = \{5; 9; 8; 7\}$ và $F = \{9; 7; 13\}$.

Viết các tập hợp vừa là tập hợp con của E vừa là tập hợp con của F.

Bài 27

Cho $A = \{x \in N / 31 < x < 40\}$

$B = \{x \in N / 32 \leq x \leq 39\}$

Hai tập hợp A, B có bằng nhau không?

Bài 28

Chứng minh rằng nếu $A \subset B$, $B \subset C$ thì $A \subset C$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 23

Cách ghi sai $N \subset A$. Cách ghi đúng $A \subset N$, $N \subset N$.

Bài 24. Không khẳng định được A là tập hợp con của B.

Chẳng hạn: $A = \{2; 5\}$; $B = \{7; 13; 25\}$.

Bài 25

a) Các tập hợp con của C là $\frac{3}{4}$; $\{5\}$; $\{7\}$; C.

b) Các tập hợp con của D là $\frac{3}{4}$; $\{5\}$; $\{1\}$; $\{17\}$; $\{5; 1\}$; $\{5; 17\}$; $\{1; 17\}$; D

Chú ý: Đến khi học lớp 12 sẽ chứng minh được: “Nếu một tập hợp M có n phần tử thì số tập hợp con của M là 2^n ”.

Bài 26

Có bốn tập hợp là: $\frac{3}{4}$; $\{9\}$; $\{7\}$; $\{9; 7\}$

Bài 27. $A = \{32; 33; \dots; 38; 39\}$; $B = \{32; 33; \dots; 38; 39\}$.

Do đó $A = B$.

Bài 28. $A \subset B$ nên với mọi $x \in A$ thì $x \in B$.

$B \subset C$ nên với mọi $x \in B$ thì $x \in C$.

Do đó với mọi $x \in A$ thì $x \in C$.

Vậy $A \subset C$.

§5. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP NHÂN

a	+	b	=	c
(Số hạng)	+	(Số hạng)	=	(Tổng)
a	.	b	=	d
(Thừa số)	.	(Thừa số)	=	(Tích)

Phép tính	Cộng	Nhân
Tính chất		
Giao hoán	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Kết hợp	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Cộng với số 0	$a + 0 = 0 + a = a$	
Nhân với số 1		$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Phân phối của phép nhân đối với phép cộng	$a(b + c) = ab + ac$	

TK 51(073)
322

BÀI TẬP

Bài 29

Tính nhanh:

- a) $125 \cdot 1975 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 25$.
 b) $22344 \cdot 36 + 44688 \cdot 82$.
 c) $1 + 2 + 3 + \dots + 2001 + 2002$.
 d) $132 + 128 + 124 + \dots + 76 + 72 + 68$.

Bài 30

Từ 10 chữ số 0; 1; 2; ...; 9 hãy ghép lại thành năm số có hai chữ số khác nhau rồi cộng chúng lại.

- a) Tìm giá trị lớn nhất của tổng.
 b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng.

Bài 31

Cho $A = 1987657 \times 1987655$ và $B = 1987656 \times 1987656$

So sánh A và B mà không tính giá trị cụ thể.

Bài 32

Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 99 ta được số 123 ... 99. Tính tổng các chữ số của số đó.

Bài 33

Thay các chữ bởi các chữ số thích hợp:
$$\begin{array}{r} + \text{abc} \\ \text{acb} \\ \hline \text{bca} \end{array}$$

Bài 34

Cho bốn chữ số a, b, c, d khác nhau và khác 0. Lập số lớn nhất và số nhỏ nhất có bốn chữ số gồm các chữ số này. Tổng của hai số này bằng 14333. Tính $a + b + c + d$.

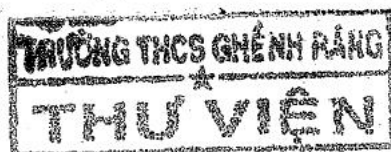
Bài 35. Tích của bốn số tự nhiên liên tiếp bằng 3024. Tìm bốn số đó.

Bài 36. Để đánh số trang của một quyển sách dày 2746 trang, cần dùng bao nhiêu chữ số?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 29

$$\begin{aligned} \text{a) } 125 \cdot 1975 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 25 &= (125 \cdot 8) \cdot (4 \cdot 25) \cdot 1975 \\ &= 1000 \cdot 100 \cdot 1975 = 197500000. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b) } 22344 \cdot 36 + 44688 \cdot 82 &= 22344 \cdot 2 \cdot 18 + 44688 \cdot 82 \\ &= 44688 \cdot 18 + 44688 \cdot 82 = 44688 \cdot (18 + 82) = 44688 \cdot 100 \\ &= 4468800. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 1 + 2 + 3 + \dots + 2001 + 2002 \\ &= (1 + 2002) + (2 + 2001) + \dots + (1001 + 1002) \\ &= \underbrace{2003 + 2003 + \dots + 2003}_{1001 \text{ số hạng}} = 2003 \cdot 1001 \\ &= 2005003. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 132 + 128 + 124 + \dots + 76 + 72 + 68 \\ &= (132 + 68) + (128 + 72) + \dots + (104 + 96) + 100 \\ &= \underbrace{200 + 200 + \dots + 200}_{8 \text{ số hạng}} = 200 \cdot 8 + 100 = 1700. \end{aligned}$$

Bài 30

a) Muốn có tổng lớn nhất thì các chữ số hàng chục của 5 số hạng phải lớn nhất, do đó chọn 9; 8; 7; 6; 5.

Năm chữ số còn lại sẽ là các chữ số hàng đơn vị.

Vậy giá trị lớn nhất của tổng là:

$$(9 + 8 + 7 + 6 + 5) \cdot 10 + (4 + 3 + 2 + 1 + 0) = 360.$$

b) Muốn có tổng nhỏ nhất thì các chữ số hàng chục của 5 số hạng phải nhỏ nhất, do đó chọn 1; 2; 3; 4; 5 (vì chữ số hàng chục phải khác 0).

Năm chữ số còn lại sẽ là các chữ số hàng đơn vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng là:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 10 + (0 + 6 + 7 + 8 + 9) = 180.$$

Bài 31

$$A = (1987656 + 1) \cdot 1987655 = 1987656 \cdot 1987655 + 1987655$$

$$B = (1987655 + 1) \cdot 1987656 = 1987656 \cdot 1987655 + 1987656.$$

$$\text{Mà } 1987655 < 1987656.$$

$$\text{Do đó } A < B.$$

Bài 32

Tổng của các chữ số để viết 9 số đầu là:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

$$\text{Đặt } A = 45$$

Tổng các chữ số để viết các số là 10 đến 19 là:

$$10 + A (= 10 \cdot 1 + A)$$

Tổng các chữ số để viết các số từ 20 đến 29 là:

$$20 + A (= 10 \cdot 2 + A)$$

...

Tổng các chữ số để viết các số từ 90 đến 99 là:

$$90 + A (= 10 \cdot 9 + A)$$

Vậy tổng các chữ số để viết các số từ 1 đến 99 là:

$$\begin{aligned} 10 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) + 10 \cdot A &= 10 \cdot A + 10 \cdot A \\ &= 20 \cdot A = 20 \cdot 45 = 900 \end{aligned}$$

Bài 33

$$\begin{array}{r} abc \\ + \\ acb \\ \hline bca \end{array}$$

Xét cột hàng đơn vị và cột hàng chục ta nhận ra:

$$c + b + 1 = 10 + c \Rightarrow b = 9.$$

Xét cột hàng trăm, ta có: $a + a + 1 = 9$

$$\Rightarrow 2a = 8 \quad \Rightarrow a = 4.$$

Xét cột hàng đơn vị, ta có: $c + 9 = 14 \Rightarrow c = 5$

$$\text{Ta có: } \begin{array}{r} 495 \\ + 459 \\ \hline 954 \end{array}$$

Bài 34

Giả sử $a > b > c > d$

Ta có số lớn nhất là $\overline{abcd}$, số nhỏ nhất là $\overline{dcba}$.

$$\begin{array}{r} + \overline{abcd} \\ + \overline{dcba} \\ \hline 14333 \end{array} \quad \text{Ta có: } d + a = 13 ; c + b = 12.$$

$$\text{Do đó: } a + b + c + d = 13 + 12 = 25.$$

Bài 35

Trong bốn số phải có một số không lớn hơn 10 vì nếu ngược lại thì tích này lớn hơn $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000 > 3024$.

Trong bốn số cũng không có số nào có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 vì tích bốn số này có chữ số tận cùng là 4.

Vậy cả bốn số đều nhỏ hơn 10.

Do đó có thể là $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ hoặc $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$

$$\text{mà } 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \quad ; \quad 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$$

Vậy bốn số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 6; 7; 8; 9.

• Bài 36

Quyển sách có:

$$\text{Số trang có 1 chữ số là } 9 - 1 + 1 = 9$$

$$\text{Số trang có 2 chữ số là } 99 - 10 + 1 = 90$$

$$\text{Số trang có 3 chữ số là } 999 - 100 + 1 = 900$$

$$\text{Số trang có 4 chữ số là } 2746 - 1000 + 1 = 1747$$

Vậy số chữ số cần dùng là:

$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 1747 = 9877 \text{ (chữ số).}$$

§6. PHÉP TRỪ VÀ PHÉP CHIA

• Cho hai số tự nhiên a và b , nếu có số tự nhiên x sao cho $b + x = a$ thì ta có phép trừ $a - b = x$.

• Cho hai số tự nhiên a và b trong đó $b \neq 0$, nếu có số tự nhiên x sao cho $b \cdot x = a$ thì ta nói a chia hết cho b và ta có phép chia hết $a : b = x$

$$a : b = c$$

$$(\text{Số bị chia}) : (\text{Số chia}) = (\text{Thương})$$

• Cho hai số tự nhiên a và b trong đó $b \neq 0$, ta luôn tìm được hai số tự nhiên q và r duy nhất sao cho: $a = b \cdot q + r$ trong đó $0 \leq r < b$

Nếu $r = 0$, ta có phép chia hết.

Nếu $r \neq 0$, ta có phép chia có dư.

Chú ý : Số chia bao giờ cũng khác 0.

BÀI TẬP

Bài 37

Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết:

$$\text{a) } x + 245 = 43 \cdot 11;$$

$$\text{b) } x - 382 = 159 : 3;$$

$$\text{c) } 7x + 2x = 918;$$

$$\text{d) } 3(x - 2) + 150 = 240;$$

$$\text{e) } (x + 13) : 5 = 12;$$

$$\text{f) } 360 : (x - 7) = 90.$$

Bài 38

a) So sánh $(a + 1)(a + 2)(a + 3) - a(a + 1)(a + 2)$ và $3(a + 1)(a + 2)$.

b) Tính $M = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 2002 \cdot 2003$.

Bài 39

Trong một phép chia có số bị chia là 200. Số dư là 13. Tìm số chia và thương.

Bài 40

Trong một phép chia số tự nhiên cho số tự nhiên, số chia là 62, số thương là 34; số dư là số lớn nhất có thể được của phép chia đó. Tìm số bị chia.

Bài 41

Khi nhân một số tự nhiên với 1234, bạn Trinh đã đặt các tích riêng thẳng cột như trong phép cộng nên có kết quả sai là 43210. Hãy tìm tích đúng.

Bài 42

Viết số tự nhiên nhỏ nhất có tổng các chữ số là 43.

Bài 43

- Trong phép chia cho 7, số dư có thể bằng bao nhiêu?
- Chứng tỏ rằng trong 8 số tự nhiên bất kì, có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 7.

Bài 44

Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên bất kì, bao giờ cũng có thể tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100.

Bài 45

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng khi chia số này cho 37 dư 1 và khi chia cho 39 thì dư 14.

Bài 46

Tìm các thừa số và tích của các phép nhân sau:

- $\overline{ab} \cdot \overline{aba} = \overline{abab}$; b) $a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}$;
- $\overline{aa} \cdot \overline{abc} \cdot \overline{bc} = \overline{abcabc}$.

Bài 47

Có thể chọn 71 số trong các số tự nhiên từ 1 đến 100 sao cho tổng của chúng bằng tổng các số còn lại không? Vì sao?

Bài 48

Tìm số tự nhiên có năm chữ số biết rằng nếu viết thêm chữ số 7 đằng trước số đó thì được số lớn gấp 5 lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 7 vào đằng sau số đó.

Bài 49

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có chữ số đầu tiên là 7 khi chuyển chữ số 7 này xuống cuối cùng thì số đó giảm 5 lần.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 37**

$$a) x + 245 = 43 \cdot 11$$

$$x + 245 = 473$$

$$x = 473 - 245$$

$$x = 228.$$

$$b) x - 382 = 159 : 3$$

$$x - 382 = 53$$

$$x = 53 + 382$$

$$x = 435.$$

$$c) 7x + 2x = 918$$

$$9x = 918$$

$$x = 918 : 9$$

$$x = 102.$$

$$d) 3(x - 2) + 150 = 240$$

$$3(x - 2) = 240 - 150$$

$$3(x - 2) = 90$$

$$x - 2 = 90 : 3$$

$$x - 2 = 30$$

$$x = 30 + 2$$

$$x = 32.$$

$$e) (x + 13) : 5 = 12$$

$$x + 13 = 12 \cdot 5$$

$$x + 13 = 60$$

$$x = 60 - 13$$

$$x = 47.$$

$$f) 360 : (x - 7) = 90$$

$$x - 7 = 360 : 90$$

$$x - 7 = 4$$

$$x = 4 + 7$$

$$x = 11.$$

Bài 38

$$a) (a + 1)(a + 2)(a + 3) - a(a + 1)(a + 2)$$

$$= (a + 1)(a + 2)(a + 3 - a) = (a + 1)(a + 2) \cdot 3$$

$$= 3(a + 1)(a + 2)$$

$$\text{Vậy: } 3(a + 1)(a + 2)$$

$$= (a + 1)(a + 2)(a + 3) - a(a + 1)(a + 2).$$

b) Áp dụng câu a ta có:

$$3 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2$$

$$3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$+ 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4$$

....

$$3 \cdot 2002 \cdot 2003 = 2002 \cdot 2003 \cdot 2004 - 2001 \cdot 2002 \cdot 2003$$

$$3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + \dots + 3 \cdot 2002 \cdot 2003 = 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$$

$$\text{Do đó } 3(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2002 \cdot 2003) = 8036052024$$

$$3M = 8036052024$$

$$M = 8036052024 : 3$$

$$M = 2678684008.$$

Bài 39

Gọi số bị chia, số chia, thương và số dư lần lượt là a, b, q, r . Ta có:
 $a = b \cdot q + r$ ($b \neq 0, r < b$)

$$\text{Do đó: } b \cdot q = a - r = 200 - 13 = 187$$

$$187 = 187 \cdot 1 = 17 \cdot 11$$

$$b > 13. \text{ Do đó chọn } b = 187, q = 1$$

$$\text{hoặc: } b = 17, q = 11$$

Số chia là 187, thương là 1

hoặc số chia là 17, thương là 11.

Bài 40

Số dư < số chia

Số dư lớn nhất là 61.

Do vậy số bị chia là $62 \cdot 34 + 61 = 2169$.

Bài 41

Gọi thừa số kia là x .

Theo đầu bài thì Trình đã làm như sau:

$x \cdot 1 + x \cdot 2 + x \cdot 3 + x \cdot 4$ có kết quả sai là 43210.

Do đó:

$$x \cdot 1 + x \cdot 2 + x \cdot 3 + x \cdot 4 = 43210$$

$$x(1 + 2 + 3 + 4) = 43210$$

$$x \cdot 10 = 43210$$

$$x = 43210 : 10$$

$$x = 4321$$

Tích đúng là $4321 \cdot 1234 = 5332114$.

Bài 42

Số tự nhiên nhỏ nhất có tổng các chữ số là 43 là số có tổng các chữ số là 43 mà có số chữ số ít nhất nên các chữ số từ phải sang trái là chữ số 9 hoặc 8 (nếu không thể là 9)...

$$43 : 9 = 4 \text{ (dư 7)}$$

Số cần tìm là: 79999.

Bài 43

a) Số dư < số chia

Số dư trong phép chia cho 7 có thể là 0; 1; 2; 3; 4; 5 hoặc 6.

b) Theo câu a, số dư của một số tự nhiên chia cho 7 chỉ có thể là một trong các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Vì có 8 phép chia cho 7 nên có 8 số dư. Vậy có ít nhất hai số dư bằng nhau.

Bài 44

Các số dư của mọi số tự nhiên trong phép chia cho 100 được xếp thành 51 nhóm như sau:

(0); (1; 99); (2; 98); ...; (49; 51); (50)

Với 52 số tự nhiên tùy ý ta có 52 số dư trong phép chia cho 100.

Do đó có ít nhất hai số dư cùng được xếp vào một nhóm.

Tổng hoặc hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 100.

Bài 45

Gọi số tự nhiên cần tìm là a ; q , q' là thương của phép chia số a lần

lượt cho 37, 39.

Ta có: $a = 37q + 1$; $a = 39q' + 14$, $q \neq q'$

$$37q + 1 = 39q' + 14$$

$$37q - 37q' = 2q' + 13$$

$$37(q - q') = 2q' + 13$$

Vì $2q' + 13$ là số tự nhiên lẻ nên $37(q - q')$ là số tự nhiên lẻ, do đó $q - q'$ là số tự nhiên lẻ, suy ra $q - q' \geq 1$.

a là số nhỏ nhất nên q' nhỏ nhất khi đó $2q'$ nhỏ nhất.

Do đó: $q - q'$ nhỏ nhất.

Vậy: $q - q' = 1$

Ta có: $2q' + 13 = 37 \cdot 1$

$$2q' = 24$$

$$q' = 12$$

Khi đó có: $a = 39 \cdot 12 + 14$

$$a = 482$$

Bài 46

$$a) \quad \overline{ab} \cdot \overline{aba} = \overline{abab} \quad (*)$$

$$\overline{ab} \cdot \overline{aba} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab}$$

$$\overline{ab} \cdot \overline{aba} = \overline{ab} \cdot (100 + 1)$$

$$\overline{ab} \cdot \overline{aba} = \overline{ab} \cdot 101$$

Do đó $\overline{aba} = 101$

Vậy: $a = 1$; $b \neq 0$ (thỏa (*)).

$$b) \quad a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb} \quad (**)$$

$$a \cdot b \cdot \overline{ab} = b \cdot 111$$

$$a \cdot b \cdot \overline{ab} = b \cdot 3 \cdot 37$$

Vậy: $a = 3$, $b = 7$ (thỏa (**)).

$$c) \quad \overline{aa} \cdot \overline{abc} \cdot \overline{bc} = \overline{abcabc}$$

$$\overline{aa} \cdot \overline{abc} \cdot \overline{bc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc}$$

$$\overline{aa} \cdot \overline{abc} \cdot \overline{bc} = \overline{abc} \cdot (1000 + 1)$$

Ta có: $\overline{aa} \cdot \overline{abc} \cdot \overline{bc} = 11 \cdot 91 \cdot \overline{abc}$

hoặc: $\overline{aa} \cdot \overline{abc} \cdot \overline{bc} = 77 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$

Vậy: $a = c = 1$, $b = 9$ hoặc $a = 7$, $b = 1$, $c = 3$.

Bài 47

Ta có: $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = (1 + 100) \cdot 100 : 2 = 5050$

Tổng của 71 số đạt giá trị nhỏ nhất là:

$$1 + 2 + \dots + 71 = (1 + 71) \cdot 71 : 2 = 2556$$

$$\text{mà } 2556 > 5050 : 2 = 2525$$

Do đó không thể tìm được.

Bài 48

Cách 1: Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$

$$\begin{array}{r} abcde7 \\ \times 5 \\ \hline 7abcde \end{array}$$

5×7 tận cùng bằng e do đó $e = 5$ (nhớ 3)

$5 \times e + 3 = 5 \times 5 + 3$ tận cùng bằng d do đó $d = 8$ (nhớ 2)

$5 \times d + 2 = 5 \times 8 + 2$ tận cùng bằng c do đó $c = 2$ (nhớ 4)

$5 \times c + 4 = 5 \times 2 + 4$ tận cùng bằng b do đó $b = 4$ (nhớ 1)

$5 \times b + 1 = 5 \times 4 + 1$ tận cùng bằng a do đó $a = 1$ (nhớ 2)

$$5 \times a + 2 = 5 \times 1 + 2 = 7 \text{ đúng.}$$

Vậy số cần tìm là 14285.

Cách 2: Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$

Đặt $\overline{abcde} = x$

$$\text{Ta có: } \overline{abcde7} \times 5 = \overline{7abcde}$$

$$(10x + 7) \times 5 = 700000 + x$$

$$50x + 35 = 700000 + x$$

$$49x = 699965$$

$$x = 699965 : 49$$

$$\text{Vậy: } x = 14285.$$

Bài 49

$$\begin{array}{r} a_1 a_2 \dots a_n 7 \\ \times 5 \\ \hline 7 a_1 a_2 \dots a_n \end{array}$$

5×7 tận cùng là $a_n \Rightarrow a_n = 5$ (nhớ 3)

$5 \times 5 + 3$ tận cùng là $a_{n-1} \Rightarrow a_{n-1} = 8$ (nhớ 2)

$5 \times 8 + 2$ tận cùng là $a_{n-2} \Rightarrow a_{n-2} = 2$ (nhớ 4)

$5 \times 2 + 4$ tận cùng là $a_{n-3} \Rightarrow a_{n-3} = 4$ (nhớ 1)

$5 \times 4 + 1$ tận cùng là $a_{n-4} \Rightarrow a_{n-4} = 1$ (nhớ 2)

$5 \times 1 + 2 = 7$ Dừng lại. Vậy số cần tìm là 714285.

§7. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN NHÂN HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ

• Lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số bằng nhau, mỗi thừa số bằng a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số}} \quad (n \neq 0)$$

a gọi là cơ số, n gọi là số mũ.

Chú ý:

a^2 còn được gọi là a bình phương (hay bình phương của a).

a^3 còn được gọi là a lập phương (hay lập phương của a).

Quy ước $a^1 = a$

• Nhân hai lũy thừa cùng cơ số.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

BÀI TẬP

Bài 50

a) Viết gọn các tích sau bằng cách dùng lũy thừa.

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11$$

$$25 \cdot 125 \cdot 5 \cdot 5$$

b) Tính giá trị của các lũy thừa sau: 2^3 ; 3^2 ; 3^4 ; 4^3 ; 1^{5000} .

Bài 51

a) Chứng tỏ rằng $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (với mọi $m, n \in \mathbb{N}$).

b) So sánh 3^{200} và 2^{300} ; 5^{200} và 2^{500} ; 3^{484} và 4^{363} .

Bài 52

Chứng tỏ rằng:

a) $5^{2003} + 5^{2002} + 5^{2001}$ chia hết cho 31;

b) $1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{101}$ chia hết cho 8;

c) $4^{39} + 4^{40} + 4^{41}$ chia hết cho 28.

Bài 53

Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2002}$
và $B = 2^{2003} - 1$

So sánh A và B.

Bài 54

Viết tổng sau dưới dạng một lũy thừa của 2.

$$2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{1975}.$$

Bài 55

Tìm các số tự nhiên a, b biết rằng:

a) $2^a + 124 = 5b$;

b) $3^a + 9b = 183$.

Bài 56

Hai số 2^{2003} và 5^{2003} viết liền nhau thì được một số có bao nhiêu chữ số?

Bài 57

Tìm số tự nhiên x biết:

a) $(x^{54})^2 = x$;

b) $2^{x+3} + 2^x = 144$.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 50**

a) $\bullet 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$
 $\bullet 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11 = 3^4 \cdot 11^2$
 $\bullet 25 \cdot 125 \cdot 5 \cdot 5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$

b) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
 $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
 $1^{5000} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{5000 \text{ thừa số } 1} = 1$.

Bài 51

a) $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ thừa số } a^m} = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n \text{ số hạng}}} = a^{m \cdot n}$.

b) Áp dụng $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ta có:

$$3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$$

$$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$$

$$\text{Mà } 9^{100} > 8^{100}, \text{ do đó } 3^{200} > 2^{300}.$$

$$5^{200} = (5^2)^{100} = 25^{100}$$

$$2^{500} = (2^5)^{100} = 32^{100}$$

$$\text{Mà } 25^{100} < 32^{100}, \text{ do đó } 5^{200} < 2^{500}.$$

$$3^{484} = (3^4)^{121} = 81^{121}$$

$$4^{363} = (4^3)^{121} = 64^{121}$$

$$\text{Mà } 81^{121} > 64^{121}, \text{ do đó } 3^{484} > 4^{363}.$$

Bài 52

$$\begin{aligned} \text{a) } 5^{2003} + 5^{2002} + 5^{2001} &= 5^{2001} \cdot 5^2 + 5^{2001} \cdot 5 + 5^{2001} \cdot 1 \\ &= 5^{2001} \cdot (5^2 + 5 + 1) = 5^{2001} \cdot 31 \text{ chia hết cho 31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{101} \\ &= (1 + 7) + (7^2 + 7^3) + \dots + (7^{100} + 7^{101}) \\ &= 8 + 7^2(1 + 7) + \dots + 7^{100}(1 + 7) \\ &= 8 + 7^2 \cdot 8 + \dots + 7^{100} \cdot 8 \\ &= 8 \cdot (1 + 7^2 + \dots + 7^{100}) \text{ chia hết cho 8.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4^{39} + 4^{40} + 4^{41} &= 4^{39} \cdot 1 + 4^{39} \cdot 4 + 4^{39} \cdot 4^2 \\ &= 4^{39} (1 + 4 + 4^2) = 4^{39} \cdot 21 \\ &= 4^{38} \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 = (4^{38} \cdot 3) (4 \cdot 7) = 4^{38} \cdot 3 \cdot 28 \text{ chia hết cho 28.} \end{aligned}$$

Bài 53

$$\begin{aligned} A &= 2A - A = 2(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2002}) - (1 + 2 + \dots + 2^{2002}) \\ &= (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2003}) - (1 + 2 + \dots + 2^{2002}) \\ &= 2^{2003} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } A = B.$$

Bài 54

$$\text{Đặt } M = 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{1975}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= 2M - M = \\ &= 2(2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{1975}) - (2^2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1975}) \\ &= (2^3 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{1976}) - (2^2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1975}) \\ &= (2^3 + 2^{1976}) - (2^2 + 2^2) = 8 + 2^{1976} - 8 = 2^{1976} \end{aligned}$$

Bài 55

a) • Nếu $a = 0$ ta có:

$$5^b = 2^0 + 124 = 125$$

$$5^b = 5^3$$

$$\text{Do đó: } b = 3$$

• Nếu $a \geq 1$, vế trái là số chẵn, vế phải là số lẻ với mọi a, b . Vô lý!

$$\text{Vậy } a = 0; b = 3$$

b) • Nếu $a = 0$ ta có $3^0 + 9b = 183$

$$1 + 9b = 183$$

$$9b = 182$$

$$b \notin \mathbb{N}.$$

• Nếu $a = 1$ ta có $3^1 + 9b = 183$

$$9b = 180$$

$$b = 20.$$

• Nếu $a \geq 2$ ta có 3^a chia hết cho 9; $9b$ chia hết cho 9. Do đó vế trái chia hết cho 9 mà 183 không chia hết cho 9, vế phải không chia hết cho 9. Vô lý!

Bài 56

Gọi số chữ số của số 2^{2003} là a , của số 5^{2003} là b .

$$\text{Ta có } 10^{a-1} < 2^{2003} < 10^a$$

$$\text{và } 10^{b-1} < 5^{2003} < 10^b$$

$$\text{Do đó } 10^{a-1} \cdot 10^{b-1} < 2^{2003} \cdot 5^{2003} < 10^a \cdot 10^b$$

$$10^{a+b-2} < 10^{2003} < 10^{a+b}$$

$$a + b - 2 < 2003 < a + b$$

$$2003 < a + b < 2005$$

$$\text{mà } a + b \in \mathbb{N}$$

$$\text{Do đó } a + b = 2004.$$

Vậy hai số 2^{2003} và 5^{2003} viết liền nhau thì được một số có 2004 chữ số.

Bài 57

$$\text{a) } (x^{54})^2 = x$$

$$x^{108} = x$$

Nếu $x = 0$ ta có $0^{108} = 0$ đúng.

Nếu $x \neq 0$ ta có:

$$x^{108} : x = 1$$

$$x^{107} = 1$$

$$x = 1$$

Vậy: $x = 0$ hoặc $x = 1$.

$$\text{b) } 2^{x+3} + 2^x = 144$$

$$2^x \cdot 2^3 + 2^x \cdot 1 = 144$$

$$2^x (2^3 + 1) = 144$$

$$2^x \cdot 9 = 144$$

$$2^x = 144 : 9$$

$$2^x = 16$$

$$2^x = 2^4$$

$$\text{Vậy: } x = 4.$$

§8. CHIA HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ

Với $a \neq 0$, m / n ta có: $a^m : a^n = a^{m-n}$

Quy ước: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$).

BÀI TẬP

Bài 58

Viết kết quả phép tính sau dưới dạng một lũy thừa:

a) $5^{200} : 5^{13}$;

b) $7^{2001} : 7$;

c) $16^{137} : 4^2$;

d) $(2^{48} \cdot 2^5) : (2^3 \cdot 2^{17})$.

Bài 59

Viết các số sau dưới dạng các lũy thừa của 10:

a) 4385;

b) $\overline{abcde}$.

Bài 60

Tìm số tự nhiên x biết rằng:

a) $5^x \cdot 5^{14} = 5^{78}$;

b) $7^x \cdot 49 = 7^{27}$;

c) $(x^4)^{11} = x$.

Bài 61

a) Cho $a, b, n \in \mathbb{N}$. Chứng tỏ rằng: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

b) Cho $a, b, n \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ và $a : b$. Chứng tỏ rằng:

$$(a : b)^n = a^n : b^n.$$

Bài 62

a) Chứng tỏ rằng $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $a > b$.

b) Tính tổng: $M = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

Bài 63

Chứng tỏ rằng số A là số chính phương, biết rằng:

$$A = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) \text{ với } n \in \mathbb{N}.$$

Bài 64

Tổng của n số tự nhiên chẵn từ 2 đến $2n$ có thể là một số chính phương không? Vì sao?

Bài 65

Tìm các số tự nhiên a và b sao cho $10^a + 168 = b^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 58

a) $5^{200} : 5^{13} = 5^{200-13} = 5^{187}$

b) $7^{2001} : 7 = 7^{2001-1} = 7^{2000}$

c) $16^{137} : 4^2 = 16^{137} : 16 = 16^{136}$

d) $(2^{48} \cdot 2^5) : (2^3 \cdot 2^{17}) = 2^{48+5} : 2^{3+17} = 2^{53} : 2^{20} = 2^{53-20} = 2^{33}$

Bài 59

a) $4385 = 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

b) $abcde = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0$

Bài 60

a) $5^x \cdot 5^{14} = 5^{78}$

$$5^x = 5^{78} : 5^{14}$$

$$5^x = 5^{78-14}$$

$$5^x = 5^{64}$$

$$x = 64.$$

b) $7^x \cdot 49 = 7^{27}$

$$7^x = 7^{27} : 49$$

$$7^x = 7^{27} : 7^2$$

$$7^x = 7^{27-2}$$

$$7^x = 7^{25}$$

$$x = 25.$$

c) $(x^4)^{11} = x$

$$x^{4 \cdot 11} = x$$

$$x^{44} = x$$

Nếu $x = 0$ ta có $0^{44} = 0$ đúng.Nếu $x \neq 0$ ta có $x^{44} : x = 1$

$$x^{43} = 1$$

$$x = 1$$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Bài 61

$$\begin{aligned} \text{a) } (a \cdot b)^n &= \underbrace{(a \cdot b)(a \cdot b) \dots (a \cdot b)}_{n \text{ thừa số } (a \cdot b)} = \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{n \text{ thừa số } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \dots b)}_{n \text{ thừa số } b} = \\ &= a^n \cdot b^n \end{aligned}$$

b) $a : b$ đặt $a = b \cdot m$ ($m \in \mathbb{N}$)

$$a^n : b^n = (b \cdot m)^n : b^n = (b^n \cdot m^n) : b^n = m^n = (a : b)^n$$

Vậy $(a : b)^n = a^n : b^n$.

Bài 62

$$\begin{aligned} a) (a + b)(a - b) &= a(a - b) + b(a - b) \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

b) Áp dụng câu (a) ta có:

$$\begin{aligned} M &= (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + \dots + (2^2 - 1^2) \\ &= (100 + 99)(100 - 99) + (98 + 97)(98 - 97) + \dots \\ &\quad \dots + (2 + 1)(2 - 1) \\ &= 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 \\ &= (100 + 1) : 100 : 2 = 5050. \end{aligned}$$

Bài 63

$$\begin{aligned} A &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = (2n - 1 + 1) \cdot n : 2 \\ &= (2n) \cdot n : 2 = n \cdot n = n^2 \end{aligned}$$

Vậy A là số chính phương.

Bài 64. Ta có: $2 + 4 + 6 + \dots + (2n)$

$$= (2n + 2) \cdot n : 2 = [2(n + 1) \cdot n] : 2 = n(n + 1)$$

Mà $n \cdot n < n(n + 1) < (n + 1)(n + 1)$

$$n^2 < n(n + 1) < (n + 1)^2$$

n^2 và $(n + 1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp nên $n(n + 1)$ không thể là số chính phương. Ta có điều cần chứng minh.

Bài 65

Nếu $a = 0$ ta có $b^2 = 10^0 + 168$

$$b^2 = 169$$

$$b^2 = 13^2$$

$$b = 13$$

Nếu $a \neq 0$ số 10^a có chữ số tận cùng là 0 nên $10^a + 168$ có chữ số tận cùng là 8, do đó b^2 có chữ số tận cùng là 8. Điều này vô lý!

Vậy $a \geq 1$ không xảy ra $10^a + 168 = b^2$.

Tóm lại có $a = 0, b = 13$.

§9. THỨ TỰ THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH

• Các số được nối với nhau bởi dấu các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa) làm thành một biểu thức.

Chú ý:

- Mỗi số cũng coi là một biểu thức.
- Trong biểu thức có thể có các dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính.
- Thứ tự thực hiện các phép tính đối với biểu thức không có dấu ngoặc: Lũy thừa → Nhân và chia → Cộng và trừ.
- Thứ tự thực hiện các phép tính đối với biểu thức có dấu ngoặc: () → [] → { }.

BÀI TẬP

Bài 66

Tính:

- a) $2^4 - 50 : 25 + 13 \cdot 7$; b) $32 + 5 \cdot 13 - 3 \cdot 2^3$;
 c) $2 \cdot [(195 + 35 : 7) : 8 + 195] - 400$;
 d) $4 \cdot \{3^2 \cdot [(5^2 + 2^3) : 11^2] - 26\} + 2002$.

Bài 67

Tính:

- a) $(5^4 + 4^7) \cdot (8^9 - 2^7) \cdot (2^4 - 4^2)$;
 b) $(7^{2003} + 7^{2002}) : 7^{2001}$;
 c) $(169 - 4^2) \cdot (169 - 5^2) \dots (169 - 13^2)$.

Bài 68

Tìm x biết:

- a) $2^4 \cdot x - 3^2 \cdot x = 145 - 255 : 51$;
 b) $580 : (x - 24) = 329 - 150 \cdot 2^1$;
 c) $7 \cdot (x - 14) + 35 = 25 + 279 : 9$.

Bài 69

Trong một cuộc thi có 20 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 10 điểm, còn sai bị trừ 3 điểm. Một học sinh đạt được 148 điểm. Hỏi bạn đó trả lời sai mấy câu? Đúng mấy câu?

Bài 70

Tìm số bị chia, số chia của một phép chia, biết rằng thương bằng 3 số dư bằng 2; tổng của số bị chia, số chia và số dư bằng 76.

Bài 71

Tích của hai số là 1692. Nếu thêm 4 đơn vị vào một thừa số thì tích mới sẽ là 1880. Tìm hai số đó.

Bài 72

Có một số quyển vở chia cho một số học sinh. Nếu mỗi học sinh được 6 quyển thì thừa 7 quyển. Nếu mỗi học sinh được 7 quyển thì thiếu 5 quyển. Hỏi có bao nhiêu quyển vở và bao nhiêu học sinh?

Bài 73

Một đoàn xe lửa dài 160 m chạy vào một đường hầm xuyên qua núi với vận tốc 40 km/h. Từ lúc toa đầu tiên bắt đầu chui vào hầm đến lúc toa cuối cùng ra khỏi hầm mất 4 phút 30 giây. Hỏi đường hầm dài bao nhiêu km?

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 66**

- a) $2^4 - 50 : 25 + 13 \cdot 7 = 16 - 2 + 91 = 105.$
 b) $32 + 5 \cdot 13 - 3 \cdot 2^3 = 32 + 65 - 3 \cdot 8 = 32 + 65 - 24 = 73.$
 c) $2 \cdot [(195 + 35 : 7) : 8 + 195] - 400 =$
 $= 2 \cdot [(195 + 5) : 8 + 195] - 400 =$
 $= 2 \cdot (200 : 8 + 195) - 400 = 2(25 + 195) - 400 =$
 $= 2 \cdot 220 - 400 = 440 - 400 = 40.$
 d) $4 \cdot \{3^2 \cdot [(5^2 + 2^3) : 11^1] - 26\} + 2002 =$
 $= 4 \cdot \{9 \cdot [(25 + 8) : 11] - 26\} + 2002 =$
 $= 4 \cdot (9 \cdot 3 - 26) + 2002$
 $= 4 \cdot 1 + 2002 = 2006.$

Bài 67

- a) $(5^4 + 4^7) \cdot (8^9 - 2^7) \cdot (2^4 - 4^2) =$
 $= (5^4 + 4^7) \cdot (8^9 - 2^7) \cdot (16 - 16)$
 $= (5^4 + 4^7) \cdot (8^9 - 2^7) \cdot 0 = 0$
 b) $(7^{2003} + 7^{2002}) : 7^{2001} =$
 $= 7^{2003} : 7^{2001} + 7^{2002} : 7^{2001} = 7^2 + 7^1 = 49 + 7 = 56.$
 c) $(169 - 4^2) \cdot (169 - 5^2) \dots (169 - 13^2) =$
 $= (169 - 4^2) \cdot (169 - 5^2) \dots (169 - 169)$
 $= (169 - 4^2) \cdot (169 - 5^2) \dots 0 = 0.$

Bài 68

$$a) 2^4 \cdot x - 3^2 : x = 145 - 255 : 51$$

$$16 \cdot x - 9 : x = 145 - 5$$

$$7x = 140$$

$$x = 140 : 7$$

$$x = 20.$$

$$b) 580 : (x - 24) = 329 - 150 \cdot 2^1$$

$$580 : (x - 24) = 329 - 300$$

$$580 : (x - 24) = 29$$

$$x - 24 = 580 : 29$$

$$x - 24 = 20$$

$$x = 20 + 24$$

$$x = 44.$$

$$c) 7 \cdot (x - 14) + 35 = 25 + 279 : 9$$

$$7 \cdot (x - 14) + 35 = 25 + 31$$

$$7 \cdot (x - 14) + 35 = 56$$

$$7 \cdot (x - 14) = 56 - 35$$

$$7 \cdot (x - 14) = 21$$

$$x - 14 = 21 : 7$$

$$x - 14 = 3$$

$$x = 3 + 14$$

$$x = 17.$$

Bài 69

Giả sử bạn học sinh đó trả lời đúng cả 20 câu thì tổng số điểm đạt được là $10 \cdot 20 = 200$ (điểm)

Số điểm dư ra $200 - 148 = 52$ (điểm)

Thay mỗi câu trả lời sai bởi một câu trả lời đúng thì dư ra:

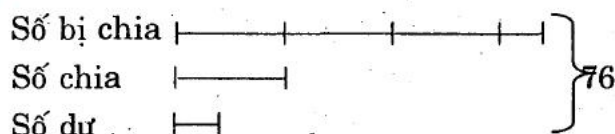
$10 + 3 = 13$ (điểm)

Số câu trả lời sai $52 : 13 = 4$ (câu)

Số câu trả lời đúng $20 - 4 = 16$ (câu)

Bài 70

Theo đầu bài ta có sơ đồ:



Từ sơ đồ, ta có:

Số chia là $[76 - (2 + 2)] : (3 + 1) = 18$;

Số bị chia là $18 \cdot 3 + 2 = 56$.

Bài 71

Tích mới hơn tích cũ là: $1880 - 1692 = 188$;

Tích mới hơn tích cũ 188 vì được thêm 4 lần thừa số kia.

Thừa số kia là $188 : 4 = 47$;

Thừa số này là $1692 : 47 = 36$.

Bài 72

Nếu mỗi học sinh được 7 quyển thì thiếu 5 quyển, nếu mỗi học sinh được 6 quyển thì thừa 7 quyển.

Vậy số vở chênh lệch là: $5 + 7 = 12$ (quyển)

Số vở chênh lệch của mỗi học sinh trong hai cách chia là:

$$7 - 6 = 1 \text{ (quyển)}$$

Số học sinh có là: $12 : 1 = 12$ (học sinh)

Số quyển vở có là: $6 \cdot 12 + 7 = 79$ (quyển).

Bài 73

4 phút 30 giây = 270 giây

40 km/h = 40000 m / 3600 giây

Trong 270 giây đoàn xe lửa chạy được:

$$(40000 \cdot 270) : 3600 = 3000 \text{ (m)}$$

3000 (m) là chiều dài của đoàn tàu cộng với chiều dài của đường hầm.

Do vậy đường hầm dài $3000 - 160 = 2840$ (m).

§10. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA MỘT TỔNG

• Ký hiệu a chia hết cho b là: $a : b$

Kí hiệu a không chia hết cho b là $a \nmid b$

• Nếu tất cả các số hạng của một tổng đều chia hết cho cùng một số thì tổng chia hết cho số đó.

$a : m$, $b : m$ và $c : m$ thì $(a + b + c) : m$

Nếu chỉ có một số hạng của tổng không chia hết cho một số, còn các số hạng khác đều chia hết cho số đó thì tổng không chia hết cho số đó.

$a \nmid m$, $b \mid m$ và $c \mid m$ thì $(a + b + c) \nmid m$

Chú ý: $a \mid m$ và $b \nmid m \Rightarrow a - b \nmid m$; $a \nmid m$ và $b \mid m \Rightarrow a - b \nmid m$.

BÀI TẬP

Bài 74

Áp dụng tính chất chia hết, xét xem mỗi tổng (hiệu) sau có chia hết cho 7 không:

a) $777 + 140$;

b) $56071 - 707$.

Bài 75

Có tồn tại hai số tự nhiên a, b sao cho:

a) $55a + 45b = 3658$;

b) $400a + 84b = 40002$ không?

Bài 76

Chứng tỏ rằng:

a) Tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là số chia hết cho 3.

b) Tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp là số không chia hết cho 4.

Bài 77

Chứng tỏ rằng:

Tổng của n số tự nhiên liên tiếp là một số chia hết cho n , nếu n là số lẻ.

Tổng của n số tự nhiên liên tiếp là một số không chia hết cho n , nếu n là số chẵn.

Bài 78

a) Chứng tỏ rằng trong ba số tự nhiên liên tiếp có một số chia hết cho 3.

b) Chứng tỏ rằng $(17^n + 2)(17^n + 1)$ chia hết cho 3 với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 79

a) Chứng tỏ rằng trong năm số tự nhiên liên tiếp có một số chia hết cho 5.

b) Chứng tỏ rằng $(9^m + 1)(9^m + 2)(9^m + 3)(9^m + 4)$ chia hết cho 5 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 80

Tìm số tự nhiên x có ba chữ số, biết rằng: $x + 2999$ chia hết cho 997.

Bài 81

Chứng tỏ rằng:

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{402} + 5^{403} + 5^{404} \text{ chia hết cho } 31.$$

Bài 82

Tìm số dư khi chia A cho 7, biết rằng:

$$A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2001} + 2^{2002}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 74**

$$a) 777 : 7, 140 : 7 \Rightarrow (777 + 140) : 7.$$

$$b) 56071 : 7, 707 : 7 \Rightarrow (56071 - 707) : 7.$$

Bài 75

$$a) 55a : 5, 45b : 5 \Rightarrow (55a + 45b) : 5$$

Mà $3658 \not\vdots 5$. Do đó không tồn tại hai số tự nhiên a, b để có:

$$55a + 45b = 3658.$$

$$b) 400a : 4, 84b : 4 \Rightarrow (400a + 84b) : 4$$

Mà $40002 \not\vdots 4$. Do đó không tồn tại hai số tự nhiên a, b để có:

$$400a + 84b = 40002.$$

Bài 76

a) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là a, a + 1, a + 2 (với a ∈ N)

Ta có $a + a + 1 + a + 2 = 3a + 3$ chia hết cho 3.

b) Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là a, a + 1, a + 2, a + 3 (với a ∈ N)

Ta có: $a + a + 1 + a + 2 + a + 3 = (4a + 6) \not\vdots 4$.

Vì: $4a : 4; 6 \not\vdots 4$.

Bài 77

Gọi n số tự nhiên liên tiếp là a, a + 1; ...; a + n - 1 (a ∈ N)

Ta có: $a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + n - 1) =$

$$= \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{n \text{ số hạng}} + [0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)]$$

$$= na + (0 + n - 1) \cdot n : 2 = na + [(n - 1) : 2] \cdot n$$

Nếu n lẻ thì n - 1 chẵn, nên $(n - 1) : 2$ là số tự nhiên, do đó:

$n \cdot a + [(n - 1) : 2] \cdot n$ chia hết cho n.

Nếu n chẵn thì $n - 1$ lẻ nên $(n - 1) : 2$ không là số tự nhiên, do đó:
 $n \cdot a + [(n - 1) : 2] \cdot n$ không chia hết cho n .

Vậy bài toán đã giải xong.

Bài 78

a) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $a; a + 1; a + 2$ ($a \in \mathbb{N}$)

• Nếu $a : 3$, bài toán giải xong.

• Nếu $a : 3$ dư 1, đặt $a = 3b + 1$ ($b \in \mathbb{N}$) ta có $a + 2 = 3b + 1 + 2 = (3b + 3) : 3$

• Nếu $a : 3$ dư 2, đặt $a = 3c + 2$ ($c \in \mathbb{N}$) ta có $a + 1 = 3c + 2 + 1 = (3c + 3) : 3$

Vậy trong ba số tự nhiên liên tiếp, có một số chia hết cho 3.

b) $17^n + 2; 17^n + 1; 17^n$ là ba số tự nhiên liên tiếp, nên theo câu a có một số chia hết cho 3 mà $17^n \not\vdots 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Do đó: $17^n + 2$ và $17^n + 1$ có một số chia hết cho 3.

Suy ra: $(17^n + 2)(17^n + 1) : 3$.

Bài 79

a) Gọi năm số tự nhiên liên tiếp là: $a; a + 1; a + 2; a + 3; a + 4$ ($a \in \mathbb{N}$).

• Nếu $a : 5$, bài toán giải xong.

• Nếu $a : 5$ dư 1, đặt $a = 5b + 1$ ($b \in \mathbb{N}$) ta có $a + 4 = 5b + 1 + 4 = (5b + 5) : 5$

• Nếu $a : 5$ dư 2, đặt $a = 5c + 2$ ($c \in \mathbb{N}$) ta có $a + 3 = 5c + 2 + 3 = (5c + 5) : 5$

• Nếu $a : 5$ dư 3, đặt $a = 5d + 3$ ($d \in \mathbb{N}$) ta có $a + 2 = 5d + 3 + 2 = (5d + 5) : 5$

• Nếu $a : 5$ dư 4, đặt $a = 5e + 4$ ($e \in \mathbb{N}$) ta có $a + 1 = 5e + 4 + 1 = (5e + 5) : 5$

Vậy trong năm số tự nhiên liên tiếp, có một số chia hết cho 5.

b) $19^m; 19^m + 1; 19^m + 2; 19^m + 3; 19^m + 4$ là năm số tự nhiên liên tiếp nên theo câu a có một số chia hết cho 5 mà $19^m \not\vdots 5$ với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Do đó: $19^m + 1; 19^m + 2; 19^m + 3; 19^m + 4$ có một số chia hết cho 5.

Suy ra: $(19^m + 1) \cdot (19^m + 2) \cdot (19^m + 3) \cdot (19^m + 4) : 5$.

Bài 80

$$x \in \mathbb{N}; 100 \leq x \leq 999$$

$$\text{Ta có: } x + 2999 = [(x + 8) + 997 \cdot 3] : 997$$

$$\text{Mà: } (997 \cdot 3) : 997, \text{ do đó } (x + 8) : 997$$

$$\text{Vì: } 108 \leq x + 8 \leq 1007$$

$$\text{Suy ra: } x + 8 = 997$$

$$x = 997 - 8$$

$$x = 989.$$

Bài 81

$$\begin{aligned} & 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \dots + 5^{402} + 5^{403} + 5^{404} \\ &= (1 + 5 + 5^2) + (5^3 + 5^4 + 5^5) + \dots + (5^{402} + 5^{403} + 5^{404}) \\ &= 31 + 5^3(1 + 5 + 5^2) + \dots + 5^{402}(1 + 5 + 5^2) \\ &= 31 + 5^3 \cdot 31 + \dots + 5^{402} \cdot 31 \\ &= 31(1 + 5^3 + \dots + 5^{402}) : 31. \end{aligned}$$

Bài 82

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2001} + 2^{2002} \\ &= (1 + 2) + (2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7) + \dots \\ &\quad \dots + (2^{2000} + 2^{2001} + 2^{2002}) \\ &= 3 + 2^2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^5 \cdot (1 + 2 + 2^2) + \dots \\ &\quad \dots + 2^{2000} \cdot (1 + 2 + 2^2) \\ &= 3 + 2^2 \cdot 7 + 2^5 \cdot 7 + \dots + 2^{2000} \cdot 7 \\ &= 3 + 7 \cdot (2^2 + 2^5 + \dots + 2^{2000}) \text{ chia cho 7 dư 3.} \end{aligned}$$

§11. DẤU HIỆU CHIA HẾT CHO 2, CHO 5

• Các số có chữ số tận cùng là chữ số chẵn thì chia hết cho 2 và chỉ những số đó mới chia hết cho 2.

• Các số có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 thì chia hết cho 5 và chỉ những số đó mới chia hết cho 5.

BÀI TẬP**Bài 83**

Dùng ba chữ số 6 ; 0 ; 5 hãy ghép thành các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau thỏa mãn điều kiện:

a) Số đó chia hết cho 2.

b) Số đó chia hết cho 5.

Bài 84

Tìm chữ số a để số $\overline{678a}$ chia hết cho 2 và chia cho 5 dư 3.

Bài 85

Có bao nhiêu số có dạng $\overline{abc}$ biết rằng $\overline{abc} : 5$ và $a \neq b$?

Bài 86

Tìm số tự nhiên có năm chữ số, các chữ số giống nhau, biết rằng số đó chia hết cho 2 và chia cho 5 dư 1.

Bài 87

a) Cho $a, b \in \mathbb{N}$. Chứng tỏ rằng $ab(a+b) : 2$.

b) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, biết rằng: $xy(x+y) = 456789$.

Bài 88

Tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên a để $a^2 + 1$ chia hết cho 5.

Bài 89

Cho n là số tự nhiên lẻ. Tìm số dư khi chia n^2 cho 8.

Bài 90

Chứng tỏ rằng tổng của tất cả các số có ba chữ số là một số vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 5.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 83**

a) Các số cần tìm chia hết cho 2 nên các số đó có chữ số tận cùng là 0 hoặc 6.

Các số cần tìm là: 506, 560, 650.

b) Các số cần tìm chia hết cho 5 nên các số đó có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5.

Các số cần tìm là: 560, 650, 605.

Bài 84

$\overline{678a}$ chia cho 5 dư 3 $\Rightarrow a \in \{3; 8\}$.

mà $\overline{678a} : 2$ nên $a = 8$.

Bài 85

$\overline{abc} : 5$ nên c có hai cách chọn (là 0 hoặc 5).

Chữ số b có chín cách chọn (từ 0 đến 9 nhưng khác a)

Chữ số a có chín cách chọn (từ 1 đến 9)

Vậy tất cả có $9 \cdot 9 \cdot 2 = 162$ số cần tìm.

Bài 86

Số cần tìm có dạng $\overline{aaaaa}$ ($a \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 9$);

$\overline{aaaaa}$ chia cho 5 dư 1 $\Rightarrow a \in \{1; 6\}$.

mà $\overline{aaaaa} : 2$ do đó $a = 6$;

Số cần tìm là 66666.

số

Bài 87

a) • a hoặc b chẵn $\Rightarrow ab : 2 \Rightarrow ab(a+b) : 2$

• a và b cùng lẻ $\Rightarrow a+b$ chẵn $\Rightarrow (a+b) : 2$

$\Rightarrow ab(a+b) : 2$

Vậy $ab(a+b) : 2$ với mọi $a, b \in \mathbb{N}$.

b) Áp dụng câu a.

Ta có: với mọi $x, y \in \mathbb{N}$ thì $xy(x+y) : 2$ mà $456789 \not\vdots 2$.

Do đó không tồn tại $x, y \in \mathbb{N}$ để có: $xy(x+y) = 456789$.

Ya

Bài 88

$(a^2 + 1) : 5 \Rightarrow a^2 + 1$ có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 $\Rightarrow a^2$ có chữ số tận cùng là 9 hoặc 4 $\Rightarrow a$ có chữ số tận cùng là 3 hoặc 7 hoặc 2 hoặc 8.

Bài 89

n là số tự nhiên lẻ, đặt $n = 2a + 1$ ($a \in \mathbb{N}$).

ng

Ta có :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2a + 1)(2a + 1) = 2a \cdot (2a + 1) + 1 \cdot (2a + 1) = \\ &= 4a^2 + 2a + 2a + 1 = 4a(a + 1) + 1 \text{ chia cho 8 dư 1} \\ &(\text{vì } a(a + 1) : 2 \text{ nên } 4a(a + 1) : 8). \end{aligned}$$

ng

Bài 90

Tổng của tất cả các số có ba chữ số là:

$$\begin{aligned} A &= 100 + 101 + 102 + \dots + 998 + 999 = \\ &= (100 + 999) \cdot (999 - 100 + 1) : 2 = 1099 \cdot 450 \end{aligned}$$

Số A có chữ số tận cùng là 0 nên vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 5.

§12. DẤU HIỆU CHIA HẾT CHO 3, CHO 9

• Các số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 và chỉ những số đó mới chia hết cho 9.

• Các số có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì chia hết cho 3 và chỉ những số đó mới chia hết cho 3.

BÀI TẬP

Bài 91

Điền chữ số vào dấu * để:

- a) $\overline{7*41}$ chia hết cho 9. b) $\overline{52*2}$ chia hết cho 3.
c) $\overline{145*}$ chia hết cho cả 3 và 5.
d) $\overline{182*}$ chia hết cho 3 và chia cho 5 dư 2.

Bài 92

Dùng ba trong bốn chữ số 5 ; 8 ; 4 ; 0, hãy ghép thành các số tự nhiên có ba chữ số sao cho các số đó:

- a) Chia hết cho 9.
b) Chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9.

Bài 93

Tìm các chữ số a, b sao cho số $\overline{52ab}$ chia hết cho 9 và chia cho 5 dư 2.

Bài 94

Viết số tự nhiên nhỏ nhất có sáu chữ số sao cho số đó:

- a) Chia hết cho 9. b) Chia hết cho cả 5 và 9.

Bài 95

Chứng minh rằng:

- a) $10^{1234} + 2$ chia hết cho 3. b) $10^{789} + 8$ chia hết cho 9.

Bài 96

Chứng minh rằng số gồm 27 chữ số 1 chia hết cho 27.

Bài 97

Viết các số tự nhiên liên tiếp từ 10 đến 99 ta được số M.

Số M có chia hết cho 3, cho 9 không?

Bài 98

- a) Cho $a \in \mathbb{N}$. Tìm số dư của phép chia a^2 cho 3.
b) Có số chính phương nào mà tổng các chữ số của nó bằng 23456 không?

Bài 99

Chứng tỏ rằng $\overline{abcd} - (a + b + c + d)$ chia hết cho 9.

Bài 100

Tổng các chữ số của 3^{1000} là a, tổng các chữ số của a là b, tổng các chữ số của b là c. Tính c.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 91**

$$a) \overline{7*41} : 9 \Rightarrow 7 + * + 4 + 1 = (12 + *) : 9 \Rightarrow * = 6$$

Ta có số 7641.

$$b) \overline{52*2} : 3 \Rightarrow 5 + 2 + * + 2 = (9 + *) : 3 \Rightarrow * \in \{0; 3; 6; 9\}$$

Ta có các số 5202; 5232; 5262; 5292.

$$c) \overline{145*} : 5 \Rightarrow * \in \{0; 5\}$$

Mà $1450 \nmid 3$, $1455 : 5$

Do đó $* = 5$. Ta có số 1455.

$$d) \overline{182*} \text{ chia cho } 5 \text{ dư } 2 \Rightarrow * \in \{2; 7\}$$

Mà $1822 \nmid 3$, $1827 : 3$

Do đó $* = 7$. Ta có số 1827.

