

VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)
ĐÀM HIỆU CHIẾN – TRẦN HỮU NAM
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC – TRƯƠNG CÔNG THÀNH

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÀN TRUNG HỌC CƠ SỞ

TOÁN 7

TẬP MỘT

ĐẠI SỐ



NHA XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên) - ĐÀM HIẾU CHIẾN - TRẦN HỮU NAM
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC - TRƯƠNG CÔNG THÀNH

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

TOÁN 7

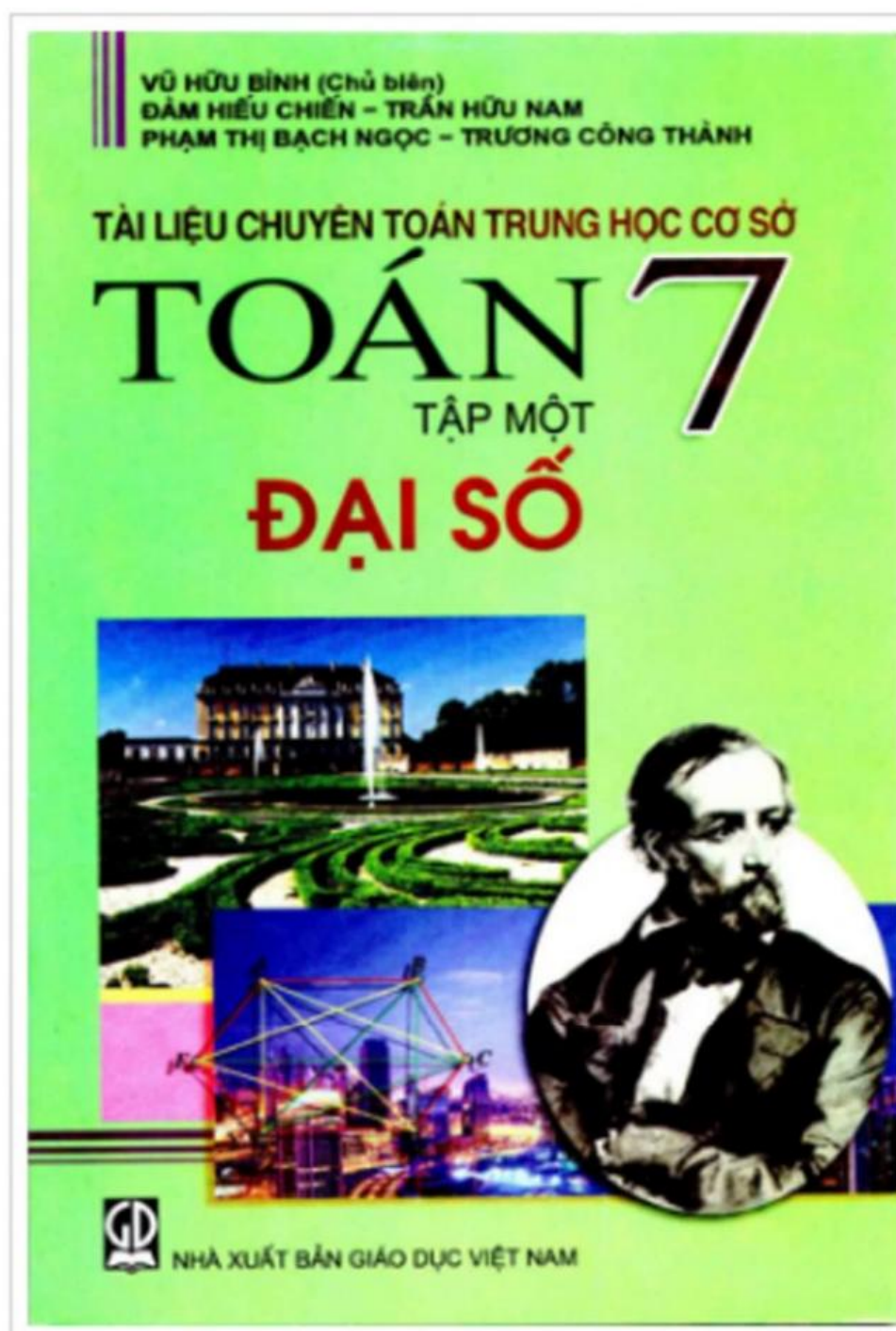
TẬP MỘT - ĐẠI SỐ

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHÂN CÔNG BIÊN SOẠN :

Vũ Hữu Bình :	Chủ biên
Đàm Hiếu Chiến :	Chuyên đề 1 - 10
Trần Hữu Nam :	Chuyên đề 11
Phạm Thị Bạch Ngọc :	Chuyên đề 12
Trương Công Thành :	Chuyên đề 13



Ảnh minh họa bìa một : Nhà toán học Dirichlet (Đi-rích-lê) (1805 - 1859)

Lời nói đầu

Bộ sách **Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở** gồm 8 cuốn, từ lớp 6 đến lớp 9, mỗi lớp 2 tập (tập một: Đại số, tập hai: Hình học), được biên soạn nhằm :

- Cung cấp cho các em học sinh một tài liệu có hệ thống và khá đầy đủ để học tập chuyên sâu về môn Toán ở cấp Trung học cơ sở.
- Tạo nguồn cho các lớp chuyên Toán ở Trung học phổ thông và giúp các em học sinh lớp 9 thi vào lớp 10 chuyên Toán.
- Giúp các cán bộ chỉ đạo môn Toán, các thầy cô giáo dạy Toán có thêm tài liệu để chỉ đạo và giảng dạy chuyên sâu về Toán tại các hoạt động chuyên đề, ngoại khóa, các câu lạc bộ Toán học nhằm bồi dưỡng cho học sinh về kiến thức, kỹ năng, tư duy và những phẩm chất tốt trong học tập, nghiên cứu và sáng tạo, góp phần vào việc đào tạo và bồi dưỡng nhân tài.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã và đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học, các trường Trung học cơ sở có uy tín, những chuyên gia Toán có kinh nghiệm ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Cuốn sách **Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở Toán 7, tập một: Đại số** gồm 10 chuyên đề cơ bản và 3 chuyên đề nâng cao.

Ở mỗi chuyên đề cơ bản, cuốn sách không lặp lại các nội dung đã có trong Sách giáo khoa mà chỉ tóm tắt các kiến thức cơ bản, đồng thời bổ sung thêm một số kiến thức cần thiết. Do đó, khi giảng dạy các chuyên đề, các thầy cô giáo nên sử dụng kết hợp tài liệu này với Sách giáo khoa. Các ví dụ minh họa được chọn lọc nhằm giúp học sinh biết cách giải và trình bày một số dạng toán nâng cao thường gặp. Sau đó là các bài tập có hướng dẫn giải.

Các chuyên đề nâng cao nhằm giúp bạn đọc hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình, chúng được trình bày để học sinh có thể tiếp thu được.

Chúng tôi hi vọng cuốn sách này sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.

Mặc dù các tác giả đã làm việc nhiệt tình, nghiêm túc và có trách nhiệm, tuy nhiên, cuốn sách vẫn khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc. Các góp ý xin gửi về :

*Ban Toán - Tin, Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội,
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, Hà Nội.*

Chủ biên
VŨ HỮU BÌNH

CÁC CHUYÊN ĐỀ CƠ BẢN

Chương I

SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

Chuyên đề 1. CÁC PHÉP TÍNH TRONG TẬP HỢP SỐ HỮU TỈ

Dạng 1. SO SÁNH HAI SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Số hữu tỉ là số có thể viết được dưới dạng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$.
 - Tập hợp số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathbb{Q}$.
 - Mọi số hữu tỉ đều có thể biểu diễn trên trục số.
- So sánh hai số hữu tỉ:
 - Với hai số hữu tỉ bất kì x và y ta luôn có hoặc $x = y$, hoặc $x < y$, hoặc $x > y$.
 - Số hữu tỉ âm $< 0 <$ số hữu tỉ dương.
 - So sánh hai số hữu tỉ âm bằng cách so sánh hai giá trị tuyệt đối của chúng với nhau.

Kiến thức bổ sung: Các phương pháp so sánh hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$, với $b, d > 0$:
- So sánh hai số hữu tỉ bằng cách quy đồng mẫu hoặc quy đồng tử.
- So sánh hai số hữu tỉ không qua quy đồng mẫu hoặc quy đồng tử:
 - Phương pháp nhân chéo: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$, với $b, d > 0$.
 - So sánh với một số hữu tỉ trung gian.
 - So sánh với phần bù (đến đơn vị), so sánh với phần hơn (so với đơn vị), ...

5. Một số trường hợp đặc biệt:

• Cho $b > 0$. Nếu $a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$; nếu $a > b$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$.

• Cho $b, d > 0$. Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 1.1. So sánh các số hữu tỉ sau:

a) $\frac{-15}{17}$ và $\frac{-19}{21}$;

b) $\frac{-13}{19}$ và $\frac{19}{-23}$.

Giải

a) *Cách 1:* Có $(-15).21 = -315$ và $17.(-19) = -323$.

Mà $-315 > -323$, suy ra $\frac{-15}{17} > \frac{-19}{21}$.

Cách 2: Có $\frac{-15}{17} = \frac{2}{17} - 1$ và $\frac{-19}{21} = \frac{2}{21} - 1$. Mà $\frac{2}{17} > \frac{2}{21}$, suy ra $\frac{-15}{17} > \frac{-19}{21}$.

b) Viết lại các số hữu tỉ đã cho thành $\frac{-13}{19}$ và $\frac{-19}{23}$ (để mẫu là số dương).

Có $(-13).23 = -299$ và $19.(-19) = -361$, mà $-299 > -361$, suy ra $\frac{-13}{19} > \frac{19}{-23}$.

VÍ DỤ 1.2.

a) Số nào lớn hơn trong hai số hữu tỉ sau:

$$\frac{-23}{49} \text{ và } \frac{-25}{47}; \quad -\frac{317}{633} \text{ và } -\frac{371}{743}; \quad \frac{-24}{35} \text{ và } \frac{-19}{30}.$$

b) Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

$$\frac{-19}{30}; \frac{-5}{9}; 0; \frac{-25}{47}; \frac{124}{2011}; \frac{-24}{35}; \frac{-23}{49}.$$

Giải

a) Ta có:

• Chọn phân số trung gian là $\frac{25}{49}$, ta có: $\frac{23}{49} < \frac{25}{49} < \frac{25}{47}$, suy ra: $\frac{-23}{49} > \frac{-25}{47}$.

(Có thể chọn phân số trung gian là $\frac{23}{47}$. Ta có $\frac{23}{49} < \frac{23}{47} < \frac{25}{47}$).

• Có $2 \cdot \frac{317}{633} = \frac{634}{633} > 1$ và $2 \cdot \frac{371}{743} = \frac{742}{743} < 1$ nên $\frac{317}{633} > \frac{371}{743}$.

Suy ra: $-\frac{317}{633} < -\frac{371}{743}$.

• Sử dụng phân bù đến đơn vị $\frac{24}{35} = 1 - \frac{11}{35}$ và $\frac{19}{30} = 1 - \frac{11}{30}$.

Ta có: $\frac{11}{35} < \frac{11}{30}$ nên $1 - \frac{11}{35} > 1 - \frac{11}{30}$ hay $\frac{24}{35} > \frac{19}{30}$. Suy ra:
 $-\frac{24}{35} < -\frac{19}{30}$.

b) Ta chỉ cần so sánh các số: $\frac{19}{30}; \frac{5}{9}; \frac{25}{47}; \frac{24}{35}; \frac{23}{49}$.

Theo câu a), ta có: $\frac{25}{47} > \frac{23}{49}$ và $\frac{24}{35} > \frac{19}{30}$.

So sánh các số $\frac{25}{47}$ và $\frac{19}{30}$ với phân số $\frac{5}{9}$:

$$\frac{25}{47} < \frac{25}{45} = \frac{5}{9} \quad \text{và} \quad \frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} < \frac{1}{2} + \frac{1}{15} = \frac{17}{30} < \frac{19}{30}.$$

Suy ra $\frac{24}{35} > \frac{19}{30} > \frac{5}{9} > \frac{25}{47} > \frac{23}{49}$.

Vậy ta có: $-\frac{24}{35} < -\frac{19}{30} < -\frac{5}{9} < -\frac{25}{47} < -\frac{23}{49} < 0 < \frac{124}{2011}$.

VÍ DỤ 1.3. So sánh A và B, nếu:

a) $A = -\frac{1}{2011} - \frac{3}{11^2} - \frac{5}{11^3} - \frac{7}{11^4}$ và $B = -\frac{1}{2011} - \frac{7}{11^2} - \frac{5}{11^3} - \frac{3}{11^4}$.

b) $A = \frac{2006}{2007} - \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} - \frac{2009}{2010}$ và $B = -\frac{1}{2006 \cdot 2007} - \frac{1}{2008 \cdot 2009}$.

Giải

a) Ta chỉ phải so sánh $A' = -\frac{3}{11^2} - \frac{7}{11^4}$ và $B' = -\frac{7}{11^2} - \frac{3}{11^4}$.

Có $A' = -\frac{3}{11^2} - \frac{4}{11^4} - \frac{3}{11^4}$; $B' = -\frac{3}{11^2} - \frac{4}{11^2} - \frac{3}{11^4}$ mà $-\frac{4}{11^4} > -\frac{4}{11^2}$

$$\Rightarrow A' > B' \Rightarrow A > B.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } A &= \left(1 - \frac{1}{2007}\right) - \left(1 - \frac{1}{2008}\right) + \left(1 - \frac{1}{2009}\right) - \left(1 - \frac{1}{2010}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2008} - \frac{1}{2007}\right) + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2009}\right) = -\left(\frac{1}{2007 \cdot 2008} + \frac{1}{2009 \cdot 2010}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2007 \cdot 2008} < \frac{1}{2006 \cdot 2007} \text{ nên } -\frac{1}{2007 \cdot 2008} > -\frac{1}{2006 \cdot 2007};$$

$$\frac{1}{2009 \cdot 2010} < \frac{1}{2008 \cdot 2009} \text{ nên } -\frac{1}{2009 \cdot 2010} > -\frac{1}{2008 \cdot 2009}.$$

Vậy $A > B$.

VÍ DỤ 1.4. So sánh các số hữu tỉ sau:

$$\text{a) } \frac{12}{17} \text{ và } \frac{13}{18}; \quad \text{b) } \frac{-17}{26} \text{ và } \frac{-16}{27}; \quad \text{c) } \frac{84}{-83} \text{ và } \frac{-337}{331}.$$

Giải

$$\text{a) Có } \frac{12}{17} < 1 \text{ nên } \frac{12}{17} < \frac{12+1}{17+1} = \frac{13}{18}.$$

$$\text{b) Có } \frac{-17}{26} < 1 \text{ nên } \frac{-17}{26} < \frac{-17+1}{26+1} = \frac{-16}{27}.$$

$$\text{c) Có } \frac{-337}{331} < 1 \text{ nên } \frac{-337}{331} < \frac{-337+1}{331+1} = \frac{-336}{332} = \frac{-84}{83} \text{ hay } \frac{84}{-83} > \frac{-337}{331}.$$

VÍ DỤ 1.5.

$$\text{a) Viết ba số hữu tỉ có mẫu khác nhau, lớn hơn } \frac{-1}{3} \text{ nhưng nhỏ hơn } \frac{4}{5}.$$

$$\text{b) Tìm các số hữu tỉ có dạng } \frac{7}{a} \text{ biết rằng giá trị của số đó lớn hơn } \frac{-9}{11} \text{ và nhỏ hơn } \frac{-9}{13}.$$

$$\text{c) Có bao nhiêu phân số có tử số bằng 9, lớn hơn } \frac{-3}{5} \text{ và nhỏ hơn } \frac{-4}{9}?$$

Giải

a) Có $\frac{-1}{3} < \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{-1}{3} < \frac{-1+4}{3+5} = \frac{3}{8} < \frac{4}{5}$.

Ta lại có $\frac{-1}{3} < \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{-1}{3} < \frac{-1+3}{3+8} = \frac{2}{11} < \frac{3}{8}$.

Tương tự, ta được $\frac{-1}{3} < \frac{1}{14} < \frac{2}{11}$. Vậy ta có ba số hữu tỉ nằm giữa $\frac{-1}{3}$ và $\frac{4}{5}$

là: $\frac{-1}{3} < \frac{1}{14} < \frac{2}{11} < \frac{3}{8} < \frac{4}{5}$.

b) Ta xét phân số $\frac{7}{x}$ mà $\frac{9}{13} < \frac{7}{x} < \frac{9}{11}$ với $x \in \mathbb{N}^*$.

Quy đồng các tử số ta được: $\frac{63}{91} < \frac{63}{9x} < \frac{63}{77}$.

