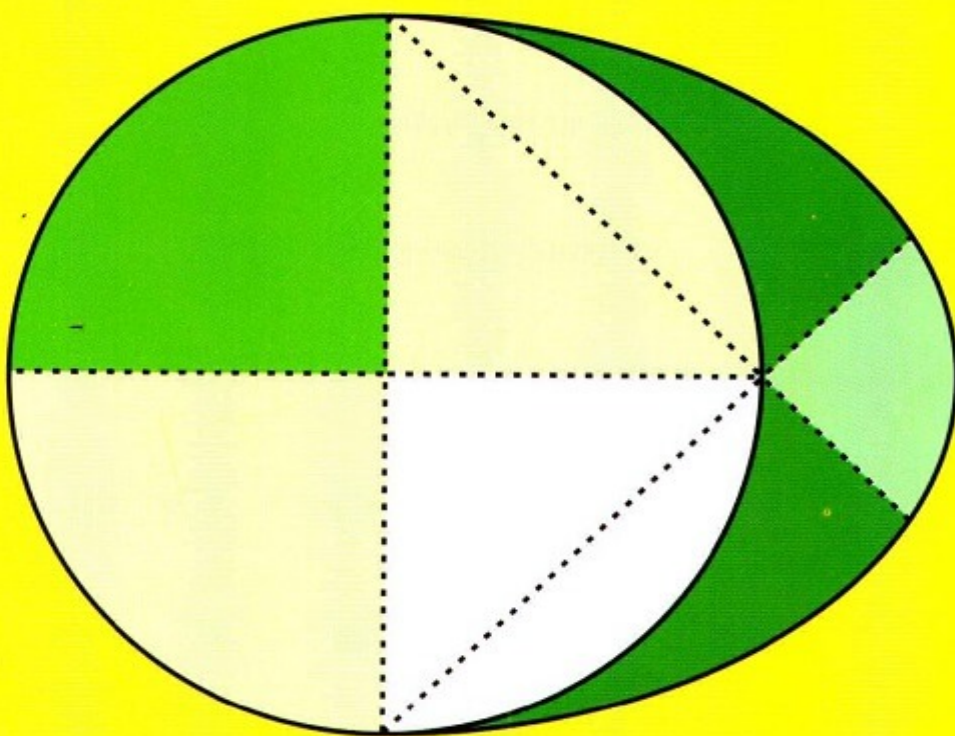


VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN

6

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

**NÂNG CAO
VÀ PHÁT TRIỂN
TOÁN 6**

(Tái bản lần thứ mười lăm)

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

SỐ HỌC: PHÂN SỐ

Phần I

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP ỨNG DỤNG

§13. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN SỐ. RÚT GỌN PHÂN SỐ

Số có dạng $\frac{a}{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ gọi là phân số. Số nguyên n được đồng nhất với phân số $\frac{n}{1}$.

Tính chất cơ bản của phân số: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a : n}{b : n}$ với $m \in \mathbb{Z}$; $m \neq 0$, $n \in \text{ƯC}(a, b)$.

Nếu $(|a|, |b|) = 1$ thì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Nếu $\frac{m}{n}$ là dạng tối giản của phân số $\frac{a}{b}$ thì tồn tại số nguyên k sao cho $a = mk$, $b = nk$.

Ví dụ 98. Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{n+10}{2n-8}$ có giá trị là một số nguyên.

Giải. Để phân số A có giá trị là một số nguyên thì tử phải chia hết cho mẫu. Ta có:

$$\begin{aligned} & n + 10 : 2n - 8 \\ \Rightarrow & n + 10 : n - 4 \\ \Rightarrow & n - 4 + 14 : n - 4 \\ \Rightarrow & 14 : n - 4. \end{aligned}$$

Do đó $n - 4$ phải là ước của 14. Các ước của 14 là $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$.

Ta có nhận xét $n - 4 \geq -4$ (vì n là số tự nhiên) nên $n - 4$ chỉ nhận các giá trị: $\pm 1, \pm 2, 7, 14$. Ta có:

$n - 4$	1	-1	2	-2	7	14
n	5	3	6	2	11	18
A	$\frac{15}{2}$ loại	$\frac{13}{-2}$ loại	$\frac{16}{4} = 4$	$\frac{12}{-4} = -3$	$\frac{21}{14}$ loại	$\frac{28}{28} = 1$

Ta tìm được ba giá trị của n :

Với $n = 6$ thì $A = 4$, với $n = 2$ thì $A = -3$, với $n = 18$ thì $A = 1$.

Chú ý. Các giá trị của n bằng 5, 3, 11 làm cho giá trị tương ứng của A không là số nguyên. Sở dĩ ta phải tính giá trị của A mới kết luận được n bằng 6, 2, 18 vì trong lời giải trên ta chỉ có : " $n + 10 : 2n - 8 \Rightarrow n + 10 : n - 4$ " chứ không có điều ngược lại.

Ví dụ 99. Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$ rút gọn được.

Giải. Giả sử tử và mẫu của phân số cùng chia hết cho số nguyên tố $d \Rightarrow 7(6n+4) - 2(21n+3)$ chia hết cho $d \Rightarrow 22$ chia hết cho số nguyên tố $d \Rightarrow d \in \{2; 11\}$.

Như vậy nếu phân số A rút gọn được cho số nguyên tố d thì $d = 2$ hoặc $d = 11$.

Trường hợp phân số rút gọn cho 2 : Ta luôn luôn có $6n + 4$ chia hết cho 2, còn $21n + 3$ chia hết cho 2 nếu n lẻ.

Trường hợp phân số rút gọn cho 11: Ta có $21n + 3$ chia hết cho 11 $\Rightarrow 22n - n + 3$ chia hết cho 11 $\Rightarrow n - 3$ chia hết cho 11. Đảo lại với $n = 11k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $21n + 3$ và $6n + 4$ chia hết cho 11.

Vậy với n lẻ hoặc n chẵn mà $n = 11k + 3$ thì phân số A rút gọn được.

Chú ý rằng n chẵn khi và chỉ khi k lẻ ($k = 2m + 1$) nên kết quả trên có thể viết là $n = 2m + 1$ hoặc $n = 2(11m + 7)$ với $m \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 100. Tìm các số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$,

$$\frac{b}{c} = \frac{12}{21}, \frac{c}{d} = \frac{6}{11}.$$

Giải. Rút gọn $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$. Các phân số $\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{6}{11}$ tối giản nên tồn tại các số tự nhiên k, n, m sao cho $a = 3k, b = 5k, b = 4n, c = 7n, c = 6m, d = 11m$.

Từ các đẳng thức $5k = 4n$ và $7n = 6m$ ta có $4n$ chia hết cho 5, $7n$ chia hết cho 6, mà $(4, 5) = 1, (7, 6) = 1$ nên n chia hết cho 5, n chia hết cho 6. Mặt khác $(5, 6) = 1$, do đó n chia hết cho 30.

Để các số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất và phải khác 0, ta chọn n nhỏ nhất bằng 30. Suy ra $k = 24, m = 35$.

Vậy $a = 72, b = 120, c = 210, d = 385$.

BÀI TẬP

396. Rút gọn các phân số sau :

a) $\frac{199 \dots 9}{99 \dots 95}$ (10 chữ số 9 ở tử, 10 chữ số 9 ở mẫu);

b) $\frac{12\ 12\ 12}{42\ 42\ 42}$;

c) $\frac{187\ 187\ 187}{221\ 221\ 221}$;

d) $\frac{3.7.13.37.39 - 10101}{505050 + 70707}$.

397. Chứng minh rằng các phân số sau có giá trị là số tự nhiên :

a) $\frac{10^{2002} + 2}{3}$;

b) $\frac{10^{2003} + 8}{9}$.

398. Chứng minh rằng các phân số sau bằng nhau :

a) $\frac{1717}{2929}$ và $\frac{171717}{292929}$.

b) $\frac{3210 - 34}{4170 - 41}$ và $\frac{6420 - 68}{8340 - 82}$.

c) $\frac{2106}{7320}, \frac{4212}{14640}$ và $\frac{6318}{21960}$.

399. Tìm các số nguyên x, y biết rằng :

a) $\frac{x}{3} = \frac{5}{y}$; b) $\frac{x}{y} = \frac{28}{35}$.

400. Tìm các số phân số $\frac{a}{b}$ có giá trị bằng :

a) $\frac{36}{45}$, biết BCNN $(a, b) = 300$;

b) $\frac{21}{35}$, biết ƯCLN $(a, b) = 30$;

c) $\frac{15}{35}$, biết ƯCLN $(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b) = 3549$.

401. Chứng minh rằng hai phân số sau tối giản với mọi số tự nhiên n :

a) $\frac{n+1}{2n+3}$; b) $\frac{2n+3}{4n+8}$; c) $\frac{3n+2}{5n+3}$.

402. Cho phân số $A = \frac{63}{3n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) Với giá trị nào của n thì A rút gọn được ?

b) Với giá trị nào của n thì A là số tự nhiên ?

403. Tìm các số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản :

a) $\frac{2n+3}{4n+1}$; b) $\frac{3n+2}{7n+1}$; c) $\frac{2n+7}{5n+2}$.

404. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên.

405. Tìm các số nguyên n sao cho các phân số sau có giá trị là số nguyên :

a) $\frac{12}{3n-1}$; b) $\frac{2n+3}{7}$.

406. Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$:

a) Có giá trị là số tự nhiên ;

b) Là phân số tối giản ;

c) Với giá trị nào của n trong khoảng từ 150 đến 170 thì phân số A rút gọn được ?

407. Tìm các phân số tối giản nhỏ hơn 1 có tử và mẫu đều dương, biết rằng tích của tử và mẫu của phân số bằng 120.

408. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản :

$$\frac{5}{n+8}, \frac{6}{n+9}, \frac{7}{n+10}, \dots, \frac{17}{n+20}.$$

409. Cho ba phân số $\frac{15}{42}, \frac{49}{56}, \frac{36}{51}$. Biến đổi ba phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ hai, mẫu của phân số thứ hai bằng tử của phân số thứ ba.

410. Tìm các phân số lớn hơn $\frac{1}{5}$ và khác số tự nhiên biết rằng nếu lấy mẫu nhân với một số, lấy tử cộng với số đó thì giá trị của phân số không đổi.

411. Cho phân số :

$$A = \frac{23+22+21+\dots+13}{11+10+9+\dots+1}.$$

Hãy nêu cách xoá một số hạng ở tử và một số hạng ở mẫu của A để được một phân số mới vẫn bằng phân số A.

412. Đố-vui : Bộ sử Hu-me

Người Anh có thói quen xếp bộ sử nước Anh của Hu-me gồm chín tập ở tủ sách đặc biệt gồm hai ngăn : ngăn trên xếp năm cuốn, ngăn dưới xếp bốn cuốn, ở gáy các cuốn sách đó ghi các số 1, 2, 3, ..., 9. Nếu chủ nhân xếp $\frac{13458}{6729}$ (phân số này có giá trị bằng 2) thì chứng tỏ chủ nhân đã đọc hai tập (riêng trường hợp mới đọc một tập thì xếp $\frac{12345}{6789}$). Hãy nêu cách xếp chín cuốn sách đó để chứng tỏ chủ nhân của bộ sách đã đọc 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tập.

~ Ví dụ 130.

Bài tập 444, 489, 519, 520.

§14. SO SÁNH PHÂN SỐ

Xem chuyên đề *Bất đẳng thức*.

~ Ví dụ 116 đến 118, 121, 132.

Bài tập 459 đến 465, 469, 488.

§15. CÁC PHÉP TÍNH VỀ PHÂN SỐ

Ví dụ 101. Rút gọn:

$$A = \frac{2 - \frac{2}{19} + \frac{2}{43} - \frac{2}{1943}}{3 - \frac{3}{19} + \frac{3}{43} - \frac{3}{1943}} : \frac{4 - \frac{4}{29} + \frac{4}{41} - \frac{4}{2941}}{5 - \frac{5}{29} + \frac{5}{41} - \frac{5}{2941}}$$

Giải.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{1943}\right)}{3\left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{1943}\right)} : \frac{4\left(1 - \frac{1}{29} + \frac{1}{41} - \frac{1}{2941}\right)}{5\left(1 - \frac{1}{29} + \frac{1}{41} - \frac{1}{2941}\right)} \\ &= \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Ví dụ 102.

a) Từ các kết quả sau, hãy rút ra nhận xét và chứng minh nhận xét ấy :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};$$

$$\frac{3}{1} - \frac{2}{1} = 1.$$

$$\frac{7}{16} \cdot \frac{7}{23} = \frac{7}{16} - \frac{7}{23};$$

$$\frac{23}{7} - \frac{16}{7} = 1.$$

b) Tính $A = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{15} + \dots + \frac{4}{95} \cdot \frac{4}{99}.$

Giải. a) *Nhận xét:* Nếu hai phân số có hiệu các nghịch đảo bằng 1 thì tích của hai phân số ấy bằng hiệu của chúng.

Chứng minh: Xét hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ có $\frac{d}{c} - \frac{b}{a} = 1$ (1).

Cần chứng minh rằng $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}.$

Ta có : $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ (2).

Từ (1) suy ra $\frac{ad - bc}{ac} = 1 \Rightarrow ad - bc = ac$ (3).

Thay (3) vào (2) : $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$

b) Mỗi số hạng của tổng A là tích của hai phân số có hiệu các nghịch đảo bằng 1 (vì $\frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1, \frac{11}{4} - \frac{7}{4} = 1, \dots, \frac{99}{4} - \frac{95}{4} = 1$). Do đó theo nhận xét ở câu a) ta có :

$$A = \frac{4}{3} - \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{4}{11} + \frac{4}{11} - \frac{4}{15} + \dots + \frac{4}{95} - \frac{4}{99} = \frac{4}{3} - \frac{4}{99} = \frac{128}{99}.$$

Ví dụ 103. Tìm các số nguyên x, y sao cho :

$$\frac{3}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}.$$

Giải.

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{6} - \frac{y}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2y}{6} = \frac{5 - 2y}{6}.$$

Do đó $x(5 - 2y) = 18 = 2 \cdot 3^2.$

Do x và y là các số nguyên nên $5 - 2y$ là ước của 18, mặt khác $5 - 2y$ là số lẻ. Ước lẻ của 18 là $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Ta có :

$5 - 2y$	1	-1	3	-3	9	-9
$2y$	4	6	2	8	-4	14
y	2	3	1	4	-2	7
x	18	-18	6	-6	2	-2

Có sáu cặp số x, y ở bảng trên thoả mãn bài toán.

BÀI TẬP

413. Thực hiện các phép tính :

a) $\frac{2}{5} + \frac{-1}{6} - \frac{3}{4} - \frac{-2}{3};$

b) $\frac{7}{10} - \frac{-3}{4} + \frac{-5}{6} - \frac{1}{5} + \frac{-2}{3};$

c) $\frac{\left(\frac{1}{2} - 0,75\right) \cdot \left(0,2 - \frac{2}{5}\right)}{\frac{5}{9} - 1\frac{1}{12}};$

d) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{14}}{-1 - \frac{3}{7} + \frac{3}{28}}.$

414. Tính nhanh các biểu thức sau :

a) $\left(\frac{84}{13}\right)^2 + \left(\frac{35}{13}\right)^2;$

b) $\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{169} + \frac{3}{91}}{7 + \frac{7}{13} + \frac{7}{169} + \frac{7}{91}};$

c) $\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10}{3 \cdot 4 + 6 \cdot 8 + 9 \cdot 12 + 12 \cdot 16 + 15 \cdot 20}.$

415. Tìm x , biết :

a) $\frac{3}{4}x + 1 = -2;$

b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} : x = -1;$

c) $|2x - 1| = 5.$

416. Tìm các giá trị nguyên của n để các phân số sau có giá trị là số nguyên :

$$\text{a) } A = \frac{3n+4}{n-1}; \quad \text{b) } B = \frac{6n-3}{3n+1}.$$

417. Thực hiện các phép tính :

$$\text{a) } A = \frac{1,6 : \left(1\frac{3}{5} \cdot 1,25\right)}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(1,08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{\left(5\frac{5}{9} - 2\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}} + 0,6 \cdot 0,5 : \frac{2}{5};$$

$$\text{b) } B = 8\frac{1}{5} \cdot \left(11\frac{94}{1591} - 6\frac{38}{1517}\right) : 8\frac{11}{43};$$

$$\text{c) } C = 10101 \cdot \left(\frac{5}{111111} + \frac{5}{222222} - \frac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}\right).$$

418. a) Tìm các số tự nhiên a, b sao cho :

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{2+3}.$$

b) Tìm các số tự nhiên a, b, c sao cho :

$$\frac{52}{9} = 5 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}.$$

c) Tìm các chữ số a, b, c khác nhau sao cho :

$$\overline{a, bc} : (a + b + c) = 0,25.$$

419. Tính tổng các phân số tối giản lớn hơn 15 nhưng nhỏ hơn 30 và có mẫu bằng 17.

420. Tìm các số tự nhiên x và y sao cho :

$$\text{a) } \frac{x}{3} - \frac{4}{y} = \frac{1}{5}; \quad \text{b) } \frac{4}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}.$$

421. Tìm các số nguyên x và y sao cho :

$$\text{a) } \frac{5}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}; \quad \text{b) } \frac{x}{6} - \frac{2}{y} = \frac{1}{30}.$$

422. Chứng minh rằng các phân số sau có thể viết được dưới dạng tổng các phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau :

$$\text{a) } \frac{1}{6}; \quad \text{b) } \frac{15}{22}; \quad \text{c) } \frac{5}{11}.$$

423. Tìm số bị chia và số chia, biết rằng khi cộng số bị chia với 10 và nhân số chia với 10 thì thương không đổi.

424. Cho A là số tự nhiên được viết bởi 2004 chữ số 4. Tính phần thập phân của phép chia A cho 15.

425. Đố vui : 500 đồng mất đi đâu ?

Bác Tâm ra chợ bán hai loại ổi có số lượng bằng nhau : loại to bán 100 đồng hai quả, loại nhỏ bán 100 đồng ba quả. Vì có việc bận nên bác giao cho con gái bán số ổi đó. Cô con gái bán tất cả số ổi cho một người nên cô tính như sau cho gọn : cứ 5 quả giá 200 đồng. Đến khi kiểm lại tiền thì cô thấy bị hụt đi 500 đồng so với số tiền phải bán.

Hãy giải thích vì sao bị hụt đi 500 đồng ? Số ổi mang đi bán là bao nhiêu ?

426. Đố vui : Bản di chúc khó thực hiện

Một người cha khi mất đi để lại gia tài gồm 23 con ngựa và di chúc như sau: chia cho hai con $\frac{2}{3}$ số ngựa, góp $\frac{1}{6}$ số ngựa cho quỹ của cả làng,

dành $\frac{1}{8}$ số ngựa để giúp trẻ em nghèo. Nhưng 23 con ngựa lại không chia hết cho 3, cho 6, cho 8. Các con loay hoay mãi chưa biết giải quyết ra sao bèn đến nhờ một ông già thông thái trong làng. Ông già đi ngựa đến và đã chia số ngựa suôn sẻ. Ông đã chia như thế nào?

427. Hai công nhân phải làm một số dụng cụ, tổng số chưa đến 1000 chiếc.

Trong ba ngày, người thứ nhất lần lượt làm được $\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{9}{20}$ kế hoạch của mình,

người thứ hai lần lượt làm được $\frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{3}{7}$ kế hoạch của mình. Tính số dụng cụ mỗi người phải làm, biết rằng số dụng cụ mỗi người đã làm mỗi ngày là các số tự nhiên.

428. Trong một hội nghị học sinh giỏi, số học sinh nữ chiếm $\frac{2}{5}$, trong

đó $\frac{3}{8}$ số nữ là học sinh lớp 6. Trong số học sinh nam dự hội nghị, $\frac{2}{9}$ là học sinh lớp 6. Biết số học sinh dự hội nghị trong khoảng từ 100 đến 170. Tính số học sinh nam và nữ lớp 6.

429. An rót một cốc đầy nước chè, uống $\frac{1}{6}$ cốc, đổ thêm nước lọc cho

đầy, uống $\frac{1}{3}$ cốc rồi đổ thêm đầy nước lọc, lại uống $\frac{1}{2}$ cốc, đổ đầy nước lọc rồi uống hết. Hỏi An uống nước lọc hay uống nước chè nhiều hơn?

430. Đố vui: Trả tiền bánh

Hai người lái buôn Ả-rập lúc nghỉ góp bánh ăn chung, A-li góp 3 chiếc, Xa-ba góp 5 chiếc. Vừa lúc đó, một người khách đến và họ mời người đó ăn cùng. Ăn xong, người khách trả cho hai người kia 8 đina.

A-li nói với Xa-ba:

– Anh góp 5 cái thì lấy 5 đina, tôi góp 3 cái thì lấy 3 đina.

Xa-ba không nghe. Một người qua đường biết chuyện đã giải quyết cho A-li lấy 1 đina, Xa-ba lấy 7 đina và giải thích rõ để hai người vui vẻ nhận. Người qua đường đã giải thích như thế nào?

431. Chứng minh rằng $\frac{7n-1}{4}$ và $\frac{5n+3}{12}$ không thể đồng thời là số tự nhiên với mọi số nguyên dương n .

~ Ví dụ : 106 đến 114, 122 đến 127, 133, 134, 136 đến 141, 144 đến 147, 149 đến 152.

Bài tập : 445 đến 452, 454, 455, 457, 471 đến 480, 490 đến 492, 497, 503 đến 510, 517, 546, 548 đến 552, 554, 555, 565, 573, 577 đến 583, 585 đến 606, 608, 609.

§16. TỈ SỐ CỦA HAI SỐ. TỈ SỐ PHẦN TRĂM

Ví dụ 104. Một tủ sách gồm hai ngăn. Tỉ số giữa số sách của ngăn trên so với ngăn dưới là 4 : 3. Sau khi thêm 30 cuốn sách vào ngăn dưới thì tỉ số giữa số sách của ngăn trên so với ngăn dưới là 10 : 9. Tính số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

Giải. Chú ý rằng số sách ở ngăn trên lúc đầu và lúc sau không thay đổi, ta lấy nó làm đơn vị để so sánh. Số sách ở ngăn dưới lúc đầu bằng $\frac{3}{4}$

số sách ở ngăn trên, lúc sau bằng $\frac{9}{10}$ số sách ở ngăn trên.

Số sách tăng thêm ở ngăn dưới bằng : $\frac{9}{10} - \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$ số sách ở ngăn trên hay 30 cuốn.

Vậy số sách ở ngăn trên lúc đầu là : $30 : \frac{3}{20} = 200$ (cuốn).

Số sách ở ngăn dưới lúc đầu là : $200 \cdot \frac{3}{4} = 150$ (cuốn).

Ví dụ 105. Tính diện tích một hình chữ nhật biết rằng nếu chiều dài tăng 20%, chiều rộng giảm 20% thì diện tích giảm 30m^2 .

Giải.

Chiều dài mới so với chiều dài cũ bằng :

$$1 + 0,2 = 1,2.$$

Chiều rộng mới so với chiều rộng cũ bằng :

$$1 - 0,2 = 0,8.$$

Diện tích mới so với diện tích cũ bằng :

$$1,2 \cdot 0,8 = 0,96.$$

Giảm đi :

$$1 - 0,96 = 0,04 \text{ diện tích cũ hay } 30\text{m}^2.$$

Diện tích cũ :

$$30 : 0,04 = 750 (\text{m}^2)$$

BÀI TẬP

432. Một sợi dây dài $1\frac{1}{3}$ m. Làm thế nào để cắt ra đoạn dây dài $\frac{1}{2}$ m mà không có thước đo trong tay ?

433. a) Ở lớp 6A, số học sinh giỏi học kì 1 bằng $\frac{3}{7}$ số còn lại. Cuối năm có thêm 4 học sinh đạt loại giỏi nên số học sinh giỏi bằng $\frac{2}{3}$ số còn lại. Tính số học sinh của lớp.

b) Khối 6 của một trường đầu năm học có số học sinh nữ bằng số học sinh nam. Đầu học kì 2, khối 6 nhận thêm 8 học sinh nữ và 2 học sinh nam nên số học sinh nữ bằng 51% tổng số học sinh. Tính tổng số học sinh đầu năm học.

434. Hai ô tô đều đã đi được quãng đường 3500km. Ngoài các lốp đang dùng, mỗi ô tô còn có thêm một chiếc lốp dự trữ. Tất cả các lốp đang dùng và dự trữ được sử dụng tương đương như nhau. Tính số kilômét đã chạy của mỗi lốp xe ở mỗi ô tô, biết rằng ô tô thứ nhất là xe bốn bánh, ô tô thứ hai là xe sáu bánh.

435. a) Cạnh của một hình vuông tăng 20%. Diện tích của nó tăng :

(A) 144% (B) 40% (C) 80% (D) 44%.

b) Cạnh của một hình lập phương tăng 50%. Thể tích của nó tăng :

(A) 50% (B) 100% (C) 237,5% (D) 125%.

c) Đáy của một tam giác tăng 20%, chiều cao tương ứng giảm 20%. Diện tích của tam giác :

(A) tăng 4% (B) không đổi (C) giảm 4% (D) giảm 10%.

d) Một chiếc tủ nếu bán với giá x đồng thì lỗ 10% so với giá vốn, nếu bán với giá y đồng thì lãi 10% so với giá vốn. Tỷ số của y và x là :

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{11}{9}$ (C) $\frac{9}{11}$ (D) 1.

436. Giá rau tháng 7 thấp hơn giá rau tháng 6 là 10%, giá rau tháng 8 cao hơn giá rau tháng 7 là 10%. Hỏi giá rau tháng 8 so với tháng 6 cao hơn hay thấp hơn bao nhiêu phần trăm ?

437. Chiều dài một hình chữ nhật tăng 36m, chiều rộng giảm 16%. Tìm chiều dài mới biết rằng diện tích mới lớn hơn diện tích cũ là 5%.

438. a) Thu hoạch lúa của nông trường A nhiều hơn so với nông trường B là 26%, diện tích trồng lúa của nông trường A nhiều hơn so với nông trường B là 5%. Hỏi năng suất của nông trường A nhiều hơn so với nông trường B là bao nhiêu phần trăm ?

b) Số hộp sữa loại I ít hơn so với loại II là 12,5% nhưng lượng sữa trong mỗi hộp lại nhiều hơn 8%. Hỏi lượng sữa tổng cộng của loại nào ít hơn ?

439. Năm 2002, một xí nghiệp làm được 159135 sản phẩm, tính ra so với hai năm trước số sản phẩm tăng hàng năm là 3%. Tính số sản phẩm của xí nghiệp đó năm 2000.

440. Phải thêm bao nhiêu kilôgam nước vào 30 kg dung dịch axit có nồng độ 5% để được dung dịch axit có nồng độ 3% ? (Dung dịch axit có nồng độ 5% tức là trong 100 kg dung dịch có 5 kg axit nguyên chất và 95 kg nước).

441. Một cây gỗ tươi có khối lượng 400kg, trong đó chứa 85% nước. Cây gỗ này bốc hơi bao nhiêu kilôgam nước thì được gỗ khô chứa 60% nước ?

442. Trong Hội chợ Xuân, một công ti có $\frac{1}{3}$ tổng số sản phẩm đạt huy chương vàng. Biết rằng trong tổng số sản phẩm của công ti thì số sản phẩm may chiếm $\frac{3}{4}$. Hỏi trong số sản phẩm may, số sản phẩm đạt huy chương vàng chiếm ít nhất là bao nhiêu phần trăm, chiếm nhiều nhất là bao nhiêu phần trăm ?

~ Ví dụ : 131, 142.

Bài tập : 523, 529 đến 531, 537, 572, 607.

CHUYÊN ĐỀ

DÃY CÁC PHÂN SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT

Dãy các số viết theo quy luật đã được trình bày ở tập I. Chúng ta cũng gặp các phân số mà tử và mẫu của chúng được viết theo các quy luật nhất định.

Ví dụ 106 (15). Tính nhanh :

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^8}.$$

Giải. Ta có :

$$3A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7} \quad (1)$$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^8} \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) được :

$$2A = 1 - \frac{1}{3^8} = 1 - \frac{1}{6561} = \frac{6560}{6561}.$$

Do đó : $A = \frac{3280}{6561}.$

Ví dụ 107 (15). Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của các dãy sau :

a) $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5}, \dots$ b) $\frac{1}{6}, \frac{1}{66}, \frac{1}{176}, \frac{1}{336}, \dots$

Giải. a) Ta chú ý rằng :

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2.3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Do đó :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{100.101} = \\ & = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$$

b) Trước hết ta viết các mẫu : 6, 66, 176, 336, ... dưới dạng 1.6, 6.11, 11.16, 16.21, ..., số hạng thứ n của dãy có dạng $(5n - 4)(5n + 1)$.

$$\text{Cần tính tổng } A = \frac{1}{1.6} + \frac{1}{6.11} + \frac{1}{11.16} + \dots + \frac{1}{496.501}.$$

Nhận xét :

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{6} = \frac{5}{1.6}, \quad \frac{1}{6} - \frac{1}{11} = \frac{5}{6.11}, \dots, \quad \frac{1}{496} - \frac{1}{501} = \frac{5}{496.501},$$

$$\text{tổng quát} \quad \frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} = \frac{5}{(5n-4)(5n+1)}.$$

$$\text{Do đó} \quad 5A = \frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{496} - \frac{1}{501} = 1 - \frac{1}{501} = \frac{500}{501}.$$

$$\text{Suy ra} \quad A = \frac{100}{501}.$$

Ví dụ 108(15). Tính tổng :

$$B = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{37.38.39}.$$

Giải. Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ở ví dụ trên: viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau.

Ta xét :

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}, \quad \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}, \dots, \quad \frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39} = \frac{2}{37.38.39}$$

$$\text{tổng quát : } \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}. \text{ Do đó :}$$

$$\begin{aligned} 2B &= \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{37.38.39} = \\ &= \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39} \right) = \\ &= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{38.39} = \frac{740}{38.39} = \frac{370}{741}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra} \quad B = \frac{185}{741}.$$

$$\text{Tổng quát} \quad \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) : 2.$$

Ví dụ 109 (15). Tính giá trị các biểu thức:

$$a) A = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} + \frac{1}{99}}{\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.95} + \dots + \frac{1}{97.3} + \frac{1}{99.1}};$$

$$b) B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{\frac{99}{1} + \frac{98}{2} + \frac{97}{3} + \dots + \frac{1}{99}}.$$

Giải. a) Ghép các phân số ở số bị chia thành từng cặp để MC giống mẫu của các phân số tương ứng ở số chia. Biến đổi số bị chia : cộng từng cặp các phân số cách đều hai đầu ta được :

$$\left(1 + \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{97}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{95}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} + \frac{1}{51}\right) = \frac{100}{1.99} + \frac{100}{3.97} + \frac{100}{5.95} + \dots + \frac{100}{49.51}.$$

Biểu thức này gấp 50 lần số chia. Vậy $A = 50$.

b) Biến đổi số chia : viết các tử thành hiệu $100 - 1, 100 - 2, \dots, 100 - 99$.
Số chia bằng :

$$\begin{aligned} & \frac{100-1}{1} + \frac{100-2}{2} + \frac{100-3}{3} + \dots + \frac{100-99}{99} = \\ & = \left(\frac{100}{1} + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} + \dots + \frac{100}{99} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{99}{99} \right) = \\ & = 100 + 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right) - 99 = \\ & = 1 + 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right) = 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right). \end{aligned}$$

Biểu thức này bằng 100 lần số bị chia. Vậy $B = \frac{1}{100}$.

Ví dụ 110(15). Tìm tích của 98 số đầu tiên của dãy

$$1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{8}, 1\frac{1}{15}, 1\frac{1}{24}, 1\frac{1}{35}, \dots$$

Giải: Các số hạng của dãy được viết dưới dạng :

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{25}{24}, \frac{36}{35}, \dots \\ & \frac{2^2}{1.3}, \frac{3^2}{2.4}, \frac{4^2}{3.5}, \frac{5^2}{4.6}, \frac{6^2}{5.7}, \dots \end{aligned}$$

Số thứ 98 có dạng $\frac{99^2}{98.100}$. Ta cần tính

$$A = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdots \frac{98^2}{97.99} \cdot \frac{99^2}{98.100}$$

Để dễ rút gọn, ta viết tích các tử thành $(2.3.4 \dots 98.99)$. $(2.3.4 \dots 98.99)$, viết tích các mẫu thành $(1.2.3 \dots 97.98)$. $(3.4.5 \dots 99.100)$. Rút gọn tích $2.3 \dots 98$ trong hai dấu ngoặc đầu, rút gọn tích $3.4 \dots 99$ trong hai dấu ngoặc sau, ta được :

$$A = \frac{99}{1} \cdot \frac{2}{100} = \frac{99}{50}$$

Ví dụ 111*(15). a) Tính tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99$.

b) Sử dụng kết quả của câu a, hãy tính :

$$B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 97^2 + 98^2$$

c) Sử dụng kết quả của câu a, hãy tính :

$$C = 1.99 + 2.98 + 3.97 + \dots + 98.2 + 99.1$$

Giải. a) Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của A với 3. Thừa số 3 này được viết dưới dạng $3 - 0$ ở số hạng thứ nhất, $4 - 1$ ở số hạng thứ hai, $5 - 2$ ở số hạng thứ ba, ..., $100 - 97$ ở số hạng cuối cùng. Ta có :

$$\begin{aligned} 3A &= 1.2(3 - 0) + 2.3(4 - 1) + 3.4(5 - 2) + \dots + 97.98(99 - 96) + 98.99(100 - 97) \\ &= (1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 97.98.99 + 98.99.100) - (0.1.2 + 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 96.97.98 + 97.98.99) \\ &= 98.99.100. \end{aligned}$$

Suy ra $A = 323400$.

Tổng quát ta có : $1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 97^2 + 98^2 = \\ &= 1(2 - 1) + 2(3 - 1) + 3(4 - 1) + \dots + 97(98 - 1) + 98(99 - 1) = \\ &= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 97.98 + 98.99) - (1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98) = \\ &= A - \frac{98.99}{2} = 323400 - 4851 = 318549. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tổng quát : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) C &= 1.99 + 2.98 + 3.97 + \dots + 98.2 + 99.1 = \\
 &= 1.99 + 2(99 - 1) + 3(99 - 2) + \dots + 98(99 - 97) + 99(99 - 98) = \\
 &= (1.99 + 2.99 + 3.99 + \dots + 98.99 + 99.99) - (1.2 + 2.3 + \dots + 97.98 + 98.99) = \\
 &= 99(1 + 2 + 3 + \dots + 99) - A = \\
 &= 99 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} - \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{3} = \frac{99 \cdot 100 \cdot 101}{6} = 166650.
 \end{aligned}$$

Tổng quát : $1.n + 2(n - 1) + 3(n - 2) + \dots + (n - 1)2 + n.1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Ví dụ 112(15).

a) Tính $D = \frac{1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + 3 + \dots + 98)}{1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 98.1}$.

b)* Chứng minh rằng biểu thức E có giá trị bằng $\frac{1}{2}$:

$$E = \frac{1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 98.1}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99}$$

Giải. a) Số bị chia gồm 98 tổng, số 1 có mặt ở 98 tổng, số 2 có mặt ở 97 tổng, số 3 có mặt ở 96 tổng, ..., số 97 có mặt ở 2 tổng, số 98 có mặt ở 1 tổng.

Như vậy số bị chia bằng $1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 97.2 + 98.1$, bằng số chia. Vậy $D = 1$.

b) Theo câu a, số bị chia bằng :

$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + \dots + 98)$. Theo công thức tính tổng các số tự nhiên liên tiếp, biểu thức này bằng : $\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \dots + \frac{98.99}{2}$, bằng $\frac{1}{2}$ số chia.

Vậy $E = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 113*(15). Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}$.

Hãy chứng minh rằng tổng A không là số tự nhiên.

Giải. Để quy đồng mẫu các phân số trong tổng $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}$,

ta chọn MC là tích của 2^6 với các thừa số lẻ nhỏ hơn 100. Gọi $k_1, k_2, \dots, k_{100}$ là các thừa số phụ tương ứng, tổng A có dạng :

$B = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_{100}}{2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \dots 99}$. Trong 100 phân số của tổng A, chỉ có duy nhất

phân số $\frac{1}{64}$ có mẫu chứa 2^6 nên trong các thừa số phụ $k_1, k_2, \dots, k_{100}$ chỉ có

k_{64} (thừa số phụ của $\frac{1}{64}$) là số lẻ (bằng $3.5.7.9 \dots 99$), còn các thừa số phụ khác đều chẵn (vì chứa ít nhất một thừa số 2). Phân số B có mẫu chia hết cho 2, tử không chia hết cho 2, do đó B (tức là A) không thể là số tự nhiên.

Chú ý : Bài toán cũng đúng trong trường hợp tổng quát :

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Trong trường hợp tổng quát, ta chọn MC là tích của 2^k với các thừa số lẻ không vượt quá n, trong đó k là số lớn nhất mà $2^k \leq n$. Chỉ có thừa số phụ của $\frac{1}{2^k}$ là số lẻ, còn các thừa số phụ khác đều chẵn.

Có thể giải cách khác, chẳng hạn gọi p là số nguyên tố lớn nhất không vượt quá n. Khi đó MC chia hết cho p. Chỉ có thừa số phụ của $\frac{1}{p}$ không chia hết cho p, còn các thừa số phụ khác đều chia hết cho p, do đó tử không chia hết cho p. Vậy A không phải là số tự nhiên.

Ví dụ 114*(15). Tổng $\frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{99}$ bằng phân số $\frac{a}{b}$. Chứng minh rằng a chia hết cho 149.

Giải. Chú ý rằng $149 = 50 + 99$, ta cộng 50 phân số trên theo từng cặp, mỗi cặp gồm hai phân số đầu và cuối hoặc các phân số cách đều hai phân số đầu và cuối. Do đó :

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{99} \right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{98} \right) + \dots + \left(\frac{1}{74} + \frac{1}{75} \right) = \frac{149}{50.99} + \frac{149}{51.98} + \dots + \frac{149}{74.75}.$$

Chọn MC là $50.51 \dots 98.99$, gọi các thừa số phụ là $k_1, k_2, \dots, k_{25}$ thì

$$\frac{a}{b} = \frac{149(k_1 + k_2 + \dots + k_{25})}{50.51 \dots 98.99}.$$

Tử chia hết cho 149 (là số nguyên tố), còn mẫu không chứa thừa số nguyên tố 149 nên khi rút gọn phân số đến tối giản, a vẫn chia hết cho 149.

Chú ý :

Tổng quát, nếu phân số $\frac{a}{b}$ bằng $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n}$ trong đó $m+n$ là số nguyên tố thì a chia hết cho $m+n$.

BÀI TẬP

443(15). Tính nhanh :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}.$$

444(13). Viết tất cả các phân số dương thành dãy :

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

a) Hãy nêu quy luật viết của dãy và viết tiếp năm phân số nữa theo quy luật ấy.

b) Phân số $\frac{50}{31}$ là số hạng thứ mấy của dãy ?