Bài 92

a) Trong bốn chữ số 5 ; 8 ; 4 ; 0 có ba chữ số có tổng chia hết cho 9 là 5 ; 4 ; 0.

Do đó các số lập được là 540 ; 504 ; 450 ; 405.

b) Trong bốn chữ số 5 ; 8 ; 4 ; 0 có ba chữ số có tổng chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 là 8 ; 4 ; 0.

Do đó các số lập được là 840 ; 804 ; 480 ; 408.

Bài 93

$$\overline{52ab} \text{ chia cho } 5 \text{ dư } 2 \Rightarrow b \in \{2; 7\};$$

$$\bullet \text{ Xét } b = 2 \text{ ta có } \overline{52ab} : 9 \Rightarrow 5 + 2 + a + 2 = (9 + a) : 9$$

$$\Rightarrow a \in \{0; 9\}$$

$$\bullet \text{ Xét } b = 7 \text{ ta có } \overline{52ab} : 9 \Rightarrow 5 + 2 + a + 7 = (14 + a) : 9$$

$$\Rightarrow a \in \{4\}$$

$$\text{Vậy } a = 0, b = 2$$

$$a = 9, b = 2$$

$$a = 4, b = 7.$$

Bài 94

a) Số nhỏ nhất có sáu chữ số có dạng $\overline{10000*}$ mà $\overline{10000*} : 9$

do đó $1 + 0 + 0 + 0 + 0 + * = (1 + *) : 9 \Leftrightarrow * = 8$

Số cần tìm là 100008.

b) Số cần tìm có dạng $\overline{1000ab}$

$\overline{1000ab} : 5 \Leftrightarrow b \in \{0; 5\}$

• Xét $b = 0$, số $\overline{1000a0} : 9$

ta có $1 + 0 + 0 + 0 + a + 0 = (1 + a) : 9$

ta có $a = 8$. Số cần tìm có thể là 100080

• Xét $b = 5$. Số $\overline{1000a5} : 9$

Ta có $1 + 0 + 0 + 0 + a + 5 = (6 + a) : 9$

Ta có $a = 3$. Số cần tìm có thể là 100035

Do $100080 > 100035$

Vậy số cần tìm là 100035.

Bài 95

a) $10^{1234} + 2 = \underbrace{100 \dots 0}_{1234 \text{ chữ số } 0} + 2 = \underbrace{100 \dots 02}_{1233 \text{ chữ số } 0} : 3$ (vì có tổng các chữ số bằng 3).

b) $10^{789} + 8 = \underbrace{100 \dots 0}_{789 \text{ chữ số } 0} + 8 = \underbrace{100 \dots 008}_{788 \text{ chữ số } 0} : 9$ (vì có tổng các chữ số bằng 9).

Bài 96

Gọi a là số gồm 27 chữ số 1, b là số gồm 9 chữ số 1. Lấy a chia cho b được thương $c = \underbrace{100 \dots 0}_{8 \text{ chữ số } 0} \underbrace{1000 \dots 01}_{8 \text{ chữ số } 0}$. Ta có $c : 3$ (vì tổng các chữ số của c là 3)

$a = b : c$ mà $b : 9, c : 3$ do đó $a : 27$.

Bài 97

$M = 101112 \dots 9899$

Xét 90 số 10, 11, 12, ... 99

Tổng các chữ số hàng đơn vị là:

$(0 + 1 + 2 + \dots + 9) \cdot 9 = 45 \cdot 9 = 405$

Tổng các chữ số hàng chục là:

$$(1 + 2 + \dots + 9) \cdot 10 = 45 \cdot 10 = 450$$

Tổng các chữ số của số M là:

$$405 + 450 = 855$$

$$855 : 3, 855 : 9 \text{ vì } 8 + 5 + 5 = 18$$

Do đó $M : 3, M : 9$.

Bài 98

a) Đặt $a = 3k + r$ ($r = 0; 1; 2, k \in \mathbb{N}$)

$$\text{Ta có } a^2 = (3k + r)^2 = (3k + r)(3k + r)$$

$$= 3k(3k + r) + r(3k + r) = 9k^2 + 3kr + 3kr + r^2$$

$$r^2 = 0; 1; 4 \text{ và } (9k^2 + 3kr + 3kr) : 3$$

Do đó a^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

b) 23456 chia cho 3 dư 2 vì có tổng các chữ số là 20.

Theo câu (a) số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

Do đó không có số chính phương nào mà tổng các chữ số của nó bằng 23456.

Bài 99

$$abcd - (a + b + c + d) =$$

$$= 1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d)$$

$$= 999a + 99b + 9c + (a + b + c + d) - (a + b + c + d)$$

$$= 999a + 99b + 9c \text{ chia hết cho 9.}$$

Bài 100

Kí hiệu tổng các chữ số của số x là $S(x)$ $3^{1000} = (3^2)^{500} = 9^{500} < 10^{500}$ có không quá 500 chữ số.

Tổng các chữ số của số 3^{1000} là $a = S(3^{1000}) \leq 9 \cdot 500 = 4500, b = S(a) < 4 + 9 + 9 + 9 = 31$

Số $3^{1000} : 9$ nên a, b, c đều chia hết cho 9.

Suy ra $b \in \{9; 18; 27\}$

Cả ba trường hợp đều có $c = S(b) = 9$.

§13. ƯỚC VÀ BỘI

• Ước và bội

Nếu có số tự nhiên a chia hết cho số tự nhiên b thì ta nói a là bội của b, còn b gọi là ước của a.

• Cách tìm ước và bội.

Có thể tìm các bội của một số bằng cách nhân số đó lần lượt với 0; 1; 2; 3...

Có thể tìm các ước của a bằng cách lần lượt chia a cho các số tự nhiên từ 1 đến a để xét xem a chia hết cho những số nào, khi đó các số ấy là ước của a .

BÀI TẬP

Bài 101

Tìm các ước của 21; 31; 18.

Bài 102

Tìm các số có hai chữ số là bội của:

- a) 24; b) 39.

Bài 103

Tìm các số tự nhiên x sao cho:

- a) $x + 20$ là bội của $x + 2$;
b) $x + 5$ là ước của $4x + 69$;
c) $10x + 23$ chia hết cho $2x + 1$.

Bài 104

Cho một số chia hết cho 7, gồm sáu chữ số.

Chứng minh rằng nếu chuyển chữ số tận cùng lên đầu tiên, ta vẫn được số chia hết cho 7.

Bài 105

Tìm số tự nhiên x biết rằng trong ba số 36, 45, x bất cứ số nào cũng là ước của tích hai số kia.

Bài 106

Cho bảy chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Giả sử a và b là hai số khác nhau nào đó gồm 7 chữ số khác nhau lập từ 7 chữ số này. Chứng tỏ rằng không có số nào chia hết cho số còn lại.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 101

$$Ư(21) = \{1; 3; 7; 21\};$$

$$Ư(31) = \{1; 31\};$$

$$Ư(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}.$$

Bài 102

a) Lần lượt nhân 24 với 0; 1; 2;... chọn tích là số có hai chữ số.

Ta có các số cần tìm là 24; 48; 72; 96.

b) Lần lượt nhân 39 với 0; 1; 2; ... chọn tích là số có hai chữ số.

Ta có các số cần tìm là 39; 78.

Bài 103

a) $x + 20$ là bội của $x + 2 \Leftrightarrow (x + 20) : (x + 2)$

$$x + 20 = [(x + 2) + 18] : (x + 2)$$

Do đó $18 : (x + 2) \Leftrightarrow x + 2 \in U(18)$

$$U(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$$

$$\text{Mà } x + 2 \geq 2$$

Ta có $x + 2 \in \{2; 3; 6; 9; 18\}$

$$x \in \{0; 1; 4; 7; 16\}.$$

b) $x + 5$ là ước của $4x + 69 \Leftrightarrow (4x + 69) : (x + 5)$

$$4x + 69 = 4x + 20 + 49 = [4(x + 5) + 49] : (x + 5)$$

Do đó $49 : (x + 5) \Leftrightarrow x + 5 \in U(49)$

$$U(49) = \{1; 7; 49\}$$

$$\text{Mà } x + 5 \geq 5$$

Ta có $x + 5 \in \{7; 49\}$

$$x \in \{2; 44\}.$$

c) $10x + 23 = [5(2x + 1) + 18] : (2x + 1)$

Do đó $18 : (2x + 1) \Leftrightarrow 2x + 1 \in U(18)$

Mà $2x + 1$ lẻ. Ta có $2x + 1 \in \{1; 3; 9\}$

$$\Leftrightarrow 2x \in \{0; 2; 8\} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 4\}.$$

Bài 104

Gọi số chia hết cho 7 là $x = \overline{abcdef}$. Cần chứng minh rằng $y = \overline{fabcde}$ chia hết cho 7.

$$\text{Ta có } 2x + y = 2 \cdot \overline{abcdef} + \overline{fabcde}$$

$$= 2(10 \cdot \overline{abcde} + f) + 100000f + \overline{abcde}$$

$$= 20 \overline{abcde} + 2f + 100000f + \overline{abcde}$$

$$= 21 \overline{abcde} + 100002f \text{ chia hết cho 7.}$$

$$\text{Vì } 21 : 7, 100002 : 7$$

Do đó: $2x + y : 7$ mà $2x : 7 \Rightarrow y : 7$.

Bài 105

Theo đầu bài ta có: $36x : 45 \Rightarrow 4x : 5$

$$45x : 36 \Rightarrow 5x : 4$$

Do đó: $x : 20$ đặt $x = 20m$ ($m = 1; 2; 3; \dots$)

Ta có $36 : 45 : x$ hay $36 : 45 : (20m)$

Do đó $81 : m \Leftrightarrow m \in U(81)$

Vậy $m \in \{1; 3; 9; 27; 81\}$

Do đó $x \in \{20; 60; 180; 540; 1620\}$.

Bài 106

Giả sử $a > b$

Số lớn nhất lập được là 7654321

Số nhỏ nhất lập được là 1234567

Do vậy $a < 10b$ (1)

Tổng các chữ số của số a , số b là:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, 28 chia cho 9 dư 1 nên a và b chia cho 9 dư 1

Giả sử $a : b$ đặt $a = mb$ ($m \in \mathbb{N}^*$, $m > 1$)

b chia cho 9 dư 1 đặt $b = 9p + 1$

Do đó $a = m(9p + 1) = 9mp + m$ chia cho 9 dư 1 do đó m chia cho 9 dư 1

$$\Rightarrow m \geq 10 \text{ do đó } a \geq 10b \text{ (2)}$$

(1) và (2) mâu thuẫn nên đều giả sử $a : b$ là sai.

Vậy không có số nào chia hết cho số còn lại.

§14. SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước là 1 và chính nó.

- Hợp số là số lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước.

Chú ý: Số 0 và số 1 không phải là số nguyên tố và cũng không là hợp số.

BÀI TẬP**Bài 107**

Các số sau là số nguyên tố hay hợp số?
1975; 1133; 61616161.

Bài 108

Tổng (hiệu) sau là số nguyên tố hay hợp số?

a) $5 \cdot 31 \cdot 19 \cdot 101 + 62 \cdot 131 \cdot 1989 \cdot 17$;

b) $23 \cdot 161 \cdot 121 \cdot 19 - 13 \cdot 157 \cdot 22 \cdot 17$.

Bài 109

Tìm tập hợp các số có hai chữ số là bình phương của một số nguyên tố.

Bài 110

Tìm tất cả các số tự nhiên n để:

a) $n^2 + 12n$ là số nguyên tố. b) $3^n + 6$ là số nguyên tố.

Bài 111

Tìm 2002 số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số.

Bài 112

Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a) $p + 4$ và $p + 8$; b) $p + 22$; $p + 8$; $p + 6$; $p + 14$.

Bài 113

Cho p và $8p - 1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng:

$8p + 1$ là hợp số.

Bài 114

Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm r .

Bài 115

Tìm một số nguyên tố bằng tổng của hai số nguyên tố và bằng hiệu của hai số nguyên tố.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 107**

• $1975 : 5$ vì số 1975 có chữ số tận cùng là 5. Ta có số 1975 là hợp số vì ngoài ước 1 và chính nó còn có ước là 5.

• $1133 : 11$ vì $1133 = 11 \cdot 103$

Ta có số 1133 là hợp số vì ngoài ước 1 và chính nó còn có ước là 11.

• $61616161 : 61$ vì $61616161 = 61 \cdot 1010101$

Ta có số 61616161 là hợp số vì ngoài ước 1 và chính nó còn có ước là 61.

Bài 108

$$a) \quad 31 : 31 \rightarrow 5 \cdot 31 \cdot 19 \cdot 101 : 31$$

$$62 : 31 \Rightarrow 62 \cdot 131 \cdot 1989 : 17 : 31$$

$$\text{Do đó } (5 \cdot 31 \cdot 19 \cdot 101 + 62 \cdot 131 \cdot 1989 \cdot 17) : 31$$

Tổng đã cho là hợp số vì ngoài ước 1 và chính nó còn có ước là 31.

$$b) \quad 121 : 11 \Rightarrow 23 \cdot 161 \cdot 121 \cdot 19 : 11$$

$$22 : 11 \Rightarrow 13 \cdot 157 \cdot 22 \cdot 17 : 11$$

$$\text{Do đó } (23 \cdot 161 \cdot 121 \cdot 19 - 13 \cdot 157 \cdot 22 \cdot 17) : 11$$

Hiệu đã cho là hợp số vì ngoài ước 1 và chính nó còn có ước là 11.

Bài 109

$$2^2 = 4; 3^2 = 9; 5^2 = 25$$

$$7^2 = 49; 11^2 = 121$$

Vậy chỉ có hai số 25; 49 là các số có hai chữ số bằng bình phương của một số nguyên tố.

Bài 110

a) $n^2 + 12n = n(n + 12)$, $n + 12 > 1$ nên để $n^2 + 12n$ là số nguyên tố thì $n = 1$.

Thử lại $n^2 + 12n = 1^2 + 12 \cdot 1 = 13$ (nguyên tố).

Vậy với $n = 1$ thì $n^2 + 12n$ là số nguyên tố.

b) $n = 0$ ta có $3^n + 6 = 3^0 + 6 = 7$ là số nguyên tố.

$$n \neq 0 \text{ ta có } 3^n : 3, 6 : 3 \text{ nên } 3^n + 6 : 3$$

$$3^n + 6 > 3$$

Số $3^n + 6$ là hợp số vì ngoài ước 1 và chính nó còn có ước là 3.

Vậy với $n = 0$ thì $3^n + 6$ là số nguyên tố.

Bài 111

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2002 \cdot 2003$$

2002 số tự nhiên liên tiếp sau $a + 2; a + 3; \dots; a + 2002; a + 2003$ đều là hợp số vì chúng theo thứ tự có ước là 2; 3; ...; 2003 và có ước là 1 và chính nó.

Bài 112

$$a) \text{ Đặt } p = 3a + r \text{ (} r = 0; 1; 2 \text{ và } a \in \mathbb{N} \text{)}$$

c

$r = 1$ ta có $p + 8 = 3a + r + 8 = (3a + 9) : 3$, $3a + 9 > 3$ nên $p + 8$ là hợp số.

$r = 2$ ta có $p + 4 = 3a + r + 4 = (3a + 6) : 3$, $3a + 6 > 3$ nên $p + 4$ là hợp số.

Do đó $r = 0$, $p = 3a$ là số nguyên tố nên $a = 1 \Rightarrow p = 3$.

Ta có $p + 4 = 7$; $p + 8 = 11$ là các số nguyên tố.

Vậy $p = 3$

b) Đặt $p = 5a + r$ ($r = 0; 1; 2; 3; 4$ và $a \in \mathbb{N}$)

• $r = 1$ ta có $p + 14 = 5a + r + 14 = (5a + 15) : 5$

mà $5a + 15 > 5$ nên $p + 14$ là hợp số.

• $r = 2$ ta có $p + 8 = 5a + r + 8 = (5a + 10) : 5$

mà $5a + 10 > 5$ nên $p + 8$ là hợp số.

• $r = 3$ ta có $p + 22 = 5a + r + 22 = (5a + 25) : 5$

mà $5a + 25 > 5$ nên $p + 22$ là hợp số.

• $r = 4$ ta có $p + 6 = 5a + r + 6 = (5a + 10) : 5$

mà $5a + 10 > 5$ nên $p + 6$ là hợp số.

Do đó $r = 0$, $p = 5a$ là số nguyên tố nên $a = 1 \Rightarrow p = 5$.

Ta có $p + 2 = 7$; $p + 8 = 13$; $p + 6 = 11$; $p + 14 = 19$ là các số nguyên tố.

Vậy $p = 5$

Bài 113

Đặt $p = 3a + r$ ($r = 0; 1; 2$ và $a \in \mathbb{N}$)

$r = 0$ ta có $p = 3a$ là số nguyên tố nên $a = 1 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow 8p + 1 = 25$ là hợp số.

$r = 1$ ta có $8p + 1 = 8(3a + 1) + 1 = 24a + 8 + 1 = (24a + 9) : 3$ mà $24a + 9 > 3$ nên $8p + 1$ là hợp số.

$r = 2$ ta có $8p - 1 = 8(3a + 2) - 1 = 24a + 16 - 1 = (24a + 15) : 3$, $24a + 15 > 3$ nên $8p - 1$ là hợp số.

Do đó $r = 2$ (loại)

Vậy p , $8p - 1$ là số nguyên tố thì $8p + 1$ là hợp số.

Bài 114

Ta có $p = 42a + r = 2 \cdot 3 \cdot 7a + r$ ($a, r \in \mathbb{N}$; $0 < r < 42$)

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2; 3; 7.

Các hợp số nhỏ hơn 42 không chia hết cho 2 là 9; 15; 21; 25; 27; 33; 35; 39.

Loại bỏ các số chia hết cho 3, cho 7 ta còn số 25.

Vậy $r = 25$.

Bài 115

Dễ thấy $p > 2$ nên p lẻ.

Vì p vừa là tổng, vừa là hiệu của hai số nguyên tố nên một số phải chẵn còn số kia lẻ. Số chẵn là 2.

Như vậy $p = a + 2 = b - 2$ (a, b là các số nguyên tố)

Mà $a = p - 2$; p ; $b = p + 2$ là ba số lẻ liên tiếp nên có một số chia hết cho 3. Vậy phải có một số bằng 3.

Nếu $a = 3$ thì $p - 2 = 3 \Rightarrow p = 5$; $b = 5 + 2 = 7$.

Nếu $p = 3$ thì $a = 3 - 2 = 1$ không là số nguyên tố.

Nếu $b = 3$ thì $p + 2 = 3 \Rightarrow p = 3 - 2 = 1$ không nguyên tố.

Vậy số nguyên tố $p = 5$ là số nguyên tố duy nhất thỏa mãn đầu bài.

§15. PHÂN TÍCH MỘT SỐ RA THỪA SỐ NGUYÊN TỐ

Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố.

Chú ý:

– Dù phân tích một số ra thừa số nguyên tố bằng cách nào thì cuối cùng ta cũng được cùng một kết quả.

– Số lượng các ước của số m ($m > 1$), $m = a^x b^y c^z$ (a, b, c là các số nguyên tố) là $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$.

BÀI TẬP

Bài 116

Phân tích các số sau ra thừa số nguyên tố: 13104; 22815.

Bài 117

Khi phân tích các số: 21345; 14190; 243135 ra thừa số nguyên tố thì số nào:

- Có chứa thừa số nguyên tố 5?
- Có chứa thừa số nguyên tố 3 và 5?
- Có chứa thừa số nguyên tố 2; 3 và 5?

Bài 118

Một hình vuông có diện tích là 1936 m^2 . Tính cạnh của hình vuông đó.

Bài 119

Tích của hai số tự nhiên bằng 105. Tìm mỗi số.

Bài 120

Thay dấu * bởi chữ số thích hợp:

$$\overline{**} \cdot * = 424$$

Bài 121

Thay dấu * bởi chữ số thích hợp:

$$\overline{***} \cdot \overline{**} \cdot * = 16261$$

Bài 122

Trong một phép chia, số bị chia bằng 98, số dư bằng 3.

Tìm số chia và thương.

Bài 123

Điền các chữ số thích hợp trong phép phân tích ra thừa số nguyên tố sau:

$$\begin{array}{l|l} abcd & e \\ fcga & h \\ abc & c \\ hef & \dots \end{array}$$

Bài 124

Tìm số nhỏ nhất có 12 ước.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 116**

$$\begin{array}{l|l} 13104 & 2 \\ 6552 & 2 \\ 3276 & 2 \\ 1638 & 2 \\ 819 & 3 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{Vậy } 13104 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13.$$

$$\begin{array}{r|l}
 22815 & 3 \\
 7605 & 3 \\
 2535 & 3 \\
 845 & 5 \\
 169 & 13 \\
 13 & 13 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\text{Vậy } 22815 = 3^3 \cdot 5 \cdot 13^2.$$

Bài 117

$$21345 : 2; 14190 : 2; 243135 : 2.$$

21345; 14190; 243135 chia hết cho 5 vì có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5.

Số 21345 có tổng các chữ số là $2 + 1 + 3 + 4 + 5 = 15$; $15 : 3$ nên $21345 : 3$

Số 14190 có tổng các chữ số là $1 + 4 + 1 + 9 + 0 = 15$; $15 : 3$ nên $14190 : 3$

Số 243135 có tổng các chữ số là $2 + 4 + 3 + 1 + 3 + 5 = 18$; $18 : 3$ nên $243135 : 3$

Do vậy khi phân tích các số 21345; 14190; 243135 ra thừa số nguyên tố thì:

- Số có chứa thừa số nguyên tố 5 là 21345; 14190; 243135.
- Số có chứa thừa số nguyên tố 3 và 5 là 21345; 14190; 243135.
- Số có chứa thừa số nguyên tố 2, 3 và 5 là 14190.

Bài 118

Phân tích số 1936 ra thừa số nguyên tố

$$\begin{array}{r|l}
 1936 & 2 \\
 968 & 2 \\
 484 & 2 \\
 242 & 2 \\
 121 & 11 \\
 11 & 11 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$1936 = 2^4 \cdot 11^2 = (2^2 \cdot 11) \cdot (2^2 \cdot 11) = 44 \cdot 44$$

Vậy cạnh của hình vuông là 44 (m)

Bài 119

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a và b.

Ta có $a \cdot b = 105$

Phân tích số 105 ra thừa số nguyên tố $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

Các số a và b là ước của 105. Do đó, có:

a	1	3	5	7	15	21	35	105
b	105	35	21	15	7	5	3	1

Bài 120

$$\overline{**} \cdot * = 424$$

Do đó $\overline{**}$ là ước của 424 và $\overline{**}$ là số có hai chữ số.

Phân tích số 424 ra thừa số nguyên tố.

$$\begin{array}{r|l} 424 & 2 \\ 212 & 2 \\ 106 & 2 \\ 53 & 53 \\ 1 & \end{array}$$

$$424 = 2^3 \cdot 53$$

Các ước của 424 là 1; 2; 4; 8; 53; 106; 212; 424.

Do đó $\overline{**} = 53$ vì vậy $* = 8$

Ta có $53 \cdot 8 = 424$.

Bài 121

$$\overline{***} \cdot \overline{**} \cdot * = 16261$$

Do đó $\overline{***}$ là ước của 16261 và $\overline{***}$ là số có ba chữ số, $\overline{**}$ là ước của 16261 và $\overline{**}$ là số có hai chữ số.

Phân tích số 16261 ra thừa số nguyên tố.

$$\begin{array}{r|l} 16261 & 7 \\ 2323 & 23 \\ 101 & 101 \\ 1 & \end{array}$$

$$16261 = 7 \cdot 23 \cdot 101$$

Các ước của 16261 là 1; 7; 23; 101; 161; 707; 2323; 16261.

Do đó $\overline{***} = 101$; $\overline{**} = 23$; $* = 7$

$\overline{***} = 707$; $\overline{**} = 23$; $* = 1$.

Bài 122

Gọi số chia là a , số thương là b ($a, b \in \mathbb{N}$; $a > 3$)

Theo đầu bài ta có $98 = a \cdot b + 3$

$$a \cdot b = 95$$

Phân tích số 95 ra thừa số nguyên tố.

$$95 = 5 \cdot 19$$

$$a > 3 \text{ nên } a = 95, b = 1$$

$$\text{hoặc } a = 5, b = 19$$

$$\text{hoặc } a = 19; b = 5.$$

Bài 123

$$\text{Ta có } \overline{abcd} = e \cdot h \cdot \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} \cdot 10 + d = e \cdot h \cdot \overline{abc}$$

$$\Rightarrow d : \overline{abc} \Rightarrow d = 0. \text{ Từ đó có } e \cdot h = 10$$

$$\Rightarrow e, h \in \{2; 5\}.$$

$$\overline{hcf} \cdot c = \overline{abc} \Rightarrow h \cdot c \leq 9 \Rightarrow h, c \in \{2; 3\}$$

$$\text{Do đó } h = 2 \text{ vì vậy } e = 5, c = 3$$

$$\text{Vì } \overline{fcga} \cdot 5 = \overline{abcd} \text{ nên } f = 1$$

$$\Rightarrow hcf = 231, abcd = hcf \cdot c \cdot h \cdot e = 231 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 6930$$

Ta có:

$$\begin{array}{r|l} 6930 & 5 \\ 1386 & 2 \\ 693 & 3 \\ 231 & \dots \end{array}$$

Bài 124

Phân tích số đã cho ra thừa số nguyên tố ta có:

$$m = a^x b^y c^z \dots$$

$$\text{Ta có } (x+1)(y+1)(z+1) \dots = 12$$

Số 12 có bốn cách viết thành một số hay tích hai hay nhiều thừa số lớn hơn 1 là $12; 6 \cdot 2; 4 \cdot 3; 3 \cdot 2 \cdot 2$

Xét các trường hợp:

a) m chứa một thừa số nguyên tố.

$$\text{Ta có } x+1 = 12 \text{ nên } x = 11.$$

Chọn thừa số nguyên tố nhỏ nhất là 2.

Số nhỏ nhất trong trường hợp này là 2^{11} .

b) m chứa hai thừa số nguyên tố.

Ta có $(x + 1)(y + 1) = 6 \cdot 2$ hoặc $(x + 1)(y + 1) = 4 \cdot 3$

Do đó $x = 5, y = 1$ hoặc $x = 3, y = 2$

Để m nhỏ nhất chọn thừa số nguyên tố nhỏ ứng với số mũ lớn, ta có $m = 2^5 \cdot 3 = 96$ hoặc $m = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

Số nhỏ nhất trong trường hợp này là 72.

c) m chứa ba thừa số nguyên tố.

Ta có $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 3 \cdot 2 \cdot 2$

nên $x = 2, y = 1, z = 1$

Số nhỏ nhất trong trường hợp này là $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

So sánh các số $2^{11}, 72, 60$ nhận ra rằng số nhỏ nhất có 12 ước là số 60.

§16. ƯỚC CHUNG VÀ BỘI CHUNG

• Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Kí hiệu tập hợp các ước chung của a và b là: $ƯC(a; b)$

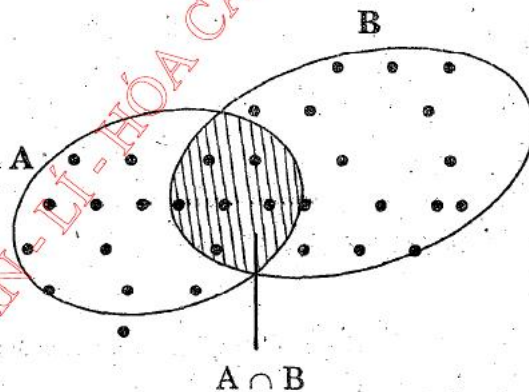
$x \in ƯC(a; b; c)$ nếu $a : x; b : x$ và $c : x$.

• Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

Kí hiệu tập hợp các bội chung của a và b là: $BC(a; b)$

$x \in BC(a; b; c)$ nếu $x : a; x : b$ và $x : c$.

• Giao của hai tập hợp là một tập hợp gồm các phần tử chung của hai tập hợp đó.



BÀI TẬP

Bài 125. Viết các tập hợp:

a) $Ư(12); Ư(18); ƯC(12;18);$ b) $B(12); B(18); BC(12;18).$

Bài 126

Cho $A = \{x \in \mathbb{N} / 5 < x \leq 10\}$,

$B = \{x \in \mathbb{N} / 4 < x \leq 7\}$.

Tìm $A \cap B$.

Bài 127

Gọi C là tập hợp các số lẻ, L là tập hợp các số chẵn.

Tìm $C \cap \mathbb{N}$, $L \cap \mathbb{N}$, $C \cap L$.

Bài 128

Tìm giao của hai tập hợp $\mathbb{N}$ và $\mathbb{N}^*$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 125**

a) $Ư(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

$Ư(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$.

$ƯC(12; 18) = \{1; 2; 3; 6\}$.

b) $B(12) = \{0; 12; 24; 36; 48; \dots\}$.

$B(18) = \{0; 18; 36; 54; \dots\}$.

$BC(12; 18) = \{0; 36; 72; \dots\}$.

Bài 126

$A = \{6; 7; 8; 9; 10\}$; $B = \{5; 6; 7\}$.

Do đó $A \cap B = \{6; 7\}$.

Bài 127

$C \cap \mathbb{N} = C$, $L \cap \mathbb{N} = L$, $C \cap L = \emptyset$

Bài 128

$\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$.

§17. ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT

• Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

Ước chung lớn nhất (ƯCLN) của $a, b, 1$ (với mọi số tự nhiên a, b) là $ƯCLN(a, b, 1) = 1$

• Muốn tìm ƯCLN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau:

Bước 1: Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

Bước 2: Chọn ra thừa số nguyên tố chung.

Bước 3: Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là ƯCLN phải tìm.

• Để tìm ước chung của các số đã cho, ta có thể tìm các ước của ƯCLN của các số đó.

BÀI TẬP

Bài 129

Tìm ƯCLN rồi tìm các ước chung của:

a) 108; 162.

b) 360; 600; 840.

Bài 130

a) Tìm số tự nhiên a , biết rằng $720 : a$, $540 : a$ và $70 < a < 100$.

b) Tìm số tự nhiên b , biết rằng $120 : b$, $300 : b$, $420 : b$ và $b > 20$.

Bài 131

Cho biết $b : a$. Tìm ƯCLN (a, b).

Bài 132

Tìm số tự nhiên a lớn nhất thỏa mãn 543; 4539; 3567 đều chia cho a dư 3.

Bài 133

Lớp 6A có 40 học sinh, lớp 6B có 48 học sinh, lớp 6C có 32 học sinh. Ba lớp cùng xếp thành các hàng dọc như nhau mà không lớp nào có người lẻ hàng.

Tính số hàng dọc nhiều nhất có thể xếp được.

Bài 134

Tìm số tự nhiên n , biết rằng 288 chia cho n dư 38 và 414 chia cho n dư 14.

Bài 135

Tìm $a, b \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng: $a + b = 224$, ƯCLN (a, b) = 56

Bài 136

Tìm $a, b \in \mathbb{N}^*$; biết rằng: $a \cdot b = 6144$; ƯCLN (a, b) = 32

Bài 137

Chứng tỏ rằng $2n + 1$ và $2n + 3$ ($n \in \mathbb{N}$) là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 138

Chứng tỏ rằng $14n + 3$ và $21n + 4$ ($n \in \mathbb{N}$) là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 139

Tìm ƯCLN của $2n - 1$ và $9n + 4$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Bài 140

Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 thành lập tất cả các số có sáu chữ số, mỗi số gồm sáu chữ số khác nhau.

Tìm ƯCLN của tất cả các số lập được.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 129**

a)

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$

$$162 = 2 \cdot 3^4$$

$$\text{ƯCLN}(108; 162) = 2 \cdot 3^3 = 54$$

$$\text{ƯC}(108; 162) = \text{Ư}(\text{ƯCLN}(108; 162)) = \text{Ư}(54) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18; 27; 54\}.$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 840 & 2 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\text{ƯCLN}(360; 600; 840) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

$$\begin{aligned} \text{ƯC}(360; 600; 840) &= \text{Ư}(\text{ƯCLN}(360; 600; 840)) = \\ &= \text{Ư}(120) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60; 120\} \end{aligned}$$

Bài 130

a) $720 : a \Rightarrow a$ là ước của 720

$540 : a \Rightarrow a$ là ước của 540

Do đó a là ước chung của 720 và 540

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$\text{ƯCLN}(720; 540) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

Ta có: $a \in \text{Ư}(180)$ mà $70 < a < 100$

Do đó $a = 90$

b) $120 : b \Rightarrow b$ là ước của 120.

$300 : b \Rightarrow b$ là ước của 300.

$420 : b \Rightarrow b$ là ước của 420.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\text{Do đó } \text{ƯCLN}(120; 300; 420) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Vậy $b \in \text{Ư}(60)$ mà $b > 20$

Do đó $b = 30; 60$.

Bài 131

$b : a \Rightarrow a$ là ước của b mà a là ước lớn nhất của a . Do đó $\text{ƯCLN}(a, b) = a$.

Bài 132

543, 4539, 3567 chia cho a dư 3

$\Rightarrow a$ là ước của $543 - 3 = 540$

$4539 - 3 =$

$= 4536, 3567 - 3$

$= 3564$

Mà a là số lớn nhất nên a là $\text{ƯCLN}(540; 4536; 3564)$

540	2	4536	2	3564	2
270	2	2268	2	1782	2
135	3	1134	2	891	3
45	3	567	3	297	3
15	3	189	3	99	3
5	5	63	3	33	3
1		21	3	11	11
		7	7	1	
		1			

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$4536 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$$

$$3564 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11$$

$$\text{Vậy } a = \text{ƯCLN}(540; 4536; 3564) = 2^2 \cdot 3^3 = 108.$$

Bài 133

Số hàng dọc nhiều nhất có thể xếp được là ước chung lớn nhất của 40, 48 và 32.

$$40 = 2^3 \cdot 5; 48 = 2^4 \cdot 3; 32 = 2^5$$

$$\text{ƯCLN}(40; 48; 32) = 2^3 = 8$$

Vậy số hàng dọc nhiều nhất xếp được là 8 hàng.

Bài 134

288 chia cho n dư 38 $\Rightarrow n$ là ước của $288 - 38 = 250$ và $n > 38$

Mặt khác 414 chia cho n dư 14 $\Rightarrow n$ là ước của $414 - 14 = 400$ và $n > 14$.

Do đó n là ước chung của 250 và 400; $n > 38$

a,

250	2
125	5
25	5
5	5
1	

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$$250 = 2 \cdot 5^3$$

$$400 = 2^4 \cdot 5^2$$

$$\text{ƯCLN}(250; 400) = 2 \cdot 5^2 = 50$$

n là ước của 50 và $n > 38$

Do đó $n = 50$.

Bài 135

$\text{ƯCLN}(a, b) = 56$. Đặt $a = 56x$; $b = 56y$

với $\text{ƯCLN}(x, y) = 1$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Ta có $a + b = 224$

$$56x + 56y = 224$$

$$56(x + y) = 224$$

$$x + y = 224 : 56$$

$$x + y = 4$$

x	1	2	3
y	3	2	1

Vì $\text{ƯCLN}(x, y) = 1$

nên chọn $x = 1, y = 3$ hoặc $x = 3, y = 1$

$$\text{Do đó } a = 56 \cdot 1 = 56; b = 56 \cdot 3 = 168$$

$$\text{hoặc } a = 56 \cdot 3 = 168; b = 56 \cdot 1 = 56.$$

Bài 136

$\text{ƯCLN}(a; b) = 32$ Đặt $a = 32x$; $b = 32y$

với $\text{ƯCLN}(x; y) = 1$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Ta có $a \cdot b = 6144$

$$32x \cdot 32y = 6144$$

$$x \cdot y = 6144 : (32 \cdot 32)$$

$$x \cdot y = 6$$

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

Do đó, ta có:

$$a = 32 \cdot 1 = 32; b = 32 \cdot 6 = 192$$

$$a = 32 \cdot 2 = 64; b = 32 \cdot 3 = 96$$

$$a = 32 \cdot 3 = 96; b = 32 \cdot 2 = 64$$

$$a = 32 \cdot 6 = 192; b = 32 \cdot 1 = 32.$$

Bài 137

Gọi $d = \text{ƯCLN}(2n + 1, 2n + 3)$, $d \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: d là số lẻ vì $2n + 1$ và $2n + 3$ lẻ

$$\text{và } d \in \text{Ư}(2n + 1), d \in \text{Ư}(2n + 3)$$

$$(2n + 3) - (2n + 1) = 2$$

$$\text{do đó } d \in \text{Ư}(2); d \text{ lẻ nên } d = 1.$$

Vậy $2n + 1$; $2n + 3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 138

Gọi $d = \text{ƯCLN}(14n + 3, 21n + 4)$, $d \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $d \in \text{Ư}(14n + 3)$ và $d \in \text{Ư}(21n + 4)$

$$\text{Mà } 3(14n + 3) - 2(21n + 4) = (42n + 9) - (42n + 8) = 1$$

$$\text{do đó } d \in \text{Ư}(1) \Rightarrow d = 1$$

Vậy $14n + 3$; $21n + 4$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 139

Gọi d là ước chung lớn nhất của $2n - 1$ và $9n + 4$ ($n \in \mathbb{N}^*$),

ta có $d \in \text{Ư}(2n - 1)$, $d \in \text{Ư}(9n + 4)$

$$\text{Mà } 2(9n + 4) - 9(2n - 1) = (18n + 8) - (18n - 9) = 17$$

$$\text{do đó } d \in \text{Ư}(17) \Rightarrow d \in \{1; 17\}$$

Ta có: $2n - 1 = 2n - 18 + 17 = 2(n - 9) + 17$ chia hết cho 17

$$\Leftrightarrow (n - 9) : 17 \text{ do đó } n = 17m + 9 \text{ (} m \in \mathbb{N} \text{)}$$

Do vậy: nếu $n = 17m + 9$ ($m \in \mathbb{N}$) thì:

$$\text{ƯCLN}(2n - 1, 9n + 4) = 17$$

Nếu $n \neq 17m + 9$ thì $(2n - 1) \not\vdots 17$

$$\text{Ta có } \text{ƯCLN}(2n - 1; 9n + 4) = 1.$$

Bài 140

Các số có sáu chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; có dạng $abcdef$, trong đó $a + b + c + d + e + f = 21$.

Do vậy mỗi số lập được đều chia hết cho 3 và không chia hết cho 9.

Vậy ƯCLN của các số này là bội của 3 và không là bội của 9.

Mặt khác trong sáu số này có hai số là 123456 và 123465.

Vậy ƯCLN cần tìm là ước của hiệu $123465 - 123456 = 9$.

Ta có ƯCLN cần tìm là 3.

§18. BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

• Bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp các bội chung của các số đó.

• Muốn tìm BCNN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau:

Bước 1: Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố

Bước 2: Chọn ra thừa số nguyên tố chung và riêng

Bước 3: Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó.

Tích là BCNN phải tìm.

Chú ý:

– Nếu các số đã cho từng đôi một nguyên tố cùng nhau thì BCNN của chúng là tích của các số đó.

– Trong các số đã cho, nếu số lớn nhất là bội của các số còn lại thì BCNN của các số đã cho chính là số lớn nhất ấy.

• Để tìm bội chung của các số đã cho, ta có thể tìm các bội của BCNN của các số đó.

BÀI TẬP**Bài 141**

Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất khác 0, biết rằng:

$a : 40, a : 220, a : 24$.

Bài 142

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khác 5 khi chia số đó cho 70; 140; 350; 700 có cùng số dư là 5.

Bài 143

Tìm các bội chung có ba chữ số của 50; 125; 250.

Bài 144

Một trường THCS xếp hàng 20, 25, 30 đều dư 13 học sinh nhưng xếp hàng 45 còn thừa 28 học sinh. Tính số học sinh của trường đó, biết rằng số học sinh của trường đó chưa đến 1000 học sinh.

Bài 145

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 3 dư 1, chia cho 5 dư 3 và chia cho 7 dư 5.

Bài 146

Thay dấu * bằng chữ số thích hợp để số $\overline{517**}$ chia hết cho cả 6; 7; 18.

Bài 147

Một số tự nhiên a khi chia cho 7 dư 4, chia cho 9 dư 6.
Tìm số dư khi chia a cho 63.

Bài 148

Cho biết $a : b$, tìm BCNN (a ; b).

Bài 149

Tìm $a, b \in \mathbb{N}$, biết $a \cdot b = 2400$ và BCNN (a, b) = 120.

Bài 150

Cho $a : b$, BCNN (a, b) = 630, UCLN (a, b) = 18. Tìm a và b .

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 141**

Theo đầu bài ta có: a là BCNN (40; 220; 24).

40	2	220	2	24	2
20	2	110	2	12	2
10	2	55	5	6	2
5	5	11	11	3	3
1		1		1	

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

$$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$\text{BCNN} (40; 220; 24) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 1320.$$

$$\text{Vậy } a = 1320.$$

Bài 142

Gọi số cần tìm là a ($a \in \mathbb{N}$, $a \neq 5$)

Theo đầu bài ta có: $a - 5$ chia hết cho các số 70; 140; 350; 700 mà $a - 5 \neq 0$

Do đó $a - 5$ là BCNN (70; 140; 350; 700) vì 700 là bội của các số 70; 140; 350

nên $a - 5 = 700$

$$a = 700 + 5$$

$$a = 705.$$

Bài 143

250 là bội của các số 50; 125; 250.

Do đó BCNN (50; 125; 250) = 250

BC (50; 125; 250) = {0; 250; 500; 750; 1000; ...}.

Số cần tìm có ba chữ số.

Do đó số cần tìm là 250 hoặc 500 hoặc 750.

Bài 144

Gọi số học sinh của trường đó là a ($0 < a < 1000$, $a \in \mathbb{N}$)

Ta có $a - 13$ là bội chung của 20; 25; 30 và a chia cho 45 dư 28.

$$20 = 2^2 \cdot 5; 25 = 5^2; 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{BCNN} (20; 25; 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300.$$

Do đó $a - 13 \in \{0; 300; 600; 900; 1200; \dots\}$

$$a \in \{13; 313; 613; 913; 1213; \dots\}$$

Vì $a < 1000$ và a chia cho 45 dư 28 thử chọn có số học sinh của trường đó là 613 học sinh.

Bài 145

Gọi số cần tìm là x ($x \in \mathbb{N}$)

Theo đầu bài ta có: $x + 2$ chia hết cho cả 3; 5 và 7.

$x + 2 \neq 0$, $x + 2$ nhỏ nhất.

Do đó $x + 2 = \text{BCNN} (3; 5; 7)$

$$\text{BCNN} (3; 5; 7) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

Do đó $x + 2 = 105$

$$x = 105 - 2$$

$$x = 103$$

Số cần tìm là 103.

Bài 146

517^{**} chia hết cho cả 6, 7 và 18 nên 517^{**} là BC (6; 7; 18).

Ta có $6 = 2 \cdot 3$; 7 ; $18 = 2 \cdot 3^2$
 nên $\text{BCNN}(6; 7; 18) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$

$$\overline{517^{**}} = 517 \cdot 100 + \overline{**}$$

$$\overline{517^{**}} = 410 \times 126 + 40 + \overline{**} \Rightarrow (40 + \overline{**}) : 126$$

$$\text{mà } 0 \leq \overline{**} \leq 99$$

$$\text{Do đó } 40 \leq 40 + \overline{**} \leq 40 + 99 = 139.$$

$$\text{Vậy } 40 + \overline{**} = 126$$

$$\overline{**} = 126 - 40$$

$$\overline{**} = 86$$

Ta có số 51786.

Bài 147

$$a \text{ chia cho } 7 \text{ dư } 4 \Rightarrow (a + 3) : 7$$

$$a \text{ chia cho } 9 \text{ dư } 6 \Rightarrow (a + 3) : 9$$

$$\text{Do đó } a + 3 \in \text{BC}(7; 9)$$

$$\text{Mà } \text{BCNN}(7; 9) = 7 \cdot 9 = 63$$

$$\text{Do đó } (a + 3) : 63 \Rightarrow a \text{ chia cho } 63 \text{ dư } 60.$$

Bài 148

a là bội nhỏ nhất khác 0 của a , a là bội của b (vì $a : b$)

$$\text{Do đó } \text{BCNN}(a, b) = a.$$

Bài 149

$$\text{ƯCLN}(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b) = a \cdot b$$

$$\text{Do đó } \text{ƯCLN}(a, b) = 2400 : 120 = 20.$$

$$\text{Đặt } a = 20x, b = 20y \text{ với } \text{ƯCLN}(x, y) = 1 \text{ và } x, y \in \mathbb{N}$$

$$\text{Ta có } 20x \cdot 20y = 2400$$

$$x \cdot y = (2400) : (20 \cdot 20)$$

$$x \cdot y = 6$$

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

$$\text{Do đó } a = 20 \cdot 1 = 20; b = 20 \cdot 6 = 120$$

$$a = 20 \cdot 2 = 40; b = 20 \cdot 3 = 60$$

$$a = 20 \cdot 3 = 60; b = 20 \cdot 2 = 40$$

$$a = 20 \cdot 6 = 120; b = 20 \cdot 1 = 20.$$

Bài 150

$$\text{ƯCLN}(a, b) = 18, \text{ đặt } a = 18x, b = 18y$$

với $x, y \in \mathbb{N}$, $\text{ƯCLN}(x, y) = 1$; $y \neq 1$

vì $a : b$ mà $\text{ƯCLN}(a, b) = \text{BCNN}(a, b) = a \cdot b$

$$18 \cdot 630 = 18x \cdot 18y$$

$$\Rightarrow x \cdot y = (18 \cdot 630) : (18 \cdot 18)$$

$$x \cdot y = 35.$$

x	1	5	7
y	35	7	5

Vì $y \neq 1$

Vậy $a = 18 \cdot 1 = 18$ thì $b = 18 \cdot 35 = 630$

$a = 18 \cdot 5 = 90$ thì $b = 18 \cdot 7 = 126$

$a = 18 \cdot 7 = 126$ thì $b = 18 \cdot 5 = 90$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1

Thực hiện phép tính:

a) $[(286 : 11 + 7 \cdot 2) \cdot 3 - 119] \cdot 2002 + 1$;

b) $(2^{1999} + 2^{2004}) : (2^{1990} \cdot 2^9)$;

c) $1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 2001 + 2006$;

d) $(225 - 7^2) \cdot (225 - 10^2) \cdot (225 - 9^2) \cdot (225 - 15^2)$.

Bài 2

Tìm x biết:

a) $(x - 23) : 14 + 25 = 42 - 1^{2002}$;

b) $2^3 \cdot x + 2002^0 x = 995 - 15 : 3$;

c) $x + 2x + 3x + \dots + 9x = 459 - 3^2$.

Bài 3

Tích của hai số bằng 360. Nếu bớt 3 đơn vị ở một thừa số và thừa số kia giữ nguyên thì tích mới là 270. Tìm hai số đó.

Bài 4

Cho $A = \{x \in \mathbb{N} / 11 \leq x < 14\}$.

a) Liệt kê các phần tử của tập hợp A;

b) Viết tất cả tập hợp con của A.

Bài 5

Một quyển sách có 246 trang. Phải dùng bao nhiêu chữ số để đánh số trang quyển sách này?

Bài 6

Để đánh số trang một tập tài liệu phải viết 3693 chữ số. Hỏi tập tài liệu này có bao nhiêu trang?

Bài 7

Cho $a, b \in \{9; 24; 85; 16; 31\}$. Tìm a, b biết rằng:

$$50 < a - b < 60.$$

Bài 8

Có chín chiếc nhẫn giống y hệt nhau trong đó có tám chiếc là nhẫn thật, cân nặng bằng nhau và một chiếc nhẫn giả có khối lượng khác với nhẫn thật.

Chỉ bằng 3 lần cân bằng cân đĩa (loại cân có 2 đĩa) là tìm ra chiếc nhẫn giả. Em hãy chỉ ra cách cân và giải thích?

Bài 9

Chia số tự nhiên a cho 7 dư 5, chia số tự nhiên b cho 7 dư 3, chia số tự nhiên c cho 7 dư 2.

Tìm số dư khi chia:

a) $a + b$ cho 7;

b) $a + b + c$ cho 7.

Bài 10

a) Chứng tỏ rằng $10^{2003} + 125$ chia hết cho 45.

b) Chứng tỏ rằng số $543 \cdot 799 \cdot 111 + 58$ là hợp số.

c) Tìm cặp số tự nhiên (x, y) để $2^x + 80 = 3^y$.

Bài 11

Thay dấu $*$ bằng chữ số thích hợp để:

a) Số $\overline{16 * 7 *}$ chia hết cho cả 2; 5 và 9.

b) Số $\overline{1 * 78 *}$ chia hết cho 2, cho 9 và chia cho 5 dư 3.

c) Số $\overline{175 **}$ chia hết cho cả 18; 45 và 15.

Bài 12. Tìm các chữ số a, b, c, d sao cho tổng $\overline{abc} + \overline{dba}$ chia hết cho $\overline{aa}$ và được thương là $\overline{aa}$.

Bài 13

a) Cho $a, b, c \in \mathbb{N}$. Chứng tỏ rằng tổng $72a + 63b + 21c$ chia hết cho 3.

b) Tìm $a, b, c \in \mathbb{N}$ sao cho $99a + 27b + 63c = 1236000$

Bài 14

Cho $a = 840; b = 150; c = 990$

a) Tìm ƯCLN $(a; b; c)$

b) Tìm BCNN (a, b)

áp

Bài 15

Chia các số 4207 và 427 cho số tự nhiên a được số dư là 7. Tìm a biết rằng a là số có ba chữ số.

Bài 16

Ba khối lớp 6; 7; 8 có số học sinh lần lượt là 147 em; 189 em; và 168 em. Muốn cho ba khối lớp xếp thành hàng dọc, số em của mỗi hàng bằng bao nhiêu em? Mỗi khối lớp có bao nhiêu hàng?

ấn
rời**Bài 17**

Cho $n \in \mathbb{N}$. Tìm ƯCLN của:

iếc

a) $21n + 5$ và $14n + 3$;b) $18n + 2$ và $30n + 3$;c) $24n + 7$ và $18n + 5$.**Bài 18**

ia

Tìm các số có ba chữ số khi chia mỗi số đó cho 30; 40; 50 đều có số dư là 5.

Bài 19

Một đơn vị bộ đội có số quân chưa đến 1000 người, khi xếp hàng 20; 25; 30 đều dư 15 người nhưng xếp hàng 41 thì vừa đủ.

Tính số bộ đội của đơn vị đó.

Bài 20

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khi chia số đó cho 5; 6; 7; 8 được số dư lần lượt là 1; 2; 3; 4.

Bài 21

Tìm các số tự nhiên a, b biết rằng:

ho

a) $a + b = 120$; ƯCLN $(a; b) = 12$;b) $a \cdot b = 6936$; ƯCLN $(a; b) = 34$;c) $a \cdot b = 6936$; BCNN $(a; b) = 204$.**Bài 22**

Những số nguyên tố nào có thể là ước của số có dạng $11 \dots 1$?

Bài 23

Ba bạn: Lan, Thu, Cúc mặc ba cái áo màu trắng, vàng, hồng và cài ba cái nơ cũng màu trắng, vàng, hồng. Biết rằng:

a) Chỉ có bạn Lan là có màu áo và màu nơ giống nhau.

b) Màu áo và màu nơ của Thu đều không phải là trắng.

c) Cúc cài nơ màu hồng.

Hãy xác định xem bạn nào mặc áo màu gì và cài nơ màu gì?

Bài 24

Bốn học sinh nữ: Mỹ, Mận, Mai và Mơ đang ở trong một căn phòng của ký túc xá. Một cô đang sửa áo, một cô đang chải đầu, một cô đang viết thư và một cô đang đọc sách. Biết thêm rằng:

- 1) Mỹ không sửa áo và không đọc sách.
- 2) Mận không viết thư và không sửa áo.
- 3) Nếu Mỹ không viết thư thì Mơ không sửa áo.
- 4) Mai không đọc sách và không sửa áo.
- 5) Mơ không đọc sách và không viết thư.

Hãy nói chính xác mỗi cô đang làm gì? (Đề thi vào lớp 10 chuyên toán trường Đại học tổng hợp TP Hồ Chí Minh năm học 1993 – 1994).

Bài 25

Trong một ngôi đền có ba vị thần ngồi cạnh nhau: một vị là thần thật thà (luôn luôn nói thật), một vị là thần dối trá (luôn luôn nói dối), một vị là thần khôn ngoan (lúc nói thật, lúc nói dối). Một nhà thông thái hỏi thần ngồi bên trái:

– Ai ngồi cạnh ngài?

– Thần thật thà.

Nhà thông thái hỏi thần ngồi giữa.

– Ngài là ai?

– Là thần khôn ngoan.

Nhà thông thái hỏi thần ngồi bên phải.

– Ai ngồi cạnh ngài?

– Đó là thần dối trá.

Hãy xác định tên của mỗi vị thần.

GỢI Ý

Bài 1

$$d) 225 - 15^2 = 225 - 225 = 0$$

Bài 2

$$\begin{aligned} c) \quad & x + 2x + 3x + \dots + 9x = \\ & = (1 + 2 + 3 + \dots + 9) x = [(1 + 9) \cdot 9 : 2] x \\ & = 45x. \end{aligned}$$

Bài 8

Chia thành ba nhóm, mỗi nhóm có ba chiếc nhãn.

Bài 22

Dễ dàng nhận ra rằng số có dạng $11 \dots 1$ không chia hết cho hai số nguyên tố 2 và 5.

Gọi p là số nguyên tố khác 2 và 5.

Xét $p + 1$ số sau 1; 11; 111; ...; $\underbrace{11 \dots 1}_{p+1 \text{ chữ số } 1}$.

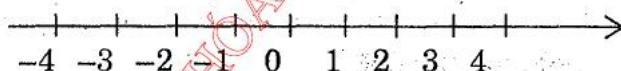
Có ít nhất hai trong các số trên khi chia cho p có số dư giống nhau, do đó hiệu của chúng có dạng $11 \dots 100 \dots 0$ chia hết cho p mà $p \neq 2$; $p \neq 5$ nên $11 \dots 1$ chia hết cho p .

Vậy số có dạng $11 \dots 1$ có ước là tất cả các số nguyên tố trừ hai số nguyên tố 2 và 5.

CHƯƠNG II**SỐ NGUYÊN****§1. LÀM QUEN VỚI SỐ NGUYÊN ÂM**

• Trong thực tế, bên cạnh các số tự nhiên người ta còn dùng các số có dấu “-” đằng trước như: -1, -2, -3... (đọc là âm 1, âm 2, âm 3, ... hoặc trừ 1, trừ 2, trừ 3, ...). Các số như vậy gọi là số nguyên âm.

• Ta biểu diễn các số nguyên âm trên tia đối của tia số và ghi các số -1, -2, -3, ... ta được trục số.

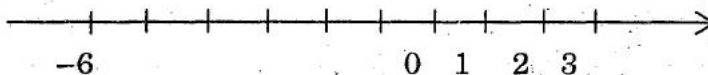


Điểm 0 (không) được gọi là điểm gốc của trục số. Chiều từ trái sang phải gọi là chiều dương của trục số.

Chiều từ phải sang trái gọi là chiều âm của trục số.

BÀI TẬP**Bài 1**

Ghi các số nguyên nằm giữa các số -6 và 0 vào trục số ở hình sau:



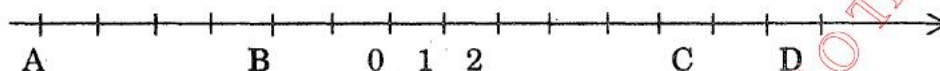
Bài 2

Vẽ một trục số và cho biết:

- Những điểm nằm cách điểm -3 ba đơn vị.
- Ba cặp điểm biểu diễn số nguyên cách đều điểm -3 .

Bài 3

Trên trục số ở hình sau, các điểm: A, B, C, D biểu diễn các số nguyên nào? Có nhận xét gì về các điểm A, C đối với điểm 0.

**Bài 4**

Vẽ một trục số và cho biết: có bao nhiêu cặp điểm cách đều điểm 0? Có bao nhiêu điểm biểu diễn các số nguyên âm?

Bài 5

Vẽ một trục số và vẽ:

- Điểm biểu diễn số nguyên âm lớn nhất có hai chữ số.
- Điểm biểu diễn số nguyên dương nhỏ nhất.
- Điểm cách đều hai điểm trên biểu diễn số nguyên nào?