Suy ra $77 < 9x < 91$, mà $x \in \mathbb{N}^*$ nên $x \in \{9; 10\}$.

Vậy ta có $\frac{-9}{11} < \frac{-7}{9} < \frac{-7}{10} < \frac{-9}{13}$.

c) Ta xét phân số $\frac{9}{x}$ mà $\frac{4}{9} < \frac{9}{x} < \frac{3}{5}$ với $x \in \mathbb{N}^*$.

Quy đồng các tử số, ta được: $\frac{36}{81} < \frac{36}{4x} < \frac{36}{60}$.

Ta có: $60 < 4x < 81$.

Suy ra $15 < x < 20\frac{1}{4}$, mà $x \in \mathbb{N}^*$ nên $x \in \{16; 17; 18; 19; 20\}$.

Vậy ta có 5 phân số thoả mãn bài toán:

$$\frac{-3}{5} < \frac{9}{-16} < \frac{9}{-17} < \frac{9}{-18} < \frac{9}{-19} < \frac{9}{-20} < \frac{-4}{9}.$$

Dạng 2. CỘNG, TRỪ, NHÂN VÀ CHIA CÁC SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trên tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ xác định hai phép toán:

1. Phép cộng hai số hữu tỉ: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{b.d}$.

- Phép cộng có các tính chất giao hoán, kết hợp.
- Phép cộng với số 0: Ta có $x + 0 = 0 + x = x$.
- Hai số hữu tỉ có tổng bằng 0 là hai số đối nhau. Như vậy mọi số hữu tỉ đều có số đối.

2. Phép nhân hai số hữu tỉ: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$.

- Phép nhân có các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối đối với phép cộng.
- Phép nhân với số 1: Ta có $x.1 = 1.x = x$.
- Hai số hữu tỉ có tích bằng 1 là hai số nghịch đảo nhau. Như vậy mọi số hữu tỉ khác 0 đều có số nghịch đảo.

➤ Trên tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, phép toán trừ và phép chia được hiểu như sau:

3. Phép trừ số hữu tỉ x cho số hữu tỉ y được thay thế bằng phép cộng của x với số đối của y , ta viết như sau: $x - y = x + (-y)$.

4. Phép chia số hữu tỉ x cho số hữu tỉ y ($y \neq 0$) được thay thế bằng phép nhân của x với số nghịch đảo của y , ta viết như sau: $x : y = x \cdot \frac{1}{y}$ ($y \neq 0$).

➤ Lưu ý trên tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$:

5. Các phép toán cộng, trừ và nhân hai số hữu tỉ luôn cho ta cho kết quả là một số hữu tỉ.
6. Phép chia số hữu tỉ x cho số hữu tỉ y có kết quả là một số hữu tỉ khi $y \neq 0$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 1.6. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \left(\frac{-5}{11} + \frac{7}{22} - \frac{-4}{33} - \frac{5}{44} \right) : \left(38\frac{1}{22} - 39\frac{7}{22} \right)$; $B = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{1 - \frac{3}{1 - 4}}}$;

b) $C = -\frac{1}{10} - \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} - \frac{1}{10000} - \frac{1}{100000} - \frac{1}{1000000}$.

Giải

a) Ta có:

$$A = \left(\frac{-5}{11} + \frac{7}{22} + \frac{4}{33} + \frac{-5}{44} \right) : \left(38 + \frac{1}{22} - 39 - \frac{7}{22} \right) = \frac{-17}{132} : \left(-1\frac{3}{11} \right) = \frac{17}{168}.$$

Cách 1: Viết lại phép tính: $B = 1 - 1 : \{ 1 + 2 : [1 - 3 : (1 - 4)] \} = \frac{1}{2}.$

Cách 2: Tính ngược từ cuối lên:

$$B = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{1 - \frac{3}{1 - 4}}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + 1}} = 1 - \frac{1}{1 + 1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$b) C = -(0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots + 0,000001) = -0,111111.$$

VÍ DỤ 1.7. Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lí:

$$a) A = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{7} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}};$$

$$B = \frac{\frac{2}{39} - \frac{1}{15} - \frac{2}{153}}{\frac{1}{34} + \frac{3}{20} - \frac{3}{26}} : \frac{1 + \frac{2}{71} - \frac{5}{121}}{\frac{65}{121} - \frac{26}{71} - 13}.$$

$$b) C = \left(\frac{112}{13.20} + \frac{112}{20.27} + \frac{112}{27.34} + \dots + \frac{112}{62.69} \right) : \left(-\frac{5}{9.13} - \frac{7}{9.25} - \frac{13}{19.25} - \frac{31}{19.69} \right).$$

$$c) D = \frac{2.2012}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2012}}.$$

Giải

$$a) A = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)}{5 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)} - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{7 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

$$B = \frac{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{10} - \frac{1}{51} \right)}{-\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{10} - \frac{1}{51} \right)} : \frac{1 + \frac{2}{71} - \frac{5}{121}}{(-13) \cdot \left(1 + \frac{2}{71} - \frac{5}{121} \right)} = \left(-\frac{4}{9} \right) \cdot (-13) = 5\frac{7}{9}.$$

b) Đặt $C = P : Q$.

$$\begin{aligned} \text{Có } P &= 16 \cdot \left(\frac{7}{13 \cdot 20} + \frac{7}{20 \cdot 27} + \frac{7}{27 \cdot 34} + \dots + \frac{7}{62 \cdot 69} \right) \\ &= 16 \cdot \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{62} - \frac{1}{69} \right) = 16 \cdot \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{69} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Có } -Q &= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{5}{13} + \frac{7}{25} \right) + \frac{1}{19} \cdot \left(\frac{13}{25} + \frac{31}{69} \right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{125 + 91}{13 \cdot 25} + \frac{1}{19} \cdot \frac{897 + 775}{25 \cdot 69} \\ &= \frac{24}{13 \cdot 25} + \frac{88}{25 \cdot 69} = 2 \cdot \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{69} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{69} \right). \end{aligned}$$

Suy ra: $C = -8$.

c) Có: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} \cdot (1 + n)n$, với n là số tự nhiên khác 0.

$$\text{Do đó } \frac{1}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{2}{n \cdot (1 + n)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{1+2} = \frac{2}{2 \cdot 3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right); \quad \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2012} \\ = 1 + 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{2 \cdot 2012}{1 + 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} \right) \right]} \\ &= \frac{2 \cdot 2012}{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2013} \right)} = \frac{2 \cdot 2012 \cdot 2013}{2 \cdot 2012} = 2013. \end{aligned}$$

Dạng 3. LUYỆN THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Luyện thừa bậc n ($n \in \mathbb{N}^*$) của một số hữu tỉ x (kí hiệu: x^n) là tích của n thừa số bằng x :

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_n \quad (n \text{ còn được gọi là số mũ, } x \text{ gọi là cơ số}).$$

2. Quy ước: $x^0 = 1$ ($x \neq 0$) và $x^1 = x$.

3. Quy tắc:

- Tích và thương của hai luyện thừa cùng cơ số:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}; \quad x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0; m \geq n).$$

- Luyện thừa của một tích, của một thương:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0).$$

- Luyện thừa của một luyện thừa: $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.

Kiến thức bổ sung

4. Ta có: $(x^m)^n = x^{m \cdot n} \neq x^{m^n} = x^{\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdots m}_n}$ và $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

5. Quy tắc dấu "-" trong một tích hoặc một thương:

- Nếu số thừa số âm là số chẵn thì chắc chắn kết quả sẽ là một số dương, nên ta có thể bỏ hết dấu "-" đi để thuận tiện trong khi thực hiện phép tính.
- Nếu số thừa số âm là số lẻ thì kết quả sẽ là một số âm, nên ta cũng bỏ hết dấu "-" đi và đặt ở trước toàn bộ phép tính một dấu "-", cũng để thuận tiện trong khi thực hiện phép tính.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 1.8. Cho $a \in \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; 0; 1; 0,2; \frac{2}{3}\right\}$. Tính a^{-3} ; a^2 ; a^3 ; a^4 .

Giải

Ta lập bảng:

a	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$0,2$	$\frac{2}{3}$
a^2	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	0	1	$0,04$	$\frac{4}{9}$
a^3	-1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{27}$	0	1	$0,008$	$\frac{8}{27}$
a^4	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$	0	1	$0,0016$	$\frac{16}{81}$
a^{-3}	-1	-8	-27	Không xác định	1	125	$\frac{27}{8}$

VÍ DỤ 1.9. Năm ánh sáng là đơn vị đo khoảng cách trong thiên văn học. Một năm ánh sáng là quãng đường ánh sáng đi được trong một năm và bằng 9 460 730 472 580 (km), đó là một con số rất lớn nên người ta sử dụng lũy thừa để viết cho gọn lại.

- Viết 1 năm ánh sáng cho gọn lại theo một lũy thừa của 10.
- Sao Proxima Centauri gần Trái Đất nhất mà còn cách Trái Đất là 4,22 năm ánh sáng. Khoảng cách đó bằng bao nhiêu kilômét ?

Giải

- 1 năm ánh sáng xấp xỉ 9 460 730 472 580 (km) $\approx 0,946 \cdot 10^{13}$ (km).
- Sao Proxima Centauri cách Trái Đất 4,22 (năm ánh sáng) $\approx 3,99212 \cdot 10^{13}$ (km).

VÍ DỤ 1.10. Sắp xếp các số sau từ nhỏ đến lớn dưới dạng lũy thừa của 2:

$$32 ; 0,125 ; -128 ; \frac{1}{64} ; 1 ; \frac{1}{16}.$$

Giải

Có: $32 = 2^5$; $0,125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$; $-128 = -2^7$; $\frac{1}{64} = 2^{-6}$; $1 = 2^0$; $\frac{1}{16} = 2^{-4}$.

Sắp xếp: $-2^7 < 2^{-6} < 2^{-4} < 2^{-3} < 2^0 < 2^5$.

VÍ DỤ 1.11. Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}; \quad B = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^5}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3}.$$

Giải

$$A = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 + 2^{11} \cdot 3^9}{2^{14} \cdot 3^7 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{11} \cdot 3^6 \cdot (2^2 + 3^3)}{2^{10} \cdot 3^7 \cdot (2^4 + 3 \cdot 5)} = \frac{2}{3}.$$

$$B = \frac{-\left(\frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3^2}{2^4} \cdot 1\right)}{-\left(\frac{2^2}{5^2} \cdot \frac{5^3}{2^6 \cdot 3^3}\right)} = \frac{2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 14 \frac{2}{5}.$$

VÍ DỤ 1.12. Các mệnh đề sau đúng hay sai với mọi số hữu tỉ x và y ?

- a) $-x = (-x)^2$; b) $(x-y)^2 = (y-x)^2$;
 c) $x < 0 \Rightarrow x^2 > x$; d) Nếu $x^2 > 0$ thì $x > 0$;
 e) $|x| = y^3$ và $xy < 0 \Rightarrow x < 0$; g) $x = y^5 \Rightarrow x > 0$ và $y < 0$;
 h) $(x-y)^3 = -(y-x)^3$.

Giải

- a) Mệnh đề **sai**, vì với $x = 1$ thì $-x = -1$ khác với $(-x)^2 = (-1)^2 = 1$.
 b) Mệnh đề **đúng**, vì $|x-y| = |y-x|$.
 c) Mệnh đề **đúng**, vì với mọi $x < 0$ thì $x < 0 < x^2$.
 d) Mệnh đề **sai**, ví dụ $x^2 = (-1)^2 = 1 > 0$ nhưng $x = -1 < 0$.
 e) Mệnh đề **đúng**, vì:
 • $xy < 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0 \Rightarrow y^3 > 0 \Rightarrow y > 0$.
 • Từ $xy < 0$ và $y > 0 \Rightarrow x < 0$.
 g) Mệnh đề **sai**, vì khi $x = y^5$ thì x và y cùng dấu.
 h) Mệnh đề **đúng**, vì $x-y = -(y-x) \Rightarrow (x-y)^3 = -(y-x)^3$.

VÍ DỤ 1.13. Cho số $A = -9 - 99 - 999 - \dots - \frac{999\dots9}{2011}$. Hỏi sau khi thực hiện

phép tính, chữ số 1 xuất hiện bao nhiêu lần trong số A ?

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } -A &= 10^1 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2011} - 2011 \\ &= \frac{111\dots110}{2012} - 2011 = \frac{111\dots1109099}{2012}. \end{aligned}$$

Vậy chữ số 1 xuất hiện 2007 lần.

VÍ DỤ 1.14. So sánh:

a) $A = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{49}} + \frac{1}{2^{50}}$ với 1.

b) $B = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{100}}$ với $\frac{1}{2}$.

c) $C = \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{999}} + \frac{1}{4^{1000}}$ với $\frac{1}{3}$.

Giải

a) $A = 2A - A$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{48}} + \frac{1}{2^{49}} \right) - \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{49}} + \frac{1}{2^{50}} \right).$$

Suy ra: $A = 1 - \frac{1}{2^{50}} < 1$ nên $A < 1$.

b) $2B = 3B - B$

$$= \left(1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}} \right) - \left(\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{100}} \right).$$

Suy ra: $2B = 1 - \frac{1}{3^{100}} < 1$ nên $B < \frac{1}{2}$.

c) $3C = 4C - C$

$$= \left(1 + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{998}} + \frac{1}{4^{999}} \right) - \left(\frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{999}} + \frac{1}{4^{1000}} \right).$$

Suy ra: $3C = 1 - \frac{1}{4^{1000}} < 1$ nên $C < \frac{1}{3}$.

Lưu ý:

Một cách tổng quát: Nếu $P = \frac{1}{a^1} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^n}$ với $a \in \mathbf{N}$ và $a > 1$.

Xét $(a - 1)P = aP - P$

$$= \left(1 + \frac{1}{a^1} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^{n-2}} + \frac{1}{a^{n-1}} \right) - \left(\frac{1}{a^1} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^n} \right).$$

Suy ra: $(a - 1).P = 1 - \frac{1}{a^n} < 1$ nên $P < \frac{1}{a - 1}$.

VÍ DỤ 1.15. Tìm tiếp số hạng thứ năm của dãy số sau:

$$-\frac{1}{a^2}; \frac{2}{a^3}; -\frac{6}{a^4}; \frac{24}{a^5}; \dots$$

Giải

Số hạng tổng quát $u_n = (-1)^n \cdot \frac{n!}{a^{n+1}}$.

Vậy, số hạng thứ năm của dãy số trên: $u_5 = -\frac{5!}{a^{5+1}} = -\frac{120}{a^6}$.

Lưu ý:

- Luỹ thừa của số -1 được sử dụng để đổi dấu của số hạng.
- $(-1)^n$ mang dấu $-$ nếu n lẻ và mang dấu $+$ nếu n chẵn.

Dạng 4. TÌM SỐ HỮU TỈ CHƯA BIẾT TRONG MỘT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nếu số hữu tỉ chưa biết nằm ở mẫu, ta phải đặt điều kiện cho số đó khác 0. Rồi sau khi tìm được kết quả phải so sánh với điều kiện.
2. Trong quá trình thực hiện các phép tính cần lưu ý đến dấu phép tính.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 1.16. Tìm số hữu tỉ x , biết rằng:

a) $\left(\frac{2}{5} - x\right) : 1\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = -4$; b) $\left(-3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{3}\right) : \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{4}$;

c) $\frac{-3x}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{7}\right) = 0$; d) $3 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{x}} = 2\frac{2}{3}$.

Giải

a) $\frac{2}{5} - x = \left(-4 - \frac{1}{2}\right) \cdot 1\frac{1}{3} = -6$, nên $x = 6\frac{2}{5}$.

b) Vì x nằm ở mẫu nên $x \neq 0$.

Ta có: $\frac{3}{x} = \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) - \left(-3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}$ nên $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện $x \neq 0$).

c) Vì x nằm ở mẫu nên $x \neq 0$.

Tích của hai thừa số bằng 0, do đó một trong hai thừa số bằng 0. Biết $x \neq 0$ nên ta có $\frac{-3x}{4} \neq 0$, vậy $\frac{1}{x} + \frac{2}{7} = 0$. Suy ra $x = -\frac{7}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $x \neq 0$).

d) Vì x nằm ở mẫu nên $x \neq 0$.

Ta có: $1 + \frac{1}{x} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) : \left(3 - 2\frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2}$, suy ra $x = 2$ (thỏa mãn điều kiện $x \neq 0$).

VÍ DỤ 1.17. Tìm x , biết:

a) $(x - 3)^2 = 16$;

b) $(1 - 3x)^3 = -64$;

c) $x^{13} = 27x^{10}$;

d) $(4x - 1)^2 = (1 - 4x)^4$.