445(15). Tìm x , biết rằng :

$$a) \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \frac{1}{11.14} + \dots + \frac{1}{x(x+3)} = \frac{101}{1540};$$

$$b) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{x(x+1):2} = 1\frac{1991}{1993}.$$

446(15). Chứng tỏ rằng tổng của 100 số hạng đầu của dãy sau nhỏ hơn $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{45}, \frac{1}{117}, \frac{1}{221}, \frac{1}{357}, \dots$$

447(15). Tính $\frac{A}{B}$, biết rằng :

$$A = \frac{1}{1.300} + \frac{1}{2.301} + \frac{1}{3.302} + \dots + \frac{1}{101.400},$$

$$B = \frac{1}{1.102} + \frac{1}{2.103} + \frac{1}{3.104} + \dots + \frac{1}{299.400}.$$

448(15). Chứng minh rằng :

$$100 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}.$$

449(15). Tính $\frac{A}{B}$, biết rằng :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200},$$

$$B = \frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \frac{3}{197} + \dots + \frac{198}{2} + \frac{199}{1}.$$

450(15). a) Chứng minh rằng :

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}.$$

b)* Tính giá trị của biểu thức :

$$\left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}\right) : \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}\right).$$

451(15). Tính giá trị của biểu thức :

a) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{98.99.100};$

b)* $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \dots + \frac{1}{27.28.29.30}.$

452(15). Tính :

a) $A = \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \dots \frac{2499}{2500}.$

b) $B = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{780}\right).$

453(2). Áp dụng phương pháp hoặc kết quả của ví dụ 111 để tính các biểu thức sau :

a) $A = 1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + 97.99 + 98.100;$

b) $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 48.49.50.$

454(15). Chứng minh rằng : $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{101}$ không là số tự nhiên.

455(15). a) Cho $A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98}\right) \cdot 2.3.4 \dots 98.$

Chứng minh rằng A chia hết cho 99.

b) Cho $B = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{96}$ và B bằng phân số $\frac{a}{b}$. Chứng minh rằng

a chia hết cho 97.

BẤT ĐẲNG THỨC

Ta biết rằng với hai số a và b bất kì, chỉ có một trong ba quan hệ :

$$a = b, a < b, a > b.$$

Ta gọi $a > b$, $a < b$ là các bất đẳng thức. Ta đã biết các tính chất sau của bất đẳng thức :

1) Tính chất bắc cầu :

Nếu $a > b$, $b > c$ thì $a > c$.

2) Tính chất đơn điệu của phép cộng :

Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$.

3) Tính chất đơn điệu của phép nhân :

Nếu $a > b$ thì $ac > bc$ (với $c > 0$).

4) Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều :

Nếu $a > b$, $c > d$ thì $a + c > b + d$.

I- SO SÁNH HAI SỐ

1. So sánh hai số tự nhiên

Ví dụ 115(2). Giá tiền 7 quyển vở nhiều hơn giá tiền 8 bút chì. Hỏi giá tiền 8 quyển vở và giá tiền 9 bút chì, đằng nào nhiều hơn ?

Giải. Gọi giá một quyển vở là a đồng, giá một bút chì là b đồng. Ta có $7a > 8b$. Cần so sánh $8a$ và $9b$.

Từ $7a > 8b$ (1) suy ra $7a > 7b$, do đó $a > b$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $7a + a > 8b + b$ tức là $8a > 9b$.

Vậy giá 8 quyển vở nhiều hơn giá 9 bút chì.

2. So sánh hai phân số

Để so sánh hai phân số, ngoài cách quy đồng tử hoặc quy đồng mẫu, người ta thường dùng một phân số trung gian và sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức.

Ví dụ 116(14). So sánh A và B biết rằng :

$$A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}, \quad B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}.$$

Giải: Trước hết ta so sánh $10A$ với $10B$.

Ta có :

$$10A = \frac{10^{16} + 10}{10^{16} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{16} + 1}, \quad 10B = \frac{10^{17} + 10}{10^{17} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{17} + 1}.$$

Vì $\frac{9}{10^{16} + 1} > \frac{9}{10^{17} + 1}$ nên $10A > 10B$, do đó $A > B$.

Ví dụ 117(14). Một phân số có tử và mẫu đều là số nguyên dương. Nếu cộng tử và mẫu của phân số đó với cùng một số tự nhiên $n \neq 0$ thì phân số ấy thay đổi thế nào ?

Giải. Gọi phân số đó là $\frac{a}{b}$. Xét ba trường hợp: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

a) Trường hợp $a = b$: Giá trị của phân số không đổi.

b) Trường hợp $a < b$:

$$\text{Khi đó } \frac{a}{b} = 1 - \frac{b-a}{b}, \text{ còn } \frac{a+n}{b+n} = 1 - \frac{(b+n)-(a+n)}{b+n} = 1 - \frac{b-a}{b+n}.$$

$$\text{Ta thấy } \frac{b-a}{b} > \frac{b-a}{b+n} \text{ nên } \frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}.$$

Như vậy : Cộng tử và mẫu của một phân số nhỏ hơn 1 (tử và mẫu đều dương) với cùng một số tự nhiên khác 0 thì giá trị phân số đó tăng thêm.

$$\text{c) Trường hợp } a > b : \text{ Khi đó } \frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b},$$

$$\text{còn } \frac{a+n}{b+n} = 1 + \frac{(a+n)-(b+n)}{b+n} = 1 + \frac{a-b}{b+n}.$$

$$\text{Ta thấy } \frac{a-b}{b} > \frac{a-b}{b+n} \text{ nên } \frac{a}{b} > \frac{a+n}{b+n}.$$

Như vậy : Cộng tử và mẫu của một phân số lớn hơn 1 (tử và mẫu đều dương) với cùng một số tự nhiên khác 0 thì giá trị phân số đó giảm đi.

3. So sánh hai lũy thừa

Khi so sánh hai lũy thừa, ta thường biến đổi các lũy thừa sao cho cơ số của chúng bằng nhau hoặc số mũ của chúng bằng nhau. Ta cũng dùng các lũy thừa trung gian để so sánh hai lũy thừa.

Khi so sánh hai lũy thừa cùng cơ số a^m và a^n với $a, m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, cần chú ý rằng :

1) Nếu $a = 0$ hoặc $a = 1$ thì $a^m = a^n$ (trừ trường hợp 0^0).

2) Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$.

3) Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m < a^n$.

Ví dụ 118(14). So sánh :

a) 63^7 và 16^{12} ;

b) $\left(\frac{1}{32}\right)^7$ và $\left(\frac{1}{16}\right)^9$.

Giải: a) Cách 1. $63^7 < 64^7 < 64^8 = 4^{24} = 16^{12}$.

Cách 2. $63^7 < 64^7 = 4^{21} < 4^{24} = 16^{12}$.

$$b) \left(\frac{1}{32}\right)^7 = \left(\frac{1}{2^5}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{35} > \left(\frac{1}{2}\right)^{36} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^9 = \left(\frac{1}{16}\right)^9.$$

Ví dụ 119(2). a) Với ba chữ số 2, hãy viết thành một số tự nhiên có giá trị lớn nhất.

b) Cũng hỏi như vậy đối với ba chữ số 4.

Giải. a) Với ba chữ số 2, có bốn cách viết là 222, 22^2 , 2^{22} , 2^{2^2} . Ta có $2^{2^2} = 2^4 = 16$, $22^2 = 484$, $2^{22} > 2^9 = 512$. Vậy 2^{22} lớn nhất.

b) Với ba chữ số 4, có bốn cách viết là 444, 44^4 , 4^{44} , 4^{4^4} . Dễ dàng chứng minh được :

$4^{44} > 44^4 > 444$. Còn $4^{4^4} = 4^{256} > 4^{44}$. Vậy số lớn nhất là 4^{4^4} .

Chú ý : Tổng quát bài toán trên đối với ba chữ số a, ta có :

Nếu $a = 1$ thì số lớn nhất là 111.

Nếu $a = 2$, $a = 3$ thì số lớn nhất là 2^{22} , 3^{33} .

Nếu $a \geq 4$ thì số lớn nhất là a^{a^a} .

Ví dụ 120(2). Số 2^2 và 5^2 viết liền nhau được số 425 có ba chữ số, số 2^3 và 5^3 viết liền nhau được số 8125 có bốn chữ số, số 2^4 và 5^4 viết liền nhau được số 16625 có năm chữ số. Chứng minh rằng số 2^{1991} và 5^{1991} viết liền nhau được số có 1992 chữ số.

Giải. Giả sử số 2^{1991} có x chữ số, số 5^{1991} có y chữ số. Cần chứng minh rằng $x + y = 1992$.

Số tự nhiên nhỏ nhất có x chữ số là 10^{x-1} , số tự nhiên nhỏ nhất có $x + 1$ chữ số là 10^x , ta có :

$$10^{x-1} < 2^{1991} < 10^x. \text{ Tương tự } 10^{y-1} < 5^{1991} < 10^y.$$

$$\text{Do đó } 10^{x-1} \cdot 10^{y-1} < 2^{1991} \cdot 5^{1991} < 10^x \cdot 10^y,$$

$$\text{Suy ra : } 10^{x+y-2} < 10^{1991} < 10^{x+y}.$$

$$x + y - 2 < 1991 < x + y$$

Do $x + y \in \mathbb{N}$ nên $x + y - 1 = 1991$, do đó $x + y = 1992$.

Vậy 2^{1991} và 5^{1991} viết liền nhau tạo thành số có 1992 chữ số.

Ví dụ 121 (14). Chứng minh rằng số 95^8 là một số có 16 chữ số khi viết kết quả của nó trong hệ thập phân.

Giải. Số tự nhiên nhỏ nhất có 16 chữ số là 10^{15} , số tự nhiên nhỏ nhất có 17 chữ số là 10^{16} . Ta cần chứng minh rằng :

$$10^{15} < 95^8 < 10^{16}.$$

Để thấy $95^8 < 100^8 = 10^{16}$, còn phải chứng minh $10^{15} < 95^8$. Bất đẳng thức này tương đương với $\frac{10^{15}}{95^8} < 1$ hay $\frac{10^{16}}{95^8} < 10$.

Ta có $\frac{10^{16}}{95^8} = \left(\frac{100}{95}\right)^8 = \left(\frac{20}{19}\right)^8$. Chú ý rằng giá trị của một phân số lớn hơn 1 (tử và mẫu đều dương) sẽ tăng lên khi giảm cả tử và mẫu đi cùng một số tự nhiên, do đó :

$$\left(\frac{20}{19}\right)^8 < \frac{20}{19} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{18}{17} \cdots \frac{14}{13} \cdot \frac{13}{12} = \frac{20}{12} < 10.$$

Vậy $10^{15} < 95^8 < 10^{16}$ tức là 95^8 là số có 16 chữ số.

II - CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ví dụ 122 (15). Cho $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$.

Chứng minh rằng : a) $A > \frac{7}{12}$;

b) $A > \frac{5}{8}$;

Giải. a) Ta chọn biểu thức B làm trung gian sao cho $A > B$, còn $B \geq \frac{7}{12}$. Tách

A thành hai nhóm, mỗi nhóm có 50 phân số, rồi thay mỗi phân số trong từng nhóm bằng phân số nhỏ nhất trong nhóm ấy, ta được :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{150} \right) + \left(\frac{1}{151} + \frac{1}{152} + \dots + \frac{1}{200} \right) > \\ &> \frac{1}{150} \cdot 50 + \frac{1}{200} \cdot 50 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

b) Tách A thành bốn nhóm rồi cũng làm như trên, ta được :

$$A > \frac{25}{125} + \frac{25}{150} + \frac{25}{175} + \frac{25}{200} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{107}{210} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Ví dụ 123 (15). a) Cho dãy số tự nhiên liên tiếp :

$a, a + 1, \dots, b - 1, b$, trong đó $b > a + 1$, dãy trên gồm một số chẵn số hạng. Ghép các số trên thành từng cặp hai số ở hai đầu và hai số cách đều hai đầu.

Chứng minh rằng hai số thuộc cặp ngoài cùng có tích nhỏ nhất, hai số thuộc cặp trong cùng có tích lớn nhất.

b) Áp dụng nhận xét trên để chứng minh rằng :

$$\frac{5}{8} < \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200} < \frac{3}{4}.$$

Giải. a) Trước hết xét hai cặp ab và $(a + 1)(b - 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (a + 1)(b - 1) &= a(b - 1) + (b - 1) = ab - a + b - 1 = \\ &= ab + b - (a + 1) > ab \text{ (vì } b > a + 1). \end{aligned}$$

Như vậy tích hai số thuộc cặp ngoài cùng nhỏ hơn tích hai số thuộc cặp bên cạnh. Từ đó suy ra : hai số thuộc cặp ngoài cùng có tích nhỏ nhất, hai số thuộc cặp trong cùng có tích lớn nhất.

b) Gọi $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}.$

Ghép các phân số ở hai đầu và các phân số cách đều hai đầu thành 50 cặp.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{200} \right) + \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{199} \right) + \dots + \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{151} \right) = \\ &= \frac{301}{101 \cdot 200} + \frac{301}{102 \cdot 199} + \dots + \frac{301}{150 \cdot 151} \\ &= 301 \left(\frac{1}{101 \cdot 200} + \frac{1}{102 \cdot 199} + \dots + \frac{1}{150 \cdot 151} \right). \end{aligned}$$

Xét mẫu của 50 phân số trong dấu ngoặc, theo câu a thì $101 \cdot 200$ có giá trị nhỏ nhất, $150 \cdot 151$ có giá trị lớn nhất, suy ra trong 50 phân số trong dấu ngoặc thì $\frac{1}{101 \cdot 200}$ lớn nhất, $\frac{1}{150 \cdot 151}$ nhỏ nhất.

$$\text{Do đó : } A < 301 \cdot \frac{1}{101 \cdot 200} \cdot 50 = \frac{301}{404} < \frac{303}{404} = \frac{3}{4}.$$

$$A > 301 \cdot \frac{1}{150 \cdot 151} \cdot 50 = \frac{301}{453} > \frac{300}{453} > \frac{300}{480} = \frac{5}{8}.$$

$$\text{Vậy : } \frac{5}{8} < A < \frac{3}{4}.$$

Ví dụ 124 (15). Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$.

Chứng minh rằng $A < \frac{3}{4}$.

Giải. Giữ nguyên phân số $\frac{1}{2^2}$, còn các phân số sau thay bằng các phân số lớn hơn, ta có :

$$A < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} + B.$$

Dễ dàng tính được :

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{100}.$$

Do đó : $A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4}.$

Ví dụ 125 (15). Cho $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{199}{200}$ (1)

Chứng minh rằng $A^2 < \frac{1}{201}$.

Giải. Biểu thức A là tích của 100 phân số nhỏ hơn 1, trong đó các tử đều lẻ, các mẫu đều chẵn. Ta đưa ra biểu thức trung gian là một tích các phân số mà các tử đều chẵn, các mẫu đều lẻ. Thêm 1 vào tử và mẫu của mỗi phân số của A, giá trị mỗi phân số tăng thêm, do đó

$$A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{200}{201} \quad (2)$$

Nhân (1) với (2) theo từng vế ta được :

$$A^2 < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{199}{200} \right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{200}{201} \right)$$

Vế phải của bất đẳng thức trên bằng :

$$\frac{1.(3.5\dots 199)}{2.4.6\dots 200} \times \frac{2.4.6\dots 200}{(3.5\dots 199).201} = \frac{1}{201}.$$

Vậy $A^2 < \frac{1}{201}.$

Ví dụ 126 (15). Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1}$.

Chứng minh rằng : a) $A < 100$; b) $A > 50$.

Giải. a) Để chứng tỏ rằng $A < 100$, ta chia A thành 100 nhóm :

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}\right).$$

Thay các phân số trong mỗi dấu ngoặc bằng phân số lớn nhất trong dấu ngoặc đó, ta được :

$$A < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \dots + \frac{1}{2^{99}} \cdot 2^{99} = 100.$$

b) Để chứng tỏ rằng $A > 50$, ta thêm và bớt $\frac{1}{2^{100}}$ rồi viết A dưới dạng sau :

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^4}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{99}+1} + \dots + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}.$$

Thay các phân số trong mỗi dấu ngoặc bằng phân số nhỏ nhất trong dấu ngoặc đó, ta được :

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \dots + \frac{1}{2^{100}} \cdot 2^{99} - \frac{1}{2^{100}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 100 - \frac{1}{2^{100}} > 50.$$

Ví dụ 127*(15). Chứng minh rằng luôn luôn tồn tại số tự nhiên n để $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 1000$.

Giải: Ta chọn $n = 2^{1999}$ rồi giải tương tự như câu b ví dụ 126 :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^3}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{1998}+1} + \dots + \frac{1}{2^{1999}}\right) >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \frac{1}{2^4} \cdot 2^3 + \dots + \frac{1}{2^{1999}} \cdot 2^{1998} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1999 = 1000,5 > 1000 \text{ (đpcm)}.$$

Khi chứng minh một bất đẳng thức chứa chữ, trong nhiều trường hợp ta nên sắp thứ tự các chữ. Nếu các chữ a, b, c có vai trò như nhau trong đề bài, ta có thể sắp thứ tự tùy ý $a \geq b \geq c, a \geq c \geq b, b \geq c \geq a, b \geq a \geq c, c \geq a \geq b, c \geq b \geq a$.

Nếu khi thay a bởi b, thay b bởi c, thay c bởi a mà đề bài không thay đổi thì ta có thể sắp thứ tự $a \geq b \geq c$ hoặc $b \geq c \geq a$ hoặc $c \geq a \geq b$.

Ví dụ 128 (2). Cho sáu số tự nhiên khác nhau có tổng bằng 50. Chứng minh rằng trong sáu số đó tồn tại ba số có tổng lớn hơn hoặc bằng 30.

Giải. Gọi sáu số đã cho là a, b, c, d, e, g, giả sử rằng $a > b > c > d > e > g$.

Nếu $c \geq 9$ thì $b \geq 10, a \geq 11$, do đó $a + b + c \geq 11 + 10 + 9 = 30$.

Nếu $c \leq 8$ thì $d \leq 7, e \leq 6, g \leq 5$, do đó $d + e + g \leq 7 + 6 + 5 = 18$, suy ra $a + b + c \geq 32$.

III. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC.

Ta biết rằng số tự nhiên n có giá trị nhỏ nhất là 0 rồi đến các giá trị tăng dần là 1, 2, 3... Do đó việc xét giá trị nhỏ nhất của một số tự nhiên n nhiều khi được bắt đầu từ số nhỏ nhất trở lên.

Ví dụ 129(5). Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất khác 0 sao cho $n! + 1$ là hợp số.

Giải. Lần lượt xét n bằng 1, 2, 3, 4... ta có $1! + 1 = 2, 2! + 1 = 3, 3! + 1 = 7$ đều là các số nguyên tố, còn $4! + 1 = 25$ là hợp số.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 4 (đpcm).

Một số bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức liên quan đến việc tìm ƯCLN, BCNN của nhiều số.

Ví dụ 130(13). Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số sao cho số đó bằng mỗi tổng $a + b, c + d, e + g$ và $\frac{a}{b} = \frac{35}{49}, \frac{c}{d} = \frac{130}{143}, \frac{e}{g} = \frac{7}{13}$.

Giải.

Ta có $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$ nên $a = 5k, b = 7k, a + b = 12k \quad (k \in \mathbb{N});$

$\frac{c}{d} = \frac{10}{11}$ nên $c = 10l, d = 11l, c + d = 21l \quad (l \in \mathbb{N});$

$\frac{e}{g} = \frac{7}{13}$ nên $e = 7n, g = 13n, e + g = 20n \quad (n \in \mathbb{N}).$

Gọi x là số phải tìm, ta có : $x = 12k = 21l = 20n$. Như vậy $x \in BC(12, 21, 20)$ do đó $x = 420m \quad (m \in \mathbb{N})$. Để x là số lớn nhất có ba chữ số, ta chọn $m = 2$, khi đó số phải tìm là 840.

Ví dụ 131(16). Tìm số tự nhiên có hai chữ số sao cho tỉ số của số đó và tổng các chữ số của nó là :

a) lớn nhất;

b) nhỏ nhất.

Giải. Gọi tỉ số giữa $\overline{ab}$ và $a + b$ là k .

$$\text{Ta có : } k = \frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{10a+b}{a+b} = 1 + \frac{9a}{a+b} = 1 + \frac{9}{1+\frac{b}{a}}.$$

$$\text{a) } k_{\text{lớn nhất}} \Leftrightarrow \frac{9}{1+\frac{b}{a}} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{b}{a} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow b = 0$$

và a bất kì từ 1 đến 9.

Có chín số 10, 20, 30, ..., 90 thỏa mãn bài toán có tỉ số giữa số đó với tổng các chữ số của nó bằng 10.

$$\text{b) } k_{\text{nhỏ nhất}} \Leftrightarrow \frac{9}{1+\frac{b}{a}} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \frac{b}{a} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow b_{\text{lớn nhất}},$$

$$a_{\text{nhỏ nhất}} \Leftrightarrow b = 9 \text{ và } a = 1.$$

Số phải tìm là 19, tỉ số của số đó và tổng các chữ số của nó bằng :

$$\frac{19}{1+9} = 1,9.$$

IV- TÌM GIÁ TRỊ CỦA CHỮ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

Khi giải các bài toán về phép chia có dư, trong đó số bị chia bằng a , số chia bằng b , thương bằng q và số dư bằng r , ta có quan hệ $a = bq + r$ và bất đẳng thức kép $0 < r < |b|$.

Ví dụ 132(14). Khi chia 135 cho một số tự nhiên, ta được thương bằng 6 và còn dư. Tìm số chia và số dư.

Giải.

Gọi số chia là x và số dư là r , ta có $r = 135 - 6x$ trong đó $0 < 135 - 6x < x$.

Giải hai bất đẳng thức : $135 - 6x > 0$ và $135 - 6x < x$, ta được :

$$x < 22\frac{1}{2} \text{ và } x > 19\frac{2}{7}.$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên x bằng 20, 21, 22, tương ứng số dư bằng 15, 9, 3.

V - DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM KHOẢNG GIÁ TRỊ CỦA SỐ PHẢI TÌM

Trong một số bài toán về tìm số tự nhiên, ta có thể dùng phương pháp bất đẳng thức nhằm giới hạn khoảng giá trị của các chữ, sau đó bằng cách thử trực tiếp chọn ra giá trị thoả mãn bài toán.

Ví dụ 133(15). Tìm hai số nguyên dương sao cho tích của hai số ấy gấp đôi tổng của chúng.

Giải.

Gọi hai số nguyên dương phải tìm là a và b , ta có $2(a + b) = ab$ (1).

Do vai trò của a và b như nhau, ta giả sử rằng $a \leq b$, nên $a + b \leq 2b$, do đó $2(a + b) \leq 4b$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $ab \leq 4b$. Chia hai vế cho $b > 0$ ta được $a \leq 4$.

Thay $a = 1$ vào (1) được $2 + 2b = b$, loại.

Thay $a = 2$ vào (1) được $4 + 2b = 2b$, loại.

Thay $a = 3$ vào (1) được $6 + 2b = 3b \Rightarrow b = 6$.

Thay $a = 4$ vào (1) được $8 + 2b = 4b \Rightarrow b = 4$.

Vậy có hai cặp số thoả mãn đề bài là 3 và 6 ; 4 và 4.

Ví dụ 134(15). Viết phân số $\frac{1}{4}$ thành tổng của hai phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau.

Giải.

Gọi hai phân số phải tìm là $\frac{1}{a}$ và $\frac{1}{b}$, ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$ (1).

Do vai trò của a và b như nhau, ta giả sử rằng $a < b$. Ta sẽ dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của a (là số nhỏ hơn).

Hiển nhiên $\frac{1}{a} < \frac{1}{4}$ nên $a > 4$ (2).

Mặt khác, do $a < b$ nên $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Do đó : $\frac{1}{a} > \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : 2 = \frac{1}{8}$ (có thể giải

thích bằng cách khác : $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{2}{a}$ (3). Từ (1) và (3) suy ra $\frac{1}{4} < \frac{2}{a}$.

Do đó $a < 8$ (4).

Như vậy $4 < a < 8$. Thay các giá trị của a bằng 5, 6, 7 vào (1) ta được hai trường hợp cho b là số tự nhiên : $a = 5, b = 20$ và $a = 6, b = 12$.

Vậy có hai cách viết : $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ và $\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$.

BÀI TẬP

456(2). So sánh A và B, biết rằng :

a) $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$, $B = 1.2.3 \dots 11$;

b) $A = 1.2.3 \dots 20$, $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000000$.

457(15). So sánh các số tự nhiên a và b, biết rằng :

$$\frac{1+2+3+\dots+a}{a} < \frac{1+2+3+\dots+b}{b}.$$

458(2). Giá tiền 1 quyển sách, 6 quyển vở, 3 chiếc bút là 7700 đồng, giá tiền 8 quyển sách, 6 quyển vở, 6 chiếc bút là 16000 đồng. So sánh giá tiền một quyển sách và một quyển vở.

459(14). So sánh các phân số :

a) $\frac{18}{91}$ và $\frac{23}{114}$; b) $\frac{21}{52}$ và $\frac{213}{523}$; c) $\frac{1313}{9191}$ và $\frac{1111}{7373}$.

460(14). So sánh các phân số :

a) $\frac{n}{n+1}$ và $\frac{n+2}{n+3}$ ($n \in \mathbb{N}$);

b) $\frac{n}{n+3}$ và $\frac{n-1}{n+4}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

c) $\frac{n}{2n+1}$ và $\frac{3n+1}{6n+3}$ ($n \in \mathbb{N}$)

461(14). So sánh A và B :

a) $A = \frac{20}{39} + \frac{22}{27} + \frac{18}{43}$, $B = \frac{14}{39} + \frac{22}{29} + \frac{18}{41}$;

b) $A = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$, $B = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$;

c) $A = \frac{10^7 + 5}{10^7 - 8}$, $B = \frac{10^8 + 6}{10^8 - 7}$;

d) $A = \frac{10^{1992} + 1}{10^{1991} + 1}$, $B = \frac{10^{1993} + 1}{10^{1992} + 1}$.

462(14). Tìm số tự nhiên x sao cho $\frac{4}{11} < \frac{x}{20} < \frac{5}{11}$.

463(14). Tìm hai phân số có các mẫu bằng 9, các tử là hai số tự nhiên

liên tiếp sao cho phân số $\frac{4}{7}$ nằm giữa hai phân số đó.

464(14). Tìm hai phân số có các tử bằng 1, các mẫu là hai số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số $\frac{13}{84}$ nằm giữa hai phân số đó.

465(14). Tìm hai phân số có mẫu bằng 21, biết rằng nó lớn hơn $\frac{-5}{6}$ và nhỏ hơn $\frac{-5}{7}$.

466(2). So sánh hai số sau, số nào lớn hơn ?

- a) 3^{500} và 7^{300} ; b) 8^5 và $3 \cdot 4^7$;
c) 99^{20} và 9999^{10} ; d) 202^{303} và 303^{202} ;
e) 3^{21} và 2^{31} ; g) 11^{1979} và 37^{1320} ;
h) 10^{10} và $48 \cdot 50^5$; i) $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10} .

467(2). So sánh hai số sau :

- a) 5^{299} và 3^{501} ;
b) 3^{23} và 5^{15} ;
c) 127^{23} và 513^{18} .

468(2). Chứng minh rằng : $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.

469(14). So sánh hai phân số :

$$\left(\frac{1}{243}\right)^9 \text{ và } \left(\frac{1}{83}\right)^{13}.$$

470(2). Viết liên nhau các kết quả của các lũy thừa 4^{50} và 25^{50} , ta được một số tự nhiên có bao nhiêu chữ số ?

471(15). Chứng minh rằng 2^{100} là số có 31 chữ số khi viết kết quả của nó trong hệ thập phân.

472 (15). Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{37} + \frac{1}{47} + \frac{1}{53} + \frac{1}{61} < \frac{1}{2}.$$

473(15). Chứng minh rằng :

a) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2};$

b) $\frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500} > 48.$

474(15). Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}.$$

475(15). Chứng minh rằng :

a) $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{100!} < 1;$

b) $\frac{9}{10!} + \frac{9}{11!} + \frac{9}{12!} + \dots + \frac{9}{1000!} < \frac{1}{9!}.$

476(15). Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}.$

Chứng minh rằng : a) $A > \frac{4}{3}$; b) $A < 2,5.$

477(15). Cho $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99}.$

Chứng minh rằng $0,2 < A < 0,4.$

478 (15). Cho

$$A = \frac{1+5+5^2+\dots+5^9}{1+5+5^2+\dots+5^8}, \quad B = \frac{1+3+3^2+\dots+3^9}{1+3+3^2+\dots+3^8}.$$

Chứng minh rằng $A > B.$

479(15). Cho $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100}.$ Chứng minh rằng: $\frac{1}{15} < A < \frac{1}{10}.$

480(15). Cho a, b, c là các số nguyên tố khác nhau đôi một.

Chứng minh rằng $\frac{1}{[a, b]} + \frac{1}{[b, c]} + \frac{1}{[c, a]} \leq \frac{1}{3}.$

481(4). Dùng cả mười chữ số từ 0 đến 9, hãy viết thành số tự nhiên :

a) nhỏ nhất chia hết cho 4.

b) lớn nhất chia hết cho 4.

482(4). Dùng mười chữ số khác nhau, hãy viết số chia hết cho 8 có mười chữ số sao cho số đó có giá trị :

a) lớn nhất;

b) nhỏ nhất.

483(4). Dùng mười chữ số khác nhau, hãy viết số chia hết cho 25 có mười chữ số sao cho số đó có giá trị :

a) nhỏ nhất; b) lớn nhất.

484(2). Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 15, ta được :

$$A = 1234...1415.$$

Hãy xoá đi 15 chữ số của số A để các chữ số còn lại (vẫn giữ nguyên thứ tự như trước) tạo thành :

a) số lớn nhất; b) số nhỏ nhất.

485(2). Cho số 123...20 (viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 20).

Hãy xoá đi 20 chữ số để số còn lại có giá trị :

a) nhỏ nhất; b) lớn nhất.

486(4). Tìm hai số tự nhiên liên tiếp nhỏ nhất sao cho tổng các chữ số của mỗi số đều :

a) chia hết cho 8; b) chia hết cho 17.

487(3). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho ta có cách thêm n chữ số vào sau số đó để được số chia hết cho 39.

488(14). Tìm các số tự nhiên a và b nhỏ nhất lớn hơn 1 sao cho $a^7 = b^8$.

489(13). Cho các phân số $\frac{5}{8}, \frac{11}{20}, \frac{4}{15}$. Tìm ba phân số (có tử và mẫu

dương) theo thứ tự bằng ba phân số trên sao cho hiệu của mẫu và tử của mỗi phân số này đều bằng nhau và hiệu đó có giá trị nhỏ nhất.

490(15). a) Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất khác 0 sao cho khi nhân nó với $\frac{5}{12}$, với $\frac{10}{21}$, ta đều được tích là các số tự nhiên.

b) Tìm phân số nhỏ nhất khác 0 sao cho khi chia nó cho $\frac{14}{9}$, cho $\frac{45}{27}$, ta đều được thương là các số tự nhiên.

491(15). Tìm phân số lớn nhất sao cho khi chia các phân số $\frac{28}{15}, \frac{21}{10}, \frac{49}{84}$ cho nó, ta đều được thương là các số tự nhiên.

492*(15). Tìm các phân số có tử và mẫu đều dương sao cho tổng của phân số đó với số nghịch đảo của nó có giá trị nhỏ nhất.

493(7). a) Tổng của bốn số nguyên dương bằng 402. ƯCLN của chúng có giá trị lớn nhất là bao nhiêu ?

b) Tổng của năm số nguyên dương bằng 352. ƯCLN của chúng có giá trị lớn nhất là bao nhiêu ?

494*(8). Viết số 72 thành tổng của hai số mà BCNN của chúng có giá trị lớn nhất.

495*(8). Cho dãy số tự nhiên 1, 2, 3... 50.

a) Tìm hai số thuộc dãy trên sao cho ƯCLN của chúng đạt giá trị lớn nhất.

b) Tìm hai số thuộc dãy trên sao cho BCNN của chúng đạt giá trị lớn nhất.

496 (2). Tìm giá trị nhỏ nhất của hiệu giữa một số tự nhiên có hai chữ số với tổng các chữ số của nó.

497(15). a) Tìm giá trị lớn nhất của thương của một số tự nhiên có ba chữ số và tổng các chữ số của nó.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của thương của một số tự nhiên có ba chữ số và tổng các chữ số của nó.

498(2). Tìm số chia và số dư biết rằng số bị chia bằng 112, thương bằng 5.

499(2). Tìm số chia và số dư biết rằng số bị chia bằng 813, thương bằng 15, số dư gồm hai chữ số như nhau.

500(2). Tìm số chia và số dư của phép chia 542 cho một số tự nhiên, biết rằng thương bằng 12.

*Dùng phương pháp tìm khoảng giá trị của chữ
để giải các bài tập sau (501 – 510).*

501(2). Tìm số tự nhiên có bốn chữ số biết rằng số đó có thể phân tích thành tích của hai thừa số có tổng bằng 100 và một trong hai thừa số ấy có dạng a^a .

502(2). Một học sinh trong năm năm học từ lớp 5 đến lớp 9 đã qua 31 kì thi, trong đó số kì thi ở năm sau nhiều hơn số kì thi ở năm trước, và số kì thi ở năm cuối gấp ba lần số kì thi ở năm đầu. Hỏi học sinh đó thi bao nhiêu kì ở năm thứ tư?

503(15). Tìm hai số tự nhiên sao cho tổng của hai số ấy bằng tích của chúng.

504(15). Tìm hai số tự nhiên sao cho tích của hai số ấy gấp bốn lần tổng của chúng.

505(15). Viết $\frac{1}{6}$ thành tổng của hai phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau.

506(15). Tìm hai phân số có tử bằng 1, các mẫu dương, biết rằng tổng của hai phân số ấy cộng với tích của chúng bằng $\frac{1}{2}$.

507(15). Tìm ba số tự nhiên khác nhau có tổng các nghịch đảo của chúng bằng một số tự nhiên.

508(15). Tìm bốn số tự nhiên sao cho tổng nghịch đảo các bình phương của chúng bằng 1.

509(15). Tìm ba số nguyên dương biết rằng tổng của ba số ấy bằng tích của chúng.

510(15). Tìm ba số nguyên tố a, b, c khác nhau sao cho $abc < ab + bc + ac$.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN SỐ HỌC

I - PHƯƠNG PHÁP DÙNG SƠ ĐỒ ĐOẠN THẲNG

Ví dụ 135(2). Tuổi anh hiện nay gấp ba lần tuổi em trước kia, lúc anh bằng tuổi em hiện nay. Khi tuổi em bằng tuổi anh hiện nay thì tổng số tuổi của hai người sẽ là 28. Tính tuổi của mỗi người hiện nay.

Tóm tắt : Tuổi anh hiện nay = 3 tuổi em trước kia.

Tuổi anh trước kia = Tuổi em hiện nay.

Tuổi em sau này = Tuổi anh hiện nay.

Tuổi anh sau này + tuổi em sau này = 28.

Giải : Biểu thị tuổi em trước kia bởi đoạn AB, tuổi anh hiện nay bởi đoạn AC gấp ba AB (h.1).

Tuổi em trước kia

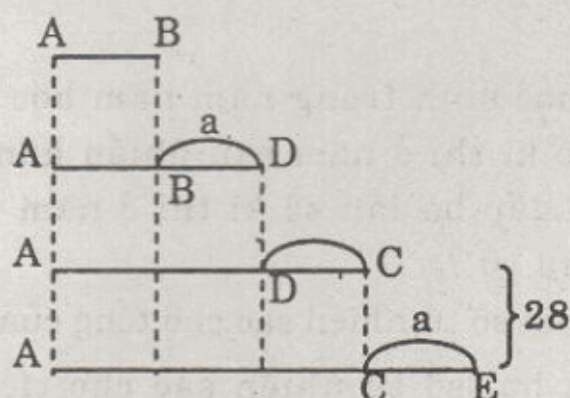
Tuổi em hiện nay

(tuổi anh trước kia)

Tuổi em sau này

(tuổi anh hiện nay)

Tuổi anh sau này



Hình 1

Do anh luôn hơn em một số tuổi không đổi là a nên nếu ta biểu thị tuổi anh trước kia (tức tuổi em hiện nay) là AD, tuổi anh sau này là AE thì các đoạn BD, DC, CE bằng nhau và bằng a .

Vì $AC = 3AB$ nên $BC = 2AB$, do đó $AB = a$.

Từ sơ đồ ta tính được tuổi em sau này (tuổi anh hiện nay) bằng :

$$\frac{28}{3+4} \times 3 = 12.$$

$$\text{Tuổi em hiện nay bằng : } \frac{28}{3+4} \times 2 = 8.$$

Đáp số: Hiện nay anh 12 tuổi, em 8 tuổi.

Trong cách giải trên, sơ đồ đã thể hiện trực quan các đại lượng trong bài toán và các quan hệ giữa chúng.

II- PHƯƠNG PHÁP GIẢ THIẾT TẠM

Ví dụ 136(15). Ba ô tô chở tổng cộng 50 chuyến, gồm 118 tấn hàng. Mỗi chuyến, xe thứ nhất chở 2 tấn, xe thứ hai chở 2,5 tấn, xe thứ ba chở 3 tấn. Hỏi mỗi xe chở bao nhiêu chuyến biết rằng số chuyến xe thứ nhất gấp rưỡi số chuyến xe thứ hai?

Giải. Giả thiết rằng tất cả 50 chuyến đều do xe thứ ba chở thì khối lượng hàng chở được là :

$$3.50 = 150 \text{ (tấn)}.$$

$$\text{Dôi ra : } 150 - 118 = 32 \text{ (tấn)}.$$

Để không dôi ra, phải thay một số chuyến của xe thứ ba bằng các chuyến của hai xe kia theo quy luật sau : cứ 5 chuyến của xe thứ ba thay bởi 3 chuyến của xe thứ nhất và 2 chuyến của xe thứ hai. Mỗi lần thay như vậy thì số chuyến không thay đổi, số chuyến của xe thứ nhất luôn gấp rưỡi số chuyến của xe thứ hai, còn khối lượng hàng giảm đi :

$$3.5 - (2.3 + 2,5.2) = 15 - 11 = 4 \text{ (tấn)}.$$

$$\text{Số lần thay : } 32 : 4 = 8 \text{ (lần)}$$

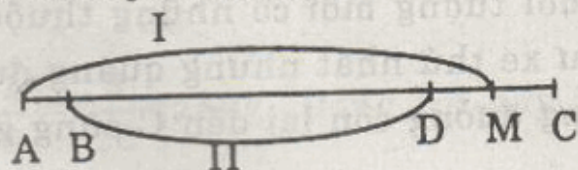
$$\text{Xe thứ nhất chở : } 3.8 = 24 \text{ (chuyến)}.$$

$$\text{Xe thứ hai chở : } 2.8 = 16 \text{ (chuyến)}.$$

$$\text{Xe thứ ba chở : } 50 - (24 + 16) = 10 \text{ (chuyến)}.$$

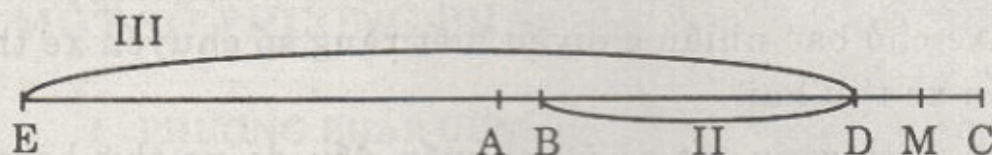
Ví dụ 137(15). Trên quãng đường AC dài 200 km có một địa điểm B cách A là 10 km. Lúc 7 giờ, một ô tô đi từ A, một ô tô khác đi từ B, cả hai cùng đi tới C với vận tốc thứ tự bằng 50km/h và 40km/h. Hỏi lúc mấy giờ thì khoảng cách đến C của xe thứ hai gấp đôi khoảng cách đến C của xe thứ nhất ?