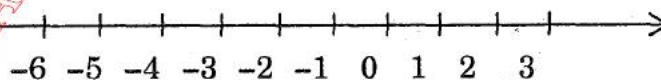
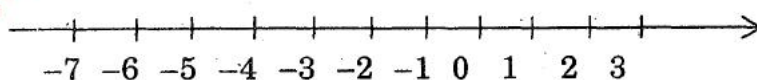
Bài 6

Điểm M nằm trên trục số và có tọa độ là a.

Ta viết: $M(a)$. Hãy vẽ trên trục số các điểm A (-4) ; O (0) ; C (1) ; B (-1) ; D (2) . Tìm tọa độ các điểm cách đều hai đầu của các đoạn thẳng AD, BC, OD. Các điểm cách đều hai đầu của các đoạn thẳng AB, AC có biểu diễn số nguyên nào không?

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 1**

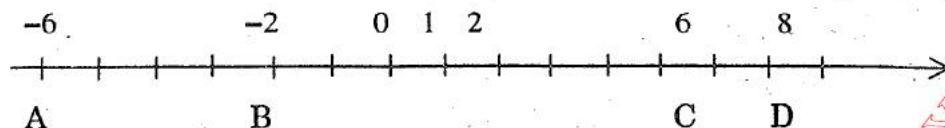
Ghi tiếp các số: -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 theo thứ tự từ trái qua phải, ta được:

**Bài 2**

- Những điểm nằm cách điểm -3 ba đơn vị là: -6 và 0 .

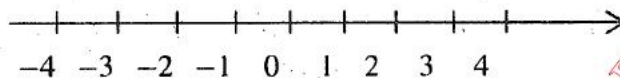
b) Ba cặp điểm biểu diễn số nguyên cách đều điểm -3 . Chẳng hạn: -4 và -2 ; -5 và -1 ; -6 và 0 .

Bài 3



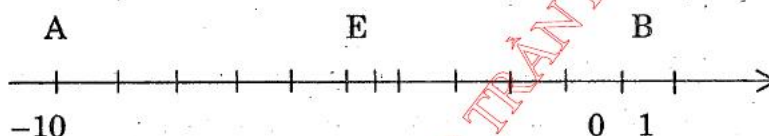
Các điểm A, B, C, D theo thứ tự biểu diễn các số nguyên -6 ; -2 ; 6 ; 8 . Các điểm A và C cách đều điểm 0.

Bài 4



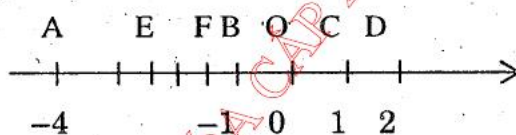
- Có vô số cặp điểm cách đều điểm 0 là: 1 và -1 ; 2 và -2 ; 3 và -3 ; ...
- Có vô số điểm biểu diễn các số nguyên âm là: -1 ; -2 ; -3 ; ...

Bài 5



- Điểm A biểu diễn số nguyên âm lớn nhất có hai chữ số.
- Điểm B biểu diễn số nguyên dương nhỏ nhất.
- Điểm E cách đều hai điểm A và B không biểu diễn số nguyên nào.

Bài 6



Nhìn trên trục số ta thấy:

B (-1) là điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng AD.

O (0) là điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng BC.

C (1) là điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng OD.

Điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng AB là điểm E không biểu diễn số nguyên nào.

Điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng AC là điểm F không biểu diễn số nguyên nào.

§2. TẬP HỢP CÁC SỐ NGUYÊN

1. Số nguyên:

- Các số tự nhiên khác 0 còn được gọi là các số nguyên dương.
- Các số $-1, -2, -3, \dots$ là các số nguyên âm.
- Tập hợp các số nguyên âm, số 0 và các số nguyên dương gọi là tập hợp các số nguyên.

Kí hiệu: $Z = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

Chú ý:

- Số 0 không phải là số nguyên âm và cũng không phải là số nguyên dương.
- Điểm biểu diễn số nguyên a trên trục số gọi là điểm a .

Nhận xét: Số nguyên thường được sử dụng để biểu thị các đại lượng có hai hướng ngược nhau.

2. Số đối:

- Các điểm 1 và -1 ; 2 và -2 ; 3 và -3 ; ... cách đều điểm 0 và nằm ở hai phía của điểm 0 trên trục số. Nên các số 1 và -1 ; 2 và -2 ; 3 và -3 ; ... là các số đối nhau.
- Số đối của số 0 là số 0.

BÀI TẬP

Bài 7

Đọc những điều ghi sau đây và cho biết điều đó có đúng không?

- a) $a \in N \Rightarrow a \in Z$; b) $a \in Z \Rightarrow a \in N$;
 c) $Z \subset N$; d) $N \subset Z$;
 e) $N \subset N$; f) $Z \subset Z$.

Bài 8

Cho $A = \{1, -3; 5; 0; -1\}$

- a) Tập hợp A có phải là tập hợp con của tập hợp các số tự nhiên N , của tập hợp các số nguyên Z không?
 b) Viết tập hợp B gồm các phần tử của A và các số đối của chúng.

Bài 9

Hai bạn A và B cùng chơi trò chơi như sau: trên bảng ghi các dấu “-”. Mỗi người đến lượt mình được thay 1 hoặc 2 dấu “-” thành dấu “+”. Người nào thay được 1 hoặc 2 dấu “-” cuối cùng thành dấu “+” thì thắng cuộc. Hỏi ai thắng cuộc? Biết A đi trước trong các trường hợp sau:

- a) Cho trước trên bảng 2002 dấu “-”.
b) Cho trước trên bảng 2003 dấu “-”.

Bài 10

Trên bảng cho 20 dấu “+” và 11 dấu “-”. Cho phép mỗi lần xóa hai dấu bất kỳ và ghi lại 1 dấu “+” nếu hai dấu bị xóa giống nhau, ghi lại một dấu “-” nếu hai dấu bị xóa khác nhau. Có thể thực hiện sau một số lần xóa và ghi để trên bảng chỉ còn 1 dấu “+” không? Vì sao?

Bài 11

a) Xét các bảng A, B như hình sau. Mỗi lần thay đổi bảng vuông được phép đổi toàn bộ các dấu (dấu “-” thành dấu “+”, dấu “+” thành dấu “-”) ở trong các ô cùng một hàng hoặc cùng một cột. Chứng tỏ rằng sau một số lần biến đổi bảng B ta có được bảng A.

-	+	+
-	+	-
+	+	-

A

-	+	-
+	-	-
+	+	+

B

b) Bằng cách thay đổi như trên. Sau một số lần biến đổi bảng C có thể nhận được bảng D hay không? Vì sao?

+	-	-
-	+	-
+	-	+

C

+	-	-
+	-	-
+	+	-

D

Bài 12

Cho hai dãy số, mỗi dãy gồm 1958 số +1 hoặc -1. Chứng minh rằng sau một số lần thực hiện động tác: đổi dấu cùng một lúc 11 số tùy ý của một dãy; ta có thể làm cho hai dãy đồng nhất (tức là ở bất kỳ vị trí nào trong hai dãy, ta cũng có hai số bằng nhau).

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 7**

- a) Đúng. Vì tập hợp $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và các số $-1; -2; -3; \dots$
b) Sai. Vì $-1 \in \mathbb{Z}$ nhưng $-1 \notin \mathbb{N}$.
c) Sai. Vì $-1 \in \mathbb{Z}$ nhưng $-1 \notin \mathbb{N}$.
d) Đúng. Vì mọi phần tử của tập hợp $\mathbb{N}$ đều thuộc tập hợp $\mathbb{Z}$.
e) Đúng. Vì mọi phần tử của tập hợp $\mathbb{N}$ đều thuộc tập hợp $\mathbb{N}$.
f) Đúng. Vì mọi phần tử của tập hợp $\mathbb{Z}$ đều thuộc tập hợp $\mathbb{Z}$.

Bài 8

a)

• Tập hợp Δ không phải là tập hợp con của tập hợp N . Vì $-3 \in \Delta$ nhưng $-3 \notin N$.

• $A \subset Z$. Vì mọi phần tử thuộc A đều thuộc Z .

b) Các số 1; -3; 5; 0; -1 (là các phần tử của tập hợp A) có các số đối lần lượt là: -1; 3; -5; 0; 1.

Vậy: Tập hợp $B = \{1; -1; 3; -3; 5; -5; 0\}$

Bài 9

Ta có: $2 + 1 = 3$ dấu “-” thay hai lần.

a) Trường hợp trên bảng có 2002 dấu “-”

• A thắng cuộc.

• Cách chơi: A thay lần đầu tiên một dấu “-” thành một dấu “+” để lại cho B số dấu “-” là B (3). Tiếp theo nếu B thay k dấu “-” ($k = 1; 2$) thành dấu “+” thì A thay $3 - k$ dấu “-” thành dấu “+” ... Cứ thế và một hoặc hai dấu “-” cuối cùng A sẽ là người thay thành dấu “+”.

b) Trường hợp trên bảng có 2003 dấu “-”

• A thắng cuộc.

• Cách chơi: A thay lần đầu tiên hai dấu “-” thành hai dấu “+” (tương tự trên).

Bài 10

Sau mỗi lần xóa và ghi thì số dấu “-” hoặc giữ nguyên hoặc giảm đi 2. Như vậy số dấu “-” giảm đi luôn luôn chẵn. Trên bảng có 11 dấu “-” nên xóa và ghi dù bao nhiêu lần cũng cho dấu còn lại cuối cùng là dấu “-”; không thể là dấu “+”.

Bài 11

a) Từ bảng B đổi dấu (dấu “-” thành dấu “+”, dấu “+” thành dấu “-”) ở hàng thứ hai rồi tiếp tục đổi dấu ở cột thứ ba của bảng B' ta sẽ được bảng A.

-	+	-
+	-	-
+	+	+

B

-	+	-
-	+	+
+	+	+

B'

-	+	+
-	+	-
+	+	-

A

b) Xét bốn ô vuông ở phía trên góc phải của bảng C (hình vẽ). Nhận thấy: mỗi lần đổi dấu cột hoặc hàng thì ở bốn ô này có số dấu “-” là 1 hoặc 3; còn ở bảng D bốn ô ở vị trí này đều mang dấu “-” nên mỗi lần đổi dấu cột hoặc hàng thì 4 ô ở vị trí này có số dấu “+” là 0 hoặc 2 hoặc 4. Do vậy không thể biến đổi từ bảng C để có bảng D.

+	-	-
-	+	-
+	-	+

C

+	-	-
+	-	-
+	+	-

D

Bài 12

Giả sử muốn đổi dấu số a trong một dãy (và giữ nguyên dấu các số khác).

Lấy hai số b, c bất kì trong dãy (b, c khác a). Ta đổi dấu b cùng với 10 số khác một cách tùy ý, sau đó đổi dấu c với 10 số này. Như vậy sau hai lần đổi dấu ta đổi được dấu của b và c (còn 10 số kia không thay đổi).

Sau 10 lần như vậy ta đổi dấu được 10 số (khác a) ta tiếp tục đổi dấu của a cùng với 10 số này.

Do đó ta có thể đổi dấu bất kì một số nào trong dãy (và giữ nguyên dấu các số khác). Ta có điều phải chứng minh.

§3. THỨ TỰ TRONG TẬP HỢP CÁC SỐ NGUYÊN

1. So sánh hai số nguyên:

Khi biểu diễn trên trục số (nằm ngang), điểm a nằm bên trái điểm b thì số nguyên a nhỏ hơn số nguyên b .

Chú ý:

Số nguyên b gọi là liền sau của số nguyên a nếu $a < b$ và không có số nguyên nào nằm giữa a và b . Khi đó, ta cũng nói a là số liền trước của b .

2. Giá trị tuyệt đối của một số nguyên:

Khoảng cách từ điểm a đến điểm 0 trên trục số là giá trị tuyệt đối của số nguyên a .

Giá trị tuyệt đối của số nguyên a kí hiệu là $|a|$ (đọc là “giá trị tuyệt đối của a ”).

Nhận xét:

- Giá trị tuyệt đối của số 0 là số 0.
- Giá trị tuyệt đối của một số nguyên dương là chính nó.
- Giá trị tuyệt đối của một số nguyên âm là số đối của nó (và là một số nguyên dương)
- Trong hai số nguyên âm, số nào có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn thì lớn hơn.
- Hai số đối nhau có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

BÀI TẬP**Bài 13**

Cho $A = \{1; -3; 5; 0; -1\}$.

Viết tập hợp M gồm các phần tử của A và các giá trị tuyệt đối của chúng.

Bài 14

a) Tìm số nguyên dương nhỏ nhất có hai chữ số; số nguyên âm nhỏ nhất có hai chữ số.

b) Tìm số nguyên dương nhỏ nhất có n chữ số; số nguyên âm nhỏ nhất có n chữ số ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$).

Bài 15

Xác định số nguyên x lớn nhất và nhỏ nhất biết rằng:

$$|x| < 2003.$$

Bài 16

Cho biết $a < b$. Có bao nhiêu trường hợp có thể xảy ra về thứ tự của ba số nguyên a, b và 0?

Bài 17

Tìm các số nguyên a biết rằng:

a) $n + 12 < a \leq n + 15$ (với $n \in \mathbb{N}$);

b) $n + 69 < a < n + 70$ (với $n \in \mathbb{N}$).

Bài 18

Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn:

a) $-5 < x < 0$;

b) $x < -5$ và $x < 5$;

c) $x < -5$ và $x > 5$;

d) $x < -5$ hoặc $x > 5$.

Bài 19

Chứng minh rằng: với $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

Nếu $a_1 < a_2, a_2 < a_3, \dots, a_{n-1} < a_n$ thì $a_1 < a_n$.

Bài 20

- a) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết $|x| = -2003$; $|x| = |-2003|$.
 b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $|x| + 2003$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 c) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết rằng: $|x| + |y| \leq 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 13**

Các số 1; -3; 5; 0; -1 (là các phần tử của tập hợp A) có các giá trị tuyệt đối lần lượt là: 1; 3; 5; 0; 1.

Vậy tập hợp $M = \{1; -3; 5; 0; -1; 3\}$.

Bài 14

a) Số nguyên dương nhỏ nhất có hai chữ số là 10.

Số nguyên âm nhỏ nhất có hai chữ số là -99

b) Số nguyên dương nhỏ nhất có n chữ số là $\underbrace{100 \dots 0}_{n-1 \text{ chữ số } 0}$

Số nguyên âm nhỏ nhất có n chữ số là $\underbrace{-99 \dots 9}_{n \text{ chữ số } 9}$

Bài 15

Số nguyên x thỏa mãn $|x| < 2003$ là $-2003 < x < 2003$.

Do đó $-2002 \leq x \leq 2002$.

Vậy số nguyên lớn nhất phải tìm là 2002.

Số nguyên nhỏ nhất phải tìm là -2002.

Bài 16

Xét các trường hợp:

- 1) Nếu a và b cùng là số nguyên âm: $a < b < 0$
- 2) Nếu a là số nguyên âm, còn b là số tự nhiên thì: $a < 0 \leq b$.
- 3) Nếu $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$ thì $0 \leq a < b$.

Bài 17

a) $a = n + 13$; $n + 14$; $n + 15$.

b) Không có số nguyên a nào thỏa: $n + 69 < a < n + 70$.

Vì $n + 69$ và $n + 70$ là hai số nguyên liên tiếp.

Bài 18

a) $-5 < x < 0 \Leftrightarrow -5 < x$ và $x < 0$

$-5 < x$ thì $x = -4; -3; -2; \dots$

$x < 0$ thì $x = -1; -2; -3; \dots$

Vậy $-5 < x < 0 \Leftrightarrow x = -4; -3; -2; -1$.

b) $x < -5$ và $x < 5 \Leftrightarrow x < -5$ Do đó $x = -6; -7; -8; \dots$

Vậy $x < -5$ và $x < 5$ thì $x = -6; -7; -8; \dots$

c) $x < -5$ và $x > 5$

• $x < -5$ thì $x = -6; -7; -8; \dots$

• $x > 5$ thì $x = 6; 7; 8; \dots$

Vậy: $x < -5$ và $x > 5 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

d) $x < -5$ hoặc $x > 5$: có nghĩa là x thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện trên.

• $x < -5$ thì $x = -6; -7; -8; \dots$

• $x > 5$ thì $x = 6; 7; 8; \dots$

Vậy $x < -5$ hoặc $x > 5 \Leftrightarrow x = -6; -7; -8; \dots; 6; 7; 8; \dots$

Bài 19

$$\left. \begin{array}{l} a_1 < a_2 \\ a_2 < a_3 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 < a_3 \text{ (tính chất bắc cầu)}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 < a_3 \\ a_3 < a_4 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 < a_4 \text{ (tính chất bắc cầu)}$$

... cứ thế ta có $a_1 < a_{n-1}$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 < a_{n-1} \\ a_{n-1} < a_n \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 < a_n \text{ (đpcm).}$$

Bài 20

a) • $|x| = -2003$ không có số nguyên nào thỏa mãn (vì $x \in \mathbb{Z}$ thì $|x| \in \mathbb{N}$)

• $|x| = |-2003|$ hay $|x| = 2003$.

Vậy $x = \pm 2003$.

b) Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $|x| \in \mathbb{N}$. Do đó $|x| + 2003 \geq 2003$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|x| + 2003$ là 2003.

Khi đó $x = 0$

c) Với $x, y \in \mathbb{Z}$ thì $|x| \in \mathbb{N}, |y| \in \mathbb{N}$; nên $|x| + |y| \geq 0$.

Mà theo đề bài $|x| + |y| \leq 0$.

Do đó $|x| = |y| = 0$.

Suy ra $x = y = 0$.

§4. CỘNG HAI SỐ NGUYÊN CÙNG DẤU

1. Cộng hai số nguyên dương:

Cộng hai số nguyên dương chính là cộng hai số tự nhiên khác không.

2. Cộng hai số nguyên âm:

Quy tắc:

Muốn cộng hai số nguyên âm, ta cộng hai giá trị tuyệt đối của chúng rồi đặt dấu “-” trước kết quả.

BÀI TẬP

Bài 21

Tính: a) $(-|-59| + (-91))$;
b) $(-|-85| + (-|-73|))$; c) $|-35| + |-97|$.

Bài 22

a) Tìm tổng của số nguyên âm nhỏ nhất có ba chữ số và số nguyên âm lớn nhất có ba chữ số.

b) Tìm tổng của số nguyên âm nhỏ nhất có hai chữ số và số nguyên âm lớn nhất có ba chữ số.

Bài 23

Với những điều kiện nào của các số nguyên a, b thì:

a) $a + b = |a| + |b|$; b) $a + b = -(|a| + |b|)$;

Bài 24

Cho a, b là hai số nguyên cùng dấu. Hãy so sánh |a| và |b|.

Bài 25

Tìm các số nguyên x, y sao cho:

a) $|x - 3| + |y - 5| = 0$; b) $|x| + |x + 1| + |y| = 0$.

Bài 26

Hãy tìm hai số trong bảng bên để có:

a) Tổng của hai số đó bằng 21.

b) Tổng của hai số đó bằng -35.

-4	0	-14	15
1	-3	5	-13
-2	4	-1	2
5	-10	3	-20

Bài 27

a) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $|x| < 18$;

- b) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ sao cho $|x| + |y| = 4$?
 c) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ sao cho $|x| + |y| \leq 3$?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 21

- a) $(-|-59| + (-91)) = (-59) + (-91) = -150$.
 b) $(-|-85| + (-|-73|)) = (-85) + (-73) = -158$.
 c) $|-35| + |-97| = 35 + 97 = 132$.

Bài 22

- a) Số nguyên âm nhỏ nhất có ba chữ số là -999 .
 Số nguyên âm lớn nhất có ba chữ số là -100 .
 Tổng cần tìm là: $(-999) + (-100) = -1099$.
 b) Số nguyên âm nhỏ nhất có hai chữ số là -99 .
 Số nguyên âm lớn nhất có ba chữ số là -100 .
 Tổng cần tìm là: $(-99) + (-100) = -199$.

Bài 23

- a) Với $a \in \mathbb{N}$ thì $|a| = a$
 $b \in \mathbb{N}$ thì $|b| = b$
 Do đó: $a + b = |a| + |b|$.
 Vậy $a + b = |a| + |b|$. Khi $a, b \in \mathbb{N}$.
 b) $a + b = -(|a| + |b|)$.
 Khi a, b là các số nguyên không dương.

Bài 24

Xét hai trường hợp:

- a) $a, b \in \mathbb{Z}; a, b$ dương

Ta có: $a > b \Rightarrow |a| > |b|$

$$a < b \Rightarrow |a| < |b|$$

$$a = b \Rightarrow |a| = |b|$$

- b) $a, b \in \mathbb{Z}; a, b$ âm

Ta có: $a > b \Rightarrow |a| < |b|$

$$a < b \Rightarrow |a| > |b|$$

$$a = b \Rightarrow |a| = |b|$$

Bài 25

- a) Ta có: $|x - 3| \geq 0; |y - 5| \geq 0$

$$\text{mà } |x - 3| + |y - 5| = 0.$$

$$\text{Khi } |x - 3| = 0 \text{ và } |y - 5| = 0$$

$$\text{hay } x - 3 = 0 \text{ và } y - 5 = 0.$$

$$\text{Do đó } x = 3; y = 5.$$

$$\text{Vậy khi } x = 3; y = 5 \text{ thì } |x - 3| + |y - 5| = 0.$$

b) Với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$ ta luôn có:

$$|x| \geq 0; |x + 1| + |y| \geq 0.$$

$$\text{Mà } |x| + |x + 1| + |y| = 0$$

$$\text{Khi đó } |x| = 0 \text{ và } |x + 1| + |y| = 0$$

$$\text{Hay } x = 0 \text{ và } |x + 1| + |y| = 0$$

$$x = 0 \text{ và } 1 + |y| = 0 \text{ (vô lý) vì } |y| \geq 0.$$

Tức là: không tìm được số nguyên y nào để có $1 + |y| = 0$.

Vậy: không tìm được các số nguyên x, y thỏa:

$$|x| + |x + 1| + |y| = 0.$$

Bài 26

Trong bảng đã cho, tổng hai số có giá trị lớn nhất là:

$$15 + 5 = 20 \text{ và giá trị nhỏ nhất là } (-20) + (-14) = -34$$

Mà $21 > 20$; $-35 < -34$ nên trong bảng sẽ không tìm được hai số để tổng bằng 21 hoặc -35.

Bài 27

a) $|x| \in \mathbb{N}$ (vì $x \in \mathbb{Z}$) mà $|x| < 18$

$$\text{Do đó } |x| = 0; 1; 2; \dots; 16; 17.$$

$$\text{Vậy } x = 0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm 16; \pm 17.$$

b) $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $|x| \in \mathbb{N}; |y| \in \mathbb{N}$.

$ x $	0	1	2	3	4
$ y $	4	3	2	1	0

$\Rightarrow$

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4
y	± 4	± 3	± 2	± 1	0

Nếu $x = 0$ thì $y = \pm 4$ gồm hai cặp số.

Nếu $x = 1$ thì $y = \pm 3$ gồm hai cặp số.

Nếu $x = -1$ thì $y = \pm 3$ gồm hai cặp số.

...

Nếu $x = \pm 4$ thì $y = 0$ gồm hai cặp số.

Vậy có tất cả $2 \cdot 8 = 16$ cặp số nguyên (x, y) thỏa:

$$|x| + |y| = 4.$$

c) $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $|x| \in \mathbb{N}; |y| \in \mathbb{N}$.

Do đó: $|x| + |y|$ là số tự nhiên.

mà $|x| + |y| \leq 3$. Suy ra:

$$|x| + |y| = 0; 1; 2; 3.$$

$$\bullet |x| + |y| = 0 \Rightarrow x = y = 0.$$

$$\bullet |x| + |y| = 1.$$

$ x $	0	1
$ y $	1	0

 $\Rightarrow$

x	0	± 1
y	± 1	0

Nếu $x = 0$ thì $y = \pm 1$ gồm hai cặp số.

Nếu $x = \pm 1$ thì $y = 0$ gồm hai cặp số.

$$\bullet |x| + |y| = 2$$

$ x $	0	1	2
$ y $	2	1	0

 $\Rightarrow$

x	0	± 1	± 2
y	± 2	± 1	0

Nếu $x = 0$ thì $y = \pm 2$ gồm hai cặp số.

Nếu $x = 1$ thì $y = \pm 1$ gồm hai cặp số.

Nếu $x = -1$ thì $y = \pm 1$ gồm hai cặp số.

Nếu $x = \pm 2$ thì $y = 0$ gồm hai cặp số.

$$\bullet |x| + |y| = 3$$

$ x $	0	1	2	3
$ y $	3	2	1	0

 $\Rightarrow$

x	0	± 1	± 2	± 3
y	± 3	± 2	± 1	0

Nếu $x = 0$ thì $y = \pm 3$ gồm hai cặp số.

Nếu $x = 1$ thì $y = \pm 2$ gồm hai cặp số.

Nếu $x = -1$ thì $y = \pm 2$ gồm hai cặp số.

Nếu $x = \pm 3$ thì $y = 0$ gồm hai cặp số.

Vậy có tất cả: $1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 25$ cặp số nguyên (x, y) thỏa

$$|x| + |y| \leq 3.$$

Từ kết quả trên ta có hai kết luận sau:

1) Với $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho $|x| + |y| = n$ ($n \in \mathbb{N}$).

$n = 0$ có một cặp số $(x; y)$ là $(0; 0)$.

$n \neq 0$ có $4n$ cặp số $(x; y)$.

2) Với $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho $|x| + |y| \leq k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Có số cặp số $(x; y)$ là:

$$1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \dots + 4k = 1 + 4 \cdot (1 + 2 + \dots + k)$$

$$= 1 + 4 \cdot k(k+1) : 2 = 1 + 2k(k+1).$$

§5. CỘNG HAI SỐ NGUYÊN KHÁC DẤU

Quy tắc:

- Hai số đối nhau có tổng bằng 0.

- Muốn cộng hai số nguyên khác dấu không đối nhau, ta tìm hiệu hai giá trị tuyệt đối (số lớn trừ số nhỏ) rồi đặt trước kết quả tìm được dấu của số có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

BÀI TẬP

Bài 28

Dự đoán giá trị của x và kiểm tra lại dự đoán đó.

a) $x + (-10) = -7$;

b) $5 + x = -8$;

c) $x + (-2003) = 0$.

Bài 29

a) Viết mỗi số sau dưới dạng tổng của hai số nguyên bằng nhau.

$30; -4; -2002; 2004$.

b) Viết ba số tiếp theo của mỗi dãy số sau:

$-7, -3, 1, \dots$

$12, 2, -8, \dots$

Bài 30

Chứng minh rằng số đối của $a - b$ là $b - a$ ($a, b \in \mathbb{Z}$).

Bài 31

Cho $x \in \mathbb{Z}$. Tính:

a) $|x| + x$ nếu $x \geq 0$;

b) $|x| + x$ nếu $x < 0$.

Bài 32

Với điều kiện nào của các số nguyên a, b thì:

- a) $a + b = |b| - |a|$; b) $a + b = -(|a| - |b|)$;
 c) $a + b = -(|b| - |a|)$.

Bài 33

Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = x + (-10); \text{ biết } x = 4. \quad B = 254 + y; \text{ biết } y = -200.$$

$$A + B \text{ biết } x = 4; y = -200.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 28**

- a) Dự đoán $x = 3$. Kiểm tra $3 + (-10) = -7$ đúng.
 b) Dự đoán $x = -13$. Kiểm tra $5 + (-13) = -8$ đúng.
 c) Dự đoán $x = 2003$. Kiểm tra $2003 + (-2003) = 0$ đúng.

Bài 29

$$\begin{aligned} \text{a) } 30 &= 15 + 15; -4 = (-2) + (-2); \\ -2002 &= (-1001) + (-1001); 2004 = 1002 + 1002. \end{aligned}$$

$$\text{b) } -3 = -7 + 4; 1 = -3 + 4$$

Mỗi số sau lớn hơn số hạng kế trước nó 4 đơn vị.

$$\text{Ta có: } 1 + 4 = 5; 5 + 4 = 9; 9 + 4 = 13$$

$$\text{Do vậy có } -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots$$

$$2 = 12 + (-10); -8 = 2 + (-10)$$

Mỗi số hạng sau nhỏ hơn số hạng kế trước nó 10 đơn vị.

$$\text{Ta có: } (-8) + (-10) = -18; (-18) + (-10) = -28;$$

$$(-28) + (-10) = -38$$

$$\text{Do vậy có } 12, 2, -8, -18, -28, -38, \dots$$

Bài 30

$$\text{Xét tổng: } (a - b) + (b - a) = a - b + b - a =$$

$$= a + [(-b) + b] - a = a + (-a) = 0$$

nên $a - b$ và $b - a$ đối nhau hay $a - b = -(b - a)$.

Bài 31

$$\text{a) Nếu } x \geq 0 \text{ thì } |x| = x. \text{ Khi đó } |x| + x = x + x = 2x.$$

$$\text{b) Nếu } x < 0 \text{ thì } |x| = -x. \text{ Khi đó } |x| + x = -x + x = 0.$$

Bài 32

$$\text{a) } a + b = |b| - |a| \text{ khi } a \text{ là số nguyên không dương; } b \in \mathbb{N}.$$

$$\text{b) } a + b = -(|a| - |b|). \text{ Khi } a \text{ là số nguyên không dương; } b \in \mathbb{N}.$$

$$\text{c) } a + b = -(|b| - |a|). \text{ Khi } a \in \mathbb{N}; b \text{ là số nguyên không dương.}$$

Bài 33

Với $x = 4$ ta được: $A = 4 + (-10) = -6$.

Với $y = -200$ ta được $B = 254 + (-200) = 54$.

Do đó $A + B = -6 + 54 = 48$.

§6. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CỘNG CÁC SỐ NGUYÊN

1. Tính chất giao hoán: $a + b = b + a$.

2. Tính chất kết hợp: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Chú ý:

Kết quả trên còn gọi là tổng của ba số a, b, c , và viết $a + b + c$. Tương tự, ta có thể nói đến tổng của bốn, năm, ... số nguyên. Khi thực hiện cộng nhiều số ta có thể thay đổi tùy ý thứ tự các số hạng, nhóm các số hạng một cách tùy ý bằng các dấu $(), [], \{ \}$.

3. Cộng với số 0:

$$a + 0 = a.$$

4. Cộng với số đối:

Tổng của hai số nguyên đối nhau luôn bằng 0.

$$a + (-a) = 0.$$

Ngược lại, nếu tổng của hai số nguyên bằng 0 thì chúng là hai số đối nhau:

Nếu $a + b = 0$ thì $a = -b$ và $b = -a$.

BÀI TẬP**Bài 34**

Tính các tổng sau:

a) $S_1 = 1 + (-2) + 3 + (-4) + \dots + 2001 + (-2002);$

b) $S_2 = (-2) + 4 + (-6) + 8 + \dots + (-2002) + 2004;$

c) $S_3 = 1 + (-3) + 5 + (-7) + \dots + 2001 + (-2003);$

d) $S_4 = (-1001) + (-1000) + (-999) + \dots + 1001 + 1002.$

Bài 35

Tính tổng các số nguyên x biết:

a) $-2002 \leq x \leq 2003;$

b) $a + 3 \leq x \leq a + 2003 \ (a \in \mathbb{N}).$

Bài 36

Viết tất cả các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 2003 theo

một thứ tự tùy ý. Sau đó, cứ mỗi số cộng với số thứ tự của nó sẽ được một tổng. Hãy tìm tổng tất cả các tổng đã nhận được.

Bài 37

$$\text{Cho } x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2000} + x_{2001} + x_{2002} = 0$$

$$\text{và } x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 = \dots = x_{1999} + x_{2000} + x_{2001} = 1$$

Tìm x_{2002} .

Bài 38

Cho bảng vuông 3×3 ô. Có thể tìm được chín số nguyên nào để điền vào các ô sao cho tổng các số ở ba dòng lần lượt là -20 ; 11 ; -1994 và tổng các số ở ba cột lần lượt là: 22 ; -12 ; -1994 được không?

Bài 39

Cho 21 số nguyên trong đó tổng của năm số bất kì là một số dương. Chứng minh rằng tổng của 21 số đó là số nguyên dương.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 34

$$\begin{aligned} \text{a) } S_1 &= 1 + (-2) + 3 + (-4) + \dots + 2001 + (-2002) \\ &= [1 + (-2)] + [3 + (-4)] + \dots + [2001 + (-2002)] \\ &= \underbrace{(-1) + (-1) + \dots + (-1)}_{1001 \text{ số hạng } -1} \end{aligned}$$

$$= -1001.$$

$$\text{Vậy } S_1 = -1001.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } S_2 &= (-2) + 4 + (-6) + 8 + \dots + (-2002) + 2004 \\ &= [(-2) + 4] + [(-6) + 8] + \dots + [(-2002) + 2004] \\ &= \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{501 \text{ số hạng}} \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot 501$$

$$= 1002.$$

$$\text{Vậy } S_2 = 1002.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } S_3 &= 1 + (-3) + 5 + (-7) + \dots + 2001 + (-2003) \\ &= [1 + (-3)] + [5 + (-7)] + \dots + [2001 + (-2003)] \\ &= \underbrace{(-2) + (-2) + \dots + (-2)}_{501 \text{ số hạng}} \end{aligned}$$

$$= -1002.$$

$$\text{Vậy } S_3 = -1002.$$

$$\text{d) } S_4 = (-1001) + (-1000) + (-999) + \dots + 1001 + 1002$$

$$= [(-1001) + 1001] + [(-1000) + 1000] + \dots$$

$$\dots + [(-1) + 1] + 0 + 1002 = 1002.$$

$$\text{Vậy } S_4 = 1002.$$

Bài 35

$$a) x \in \mathbb{Z} \text{ và } -2002 \leq x \leq 2003.$$

$$\text{nên } x = -2002; -2001; -2000; \dots; -1; 0; 1; \dots; 2002; 2003.$$

Tổng cần tìm là:

$$(-2002 + 2002) + (-2001 + 2001) + \dots + (-1 + 1) + 0 + 2003 =$$

$$= 0 + 0 + \dots + 0 + 2003 = 2003.$$

$$b) x \in \mathbb{Z} \text{ và } a + 3 \leq x \leq a + 2003 \text{ (} a \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$\text{nên } x = a + 3; a + 4; a + 5 + \dots + a + 2003.$$

Tổng cần tìm là:

$$(a + 3) + (a + 4) + (a + 5) + \dots + (a + 2003) =$$

$$= \underbrace{(a + a + a + \dots + a)}_{2001 \text{ số hạng}} + (3 + 4 + 5 + \dots + 2003)$$

$$= 2001a + (3 + 2003) \cdot 2001 : 2 = 2001a + 2007003$$

Bài 36

Các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 2003 là :

$$-2002; -2001; -2000; \dots; -1; 0; 1; \dots; 2000; 2001; 2002$$

Gọi số thứ tự tương ứng của chúng là $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{4005}$ (trong đó các số $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{4005}$ là một sắp xếp nào đó của các số $1; 2; 3; \dots; 4005$)

Vậy tổng cần tìm là:

$$(-2002 + n_1) + (-2001 + n_2) + (-2000 + n_3) + \dots$$

$$\dots + (2001 + n_{4004}) + (2002 + n_{4005}) =$$

$$= (-2002) + (-2001) + \dots + (-1) + 0 + 1 + 2 + \dots$$

$$\dots + 2001 + 2002 + n_1 + n_2 + \dots + n_{4005}$$

$$= [(-2002) + 2002] + [(-2001) + 2001] + \dots$$

$$\dots + [(-1) + 1] + 0 + (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{4005})$$

$$= 0 + 0 + \dots + 0 + (1 + 2 + 3 + \dots + 4005)$$

$$= (1 + 4005) \cdot 4005 : 2$$

$$= 4006 \cdot 4005 : 2 = 8022015.$$

Bài 37

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 = x_{1999} + x_{2000} + x_{2001} = 1$$

nên $(x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6) + \dots$

$\dots + (x_{1999} + x_{2000} + x_{2001}) = 667$

hay $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1999} + x_{2000} + x_{2001} = 667$

mà $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1999} + x_{2000} + x_{2001} + x_{2002} = 0$.

Do đó: $667 + x_{2002} = 0$. Vậy $x_{2002} = -667$

Bài 38

Giả sử tìm được chín số nguyên thỏa mãn đầu bài.

Ta có: tổng các số ở ba dòng lần lượt là -20 ; 11 ; -1994 , suy ra tổng chín số nguyên đó là: $(-20) + 11 + (-1994) = -2003$.

Còn tổng các số ở ba cột lần lượt là 22 ; -12 ; -1994 , suy ra tổng của chín số nguyên đó là:

$22 + (-12) + (-1994) = -1984$; mà $-2003 \neq -1984$.

Do đó không tìm được chín số nguyên nào thỏa mãn đầu bài.

Bài 39

Do tổng của năm số bất kì trong 21 số nguyên đã cho là một số dương. Suy ra trong 21 số đó có ít nhất một số dương vì nếu không thì tất cả 21 số đã cho đều không dương nên tổng của năm số bất kì là số không dương. Trái với đầu bài. Tách số nguyên dương đó ra, còn lại 20 số.

Ta chia 20 số đó thành bốn nhóm mỗi nhóm 5 số. Theo đề bài thì tổng của mỗi nhóm là một số dương nên tổng của các số của bốn nhóm là một số nguyên dương. Do vậy tổng của 21 số là một số nguyên dương.

§7. PHÉP TRỪ HAI SỐ NGUYÊN

1. Hiệu của hai số nguyên:

Muốn trừ số nguyên a cho số nguyên b , ta cộng a với số đối của b .

2. Nhận xét:

Phép trừ trong $\mathbb{N}$ không phải bao giờ cũng thực hiện được, còn trong $\mathbb{Z}$ luôn thực hiện được.

BÀI TẬP

Bài 40

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $x - 5 = -1$;

b) $x - 4 = -10$;

c) $x + 3 = -8$;

d) $x + 6 = 0$.

Bài 41

Có thể kết luận gì về số nguyên x khác 0 nếu có:

a) $|x| + x = 0$; b) $x - |x| = 0$.

Bài 42

Tìm số nguyên x biết rằng:

$1998 < |x + 1| < 2003$ và $|x + 1|$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bài 43

Tìm $x, y, z \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $|x - 3| = 2$; b) $|x + 2| \leq 1$;

c) $|x + 20| + |y - 11| + |z + 2003| \leq 0$.

Bài 44

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x + 19| + |y - 5| + 1890 \text{ (với } x, y \in \mathbb{Z}).$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$B = -|x + 3| - |y - 2| + 1930.$$

Bài 45

Tìm các số nguyên x, y, z đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau:

$|x| = y - 2003$ (1)

$|y| = z - 2003$ (2)

$|z| = x - 2003$. (3)

Bài 46

Cho tổng $A = (a + b) - (c + d + e)$ trong đó a, b, c, d, e là các số nguyên khác nhau từ 1 đến 2003. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của A .

Bài 47

Cho 201 số nguyên sao cho tổng của 10 số bất kỳ trong các số đó đều là số nguyên âm. Chứng minh rằng tổng của 201 số nguyên đó cũng là một số nguyên âm.

Bài 48

Cho $M = |a - b| + |c - d|$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số lấy giá trị từ 3; 4; 5; 6. Phải chọn a, b, c, d thế nào để tổng M là lớn nhất?

Bài 49

a) Chứng minh rằng:

Với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$ thì $|a| + |b| \geq |a + b|$.

b) Chứng minh rằng: Với mọi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}$

thì $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \dots$

$\dots + a_{n-1} + a_n|$.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 40**

a) Vì $4 - 5 = -1$ nên $x = 4$

b) Vì $(-6) - 4 = -10$ nên $x = -6$

c) Vì $(-11) + 3 = -8$ nên $x = -11$

d) Vì $(-6) + 6 = 0$ nên $x = -6$

Bài 41

Vì $x \in \mathbb{Z}$ và $x \neq 0$ nên $|x| \in \mathbb{N}^*$

a) Mà $|x| + x = 0$, ta có $|x|$ và x là hai số đối nhau.

Do vậy: x là số nguyên âm.

b) $x - |x| = 0$, ta có $x = |x|$.

Do vậy x là số nguyên dương.

Bài 42

$1998 < |x + 1| < 2003$ và $x \in \mathbb{Z}$

Suy ra $1999 \leq |x + 1| \leq 2002$

Do đó:

• $|x + 1|$ có giá trị lớn nhất là 2002.

Khi $x + 1 = 2002 \Leftrightarrow x = 2001$

hoặc $x + 1 = -2002 \Leftrightarrow x = -2003$.

Vậy $x = 2001$ hoặc $x = -2003$ là các giá trị cần tìm.

• $|x + 1|$ có giá trị nhỏ nhất là 1999

Khi $x + 1 = 1999 \Leftrightarrow x = 1998$

hoặc $x + 1 = -1999 \Leftrightarrow x = -2000$.

Vậy $x = 1998$ hoặc $x = -2000$ là các giá trị cần tìm.

Bài 43

a) $|x - 3| = 2 \Leftrightarrow x - 3 = 2 \text{ hoặc } x - 3 = -2$
 $\Leftrightarrow x = 2 + 3 \text{ hoặc } x = -2 + 3 \Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = 1.$

Vậy với $x = 5$ và $x = 1$ thì $|x - 3| = 2$

b) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow |x + 2| \in \mathbb{N}$ mà $|x + 2| \leq 1$

nên $|x + 2| = 0; 1.$

• $|x + 2| = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$

• $|x + 2| = 1 \Leftrightarrow x + 2 = 1 \text{ hoặc } x + 2 = -2$

$\Leftrightarrow x = 1 - 2 \text{ hoặc } x = -1 - 2$

$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -3.$

Vậy với $x = -1; x = -2$ hoặc $x = -3$ thì $|x + 2| \leq 1$

c) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $|x + 20|; |y - 11|; |z + 2003|$

là các số tự nhiên.

mà $|x + 20| + |y - 11| + |z + 2003| \leq 0$

Do đó $|x + 20| = |y - 11| = |z + 2003| = 0$

$x + 20 = y - 11 = z + 2003 = 0.$

Vậy $x = -20; y = 11; z = -2003.$

Bài 44

a) $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $|x + 19|; |y - 5|$ là các số tự nhiên.

Do đó $|x + 19| + |y - 5| + 1890 \geq 1890.$

Giá trị nhỏ nhất của A là 1890

Khi đó $|x + 19| = |y - 5| = 0 \Leftrightarrow x + 19 = y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = -19; y = 5.$

Vậy với $x = -19; y = 5$ thì biểu thức A có giá trị nhỏ nhất là 1890.

b) $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $|x + 3|; |y - 2|$ là các số tự nhiên.

Ta có $-|x + 3| - |y - 2| \leq 0$

Do đó $-|x + 3| - |y - 2| + 1930 \leq 1930.$

Giá trị lớn nhất của B là 1930.

Khi $|x + 3| = |y - 2| = 0 \Leftrightarrow x + 3 = y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3; y = 2.$

Vậy với $x = -3; y = 2$ thì biểu thức B có giá trị lớn nhất là 1930.

Bài 45

• Nếu x là số chẵn, từ (1) suy ra y lẻ. Khi đó, từ (2) suy ra: z chẵn và từ (3) lại suy ra x lẻ. Mâu thuẫn!

• Nếu x lẻ, từ (1) suy ra: y chẵn khi đó, từ (2) suy ra: z lẻ và từ (3) lại suy ra x chẵn. Mâu thuẫn!

Vậy không có các số nguyên x, y, z nào thỏa mãn đồng thời ba điều kiện đã cho.

Bài 46

• A lớn nhất khi đồng thời xảy ra $a + b$ lớn nhất và $c + d + e$ nhỏ nhất (vì $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$).

$$\text{Chọn } a + b = 2003 + 2002 = 4005;$$

$$c + d + e = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\text{Khi đó } A = 4005 - 6 = 3999.$$

• A nhỏ nhất khi đồng thời xảy ra $a + b$ nhỏ nhất và $c + d + e$ lớn nhất.

$$\text{Chọn } a + b = 1 + 2 = 3;$$

$$c + d + e = 2003 + 2002 + 2001 = 6006.$$

$$\text{Khi đó: } A = 3 - 6006 = -6003.$$

Bài 47

Theo đầu bài thì trong 201 số nguyên đã cho có ít nhất một số nguyên âm, tách riêng số nguyên âm đó ra, còn lại 200 số nguyên chia thành 20 nhóm mỗi nhóm 10 số. Theo đầu bài suy ra mỗi nhóm có tổng là số nguyên âm.

Do đó tổng của 20 số này với số nguyên âm tách ra là số nguyên âm.

Vậy: Tổng của 201 số nguyên đã cho là một số nguyên âm.

Bài 48

$$\text{Vì } |a - b| = |b - a|; |c - d| = |d - c|$$

$$a \neq b; c \neq d \text{ có thể giả sử } a > b; c > d.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } M &= |a - b| + |c - d| = a - b + c - d \\ &= (a + c) - (b + d). \end{aligned}$$

M lớn nhất khi đồng thời xảy ra $a + c$ lớn nhất và $b + d$ nhỏ nhất (vì $a, b, c, d \in \mathbb{N}$).

$$\text{Chọn } a + c = 5 + 6 = 11$$

$$(a = 5; c = 6 \text{ hoặc } a = 6; c = 5)$$

$$\text{và } b + d = 3 + 4 = 7$$

$$(b = 4; d = 3 \text{ hoặc } b = 3; d = 4).$$

$$\text{Lúc đó: } M = 11 - 7 = 4.$$

(3)

Bài 49

ba

a) Nếu $a = 0$ ta có:

$$|a + b| = |0 + b| = |b| = |0| + |b| = |a| + |b|.$$

Nếu $b = 0$ ta cũng có $|a + b| = |a| + |b|$

hở

Nếu a, b cùng dấu thì $|a + b| = |a| + |b|$.Nếu a, b khác dấu thì:

$$|a + b| = |a| - |b| \text{ khi } |a| \geq |b|$$

$$|a + b| = |b| - |a| \text{ khi } |a| \leq |b|$$

mà $|a| \in \mathbb{N}, |b| \in \mathbb{N}$

ýn

$$\text{nên } |a| - |b| < |a| + |b|$$

$$|b| - |a| < |a| + |b|.$$

Tóm lại: $|a + b| = |a| + |b|$ nếu a, b cùng dấu hoặc $a = 0$ hoặc $b = 0$. $|a + b| < |a| + |b|$ nếu a, b khác dấu.

b) Áp dụng câu a ta có:

số

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n| \leq |a_1 + a_2 + \dots$$

ia

$$\dots + a_{n-1}| + |a_n| \leq |a_1 + a_2 + \dots$$

ng

$$\dots + a_{n-2}| + |a_{n-1}| + |a_n| \leq \dots \leq |a_1| + |a_2| + \dots$$

$$\dots + |a_{n-1}| + |a_n|.$$

in

§8. QUY TẮC DẤU NGOẶC**1. Quy tắc dấu ngoặc:**

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu “-” đằng trước, ta phải đổi dấu tất cả các số hạng trong dấu ngoặc: dấu “+” thành dấu “-” và dấu “-” thành dấu “+”.

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu “+” đằng trước thì dấu các số hạng trong ngoặc vẫn giữ nguyên.

2. Tổng đại số:

ất

Trong một tổng đại số, ta có thể:

- Thay đổi tùy ý vị trí các số hạng kèm theo dấu của chúng.

$$a - b - c = -b + a - c = -b - c + a.$$

- Đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng một cách tùy ý với chú ý rằng nếu trước dấu ngoặc là dấu “-” thì phải đổi dấu tất cả các số hạng trong ngoặc.

$$a - b - c = (a - b) - c = a - (b + c).$$

BÀI TẬP**Bài 50**

Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$; $A = a - b + c$, $B = -a + b - c$. Chứng minh rằng A và B là hai số đối nhau.

Bài 51

Đơn giản biểu thức sau khi bỏ dấu ngoặc:

- a) $(a + b - c) - (b - c + d)$;
- b) $-(a - b + c) + (a - b + d)$;
- c) $(a + b) - (-a + b - c)$;
- d) $-(a + b) + (a + b + c)$;
- e) $(a - b + c) - (a - b + c)$;
- f) $-(a - b - c) + (a - b - c)$.

Bài 52

Tính:

- a) $S_1 = 1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + \dots$
 $\dots + 2001 - 2002 - 2003 + 2004.$
- b) $S_2 = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots$
 $\dots + 2002 - 2003 - 2004 + 2005 + 2006.$

Bài 53

Chứng minh đẳng thức sau:

- a) $(a - b) + (c - d) - (a + c) = -(b + d)$;
- b) $(a - b) - (c - d) + (b + c) = a + d.$

Bài 54

Tìm x biết:

- a) $15 - (4 - x) = 6.$
- b) $-30 + (25 - x) = -1.$

Bài 55

Tính: $3S - 2^{2003}$ biết rằng:

$$S = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2002}.$$

Bài 56

Toàn có 26 tờ giấy, mỗi tờ có một mặt màu vàng và một mặt màu xanh. Trên mặt vàng mỗi tờ viết một trong các số 1; 2; 3; ...; 25; 26; mặt xanh cũng viết trên mỗi tờ bất kì một trong các số 1; 2; ... 26. Tính hiệu của số ghi trên mặt xanh và mặt vàng của mỗi tờ giấy. Hỏi tổng các hiệu đó là bao nhiêu?

HƯỚNG DẪN GIẢI

A

Bài 50

$$\begin{aligned}
 A + B &= (a - b + c) + (-a + b - c) = \\
 &= [a + (-a)] + [(-b) + b] + [c + (-c)] \\
 &= 0 + 0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Vậy A và B là hai số đối nhau.

Bài 51

- a) $(a + b - c) - (b - c + d) = a + b - c - b + c - d =$
 $= a(b - b) + (-c + c) - d =$
 $= a + 0 + 0 - d = a - d.$
- b) $-(a - b + c) + (a - b + d) =$
 $= -a + b - c + a - b + d =$
 $= (-a + a) + (b - b) - c + d =$
 $= 0 + 0 - c + d = d - c.$
- c) $(a + b) - (-a + b - c) =$
 $= a + b + a - b + c = (a + a) + (b - b) + c =$
 $= 2a + 0 + c = 2a + c.$
- d) $-(a + b) + (a + b + c) = -a - b + a + b + c =$
 $= (-a + a) + (-b + b) + c = 0 + 0 + c = c.$
- e) $(a - b + c) - (a - b + c) =$
 $= a - b + c - a + b - c =$
 $= (a - a) + (-b + b) + (c - c) =$
 $= 0 + 0 + 0 = 0.$
- f) $-(a - b - c) + (a - b - c) = -a + b + c + a - b - c =$
 $= (-a + a) + (b - b) + (c - c) = 0 + 0 + 0 = 0.$

Bài 52

- a) $S_1 = 1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + \dots$
 $\dots + 2001 - 2002 - 2003 + 2004 =$
 $= (1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \dots$
 $\dots + (2001 - 2002 - 2003 + 2004)$
 $= 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$
- b) $S_2 = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots$
 $\dots + 2002 - 2003 - 2004 + 2005 + 2006$
 $= 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots$

ầu
ặt
ệu
ệu

$$\begin{aligned}
 & \dots + (2002 - 2003 - 2004 + 2005) + 2006 \\
 & = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 + 2006 \\
 & = 1 + 2006 = 2007.
 \end{aligned}$$

Bài 53

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & (a - b) + (c - d) - (a + c) = \\
 & = a - b + c - d - a - c \\
 & = (a - a) + (c - c) - b - d \\
 & = 0 + 0 - b - d \\
 & = -(b + d). \\
 \text{b)} \quad & (a - b) - (c - d) + (b + c) = \\
 & = a - b - c + d + b + c \\
 & = a + d + (-b + b) + (-c + c) \\
 & = a + d + 0 + 0 \\
 & = a + d.
 \end{aligned}$$

Bài 54

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 15 - (4 - x) = 6 \\
 & 15 - 4 + x = 6 \\
 & 11 + x = 6 \\
 & x = 6 - 11
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } x = -5.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & -30 + (25 - x) = -1 \\
 & -30 + 25 - x = -1 \\
 & -5 - x = -1 \\
 & -x = -1 + 5 \\
 & -x = 4.
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } x = -4$$

Bài 55

Ta có:

$$\begin{aligned}
 S &= 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2002} \\
 2S &= 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{2003} \\
 3S &= 2S + S \\
 &= (2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{2003}) + \\
 &+ (1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2002}) \\
 &= 1 + (2 - 2) + (-2^2 + 2^2) + (2^3 - 2^3) + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots + (-2^{2002} + 2^{2002}) + 2^{2003} \\ & = 1 + 2^{2003} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } 3S - 2^{2003} = 1.$$

Bài 56

Rõ ràng các hiệu là: $1 - a_1; 2 - a_2; \dots; 26 - a_{26}$ (trong đó $a_1; a_2; \dots; a_{26}$ là các số ghi trên mặt vàng; $a_1; a_2; \dots; a_{26}$ là một sắp xếp nào đó của các số $1; 2; \dots; 26$ như vậy $a_1 + a_2 + \dots + a_{26} = 1 + 2 + \dots + 26$)

Như vậy tổng các hiệu đó bằng:

$$\begin{aligned} & (1 - a_1) + (2 - a_2) + \dots + (26 - a_{26}) = \\ & = 1 - a_1 + 2 - a_2 + \dots + 26 - a_{26} \\ & = (1 + 2 + \dots + 26) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{26}) = 0. \end{aligned}$$

§9. QUY TẮC CHUYỂN VẾ**1. Tính chất của đẳng thức:**

Nếu $a = b$ thì $a + c = b + c$

Nếu $a + c = b + c$ thì $a = b$

Nếu $a = b$ thì $b = a$

2. Quy tắc chuyển vế:

Khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu các số hạng đó: dấu “+” đổi thành dấu “-” và dấu “-” đổi thành dấu “+”.

BÀI TẬP**Bài 57**

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $x - 5 = -1;$

b) $x + 30 = -4;$

c) $x - (-24) = 3;$

d) $22 - (-x) = 12;$

e) $(x + 5) + (x - 9) = x + 2.$

Bài 58

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $|x - 20| = 11;$

b) $|x - 5| = x - 5;$

c) $|x - 6| = 6 - x;$

d) $|x + 2| + |x + 3| = x.$

Bài 59

Chúng ta có:

$a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$
và $a + c \geq b + c$ thì $a \geq b$.

Áp dụng: tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

- a) $x - 25 < 15$; b) $x + 4 > 49$;
c) $x + 20 \geq -14$; d) $x - 3 \leq -31$.

Bài 60

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

- a) $|x - 3| - 1 \geq 0$; b) $|x - 2| + 3 \leq 4$;
c) $2 < |x| < 5$.

Bài 61

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $a - (b + c) = d$.

Chứng tỏ rằng: $a - c = -b + d$.

Bài 62

Cho các số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_{2003}$ thỏa mãn:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2003} = 0;$$

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = \dots = a_{2001} + a_{2002} = a_{2003} + a_1 = 1.$$

Tính a_1, a_{2003} ?