Giải

a) Có: $|x - 3| = 4$, suy ra $x - 3 \in \{-4; 4\}$ nên $x \in \{-1; 7\}$.

b) Có: $(1 - 3x)^3 = (-4)^3$, suy ra $1 - 3x = -4$ nên $x = \frac{5}{3}$.

c) Xét hiệu: $x^{13} - 27x^{10} = x^{10} \cdot (x^3 - 27) = 0$. Suy ra $x \in \{0; 3\}$.

$$\begin{aligned} \text{d) Xét hiệu: } (1-4x)^4 - (4x-1)^2 &= (1-4x)^4 - (1-4x)^2 \\ &= (1-4x)^2 \cdot [(4x-1)^2 - 1] = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } x \in \{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\}.$$

VÍ DỤ 1.18. Tìm số tự nhiên x , biết:

$$\text{a) } 4^x + 4^{x+3} = 4160; \quad \text{b) } 2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}.$$

Giải

$$\text{a) Có } 4^x(1 + 4^3) = 4160 \text{ nên } 4^x = 64. \text{ Suy ra: } x = 3.$$

$$\text{b) Có } 2^{x-2}(2 + 5) = \frac{7}{32} \text{ nên } 2^{x-2} = \frac{1}{32} = 2^{-5}. \text{ Suy ra: } x = -3.$$

VÍ DỤ 1.19. Tìm các số hữu tỉ x, y và z , biết:

$$\text{a) } xy = \frac{2}{3}; yz = 0,6 \text{ và } zx = 0,625;$$

$$\text{b) } x(x - y + z) = -11; y(y - z - x) = 25 \text{ và } z(z + x - y) = 35;$$

$$\text{c) } (x + 2)^2 + (y - 3)^4 + (z - 5)^6 = 0.$$

Giải

$$\text{a) Nhân ba đẳng thức với nhau, ta được } (xyz)^2 = 0,25, \text{ do đó } xyz = \pm 0,5.$$

$$\text{Suy ra: } (x; y; z) = \left(\frac{5}{6}; \frac{4}{5}; \frac{3}{4}\right) \text{ hoặc } (x; y; z) = \left(-\frac{5}{6}; -\frac{4}{5}; -\frac{3}{4}\right).$$

$$\text{b) Cộng cả ba đẳng thức với nhau, ta được } (x - y + z)^2 = 49, \text{ do đó } x - y + z = \pm 7.$$

$$\text{Suy ra: } (x; y; z) = \left(\frac{11}{7}; \frac{25}{7}; -5\right) \text{ hoặc } (x; y; z) = \left(-\frac{11}{7}; -\frac{25}{7}; 5\right).$$

$$\text{c) Vì } (x + 2)^2, (y - 3)^4, (z - 5)^6 \text{ không âm, mà } (x + 2)^2 + (y - 3)^4 + (z - 5)^6 = 0 \text{ nên: } (x + 2)^2 = 0; (y - 3)^4 = 0; (z - 5)^6 = 0. \text{ Suy ra: } x = -2; y = 3 \text{ và } z = 5.$$

VÍ DỤ 1.20. Tìm số hữu tỉ x , biết:

$$\text{a) } \frac{x-100}{24} + \frac{x-98}{26} + \frac{x-96}{28} = 3; \quad \text{b) } \frac{x-1}{65} + \frac{x-3}{63} = \frac{x-5}{61} + \frac{x-7}{59};$$

$$\text{c) } \frac{x-28-124}{2011} + \frac{x-124-2011}{28} + \frac{x-2011-28}{124} = 3.$$

Giải

a) Trừ mỗi phân số cho 1, ta được $\frac{x-124}{24} + \frac{x-124}{26} + \frac{x-124}{28} = 0$.

Suy ra: $(x-124) \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{28} \right) = 0$. Vậy $x = 124$.

b) Trừ mỗi phân số của cả hai vế cho 1, ta được

$$\frac{x-66}{65} + \frac{x-66}{63} = \frac{x-66}{61} + \frac{x-66}{59}.$$

Suy ra: $(x-66) \cdot \left(\frac{1}{65} + \frac{1}{63} - \frac{1}{61} - \frac{1}{59} \right) = 0$. Vậy $x = 66$.

c) Trừ mỗi phân số cho 1 ta được

$$\frac{x-28-124-2011}{2011} + \frac{x-124-2011-28}{28} + \frac{x-2011-28-124}{124} = 0.$$

Suy ra: $(x-28-124-2011) \cdot \left(\frac{1}{28} + \frac{1}{124} + \frac{1}{2011} \right) = 0$.

Vậy: $x = 28 + 124 + 2011 = 2163$.

Dạng 5. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ x , kí hiệu là $|x|$, là số đo khoảng cách từ điểm x tới điểm gốc (điểm 0) trên trục số.
2. Định nghĩa trên được viết dưới dạng: $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$
 - Kí hiệu $-x$ được đọc là số đối của x .
3. Với mọi $x \in \mathbb{Q}$, ta luôn có $|x| \geq 0$; $|x| = |-x|$ và $|x| \geq x$.

Kiến thức bổ sung

4. Nếu $m > 0$ thì:
 - $|x| \leq m \Leftrightarrow -m \leq x \leq m$;
 - $|x| \geq m \Leftrightarrow x \geq m$ hoặc $x \leq -m$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 1.21. Tính giá trị của các biểu thức A, B, C:

a) $A = |x + y - z|$ với $x = -1$; $y = 2$ và $z = 4$.

b) $B = |x| + |x - 1| + |x - 2|$ với $x = -0,25$.

c) $C = 4x^2 - 2x - 1$ với $|x| = 0,5$.

Giải

a) Ta có: $A = |(-1) + 2 - 4| = |-3| = 3$.

b) Ta có: $B = |-0,25| + |(-0,25) - 1| + |(-0,25) - 2| = 3,75$.

c) Vì: $|x| = 0,5$ nên $x = \pm 0,5$.

Nếu $x = 0,5$ thì $C = 4.(0,5)^2 - 2.(0,5) - 1 = -1$.

Nếu $x = -0,5$ thì $C = 4.(-0,5)^2 - 2.(-0,5) - 1 = 1$.

Vậy $C = -1$ hoặc $C = 1$.

VÍ DỤ 1.22. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = x + |x|$;

b) $B = |x| - x$;

c) $C = 2.(3x - 1) - |5 - x|$;

d) $D = 2.|2x - 1| - 3.|2x + 3|$.

Giải

a) Ta xét hai trường hợp:

Nếu $x \geq 0$ thì $|x| = x$, ta có $A = x + x = 2x$.

Nếu $x < 0$ thì $|x| = -x$, ta có $A = x + (-x) = 0$.

Vậy $A = 2x$ nếu $x \geq 0$ và $A = 0$ nếu $x < 0$.

b) Tương tự xét hai trường hợp. Ta có: $B = 0$ nếu $x \geq 0$ và $B = -2x$ nếu $x < 0$.

c) Ta xét hai trường hợp:

Nếu $x \geq 5$ thì $|5 - x| = -(5 - x) = x - 5$, ta có $C = 2(3x - 1) - (x - 5) = 5x + 3$.

Nếu $x < 5$ thì $|5 - x| = 5 - x$, ta có $C = 2(3x - 1) - (5 - x) = 7x - 7$.

Vậy $C = 5x + 3$ nếu $x \geq 5$ và $C = 7x - 7$ nếu $x < 5$.

d) Ta xét ba trường hợp:

Nếu $x \geq 0,5$ thì $|2x - 1| = 2x - 1$ và $|2x + 3| = 2x + 3$ nên $D = -2x - 11$.

Nếu $-1,5 < x < 0,5$ thì $|2x - 1| = 1 - 2x$ và $|2x + 3| = 2x + 3$ nên $D = -10x - 7$.

Nếu $x \leq -1,5$ thì $|2x - 1| = 1 - 2x$ và $|2x + 3| = -(2x + 3)$ nên $D = 2x + 11$.

Vậy: $D = -2x - 11$ nếu $x \geq 0,5$;

$D = -10x - 7$ nếu $-1,5 < x < 0,5$;

$D = 2x + 11$ nếu $x \leq -1,5$.

VÍ DỤ 1.23. Tìm x , biết:

a) $3|4x - 1| - 2 = 19$;

b) $|x + 2| - 6x = 1$;

c) $|15 + x| + x = -15$;

d) $|x - 3| + |x + 2| = 7$;

e) $|2x + 1| + |x + 8| = 4x$;

g) $|x^2 - 2x| = x$;

h) $|x| = -x - 5$.

Giải

a) Có $|4x - 1| = 7$ nên $4x - 1 = \pm 7$. Suy ra: $x \in \{-1,5; 2\}$.

b) Xét $x \geq -2$ thì $(x + 2) - 6x = 1$ nên $x = 0,2 > -2$ (chọn).

Xét $x < -2$ thì $-(x + 2) - 6x = 1$ nên $x = -\frac{3}{7} > -2$ (loại).

Suy ra $x = 0,2$.

c) *Cách 1:* Xét $x \geq -15$ thì $(15 + x) + x = -15$ nên $x = -15$ (chọn).

Xét $x < -15$ thì $-(15 + x) + x = -15$, đúng với mọi $x < -15$ (chọn).

Suy ra $x \leq -15$.

Cách 2: $|15 + x| + x = -15 \Leftrightarrow |x + 15| = -(x + 15)$.

Ta biết rằng $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$. Do đó $x + 15 \leq 0$.

Vậy $x \leq -15$.

d) Xét ba trường hợp $x < -2$; $-2 \leq x \leq 3$ và $x > 3$. Suy ra $x \in \{-3; 4\}$.

e) Có $|2x + 1| \geq 0$ và $|x + 8| \geq 0$ nên $|2x + 1| + |x + 8| \geq 0$, suy ra $x \geq 0$.

Với $x \geq 0$ thì $|2x + 1| = 2x + 1$; $|x + 8| = x + 8$ nên $(2x + 1) + (x + 8) = 4x$, do đó $x = 9 > 0$ (chọn).

Vậy $x = 9$.

g) Ta có: $|x^2 - 2x| \geq 0$ nên $x \geq 0$.

Suy ra: $|x^2 - 2x| = |x(x - 2)| = x \cdot |x - 2|$ do $x \geq 0$.

Vậy: $x \cdot |x - 2| = x \Leftrightarrow x(|x - 2| - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 3\}$.

h) Ta có: $|x| \geq 0$, mà $|x| = -x - 5$ nên $-x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \leq -5 \Rightarrow |x| = -x$.

Vậy $|x| = -x - 5 \Leftrightarrow -x = -x - 5 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -5$. Vậy: $x \in \emptyset$.

VÍ DỤ 1.24. Tìm x và y , biết:

a) $|x - y| + |y + 0,28| = 0$;

b) $|0,1 - 0,01 - x| = -0,001 - |y|$.

Giải

a) Ta có $|x - y| \geq 0$ và $|y + 0,28| \geq 0$,

mà $|x - y| + |y + 0,28| = 0$ nên $|x - y| = |y + 0,28| = 0$.

Suy ra: $y = -0,28$ và $x = -0,28$.

b) Ta có: $|0,1 - 0,01 - x| + |y| = -0,001 < 0$,

mà $|0,1 - 0,01 - x| \geq 0$ và $|y| \geq 0$,

Suy ra: $x, y \in \emptyset$.

Dạng 6. TÌM SỐ HỮU TỈ CHƯA BIẾT TRONG MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nếu hai số a, b khác nhau, ta có một bất đẳng thức $a > b$ (hoặc $a < b$). Bất đẳng thức $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

2. Tính chất:

- Cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức

$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c.$$

- Nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương

$$a > b \Leftrightarrow ac > bc, \text{ với } c > 0.$$

- Nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm và đổi chiều bất đẳng thức

$$a > b \Leftrightarrow ac < bc, \text{ với } c < 0.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 1.25. Tìm số hữu tỉ x , biết rằng:

$$\text{a) } 3x + 4 \geq 7; \quad \text{b) } -5x + 1 < 11; \quad \text{c) } \frac{5}{x-3} < 0; \quad \text{d) } \frac{-7}{2-x} \geq 0.$$

Giải

a) Có $3x + 4 \geq 7 \Leftrightarrow 3x \geq 7 - 4 \Leftrightarrow 3x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1$.

b) Có $-5x + 1 < 11$.

Cách 1: $-5x + 1 < 11 \Leftrightarrow -5x < 11 - 1 \Leftrightarrow -5x < 10 \Leftrightarrow x > -2$.

Cách 2: $-5x + 1 < 11 \Leftrightarrow 1 - 11 < 5x \Leftrightarrow -10 < 5x \Leftrightarrow -2 < x$.

Lưu ý: Với cách giải thứ nhất, khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với một số âm ta phải đổi chiều của bất đẳng thức.

c) Có $\frac{5}{x-3} < 0$. Điều kiện: $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

Tử số là một số dương, nên ta có: $x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$ (thỏa mãn điều kiện).

d) Có $\frac{-7}{2-x} \geq 0$. Tương tự, ta có $x > 2$.

VÍ DỤ 1.26.

a) Biết $A = x(x - 2)$. Tìm x để: $A \geq 0$; $A < 0$.

b) Biết $B = \frac{x+2}{3-x}$. Tìm x để: $B > 0$; $B \leq 0$.

c) Biết $C = (x - 1)(x + 2)(3 - x)$. Tìm x sao cho $C < 0$.

d) Biết $D = (x^2 - 2)(16 - x^2)$. Tìm x sao cho $D \geq 0$.

Giải

a) *Cách 1*: Xét hai trường hợp ($x \leq 0$ và $x - 2 \leq 0$) và ($x \geq 0$ và $x - 2 \geq 0$).

Cách 2: Phương pháp lập bảng xét dấu:

x		0		2	
x	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	0	+
A	+	0	-	0	+

Vậy $A \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq 0 \text{ hoặc } x \geq 2)$ và $A < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

b) Có $B = \frac{x+2}{3-x}$. Điều kiện để mẫu số khác 0 là $x \neq 3$.

Lập bảng xét dấu:

x		-2		3	
$x + 2$	-	0	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	0	-
B	-	0	+		-

Vậy $B > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$;

$B \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ hoặc } x > 3$.

c) Biết $C = (x - 1)(x + 2)(3 - x)$.

Lập bảng xét dấu:

x	- 2			1	3		
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$x + 2$	-	0	+	+	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	+	+	0	-
C	+	0	-	0	+	0	-

Vậy $C < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$ hoặc $x > 3$.

d) Biết $D = (x^2 - 2)(16 - x^2)$.

Lập bảng xét dấu:

x^2	2			16		
$x^2 - 2$	-	0	+	+	+	+
$16 - x^2$	+	+	+	0	-	-
D	-	0	+	0	-	-

Suy ra: $D \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x^2 \leq 16$.

Có: $x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$ và $x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2}$ hoặc $x \geq \sqrt{2}$.

Vậy kết hợp lại ta có: $D \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -\sqrt{2}$ hoặc $\sqrt{2} \leq x \leq 4$.

VÍ DỤ 1.27. Tìm số nguyên x, biết:

a) $32 < 2^x < 128$;

b) $3^{-8} \leq 3^x < \frac{1}{243}$;

c) $|3x - 1| \leq 5$;

d) $\frac{4}{7} < |x - \frac{8}{7}| < \frac{5}{7}$.

Giải

a) Có $2^5 < 2^x < 2^7$. Suy ra: $x = 6$.

b) Có $3^{-8} \leq 3^x < 3^{-5}$. Suy ra: $x \in \{-8; -7; -6\}$.

c) Có $|3x - 1| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 3x - 1 \leq 5 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq 2$. Vậy $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

d) Chú ý ghép các bất đẳng thức, ta có $\frac{3}{7} < x < \frac{4}{7}$ hoặc $\frac{12}{7} < x < \frac{13}{7}$. Do $x \in \mathbb{Z}$

nên $x \in \emptyset$.

Dạng 7. NHỮNG BÀI TOÁN VẬN DỤNG CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ HỮU TỈ

VÍ DỤ 1.28.

a) Viết 60 số hữu tỉ -1 hoặc 1 thành một vòng tròn theo chiều kim đồng hồ sao cho tích của ba số bất kì cạnh nhau bằng -1 . Tìm tổng của 60 số đó.

b) Viết 11 số hữu tỉ thành một vòng tròn theo chiều kim đồng hồ sao cho tích của hai số bất kì cạnh nhau bằng 9 . Tìm tổng của 11 số đó.

Giải

a) Vì tích của ba số cạnh nhau bằng -1 nên có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: Ba số đều bằng -1 suy ra cả 60 số đều bằng -1 và xếp như sau: $-1, -1, -1, -1, \dots, -1, -1, -1$. Vậy tổng của 60 số bằng -60 .

Trường hợp 2: Trong ba số có hai số 1 và một số -1 chúng được xếp theo thứ tự:

$$-1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots$$

Có 60 số xếp vòng tròn nên có 40 số 1 và 20 số -1 . Vậy tổng của 60 số bằng 20 .