Giải. Quãng đường đi của hai ô tô được minh họa như sau (h.2), lúc xe thứ hai đến D là thời điểm phải tìm, $DM = MC$.



Hình 2

Giả thiết rằng có một xe thứ ba phải đi quãng đường EC dài gấp đôi quãng đường AC của xe thứ nhất phải đi ($EC = 200.2 = 400\text{km}$), với vận tốc gấp đôi vận tốc của xe thứ nhất (như vậy vận tốc xe thứ ba bằng : $50.2 = 100\text{km/h}$) thì cũng trong thời gian như xe thứ nhất, quãng đường còn lại đến C của xe thứ ba gấp đôi quãng đường còn lại đến C của xe thứ nhất và như vậy xe thứ ba này sẽ gặp xe thứ hai tại D (h.3).



Hình 3

Quãng đường ED dài hơn quãng đường BD :

$$400 - 190 = 210 \text{ (km)}.$$

Vận tốc xe thứ ba lớn hơn vận tốc xe thứ hai :

$$100 - 40 = 60 \text{ (km/h)}.$$

Thời gian để xe thứ ba gặp xe thứ hai tại D :

$$210 : 60 = 3,5 \text{ (h)}.$$

Vậy thời điểm phải tìm là :

$$7 + 3,5 = 10 \text{ h } 30 \text{ ph}$$

Đáp số: 10 giờ 30 phút.

Để giải các ví dụ trên, ta đã đưa ra các giả thiết mới để đưa về các bài toán đã biết cách giải (cách giả thiết tạm ở ví dụ 137 đưa về trường hợp hai xe chuyển động cùng chiều gặp nhau trong đó biết khoảng cách ban đầu và hiệu của hai vận tốc).

Các cách giả thiết tạm cũng rất đa dạng :

- Coi như tất cả các đối tượng đều thuộc cùng một loại.
- Thay một đối tượng này bằng một đối tượng khác có một số thuộc tính giữ nguyên và một số thuộc tính thay đổi (giả thiết rằng người này làm với thời gian như người kia, hoặc với năng suất như người kia...).
- Hình dung ra một đối tượng mới có những thuộc tính nhất định (xe thứ ba đi với thời gian như xe thứ nhất nhưng quãng đường phải đi gấp đôi và vận tốc gấp đôi để quãng đường còn lại đến C cũng gấp đôi so với xe thứ nhất).

Biết chọn cách giả thiết tạm một cách hợp lí, đó là sự sáng tạo trong giải toán.

III - PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐƠN VỊ QUY ƯỚC

Trong một số bài toán, giá trị phải tìm có thể không phụ thuộc vào một đại lượng nào đó. Chẳng hạn cần tìm thời gian để hai vòi nước cùng chảy đầy bể nếu hai vòi đó chảy một mình đầy bể theo thứ tự hết 2 giờ và 3 giờ. Gọi dung tích của bể là d (lít) thì trong một giờ, hai vòi chảy một mình theo thứ tự được $\frac{d}{2}$ và $\frac{d}{3}$ lít, cả hai vòi chảy được : $\frac{d}{2} + \frac{d}{3} = \frac{5d}{6}$ (lít). Thời gian để hai vòi chảy đầy bể là : $d : \frac{5d}{6} = \frac{6}{5}$ (giờ).

Thời gian này không phụ thuộc vào dung tích của bể : Ta có thể chọn dung tích của bể là 1 (đơn vị quy ước). Khi đó trong một giờ, hai vòi theo thứ tự chảy được $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$ dung tích bể, cả hai vòi chảy được : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ (dung tích bể), thời gian để hai vòi chảy đầy bể là : $1 : \frac{5}{6} = \frac{6}{5}$ (giờ).

Ví dụ 138(15). Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc : xe thứ nhất đi từ A đến B, xe thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ 30 phút, chúng còn cách nhau 108km. Tính quãng đường AB biết rằng xe thứ nhất đi cả quãng đường AB hết 6 giờ, xe thứ hai đi cả quãng đường BA hết 5 giờ.

Giải. Lấy quãng đường AB làm đơn vị quy ước.

Trong một giờ, xe thứ nhất đi được $\frac{1}{6}$ quãng đường AB, xe thứ hai đi được $\frac{1}{5}$ quãng đường BA.

Trong một giờ cả hai xe đi được :

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30} \text{ quãng đường AB.}$$

Trong 1h 30ph cả hai xe đi được :

$$\frac{11}{30} \cdot \frac{3}{2} = \frac{11}{20} \text{ quãng đường AB.}$$

Còn lại : $1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$ quãng đường AB hay 108 km.

Vậy quãng đường AB dài :

$$108 : \frac{9}{20} = 240 \text{ (km).}$$

Ví dụ 139(15). (Bài toán của Niu-tơn)

Ba công nhân cùng làm một công việc. Người thứ nhất có thể hoàn thành công việc đó trong 3 tuần, người thứ hai có thể hoàn thành một công việc nhiều gấp ba công việc đó trong 8 tuần, người thứ ba có thể hoàn thành một công việc nhiều gấp năm công việc đó trong 12 tuần.

Nếu ba người cùng làm công việc ban đầu thì họ kết thúc công việc trong bao lâu ?

Giải. Lấy khối lượng công việc làm đơn vị quy ước.

Trong một tuần, người thứ nhất làm được $\frac{1}{3}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{3}{8}$ công việc, người thứ ba làm được $\frac{5}{12}$ công việc.

Trong một tuần, họ cùng làm được : $\frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{9}{8}$ (công việc).

Thời gian để họ cùng làm xong công việc :

$$1 : \frac{9}{8} = \frac{8}{9} \text{ (tuần).}$$

IV - PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGƯỢC TỪ CUỐI

Nhiều bài toán khi giải cần tính toán theo thứ tự ngược từ cuối lên. Có một câu châm ngôn nước ngoài : "Người khôn bắt đầu từ chỗ kết thúc, còn kẻ ngu thì kết thúc ở chỗ bắt đầu".

Ví dụ 140(15). Một nông dân ra chợ bán hết số cam của mình cho năm người :

Người thứ nhất mua $\frac{1}{2}$ số cam rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ hai mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ ba mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ tư mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, người thứ năm mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả thì vừa hết.

Tính số cam người nông dân đem bán và số cam mỗi người khách đã mua.

Giải. *Cách 1.* Ta tính ngược từ cuối lên.

Lần thứ năm bán $\frac{1}{2}$ số còn lại cộng $\frac{1}{2}$ quả thì hết nên $\frac{1}{2}$ quả chính là $\frac{1}{2}$ số còn lại. Vậy số còn lại sau lần bán thứ tư là : $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ (quả).

Lần thứ tư bán $\frac{1}{2}$ số còn lại cộng $\frac{1}{2}$ quả thì còn 1 quả nên $1\frac{1}{2}$ quả chính là $\frac{1}{2}$ số còn lại. Vậy số còn lại sau lần bán thứ ba là : $1\frac{1}{2} \cdot 2 = 3$ (quả).

Lần thứ ba bán $\frac{1}{2}$ số còn lại cộng $\frac{1}{2}$ quả thì còn 3 quả nên $3\frac{1}{2}$ quả chính là $\frac{1}{2}$ số còn lại. Vậy số còn lại sau lần bán thứ hai là : $3\frac{1}{2} \cdot 2 = 7$ (quả).

Lần thứ hai bán $\frac{1}{2}$ số còn lại cộng $\frac{1}{2}$ quả thì còn 7 quả nên $7\frac{1}{2}$ quả chính là $\frac{1}{2}$ số còn lại. Vậy số còn lại sau lần bán thứ nhất là : $7\frac{1}{2} \cdot 2 = 15$ (quả).

Lần thứ nhất bán $\frac{1}{2}$ số cam cộng $\frac{1}{2}$ quả thì còn 15 quả nên $15\frac{1}{2}$ quả chính là $\frac{1}{2}$ số cam. Vậy số cam lúc đầu là : $15\frac{1}{2} \cdot 2 = 31$ (quả).

Người thứ nhất mua : $31 - 15 = 16$ (quả).

Người thứ hai mua : $15 - 7 = 8$ (quả).

Người thứ ba mua : $7 - 3 = 4$ (quả).

Người thứ tư mua : $3 - 1 = 2$ (quả).

Người thứ năm mua : 1 quả.

Cách 2. Gọi số cam lúc đầu là a.

Người thứ nhất mua : $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}$ quả, còn : $\frac{a}{2} - \frac{1}{2}$ quả.

Người thứ hai mua : $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{a}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{a}{4} + \frac{1}{4}$ quả.

Như vậy số cam người thứ hai mua bằng $\frac{1}{2}$ số cam người thứ nhất mua.

Tương tự, số cam người sau mua bằng $\frac{1}{2}$ số cam người liền trước mua.

Người thứ năm mua $\frac{1}{2}$ số còn lại cộng $\frac{1}{2}$ quả thì hết nên người thứ

năm mua : $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ quả. Do đó người thứ tư mua 2 quả, người thứ ba mua 4 quả, người thứ hai mua 8 quả, người thứ nhất mua 16 quả.

Tổng số cam : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ (quả).

Ví dụ 141(15). (Bài toán Ô-le).

Một người cha khi chết để lại di chúc chia gia tài cho các con như sau :

Người con thứ nhất được chia 100 cuaron và $\frac{1}{10}$ số còn lại, người con thứ hai được chia 200 cuaron và $\frac{1}{10}$ số còn lại, người con thứ ba được chia 300 cuaron và $\frac{1}{10}$ số còn lại...

Cứ tiếp tục chia như vậy thì toàn bộ gia tài được chia đều cho các con. Hỏi gia tài đó gồm bao nhiêu tiền và mỗi người con được chia bao nhiêu ?

Giải. Xét hai người con cuối cùng là người thứ $n - 1$ và người thứ n .

Người thứ $n - 1$ được chia : A cuaron + $\frac{1}{10}$ số tiền còn lại hay : $A + \frac{1}{10} B$.

Người thứ n là người cuối cùng được chia nốt $\frac{9}{10} B$, hay theo quy luật của bài toán, được chia : $A + 100$ cuaron (không còn số còn lại).

Vì số tiền mỗi người được chia bằng nhau nên : $A + \frac{1}{10} B = A + 100$, suy ra :

$$\frac{1}{10} B = 100.$$

Người thứ n được chia $\frac{9}{10} B$ tức là : $100 \cdot 9 = 900$ cuaron, đó cũng là số tiền mỗi người được chia (*).

$\frac{1}{10}$ số còn lại sau khi người thứ nhất được chia 100 cuaron là :

$$900 - 100 = 800 \text{ (cuaron).}$$

Toàn bộ gia tài gồm :

$$100 + 800 \cdot 10 = 8100 \text{ (cuaron).}$$

(*) Đến đây có thể giải tiếp bài toán như sau :

Theo quy luật của bài toán người con cuối cùng là người thứ : $900 : 100 = 9$.

Toàn bộ gia tài gồm : $900 \cdot 9 = 8100$ (cuaron).

V - PHƯƠNG PHÁP LỰA CHỌN

Nhiều bài toán về số tự nhiên có thể giải bằng cách căn cứ vào một số dữ kiện của bài toán để chọn ra một số giá trị của số phải tìm, sau đó thử xem trường hợp nào thoả mãn các dữ kiện còn lại.

Ví dụ 142 (16). Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 18 và các chữ số của nó nếu sắp xếp từ nhỏ đến lớn thì tỉ lệ với $1 : 2 : 3$.

Giải. Căn cứ vào điều kiện các chữ số tỉ lệ với $1 : 2 : 3$, các chữ số của số phải tìm có thể là 1, 2, 3 ; hoặc 2, 4, 6 ; hoặc 3, 6, 9.

Chú ý rằng số phải tìm chia hết cho 18 nên chia hết cho 9, do đó tổng các chữ số của nó chia hết cho 9. Trong ba trường hợp trên, ta thấy chỉ có bộ ba chữ số 3, 6, 9 là thoả mãn.

Số phải tìm chia hết cho 2 nên chữ số tận cùng phải bằng 6. Các số 396 và 936 đều thoả mãn bài toán.

Chú ý : 1) Khi chọn ra khoảng giá trị chứa số phải tìm, người ta thường dùng phương pháp bất đẳng thức (xem chuyên đề *Bất đẳng thức*).

2) Với phương pháp lựa chọn, ta cũng giải được bài toán tìm các số tự nhiên x và y thoả mãn đẳng thức $ax + by = c$, trong đó a, b, c là các số tự nhiên cho trước. Xét ví dụ sau :

Ví dụ 143(2). Anh Lâm nói với bạn :

– Năm 1990, tuổi mình đúng bằng tổng các chữ số của năm sinh. Hãy tính xem anh Lâm sinh năm nào ?

Giải.

Gọi năm sinh của anh Lâm là $\overline{19xy}$ thì $1990 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$.

$$\text{Do đó : } 90 - (10x + y) = 10 + x + y$$

$$80 = 11x + 2y.$$

Do $11x \leq 80$ nên $x \leq 7$. Do $2y \leq 18$ nên $11x \geq 80 - 18 = 62$, do đó $x \geq 6$.

Như vậy chỉ cần xét $x = 6$ hoặc $x = 7$.

Với $x = 6$ thì $2y = 80 - 11.6 = 14$ nên $y = 7$.

Với $x = 7$ thì $2y = 80 - 11.7 = 3$, loại.

Vậy anh Lâm sinh năm 1967.

Ta có : $1990 - 1967 = 1 + 9 + 6 + 7$.

BÀI TẬP

Tìm các số biết tổng và các hiệu, biết tổng (hiệu) và các tỉ số

511(2). Tìm bốn số tự nhiên chẵn liên tiếp có tổng bằng 5420.

512(2). Tìm ba số biết rằng :

Tổng của số thứ nhất và số thứ hai bằng 56, tổng của số thứ hai và số thứ ba bằng 64, tổng của số thứ ba và số thứ nhất bằng 78.

513(2). Tìm ba số tự nhiên lẻ liên tiếp biết rằng tổng của số lớn nhất và số nhỏ nhất bằng 114.

514(2). Hai ngăn sách lúc đầu có tổng cộng 118 cuốn. Sau khi lấy đi 8 cuốn ở ngăn I, thêm 10 cuốn vào ngăn II thì số sách ở ngăn II gấp đôi số sách ở ngăn I. Tính số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

515(2). Tìm số tự nhiên tận cùng bằng 7 biết rằng sau khi xoá chữ số 7 đó thì số ấy giảm đi 484 đơn vị.

516(2). Hiệu của hai số bằng 1217. Nếu tăng số trừ gấp bốn lần thì được số lớn hơn số bị trừ là 376. Tìm số bị trừ, số trừ.

517(15). Một vườn hình chữ nhật có chu vi 358m. Tính chiều dài và chiều rộng của vườn biết rằng nếu viết thêm chữ số 1 vào trước số đo chiều rộng thì được số đo chiều dài.

518(2). (Bài toán cổ Hi Lạp)

Lừa và ngựa thồ hàng ra chợ,

Ngựa thồ than mình chở quá nhiều.

Lừa rằng : "Anh chở lắm điều !

Tôi đây mới bị chất nhiều làm sao !

Anh đưa tôi một bao mang bớt

Thì tôi thồ nhiều gấp đôi anh

Chính tôi phải trút cho anh

Một bao gánh đỡ mới thành bằng nhau".

Hỏi lừa, ngựa chở mấy bao ?

519(13). Cho phân số $\frac{9}{43}$. Tìm số tự nhiên x sao cho :

a) Cộng cả tử và mẫu với x, ta được một phân số có giá trị bằng $\frac{1}{3}$.

b) Cộng tử với x, lấy mẫu trừ x, ta được một phân số có giá trị bằng $\frac{5}{8}$.

520(13). Tìm một phân số có mẫu bằng 12, biết rằng nếu cộng tử với 15 và nhân mẫu với 4 thì giá trị của phân số không đổi.

521(2). Tìm số bị chia và số chia của một phép chia, biết rằng thương bằng 6, số dư bằng 49, tổng của số bị chia, số chia và số dư bằng 595.

522(2). Tìm số tự nhiên biết rằng nếu viết thêm chữ số 2 vào sau chữ số hàng đơn vị thì số ấy tăng thêm 2000 đơn vị.

523(16). Tìm ba số có tổng bằng 210, biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{11}$ số thứ hai và bằng $\frac{2}{3}$ số thứ ba.

524(2). Mẹ hơn con 28 tuổi. Sau 5 năm nữa, tuổi mẹ gấp ba tuổi con. Tính tuổi mẹ và con hiện nay.

525(2). Con 10 tuổi, bố 40 tuổi. Sau mấy năm nữa, tuổi bố gấp ba tuổi con ?

526(2). Năm 2000, bố 40 tuổi, Mai 11 tuổi, em Nam 5 tuổi. Đến năm nào, tuổi bố bằng tổng số tuổi của hai chị em ?

527(2). Năm 2000, mẹ 36 tuổi, hai con 7 tuổi và 12 tuổi. Bắt đầu từ năm nào, tuổi mẹ ít hơn tổng số tuổi của hai con ?

528(2). Anh hơn em 3 tuổi. Tuổi anh hiện nay gấp rưỡi tuổi em, lúc anh bằng tuổi em hiện nay. Tính tuổi hiện nay của mỗi người.

Tìm một số trong đó biết hai tỉ số

529(16). Số dân của hai phường A và B trước kia tỉ lệ với 2 và 3. Hiện nay số dân phường A tăng thêm 8000 người, phường B tăng thêm 4000 người, do đó số dân phường A bằng $\frac{3}{4}$ số dân phường B. Tính số dân của mỗi phường hiện nay.

530(16). Tuổi mẹ hiện nay gấp 2,3 lần tuổi con. 16 năm trước, tuổi mẹ gấp 7,5 lần tuổi con. Hỏi mấy năm sau thì tuổi mẹ gấp đôi tuổi con ?

531(16). *Đố vui : Tuổi chó và mèo*

Tuấn đến nhà Tú chơi, thấy một chú chó và một chú mèo, cả hai đều rất xinh xắn. Tuấn ôm chó và vuốt đuôi nó. Em của Tú láu lỉnh bảo Tuấn :

- Đừng đoán tuổi chó dựa vào số khoanh đuôi anh ạ ! Hai năm trước tuổi chó gấp ba tuổi mèo, còn bây giờ chỉ gấp đôi thôi !

Hỏi chó và mèo mấy tuổi ?

532(2). Một số học sinh xếp hàng 12 thì thừa 5 học sinh, còn xếp hàng 15 cũng thừa 5 học sinh và ít hơn trước là 4 hàng. Tính số học sinh.

533(2). Có một số học sinh và một số thuyền. Nếu xếp 4 học sinh một thuyền thì thừa 3 học sinh chưa có chỗ. Nếu xếp 5 học sinh một thuyền thì thừa ra 1 thuyền. Tính số học sinh và số thuyền.

534(2). An vào cửa hàng mua 12 vở và 4 bút chì hết 36000 đồng. Bích mua 8 vở và 5 bút chì cùng loại hết 27500 đồng. Tính giá một quyển vở, giá một bút chì.

535(2). Người ta bơm nước vào một bể : dùng máy I trong 30 phút, dùng máy II trong 20 phút. Tính xem trong mỗi phút mỗi máy bơm được bao nhiêu lít nước, biết rằng mỗi phút máy II bơm được nhiều hơn máy I là 50 lít và tổng cộng hai máy bơm được 21000 lít nước ?

536(2). Một tổ may phải may 1800 chiếc cả quần và áo trong 13 giờ. Trong 8 giờ đầu tổ may áo và trong thời gian còn lại tổ may quần. Biết rằng trong 1 giờ, tổ may được số áo nhiều hơn số quần là 30 chiếc. Tính số áo và số quần tổ đã may.

537(16). Năm trước hai nông trường có 500 con bò. Năm sau, số bò của nông trường I tăng 25%, số bò của nông trường II tăng 12,5%, do đó số bò của cả hai nông trường tăng 20%. Tính số bò năm trước của mỗi nông trường.

538(2).

Quýt, cam mười bảy quả tươi

Đem chia cho một trăm người cùng vui.

Chia ba mỗi quả quýt rồi,

Còn cam mỗi quả chia mười vừa xinh.

Trăm người, trăm miếng ngọt lành,

Quýt, cam mỗi loại tính rành là bao ?

539(2). Một lớp học có 6 tổ, số người của mỗi tổ bằng nhau. Trong một bài kiểm tra, tất cả học sinh đều được điểm 7 hoặc 8. Tổng số điểm của cả lớp là 350. Hãy tính số học sinh của lớp, số học sinh đạt từng loại điểm.

540(2). Khối 6 của một trường có 366 học sinh, gồm 8 lớp. Mỗi lớp gồm một số tổ, mỗi tổ có 9 người hoặc 10 người. Biết rằng số tổ của các lớp đều bằng nhau, tính số tổ có 9 người, số tổ có 10 người của cả khối.

541(2). Một đội bóng thi đấu 25 trận, chỉ có thắng và hoà, mỗi trận thắng được 3 điểm, mỗi trận hoà được 1 điểm, kết quả đội đó được 59 điểm. Tính số trận thắng, số trận hoà của đội bóng.

542(2). a) Một cuộc thi có 20 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 1 điểm. Một đội học sinh dự thi đạt 52 điểm. Hỏi đội đó trả lời đúng mấy câu, sai mấy câu ?

b) Một người làm gia công 45 sản phẩm, mỗi chiếc làm đúng quy cách được 800 đồng, mỗi chiếc làm sai quy cách phải đền 1200 đồng. Tính ra người đó được lĩnh 30000 đồng. Hỏi người đó làm bao nhiêu sản phẩm đúng quy cách ?

543(2). Một câu lạc bộ có 22 chiếc ghế gồm ba loại : ghế ba chân, ghế bốn chân, ghế sáu chân. Tính số ghế mỗi loại, biết rằng tổng số chân ghế bằng 100 và số ghế sáu chân gấp đôi số ghế ba chân.

544(2). Một số tiền trị giá 224000 đồng gồm các loại tiền 5000 đồng, 2000 đồng, 1000 đồng, tổng cộng 130 tờ. Biết rằng số tờ 1000 đồng gấp năm số tờ 5000 đồng. Tính số tờ tiền mỗi loại.

545(2). Có 25 gói đường gồm ba loại : gói 5 lạng, gói 2 lạng, gói 1 lạng, có khối lượng tổng cộng là 56 lạng. Biết số gói 1 lạng gấp đôi số gói 5 lạng. Tính số gói mỗi loại.

546(15). Một công nhân có thể hoàn thành một công việc trong 6 giờ, người thứ hai hoàn thành công việc ấy trong 15 giờ. Đầu tiên người thứ nhất làm, sau đó chỉ có người thứ hai làm, tổng cộng 9 giờ thì xong công việc. Hỏi mỗi người làm mấy giờ và tổng số dụng cụ hai người làm được là bao nhiêu biết rằng người thứ nhất làm nhiều hơn người thứ hai là 150 dụng cụ ?

547(2). Một hộp có thể chứa được vừa vặn 25 gói bánh hoặc 30 gói kẹo. Người ta xếp 28 gói cả bánh và kẹo thì vừa đầy hộp đó. Biết rằng giá tiền bánh và kẹo đều bằng nhau và bằng 36000 đồng. Tính giá một gói bánh, một gói kẹo.

Toán giải bằng cách dùng đơn vị quy ước

548(15). Một công nhân làm một mình xong một công việc trong 10 ngày, người thứ hai làm xong công việc đó trong 15 ngày, còn người thứ ba muốn hoàn thành công việc nói trên cần một số ngày gấp 5 lần số ngày hai người trên cùng làm để hoàn thành công việc. Hỏi nếu cả ba người cùng làm công việc đó thì mấy ngày xong ?

549(15). Một người cần 15 ngày để làm xong một công việc, trong khi đó người thứ hai làm xong công việc ấy cần 18 ngày. Cả hai cùng làm 3 ngày, sau đó chỉ còn người thứ nhất làm thêm 3 ngày nữa thì có người thứ ba đến

giúp và tất cả làm 4 ngày thì xong. Hỏi người thứ ba làm một mình bao lâu xong công việc nói trên ?

550 (15). Ba máy cày cùng cày một cánh đồng. Lúc đầu chỉ có hai máy thứ nhất và thứ hai cày trong 3 giờ, sau đó máy thứ hai nghỉ, máy thứ ba vào làm thay với năng suất gấp đôi máy thứ hai và trong 5 giờ thì hai máy này cày xong cánh đồng. Hỏi mỗi máy cày một mình xong cánh đồng đó trong bao lâu, biết rằng nếu máy thứ nhất và máy thứ hai cùng làm thì sau 12 giờ xong công việc ?

• **551*(15).** (Theo nội dung bài toán bò ăn cỏ của Niu-tơn)

Có ba cánh đồng cỏ như nhau và cỏ luôn mọc đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng. 9 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng I trong 2 tuần, 6 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng II trong 4 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng III trong 6 tuần ? (mỗi con bò đều ăn số cỏ như nhau).

Toán giải bằng cách tính ngược từ cuối

552(15). Một người ra chợ bán trứng. Người khách thứ nhất mua $\frac{1}{2}$ số trứng rồi mua thêm 2 quả, người thứ hai mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm 2 quả, người thứ ba mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm 2 quả, người thứ tư mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm 2 quả thì hết. Hỏi người bán hàng bán được bao nhiêu tiền trứng biết rằng giá một chục trứng là 4000 đồng ?

553(4). a) Có 100 viên bi. Hai người lần lượt lấy số bi bất kì từ 1 đến 4 viên, người nào lấy được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc.

Hỏi người đi trước hay người đi sau sẽ thắng và cách lấy số bi để đảm bảo phần thắng thuộc về mình ?

b) Cũng hỏi như câu a nếu mỗi người được lấy từ 5 đến 10 viên bi.

c) Cũng hỏi như câu a nếu mỗi người được lấy từ 5 đến 10 viên bi và người lấy viên bi cuối cùng là người thua cuộc.

554(15). Trong dịp Tết trồng cây, khối 6 phân chia số cây cho các lớp đem trồng như sau :

Lớp 6A trồng 10 cây và $\frac{1}{8}$ số còn lại, lớp 6B trồng 15 cây và $\frac{1}{8}$ số còn lại, lớp 6C trồng 20 cây và $\frac{1}{8}$ số còn lại...

Cứ chia như vậy cho đến lớp cuối cùng thì vừa hết số cây và số cây các lớp được chia đem trồng đều bằng nhau. Hỏi có mấy lớp 6, mỗi lớp được chia bao nhiêu cây đem trồng ?

Toán giải bằng phương pháp lựa chọn

555(15). Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu chia số ấy cho tích các chữ số của nó thì được $\frac{8}{3}$ và hiệu giữa số phải tìm với số gồm các chữ số của số ấy viết theo thứ tự ngược lại bằng 18.

556(2). Năm sinh của hai nhà toán học Việt Nam thời trước là một số có bốn chữ số, số đó không thay đổi khi đổi chỗ các chữ số hàng nghìn và hàng đơn vị, hàng trăm và hàng chục, ngoài ra tổng của bốn chữ số đó bằng 10. Tìm năm sinh của hai nhà toán học đó.

557(2). Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng tổng sáu số tự nhiên có hai chữ số lập bởi hai trong ba chữ số ấy gấp đôi số phải tìm.

558(2). a) Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng tổng các số tự nhiên có ba chữ số gồm cả ba chữ số ấy bằng 1554.

b) Tìm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng tổng các số tự nhiên có ba chữ số gồm cả ba chữ số ấy bằng 2886, còn hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất bằng 495.

c) Có ba tờ bìa ghi các số 23; 79 và $\overline{ab}$. Xếp ba tờ bìa thành một hàng thì được số có sáu chữ số. Cộng tất cả các số sáu chữ số đó lại (bằng cách đổi chỗ các tờ bìa) thì được 2 989 896. Tìm số $\overline{ab}$.

559(4). Tìm số tự nhiên x, biết rằng tổng các chữ số của x bằng y, tổng các chữ số của y bằng z và $x + y + z = 60$.

560(3). Trên một tấm bia có các vòng tròn tính điểm là 18, 23, 28, 33, 38. Muốn trúng thưởng, phải bắn một số phát tên để đạt đúng 100 điểm. Hỏi phải bắn bao nhiêu phát tên và vào những vòng nào ?

561(2). *Đố vui : Những năm sinh đặc biệt*

Ngày đầu năm 1991, bác Nam hỏi anh Việt :

– Năm nay cháu bao nhiêu tuổi rồi ?

- Tuổi cháu năm nay đúng bằng tổng các chữ số của năm sinh - Anh Việt trả lời.

Thế mà bác Nam tính ngay ra tuổi của anh Việt. Bác gật gù nói :

- Lúc bác bằng tuổi cháu hiện nay, bác đang tham gia kháng chiến chống Pháp, và năm ấy cũng có tổng các chữ số bằng tuổi cháu.

Anh Việt cũng tính đúng tuổi của bác Nam.

Hỏi anh Việt và bác Nam sinh năm nào ?

TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Các bài toán chuyển động rất phong phú về cả thể loại lẫn cách giải. Ở đây chúng ta sẽ gặp lại nhiều phương pháp giải toán số học đã nêu mục trước như phương pháp dùng sơ đồ đoạn thẳng, phương pháp giả thiết tạm, phương pháp dùng đơn vị quy ước...

I - CHUYỂN ĐỘNG CÙNG CHIỀU

Công thức thường gặp trong chuyển động cùng chiều là:

$$t = \frac{s}{v_1 - v_2} \text{ trong đó } t \text{ là thời gian để hai động tử gặp nhau, } s \text{ là}$$

khoảng cách lúc đầu giữa hai động tử, v_1 và v_2 là các vận tốc của chúng.

Ví dụ 144(15). Một người đi từ A đến B vận tốc 15km/h. Sau đó 1h30ph, người thứ hai cũng rời A đi về B, vận tốc 20km/h và đến B trước người thứ nhất là 30 phút. Tính quãng đường AB.

Giải. Thời gian đi AB của người thứ hai ít hơn người thứ nhất là 1h30ph + 30ph = 2h.

Cách 1 : Giả sử người thứ hai đi sau người thứ nhất 2 giờ thì hai người đến B cùng một lúc.

Trong 2 giờ đi trước, người thứ nhất đi được :

$$15.2 = 30 \text{ (km).}$$

Thời gian để người thứ hai đuổi kịp người thứ nhất là :

$$30 : (20 - 15) = 6 \text{ (h)}$$

Quãng đường AB dài :

$$20.6 = 120 \text{ (km).}$$

Cách 2 : Giả sử người thứ hai đi với thời gian như người thứ nhất thì người thứ hai đi quãng đường nhiều hơn người thứ nhất là :

$$20.2 = 40 \text{ (km)}.$$

Vận tốc người thứ hai hơn vận tốc người thứ nhất :

$$20 - 15 = 5 \text{ (km/h)}.$$

Thời gian người thứ nhất đi AB :

$$40 : 5 = 8 \text{ (h)}.$$

Quãng đường AB dài : $15.8 = 120 \text{ (km)}$.

Cách 3 : Cùng đi một quãng đường AB thì vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian. Ta có : $\frac{v_1}{v_2} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ nên $\frac{t_1}{t_2} = \frac{4}{3}$. Biết tỉ số $\frac{t_1}{t_2} = \frac{4}{3}$ và hiệu $t_1 - t_2 = 2$, ta tìm được $t_1 = 8$, $t_2 = 6$. Do đó quãng đường AB dài : $15.8 = 120 \text{ (km)}$.

Cách 4 : Cứ mỗi km, người thứ nhất đi hết $\frac{1}{15}$ giờ, người thứ hai đi hết

$\frac{1}{20}$ giờ, người thứ hai đi ít hơn người thứ nhất :

$$\frac{1}{15} - \frac{1}{20} = \frac{1}{60} \text{ (h)}$$

Quãng đường AB dài : $2 : \frac{1}{60} = 120 \text{ (km)}$

Một dạng chuyển động cùng chiều thường gặp là chuyển động của hai kim đồng hồ. Trong loại toán này, nếu ta chọn mặt đồng hồ là 1 vòng thì vận tốc của kim phút là 1 vòng/h, vận tốc của kim giờ là $\frac{1}{12}$ vòng/h ; nếu ta chia mặt đồng hồ thành 60 vạch chia phút thì vận tốc của kim phút là 60 vạch/h, vận tốc của kim giờ là 5 vạch/h; nếu chia mặt đồng hồ thành 12 vạch chia giờ thì vận tốc của kim phút là 12 vạch/h, vận tốc của kim giờ là 1 vạch/h.

Ví dụ 145(15). Đồng hồ đang chỉ 4 giờ 10 phút. Sau ít nhất bao lâu thì hai kim đồng hồ nằm đối diện nhau trên một đường thẳng ?

Giải. Ta xét thời điểm 4 giờ, lúc đó kim phút còn cách kim giờ $\frac{1}{3}$ vòng.

Muốn kim phút nằm đối diện với kim giờ thì trong cùng một thời gian, kim phút phải quay nhiều hơn kim giờ :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ (vòng)}.$$

Mỗi giờ kim phút quay được 1 vòng, kim giờ quay được $\frac{1}{12}$ vòng, kim phút quay nhanh hơn kim giờ :

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng).}$$

Thời gian để kim phút và kim giờ nằm đối diện trên một đường thẳng :

$$\frac{5}{6} : \frac{11}{12} = \frac{10}{11} \text{ h} \approx 54 \text{ ph } 33 \text{ s}$$

Lúc đó là 4 giờ 54 phút 33 giây, sau lúc 4 giờ 10 phút là 44 phút 33 giây.

II- CHUYỂN ĐỘNG NGƯỢC CHIỀU

Thời gian để hai động tử gặp nhau trong chuyển động ngược chiều là :

$$t = \frac{s}{v_1 + v_2} \text{ (s là khoảng cách ban đầu giữa hai động tử, } v_1 \text{ và } v_2 \text{ là các vận tốc của chúng).}$$

Ví dụ 146(15). Hai xe ô tô đi từ hai địa điểm A và B về phía nhau, xe thứ nhất khởi hành từ A lúc 7 giờ, xe thứ hai khởi hành từ B lúc 7 giờ 10 phút. Biết rằng để đi cả quãng đường AB, xe thứ nhất cần 2 giờ, xe thứ hai cần 3 giờ. Hai xe gặp nhau lúc mấy giờ ?

Giải. Chọn quãng đường AB làm đơn vị quy ước.

Trong một giờ, xe thứ nhất đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường, xe thứ hai đi được

$\frac{1}{3}$ quãng đường, hai xe gần nhau được :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \text{ (quãng đường).}$$

Trong $7\text{h}10\text{ph} - 7\text{h} = 10$ phút đi trước, xe thứ nhất đi được :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \text{ (quãng đường).}$$

Lúc xe thứ hai khởi hành, hai xe cách nhau :

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (quãng đường).}$$

Hai xe gặp nhau sau :

$$\frac{11}{12} : \frac{5}{6} = \frac{11}{10} \text{ (h)} = 1\text{h}6\text{ph.}$$

Lúc hai xe gặp nhau : $7\text{h } 10\text{ph} + 1\text{h } 6\text{ph} = 8\text{h } 16\text{ph}$.

Ví dụ 147(15). Trên quãng đường AB, hai xe ô tô đi từ A và từ B ngược chiều nhau. Nếu hai xe khởi hành cùng một lúc thì chúng gặp nhau tại một điểm cách A 12km, cách B 18 km. Nếu muốn gặp nhau ở chính giữa đường thì xe thứ nhất (đi từ A) phải khởi hành trước xe kia 10 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Giải. Nửa quãng đường AB dài : $(12 + 18) : 2 = 15 \text{ (km)}$.

Tỉ số vận tốc của xe thứ nhất so với xe thứ hai bằng :

$$12 : 18 = \frac{2}{3}.$$

Trong thời gian xe thứ hai đi được nửa quãng đường AB (15km) thì xe thứ nhất đi được :

$$15 \cdot \frac{2}{3} = 10 \text{ (km)}$$

Như vậy trong 10 phút, xe thứ nhất đi được :

$$15 - 10 = 5 \text{ (km)}.$$

Vận tốc xe thứ nhất : $5 : \frac{1}{6} = 30 \text{ (km/h)}$.

Vận tốc xe thứ hai : $30 \cdot \frac{3}{2} = 45 \text{ (km/h)}$.

III- CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT CÓ CHIỀU DÀI ĐÁNG KỂ

Ví dụ 148 (2). Một xe lửa đi hết một cái cầu dài 12m hết 12 giây và đi hết một cái cầu dài 148m hết 20 giây. Tính chiều dài và vận tốc của xe lửa.

Giải. Trong 12 giây, xe lửa đi 12m cộng với chiều dài xe lửa. Trong 20 giây, xe lửa đi 148m cộng với chiều dài xe lửa.

Như vậy trong : $20 - 12 = 8 \text{ (s)}$, xe lửa đi được :

$$148 - 12 = 136 \text{ (m)}.$$

Vận tốc xe lửa :

$$136 : 8 = 17 \text{ (m/s)}.$$

Chiều dài của xe lửa :

$$17 \cdot 12 - 12 = 192 \text{ (m)}.$$

IV - CHUYỂN ĐỘNG CÓ DÒNG NƯỚC

Ở loại toán này, nếu một ca nô đi xuôi dòng rồi đi ngược dòng thì :

Vận tốc xuôi = vận tốc ca nô + vận tốc dòng nước ;

Vận tốc ngược = vận tốc ca nô - vận tốc dòng nước.

Ví dụ 149(15). Một ca nô chạy xuôi khúc sông AB hết 6 giờ và chạy ngược khúc sông ấy hết 9 giờ. Hỏi một phao trôi theo dòng nước từ A đến B trong bao lâu ?

Giải. Trong một giờ, ca nô chạy xuôi được $\frac{1}{6}$ AB, ca nô chạy ngược được $\frac{1}{9}$ BA.

Do vận tốc xuôi trừ vận tốc ngược bằng 2 lần vận tốc dòng nước nên trong một giờ dòng nước trôi được :

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) : 2 = \frac{1}{36} \text{AB.}$$

Thời gian phao trôi từ A đến B :

$$1 : \frac{1}{36} = 36 \text{ (h).}$$

V- CHUYỂN ĐỘNG CÓ VẬN TỐC THAY ĐỔI TRÊN TỪNG ĐOẠN

Ví dụ 150(15). Một người đi xe đạp từ A đến B gồm một đoạn lên dốc AC và một đoạn xuống dốc CB. Thời gian đi AB là 2 giờ, thời gian về BA là 1 giờ 45 phút. Tính chiều dài quãng đường AB biết rằng cứ lúc lên dốc thì người đó đi với vận tốc 10km/h, cứ lúc xuống dốc thì người đó đi với vận tốc 15km/h.