Bài 63. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $|x - 8| + |y + 2| = 2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 57

a) $x - 5 = -1$

$$x = -1 + 5$$

$$x = 4.$$

b) $x + 30 = -4$

$$x = -4 - 30$$

$$x = -34.$$

c) $x - (-24) = 3$

$$x + 24 = 3$$

$$x = 3 - 24$$

$$x = -21.$$

d) $22 - (-x) = 12$

$$22 + x = 12$$

$$x = 12 - 22$$

$$x = -10.$$

$$e) (x + 5) + (x - 9) = x + 2$$

$$x + 5 + x - 9 = x + 2$$

$$x + x - x = 2 - 5 + 9$$

$$x = 6.$$

$$\text{Bài 58. a) } |x - 20| = 11$$

$$x - 20 = 11 \text{ hoặc } x - 20 = -11$$

$$x = 11 + 20 \text{ hoặc } x = -11 + 20$$

$$x = 31 \text{ hoặc } x = 9.$$

$$b) x \in \mathbb{Z} \text{ nên } |x - 5| \in \mathbb{N}$$

$$\text{Do đó } x - 5 \in \mathbb{N} \text{ hay } x - 5 \geq 0$$

$$x \geq 5$$

$$c) x \in \mathbb{Z} \text{ nên } |x - 6| \in \mathbb{N}$$

$$\text{Do đó } 6 - x \in \mathbb{N} \text{ hay } 6 - x \geq 0$$

$$x \leq 6$$

$$d) x \in \mathbb{Z} \text{ nên } |x + 2| \in \mathbb{N}, |x + 3| \in \mathbb{N}$$

$$\text{Do đó } x \in \mathbb{N}. \text{ Suy ra: } x + 2 \text{ và } x + 3 \text{ dương}$$

$$\text{Ta có: } |x + 2| + |x + 3| = x$$

$$x + 2 + x + 3 = x$$

$$x + x - x = -2 - 3$$

$$x = -5 \text{ (loại vì } x \in \mathbb{N}).$$

$$\text{Do đó } x \in \mathbb{N}.$$

Bài 59

$$a) x - 25 < 15$$

$$x - 25 + 25 < 15 + 25$$

$$x < 40.$$

$$b) x + 4 > 49$$

$$x + 4 + (-4) > 49 + (-4)$$

$$x > 45.$$

$$c) x + 20 \geq -14$$

$$x + 20 + (-20) \geq -14 + (-20)$$

$$x \geq -34.$$

$$d) x - 3 \leq -31$$

$$x - 3 + 3 \leq -31 + 3$$

$$x \leq -28.$$

Bài 60

$$a) |x - 3| - 1 \geq 0$$

$$|x - 3| \geq 1$$

$$\text{nên } x - 3 \leq -1 \text{ hoặc } x - 3 \geq 1$$

$$x \leq -1 + 3 \text{ hoặc } x \geq 1 + 3$$

$$x \leq 2 \text{ hoặc } x \geq 4$$

$$\bullet x \leq 2, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2; 1; 0; -1; \dots$$

$$\bullet x \geq 4; x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 4; 5; 6; \dots$$

$$\text{Vậy } x = 2; 1; 0; -1; \dots; 4; 5; 6; \dots$$

$$b) |x - 2| + 3 \leq 4$$

$$|x - 3| \leq 4 - 3$$

$$|x - 3| \leq 1 \text{ nên } -1 \leq x - 3 \leq 1$$

$$\bullet x - 3 \geq -1$$

$$x \geq -1 + 3$$

$$x \geq 2 \text{ mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2; 3; 4; \dots$$

$$\bullet x - 3 \leq 1$$

$$x \leq 1 + 3$$

$$x \leq 4 \text{ mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 4; 3; 2; \dots$$

$$\text{Vậy } x = 2; 3; 4.$$

$$c) \text{ Ta có } |x| > 2 \text{ nên } x < -2 \text{ hoặc } x > 2$$

$$\text{và } |x| < 5 \text{ nên } -5 < x < 5.$$

$$\text{Suy ra: } 2 < |x| < 5 \text{ khi } -5 < x < -2$$

$$\text{hoặc } 2 < x < 5.$$

$$\text{Mà } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } x = -4; -3$$

$$\text{hoặc } x = 3; 4.$$

$$\text{Vậy có bốn số nguyên thỏa mãn đề bài là:}$$

$$x = 3; -3; 4; -4.$$

Bài 61

$$a - (-b + c) = d$$

$$a + b - c = d$$

$$a - c = d - b$$

$$a - c = -b + d.$$

Bài 62

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2001} + a_{2002}) + (a_{2003} + a_1) = 1002.$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2003}) + a_1 = 1002.$$

$$0 + a_1 = 1002.$$

$$a_1 = 1002.$$

$$\text{Ta có: } a_{2003} + a_1 = 1.$$

$$a_{2003} + 1002 = 1.$$

$$a_{2003} = 1 - 1002.$$

$$a_{2003} = -1001.$$

Bài 63

$$x \in \mathbb{Z} \text{ nên } |x - 8| \in \mathbb{N}, |y + 2| \in \mathbb{N}$$

$$\text{mà } 2 = 1 + 1 = 2 + 0.$$

Do đó:

$ x - 8 $	1	2	0
$ y + 2 $	1	0	2
$x - 8$	± 1	± 2	0
$y + 2$	± 1	0	± 2
x	9 hoặc 7	10 hoặc 6	8
y	-1 hoặc -3	-2	0 hoặc -4

§10. NHÂN HAI SỐ NGUYÊN KHÁC DẤU**1. Quy tắc nhân hai số nguyên khác dấu:**

Muốn nhân hai số nguyên khác dấu, ta nhân hai giá trị tuyệt đối của chúng rồi đặt dấu “-” trước kết quả nhận được.

2. Chú ý:

- Tích của một số nguyên a với số 0 bằng 0.
- $a \cdot a = a^2$

BÀI TẬP**Bài 64**

$$\begin{array}{l}
 > 39 \cdot (-41) \quad / \quad 0 \quad ; \quad (-17) \cdot 8 \quad / \quad (-17) \cdot 9 \\
 < (-17) \cdot 146 \quad / \quad 146 \cdot (-17) ; \quad (-83) \cdot 0 \quad / \quad 0 \cdot 19 \\
 = 0 \cdot 15 \quad / \quad 43 \cdot (-95) \quad ; \quad 5 \cdot (-9) \quad / \quad (-5) \cdot 5
 \end{array}$$

Bài 65

Điền số thích hợp vào ô trống:

a	6	-8	-15			4
b	-9	0	7	-31	32	
a.b				-155	-352	-88

Bài 66

Dự đoán giá trị của x và kiểm tra lại dự đoán đó:

a) $x \cdot (-14) = -98$;

b) $21 \cdot x = -84$;

c) $(-18) \cdot x = -90$.

Bài 67

Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn:

$(-28) \cdot a = b$; $35 \cdot c = d$, biết rằng b và d là hai số nguyên âm.

So sánh a và c.

Bài 68

Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $(x^2 - 5)(x^2 - 25) < 0$; c) $(x + 3)(x^2 + 1) = 0$;

b) $(x + 5)(9 + x^2) < 0$; d) $(x + 5)(x^2 - 4) = 0$.

Bài 69

Cho a, b là hai số nguyên khác nhau. Có thể kết luận rằng số $m = (a - b)(b - a)$ là số nguyên âm không? Vì sao?

Bài 70

Cho ba số nguyên a, b, c khác 0. Ba biểu thức ab^3 , bc^3 , ca^3 có thể cùng có giá trị âm hay không?

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 64**

$$\begin{array}{l}
 39 \cdot (-41) < 0 ; (-17) \cdot 8 > (-17) \cdot 9 \\
 (-17) \cdot 146 = 146 \cdot (-17) ; (-83) \cdot 0 = 0 \cdot 19 \\
 0 \cdot 15 > 43 \cdot (-95) ; 5 \cdot (-9) < (-5) \cdot 5
 \end{array}$$

Bài 65

a	6	-8	-15	5	-11	4
b	-9	0	7	-31	32	-22
a.b	-54	0	-105	-155	-352	-88

Bài 66

- a) Dự đoán $x = 7$ Kiểm tra $7 \cdot (-14) = -98$, đúng.
b) Dự đoán $x = -4$ Kiểm tra $21 \cdot (-4) = -84$, đúng.
c) Dự đoán $x = 5$ Kiểm tra $(-18) \cdot 5 = -90$, đúng.

Bài 67

$(-28) : a = b$; b là số nguyên âm.
Do đó a là số nguyên dương.
 $35 : c = d$, d là số nguyên âm.
Do đó c là số nguyên âm.
Vậy $a > c$.

Bài 68

- a) $(x^2 - 5)(x^2 - 25) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5$ và $x^2 - 25$ khác dấu
mà $x^2 - 5 > x^2 - 25$ Do đó: $x^2 - 5 > 0$ và $x^2 - 25 < 0$
 $\Leftrightarrow x^2 > 5$ và $x^2 < 25 \Leftrightarrow 5 < x^2 < 25$
nên $x^2 = 9 ; 16$.
Vậy $x = \pm 3; \pm 4$.
b) $(x + 5)(9 + x^2) < 0 \Leftrightarrow x + 5$ và $9 + x^2$ khác dấu;
mà $9 + x^2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$;
nên $x + 5 < 0 \Leftrightarrow x < -5$.
c) $(x + 3)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0$ hoặc $x^2 + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x^2 = -1$ (điều này không xảy ra vì $x^2 \geq 0$)
 $\Leftrightarrow x = -3$.
d) $(x + 5)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0$ hoặc $x^2 - 4 = 0$.
 $\Leftrightarrow x = -5$ hoặc $x^2 = 4$.
 $\Leftrightarrow x = -5$ hoặc $x = \pm 2$.
Vậy $x = -5; 2; -2$.

Bài 69

$a, b \in \mathbb{Z}$ và $a \neq b$.
nên $a - b$ và $b - a$ là hai số nguyên khác dấu.
Do vậy: $m = (a - b)(b - a)$ là số nguyên âm.

Bài 70

Xét tích:

$$ab^3 \cdot bc^3 \cdot ca^3 = (a \cdot a^3) \cdot (b \cdot b^3) \cdot (c \cdot c^3) = a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 > 0$$

(vì a, b, c khác 0) nên ba biểu thức đã cho không thể cùng có giá trị âm được.

§11. NHÂN HAI SỐ NGUYÊN CÙNG DẤU**1. Nhân hai số nguyên dương:**

Nhân hai số nguyên dương nghĩa là nhân hai số tự nhiên khác 0.

2. Nhân hai số nguyên âm:

Quy tắc:

Muốn nhân hai số nguyên âm, ta nhân hai giá trị tuyệt đối của chúng.

Nhận xét: Tích của hai số nguyên âm là một số nguyên dương.

3. Kết luận:

$$\bullet a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

$$\bullet \text{Nếu } a, b \text{ cùng dấu thì } a \cdot b = |a| \cdot |b|$$

$$\bullet \text{Nếu } a, b \text{ khác dấu thì } a \cdot b = -(|a| \cdot |b|).$$

Chú ý:

$$\bullet a \cdot b = 0 \text{ thì } a = 0 \text{ hoặc } b = 0.$$

• Khi đổi dấu một thừa số thì tích đổi dấu. Khi đổi dấu hai thừa số thì tích không thay đổi.

$$\bullet (-a) \cdot a = a \cdot (-a) = -a^2.$$

BÀI TẬP**Bài 71**

Cho a là một số nguyên dương. Hỏi b là số nguyên dương hay âm nếu:

a) ab là một số nguyên dương.

b) ab là một số nguyên âm.

Bài 72

Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ thoả mãn: $a \cdot b > 0$ và $a + b > 0$.

Hỏi a, b là loại số nào?

Bài 73

a) Cho $a \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ rằng: $a^2 \geq 0$; $-a^2 \leq 0$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = (x - 8)^2 + 2003$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của: $B = -(x + 5)^2 + 9$.

Bài 74

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

- a) $(x - 2)(-4 - x^2) > 0$. b) $(x^2 + 2)(x + 3) > 0$.
 c) $(x + 4) \cdot |x + 5| > 0$. d) $(x + 3)(x - 4) > 0$.

Bài 75

Trong ba số nguyên a, b, c có hai số là nguyên âm và một số là nguyên dương. Hỏi ba số đó là loại số nào biết rằng:

- a) $a \cdot b = c^{2002}$; b) $a \cdot b = |c|^{2003}$.

Bài 76

Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn:

$$a + b = c + d \text{ và } ab + 1 = cd.$$

Chứng tỏ rằng: $c = d$.

Bài 77

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho: $3x + 4y - xy = 15$.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 71**

a) $a \cdot b$ là một số nguyên dương nên a và b cùng dấu.

Mà a là số nguyên dương nên b là số nguyên dương.

b) $a \cdot b$ là một số nguyên âm nên a và b khác dấu.

Mà a là số nguyên dương nên b là số nguyên âm.

Bài 72

$a \cdot b > 0 \Leftrightarrow a$ và b cùng dấu.

• Nếu $a < 0, b < 0 \Rightarrow a + b < 0$ (loại)

(Vì đầu bài cho $a + b > 0$).

• Nếu $a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0$ (thỏa mãn đầu bài).

Vậy a, b là các số nguyên dương.

Bài 73

a) Xét $a = 0$ ta có $a^2 = 0^2 = 0$.

Xét $a \neq 0$ ta có a, a là hai số nguyên cùng dấu nên:

$a \cdot a = a^2$ là số nguyên dương.

Tóm lại $a^2 \geq 0$.

Xét $a = 0$ ta có $-a^2 = -0^2 = 0$.

Xét $a \neq 0$ ta có: $-a, a$ là hai số nguyên khác dấu nên:

$-a \cdot a = -a^2$ là số nguyên âm.

Tóm lại: $-a^2 \leq 0$.

b) $(x-8)^2 \geq 0$ nên $(x-8)^2 + 2003 \geq 2003$.

$A \geq 2003$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-8=0 \Leftrightarrow x=8$.

Giá trị nhỏ nhất của A là 2003.

c) $-(x+5)^2 \leq 0$ nên $-(x+5)^2 + 9 \leq 9$.

$B \leq 9$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$.

Giá trị lớn nhất của B là 9.

Bài 74

a) $(x-2)(-4-x^2) > 0 \Leftrightarrow x-2$ và $-4-x^2$ cùng dấu.

Mà $-x^2 \leq 0$ nên $-4-x^2 < 0$. Do đó $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

b) $(x^2+2)(x+3) > 0 \Leftrightarrow x^2+2$ và $x+3$ cùng dấu.

Mà $x^2 \geq 0$ nên $x^2+2 > 0$. Do đó $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

c) $(x+4) \cdot |x+5| > 0 \Leftrightarrow x+4$ và $|x+5|$ cùng dấu.

Mà $|x+5| > 0$. Do đó $x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$.

d) $(x+3)(x-4) > 0 \Leftrightarrow x+3$ và $x-4$ cùng dấu.

$\Leftrightarrow x+3 > 0$ và $x-4 > 0$ hoặc $x+3 < 0$ và $x-4 < 0$.

$\Leftrightarrow x > -3$ và $x > 4$

hoặc $x < -3$ và $x < 4 \Leftrightarrow x > 4$ hoặc $x < -3$.

Bài 75

a) $c \in \mathbb{Z}, c \neq 0$ nên $c^{2002} = (c^{1001})^2 > 0$;

hay $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow a$ và b cùng dấu.

Kết hợp với đầu bài. Suy ra a, b là hai số nguyên âm.

Do vậy: c là số nguyên dương.

b) Ta có $c \in \mathbb{Z}, c \neq 0$ nên $|c| > 0$

$\Rightarrow |c|^{2003} > 0$ nên $ab > 0 \Leftrightarrow a$ và b cùng dấu. Kết hợp với đầu bài.

Suy ra: a, b là hai số nguyên âm.

Do vậy c là số nguyên dương.

Bài 76

Từ $a+b=c+d \Rightarrow a=c+d-b$.

Mặt khác $a \cdot b+1=cd$

hay $(c+d-b) \cdot b+1=cd$.

$$\Leftrightarrow cb + db - b^2 + 1 = cd \Leftrightarrow cd - cb - db + b^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - db) - (cb - cd) = 1 \Leftrightarrow b(b - d) - c(b - d) = 1$$

$$\Leftrightarrow (b - d) \cdot (b - c) = 1 \Leftrightarrow b - d = b - c = 1$$

$$\text{hoặc } b - d = b - c = -1.$$

$$\text{Vậy } b - d = b - c \Rightarrow c = d.$$

Bài 77

$$3x + 4y - xy = 15$$

$$3x - xy - 12 + 4y = 15 - 12$$

$$x(3 - y) - 4(3 - y) = 3$$

$$(x - 4)(3 - y) = 3.$$

Do 3 là một số nguyên tố nên:

$$\text{hoặc } 3 = 1 \cdot 3 \text{ hoặc } 3 = 3 \cdot 1$$

$$\text{hoặc } 3 = (-1) \cdot (-3) \text{ hoặc } 3 = (-3) \cdot (-1).$$

$x - 4$	1	3	-1	-3
$3 - y$	3	1	-3	-1

 $\Rightarrow$

x	5	7	3	1
y	0	2	6	4

§ 12. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP NHÂN

1. Tính chất giao hoán: $a \cdot b = b \cdot a$

2. Tính chất kết hợp: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Chú ý:

- Nhờ tính chất kết hợp, ta có tích của ba, bốn, năm,... số nguyên.
- Khi thực hiện phép nhân nhiều số nguyên, ta có thể dựa vào các tính chất giao hoán và kết hợp để thay đổi vị trí các thừa số, đặt dấu ngoặc để nhóm các thừa số một cách tùy ý.

- Tích của n số nguyên a là lũy thừa bậc n của số nguyên a .

3. Nhân với 1:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

4. Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Chú ý: Tính chất trên cũng đúng đối với phép trừ.

$$a(b - c) = ab - ac.$$

BÀI TẬP**Bài 78**

Bỏ dấu ngoặc

- a) $(a + b)(c - d)$; b) $(a + b)(a - b)$;
 c) $(a - b)(c + d)$; d) $(a - b)(a + b) - (b - a)b$.

Bài 79

Biến đổi vế trái thành vế phải:

- a) $a(b - c) + c(a - b) = b(a - c)$;
 b) $a(b - c) - b(a + c) = (a + b)(-c)$;
 c) $a(b + c) - b(a - c) = (a + b)c$;
 d) $a(b - c) - a(b + d) = -a(c + d)$;
 e) $(a + b)(c + d) - (a + d)(b + c) = (a - c)(d - b)$.

Bài 80

Chứng tỏ rằng số $A = (-3)^{2000}$ có ít hơn 1001 chữ số.

Bài 81

Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

- a) $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + 2003 = 2003$.
 (vế trái là tổng các số nguyên liên tiếp viết theo thứ tự tăng dần).
 b) $2004 + 2003 + \dots + (x + 1) + x = 2004$.
 (Vế trái là tổng các số nguyên liên tiếp viết theo thứ tự giảm dần).

Bài 82

Với $x \in \mathbb{Z}$. So sánh x^2 và $3x$.

Bài 83

Hiện nay cha 37 tuổi, con 7 tuổi. Hỏi lúc nào thì tuổi cha gấp 7 lần tuổi con?

Bài 84

Cho dãy số nguyên dương: $a_1, a_2, \dots, a_7$.

Gọi $b_1, b_2, \dots, b_7$ là cách sắp xếp theo thứ tự khác của bảy số trên.

Tính tổng $(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), \dots, (a_7 + b_7)$. Hãy cho biết tích $P = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_7 + b_7)$ là số chẵn hay lẻ?

Bài 85

Tồn tại hay không các số nguyên a, b, c, d sao cho:

- $abcd - a = 7531$; $abcd - b = 531$;
 $abcd - c = 31$; $abcd - d = 1$.

Bài 86

Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2003} \in \mathbb{Z}$; $b_1, b_2, \dots, b_{2003}$ là các sắp xếp theo thứ tự khác của các số $a_1, a_2, \dots, a_{2003}$. Chứng tỏ rằng: $P = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{2003} - b_{2003})$ là một số chẵn.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 78**

- a) $(a + b)(c - d) = (a + b)c - (a + b)d$
 $= ac + bc - ad - bd.$
- b) $(a + b)(a - b) = (a + b)a - (a + b)b$
 $= a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$
- c) $(a - b)(c + d) = (a - b)c + (a - b)d = ac - bc + ad - bd.$
- d) $(a - b)(a + b) - (b - a)b = (a + b)(a - b) - b^2 + ab$
 $= a^2 - b^2 - b^2 + ab$ (Kết quả bài b)
 $= a^2 + ab - 2b^2.$

Bài 79

- a) $a(b - c) + c(a - b) = ab - ac + ac - bc$
 $= ab - bc = ba - bc = b(a - c).$
- b) $a(b - c) - b(a + c) = ab - ac - ab - bc$
 $= -ac - bc = -c(a + b) = (a + b)(-c).$
- c) $a(b + c) - b(a - c) = ab + ac - ab + bc$
 $= ac + bc = c(a + b) = (a + b)c.$
- d) $a(b - c) - a(b + d) = ab - ac - ab - ad$
 $= -ac - ad = -a(c + d).$
- e) $(a + b)(c + d) - (a + d)(b + c) =$
 $= a(c + d) + b(c + d) - a(b + c) - d(b + c)$
 $= ac + ad + bc + bd - ab - ac - bd - cd$
 $= ad + bc - ab - cd$
 $= (ad - ab) - (cd - bc)$
 $= a(d - b) - c(d - b)$
 $= (d - b)(a - c) = (a - c)(d - b).$

Bài 80

$$A = (-3)^{2000} = \underbrace{(-3) \times (-3) \times (-3) \times \dots \times (-3)}_{2000 \text{ thừa số } (-3)}$$

$$= \underbrace{[(-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3)] \times \dots \times [(-3) \times (-3)]}_{1000 \text{ thừa số } [(-3) \times (-3)]}$$

$$= \underbrace{9 \times 9 \times \dots \times 9}_{1000 \text{ thừa số } 9} < \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{1000 \text{ thừa số } 10} = \underbrace{1 \text{ } 00 \dots 0}_{1000 \text{ chữ số } 0}$$

Số $1 \text{ } 00 \dots 0$ là số nhỏ nhất có 1001 chữ số.
1000 chữ số 0

Suy ra số A có ít hơn 1001 chữ số.

Bài 81

a) $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + 2003 = 2003$

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + 2002 = 2002 (*)$$

$$[(x + 2002) \cdot n] : 2 = 0$$

(Với n là số các số hạng ở vế trái của (*))

$$\text{Vì } n \neq 0 \text{ nên } x + 2002 = 0 \Leftrightarrow x = -2002.$$

b) $2004 + 2003 + \dots + (x + 1) + x = 2004$

$$2003 + 2002 + \dots + (x + 1) + x = 0 (**)$$

$$[(x + 2003) \cdot m] : 2 = 0$$

(Với m là số các số hạng ở vế trái của (**))

$$\text{Vì } m \neq 0 \text{ nên } x + 2003 = 0 \Leftrightarrow x = -2003.$$

Bài 82

Xét $x^2 - 3x$

$$\bullet x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy $x = 0$ hay $x = 3$ thì $x^2 = 3x$.

$$\bullet x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x(x - 3) > 0 \Leftrightarrow x \text{ và } x - 3 \text{ cùng dấu}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x < 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 3 \text{ hoặc } x < 0.$$

Vậy $x = 4; 5; 6; \dots$ hay $x = -1; -2; -3; \dots$ thì $x^2 > 3x$.

$$\bullet x^2 - 3x < 0 \Leftrightarrow x(x - 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \text{ và } x - 3 \text{ khác dấu (mà } x > x - 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } 0 < x < 3.$$

Vậy $x = 1; 2$ thì $x^2 < 3x$.

Bài 83

Gọi x ($x \in \mathbb{Z}$) là số năm nữa, tuổi cha gấp 7 lần tuổi con. Ta có:

$$37 + x = (7 + x) \cdot 7$$

$$37 + x = 49 + 7x$$

$$x - 7x = 49 - 37$$

$$-6x = 12$$

$$-6 \cdot x = (-6) \cdot (-2)$$

$$x = -2.$$

Vậy, trước đây 2 năm thì tuổi cha gấp 7 lần tuổi con.

Bài 84

Ta có:

$$S = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_7 + b_7)$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_7) + (b_1 + b_2 + \dots + b_7)$$

Do $b_1, b_2, \dots, b_7$ là một cách sắp xếp khác của các số $a_1, a_2, \dots, a_7$ nên:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_7 = a_1 + a_2 + \dots + a_7$$

$$\text{Do đó: } S = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_7)$$

$$\Rightarrow S \text{ là một số chẵn.}$$

Mặt khác do S là tổng của 7 số hạng, suy ra trong 7 số hạng đó tồn tại ít nhất một số là số chẵn.

Vậy: tích P là một số chẵn.

Bài 85

Giả sử tồn tại $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$abcd - a = 7531; abcd - b = 531;$$

$$abcd - c = 31; abcd - d = 1.$$

$$\text{Từ } abcd - a = 7531 \Leftrightarrow a(bcd - 1) = 7531$$

Do đó: a là một số lẻ

$$\text{mà } abcd - b = 531 \Leftrightarrow b(acd - 1) = 531$$

Do đó: b là một số lẻ

$$\text{mà } abcd - c = 31 \Leftrightarrow c(abd - 1) = 31$$

Do đó: c là một số lẻ

$$\text{mà } abcd - d = 1 \Leftrightarrow d(abc - 1) = 1$$

Do đó: d là một số lẻ

Thế thì: a, b, c, d là các số lẻ nên $abcd$ là số lẻ.

Suy ra vế trái của các biểu thức đã cho là số chẵn, trong khi đó vế

phải là số lẻ. Điều này vô lý.

Vậy: không tồn tại $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời các biểu thức đã cho.

Bài 86

Giả sử P là số lẻ

$\Rightarrow$ các số $a_1 - b_1; a_2 - b_2; \dots; a_{2003} - b_{2003}$ là các số lẻ.

Mà 2003 là một số lẻ nên suy ra tổng:

$$S = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{2003} - b_{2003}) \quad (1)$$

là một số lẻ.

Mặt khác:

$$S = (a_1 + a_2 + \dots + a_{2003}) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{2003})$$

Do $b_1, b_2, \dots, b_{2003}$ là một cách sắp xếp khác của các số $a_1, a_2, \dots, a_{2003}$ nên:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{2003}) = (b_1 + b_2 + \dots + b_{2003})$$

$$\text{Vậy } S = 0 \quad (2)$$

Ta thấy (1) và (2) mâu thuẫn nhau.

Do vậy: P là một số chẵn.

§ 13. BỘI VÀ ƯỚC CỦA MỘT SỐ NGUYÊN

1. Bội và ước của một số nguyên.

Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$. Nếu có số nguyên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b . Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a .

Chú ý:

- Nếu $a = bq$ ($b \neq 0$), $a : b = q$.
- Số 0 là bội của số nguyên khác 0.
- Số 0 không phải là ước của bất kỳ số nguyên nào.
- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.
- Nếu c vừa là ước của a vừa là ước của b thì c cũng được gọi là ước chung của a và b .

2. Tính chất:

- $a : b$ và $b : c \Rightarrow a : c$.
- $a : b \Rightarrow am : b$ ($m \in \mathbb{Z}$).

ước

$$\bullet a : c \text{ và } b : c \Rightarrow (a + b) : c$$

$$\text{và } (a - b) : c.$$

BÀI TẬP**Bài 87**

Chứng tỏ rằng:

- a) Tổng của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 3.
- b) Tổng của năm số nguyên liên tiếp chia hết cho 5.
- c) Tổng của n số nguyên lẻ liên tiếp chia hết cho n .

Bài 88

Chứng minh rằng:

- a) Trong hai số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho 2.
- b) Trong ba số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho 3.

Bài 89Cho biết $a - b$ chia hết cho 5. Chứng tỏ các biểu thức sau đây chia hết cho 5.

- a) $a - 6b$;
- b) $2a - 7b$;
- c) $26a - 21b + 2000$.

Bài 90

i a

- a) Cho hai số nguyên a và b không chia hết cho 3 nhưng khi chia cho 3 thì có cùng số dư. Chứng tỏ rằng: số $ab - 1$ là bội của 3.
- b) Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{Z}$ thì số n^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1.
- c) Có số chính phương nào mà gồm 2003; 2004 chữ số 1 không?

Bài 91Có tồn tại cặp số nguyên (a, b) nào thỏa mãn đẳng thức sau không:

- a) $-252a + 72b = 2002$;
- b) $512a - 104b = -2002$.

ước

Bài 92Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để:

- a) $n - 5$ là ước của $n - 7$;
- b) $n^2 - 2n - 22$ là bội của $n + 3$.

Bài 93

- a) Chứng minh rằng khi chia bình phương của một số nguyên lẻ

cho 8 luôn được số dư là 1.

b) Chứng minh rằng nếu có sáu số nguyên a, b, c, d, e, f thỏa mãn:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = f^2 \text{ thì cả sáu số không đồng thời là số lẻ.}$$

Bài 94

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh rằng $M = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) : 12$.

Bài 95

Cho n số $a_1; a_2; \dots; a_n \in \mathbb{Z}$. Biết rằng $|a_i| = 1$ với $i = 1; 2; \dots; n$ và $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_na_1 = 0$.

Chứng minh rằng $n : 4$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 87

a) Gọi ba số nguyên liên tiếp là $(n-1), n, (n+1)$.

Ta có: $(n-1) + n + (n+1) = n-1 + n + n+1 = 3n$

mà $3 : 3 \Rightarrow 3n : 3 (n \in \mathbb{Z})$.

Vậy tổng của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 3.

b) Gọi năm số nguyên liên tiếp là:

$(n-2), (n-1), n, (n+1), (n+2)$.

Ta có: $(n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2)$

$$= n-2 + n-1 + n + n+1 + n+2 = 5n.$$

mà: $5 : 5 \Rightarrow 5n : 5 (n \in \mathbb{Z})$.

Vậy, tổng của năm số nguyên liên tiếp chia hết cho 5.

c) Gọi n số nguyên lẻ liên tiếp là:

$2k+1, 2k+3, \dots, 2k+(2n-1); k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.

Ta có:

$$S = (2k+1) + (2k+3) + \dots + [2k+(2n-1)]$$

$$= 2k+1 + 2k+3 + \dots + 2k+(2n-1)$$

$$= \underbrace{(2k+2k+\dots+2k)}_{n \text{ số hạng}} + [1+3+\dots+(2n-1)]$$

$$= 2k \cdot n + [(2n-1)+1] \cdot n : 2 = 2nk + n^2 = n(2k+n).$$

Mà $n : n \Rightarrow n(2k+n) : n$.

Vậy $S : n$.

Bài 88

a) Hai số nguyên liên tiếp có dạng $n - 1$ và n . Có tất cả hai trường hợp:

• $n = 2k \Rightarrow n : 2$, còn $(n - 1) \not\vdots 2$

• $n = 2k + 1 \Rightarrow n - 1 = 2k : 2$, còn $n \not\vdots 2$

Vậy, trong hai số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho 2.

b) Ba số nguyên liên tiếp có dạng $n - 1$, n và $n + 1$. Có tất cả ba trường hợp:

• $n = 3k \Rightarrow n : 3$; còn $(n - 1) \not\vdots 3$ và $(n + 1) \not\vdots 3$

• $n = 3k + 1 \Rightarrow n - 1 = 3k : 3$;

còn $n = (3k + 1) \not\vdots 3$ và $n + 1 = (3k + 2) \not\vdots 3$

• $n = 3k - 1 \Rightarrow n + 1 = 3k : 3$;

còn $n = (3k - 1) \not\vdots 3$ và $n - 1 = (3k - 2) \not\vdots 3$

Vậy: trong ba số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho 3.

Bài 89

a) $a - 6b = a - b + 5b$.

Mà $(a - b) : 5$; $5b : 5$ nên $(a - b + 5b) : 5$.

Vậy $a - 6b$ chia hết cho 5.

b) $2a - 7b = 2a - 2b - 5b$

$= 2(a - b) - 5b$

mà $2(a - b) : 5$, $5b : 5$ nên $2(a - b) - 5b$ chia hết cho 5.

Vậy $2a - 7b$ chia hết cho 5.

c) $26a - 21b + 2000 = 26a - 26b + 5b + 2000$

$= 26(a - b) + 5b + 2000$.

mà $26(a - b) : 5$, $5b : 5$, $2000 : 5$

$\Rightarrow 26(a - b) + 5b + 2000$ chia hết cho 5.

Vậy $26a - 21b + 2000$ chia hết cho 5.

Bài 90

a) Theo đề bài, ta có:

$a = 3q + r$; $b = 3p + r$; với $p, q \in \mathbb{Z}$

và $r = 1; 2$.

Do đó $ab - 1 = (3q + r)(3p + r) - 1$

$= 9pq + 3qr + 3pr + r^2 - 1$.

Vì $r = 1; 2 \Rightarrow r^2 - 1 = 0; 3$.

Do vậy: $ab - 1$ chia hết cho 3 hay $ab - 1$ là bội của 3.

b) Đặt $n = 3k + r$; với $k \in \mathbb{Z}; r = 0; 1; 2$.

$$n^2 = (3k + r)^2 = (3k + r)(3k + r) = 9k^2 + 3kr + 3kr + r^2$$

Suy ra số dư của n^2 chia cho 3 bằng số dư của r^2 chia cho 3.

$$r = 0 \Rightarrow r^2 : 3 \text{ dư } 0.$$

$$r = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \text{ nên } r^2 : 3 \text{ dư } 1.$$

$$r = 2 \Rightarrow r^2 = 4 \text{ nên } r^2 : 3 \text{ dư } 1.$$

Vậy $n \in \mathbb{Z}$ thì $n^2 : 3$ dư 0 hoặc 1.

c) • Số $a = \underbrace{111 \dots 1}_{2003 \text{ chữ số } 1}$ có tổng các chữ số là 2003

Nhưng $2003 : 3$ dư 2.

Do đó: a không thể là số chính phương.

• Số $b = \underbrace{111 \dots 1}_{2004 \text{ chữ số } 1}$ có tổng các chữ số là 2004.

Ta có: $2004 : 3$ nên $b : 3$

nhưng $2004 \nmid 9$ nên $b \nmid 9$ hay $b \nmid 3^2$.

Do đó b không thể là số chính phương.

Bài 91

a) $252 : 9; 72 : 9$ nên $(-252a + 72b) : 9$

nhưng $2002 : 9$. Do vậy không tồn tại cặp số nguyên (a, b) nào thỏa mãn.

$$-252a + 72b = 2002$$

b) $512 : 4; 104 : 4$ nên $(512a - 104b) : 4$

nhưng $2002 : 4$. Do vậy không tồn tại cặp số nguyên (a, b) nào thỏa mãn:

$$512a - 104b = -2002$$

Bài 92

a) $n - 7 = (n - 5) - 2; (n - 7) : (n - 5)$

$$\Rightarrow -2 : (n - 5) \text{ nên } n - 5 = 1; -1; 2; -2.$$

Do vậy: $n = 6; 4; 7; 3$ thì $n - 5$ là ước của $n - 7$.

b) $n^2 - 2n - 22 = n^2 + 3n - 5n - 15 - 7$

$$= n(n + 3) - 5(n + 3) - 7$$

$$(n^2 - 2n - 22) : (n + 3).$$

Ta có: $-7 : (n + 3)$

nên $n + 3 = 1; -1; 7; -7$.

Do vậy:

$n = -2; -4; 4; -10$ thì $n^2 - 2n - 22$ là bội của $n + 3$.

Bài 93

a) Một số nguyên lẻ có dạng $2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (2k + 1)^2 &= (2k + 1)(2k + 1) \\ &= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \\ &= 4k(k + 1) + 1. \end{aligned}$$

Mà $4 : 4; k(k + 1) : 2 \Rightarrow 4k(k + 1) : 8$.

Do vậy: $4k(k + 1) + 1$ chia 8 dư 1 $\Rightarrow$ đpcm.

b) Giả sử các số nguyên a, b, c, d, e, f đều lẻ $\Rightarrow a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$ chia cho 8 dư 1. Do đó vế trái chia cho 8 dư 5, còn vế phải chia cho 8 dư 1. Vô lý.

Vậy cả sáu số nguyên đó không đồng thời là số lẻ.

Bài 94

Chia mỗi số $a; b; c; d$ cho 3 có bốn số dư nhận trong ba giá trị 0; 1; 2.

Vậy có hai số trong bốn số này có cùng số dư khi chia cho 3. Hiệu hai số này chia hết cho 3. Suy ra $M : 3$.

Trong bốn số $a; b; c; d$ có hai số chẵn và hai số lẻ hoặc có ít nhất ba số cùng tính chẵn lẻ. Vậy luôn luôn có hai hiệu trong tích, mỗi hiệu chia hết cho 2. Suy ra $M : 4$.

$$\text{ƯCLN}(3; 4) = 1; 3 \cdot 4 = 12.$$

Do đó $M : 12$.

Bài 95

$$|a_i| = 1 \Leftrightarrow a_i = \pm 1.$$

Do đó $a_m \cdot a_k = 1$ hoặc $a_m a_k = -1$.

Trong tổng $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 = 0$ vế trái có n số hạng, mỗi số hạng bằng 1 hoặc -1 . Do đó n là số chẵn.

Đặt $n = 2x$ ($x \in \mathbb{N}^*$) do đó trong các số hạng $(a_1 a_2); (a_2 a_3); \dots; (a_n - a_n); (a_n a_1)$ có m số bằng 1 và m số bằng -1 .

$$\text{Mặt khác } (a_1 a_2) (a_2 a_3) \dots (a_n a_1) = (a_1 a_2 \dots a_n)^2 = 1.$$

Do đó số thừa số âm có mặt trong tích là số chẵn. Ta có x chẵn,

đặt $x = 2y$ ($y \in \mathbb{N}^*$).

Vậy $n = 2x = 4y \Rightarrow n : 4$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1

Tính:

- a) $1 - 3 + 5 - 7 + \dots + 2001 - 2003 + 2005$;
- b) $1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + \dots + 1993 - 1994$;
- c) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2$.

Bài 2

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

- a) $x - 14 = 3x + 18$;
- b) $2(x - 5) - 3(x - 4) = -6 + 15 \cdot (-3)$;
- c) $(x + 7)(x - 9) = 0$;
- d) $|2x - 5| - 7 = 22$;
- e) $(|2x| - 5) - 7 = 22$;
- f) $|x + 3| + |x + 9| + |x + 5| = 4x$;
- g) $|x + 1| + |x + 2| + \dots + |x + 98| + |x + 99| = 100x$;
- h) $|x - 1| + |x - 5| = 4$.

Bài 3

Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ (a, b cho trước).

Tìm x biết:

- a) $|x| = a$;
- b) $|x - a| = b$;
- c) $|x| - a = b$.

Bài 4

Cho $x \in \mathbb{Z}$ và $-567 < x \leq 567$;

- a) Tính tổng các số nguyên x .
- b) Tính tích các số nguyên x .

Bài 5

Cho $x, y \in \mathbb{Z}$.

So sánh $x + y$ và x .

Bài 6

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

- a) $x + (x + 1) + \dots + 2002 + 2003 = 2003$;
- b) $154 + 153 + \dots + x = 154$.

Bài 7

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết: $(x^2 - 4)(x^2 - 25)$ là số nguyên âm.

Bài 8

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $xy - 3x = -19$;

b) $3x + 4y - xy = 16$.

Bài 9

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$A = |2x - 18| + |5y + 25| + 69$ (với $x, y \in \mathbb{Z}$).

Bài 10

Tìm các số nguyên x, y biết rằng:

$|3x + 18| + |4y - 28| \leq 0$

Bài 11

Cho ba số nguyên a, b, c biết rằng:

$a + b + c > 0$ (1); $ab + bc + ca > 0$ (2) và $abc > 0$ (3).

Chứng minh rằng: $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Bài 12

Tìm tập hợp các số nguyên n biết:

a) $3n$ chia hết cho $n - 1$;

b) $2n + 7$ là bội của $n - 3$;

c) $n + 2$ là ước của $5n - 1$;

d) $n - 3$ là bội của $n^2 + 4$.

Bài 13

Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$.

Chứng minh rằng $a = b = c = d = e$.

Bài 14

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$a = a^n + b^n + c^n$; $b = b^n + c^n + d^n$

$c = c^n + d^n + a^n$; $d = d^n + a^n + b^n$.

Chứng minh rằng $a = c, b = d$.

Bài 15

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a + b = c + d, a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Chứng minh rằng:

$a^{2003} + b^{2003} = c^{2003} + d^{2003}$.

GỢI Ý**Bài 1**

c) Chứng tỏ rằng: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Thật vậy $(x + y)(x - y) = x(x - y) + y(x - y)$

$$= x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

Áp dụng kết quả trên, ta có:

$$\begin{aligned} & 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2 \\ &= 1^2 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + \dots + (101^2 - 100^2) \\ &= 1 + (3 + 2)(3 - 2) + (5 + 4)(5 - 4) + \dots \\ &\quad \dots + (101 + 100)(101 - 100) \\ &= 1 + (3 + 2) + (5 + 4) + \dots + (101 + 100) \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100 + 101 = \dots \end{aligned}$$

Bài 2

h) Áp dụng $|A| \geq A$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A \geq 0$

Ta có: $|x - 1| + |x - 5| = |x - 1| + |5 - x| \geq x - 1 + 5 - x = 4$

Dấu "=" xảy ra, do đó $x - 1 \geq 0$ và $5 - x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 1$ và $x \leq 5$.

$1 \leq x \leq 5$ mà $x \in \mathbb{Z}$. Do đó $x = 1; 2; 3; 4; 5$.

Bài 3

a) Xét $a = 0$ ta có $|x| = 0$ nên $x = 0$

Xét $a < 0$ ta có $x \in \emptyset$

Xét $a > 0$ ta có $|x| = a$ nên $x = \pm a$.

Bài 7

$(x^2 - 4) \mid (x^2 - 25)$ âm nên $x^2 - 4$ và $x^2 - 25$ trái dấu.

Mà $x^2 - 4 > x^2 - 25$ nên có $x^2 - 4 > 0$ và $x^2 - 25 < 0$.

Vậy $x^2 > 4$ và $x^2 < 25$ mà $x \in \mathbb{Z}$

nên $x^2 = 3^2; 4^2$ (vì $4 = 2^2; 25 = 5^2$)

$x = \pm 3; \pm 4$.

Bài 8

$$3x + 4y - xy = 16$$

$$3x + y(4 - x) = 16$$

$$-3(4 - x) + 12 + y(4 - x) = 16$$

$$(4 - x)(-3 + y) = 4.$$

Bài 11

Giả sử $a \leq 0$.

• Xét $a = 0$ ta có $abc = 0$ vô lý vì $abc > 0$.

• Xét $a < 0$ từ (3) $\Rightarrow bc < 0$ kết hợp (2)

$\Rightarrow ab + ca > 0 \Rightarrow a(b + c) > 0$

mà $a < 0$ nên $b + c < 0$

$\Rightarrow a + b + c < 0$

Vô lý vì (1) có $a + b + c > 0$

Do vậy $a \leq 0$ là sai.

Bài 12

d) $(n - 3) : (n^2 + 4)$

$\Rightarrow (n - 3)(n + 3) : (n^2 + 4) \Rightarrow (n^2 - 9) : (n^2 + 4)$

mà $n^2 - 9 = (n^2 + 4) - 13$

Do đó $13 : (n^2 + 4)$

Mà $n^2 + 4 \geq 4$

Do vậy $n^2 + 4 = 13$ hay $n^2 = 9$.

Ta có $n = \pm 3$

$n = 3$ thì $n - 3 = 0$, $n^2 + 4 = 13$

$0 : 13$. Vậy $n = 3$ (chọn)

$n = -3$ thì $n - 3 = -6$; $n^2 + 4 = 13$

$-6 \nmid 13$. Vậy $n = -3$ (loại).

Bài 13

Giả sử $a \neq b$.

Xét $a < b$. Từ $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a = a^b$

và $a < b$ nên $b > c$, $c < d$, $d > e$, $e < a$, $a > b$. Mâu thuẫn!

Do vậy $a < b$ là sai.

Nếu $a > b$. Chứng minh tương tự trên $a > b$ cũng sai.

Vậy $a = b$.

Ta có $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$ và $a = b$.

Do đó $a = b = c = d = e$.

Bài 14

Theo đầu bài ta có $a - c = b^n - d^n$ (1)

và $b - d = c^n - a^n$. (2)

Giả sử $a \geq c$. Từ (1) có $b^n \geq d^n$

• Nếu n chẵn thì $a, b, c, d \geq 0$ do đó $b \geq d$

suy ra $c^n \geq a^n \Rightarrow c \geq a$. Vậy $a = c$.

• Nếu n lẻ thì từ (1) suy ra $b \geq d$

$$\Rightarrow c^n \geq a^n \Rightarrow c \geq a.$$

Vậy $a = c$.

$$\text{Ta có } b - d = c^n - a^n = 0 \Rightarrow b = d.$$

Tương tự nếu $c \geq a$ cũng có $a = c$, $b = d$.

Bài 15

$$\text{Từ } a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \text{ có } a^2 - c^2 = d^2 - b^2 \quad (1)$$

$$(a + c)(a - c) = (d + b)(d - b).$$

$$\text{Từ } a + b = c + d \text{ có } a - c = d - b. \quad (2)$$

$$\text{Do đó } (a + c)(a - c) = (d + b)(a - c). \quad (3)$$

$$a = c \text{ từ (2) có } b = d$$

$$a \neq c \text{ từ (3) có } a + c = d + b \text{ kết hợp (2) có:}$$

$$2a = 2d. \text{ Vậy } a = d.$$

$$\text{Kết hợp (2) có } b = c.$$

$$\text{Vậy } a = c \text{ thì } b = d, a = d \text{ thì } b = c \text{ nên có } a^{2003} + b^{2003} = c^{2003} + d^{2003}$$

CHƯƠNG III

PHÂN SỐ

§ 1. MỞ RỘNG KHÁI NIỆM PHÂN SỐ

• Người ta gọi $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ là một phân số, a là tử số (tử), b là mẫu số (mẫu) của phân số.

Nhận xét: Số nguyên a có thể viết là $\frac{a}{1}$.

BÀI TẬP

Bài 1

Viết các phân số sau:

- a) Năm phần chín; b) Âm ba phần tám;
c) Mười sáu phần mười một; d) Âm mười một phần sáu.

Bài 2

Dùng cả hai số a và b để viết thành phân số, mỗi số chỉ được viết một lần ($a, b \in \mathbb{Z}$; $a, b \neq 0$).

Bài 3

Viết tập hợp các số nguyên x biết rằng:

$$\frac{-30}{6} < x \leq \frac{-28}{14}$$

Bài 4

Tìm tập hợp các số nguyên x để $\frac{x-5}{x-2}$ là số nguyên.

Bài 5

Dùng chín chữ số khác nhau và khác 0 để viết các phân số có giá trị lần lượt bằng 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 1**

a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{-3}{8}$; c) $\frac{16}{11}$; d) $\frac{-11}{6}$.

Bài 2

Các phân số viết được là: $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$.

Bài 3

$$\frac{-30}{6} = -30 : 6 = -5; \quad \frac{-28}{14} = -28 : 14 = -2$$

Ta có: $-5 < x \leq -2$; $x \in \mathbb{Z}$

Do đó: $x = -4; -3; -2$.

Tập hợp cần tìm là $M = \{-4; -3; -2\}$.

Bài 4

$$\frac{x-5}{x-2} \text{ là số nguyên} \Leftrightarrow (x-5) : (x-2).$$

$$\text{Ta có } x-5 = [(x-2)-3] : (x-2).$$

$$\text{Do đó: } 3 : (x-2)$$

$$\text{nên } x-2 \in \mathcal{U}(3).$$

$$\text{Mà } x \in \mathbb{Z} \text{ nên: } x-2 \in \{1; -1; 3; -3\}.$$

$$x \in \{4; 2; 6; 0\}.$$

$$\text{Tập hợp cần tìm là } A = \{4; 2; 6; 0\}.$$

Bài 5

$$\frac{15846}{7923} = 2;$$

$$\frac{17496}{5832} = 3;$$

$$\frac{17568}{4392} = 4;$$

$$\frac{31485}{6297} = 5;$$

$$\frac{34182}{5697} = 6; \quad \frac{31689}{4527} = 7;$$

$$\frac{47328}{5916} = 8;$$

$$\frac{75249}{8361} = 9.$$

§2. PHÂN SỐ BẰNG NHAU

- Hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ gọi là bằng nhau nếu:
 $a \cdot d = b \cdot c$ và ngược lại.

BÀI TẬP**Bài 6**

Tìm các số nguyên a, b biết:

$$a) \frac{a}{4} = \frac{35}{28};$$

$$b) \frac{11}{b} = \frac{-33}{27};$$

$$c) \frac{a}{4} = \frac{9}{a};$$

$$d) \frac{b-2}{15} = \frac{-1}{5}.$$

Bài 7

Cho $x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$. Chứng tỏ rằng:

$$a) \frac{x}{-y} = \frac{-x}{y};$$

$$b) \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}.$$

Bài 8

Viết các phân số sau dưới dạng phân số có mẫu dương:

$$\frac{41}{-19}; \quad \frac{-7}{-31}; \quad \frac{-5}{-191}; \quad \frac{51}{-37}.$$

Bài 9

Lập các cặp phân số bằng nhau từ đẳng thức: $m \cdot n = p \cdot q$
 $(m, n, p, q \in \mathbb{Z}; m, n, p, q \text{ khác } 0)$

Bài 10

Tìm các số nguyên x, y biết:

$$a) \frac{x}{5} = \frac{2}{y};$$

$$b) \frac{x}{y} = \frac{3}{5}.$$

Bài 11

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng tỏ rằng:

a) $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$; b) $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 6**

a) $\frac{a}{4} = \frac{35}{28}$

$$a \cdot 28 = 4 \cdot 35$$

$$a = (4 \cdot 35) : 28$$

$$a = 5.$$

b) $\frac{11}{b} = \frac{-33}{27}$

$$11 \cdot 27 = b \cdot (-33)$$

$$b = (11 \cdot 27) : (-33)$$

$$b = -9.$$

c) $\frac{a}{4} = \frac{9}{a}$

$$a \cdot a = 4 \cdot 9$$

$$a^2 = (\pm 6)^2$$

$$a = \pm 6.$$

d) $\frac{b-2}{15} = \frac{-1}{5}$

$$(b-2) \cdot 5 = 15 \cdot (-1)$$

$$b-2 = (-15) : 5$$

$$b-2 = -3$$

$$b = -3 + 2$$

$$b = -1.$$

Bài 7

a) $x \cdot y = (-x) \cdot (-y).$

Do đó: $\frac{x}{-y} = \frac{-x}{y}.$

b) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y).$

Do đó: $\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}.$

Bài 8

$$\frac{41}{-19} = \frac{-41}{19}; \quad \frac{-7}{-31} = \frac{7}{31};$$

$$\frac{-5}{-191} = \frac{5}{191}; \quad \frac{51}{-37} = \frac{-51}{37}.$$

Bài 9

$$m \cdot n = p \cdot q$$

Ta có: $\frac{m}{p} = \frac{q}{n}; \quad \frac{m}{q} = \frac{p}{n};$

$$\frac{n}{p} = \frac{q}{m}; \quad \frac{n}{q} = \frac{p}{m}.$$

Bài 10

a) $\frac{x}{5} = \frac{2}{y}$

$$x \cdot y = 2 \cdot 5$$

$$xy = 10$$

x, y là ước của 10.

Ta có:

x	1	-1	2	-2	5	-5	10	-10
y	10	-10	5	-5	2	-2	1	-1

b) $\frac{x}{-y} = \frac{3}{5}$

$$x \cdot 5 = y \cdot 3$$

$$x = 3a; y = 5a \text{ với } a \in \mathbb{Z}, a \neq 0.$$

Bài 11

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow ab + ad = ab + bc$

$$\Rightarrow a(b + d) = b(a + c) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a + c}{b + d}.$$

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\Rightarrow ad = bc \Rightarrow ac + ad = ac + bc$$

$$\Rightarrow a(c + d) = c(a + b) \Rightarrow \frac{a + b}{c + d} = \frac{a}{c}.$$

§3. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN SỐ

Nếu ta nhân cả tử và mẫu của một phân số với cùng một số nguyên khác 0 thì ta được một phân số bằng phân số đã cho.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} \text{ với } m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \neq 0.$$

Nếu ta chia cả tử và mẫu của một phân số cho cùng một ước chung của chúng thì ta được một phân số bằng phân số đã cho.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n} \text{ với } n \in \text{ƯC}(a; b).$$

BÀI TẬP

Bài 12

Giải thích tại sao các phân số sau bằng nhau

$$\text{a) } \frac{-11}{7} = \frac{-165}{105}; \quad \text{b) } \frac{-2323}{1919} = \frac{-232323}{191919};$$

$$\text{c) } \frac{\overline{-ababab}}{\overline{cdcdcd}} = \frac{\overline{-abab}}{\overline{cdcd}}.$$

Bài 13

Chứng tỏ rằng:

$$\frac{-18}{43} = \frac{-1818}{4343} = \frac{-181818}{434343} = \frac{-18181818}{43434343}$$

Bài 14

Tìm phân số có mẫu là 7 và nếu lấy mẫu nhân với một số, lấy tử cộng với số đó thì giá trị của phân số không thay đổi.

Bài 15

$$\text{Cho biểu thức } A = \frac{5}{n-4}$$

- Tìm các số nguyên n để biểu thức A là phân số.
- Tìm các số nguyên n để A là một số nguyên.

Bài 16

$$\text{Cho biểu thức } B = \frac{x-2}{x+5}$$

- Tìm các số nguyên x để biểu thức B là phân số.
- Tìm các số nguyên x để B là một số nguyên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 12

$$a) \quad \frac{-11}{7} = \frac{(-11) \cdot 15}{7 \cdot 15} = \frac{-165}{105}$$

$$b) \quad \frac{-2323}{1919} = \frac{(-23) \cdot 101}{19 \cdot 101} = \frac{-23}{19}$$

$$\frac{-232323}{191919} = \frac{(-23) \cdot 10101}{19 \cdot 10101} = \frac{-23}{19}$$

$$\text{Do đó: } \frac{-2323}{1919} = \frac{-232323}{191919}$$

$$c) \quad \frac{-\overline{ababab}}{\overline{cdcdcd}} = \frac{(-\overline{ab}) \cdot 10101}{\overline{cd} \cdot 10101} = \frac{-\overline{ab}}{\overline{cd}}$$

$$\frac{-\overline{abab}}{\overline{cdcd}} = \frac{-\overline{ab} \cdot 101}{\overline{cd} \cdot 101} = \frac{-\overline{ab}}{\overline{cd}}$$

$$\text{Do đó: } \frac{-\overline{ababab}}{\overline{cdcdcd}} = \frac{-\overline{abab}}{\overline{cdcd}}$$

Bài 13

$$\frac{-1818}{4343} = \frac{-(18) \cdot 101}{43 \cdot 101} = \frac{-18}{43}$$

$$\frac{-181818}{434343} = \frac{(18) \cdot 10101}{43 \cdot 10101} = \frac{-18}{43}$$

$$\frac{-18181818}{43434343} = \frac{-(18) \cdot 1010101}{43 \cdot 1010101} = \frac{-18}{43}$$

$$\text{Do đó } \frac{-18}{43} = \frac{-1818}{4343} = \frac{-181818}{434343} = \frac{-1818188}{43434343}$$

Bài 14

Gọi phân số cần tìm là $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$), b là số nguyên khác 0 và có:

$$\frac{a}{7} = \frac{a+b}{7 \cdot b}$$

$$\frac{a \cdot b}{7 \cdot b} = \frac{a+b}{7 \cdot b}$$

$$a \cdot b = a + b$$

$$a : b : a, a : a \text{ do đó } b : a$$

và $a : b : b, b : b \text{ do đó } a : b.$

Suy ra $a = b$ hoặc $a = -b$.

• Xét $a = b$.

Ta có: $b : b = b + b$

$$b : b = 2 : b \text{ vì } b \neq 0$$

Do đó: $(b : b) : b = 2$

$$b = 2.$$

Vậy: $a = b = 2.$

Phân số cần tìm là $\frac{2}{7}.$

• Xét $a = -b$

Ta có: $(-b) : b = -b + b$

$$b = 0 \text{ (loại vì } b \neq 0).$$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{2}{7}.$

Bài 15

a) $A \text{ là phân số} \Leftrightarrow n - 4 \neq 0 \Leftrightarrow n \neq 4$

n là số nguyên khác 4 thì A là phân số.

b) $A \text{ là một số nguyên} \Leftrightarrow 5 : (n - 4)$

$$\Leftrightarrow n - 4 \in \mathcal{U}(5) \Leftrightarrow n - 4 \in \{1; -1; 5; -5\}$$

$$\Leftrightarrow n \in \{5; 3; 9; -1\}.$$

Bài 16

a) $B \text{ là phân số} \Leftrightarrow x + 5 \neq 0$

$$x \neq -5.$$

b) $B \text{ là một số nguyên}$

$$\Leftrightarrow (x - 2) : (x + 5)$$

Ta có: $x - 2 = [(x + 5) - 7] : (x + 5)$

$$\Leftrightarrow 7 : (x + 5) \Leftrightarrow x + 5 \in \mathcal{U}(7)$$

$$x + 5 \in \{1; -1; 7; -7\}$$

$$x \in \{-4; -6; 2; -12\}.$$

§4. RÚT GỌN PHÂN SỐ

• Muốn rút gọn một phân số, ta chia cả tử và mẫu của phân số cho một ước chung (khác 1 và -1) của chúng.

• Phân số tối giản (hay phân số không rút gọn được nữa) là phân số mà tử và mẫu chỉ có ước chung là 1 và -1.

Nhận xét: Chia tử và mẫu của phân số cho ƯCLN của chúng, ta sẽ được một phân số tối giản.