Vậy tổng bằng -60 hoặc 20 .

b) Kí hiệu 11 số hữu tỉ xếp theo vòng tròn lần lượt là $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{11}$. Do tích của hai số bất kì cạnh nhau bằng 9 nên cả 11 số đều khác 0 .

$$\text{Có } a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_3 = a_3 \cdot a_4 = \dots = a_{10} \cdot a_{11} = a_{11} \cdot a_1.$$

$$\text{Suy ra: } a_2 \cdot (a_1 - a_3) = 0; a_3 \cdot (a_2 - a_4) = 0; a_4 \cdot (a_3 - a_5) = 0; \dots; a_{11} \cdot (a_{11} - a_2) = 0.$$

Do cả 11 số đều khác 0 , nên $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{11} = a_2$ và $a_2 = a_4 = a_6 = \dots = a_{10} = a_1$.

Suy ra: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_{11}$. Vậy cả 11 số đều bằng nhau, mà tích của hai số cạnh nhau bằng 9, nên 11 số đó cùng bằng 3 hoặc cùng bằng -3. Suy ra tổng 11 số đó bằng 33 hoặc -33.

VÍ DỤ 1.29.

a) Cho 13 số hữu tỉ, trong đó tổng của 4 số bất kì nào cũng là một số dương. Hỏi tổng của 13 số đó là số dương hay số âm ?

b) Cho 13 số hữu tỉ, trong đó tích của 3 số bất kì nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng 13 số đã cho đều là số âm.

Giải

Trước hết ta kí hiệu 13 số đã cho lần lượt là $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{12}; a_{13}$.

a) Xét 13 tổng sau:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > 0$$

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 > 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\underline{a_{13} + a_1 + a_2 + a_3 > 0}$$

Suy ra $4.(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{13}) > 0$.

Vậy: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{13} > 0$.

Tổng của 13 số đã cho là một số dương.

b) Xét 13 tích sau: $a_1.a_2.a_3 < 0, a_2.a_3.a_4 < 0, \dots, a_{13}.a_1.a_2 < 0$.

Suy ra: $(a_1.a_2.a_3 \dots a_{13})^3 < 0$ nên $a_1.a_2.a_3 \dots a_{13} < 0$.

Tách riêng một số từ tích 13 số trên, 12 số còn lại chia thành 4 nhóm ba số, ta có

$$(a_1.a_2.a_3).(a_4.a_5.a_6).(a_7.a_8.a_9).(a_{10}.a_{11}.a_{12}).a_{13} < 0.$$

Ta thấy tích của mỗi nhóm ba số là một số âm nên tích của 4 nhóm như vậy là số dương và suy ra số được tách riêng là một số âm.

Tương tự cho 13 số và ta được 13 số đã cho đều là số âm.

VÍ DỤ 1.30. Chứng minh rằng không thể viết được một dãy gồm 12 số sao cho thoả mãn đồng thời cả hai điều kiện sau:

Tổng của 9 số bất kì liên tiếp là một số dương (điều kiện 1);

Tổng của 6 số bất kì liên tiếp là một số âm (điều kiện 2).

Giải

Trước hết ta kí hiệu 12 số đã cho lần lượt là: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{11}; a_{12}$.

Giả sử viết được 12 số thoả mãn cả điều kiện 1 và điều kiện 2.

Theo điều kiện 1, ta có: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 > 0$. (i)

Theo điều kiện 2, ta có: $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 < 0$. (j)

Từ (i) và (j), ta có: $a_1 + a_2 + a_3 > 0$. (1)

Tương tự, ta cũng có: $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} > 0$.

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} < 0.$$

Suy ra: $a_4 + a_5 + a_6 > 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 > 0$. Vô lí, vì trái với giả thiết là tổng của 6 số bất kì liên tiếp là một số âm.

Vậy, không thể viết được 12 số đồng thời thoả mãn cả điều kiện 1 và điều kiện 2 ở trên.

VÍ DỤ 1.31.

a) Cho 5 số a_1, a_2, a_3, a_4 và a_5 mà mỗi số bằng 1 hoặc -1.

Chứng minh rằng $S_5 \neq 0$ nếu $S_5 = a_1.a_2 + a_2.a_3 + a_3.a_4 + a_4.a_5 + a_5.a_1$.

b) Cho 6 số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 và a_6 mà mỗi số bằng 1 hoặc -1.

Chứng minh rằng $S_6 \neq 0$ nếu $S_6 = a_1.a_2 + a_2.a_3 + a_3.a_4 + a_4.a_5 + a_5.a_6 + a_6.a_1$.

c) Cho n số $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ mà mỗi số bằng 1 hoặc -1.

Chứng minh rằng $S_n = a_1.a_2 + a_2.a_3 + a_3.a_4 + \dots + a_n.a_1 = 0$ khi và chỉ khi n chia hết cho 4.

Giải

a) Vì 5 số đã cho bằng 1 hoặc -1 nên 5 tích $a_1.a_2, a_2.a_3, a_3.a_4, a_4.a_5, a_5.a_1$ cũng bằng 1 hoặc -1.

Trong S_5 ta có 5 số hạng bằng 1 hoặc -1 nên số số hạng 1 và -1 không bằng nhau và như vậy tổng của chúng không thể bằng 0, hay $S_5 \neq 0$.

b) Tương tự câu a), ta có 6 tích $a_1.a_2, a_2.a_3, a_3.a_4, a_4.a_5, a_5.a_6$ và $a_6.a_1$ cũng bằng 1 hoặc -1 .

Để thấy số tích bằng -1 là một số chẵn, vì:

Nếu chỉ có $a_1 = -1$, các số còn lại là 1 thì ta có hai tích là $a_1.a_2 = a_6.a_1 = -1$.

Nếu có hai số cạnh nhau, chẳng hạn như a_1 và a_2 bằng -1 , các số còn lại là 1 thì ta có được hai tích là $a_2.a_3 = a_6.a_1 = -1$.

Nếu có hai số không cạnh nhau, chẳng hạn như a_1 và a_3 bằng -1 , các số còn lại là 1 thì ta có bốn tích là $a_1.a_2, a_2.a_3, a_3.a_4$ và $a_6.a_1$ bằng -1 .

Tương tự, kết luận được số tích bằng -1 là một số chẵn.

Có 6 tích bằng 1 hoặc -1 , mà số tích bằng -1 là số chẵn nên số số hạng 1 và -1 không bằng nhau và tổng của 6 số đó không thể bằng 0, hay ta có $S_6 \neq 0$.

c) Tổng của n số hạng, mà mỗi số hạng hoặc bằng 1 hoặc bằng -1 , bằng 0 khi và chỉ khi số số hạng 1 bằng số số hạng -1 . Suy ra n là số chẵn ($= 2k$), hay có k số hạng là -1 .

Ta có: $(a_1.a_2).(a_2.a_3).(a_3.a_4) \dots (a_n.a_1) = (a_1.a_2.a_3 \dots a_n)^2 = 1$, suy ra số số hạng bằng -1 phải là số chẵn hay $k = 2k'$.

Vậy $n = 2k = 4k'$, tức là n chia hết cho 4.

VÍ DỤ 1.32.

Các bạn A, B, C, D, E chơi một trò chơi mà trong đó mỗi người sẽ nhận được một số 1 hoặc -1 . Ai nhận được số 1 thì luôn phải nói đúng còn ai nhận được số -1 thì luôn phải nói sai. Biết các bạn có ý kiến như sau:

A: B nhận được số 1;

B: C nhận được số -1 ;

C: D nhận được số -1 ;

D: A và E nhận được hai số trái dấu nhau;

E: A nhận được số 1.

Hỏi tổng các số mà năm bạn nhận được là bao nhiêu?

Giải

• Nếu bạn A là người nói đúng (A nhận số 1) thì theo trình tự ta có:

A nói đúng $\Rightarrow$ B nhận số 1 và B là người nói đúng;

B nói đúng $\Rightarrow$ C nhận số -1 và C là người nói sai;

C nói sai $\Rightarrow$ D nhận số 1 và D là người nói đúng;

D nói đúng $\Rightarrow$ E nhận số -1 vì A và E nhận hai số trái dấu nên E là người nói sai;

E nói sai $\Rightarrow$ A nhận số -1, trái với A nhận số 1.

Vậy phương án "A nói đúng" là phương án sai, loại.

• Nếu bạn A là người nói sai (A nhận số -1), tương tự như trên ta có:

B nhận số -1, C nhận số 1, D nhận số -1, E nhận số -1. Kết quả đúng.

• Vậy bạn A nói sai, tức là có 4 người nhận số -1, một người nhận số 1 nên tổng các số mà 5 bạn nhận được bằng $(-1).4 + 1 = -3$.

VÍ DỤ 1.33.

a) Cho 13 số nguyên $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{13}$ và 13 số $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots, b_{13}$ cũng là các số nguyên đó nhưng được viết theo một thứ tự khác. Hỏi tích T là số chẵn hay lẻ, nếu:

$$T = (a_1 - b_1).(a_2 - b_2).(a_3 - b_3) \dots (a_{13} - b_{13}).$$

b) Cho 5 số tự nhiên khác 0 là a, b, x, y, z thỏa mãn $a^2 + b^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Hỏi tổng S có là số nguyên tố không, nếu: $S = a + b + x + y + z$?

Giải

a) Xét tổng của 13 hiệu:

$$\begin{aligned} & (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots + (a_{13} - b_{13}) = \\ & = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{13}) - (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{13}) = 0. \end{aligned}$$

Suy ra trong 13 hiệu trên phải có ít nhất một số chẵn, vì nếu tất cả các hiệu đó đều là số lẻ thì tổng của cả 13 hiệu là số lẻ và không thể bằng 0 được.

Vì có ít nhất một hiệu là số chẵn nên

$$T = (a_1 - b_1).(a_2 - b_2).(a_3 - b_3) \dots (a_{13} - b_{13})$$

là số chẵn.

b) Xét hiệu:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + z^2) - (a + b + x + y + z) = \\ & = (a^2 - a) + (b^2 - b) + (x^2 - x) + (y^2 - y) + (z^2 - z) = k. \end{aligned}$$

Dễ thấy k chia hết cho 2 vì $n^2 - n$ luôn chia hết cho 2 với mọi n là số tự nhiên.

Mặt khác, theo đề bài ta có $a^2 + b^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

nên $a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2)$ chia hết cho 2.

Suy ra $a + b + x + y + z$ chia hết cho 2. (1)

Do a, b, x, y, z là 5 số tự nhiên khác 0 nên $a + b + x + y + z > 2$. (2)

Từ (1) và (2) ta có tổng S không là số nguyên tố.

Dạng 8. HÌNH VUÔNG KÌ DIỆU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hình vuông kích thước 3×3 (tạo thành 9 hình vuông nhỏ) chứa 9 số mà tổng các số trong mỗi hàng, trong mỗi cột và trong mỗi đường chéo đều bằng nhau được gọi là một *hình vuông kì diệu*. Hình vuông 1.1 là một hình vuông kì diệu vì tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng 15.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Hình 1.1

a	m	b
p	α	q
d	n	c

Hình 1.2

2. Chín ô vuông nhỏ trong một hình vuông kì diệu được chia thành ba loại ô:
 - Chỉ có một ô ở tâm, bốn ô ở bốn góc và bốn ô còn lại.
 - Đặt tổng của 9 số trong một hình vuông kì diệu là S và tổng bằng nhau của mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo là T . Ta có $T = S : 3$. Như vậy nếu các số trong mỗi ô đều là số nguyên thì S phải chia hết cho 3 ta mới có một hình vuông kì diệu.
3. Trong hình 1.2, ô ở tâm là α , bốn ô ở góc là a, b, c và d ; các ô còn lại là m, n và p, q .

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 1.34. Điền các số dưới đây vào một hình vuông kích thước 3×3 để hình vuông đó thành một hình vuông kì diệu:

- a) $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9$;
b) $-2; -4; -6; -8; -10; -12; -14; -16; -18$.

Giải

-2	-9	-4
-7	-5	-3
-6	-1	-8

Hình 1.3

-4	-18	-8
-14	-10	-6
-12	-2	-16

Hình 1.4

- a) Ta có kết quả ở hình 1.3.
b) Ta có kết quả ở hình 1.4.

VÍ DỤ 1.35.

Điền các số còn thiếu vào các ô trong hình 1.5 và hình 1.6 để được hình vuông kì diệu:

	35	
		39
	13	

Hình 1.5

-18		-2
	-14	

Hình 1.6

Giải

- a) Vì tổng các số ở hàng ngang, hàng dọc và đường chéo đều bằng nhau, ta có:
Với cột thứ hai và hàng ngang thứ hai: $35 + \alpha + 13 = 39 + \alpha + p$ nên $p = 9$.
Với đường chéo thứ nhất và hàng ngang thứ hai:

$$a + \alpha + c = p + \alpha + 39 = 9 + \alpha + 39 \text{ nên } a + c = 48.$$

Với hàng ngang thứ nhất và cột thứ ba:

$$a + 35 + b = b + 39 + c, \text{ nên } a - c = 4.$$

Suy ra $a = 26$ và $c = 22$.

Với đường chéo thứ hai và cột thứ hai: $b + \alpha + d = 35 + \alpha + 13$ nên $b + d = 48$.

Với hàng ngang thứ nhất và hàng ngang thứ ba: $a + 35 + b = d + 13 + c$, mà $a = 26$ và $c = 22$ nên $d - b = 26$. Suy ra $b = 11$ và $d = 37$.

$$\text{Có } T = 26 + 35 + 11 = 72 \text{ nên } \alpha = 72 - (35 + 13) = 24.$$

Ta được một hình vuông kì diệu ở hình 1.7.

26	35	11
9	24	39
37	13	22

Hình 1.7

- 8	- 6	- 16
- 18	- 10	- 2
- 4	- 14	- 12

Hình 1.8

b) Tương tự câu a), ta có kết quả ở hình 1.8.

VÍ DỤ 1.36. Các số tự nhiên từ 1 đến 9 được điền vào các ô vuông để ta có một hình vuông kì diệu. Hỏi nếu không điền trực tiếp, có thể biết số nào được điền vào ô vuông ở tâm không ?

Giải

Cách 1: Có $S = 45$ nên $T = 15$, ta sẽ chứng minh $\alpha = 5$.

Nếu $\alpha > 5$, tức là $\alpha \geq 6$. Xét số 9 nằm ở một trong các ô còn lại, chẳng hạn $m = 9$. Thế thì ở cột thứ hai $n \leq 15 - (m + \alpha) = 15 - (9 + 6) = 0$. Vô lí !

Nếu $\alpha < 5$, tức là $\alpha \leq 4$. Xét số 1 nằm ở một trong các ô còn lại, chẳng hạn $m = 1$. Thế thì ở cột thứ hai $n \geq 15 - (m + \alpha) = 15 - (1 + 4) = 10$. Vô lí !

Vậy $\alpha = 5$.

Cách 2: Vì $S = 45$ nên $T = 15$, ta có $15 - \alpha = a + c = b + d = m + n = p + q$.

$$\text{Có } 4 \cdot (15 - \alpha) = (a + c) + (b + d) + (m + n) + (p + q).$$

$$\text{Suy ra } 60 - 4\alpha = (a + b + c + d + m + n + p + q + \alpha) - \alpha = S - \alpha = 45 - \alpha.$$

$$\text{Vậy } 3\alpha = 15, \text{ hay } \alpha = 5.$$

VÍ DỤ 1.37. Hình 1.9 là một hình vuông kì diệu. Hỏi α là số nào ?

	- 5	
	α	
	- 23	

Hình 1.9

Giải

Theo cách giải 2 của ví dụ 1.36, ta có: $T - \alpha = a + c = b + d = m + n = p + q$.

Suy ra: $4(T - \alpha) = (a + b + c + d + m + n + p + q + \alpha) - \alpha$

$$\Rightarrow 4T - 4\alpha = S - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4T - S}{3} = \frac{T}{3} \quad (\text{do } 3T = S).$$

Giả sử x và y là hai số còn lại cùng hàng, hoặc cùng cột, hoặc cùng đường chéo với số α , ta có:

$$\alpha = \frac{T}{3} = \frac{\alpha + x + y}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{x + y}{2}.$$

Vậy giá trị của số α ở tâm của một hình vuông kì diệu bằng trung bình cộng của hai số còn lại cùng hàng, hoặc cùng cột, hoặc cùng đường chéo.

Với hình vuông kì diệu ở hình 1.9, ta có $\alpha = [(-5) + (-23)]:2 = -14$.

Lưu ý: Với một hình vuông kì diệu, số ở tâm bằng trung bình cộng của hai số còn lại cùng hàng, hoặc cùng cột, hoặc cùng đường chéo. Ta có thể sử dụng quy tắc này để giải toán.