Giải. Cách 1: Chú ý rằng vận tốc 10km/h bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc 15km/h. Giả sử trong 2 giờ lúc đi, người đó đều đi với vận tốc 10km/h thì đi được quãng đường : $AC + \frac{2}{3}CB$, dài :

$$10 \cdot 2 = 20 \text{ (km).}$$

Giả sử trong 1h 45ph lúc về, người đó đều đi với vận tốc 10km/h thì đi được quãng đường : $BC + \frac{2}{3}CA$, dài :

$$10 \cdot 1 \frac{3}{4} = 17,5 \text{ (km).}$$

Vậy quãng đường $20 + 17,5 = 37,5$ (km) là :

$$AC + \frac{2}{3}CB + BC + \frac{2}{3}CA = \frac{5}{3}(AC + CB) = \frac{5}{3}AB.$$

$$\text{Quãng đường AB : } 37,5 : \frac{5}{3} = 22,5 \text{ (km).}$$

Cách 2 : Trên mỗi km của quãng đường AB đều có một lần người đi xe đạp đi với vận tốc 10km/h, một lần đi với vận tốc 15km/h.

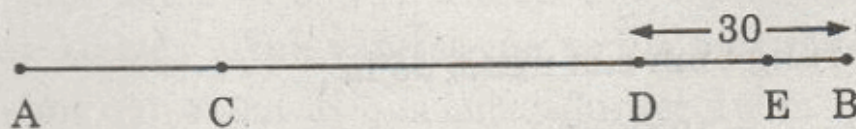
1km đi với vận tốc 10km/h hết $\frac{1}{10}$ giờ, 1km đi với vận tốc 15km/h hết $\frac{1}{15}$ giờ, do đó 1km cả đi lẫn về hết :

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6} \text{ (h).}$$

$$\text{Thời gian cả đi lẫn về : } 2 + 1\frac{3}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ (h).}$$

$$\text{Quãng đường AB : } 3\frac{3}{4} : \frac{1}{6} = 22,5 \text{ (km).}$$

Ví dụ 151(15). Một xe tải đi từ A đến B, vận tốc 40km/h. Sau đó một thời gian, một xe du lịch rời A, vận tốc 60km/h và như vậy sẽ đến B cùng lúc với xe tải. Nhưng đi đến C, được $\frac{1}{5}$ quãng đường AB, xe tải giảm vận tốc xuống còn 35 km/h, do đó xe du lịch gặp xe tải ở D, cách B 30km. Tính quãng đường AB.



Hình 4

Giải (h.4). Nếu không thay đổi vận tốc thì xe tải gặp xe du lịch ở B, do đổi vận tốc nên nó gặp xe du lịch ở D. Trong bài toán này, xe du lịch được đưa vào để xác định xem do thay đổi vận tốc, xe tải đi chậm bao lâu so với bình thường.

$$\text{Xe du lịch đi DB trong : } 30 : 60 = \frac{1}{2} \text{ (h).}$$

$$\text{Trong } \frac{1}{2} \text{ giờ đó, xe tải đi được : } 35 \cdot \frac{1}{2} = 17,5 \text{ (km).}$$

Như vậy lúc xe du lịch đến B (tức là lúc xe tải đáng lẽ đến B) thì xe tải mới đến E, còn cách B : $30 - 17,5 = 12,5$ (km).

Từ C, xe tải đi với vận tốc bằng $\frac{35}{40} = \frac{7}{8}$ vận tốc cũ nên quãng đường đi được CE bằng $\frac{7}{8}$ quãng đường CB. Vậy quãng đường 12,5 km là $\frac{1}{8}$ quãng đường CB.

Quãng đường CB : $12,5 \cdot 8 = 100(\text{km})$.

Quãng đường AB : $\frac{100 \cdot 5}{4} = 125 (\text{km})$.

VI - VẬN TỐC TRUNG BÌNH

Ví dụ 152(15). Một người đi xe đạp từ A đến B, đi từ A với vận tốc 10km/h, nhưng đi từ chính giữa đường đến B với vận tốc 15km/h. Tính xem trên cả quãng đường người đó đi với vận tốc trung bình là bao nhiêu ?

Nhận xét. Chú ý rằng vận tốc trung bình không phải luôn luôn bằng trung bình cộng của hai vận tốc. Vận tốc trung bình trên quãng đường AB bằng quãng đường AB chia cho thời gian đi từ A đến B. Cả hai đại lượng này ta đều chưa biết.

Giải.

Trên quãng đường AB, cứ 2km thì có 1km đi với vận tốc 10km/h (hết $\frac{1}{10}$ h), 1km đi với vận tốc 15km/h (hết $\frac{1}{15}$ h), nên cứ 2km, người đó đi hết :

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}(\text{h}).$$

Vậy vận tốc trung bình của người đó là :

$$2 : \frac{1}{6} = 12 (\text{km/h}).$$

BÀI TẬP

562(2). a) Một người đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Đi được nửa đường, người đó dừng lại sửa xe trong 30 phút, nên để đến B đúng hạn người đó đi tiếp với vận tốc 50 km/h. Tính quãng đường AB.

b) Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 30km/h. Lúc về sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc cũ, xe dừng lại sửa 40 phút, do đó muốn thời gian về bằng thời gian đi, ô tô đã đi với vận tốc 36 km/h. Tính quãng đường AB.

563(2). Một ô tô đi từ A đến B. Người lái xe thấy rằng nếu xe đi với vận tốc 45km/h thì đến B sau giờ hẹn là 10phút, còn nếu xe đi với vận tốc 55 km/h thì đến B trước giờ hẹn là 6 phút. Tính quãng đường AB.

564(2). Ba ô tô cùng khởi hành một lúc từ A để đến B. Vận tốc xe I là 40 km/h, vận tốc xe II là 50 km/h. Tính quãng đường AB và vận tốc xe III biết rằng xe III đến B trước xe I là 20 phút và sau xe II là 16 phút.

565(15). Long đi từ A đến B với vận tốc không đổi. Lúc 9 giờ Long đã đi được $\frac{1}{6}$ quãng đường, đến 11 giờ Long đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường. Hỏi Long đến B lúc mấy giờ ?

566(2). Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 25km/h rồi đi tiếp từ B đến C với vận tốc 20km/h. Quãng đường BC dài hơn AB là 30km. Thời gian đi trên quãng đường BC nhiều hơn trên quãng đường AB là 2 giờ. Tính quãng đường AB, BC.

567(2). Phúc và Quang cùng khởi hành một lúc từ nhà mình và đi về phía nhau. Phúc đi nhanh gấp $\frac{4}{3}$ Quang và họ gặp nhau sau 72 phút. Phúc phải khởi hành sau Quang bao lâu để họ gặp nhau ở chính giữa đường ?

568(2). a) Một xe lửa đi vượt qua một cột điện trong 16 giây và đi hết một cái cầu dài 210 m trong 30 giây. Tính vận tốc xe lửa và chiều dài xe lửa.

b) Một xe lửa đi vượt qua một người đi xe đạp cùng chiều trong 16 giây. Tính chiều dài xe lửa biết vận tốc người đi xe đạp là 18km/h và vận tốc xe lửa là 54km/h.

569(2). a) Một người đi bộ vận tốc 1m/s đi ngược chiều với xe lửa và gặp xe lửa trong 10 giây. Tính vận tốc của xe lửa biết rằng nó dài 170m.

b) Một xe lửa dài 110m đi qua một cầu dài 160m hết 18 giây và đi vượt một người đi xe đạp cùng chiều hết 10 giây. Tính vận tốc của người đi xe đạp.

570(2). Trong một cuộc thi chạy 2000m, các vận động viên chạy với vận tốc không đổi trên suốt quãng đường. Người thứ nhất về đích trước người thứ hai 200m và trước người thứ ba 290m. Khi người thứ hai đến đích thì người thứ ba còn cách đích bao nhiêu mét ?

571(2). Đạt chạy nhanh gấp hai lần so với đi bộ. Từ nhà đến trường, có lúc Đạt chạy, có lúc đi bộ. Hôm trước, thời gian Đạt chạy gấp đôi thời gian đi bộ. Hôm sau thời gian Đạt đi bộ gấp đôi thời gian Đạt chạy. Từ nhà đến trường, hôm trước Đạt cần 12 phút, hôm sau cần bao lâu ?

572(16). Hai người đi xe đạp cùng đi từ A về phía B. Người thứ nhất khởi hành lúc 8 giờ, người thứ hai khởi hành lúc 8 giờ 30 phút. Hai người gặp nhau lúc mấy giờ biết rằng quãng đường người thứ nhất đi trong 45 phút bằng quãng đường người thứ hai đi trong 40 phút ?

573(15). Hai người đi xe đạp từ hai địa điểm cách nhau 12 km và đi cùng chiều. Nếu họ khởi hành cùng một lúc thì sau 3 giờ, người đi nhanh đuổi kịp người đi chậm. Nếu người đi nhanh đi sau người đi chậm là 1 giờ thì sau 5 giờ 30 phút người đi nhanh mới đuổi kịp người đi chậm. Tính vận tốc của mỗi người.

574(2). Lúc 7 giờ, một người đi từ A để đến B. Lúc 10 giờ, người thứ hai đi từ B để đến A, với vận tốc lớn hơn vận tốc người thứ nhất là 3 km/h. Hai người gặp nhau lúc 14 giờ. Tính vận tốc mỗi người, biết rằng quãng đường AB dài 177km.

575(2). Trên quãng đường AB dài 235 km, một ô tô đi từ A đến C trong 3 giờ, sau đó đi tiếp từ C đến B trong 2 giờ với vận tốc lớn hơn vận tốc trên AC là 5 km/h. Tính vận tốc ô tô đi trên AC.

576(2). Một ô tô đi từ A qua C để đến B, quãng đường CB ngắn hơn AC là 55 km. Sau khi đi từ A đến C trong 4 giờ, người lái xe tính rằng nếu từ C ô tô giảm vận tốc đi 5 km/h thì sau 3 giờ nữa sẽ tới B. Tính quãng đường AB.

577(15). a) Sau lúc 12 giờ thì sớm nhất lúc mấy giờ hai kim đồng hồ lại trùng nhau ?

b) Trong một ngày đêm, hai kim đồng hồ tạo với nhau góc vuông bao nhiêu lần ?

578(15). Quãng đường AB dài 43,8 km. Lúc 6 giờ xe thứ nhất đi từ A để đến B, lúc 6 giờ 25 phút xe thứ hai đi từ B để đến A. Hai xe gặp nhau trên đường đi lúc 6 giờ 45 phút và đến khi đó thì xe thứ nhất đã đi nhiều hơn xe thứ hai là 11,4 km. Tính vận tốc của mỗi xe.

579(15). *Đố vui : Giờ xe lửa qua nhà*

Nhà Tùng ở cạnh đường xe lửa từ ga A đến ga B. Một hôm xe lửa đi qua nhà Tùng và đến ga B lúc 16 giờ. Hôm sau, xe lửa lại đi từ B lúc 5 giờ để về A với vận tốc như ngày hôm trước.

Tùng ngạc nhiên thấy rằng giờ xe lửa đi qua nhà mình trong cả hai ngày đều như nhau. Vậy xe lửa đã đi qua nhà Tùng lúc mấy giờ ?

580(15). Quãng đường AB dài 20 km. Lúc 6 giờ ngày 1 – 6, anh Minh đi từ A và đến B lúc 8 giờ. Hôm sau, anh đi từ B lúc 7 giờ và đến A lúc 8 giờ 20 phút. Như vậy trên quãng đường AB có một địa điểm C mà anh có mặt

cùng một giờ trong cả hai ngày. Tính xem địa điểm C cách A bao nhiêu kilômet và anh Minh có mặt ở C lúc mấy giờ ?

581(15). Để đi từ A đến B, xe thứ nhất cần một giờ, xe thứ hai cần 40 phút. Nếu xe thứ hai đi sau xe thứ nhất 10 phút thì sau bao lâu xe thứ hai đuổi kịp xe thứ nhất ?

582(15). Quãng đường AB dài 44 km. Lúc 6 giờ, người thứ nhất đi từ A đến B. Lúc 7 giờ 8 phút, người thứ hai đi từ B đến A. Họ gặp nhau lúc 9 giờ. Tính vận tốc mỗi người biết rằng vận tốc người thứ nhất lớn hơn vận tốc người thứ hai là 2,5km/h.

583(15). An đi xe đạp từ A đến B, vận tốc $8\frac{1}{3}$ km/h. Trên đường đi An gặp Bắc đi từ B lại, An đi ngược lại nói chuyện với bạn với vận tốc bằng vận tốc của bạn. Sau khi cùng đi với bạn 3,75km, An quay lại đi với vận tốc như lúc đầu và đến B chậm hơn dự định 57 phút. Tính vận tốc của Bắc.

584(2). Một ca nô xuôi khúc sông từ A đến B hết 2 giờ và ngược khúc sông đó hết 3 giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h, tính quãng sông AB.

585(15).

Khi đi gặp chuyển xuôi dòng

Nhẹ nhàng đến bến chỉ trong bốn giờ.

Khi về từ lúc xuống đò

Đến khi cập bến tám giờ hết veo.

Hỏi rằng riêng một khóm bèo

Trôi theo dòng nước hết bao nhiêu giờ ?

586(15). *Đố vui : Vận tốc dòng sông*

Anh Thành tập bơi ngược dòng sông Hồng. Đến cầu Long Biên, anh đánh rơi bình nước. Sau 20 phút anh mới biết và quay lại tìm thì thấy bình nước ở cạnh bến Phà Đen cách cầu Long Biên 2km. Tính vận tốc dòng sông.

587(15). Một người đi từ A đến B. Lúc đầu người đó đi với vận tốc 15km/h. Khi còn cách B là 21km, người đó tăng vận tốc thành 18km/h. Lúc về người đó đi với vận tốc không đổi là 18km/h. Thời gian cả đi lẫn về là 4 giờ 10 phút. Tính quãng đường AB.

588(15). Một người đi từ A đến B gồm một đoạn lên dốc, một đoạn xuống dốc, vận tốc lên dốc là 12km/h, vận tốc xuống dốc là 20km/h, tổng cộng hết 1 giờ 35 phút. Lúc về, người đó đi từ B về A, vận tốc lên dốc cũng là 12km/h, vận tốc xuống dốc cũng là 20km/h, tổng cộng hết 1 giờ 45 phút. Tính quãng đường AB.

589(15). Một người đi quãng AB gồm một đoạn lên dốc, một đoạn xuống dốc. Thời gian tổng cộng cả đi lẫn về là 7 giờ. Biết rằng cứ lên dốc

thì người đó đi với vận tốc 18km/h, cứ xuống dốc thì người đó đi với vận tốc 24km/h. Tính quãng đường AB.

590(15). Một người đi xe đạp từ A đến B gồm một đoạn lên dốc và một đoạn nằm ngang hết tổng cộng 2 giờ. Lúc về người đó đi từ B đến A hết 1 giờ 10 phút. Biết vận tốc trên đoạn lên dốc là 8 km/h, vận tốc trên đoạn xuống dốc là 18km/h, vận tốc trên đoạn nằm ngang là 12km/h. Tính quãng đường AB.

591(15). Một người đi quãng đường AB gồm đoạn AC và CB. Lúc đi, vận tốc trên AC là 12 km/h, vận tốc trên CB là 8 km/h, hết 3 giờ 30 phút. Lúc về, vận tốc trên BC là 30km/h, vận tốc trên CA là 20 km/h hết 1 giờ 36 phút. Tính quãng đường AB.

592(15). Một ô tô đi từ A đến B, vận tốc 50km/h. Sau đó một thời gian, xe thứ hai rời A, vận tốc 60km/h và như vậy sẽ gặp xe thứ nhất tại một điểm còn cách B là 10 km. Nhưng đi được $\frac{1}{5}$ quãng đường, xe thứ nhất giảm vận tốc còn 45km/h nên xe thứ hai đã gặp xe thứ nhất tại chỗ còn cách B là 30 km. Tính quãng đường AB.

593(15). Lúc 7 giờ, một người đi xe đạp và một người đi xe máy cùng rời A để đến B, vận tốc theo thứ tự là 12km/h và 28km/h. Lúc 7 giờ 30 phút, một ô tô vận tốc 35 km/h cũng rời A để đến B. Ô tô ở vị trí chính giữa hai người kia vào lúc mấy giờ ?

594(15). Ba người cùng khởi hành một lúc từ A, B, C về phía D với vận tốc theo thứ tự là 30m/ph, 50m/ph, 20m/ph. Sau bao lâu thì người thứ ba ở vị trí chính giữa hai người kia biết AB = 400m, BC = 300m, các địa điểm A, B, C, D theo thứ tự như trên ?

595(15). Trên quãng đường AB có địa điểm C cách A là 10km. Lúc 8 giờ, người thứ nhất và người thứ hai rời A, người thứ ba rời C, tất cả đi về phía B với vận tốc theo thứ tự là 30km/h, 40km/h, 20km/h. Hỏi lúc mấy giờ, người thứ ba có khoảng cách đến hai người kia bằng nhau ?

596(15). Ba ô tô cùng khởi hành một lúc từ A để đến B. Vận tốc xe thứ hai bằng 40km/h và bằng trung bình cộng của vận tốc hai xe kia. Một người đứng ở chính giữa quãng đường A B thấy xe thứ nhất đi qua lúc 7 giờ 6 phút, xe thứ hai đi qua lúc 7 giờ 15 phút, xe thứ ba đi qua lúc 7 giờ 30 phút. Hỏi ba xe khởi hành từ A lúc mấy giờ ?

597(15). Hai người cùng đi một lúc từ A đến B, đường dài 40km, vận tốc theo thứ tự bằng 10km/h và 14km/h. Sau bao lâu quãng đường còn lại đến B của người thứ nhất gấp ba quãng đường còn lại đến B của người thứ hai ?

598(15). Hai người cùng khởi hành lúc 8 giờ từ A để đến B với vận tốc theo thứ tự là 12km/h và 30km/h. Người thứ hai đến B thì quay lại ngay và gặp người thứ nhất lúc 8 giờ 40 phút.

a) Tính quãng đường AB.

b) Người thứ hai đến B lúc mấy giờ ?

599(15). Hai người cùng khởi hành một lúc, người thứ nhất đi từ A đến B, người thứ hai đi từ B đến A. Người thứ nhất đến B thì quay lại ngay, người thứ hai đến A thì quay lại ngay. Họ gặp nhau lần thứ nhất tại C cách A là 10km và gặp nhau lần thứ hai tại D cách B là 8 km. Tính quãng đường AB.

600(15). Hai bạn An và Bích cùng rời nhà lúc 7 giờ : An đến nhà Bích, Bích đến nhà An. Lần thứ nhất, hai người đã đi qua nhau ở chỗ cách nhà Bích 300m mà không biết. An đi tiếp đến nhà Bích rồi quay lại ngay, Bích cũng đi tiếp đến nhà An rồi quay lại ngay. Hai người gặp nhau lần thứ hai cách nhà An 200m, lúc đó là 7 giờ 20 phút. Tính khoảng cách từ nhà An đến nhà Bích và vận tốc của mỗi người.

601(15). Hai người đi xe đạp cùng khởi hành lúc 7 giờ : người thứ nhất đi từ A đến B, người thứ hai đi từ B đến A. Lúc 7 giờ 30 phút họ gặp nhau lần thứ nhất ở M cách A là 6km, người thứ nhất tiếp tục đi đến B thì quay lại, người thứ hai tiếp tục đi đến A thì quay lại. Họ gặp nhau lần thứ hai ở N cách B là 4 km. Tính :

a) Lúc hai người gặp nhau lần thứ hai.

b) Chiều dài quãng đường AB.

c) Vận tốc mỗi người.

d) Khoảng cách đến A của người thứ nhất lúc người thứ hai về đến B.

602(15). Hai người cùng khởi hành một lúc từ hai địa điểm A và B. Người thứ nhất đi từ A đến B rồi quay lại ngay. Người thứ hai đi từ B đến A rồi quay lại ngay. Hai người gặp nhau lần thứ hai tại địa điểm C cách A là 6km. Tính quãng đường AB biết rằng vận tốc người thứ hai bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc người thứ nhất.

603(15). Hàng ngày, Phong được bố từ nhà đến trường đón và bao giờ cũng về nhà lúc 12 giờ. Hôm ấy tan học sớm 45 phút, chờ bố thì lâu, Phong đi bộ về luôn và gặp bố trên đường đi.

Về nhà lúc 12 giờ kém 20 phút, Phong nói với bố :

– Thế là con đi bộ trong 25 phút bố ạ !

– Con tính sai rồi đấy ! – Bố Phong cười nói.

Phong nghĩ mãi chưa ra. Nhờ các bạn tính giúp.

604(15). Hoà được bố từ nhà đến trường đón mỗi khi tan học. Hôm ấy, bố Hoà đến đón Hoà với giờ như thường lệ, nhưng do Hoà tan học sớm 45 phút và đi bộ về nhà ngay nên Hoà gặp bố trên đường về và hai bố con về nhà sớm hơn thường lệ 10 phút. Tính quãng đường Hoà đã đi bộ biết rằng Hoà đi với vận tốc 6km/h.

605(15). a) Một máy bay có vận tốc trung bình trong cả chuyến bay là 700km/h. Trên quãng đường đầu, vận tốc của máy bay là 800km/h. Tính vận tốc của máy bay trên quãng đường sau biết rằng thời gian bay quãng đường đầu bằng $\frac{1}{3}$ thời gian cả chuyến bay.

b) Một ô tô đi $\frac{2}{3}$ quãng đường AB với vận tốc 40km/h rồi đi phần còn lại với vận tốc 60km/h. Lúc về ô tô đi với vận tốc không đổi và thời gian về bằng thời gian đi. Tính vận tốc lúc về.

606(15). Một người đi từ A đến B gồm các đoạn AC, CD, DB với vận tốc theo thứ tự bằng 10km/h, 12km/h, 15km/h. Lúc về, người đó đi BD, DC, CA với vận tốc theo thứ tự bằng 10km/h, 12km/h, 15km/h. Tính quãng đường AB biết rằng thời gian cả đi lẫn về hết 3 giờ.

607*(16). Trên quãng đường AC có địa điểm B. Lúc 7 giờ, người thứ nhất đi từ A, người thứ hai đi từ B, cả hai người cùng đến C lúc 10 giờ. Trên đường đi, người thứ hai gặp một chiếc xe lửa đi từ C về A vào lúc 8 giờ 30 phút, người thứ nhất gặp chiếc xe lửa đó lúc 8 giờ 40 phút. Biết quãng đường AB dài 30 km và vận tốc xe lửa gấp đôi vận tốc người thứ nhất. Hỏi xe lửa đi từ C lúc mấy giờ, và quãng đường AC dài bao nhiêu kilômét?

608(15). *Đố vui : Có kịp không ?*

Ba bạn cần đi từ A đến B đường dài 22,5km trong 2 giờ rưỡi mà chỉ có một chiếc xe đạp, xe chỉ đèo được một người. Biết rằng vận tốc đi bộ là 5km/h, vận tốc đi xe là 15km/h (cả lúc đi một mình lẫn lúc đèo bạn). Hỏi họ có thể đến B kịp giờ không?

609(15). *Đố vui : Người du lịch và các đoàn tàu*

Một thành phố nọ có các đoàn tàu khởi hành sau những khoảng thời gian bằng nhau, chuyển động với vận tốc không đổi và không dừng lại trên đường đi. Một khách du lịch đi dọc đường tàu từ A đến B nhận thấy cứ 7 phút lại gặp một đoàn tàu đi cùng chiều với anh ta và cứ 5 phút lại gặp một đoàn tàu đi ngược lại. Hỏi nếu anh ta đứng lại thì cách bao nhiêu phút lại gặp hai tàu cùng chiều đi qua?

HÌNH HỌC

CHƯƠNG II. GÓC

Phần I

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP ỨNG DỤNG

§5. NỬA MẶT PHẪNG. GÓC

Trong mục này, cần chú ý đến :

1. MỘT TÍNH CHẤT CƠ BẢN :

Tính chất về sự xác định nửa mặt phẳng : Mỗi đường thẳng a trên mặt phẳng chia mặt phẳng thành hai phần : đường thẳng a không cắt đoạn thẳng có hai đầu thuộc cùng một phần, đường thẳng a cắt đoạn thẳng có hai đầu thuộc hai phần khác nhau.

2. BA HÌNH HÌNH HỌC ĐƯỢC ĐỊNH NGHĨA :

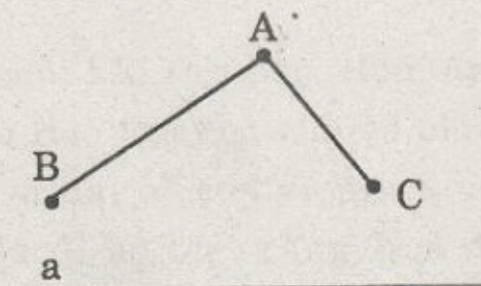
- *Nửa mặt phẳng có bờ a* là hình gồm đường thẳng a và một phần mặt phẳng bị chia ra bởi đường thẳng a .
- *Góc* là hình gồm hai tia chung gốc.
- *Góc bẹt* là góc có hai cạnh là hai tia đối nhau.

3. MỘT QUAN HỆ HÌNH HỌC ĐƯỢC ĐỊNH NGHĨA :

Một tia gọi là nằm giữa hai tia khác chung gốc với nó nếu nó cắt một đoạn thẳng có hai đầu thuộc hai tia ấy tại một điểm nằm giữa hai đầu của đoạn thẳng này.

Ví dụ 14. Cho đường thẳng a và ba điểm A, B, C trong đó đường thẳng a không cắt các đoạn thẳng AB và AC . Đường thẳng a có cắt đoạn thẳng BC không ?

Giải (h.5). Đường thẳng a không cắt các đoạn thẳng AB , AC nên A và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ a ; A và C cũng vậy. Do đó B và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ a , chúng lại không nằm trên a , vậy đường thẳng a không cắt đoạn thẳng BC .

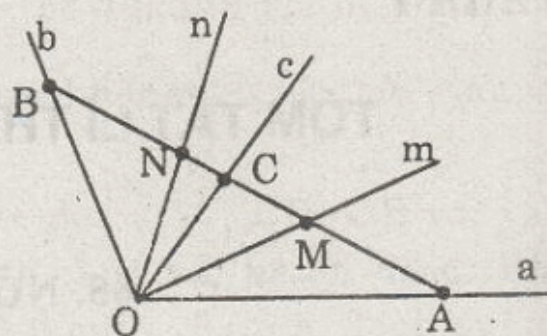


Hình 5

Ví dụ 15*. Cho tia Oc nằm giữa hai tia Oa và Ob không đối nhau, tia Om nằm giữa hai tia Oa và Oc , tia On nằm giữa hai tia Oc và Ob . Giải thích vì sao tia Oc nằm giữa hai tia Om và On ?

Hướng dẫn : Xét đoạn thẳng AB có A thuộc tia Oa , B thuộc tia Ob (A và B không trùng O).

Giải (h.6). Lấy các điểm A , B không trùng O sao cho A thuộc tia Oa , B thuộc tia Ob . Tia Oc nằm giữa hai tia Oa , Ob nên cắt đoạn thẳng AB tại điểm C nằm giữa A và B (1).



Hình 6

Cũng vậy, tia Om cắt đoạn thẳng AC tại điểm M nằm giữa A và C (2), tia On cắt đoạn thẳng CB tại điểm N nằm giữa C và B (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra điểm C nằm giữa hai điểm M và N do đó tia Oc nằm giữa hai tia Om và On .

Chú ý : Bài toán vẫn đúng nếu Oa và Ob là hai tia đối nhau.

Ví dụ 16. Vẽ n tia chung gốc. Trong hình vẽ có bao nhiêu góc?

Giải. Mỗi tia tạo với $n - 1$ tia còn lại thành $n - 1$ góc. Có n tia nên tạo được $n(n - 1)$ góc.

Nhưng mỗi góc đã được tính hai lần, do đó tất cả chỉ có $\frac{n(n - 1)}{2}$ góc.

BÀI TẬP

35. Cho ba điểm A , B , C không nằm trên đường thẳng a , trong đó đường thẳng a cắt các đoạn thẳng AB và AC . Đường thẳng a có cắt đoạn thẳng BC không?

36. Cho ba điểm A , B , C không nằm trên đường thẳng a , trong đó đường thẳng a cắt đoạn thẳng AB , không cắt đoạn thẳng BC . Đường thẳng a có cắt đoạn thẳng AC không?

37. Ba điểm A , B , C không nằm trên đường thẳng a .

Chúng tỏ rằng hoặc đường thẳng a không cắt đoạn thẳng nào trong ba

đoạn thẳng AB, BC, CA, hoặc đường thẳng a chỉ cắt hai trong ba đoạn thẳng đó.

38*. Bốn điểm A, B, C, D không nằm trên đường thẳng a. Chứng tỏ rằng đường thẳng a hoặc không cắt, hoặc cắt ba, hoặc cắt bốn đoạn thẳng trong các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD.

39. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, điểm D thuộc tia BC và không trùng B, điểm O nằm ngoài đường thẳng AC. Trong ba tia OA, OB, OD, tia nào nằm giữa hai tia còn lại ?

40. Cho hai tia Oa, Ob không đối nhau. Trên tia Oa lấy điểm A khác O, trên tia Ob lấy điểm B khác O. Gọi C là một điểm bất kì nằm giữa A và B. Vẽ điểm M sao cho điểm O nằm giữa hai điểm C và M.

a) Chứng tỏ rằng tia OC nằm giữa hai tia OA, OB.

b) Trong ba tia OA, OB, OM, có tia nào nằm giữa hai tia còn lại không ? Phát biểu thành một tính chất.

41. Có thể khẳng định rằng trong ba tia chung gốc, bao giờ cũng có một tia nằm giữa hai tia còn lại không ?

42. Cho góc bẹt xOy, vẽ các tia Oa, Ob, Oc thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ xy. Trên hình vẽ có bao nhiêu góc ? Kể tên các góc đó.

43. Cho n tia chung gốc tạo thành tất cả 190 góc. Tính n.

§6. SỐ ĐO GÓC. VẼ GÓC CHO BIẾT SỐ ĐO

Trong mục này, cần chú ý đến :

1. HAI TÍNH CHẤT CƠ BẢN :

– *Tính chất về số đo góc :* Mỗi góc có một số đo. Số đo của góc bẹt là 180° . Số đo của mỗi góc không vượt quá 180° .

– *Tính chất về cộng số đo góc :* Nếu tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz thì $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$. Ngược lại, nếu $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$ thì tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz.

2. Ba hình hình học được định nghĩa : Góc vuông, góc nhọn, góc tù.

3. Năm quan hệ hình học được định nghĩa : Hai góc bằng nhau, hai góc kề nhau, hai góc phụ nhau, hai góc bù nhau, hai góc kề bù.

4. Để giải thích tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz, ta có thể dùng nhận xét : Nếu các tia Oy và Oz nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia Ox và $\widehat{xOy} < \widehat{xOz}$ thì tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz.

Ví dụ 17. Hãy chứng tỏ rằng :

a) Nếu hai góc kề nhau có hai cạnh ngoài là hai tia đối nhau thì hai góc đó kề bù.

b) Nếu hai góc kề bù thì hai cạnh ngoài của chúng là hai tia đối nhau :

Giải. Xét hai góc kề nhau xOy và yOz có Ox và Oz là hai tia đối nhau (h.7)
 $\widehat{xOz}$ là góc bẹt $\Rightarrow \widehat{xOz} = 180^\circ$ (1).

Tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz

$$\Rightarrow \widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$, do đó hai góc xOy và yOz bù nhau.

Vậy hai góc xOy và yOz kề bù.

b) Gọi Ox' là tia đối của tia Ox (h.8).

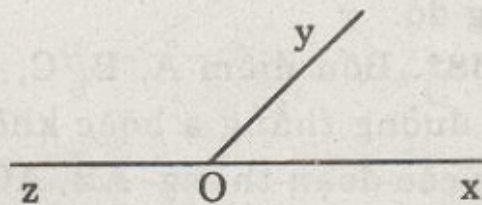
$$\text{Theo câu a} : \widehat{xOy} + \widehat{yOx'} = 180^\circ \quad (1)$$

$$\text{Theo đề bài} : \widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ \quad (2)$$

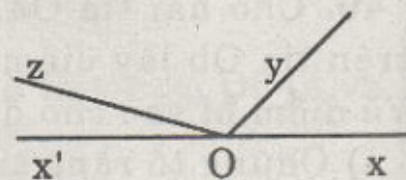
$$\text{Từ (1) và (2)} : \widehat{yOx'} = \widehat{yOz}.$$

Các tia Ox' và Oz nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia Oy và $\widehat{yOz} = \widehat{yOx'}$ nên tia Oz trùng với tia Ox' . Vậy Oz và Ox là hai tia đối nhau.

Chú ý : Được sử dụng kết quả nêu trong ví dụ 17 vào bài tập.



Hình 7



Hình 8

BÀI TẬP

44. Cho ba đường thẳng AD , BE , CF đồng quy ở O , trong đó tia OB nằm giữa hai tia OA và OC .

a) Kể tên các góc kề với góc AOB .

b) Kể tên các góc kề bù với góc AOB .

45. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau ở O . Biết rằng $\widehat{AOC} - \widehat{BOC} = 50^\circ$.
 Tính số đo các góc AOC , BOC , BOD , AOD .

46. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và D , điểm O nằm ngoài đường thẳng AD . Biết rằng $\widehat{AOD} = 80^\circ$, $\widehat{AOB} = 50^\circ$. Tính $\widehat{BOD}$.

47. Cho góc xOy có số đo 90° , vẽ tia Oz sao cho $\widehat{yOz} = 30^\circ$.

a) Tia Oz có xác định duy nhất không ?

b) Tính $\widehat{xOz}$ trong từng trường hợp.

48. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau ở O . Biết rằng $\widehat{AOC} = 70^\circ$.
 Tính $\widehat{AOD}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{BOD}$.

49. Cho hai tia Ox , Oy đối nhau. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa tia Ox , vẽ các tia Om , On sao cho $\widehat{xOm} = 70^\circ$, $\widehat{yOn} = 70^\circ$. Chứng tỏ rằng Om , On là hai tia đối nhau.

~ Ví dụ 21

Bài tập 64 đến 67.

§7. TIA PHÂN GIÁC CỦA GÓC

Tia phân giác của góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau.

Ví dụ 18. Cho Oz là tia phân giác của góc xOy . Chứng tỏ rằng $\widehat{xOz} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$.

Giải (h.9)

Oz là tia phân giác của góc xOy

$\Rightarrow$ Tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Oy

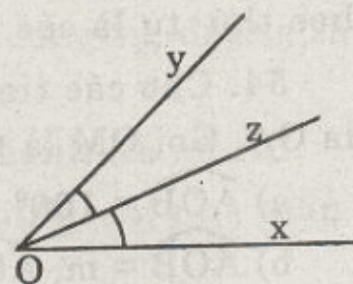
$$\Rightarrow \widehat{xOz} + \widehat{zOy} = \widehat{xOy}$$

Oz là tia phân giác của góc xOy

$$\Rightarrow \widehat{xOz} = \widehat{zOy}$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{xOz} + \widehat{xOz} = \widehat{xOy}$,

Tức là $2\widehat{xOz} = \widehat{xOy}$. Vậy $\widehat{xOz} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$.



Hình 9

(1)

(2)

Ví dụ 19. Cho góc xOy có $\widehat{xOy} = \alpha$ ($0 < \alpha \leq 180^\circ$).

Vẽ tia Oz sao cho $\widehat{xOz} = \frac{\alpha}{2}$ (Oz và Oy nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia Ox). Chứng tỏ rằng Oz là tia phân giác của góc xOy .

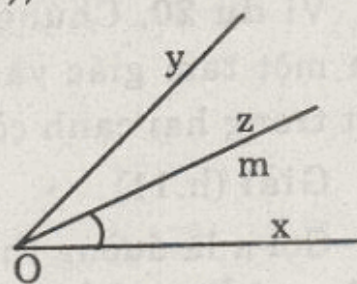
Giải : Gọi Om là tia phân giác của góc xOy (h.10),

$$\text{Ta có : } \widehat{xOm} = \frac{1}{2}\widehat{xOy} = \frac{\alpha}{2}. \text{ Ta lại có } \widehat{xOz} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{nên } \widehat{xOz} = \widehat{xOm}.$$

Các tia Oz, Om cùng nằm trên một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia Ox và $\widehat{xOz} = \widehat{xOm}$ nên tia Oz trùng tia Om .

Vậy Oz là tia phân giác của góc xOy .



Hình 10

BÀI TẬP

50. Hãy vẽ ba tia chung gốc Ox, Oy, Oz , trong đó $\widehat{xOz} = \widehat{zOy}$ mà Oz không phải là tia phân giác của góc xOy .

51. Cho góc bẹt AOB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ AB , vẽ các tia OC, OD sao cho $\widehat{AOC} = 70^\circ, \widehat{BOD} = 55^\circ$. Chứng tỏ rằng tia OD là tia phân giác của góc BOC .

52. Cho góc AOB bằng 100° và OC là tia phân giác của góc đó. Trong góc AOB, vẽ các tia OD, OE sao cho $\widehat{AOD} = \widehat{BOE} = 20^\circ$. Chứng tỏ rằng tia OC là tia phân giác của góc DOE.

53. Cho góc AOB bằng 110° , tia OC nằm trong góc đó. Gọi OM, ON theo thứ tự là các tia phân giác của các góc AOC, BOC. Tính $\widehat{MON}$.

54. Cho các tia OB, OC nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia OA. Gọi OM là tia phân giác của góc BOC. Tính $\widehat{AOM}$ biết rằng :

a) $\widehat{AOB} = 100^\circ, \widehat{AOC} = 60^\circ$.

b) $\widehat{AOB} = m, \widehat{AOC} = n (m > n)$

~ Bài tập 68 đến 70.

§8. ĐƯỜNG TRÒN. TAM GIÁC

Trong mục này, cần chú ý đến ba hình hình học được định nghĩa :

– Đường tròn tâm O bán kính R là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

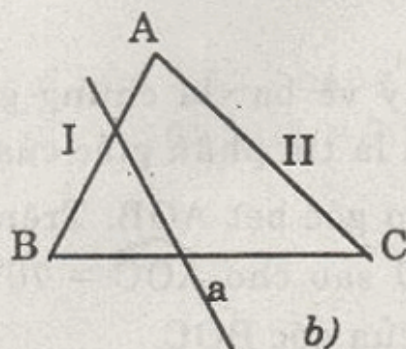
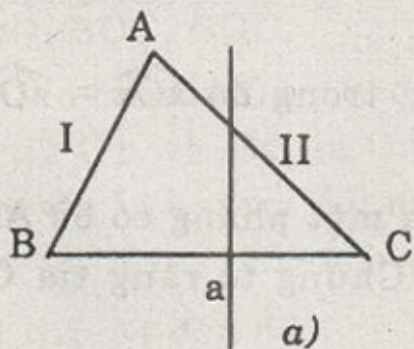
– Hình tròn gồm các điểm nằm trên đường tròn và các điểm nằm trong đường tròn đó.