BÀI TẬP

Bài 17

Rút gọn các phân số sau thành phân số tối giản:

$$\text{a) } \frac{-351}{702}; \quad \text{b) } \frac{-3112}{-9336}; \quad \text{c) } \frac{583}{-352}.$$

Bài 18

Rút gọn:

$$\text{a) } \frac{115 \cdot (-30) \cdot 49}{(-60) \cdot 115 \cdot 49}; \quad \text{b) } \frac{153 \cdot 24 - 153 \cdot 11}{7 - 160};$$

$$\text{c) } \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot 9 \cdot 25 + 6 \cdot 9 \cdot 35 + 10 \cdot 21 \cdot 40}{2 \cdot 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 \cdot 35 + 6 \cdot 9 \cdot 49 + 10 \cdot 21 \cdot 56};$$

$$\text{d) } \frac{2^{50} \cdot 3^{14} \cdot 7^{28}}{3^{13} \cdot 2^{51} \cdot 7^{28}}.$$

Bài 19

Tim tất cả các phân số bằng phân số $\frac{34}{51}$ và có mẫu là số tự nhiên nhỏ hơn 16.

Bài 20

$$\text{Cho } M = \frac{1 + 2 + \dots + 8 + 9}{11 + 12 + \dots + 18 + 19}$$

a) Rút gọn M.

b) Hãy xóa một số hạng ở tử và xóa một số hạng ở mẫu của M để được một phân số có giá trị vẫn bằng M.

Bài 21

Chứng minh rằng các phân số sau tối giản với mọi $n \in \mathbb{N}$:

a) $\frac{16n+5}{6n+2}$; b) $\frac{14n+3}{21n+4}$.

Bài 22

Cho $\frac{a}{b}$ là phân số chưa tối giản. Chứng tỏ rằng phân số $\frac{a+b}{b}$ cũng chưa tối giản ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$).

Bài 23

Tìm $n \in \mathbb{N}$ và $n > 2$ để phân số $\frac{n+7}{n-2}$ tối giản.

Bài 24

Tìm phân số $\frac{a}{b}$ bằng phân số $\frac{42}{66}$ biết rằng ƯCLN($a; b$) = 36.

Bài 25

Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ biết rằng lấy tử cộng với 6, lấy mẫu cộng với 14 thì được một phân số bằng $\frac{3}{7}$.

Bài 26

Cho các phân số sau: $\frac{6}{n+8}; \frac{7}{n+9}; \frac{8}{n+10}; \dots; \frac{34}{n+36}; \frac{35}{n+37}$.

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số trên tối giản.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 17**

a) $\frac{-351}{702} = \frac{(-351):351}{702:351} = \frac{-1}{2}$;

b) $\frac{-3112}{-9336} = \frac{(-3112):(-3112)}{(-9336):(-3112)} = \frac{1}{3}$;

c) $\frac{583}{-352} = \frac{583:11}{(-352):11} = \frac{53}{-32} = \frac{-53}{32}$.

Bài 18

a) $\frac{115 \cdot (-30) \cdot 49}{(-60) \cdot 115 \cdot 49} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$;

b) $\frac{153 \cdot 24 - 153 \cdot 11}{7 - 160} = \frac{153 \cdot (24 - 11)}{-153} = \frac{153 \cdot 13}{(-1) \cdot 153} = -13$;

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \frac{2.3.5 + 4.9.25 + 6.9.35 + 10.21.40}{2.3.7 + 4.9.35 + 6.9.49 + 10.21.56} = \\ & = \frac{2.3.5(1.1.1 + 2.3.5 + 3.3.7 + 5.7.8)}{2.3.7(1.1.1 + 2.3.5 + 3.3.7 + 5.7.8)} = \frac{5}{7}; \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad \frac{2^{50} \cdot 3^{14} \cdot 7^{28}}{3^{13} \cdot 2^{51} \cdot 7^{28}} = \frac{1.3.1}{1.2.1} = \frac{3}{2}.$$

Bài 19

$$\frac{34}{51} = \frac{34 : 17}{51 : 17} = \frac{2}{3}.$$

Các phân số cần tìm là:

$$\frac{2}{3}; \frac{4}{6}; \frac{6}{9}; \frac{8}{12}; \frac{10}{15}.$$

Bài 20

$$\text{a)} \quad M = \frac{1 + 2 + \dots + 8 + 9}{11 + 12 + \dots + 18 + 19} = \frac{(1+9) \cdot 9 : 2}{(11+19) \cdot 9 : 2} = \frac{45}{135} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{b)} \quad M = \frac{1}{3} \text{ nên có các cách sau:}$$

• Xóa số 4 ở tử và xóa số 12 ở mẫu, ta có:

$$\frac{1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9}{11 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19} = \frac{41}{123} = \frac{1}{3}$$

• Xóa số 5 ở tử và xóa số 15 ở mẫu, ta có:

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9}{11 + 12 + 13 + 14 + 16 + 17 + 18 + 19} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

• Xóa số 6 ở tử và xóa số 18 ở mẫu, ta có:

$$\frac{1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 8 + 9}{11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 19} = \frac{39}{117} = \frac{1}{3}.$$

Bài 21

a) Gọi $d = \text{ƯCLN}(16n + 5, 6n + 2)$; $d \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $d \in \text{ƯC}(16n + 5, 6n + 2)$

$$\Rightarrow (16n + 5) : d, (6n + 2) : d$$

$$\Rightarrow [8(6n + 2) - 3(16n + 5)] : d$$

$$\Rightarrow [(48n + 16) - (48n + 15)] : d$$

$$\Rightarrow 1 : d.$$

Do đó $d = 1$.

Vậy $\text{ƯCLN}(16n + 5; 6n + 2) = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$

b) Gọi $d = \text{ƯCLN}(14n + 3; 21n + 4)$, $d \in \mathbb{N}^*$

Ta có $d \in \text{ƯC}(14n + 3; 21n + 4)$

$$\Rightarrow (14n + 3) : d, (21n + 4) : d$$

$$\Rightarrow [3(14n + 3) - 2(21n + 4)] : d$$

$$\Rightarrow [(42n + 9) - (42n + 8)] : d \Rightarrow 1 : d.$$

Do đó $d = 1$.

Vậy $\text{ƯCLN}(14n + 3; 21n + 4) = 1$.

Bài 22

Phân số $\frac{a}{b}$ chưa tối giản nên $\text{ƯCLN}(a, b) = d$,

$$d \in \mathbb{Z} (d \neq 0; \pm 1)$$

$$\Rightarrow d \in \text{ƯC}(a, b)$$

$$\Rightarrow a : d, b : d$$

$$\Rightarrow a + b : d$$

$$\Rightarrow d \in \text{ƯC}(a + b; b) \text{ mà } d \neq 0; \pm 1.$$

Do đó phân số $\frac{a+b}{b}$ chưa tối giản.

Bài 23

Phân số $\frac{n+7}{n-2}$ tối giản nên $\text{ƯCLN}(n+7; n-2) = 1$

$$\text{mà } (n+7) - (n-2) = 9 \text{ nên } \text{ƯCLN}(n-2; 9) = 1.$$

$$\text{Do đó } n-2 \nmid 9$$

$$\text{đặt } n-2 = 3a \ (a \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy } n = 3a + 2.$$

Bài 24

$$\frac{42}{66} = \frac{42 : 6}{66 : 6} = \frac{7}{11}.$$

Phân số $\frac{7}{11}$ tối giản.

$$\text{ƯCLN}(a; b) = 36.$$

Chứng tỏ phân số $\frac{a}{b}$ đã rút gọn cho 36 để được $\frac{7}{11}$.

$$\text{Vậy } \frac{a}{b} = \frac{7.36}{11.36} = \frac{252}{396}.$$

Bài 25

$$\text{Ta có } \frac{a+6}{b+14} = \frac{3}{7}.$$

$$\text{Do đó } (a+6) \cdot 7 = (b+14) \cdot 3$$

$$7a + 42 = 3b + 42$$

$$7a = 3b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{7}.$$

Bài 26

Các phân số đã cho có dạng $\frac{a}{a+(n+2)}$ và tối giản nếu các số a và

$n+2$ nguyên tố cùng nhau vì:

$$[a+(n+2)] - a = n+2, \text{ với } a = 6; 7; 8; \dots; 34; 35.$$

Do đó $n+2$ nguyên tố cùng nhau với các số $6; 7; \dots; 34; 35$.

Số tự nhiên $n+2$ nhỏ nhất thỏa mãn tính chất này là 37.

$$\text{Ta có } n+2 = 37 \text{ nên } n = 37 - 2 = 35$$

Vậy số tự nhiên n nhỏ nhất cần tìm là 35.

§5. QUY ĐỒNG MẪU NHIỀU PHÂN SỐ

• Biến đổi các phân số cho trước thành các phân số tương ứng bằng chúng nhưng có chung một mẫu. Cách làm này gọi là quy đồng mẫu các phân số.

• Mọi phân số đều viết được dưới dạng phân số với mẫu dương nên có quy tắc.

Muốn quy đồng mẫu số nhiều phân số với mẫu dương ta làm như sau:

Bước 1: Tìm một bội chung của các mẫu (thường là BCNN) để làm mẫu chung.

Bước 2: Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu)

Bước 3: Nhân tử và mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng.

BÀI TẬP**Bài 27**

Viết các phân số sau dưới dạng phân số có mẫu là 24:

$$\frac{1}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{-1}{-8}; \frac{-3}{9}; \frac{-20}{-30}; \frac{-111}{666}.$$

Bài 28

Quy đồng mẫu các phân số sau: $\frac{-29}{60}; \frac{13}{-36}; \frac{-11}{-45}.$

Bài 29

Tìm một phân số có mẫu là 13, biết rằng giá trị của nó không thay đổi khi ta cộng tử với -20 và nhân mẫu với 5.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 27**

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{1.8}{3.8} = \frac{8}{24}; \quad \frac{-2}{3} = \frac{(-2).8}{3.8} = \frac{-16}{24}; \\ \frac{-1}{-8} &= \frac{1}{8} = \frac{1.3}{8.3} = \frac{3}{24}; \quad \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3} = \frac{(-1).8}{3.8} = \frac{-8}{24}; \\ \frac{-20}{-30} &= \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = \frac{2.8}{3.8} = \frac{16}{24}; \quad \frac{-111}{666} = \frac{-1}{6} = \frac{-1.4}{6.4} = \frac{-4}{24}\end{aligned}$$

Bài 28

$$\begin{aligned}\frac{-29}{60} &= \frac{-29.3}{60.3} = \frac{-87}{180}; \\ \frac{13}{-36} &= \frac{-13}{36} = \frac{-13.5}{36.5} = \frac{-65}{180}; \\ \frac{-11}{-45} &= \frac{11}{45} = \frac{11.4}{45.4} = \frac{44}{180}.\end{aligned}$$

Bài 29

Gọi phân số cần tìm là $\frac{a}{13}$ ($a \in \mathbb{Z}$).

Theo đầu bài ta có:

$$\begin{aligned}\frac{a}{13} &= \frac{a + (-20)}{13.5} \\ \frac{a.5}{13.5} &= \frac{a + (-20)}{13.5}\end{aligned}$$

$$a \cdot 5 = a + (-20)$$

$$a \cdot 5 - a = -20$$

$$4 \cdot a = -20$$

$$a = (-20) : 4$$

$$a = -5.$$

Phân số cần tìm là $\frac{-5}{13}$.

§6 SO SÁNH PHÂN SỐ

So sánh hai phân số cùng mẫu:

Trong hai phân số có cùng một mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

So sánh hai phân số không cùng mẫu:

Muốn so sánh hai phân số không cùng mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số có cùng một mẫu dương rồi so sánh các tử với nhau, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

BÀI TẬP

Bài 30

a) Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần:

$$\frac{-4}{13}; \frac{5}{13}; \frac{9}{13}; \frac{-8}{13}; \frac{2}{13}.$$

b) Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự giảm dần:

$$\frac{-2}{9}; \frac{3}{4}; \frac{-1}{12}; \frac{5}{6}; \frac{-5}{18}.$$

Bài 31

Tìm các phân số lớn hơn $\frac{7}{10}$ và nhỏ hơn $\frac{3}{4}$ mà có mẫu là 60?

Bài 32

Cho $a \in \{3; 6; 7\}$; $b \in \{0; 23; 29; 5\}$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của phân số $\frac{a}{b}$

Bài 33

a) Cho $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}; b, d > 0$).

Chứng tỏ rằng $ad > bc$.

b) Cho $ad > bc$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}; b, d > 0$).

Chứng tỏ rằng $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Bài 34

a) Cho phân số $\frac{a}{b} < 1$ ($a, b \in \mathbb{N}; b \neq 0$).

Hỏi phân số thay đổi thế nào nếu ta thêm cùng một số tự nhiên $n \neq 0$ vào cả tử và mẫu.

b) Cho phân số $\frac{a}{b} > 1$ ($a, b \in \mathbb{N}; b \neq 0$).

Hỏi phân số thay đổi thế nào nếu ta thêm cùng một số tự nhiên $n \neq 0$ vào cả tử và mẫu.

Bài 35

Cho $A = \frac{2003^{2003} + 1}{2003^{2004} + 1}$ và $B = \frac{2003^{2002} + 1}{2003^{2003} + 1}$

So sánh A và B

Bài 36

Cho $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $b > 0, d > 0$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 30

a) Các phân số đã cho xếp theo thứ tự tăng dần như sau:

$$\frac{-8}{13} < \frac{-4}{13} < \frac{2}{13} < \frac{5}{13} < \frac{9}{13}$$

$$b) \frac{-2}{9} = \frac{(-2) \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{-8}{36}; \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{27}{36}$$

$$\frac{-1}{12} = \frac{(-1) \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{-3}{36}; \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{30}{36}$$

$$\frac{-5}{18} = \frac{(-5) \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{-10}{36}$$

$$\text{Ta có } \frac{30}{36} > \frac{27}{36} > \frac{-3}{36} > \frac{-8}{36} > \frac{-10}{36}.$$

Do vậy các phân số đã cho xếp theo thứ tự giảm dần như sau:

$$\frac{5}{6} > \frac{3}{4} > \frac{-1}{12} > \frac{-2}{9} > \frac{-5}{18}.$$

Bài 31

$$\frac{7}{10} = \frac{7.6}{10.6} = \frac{42}{60}; \quad \frac{3}{4} = \frac{3.15}{4.15} = \frac{45}{60}.$$

Do đó các phân số cần tìm là $\frac{43}{60}; \frac{44}{60}$.

Bài 32

Điều kiện $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} \text{ lớn nhất} \Rightarrow a \text{ lớn nhất, } b \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow a = 7, b = 5.$$

$$\frac{a}{b} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow a \text{ nhỏ nhất, } b \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow a = 3, b = 29.$$

Bài 33

$$\text{a) } \frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}.$$

$$\text{Ta có } \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ad}{bd} > \frac{bc}{bd} \Rightarrow ad > bc.$$

$$\text{b) } \frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}.$$

$$\text{Ta có } ad > bc \Rightarrow \frac{ad}{bd} > \frac{bc}{bd} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

Bài 34

$$\text{a) } \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow a < b \Rightarrow an < bn \Rightarrow ab + an < ab + bn$$

$$\Rightarrow a(b + n) < b(a + n) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a + n}{b + n}.$$

Vậy nếu ta thêm cùng một số tự nhiên khác 0 vào cả tử và mẫu của phân số nhỏ hơn 1 thì giá trị của phân số đó lớn hơn phân số đã cho.

$$\text{b) } \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow a > b$$

$$\Rightarrow an > bn \Rightarrow ab + an > ab + bn$$

$$\Rightarrow a(b+n) > b(a+n) \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+n}{b+n}.$$

Vậy nếu ta thêm cùng một số tự nhiên n khác 0 vào cả tử và mẫu của phân số lớn hơn 1 thì giá trị của phân số đó nhỏ hơn phân số đã cho.

Bài 35

Để thấy $A < 1$ áp dụng bài 34 ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2003^{2003} + 1}{2003^{2004} + 1} < \frac{(2003^{2003} + 1) + 2002}{(2003^{2004} + 1) + 2002} = \\ &= \frac{2003^{2003} + 2003}{2003^{2004} + 2003} = \frac{2003(2003^{2002} + 1)}{2003(2003^{2003} + 1)} \\ &= \frac{2003^{2002} + 1}{2003^{2003} + 1} = B. \end{aligned}$$

Bài 36

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}; \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow ad < bc \Rightarrow ab + ad < ab + bc$$

$$\Rightarrow a(b+d) < b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}.$$

Mặt khác từ $ad < bc$

$$\Rightarrow ad + cd < bc + cd \Rightarrow d(a+c) < c(b+d)$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

$$\text{Do đó, ta có: } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

§7. PHÉP CỘNG PHÂN SỐ

- Cộng hai phân số cùng mẫu

Muốn cộng hai phân số cùng mẫu, ta cộng các tử và giữ nguyên mẫu.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

- Cộng hai phân số không cùng mẫu

Muốn cộng hai phân số không cùng mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số có cùng một mẫu rồi cộng các tử và giữ nguyên mẫu chung.

BÀI TẬP**Bài 37**

Cộng các phân số sau:

$$\text{a) } \frac{11}{6} + \frac{1}{4}; \quad \text{b) } \frac{-3}{8} + \frac{2}{5}; \quad \text{c) } \frac{-4}{15} + \frac{-3}{10}; \quad \text{d) } -3 + \frac{2}{5}.$$

Bài 38

$$\text{Tính a) } \frac{-333}{777} + \frac{22}{55}; \quad \text{b) } \frac{-312}{936} + \frac{-373737}{151515}.$$

Bài 39

Tìm các số nguyên x biết:

$$\text{a) } \frac{-5}{17} + \frac{3}{17} \leq \frac{x}{17} < \frac{13}{17} + \frac{-11}{17}; \quad \text{b) } \frac{5}{6} + \frac{-7}{8} \leq \frac{x}{24} \leq \frac{-5}{12} + \frac{5}{8}.$$

Bài 40

Tìm tập hợp các số nguyên x để:

$$\text{a) } \frac{-24}{n} + \frac{17}{n} \text{ là một số nguyên.}$$

$$\text{b) } \frac{n-8}{n+1} + \frac{n+3}{n+1} \text{ là một số nguyên.}$$

Bài 41

$$\text{Tìm a, b} \in \mathbb{Z} \text{ biết rằng: } \frac{a}{5} + \frac{1}{10} = \frac{-1}{b}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 37**

$$\text{a) } \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{22}{12} + \frac{3}{12} = \frac{25}{12}; \quad \text{b) } \frac{-3}{8} + \frac{2}{5} = \frac{-15}{40} + \frac{16}{40} = \frac{1}{40};$$

$$\text{c) } \frac{-4}{15} + \frac{-3}{10} = \frac{-8}{30} + \frac{-9}{30} = \frac{-17}{30}; \quad \text{d) } -3 + \frac{2}{5} = \frac{-15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{-13}{5}.$$

Bài 38

Tính

$$\text{a) } \frac{-333}{777} + \frac{22}{55} = \frac{-3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{-15}{35} + \frac{14}{35} = \frac{-1}{35};$$

$$\text{b) } \frac{-312}{936} + \frac{-373737}{151515} = \frac{312 \times (-1)}{312 \times 3} + \frac{-37 \times 10101}{15 \times 10101}$$

$$= \frac{-1}{3} + \frac{-37}{15} = \frac{-5}{15} + \frac{-37}{15} = \frac{-42}{15} = \frac{-14}{5}.$$

Bài 39

Tìm các số nguyên x biết:

$$a) \quad \frac{-5}{17} + \frac{3}{17} \leq \frac{x}{17} < \frac{13}{17} + \frac{-11}{17}$$

$$\frac{-2}{17} \leq \frac{x}{17} < \frac{2}{17}$$

$$-2 \leq x < 2 \text{ mà } x \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Do đó } x = -2; -1; 0; 1.$$

$$b) \quad \frac{5}{6} + \frac{-7}{8} \leq \frac{x}{24} \leq \frac{-5}{12} + \frac{5}{8}$$

$$\frac{20}{24} + \frac{-21}{24} \leq \frac{x}{24} \leq \frac{-10}{24} + \frac{15}{24}$$

$$\frac{-1}{24} \leq \frac{x}{24} \leq \frac{5}{24}$$

$$-1 \leq x \leq 5$$

$$\text{mà } x \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Do đó } x = -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5.$$

Bài 40

$$a) \quad \frac{-24}{n} + \frac{17}{n} = \frac{-7}{n} \text{ là một số nguyên nên } n \text{ là ước của } 7.$$

$$\text{Do đó } n = 1; -1; 7; -7.$$

$$b) \quad \frac{n-8}{n+1} + \frac{n+3}{n+1} = \frac{n-8+n+3}{n+1} = \frac{2n-5}{n+1}$$

$$\text{là một số nguyên nên } (2n-5) : (n+1)$$

$$\text{Ta có } 2n-5 = [2(n+1) - 7] : (n+1).$$

$$\text{Do đó } 7 : (n+1) \Leftrightarrow n+1 \text{ là ước của } 7$$

$$\Leftrightarrow n+1 = 1; -1; 7; -7 \Leftrightarrow n = 0; -2; 6; -8.$$

Bài 41

$$\frac{a}{5} + \frac{1}{10} = \frac{-1}{b}$$

$$\frac{2a}{10} + \frac{1}{10} = \frac{-1}{b}$$

$$\frac{2a+1}{10} = \frac{-1}{b}$$

$$(2a+1) \cdot b = -10$$

$$2a+1 \text{ là số lẻ, } 2a+1 \text{ là ước của } -10$$

Do đó, ta có:

$2a + 1$	1	-1	5	-5
b	-10	10	-2	2

2a	0	-2	4	-6
b	-10	10	-2	2

a	0	-1	2	-3
b	-10	10	-2	2

§8. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÉP CỘNG PHÂN SỐ

• Các tính chất:

Tính chất giao hoán: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$.

Tính chất kết hợp: $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{p}{q}\right)$.

Cộng với số 0: $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

• Áp dụng:

Do các tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng, khi cộng nhiều phân số, ta có thể đổi chỗ hoặc nhóm các phân số lại theo bất cứ cách nào sao cho việc tính toán được thuận tiện.

BÀI TẬP

Bài 42

Tính:

a) $\frac{-2}{15} + \frac{8}{15} + \frac{17}{15}$; b) $\frac{-1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{-5}{2}$.

Bài 43

Tính nhanh:

a) $\frac{-7}{31} + \frac{24}{17} + \frac{7}{31}$; b) $\frac{-17}{13} + \frac{2}{135} + \frac{11}{31} + \frac{4}{13} + \frac{20}{31}$.

Bài 44

Tìm tập hợp các số nguyên x biết: $\frac{15}{41} + \frac{-138}{41} \leq x < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

Bài 45

Chứng tỏ rằng:

- a) $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} < 1$;
 b) $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{149} + \frac{1}{150} > \frac{1}{3}$;
 c) $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} > \frac{7}{12}$.

Bài 46

Cho $\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ với $a, b \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $a : 7$.

Bài 47

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$.

Chứng tỏ rằng:

$$M = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+d} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

có giá trị không là số nguyên.

Bài 48

Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$. Chứng tỏ rằng:

- a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$; b) $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$.

Bài 49

Kí hiệu $[x, y]$ là BCNN (x, y) .

Cho a, b, c là ba số nguyên tố khác nhau đôi một.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{[a, b]} + \frac{1}{[b, c]} + \frac{1}{[c, a]} \leq \frac{1}{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 42**

- a) $\frac{-2}{15} + \frac{-8}{15} + \frac{17}{15} = \frac{-2 + (-8) + 17}{15} = \frac{7}{15}$;
 b) $\frac{-1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{-5}{2} = \frac{-10}{30} + \frac{12}{30} + \frac{-75}{30} = \frac{-73}{30}$.

Bài 43

$$a) \frac{-7}{31} + \frac{24}{17} + \frac{7}{31} = \left(\frac{-7}{31} + \frac{7}{31} \right) + \frac{24}{17} = 0 + \frac{24}{17} = \frac{24}{17};$$

$$b) \frac{-17}{13} + \frac{2}{135} + \frac{11}{31} + \frac{4}{13} + \frac{20}{31} = \\ = \left(\frac{-17}{13} + \frac{4}{13} \right) + \left(\frac{11}{31} + \frac{20}{31} \right) + \frac{2}{135} = -1 + 1 + \frac{2}{135} = \frac{2}{135}$$

Bài 44

$$\frac{15}{41} + \frac{-138}{41} \leq x < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{-123}{41} \leq x < \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}$$

$$-3 \leq x < 1.$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$

Do đó $x \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Tập hợp cần tìm là $A = \{-3; -2; -1; 0\}$.

Bài 45

$$a) \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} < \underbrace{\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100}}_{100 \text{ số hạng}} = 1$$

$$\text{Vậy: } \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} < 1.$$

$$b) \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{149} + \frac{1}{150} > \underbrace{\frac{1}{150} + \frac{1}{150} + \dots + \frac{1}{150}}_{50 \text{ số hạng}} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{149} + \frac{1}{150} > \frac{1}{3}.$$

$$c) \frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} > \underbrace{\frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{200}}_{50 \text{ số hạng}} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{mà } \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{150} > \frac{1}{3} \text{ (câu b) và } \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} > \frac{7}{12}$$

Bài 46

$$\text{Cho } \frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \left(1 + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ = \frac{7}{2.3} + \frac{7}{2.5} + \frac{7}{3.4} = \frac{7.4.5 + 7.3.4 + 7.2.5}{2.3.4.5}$$

7 là số nguyên tố, mẫu không chứa thừa số nguyên tố 7 nên rút gọn phân số đến tối giản, tử vẫn chia hết cho 7.

Do đó $a : 7$.

Bài 47

Vì $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{a+b+d} < \frac{b}{a+b}$$

$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{b+c+d} < \frac{c}{c+d}$$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{a+c+d} < \frac{d}{c+d}$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} < M < \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right) + \left(\frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d}\right) \text{ hay } 1 < M < 2.$$

Vậy M có giá trị không là số nguyên.

Bài 48

$$\text{a) } \bullet \text{ Xét } a = b \text{ ta có } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 2$$

$\bullet$ Xét $a > b$ đặt $a = b + m$; $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Ta có } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{b+m}{b} + \frac{b}{b+m} = \frac{b}{b} + \frac{m}{b} + \frac{b}{b+m} = \\ = 1 + \frac{m}{b} + \frac{b}{b+m} > 1 + \frac{m}{b+m} + \frac{b}{b+m} = 2.$$

* Xét $a < b$. Tương tự trên ta cũng có $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

Vậy $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{b) } (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) &= a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

$$\forall \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2 \text{ (câu a).}$$

Bài 49

a, b, c là ba số nguyên tố khác nhau.

Ta có $[a, b] = a \cdot b$, $[b, c] = b \cdot c$, $[c, a] = c \cdot a$

$$\text{Do đó } \frac{1}{[a, b]} + \frac{1}{[b, c]} + \frac{1}{[c, a]} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 2}$$

$$\text{mà } \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 2} = \frac{5 + 2 + 3}{30} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{[a, b]} + \frac{1}{[b, c]} + \frac{1}{[c, a]} \leq \frac{1}{3}$$

§9. PHÉP TRỪ PHÂN SỐ

• Số đối

Hai số gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0.

• Phép trừ phân số:

Muốn trừ một phân số cho một phân số, ta cộng số bị trừ với số đối của số trừ

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right).$$

BÀI TẬP**Bài 50**

Tính:

$$\text{a) } \frac{-3}{8} - \frac{5}{12};$$

$$\text{b) } \frac{-3}{14} - \frac{-2}{35};$$

$$\text{c) } -4 - \frac{-5}{7};$$

$$\text{d) } \frac{1}{5} - 2.$$

Bài 51

Tính a) $\frac{-313}{939} - \frac{2222}{7777}$;

b) $\frac{1212}{3131} - \frac{-5}{62}$.

Bài 52

Tìm các số nguyên x biết: $\frac{-5}{14} - \frac{37}{14} \leq x \leq \frac{31}{73} - \frac{313131}{737373}$

Bài 53

Tìm tập hợp các số nguyên a để: $\frac{-14}{a+1} - \frac{5}{a+1}$ là một số nguyên.

Bài 54

a) Tính $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$);

b) Tính $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$);

c) Tính $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$;

d) Tính $\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \dots + \frac{3}{91.94}$

Bài 55

Tìm a, b $\in \mathbb{Z}$ biết rằng: $\frac{a}{9} - \frac{3}{b} = \frac{1}{18}$.

Bài 56

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2002^2} + \frac{1}{2003^2} < 1$.

Bài 57

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn. Vòi thứ nhất chảy trong 10 giờ đầy bể, vòi thứ hai chảy trong 8 giờ đầy bể. Vòi thứ ba tháo 5 giờ bể cạn. Bể đang cạn, nếu mở cả 3 vòi thì sau 1 giờ chảy được vào bao nhiêu phần bể?

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 50**

a) $\frac{-3}{8} - \frac{5}{12} = \frac{-9}{24} - \frac{10}{24} = \frac{-9}{24} + \frac{-10}{24} = \frac{-19}{24}$;

$$b) \frac{-3}{14} - \frac{-2}{35} = \frac{-15}{70} - \frac{-4}{70} = \frac{-15}{70} + \frac{4}{70} = \frac{-11}{70};$$

$$c) -4 - \frac{-5}{7} = \frac{-28}{7} - \frac{-5}{7} = \frac{-28}{7} + \frac{5}{7} = \frac{-23}{7};$$

$$d) \frac{1}{5} - 2 = \frac{1}{5} - \frac{10}{5} = \frac{1}{5} + \frac{-10}{5} = \frac{-9}{5}.$$

Bài 51

Tính:

$$a) \frac{-313}{939} - \frac{2222}{7777} = \frac{(-313):313}{939:313} - \frac{2222:1111}{7777:1111} \\ = \frac{-1}{3} - \frac{2}{7} = \frac{-1}{3} + \frac{-2}{7} = \frac{-7}{21} + \frac{-6}{21} = \frac{-13}{21};$$

$$b) \frac{1212}{3131} - \frac{-5}{62} = \frac{12}{31} + \frac{5}{62} = \frac{24}{62} + \frac{5}{62} = \frac{29}{62}.$$

Bài 52

Tìm các số nguyên x biết:

$$\frac{-5}{14} - \frac{37}{14} \leq x \leq \frac{31}{73} - \frac{313131}{737373}$$

$$\frac{-5}{14} + \frac{-37}{14} \leq x \leq \frac{31}{73} - \frac{313131:10101}{737373:10101}$$

$$\frac{-42}{14} \leq x \leq \frac{31}{73} - \frac{31}{73}$$

$$-3 \leq x \leq 0. \text{ Mà } x \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Do đó } x = -3; -2; -1; 0.$$

Bài 53

$$\frac{-14}{a+1} - \frac{5}{a+1} = \frac{-14}{a+1} + \frac{-5}{a+1} = \frac{-19}{a+1} \text{ là số nguyên.}$$

$$\text{Do đó } (-19):(a+1) \Leftrightarrow a+1 \in \mathbb{U}(-19)$$

$$\Leftrightarrow a+1 \in \{1; -1; 19; -19\} \Leftrightarrow a \in \{0; -2; 18; -20\}.$$

Bài 54

$$a) \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)};$$

$$b) \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} = \frac{n+3}{n(n+3)} - \frac{n}{n(n+3)} = \frac{3}{n(n+3)};$$

c) Áp dụng a) ta có:

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{50}{100} - \frac{1}{100} = \frac{49}{100};$$

d) Áp dụng b) ta có:

$$\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \dots + \frac{3}{91.94} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{91} - \frac{1}{94} = \frac{1}{1} - \frac{1}{94} = \frac{93}{94};$$

Bài 55

$$\frac{a}{9} - \frac{3}{b} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{a}{9} - \frac{1}{18} = \frac{3}{b}$$

$$\frac{2a-1}{18} = \frac{3}{b}$$

$$(2a-1).b = 3.18$$

$$(2a-1).b = 54$$

$2a-1$ là số lẻ, $2a-1 \in U(54)$

$2a-1$	1	-1	3	-3	9	-9	27	-27
b	54	-54	18	-18	6	-6	2	-2

2a	2	0	4	-2	10	-8	28	-26
b	54	-54	18	-18	6	-6	2	-2

a	1	0	2	-1	5	-4	14	-13
b	54	-54	18	-18	6	-6	2	-2

Bài 56

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2002^2} + \frac{1}{2003^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2002.2003} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2002} - \frac{1}{2003} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2003} < 1.$$

Bài 57

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy vào được $\frac{1}{10}$ (bể), vòi hai chảy vào được $\frac{1}{8}$ (bể) và vòi thứ ba tháo ra hết $\frac{1}{5}$ (bể). Sau 1 giờ lượng nước trong bể có:

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{5} = \left(\frac{4}{40} + \frac{5}{40}\right) - \frac{8}{40} = \frac{1}{40} \text{ (bể).}$$

§10. PHÉP NHÂN PHÂN SỐ**Quy tắc:**

Muốn nhân hai phân số, ta nhân các tử số với nhau và nhân các mẫu số với nhau.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Nhận xét:

Muốn nhân một số nguyên với một phân số (hoặc một phân số với một số nguyên), ta nhân số nguyên với tử của phân số và giữ nguyên

$$\text{mẫu } a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

BÀI TẬP**Bài 58**

Tính

$$\text{a) } \frac{-3}{5} \cdot \frac{1}{2};$$

$$\text{b) } \frac{-4}{7} \cdot \frac{2}{3};$$

$$\text{c) } \frac{-333}{151} \cdot \frac{-302}{111};$$

$$\text{d) } -147 \cdot \frac{1}{7}.$$

Bài 59

$$\text{a) Chứng tỏ rằng: } \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{b) Tính nhanh: } \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{998} \cdot \frac{1}{999} + \frac{1}{999} \cdot \frac{1}{1000}.$$

Bài 60

Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ nhỏ nhất lớn hơn 0 để khi nhân $\frac{a}{b}$ với các phân số $\frac{35}{8}; \frac{25}{4}$ được mỗi tích là một số tự nhiên.

Bài 61

Một lớp học có 50 học sinh. Số học sinh giỏi chiếm $\frac{2}{5}$ số học sinh cả lớp, số học sinh khá chiếm $\frac{5}{6}$ số học sinh còn lại, số học sinh còn lại là số học sinh xếp loại trung bình.

Tính số học sinh trung bình của lớp.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 58**

$$a) \frac{-3}{5} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{(-3) \cdot (-1)}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10};$$

$$b) \frac{-4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{(-4) \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{-8}{21};$$

$$c) \frac{-333}{151} \cdot \frac{-302}{111} = \frac{(-333) \cdot (-302)}{151 \cdot 111} = \frac{(-3) \cdot (-2)}{1 \cdot 1} = 6;$$

$$d) -147 \cdot \frac{1}{7} = \frac{(-147) \cdot 1}{7} = -21.$$

Bài 59

$$a) \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

b) Áp dụng a) ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{998} \cdot \frac{1}{999} + \frac{1}{999} \cdot \frac{1}{1000} = \\ &= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{998} - \frac{1}{999} + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{1000} = \frac{1000}{1000} - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}. \end{aligned}$$

Bài 60

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{35}{8} = \frac{35a}{8b} \text{ là số tự nhiên.}$$

Mà ƯCLN (a; b) = 1 nên a : 8, 35 : b

và $\frac{a}{b} \cdot \frac{25}{4} = \frac{25a}{4b}$ là số tự nhiên

mà ƯCLN (a; b) = 1 nên $a : 4; 25 : b$.

Phân số $\frac{a}{b}$ nhỏ nhất lớn hơn 0 thỏa mãn các điều kiện trên. Khi: a là BCNN (8; 4), b là ƯCLN (35; 25)

$$a = \text{BCNN} (8; 4) = 8 \quad ; \quad b = \text{ƯCLN} (35; 25) = 5.$$

Phân số cần tìm là $\frac{8}{5}$

Bài 61

Số học sinh giỏi là:

$$50 \cdot \frac{2}{5} = 20 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh còn lại là:

$$50 - 20 = 30 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh khá là:

$$30 \cdot \frac{5}{6} = 25 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh trung bình là:

$$30 - 25 = 5 \text{ (học sinh)}$$

Đáp số: 5 học sinh.

§ 11. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÉP NHÂN PHÂN SỐ

• Các tính chất:

– Tính chất giao hoán: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$.

– Tính chất kết hợp: $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q}\right)$.

– Nhân với số 1: $\frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

– Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{p}{q}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q}.$$

• Áp dụng:

Do các tính chất giao hoán và kết hợp của phép nhân, khi nhân nhiều số, ta có thể đổi chỗ hoặc nhóm các phân số lại theo bất cứ cách nào sao cho việc tính toán được thuận tiện.

BÀI TẬP

a

Bài 62

Tính nhanh:

$$a) \frac{53}{101} \cdot \frac{-13}{97} + \frac{53}{101} \cdot \frac{-84}{97};$$

$$b) \left(\frac{1}{57} - \frac{1}{5757} + \frac{1}{23} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right);$$

$$c) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2002} \right) \left(1 + \frac{1}{2003} \right);$$

$$d) \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{199} \right) \left(1 - \frac{1}{200} \right)$$

Bài 63

$$a) \frac{1^2}{1.2} \cdot \frac{2^2}{2.3} \cdot \frac{3^2}{3.4} \dots \frac{99^2}{99.100} \cdot \frac{100^2}{100.101};$$

$$b) \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{59^2}{58.60};$$

Bài 64

Chứng minh rằng:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} = \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{2002}.$$

Bài 65

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{5} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{44} + \frac{1}{61} + \frac{1}{85} + \frac{1}{97} < \frac{1}{2}.$$

Bài 66

$$\text{Tìm số tự nhiên } x \text{ biết: } \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{x(x+1):2} = \frac{2001}{2003}.$$

Bài 67

$$\text{Cho } A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{9999}{10000}.$$

$$\text{So sánh } A \text{ và } \frac{1}{100}.$$

Bài 68

Tính: $M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}$.

Bài 69

Cho $M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1}$.

Chứng minh rằng:

a) $M < 100$;

b) $M > 50$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 62

a)
$$\frac{53}{101} \cdot \frac{-13}{97} + \frac{53}{101} \cdot \frac{-84}{97} = \frac{53}{101} \cdot \left(\frac{-13}{97} + \frac{-84}{97} \right) =$$

$$= \frac{53}{101} \cdot \frac{-97}{97} = \frac{53}{101} \cdot (-1) = -\frac{53}{101}.$$

b)
$$\left(\frac{1}{57} - \frac{1}{5757} + \frac{1}{23} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{57} - \frac{1}{5757} + \frac{1}{23} \right) \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \right) = \left(\frac{1}{57} - \frac{1}{5757} + \frac{1}{23} \right) \cdot 0 = 0.$$

c)
$$\left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2002} \right) \left(1 + \frac{1}{2003} \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{2003}{2002} \cdot \frac{2004}{2003} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2003 \cdot 2004}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2002 \cdot 2003} = \frac{2004}{2} = 1002.$$

d)
$$\left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{199} \right) \left(1 - \frac{1}{200} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{198}{199} \cdot \frac{199}{200} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 198 \cdot 199}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 199 \cdot 200} = \frac{1}{200}.$$

Bài 63

a)
$$\frac{1^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 4} \dots \frac{99^2}{99 \cdot 100} \cdot \frac{100^2}{100 \cdot 101} =$$

$$= \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots 99^2 \cdot 100^2}{(1 \cdot 2)(2 \cdot 3)(3 \cdot 4) \dots (99 \cdot 100)(100 \cdot 101)} =$$

$$= \frac{(1 \cdot 2 \dots 99 \cdot 100)(1 \cdot 2 \dots 99 \cdot 100)}{(1 \cdot 2 \dots 99 \cdot 100)(2 \cdot 3 \dots 100 \cdot 101)} = \frac{1}{101}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdots \frac{59^2}{58.60} &= \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdots 59^2}{(1.3)(2.4)(3.5) \cdots (58.60)} = \\ &= \frac{(2.3.4 \cdots 59)(2.3.4 \cdots 59)}{(1.2.3 \cdots 58)(3.4.5 \cdots 60)} = \frac{59.2}{1.60} = \frac{59}{30}. \end{aligned}$$

Bài 64

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} &= \\ = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2002} \right) &= \\ = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1001} \right) &= \\ = \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \cdots + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002}. \end{aligned}$$

Bài 65

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{44} + \frac{1}{61} + \frac{1}{85} + \frac{1}{97} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \\ + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{60} = \\ = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4+5+1}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bài 66

Tìm số tự nhiên x biết:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{2001}{2003} \\ 2 \cdot \left[\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{x(x+1)} \right] &= \frac{2001}{2003} \\ 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) &= \frac{2001}{2003} \\ 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) &= \frac{2001}{2003} \\ 1 - \frac{2}{x+1} &= \frac{2001}{2003} \\ \frac{2}{x+1} &= 1 - \frac{2001}{2003} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2}{2003}$$

$$x+1 = 2003$$

$$x = 2003 - 1$$

$$x = 2002.$$

$$\text{Vậy } x = 2002.$$

Bài 67

$$\text{Đặt } B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{9998}{9999} \frac{10000}{10000}$$

Để thấy $A < B$.

$$\text{Ta có: } A \cdot A < A \cdot B = \frac{1}{100^2}$$

$$A^2 < \left(\frac{1}{100}\right)^2 \Rightarrow A < \frac{1}{100} \text{ (Vì } A > 0)$$

Bài 68

$$2M = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}\right)$$

$$= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}}$$

$$\text{Do đó: } M = 2M - M =$$

$$\left(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}}\right) -$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}\right)$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2^{99}}\right) - \left(\frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}\right) = \left(2 + \frac{1}{2^{99}}\right) - \frac{1}{2^{99}} = 2.$$

Bài 69

a)

$$M = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}+1} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}\right) <$$

$$< 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}} + \dots + \frac{1}{2^{99}}}_{2^{99} \text{ số hạng}}$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{99}}$$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{100 \text{ số hạng}} = 100.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } M &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^4}\right) + \dots \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{2^{99} + 1} + \frac{1}{2^{99} + 2} + \dots + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{100}} = \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{100 \text{ số hạng}} - \frac{1}{2^{100}} = 1 + 100 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{100}} > 50. \end{aligned}$$

§12. PHÉP CHIA PHÂN SỐ

• Số nghịch đảo

Hai số gọi là nghịch đảo của nhau nếu tích của chúng bằng 1.

• Phép chia phân số

Muốn chia một phân số hay một số nguyên cho một phân số, ta nhân số bị chia với số nghịch đảo của số chia.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (c \neq 0)$$

$$a : \frac{c}{d} = a \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c}$$

BÀI TẬP

Bài 70

Tìm x biết:

$$\text{a) } \frac{3}{5} \cdot x = \frac{4}{15};$$

$$\text{b) } \frac{3}{8} : x = \frac{-1}{2}.$$

Bài 71

$$\text{Rút gọn: } \frac{\frac{4}{17} - \frac{4}{49} - \frac{4}{131}}{\frac{3}{17} - \frac{3}{49} - \frac{3}{131}}$$

Bài 72

Tìm phân số lớn nhất sao cho khi chia mỗi phân số $\frac{12}{35}$ và $\frac{18}{49}$ này cho phân số đó ta được kết quả là số nguyên.

Bài 73

Một hình chữ nhật có diện tích là $\frac{8}{15}(\text{cm}^2)$; chiều dài là $\frac{4}{3}(\text{cm})$. Tính chu vi hình chữ nhật đó.

Bài 74

Tìm tập hợp các số nguyên x để $\frac{5x}{3} : \frac{10x^2 + 5x}{21}$ có giá trị là số nguyên.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 70**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{-3}{5} \cdot x = \frac{4}{15} \\ & x = \frac{4}{15} : \frac{-3}{5} \\ & x = \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{-3} \\ & x = \frac{-4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \frac{3}{8} : x = \frac{-1}{2} \\ & x = \frac{3}{8} : \frac{-1}{2} \\ & x = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{-1} \\ & x = \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

Bài 71

$$\frac{\frac{4}{17} - \frac{4}{49} - \frac{4}{131}}{\frac{3}{17} - \frac{3}{49} - \frac{3}{131}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{49} - \frac{1}{131} \right)}{3 \cdot \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{49} - \frac{1}{131} \right)} = \frac{4}{3}$$

Bài 72

Gọi phân số lớn nhất cần tìm là $\frac{a}{b}$ ($a; b$ nguyên tố cùng nhau)

Ta có: $\frac{12}{35} : \frac{a}{b} = \frac{12b}{35a}$ là số nguyên, mà 12 và 35 nguyên tố cùng nhau.

Do đó: $12 : a ; b : 35$

Mặt khác $\frac{18}{49} : \frac{a}{b} = \frac{18b}{49a}$ là số nguyên, mà 18 và 49 nguyên tố cùng nhau.

Do đó $18 : a ; b : 49$

Để $\frac{a}{b}$ lớn nhất ta có $a = \text{UCLN}(12; 18) = 6$ và $b = \text{BCNN}(35; 49) = 245$.

Phân số cần tìm là $\frac{6}{245}$.

Bài 73

Chiều rộng của hình chữ nhật đó là: $\frac{8}{15} : \frac{4}{3} = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \text{ (cm)}$

Chu vi hình chữ nhật đó là:

$$\left(\frac{2}{5} + \frac{4}{3}\right) \cdot 2 = \left(\frac{6}{15} + \frac{20}{15}\right) \cdot 2 = \frac{52}{15} \text{ (cm)}.$$

Đáp số: $\frac{52}{15} \text{ cm}$.

Bài 74

$$\frac{5x}{3} : \frac{10x^2 + 5x}{21} = \frac{5x}{3} \cdot \frac{21}{10x^2 + 5x} = \frac{(5x) \cdot 21}{3 \cdot 5x \cdot (2x + 1)} = \frac{7}{2x + 1}$$

là số nguyên.

$$\text{Do đó } 7 : 2x + 1 \Leftrightarrow 2x + 1 \in \text{Ư}(7)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 \in \{1; -1; 7; -7\}$$

$$\Leftrightarrow 2x \in \{0; -2; 6; -8\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0; -1; 3; -4\}.$$

Tập hợp các số nguyên x cần tìm là $M = \{0; -1; 3; -4\}$.

§13. HỖN SỐ. SỐ THẬP PHÂN. PHẦN TRĂM

• Hỗn số: Ta biết $\frac{9}{5}$ có thể viết dưới dạng hỗn số như sau:

$$\frac{9}{5} = \underbrace{1}_{\text{phần nguyên của } \frac{9}{5}} + \underbrace{\frac{4}{5}}_{\text{phần phân số của } \frac{9}{5}} = 1\frac{4}{5} \text{ (đọc là một bốn phần năm)}$$

Các số $-3\frac{1}{5}; -2\frac{4}{7}; \dots$ cũng gọi là hỗn số. Chúng lần lượt là số đối

của $3\frac{1}{5}; 2\frac{4}{7}; \dots$

Chú ý: Khi viết một phân số âm dưới dạng hỗn số, ta chỉ cần viết số đối của nó dưới dạng hỗn số rồi đặt dấu “-” trước kết quả nhận được.

• Số thập phân

– Phân số thập phân là phân số mà mẫu là lũy thừa của 10. Các phân số này có thể viết dưới dạng số thập phân.

– Số thập phân gồm hai phần:

Phần số nguyên viết bên trái dấu phẩy;

Phần thập phân viết bên phải dấu phẩy.

Số chữ số của phần thập phân đúng bằng số chữ số 0 ở mẫu của phân số thập phân.

• Phần trăm

Những phân số có mẫu là 100 còn được viết dưới dạng phần trăm với kí hiệu %.

BÀI TẬP

Bài 75

Tính:

a) $\left(-2\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2}$

b) $\left(-1\frac{1}{3}\right) + 2\frac{1}{2}$

c) $0,5 - 1,4$

d) $2,9 - 14$

Bài 76:

Tìm x biết:

a) $2\frac{1}{5}x + x = \frac{32}{15}$

b) $x - 3\frac{1}{2}x = -\frac{20}{7}$

Bài 77

Tính nhanh:

a) $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \dots 1\frac{1}{999}$

b) $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{8} \cdot 1\frac{1}{15} \dots$ (98 thừa số)

Bài 78

Chứng tỏ rằng các phân số sau không thể viết được dưới dạng số thập phân

a) $\frac{7n+3}{35n}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$);

b) $\frac{9n+4}{18n}$ (Với $n \in \mathbb{N}^*$).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 75

$$a) \left(-2\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2} = \frac{-9}{4} + \frac{5}{2} = \frac{-9}{4} + \frac{10}{4} = \frac{1}{4}$$

$$b) \left(-1\frac{1}{3}\right) - 2\frac{1}{2} = \frac{-4}{3} - \frac{5}{2} = \frac{-8}{6} - \frac{15}{6} = \frac{-23}{6}$$

$$c) 0,5 - 1,4 = -0,9$$

$$d) 2,9 - 14 = -11,1$$

Bài 76

$$a) 2\frac{1}{5}x + x = \frac{32}{15}$$

$$\frac{11}{5}x + x = \frac{32}{15}$$

$$\frac{16}{5}x = \frac{32}{15}$$

$$x = \frac{32}{15} : \frac{16}{5}$$

$$x = \frac{32}{15} \cdot \frac{5}{16}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$b) x - 3\frac{1}{2}x = \frac{-20}{7}$$

$$\frac{2}{2}x - \frac{7}{2}x = \frac{-20}{7}$$

$$\frac{-5}{2}x = \frac{-20}{7}$$

$$x = \left(\frac{-20}{7}\right) : \left(\frac{-5}{2}\right)$$

$$x = \frac{-20}{7} \cdot \frac{2}{-5}$$

$$x = \frac{8}{7}$$

Bài 77

$$a) 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \dots 1\frac{1}{999} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{1000}{999}$$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 1000}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 999} = \frac{1000}{2} = 500.$$

$$b) 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{8} \cdot 1\frac{1}{15} \dots (98 \text{ thừa số})$$

$$= \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \dots \frac{99^2}{(98 \cdot 100)} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \dots 99^2}{(1 \cdot 3)(2 \cdot 4) \dots (98 \cdot 100)}$$

$$= \frac{(2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 99) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 99)}{(1 \cdot 2 \dots 98) \cdot (3 \cdot 4 \dots 100)} = \frac{99 \cdot 2}{1 \cdot 100} = \frac{99}{50}.$$

Bài 78

$$a) 7n + 3 : 7, 35n : 7$$

Tử không chia hết cho 7, mẫu chia hết cho 7 nên đến khi phân số

tối giản, mẫu vẫn chứa thừa số nguyên tố 7.

Do đó số $\frac{7n+3}{35n}$ không thể viết được dưới dạng số thập phân.

b) $9n + 4 \vdots 3$; $18n \vdots 3$

Tử không chia hết cho 3, mẫu chia hết cho 3 nên đến khi phân số tối giản, mẫu vẫn chứa thừa số nguyên tố 3.

Do đó số $\frac{9n+4}{18n}$ không thể viết được dưới dạng số thập phân.

§ 14. TÌM GIÁ TRỊ PHÂN SỐ CỦA MỘT SỐ CHO TRƯỚC

Quy tắc:

Muốn tìm $\frac{m}{n}$ của số b cho trước, ta tính $b \cdot \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$; $n \neq 0$).

BÀI TẬP

Bài 79

Tìm:

a) $\frac{4}{7}$ của 35;

b) $\frac{5}{13}$ của $\frac{26}{15}$;

c) $1\frac{1}{3}$ của 60kg;

d) $\frac{3}{5}$ của 80.000 đồng.

Bài 80

Một lớp học có 48 học sinh, trong đó $\frac{2}{3}$ là số học sinh nam. Tính số học sinh nữ.

Bài 81

Bạn Trinh đọc một cuốn sách dày 60 trang trong ba ngày. Ngày thứ nhất đọc $\frac{1}{3}$ số trang. Ngày thứ hai đọc $\frac{3}{5}$ số trang còn lại. Hỏi ngày thứ ba Trinh đọc bao nhiêu trang sách?

Bài 82

Một bể có hai vòi nước, vòi thứ nhất chảy 6 giờ thì bể đầy, vòi thứ hai chảy 8 giờ thì bể đầy. Bể đang cạn, nếu mở cả hai vòi cùng một lúc thì sau $1\frac{1}{2}$ giờ lượng nước có được trong bể bao nhiêu?

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 79**

a) $\frac{4}{7}$ của 35 là $35 \cdot \frac{4}{7} = 20$.

b) $\frac{5}{13}$ của $\frac{26}{15}$ là $\frac{26}{15} \cdot \frac{5}{13} = \frac{2}{3}$.

c) $1\frac{1}{3}$ của 60 kg là $60 \cdot 1\frac{1}{3} = 60 \cdot \frac{4}{3} = 80$ (kg).

d) $\frac{3}{5}$ của 80000 đồng là $80000 \cdot \frac{3}{5} = 48000$ (đồng).

Bài 80

Số học sinh nam lớp học có là:

$$48 \cdot \frac{2}{3} = 32 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh nữ lớp học có là:

$$48 - 32 = 16 \text{ (học sinh)}$$

Đáp số: 16 học sinh.

Bài 81

Số trang sách ngày thứ nhất Trinh đọc được là:

$$60 \cdot \frac{1}{3} = 20 \text{ (trang)}$$

Số trang sách còn lại:

$$60 - 20 = 40 \text{ (trang)}$$

Số trang sách ngày thứ hai Trinh đọc được là:

$$40 \cdot \frac{3}{5} = 24 \text{ (trang)}$$

Số trang sách ngày thứ ba Trinh đọc được là:

$$40 - 24 = 16 \text{ (trang)}$$

Đáp số: 16 trang.

Bài 82

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy vào được:

$$1 : 6 = \frac{1}{6} \text{ (bể)}$$

Trong 1 giờ vòi thứ hai chảy vào được:

$$1 : 8 = \frac{1}{8} \text{ (bể).}$$

Trong 1 giờ hai vòi cùng chảy vào được:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{7}{24} \text{ (bể).}$$

Sau $1\frac{1}{2}$ giờ hai vòi cùng chảy vào được:

$$\frac{7}{24} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{7}{24} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7}{16} \text{ (bể).}$$

Đáp số: $\frac{7}{16}$ bể.

§ 15. TÌM MỘT SỐ BIẾT GIÁ TRỊ MỘT PHẦN SỐ CỦA NÓ

Quy tắc:

Muốn tìm một số biết $\frac{m}{n}$ của nó bằng a, ta tính $a : \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$).

BÀI TẬP

Bài 83

Tìm một số, biết:

- a) $\frac{2}{7}$ của nó bằng 42; b) $\frac{3}{5}\%$ của nó bằng - 4,5.

Bài 84

$\frac{2}{5}$ số bi Lâm có là 30 viên. Hỏi bạn Lâm có bao nhiêu viên bi?

Bài 85

Ba tổ học sinh trồng 179 cây xung quanh vườn trường. Số cây tổ một trồng được so với tổ hai bằng $\frac{6}{11}$. Số cây của tổ một trồng được so với số cây tổ ba bằng $\frac{7}{10}$. Hỏi mỗi tổ trồng được bao nhiêu cây?

Bài 86

Một người mang một rổ cam đi bán. Sau khi bán $\frac{3}{7}$ số cam và 5 quả thì còn lại 31 quả. Tính số cam mang đi bán.

Bài 87

Tìm một số, biết rằng $\frac{3}{7}$ của số đó bằng $\frac{2}{5}$ của - 420.

Bài 88

Các phường 1, 2, 3 có 24.000 dân. Tính số dân của mỗi phường, biết rằng $\frac{2}{3}$ số dân ở phường 1 bằng 50% số dân ở phường 2 và bằng 0,4 số dân ở phường 3.

Bài 89

Tổng số đo chiều dài của ba tấm vải là 224m. Nếu cắt $\frac{3}{7}$ tấm vải thứ nhất, $\frac{1}{5}$ tấm vải thứ hai và $\frac{2}{5}$ tấm vải thứ ba thì phần còn lại của ba tấm vải dài bằng nhau. Tính chiều dài của mỗi tấm vải.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 83**

a) Số cần tìm là: $42 : \frac{2}{7} = 42 \cdot \frac{7}{2} = 147.$

b) Số cần tìm là: $-45 : \frac{3}{5}\% = -7500.$

Bài 84

Số bi bạn Lâm có là:

$$30 : \frac{2}{5} = 30 \cdot \frac{5}{2} = 75 \text{ (viên bi).}$$

Đáp số: 75 viên bi.

Bài 85

Phần số chỉ số cây tổ hai trồng bằng $\frac{11}{6}$ (số cây tổ một trồng).

Phần số chỉ số cây tổ ba trồng bằng $\frac{10}{7}$ (số cây tổ một trồng).

Phần số chỉ 179 cây là:

$$\frac{11}{6} + \frac{10}{7} + 1 = \frac{77}{42} + \frac{60}{42} + \frac{42}{42} = \frac{179}{42} \text{ (số cây tổ một trồng).}$$

Số cây tổ một trồng là: $179 : \frac{179}{42} = 42 \text{ (cây).}$

Số cây tổ hai trồng là $42 \cdot \frac{11}{6} = 77$ (cây).