BÀI TẬP

1.1. So sánh nhanh các số hữu tỉ sau:

a) $\frac{-1941}{1931}$ và $\frac{-2011}{2001}$; $\frac{-1930}{1945}$ và $\frac{-1996}{2011}$; $\frac{37}{59}$ và $\frac{47}{69}$; $\frac{-25}{124}$ và $\frac{-27}{100}$;

b) $\frac{-97}{201}$ và $\frac{-194}{399}$; $\frac{-189}{398}$ và $\frac{-187}{394}$; $\frac{-289}{403}$ và $\frac{-298}{401}$.

1.2. Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

$$\frac{-15}{19}; \frac{-37}{41}; \frac{76}{-89}; \frac{-5}{9}; \frac{23}{-27}; \frac{-7}{11}.$$

1.3. Biết $p = \frac{-1}{3}$; $q = \frac{-10}{3}$ và $r = \frac{-3}{10}$, trong các mệnh đề (MĐ) sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

MĐ 1: $q > r$ và $p > q$;

MĐ 2: $p > q$ và $r > p$;

MĐ 3: $q > r$ và $r > p$;

MĐ 4: $r > q$ và $r > p$;

MĐ 5: $p > r$ và $q > p$.

1.4. Số nào trong các số $\frac{-1}{4}$; $\frac{-8}{15}$; $\frac{2}{-15}$; $\frac{-4}{15}$; $\frac{1}{-2}$ nằm giữa hai số $\frac{-1}{3}$ và $\frac{1}{-5}$.

1.5. Cho $A = \{-28; 37; -138; 19; -42\}$. Tìm hai số khác nhau a và b thuộc tập hợp A sao cho: $-101 < a + b < -8$.

1.6. Tính:

$$A = \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{4}{5} - 1\right) + \left(\frac{7}{5} + 2\right); \quad B = \left(-3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) : \left(5 + \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right);$$

$$C = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{15}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{3}{14}\right) - \left(\frac{5}{9} - \frac{7}{27}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) + \left(1 - \frac{11}{12}\right) \cdot \left(1 + \frac{11}{12}\right).$$

1.7. Tính:

$$D = \frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{4}{15} - \frac{7}{20}\right) \cdot \frac{-5}{19}}{\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{7} - \frac{-3}{35}\right) \cdot \frac{4}{3}}; \quad E = \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}; \quad G = 1 - \frac{1}{1 - \frac{2}{1 - \frac{3}{1 - \frac{1}{4}}}}.$$

1.8. Tính:

$$\text{a) } A = \frac{\frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17}}{\frac{5}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17}} + \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \frac{2}{81}}{\frac{3}{7} - \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \frac{2}{81}};$$

$$\text{b) } B = \frac{5^2}{11.16} + \frac{5^2}{16.21} + \frac{5^2}{21.26} + \frac{5^2}{26.31} + \dots + \frac{5^2}{56.61};$$

$$\text{c) } C = -1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{15} - \dots - \frac{1}{1225}.$$

1.9. Tìm x, biết:

$$\text{a) } -\frac{2}{3} \cdot x + 4 = -12;$$

$$\text{b) } -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3;$$

$$\text{c) } \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{4} = \frac{x+1}{5} + \frac{x+1}{6};$$

$$\text{d) } \frac{x+1}{2009} + \frac{x+2}{2008} + \frac{x+3}{2007} = \frac{x+10}{2000} + \frac{x+11}{1999} + \frac{x+12}{1998}.$$

1.10. Tính:

$$\text{a) } A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20};$$

$$\text{b) } B = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} - 2^{97} + \dots + 2^2 - 2;$$

$$\text{c) } C = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \dots + 3^2 - 3;$$

$$\text{d) } D = S_{35} + S_{60} + S_{100} \text{ với } S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n; \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1.11. Tìm số nguyên x, biết: $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \dots 2^x = 1024$.

1.12. Sắp xếp các số sau từ nhỏ đến lớn: $-222, -22^2, 22^{-2}, -2^{22}, 2^{-22}, -2^{22}$.

1.13. Cho 31 số hữu tỉ, trong đó bất kì năm số nào cũng có tích là một số dương. Chứng minh rằng tích của 31 số đó cũng là một số dương.

1.14. Cho 51 số hữu tỉ, biết rằng tích của cả 51 số đó và tích của 4 số bất kì trong chúng là số dương. Chứng minh rằng 51 số đã cho đều là số dương.

- 1.15. Viết 120 số 1 hoặc -1 theo một vòng tròn. Biết rằng tích của ba số bất kì cạnh nhau trong vòng tròn đó bằng -1 . Tìm tổng của 120 số đó.
- 1.16. Cho 30 số nguyên âm: $-30; -29; -28; -27; \dots; -2; -1$. Từ 30 số đó ta chọn ra một nhóm các số sao cho tích những số trong nhóm cho ta một bình phương đúng. Hỏi phải loại đi ít nhất bao nhiêu số và là những số nào để có được kết quả là một bình phương đúng?
- 1.17. Tích của hai số hữu tỉ bằng hiệu của chúng. Tìm hiệu hai số nghịch đảo của hai số hữu tỉ đã cho.
- 1.18. Tìm số hữu tỉ x , biết:

$$\text{a) } |1 - 2x| > 7; \quad \text{b) } \frac{-5}{x-3} < 0; \quad \text{c) } (x-2)(x+2)(4-x)(x-1)^2 \leq 0.$$

Chuyên đề 2. TỈ LỆ THỨC. DÂY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1. TỈ LỆ THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Tỉ lệ thức là một đẳng thức giữa hai tỉ số.
- Nếu các tỉ số $\frac{a}{b} = k$ và $\frac{c}{d} = k$ ($k \neq 0$) thì ta có tỉ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, hoặc có thể viết $a : b = c : d$ ($b, d \neq 0$).
- Các số hữu tỉ a, b, c và d còn được gọi là các *số hạng*. Các số hạng a và d nằm ở "bên ngoài" được gọi là các *ngoại tỉ*; các số hạng b và c nằm ở "bên trong" được gọi là các *trung tỉ*.
- Trong một tỉ lệ thức, tích các trung tỉ bằng tích các ngoại tỉ. Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra $a.d = b.c$.
- Ngược lại, nếu bốn số a, b, c và d khác 0 mà $a.d = b.c$ thì ta có các tỉ lệ thức sau:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Có thể hoán vị (đổi vị trí) các ngoại tỉ, hoặc hoán vị các trung tỉ, hoặc hoán vị cả ngoại tỉ và trung tỉ.

Kiến thức bổ sung

6. Có thể thay thế tỉ số giữa các số hữu tỉ $x = \frac{a}{b}$ và $y = \frac{c}{d}$ bằng tỉ số giữa các số nguyên:

$$x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \right) : \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} \right)$$

với m là BCNN(b, d) và n là ƯCLN(a, c).

7. Có thể phát hiện nhanh bốn số lập thành một tỉ lệ thức nếu như thấy được tích của hai số nào đó bằng tích của hai số còn lại. Trường hợp tổng quát, phải so sánh lần lượt từng cặp tích hai số một để kiểm tra, hoặc có thể sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để kiểm tra.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 2.1. Tìm các tỉ số bằng nhau trong các tỉ số sau rồi lập thành một tỉ lệ thức:

$$\frac{15}{26}; \frac{2929}{37037}; \frac{124}{281}; \frac{1515}{2626}; \frac{124124}{281281}; \frac{5}{8\frac{2}{3}}.$$

Giải

Ta có các tỉ lệ thức: $\frac{15}{26} = \frac{1515}{2626}; \quad \frac{1515}{2626} = \frac{5}{8\frac{2}{3}};$

$$\frac{5}{8\frac{2}{3}} = \frac{15}{26}; \quad \frac{124}{281} = \frac{124124}{281281}.$$

VÍ DỤ 2.2. Thay tỉ số giữa các số hữu tỉ sau bằng tỉ số giữa các số nguyên:

a) $3,75 : 18\frac{3}{4}$; b) $2,16 : 9,3$; c) $6\frac{1}{2} : 73\frac{2}{3}$.

Giải

a) *Cách 1:* $3,75 : 18\frac{3}{4} = \frac{15}{4} : \frac{75}{4} = \left(\frac{15}{4} \cdot \frac{4}{15} \right) : \left(\frac{75}{4} \cdot \frac{4}{15} \right) = 1 : 5.$

Cách 2: $3,75 : 18\frac{3}{4} = \frac{15}{4} : \frac{75}{4} = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{75} = \frac{1}{5} = 1 : 5.$

Cách 3: $3,75 : 18\frac{3}{4} = 3,75 : 18,75 = 1 : 5.$

b) Tương tự: $2,16 : 9,3 = 36 : 155.$

c) $6\frac{1}{2} : 73\frac{2}{3} = 3 : 34.$

VÍ DỤ 2.3. Cách giải sau đúng hay sai? Giải thích.

a) Bốn số 1,05 ; 1,47 ; 42 ; 30 lập thành một tỉ lệ thức vì nếu sắp xếp các số theo thứ tự tăng dần $1,05 < 1,47 < 30 < 42$, ta có $1,05 \cdot 42 = 1,47 \cdot 30$ ($= 44,1$).

b) Bốn số $-0,2$; $0,1$; $-0,1$; $0,2$ không lập thành một tỉ lệ thức vì nếu sắp xếp theo thứ tự tăng dần $-0,2 < -0,1 < 0,1 < 0,2$, ta có $(-0,2) \cdot 0,2 \neq (-0,1) \cdot 0,1$ (vì $-0,04 \neq -0,01$).

Giải

a) **Đúng**, vì đã chỉ ra được tích của hai cặp số bằng nhau, nhưng không cần sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

b) **Sai**, vì $(-0,1) \cdot 0,2 = (-0,2) \cdot 0,1$ ($= -0,02$) nên ta có tỉ lệ thức:

$$\frac{-0,1}{0,1} = \frac{-0,2}{0,2}.$$

VÍ DỤ 2.4. Có thể lập được một tỉ lệ thức từ các số sau hay không, nếu được hãy viết tỉ lệ thức đó (chỉ viết một tỉ lệ thức đại diện của nhóm)?

a) 0,7 ; 0,3 ; 0,9 và 2,1 ;

b) 1,1 ; 0,22 ; 3,3 và 0,66 ;

c) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{6}$;

d) $\frac{1}{4}$; $1\frac{5}{16}$; $1\frac{3}{4}$; $\frac{1}{6}$;

e) -6 ; $4,15$; $2,075$ và $-0,3$;

g) $a = (1 + 2 + 3)^3$; $b = 3^3 + 4^3 + 5^3$;

$c = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$; $d = (1 + 2 + 3 + 4)^2.$

Giải

a) Có $0,3 \cdot 2,1 = 0,63$ và $0,7 \cdot 0,9 = 0,63$. Ta có tỉ lệ thức: $\frac{0,3}{0,7} = \frac{0,9}{2,1}$.

b) Có $0,22 \cdot 3,3 = 0,66 \cdot 1,1$ ($= 0,726$). Ta có tỉ lệ thức: $\frac{0,22}{0,66} = \frac{1,1}{3,3}$.

c) Có $\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$ ($= \frac{1}{18}$). Ta có tỉ lệ thức: $\frac{1}{12} : \frac{1}{3} = \frac{1}{6} : \frac{2}{3}$.

d) Xét từng cặp tích:

• Có $\frac{1}{6} \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{7}{24}$ khác với $\frac{1}{4} \cdot 1\frac{5}{16} = \frac{21}{64}$;

• Có $\frac{1}{6} \cdot 1\frac{5}{16} = \frac{7}{32}$ khác với $\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{7}{16}$;

• Có $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ khác với $1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{5}{16} = \frac{147}{64}$.

Vậy bốn số đã cho không lập thành một tỉ lệ thức.

e) Xét từng cặp tích:

• Có $(-6) \cdot 4,15 = -24,9$ khác với $2,075 \cdot (-0,3) = -0,6225$;

• Có $(-6) \cdot 2,075 = -12,45$ khác với $(-0,3) \cdot 4,15 = -1,245$;

• Có $(-6) \cdot (-0,3) = 1,8$ khác với $4,15 \cdot 2,075 = 8,61125$.

Vậy bốn số đã cho không lập thành một tỉ lệ thức.

g) Có $a = (1 + 2 + 3)^3 = 6^3 = 216$; $b = 3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216$;

$c = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$ và $d = (1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2 = 100$.

Có $ac = bd$. Vậy ta có tỉ lệ thức: $\frac{(1+2+3)^3}{(1+2+3+4)^2} = \frac{3^3 + 4^3 + 5^3}{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}$.

VÍ DỤ 2.5. Tìm số hữu tỉ x trong các tỉ lệ thức sau:

a) $x : 4\frac{1}{6} = 7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$;

b) $7,5 : 3\frac{1}{8} = (48x) : 5\frac{1}{4}$;

c) $16 : x^2 = x : (-4)$;

d) $x : 0,27 = 3 : x$;

$$e) 0,81 : \frac{x}{2} = \frac{16}{x^4} : (-0,9) ;$$

$$g) x : y = 3 : 2; \quad y : z = 2 : 1 \quad \text{và} \quad z : 1 = 1 : 1\frac{1}{4}.$$

$$h) 7 : (8x) = 10 : y; \quad 9 : (2y) = 5 : (3z); \quad 10 : z = 9 : 4.$$

Giải. Áp dụng tính chất nhân chéo, ta có

$$a) x = \left(4\frac{1}{6} \cdot 7\frac{1}{2} \right) : 2\frac{1}{4} = \frac{125}{9} = 13\frac{8}{9}.$$

$$b) 48x = \left(7,5 \cdot 5\frac{1}{4} \right) : 3\frac{1}{8} = \frac{63}{5} \Rightarrow x = \frac{21}{80}.$$

$$c) x^3 = -64 \Rightarrow x = -4.$$

$$d) x^2 = 0,81 \Rightarrow x = \pm 0,9.$$

$$e) \frac{x}{2} \cdot \frac{16}{x^4} = 0,81 \cdot (-0,9). \Rightarrow x = -2\frac{2}{9}.$$

$$g) z = 0,8 \text{ và } y = 1,6 \Rightarrow x = 2,4.$$

$$h) z = 4\frac{4}{9} \Rightarrow y = 12 \Rightarrow x = 1,05.$$

VÍ DỤ 2.6. Tìm số hạng thứ tư lập thành một tỉ lệ thức với ba số hạng sau:

$$a) 36; 324; 9;$$

$$b) \frac{-2}{3}; 0,03; 1\frac{7}{9}.$$

$$c) (-2)^5; (-2)^3; (-2)^7;$$

$$d) 1!; 2!; 3!.$$

Giải

a) Gọi x là số hạng thứ tư của tỉ lệ thức, ta xét các trường hợp sau:

$$x = (36 \cdot 324) : 9 = 1296. \text{ Ta có tỉ lệ thức: } 1296 : 324 = 36 : 9.$$

$$x = (324 \cdot 9) : 36 = 81. \text{ Ta có tỉ lệ thức: } 81 : 9 = 324 : 36.$$

$$x = (9 \cdot 36) : 324 = 1. \text{ Ta có tỉ lệ thức: } 1 : 36 = 9 : 324.$$

$$\text{Vậy } x \in \{1; 81; 1296\}.$$

b) Gọi x là số hạng thứ tư của tỉ lệ thức, ta xét các trường hợp sau:

$$x = \left(\frac{-2}{3} \cdot 0,03 \right) : 1\frac{7}{9} = \frac{-9}{800}. \text{ Ta có tỉ lệ thức: } \left(\frac{-9}{800} \right) : 0,03 = \left(\frac{-2}{3} \right) : 1\frac{7}{9}.$$

$$x = \left(0,03 \cdot 1\frac{7}{9} \right) : \frac{-2}{3} = \frac{-2}{25}. \text{ Ta có tỉ lệ thức: } \left(\frac{-2}{25} \right) : 1\frac{7}{9} = 0,03 : \left(\frac{-2}{3} \right).$$

$$x = \left(1\frac{7}{9} \cdot \frac{-2}{3} \right) : 0,03 = -39\frac{41}{81}. \text{ Ta có tỉ lệ thức: } \left(-39\frac{41}{81} \right) : 1\frac{7}{9} = \frac{-2}{3} : 0,03.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -39\frac{41}{81}; -\frac{2}{25}; -\frac{9}{800} \right\}.$$

c) Tương tự, xét ba trường hợp ta có $x \in \{(-2)^9; (-2)^5; -2\}$.

d) Tương tự, xét ba trường hợp ta có $x \in \left\{ \frac{1}{3}; 3; 12 \right\}$.

VÍ DỤ 2.7. Cho tỉ lệ thức $\frac{5x - 2y}{3x + 4y} = \frac{3}{4}$. Tính tỉ số $x : y$.