– Tam giác ABC là hình gồm ba đoạn thẳng AB, BC, CA khi ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Ví dụ 20. Chứng tỏ rằng nếu một đường thẳng không đi qua các đỉnh của một tam giác và cắt một cạnh của tam giác ấy thì nó cắt một và chỉ một trong hai cạnh còn lại.

Giải (h.11)

Gọi a là đường thẳng cắt cạnh BC và không đi qua các đỉnh của ΔABC . Đường thẳng a cắt đoạn thẳng BC mà B, C không thuộc a nên B và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ a. Gọi nửa mặt phẳng chứa B là I, nửa mặt phẳng chứa C là II. Xét hai trường hợp :



Hình 11

a) A thuộc nửa mặt phẳng I (h.11a) : Đường thẳng a cắt đoạn thẳng AC vì A và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ a, đường thẳng a không cắt đoạn thẳng AB vì A và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ a (chú ý rằng A không thuộc a).

b) A thuộc nửa mặt phẳng II (h.11b) : Lập luận tương tự, đường thẳng a cắt đoạn thẳng AB, không cắt đoạn thẳng AC.

Vậy đường thẳng a cắt một và chỉ một trong hai cạnh AB và AC.

Chú ý : Bài toán trên còn được gọi là định lí Pat (*Pasch*, nhà toán học Đức, 1843 – 1930).

BÀI TẬP

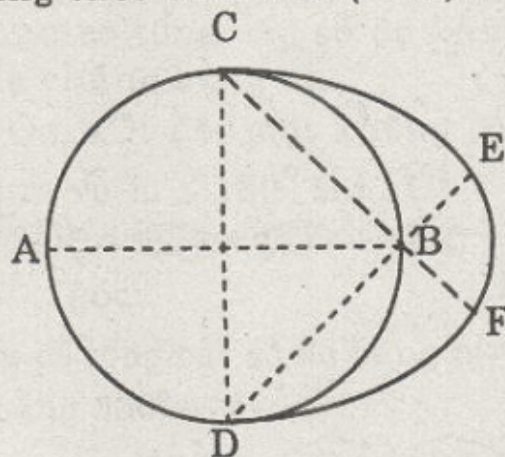
55. Vẽ hình hoa bốn cánh theo cách sau :

- Vẽ hình vuông.
- Vẽ về phía trong hình vuông bốn nửa đường tròn có đường kính là cạnh của hình vuông.

56. Vẽ hình sao sáu cánh theo cách sau :

- Vẽ đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$.
- Vẽ cung tâm A bán kính R, cắt đường tròn (O) tại C và D.
- Vẽ cung tâm B bán kính R, cắt đường tròn (O) tại E và F (E thuộc cung nhỏ BC).
- Vẽ các tam giác AEF và BCD.

57. Vẽ hình quả trứng theo cách sau (h.12) :



Hình 12

- Vẽ đường tròn (O) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau.
- Vẽ cung CE có tâm D, bán kính DC (D, B, E thẳng hàng).
- Vẽ cung DF có tâm C, bán kính CD (C, B, F thẳng hàng).
- Vẽ cung EF có tâm B, bán kính BE.

58. Cho 10 điểm thuộc đường thẳng a và một điểm nằm ngoài đường thẳng ấy. Có bao nhiêu tam giác có các đỉnh là ba trong 11 điểm trên ?

59. Cho tam giác ABC , điểm D nằm giữa A và C , điểm E nằm giữa A và B . Các đoạn thẳng BD và CE cắt nhau ở K . Nối DE . Tính xem có bao nhiêu tam giác trong hình vẽ ?

60. Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy ba điểm không trùng O là A, B, C . Trên tia Oy lấy bốn điểm không trùng O là D, E, G, H . Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh là ba trong tám điểm O, A, B, C, D, E, G, H ?

Áp dụng ví dụ 20 để giải các bài 61, 62 :

61. Cho tam giác ABC , điểm D nằm giữa A và C , điểm E nằm giữa A và B . Chứng tỏ rằng đường thẳng BD cắt đoạn thẳng CE , đường thẳng CE cắt đoạn thẳng BD .

62. Cho tam giác ABC . Chứng tỏ rằng bao giờ cũng vẽ được một đường thẳng không đi qua ba đỉnh của tam giác và cắt cả ba tia AB, AC, BC .

63. Cho điểm O nằm trong tam giác ABC . Hãy chứng tỏ rằng :

- a) Tia BO cắt đoạn thẳng AC tại một điểm D nằm giữa A và C .
- b) Điểm O nằm giữa hai điểm B và D .
- c) Trong ba tia OA, OB, OC , không có tia nào nằm giữa hai tia còn lại.

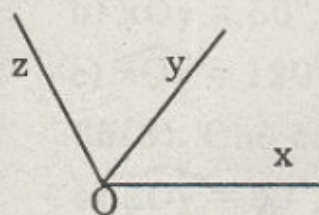
CHUYÊN ĐỀ

TÍNH SỐ ĐO GÓC

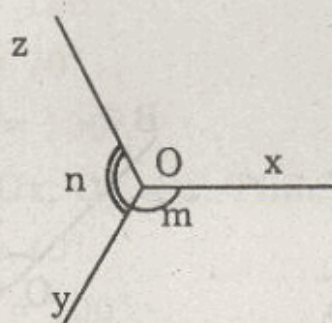
Gọi $\angle xOy$ và $\angle yOz$ là hai góc kề nhau, ta đặt $\widehat{xOy} = m$, $\widehat{yOz} = n$.

Ta đã biết : Nếu tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Oz thì $\widehat{xOz} = m + n$ (h.13).

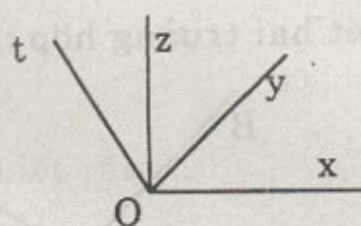
Một câu hỏi được đặt ra : Nếu tia Oy không nằm giữa hai tia Ox và Oz thì $\widehat{xOz}$ bằng bao nhiêu ? (h.14)



Hình 13



Hình 14



Hình 15

Có thể chứng minh được rằng khi đó $\widehat{xOz} = 360^\circ - (m + n)$.

Ta cũng chứng minh được :

1. Nếu hai góc kề nhau có tổng các số đo bằng m và $m \leq 180^\circ$ thì góc tạo bởi hai cạnh ngoài của chúng bằng m .

2. Nếu ba góc $\angle xOy$, $\angle yOz$, $\angle zOt$ đôi một không có điểm trong chung, tổng các số đo của chúng bằng m và $m \leq 180^\circ$ thì $\widehat{xOt} = m$.

Trên hình 15, ta có : $\widehat{xOt} = \widehat{xOy} + \widehat{yOz} + \widehat{zOt}$.

Tương tự đối với 4, 5, ... góc.

3. Nếu hai góc kề nhau có tổng các số đo bằng m và $m > 180^\circ$ thì góc tạo bởi hai cạnh ngoài của chúng bằng $360^\circ - m$.

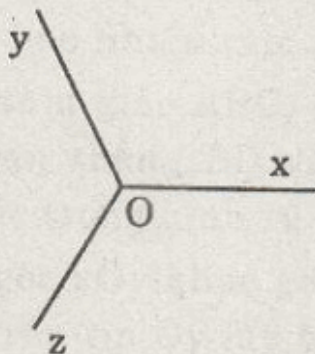
Trên hình 16, ta có : $\widehat{xOz} = 360^\circ - (\widehat{xOy} + \widehat{yOz})$.

4. Nếu ba góc $\angle xOy$, $\angle yOz$, $\angle zOt$ đôi một không có điểm trong chung, tổng các số đo bằng m và $m > 180^\circ$ thì

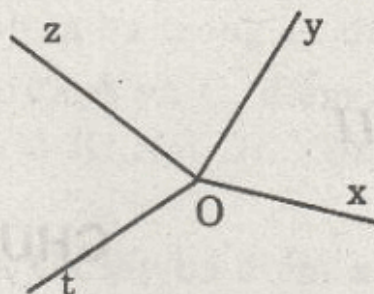
$$\widehat{xOt} = 360^\circ - m.$$

Trên hình 17, ta có : $\widehat{xOt} = 360^\circ - (\widehat{xOy} + \widehat{yOz} + \widehat{zOt})$.

Tương tự đối với 4, 5, ... góc.



Hình 16



Hình 17

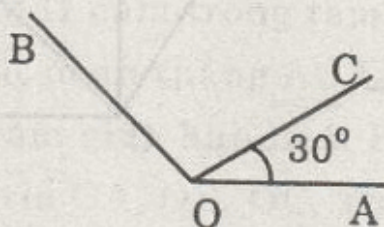
Ví dụ 21(6). Cho ba tia chung gốc OA, OB, OC. Tính $\widehat{BOC}$ biết rằng :

a) $\widehat{AOB} = 130^\circ$, $\widehat{AOC} = 30^\circ$.

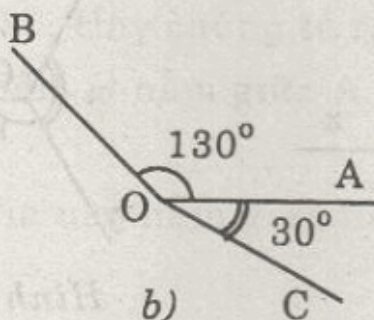
b) $\widehat{AOB} = 130^\circ$, $\widehat{AOC} = 80^\circ$.

Giải.

a) Xét hai trường hợp :



a)



b)

Hình 18

- Các tia OB, OC thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OA (h.18a) :
Ta có $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = \widehat{AOB}$ nên

$$\widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC} = 130^\circ - 30^\circ = 100^\circ.$$

- Các tia OB, OC thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ OA (h. 18b) :

Ta có $\widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 130^\circ + 30^\circ = 160^\circ < 180^\circ$

nên $\widehat{BOC} = 160^\circ$.

b) Xét hai trường hợp :

- Các tia OB, OC thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OA (h.19a) :

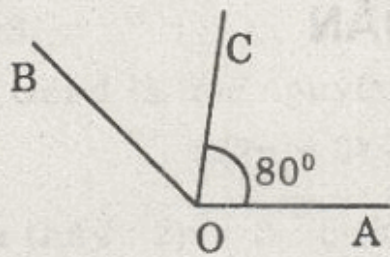
Ta có $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = \widehat{AOB}$ nên

$$\widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC} = 130^\circ - 80^\circ = 50^\circ.$$

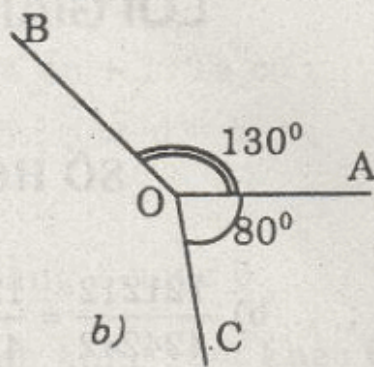
- Các tia OB, OC thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ OA (h.19b) :

Ta có : $\widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 130^\circ + 80^\circ = 210^\circ > 180^\circ$

nên $\widehat{BOC} = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$.



a)



b)

Hình 19

BÀI TẬP

64(6). Cho các góc $\widehat{xOy}$, $\widehat{xOz}$ kề nhau. Tính $\widehat{yOz}$ biết rằng:

a) $\widehat{xOy} = 40^\circ$, $\widehat{xOz} = 140^\circ$.

b) $\widehat{xOy} = 50^\circ$, $\widehat{xOz} = 70^\circ$.

c) $\widehat{xOy} = 120^\circ$, $\widehat{xOz} = 130^\circ$.

65(6). Cho các tia Ox, Oy, Oz. Tính $\widehat{yOz}$ biết rằng :

a) $\widehat{xOy} = 60^\circ$, $\widehat{xOz} = 40^\circ$.

b) $\widehat{xOy} = 120^\circ$, $\widehat{xOz} = 100^\circ$.

c) $\widehat{xOy} = \alpha$, $\widehat{xOz} = \beta$ ($\beta < \alpha < 180^\circ$).

66(6). Cho bốn tia OA, OB, OC, OD tạo thành các góc AOB, BOC, COD, DOA không có điểm trong chung. Tính số đo mỗi góc ấy biết rằng $\widehat{BOC} = 3\widehat{AOB}$, $\widehat{COD} = 5\widehat{AOB}$, $\widehat{DOA} = 6\widehat{AOB}$.

67(6). Cho các góc AOB, BOC, COD không có điểm trong chung và đều có số đo bằng α . Tính $\widehat{AOD}$.

68(7). Cho $\widehat{xOy} = 100^\circ$, $\widehat{xOz} = 60^\circ$. Tính $\widehat{xOm}$ biết rằng Om là tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$.

69(7). Cho $\widehat{xOy} = \alpha$, $\widehat{xOz} = \beta$ ($\alpha > \beta$). Tính $\widehat{xOm}$ biết rằng Om là tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$.

70(7). Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa tia OA, vẽ các tia OB và OC sao cho $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \alpha$. Tìm các giá trị của α để OA là tia phân giác của góc BOC.

LỜI GIẢI HOẶC CHỈ DẪN

SỐ HỌC : PHÂN SỐ

396. a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{121212}{424242} = \frac{121212 : 10101}{424242 : 10101} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

c) $\frac{187187187}{221221221} = \frac{187187187 : 1001001}{221221221 : 1001001} = \frac{187}{221} = \frac{11}{13}$.

d) $\frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 39 - 10101}{505050 + 70707} = \frac{10101(39 - 1)}{10101(50 + 7)} = \frac{2}{3}$.

397. a) Tử có tổng các chữ số bằng 3 nên chia hết cho 3.

b) Tử có tổng các chữ số bằng 9 nên chia hết cho 9.

398. a) Cùng bằng $\frac{17}{29}$.

b) Gấp đôi tử và mẫu của phân số thứ nhất, được phân số thứ hai.

c) Gấp đôi tử và mẫu của phân số thứ nhất, được phân số thứ hai. Gấp ba tử và mẫu của phân số thứ nhất, được phân số thứ ba.

399. a) $xy = 15$ nên

x	1	-1	3	-3	5	-5	15	-15
y	15	-15	5	-5	3	-3	1	-1

b) $\frac{x}{y} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}$. Do đó

$x = 4k, y = 5k$ với k là số nguyên tùy ý khác 0.

400. a) $\frac{60}{75}$; b) $\frac{90}{150}$; c) $\frac{39}{91}$.

401. Chứng minh rằng nếu tử và mẫu cùng chia hết cho d thì $d = \pm 1$.

a) Gọi $d \in \text{ƯC}(n+1, 2n+3)$. Ta có : $2n+3 - 2(n+1) : d$

$$\Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = \pm 1.$$

b) Gọi $d \in \text{ƯC}(2n+3, 4n+8)$. Ta có : $4n+8 - 2(2n+3) : d$

$$\Rightarrow 2 : d. \text{ Do } d \text{ là ước của số lẻ } 2n+3 \text{ nên } d = \pm 1.$$

c) Xét biểu thức $5(3n+2) - 3(5n+3)$.

402. a) $n = 7k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) ; b) $n = 2$; $n = 0$.

403.

a) Gọi d là ước nguyên tố của $2n + 3$ và $4n + 1$. Ta có :

$$2(2n + 3) - (4n + 1) : d \Rightarrow 5 : d \Rightarrow d = 5.$$

Ta thấy : $2n + 3 : 5$ (khi đó $4n + 1 : 5$)

$\Leftrightarrow 2n$ tận cùng bằng 2 $\Leftrightarrow n$ tận cùng bằng 1 hoặc 6.

Kết luận : Với n là số tự nhiên tận cùng khác 1 và khác 6 thì $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản.

b) Gọi d là ước nguyên tố của $3n + 2$ và $7n + 1$. Ta tìm được $d = 11$.

Ta thấy : $3n + 2 : 11$ (khi đó $7n + 1 : 11$) $\Leftrightarrow 3n + 2 - 11 : 11$

$\Leftrightarrow 3(n - 3) : 11 \Leftrightarrow n - 3 : 11 \Leftrightarrow n = 11k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$).

Vậy nếu $n \neq 11k + 3$ thì phân số tối giản.

c) **Đáp số :** Nếu $n \neq 31k + 12$ ($k \in \mathbb{N}$) thì phân số tối giản.

404. Từ điều kiện $n + 3 : 2n - 2$, ta tìm được $2n - 2$ phải là ước của 8. Chú ý rằng $2n - 2$ chẵn và $2n - 2 \geq -2$, xét các trường hợp :

$2n - 2$	2	-2	4	8
n	2	0	3	5

Chỉ có trường hợp $n = 5$ thoả mãn bài toán, khi đó phân số bằng 1.

405. a) $3n - 1$ là ước của 12 và chia cho 3 dư 2. Ước của 12 mà không chia hết cho 3 là $\pm 1, \pm 2, \pm 4$, trong đó số chia cho 3 dư 2 là 2, -1, -4.

Từ đó $n \in \{1; 0; -1\}$

b) $2n + 3 : 7 \Leftrightarrow 2(n - 2) + 7 : 7 \Leftrightarrow n - 2 : 7$

$\Leftrightarrow n = 7k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$).

406. a) $n = 2$; $n = 46$.

b) $n \neq 11k + 2$; $n \neq 17m + 12$ ($k, m \in \mathbb{N}$).

c) Các số tự nhiên từ 150 đến 170 có dạng $11k + 2$ hoặc $17m + 12$ là : 156, 165, 167.

Với $n = 156$ thì $A = \frac{131}{57}$; với $n = 165$ thì $A = \frac{89}{39}$; với $n = 167$ thì $A = \frac{139}{61}$.

407. $\frac{1}{120}, \frac{3}{40}, \frac{5}{24}, \frac{8}{15}$.

408. Các phân số đã cho có dạng :

$$\frac{5}{5+(n+3)}, \frac{6}{6+(n+3)}, \dots, \frac{17}{17+(n+3)};$$

tức là có dạng $\frac{a}{a+(n+3)}$. Để các phân số đó tối giản thì a và $n+3$ phải là

hai số nguyên tố cùng nhau (vì nếu chúng cùng chia hết cho d khác 1 thì phân số rút gọn được cho d).

Ta cần tìm số tự nhiên n sao cho $n+3$ nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số 5, 6, ..., 17. Muốn vậy $n+3$ phải là số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn 17, đó là số 19. Vậy $n=16$.

409. $\frac{15n}{42n}, \frac{42n}{48n}, \frac{48n}{68n} \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0).$

410. Gọi phân số phải tìm là $\frac{a}{b}$ và c là số đem cộng với tử và đem nhân với mẫu, ta có $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{bc}$.

Suy ra $a+c=ac$. Như vậy $a:c, c:a$, do đó $a=\pm c$, suy ra $a=2$ (còn $a=0$ loại).

Các phân số phải tìm là $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}, \frac{2}{9}$.

411. Ta tính được $A=3$. Gọi mẫu của A là a thì tử là $3a$. Nếu xoá một số hạng m ở tử, một số hạng n ở mẫu mà giá trị phân số vẫn không đổi thì ta phải có $\frac{3a-m}{a-n}=3$, do đó :

$$3a-m=3a-3n, \text{ vậy } m=3n.$$

Như vậy trong phân số $A = \frac{23+22+21+\dots+13}{11+10+9+\dots+1}$,

Ta phải xoá các cặp số :

21 ở tử và 7 ở mẫu,

hoặc 18 ở tử và 6 ở mẫu,

hoặc 15 ở tử và 5 ở mẫu.

412. Có nhiều cách xếp, chẳng hạn $\frac{17469}{5823} = 3, \frac{15768}{3942} = 4, \frac{13845}{2769} = 5,$

$$\frac{17658}{2943} = 6, \frac{16758}{2394} = 7, \frac{25496}{3187} = 8, \frac{57429}{6381} = 9.$$

413. a) $\frac{3}{20}$; b) $\frac{-1}{4}$; c) $\frac{-9}{95}$; d) $\frac{-2}{3}$.

414.

a) $\left(\frac{84}{13}\right)^2 + \left(\frac{35}{13}\right)^2 = \frac{84^2 + 35^2}{13^2} = \frac{7^2(12^2 + 5^2)}{169} = \frac{49 \cdot 169}{169} = 49$;

b) $3 : \frac{3}{7} = 7$;

c) $\frac{1}{6}$.

415. a) -4 ; b) $\frac{-1}{5}$; c) 3 hoặc -2 .

416. a) Biến đổi : $\frac{3n+4}{n-1} = \frac{3n-3+7}{n-1} = 3 + \frac{7}{n-1}$.

Đáp số : n bằng 2 ; 8 ; 0 ; -6 .

b) Biến đổi : $\frac{6n-3}{3n+1} = \frac{6n+2-5}{3n+1} = 2 - \frac{5}{3n+1}$.

Đáp số : n bằng 0 ; -2 .

417. a) $A = \frac{4}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 2\frac{1}{3}$.

b) $B = \frac{41}{5} \cdot \left(5 + \frac{94}{1591} - \frac{38}{1517}\right) : \frac{355}{43}$
 $= \frac{41}{5} \cdot \left(5 + \frac{94}{37 \cdot 43} - \frac{38}{37 \cdot 41}\right) : \frac{355}{43}$
 $= \frac{41}{5} \cdot \left(5 + \frac{94 \cdot 41 - 38 \cdot 43}{37 \cdot 41 \cdot 43}\right) : \frac{355}{43}$
 $= \frac{41}{5} \cdot \left(5 + \frac{2220}{37 \cdot 41 \cdot 43}\right) : \frac{355}{43}$
 $= \frac{41}{5} \cdot \left(5 + \frac{60}{41 \cdot 43}\right) : \frac{355}{43}$
 $= \frac{41}{5} \cdot \frac{8875}{41 \cdot 43} : \frac{355}{43}$
 $= \frac{8875}{5 \cdot 355} = 5.$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } C &= 10101 \cdot \left(\frac{10}{111111} + \frac{5}{2.111111} - \frac{4}{111111} \right) \\
 &= 10101 \cdot \frac{10+5-8}{222222} \\
 &= 10101 \cdot \frac{7}{222222} = \frac{7}{22}.
 \end{aligned}$$

418. a) Ta luôn có :

$$\frac{a}{2} \geq \frac{a}{5} \text{ (xảy ra dấu bằng với } a = 0)$$

$$\frac{b}{3} \geq \frac{b}{5} \text{ (xảy ra dấu bằng với } b = 0)$$

$$\text{Do đó : } \frac{a}{2} + \frac{b}{3} \geq \frac{a}{5} + \frac{b}{5} = \frac{a+b}{5}.$$

Xảy ra $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{5}$ chỉ trong trường hợp $a = b = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{52}{9} &= 5\frac{7}{9} = 5 + \frac{1}{\frac{9}{7}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} \\
 &= 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

c) Biến đổi :

$$\overline{abc} = 25(a + b + c) \Rightarrow \overline{abc} : 25$$

$$\Rightarrow \overline{bc} \in \{25; 50; 75\} \text{ (chú ý loại } \overline{bc} = 00 \text{ vì } b = c).$$

$$\text{Nếu } \overline{bc} = 25 \text{ thì } \overline{a25} = 25(a + 7)$$

$$\Rightarrow 100a + 25 = 25a + 175$$

$$\Rightarrow 75a = 150$$

$$\Rightarrow a = 2, \text{ loại vì } a \neq b.$$

$$\text{Nếu } \overline{bc} = 50 \text{ thì } \overline{a50} = 25(a + 5)$$

$$\Rightarrow 100a + 50 = 25a + 125$$

$$\Rightarrow 75a = 75 \Rightarrow a = 1.$$

$$\text{Nếu } \overline{bc} = 75 \text{ thì } \overline{a75} = 25(a + 12)$$

$$\Rightarrow 100a + 75 = 25a + 300$$

$$\Rightarrow 75a = 225 \Rightarrow a = 3.$$

Có hai đáp số :

$$1,50 : (1 + 5 + 0) = 0,25.$$

$$3,75 : (3 + 7 + 5) = 0,25.$$

419. Ta có $15 \frac{1}{17} = \frac{256}{17}$, $29 \frac{16}{17} = \frac{509}{17}$. Tổng phải tìm bằng $A - B$, trong đó

$$A = \frac{256 + 257 + \dots + 509}{17} = \frac{(256 + 509) \cdot 254}{2 \cdot 17} = 45.127;$$

$$B = 16 + 17 + \dots + 29 = \frac{(16 + 29) \cdot 14}{2} = 45.7.$$

$$\text{Do đó } A - B = 45.120 = 5400.$$

420. a) $\frac{4}{y} = \frac{x}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5x-3}{15} \Rightarrow y(5x-3) = 60.$

Như vậy $5x - 3$ là ước của 60 và tận cùng bằng 7 hoặc 2, do đó $5x - 3$ bằng 2 hoặc 12. Tương ứng $x = 1, y = 30$ hoặc $x = 3, y = 5$.

b) $x = 24, y = 2$; $x = 8, y = 1$.

421. a) $\frac{5}{x} = \frac{y}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2y+1}{6}.$

$x(2y+1) = 30$ nên $2y + 1$ là ước lẻ của 30. Ta có :

$2y + 1$	1	-1	3	-3	5	-5	15	-15
$2y$	0	-2	2	-4	4	-6	14	-16
y	0	-1	1	-2	2	-3	7	-8
x	30	-30	10	-10	6	-6	2	-2

b) $\frac{2}{y} = \frac{x}{6} - \frac{1}{30} = \frac{5x-1}{30}.$

$y(5x - 1) = 60$. Do đó $5x - 1$ là ước của 60 và chia cho 5 thiếu 1. Ta có :

$5x - 1$	-1	4	-6
$5x$	0	5	-5
x	0	1	-1
y	-60	15	-10

422. a) $\frac{1}{6} = \frac{4}{24} = \frac{3}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24}.$

$$b) \frac{15}{22} = \frac{45}{66} = \frac{33}{66} + \frac{11}{66} + \frac{1}{66} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{66}.$$

$$c) \frac{5}{11} = \frac{45}{99} = \frac{33}{99} + \frac{11}{99} + \frac{1}{99} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99}.$$

Chú ý : 1) Ta chứng minh được rằng nếu $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nhỏ hơn 1 và b chia cho a được k dư r (r có thể bằng 0) thì $\frac{a}{b}$ bao giờ cũng viết được dưới dạng tổng của hai phân số $\frac{1}{k+1}$ và $\frac{a-r}{b(k+1)}$.

Thật vậy, cho phân số tối giản $\frac{a}{b}$, $a < b$, $b = ak + r$. Phân số cộng với $\frac{1}{k+1}$ thành $\frac{a}{b}$ là : $\frac{a}{b} - \frac{1}{k+1} = \frac{ak + a - b}{b(k+1)} = \frac{a - (b - ak)}{b(k+1)} = \frac{a-r}{b(k+1)}$.

Áp dụng nhận xét trên, ta có : $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$;

$$\frac{15}{22} = \frac{1}{2} + \frac{2}{11}, \quad \frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}, \quad \text{vậy} \quad \frac{15}{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{66} ;$$

$$\frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{4}{33}, \quad \frac{4}{33} = \frac{1}{9} + \frac{1}{99}, \quad \text{vậy} \quad \frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99}.$$

2) Trên đây chỉ là một trong các cách viết phân số $\frac{a}{b}$ thành tổng của các phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau. Để tìm đầy đủ các cách viết như trên, chẳng hạn với phân số $\frac{1}{4}$, xem ví dụ 134.

423. Gọi số bị chia là a, số chia là b, ta có :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+10}{10b} \Rightarrow \frac{10a}{10b} = \frac{a+10}{10b} \Rightarrow 10a = a + 10.$$

$$\text{Do đó } a = \frac{10}{9}, \quad b \neq 0.$$

424. Ta tách A thành hai số hạng, trong đó có một số hạng chia hết cho 15 như sau :

$$A = \underbrace{44 \dots 4}_{2001} 000 + 444.$$

Ta thấy $\underbrace{44 \dots 4}_{2001} 000$ chia hết cho 3 và 5 nên chia hết cho 15. Do đó phần

thập phân của phép chia A cho 15 chính là phần thập phân của phép chia 444 cho 15.

Ta có $444 : 15 = 29,6$.

Vậy phần thập phân của phép chia A cho 15 là 0,6.

425. Giá một quả ổi loại to là : $100 : 2 = 50$ (đồng).

Giá một quả ổi loại nhỏ là : $100 : 3 = 33 \frac{1}{3}$ (đồng).

Đáng lẽ cứ hai quả ổi cô gái phải bán :

$50 + 33 \frac{1}{3} = 83 \frac{1}{3}$ (đồng), nhưng cô chỉ bán : $\frac{200.2}{5} = 80$ (đồng), hụt đi :

$$83 \frac{1}{3} - 80 = 3 \frac{1}{3} \text{ (đồng).}$$

Tổng số ổi là : $(500 : 3 \frac{1}{3}).2 = 300$ (quả).

426. Chú ý rằng tổng $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ mới bằng $\frac{23}{24}$.

Ông già thông thái đã dắt con ngựa của mình vào đàn ngựa để thành 24 con, ông chia 23 con theo bản di chúc, còn con ngựa của mình ông lại mang về.

427. Số dụng cụ người thứ nhất phải làm là số chia hết cho 7, cho 6, cho 20 nên bằng $420k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Số dụng cụ người thứ hai phải làm là số chia hết cho 4, cho 11, cho 7 nên bằng $308l$ ($l \in \mathbb{N}$).

Do $420k + 308l < 1000$ nên $k = l = 1$.

Người thứ nhất phải làm 420 dụng cụ, người thứ hai phải làm 308 dụng cụ.

428. Tổng số học sinh là 120, số học sinh nam lớp 6 là 16, số học sinh nữ lớp 6 là 18.

429. An uống : $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = 2$ cốc, trong đó có một cốc nước chè. Vậy lượng nước lọc và lượng nước chè mà An uống bằng nhau.

430. Cách 1. Mỗi người ăn $\frac{8}{3}$ chiếc bánh. A-li cho người khách : $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ chiếc, Xa-ba cho người khách :

$$5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3} \text{ chiếc.}$$

Vậy Xa-ba được nhận số tiền gấp 7 lần số tiền A-li nhận, tức là Xa-ba nhận 7 đina, A-li nhận 1 đina.

Cách 2 : Người khách ăn $\frac{1}{3}$ số bánh, trả 8 đina, vậy số bánh giá 24 đina, mỗi chiếc bánh giá : $24 : 8 = 3$ đina.

A-li góp : $3 \cdot 3 = 9$ đina, ăn hết 8 đina, còn nhận 1 đina.

Xa-ba góp : $3 \cdot 5 = 15$ đina, ăn hết 8 đina, còn nhận 7 đina.

431. Chứng tỏ rằng hiệu $\frac{7n-1}{4} - \frac{5n+3}{12}$ không là số tự nhiên.

432. Tỉ số của $\frac{1}{2}$ và $1\frac{1}{3}$ bằng : $\frac{1}{2} : \frac{4}{3} = \frac{3}{8}$.

Dễ dàng gấp sợi dây làm tám để lấy ra $\frac{3}{8}$ của nó.

433. a) Số học sinh giỏi học kì 1 bằng $\frac{3}{10}$ số học sinh cả lớp.

Số học sinh giỏi cuối năm bằng $\frac{2}{5}$ số học sinh cả lớp.

Vậy 4 học sinh biểu thị : $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$ số học sinh cả lớp.

Số học sinh cả lớp : 40 người.

b) 6 học sinh biểu thị 2% tổng số học sinh đầu học kì 2. Số học sinh đầu học kì 2 là 300. Số học sinh đầu năm là 290.

434. Ở ô tô bốn bánh, số lốp đang dùng bằng $\frac{4}{5}$ tổng số lốp nên khi ô tô đi 3500km, số kilômét mà mỗi lốp đã đi bằng $\frac{4}{5}$ của 3500km, tức là 2800km.

Ở ô tô sáu bánh, số kilômét mà mỗi lốp đã đi bằng :

$$3500 \cdot \frac{6}{7} = 3000 \text{ (km)}.$$

435. a) Diện tích tăng 44%, vì thế (D) đúng.

b) Thể tích tăng 237,5%, vì thế (C) đúng.

c) Diện tích giảm 4%, vì thế (C) đúng.

d) Bán với giá x đồng được 0,9 giá vốn. Bán với giá y đồng được 1,1 giá vốn.

$$\text{Vậy } y : x = 1,1 : 0,9 = \frac{11}{9}.$$

Vì thế (B) đúng.

436. Giá rau tháng 7 bằng 0,9 giá rau tháng 6. Giá rau tháng 8 bằng 1,1 giá rau tháng 7, do đó bằng : $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$ giá rau tháng 6.

Giá rau tháng 8 thấp hơn giá rau tháng 6 là 1%.

437. Chiều dài mới bằng : $1,05 : 0,84 = 1,25$ chiều dài cũ, tăng 0,25 chiều dài cũ hay 36m.

Vậy chiều dài cũ : 144 m, chiều dài mới : 180m.

438. a) 20%.

b) Lượng sữa loại I ít hơn lượng sữa loại II là 5,5%.

439. $159\,135 : 1,03 : 1,03 = 150\,000$ (sản phẩm).

440. 30kg dung dịch axit nồng độ 5% chứa : $30 \cdot 5\% = 1,5$ kg axit nguyên chất.

Lượng dung dịch axit nồng độ 3% trong đó chứa 1,5 kg axit nguyên chất : $1,5 \cdot \frac{100}{3} = 50$ (kg).

Lượng nước phải thêm vào : $50 - 30 = 20$ (kg).

441. Chú ý rằng khối lượng gỗ, khối lượng nước trong cây gỗ đều thay đổi, chỉ có lượng chất khô trong cây gỗ không đổi.

Đáp số : Lượng nước cần bốc hơi là 250 kg.

442. Ta thấy $\frac{1}{3} < \frac{3}{4}$ nên số sản phẩm may đạt huy chương vàng nhiều nhất nếu tất cả huy chương vàng (chiếm $\frac{1}{3}$ tổng số) đều thuộc sản phẩm may. Khi đó, số sản phẩm may đạt huy chương vàng so với số sản phẩm may chiếm : $\frac{1}{3} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{9} \approx 44\%$.

Số sản phẩm may đạt huy chương vàng ít nhất nếu tất cả các sản phẩm khác may (chiếm $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ tổng số) đều đạt huy chương vàng (do $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$). Khi đó, số sản phẩm may đạt huy chương vàng chiếm : $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ tổng số.

Số sản phẩm may đạt huy chương vàng so với số sản phẩm may chiếm :

$$\frac{1}{12} : \frac{3}{4} = \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{9} \approx 11\%.$$

DÃY CÁC PHÂN SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT

443. Tính $2A$, rồi lấy $2A$ trừ đi A . Ta được :

$$A = 1 - \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}.$$

444. a) Các phân số được viết thành từng nhóm (phân cách bởi dấu ;) có tổng của tử và mẫu lần lượt là 2, 3, 4, 5..., trong mỗi nhóm thì mẫu viết theo thứ tự tăng dần 1, 2, 3, ...

Do đó năm phân số tiếp theo là : $\frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}$.

b) Theo cách chia nhóm như trên, tổng của tử và mẫu của nhóm thứ nhất là 2, của nhóm thứ hai là 3, của nhóm thứ ba là 4,... Do đó phân số $\frac{50}{31}$ thuộc nhóm thứ 80 và là số thứ 31 của nhóm ấy.

Số lượng các phân số trước nhóm thứ 80 là :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 79 = 3160.$$

Do đó phân số $\frac{50}{31}$ là phân số thứ : $3160 + 31 = 3191$ của dãy.

445. a) $x = 305$; b) $x = 1992$.

446. Mẫu của dãy có dạng 1.5, 5.9, 9.13, 13.17, 17.21... tổng quát là $(4n - 3)(4n + 1)$. Mẫu thứ 100 bằng 397.401. Tổng của 100 số hạng đầu của dãy bằng :

$$(1 - \frac{1}{401}) : 4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{1604} < \frac{1}{4}.$$

447.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{299} \left(1 - \frac{1}{300} + \frac{1}{2} - \frac{1}{301} + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{400} \right) \\ &= \frac{1}{299} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{300} - \frac{1}{301} - \dots - \frac{1}{400} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{101} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{102} + \frac{1}{2} - \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{299} - \frac{1}{400} \right) \\ &= \frac{1}{101} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{299} - \frac{1}{102} - \frac{1}{103} - \dots - \frac{1}{400} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{101} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{299} - \frac{1}{102} - \frac{1}{103} - \dots - \frac{1}{299} - \frac{1}{300} - \dots - \frac{1}{400} \right)$$

$$= \frac{1}{101} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{300} - \frac{1}{301} - \dots - \frac{1}{400} \right).$$

Hai dấu ngoặc ở biểu thức A và biểu thức B như nhau.

$$\text{Vậy } A : B = \frac{1}{299} : \frac{1}{101} = \frac{101}{299}.$$

448. Cộng vế phải với biểu thức trong dấu ngoặc ở vế trái, ta được 100.

$$449. B = \frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \frac{3}{197} + \dots + \frac{198}{2} + \frac{199}{1}.$$

Cộng 1 vào mỗi phân số trong 198 phân số đầu, trừ phân số cuối đi 198, ta được :

$$B = \left(\frac{1}{199} + 1 \right) + \left(\frac{2}{198} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{198}{2} + 1 \right) + 1$$

$$= \frac{200}{199} + \frac{200}{198} + \dots + \frac{200}{2} + 1$$

$$= \frac{200}{199} + \frac{200}{198} + \dots + \frac{200}{2} + \frac{200}{200}$$

Đưa phân số cuối lên đầu :

$$B = \frac{200}{200} + \frac{200}{199} + \frac{200}{198} + \dots + \frac{200}{2}$$

$$= 200 \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{199} + \frac{1}{198} + \dots + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 200.A$$

$$\text{Vậy } A : B = \frac{1}{200}.$$

450. a) Tính vế trái : Thêm vào số bị trừ và số trừ biểu thức sau

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \text{ (chính là số trừ), ta được :}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100} \right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50} \right) =$$

$$= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}, \text{ bằng vế phải.}$$

b) Xét số chia :

$$\text{Ta có } \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}; \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{99.100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \text{ nên số chia bằng :}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}.$$

Biểu thức này chính là vế trái của đẳng thức ở câu a. Theo kết quả của câu a, biểu thức phải tìm bằng 1.

451. a) $\frac{4949}{19800}$.

b) Nhận xét :

$$\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} = \frac{3}{1.2.3.4}, \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} = \frac{3}{2.3.4.5}, \dots,$$

$$\frac{1}{27.28.29} - \frac{1}{28.29.30} = \frac{3}{27.28.29.30}.$$

Gọi biểu thức phải tính bằng A, ta tính được :

$$3A = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{28.29.30} = \frac{4059}{28.29.30}.$$

Vậy $A = \frac{1353}{8120}$.