Số cây tổ ba trồng là $42 \cdot \frac{10}{7} = 60$ (cây).

Đáp số:

Tổ một trồng 42 cây.

Tổ hai trồng 77 cây.

Tổ ba trồng 60 cây.

Bài 86

Phân số chỉ $31 + 5 = 36$ quả cam bằng:

$$1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \text{ (số cam)}$$

Số cam mang đi bán là $36 : \frac{4}{7} = 63$ (quả).

Đáp số: 63 quả.

Bài 87

$\frac{3}{7}$ của số đó bằng $(-420) \cdot \frac{2}{5} = -168$.

Số đó là $(-168) : \frac{3}{7} = -392$

Đáp số: - 392.

Bài 88

$$50\% = \frac{1}{2}; 0,4 = \frac{2}{5}$$

Phân số chỉ số dân phường 2 bằng:

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{2} = \frac{4}{5} \text{ (số dân phường 3)}$$

Phân số chỉ số dân phường 1 bằng:

$$\frac{2}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \text{ (số dân phường 3)}$$

Phân số chỉ 24000 dân là:

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + 1 = \frac{12}{5} \text{ (số dân phường 3)}$$

Số dân phường 3 có là:

$$24000 : \frac{12}{5} = 10000 \text{ (dân)}$$

Số dân phường 1 có là:

$$10000 \cdot \frac{3}{5} = 6000 \text{ (dân)}$$

Số dân phường 2 có là:

$$10000 \cdot \frac{4}{5} = 8000 \text{ (dân).}$$

Đáp số:

Phường 1: 6000 dân;

Phường 2: 8000 dân;

Phường 3: 10000 dân.

Bài 89

Phần số chỉ số vải còn lại của tấm thứ nhất là:

$$1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \text{ (tấm thứ nhất)}$$

Phần số chỉ số vải còn lại của tấm thứ hai là:

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \text{ (tấm thứ hai)}$$

Phần số chỉ số vải còn lại của tấm thứ ba là:

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{ (tấm thứ ba)}$$

Phần số chỉ số vải của tấm thứ hai bằng:

$$\frac{4}{7} : \frac{4}{5} = \frac{5}{7} \text{ (tấm thứ nhất)}$$

Phần số chỉ số vải của tấm thứ ba bằng:

$$\frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{20}{21} \text{ (tấm thứ nhất)}$$

Phần số chỉ 224m vải là:

$$1 + \frac{5}{7} + \frac{20}{21} = \frac{21 + 15 + 20}{21} = \frac{56}{21} = \frac{8}{3} \text{ (tấm thứ nhất).}$$

Tấm thứ nhất dài:

$$224 : \frac{8}{3} = 84 \text{ (m)}$$

Tấm thứ hai dài:

$$84 \cdot \frac{5}{7} = 60 \text{ (m)}$$

Tấm thứ ba dài:

$$84 \cdot \frac{20}{21} = 80 \text{ (m)}$$

Đáp số:

Tấm 1: 84m

Tấm 2: 60m

Tấm 3: 80m.

§ 16. TÌM TỈ SỐ CỦA HAI SỐ

• Tỉ số của hai số

Thương trong phép chia số a cho số b ($b \neq 0$) gọi là tỉ số của a và b.

Tỉ số của a và b kí hiệu là $a : b$ (hoặc là $\frac{a}{b}$) trong đó a và b có thể là số nguyên, phân số, hỗn số,...

Khái niệm tỉ số thường dùng khi nói về thương của hai đại lượng (cùng loại và cùng đơn vị đo)

• Tỉ số phần trăm

Trong thực hành, thường dùng tỉ số dưới dạng tỉ số phần trăm với kí hiệu % thay cho $\frac{1}{100}$

Quy tắc:

Muốn tìm tỉ số phần trăm của hai số a và b, ta nhân a với 100 rồi chia cho b và viết kí hiệu % vào kết quả $\frac{a \cdot 100}{b} \%$.

BÀI TẬP

Bài 90

Lớp 6A có 48 học sinh trong đó có 30 học sinh nam.

a) Tính tỉ số giữa số nam và nữ.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa số nữ và số học sinh cả lớp.

Bài 91

Tỉ số của hai số là $\frac{5}{7}$. Tổng của hai số đó bằng 60. Tìm hai số đó.

Bài 92

Tỉ số của hai số là $1\frac{3}{5}$. Hiệu của hai số là 36. Tìm hai số đó.

Bài 93

Tỉ số của hai số a và b là $\frac{3}{4}$, tỉ số của hai số b và c là $\frac{4}{7}$

Tìm: a, b, c biết $c - a = 28$.

Bài 94

Tỉ số của hai số a và b là $\frac{3}{5}$, tỉ số của hai số b và c là $\frac{15}{11}$, tỉ số của hai số c và d là $\frac{11}{7}$. Tìm tỉ số của hai số d và a.

Bài 95

Tỉ số của hai số bằng 3 : 5. Nếu thêm 5 đơn vị vào số thứ nhất thì tỉ số của chúng sẽ là 7 : 10.

Tìm hai số đó.

Bài 96

Tìm hai số, biết tỉ số của chúng bằng 3 : 7 và tích của chúng bằng 189.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 90**

a) Số học sinh nữ có $48 - 30 = 18$ (học sinh).

Tỉ số giữa số nam và nữ $30 : 18 = \frac{5}{3}$.

b) Tỉ số phần trăm giữa số nữ và số học sinh cả lớp là:

$$18 : 48 = \frac{1800}{48} \% = 37,5\%.$$

Bài 91

Phân số chỉ 60 đơn vị bằng $1 + \frac{5}{7} = \frac{12}{7}$ (số thứ hai).

Số thứ hai là $60 : \frac{12}{7} = 35$.

Số thứ nhất là $60 - 35 = 25$.

Bài 92

$$1\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

Phân số chỉ 36 đơn vị bằng $\frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$ (số thứ hai).

Số thứ hai là $36 : \frac{3}{5} = 60$.

Số thứ nhất là $60 + 36 = 96$.

Bài 93

Theo đầu bài ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}, \frac{b}{c} = \frac{4}{7}, c - a = 28.$$

Do đó:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} \text{ và } c - a = 28$$

$$\text{hay } \frac{a}{c} = \frac{3}{7} \text{ và } c - a = 28.$$

Phân số chỉ 28 đơn vị là $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ (số c).

Số c là $28 : \frac{4}{7} = 49$.

Số a là $49 - 28 = 21$.

Số b là $\frac{4}{7} \cdot 49 = 28$.

Bài 94

Theo đầu bài ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}, \frac{b}{c} = \frac{15}{11}, \frac{c}{d} = \frac{11}{7}.$$

Do đó:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{11} \cdot \frac{11}{7}.$$

$$\text{nên: } \frac{a}{d} = \frac{9}{7} \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{7}{9}.$$

Vậy tỉ số của d và a là $\frac{7}{9}$.

Bài 95

Gọi hai số cần tìm lần lượt là a và b ($b \neq 0$). Theo đầu bài ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \text{ và } \frac{a+5}{b} = \frac{7}{10}.$$

$$\text{Ta có } \frac{a}{b} + \frac{5}{b} = \frac{7}{10}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{5}{b} = \frac{7}{10} \Leftrightarrow \frac{5}{b} = \frac{7}{10} - \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{b} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow b = 5 \cdot 10 \Rightarrow b = 50.$$

$$\text{Do đó } a = \frac{3}{5} \cdot 50 = 30.$$

Bài 96

Gọi hai số cần tìm lần lượt là a và b .

Theo đầu bài ta có: $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ và $a \cdot b = 189$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$)

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{7} \text{ nên } a = 3x, b = 7x \text{ (} x \in \mathbb{Z}, x \neq 0 \text{)}.$$

$$\text{Do đó } a \cdot b = 189$$

$$3x \cdot 7x = 189$$

$$x \cdot x = 189 : (3 \cdot 7)$$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = (\pm 3)^2$$

$$x = \pm 3.$$

$$\text{Nếu } x = 3 \text{ thì } a = 3 \cdot 3 = 9, b = 7 \cdot 3 = 21.$$

$$\text{Nếu } x = -3 \text{ thì } a = 3 \cdot (-3) = -9, b = 7 \cdot (-3) = -21.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 1

Thực hiện phép tính

a) $(\frac{1}{24} - \frac{5}{16}) : \frac{-3}{8} + 1$; b) $-\frac{5}{7} : (25 - 24\frac{4}{7}) + 15\frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{23}$;

c) $(\frac{1}{49} - \frac{1}{3^2}) \cdot (\frac{1}{49} - \frac{1}{4^2}) \dots (\frac{1}{49} - \frac{1}{49^2})$;

d) $\frac{1}{999 \cdot 100} - \frac{1}{998 \cdot 999} - \frac{1}{997 \cdot 998} - \dots - \frac{1}{2 \cdot 1}$;

e) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{2003})$;

f) $(\frac{1}{2^2} - 1) \cdot (\frac{1}{3^2} - 1) \cdot (\frac{1}{4^2} - 1) \dots (\frac{1}{100^2} - 1)$;

g) $\frac{\frac{1}{17} + \frac{4}{19} - \frac{4}{2111}}{\frac{1}{17} + \frac{4}{19} - \frac{4}{2111}} - \frac{\frac{1}{123} - \frac{1}{19} + \frac{1}{371} - \frac{1}{5}}{-\frac{1}{123} + \frac{1}{19} - \frac{1}{371} + \frac{1}{5}} + 1$

Bài 2

Tìm x biết:

a) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{5} = \frac{-4}{5}$;

b) $(x - \frac{2}{3}) : \frac{-3}{7} = \frac{-9}{14}$;

c) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}x = \frac{-18}{25}$.

Bài 3

Cho tập hợp M.

$$M = \left\{ \frac{7}{5}; \frac{4}{13}; \frac{2}{13}; \frac{1}{18}; \frac{7}{3}; \frac{1}{13}; \frac{4}{5} \right\}.$$

Tìm $a \in M, b \in M, a \neq b$ để tổng $a + b$ có:

a) Giá trị nhỏ nhất;

b) Giá trị lớn nhất.

Bài 4

Cho $M = \frac{-(1 + 2 + 3 + \dots + 9)}{11 + 12 + 13 + \dots + 19}$.

Hãy xóa một số hạng ở tử và xóa một số hạng ở mẫu của M để được K có giá trị vẫn bằng M.

Bài 5

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Chứng tỏ rằng: $\frac{2002a + c}{2002b + d} < \frac{c}{d}$.

Bài 6

Tìm phân số $\frac{105}{140}$ biết rằng ƯCLN $(a; b) = 19$.

Bài 7

a) Cho $M = \frac{5}{11} + \frac{5}{12} + \frac{5}{13} + \frac{5}{14}$.

Chứng tỏ rằng: $1 < M < 2$.

b) Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và

$$X = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b}.$$

Chứng tỏ rằng $1 < X < 2$.

Bài 8

Tìm tập hợp các số nguyên x để:

a) $\frac{x-25}{x+4}$ là một số nguyên.

b) $\frac{3x}{x-2}$ là một số nguyên.

Bài 9

Một số đoạn dây có cùng độ dài $\frac{2}{3}$ m. Với một cái kéo cắt dây, bạn làm thế nào để có một đoạn dây dài $\frac{1}{2}$ m?

Bài 10

Cho $M = \frac{2003a + b}{2003a - b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq b$; $0 \leq b \leq 9$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của M .

Bài 11

Tìm số $\overline{ab}$ để $\frac{\overline{ab}}{a+b}$ đạt:

a) Giá trị lớn nhất;

b) Giá trị nhỏ nhất.

Bài 12

Cho $A = \frac{-2}{1} \cdot \frac{-4}{3} \cdot \frac{-6}{5} \dots \frac{-200}{199}$.

Chúng tỏ rằng:

a) $A > 14$; b) $A < 20$.

Bài 13

Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Chúng tỏ rằng: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ có giá trị là số không thuộc

$\mathbb{Z}$.

Bài 14

Tìm x biết:

a) $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{98.99.100} \right) x = -3$;

b) $\left(\frac{\frac{2000}{1} + \frac{1999}{2} + \frac{1998}{3} + \dots + \frac{1}{2000} + 2000}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2000}} \right) x = \frac{-1}{5}$.

c) $\left(\frac{\frac{2000}{1} + \frac{1999}{2} + \dots + \frac{1}{2000}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2001}} \right) : x = \frac{-2001}{2002}$.

Bài 15

Tổng $\frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99}$ bằng phân số $\frac{a}{b}$.

Chúng minh rằng $a : 149$.

Bài 16

Cho $m = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98} \right) \cdot 2 \cdot 3 \dots 98$.

Chúng minh rằng $m : 99$.

Bài 17

Cho $A = \frac{10^{2002} + 1}{10^{2003} + 1}$, $B = \frac{10^{2003} + 1}{10^{2004} + 1}$. So sánh A và B.

Bài 18

Tìm một số, biết rằng 0,5 của số đó bằng $\frac{3}{7}$ của 420.

Bài 19

Trong giờ ra chơi lớp 6A có số học sinh trong lớp bằng 5 lần số học sinh ngoài lớp. Sau đó 2 học sinh vào trong lớp lúc này số học sinh ở trong lớp gấp 7 lần số học sinh ở ngoài lớp. Hỏi lớp 6A có bao nhiêu học sinh? Biết rằng buổi học hôm ấy lớp học không có học sinh nào vắng mặt.

Bài 20

Bốn bạn Hạnh, Trí, Bảo, Chi chung nhau mua một quả bóng đá. Hạnh góp $\frac{1}{5}$ tổng số tiền. Trí góp $\frac{1}{5}$ số tiền mà các bạn đã góp. Bảo góp $\frac{1}{7}$ số tiền mà các bạn đã góp. Chi góp 30.500 đồng. Tính giá tiền quả bóng.

Bài 21

Tài có hơn Ngân 40.000 đồng, Tài mua vở hết 25.000 đồng, Ngân mua bút và thước kẻ hết 15.000 đồng thì số tiền còn lại của Ngân bằng $\frac{1}{7}$ số tiền còn lại của Tài. Hỏi lúc đầu mỗi người có bao nhiêu tiền?

Bài 22

Tỉ số học sinh hai lớp 6A và 6B là $\frac{2}{3}$. Nếu tăng số học sinh lớp 6A thêm 8 học sinh và lớp 6B thêm 4 học sinh thì tỉ số học sinh lớp 6A và lớp 6B là $\frac{3}{4}$. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

Bài 23

Tìm ba số có tổng bằng 420, biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{11}$ số thứ hai và bằng $\frac{2}{3}$ số thứ ba.

Bài 24

Khối lớp 6 của quận X đã chọn được học sinh giỏi Toán, Văn, Ngoại

ngữ cấp quận. Biết rằng số học sinh giỏi toán bằng $\frac{3}{7}$ số học sinh giỏi Văn bằng 0,4 số học sinh giỏi cấp quận, số học sinh giỏi Ngoại ngữ là 12 học sinh. Tính số học sinh giỏi cấp quận của khối lớp 6.

Bài 25

Một trường tổ chức trồng cây: lớp thứ nhất trồng được 18 cây và thêm $\frac{1}{11}$ số cây còn lại. Lớp thứ hai trồng được 36 cây và thêm $\frac{1}{11}$ số cây còn lại. Tiếp tục lớp thứ ba trồng được 54 cây và thêm $\frac{1}{11}$ số cây còn lại... Cứ như thế tiếp tục đến lớp cuối cùng trồng hết số cây và số cây trồng được của mỗi lớp bằng nhau.

Hỏi trường đó đã trồng được bao nhiêu cây?

GỢI Ý

Bài 1

f)

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\dots\left(\frac{1}{100^2} - 1\right) = \\
 & = \frac{1 - 2^2}{2^2} \cdot \frac{1 - 3^2}{3^2} \dots \frac{1 - 100^2}{100^2} \\
 & = \frac{-(2^2 - 1^2)}{2^2} \cdot \frac{-(3^2 - 1^2)}{3^2} \dots \frac{-(100^2 - 1^2)}{100^2} \\
 & = -\left(\frac{2^2 - 1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1^2}{3^2} \dots \frac{100^2 - 1^2}{100^2}\right) \\
 & = -\left[\frac{(2+1)(2-1)}{2^2} \cdot \frac{(3+1)(3-1)}{3^2} \dots \frac{(100+1)(100-1)}{100^2}\right] \\
 & = -\left(\frac{3 \cdot 1}{2^2} \cdot \frac{4 \cdot 2}{3^2} \dots \frac{101 \cdot 99}{100^2}\right) = -\frac{(3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 101) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 99)}{(2 \cdot 3 \dots 100) \cdot (2 \cdot 3 \dots 100)} \\
 & = -\frac{101 \cdot 1}{2 \cdot 100} = -\frac{101}{200}.
 \end{aligned}$$

Bài 3

Ta có: $\frac{1}{18} < \frac{1}{13} < \frac{2}{13} < \frac{4}{13} < \frac{4}{5} < \frac{7}{5} < \frac{7}{3}$.

- a) Do đó giá trị nhỏ nhất của $a + b$ là: $\frac{1}{18} + \frac{1}{13} = \frac{13+18}{18 \cdot 13} = \frac{31}{234}$.
- b) Giá trị lớn nhất của $a + b$ là: $\frac{7}{5} + \frac{7}{3} = \frac{21+35}{3 \cdot 5} = \frac{56}{15}$.

Bài 7

- b) Chứng minh rằng $1 < X < 2$

Ta có $a, b, c, d > 0$ nên

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}$$

$$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}$$

$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{a+c}$$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b}$$

$$\text{Do vậy } \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} < X < \frac{a+c}{a+c} + \frac{b+d}{b+d}$$

$$\Rightarrow 1 < X < 2.$$

Bài 9

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} : 4 = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Bài 11

$$M = \frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{10a+b}{a+b} = \frac{9a+a+b}{a+b} = \frac{9a}{a+b} + 1 = \frac{9}{1+\frac{b}{a}} + 1$$

$$\text{a) } M \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \frac{9}{1+\frac{b}{a}} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} \text{ nhỏ nhất}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow b = 0 \text{ và } a = 1; 2; \dots; 9.$$

Số cần tìm là 10; 20; ...; 80 hoặc 90.

$$\text{b) } M \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{9}{1+\frac{b}{a}} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} \text{ lớn nhất}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow b = 9; a = 1.$$

Số cần tìm là 19.

Bài 13

Chứng tỏ rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2.$$

Bài 14

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{2000}{1} + \frac{1999}{2} + \frac{1998}{3} + \dots + \frac{1}{2000} + 2000 = \\ & = \left(\frac{2000}{1} + 1\right) + \left(\frac{1999}{2} + 1\right) + \dots + \left(\frac{1}{2000} + 1\right) \\ & = \frac{2001}{1} + \frac{2001}{2} + \dots + \frac{2001}{2000} = 2001 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2000}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{2000}{1} + \frac{1999}{2} + \dots + \frac{1}{2000} = \\ & = \frac{2001-1}{1} + \frac{2001-2}{2} + \dots + \frac{2001-2000}{2000} \\ & = \left(\frac{2001}{1} + \frac{2001}{2} + \frac{2001}{3} + \dots + \frac{2001}{2000}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{2000}{2000}\right) \\ & = 2001 + 2001\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2000}\right) - 2000 \\ & = 1 + 2001\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2000}\right) \\ & = 2001\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2000} + \frac{1}{2001}\right). \end{aligned}$$

Bài 15

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{99} = \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{98}\right) + \dots \\ & \dots + \left(\frac{1}{74} + \frac{1}{75}\right) = \frac{149}{50 \cdot 99} + \frac{149}{51 \cdot 98} + \dots + \frac{149}{74 \cdot 75} \quad (*) \\ &= \frac{149(b_1 + b_2 + \dots + b_{25})}{50 \cdot 51 \dots 99} \end{aligned}$$

($b_1; b_2; \dots b_{25}$ là các thừa số phụ của các phân số ở (*))

149 là số nguyên tố; $149 > 99$.

Bài 17

$$10A = \frac{10^{2003} + 10}{10^{2003} + 1} = \frac{10^{2003} + 1 + 9}{10^{2003} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2003} + 1}$$

$$10B = \frac{10^{2004} + 10}{10^{2004} + 1} = \frac{10^{2004} + 1 + 9}{10^{2004} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2004} + 1}$$

Ta có $10A > 10B$ (vì $\frac{9}{10^{2003} + 1} > \frac{9}{10^{2004} + 1}$).

Do đó $A > B$.

Bài 19

Số học sinh trong lớp gấp 5 lần số học sinh ở ngoài lớp nên số học sinh cả lớp bằng 6 lần số học sinh ở ngoài lớp. Do vậy số học sinh ở ngoài lớp bằng $\frac{1}{6}$ số học sinh cả lớp. Khi có thêm 2 học sinh vào lớp, số học sinh trong lớp bằng 7 lần số học sinh ở ngoài lớp nên số học sinh cả lớp bằng 8 lần số học sinh ở ngoài lớp. Do đó số học sinh ở ngoài lớp bằng $\frac{1}{8}$ số học sinh cả lớp.

Phân số chỉ 2 học sinh là:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24} \text{ (số học sinh cả lớp)}$$

Số học sinh lớp 6A có là:

$$2 : \frac{1}{24} = 48 \text{ (học sinh)}$$

Bài 20

Trí góp $\frac{1}{5}$ số tiền các bạn đã góp, do đó Trí góp $\frac{1}{6}$ số tiền quả bóng.

Bài 21

Số tiền Tài tiêu hơn Ngân:

$$25000 - 15000 = 10000 \text{ đồng}$$

Lúc bấy giờ Tài còn hơn Ngân:

$$40000 - 10000 = 30000 \text{ đồng}$$

Phân số chỉ 30000 đồng là:

$$1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \text{ (số tiền còn lại của Tài)}$$

Số tiền Tài còn là:

$$30000 : \frac{6}{7} = 35000 \text{ đồng}$$

Số tiền Tài có là:

$$35000 \text{ đồng} + 25000 \text{ đồng} = 60000 \text{ đồng}$$

Bài 25

Xét hai lớp cuối cùng là lớp thứ $n - 1$ và thứ n

Lớp thứ $n - 1$ trồng x cây và $\frac{1}{11}$ số cây còn lại hay trồng được $x + \frac{1}{11}y$ (cây)

Lớp thứ n là lớp cuối cùng trồng nốt $\frac{10}{11}y$ (cây) hay theo quy luật của bài toán trồng được $x + 18$ (cây).

Vì số cây trồng của mỗi lớp bằng nhau nên có:

$$x + \frac{1}{11}y = x + 18 \text{ suy ra } \frac{1}{11}y = 18 \text{ hay } y = 18 \cdot 11 = 198$$

$$\text{Lớp thứ } n \text{ trồng được } \frac{10}{11}y = \frac{10}{11} \cdot 198 = 180 \text{ (cây).}$$

Các lớp trồng được số cây bằng nhau nên lớp thứ nhất cũng trồng được 180 (cây).

$$\text{Phân số chỉ } 180 - 18 = 162 \text{ cây bằng } \frac{1}{11} \text{ (số cây còn lại)}$$

$$\text{Số cây còn lại lúc này là } 162 : \frac{1}{11} = 1782 \text{ (cây).}$$

Số cây trường đó trồng là:

$$1782 + 18 = 1800 \text{ (cây).}$$

PHẦN HÌNH HỌC

CHƯƠNG I

ĐOẠN THẲNG

§ 1. ĐIỂM - ĐƯỜNG THẲNG

1. Điểm:

Dấu chấm nhỏ trên trang giấy là hình ảnh của điểm. Người ta dùng các chữ cái in hoa để đặt tên cho các điểm.

• A

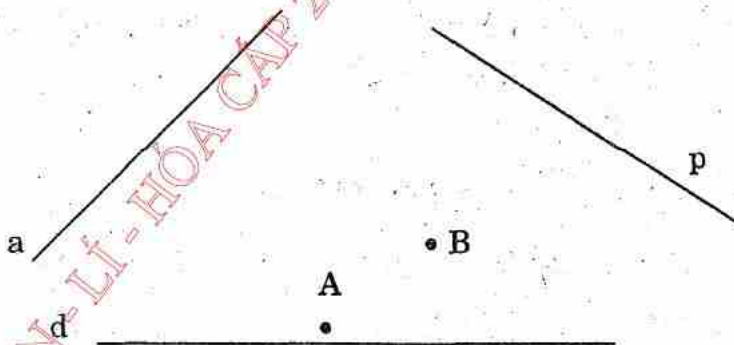
• B

• C

2. Đường thẳng:

Sợi chỉ căng thẳng, mép bảng,... cho ta hình ảnh của đường thẳng. Đường thẳng không bị giới hạn về hai phía.

Người ta dùng các chữ cái in thường a, b,..., m, p,... để đặt tên cho các đường thẳng.



3. Điểm thuộc đường thẳng. Điểm không thuộc đường thẳng:

- Điểm A thuộc đường thẳng d và kí hiệu là $A \in d$.
- Điểm B không thuộc đường thẳng d và kí hiệu là $B \notin d$.

BÀI TẬP

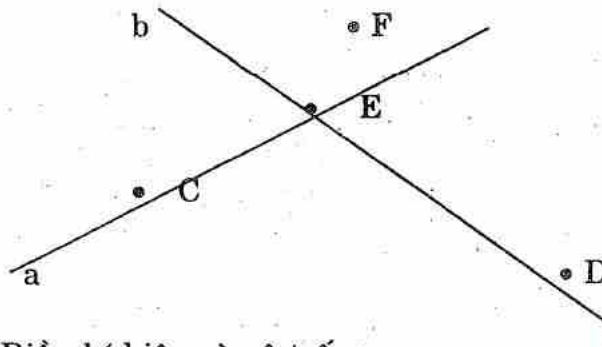
Bài 1

Vẽ hình theo cách diễn đạt bằng lời:

- a) Điểm A nằm trên đường thẳng m
- b) Điểm B nằm ngoài đường thẳng n
- c) Đường thẳng p đi qua hai điểm C, D
- d) Ba điểm khác A mà thuộc đường thẳng m.

Bài 2

Cho hình vẽ sau:



Điền kí hiệu vào ô trống:

$D \square a$; $D \square b$; $C \square b$;

$E \square a$; $E \square b$; $F \square a$

Bài 3

Cho điểm I và bốn đường thẳng a, b, c, d. Gọi m là số đường thẳng đã cho đi qua I.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của m.

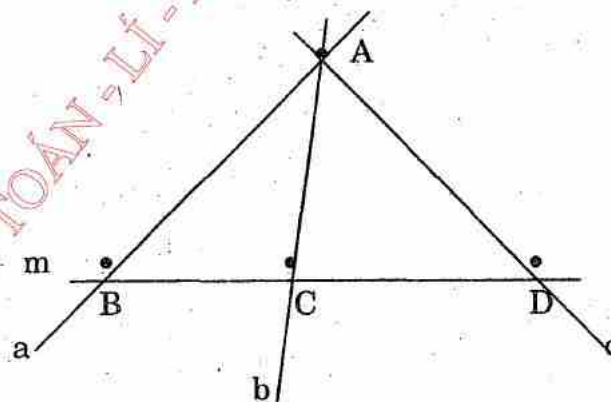
Bài 4

Cho 42 đường thẳng và điểm M. Gọi x và y lần lượt là số đường thẳng đã cho đi qua M và không đi qua M.

Tìm x và y, biết rằng: $x = 5y$.

Bài 5

Xem hình vẽ bên để trả lời các câu hỏi sau:



- a) Điểm A thuộc đường thẳng nào? Điểm B thuộc đường thẳng nào?

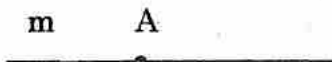
b) Những đường thẳng nào đi qua điểm A? Những đường thẳng nào đi qua điểm B?

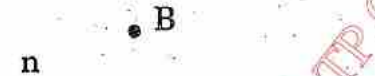
c) Những điểm nào nằm trên đường thẳng m?

d) Những điểm nào nằm ngoài đường thẳng a?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1

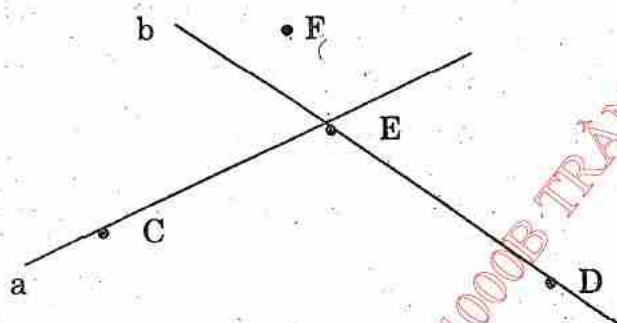
a) 

b) 

c) 

d) 

Bài 2



$D \notin a$; $D \in b$; $C \notin b$
 $E \in a$; $E \in b$; $F \notin a$

Bài 3

• Giá trị lớn nhất của m là 4, nếu 4 đường thẳng a, b, c, d cùng đi qua điểm I.

• Giá trị nhỏ nhất của m là 0, nếu không có đường thẳng nào đi qua điểm I.

Bài 4

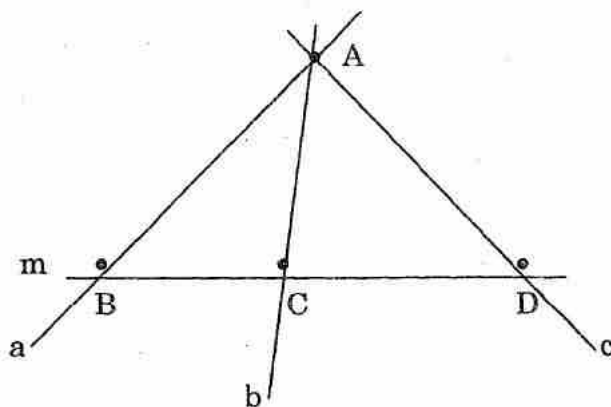
Ta có: $x + y = 42$ và $x = 5y$

Do đó: $5y + y = 42$

$6y = 42 \Rightarrow y = 7$

Với $y = 7$ thì $x = 5 \cdot 7 = 35$

Vậy: $x = 35, y = 7$.

Bài 5

a) Điểm A thuộc những đường thẳng a, b, c

Kí hiệu: $A \in a, A \in b, A \in c$

Điểm B thuộc những đường thẳng a, m

Kí hiệu: $B \in a, B \in m$

b) Những đường thẳng đi qua điểm A là a, b, c.

Kí hiệu: $A \in a, A \in b, A \in c$

Những đường thẳng đi qua điểm B là a, m.

Kí hiệu: $B \in a, B \in m$

c) Các điểm nằm trên đường thẳng m là B, C, D.

Kí hiệu: $B \in m, C \in m, D \in m$

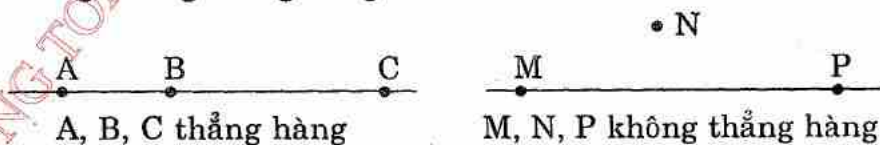
d) Những điểm nằm ngoài đường thẳng a là C, D.

Kí hiệu: $C \notin a, D \notin a$

§2. BA ĐIỂM THẲNG HÀNG**1. Thế nào là ba điểm thẳng hàng?**

. Khi ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng, ta nói chúng thẳng hàng.

. Khi ba điểm M, N, P không cùng thuộc bất kì đường thẳng nào, ta nói chúng không thẳng hàng.

**2. Quan hệ giữa ba điểm thẳng hàng:**

Với ba điểm A, B, C như hình trên ta có thể nói:

– Hai điểm B và C nằm cùng phía đối với điểm A;

- Hai điểm A và B nằm cùng phía đối với điểm C;
- Hai điểm A và C nằm khác phía đối với điểm B;
- Điểm B nằm giữa hai điểm A và C.

Nhận xét:

Trong ba điểm thẳng hàng, có một điểm và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại.

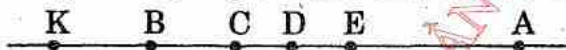
BÀI TẬP**Bài 6**

Vẽ hình theo cách diễn đạt bằng lời:

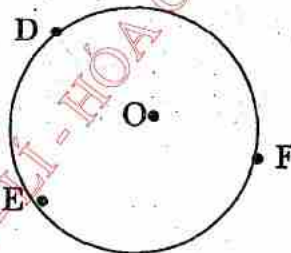
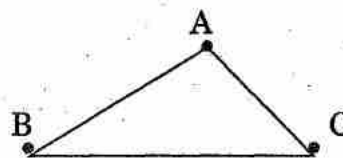
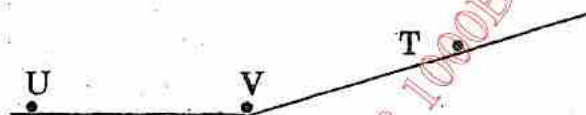
- a) Điểm C nằm giữa hai điểm A và B; điểm B nằm giữa hai điểm C và D.
- b) Điểm A nằm giữa hai điểm B và C; điểm A nằm giữa hai điểm E và F; ba điểm A, B, E không thẳng hàng.

Bài 7

- a) Tìm những điểm nằm giữa hai điểm A và B ở hình vẽ sau:



- b) Ở các hình vẽ sau có điểm nào nằm giữa hai điểm khác hay không?

**Bài 8**

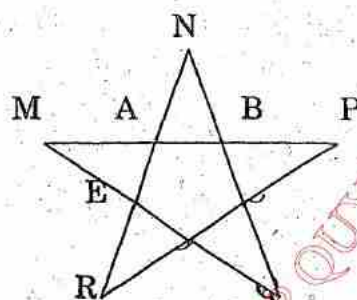
Trong các câu nói về ba điểm thẳng hàng sau, câu nào sai?

- a) Điểm P nằm giữa M, N và điểm M nằm giữa N, P.
- b) Điểm M nằm giữa N, P và điểm P nằm giữa M, N.
- c) Điểm N nằm giữa M, P và điểm N nằm giữa P, M.

Bài 9

Xem hình vẽ bên và gọi tên:

- a) Một số bộ ba điểm thẳng hàng
 b) Tất cả các bộ bốn điểm thẳng hàng
 c) Hai bộ ba điểm không thẳng hàng.

**Bài 10**

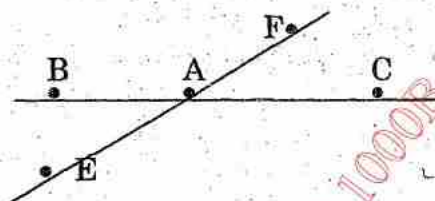
Cho 2003 điểm thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu điểm nằm giữa hai điểm khác?

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 6**

a)



b)

**Bài 7**

- a) Những điểm nằm giữa hai điểm A và B là: C, D, E.
 b) Ở các hình đã cho không có điểm nào nằm giữa hai điểm khác. Vì các bộ ba điểm: U, V, T; A, B, C; D, E, F không thẳng hàng.

Bài 8

- a) Sai; b) Sai; c) đúng.

Bài 9

- a) Một số bộ ba điểm thẳng hàng là:

A, B, M; A, B, P; A, E, R;...

- b) Các bộ bốn điểm thẳng hàng là:

M, A, B, P; M, E, D, Q;

N, B, C, Q; P, C, D, R.

N, A, E, R;

Bài 10

Với 2003 điểm thẳng hàng có $2003 - 2 = 2001$ điểm nằm giữa hai điểm khác.

§3. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA HAI ĐIỂM

§4. THỰC HÀNH: TRỒNG CÂY THẲNG HÀNG

1. Vẽ đường thẳng qua hai điểm A, B:

- Đặt cạnh thước đi qua hai điểm A và B.
- Dùng đầu chì vạch theo cạnh thước.

Nhận xét: Có một đường thẳng và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm A và B.

2. Tên đường thẳng:



Đường thẳng AB hoặc đường thẳng BA.



Đường thẳng xy hoặc đường thẳng yx.

3. Đường thẳng trùng nhau, cắt nhau, song song:

- Hai đường thẳng có hai điểm chung, ta nói hai đường thẳng đó trùng nhau.
- Hai đường thẳng chỉ có một điểm chung, ta nói hai đường thẳng đó cắt nhau.
- Hai đường thẳng không có điểm chung nào, ta nói hai đường thẳng đó song song với nhau.

Chú ý:

- Hai đường thẳng không trùng nhau còn được gọi là hai đường thẳng phân biệt.
- Hai đường thẳng phân biệt hoặc chỉ có một điểm chung hoặc không có điểm chung nào.

BÀI TẬP

Bài 11

- Cho 20 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm kẻ một đường thẳng. Tính số đường thẳng tạo thành.
- Nếu trong 20 điểm đó có đúng ba điểm thẳng hàng thì số lượng đường thẳng tạo thành là bao nhiêu?

Bài 12

- Vẽ ba đường thẳng sao cho số giao điểm của chúng là 1; 3.
- Có thể có bao nhiêu giao điểm của các đường thẳng nếu có bốn đường thẳng cắt nhau đôi một?

Bài 13

Cho 41 điểm trong đó có đúng 7 điểm thẳng hàng, ngoài ra không còn ba điểm nào thẳng hàng. Kẻ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Bài 14

a) Cho 201 đường thẳng trong đó bất kì hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Tính số giao điểm có được.

b) Thay 201 bởi n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) thì số giao điểm có được là bao nhiêu?

Bài 15

a) Cho n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đường thẳng. Biết rằng có tất cả 55 đường thẳng. Tính n .

b) Cho n đường thẳng trong đó bất kì hai đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có ba đường thẳng nào cùng đi qua một điểm. Biết rằng số giao điểm của các đường thẳng đó là 210. Tính n .

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 11**

a) Kẻ từ một điểm bất kì với các điểm còn lại được 19 đường thẳng; với 20 điểm nên có $19 \cdot 20 = 380$ đường thẳng. Nhưng mỗi đường thẳng đã được tính hai lần.

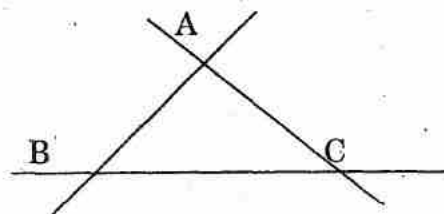
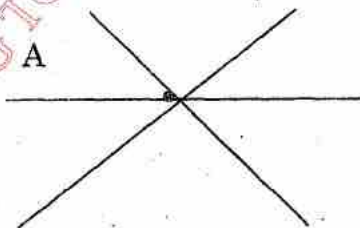
Do vậy, số lượng đường thẳng có là $380 : 2 = 190$ đường thẳng.

b) Giả sử không có ba điểm nào thẳng hàng thì có 190 đường thẳng. Vì có đúng ba điểm thẳng hàng nên số lượng đường thẳng giảm đi: $3 - 1 = 2$

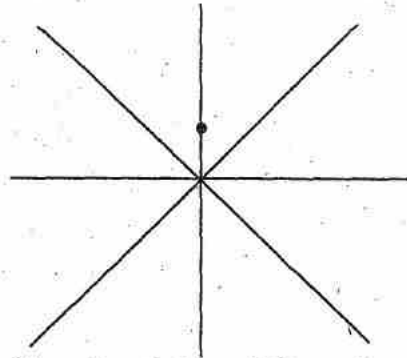
Vậy có: $190 - 2 = 188$ đường thẳng.

Bài 12

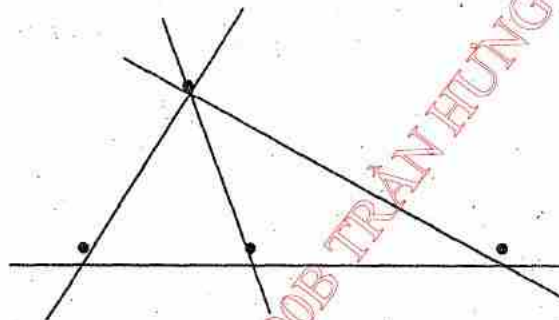
a)



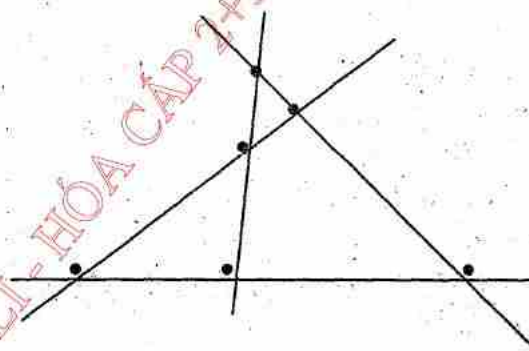
b) • Nếu bốn đường thẳng cùng đi qua một điểm thì có một giao điểm



• Nếu có đúng ba đường thẳng cùng đi qua một điểm thì có bốn giao điểm.



• Nếu không có ba đường thẳng nào cũng đi qua một điểm thì có sáu giao điểm.



Bài 13

Giả sử có 41 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng thì có:

$$41 \cdot (41 - 1) : 2 = 820 \text{ đường thẳng}$$

Với bảy điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng thì có 7.

$$(7 - 1) : 2 = 21 \text{ đường thẳng.}$$

Còn nếu bảy điểm này thẳng hàng thì chỉ kẻ được một đường thẳng. Do vậy số đường thẳng bị giảm đi là $21 - 1 = 20$ đường thẳng. Số đường thẳng cần tìm là $820 - 20 = 800$ đường thẳng.

Bài 14

a) Mỗi đường thẳng cắt 200 đường thẳng còn lại tạo thành 200 giao điểm. Có 201 đường thẳng nên có $200 \cdot 201 = 40200$ giao điểm, nhưng mỗi giao điểm đã được tính hai lần nên chỉ có: $40200 : 2 = 20100$ giao điểm.

b) Nếu thay 201 bởi n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) thì số giao điểm có được là: $n(n-1) : 2$ giao điểm.

Bài 15

a) Ta có:

$$n(n-1) : 2 = 55$$

$$n(n-1) = 11 \cdot 5 \cdot 2$$

$$n(n-1) = 11 \cdot 10$$

$$\text{Vậy: } n = 11$$

b) Ta có: $n(n-1) : 2 = 210$

$$n(n-1) = 21 \cdot 10 \cdot 2$$

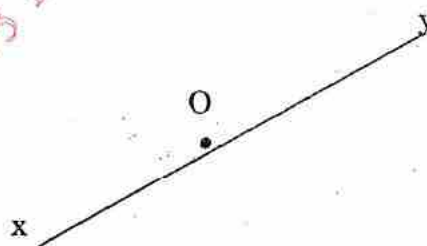
$$n(n-1) = 21 \cdot 20$$

Vậy $n = 21$.

§ 5. TIA**1. Tia:**

Hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O được gọi là tia gốc O (Còn được gọi là một nửa đường thẳng gốc O).

Ta có tia Ox và tia Oy.

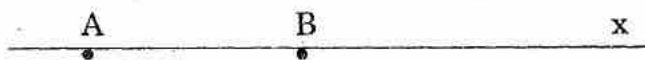
**2. Hai tia đối nhau:**

Hai tia chung gốc Ox và Oy tạo thành đường thẳng xy (hình trên) được gọi là hai tia đối nhau.

Nhận xét: Mỗi điểm trên đường thẳng là gốc chung của hai tia đối nhau.

3. Hai tia trùng nhau:

Tia Ax và tia AB là hai tia trùng nhau.

**Chú ý:**

Hai tia không trùng nhau còn được gọi là hai tia phân biệt.

BÀI TẬP**Bài 16**

a) Cho ba điểm A, B, C trong đó hai tia BA và BC đối nhau. Trong ba điểm A, B, C điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?

b) Điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Tìm các tia đối nhau, các tia trùng nhau.

Bài 17

Điểm M nằm giữa hai điểm A và B, điểm E nằm giữa hai điểm A và M, điểm F nằm giữa hai điểm M và B.

a) Tia ME trùng với tia nào? Vì sao?

b) Tia MF trùng với tia nào? Tại sao?

c) Điểm M có nằm giữa hai điểm E và F không? Vì sao?

Bài 18

a) Điểm N nằm giữa hai điểm M và P, điểm P nằm giữa hai điểm N và Q. Chứng tỏ rằng điểm N nằm giữa hai điểm M và Q.

b) Điểm N nằm giữa hai điểm M và P, điểm Q nằm giữa hai điểm N và P. Điểm Q có nằm giữa hai điểm M và N không? Vì sao?

Bài 19

Trên tia Ox, lấy 100 điểm khác điểm O. Có bao nhiêu tia trùng với tia Ox trong hình vẽ?

Bài 20

a) Trên đường thẳng xy, lấy 100 điểm. Hỏi trong hình vẽ có bao nhiêu tia?

b) Trên đường thẳng uv lấy n điểm. Có tất cả 2002 tia (Các tia trùng nhau được xem là chỉ một tia). Tính n.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 16**

a) Hai tia BA và BC đối nhau nên ba điểm A, B, C thẳng hàng và hai điểm A và C nằm khác phía đối với điểm B

Vậy: Điểm B nằm giữa hai điểm còn lại.

- b) • Các tia BA và BC đối nhau
• Các tia AB và AC trùng nhau
• Các tia CA và CB trùng nhau.



Bài 17

a) Các tia ME và MA trùng nhau, vì E nằm giữa A và M.



b) Các tia MF và MB trùng nhau, vì F nằm giữa M và B.

c) Điểm M nằm giữa A và B nên các tia MA và MB đối nhau.

Mà các tia MA, ME trùng nhau và các tia MB, MF trùng nhau. Suy ra: Các tia ME và MF đối nhau. Do vậy: M nằm giữa E và F.

Bài 18

a) Điểm N nằm giữa M và P nên các tia NM và NP đối nhau (1), điểm P nằm giữa N và Q nên các tia NP và NQ trùng nhau (2). Từ (1) và (2) suy ra: các tia NM và NQ đối nhau. Do vậy: N nằm giữa M và Q.

b) Điểm Q không nằm giữa hai điểm M và N. Thật vậy, N nằm giữa M và P nên các tia NM và NP đối nhau (1), Q nằm giữa N và P nên các tia NP và NQ trùng nhau (2). Từ (1) và (2) suy ra các tia NM và NQ đối nhau.

Do vậy: Q không nằm giữa M và N.

Bài 19

Với mỗi điểm khác điểm O trên tia Ox ta được một tia gốc O trùng với tia Ox.

Do vậy: Với 100 điểm khác điểm O trên tia Ox ta được 100 tia gốc O trùng với tia Ox.

Bài 20

a) Với mỗi điểm trên đường thẳng xy ta được hai tia đối nhau.

Với 100 điểm ta được $2 \cdot 100 = 200$ tia.

b) $n = 2002 : 2 = 1001$

§6. ĐOẠN THẲNG**1. Đoạn thẳng AB:**

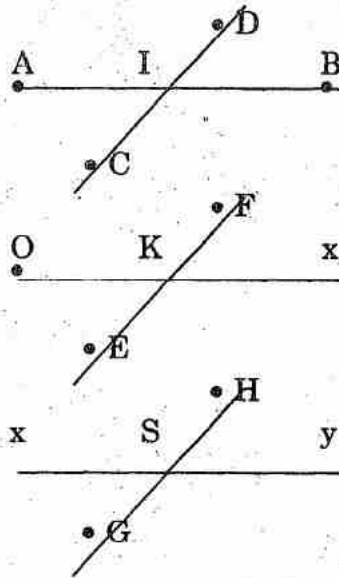
Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A, điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B.



Đoạn thẳng AB còn gọi là đoạn thẳng BA.

Hai điểm A và B là hai mút hoặc hai đầu của đoạn thẳng AB.

2. Đoạn thẳng cắt đoạn thẳng, cắt tia, cắt đường thẳng:



Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau, giao điểm là điểm I.

Đoạn thẳng EF và tia Ox cắt nhau, giao điểm là điểm K.

Đoạn thẳng GH và đường thẳng xy cắt nhau, giao điểm là điểm S.

BÀI TẬP

Bài 21

Cho các điểm A, B, C, D theo thứ tự nằm trên đường thẳng d. Hỏi có tất cả bao nhiêu đoạn thẳng? Đọc tên các đoạn thẳng đó.

Bài 22

Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Hãy vẽ đường thẳng m sao cho không đi qua A, B, C và:

- Cắt hai đoạn thẳng AB và BC.
- Cắt hai đoạn thẳng AB và AC và không cắt đường thẳng BC.
- Không cắt các đoạn thẳng AB, BC, CA.

Bài 23

Cho 21 điểm. Qua hai điểm vẽ được một đoạn thẳng. Có tất cả bao nhiêu đoạn thẳng? Thay 21 điểm bởi n điểm ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) thì số đoạn thẳng có được là bao nhiêu?

Bài 24

- Hãy vẽ tám đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng ba đoạn thẳng khác.
- Hãy vẽ một đường gấp khúc khép kín, gồm tám đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng bị cắt đúng một lần.

Bài 25

Trên đường thẳng a đặt n điểm ($n \in \mathbb{N}^*$) đếm được 2002 đoạn thẳng bằng nhau.

Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

HƯỚNG DẪN GIẢI

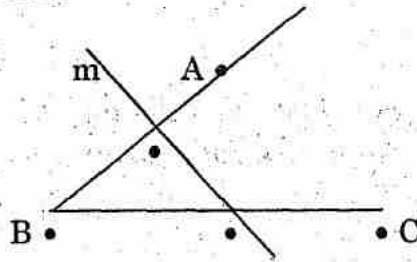
Bài 21



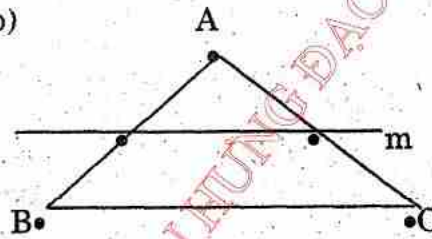
Có tất cả sáu đoạn thẳng, đó là: các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Bài 22

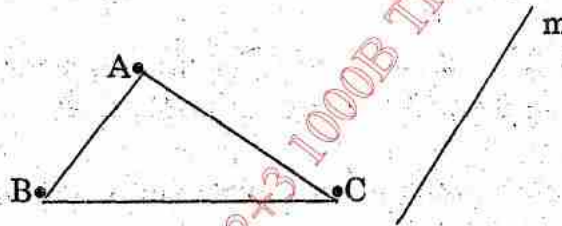
a)



b)



c)



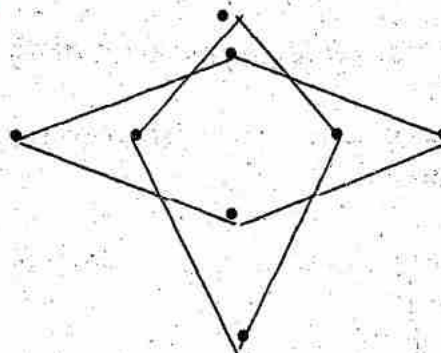
Bài 23

a) Kể từ một điểm bất kì với 20 điểm còn lại được 20 đoạn thẳng. Có 21 điểm nên có $20 \cdot 21$ đoạn thẳng. Nhưng mỗi đoạn thẳng đã được tính 2 lần. Do vậy, số đoạn chỉ có là $(20 \cdot 21) : 2 = 210$ đoạn thẳng.

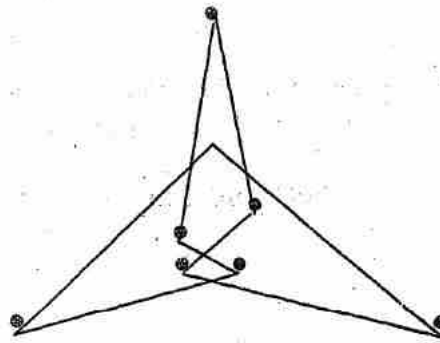
Nếu thay 21 điểm bởi n điểm ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) thì số đoạn thẳng có được là $n(n-1) : 2$ đoạn thẳng.

Bài 24

a)



b)

**Bài 25**

Vì có 2002 đoạn thẳng nên $n \geq 2003$. Ta có $n = 2003$ nếu trên đường thẳng a đặt liên tiếp các điểm $M_1; M_2; M_3; \dots; M_{2003}$ sao cho các đoạn thẳng $M_1M_2; M_2M_3; M_3M_4; \dots; M_{2003}M_{2004}$ bằng nhau.

Do vậy, giá trị nhỏ nhất của n là 2003.

§7. ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG**1. Đo đoạn thẳng:**

- Để đo đoạn thẳng AB người ta dùng thước có chia khoảng mm
- Mỗi đoạn thẳng có một độ dài. Độ dài đoạn thẳng là một số dương.

2. So sánh hai đoạn thẳng:

- Hai đoạn thẳng AB và CD bằng nhau nếu có cùng độ dài và kí hiệu $AB = CD$
- Đoạn thẳng EG dài hơn (lớn hơn) đoạn thẳng CD và kí hiệu $EG > CD$.
- Đoạn thẳng AB ngắn hơn (nhỏ hơn) đoạn thẳng EG và kí hiệu $AB < EG$.

BÀI TẬP**Bài 26**

Cho đoạn thẳng AB . Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AE = AB$, trên tia đối của tia BA lấy điểm F sao cho $BF = BA$. So sánh AE và BF .

Bài 27

Hãy vẽ hình $ABCD$ có $AB = BC = CD = DA$.

Bài 28

Cho các đoạn thẳng AB, CD, EF và $CD > AB, CD < EF; AB = 9\text{cm}; EF = 13\text{cm}$. Số đo độ dài CD là số tự nhiên lẻ. Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Bài 29

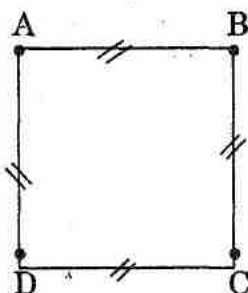
Trong một trường THCS có 2001 học sinh. Một số trong các em quen biết nhau. Chứng tỏ rằng có ít nhất một học sinh có số người quen biết trong số học sinh của trường là số chẵn.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 26**

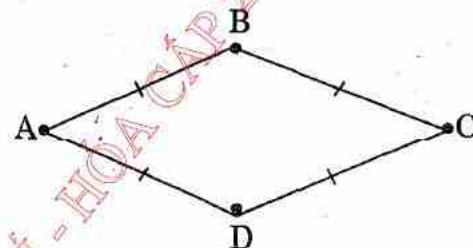
Theo đầu bài ta có: $AE = AB$ (theo cách xác định điểm E)

Và $AB = BF$ (theo cách xác định điểm F)

Suy ra: $AE = BF (= AB)$

Bài 27

Hay

**Bài 28**

Số đo độ dài CD là số tự nhiên lẻ. Do $CD > AB$, $AB = 9$ cm nên độ dài CD có thể là 11 cm, 13 cm, 15 cm;... và vì $CD < EF$, $EF = 13$ cm nên độ dài CD có thể 11 cm; 9 cm; 7 cm;...

Suy ra: $CD = 11$ cm.

Bài 29

Nếu A quen với B thì ta gọi (A, B) là một cặp quen biết và vẽ được đoạn thẳng AB.

Gọi m là số cặp quen biết nhau, x_1 là số người quen với A_1

x_2 là số người quen với người A_2 .

x_{2001} là số người quen với người A_{2001} .

Ta có: $x_1 + x_2 + \dots + x_{2001} = 2m$ là số chẵn.

Nếu 2001 số hạng của tổng đều lẻ thì tổng phải lẻ. Mà tổng là số chẵn ($2m$). Suy ra phải có ít nhất một số hạng của tổng là số chẵn.

Do vậy: có ít nhất một học sinh có số người quen biết trong số học sinh của trường là số chẵn.

§8. KHI NÀO THÌ $AM + MB = AB$?

- Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B thì $AM + MB = AB$.
- Ngược lại: Nếu $AM + MB = AB$ thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B .



BÀI TẬP

Bài 30

Gọi I là một điểm của đoạn thẳng MN , biết $MN = 8$ cm. So sánh hai đoạn thẳng MI và IN nếu:

- a) $MI = 4$ cm; b) $IN = 5$ cm.

Bài 31

Cho đoạn thẳng AB , E là điểm nằm giữa A và B , F là điểm nằm giữa E và B , biết $AB = 8$ cm, $AE = 5$ cm, $FB = 2$ cm

- a) Tính độ dài đoạn thẳng EB .
b) So sánh hai đoạn thẳng EF và FB .

Bài 32

Cho đoạn thẳng AB , hai điểm C, D nằm giữa hai mút của đoạn thẳng AB và $AD = BC$.

Chứng tỏ rằng $AC = BD$.

Bài 33

Ba điểm A, B, C thẳng hàng. Điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại nếu:

- a) $AB = 7$ cm; $BC = 2$ cm; $AC = 5$ cm
b) $AB + BC = AC$.