Giải

Để thấy $y \neq 0$ nên ta có thể chia cả hai số hạng của tỉ số $\frac{5x - 2y}{3x + 4y}$ cho y . Ta có:

$$\frac{5\frac{x}{y} - 2}{3\frac{x}{y} + 4} = \frac{3}{4}. \text{ Áp dụng tính chất nhân chéo, ta có } 4(5t - 2) = 3(3t + 4), \text{ với } t = \frac{x}{y}.$$

$$\text{Ta có } t = \frac{20}{11}, \text{ do đó } \frac{x}{y} = \frac{20}{11}.$$

VÍ DỤ 2.8. Tìm số nguyên x mà:

a) Cùng thêm vào tử và mẫu của phân số $\frac{26}{39}$ ta được một phân số mới có giá trị bằng $\frac{6}{7}$.

b) Thêm vào tử và bớt ở mẫu của phân số $\frac{26}{39}$ ta được một phân số mới có giá trị bằng $\frac{6}{7}$.

Giải

a) Có $\frac{26+x}{39+x} = \frac{6}{7}$, suy ra $7.(26+x) = 6.(39+x)$. Suy ra $x = 52$.

b) Có $\frac{26+x}{39-x} = \frac{6}{7}$, suy ra $7.(26+x) = 6.(39-x)$. Suy ra $x = 4$.

VÍ DỤ 2.9. So sánh các số hữu tỉ sau bằng cách nhân chéo:

a) $\frac{18}{-91}$ và $\frac{-2}{7}$;

b) $\frac{-23}{114}$ và $-\frac{18}{97}$.

Giải

a) Viết lại tỉ số $\frac{18}{-91} = \frac{-18}{91}$. Ta phải so sánh $\frac{-18}{91}$ và $\frac{-2}{7}$.

Có $(-18).7 = -126$ và $91.(-2) = -182$. Mà $-126 > -182$, suy ra $\frac{18}{-91} > \frac{-2}{7}$.

b) Viết lại tỉ số $-\frac{18}{97} = \frac{-18}{97}$. Ta phải so sánh $\frac{-23}{114}$ và $\frac{-18}{97}$.

Có $(-23).97 = -2231$ và $114.(-18) = -2052$. Mà $-2231 < -2052$, suy ra $\frac{-23}{114} < \frac{-18}{97}$.

Dạng 2. Dãy tỉ số bằng nhau

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khi có nhiều tỉ số bằng nhau ghép lại, ta được một dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

2. Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, ta nói các số a, b, c tỉ lệ với x, y, z và viết

$$a : b : c = x : y : z.$$

3. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau: Nếu $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ thì

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{a-b+c}{x-y+z} \quad (\text{với giả thiết các tỉ số đều có nghĩa}).$$

Kiến thức bổ sung

4. Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ thì

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} \\ &= \frac{a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 - b_3 + \dots + b_n}. \end{aligned}$$

5. Tính chất mở rộng của dãy tỉ số bằng nhau: Nếu $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ thì

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{am - bn + cp}{xm - yn + zp}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 2.10. Tính giá trị của k, biết rằng:

$$\text{a) } k = \frac{\overline{ab}}{\overline{abc}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bca}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{cab}}; \quad \text{b) } k = \frac{\overline{abc}}{\overline{ab+c}} = \frac{\overline{bca}}{\overline{bc+a}} = \frac{\overline{cab}}{\overline{ca+b}}.$$

Giải

Do $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ và $\overline{abc}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ là các số có hai và ba chữ số nên $a, b, c > 0$, suy ra $a + b + c \neq 0$.

Vì $a + b + c \neq 0$ nên áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\text{a) } k = \frac{\overline{ab}}{\overline{abc}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bca}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{cab}} = \frac{\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}}{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}} = \frac{11(a+b+c)}{111(a+b+c)} = \frac{11}{111}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } k &= \frac{\overline{abc}}{\overline{ab+c}} = \frac{\overline{bca}}{\overline{bc+a}} = \frac{\overline{cab}}{\overline{ca+b}} = \frac{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}}{\overline{ab+c} + \overline{bc+a} + \overline{ca+b}} \\ &= \frac{111(a+b+c)}{12(a+b+c)} = \frac{111}{12} = \frac{37}{4}. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 2.11. Tìm các số x, y, z , biết rằng:

- a) $\frac{x}{20} = \frac{y}{9} = \frac{z}{6}$ và $x - 2y + 4z = 13$;
b) $4x = 3y, 7y = 5z$ và $x - y + z = -46$;
c) $\frac{x}{2} = \frac{2y}{5} = \frac{4z}{7}$ và $3x + 5y + 7z = 123$;
d) $\frac{x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{3z}{4}$ và $xyz = -108$.

Giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

- a) $\frac{x}{20} = \frac{y}{9} = \frac{z}{6} = \frac{x - 2y + 4z}{20 - 2 \cdot 9 + 4 \cdot 6} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$, suy ra $x = 10$; $y = 4,5$ và $z = 3$.
b) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = \frac{x - y + z}{15 - 20 + 28} = \frac{-46}{23} = -2$.

Suy ra $x = -30$, $y = -40$ và $z = -56$.

- c) $\frac{x}{2} = \frac{2y}{5} = \frac{4z}{7} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{z}{7}$ (nhân mỗi tỉ số với $\frac{1}{4}$).

Suy ra $\frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{z}{7} = \frac{3x + 5y + 7z}{3 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 7} = \frac{123}{123} = 1$. Vậy $x = 8$; $y = 10$ và $z = 7$.

- d) Đặt $\frac{x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{3z}{4} = k$ thì $k^3 = \frac{x}{2} \cdot \frac{2y}{3} \cdot \frac{3z}{4} = \frac{xyz}{4} = \frac{-108}{4} = -27$, suy ra $k = -3$.

Vậy $x = -6$; $y = -4,5$ và $z = -4$.

VÍ DỤ 2.12. Tìm x , biết:

- a) $(x + 15) : x = 4 : 3$;
b) $(7,5 - x) : (3,5 + x) = 5 : 6$;
c) $(x - 20) : (x - 10) = (x + 40) : (x + 70)$.

Giải

- a) Từ a), hoán vị các trung tỉ: $\frac{x + 15}{4} = \frac{x}{3} = \frac{(x + 15) - x}{4 - 3} = 15$, suy ra $x = 45$.

b) Từ b), hoán vị các trung tỉ:

$$\frac{7,5 - x}{5} = \frac{3,5 + x}{6} = \frac{(7,5 - x) + (3,5 + x)}{5 + 6} = \frac{11}{11} = 1, \text{ suy ra } x = 2,5.$$

c) Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$\frac{x - 20}{x - 10} = \frac{x + 40}{x + 70} = \frac{(x + 40) - (x - 20)}{(x + 70) - (x - 10)} = \frac{3}{4}.$$

Tương tự $\frac{x + 40}{x + 70} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x + 40}{3} = \frac{x + 70}{4} = \frac{30}{1} = 30 \Rightarrow x = 50.$

VÍ DỤ 2.13.

Tìm x, y và z, nếu: $x + y + z = \frac{x}{y + z - 2} = \frac{y}{z + x - 3} = \frac{z}{x + y + 5}.$

Giải

Để thấy nếu $x = 0$ thì $y = z = 0$, suy ra $x = y = z = 0$ là một bộ giá trị phải tìm.

Giả sử x, y và z khác 0 thì theo đề bài ra $x + y + z \neq 0$. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$x + y + z = \frac{x}{y + z - 2} = \frac{y}{z + x - 3} = \frac{z}{x + y + 5} = \frac{x + y + z}{2(x + y + z)} = \frac{1}{2}.$$

Thay kết quả vào dãy tỉ số ban đầu, ta được: $x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{5}{6}; z = \frac{11}{6}.$

Vậy ta có: $x = y = z = 0$ hoặc $x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{5}{6}; z = \frac{11}{6}.$

VÍ DỤ 2.14. Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{a + 2b + c} = \frac{y}{2a + b - c} = \frac{z}{4a - 4b + c}.$

Chứng minh rằng $\frac{a}{x + 2y + z} = \frac{b}{2x + y - z} = \frac{c}{4x - 4y + z}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau (cộng các số hạng tương ứng), ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a + 2b + c} &= \frac{y}{2a + b - c} = \frac{z}{4a - 4b + c} \\ &= \frac{x + 2y + z}{(a + 2b + c) + (4a + 2b - 2c) + (4a - 4b + c)} = \frac{x + 2y + z}{9a}. \end{aligned}$$

Tương tự ta có kết quả $\frac{x + 2y + z}{9a} = \frac{2x + y - z}{9b} = \frac{4x - 4y + z}{9c}$.

Do các tỉ số đều có nghĩa ta suy ra: $\frac{a}{x + 2y + z} = \frac{b}{2x + y - z} = \frac{c}{4x - 4y + z}$.

VÍ DỤ 2.15. Cho $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Giải

Từ giả thiết, ta có a, b và c đều khác 0 nên $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có (do $a, b, c \neq 0$):

$$\frac{a(bz - cy)}{a^2} = \frac{b(cx - az)}{b^2} = \frac{c(ay - bx)}{c^2} = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0.$$

Do a, b và c đều khác 0 suy ra $bz - cy = 0$, nên $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Tương tự, ta có $\frac{z}{c} = \frac{x}{a}$.

Suy ra: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

VÍ DỤ 2.16. Chứng minh rằng nếu có dãy tỉ số $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ thì giá trị của tỉ số

$\frac{ak^2 + bk + c}{xk^2 + yk + z}$ không phụ thuộc vào giá trị của k .

Giải

Nếu $k = 0$ thì hiển nhiên ta có $\frac{ak^2 + bk + c}{xk^2 + yk + z} = \frac{c}{z}$.

Nếu $k \neq 0$, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{ak^2}{xk^2} = \frac{bk}{yk} = \frac{ak^2 + bk + c}{xk^2 + yk + z}.$$

Trong cả hai trường hợp thì giá trị của tỉ số $\frac{ak^2 + bk + c}{xk^2 + yk + z}$ đều bằng giá trị của

dãy tỉ số ban đầu $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, nghĩa là không phụ thuộc vào giá trị của k .

VÍ DỤ 2.17. Biết các số tự nhiên a, b, c, x, y, z khác 0 và lập thành một dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. Chứng minh rằng nếu c là số dư của phép chia số a cho số b thì z là số dư của phép chia số x cho số y .

Giải

Theo đề bài, c là số dư của phép chia số a cho số b nên theo định nghĩa phép chia có dư, tồn tại một số tự nhiên $q \neq 0$ mà $a = bq + c$ với $c < b$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{bq + c}{yq + z}$.

Vì $a = bq + c$ và $c < b$ ($q \in \mathbb{N}^*$) nên $x = yq + z$ và $z < y$ ($q \in \mathbb{N}^*$), suy ra z là số dư của phép chia số x cho số y .

Dạng 3. CÁC BÀI TOÁN VẬN DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Có thể vận dụng các tính chất của tỉ lệ thức hoặc dãy tỉ số bằng nhau theo một trong các cách như sau:

- Cách 1:** Nếu $ad = bc$ mà bốn số a, b, c, d khác 0, thì chúng lập thành một tỉ lệ thức (phương pháp nhân chéo).
- Cách 2:** Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau bằng cách hoán vị ngoại tỉ, hoặc hoán vị trung tỉ, hoặc hoán vị cả ngoại tỉ và trung tỉ đưa về tỉ lệ thức phải chứng minh.
- Cách 3:** Chứng minh các tỉ số cùng bằng một giá trị nào đó (phương pháp định nghĩa).

Kiến thức bổ sung

- Các cách khác:
 - Cùng thêm hoặc bớt một hằng số vào hai vế của một tỉ lệ thức.
 - Sử dụng cách hoán vị cả trung tỉ và ngoại tỉ của một tỉ lệ thức (nghịch đảo tỉ số).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 2.18. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.

Giải

Giả thiết tất cả các tỉ số đã cho đều có nghĩa.

Cách 1: Phương pháp nhân chéo.

Xét các tích: $a(c+d) = ac + ad$ và $(a+b)c = ac + bc$.

Mà $ad = bc$ do $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, nên $a(c+d) = (a+b)c$ hay $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.

Cách 2: Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

Hoán vị trung tỉ của tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta được $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$.

Lại hoán vị trung tỉ của tỉ lệ thức $\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$ ta được $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.

Cách 3: Phương pháp định nghĩa.

Đặt tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, suy ra $a = bk$ và $c = dk$.

Có $\frac{a}{a+b} = \frac{bk}{bk+b} = \frac{k}{k+1}$ và $\frac{c}{c+d} = \frac{dk}{dk+d} = \frac{k}{k+1}$.

Suy ra $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \left(= \frac{k}{k+1} \right)$.

Cách 4: Phương pháp khác.

Hoán vị cả trung tỉ và ngoại tỉ của tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta được $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

Cộng vào hai vế của đẳng thức trên với 1 ta được $\frac{d}{c} + 1 = \frac{b}{a} + 1$

$$\Rightarrow \frac{d+c}{c} = \frac{b+a}{a}.$$

Lại hoán vị cả trung tỉ và ngoại tỉ của $\frac{d+c}{c} = \frac{b+a}{a}$ ta được $\frac{c}{c+d} = \frac{a}{a+b}$.

VÍ DỤ 2.19. Cho tỉ lệ thức $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c}$ với $c \neq 0$.

Chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.

Giải

Từ $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c}$ với $c \neq 0 \Rightarrow \frac{\overline{ab}}{b} = \frac{\overline{bc}}{c}$ và $a, b, c > 0$, ta suy ra được $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

Cách 1: Phương pháp nhân chéo.

Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ hay $ac = b^2$, ta có $(a^2 + b^2)c = (a^2 + ac)c = a^2c + ac^2$.

Tương tự có $(b^2 + c^2)a = a^2c + ac^2$.

Suy ra $(a^2 + b^2)c = (b^2 + c^2)a$ hay $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.

Cách 2: Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

Có $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$ và $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$.

Suy ra $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.

Cách 3: Phương pháp định nghĩa.

Đặt tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$, suy ra $a = bk$ và $b = ck$.

Có $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{(bk)^2 + b^2}{(ck)^2 + c^2} = \frac{b^2(k^2 + 1)}{c^2(k^2 + 1)} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{(ck)^2}{c^2} = k^2$

và $\frac{a}{c} = \frac{bk}{c} = \frac{(ck)k}{c} = k^2$, suy ra $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.

VÍ DỤ 2.20. Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{\overline{ab}}{b} = \frac{\overline{bc}}{c} = \frac{\overline{ca}}{a}$.

Chứng minh rằng $a = b = c$.

Giải

Từ $\frac{\overline{ab}}{b} = \frac{\overline{bc}}{c} = \frac{\overline{ca}}{a}$, ta suy ra được $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ với $a, b, c > 0$ và $a + b + c \neq 0$.

Cách 1: Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

Có $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1$ do $a+b+c \neq 0$, nên suy ra $a = b = c$.

Cách 2: Phương pháp nhân chéo.

Từ giả thiết $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, nhân chéo ta có $b^2 = ca, c^2 = ab, a^2 = bc$.

Do a, b và c khác 0 nên ta có $b^3 = b \cdot ca; c^3 = c \cdot ab; a^3 = a \cdot bc$.

Suy ra $b^3 = c^3 = a^3 (= abc)$. Vậy $a = b = c$.

Cách 3: Phương pháp định nghĩa.

Đặt dãy tỉ số đã cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = k$, suy ra $a = bk, b = ck, c = ak$.

Do $a, b, c > 0$ nên ta sẽ chứng minh $k = 1$, từ đó suy ra $a = b = c$, bằng các cách sau:

- Hoặc $abc = abck^3 \Rightarrow k^3 = 1 \Rightarrow k = 1$.
- Hoặc $a + b + c = (a + b + c)k \Rightarrow k = 1$.
- Hoặc $a = bk = ck^2 = ak^3 \Rightarrow k^3 = 1 \Rightarrow k = 1$.

Cách 4: Phương pháp so sánh.

Có $a, b, c > 0$ nên nếu $a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{b}{c} < 1, \frac{c}{a} < 1 \Rightarrow a < b < c < a$ (vô lí).

Tương tự, nếu $a > b$ ta sẽ suy ra được $a > b > c > a$ (vô lí).

Vậy $a = b$, suy ra $a = b = c$.

VÍ DỤ 2.21. Cho tỉ lệ thức $\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{\overline{bc}}{b+c}$. Chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ với giả

thiết $c \neq 0$.