452. a) $\frac{17}{25}$.

b) Quy luật viết của các mẫu là : $\frac{2.3}{2}, \frac{3.4}{2}, \frac{4.5}{2}, \frac{5.6}{2}, \dots, \frac{39.40}{2}$, tổng quát $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Do đó ta có :

$$B = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{14}{15} \dots \frac{779}{780} = \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{28}{30} \dots \frac{1558}{1560} =$$

$$= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdot \frac{4.7}{5.6} \dots \frac{38.41}{39.40} =$$

$$= \frac{1.2.3 \dots 38}{2.3.4 \dots 39} \cdot \frac{4.5.6 \dots 41}{3.4.5.40} = \frac{1}{39} \cdot \frac{41}{3} = \frac{41}{117}.$$

453. a) $A = 1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + 97.99 + 98.100$

$$= 1(2 + 1) + 2(3 + 1) + 3(4 + 1) + \dots + 98(99 + 1)$$

$$= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) + (1 + 2 + 3 + \dots + 98)$$

Biểu thức trong dấu ngoặc đầu bằng 323 400 (xem ví dụ 111), biểu thức trong dấu ngoặc sau bằng :

$$98.99 : 2 = 4851.$$

Vậy $A = 328\,251$.

b) $B = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 48.49.50$.

Áp dụng phương pháp như ở ví dụ 111, nhân các số hạng của B với 4, rồi viết 4 dưới dạng $4 - 0, 5 - 1, \dots, 51 - 47$.

Ta được $4B = 48.49.50.51$, suy ra $B = 1499400$.

Chú ý : Tổng quát

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

454. Chọn MC là $5.7.9 \dots 101$. Sau khi quy đồng mẫu rồi cộng các tử thì tử mới không chia hết cho 101, còn mẫu chia hết cho 101 (101 là số nguyên tố).

455. a) Tính biểu thức $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98}$ bằng cách ghép thành từng cặp các phân số cách đều hai phân số đầu và cuối, ta được

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{98}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{97}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} + \frac{1}{50}\right) = \frac{99}{1.98} + \frac{99}{2.97} + \dots + \frac{99}{49.50}.$$

Gọi các thừa số phụ là $k_1, k_2, \dots, k_{49}$ thì

$$A = \frac{99(k_1 + k_2 + \dots + k_{49})}{2.3 \dots 97.98} \cdot 2.3 \dots 97.98$$

$$= 99(k_1 + k_2 + \dots + k_{49}), \text{ do đó } A : 99.$$

b) Cộng 96 phân số theo từng cặp :

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{96}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{95}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{94}\right) + \dots + \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{49}\right).$$

Giải tương tự như ví dụ 114.

BẤT ĐẲNG THỨC

456. a) $A = \frac{(1+1000).1000}{2} < 10^3.10^3 = 10^6$, còn

$$B = (2.5). (3.4). (6.7). (8.9). 10.11 > 10^6. \text{ Vậy } A < B.$$

b) $A > 10^{12} > B$.

$$457. \text{ Ta có : } \frac{1+2+3+\dots+a}{a} < \frac{1+2+3+\dots+b}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+a)a}{a} < \frac{(1+b)b}{b}$$

$$\Rightarrow 1+a < 1+b \Rightarrow a < b.$$

458. Gọi giá một quyển sách, một quyển vở, một chiếc bút thứ tự là S, V, B đồng. Ta có :

$$S + 6V + 3B = 7700 \quad (1)$$

$$8S + 6V + 6B = 16000 \quad (2)$$

Nhân (1) với 2 rồi trừ vào (2) ta được :

$$6S - 6V = 600 \Rightarrow S - V = 100.$$

Giá một quyển sách nhiều hơn giá một quyển vở là 100 đồng.

$$459. \text{ a) } \frac{18}{91} < \frac{18}{90} = \frac{1}{5} = \frac{23}{115} < \frac{23}{114}.$$

$$\text{b) } \frac{21}{52} = \frac{210}{520} = 1 - \frac{310}{520}, \quad \frac{213}{523} = 1 - \frac{310}{523}.$$

$$\text{Ta có } \frac{310}{520} > \frac{310}{523} \text{ nên } \frac{21}{52} < \frac{213}{523}.$$

$$\text{c) } \frac{1313}{9191} = \frac{13}{91} = \frac{1}{7} = \frac{11}{77} < \frac{11}{73} = \frac{1111}{7373}.$$

$$460. \text{ a) Chú ý rằng } \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \frac{n+2}{n+3} = 1 - \frac{1}{n+3}$$

$$\text{b) } \frac{n}{n+3} > \frac{n-1}{n+3} > \frac{n-1}{n+4}$$

$$\text{c) } \frac{n}{2n+1} = \frac{3n}{6n+3} < \frac{3n+1}{6n+3}.$$

$$461. \text{ a) Chứng minh rằng } \frac{20}{39} > \frac{18}{41}, \quad \frac{18}{43} > \frac{14}{39}, \quad \frac{22}{27} > \frac{22}{29}.$$

Vậy $A > B$.

$$\text{b) } A = \frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} + \frac{4}{8^4}, \quad B = \frac{3}{8^3} + \frac{4}{8^3} + \frac{3}{8^4}, \quad A < B.$$

$$\text{c) } A = \frac{10^7 + 5}{10^7 - 8} = 1 + \frac{13}{10^7 - 8}; \quad B = \frac{10^8 + 6}{10^8 - 7} = 1 + \frac{13}{10^8 - 7}.$$

$$\text{Ta có } \frac{13}{10^7 - 8} > \frac{13}{10^8 - 7} \text{ nên } A > B.$$

d) Trước hết so sánh $\frac{A}{10}$ với $\frac{B}{10}$.

Đáp số: $A < B$.

462. $x = 8, x = 9$.

463. Giải $\frac{a}{9} < \frac{4}{7} < \frac{a+1}{9}$ được $a < 5,1$; $a > 4,1$. Do đó $a = 5$.

Đáp số: $\frac{5}{9}$ và $\frac{6}{9}$.

464. $\frac{1}{6}$ và $\frac{1}{7}$.

465. $\frac{-17}{21}$ và $\frac{-16}{21}$.

466. a) $A = 3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100}$;
 $B = 7^{300} = (7^3)^{100} = 343^{100}$.

Vậy $B > A$.

b) $8^5 = 2^{15} = 2 \cdot 2^{14} < 3 \cdot 2^{14} = 3 \cdot 4^7$.

c) Chú ý rằng: $99^2 < 99 \cdot 101 = 9999$.

Do đó: $99^{20} < 9999^{10}$.

d) Cách 1. $A = 202^{303} = (202^3)^{101}$;

$B = 303^{202} = (303^2)^{101}$.

$202^3 = 2^3 \cdot 101^3 = 8 \cdot 101 \cdot 101^2 = 808 \cdot 101^2$.

$303^2 = 3^2 \cdot 101^2 = 9 \cdot 101^2$.

Vậy $A > B$.

Cách 2. $A = 202^{303} > 196^{303} = (14^2)^{303} = 14^{606}$.

$B = 303^{202} < 343^{202} = (7^3)^{202} = 7^{606}$.

Vậy $A > B$.

e) $A = 3^{21} = 3 \cdot 3^{20} = 3 \cdot (3^2)^{10} = 3 \cdot 9^{10}$.

$B = 2^{31} = 2 \cdot 2^{30} = 2 \cdot (2^3)^{10} = 2 \cdot 8^{10}$.

Vậy $A > B$.

g) $A = 11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660}$.

$B = 37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660}$.

Vậy $A < B$.

h) $A = 10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 2 \cdot 2^9 \cdot 2^{10}$.

$B = 48 \cdot 50^5 = 3 \cdot 2^4 \cdot (5^2 \cdot 2)^5 = 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$.

Vậy $A < B$.

$$i) A = 1990^{10} + 1990^9 = 1990^9 (1990 + 1) = 1990^9 \cdot 1991 ;$$

$$B = 1991^{10} = 1991^9 \cdot 1991.$$

Vậy $A < B$.

467.

$$a) 5^{299} < 5^{300} = (5^3)^{100} < (3^5)^{100} < 3^{500} < 3^{501}.$$

$$b) 3^{23} = 9 \cdot (3^3)^7 > 5 \cdot (5^2)^7 = 5^{15}.$$

$$c) A = 127^{23} < 128^{23} = (2^7)^{23} = 2^{161}.$$

$$B = 513^{18} > 512^{18} = (2^9)^{18} = 2^{162}.$$

Vậy $B > A$.

$$468. 125 < 128 \Rightarrow 5^3 < 2^7 \Rightarrow (5^3)^9 < (2^7)^9 \Rightarrow 5^{27} < 2^{63}.$$

$$512 < 625 \Rightarrow 2^9 < 5^4 \Rightarrow (2^9)^7 < (5^4)^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28}.$$

$$469. \left(\frac{1}{243}\right)^9 = \left(\frac{1}{3^5}\right)^9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{45}, \left(\frac{1}{83}\right)^{13} < \left(\frac{1}{81}\right)^{13} = \left(\frac{1}{3^4}\right)^{13} = \left(\frac{1}{3}\right)^{52}.$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{1}{243}\right)^9 > \left(\frac{1}{83}\right)^{13}.$$

470. Giả sử số 4^{50} có m chữ số, số 25^{50} có n chữ số. Thế thì :

$$10^{m-1} < 4^{50} < 10^m \quad (1)$$

$$10^{n-1} < 25^{50} < 10^n \quad (2)$$

Nhân (1) với (2) :

$$10^{m+n-2} < 100^{50} < 10^{m+n} \text{ tức là } 10^{m+n-2} < 10^{100} < 10^{m+n}.$$

$$\text{Do đó : } m + n - 1 = 100 \Rightarrow m + n = 101.$$

Vậy kết quả của các lũy thừa 4^{50} và 25^{50} viết liền nhau tạo thành số có 101 chữ số.

$$471. \text{ Cần chứng minh rằng } 10^{30} < 2^{100} < 10^{31}.$$

$$\text{Dễ dàng chứng minh được } 10^{30} < 2^{100}. \text{ Còn } 2^{100} < 10^{31} \Leftrightarrow \frac{2^{100}}{10^{30}} < 10.$$

Ta có :

$$\frac{2^{100}}{10^{30}} = \left(\frac{1024}{1000}\right)^{10} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} < \frac{40}{39} \cdot \frac{39}{38} \cdots \frac{32}{31} \cdot \frac{31}{30} = \frac{4}{3} < 10.$$

$$472. \text{ Ta thấy } \frac{1}{37} < \frac{1}{35} < \frac{1}{31} < \frac{1}{30}, \frac{1}{61} < \frac{1}{53} < \frac{1}{47} < \frac{1}{45}.$$

Do đó :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{37} + \frac{1}{47} + \frac{1}{53} + \frac{1}{61} < \frac{1}{3} + \frac{1}{30} \cdot 3 + \frac{1}{45} \cdot 3 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 473. \text{ a) } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} &= \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) < \\ &< \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{50} \right) < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Về trái :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{9} + 1 - \frac{1}{16} + \dots + 1 - \frac{1}{2500} &= \\ = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) &> 48. \end{aligned}$$

474. Đặt

$$A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}.$$

Ta có :

$$\begin{aligned} A &< \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} A &> \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 101} = \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$475. \text{ a) Chú ý rằng } \frac{1}{2!} = \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{3!} = \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{4!} < \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots$$

b) Lần lượt viết tử thành $10 - 1, 11 - 1, \dots, 1000 - 1$.

476. a) Tách tổng A thành ba nhóm :

$$A = \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{70} \right)$$

$$A > \frac{1}{30} \cdot 20 + \frac{1}{50} \cdot 20 + \frac{1}{70} \cdot 20 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = 1 \frac{37}{105}.$$

$$A > 1 \frac{35}{105} = 1 \frac{1}{3}.$$

b) Tách tổng A thành sáu nhóm :

$$A = \left(\frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{40}\right) + \\ + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{60}\right) + \left(\frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{70}\right)$$

$$A < \frac{1}{11} \cdot 10 + \frac{1}{21} \cdot 10 + \frac{1}{31} \cdot 10 + \frac{1}{41} \cdot 10 + \frac{1}{51} \cdot 10 + \frac{1}{61} \cdot 10$$

$$A < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) < \\ < 2 + 0,5 = 2,5.$$

$$477. A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right)$$

Biểu thức trong dấu ngoặc thứ nhất bằng $\frac{13}{60}$ nên lớn hơn $\frac{12}{60}$, tức là lớn hơn 0,2, còn các dấu ngoặc sau đều dương, do đó $A > 0,2$.

Để chứng minh $A < \frac{2}{5}$, ta viết :

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) - \dots - \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{98}\right) - \frac{1}{99}.$$

Biểu thức trong dấu ngoặc thứ nhất nhỏ hơn $\frac{2}{5}$, còn các dấu ngoặc sau đều dương, do đó $A < \frac{2}{5}$.

$$478. A = 1 + \frac{5^9}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^8} = 1 + 1 : \frac{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^8}{5^9} \\ = 1 + 1 : \left(\frac{1}{5^9} + \frac{1}{5^8} + \dots + \frac{1}{5}\right).$$

$$B = 1 + \frac{3^9}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^8} = 1 + 1 : \frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^8}{3^9} \\ = 1 + 1 : \left(\frac{1}{3^9} + \frac{1}{3^8} + \dots + \frac{1}{3}\right).$$

Do $\frac{1}{5^9} < \frac{1}{3^9}$, $\frac{1}{5^8} < \frac{1}{3^8}$, ..., $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$ nên $A > B$.

479. Giải tương tự ví dụ 125.

Để chứng minh $A < \frac{1}{10}$, chú ý rằng $A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{100}{101}$.

Để chứng minh $A > \frac{1}{15}$, chú ý rằng $A > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{98}{99}$.

480. Giả sử $a < b < c$ thì $a \geq 2$, $b \geq 3$, $c \geq 5$. Ta có :

$$\frac{1}{[a,b]} = \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{[b,c]} = \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{15}, \quad \frac{1}{[c,a]} = \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{10}.$$

Suy ra vế trái nhỏ hơn hoặc bằng :

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{3}.$$

481. a) Ta chọn sáu chữ số đầu là 102345, ta được $n = \overline{102345abcd}$ với $a, b, c, d \in \{6, 7, 8, 9\}$.

Để n chia hết cho 4 thì $\overline{cd}$ phải chia hết cho 4. Chỉ có ba cách chọn $\overline{cd}$ bằng 68, 76, 96.

Để n nhỏ nhất thì bốn chữ số cuối cùng của n có thể là 7968, 8976, 7896, số nhỏ nhất là 7896.

Vậy số n nhỏ nhất là 1023457896.

b) Chọn bảy chữ số đầu là 9 8 7 6 5 4 3. Còn lại ba chữ số 2, 1, 0 ; lập số lớn nhất có hai chữ số tận cùng tạo thành số chia hết cho 4, được 120.

Đáp số : 98 76 543 120.

482. Các số phải tìm ở bài 481 đều chia hết cho 8. Do đó các số phải tìm ở bài 482 cũng là : 9 876 543 120 và 1 023 457 896.

483. a) Chọn năm chữ số đầu là 1 0 2 3 4. Còn lại năm chữ số 5, 6, 7, 8, 9 ; lập số nhỏ nhất có hai chữ số tận cùng tạo thành số chia hết cho 25, được 68975.

Đáp số : 1 023 468 975.

b) Chọn bốn chữ số đầu là 9 8 7 6. Còn lại sáu chữ số 5, 4, 3, 2, 1, 0 ; lập số lớn nhất có hai chữ số tận cùng tạo thành số chia hết cho 25 (tận cùng 25 hoặc 50), được 432150.

Đáp số : 9 876 432 150.

484. Số A có 21 chữ số, sau khi xoá đi 15 chữ số thì còn lại 6 chữ số $\overline{abcdeg}$.

a) Để được số lớn nhất, ta chọn $a = 9$ (của số 9). Sau chữ số 9, còn lại dãy chữ số : 101112131415.

Để chọn b , ta bớt lại bốn chữ số cuối, còn lại 10111213, chọn chữ số lớn nhất là 3.

Sau chữ số 3, còn lại 1415, đó chính là $\overline{cdeg}$.

Số lớn nhất phải tìm là 931415.

b) Để được số nhỏ nhất, ta lần lượt chọn a, b... (a, b,... có thể bằng 0) là chữ số nhỏ nhất có thể được. Bằng cách giải tương tự như câu a, ta được : 011111.

485. Số ban đầu có 31 chữ số, sau khi xoá 20 chữ số thì còn lại 11 chữ số.

a) Giữ lại 11 chữ số sau $0\underbrace{11\dots1}_90$, đó là chữ số 0 của số 10, chín chữ số hàng chục của các số từ 11 đến 19 và chữ số 0 của số 20.

b) Xét dãy 1 2 3 ... 9 10 11... 15 16 17 18 19 20 (1). Bớt lại 10 chữ số cuối, còn lại 123... 910 11... 15, chọn chữ số lớn nhất trong dãy này : đó là chữ số 9 (của số 9).

Xét dãy 10 11... 15 16 17 18 19 20 (2). Bớt lại 9 chữ số cuối, còn lại 10 11 12 13 14 15 1, chọn chữ số lớn nhất trong dãy này : đó là chữ số 5 (của số 15).

Xét dãy 16 17 18 19 20 (3). Bớt lại 8 chữ số cuối, còn lại 16, chọn chữ số lớn nhất là 6.

Số phải tìm là 95617181920.

486. a) Nếu có hai số tự nhiên liên tiếp mà tổng các chữ số của mỗi số đều chia hết cho 8 thì số nhỏ phải tận cùng bằng 9. Thật vậy, nếu số nhỏ tận cùng khác 9 thì tổng các chữ số của số lớn sẽ lớn hơn tổng các chữ số của số nhỏ là 1, hai tổng này không thể cùng chia hết cho 8.

Khi số nhỏ tận cùng bằng một chữ số 9 thì tổng các chữ số của số lớn sẽ kém tổng các chữ số của số nhỏ là :

$$9 - 1 = 8.$$

Như vậy số nhỏ tận cùng bằng một chữ số 9, số lớn tận cùng bằng một chữ số 0.

Số nhỏ nhất tận cùng bằng 0 có tổng các chữ số chia hết cho 8 là 80. Hai số phải tìm là 79 và 80.

b) 8899 và 8900.

487. Xét $n = 1$. Không có cách nào thêm một chữ số vào đằng sau chữ số 1 để được số chia hết cho 39.

Xét $n = 2$. Tồn tại cách thêm hai chữ số vào đằng sau chữ số 2 để được số chia hết cho 39, chẳng hạn $234 : 39$.

Vậy $n = 2$.

488. Ta có : $a^7 = b^8 (1) \Rightarrow b = \frac{a^7}{b^7} = \left(\frac{a}{b}\right)^7$.

Do b là số tự nhiên nên $a : b$, đặt $a = b.k$ ($k \in \mathbb{N}$)

Do $b > 1$ nên $\frac{a}{b} > 1$, do đó $k \geq 2$ (2)

Thay $a = bk$ vào (1) :

$$b^7 k^7 = b^8 \Rightarrow k^7 = b \quad (3)$$

Từ (2) và (3) : $b \geq 2^7$.

Giá trị nhỏ nhất của b là 2^7 . Khi đó $k = 2$; $a = b.k = 2^7.2 = 2^8$.

Đáp số : $a = 2^8$; $b = 2^7$.

489. Gọi các phân số phải tìm là $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{g}$, ta có $\frac{a}{b} = \frac{5}{8}, \frac{c}{d} = \frac{11}{20},$

$\frac{e}{g} = \frac{4}{15}$. Do đó $a = 5k, b = 8k, c = 11m, d = 20m, e = 4n, g = 15n$ ($k, m, n, \in \mathbb{N}$).

Gọi $A = b - a = d - c = g - e$, ta có $A = 3k = 9m = 11n$. Như vậy $A \in BC(3, 9, 11)$.

Để A nhỏ nhất thì A là BCNN $(3, 9, 11) = 99$.

Suy ra $k = 33, m = 11, n = 9$.

Các phân số phải tìm là $\frac{165}{264}, \frac{121}{220}, \frac{36}{135}$.

490. a) Ta có : $a \cdot \frac{5}{12} \in \mathbb{N} (1), a \cdot \frac{10}{21} \in \mathbb{N} \quad (2)$

Từ (1) suy ra $5a : 12$, mà $(5, 12) = 1$ nên $a : 12$.

Từ (2) suy ra $10a : 21$, mà $(10, 21) = 1$ nên $a : 21$.

Để a nhỏ nhất khác 0 thì $a = BCNN(12, 21) = 84$.

b) Gọi phân số tối giản phải tìm là $\frac{a}{b}$, ta có $\frac{a}{b} \cdot \frac{9}{14} \in \mathbb{N} \quad (1)$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{27}{45} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3}{5} \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $9a : 14$; $9a : b$, do đó $a : 14$ và $9 : b$.

Từ (2) suy ra $3a : 5$, $3a : b$, do đó $a : 5$ và $3 : b$.

Như vậy $a \in BC(14, 5), b \in UC(9, 3)$

Để $\frac{a}{b}$ nhỏ nhất khác 0, ta chọn a nhỏ nhất khác 0, b lớn nhất, tức là $a = \text{BCNN}(14, 5) = 70, b = \text{UCLN}(9, 3) = 3$.

Phân số phải tìm là $\frac{70}{3}$.

491. Đáp số: $\frac{7}{60}$.

492. Gọi phân số phải tìm là $\frac{a}{b}$. Phân số này phải khác 0, nghịch đảo của nó là $\frac{b}{a}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$, ta đặt $a = b + m$ với $m \geq 0$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &= \frac{b+m}{b} + \frac{b}{b+m} = 1 + \frac{m}{b} + \frac{b}{b+m} \geq \\ &\geq 1 + \frac{m}{b+m} + \frac{b}{b+m} = 1 + \frac{m+b}{b+m} = 2.\end{aligned}$$

Như vậy $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $m = 0$, khi đó $a = b$.

Vậy phân số mà tổng của nó với số nghịch đảo của nó có giá trị nhỏ nhất là phân số có tử bằng mẫu, tức là phân số có giá trị bằng 1.

493. a) Gọi d là UCLN của bốn số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4 ($1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$) thì $a_1 = dk_1, a_2 = dk_2, a_3 = dk_3, a_4 = dk_4$. Ta có: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 402$ nên $d(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = 402$.

Gọi $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = s$ thì $d.s = 402$. Như vậy d lớn nhất $\Leftrightarrow s$ nhỏ nhất.

Ta có $s \geq 4$ và s là ước của 402. Do đó s nhỏ nhất bằng 6. Khi đó d lớn nhất bằng: $402 : 6 = 67$.

Các số k_1, k_2, k_3, k_4 có tổng bằng 6 ($k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4$) có thể là 1, 1, 1, 3 hoặc 1, 1, 2, 2.

Vậy UCLN (a_1, a_2, a_3, a_4) có giá trị lớn nhất bằng 67 khi bốn số đó là 67, 67, 67, 201 hoặc 67, 67, 134, 134.

b) Đáp số: 44.

494. Viết 72 thành tổng hai số, có các cách sau:

$$36 + 36, 35 + 37, 34 + 38, \dots, 2 + 70, 1 + 71.$$

Ta thấy:

$$[36, 36] = 36, [35, 37] = 35.37, [34, 38] < 34.38, \dots$$

$$[2, 70] < 2.70, [1, 71] = 1.71.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $35.37 > 34.38 > \dots > 2.70 > 1.71$. Muốn vậy, chỉ cần chứng tỏ rằng nếu $b > a$ thì $ab > (a-1)(b+1)$. Thật vậy ta có :

$$(a-1)(b+1) = a(b+1) - (b+1) = ab + a - b - 1 = \\ = ab - (b-a) - 1 < ab.$$

Vậy $[35, 37]$ có giá trị lớn nhất.

495. Gọi a và b là hai số bất kì thuộc dãy $1, 2, 3, \dots, 50$. Giả sử $a > b$.

a) Gọi $d \in \text{ƯC}(a, b)$ thì $a - b : d$. Ta sẽ chứng minh $d \leq 25$.

Thật vậy, giả sử $d > 25$ thì $b > 25$. Ta có $a \leq 50$ mà $b > 25$ nên $0 < a - b < 25$, không thể xảy ra $a - b : d$.

$d = 25$ xảy ra khi $a = 50; b = 25$.

Vậy hai số có ƯCLN đạt giá trị lớn nhất là 50 và 25.

b) $\text{BCNN}(a, b) \leq a.b \leq 50.49 = 2450$.

Vậy hai số có BCNN đạt giá trị lớn nhất là 50 và 49.

496. $\overline{ab} - (a + b) = 9a$. Biểu thức này có giá trị nhỏ nhất bằng 9 khi và chỉ khi $a = 1$, còn b tùy ý $(0, 1, 2, \dots, 9)$.

497. a) Gọi $k = \overline{abc} : (a + b + c)$, ta có :

$$k = \frac{100a + 10b + c}{a + b + c} \leq \frac{100a + 100b + 100c}{a + b + c} = 100.$$

$$\text{Ta thấy } k = 100 \Leftrightarrow \begin{cases} 10b = 100b \\ c = 100c \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 0$$

Như vậy k lớn nhất bằng 100 ứng với các số 100, 200, ..., 900.

b) Gọi $k = \overline{abc} : (a + b + c)$, ta có :

$$k = \frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = 1 + \frac{9(11a + b)}{a + b + c}.$$

Đặt $\frac{11a + b}{a + b + c} = k_1$, ta thấy : k nhỏ nhất $\Leftrightarrow k_1$ nhỏ nhất. Với a, b đã

chọn thì : k_1 nhỏ nhất $\Leftrightarrow c$ lớn nhất $\Leftrightarrow c = 9$.

$$\text{Khi đó } k_1 = \frac{11a + b}{a + b + 9} = \frac{(a + b + 9) + 10a - 9}{a + b + 9} = 1 + \frac{10a - 9}{a + b + 9}.$$

Đặt $\frac{10a - 9}{a + b + 9} = k_2$, ta thấy : k_1 nhỏ nhất $\Leftrightarrow k_2$ nhỏ nhất.

Với a đã chọn thì : k_2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow b$ lớn nhất $\Leftrightarrow b = 9$.

Khi đó :

$$k_2 = \frac{10a - 9}{a + 18} = \frac{10(a + 18) - 189}{a + 18} = 10 - \frac{189}{a + 18}.$$

Ta thấy : k_2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{189}{a+18}$ lớn nhất $\Leftrightarrow a$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a=1$.

Như vậy k nhỏ nhất ứng với số $\overline{abc} = 199$. Khi đó k bằng :

$$\frac{199}{1+9+9} = \frac{199}{19} = 10\frac{9}{19}.$$

Chú ý. Nếu đề bài yêu cầu các chữ số a, b, c khác nhau thì ta tìm được $\overline{abc} = 189$, khi đó $k = \frac{189}{1+8+9} = 10,5$.

498.

Cách 1. Ta thấy : $112 : 5 = 22$ dư 2.

$$\text{Do đó : } 112 : 22 = 5 \text{ dư } 2$$

$$112 : 21 = 5 \text{ dư } 2 + 5 = 7$$

$$112 : 20 = 5 \text{ dư } 7 + 5 = 12$$

$$112 : 19 = 5 \text{ dư } 12 + 5 = 17.$$

Cách 2. Gọi số chia là k , số dư là r .

Ta có : $r = 112 - 5k$ và $0 \leq r < k$.

Do $r \geq 0$ nên $112 - 5k \geq 0 \Rightarrow 5k \leq 112$

$$\Rightarrow k \leq 112 : 5 = 22 \text{ (dư 2)}$$

Do $r < k$ nên $112 - 5k < k \Rightarrow 112 < 6k$

$$\Rightarrow k > 112 : 6 = 18 \text{ (dư 4)}$$

Như vậy $18 < k \leq 22$. Ta được :

k	19	20	21	22
r	17	12	7	2

499. Giải tương tự như bài 498.

Đáp số : Số chia là 52, số dư là 33.

500. Có bốn đáp số : $542 : 45 = 12$ dư 2 ; $542 : 44 = 12$ dư 14 ; $542 : 43 = 12$ dư 26 ; $542 : 42 = 12$ dư 38.

501. Gọi thừa số còn lại là b , ta có $a^a + b = 100$.

Do $a^a < 100$ nên $a \in \{1, 2, 3\}$. Mặt khác $a^a \cdot b > 1000$ mà $b < 100$ nên $a^a > 10$, tức là $a > 2$.

Vậy $a = 3$. Ta có $3^3 \cdot 73 = 1971$.

502. Gọi số kì thi từ năm thứ nhất đến năm thứ năm theo thứ tự là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , tổng số kì thi là S , ta có $a_5 = 3a_1, a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ và $S = 31$.

Xét khoảng giá trị của a_1 :

a) Nếu $a_1 \leq 2$ thì $a_5 \leq 6 \Rightarrow a_4 \leq 5, a_3 \leq 4, a_2 \leq 3$.

$$S \leq 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20 < 31, \text{ loại.}$$

b) Nếu $a_1 \geq 4$ thì $a_5 \geq 12, a_2 \geq 5, a_3 \geq 6, a_4 \geq 7$,

$$S \geq 4 + 5 + 6 + 7 + 12 = 34, \text{ loại.}$$

Vậy $a_1 = 3$, do đó $a_5 = 9$. Suy ra $a_2 + a_3 + a_4 = 19$. Ta đã có $a_4 < 9$.
Nếu $a_4 \leq 7$ thì $a_3 \leq 6, a_2 \leq 5$ nên $a_2 + a_3 + a_4 \leq 5 + 6 + 7 = 18 < 19$, loại.

Vậy $a_4 = 8$, năm học thứ tư có 8 kì thi.

503. Có hai đáp số : (0; 0) và (2; 2).

504. Gọi hai số phải tìm là a và b , ta có :

$$4(a + b) = ab \quad (1).$$

Nếu một trong hai số bằng 0 thì số kia bằng 0.

Nếu cả hai số khác 0 thì từ (1) ta có :

$$\frac{4(a+b)}{4ab} = \frac{ab}{4ab} \text{ hãy } \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{4}. \text{ Giải tương tự ví dụ 134.}$$

Đáp số : Có bốn cặp số : (0; 0), (5; 20), (6; 12), (8; 8).

505. Có bốn đáp số : $\frac{1}{7} + \frac{1}{42}, \frac{1}{8} + \frac{1}{24}, \frac{1}{9} + \frac{1}{18}, \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$.

506. Gọi hai phân số phải tìm là $\frac{1}{a}$ và $\frac{1}{b}$ ($a \leq b$), ta có :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Hiển nhiên ta có $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ nên $a > 2$.

Mặt khác, nếu $a \geq 5$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{11}{25} < \frac{1}{2}$, loại.

Lần lượt thay $a = 3, a = 4$ vào (1), ta được $b = 8, b = 5$.

Đáp số : Có hai cặp $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$ và $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{8}\right)$.

507. Gọi ba số tự nhiên phải tìm là a, b, c , giả sử $1 \leq a < b < c$, ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = n \quad (1) \text{ với } n \in \mathbb{N}.$$

Ta có $\frac{1}{a} \leq 1, \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3}$, nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\frac{5}{6}$, do đó $n = 1$.

Ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad (2)$$

Do $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ nên $\frac{1}{a} > \frac{1}{3}$ do đó $a < 3$. Mặt khác $\frac{1}{a} < 1$ nên $a > 1$. Vậy $a = 2$.

Thay vào (2) ta được $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ (3)

Lại tìm khoảng giá trị của b , ta được $b > 2$, $b < 4$, do đó $b = 3$. Từ đó $c = 6$.

Đáp số: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

508. Gọi bốn số tự nhiên phải tìm là a, b, c, d , ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$.

Trong bốn số a, b, c, d , không có số nào bằng 1, không có số nào lớn hơn hoặc bằng 3, do đó cả bốn số đều bằng 2.

509. Gọi ba số nguyên dương phải tìm là a, b, c , ta có $a + b + c = abc$.

Giả sử $a \leq b \leq c$ thì $a + b + c \leq 3c$, do đó $abc \leq 3c$. Do $c > 0$ nên $ab \leq 3$.

Xét ba trường hợp:

a) $ab = 3 \Rightarrow a = 1, b = 3$. Suy ra $c = 2$, loại vì trái với $b \leq c$.

b) $ab = 2 \Rightarrow a = 1, b = 2$. Suy ra $c = 3$.

c) $ab = 1 \Rightarrow a = 1, b = 1$. Suy ra $c = 0$, loại.

Vậy ba số phải tìm là 1, 2, 3.

510. Cách 1

Chia hai vế của bất đẳng thức $abc < ab + bc + ac$ cho số dương abc

được: $1 < \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (1)

Giả sử $a > b > c \geq 2$. Trong ba phân số $\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ thì $\frac{1}{c}$ lớn nhất nên $\frac{1}{c} > \frac{1}{3}$ do đó $c < 3$. Vậy $c = 2$.

Thay $c = 2$ vào (1) được: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$ (2)

Trong hai phân số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$, phân số $\frac{1}{b}$ lớn hơn nên: $\frac{1}{b} > \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$, do đó $b < 4$ mà $b > c = 2$, vậy $b = 3$.

Thay $b = 3$ vào (2) được: $\frac{1}{a} > \frac{1}{6}$. Do đó $a < 6$, mà $a > b = 3$ và a là số nguyên tố, vậy $a = 5$.

Vậy các số a, b, c phải tìm là 2, 3, 5 và các hoán vị của chúng.

Cách 2. Xét $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$ (1). Bộ ba số nguyên tố nhỏ nhất là 2, 3, 5
 thoả mãn $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} > 1$. Bộ ba số nguyên tố lớn hơn là 2, 3, 7 làm cho
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} < 1$. Do đó mọi bộ ba số nguyên tố lớn hơn 2, 3, 5 đều không thoả
 mãn (1).

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN SỐ HỌC

511. Đáp số : 1352, 1354, 1356, 1358.

512. Số thứ ba lớn hơn số thứ nhất :

$$64 - 56 = 8.$$

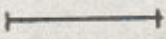
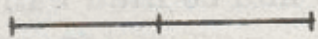
Số thứ nhất : $(78 - 8) : 2 = 35$.

Số thứ hai : $56 - 35 = 21$.

Số thứ ba : $78 - 35 = 43$.

513. Đáp số : 55 ; 57 ; 59.

514. Ta vẽ sơ đồ lúc số sách ngăn II gấp đôi số sách ngăn I (tức là số sách ở hai ngăn lúc sau) :

Ngăn I lúc sau :  } 120
 Ngăn II lúc sau : 

Tổng số sách ở hai ngăn lúc sau :

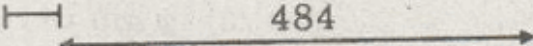
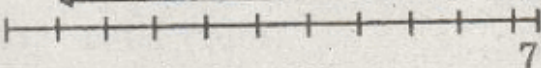
$$118 - 8 + 10 = 120 \text{ (cuốn)}$$

Số sách ở ngăn I lúc sau : $120 : 3 = 40$ (cuốn)

Số sách ở ngăn I lúc đầu : $40 + 8 = 48$ (cuốn)

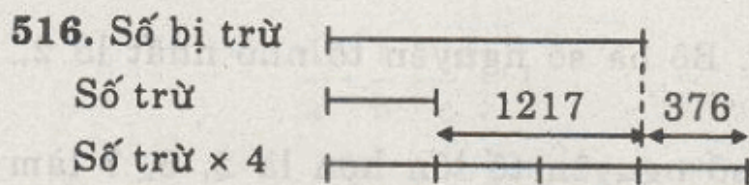
Số sách ở ngăn II lúc đầu : $118 - 48 = 70$ (cuốn)

515. Xóa đi chữ số 7 tận cùng của một số là trừ số đó đi 7 đơn vị rồi chia cho 10. Ta có sơ đồ :

Số còn lại :  484
 Số ban đầu : 

Số còn lại : $(484 - 7) : 9 = 53$.

Số ban đầu : 537.



Ba lần số trừ : $(1217 + 376) = 1593$.

Số trừ : $1593 : 3 = 531$.

Số bị trừ : $531 + 1217 = 1748$.

517. Chiều dài hơn chiều rộng 100m, còn tổng của chúng bằng 179m.

Đáp số : 139,5m và 39,5m.

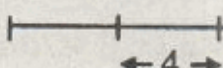
518. Nếu lừa chuyển cho ngựa một bao thì lừa và ngựa chở bằng nhau, vậy lừa chở nhiều hơn ngựa :

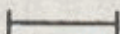
$$1 + 1 = 2 \text{ (bao)}$$

Nếu ngựa chuyển cho lừa một bao thì lừa sẽ chở hơn ngựa 2 bao nữa, khi đó lừa chở nhiều hơn ngựa :

$$2 + 2 = 4 \text{ (bao)}$$

Sơ đồ số bao lừa và ngựa chở lúc đó :

Lừa  Khi đó ngựa chở : 4 bao.

Ngựa  Lừa chở : $4 \cdot 2 = 8$ (bao).

Ban đầu ngựa chở : $4 + 1 = 5$ (bao)

Ban đầu lừa chở : $8 - 1 = 7$ (bao)

519. a) Tử và mẫu của phân số mới có hiệu bằng :

$$43 - 9 = 34, \text{ tỉ số bằng } \frac{1}{3}. \text{ Phân số mới là } \frac{17}{51} = \frac{1}{3}.$$

Đáp số : 8.

b) Tử và mẫu của phân số mới có tổng bằng :

$$43 + 9 = 52, \text{ tỉ số bằng } \frac{5}{8}. \text{ Phân số mới là } \frac{20}{32} = \frac{5}{8}.$$

Đáp số : 11.

520. *Đáp số :* $\frac{5}{12}$.

521. *Đáp số :* 475 và 71.

522. $2000 - 2 = 1998$ gấp 9 lần số phải tìm.

Đáp số : 222.

523. Số thứ nhất bằng : $\frac{9}{11} : \frac{6}{7} = \frac{21}{22}$ (số thứ hai).

Số thứ ba bằng : $\frac{9}{11} : \frac{2}{3} = \frac{27}{22}$ (số thứ hai).

Tổng của ba số bằng $\frac{70}{22}$ số thứ hai hay 210.

Đáp số : 63, 66, 81.

524. Vẽ sơ đồ lúc tuổi mẹ gấp ba tuổi con.

Đáp số : Tuổi mẹ : 37, tuổi con : 9.

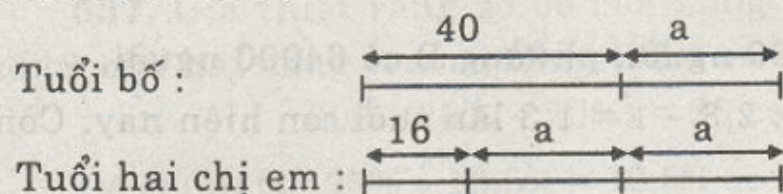
525. Vẽ sơ đồ lúc tuổi bố gấp ba tuổi con.

Đáp số : Sau 5 năm nữa thì tuổi bố gấp ba tuổi con.

526. Cách 1. Tổng số tuổi hai chị em năm 2000 :

$$11 + 5 = 16.$$

Khi bố tăng thêm bao nhiêu tuổi thì Mai và em Nam cũng tăng thêm bấy nhiêu tuổi, do đó tổng số tuổi tăng của hai chị em gấp đôi số tuổi tăng của bố. Ta có sơ đồ :



Từ sơ đồ, ta thấy số năm cần thiết để tuổi bố bằng tổng số tuổi hai chị em (biểu thị bởi a trên hình vẽ) là :

$$40 - 16 = 24 \text{ (năm).}$$

Lúc đó là năm : $2000 + 24 = 2024$.