Bài 34

Trên đường thẳng a lấy ba điểm A, B, C (B nằm giữa A và C) sao cho $BC = 11$ cm. Lấy điểm M nằm giữa hai điểm B và C sao cho $MB = 9$ cm.

Chứng tỏ rằng: $2AB + 9AC = 11MA$.

Bài 35

Cho đoạn thẳng $AB = 9$ cm; C là điểm nằm giữa A và B sao cho $AC = 1$ cm; D là điểm nằm giữa C và B sao cho $CD = 2$ cm.
So sánh: hai đoạn thẳng AD và DB .

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 30**

a) Vì điểm I nằm giữa hai điểm M và N nên:

$$MI + IN = MN$$

$$4 + IN = 8$$

$$IN = 8 - 4$$

$$IN = 4 \text{ (cm)}$$

$$\text{Do đó: } MI = IN (= 4 \text{ cm})$$

b) Vì I nằm giữa M và N nên:

$$MI + IN = MN$$

$$MI + 5 = 8$$

$$MI = 8 - 5$$

$$MI = 3 \text{ (cm)}$$

$$\text{Do đó: } MI < IN \text{ (3 cm < 5 cm)}$$

**Bài 31**

a) Vì E nằm giữa A và B nên:

$$AE + EB = AB$$

$$5 + EB = 8$$

$$EB = 8 - 5$$

$$\text{Vậy: } EB = 3 \text{ (cm)}$$

b) Vì F nằm giữa E và B nên:

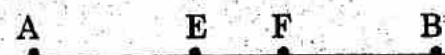
$$EF + FB = EB$$

$$EF + 2 = 3$$

$$EF = 3 - 2$$

$$\text{Vậy: } EF = 1 \text{ (cm)}$$

$$\text{Do đó: } EF < FB \text{ (Vì } 1 \text{ cm < 2 cm)}$$

**Bài 32**

Xét hai trường hợp:

a) Điểm C nằm giữa A và D

Suy ra: điểm D nằm giữa C và B

$$\text{Ta có: } AC + CD = AD$$

$$\text{Và } BD + CD = BC$$

$$\text{Mà } AD = BC. \text{ Do vậy:}$$

$$AC = BD$$



b) Điểm D nằm giữa A và C

Suy ra: Điểm C nằm giữa D và B

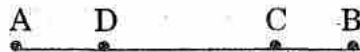
Ta có: $AD + DC = AC$

$BC + DC = BD$

Mà: $AD = BC$. Do vậy:

$AC = BD$

Kết luận: $AC = BD$.



Bài 33

a) Trong ba điểm thẳng hàng có một và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại.

• Nếu A nằm giữa B và C thì:

$AB + AC = BC \Rightarrow 7 + 5 = 2$. Vô lý!

• Nếu B nằm giữa A và C thì:

$AB + BC = AC \Rightarrow 7 + 2 = 5$. Vô lý!

Vậy: Điểm C nằm giữa A và B

b) Trong ba điểm thẳng hàng có một và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại.

• Nếu điểm A nằm giữa B và C thì $AB + AC = BC$

$\Rightarrow AC < BC$ trái dấu bài $AB + BC = AC$ nên $AC > BC$.

• Nếu điểm C nằm giữa A và B thì $AC + BC = AB$

$\Rightarrow AC < AB$ trái dấu bài $AB + BC = AC$ nên $AB < AC$

Vậy: Điểm B nằm giữa A và C.

§ 9. VẼ ĐOẠN THẲNG CHO BIẾT ĐỘ DÀI

• Trên tia Ox bao giờ cũng vẽ được một và chỉ một điểm M sao cho $OM = a$ (đơn vị dài)

• Trên tia Ox có $OM = a$, $ON = b$, nếu $0 < a < b$ thì điểm M nằm giữa hai điểm O và N.

BÀI TẬP

Bài 36

Trên tia Ox , vẽ ba đoạn thẳng OM, ON, OP sao cho:

$ON = 2 OM$, $OP = 3 OM$.

So sánh MN và NP.

Bài 37

Gọi A, B là hai điểm trên tia Ox . Biết $OA = 5$ cm, $AB = 4$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng OB.

Bài 38

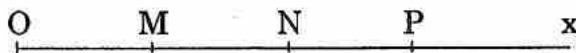
Cho đoạn thẳng AB có độ dài 10 cm. Trên tia AB lấy điểm C sao cho AC = 4 cm, trên tia BA lấy điểm D sao cho BD = 4 cm.

Chứng tỏ rằng: CB = 3CD.

Bài 39

Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự đó trên một tia Ox sao cho: $4OA = 3AB$, $5BC = 4AB$, $6CD = 5AB$ và $CD - OA = 5$ (cm)

Tính độ dài các đoạn thẳng OA, AB, BC, CD.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 36**

Trên tia Ox; $ON = 2OM$; Vì $OM < 2OM = ON$ nên điểm M nằm giữa hai điểm O và N.

Ta có: $OM + MN = ON$ mà $ON = 2OM$

nên $OM + MN = 2OM$

$MN = 2OM - OM$

Vậy: $MN = OM$.

Trên tia Ox, $ON = 2OM$, $OP = 3OM$

Vì $2OM < 3OM$ nên điểm N nằm giữa hai điểm O và P.

Ta có: $ON + NP = OP$

$2OM + NP = 3OM$

$NP = 3OM - 2OM$

Vậy: $NP = OM$

Do đó: $MN = NP (= OM)$

Bài 37

Có hai trường hợp:

a) Điểm A nằm giữa hai điểm O và B:

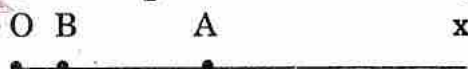


ta có: $OB = OA + AB$

$OB = 5 + 4$

$OB = 9$ (cm)

b) Điểm B nằm giữa hai điểm O và A, ta có:



$OB + BA = OA$

$OB + 4 = 5$

$OB = 5 - 4$

Vậy: $OB = 1 \text{ (cm)}$

Bài toán có hai đáp số: $OB = 9 \text{ cm}$ hoặc $OB = 1 \text{ cm}$.

Bài 38

Trên tia AB , $AC = 4 \text{ cm}$, $AB = 10 \text{ cm}$, Vì $4 \text{ cm} < 10 \text{ cm}$ nên điểm C nằm giữa hai điểm A và B .



Ta có: $AC + CB = AB$

$$4 + CB = 10$$

$$CB = 10 - 4$$

Vậy $CB = 6 \text{ (cm)}$

Trên tia BA , $BD = 4 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, vì $4 \text{ cm} < 6 \text{ cm}$ nên điểm D nằm giữa hai điểm B và C .

Ta có: $CD + BD = CB$

$$CD + 4 = 6$$

$$CD = 6 - 4$$

Vậy $CD = 2 \text{ (cm)}$

Do đó: $CB = 3CD$ (Vì $6 = 3 \cdot 2$)

Bài 39

Vì $CD - OA = 5$

nên $12(CD - OA) = 60$

hay $12CD - 12OA = 60$

Vì $4OA = 3AB$ nên $12OA = 9AB$

$6CD = 5AB$ nên $12CD = 10AB$

Do đó: $12CD - 12OA = 10AB - 9AB$

$$12CD - 12OA = AB$$

mà $12CD - 12OA = 60$

nên: $AB = 60 \text{ (cm)}$

Do đó: $\bullet OA = 3 \cdot 60 : 4$

$$OA = 45 \text{ (cm)}$$

$$\bullet BC = 4 \cdot 60 : 5$$

$$BC = 48 \text{ (cm)}$$

$$\bullet CD = 5 \cdot 60 : 6$$

$$CD = 50 \text{ (cm)}$$

Vậy: $OA = 45 \text{ cm}; AB = 60 \text{ cm};$

$BC = 48 \text{ cm}; CD = 50 \text{ cm}.$

§10. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG

- Trung điểm của đoạn thẳng AB là điểm nằm giữa A, B và cách đều A, B ($MA = MB$).
- Trung điểm của đoạn thẳng AB còn được gọi là điểm chính giữa của đoạn thẳng AB.
- M là trung điểm đoạn thẳng AB thì $AM = MB = \frac{AB}{2}$.

BÀI TẬP

Bài 40

Trên tia Ox, vẽ hai điểm A, B sao cho $OA = 3$ cm, $OB = 9$ cm. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tính OM.

Bài 41

Trên tia Ox xác định điểm C và I sao cho $OC < OI$. Trên tia Oy là tia đối của tia Ox xác định điểm D sao cho $OC = OD$. Chứng tỏ rằng:

- Điểm O là trung điểm của đoạn thẳng CD.
- $2OI = IC + ID$.

Bài 42

Cho đoạn thẳng AB. Gọi M là trung điểm của AB, C là trung điểm của AM, D là trung điểm của MB.

- Điểm M có là trung điểm của đoạn thẳng CD không? Vì sao?
- Chứng tỏ rằng: $2CD = AB$.

Bài 43

Cho đoạn thẳng AB. Hãy xác định vị trí của điểm C trên đoạn thẳng AB sao cho $CA \leq CB$.

Bài 44

Cho đoạn thẳng AB. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Một điểm C bất kì thuộc đường thẳng AB. Tính IC theo CA và CB.

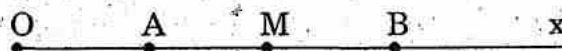
Bài 45

Gọi M_1 là trung điểm của đoạn thẳng AB, M_2 là trung điểm của đoạn thẳng M_1B , M_3 là trung điểm của đoạn thẳng M_2B , ... M_{2003} là trung điểm của đoạn thẳng $M_{2002}B$, biết $M_{2003}B = 1$ cm.

Tính độ dài các đoạn thẳng AM_{2003} .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 40



Trên tia Ox , $OA = 3 \text{ cm}$, $OB = 9 \text{ cm}$, Vì $3 \text{ cm} < 6 \text{ cm}$ nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B.

Ta có: $OA + AB = OB$

$$3 + AB = 9$$

$$AB = 9 - 3$$

Vậy $AB = 6$

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên $MB = \frac{AB}{2} = 3 \text{ cm}$ và

điểm M nằm giữa O và B

Ta có: $OM + MB = OB$

$$OM + 3 = 9$$

$$OM = 9 - 3$$

Vậy: $OM = 6 \text{ cm}$

Bài 41

a) Ta có: Điểm C thuộc tia Ox , D thuộc tia Oy là tia đối của tia Ox nên O nằm giữa hai điểm C và D (1)

Ta lại có: $OC = OD$ (2) (theo đề)

Từ (1) và (2) suy ra O là trung điểm của đoạn thẳng CD.

b) Trên tia Ox , vì $OC < OI$ nên C nằm giữa O và I

Ta có: $OI = IC + OC \Rightarrow IC = OI - OC$ (3)

Vì O nằm giữa C và D, C nằm giữa O và I nên O nằm giữa I và D

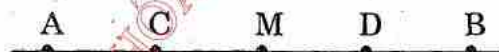
Ta có: $ID = OI + OD$ (4)

Mà $OC = OD$ (5)

Từ (2), (3) và (4) suy ra: $IC + ID = 2OI$

Vậy: $2OI = IC + ID$

Bài 42



a) Vì M là trung điểm của AB, C là trung điểm của AM, D là trung điểm của MB nên M nằm giữa A và B, C nằm giữa A và M, D nằm giữa M và B. Do đó: M nằm giữa C và D (1)

Vì M là trung điểm của AB nên $AM = MB$

C là trung điểm của AM nên $2CM = AM$

D là trung điểm của MB nên $2MD = MB$

Suy ra: $CM = MD$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: M là trung điểm của đoạn thẳng CD.

b) Từ trên ta có: $2CM = AM$

$$2MD = MB$$

$$\Rightarrow 2(CM + MD) = AM + MB$$

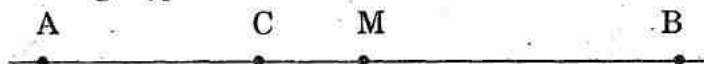
$$\text{Mà } CM + MD = CD, AM + MB = AB$$

$$\text{Do vậy } 2CD = AB.$$

Bài 43

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB suy ra: $MA = MB$ và $M \in AB$

Xét ba trường hợp:



a) $C = M$

Ta có: $MA = MB$ nên $CA = CB$

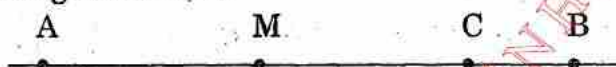
b) C nằm giữa A và M

Do C nằm giữa A và M nên $CA < MA$ mà $MA = MB$ nên $CA < MB$ (1)

Mặt khác M nằm giữa C và B nên $MB < CB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $CA < CB$.

c) C nằm giữa M và B



Do C nằm giữa M và B nên $CB < MB$ mà $MA = MB$ nên $CB < MA$ (3)

Mặt khác M nằm giữa A và C nên $MA < CA$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: $CB < CA$.

Tóm lại: Nếu điểm C nằm trên đoạn thẳng MA thì ta luôn có $CA \leq CB$.

Bài 44

Xét bốn trường hợp

a) C thuộc đoạn thẳng AI

Do C thuộc đoạn thẳng AI nên C nằm giữa A và I



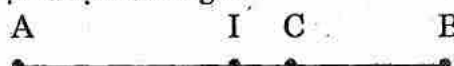
Ta có: $IC + CA = IA$

$$\Rightarrow IC = IA - CA$$

$$= \frac{CA + CB}{2} - CA \quad (\text{Vì I là trung điểm của AB})$$

$$\text{Vậy } IC = \frac{CB - CA}{2}$$

b) C thuộc đoạn thẳng BI



$$\text{Tương tự trường hợp a, ta có: } IC = \frac{CA - CB}{2}$$

c) C thuộc tia đối của tia AB

Do C thuộc tia đối của tia AB nên A nằm giữa C và I



$$\begin{aligned} \text{Ta có: } IC &= CA + AI \\ &= CA + \frac{AB}{2} = CA + \frac{CB - CA}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } IC = \frac{CA + CB}{2}$$

đ) C thuộc tia đối của tia BA

Tương tự trường hợp c), ta có:

$$IC = \frac{CA + CB}{2}$$

Bài 45

M_{2003} là trung điểm của đoạn thẳng $M_{2002}B$ nên:

$$M_{2002}B = 2 \cdot M_{2003}B = 2 \cdot 1 = 2 \text{ (cm)}$$

M_{2002} là trung điểm của đoạn thẳng $M_{2001}B$ nên:

$$M_{2001}B = 2 \cdot M_{2002}B = 2 \cdot 2 = 2^2 \text{ (cm)}$$

M_{2001} là trung điểm của đoạn thẳng $M_{2000}B$ nên

$$M_{2000}B = 2 \cdot M_{2001}B = 2 \cdot 2^2 = 2^3 \text{ (cm)}$$

.....

M_2 là trung điểm của đoạn thẳng M_1B nên:

$$M_1B = 2 \cdot M_2B = 2 \cdot 2^{2001} = 2^{2002} \text{ (cm)}$$

M_1 là trung điểm của đoạn thẳng AB nên:

$$AB = 2 \cdot M_1B = 2 \cdot 2^{2002} = 2^{2003} \text{ (cm)}$$

Vì M_{2003} nằm giữa A, B nên:

$$AM_{2003} + M_{2003}B = AB$$

$$AM_{2003} + 1 = 2^{2003}$$

$$\text{Vậy: } AM_{2003} = 2^{2003} - 1 \text{ (cm)}$$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1

Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 2$) trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm vẽ được một đường thẳng.

- Liệt kê tên các đường thẳng trên hình vẽ nếu $n = 4$;
- Tính số lượng đường thẳng nếu $n = 1968$;
- Tính số lượng đường thẳng theo n ;
- Tìm n biết rằng tổng số đường thẳng vẽ được là 595;
- Số lượng đường thẳng có thể là 2003 không?

Bài 2

Hãy vẽ sơ đồ trồng 10 cây thành 5 hàng, mỗi hàng 4 cây.

Bài 3

Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) trên đường thẳng d .

- Kể tên các đoạn thẳng trên hình vẽ nếu $n = 3$;
- Tính số lượng đoạn thẳng theo n ;
- Có bao nhiêu điểm nằm giữa hai điểm khác;
- Tính n biết rằng tổng số đoạn thẳng vẽ được là 666;
- Số lượng đoạn thẳng có thể là 1970 được không?

Bài 4

Cho đoạn thẳng AB có M là trung điểm của nó và điểm C thuộc đường thẳng AB . Tính khoảng cách CM theo CA và CB nếu:

- Điểm C nằm giữa hai điểm A và M ;
- Điểm C nằm giữa hai điểm M và B ;
- Điểm C thuộc tia đối của tia AB ;
- Điểm C thuộc tia đối của tia BA .

Bài 5

Cho đoạn thẳng AB . Hãy xác định vị trí của điểm C trên đoạn thẳng AB sao cho:

- $CA \leq \frac{1}{3} CB$.
- $7CB \leq CA$.

GỢI Ý

Bài 1

- Có tất cả 1968. $(1968 - 1) : 2 = 1935528$ đường thẳng;
- Có tất cả $\frac{n(n-1)}{2}$ đường thẳng;
- $n = 35$.

e) Không. Vì $2 \cdot 2003 = 4006$ chia cho 3 dư 1, nên 4006 không là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Bài 3

c) Có tất cả $n - 2$ điểm nằm giữa hai điểm khác.

$$d) \frac{n(n-1)}{2} = 666$$

$$n(n-1) = 2 \cdot 666$$

$$n(n-1) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 37$$

$$n(n-1) = 37 \cdot 36$$

$$\text{Vậy } n = 37.$$

e) Không. Vì $1970 \cdot 2 = 3940$ chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow$ không tìm được số tự nhiên n .

Bài 5

a) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, M là trung điểm của AI.

Điểm C thuộc đoạn thẳng AM thì $CA \leq \frac{1}{3} CB$.

CHƯƠNG II

GÓC

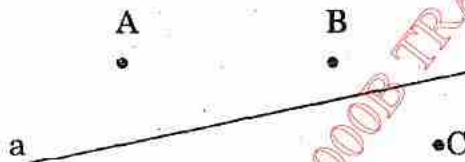
§1. NỬA MẶT PHẪNG

1. Nửa mặt phẳng bờ a :

- Hình gồm đường thẳng a và một phần mặt phẳng bị chia ra bởi a được gọi là một nửa mặt phẳng bờ a .



- Nửa mặt phẳng bờ a chứa điểm B và nửa mặt phẳng bờ a chứa điểm C là hai nửa mặt phẳng đối nhau.

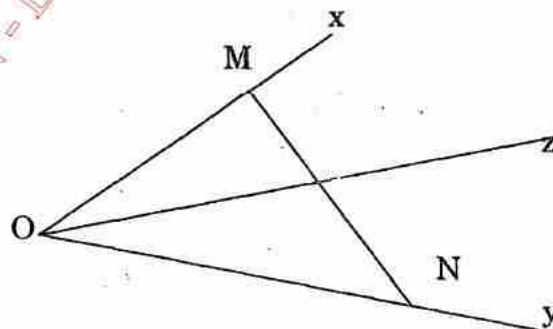


- Hai điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng a ; hai điểm A, C (hoặc B, C) nằm khác phía đối với đường thẳng a .

2. Tia nằm giữa hai tia:

Cho ba tia Ox, Oy, Oz chung gốc. Lấy điểm M bất kì trên tia Ox , lấy điểm N bất kỳ trên tia Oy (M và N đều không trùng với điểm O).

Tia Oz cắt đoạn thẳng MN tại một điểm nằm giữa M và N , ta nói tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Oy .



BÀI TẬP**Bài 1**

Cho ba điểm A, B, C. Nối A và B, B và C, C và D. Đường thẳng a không cắt các đoạn thẳng AB và BC. Đường thẳng a có cắt đoạn thẳng AC không?

Bài 2

Cho đường thẳng d, điểm O thuộc d và điểm M không thuộc d. Gọi N là điểm bất kì thuộc tia OM (N khác O và M).

Chứng tỏ rằng:

- Đường thẳng d không cắt đoạn thẳng MN.
- Tia OM nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d.

Bài 3

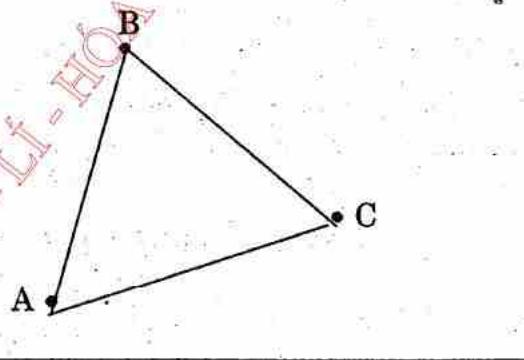
Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, nối A và B, B và C, C và A. Một đường thẳng a không đi qua các điểm A, B, C có thể cắt mấy đoạn thẳng trong số các đoạn thẳng AB, AC, BC

Bài 4

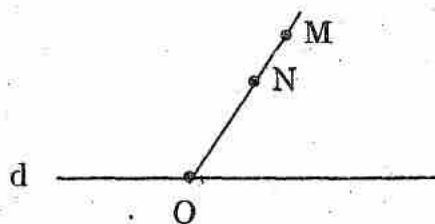
Cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có điểm nào nằm trên đường thẳng a. Nối A và B, B và C, C và D, D và A. Một đường thẳng a không đi qua các điểm A, B, C, D có thể cắt mấy đoạn thẳng, trong các đoạn thẳng có hai đầu mút là hai điểm trong các điểm A, B, C, D.

Bài 5

Cho đường thẳng d và năm điểm A, B, C, D, E trong đó không có điểm nào nằm trên đường thẳng d. Trong các đoạn thẳng có hai đầu mút là hai trong các điểm đã cho có bao nhiêu đoạn thẳng cắt đường thẳng d?

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 1**

Đường thẳng a không cắt các đoạn thẳng AB, BC nên A và B, B và C cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ a. Suy ra A và C cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ a. Vì $A \notin a$, $C \notin a$ nên đường thẳng a không cắt đoạn thẳng AC.

Bài 2

a) Vì điểm O là giao điểm của các đường thẳng MN và d nhưng điểm O không thuộc đoạn thẳng MN (Vì M và N cùng thuộc tia OM và không trùng gốc O). Suy ra: đường thẳng d không cắt đoạn thẳng MN.

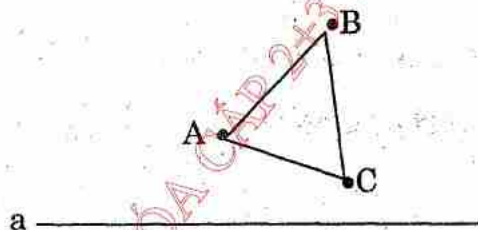
b) Đường thẳng d không cắt đoạn thẳng MN nên M và N cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ d. Mọi điểm N bất kì thuộc tia OM (không trùng O và M) đều cùng thuộc một nửa mặt phẳng chứa điểm M, còn điểm O cũng thuộc nửa mặt phẳng ấy.

Vậy: Tia OM nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d.

Bài 3

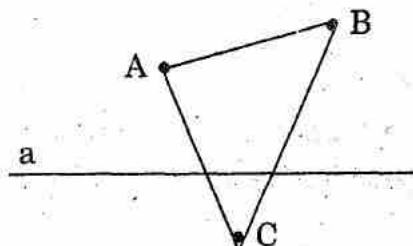
Đường thẳng a chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ a. $A \notin a$ nên A phải nằm trong một nửa mặt phẳng bờ a.

Xét ba trường hợp:



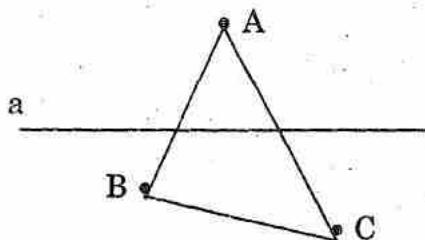
a) Nếu cả hai điểm B, C đều cùng nằm trong một nửa mặt phẳng bờ a có chứa điểm A thì đường thẳng a không cắt đoạn thẳng nào trong số các đoạn thẳng AB, AC và BC.

b) Nếu có điểm B hoặc điểm C cùng nằm trong một nửa mặt phẳng bờ a có chứa điểm A.



Chẳng hạn: A, B cùng nằm trong một nửa mặt phẳng bờ a, còn C nằm trong nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng trên. Khi đó: đường thẳng a cắt hai đoạn thẳng AC, BC và a không cắt đoạn thẳng AB (Vì cặp điểm B, C nằm trong hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ a)

c) Nếu cả hai điểm B và C cùng nằm trong một nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng bờ a chứa điểm A.



Khi đó: đường thẳng a cắt các đoạn thẳng AB, AC và a không cắt đoạn thẳng BC.

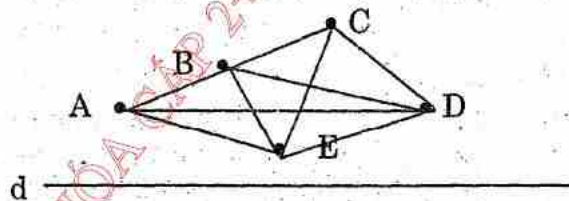
Tóm lại: Khi ba điểm A, B, C không thẳng hàng không thuộc đường thẳng a thì đường thẳng a hoặc không cắt đoạn thẳng nào hoặc cắt hai đoạn thẳng trong ba đoạn thẳng AB, AC và BC.

Bài 4 Giải tương tự bài 3.

Bài 5

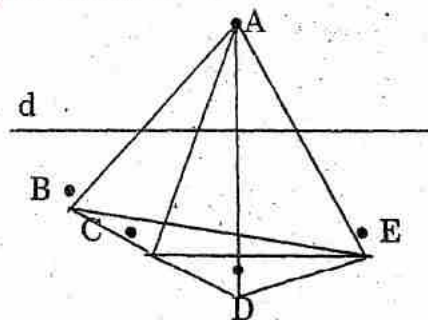
Có tất cả $5 \cdot 4 : 2 = 10$ đoạn thẳng nhận hai điểm trong các điểm đã cho làm hai đầu mút. Đó là: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

a)



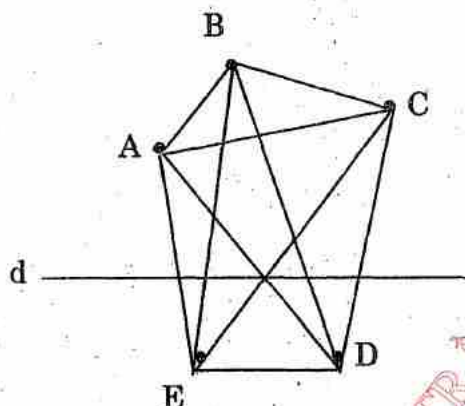
Nếu cả năm điểm A, B, C, D, E đều nằm trong một nửa mặt phẳng bờ d thì không có đoạn thẳng nào (trong 10 đoạn thẳng trên) có điểm chung với đường thẳng d.

b)



Nếu có bốn điểm đều nằm trong một nửa mặt phẳng bờ d còn điểm còn lại nằm trong nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng trên. Với bốn điểm cùng nằm trong một nửa mặt phẳng tạo thành $4 \cdot 3 : 2 = 6$ đoạn thẳng mà không có đoạn thẳng nào cắt đường thẳng d . Nhưng bốn điểm này cùng với điểm trên nửa mặt phẳng đối tạo thành bốn đoạn thẳng cắt d .

c)



Nếu có ba điểm đều nằm trong một nửa mặt phẳng bờ d , hai điểm còn lại cùng nằm trên nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng bờ d chứa ba điểm trên. Chẳng hạn: Ba điểm A, B, C cùng nằm trong một nửa mặt phẳng; còn D, E nằm trong nửa mặt phẳng đối. Với ba điểm A, B, C tạo thành $3 \cdot 2 : 2 = 3$ đoạn thẳng không cắt d . Hai điểm D, E tạo thành một đoạn thẳng không cắt d .

Suy ra: Số đoạn thẳng cắt d là: $10 - (3 + 1) = 6$ đoạn thẳng.

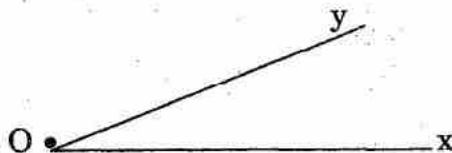
Tóm lại: Cho một đường thẳng d và năm điểm không thuộc đường thẳng đó thì hoặc không có đoạn thẳng nào hoặc có bốn đoạn thẳng hoặc có sáu đoạn thẳng cắt d trong các đoạn thẳng nhận hai điểm trong các điểm đã cho là hai mút.

§ 2. GÓC

1. Góc:

- Góc là hình gồm hai tia chung gốc.

Gốc chung của hai tia là đỉnh của góc. Hai tia là hai cạnh của góc.



Góc xOy . Kí hiệu $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOx}$ hoặc $\widehat{O}$.

2. Góc bẹt:

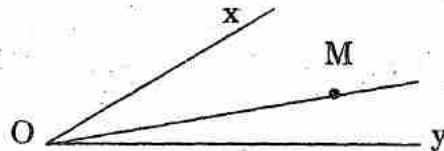


Góc bẹt là góc có hai cạnh là hai tia đối nhau.

3. Vẽ góc:

Để vẽ góc, ta cần vẽ đỉnh và hai cạnh của nó.

4. Điểm nằm bên trong góc:



Khi hai tia Ox , Oy không đối nhau, điểm M là điểm nằm bên trong góc xOy nếu tia OM nằm giữa hai tia Ox , Oy .

Khi đó ta còn nói: tia OM nằm trong góc xOy .

BÀI TẬP

Bài 6

Cho góc bẹt xOy , ba tia Om , On , Op cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng xy .

Trên hình vẽ có bao nhiêu góc đỉnh O ? Kể tên các góc đó?

Bài 7

Cho ba điểm A , B , C không thẳng hàng. Chứng tỏ rằng: nếu điểm M đồng thời nằm trong hai góc BAC và ABC thì M nằm trong góc BCA .

Bài 8

Gọi O là giao điểm của ba đường thẳng xy , zt , uv .

a) Có bao nhiêu góc bẹt đỉnh O ? Kể tên các góc đó?

b) Kể tên tất cả các góc có chung đỉnh O .

Bài 9

Cho góc xOy khác góc bẹt, tia Oz nằm trong góc đó, tia Ot nằm trong góc xOz . Chứng tỏ rằng:

a) Tia Ot nằm trong góc xOy .

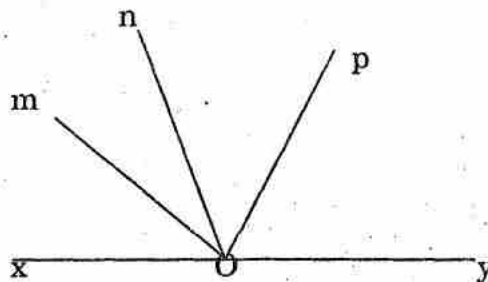
b) Tia Oz nằm trong góc yOt .

Bài 10

Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ trên đường thẳng d ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) và điểm O không nằm trên d . Vẽ các tia gốc O đi qua mỗi điểm đã cho. Có tất cả bao nhiêu góc đỉnh O mà các cạnh là các tia đã vẽ ở trên?

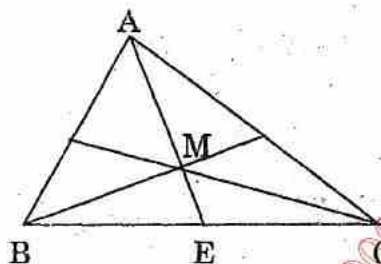
HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 6



Có 10 góc đỉnh O. Đó là các góc xOm , xOn , xOp , xOy , mOn , mOp , mOy , nOp , nOy , pOy .

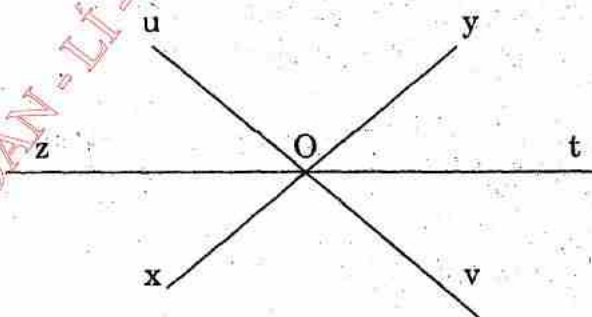
Bài 7



Điểm M nằm trong góc BAC nên tia AM cắt đoạn thẳng BC tại điểm E nằm giữa hai điểm B và C. Điểm A thuộc cạnh BA, điểm E thuộc cạnh BC của góc ABC, vì M nằm trong góc ABC nên tia BM cắt đoạn thẳng AE tại M, M phải nằm giữa hai điểm A và E. Do A thuộc cạnh CA và E thuộc cạnh CB của góc BCA mà tia CM cắt đoạn thẳng AE tại điểm M nằm giữa hai điểm A và E nên tia CM nằm giữa hai tia CB và CA.

Do vậy: điểm M nằm trong góc BCA.

Bài 8



a) Có 3 góc bẹt đỉnh O. Đó là các góc xOy , zOt , uOv .

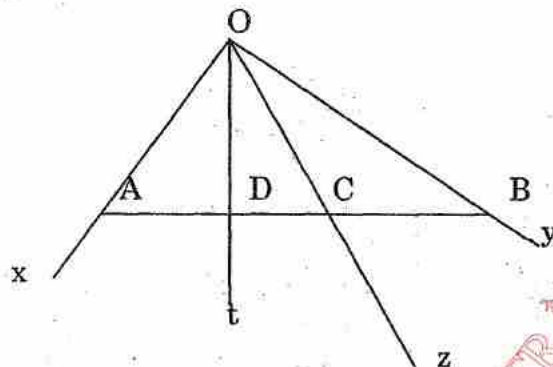
b) Có 15 góc có chung đỉnh O. Đó là các góc xOz , xOu , xOy , xOt , xOv , zOu , zOy , zOt , zOv , uOy , uOt , uOv , yOt , yOv , tOv .

Bài 9

a) Lấy $A \in Ox$, $B \in Oy$ suy ra đoạn thẳng AB cắt Oz tại C , C nằm giữa hai điểm A và B (Vì tia Oz nằm trong góc xOy).

Vì tia Ot nằm trong góc xOz nên suy ra đoạn thẳng AC cắt tia Ot ở D , D nằm giữa hai điểm A và C . Vì C nằm giữa A và B , D nằm giữa hai điểm A và C nên điểm D nằm giữa A và B . Do vậy: tia Ot nằm trong góc xOy .

b)



Vì hai điểm A, B nằm khác phía đối với điểm C và vì hai điểm A, D nằm cùng phía đối với điểm C nên hai điểm B, D nằm khác phía đối với điểm C hay C nằm giữa hai điểm B, D .

Do vậy: tia Oz nằm trong góc yOt .

Bài 10

Với n điểm ta có n tia chung gốc O là $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$. Từ một tia bất kì hợp với $n - 1$ tia còn lại tạo thành $n - 1$ góc đỉnh O . Với n tia nên có $n(n - 1)$ góc đỉnh O có các cạnh là các tia đó. Nhưng mỗi góc đã được tính hai lần. Do vậy số lượng góc đỉnh O có là $\frac{n(n - 1)}{2}$ góc.

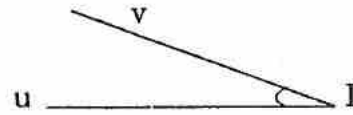
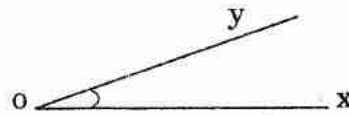
§3. SỐ ĐO GÓC**1. Đo góc:**

- Để đo góc ta dùng thước đo góc.
- Nhận xét: Mỗi góc có một số đo. Số đo của góc bẹt là 180° . Số đo của mỗi góc không vượt quá 180° .

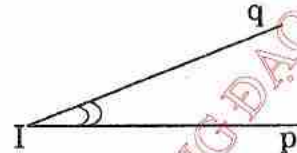
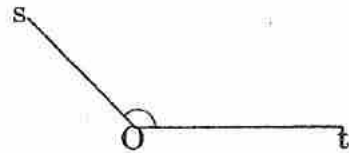
2. So sánh hai góc:

- Hai góc bằng nhau nếu số đo của chúng bằng nhau.

- Hai góc bằng nhau (hình vẽ) được kí hiệu là $\widehat{xOy} = \widehat{uIx}$



- Hai góc không bằng nhau (hình vẽ) được kí hiệu là:
 $\widehat{sOt} > \widehat{pIq}$ hoặc $\widehat{pIq} < \widehat{sOt}$.

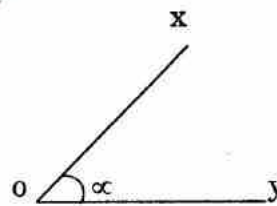


3. Góc vuông, góc nhọn, góc tù:

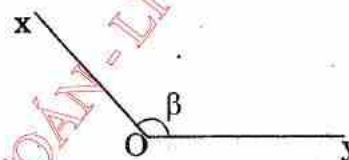
- Góc có số đo bằng 90° là góc vuông. Kí hiệu là $1v$.
- Góc nhỏ hơn góc vuông là góc nhọn.
- Góc lớn hơn góc vuông nhưng nhỏ hơn góc bẹt là góc tù.



$\widehat{xOy} = 90^\circ$
Góc vuông



$0^\circ < \alpha < 90^\circ$
Góc nhọn



$90^\circ < \beta < 180^\circ$
Góc tù

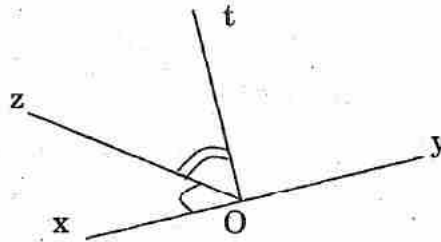


$\widehat{xOy} = 180^\circ$
Góc bẹt

BÀI TẬP

Bài 11

Cho hình dưới:



Biết rằng: $\widehat{xOz} = 20^\circ$, $\widehat{zOt} = 70^\circ$, $\widehat{tOy} = 90^\circ$

a) Chứng minh rằng: hai tia Ox và Oy đối nhau.

b) Gọi Ou là tia đối của tia Oz. Tính số đo của góc tOu, xOu.

Bài 12

Hãy vẽ hình ABCD có:

$$\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = 90^\circ.$$

Bài 13

Cho các góc xOy, uIv, pJq biết:

$\widehat{uIv} > \widehat{xOy}$, $\widehat{uIv} < \widehat{pJq}$, $\widehat{xOy} = 28^\circ$, $\widehat{pJq} = 32^\circ$, $\widehat{uIv} = m^\circ$, m là số tự nhiên chẵn. Tính m.

Bài 14

Cho đường thẳng AOB và tia OC. Tính số đo các góc AOC và BOC biết:

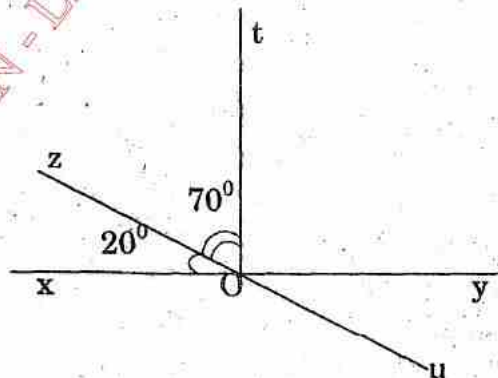
a) $\widehat{AOC} - \widehat{BOC} = 60^\circ$

b) $3\widehat{AOC} = 7\widehat{BOC}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 11

a)



Ta có: $\widehat{xOz} + \widehat{zOt} + \widehat{tOy} = 20^\circ + 70^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
 nên: $\widehat{xOy} = 180^\circ$. Do vậy: Hai tia Ox và Oy đối nhau.

b) Do Ou là tia đối của tia Oz nên:

$$\widehat{zOt} + \widehat{tOu} = 180^\circ$$

$$70^\circ + \widehat{tOu} = 180^\circ$$

$$\widehat{tOu} = 180^\circ - 70^\circ$$

$$\text{Vậy: } \widehat{tOu} = 110^\circ$$

• Vì hai tia Oz và Ou đối nhau nên:

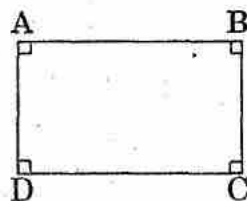
$$\widehat{xOu} + \widehat{xOz} = 180^\circ$$

$$\widehat{xOu} + 20^\circ = 180^\circ$$

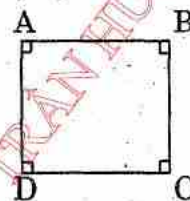
$$\widehat{xOu} = 180^\circ - 20^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{xOu} = 160^\circ$$

Bài 12



hoặc



Bài 13

Ta có: m là số tự nhiên chẵn

Do $\widehat{uIv} > \widehat{xOy}$, $\widehat{xOy} = 28^\circ$ nên số đo góc uIv có thể là $30^\circ; 32^\circ; 34^\circ; \dots$

Và do $\widehat{uIv} < \widehat{pJq}$, $\widehat{pJq} = 32^\circ$ nên số đo góc uIv có thể là $30^\circ; 28^\circ; 26^\circ; \dots$

Suy ra: $\widehat{uIv} = 30^\circ$

Vậy: $m = 30$.

Bài 14

a) Vì hai tia OA và OB đối nhau

nên $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 180^\circ$

mà $\widehat{AOC} - \widehat{BOC} = 60^\circ$

Suy ra $2 \widehat{AOC} = 240^\circ$

Vậy $\widehat{AOC} = 120^\circ$

Do đó $120^\circ + \widehat{BOC} = 180^\circ$

$\widehat{BOC} = 180^\circ - 120^\circ$

Vậy $\widehat{BOC} = 60^\circ$.

b) Ta có: $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 180^\circ$

$$3 \widehat{AOC} = 7 \widehat{BOC} \Rightarrow \frac{\widehat{BOC}}{\widehat{AOC}} = \frac{3}{7}$$

Do đó: $\widehat{BOC} = (\widehat{AOC} + \widehat{BOC}) : 10 \cdot 3$

$$= 180^\circ : 10 \cdot 3$$

$$= 18^\circ \cdot 3$$

$$\text{Vậy } \widehat{BOC} = 54^\circ$$

$$\widehat{AOC} = (\widehat{AOC} + \widehat{BOC}) : 10 \cdot 7$$

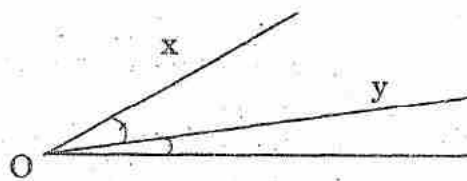
$$= 180^\circ : 10 \cdot 7$$

$$= 18^\circ \cdot 7$$

$$\text{Vậy } \widehat{AOC} = 126^\circ.$$

§4. KHI NÀO THÌ $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$

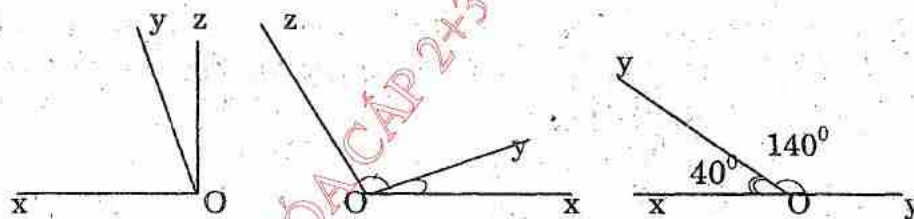
1. Khi nào thì tổng số đo hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ bằng số đo góc $\widehat{xOz}$?



Nếu tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz thì $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$

Ngược lại, nếu $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$ thì tia Oy nằm giữa hai tia Ox, Oz.

2. Hai góc kề nhau, phụ nhau, bù nhau, kề bù:



• Hai góc kề nhau là hai góc có một cạnh chung và hai cạnh còn lại nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa cạnh chung.

• Hai góc phụ nhau là hai góc có tổng số đo bằng 90° .

• Hai góc bù nhau là hai góc có tổng số đo bằng 180° .

• Hai góc vừa kề nhau vừa bù nhau là hai góc kề bù.

BÀI TẬP

Bài 15

Chứng tỏ rằng nếu hai tia Ox, Oy, thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ chứa tia Oz và $\widehat{zOx} + \widehat{zOy} = 180^\circ$ thì Ox, Oy là hai tia đối nhau.

Bài 16

Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, điểm D nằm giữa hai điểm B và C, điểm O nằm ngoài đường thẳng AC, biết rằng $\widehat{AOD} = 80^\circ$, $\widehat{BOD} = 40^\circ$. Tính $\widehat{AOB}$.

Bài 17

Cho góc vuông AOB, tia OC nằm giữa hai tia OA và OB, biết $\widehat{AOC} - 2\widehat{COB} = 30^\circ$

Tính số đo các góc $\widehat{AOC}$; $\widehat{COB}$.

Bài 18

Gọi O là giao điểm của ba đường thẳng xy, uy, zt. Tính số đo góc tOv, biết rằng $\widehat{xOz} = 65^\circ$, $\widehat{vOy} = 35^\circ$.

Bài 19

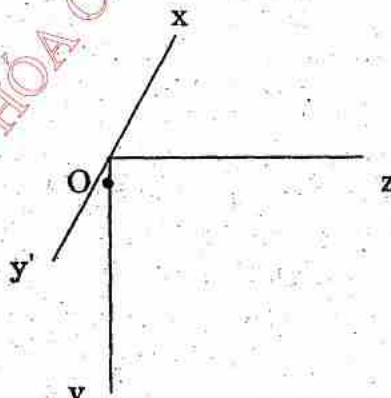
Tính số đo các góc xOy và yOz, biết rằng chúng kề bù và $5\widehat{xOy} = 4\widehat{yOz}$

Bài 20

Cho góc vuông xOy, tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy. Tính $\widehat{xOz}$ và $\widehat{yOz}$ biết $\frac{1}{4}\widehat{xOz} = \frac{1}{5}\widehat{yOz}$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 15**

Gọi Oy' là tia đối của tia Ox suy ra hai tia Ox và Oy' thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa tia Oz. Do đó hai tia Oy và Oy' cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia Oz.

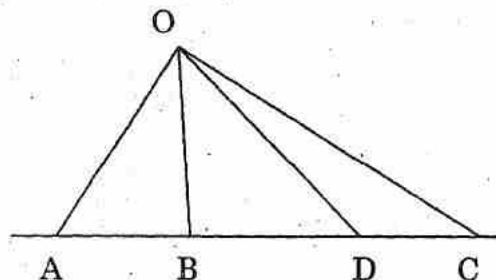


Ta có: $\widehat{zOx} + \widehat{zOy'} = 180^\circ$ (kề bù)
 nên $\widehat{zOy'} = 180^\circ - \widehat{zOx}$
 mà $\widehat{zOy} = 180^\circ - \widehat{zOx}$ (vì $\widehat{zOx} + \widehat{zOy} = 180^\circ$)
 Suy ra $\widehat{zOy} = \widehat{zOy'}$

Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Oz, ta có hai tia Oy và Oy' mà $\widehat{zOy} = \widehat{zOy'}$ nên hai tia Oy và Oy' phải trùng nhau.

Do vậy: hai tia Ox, Oy là hai tia đối nhau.

Bài 16



Vì điểm B nằm giữa A và C, điểm D nằm giữa B và C nên điểm B nằm giữa A và D, ta có tia OB nằm giữa hai tia OA và OD. Do đó:

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOD} = \widehat{AOD}$$

$$\widehat{AOB} + 40^\circ = 80^\circ$$

$$\widehat{AOB} = 80^\circ - 40^\circ$$

Vậy: $\widehat{AOB} = 40^\circ$.

Bài 17



Ta có: $\widehat{AOB} = 90^\circ$ tia OC nằm giữa hai tia OA, OB nên:

$$\widehat{AOC} + \widehat{COB} = 90^\circ$$

$$\widehat{AOC} = 90^\circ - \widehat{COB}$$

Mặt khác: $\widehat{AOC} - 2\widehat{COB} = 30^\circ$

Suy ra: $90^\circ - \widehat{COB} - 2\widehat{COB} = 30^\circ$

$$90^\circ - 3\widehat{COB} = 30^\circ$$

$$3\widehat{COB} = 90^\circ - 30^\circ \Rightarrow 3\widehat{COB} = 60^\circ$$

$$\widehat{COB} = 60^\circ : 3$$

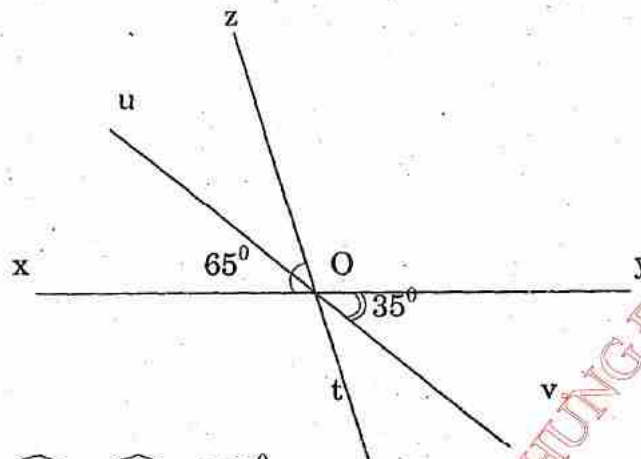
Vậy: $\widehat{COB} = 20^\circ$

Suy ra: $\widehat{AOC} = 90^\circ - 20^\circ$

Vậy: $\widehat{AOC} = 70^\circ$.

Bài 18

a) Nếu hai tia Ov và Oz nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ xy.



Ta có:

$$\widehat{xOz} + \widehat{zOy} = 180^\circ$$

$$\widehat{tOy} + \widehat{zOy} = 180^\circ$$

Suy ra:

$$\widehat{tOy} = \widehat{xOz} = 65^\circ$$

Tia Ov nằm giữa hai tia Ot và Oy ($\widehat{yOv} < \widehat{yOt}$) nên:

$$\widehat{tOv} + \widehat{vOy} = \widehat{tOy}$$

$$\widehat{tOv} + 35^\circ = 65^\circ$$

Suy ra:

$$\widehat{tOv} = 65^\circ - 35^\circ$$

Vậy:

$$\widehat{tOv} = 30^\circ$$

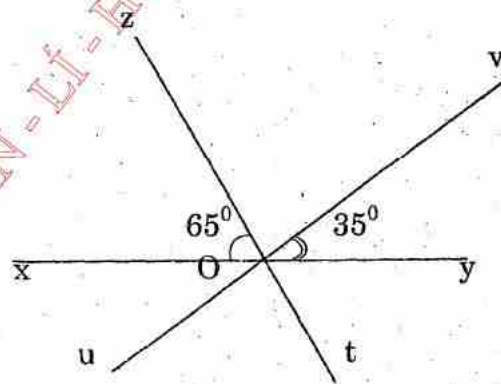
b) Nếu hai tia Ov và Oz cùng nằm trong một nửa mặt phẳng bờ xy,

ta có: $\widehat{zOx} + \widehat{yOz} = 180^\circ$

$$\widehat{tOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$$

Suy ra:

$$\widehat{tOy} = \widehat{zOx} = 65^\circ$$



Vì tia Oy nằm giữa hai tia Ov và Ot nên:

$$\widehat{tOv} = \widehat{tOy} + \widehat{yOv} = 65^\circ + 35^\circ$$

Vậy: $\widehat{tOv} = 100^\circ$.

Bài 19

Ta có: $5 \widehat{xOy} = 4 \widehat{yOz} \Rightarrow \widehat{xOy} = \frac{4}{5} \widehat{yOz}$

Mặt khác: $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$ (kề bù)

Nên: $\frac{4}{5} \widehat{yOz} + \widehat{yOz} = 180^\circ$

$$\frac{9}{5} \widehat{yOz} = 180^\circ$$

Vậy: $\widehat{yOz} = 180^\circ : \frac{9}{5} = 180^\circ \times \frac{5}{9} = 100^\circ$

$$\widehat{xOy} = \frac{4}{5} \cdot 100^\circ = 80^\circ.$$

Bài 20

Ta có: $\frac{1}{4} \widehat{xOz} = \frac{1}{5} \widehat{yOz} \Rightarrow \widehat{xOz} = \frac{4}{5} \widehat{yOz}$

Vì tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy nên $\widehat{xOz} + \widehat{yOz} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} \widehat{yOz} + \widehat{yOz} = 90^\circ$$

$$\frac{9}{5} \widehat{yOz} = 90^\circ.$$

Vậy: $\widehat{yOz} = 90^\circ : \frac{9}{5} = 90^\circ \cdot \frac{5}{9} = 50^\circ$

$$\widehat{xOz} = \frac{4}{5} \cdot 50^\circ = 40^\circ.$$

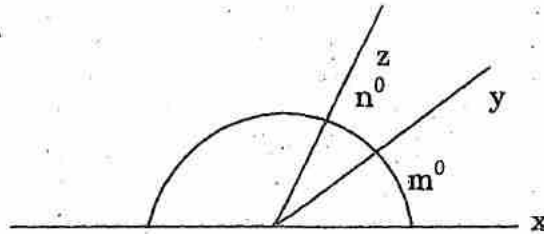
§5. VẼ GÓC CHO BIẾT SỐ ĐỘ**1. Vẽ góc trên nửa mặt phẳng:**

Để vẽ góc trên nửa mặt phẳng ta thường dùng thước thẳng, thước đo góc hoặc ê-ke.

Nhận xét: Trên nửa mặt phẳng cho trước có bờ chứa tia Ox, bao giờ cũng vẽ được một và chỉ một tia Oy sao cho:

$$\widehat{xOy} = m \text{ (độ)}$$

2. Vẽ hai góc trên nửa mặt phẳng



Nhận xét: Trên hình vẽ bên $\widehat{xOy} = m^0$, $\widehat{xOz} = n^0$, vì $m^0 < n^0$ nên tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz.

BÀI TẬP

Bài 21

Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox, xác định hai tia Oy và Oz sao cho:

$$\widehat{xOy} = 135^0; \quad \widehat{xOz} = 45^0.$$

Chúng tỏ rằng: $\widehat{yOz} = 90^0$.

Bài 22

Cho ba tia Ox, Oy, Oz biết $\widehat{xOy} = 60^0$ và $\widehat{xOz} = 30^0$. Tính số đo góc yOz. Bài toán có mấy đáp số?

Bài 23

Trên đường thẳng xy lấy điểm O và kẻ hai tia Oz và Ou trên cùng một nửa mặt phẳng bờ xy. Biết rằng các góc xOz và uOy là hai góc phụ nhau. Gọi Ot là tia đối của tia Oz và Ov là tia đối của tia Ou. Góc tOv là góc gì?

Bài 24

Trên mặt phẳng cho tia Ox. Có thể xác định được mấy tia Oy sao cho $\widehat{xOy} = 60^0$?

Bài 25

Cho năm điểm A, B, C, D, E theo thứ tự đó trên đường thẳng a và điểm O nằm ngoài đường thẳng a sao cho:

$$4 \widehat{AOB} = 3 \widehat{BOC}$$

$$5 \widehat{COD} = 4 \widehat{BOC}$$

$$6 \widehat{DOE} = 5 \widehat{BOC}$$

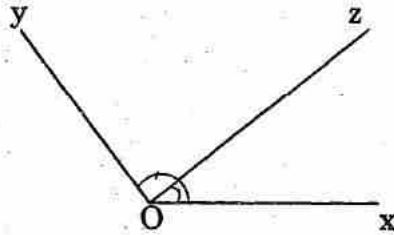
$$\widehat{DOE} - \widehat{AOB} = 5^0$$

Tính số đo các góc $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 21

Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox , $\widehat{xOy} = 135^\circ$, $\widehat{xOz} = 45^\circ$, vì $45^\circ < 135^\circ$ nên tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy .



Ta có: $\widehat{xOz} + \widehat{yOz} = \widehat{xOy}$

$$45^\circ + \widehat{yOz} = 135^\circ$$

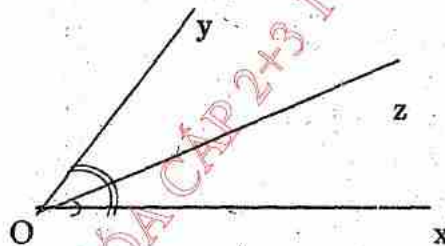
$$\widehat{yOz} = 135^\circ - 45^\circ$$

Vậy: $\widehat{yOz} = 90^\circ$.