Giải

Từ giả thiết $c \neq 0$ và $\overline{ab}, \overline{bc}$ là các số có hai chữ số nên $a, b, c > 0$. Hoán vị các trung tỉ và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a+b}{b+c} = \frac{\overline{ab} - (a+b)}{\overline{bc} - (b+c)} = \frac{9a}{9b} = \frac{a}{b} = \frac{(a+b) - a}{(b+c) - b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{\overline{ab}}{b} = \frac{\overline{bc}}{c}, \text{ suy ra } \frac{a}{b} = \frac{b}{c}.$$

VÍ DỤ 2.22. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, với a, b, c và d là các số tự nhiên khác 0. Kí hiệu $(x; y)$ và $[x; y]$ tương ứng là ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của hai số tự nhiên x và y .

Chúng minh rằng $\frac{(a; d)}{(b; c)} = \frac{[b; c]}{[a; d]}$.

Giải

Sử dụng tính chất của hai số tự nhiên khác 0 là $(x; y) \cdot [x; y] = x \cdot y$, ta có:

$$(a; d) \cdot [a; d] = ad \text{ và } (b; c) \cdot [b; c] = bc, \text{ mà } ad = bc \text{ (vì } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{)}$$

$$\Rightarrow (a; d) \cdot [a; d] = (b; c) \cdot [b; c] \Rightarrow \frac{(a; d)}{(b; c)} = \frac{[b; c]}{[a; d]}.$$

VÍ DỤ 2.23. Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Biết $\overline{ab}$ là số nguyên tố và $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c}$. Tìm số $\overline{abc}$.

Giải

Có $a, b, c > 0$, tương tự ví dụ 2.21, ta có $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ nên $ac = b^2$.

Biết $\overline{ab}$ là một số nguyên tố có hai chữ số nên $b \in \{1; 3; 7; 9\}$.

Do $ac = b^2$, ta xét từng trường hợp xảy ra:

- $b = 1 \Rightarrow a \cdot c = 1$ và a, c là các chữ số $\Rightarrow a = c = 1$ (loại, do $a = c$ trái đề bài).
- $b = 3 \Rightarrow a \cdot c = 9 = 1 \cdot 9$ (do $a \neq c$) $\Rightarrow \overline{ab} = 13$ do 93 không là số nguyên tố.

Có $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{13}{39} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{b}{c}$ (chọn).

- $b = 7$ và $b = 9$ đều bị loại do dẫn đến $a = c$.

Vậy $\overline{abc} = 139$.

VÍ DỤ 2.24.

Cho $abcd \neq 0$, $b^2 = ca$ và $c^2 = bd$. Chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$.

Giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. (1)

Từ (1) suy ra $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$. (2)

Cũng từ (1) suy ra $\frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$.

BÀI TẬP

2.1. Thay tỉ số giữa các số hữu tỉ sau bằng tỉ số giữa các số nguyên:

$$0,1 : 0,105; \quad 1 : 0,004; \quad 18,75 : 0,0375; \quad 46,2 : 0,1232.$$

2.2. Có thể lập được một tỉ lệ thức từ các nhóm bốn số sau không?

- a) 4,2; $77\frac{7}{9}$; 0,03 và $\frac{5}{9}$; b) 15,381125; 5,35; 2,3 và 0,8;
c) 3,4; 17; 0,312 và 1,56; d) 3^2 ; 2^5 ; $1! + 2! + 3!$ và $2! + 3! + 4!$.

2.3. Tìm số x sao cho x cùng với ba số 12, 16 và 48 lập thành một tỉ lệ thức.

2.4. Có thể chọn ra bốn trong nhóm năm số (mỗi số chỉ chọn một lần) để lập thành một tỉ lệ thức được không?

- a) 1; 3; 9; 27; 81; b) 4; 5; 6; 7; 8;
c) 2^1 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5 ; d) 3^{-1} ; 3^{-3} ; 3^{-5} ; 3^{-7} ; 3^{-9} .
e) $\frac{31}{57}$; $\frac{181818}{292929}$; $\frac{1818}{2929}$; $\frac{3131}{5757}$; $\frac{18}{29}$.

2.5. Tìm số hữu tỉ x, nếu:

a) $(x - 2,5) : 1\frac{1}{2} = x : 2$; b) $\left(\frac{1}{3} + x\right) : \left(x + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{9}$.

2.6. Tìm x, nếu:

- a) $y : 40 = 36 : 26$; $z : y = 25 : 20$; $x : z = 0,65 : 1$;
b) $(x.y.z) : (y.z.72) = 6300 : 7500$;

$$c) (17.16.12) : (z.12x.y) = (3.51.32) : (y.6.z);$$

$$d) x : y = 3 : 2; y : z = 2 : 1 \text{ và } z : 1 = 1 : 1,25.$$

2.7. Tìm x nếu: $x : y = 2 : 3$ và $xy = 54$.

2.8. Tìm số hữu tỉ x mà:

a) Cùng thêm x vào số hạng trên và số hạng dưới của tỉ số $\frac{26}{39}$ ta được một tỉ số có giá trị bằng $\frac{6}{7}$.

b) Thêm x vào số hạng trên và bớt x ở số hạng dưới của tỉ số $\frac{26}{39}$ ta được một tỉ số bằng $\frac{5}{8}$.

2.9. Bớt ở số hạng trên và dưới của cả hai tỉ số $\frac{26}{39}$ và $\frac{38}{57}$ cùng một số tự nhiên x nào để ta được hai tỉ số mới lập thành một tỉ lệ thức?

2.10. Tìm các số a, b, c nếu:

$$a) 5a - 3b - 3c = -536 \text{ và } \frac{a}{4} = \frac{b}{6}, \frac{b}{5} = \frac{c}{8}.$$

$$b) 3a - 5b + 7c = 86 \text{ và } \frac{a+3}{5} = \frac{b-2}{3} = \frac{c-1}{7}.$$

$$c) a - 2b + c = 46 \text{ và } \frac{a}{7} = \frac{b}{6}, \frac{b}{5} = \frac{c}{8}.$$

$$d) 5a = 8b = 3c \text{ và } a - 2b + c = 34.$$

$$e) 3a = 7b \text{ và } a^2 - b^2 = 160.$$

$$g) 15a = 10b = 6c \text{ và } abc = -1920.$$

$$h) a^2 + 3b^2 - 2c^2 = -16 \text{ và } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}.$$

$$i) a^3 + b^3 + c^3 = 792 \text{ và } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}.$$

2.11. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh các tỉ lệ thức sau:

$$\frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{c^2 - d^2}{cd}; \quad \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} = \frac{(c+d)^2}{c^2 + d^2}.$$

2.12. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3 = \frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$.

2.13. Chứng minh rằng nếu $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

2.14. Cho tỉ lệ thức $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$, với $a, b, c, d > 0$. So sánh a và c .

2.15. Chứng minh rằng nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ thì

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{a_2+a_3+a_4+\dots+a_{n+1}}\right)^n = \frac{a_1}{a_{n+1}}.$$

2.16. Cho tỉ lệ thức $\frac{\overline{abc}}{a+\overline{bc}} = \frac{\overline{bca}}{b+\overline{ca}}$, chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a}{bc} = \frac{b}{ca}$.

2.17. Cho dãy tỉ số $\frac{\overline{ab}+\overline{bc}}{a+b} = \frac{\overline{bc}+\overline{ca}}{b+c} = \frac{\overline{ca}+\overline{ab}}{c+a}$, chứng minh rằng $a=b=c$.

2.18. Cho tỉ lệ thức $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$, chứng minh rằng $\frac{\overline{a\underbrace{bbb\dots b}_n}}{\underbrace{bbb\dots b}_nc} = \frac{a}{c}$, với n là số tự nhiên.

2.19. Cùng thêm một số khác 0 vào tử và mẫu của một phân số mà giá trị của phân số không đổi. Tìm phân số đã cho.

2.20. Cho $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$. Tìm x và y .

2.21. Chứng minh rằng nếu có

$$(a+b+c+d)(a-b-c+d) = (a-b+c-d)(a+b-c-d)$$

thì bốn số a, b, c và d lập thành một tỉ lệ thức.

2.22. Cho $abc \neq 0$ và $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$.

$$\text{Tính } P = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right).$$

Chuyên đề 3. SỐ THỰC

Dạng 1. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các số như $0,15$; $-1,48$; ... được gọi là số thập phân hữu hạn. Các số như $-0,333...$; $1,7545454...$; ... được gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn.
2. Một phân số tối giản với mẫu số dương mà:
 - Mẫu số không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì viết được dưới dạng một số thập phân hữu hạn, chẳng hạn: $\frac{3}{20} = 0,15$; $-\frac{37}{25} = -1,48$.
 - Mẫu số có các ước nguyên tố khác 2 và 5 thì không viết được dưới dạng một số thập phân hữu hạn, mà là số thập phân vô hạn tuần hoàn, chẳng hạn: $-\frac{1}{3} = -0,333...$; $1\frac{747}{990} = 1,7545454...$.
3. Mọi số hữu tỉ được biểu diễn bởi một số thập phân hữu hạn hoặc một số thập phân vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số hữu tỉ.

Kiến thức bổ sung

4. Số thập phân vô hạn tuần hoàn là số thập phân có những nhóm chữ số được lặp lại.
 - Nhóm chữ số lặp lại được gọi là chu kì của số thập phân vô hạn tuần hoàn. Để viết một số thập phân vô hạn tuần hoàn, người ta đặt chu kì trong dấu ngoặc:
$$-\frac{1}{3} = -0,333... = -0,(3); \quad 1\frac{747}{990} = 1,7545454... = 1,7(54).$$
 - Nếu chu kì bắt đầu ngay sau dấu phẩy, như $-0,(3)$, ta có số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn.
 - Nếu chu kì không bắt đầu ngay sau dấu phẩy, như $1,7(54)$, ta có số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp, phần thập phân trước chu kì được gọi là phần bất thường.

5. Số thập phân có nguồn gốc từ phân số nếu vô hạn thì tuần hoàn. Chẳng hạn, khi chia 1 cho 7, ta được một số thập phân, số dư trong phép chia này phải nhỏ hơn 7 nên nhiều nhất đến số dư thứ bảy thì số dư phải lặp lại và nhóm chữ số ở thương cũng lặp lại, do đó ta có số thập phân vô hạn tuần hoàn.

6. Minh họa cách viết số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn dưới dạng phân số:

- Từ số thập phân vô hạn tuần hoàn $x = 0,(45) = 0,454545\dots$, suy ra $100x = 45,454545\dots$.

Ta có: $100x - x = 45$, nên $x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$. Một cách tổng quát:

$$\overline{0,(a_1a_2\dots a_n)} = \frac{\overline{a_1a_2\dots a_n}}{\underbrace{999\dots 9}_n}.$$

- Để viết phần thập phân của số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn dưới dạng phân số, ta viết một phân số có tử số là chu kỳ và mẫu số là một số gồm các chữ số 9, với số chữ số 9 là số chữ số của chu kỳ.

7. Minh họa cách viết số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp dưới dạng phân số:

- Từ số thập phân vô hạn tuần hoàn $y = 0,1(2) = 0,1222\dots$, ta tính được kết quả $100y = 12,222\dots$ và $10y = 1,222\dots$. Suy ra $100y - 10y = 11$, nên $y = \frac{11}{90}$.

- Một cách tổng quát:

$$\overline{0,b_1b_2\dots b_m(a_1a_2\dots a_n)} = \frac{\overline{b_1b_2\dots b_m a_1a_2\dots a_n} - \overline{b_1b_2\dots b_m}}{\underbrace{999\dots 9}_n \underbrace{000\dots 0}_m}.$$

- Như vậy, muốn viết phần thập phân của số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp dưới dạng phân số, ta viết một phân số có tử số là hiệu giữa một số tạo bởi phần bất thường cùng chu kỳ trừ đi phần bất thường, còn mẫu số là một số gồm các chữ số 9 kèm theo các chữ số 0, với số chữ số 9 bằng số chữ số của chu kỳ và số chữ số 0 bằng số chữ số của phần bất thường.

8. Các minh họa trên không phải là các cách chứng minh, việc này sẽ được nghiên cứu ở các lớp trên. Ta coi đó là các quy tắc để viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng một phân số.

9. Trong trường hợp số thập phân vô hạn tuần hoàn có mẫu số chứa thừa số nguyên tố 2 hoặc 5 thì phân số đó viết được thành số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 3.1. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân:

$$\frac{3}{-8}; \frac{117}{520}; \frac{-72}{75}; \frac{2}{-9}; \frac{11}{90}; \frac{1016}{999}; \frac{-23}{161}.$$

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{3}{-8} = -\frac{3}{2^3} = -\frac{3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = -\frac{375}{1000} = -0,375.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{117}{520} = 0,225 \text{ và } \frac{-72}{75} = -\frac{24}{25} = -0,96.$$

$$\text{Ta có: } \frac{2}{-9} = -\frac{2}{9} = -0,222... = -0,(2).$$

$$\text{Tương tự: } \frac{11}{90} = 0,1(2); \frac{1016}{999} = 1,(017); \frac{-23}{161} = -0,(142857).$$

Lưu ý:

- Có hai cách để viết một phân số dưới dạng số thập phân hữu hạn:

Cách 1: Chia trực tiếp tử số cho mẫu số.

Cách 2: Phân tích mẫu số ra thừa số nguyên tố và bổ sung các thừa số phụ để mẫu số là một lũy thừa của 10.

- Khi viết một số thành số thập phân, ta thực hiện lần lượt các trình tự:

Bước 1: Rút gọn phân số (nếu có thể), đưa phân số đã cho về một phân số tối giản.

Bước 2: Kiểm tra mẫu số có chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5 hay không để biết được số thập phân phải tìm là số thập phân hữu hạn hay số thập phân vô hạn tuần hoàn.

VÍ DỤ 3.2. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số (người ta còn gọi là đi tìm "phân số mẹ" của số thập phân vô hạn tuần hoàn):

$$\text{a) } -0,363636...; \quad \text{b) } 0,(5); \quad -0,(15); \quad 0,(135);$$

$$\text{c) } 0,2333...; \quad \text{d) } -1,4(51); \quad 0,15(432).$$

Giải

a) Số $-0,363636... = -0,(36)$ là một số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn mà chu kỳ có 2 chữ số, theo quy tắc viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số ta có:

$$-0,(36) = -\frac{36}{99} = -\frac{4}{11}.$$

b) Tương tự: $0,(5) = \frac{5}{9}$; $-0,(15) = -\frac{5}{33}$; $0,(135) = \frac{5}{37}$.

c) Số $0,2333... = 0,2(3)$ là một số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp có phần bất thường bằng 2 và chu kỳ có 1 chữ số, theo quy tắc viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số ta có:

$$0,2(3) = \frac{23-2}{90} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}.$$

d) Tương tự: $-1,4(51) = -1\frac{149}{330}$; $0,15(432) = \frac{571}{3700}$.

VÍ DỤ 3.3. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn, nhận xét các chữ số trong chu kỳ của chúng: $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$.

Giải

Ta có: $\frac{1}{7} = 0,(142857)$; $\frac{2}{7} = 0,(285714)$; $\frac{3}{7} = 0,(428571)$;

$$\frac{4}{7} = 0,(571428); \frac{5}{7} = 0,(714285); \frac{6}{7} = 0,(857142).$$

Nhận xét:

Chu kỳ của tất cả 6 số thập phân vô hạn tuần hoàn trên đều có 6 chữ số và là những chữ số khác nhau: 1; 2; 4; 5; 7; 8, không có các chữ số 3 và 6.

Thứ tự các chữ số trong chu kỳ của các số thập phân vô hạn tuần hoàn đều khác nhau.

VÍ DỤ 3.4.

a) Khi viết phân số $\frac{5}{7}$ dưới dạng số thập phân, hỏi chữ số thứ 2012 sau dấu phẩy là chữ số nào ?

b) Tìm chữ số thập phân thứ 100 sau dấu phẩy của phân số $\frac{17}{900}$ (viết dưới dạng số thập phân).

c) Tìm chữ số thập phân thứ 2^{10} sau dấu phẩy của phân số $\frac{24}{17}$ (viết dưới dạng số thập phân).

Giải

Cả ba phân số $\frac{5}{7}$, $\frac{17}{900}$, $\frac{24}{17}$ đều là các phân số tối giản có mẫu số chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5 nên viết được dưới dạng một số thập phân vô hạn tuần hoàn.

a) Ta có: $\frac{5}{7} = 0,(714285) = 0,714285\ 714285\ 714285\dots$

Số thập phân $0,(714285)$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì gồm 6 chữ số.

Ta lại có 2012 chia cho 6 dư 2 (vì $2012 = 6 \cdot 335 + 2$), nên chữ số thập phân thứ 2012 sau dấu phẩy của số $0,(714285)$ là 1.

b) Ta có: $\frac{17}{900} = 0,01(8) = 0,01888\dots$. Số thập phân $0,01(8)$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn tặc mà phần bất thường có 2 chữ số và chu kì có 1 chữ số.