(Khi đó tuổi bố : $40 + 24 = 64$;

tuổi Mai : $11 + 24 = 35$;

tuổi em Nam : $5 + 24 = 29$).

Cách 2. Năm 2000, chênh lệch giữa tuổi bố và tổng số tuổi hai chị em là :

$$40 - (11 + 5) = 24 \text{ (tuổi)}$$

Cứ mỗi năm, mỗi người tăng thêm một tuổi nên chênh lệch giữa tuổi bố và tổng số tuổi hai chị em giảm đi :

$$(1 + 1) - 1 = 1 \text{ (tuổi)}$$

Số năm để tuổi bố bằng tổng số tuổi hai chị em là :

$$24 : 1 = 24 \text{ (năm)}$$

Lúc đó là năm : $2000 + 24 = 2024$.

527. Trước hết ta tính xem đến năm nào thì tuổi mẹ bằng tổng số tuổi của hai con. Đó là năm 2017. Vậy từ năm 2018 trở đi thì tuổi mẹ ít hơn tổng số tuổi của hai con.

528. Anh 18 tuổi, em 15 tuổi.

529. Giả thiết rằng số dân phường A vẫn tăng 8000 người, còn số dân phường B tăng :

$8000 \cdot \frac{3}{2} = 12000$ người thì số dân phường B vẫn bằng $\frac{3}{2}$ số dân phường A hiện nay.

Theo đề bài, số dân phường A tăng 8000 người, số dân phường B tăng 4000 người nên số dân phường B bằng $\frac{4}{3}$ số dân phường A hiện nay.

Như vậy : $12000 - 4000 = 8000$ người bằng :

$$\frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6} \text{ số dân phường A hiện nay.}$$

Hiện nay phường A có 48000 người, phường B có 64000 người.

530. Hiện nay mẹ hơn con : $2,3 - 1 = 1,3$ lần tuổi con hiện nay. Còn 16 năm trước, mẹ hơn con :

$$7,5 - 1 = 6,5 \text{ lần tuổi con trước kia.}$$

Vì mẹ luôn hơn con một số tuổi không đổi nên 6,5 lần tuổi con trước kia bằng 1,3 lần tuổi con hiện nay, tức là tuổi con hiện nay gấp : $6,5 : 1,3 = 5$ lần tuổi con trước kia.

Do đó 4 lần tuổi con trước kia là 16 năm, tuổi con trước kia là 4, tuổi con hiện nay là : $4 + 16 = 20$, tuổi mẹ hiện nay là : $20 \cdot 2,3 = 46$.

Mẹ hơn con : $46 - 20 = 26$ tuổi. Lúc mẹ gấp đôi tuổi con thì con 26 tuổi, tức là : $26 - 20 = 6$ năm sau thì tuổi mẹ gấp đôi tuổi con.

531. Chó 8 tuổi. Mèo 4 tuổi.

532. Giả sử khi xếp 15 học sinh một hàng cũng được số hàng như khi xếp 12 học sinh một hàng thì cần phải thêm 4 hàng nữa, tức là thêm :

$$15 \cdot 4 = 60 \text{ (học sinh).}$$

Số học sinh ở mỗi hàng chênh lệch trong hai trường hợp :

$$15 - 12 = 3 \text{ (học sinh)}$$

Số hàng khi xếp hàng 12 :

$$60 : 3 = 20 \text{ (hàng)}$$

Số học sinh :

$$20 \cdot 12 + 5 = 245 \text{ (học sinh)}$$

533. Đáp số : 8 thuyền, 35 học sinh.

534. Giả sử An mua số hàng gấp đôi, Bích mua số hàng gấp ba.

Đáp số : Giá một quyển vở là 2500 đồng.

Giá một bút chì là 1500 đồng.

535. Giả sử trong mỗi phút, máy II bơm số nước bằng máy I thì trong 50 phút cả hai máy bơm được :

$$21000 - 50 \cdot 20 = 20000 \text{ (lít)}$$

Trong mỗi phút, máy bơm I bơm được :

$$20000 : 50 = 400 \text{ (lít)}$$

Trong mỗi phút, máy bơm II bơm được :

$$400 + 50 = 450 \text{ (lít)}$$

536. Hãy giả sử trong 5 giờ sau tổ cũng may áo.

Đáp số : 1200 áo, 600 quần.

537. Giả thiết rằng số bò của nông trường II cũng tăng 25% thì tổng số bò của hai nông trường tăng thêm so với mức tăng thực tế là :

$$500 \cdot (25\% - 20\%) = 25 \text{ con.}$$

Đó chính là : $25\% - 12,5\% = 12,5\%$ số bò của nông trường II năm trước.

Vậy nông trường II năm trước có :

$$25 : \frac{12,5}{100} = 200 \text{ con bò.}$$

Nông trường I năm trước có : 300 con bò.

538. Có 10 quả quýt, 7 quả cam.

539. Trước hết tính số học sinh của lớp. Ta thấy :

350 chia cho 8, được 43, còn dư ;

$$350 : 7 = 50.$$

Do đó số học sinh từ 44 đến 50. Do số học sinh chia hết cho 6 nên số học sinh là 48 người.

Giải tiếp bài toán bằng phương pháp giả thiết tạm, ta tìm được : 14 học sinh được điểm 8 ; 34 học sinh được điểm 7.

540. Trước hết tính số tổ của cả khối. Ta thấy :

366 chia cho 10, được 36, còn dư ;

366 chia cho 9, được 40, còn dư.

Do đó số tổ từ 37 đến 40. Do số tổ chia hết cho 8 nên số tổ là 40 tổ.

Giải tiếp bài toán bằng phương pháp giả thiết tạm, ta tìm được :

Số tổ có 9 người là 34 tổ.

Số tổ có 10 người là 6 tổ.

• 541. Đáp số: 17 trận thắng, 8 trận hoà.

542. a) Giả sử đội trả lời đúng cả 20 câu thì được :

$$5 \cdot 20 = 100 \text{ (điểm)}$$

So với đề bài thì số điểm tăng thêm :

$$100 - 52 = 48 \text{ (điểm)}$$

Mỗi câu trả lời sai bị hụt điểm so với trả lời đúng :

$$5 + 1 = 6 \text{ (điểm)}$$

Số câu trả lời sai : $48 : 6 = 8$ (câu).

Số câu trả lời đúng : $20 - 8 = 12$ (câu).

b) 42 sản phẩm đúng quy cách.

543. Giả thiết rằng tất cả 22 ghế đều là ghế bốn chân, thế thì số chân ghế là :

$$4 \cdot 22 = 88 \text{ (chân)}$$

So với đề bài thì hụt đi :

$$100 - 88 = 12 \text{ (chân)}$$

Để không hụt đi, ta thay các ghế bốn chân bởi hai loại ghế kia theo quy luật : thay 2 ghế sáu chân và 1 ghế ba chân cho 3 ghế bốn chân. Khi đó số ghế không thay đổi, quan hệ số ghế sáu chân gấp đôi số ghế ba chân được đảm bảo, mỗi lần thay số chân ghế tăng thêm :

$$6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = 3 \text{ (chân)}$$

Số lần thay : $12 : 3 = 4$ (lần)

Số ghế ba chân : $1 \cdot 4 = 4$ (ghế)

Số ghế sáu chân : $4 \cdot 2 = 8$ (ghế)

Số ghế bốn chân : $22 - 4 - 8 = 10$ (ghế)

544. Giả sử 130 tờ đều là tờ 2000 đồng.

Đáp số: 18 tờ 5000 đồng, 90 tờ 1000 đồng, 22 tờ 2000 đồng.

545. Có 6 gói loại năm lạng, 7 gói loại hai lạng, 12 gói loại một lạng.

546. Người thứ nhất làm 4 giờ, người thứ hai làm 5 giờ, tổng cộng làm được 450 dụng cụ.

547. Thổi tích 25 gói bánh bằng thổi tích 30 gói kẹo, tức là thổi tích 5 gói bánh bằng thổi tích 6 gói kẹo.

Giả sử hộp đựng cả 25 gói bánh thì hụt đi :

$$28 - 25 = 3 \text{ (gói)}.$$

Mỗi lần thay 5 gói bánh bằng 6 gói kẹo thì tổng thể tích các gói không đổi, còn số gói tăng thêm 1 gói.

Như vậy phải thay: $3 : 1 = 3$ (lần).

Số gói kẹo có : $6 \cdot 3 = 18$ (gói).

Số gói bánh có : 10 gói.

Giá một gói bánh : $36000 : 10 = 3600$ (đồng)

Giá một gói kẹo : $36000 : 18 = 2000$ (đồng)

548. Đáp số: 5 ngày.

549. Đáp số: 24 ngày.

550. Máy I làm một mình xong công việc trong 60 giờ, máy II trong 15 giờ, máy III trong 7 giờ rưỡi.

551. Đặc điểm của bài toán này là số tuần : 2, 4, 6 lập thành một dãy cộng.

Gọi số cỏ một con bò ăn trong một tuần là 1 gánh (lấy làm đơn vị quy ước).

9 con bò trong 2 tuần ăn hết : $1 \cdot 9 \cdot 2 = 18$ (gánh), đó là số cỏ của cánh đồng trong 2 tuần.

6 con bò trong 4 tuần ăn hết : $1 \cdot 6 \cdot 4 = 24$ (gánh), đó là số cỏ của cánh đồng trong 4 tuần.

Số cỏ chênh lệch : $24 - 18 = 6$ (gánh) là số cỏ mọc thêm trong :

$$4 - 2 = 2 \text{ (tuần)}.$$

Số cỏ của cánh đồng trong 6 tuần bằng số cỏ trong 4 tuần cộng với số cỏ mọc thêm trong 2 tuần nên bằng :

$$24 + 6 = 30 \text{ (gánh)}.$$

Số con bò ăn hết số cỏ này trong 6 tuần là :

$$30 : 6 = 5 \text{ (con)}.$$

(Trong bài toán này ta tính được số cỏ có sẵn của mỗi cánh đồng là 12 gánh và số cỏ mọc thêm sau 2 tuần là 6 gánh).

552. Cách 1. Số trứng còn lại sau khi người thứ ba, người thứ hai, người thứ nhất mua lần lượt là 4, 12, 28 quả. Số trứng là 60 quả, bán được 24000 đồng.

Cách 2. Chứng tỏ rằng người trước mua số trứng gấp đôi người sau. Do đó người thứ tư, người thứ ba, người thứ hai, người thứ nhất theo thứ tự mua 4, 8, 16, 32 quả. Số trứng tổng cộng : 60 quả.

553. a) Người thắng cuộc cần để lại 5 bi cho đối thủ của mình. Bao giờ người đó cũng có cách để số bi lúc sau ít hơn lúc trước là : $1 + 4 = 5$, do đó người ấy cần để lại cho đối thủ của mình : 5, 10, 15, 20... bi, tức là số bi để lại là bội của 5.

Người đi sau sẽ thắng cuộc nếu nắm được quy luật chơi : khi người đi trước lấy k viên bi ($1 \leq k \leq 4$) thì người đi sau lấy $5 - k$ viên bi.

b) Người thắng cuộc cần để lại 11 bi cho đối thủ của mình. Bao giờ người đó cũng có cách để số bi lúc sau ít hơn lúc trước là : $5 + 10 = 15$, do đó người ấy cần để lại cho đối thủ của mình số bi là : 11, 26 (là $11 + 15$), 41 (là $11 + 15.2$), 56 (là $11 + 15.3$), 71 (là $11 + 15.4$), 86 (là $11 + 15.5$).

Người đi sau thắng cuộc bằng cách : Người đi trước lấy k viên ($5 \leq k \leq 10$), người đi sau lấy $14 - k$ viên. Khi đó có 86 viên bi. Tiếp theo, nếu người đi trước lấy m viên bi thì người đi sau lấy $15 - m$ viên, và số bi còn lại lần lượt là 71, 56, 41, 26, 11. Lúc này người đi trước lấy số bi bất kì thì người đi sau lấy nốt số còn lại.

c) Người đi trước thắng bằng cách : lấy 5 bi, khi đối thủ lấy tiếp k bi thì người đi trước lấy $15 - k$ bi, lần lượt để lại cho người kia 80, 65, 50, 35, 20, 5 bi.

554. Có 6 lớp, mỗi lớp trồng 35 cây.

555. Từ điều kiện $\overline{ab} - \overline{ba} = 18$, ta được : $a - b = 2$. Các số thoả mãn điều kiện này là : 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97.

$$\text{Do } \overline{ab} = \frac{8}{3} ab \Rightarrow 3. \overline{ab} : 8 \Rightarrow \overline{ab} : 8.$$

Trong các số trên chỉ có 64 chia hết cho 8.

$$\text{Thử lại : } 64 - 46 = 18, 64 : (6.4) = \frac{8}{3}.$$

556. Gọi năm sinh phải tìm là $\overline{abba}$. Ta có $a + b + b + a = 10$ nên $a + b = 5$. Ta phải có $a = 1$, do đó $b = 4$. Vậy năm sinh phải tìm là 1441.

Chú ý : Tên của hai nhà toán học nói trên được giới thiệu trong *Bài đọc thêm* ở cuối sách.

557. Đáp số: 198.

558. a) 4 ; 2 ; 1.

b) Gọi ba chữ số phải tìm là a, b, c ($a > b > c > 0$), ta tìm được : $a + b + c = 13$, $a - c = 5$.

Đáp số : 7 ; 4 ; 2.

c) Gọi x, y, z là các số ghi trên ba tờ bìa, ta tìm được :

$$x + y + z = 148.$$

Đáp số : $\overline{ab} = 46$.

559. Dễ thấy x là số có hai chữ số. Gọi $x = \overline{ab} = 10a + b$, $y = a + b$. Có hai trường hợp đối với z : nếu $y = a + b \leq 9$ thì $z = a + b$, nếu $y = a + b \geq 10$ thì $z = a + b - 9$.

a) Trường hợp $a + b \leq 9$ thì $(10a + b) + (a + b) + (a + b) = 60$. Suy ra $4a + b = 20$.

Ta thấy $b : 4$. Thay $b = 0, 4, 8$, tương ứng ta được $a = 5, 4, 3$. Loại trường hợp $b = 8, a = 3$ vì $a + b > 9$.

b) Trường hợp $a + b \geq 10$ thì $(10a + b) + (a + b) + (a + b - 9) = 60$ suy ra $4a + b = 23$. Ta được $a = 4, b = 7$.

Kết luận: có ba số 44, 47, 50 thỏa mãn đề bài.

560. Viết các bội của 18, 23, 28, 33, 38 mà nhỏ hơn 100, rồi chọn lấy những số có tổng bằng 100. Có ba trường hợp:

a) $72 + 28$: Cần bắn vào các vòng 18, 18, 18, 18, 28.

b) $54 + 46$: Cần bắn vào các vòng 18, 18, 18, 23, 23.

c) $18 + 36 + 46$: Cần bắn vào các vòng 18, 18, 18, 23, 23 (trùng với cách bắn trên)

Như vậy có hai cách bắn 5 phát tên vào các vòng nói trên.

561. Anh Việt sinh năm 1972, năm 1991 tròn 19 tuổi.

Bác Nam 19 tuổi năm $\overline{19ab}$. Do $1 + 9 + a + b = 19$ nên $a + b = 9$. Vì kháng chiến chống Pháp từ năm 1946 đến năm 1954 nên $a = 5, b = 4$. Bác Nam sinh năm: $1954 - 19 = 1935$.

TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

562. a) Gọi C là điểm chính giữa quãng đường AB . Trên quãng đường CB , vận tốc dự định là 40 km/h, vận tốc đã đi là 50 km/h. Biết tỉ số thời gian dự định và đã đi trên CB (là 5 : 4), biết hiệu thời gian (là 30 phút), ta tính được thời gian đã đi trên CB (là 2 giờ). Từ đó tính được quãng đường CB và AB .

Đáp số: $AB = 200$ km.

b) **Đáp số:** 180 km.

563. Gọi thời gian xe đi với vận tốc 45 km/h là t_1 , thời gian xe đi với vận tốc 55 km/h là t_2 . Ta tính được: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{55}{45} = \frac{11}{9}$ và $t_1 - t_2 = 10 + 6 = 16$ (ph).

Từ đó tính được t_2 và quãng đường AB .

Đáp số: $AB = 66 \text{ km}$.

564. Ta có $\frac{v_1}{v_2} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$ nên $\frac{t_1}{t_2} = \frac{5}{4}$.

Ta tính được $t_1 - t_2 = 20 + 16 = 36 \text{ (ph)}$.

Từ đó tính được t_1 (là 3h), AB (là 120 km),

t_3 (là 2h 40ph), v_3 (là 45 km/h).

565. Trong 2 giờ, Long đi: $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$ quãng đường.

Trong 1 giờ, Long đi: $\frac{7}{12} : 2 = \frac{7}{24}$ quãng đường.

Long đi $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ quãng đường trong:

$$\frac{1}{4} : \frac{7}{24} = \frac{6}{7} \text{ (h)}.$$

Long đến B lúc $11\frac{6}{7}$ giờ.

566.



Gọi D là địa điểm trên BC mà $BD = AB$ thì $DC = 30 \text{ km}$.

Thời gian người đó đi trên DC:

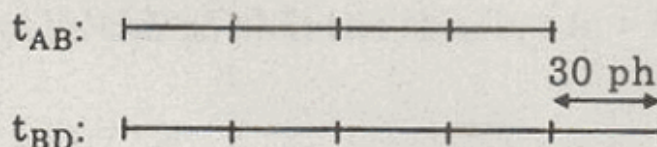
$$\frac{30 \cdot 60}{20} = 90 \text{ (ph)}$$

Thời gian đi trên BD nhiều hơn thời gian đi trên AB:

$$2\text{h} - 90 \text{ ph} = 30 \text{ ph}$$

Trên quãng đường AB và BD bằng nhau, thời gian tỉ lệ nghịch với vận tốc:

$$\frac{v_{AB}}{v_{BD}} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{t_{AB}}{t_{BD}} = \frac{4}{5}$$



Thời gian đi trên AB: $30 \cdot 4 = 120 \text{ (ph)} = 2 \text{ (h)}$.

Quãng đường AB: $25 \cdot 2 = 50 \text{ (km)}$

Quãng đường BC: $50 + 30 = 80 \text{ (km)}$

567. Gọi P và Q là các địa điểm mà Phúc và Quang khởi hành.

Trong 72 phút, Phúc đi được $\frac{4}{7}$ quãng đường PQ nên đi cả quãng đường trong :

$$72 : \frac{4}{7} = 126 \text{ (ph).}$$

Phúc đi nửa quãng đường PQ trong :

$$126 : 2 = 63 \text{ (ph)}$$

Trong 72 phút, Quang đi $\frac{3}{7}$ quãng đường QP nên đi cả quãng đường trong :

$$72 : \frac{3}{7} = 168 \text{ (ph).}$$

Quang đi nửa quãng đường QP trong :

$$168 : 2 = 84 \text{ (ph)}$$

Muốn gặp Quang chính giữa đường, Phúc phải khởi hành sau Quang :

$$84 - 63 = 21 \text{ (ph).}$$

568. a) Xe lửa đi 210m trong : $30 - 16 = 14 \text{ (s)}$

$$\text{Vận tốc xe lửa : } 210 : 14 = 15 \text{ (m/s)}$$

$$\text{Chiều dài xe lửa : } 15.16 = 240 \text{ (m)}$$

b) $18\text{km/h} = 5 \text{ m/s}$; $54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$.

Trong 16 giây, người đi xe đạp đi được :

$$5.16 = 80 \text{ (m)}$$

Trong 16 giây, xe lửa đi được :

$$15.16 = 240 \text{ (m)}$$

Đó là chiều dài xe lửa cộng với 80 mét. Chiều dài xe lửa :

$$240 - 80 = 160 \text{ (m)}$$

569. a) Đáp số: Vận tốc xe lửa là 16 m/s .

b) Đáp số: 4m/s .

570. Lúc người I đến đích thì người III chạy được :

$$2000 - 290 = 1710 \text{ (m)}$$

và người II chạy được :

$$2000 - 200 = 1800 \text{ (m).}$$

Tỉ số quãng đường (cũng là tỉ số vận tốc) của người III và người II :

$$\frac{1710}{1800} = \frac{19}{20}.$$

Khi người II chạy 200 m cuối cùng thì người III chạy được :

$$200 \cdot \frac{19}{20} = 190 \text{ (m)}.$$

Lúc người II đến đích thì người III còn cách đích :

$$290 - 190 = 100 \text{ (m)}.$$

571. Gọi quãng đường Đạt đi bộ trong 1 phút là 1 đoạn thì quãng đường Đạt chạy trong 1 phút là 2 đoạn.

Hôm trước, Đạt chạy 8 phút và đi bộ 4 phút được :

$$8 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 20 \text{ (đoạn)}$$

Hôm sau, quãng đường Đạt chạy bằng quãng đường đi bộ và bằng 10 đoạn (vì thời gian đi bộ gấp đôi thời gian chạy, còn vận tốc đi bộ bằng nửa vận tốc chạy).

Do đó hôm sau, thời gian đi bộ là : $10:1 = 10$ (ph), thời gian chạy là : $10:2 = 5$ (ph), tổng cộng cần : $10 + 5 = 15$ (ph).

572. Tỉ số thời gian đi AB của hai người là: $45 : 40 = \frac{9}{8}$, hiệu thời gian đi AB của họ là 30 phút.

Đáp số : 12 giờ 30 phút.

573. Đáp số : 14km/h và 10km/h.

574. Gọi địa điểm hai người gặp nhau là C.

Thời gian người I đi AC : $14 - 7 = 7$ (h)

Thời gian người II đi BC : $14 - 10 = 4$ (h)

Giả sử trong 4 giờ, người II cũng đi với vận tốc như người I thì lúc 14 giờ hai người còn cách nhau :

$$3 \cdot 4 = 12 \text{ (km)}$$

Trong $7 + 4 = 11$ (giờ), người I đi được :

$$177 - 12 = 165 \text{ (km)}$$

Vận tốc người I : $165 : 11 = 15$ (km/h)

Vận tốc người II : $15 + 3 = 18$ (km/h)

575. Giả sử từ C, ô tô vẫn đi với vận tốc cũ thì sau 2 giờ, ô tô còn cách B :

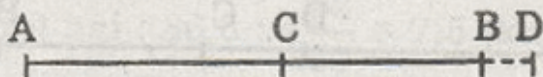
$$5 \cdot 2 = 10 \text{ (km)}$$

Như vậy với vận tốc cũ, trong $3 + 2 = 5$ (h), ô tô đi được :

$$235 - 10 = 225 \text{ (km)}$$

Vận tốc cũ : $225 : 5 = 45$ (km/h).

576. (h.20)



Hình 20

Giả sử từ C, ô tô vẫn đi với vận tốc cũ thì sau 3 giờ, ô tô đi đến D, quá B :

$$5 \cdot 3 = 15 \text{ (km)}$$

Quãng đường AC dài hơn CD :

$$55 - 15 = 40 \text{ (km)}$$

Với cùng vận tốc cũ, ô tô đi 4 giờ nhiều hơn đi 3 giờ là 40 km nên vận tốc cũ là :

$$40 : (4 - 3) = 40 \text{ (km/h)}$$

Quãng đường AB :

$$40 \cdot 4 + (40 - 5) \cdot 3 = 265 \text{ (km)}$$

577. a) $1\frac{1}{11}$ giờ (hay 1 giờ 5 phút 27 giây).

b) Giữa hai lần hai kim đồng hồ trùng nhau, chúng tạo với nhau góc vuông hai lần. Trong một ngày đêm, hai kim đồng hồ trùng nhau : $24 : 1\frac{1}{11} = 22$ lần.

Do đó, chúng tạo với nhau góc vuông : $2 \cdot 22 = 44$ (lần).

578. Quãng đường xe thứ nhất đã đi :

$$(43,8 + 11,4) : 2 = 27,6 \text{ (km)}$$

Quãng đường xe thứ hai đã đi :

$$(43,8 - 11,4) : 2 = 16,2 \text{ (km)}$$

Bạn đọc giải tiếp được : Vận tốc xe thứ nhất là 36,8 km/h ; vận tốc xe thứ hai là 48,6 km/h.

579. Thời gian xe lửa đi từ B đến C (nhà Tùng) rồi đi từ C đến B là :

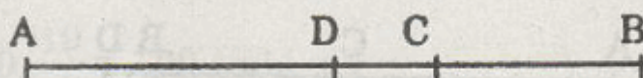
$$16 - 5 = 11 \text{ (h)}$$

Thời gian xe lửa đi BC là : $11 : 2 = 5,5$ (h).

Xe lửa đi qua nhà Tùng lúc :

$$5 + 5,5 = 10,5 \text{ (h)} = 10 \text{ h } 30 \text{ ph.}$$

580. Giả sử có một người thứ hai khởi hành từ B lúc 7 giờ ngày 1-6 và đến A lúc 8 giờ 20 phút. Người thứ hai gặp anh Minh (gọi là người thứ nhất) tại C (h.21), lúc hai người gặp nhau là thời điểm phải tìm.



Hình 21

Vận tốc người thứ nhất : $20 : (8 - 6) = 10 \text{ km/h}$.

Vận tốc người thứ hai : $20 : (8\frac{1}{3} - 7) = 15 \text{ km/h}$.

Từ 6 giờ đến 7 giờ, người thứ nhất đi được quãng đường AD dài 10 km, còn lại DB = $20 - 10 = 10 \text{ (km)}$.

Thời gian để hai người gặp nhau :

$$\frac{10}{10 + 15} = \frac{2}{5} \text{ (h)} = 24 \text{ (ph)}.$$

Lúc đó là 7 giờ 24 phút.

Quãng đường AC dài :

$$10 + 10 \cdot \frac{2}{5} = 14 \text{ (km)}.$$

581. Trong một phút, xe I đi được $\frac{1}{60}$ quãng đường, xe II đi được $\frac{1}{40}$ quãng đường.

Cứ một phút, xe II đi nhiều hơn xe I :

$$\frac{1}{40} - \frac{1}{60} = \frac{1}{120} \text{ (quãng đường)}$$

Trong 10 phút, xe I đi được:

$$\frac{1}{60} \cdot 10 = \frac{1}{6} \text{ (quãng đường)}$$

Thời gian để xe II đuổi kịp xe I :

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{120} = 20 \text{ (ph)}.$$

582. Gọi địa điểm hai người gặp nhau là C. Thời gian người thứ nhất đi AC : $9\text{h} - 6\text{h} = 3\text{h}$.

Thời gian người thứ hai đi BC : $9\text{h} - 7\text{h } 8\text{ph} = 1\text{h } 52\text{ph}$.

Giả sử người thứ nhất đi với vận tốc như người thứ hai thì lúc 9 giờ, người đó còn cách người thứ hai là :

$$2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ (km)}.$$

Như vậy trong : $3\text{h} + 1\text{h } 52\text{ph} = 4\text{h } 52\text{ph}$, người thứ hai đi được :

$$44 - 7,5 = 36,5 \text{ (km)}.$$

$$\text{Vận tốc người thứ hai : } 36,5 : 4 \frac{52}{60} = 7,5 \text{ (km/h)}.$$

$$\text{Vận tốc người thứ nhất : } 7,5 + 2,5 = 10 \text{ (km/h)}.$$

583. Gọi chỗ An gặp Bắc là C và chỗ An chia tay Bắc để trở lại B là D thì CD dài 3,75 km.

$$\text{Thời gian An đi CD và DC là } 57 \text{ ph} = \frac{19}{20} \text{ h}.$$

$$\text{Thời gian An đi DC với vận tốc } 8 \frac{1}{3} \text{ km/h là :}$$

$$3 \frac{3}{4} : 8 \frac{1}{3} = \frac{9}{20} \text{ (h)}.$$

Thời gian An đi CD với vận tốc bằng vận tốc của Bắc :

$$\frac{19}{20} - \frac{9}{20} = \frac{1}{2} \text{ (h)}.$$

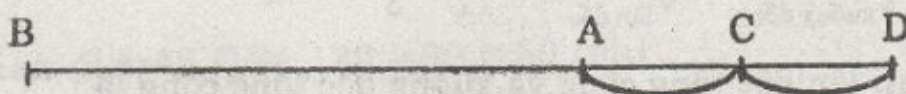
$$\text{Vận tốc của Bắc : } 3,75 : \frac{1}{2} = 7,5 \text{ (km/h)}.$$

584. Tính hiệu của vận tốc xuôi và vận tốc ngược (6km/h) và tỉ số của hai vận tốc đó $\left(\frac{3}{2}\right)$.

Đáp số : AB = 36 km.

585. **Đáp số :** 16 giờ.

586. Chú ý rằng vận tốc khi bơi xuôi bằng vận tốc khi bơi ngược cộng với hai lần vận tốc dòng sông (h.22).



Hình 22

Khi anh Thành bơi ngược dòng 20 phút từ A (cầu Long Biên) đến B thì bình nước trôi từ A đến C.

Khi anh bơi xuôi dòng 20 phút từ B thì bình nước trôi tiếp từ C đến D (CD = AC), còn anh cũng đến D vì quãng đường bơi xuôi 20 phút bằng quãng đường bơi ngược 20 phút cộng thêm hai lần quãng đường bình nước trôi 20 phút.

Vậy thời gian bình nước trôi từ A đến D (dài 2km) bằng $\frac{2}{3}$ giờ, vận tốc

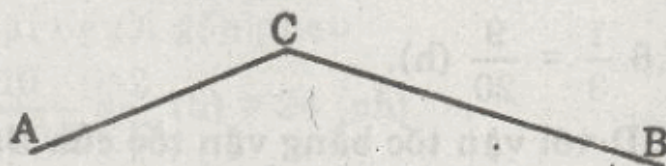
dòng sông bằng : $2 : \frac{2}{3} = 3$ (km/h).

587. Gọi C là địa điểm cách B 21 km, Thời gian tổng cộng đi CB và BC là : $42 : 18 = 2\frac{1}{3}$ (h).

Thời gian tổng cộng đi AC và CA là : $4\frac{1}{6} - 2\frac{1}{3} = 1\frac{5}{6}$ (h).

Từ đó tìm được quãng đường AC là 15 km, quãng đường AB là 36 km.

588. (h.23)



Hình 23

Gọi quãng đường lên dốc lúc đi là AC, quãng đường xuống dốc lúc đi là CB.

Cả đi lẫn về, quãng đường lên dốc tổng cộng là :

$$AC + BC = AB.$$

Cả đi lẫn về, quãng đường xuống dốc tổng cộng là :

$$CB + CA = AB.$$

Quãng đường lên dốc tổng cộng bằng quãng đường xuống dốc tổng cộng nên :

$$\frac{t_{\text{lên dốc}}}{t_{\text{xuống dốc}}} = \frac{v_{\text{xuống dốc}}}{v_{\text{lên dốc}}} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

Tổng thời gian lên dốc tổng cộng và xuống dốc tổng cộng là :

$$1\text{h } 35\text{ph} + 1\text{h } 45\text{ph} = 200 \text{ (ph)}$$

Thời gian xuống dốc tổng cộng :

$$\frac{200.3}{8} = 75 \text{ (ph)}.$$

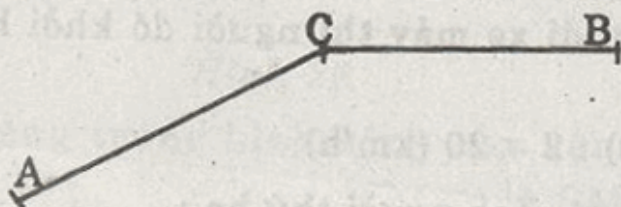
Quãng đường xuống dốc tổng cộng (tức là quãng đường AB) :

$$\frac{20.75}{60} = 25 \text{ (km)}.$$

Các cách giải khác. Xem ví dụ 150.

589. Đáp số : 72 km.

590. (h.24)



Hình 24

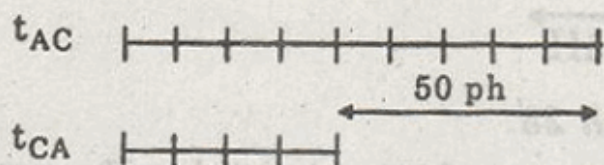
Gọi quãng đường lên dốc lúc đi là AC, khi đó CA là quãng đường xuống dốc lúc về.

Hiệu giữa thời gian lên dốc và xuống dốc là :

$$2\text{h} - 1\text{h } 10\text{ph} = 50 (\text{ph})$$

Trên cùng một quãng đường, thời gian tỉ lệ nghịch với vận tốc nên :

$$\frac{v_{AC}}{v_{CA}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{t_{AC}}{t_{CA}} = \frac{9}{4}$$



$$\text{Thời gian đi trên AC} : \frac{50.9}{5} = 90 (\text{ph})$$

$$\text{Quãng đường AC} : \frac{8.90}{60} = 12 (\text{km})$$

$$\text{Thời gian đi trên CB} : 120 - 90 = 30 (\text{ph})$$

$$\text{Quãng đường CB} : \frac{12.30}{60} = 6 (\text{km})$$

$$\text{Quãng đường AB} : 12 + 6 = 18 (\text{km})$$

591. Chú ý rằng vận tốc 12km/h gấp rưỡi 8km/h, vận tốc 30km/h gấp rưỡi 20km/h.

Giả sử trong 3h 30ph lúc đi, người đó đi với vận tốc 12km/h thì đi được quãng đường AC + 1,5CB, dài : $12.3,5 = 42 (\text{km})$.

Giả sử trong 1h 36ph lúc về, người đó đi với vận tốc 30km/h thì đi được quãng đường BC + 1,5 CA dài : $30.1\frac{3}{5} = 48 (\text{km})$.

Vậy quãng đường : $42 + 48 = 90 (\text{km})$ là 2,5 (AC + CB) hay 2,5 AB.

Quãng đường AB dài : $90 : 2,5 = 36$ (km).

592. Đáp số: 75 km.

593. Giả sử có một người thứ ba luôn luôn ở vị trí chính giữa hai người đi xe đạp và người đi xe máy thì người đó khởi hành từ A lúc 7 giờ và đi với vận tốc :

$$(12 + 18) : 2 = 20 \text{ (km/h)}$$

Lúc 7 giờ 30 phút, ô tô cách người thứ ba :

$$20. (7\text{h } 30\text{ph} - 7\text{h}) = 10 \text{ (km)}$$

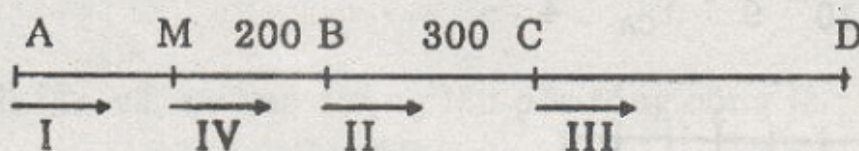
Thời gian để ô tô đuổi kịp người thứ ba :

$$\frac{10.60}{35 - 20} = 40 \text{ (ph)}$$

Ô tô ở vị trí chính giữa người đi xe đạp và người đi xe máy lúc :

$$7\text{h } 30\text{ph} + 40\text{ph} = 8\text{h } 10\text{ph}.$$

594. (h.25).



Hình 25

Giả sử có một người thứ tư luôn luôn ở vị trí chính giữa người thứ nhất (đi từ A) và người thứ hai (đi từ B) thì người đó khởi hành cùng lúc với hai người trên từ M (chính giữa AB) và đi với vận tốc :

$$(30 + 50) : 2 = 40 \text{ (m/ph)}$$

Hãy tính thời gian để người thứ tư gặp người thứ ba.

Đáp số: 25 phút.

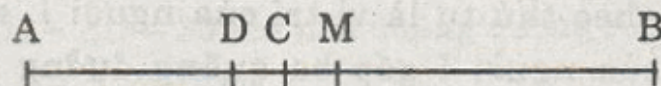
595. Giả sử có một người thứ tư luôn luôn ở vị trí cách đều người thứ nhất và người thứ hai thì người thứ tư khởi hành từ A đi về phía B với vận tốc bằng trung bình cộng của vận tốc hai người này (vì vận tốc người thứ tư lớn hơn vận tốc người thứ nhất bao nhiêu thì phải nhỏ hơn vận tốc người thứ hai bấy nhiêu). Như vậy vận tốc người thứ tư bằng :

$$(30 + 40) : 2 = 35 \text{ (km/h)}.$$

Thời điểm người thứ tư gặp người thứ ba là thời điểm phải tìm.

Đáp số: 8 giờ 40 phút.

596. (h.26) Lúc 7 giờ 6 phút, xe I ở M (chính giữa AB), xe II ở C (cách M là 9 phút đi), xe III ở D (cách M là 24 phút đi).



Hình 26

Do vận tốc xe II bằng trung bình cộng của vận tốc hai xe kia nên $AM + AD = 2AC$, do đó $AM - AC = AC - AD$, tức là $CM = CD$.

Quãng đường CM :

$$40 \cdot \frac{9}{60} = 6 \text{ (km)}$$

Quãng đường DM :

$$6 \cdot 2 = 12 \text{ (km)}$$

$$\text{Vận tốc xe III : } 12 : \frac{24}{60} = 30 \text{ (km/h)}$$

$$\text{Vận tốc xe I : } 40 \cdot 2 - 30 = 50 \text{ (km/h)}$$

Thời gian xe I đi AM (cũng là thời gian xe II đi AC) :

$$\frac{CM}{v_1 - v_2} = \frac{6}{50 - 40} = \frac{6}{10} \text{ (giờ)} = 36 \text{ (ph)}.$$

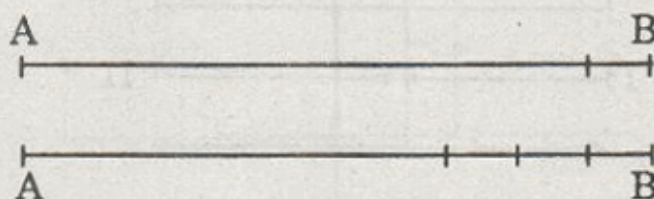
Ba xe khởi hành từ A lúc :

$$7\text{h } 6\text{ph} - 36\text{ph} = 6\text{h } 30\text{ph}.$$

597. Cách 1. Giả thiết rằng có một người thứ ba phải đi quãng đường gấp ba và với vận tốc gấp ba so với người thứ hai. Xem ví dụ 137.

Cách 2 (h.27)

Trong cùng một thời gian, người thứ hai đi nhiều hơn người thứ nhất là hai đoạn nhỏ do vận tốc người thứ hai hơn vận tốc của người thứ nhất là : $14 - 10 = 4 \text{ (km/h)}$.