Bài 22

Có hai trường hợp:

a) Tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy :



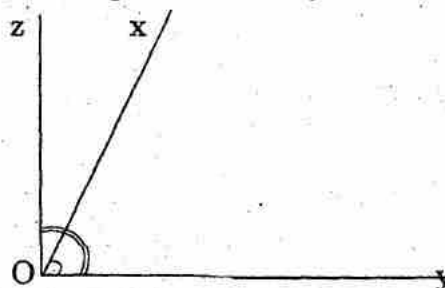
Ta có: $\widehat{xOz} + \widehat{yOz} = \widehat{xOy}$

$$30^\circ + \widehat{yOz} = 60^\circ$$

$$\widehat{yOz} = 60^\circ - 30^\circ$$

Vậy: $\widehat{yOz} = 30^\circ$.

b) Tia Ox nằm giữa hai tia Oy và Oz :



Ta có: $\widehat{yOz} = \widehat{xOy} + \widehat{xOz}$

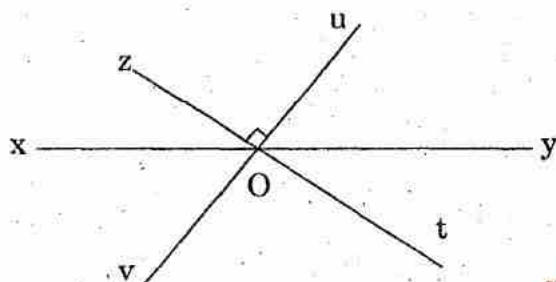
$$\widehat{yOz} = 60^\circ + 30^\circ$$

$$\widehat{yOz} = 90^\circ$$

Vậy:

Bài toán có hai đáp số: $\widehat{yOz} = 30^\circ$ hoặc $\widehat{yOz} = 90^\circ$

Bài 23



Vì hai góc $\widehat{xOz}$ và $\widehat{uOy}$ là hai góc phụ nhau nên:

$$\widehat{xOz} + \widehat{uOy} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{xOz} < 90^\circ, \widehat{uOy} < 90^\circ$$

Vì hai góc $\widehat{xOu}$ và $\widehat{uOy}$ là hai góc kề bù nên:

$$\widehat{xOu} + \widehat{uOy} = 180^\circ$$

$$\text{mà } \widehat{uOy} < 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{xOu} > 90^\circ$$

$$\text{Do đó: } \widehat{xOz} < \widehat{xOu}$$

nên tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Ou

Ta có: $\widehat{xOu} = \widehat{xOz} + \widehat{zOu}$

$$\Rightarrow \widehat{xOz} + \widehat{zOu} + \widehat{uOy} = 180^\circ$$

$$\widehat{zOu} + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{zOu} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

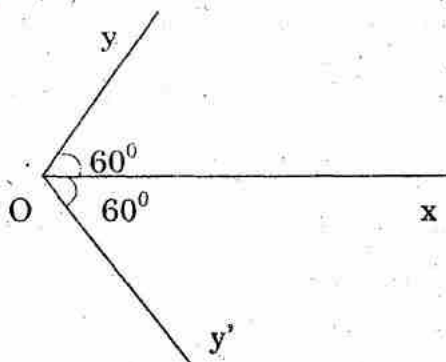
$$\text{Ta lại có: } \widehat{zOu} + \widehat{zOv} = 180^\circ \text{ (kề bù)}$$

$$\widehat{tOv} + \widehat{zOv} = 180^\circ \text{ (kề bù)}$$

$$\Rightarrow \widehat{tOv} = \widehat{zOu} = 90^\circ$$

Vậy: góc tOv là góc vuông.

Bài 24



Đường thẳng chứa tia Ox chia mặt phẳng thành hai nửa mặt đối nhau bờ chứa tia Ox. Trên mỗi nửa mặt phẳng có một tia và chỉ một tia Oy sao cho $\widehat{xOy} = 60^\circ$.

Vậy: Trên mặt phẳng chứa tia Ox có hai tia Oy và Oy' sao cho: $\widehat{xOy} = 60^\circ$, $\widehat{xOy'} = 60^\circ$.

Bài 25

$$\begin{aligned} \text{Vì } \widehat{DOE} - \widehat{AOB} &= 5^\circ \\ \text{nên } 12(\widehat{DOE} - \widehat{AOB}) &= 60^\circ \\ \text{hay } 12\widehat{DOE} - 12\widehat{AOB} &= 60^\circ \\ \text{Vì } 4\widehat{AOB} &= 3\widehat{BOC} \text{ nên } 12\widehat{AOB} = 9\widehat{BOC} \\ 6\widehat{DOE} &= 5\widehat{BOC} \text{ nên } 12\widehat{DOE} = 10\widehat{BOC} \\ \Rightarrow 12\widehat{DOE} - 12\widehat{AOB} &= 10\widehat{BOC} - 9\widehat{BOC} \\ 12\widehat{DOE} - 12\widehat{AOB} &= \widehat{BOC} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \widehat{BOC} = 60^\circ.$$

$$\text{Do đó: } \bullet \widehat{AOB} = 3 \cdot 60^\circ : 4 = 45^\circ$$

$$\bullet \widehat{COD} = 4 \cdot 60^\circ : 5 = 48^\circ$$

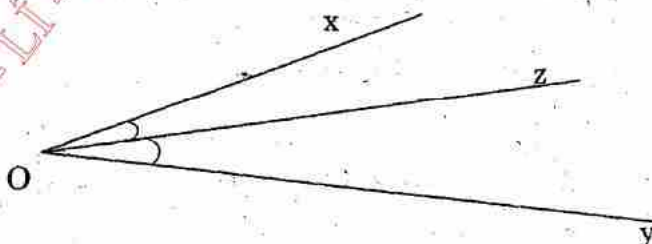
$$\bullet \widehat{DOE} = 5^\circ + 45^\circ = 50^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{AOB} = 45^\circ; \widehat{BOC} = 60^\circ \\ \widehat{COD} = 48^\circ; \widehat{DOE} = 50^\circ.$$

§ 6. TIA PHÂN GIÁC CỦA GÓC

§ 7. THỰC HÀNH ĐO GÓC TRÊN MẶT ĐẤT

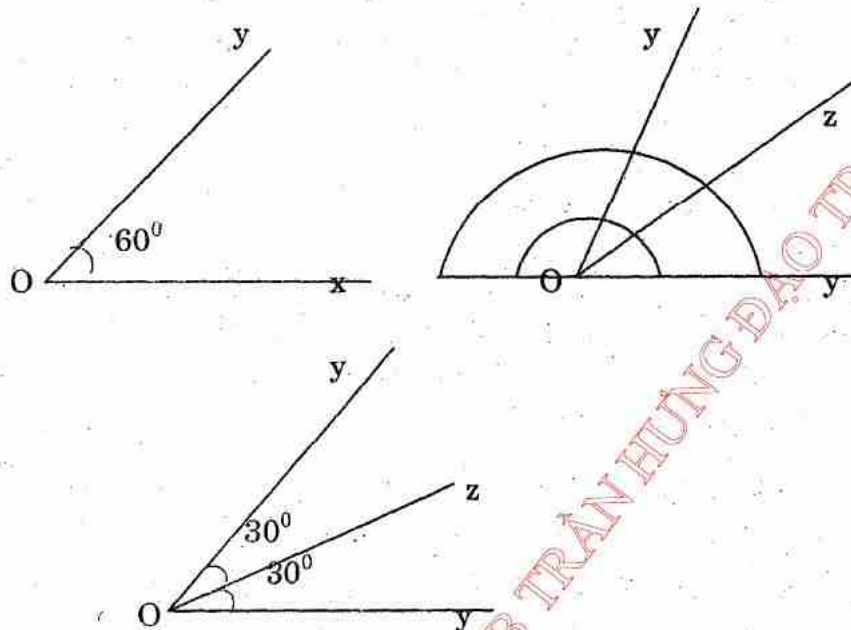
1. Tia phân giác của một góc:



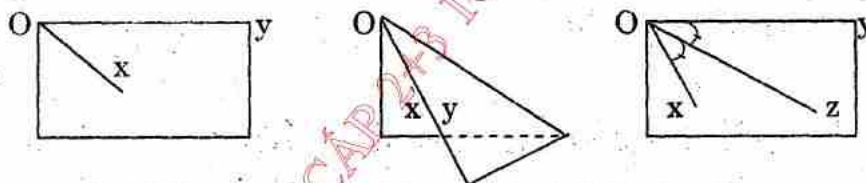
Tia phân giác của một góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau.

2. Cách vẽ tia phân giác của một góc:

Cách 1: Dùng thước đo góc



Cách 2: gấp giấy



Nhận xét: Mỗi góc (không phải là góc bẹt) chỉ có một tia phân giác.

3. Chú ý:

Đường thẳng chứa tia phân giác của một góc là đường phân giác của góc đó.

BÀI TẬP

Bài 26

Cho góc xOy , hãy xác định tia Oz nằm trong góc $\widehat{xOy}$ sao cho $\widehat{xOz} \leq \widehat{zOy}$.

Bài 27

Cho hai góc kề bù xOy và yOz . Vẽ tia phân giác Ou của góc $\widehat{xOy}$ và tia phân giác Ov của góc $\widehat{yOz}$.

Chứng tỏ rằng: $\widehat{uOv} = 90^\circ$.

Bài 28

Cho góc AOB. Gọi OC là tia phân giác của góc AOB, OD là tia phân giác của góc AOC. Tìm giá trị lớn nhất của góc AOD.

Bài 29

Cho góc tù xOy. Trong góc xOy vẽ tia Oz sao cho:

$$\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ.$$

Gọi Ot là tia phân giác của góc xOz. Hỏi góc yOt là góc gì?

Bài 30

Cho hai góc kề nhau xOy, xOz trong đó $\widehat{xOy} = \widehat{xOz} = \alpha$ ($\alpha > 90^\circ$).

Chứng tỏ rằng tia Ox không là tia phân giác của góc yOz.

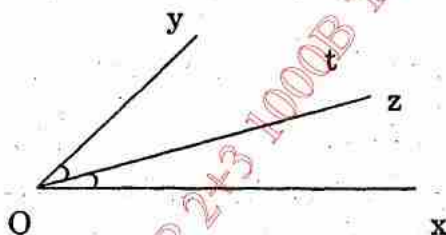
HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 26**

Vẽ tia phân giác Ot của góc xOy

$$\Rightarrow \widehat{xOt} = \widehat{tOy}$$

Xét ba trường hợp:

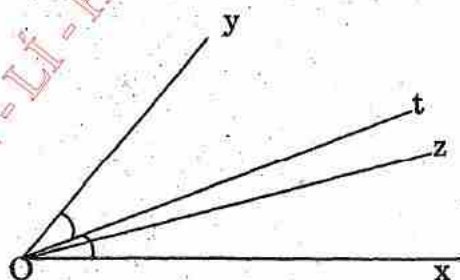
1) Tia Oz trùng với tia Ot:



Ta có: $\widehat{xOt} = \widehat{tOy}$

nên $\widehat{xOz} = \widehat{zOy}$

2) Tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Ot:



Tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Ot

Do đó $\widehat{xOz} < \widehat{xOt}$

mà $\widehat{xOt} = \widehat{tOy}$

nên $\widehat{xOz} < \widehat{tOy}$

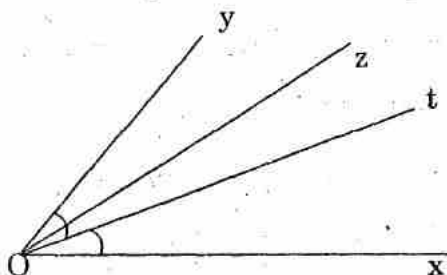
(1)

Mặt khác: tia Ot nằm giữa hai tia Oz và Oy nên:

$$\widehat{tOy} < \widehat{zOy} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{xOz} < \widehat{zOy}$

3) Tia Oz nằm giữa hai tia Ot và Oy:



Tia Oz nằm giữa hai tia Ot và Oy, nên:

$$\widehat{zOy} < \widehat{tOy}$$

$$\text{mà } \widehat{xOt} = \widehat{tOy}$$

$$\text{nên } \widehat{zOy} < \widehat{xOt} \quad (3)$$

Mặt khác: tia Ot nằm giữa hai tia Ox và Oz, nên:

$$\widehat{xOt} < \widehat{xOz} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{zOy} < \widehat{xOz}$

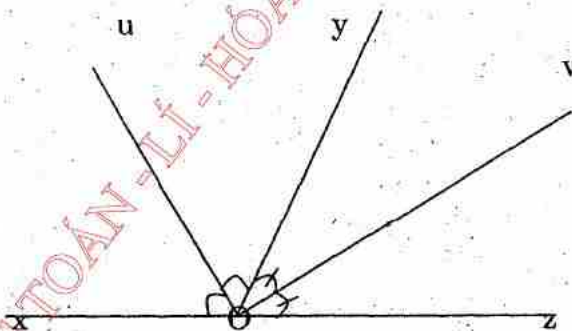
Tóm lại: nếu tia Oz nằm trong góc $\widehat{xOt}$ thì ta luôn có $\widehat{xOz} \leq \widehat{zOy}$.

Bài 27

Ta có: $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Tia Ou là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$, nên:

$$\widehat{xOu} = \widehat{uOy} = \frac{1}{2} \widehat{xOy}$$



Tia Ov là tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$, nên:

$$\widehat{yOv} = \widehat{vOz} = \frac{1}{2} \widehat{yOz}$$

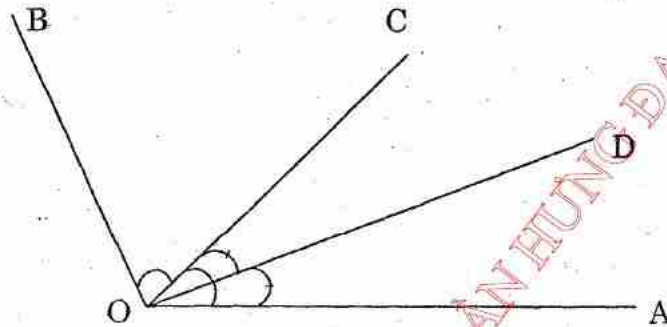
Vì tia Ou nằm giữa hai tia Ox, Oy và tia Ov nằm giữa hai tia Oy,

Oz nên tia Oy nằm giữa hai tia Ou và Ov.

$$\begin{aligned}\text{Do đó: } \widehat{uOv} &= \widehat{uOy} + \widehat{yOv} \\ &= \frac{1}{2} \widehat{xOy} + \frac{1}{2} \widehat{yOz} \\ &= \frac{1}{2} (\widehat{xOy} + \widehat{yOz}) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \widehat{uOv} = 90^\circ$$

Bài 28



Vì OC là tia phân giác của góc AOB nên:

$$\widehat{AOC} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$$

Vì OD là tia phân giác của góc AOC nên:

$$\widehat{AOD} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} \Rightarrow \widehat{AOD} = \frac{1}{4} \widehat{AOB}$$

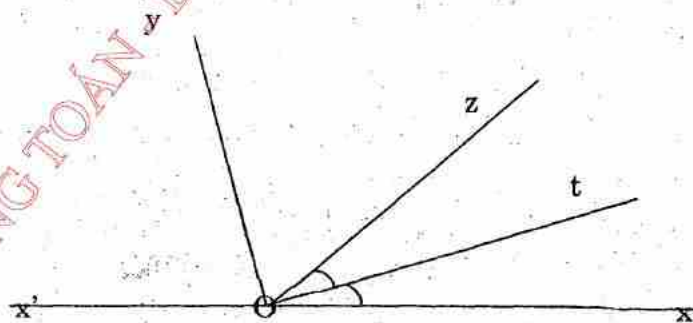
$$\text{mà } \widehat{AOB} \leq 180^\circ$$

$$\text{nên } \widehat{AOD} \leq \frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 45^\circ$$

Vậy: góc AOD có giá trị lớn nhất là 45° .

Bài 29

Vẽ tia Ox' là tia đối của tia Ox.



Ta có: $\widehat{xOy} + \widehat{x'Oy} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$ (theo đề bài)

$$\Rightarrow \widehat{x'Oy} = \widehat{yOz}$$

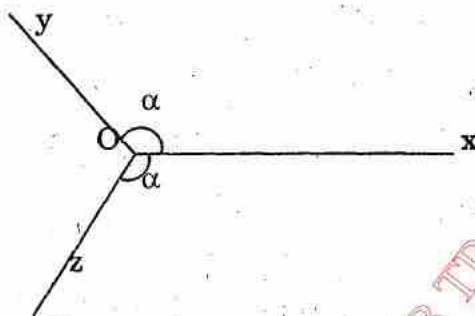
Vì tia Oy nằm giữa hai tia Oz và Ox', nên: tia Oy là tia phân giác của góc x'Oz.

Thế thì: hai tia Oy và Ot lần lượt là hai tia phân giác của hai góc kề bù x'Oz và xOz, nên: $\widehat{yOt} = 90^\circ$

Vậy: góc yOt là góc vuông.

Bài 30

Hai góc kề nhau $\widehat{xOy}$ và $\widehat{xOz}$ có:



$$\begin{aligned} \widehat{xOy} + \widehat{xOz} &= \alpha + \alpha = 2\alpha > 180^\circ \text{ (vì } \alpha > 90^\circ) \\ \Rightarrow \widehat{yOz} &= 360^\circ - 2\alpha < 180^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

Giả sử tia Ox nằm giữa hai tia Oy, Oz. Khi đó:

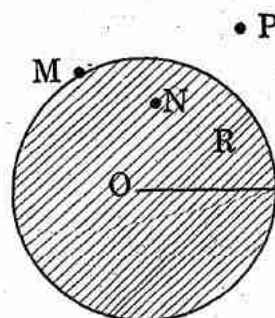
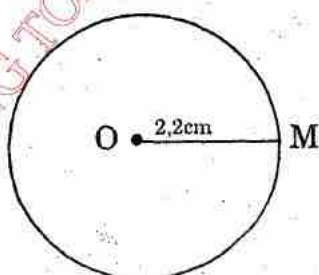
$$\widehat{yOz} = \widehat{yOx} + \widehat{xOz} = 2\alpha > 180^\circ \quad (2)$$

Ta có (1) và (2) mâu thuẫn nhau. Do đó: tia Ox không nằm giữa hai tia Oy, Oz. Vậy: Tia Ox không là tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$.

§8. ĐƯỜNG TRÒN

1. Đường tròn và hình tròn:

• Đường tròn tâm O, bán kính R là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R, kí hiệu: (O; R).



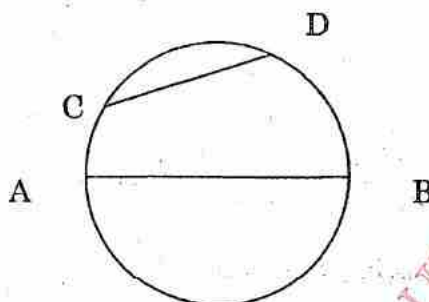
M là điểm nằm trên (thuộc) đường tròn $\Leftrightarrow OM = R$

N là điểm nằm bên trong đường tròn $\Leftrightarrow ON < R$

P là điểm nằm bên ngoài đường tròn $\Leftrightarrow OP > R$:

• Hình tròn là hình gồm các điểm nằm trên đường tròn và các điểm nằm bên trong đường tròn đó.

2. Cung và dây cung:



• Hai điểm nằm trên đường tròn chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần gọi là một cung tròn.

• Đoạn thẳng nối hai mút của cung là dây cung. Dây đi qua tâm là đường kính. Đường kính dài gấp đôi bán kính.

3. Một công dụng khác của compa:

Dùng compa có thể so sánh hai đoạn thẳng mà không đo độ dài từng đoạn thẳng.

BÀI TẬP

Bài 31

Cho hai điểm A, B cách nhau 4cm. Vẽ đường tròn (A; 3cm) và đường tròn (B; 2cm).

Gọi I và K lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng AB với hai đường tròn (B; 2cm) và (A; 3cm). Tính độ dài đoạn thẳng IK.

Bài 32

Cho đường tròn (O; 3cm) và A là một điểm nằm trên đường tròn này, vẽ đường tròn (A; 3cm)

a) Chứng tỏ rằng: điểm O thuộc đường tròn (A; 3cm)

b) Đường tròn (A; 3cm) cắt đường tròn (O; 3cm) tại hai điểm B và C. Chứng tỏ rằng; ba điểm A, B, C không cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 33

Cho ba điểm O, I, A thẳng hàng và $OA = 3\text{cm}$, $IA = 1\text{cm}$. Vẽ đường tròn (O; 3cm) và đường tròn (I; 1cm). Tính độ dài đoạn thẳng OI.

Bài 34

Cho đoạn thẳng AB dài 6cm. Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = 4\text{cm}$. Trên tia BA lấy hai điểm E, C sao cho: $BE = 1\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$.

a) Đường tròn (C; 2cm) có đi qua điểm D không?

b) Chứng tỏ rằng: điểm E nằm ngoài đường tròn (C; 2cm) và nằm trong đường tròn đường kính AB.

Bài 35

Cho đoạn thẳng OI dài 4cm. Vẽ đường tròn (O; 2cm) cắt OI tại A và đường tròn (I; 1cm) cắt OI tại B.

Chứng tỏ rằng: B là trung điểm của đoạn thẳng AI.

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 31**

Ta có:

$BI = 2\text{cm}$. Vì BI là bán kính của đường tròn (B; 2cm)

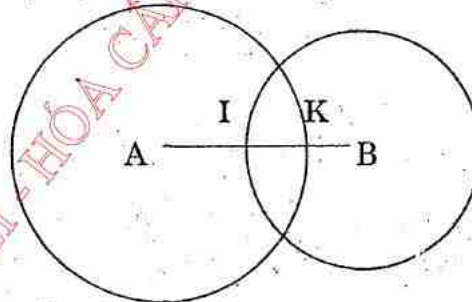
Trên tia BA có: $BI = 2\text{cm}$, $AB = 4\text{cm}$, vì $2\text{cm} < 4\text{cm}$ nên điểm I nằm giữa hai điểm A và B.

Ta có: $IA + IB = AB$.

$$IA + 2 = 4$$

$$IA = 4 - 2$$

$$IA = 2 (\text{cm}).$$



Vì AK là bán kính của đường tròn (A; 3cm) nên: $AK = 3\text{cm}$, I nằm giữa A và K nên:

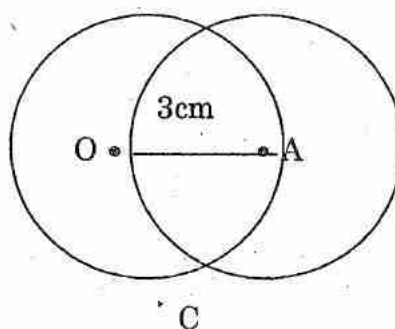
$$IA + IK = AK$$

$$2 + IK = 3$$

$$IK = 3 - 2$$

Vậy $IK = 1 (\text{cm}).$

B

Bài 32

a) Vì điểm A thuộc đường tròn $(O; 3\text{cm})$ nên:

$AO = 3\text{cm}$. Do vậy: điểm O thuộc đường tròn $(A; 3\text{cm})$

b) Nếu A, B, C thẳng hàng thì BC là dây cung của đường tròn $(A; 3\text{cm})$ đi qua tâm A, A là trung điểm của BC. Do đó: BC là đường kính, $BC = 6\text{cm}$.

Mặt khác: B, C cùng thuộc đường tròn $(O; 3\text{cm})$, nên:

$$BO = 3\text{cm}, CO = 3\text{cm}.$$

$$\text{Ta có: } BO + OC = 3 + 3 = 6 \text{ (cm)} = BC$$

Suy ra: O, B, C thẳng hàng. Vậy O là trung điểm của đoạn thẳng BC.

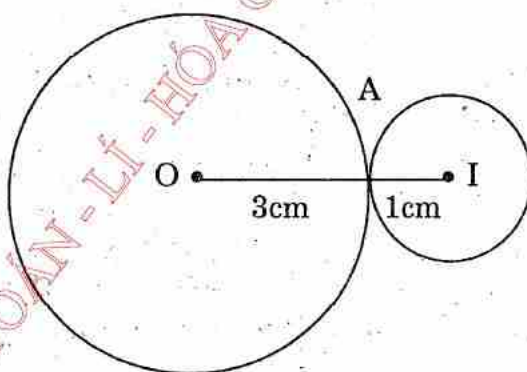
Thế thì: Hai điểm A, O cùng là trung điểm của BC nên: A trùng với O, điều này trái với đề bài là A cách O một khoảng bằng 3cm.

Vậy: Ba điểm A, B, C không cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 33

Xét hai trường hợp:

1) Điểm A nằm giữa hai điểm O và I:

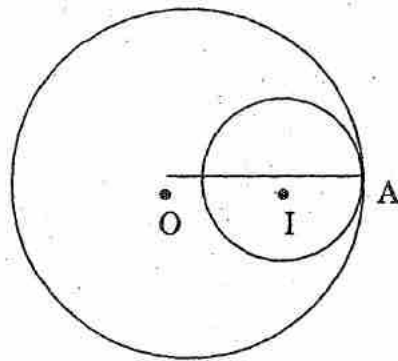


Điểm A nằm giữa hai điểm O và I, nên:

$$OI = OA + AI = 3 + 1 = 4 \text{ (cm)}$$

Vậy: $OI = 4\text{cm}$.

2) Điểm I nằm giữa hai điểm O và A.



Điểm I nằm giữa hai điểm O và A, nên:

$$OI + IA = OA$$

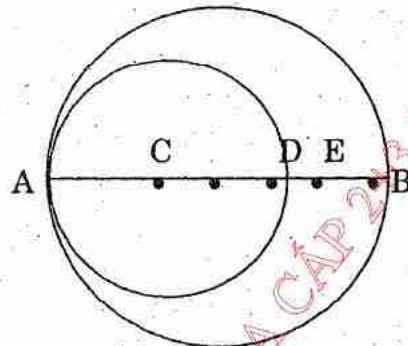
$$OI + 1 = 3$$

$$OI = 3 - 1$$

Vậy: $OI = 2$ (cm)

Bài toán: có hai đáp số $OI = 4$ cm hoặc $OI = 2$ cm

Bài 34



a) Trên tia BA có $BC = 4$ cm, $BA = 6$ cm. Vì 4 cm $<$ 6 cm nên: Điểm C nằm giữa hai điểm A và B.

Ta có: $AC + BC = AB$.

$$AC + 4 = 6$$

$$AC = 6 - 4$$

Vậy: $AC = 2$ (cm)

Trên tia AD có $AC = 2$ cm, $AD = 4$ cm. Vì 2 cm $<$ 4 cm, nên: điểm C nằm giữa hai điểm A và D.

Ta có: $AC + CD = AD$

$$2 + CD = 4$$

$$CD = 4 - 2$$

Vậy: $CD = 2$ (cm)

Do đó: Đường tròn (C; 2cm) đi qua điểm D

b) Trên tia BA có $BE = 1\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$. Vì $1\text{cm} < 4\text{cm}$, nên: điểm E nằm giữa hai điểm B và C.

Ta có: $BE + CE = BC$

$$1 + CE = 4$$

$$CE = 4 - 1$$

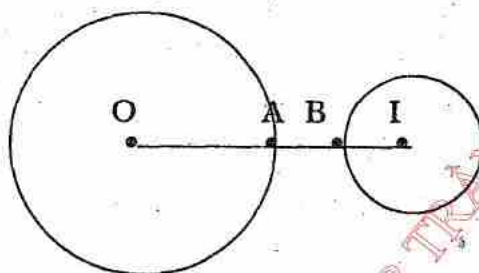
Vậy $CE = 3\text{ (cm)}$. Vì $CD = 2\text{cm}$, $CE = 3\text{cm}$

Nên $CE > CD$ ($3\text{cm} > 2\text{cm}$)

Do đó: điểm E nằm ngoài đường tròn (C; 2cm)

Mặt khác: Vì điểm E nằm giữa A và B nên E nằm trong đường tròn đường kính AB.

Bài 35



Vì điểm A thuộc đường tròn (O; 2cm) nên $OA = 2\text{cm}$

Trên tia OI có $OA = 2\text{cm}$, $OI = 4\text{cm}$. Vì $2\text{cm} < 4\text{cm}$ nên: điểm A nằm giữa O và I

Ta có: $OA + IA = OI$

$$2 + IA = 4$$

$$IA = 4 - 2$$

$$IA = 2\text{ (cm)}$$

Vì $1\text{cm} < 2\text{cm}$ nên: điểm B nằm giữa hai điểm I và A (1)

Ta có: $AB + IB = IA$

$$AB + 1 = 2$$

$$AB = 2 - 1$$

$$AB = 1\text{ (cm)}$$

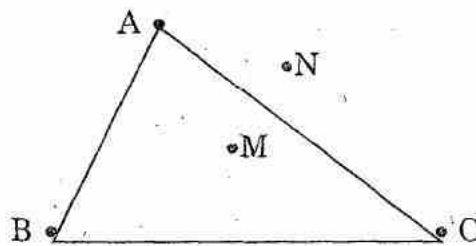
Do đó: $AB = IB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AI.

§9. TAM GIÁC

1. Tam giác ABC:

Tam giác ABC là hình gồm ba đoạn thẳng AB, BC, CA khi ba điểm A, B, C không thẳng hàng.



- Tam giác ABC được kí hiệu là ΔABC . Ta còn gọi tên và kí hiệu tam giác ABC là ΔBCA , ΔCAB , ΔACB , ΔCBA , ΔBAC .
 - Ba điểm A, B, C là ba đỉnh của tam giác.
 - Ba đoạn thẳng AB, BC, CA là ba cạnh của tam giác.
 - Ba góc BAC, CBA, ACB là ba góc của tam giác.
- Điểm M (nằm trong cả ba góc của tam giác) là điểm nằm bên trong tam giác. Điểm N (không nằm trong tam giác, không nằm trên cạnh nào của tam giác) là điểm nằm bên ngoài tam giác.

BÀI TẬP

Bài 36

Cho tam giác ABC. Đường thẳng d không đi qua đỉnh nào của tam giác và cắt cạnh BC của tam giác ABC. Chứng tỏ rằng: đường thẳng d cắt một và chỉ một trong hai cạnh còn lại.

Bài 37

Cho năm điểm A, B, C, D, E trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh là ba trong năm điểm nói trên?

Bài 38

Cho bốn điểm A, B, C, D. Khi tính số m tam giác có ba đỉnh là ba trong bốn điểm trên, bạn Du trả lời rằng: $m = 4$. Có đúng không? Giải thích.

Bài 39

Cho đường thẳng d không đi qua O. Trên d lấy sáu điểm A, B, C, D, E, F theo thứ tự đó. Có bao nhiêu tam giác nhận điểm O làm đỉnh và hai đỉnh kia là hai điểm trong sáu điểm đã cho?

Bài 40

Vẽ tam giác ABC biết $AB = 3\text{cm}$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $AC = 4\text{cm}$.

Hãy đo độ dài cạnh BC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

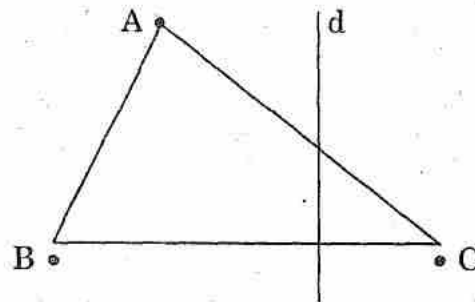
Bài 36

Đường thẳng d cắt cạnh BC mà hai điểm B và C không thuộc d

nên: hai điểm B, C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ d.

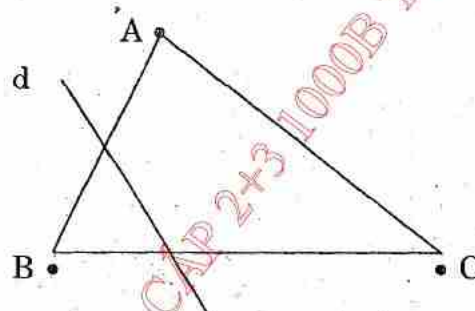
Xét hai trường hợp:

a) Nếu điểm A thuộc nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm B thì đường thẳng d cắt cạnh AC và d không cắt cạnh AB.



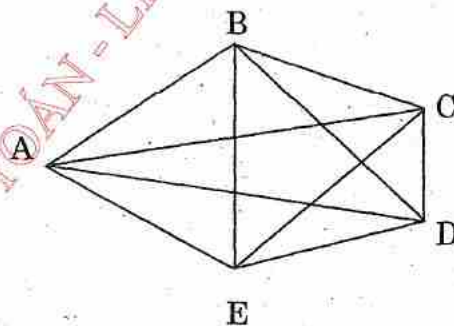
b) Nếu điểm A thuộc nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm C thì đường thẳng d cắt cạnh AB và d không cắt cạnh AC.

Tóm lại: Đường thẳng d cắt một và chỉ một trong hai cạnh AB và AC.



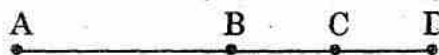
Bài 37

Có 10 tam giác mà các đỉnh là ba trong năm điểm đã cho, đó là các tam giác ABC, ABD, ABE, BCD, BCE, CDA, CDE, DEB, DEA, AEC.

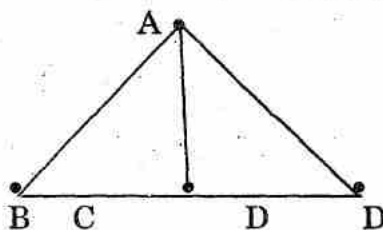


Bài 38

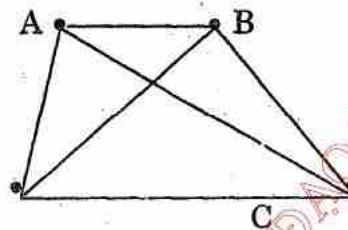
Bạn Du trả lời sai, vì bạn Du chưa xét đủ các trường hợp. Số tam giác có thể là 0 (hình a) hoặc 3 (hình b) hoặc 4 (hình c).



hình a



hình b

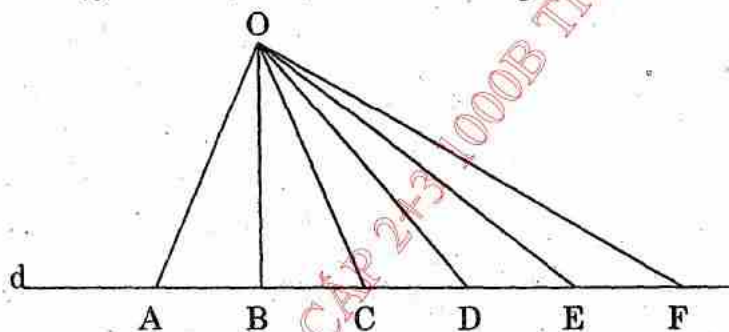


hình c

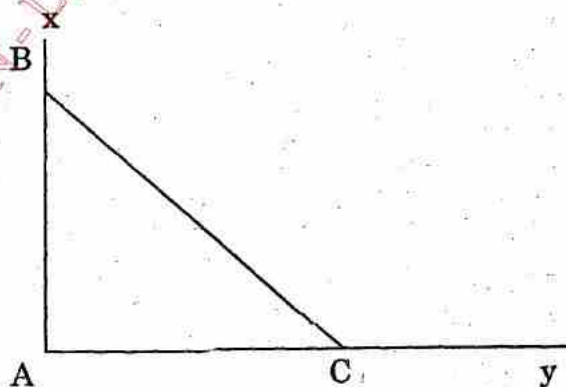
Bài 39

Từ sáu điểm A, B, C, D, E, F trên đường thẳng d, ta được bao nhiêu đoạn thẳng có hai đầu mút là hai điểm trong sáu điểm đã cho thì có bấy nhiêu tam giác nhận điểm O làm đỉnh.

Do vậy: có $6 \cdot (6 - 1) : 2 = 15$ tam giác.

**Bài 40**

• Dùng thước đo góc vẽ góc $\angle xAy = 90^\circ$. Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 3\text{cm}$. Trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = 4\text{cm}$. Nối A với C, ta được tam giác ABC cần vẽ.



- Dùng thước thẳng có chia khoảng mm, ta đo được độ dài đoạn thẳng BC là 5cm.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1

Chứng tỏ rằng:

- Tổng số đo (độ) của hai góc kề bù bằng 180° .
- Mọi góc có số đo (độ) không lớn hơn 180° .

Bài 2

Cho góc xOy. Hãy xác định vị trí của tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy sao cho:

- $\widehat{xOz} \leq \frac{1}{3} \widehat{yOz}$
- $\widehat{yOz} \leq \frac{1}{7} \widehat{xOz}$

Bài 3

Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ thuộc đường tròn (O; R)

- Kể tên các dây cung nếu $n = 5$
- Tính số lượng dây cung theo n;
- Chứng tỏ rằng: nếu các bộ ba điểm A_1, O và A_5 ; A_2, O và A_6 thẳng hàng thì: $A_1A_5 + A_2A_6 = 4R$.

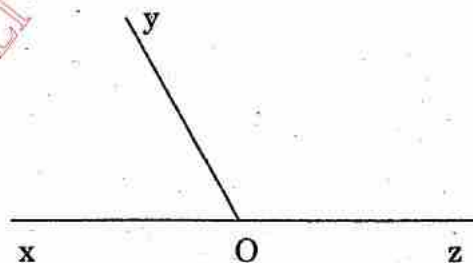
Bài 4

Cho năm điểm A, B, C, D, E. Cứ qua hai điểm ta vẽ một đoạn thẳng. Gọi m là số tam giác được tạo thành.

- Tính giá trị lớn nhất của m.
- Tính giá trị nhỏ nhất của m.

GỢI Ý

Bài 1



- Gọi hai góc xOy và yOz là hai góc kề bù. Tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz, nên $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$. Các tia Ox và Oz là hai tia đối nhau nên góc xOz là góc bẹt.

Do đó: $\widehat{xOz} = 180^\circ$.

Vậy: $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$

b) Nếu góc xOy có hai cạnh là hai tia Ox và Oy đối nhau thì $\widehat{xOy} = 180^\circ$. Còn nếu hai tia Ox và Oy không đối nhau, ta vẽ tia Oz là tia đối của tia $Ox \Rightarrow$ tia Oz không trùng với tia Oy . Các góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ kề bù nên: $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$. Vì $\widehat{yOz} > 0^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{xOy} < 180^\circ$.

Bài 3

c) Ba điểm A_1, O, A_5 thẳng hàng

$\Rightarrow A_1A_5$ là đường kính, ta có: $A_1A_5 = 2R$.

Ba điểm A_2, O, A_6 thẳng hàng

$\Rightarrow A_2A_6$ là đường kính, ta có: $A_2A_6 = 2R$

Do đó: $A_1A_5 + A_2A_6 = 2R + 2R = 4R$.

Bài 4

a) Nếu năm điểm A, B, C, D, E trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng thì m có giá trị lớn nhất là 10.

b) Nếu năm điểm A, B, C, D, E thẳng hàng thì m có giá trị nhỏ nhất là 0.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

10 BỘ ĐỀ TOÁN TỰ LUYỆN

BỘ ĐỀ 1

Bài 1

Cho $x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $-2005 < x \leq 2005$.

- Tính tổng các số nguyên x .
- Tính tích các số nguyên x .

Bài 2

Cho $A = \{2; 3; 5\}$.

- Trong hai cách viết: $A \subset \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{N}$. Cách nào đúng, cách nào sai?
- Hãy viết các tập hợp con của A ; A có mấy tập hợp con?

Bài 3

a) Tính:

$$A = \frac{-45.58 - 45.42}{2 + 4 + 6 + \dots + 16 + 18};$$

b) Tìm x biết:

$$1 - \left(5\frac{3}{8} + x - 7\frac{5}{24}\right) : \left(-16\frac{2}{3}\right) = 0.$$

Bài 4

a) Cho $B = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{60}$.

Chứng tỏ rằng B chia hết cho 6.

- Hiệu của hai số bằng 0,6. Thương của số nhỏ chia cho số lớn cũng bằng 0,6. Tìm hai số đó.

Bài 5

a) Cho góc $\widehat{AOB}$. Trong góc $\widehat{AOB}$ vẽ các tia OC ; OD sao cho $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$. Chứng tỏ rằng $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$;

b) Cho ΔABC . Gọi M là một điểm thuộc cạnh AC , gọi E là điểm thuộc cạnh AB .

Đường thẳng CE cắt cạnh AB của tam giác ABM . Giải thích vì sao CE cắt cạnh BM của tam giác ABM .

BỘ ĐỀ 2

Bài 1

Tính:

a) $1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + \dots + 601 - 602 - 603 + 604;$

b)
$$\frac{(140\frac{7}{3} - 138\frac{5}{12}) : 18\frac{1}{6}}{0,002}$$

Bài 2

Trong một lớp chọn của một trường chỉ có hai loại học sinh giỏi và khá. Cuối học kì I số học sinh giỏi bằng $\frac{2}{7}$ số học sinh khá. Đến cuối năm có thêm một học sinh khá được xếp vào loại giỏi nên số học sinh giỏi bằng $\frac{1}{3}$ số học sinh khá.

Hỏi lớp chọn đó có bao nhiêu học sinh?

Bài 3

Tính y:

$$\left(\frac{1}{24 \times 25} + \frac{1}{25 \times 26} + \dots + \frac{1}{29 \times 30}\right) \times 120 + y : \frac{1}{3} = -4;$$

Bài 4

a) Cho góc xOy có số đo bằng 120° ; Vẽ tia Oz sao cho:

$$\widehat{yOz} = 30^\circ.$$

Tính số đo góc xOz.

b) Cho ba điểm A, B, C cùng thuộc tia Ox và $OA < OB < OC$. Chứng tỏ rằng điểm B nằm giữa hai điểm A và C.

Bài 5

Tổ I có 12 học sinh, khi viết chính tả, bạn A mắc nhiều lỗi nhất 5 lỗi. Chứng tỏ rằng trong tổ I ấy có ít nhất là 3 bạn đã mắc một số lỗi bằng nhau? (Kể cả những bạn mắc 0 lỗi).

BỘ ĐỀ 3

Bài 1

Cho A và B biết:

$$A = \frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}} \text{ và } B = \frac{4}{35} + \frac{4}{63} + \frac{4}{99} + \frac{4}{143} + \frac{4}{195}$$

Hãy so sánh A và B.

Bài 2

Tìm x biết:

a) $60\%x + 0,4x + x : 3 = 2$.

b) $1\frac{3}{5} + \left(\frac{\frac{2}{7} + \frac{2}{17} + \frac{2}{37}}{\frac{5}{7} + \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} \right) \cdot x = \frac{16}{5}$.

Bài 3

Cho hai góc kề bù $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$. Gọi Ot là tia đối của tia Oy.

a) So sánh hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{zOt}$.

b) Trên đường thẳng yt lấy hai điểm A và B sao cho:

$$OA = 5\text{cm}, OB = 8\text{cm}.$$

Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Bài 4

Cho các tập hợp sau:

$$A = \{\text{quít, cam, xoài, mít, mận}\};$$

$$B = \{\text{ổi, cam, quít, chanh}\};$$

$$C = \{\text{mận, xoài, quít}\}.$$

a) Tìm các phần tử của tập hợp $(A \cap B) \cap C$;

b) Tìm tất cả các tập hợp con của tập hợp C.

Bài 5

a) Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh rằng $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

b) So sánh $(-2)^{3000}$ và $(-3)^{2000}$.

BỘ ĐỀ 4**Bài 1**

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

$$x + (x + 1) + \dots + 2002 + 2003 = 2003.$$

Bài 2

Trình bày cách tính nhanh các phép tính sau đây:

$$a) \frac{2^8 \cdot 6}{3^3 \cdot 5^4} : \frac{8^3 \cdot 9}{5^3 \cdot 3^3} - (2^{14} + 3^{19}) \cdot (3^{81} + 5^{64}) \cdot (2^4 - 4^2);$$

$$b) (-2) \cdot \left(\frac{1}{30 \cdot 32} + \frac{1}{32 \cdot 34} + \frac{1}{34 \cdot 36} \right).$$

Bài 3

Tìm số có bốn chữ số biết rằng số đó vừa chia hết cho 5 vừa chia hết cho 18 và có các chữ số hàng chục và hàng trăm đều là chữ số 8.

Bài 4

Giá vé vào cửa xem hội chợ là 10000 đồng/ một vé. Sau khi giảm giá vé thì số người mua vé tăng thêm 20% nên số tiền bán vé đã tăng thêm 8%. Hỏi giá mỗi vé sau khi đã giảm là bao nhiêu?

Bài 5

Cho tam giác ABC và I là điểm nằm giữa B và C.

a) Hãy liệt kê tên các tam giác có cạnh là cạnh AB.

b) Liệt kê tên tất cả các góc có đỉnh là I.

c) Biết số đo góc AIB là 68° . Tính số đo góc CIA?

d) Gọi Ix là tia đối của tia IA. So sánh số đo hai góc AIC và BIx.

BỘ ĐỀ 5**Bài 1**

Tìm x biết:

$$a) 26 + 5x = 3x - 56;$$

$$b) x + 2\frac{3}{5} = 9,13 + 1\frac{1}{4};$$

$$c) |x - 1| = 2.$$

Bài 2

Tính: a) $1998 \cdot 1998 - 2000 \cdot 1996;$

$$b) \frac{232323 \cdot 29}{23 \cdot 292929};$$

$$c) \frac{(2^{17} + 5^{17})(3^{14} - 5^{12})(2^4 - 4^2)}{15^2 + 5^3 + 65^7}.$$

Bài 3

Một người nhận may gia công 400 áo sơ mi xuất khẩu. Nếu mỗi chiếc áo may đúng chất lượng thì được trả 8000 đồng. Mỗi chiếc áo may không đúng chất lượng sẽ phải đền 12000 đồng. Sau khi may xong thì người đó lãnh được 2,6 triệu đồng. Hỏi người đó đã may được bao nhiêu chiếc áo đúng chất lượng?

Bài 4

Cho góc $\widehat{xOy} = 45^\circ$. Trên tia Ox lấy điểm A sao cho:

$$OA = 4\text{cm}.$$

Trên tia Oy lấy 2 điểm B và C sao cho:

$$OB = 5\text{cm và } BC = 3\text{cm}.$$

Nối AB, AC. Hỏi:

- 1) Có mấy tam giác được tạo thành? Gọi tên những tam giác đó?
- 2) Hãy vẽ và đặt tên cho các góc kề bù với góc AOB. Hãy tính số đo các góc này?
- 3) Tính độ dài đoạn thẳng OC.

Bài 5

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 40; 60; 120 được dư lần lượt là 35; 55; 115.

BỘ ĐỀ 6**Bài 1**

So sánh 333^{444} và 444^{333} .

Bài 2

Tìm tập hợp các số nguyên x để $3x - 8$ là bội của $x - 5$.

Bài 3

a) Tìm x biết: $\frac{\frac{3}{4}x + 2}{20} - 5 = \frac{3}{8};$

b) Tính (trình bày cách tính hợp lý nếu có thể):

$$\frac{1}{420} + \frac{1}{21.22} + \frac{1}{506} + \frac{1}{23.24}.$$

Bài 4

Mỗi tháng, lương của anh Việt nhiều hơn lương của anh Nam là 40000đ. Sau khi anh Nam tiêu xài hết $\frac{1}{4}$ lương và anh Việt tiêu xài hết

$\frac{2}{7}$ lương thì số lương còn lại của mỗi người bằng nhau. Hỏi tiền lương hàng tháng của mỗi anh?

Bài 5

Cho ba điểm A, B, C nằm trên tia Ox. M là điểm nằm ngoài đường thẳng AB. Nối điểm M với các điểm: O, A, B, C.

1) Trong hình vẽ trên, hãy liệt kê tên các tam giác có cạnh là MO.

2) Nếu biết $AB = 3\text{cm}$; $AC = 5\text{cm}$; $BC = 8\text{cm}$. Hỏi:

a) Trong ba tia MA; MB; MC thì tia nào nằm giữa hai tia còn lại?

Vì sao?

b) Hãy viết góc OMA dưới dạng tổng các góc khác? Kể ra tất cả các cách viết.

BỘ ĐỀ 7

Bài 1

a) Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 20 + (7\frac{1}{3} - 6\frac{7}{8}) : \frac{3}{4} - (5\frac{1}{4} - 4\frac{21}{40}) : 1\frac{9}{20};$$

b) Tìm x biết:

$$1 + 1,03 : [10,3 (x - 1)] = 11.$$

Bài 2

Tính nhanh:

$$-24 \cdot \frac{373737}{424242} + \frac{-373737}{565656}.$$

Bài 3

Tuổi mẹ hiện nay gấp 2,5 lần tuổi con; 8 năm trước đây tuổi mẹ gấp 4 lần tuổi con.

Tính tuổi mẹ và tuổi con hiện nay.

Bài 4

a) Hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau ở điểm O. Kể tên những góc được tạo thành.

b) Cho tam giác ABC và đường thẳng d không qua đỉnh nào của nó. Nếu đường thẳng d cắt hai cạnh AB, AC của tam giác ABC thì nó cắt cạnh BC không? Vì sao?

Bài 5

Một người được phân công đi mua bốn khóa xe đạp, trong giống hệt nhau và chìa khóa cũng có vẻ giống nhau nhưng mỗi khóa đều có chìa

khóa riêng thích hợp; vì sợ ý người đó để lộn các chìa khóa.

Hỏi phải thử nhiều nhất là bao nhiêu lần để tìm ra chìa khóa thích hợp cho mỗi khóa.

BỘ ĐỀ 8

Bài 1

Thực hiện phép tính sau:

$$a) \left(\frac{13}{96} \cdot 1,6 - 2,5 \cdot \frac{7}{180} \right) : 2 \frac{7}{18} + 4 \frac{1}{2} \cdot 0,1;$$

$$b) \left(\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 14} \right) \cdot (-75 + 15 : 3).$$

Bài 2

Tìm x biết:

$$a) 6 : \left(\frac{\frac{3}{5}x + 3}{20} + 9 \right) = \frac{3}{5};$$

$$b) |x + 3| = |-9|.$$

Bài 3

a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng. Tìm độ dài đoạn thẳng BC biết $AB = 2,7\text{cm}$; $AC = 3,2\text{cm}$.

Bài toán có mấy đáp số?

b) Tia Oz có nằm giữa hai tia Ox, Oy không; nếu biết:

$$\widehat{xOz} = 50^\circ; \widehat{xOy} = 40^\circ$$

Bài 4

$$\text{Chứng tỏ rằng: } \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}.$$

Bài 5

Tuổi ba anh em cộng lại là 60. Biết rằng $\frac{3}{4}$ tuổi của em út bằng 0,6 tuổi anh thứ hai và bằng 50% tuổi của anh cả. Hỏi tuổi của mỗi người là bao nhiêu?

BỘ ĐỀ 9**Bài 1**

Tìm 3,3% của A.

$$A = 10101 \cdot \left(\frac{5}{111111} + \frac{5}{333333} - \frac{4}{111111} \right).$$

Bài 2

Cho $n \in \mathbb{N}$. Chứng tỏ rằng tích $(7^n + 1)(7^n + 2)$ chia hết cho 6.

Bài 3

Thực hiện phép tính:

$$-\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{225}\right) \left(1 - \frac{1}{226}\right) + 1\frac{1}{5}.$$

Bài 4

Trong một lớp chọn của một trường chỉ có hai loại học sinh giỏi và khá. Cuối học kì I số học sinh giỏi bằng $\frac{2}{5}$ số học sinh khá. Đến cuối năm có thêm 2 học sinh khá được xếp vào loại giỏi nên số học sinh giỏi bằng $\frac{5}{9}$ số học sinh khá.

Tính số học sinh của lớp.

Bài 5

Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C sao cho $AB = 4\text{cm}$; $AC = 6\text{cm}$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = AC$.

- 1) Giải thích vì sao các tia BD, BC trùng nhau.
- 2) Chứng tỏ $AB = CD$.

BỘ ĐỀ 10**Bài 1. Thực hiện phép tính:**

a) $A = (2006 - 1) \cdot (2006 - 2) \cdot (2006 - 3) \dots$ (có 2006 thừa số).

$$\text{b) } B = \frac{-1}{1.2} + \frac{-1}{2.3} + \frac{-1}{3.4} + \dots + \frac{-1}{1999.2000} + \frac{1}{2000}.$$

Bài 2

So sánh phân số: a) $\frac{1919.161616}{323232.3838}$ và $\frac{25}{102}$;

b) $\frac{1999.2000}{1999.2000 + 1}$ và $\frac{2000.2001}{2000.2001 + 1}$

Bài 3

Trong một cuộc thi có 20 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được 10 điểm; mỗi câu trả lời sai bị trừ 5 điểm. Một học sinh được tất cả 50 điểm. Hỏi bạn đó trả lời đúng bao nhiêu câu?

Bài 4

- a) Cho điểm C nằm giữa hai điểm A và B; điểm D nằm giữa hai điểm A và C. Chứng tỏ rằng điểm C nằm giữa hai điểm D và B.
b) Chứng tỏ rằng mọi góc đều có số đo không lớn hơn 180° .

Bài 5

Có 33 con chim đậu trên một sân hình vuông cạnh 4m. Chứng tỏ rằng ít nhất có ba con chim đậu bên trong hoặc trên cạnh của một hình vuông cạnh 1m.

MỤC LỤC

PHẦN SỐ HỌC

Chương I

ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

§ 1. Tập hợp - Phần tử của tập hợp	5
§ 2. Tập hợp các số tự nhiên	7
§ 3. Ghi số tự nhiên	10
§ 4. Số phần tử của một tập hợp. Tập hợp con	15
§ 5. Phép cộng và phép nhân	16
§ 6. Phép trừ và phép chia	20
§ 7. Lũy thừa với số mũ tự nhiên. Nhân hai lũy thừa cùng cơ số	27
§ 8. Chia hai lũy thừa cùng cơ số	31
§ 9. Thứ tự thực hiện các phép tính	34
§ 10. Tính chất chia hết của một tổng	37
§ 11. Dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5	41
§ 12. Dấu hiệu chia hết cho 3, cho 9	43
§ 13. Ước và bội	47
§ 14. Số nguyên tố. Hợp số	50
§ 15. Phân tích một số ra thừa số nguyên tố	54
§ 16. Ước chung và bội chung	59
§ 17. Ước chung lớn nhất	60
§ 18. Bội chung nhỏ nhất	67

Ôn tập chương I

Chương II

SỐ NGUYÊN

§ 1. Làm quen với số nguyên âm	75
§ 2. Tập hợp các số nguyên	78
§ 3. Thứ tự trong tập hợp các số nguyên	81
§ 4. Cộng hai số nguyên cùng dấu	85
§ 5. Cộng hai số nguyên khác dấu	89
§ 6. Tính chất của phép cộng các số nguyên	91
§ 7. Phép trừ hai số nguyên	94
§ 8. Quy tắc dấu ngoặc	99

§ 9. Quy tắc chuyển vế	103
§ 10. Nhân hai số nguyên khác dấu	107
§ 11. Nhân hai số nguyên cùng dấu	110
§ 12. Tính chất của phép nhân	113
§ 13. Bội và ước của một số nguyên	118
Ôn tập chương II	124

Chương III PHÂN SỐ

§ 1. Mở rộng khái niệm phân số	128
§ 2. Phân số bằng nhau	130
§ 3. Tính chất cơ bản của phân số	133
§ 4. Rút gọn phân số	136
§ 5. Quy đồng mẫu nhiều phân số	140
§ 6. So sánh phân số	142
§ 7. Phép cộng phân số	145
§ 8. Tính chất cơ bản của phép cộng phân số	148
§ 9. Phép trừ phân số	152
§ 10. Phép nhân phân số	156
§ 11. Tính chất cơ bản của phép nhân phân số	158
§ 12. Phép chia phân số	163
§ 13. Hỗn số. Số thập phân. Phần trăm.	165
§ 14. Tìm giá trị phân số của một số cho trước.	168
§ 15. Tìm một số biết giá trị một phân số của nó	170
§ 16. Tìm tỉ số của hai số	174
Ôn tập chương III	178

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I ĐOẠN THẲNG

§ 1. Điểm. Đường thẳng	187
§ 2. Ba điểm thẳng hàng	190
§ 3. Đường thẳng đi qua hai điểm	193
§ 4. Thực hành: Trồng cây thẳng hàng	193

§ 5. Tia	196
§ 6. Đoạn thẳng	198
§ 7. Độ dài đoạn thẳng	201
§ 8. Khi nào thì $\widehat{AM} + \widehat{MB} = \widehat{AB}$?	203
§ 9. Vẽ đoạn thẳng cho biết độ dài	205
§ 10. Trung điểm của đoạn thẳng	208
Ôn tập chương I	212

Chương II GÓC

§ 1. Nửa mặt phẳng	214
§ 2. Góc	218
§ 3. Số đo góc	221
§ 4. Khi nào thì $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$?	225
§ 5. Vẽ góc cho biết số đo	229
§ 6. Tia phân giác của góc	233
§ 7. Thực hành đo góc trên mặt đất	233
§ 8. Đường tròn	238
§ 9. Tam giác	243
Ôn tập chương II	247
Ôn tập cuối năm	249