Hình 27

Cũng trong thời gian ấy, muốn đi nhiều hơn người thứ nhất một đoạn nhỏ nữa (tức là đến B), người thứ hai phải đi tăng vận tốc thêm :

$$4 : 2 = 2 \text{ (km/h)} \text{ tức là bằng : } 14 + 2 = 16 \text{ (km/h)}.$$

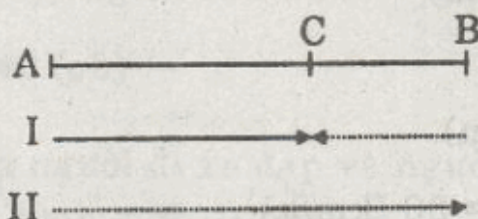
$$\text{Thời gian phải tìm : } 40 : 16 = 2,5 \text{ (h)} = 2\text{h}30\text{ph}.$$

Cách 3. Gọi C, D theo thứ tự là vị trí của người I, người II lúc quãng đường còn lại đến B của người I gấp ba quãng đường còn lại đến B của người II, ta có $CB = 3DB$.

Lần lượt tính được : $AC = \frac{5}{7}AD$, $CD = \frac{2}{7}AD$, $DB = \frac{1}{7}AD = \frac{1}{8}AB = 5 \text{ km}$,
 $AD = 35 \text{ km}$.

Thời gian phải tìm : $35 : 14 = 2,5 \text{ (giờ)}$.

598. (h.28)



Hình 28

Trong 40 phút, cả hai người đi được hai lần quãng đường AB hay :

$$\frac{(12 + 30) \cdot 40}{60} = 28 \text{ (km)}.$$

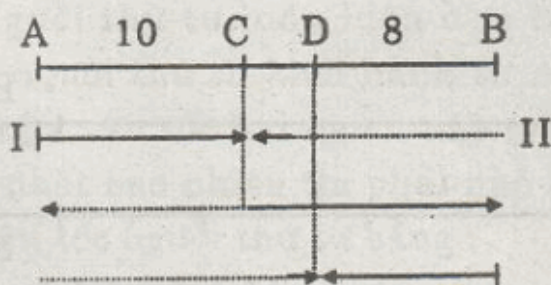
Quãng đường AB : $28 : 2 = 14 \text{ (km)}$

Thời gian người II đi quãng đường AB :

$$\frac{14 \cdot 60}{30} = 28 \text{ (ph)}.$$

Người II đến B lúc : $8\text{h} + 28\text{ph} = 8\text{h}28\text{ph}$.

599. Trên hình 29, quãng đường người I đi biểu thị bằng nét liền, quãng đường người II đi biểu thị bằng nét đứt.



Hình 29

Từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau lần thứ nhất ở C, hai người đi :
 $AC + BC = AB$, khi đó người I đi 10km.

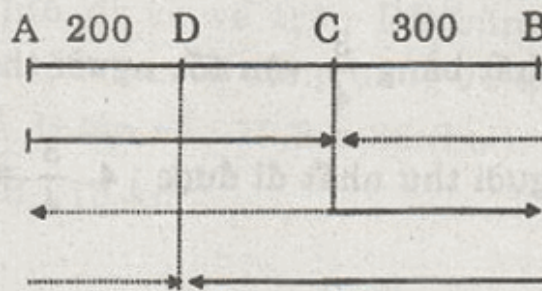
Từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau lần thứ hai ở D, hai người đi :
 $(AB + BD) + (BA + AD) = 3AB$. Khi đó người I đi :

$$10 \cdot 3 = 30 \text{ (km)}$$

Quãng đường $AB + BD = 30 \text{ km}$ nên quãng đường AB bằng :

$$30 - 8 = 22 \text{ (km)}$$

600. (h.30)



Hình 30

Gọi A là nhà An, B là nhà Bích, C là nơi hai người đi qua nhau lần thứ nhất, D là nơi hai người gặp nhau lần thứ hai. Giải tương tự như bài 599.

Quãng đường $AB : 300 \cdot 3 - 200 = 700 \text{ (m)}$

An đi $AB + BD$ trong 20 phút, vận tốc :

$$(700 + 500) : 20 = 60 \text{ (m/ph)}$$

Bích đi $BA + AD$ trong 20 phút, vận tốc :

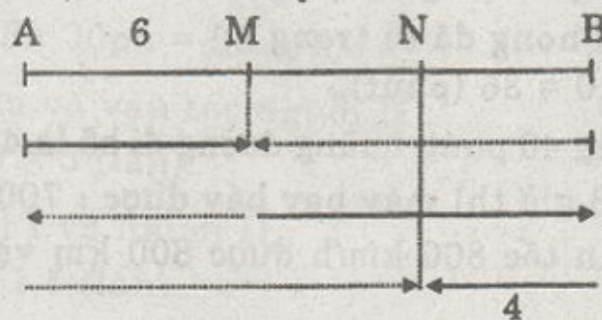
$$(700 + 200) : 20 = 45 \text{ (m/ph)}$$

601. (h.31)

a) b) Từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau lần thứ nhất ở M, hai người đi : $AM + BM = AB$, người thứ nhất đi 6 km trong 30 phút.

Từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau lần thứ hai ở N, hai người đi :

$$(AB + BN) + (BA + AN) = 3 AB.$$



Hình 31

Do đó người thứ nhất đi : $6 \cdot 3 = 18 \text{ (km)}$ trong 30 ph. $3 = 1 \text{ h } 30 \text{ ph.}$

Lúc hai người gặp nhau lần thứ hai :

$$7 \text{ h } + 1 \text{ h } 30 \text{ ph} = 8 \text{ h } 30 \text{ ph.}$$

Quãng đường $AB + BN = 18 \text{ km}$ nên AB bằng :

$$18 - 4 = 14 \text{ (km).}$$

c) Vận tốc người thứ nhất : $6 : \frac{1}{2} = 12$ (km/h).

Vận tốc người thứ hai : $(14 - 6) : \frac{1}{2} = 16$ (km/h).

d) Vận tốc người thứ nhất bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc người thứ hai. Khi người thứ hai đi tiếp NB = 4km thì người thứ nhất đi được : $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ (km), còn cách A : $14 - (4 + 3) = 7$ (km).

602. Từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau lần thứ hai ở C, người thứ hai đi BA + 6km (1), cả hai người đi 3 AB.

Vận tốc người thứ hai bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc người thứ nhất nên quãng đường người thứ hai đi được bằng $\frac{2}{5}$ tổng quãng đường hai người đi được, tức là bằng : $3AB \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{5}AB$ dài 6 km.

Quãng đường AB : 30 km.

603. Gọi chỗ Phong gặp bố là C. Bố Phong không phải đi đoạn từ C đến trường và đoạn từ trường đến C nên về sớm 20 phút. Vậy thời gian bố Phong đi từ C đến trường là 10 phút.

Phong đi từ trường trước giờ hẹn gặp bố 45 phút, nhưng gặp bố trước giờ hẹn 10 phút. Vậy Phong đã đi trong : $45 - 10 = 35$ (phút).

604. Hoà đi bộ trong 40 phút, quãng đường đi bộ là 4 km.

605. a) Cứ trong 3 giờ thì máy bay bay được : $700 \cdot 3 = 2100$ (km); trong đó có 1 giờ bay với vận tốc 800 km/h được 800 km và có 2 giờ bay với vận tốc lúc sau.

Vậy vận tốc lúc sau bằng : $\frac{2100 - 800}{2} = 650$ (km/h).

b) Cứ 3 km lúc đi thì có 2 km ô tô đi với vận tốc 40 km/h (hết $\frac{2}{40} = \frac{1}{20}$ giờ), 1 km đi với vận tốc 60km/h (hết $\frac{1}{60}$ giờ), tổng cộng hết : $\frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{1}{15}$ (h).

Vận tốc trung bình lúc đi là : $3 : \frac{1}{15} = 45 \text{ (km/h)}$.

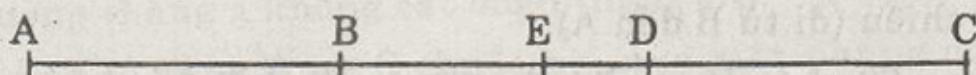
Vận tốc trung bình lúc về : 45 (km/h) .

606. Tính vận tốc trung bình đi và về trên đoạn AC, được 12 km/h . Do đó vận tốc trung bình đi và về trên DB cũng bằng 12 km/h và vận tốc trung bình cả đi lẫn về trên AB cũng bằng 12 km/h .

Quãng đường cả đi lẫn về : $12.3 = 36 \text{ (km)}$.

Quãng đường AB : 18 km .

607. (h.32)



Hình 32

Xe lửa gặp người thứ hai lúc 8 giờ 30 phút ở D, gặp người thứ nhất lúc 8 giờ 40 phút ở E.

Thời gian người thứ nhất đi EC :

$$10 \text{ h} - 8 \text{ h } 40\text{ph} = 80 \text{ (ph)}.$$

Thời gian xe lửa đi CE :

$$80 : 2 = 40 \text{ (ph)}$$

Xe lửa khởi hành từ C lúc :

$$8 \text{ h } 40\text{ph} - 40\text{ph} = 8 \text{ (h)}$$

Thời gian xe lửa đi CD :

$$8 \text{ h } 30\text{ph} - 8 \text{ h} = 30 \text{ (ph)}$$

Thời gian người II đi CD :

$$10 \text{ h} - 8 \text{ h } 30\text{ph} = 90 \text{ (ph)}.$$

Tỉ số vận tốc xe lửa và vận tốc người II :

$$90 : 30 = 3 \text{ (lần)}$$

Tỉ số vận tốc người I và người II :

$$3 : 2 = 1,5 \text{ (lần)}.$$

Quãng đường AC gấp rưỡi quãng đường BC nên quãng đường AC gấp ba AB, tức là bằng :

$$30.3 = 90 \text{ (km)}.$$

608. Nếu người đi xe đạp đèo một người đến B rồi quay lại đón người kia thì không kịp giờ (bạn đọc tự tính). Nhưng ba người có thể đến B kịp giờ bằng cách sau :

Trong giờ đầu, người đi xe đạp đèo một người đến C được 15 km , còn

cách B là 7,5 km, để người đó đi bộ về B trong một giờ rưỡi. Người đi xe quay trở lại đón người đi bộ thứ hai. Người đi bộ này đã đi 5 km nên sẽ gặp người đi xe đạp sau đó :

$10 : (15 + 5) = \frac{1}{2} \text{ (h)}$. Quãng đường còn lại đến B lúc này là 15 km, hai người đi tiếp trong một giờ.

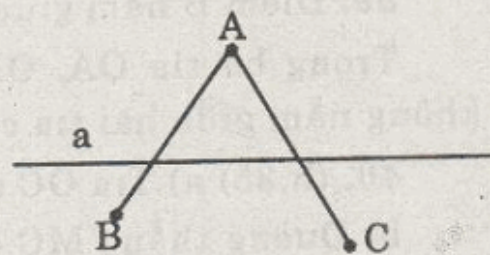
Như vậy cả ba người đến B cùng một lúc sau đúng 2 giờ rưỡi.

609. Giả sử người du lịch đi bộ từ A đến B trong 35 phút rồi quay lại A trong 35 phút nữa thì người đó gặp 7 tàu ngược chiều (đi từ B đến A) và 5 tàu cùng chiều (đi từ B đến A).

Vậy trong 70 phút đó có : $7 + 5 = 12$ tàu đi từ B đến A qua địa điểm A. Do đó cứ : $70 : 12 = 5 \text{ phút } 50 \text{ giây}$ lại có hai tàu cùng chiều đi qua một địa điểm.

HÌNH HỌC

35. (h.33) Đường thẳng a cắt đoạn thẳng AB và không đi qua A, B nên A và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ a . Tương tự như vậy, A và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ a . Vậy B và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ a , chúng lại không nằm trên a , do đó đường thẳng a không cắt đoạn thẳng BC .

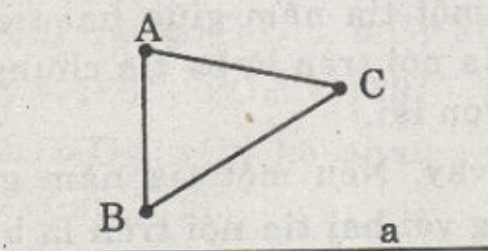


Hình 33

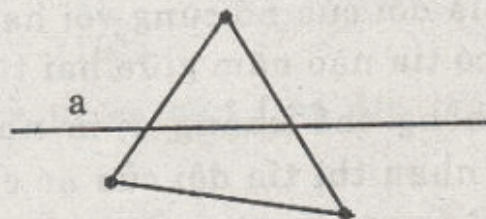
36. Hãy chứng tỏ rằng A và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ a . Vậy đường thẳng a cắt đoạn thẳng AC .

37. Đường thẳng a chia mặt phẳng ra hai nửa mặt phẳng. Xét hai trường hợp :

a) Nếu cả ba điểm A, B, C thuộc cùng một nửa mặt phẳng (h.34a) thì đường thẳng a không cắt đoạn thẳng nào trong ba đoạn thẳng AB, BC, CA .



a)



b)

Hình 34

b) Nếu ba điểm A, B, C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau thì có một nửa mặt phẳng chứa hai điểm, nửa mặt phẳng kia chứa một điểm (h.34b). Khi đó đường thẳng a cắt hai trong ba đoạn thẳng AB, BC, CA .

38. Đường thẳng a chia mặt phẳng ra hai nửa mặt phẳng. Xét ba trường hợp :

a) Nếu cả bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một nửa mặt phẳng thì đường thẳng a không cắt đoạn thẳng nào trong các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD .

b) Nếu có một điểm (chẳng hạn A) thuộc một nửa mặt phẳng, ba điểm kia (B, C, D) thuộc nửa mặt phẳng đối thì đường thẳng a cắt ba đoạn thẳng AB, AC, AD .

c) Nếu có hai điểm (chẳng hạn A và B) thuộc một nửa mặt phẳng, hai điểm kia (C, D) thuộc nửa mặt phẳng đối thì đường thẳng a cắt bốn đoạn thẳng AC, AD, BC, BD.

39. Điểm B nằm giữa A và D.

Trong ba tia OA, OB, OD, tia OB nằm giữa hai tia còn lại, tia OA không nằm giữa hai tia còn lại, tia OD không nằm giữa hai tia còn lại.

40. (h.35) a) Tia OC cắt đoạn thẳng AB tại điểm C nằm giữa A và B.

b) Đường thẳng MC cắt đoạn thẳng AB ở C mà C không thuộc tia OM nên tia OM không cắt đoạn thẳng AB, do đó tia OM không nằm giữa hai tia OA, OB.

Tia OB và đoạn thẳng AM thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ MC. Các điểm của chúng thuộc bờ chung là O và M lại không trùng nhau. Vậy tia OB không cắt đoạn thẳng AM, do đó tia OB không nằm giữa hai tia OA, OM.

Tương tự, tia OA cũng không nằm giữa hai tia OB, OM.

Qua bài toán này ta thấy : Nếu một tia nằm giữa hai tia không đối nhau thì tia đối của nó cùng với hai tia nói trên là ba tia chung gốc, trong đó không có tia nào nằm giữa hai tia còn lại.

41. Không thể khẳng định như vậy. Nếu một tia nằm giữa hai tia không đối nhau thì tia đối của nó cùng với hai tia nói trên là ba tia chung gốc mà không có tia nào nằm giữa hai tia còn lại (xem bài 40). Một ví dụ khác, các tia OA, OB, OC trong bài 63.

42. (h.36) :

a) Có 10 góc, đó là các góc xOa, xOb, xOc, xOy, aOb, aOc, aOy, bOc, bOy, cOy.

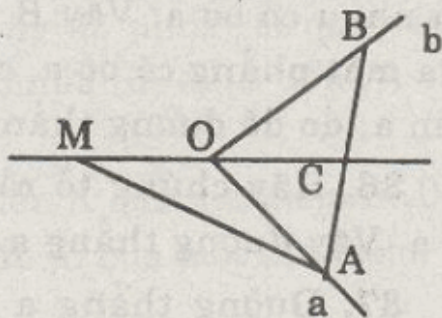
43. Giải $\frac{n(n-1)}{2} = 190$ được $n = 20$.

44. (h.37)

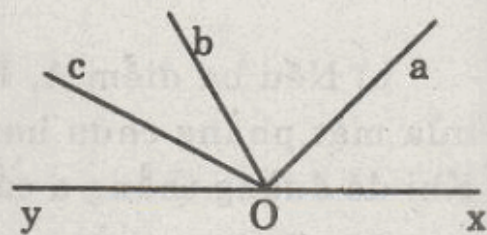
a) Các góc kề với góc AOB là : AOF, AOE, BOC, BOD, AOD, BOE.

b) Các góc kề bù với góc AOB là : AOE, BOD.

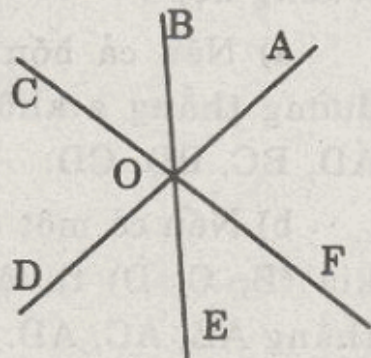
45. Đáp số : $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 115^\circ$,
 $\widehat{BOC} = \widehat{AOD} = 65^\circ$.



Hình 35



Hình 36



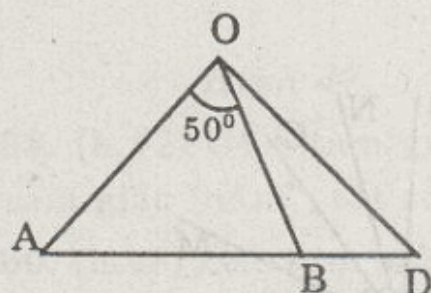
Hình 37

46. (h.38) Tia OB nằm giữa hai tia OA, OD

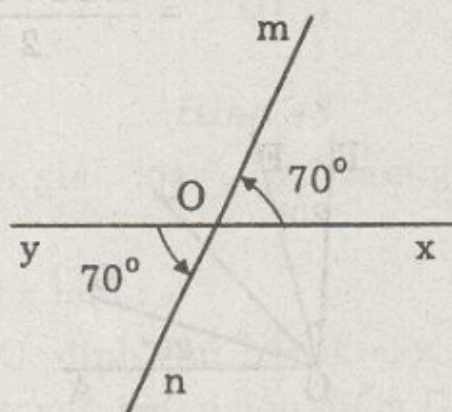
$$\Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{BOD} = \widehat{AOD}$$

$$\Rightarrow 50^\circ + \widehat{BOD} = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BOD} = 30^\circ.$$



Hình 38



Hình 39

47. a) Tia Oz không xác định duy nhất.

b) 60° hoặc 120° .

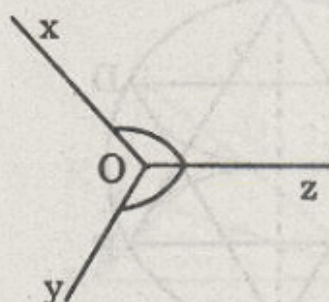
48. 110° , 110° , 70° .

49. (h.39) Các góc xOm, mOy kề bù

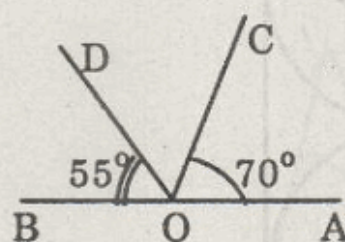
$$\Rightarrow \widehat{mOy} = 180^\circ - \widehat{xOm} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Các góc mOy, yOn kề nhau và bù nhau nên Om, On là hai tia đối nhau (theo ví dụ 17b).

50. Vẽ hai góc tù xOz và yOz kề nhau và bằng nhau (h.40). Tia Oz không phải là tia phân giác của góc xOy mặc dù $\widehat{xOz} = \widehat{zOy}$.



Hình 40



Hình 41

51. (h.41)

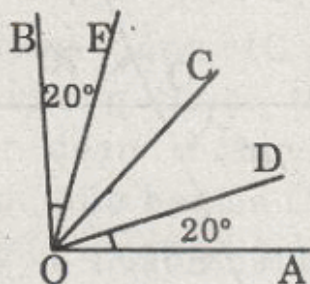
Các góc AOC và BOC kề bù nên $\widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{AOC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Ta tính được $\widehat{DOC} = \widehat{BOC} - \widehat{BOD} = 110^\circ - 55^\circ$ nên

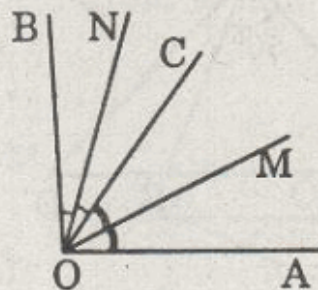
$$\widehat{BOD} = \widehat{DOC}.$$

52. (h.42) Chứng tỏ rằng $\widehat{COD} = \widehat{COE} = 30^\circ$.

$$\begin{aligned} 53. (h.43) \widehat{MON} &= \widehat{MOC} + \widehat{CON} = \frac{\widehat{AOC}}{2} + \frac{\widehat{COB}}{2} = \\ &= \frac{\widehat{AOC} + \widehat{COB}}{2} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ. \end{aligned}$$



Hình 42



Hình 43

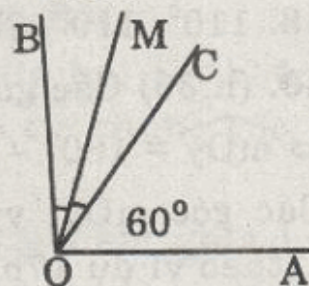
54. (h.44) a) Lần lượt tính :

$$\widehat{BOC} = 40^\circ, \widehat{COM} = 20^\circ, \widehat{AOM} = \widehat{AOC} + \widehat{COM} = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ.$$

b) Lần lượt tính :

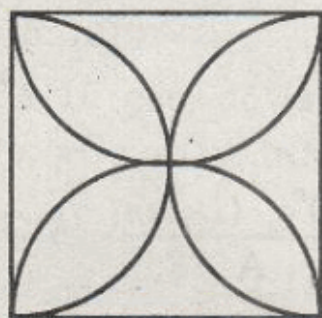
$$\widehat{BOC} = m - n, \widehat{COM} = \frac{m - n}{2},$$

$$\widehat{AOM} = \widehat{AOC} + \widehat{COM} = n + \frac{m - n}{2} = \frac{m + n}{2}.$$

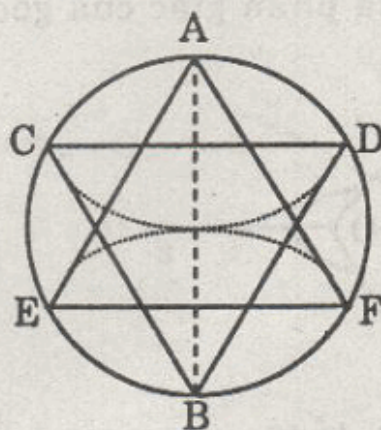


Hình 44

55. Xem hình 45.



Hình 45



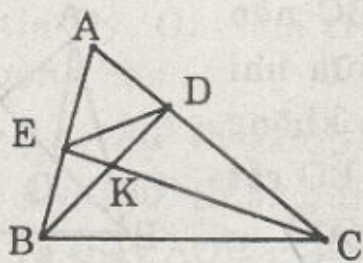
Hình 46

56. Xem hình 46.

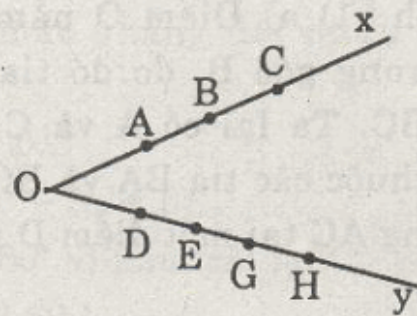
57. Bạn đọc tự vẽ.

58. Có bao nhiêu đoạn thẳng nằm trên đường thẳng a thì có bấy nhiêu tam giác.

Đáp số: 45 tam giác.



Hình 47



Hình 48

59. (h.47) Có 5 tam giác “đơn”, có 4 tam giác “đôi”, có 2 tam giác “ba”, có 1 tam giác “năm”, tất cả có 12 tam giác.

60. (h.48) Các tam giác phải đếm gồm ba loại :

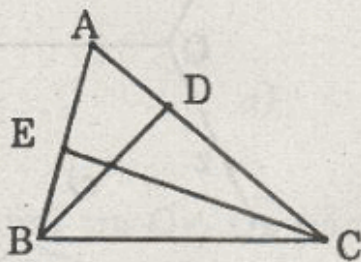
– Loại 1: Các tam giác có một đỉnh là O, đỉnh thứ hai là một trong ba điểm A, B, C (có 3 cách chọn), đỉnh thứ ba là một trong bốn điểm D, E, G, H (có 4 cách chọn). Các tam giác loại 1 gồm : $3.4 = 12$ (tam giác).

– Loại 2 : Các tam giác có một đỉnh là một trong ba điểm A, B, C (có 3 cách chọn), hai đỉnh kia là hai trong bốn điểm D, E, G, H (có 6 cách chọn). Các tam giác loại 2 gồm : $3.6 = 18$ (tam giác).

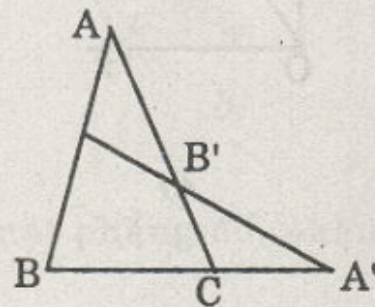
– Loại 3 : Các tam giác có một đỉnh là một trong bốn điểm D, E, G, H (có 4 cách chọn), hai đỉnh kia là hai trong ba điểm A, B, C (có 3 cách chọn). Các tam giác loại 3 gồm : $4.3 = 12$ (tam giác).

Tất cả có : $12 + 18 + 12 = 42$ (tam giác).

61. (h.49) Xét $\triangle ACE$, đường thẳng DB không đi qua các đỉnh của tam giác và cắt cạnh AC nên cắt một và chỉ một trong hai cạnh AE, CE (ví dụ 20). Nhưng đường thẳng DB không cắt cạnh AE, do đó nó cắt cạnh CE.



Hình 49

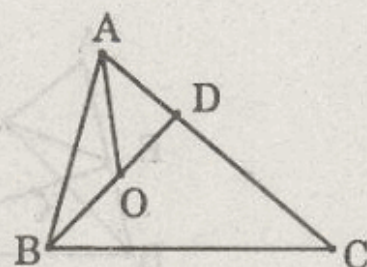


Hình 50

Lại áp dụng ví dụ 20 đối với $\triangle ABD$ và đường thẳng CE, ta có đường thẳng CE cắt cạnh BD.

62. (h.50) Lấy A' thuộc tia đối của tia CB và không trùng C, lấy B' nằm giữa A và C. Theo ví dụ 20, $A'B'$ là đường thẳng phải tìm.

63. (h.51) a) Điểm O nằm trong ΔABC nên O nằm trong góc B, do đó tia BO nằm giữa hai tia BA, BC. Ta lại có A và C là các điểm không trùng B thuộc các tia BA và BC, suy ra tia BO cắt đoạn thẳng AC tại một điểm D nằm giữa A và C.



Hình 51

b) Điểm O nằm trong ΔABC nên O nằm trong góc C, do đó tia CO nằm giữa hai tia CA, CB. Ta lại có B và D là các điểm không trùng C thuộc các tia CB và CA, suy ra tia CO cắt đoạn thẳng BD tại một điểm (là điểm O) nằm giữa B và D.

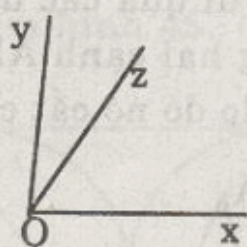
c) Tia OB không cắt đoạn thẳng AC vì đường thẳng OB chỉ có một điểm chung D với đoạn thẳng AC mà D không thuộc tia OB (theo câu b). Do đó tia OB không nằm giữa hai tia OA và OC. Lập luận tương tự, tia OC không nằm giữa hai tia OA và OB, tia OA không nằm giữa hai tia OB và OC.

64. a) 180° ; b) 120° ; c) 110° .

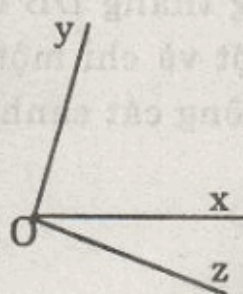
65. a) Xét hai trường hợp :

Nếu các tia Oy, Oz nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ Ox (h.52a) thì $\widehat{yOz} = 20^\circ$.

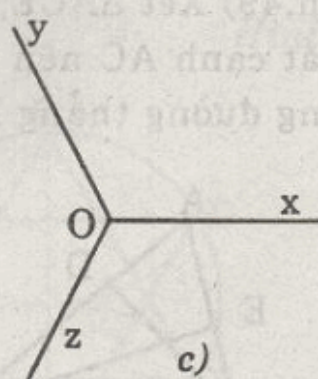
Nếu các tia Oy, Oz nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ Ox (h.52b) thì $\widehat{yOz} = 100^\circ$.



a)



b)



c)

Hình 52

b) Cũng xét hai trường hợp như câu a. Trường hợp thứ nhất, $\widehat{yOz} = 20^\circ$. Trường hợp thứ hai (h.52c), $\widehat{yOz} = 140^\circ$.

c) Xét hai trường hợp :

Nếu các tia Oy, Oz nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ Ox (h.52a) thì $\widehat{yOz} = \alpha - \beta$.

Nếu các tia Oy, Oz nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ Ox, lại xét hai trường hợp :

- Khi $\alpha + \beta \leq 180^\circ$ (h.52b) thì $\widehat{yOz} = \alpha + \beta$.
- Khi $\alpha + \beta > 180^\circ$ (h.52c) thì $\widehat{yOz} = 360^\circ - (\alpha + \beta)$.

66. (h.53) Ta thấy $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} > 180^\circ$ vì nếu trái lại thì góc AOD có điểm trong chung với ba góc kia. Đặt $\widehat{AOB} = \alpha$ ta có :

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{AOD} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + 3\alpha + 5\alpha + 6\alpha = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 15\alpha = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 24^\circ$$

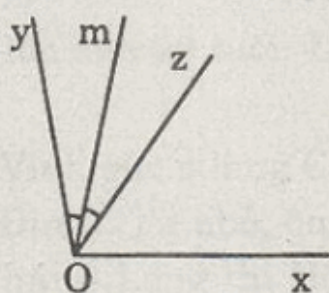
$$\text{Vậy } \widehat{AOB} = 24^\circ, \widehat{BOC} = 72^\circ, \widehat{COD} = 120^\circ, \widehat{AOD} = 144^\circ.$$

67. Nếu $\alpha \leq 60^\circ$ thì $\widehat{AOD} = 3\alpha$.

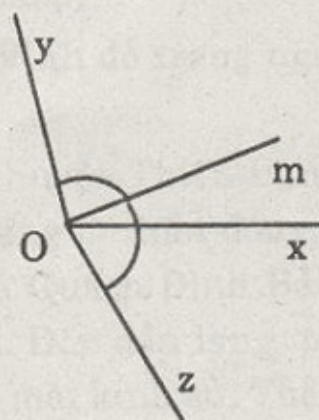
Nếu $\alpha > 60^\circ$ thì $\widehat{AOD} = 360^\circ - 3\alpha$.

68. Xét hai trường hợp :

a) Nếu hai tia Oy, Oz nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ Ox (h.54a) thì $\widehat{xOm} = 80^\circ$.



a)



b)

Hình 54

b) Nếu hai tia Oy, Oz nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ Ox (h.54b) thì $\widehat{xOm} = 20^\circ$.

69. Xét hai trường hợp :

a) Nếu hai tia Oy, Oz nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ Ox (h.54a) thì $\widehat{xOm} = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

b) Nếu hai tia Oy, Oz nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ Ox thì $\widehat{xOm}$:

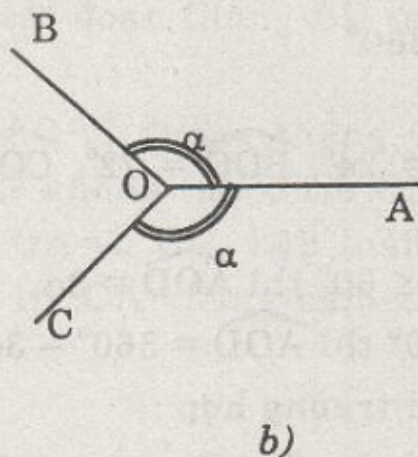
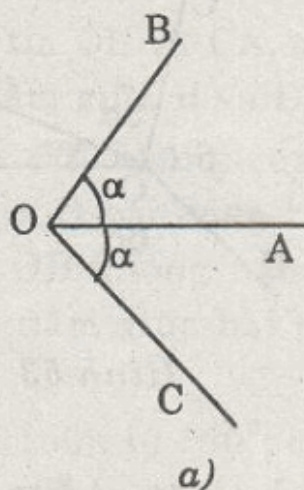
- bằng $\frac{\alpha - \beta}{2}$ nếu $\alpha + \beta \leq 180^\circ$ (h.54b);

– bằng $180^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2}$ nếu $\alpha + \beta > 180^\circ$.

70. Ta đã có $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$. Để OA là tia phân giác của góc BOC, phải có thêm điều kiện tia OA nằm giữa hai tia OB, OC. Muốn vậy phải có :

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} \leq 180^\circ \Leftrightarrow 2\alpha \leq 180^\circ \Leftrightarrow \alpha \leq 90^\circ.$$

Trên hình 55a, OA là tia phân giác của góc BOC. Trên hình 55 b, ta có $\alpha > 90^\circ$, khi đó OA không là tia phân giác của góc BOC.



Hình 55

HAI NHÀ TOÁN HỌC VIỆT NAM THỜI TRƯỚC CÓ CÙNG NĂM SINH

Trong hàng nghìn năm trước thế kỉ XIX, sử sách nước ta chỉ ghi lại có hai nhà toán học, vậy mà hai ông lại sinh cùng vào một năm : năm 1441, đó là Lương Thế Vinh và Vũ Hữu.

Hai ông sống trong thời kì nước Đại Việt ta đang phát triển mạnh mẽ về mọi mặt chính trị, xã hội, kinh tế, quốc phòng, văn hoá dưới triều vua Lê Thánh Tông (nhà vua sinh năm 1442, làm vua trong 37 năm từ năm 1460 đến năm 1497).

Thời đó, kết quả thi Đình được chia thành ba bảng :

- Đệ nhất giáp gồm trạng nguyên, bảng nhãn, thám hoa.
- Đệ nhị giáp là hoàng giáp (xếp từ cao đến thấp).
- Đệ tam giáp là tiến sĩ (xếp từ cao đến thấp).

Năm 1463, lúc mới 22 tuổi, Lương Thế Vinh đỗ trạng nguyên, còn Vũ Hữu đỗ hoàng giáp.

Lương Thế Vinh quê ở làng Cao Hương, huyện Thiên Bản (nay là huyện Vụ Bản, tỉnh Nam Định). Từ nhỏ, ông đã nổi tiếng là thần đồng, học đâu nhớ đấy. Trước khi lên Thăng Long thi Hội, nghe tin Quách Đình Bảo ở Thái Bình học giỏi, Lương Thế Vinh hỏi thăm đến nhà chơi. Đến đầu làng, ngồi nghỉ chân bên quán, nghe nói Đình Bảo đang ngày đêm mài kinh sử, Thế Vinh nói :

- Kì thi đã đến mà còn vùi đầu vào quyển sách, như thế sao gọi là biết học ! Nói đoạn, ông bỏ về. Đình Bảo biết chuyện ấy, giật mình nói :
- Người ấy tất là Thế Vinh.

Mấy hôm sau, Đình Bảo đến thăm Thế Vinh. Đến nơi, Thế Vinh đi vắng. Người nhà nói :

- Vinh đang ở ngoài bãi.

Đình Bảo ra bãi tìm, thấy Thế Vinh đang thả diều, dáng bộ ung dung thư thái. Đình Bảo vô cùng bái phục :

- Người này đáng mặt khôi nguyên. Tài học và cách học như thế, ta không sao sánh kịp !

Quả nhiên năm ấy, Lương Thế Vinh đỗ đầu với danh hiệu trạng nguyên, còn Quách Đình Bảo đỗ thứ ba (thám hoa). Vua Lê Thánh Tông ban cho mỗi người một lá cờ để vinh quy bái tổ, cờ thêu bốn câu thơ :

Trạng nguyên Lương Thế Vinh

Bảng nhãn Nguyễn Đức Trinh

Thám hoa Quách Đình Bảo

Thiên hạ cộng tri danh (Thiên hạ đều biết tiếng).

Khi ra làm quan, Lương Thế Vinh thường phải giải quyết nhiều vụ kiện tụng về ruộng đất, ông đã tự mình đo đạc, tính toán và tìm ra nhiều quy tắc tính diện tích. Ông đã làm nhiều bản tính và phổ biến cho dân chúng cách dùng. Ông còn biên soạn cuốn sách giáo khoa toán *Đại thành toán pháp*. Cuốn sách mở đầu bằng một bài thơ nôm với nhan đề "*Bài thơ khuyên học toán*" như sau :

Trước thời cho biết phép thương lường

Tính toán bình phân ở cửu chương

Thông hay mọi nhẽ điều vinh hiển

Suy biết trăm đường giúp thánh vương.

Trong sách, Lương Thế Vinh dạy cho mọi người từ phép cửu chương (tính nhân), bình phương, khai phương, phân số đến cách đo chiều cao của cây, cách tính diện tích các hình. Cứ sau một quy tắc, ông lại làm mấy câu thơ nôm tóm tắt nội dung cho dễ nhớ.

Năm 55 tuổi, ông xin thôi chức để về sống ở quê nhà. Ông sống giản dị, được mọi người yêu mến, kính trọng. Khi mất, ông được dân làng Cao Hương thờ làm phúc thần.

Vũ Hữu người làng Mộ Trạch, huyện Đường An (nay là huyện Bình Giang, tỉnh Hải Dương). Cha ông là một nhà nho thanh bạch. Vì thế, tuy Vũ Hữu làm quan to đến thượng thư năm bộ, nhưng ông vẫn giữ được tính cương trực, liêm khiết của nếp nhà.

Là người tinh thông toán học, Vũ Hữu đã viết sách toán phổ biến kiến thức toán học cho dân chúng. Sử cũ còn ghi lại một sự việc sau :

Thành Thăng Long được xây dựng từ thời Lí, thế kỉ XI-XIII, lâu ngày cửa thành đã đổ nát. Vua Lê Thánh Tông cho triệu Vũ Hữu vào và phán rằng :

– Trẫm nghe nói người rất giỏi toán. Nay trẫm cho trùng tu các cửa thành, vậy người thử tính xem phải dùng hết bao nhiêu gạch đá.

Vũ Hữu đã đo chiều rộng, chiều cao các cửa thành rồi tính ra số gạch cần dùng. Vua sai thợ cứ đúng như thế mà làm gạch. Khi xây xong, thật đáng ngạc nhiên: số gạch vừa đủ, không thừa một viên !

Nhà vua vô cùng khen ngợi Vũ Hữu và ban thưởng cho ông rất hậu.

Ngay từ thế kỉ XV, cách đây hơn năm trăm năm, nước ta đã có những người tinh thông toán học như Lương Thế Vinh và Vũ Hữu, thật đáng tự hào ! Vậy có thơ rằng :

Vũ Hữu cùng với Lương Thế Vinh

Hai nhà toán học, một năm sinh

Thực hành, tính toán đều thông thạo

Vẻ vang dân tộc, nước non mình !