Ta lại có $100 > 2$ nên chữ số thập phân thứ 100 sau dấu phẩy của số $0,01(8)$ là 8.

c) Ta có: $\frac{24}{17} = 1,(4117647058823529)$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn mà chu kì gồm có 16 chữ số. Ta lại có $2^{10} = 1024$ và 1024 chia hết cho 16 hay chia cho 16 dư 0, nên chữ số thập phân thứ 2^{10} sau dấu phẩy là 9.

VÍ DỤ 3.5. So sánh các số thập phân sau:

a) $0,(26)$ và $0,261$;

b) $\overline{0,(a_1a_2)}$; $\overline{0,a_1(a_2a_1)}$ và $\overline{0,(a_1a_2a_1a_2)}$;

c) $0,15$ và $0,14(9)$.

Giải

a) Ta có: $0,(26) = \frac{26}{99} = \frac{2626}{9999} > \frac{2620}{9999} > \frac{2620}{10000}$

và $0,261 = \frac{261}{1000} = \frac{2610}{10000} < \frac{2620}{10000}$.

Suy ra $0,(26) > 0,261$.

Lưu ý: Có thể hiểu $0,(26) = 0,262626... > 0,261000...$ (xem phần Dạng 2 – Làm tròn số).

$$\text{b) Ta có: } \overline{0,(a_1a_2)} = \frac{a_1a_2}{99}; \quad \overline{0,a_1(a_2a_1)} = \frac{a_1a_2a_1 - a_1}{990} = \frac{a_1a_2 \cdot 0}{990} = \frac{a_1a_2}{99}.$$

$$\text{Tương tự: } \overline{0,(a_1a_2a_1a_2)} = \frac{a_1a_2a_1a_2}{9999} = \frac{101 \cdot a_1a_2}{101 \cdot 99} = \frac{a_1a_2}{99}.$$

$$\text{Suy ra } \overline{0,(a_1a_2)} = \overline{0,a_1(a_2a_1)} = \overline{0,(a_1a_2a_1a_2)}.$$

Lưu ý: Ta có thể thấy phân số $\frac{a_1a_2}{99}$ có thể viết được dưới các dạng khác nhau, nhưng cách viết $\overline{0,(a_1a_2)}$ thuận tiện hơn tất cả, do đó người ta thường chọn cách viết này.

$$\text{c) Ta có: } 0,14(9) = \frac{149-14}{900} = \frac{135}{900} = \frac{15}{100} = 0,15.$$

Lưu ý: Có thể hiểu $0,14(9) = 0,14999... \approx 0,15$ (xem phần Dạng 2 – Làm tròn số).

VÍ DỤ 3.6. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân ta được một số thập phân hữu hạn, một số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn hay một số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp (n là số tự nhiên khác 0) ?

$$\text{a) } \frac{7n^2 + 21n}{56n}; \quad \text{b) } \frac{83! + 1}{1328n}; \quad \text{c) } \frac{3n^2 + 21n}{45n}.$$

Giải

$$\text{a) Ta có } \frac{7n^2 + 21n}{56n} = \frac{7n(n+3)}{56n} = \frac{n+3}{8}.$$

Do mẫu số chỉ chứa thừa số nguyên tố là 2 nên phân số này viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

b) Từ số $(83! + 1)$ không chia hết cho 83 (do $83! = 1.2.3...83$), mẫu số $1328n$ chia hết cho 83 với mọi số tự nhiên n khác 0 (vì $1328 = 83.16$) nên khi phân số tối giản thì mẫu số vẫn có ước nguyên tố là 83. Do vậy phân số $\frac{83!+1}{1328n}$ viết thành số thập phân vô hạn tuần hoàn. Từ số không chia hết cho 2 và mẫu số lại chia hết

cho 2 nên mẫu số chứa thừa số nguyên tố 2. Vậy phân số $\frac{83! + 1}{1328n}$ viết thành số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp.

c) Ta có $\frac{3n^2 + 21n}{45n} = \frac{n+7}{15}$.

○ Nếu n chia cho 3 dư 2 thì $(n+7):3$, ta có mẫu số của phân số $\frac{n+7}{15}$ chỉ chứa thừa số nguyên tố 5 nên phân số đó viết thành một số thập phân hữu hạn.

○ Nếu n chia cho 3 có số dư khác 2 thì $(n+7)$ không chia hết cho 3, mẫu số của phân số $\frac{n+7}{15}$ có chứa thừa số nguyên tố 3 nên phân số đó viết thành một số thập phân vô hạn tuần hoàn.

- Nếu lại có n chia cho 5 dư 3, ta có số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn.
- Nếu n chia cho 5 có số dư khác 3, ta có số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp.

Dạng 2. LÀM TRÒN SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Quy ước 1*: Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bỏ đi bằng các chữ số 0.
2. *Quy ước 2*: Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bỏ đi bằng các chữ số 0.
3. Kí hiệu "gần bằng" (hoặc "xấp xỉ") được viết là " $\approx$ ". Như vậy: $4,9123 \approx 5$; $43432 \approx 40000$.
4. Mục đích của việc làm tròn số để dễ nhớ, dễ ước lượng, dễ tính toán với các số có nhiều chữ số.

Kiến thức bổ sung

5. Sai số: $a = 0,1314 \pm 0,012 \Rightarrow 0,1194 \leq a \leq 0,1434$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 3.7. Viết các phân số sau thành số thập phân, rồi làm tròn lần lượt các số đó đến chữ số thập phân thứ ba, thứ hai, thứ nhất: $\frac{8}{33}$; $\frac{26}{111}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{15}{82}$; $\frac{2}{13}$.

Giải

Phân số	Số thập phân	Làm tròn đến chữ số thập phân		
		thứ ba	thứ hai	thứ nhất
$\frac{8}{33}$	0,(24)	$\approx 0,242$	$\approx 0,24$	$\approx 0,2$
$\frac{26}{111}$	0,(234)	$\approx 0,234$	$\approx 0,23$	$\approx 0,2$
$\frac{5}{24}$	0,208(3)	$\approx 0,208$	$\approx 0,21$	$\approx 0,2$
$\frac{15}{82}$	0,1(82926)	$\approx 0,183$	$\approx 0,18$	$\approx 0,2$
$\frac{2}{13}$	0,(153846)	$\approx 0,154$	$\approx 0,15$	$\approx 0,2$

VÍ DỤ 3.8. Làm tròn chục, tròn trăm và tròn nghìn các số sau: 57365; 1946,78.

Giải

Số	Làm tròn		
	chục	trăm	nghìn
57365	≈ 57370	≈ 57400	≈ 57000
1946,78	≈ 1950	≈ 2000	≈ 2000

VÍ DỤ 3.9.

a) Tính giá trị gần đúng (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) chiều dài một sân bóng đá (theo tiêu chuẩn của FIFA – chiều dài tối đa một sân bóng đá 11 người là 120m) sau 5 lần đo là 121,27; 119,25; 120,28; 121,15 và 119,26 mét.

b) Tính giá trị gần đúng (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) chu vi và diện tích một sân lớp học hình chữ nhật có các cạnh đo được là 12,4 và 7,12 mét.

c) Một vận động viên giành huy chương vàng ở cự li 200m. Biết rằng vận động viên đó chạy 200m hết $23\frac{19}{60}$ giây. Hỏi thời gian gần đúng chính xác tới hàng phần trăm là bao nhiêu ?

d) Bạn Phúc đi bộ với vận tốc 3km/h, bạn Quang đi bộ với vận tốc 4km/h. Họ xuất phát từ cùng một điểm đi dọc theo một đường tròn quanh công viên với chiều ngược nhau. Sau 6 phút họ gặp nhau. Tính gần đúng đường kính của đường tròn chính xác tới chữ số thập phân thứ ba (chọn $\pi = 3,1416$).

Giải

a) Tổng chiều dài sau 5 lần đo bằng

$$121,27 + 119,25 + 120,28 + 121,15 + 119,26 = 601,21 \text{ (m)}.$$

Chiều dài sân sau 5 lần đo bằng $601,21 : 5 = 120,242 \approx 120,2 \text{ (m)}$.

b) Chu vi sân lớp học bằng $(12,4 + 7,12) \cdot 2 = 39,04 \approx 39,0 \text{ (m)}$.

Diện tích sân lớp học bằng $12,4 \cdot 7,12 = 88,288 \approx 88,3 \text{ (m}^2\text{)}$.

c) Ta có: $23\frac{19}{60} = 23,31(6) \approx 23,32 \text{ (giây)}$.

d) Chu vi đường tròn quanh công viên bằng 700 (m).

Đường kính đường tròn quanh công viên bằng $700 : 3,1416 \approx 222,816 \text{ (m)}$.

VÍ DỤ 3.10. In-sơ (inch, số nhiều là inches), kí hiệu là "in", là đơn vị đo chiều dài thuộc hệ thống đo lường của Anh, Mỹ. Biết $1\text{in} \approx 2,54\text{cm}$.

a) Hỏi 1cm gần bằng bao nhiêu in-sơ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) ?

b) Khi nói "Ti vi 21 in", ta hiểu là một loại ti vi có đường chéo màn hình bằng 21in. Vậy các máy ti vi 21 in, 23 in, 27 in và 29 in có đường chéo màn hình gần bằng bao nhiêu xentimet (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) ?

Giải

a) Vì $1\text{in} \approx 2,54\text{cm}$ nên $1\text{cm} \approx 1 : 2,54 \text{ (in)}$ và $1\text{cm} \approx 0,39\text{in}$.

b) Ta có:

$$21\text{ in} \approx 53,3\text{ cm}; \quad 23\text{ in} \approx 58,4\text{ cm};$$

$$27\text{ in} \approx 68,6\text{ cm}; \quad 29\text{ in} \approx 73,7\text{ cm}.$$

VÍ DỤ 3.11. Một số a được làm tròn đến hàng nghìn bằng 75000. Hỏi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của a là bao nhiêu ?

Giải

Có số $a \approx 75000$ (làm tròn đến hàng nghìn).

Vậy $\max(a) = 75499$ và $\min(a) = 74500$.

VÍ DỤ 3.12. Trong một thí nghiệm khoa học, một hằng số khoa học C được xác định bằng 2,43865 với sai số $\pm 0,00312$. Người làm thí nghiệm mong muốn được một giá trị của C có các chữ số có nghĩa. Hãy làm tròn C với mong muốn đó :

- A. 2,0 B. 2,4 C. 2,43 D. 2,44.

Giải

Ta có $C = 2,43865 \pm 0,00312$ nên $2,43553 \leq C \leq 2,44177$.

Vì vậy phần nguyên của C là 2.

Chữ số thập phân thứ nhất là 4. Chữ số thập phân thứ hai phải là 4, không thể là 3 vì $2,43 < 2,43553 \leq C$.

Chữ số thập phân thứ ba phải làm cho $2,436 \leq C \leq 2,442$ suy ra chọn phương án D.

Dạng 3. SỐ VÔ TỈ. CĂN BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Tập hợp các số vô tỉ được kí hiệu là $\mathbb{I}$.
2. Cho số a không âm ($a \geq 0$). Căn bậc hai của a là số x mà $x^2 = a$.
Căn bậc hai không âm của a được kí hiệu là $\sqrt{a}$. Khi viết $\sqrt{a}$ ta phải có $a \geq 0$.
3. Số dương a có đúng hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$. Số 0 chỉ có một căn bậc hai là số 0: $\sqrt{0} = 0$.

Kiến thức bổ sung

4. Những số vô tỉ đặc biệt:

- 0,101001000100001...
- $\sqrt{2} \approx 1,41421\ 35623\ 73095\ 04880...$
- $\pi \approx 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846...$ (trong nhiều trường hợp có thể chọn số $\pi \approx \frac{22}{7}$).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 3.13. Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước phương án đúng:

- a) Căn bậc hai của 25 là: **A.** 5; **B.** - 5; **C.** 5 và - 5; **D.** 625.
- b) Số có căn bậc hai bằng 16 là: **A.** 4; **B.** 256; **C.** - 4; **D.** $\sqrt{16}$.
- c) Số có căn bậc hai là:

A. $x = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots - 100$.

B. $y = (10^2 - 1).(10^2 - 2^2).(10^2 - 3^2) \dots (10^2 - 100^2)$.

C. $z = (121 + 12321 + 1234321) - (12^2 + 112^2 + 1112^2)$.

Giải

a) Chọn phương án **C**, vì $5^2 = 25$ và $(-5)^2 = 25$.

b) Chọn phương án **B**, vì $\sqrt{256} = 16$, do $16^2 = 256$.

c) Chọn phương án **B**, vì:

• $x = 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (98 - 99 - 100 + 101) - 101$
 $= 1 - 101 = -100 < 0$.

• $y = (10^2 - 1).(10^2 - 2^2).(10^2 - 3^2) \dots (10^2 - 10^2) \dots (10^2 - 100^2) = 0$.

• $z = (121 - 12^2) + (12321 - 112^2) + (1234321 - 1112^2) < 0$.

Như vậy chọn phương án **B** (chọn y) vì $x < 0$ và $z < 0$ nên không có căn bậc hai.

VÍ DỤ 3.14. Điền số còn thiếu trong bảng sau:

x	9	0,49			$(-2)^4$	-4
$\sqrt{x}$			0,49			
$\frac{1}{\sqrt{x}}$				1		
$-\sqrt{x}$						

Giải

x	9	0,49	0,2401	1	$(-2)^4$	-4
$\sqrt{x}$	3	0,7	0,49	1	4	Không có
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{100}{49}$	1	$\frac{1}{4}$	Không có
$-\sqrt{x}$	-3	-0,7	-0,49	-1	-4	Không có

VÍ DỤ 3.15. Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước phương án đúng:

a) Số nào **không** bằng $\frac{5}{9}$?

A. $\sqrt{\frac{(-5)^2}{81}}$; B. $\frac{\sqrt{25} + \sqrt{7225}}{\sqrt{81} + \sqrt{23409}}$; C. $\frac{\sqrt{25} - \sqrt{(-85)^2}}{\sqrt{(-9)^2} - \sqrt{153^2}}$; D. $\sqrt{\frac{5-85}{9-153}}$.

b) Số nào **không** bằng $\frac{1}{25}$?

A. $\sqrt{(0,05)^2 - (0,03)^2}$; B. $\sqrt{(0,05 - 0,03)(0,05 + 0,03)}$;
 C. $\sqrt{(0,05 + 0,03)^2}$; D. $\sqrt{\left(0,16 \cdot \frac{0,05 - 0,03}{0,05 + 0,03}\right)^2}$.

Giải

a) Chọn phương án D vì $\sqrt{\frac{5-85}{9-153}} = \sqrt{\frac{5}{9}} \neq \frac{5}{9}$, trong khi ba biểu thức còn lại đều bằng $\frac{5}{9}$.

b) Chọn phương án C, vì $\sqrt{(0,05+0,03)^2} = \sqrt{0,08^2} = 0,08 \neq 0,04$, trong khi các biểu thức còn lại đều bằng $0,04 = \frac{1}{25}$.

VÍ DỤ 3.16. Trong các tập hợp sau, tập nào có ít nhất một phần tử là số vô tỉ:

1. $A = \{ \sqrt{1024}; \sqrt{1369}; \sqrt{6889}; \sqrt{16641} \};$

2. $B = \{ \sqrt{121}; \sqrt{12321}; \sqrt{1234321}; \dots; \sqrt{12345678987654321} \};$

3. $C = \{ 0,01; 0,01001; 0,010010001; \dots; 0,010010001 \dots \underbrace{01000 \dots 01}_{100} \};$
 $0,01001000100001 \dots \};$

4. $D = \{ -\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{7}; -\frac{1}{9}; -\frac{1}{11} \}.$

Giải

1. Các số $1024 = 32^2$; $1369 = 37^2$; $6889 = 83^2$ và $16641 = 129^2$ đều là các số chính phương nên tập hợp A chỉ gồm các số hữu tỉ.

2. Các số 121, 12321, 1234321, ..., 12345678987654321 lần lượt bằng 11^2 , 111^2 , 1111^2 , ..., 111111111^2 và đều là các số chính phương nên tập hợp B chỉ gồm các số hữu tỉ.

3. Các số $0,01$; $0,01001$; $0,010010001$; ..., $0,010010001 \dots \underbrace{01000 \dots 01}_{100}$ đều là các số thập phân hữu hạn nên không có số nào là số vô tỉ. Riêng số $0,01001000100001 \dots$ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn nên là số vô tỉ.

4. Các số $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{7}$; $-\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{11}$ hoặc là số thập phân hữu hạn, hoặc là số thập phân vô hạn tuần hoàn nên không có số nào là số vô tỉ.

Vậy trong 4 tập hợp trên chỉ có tập C là tập có ít nhất một phần tử là số vô tỉ.

VÍ DỤ 3.17. So sánh các số x và y , nếu:

a) $x = \sqrt{961} - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - 1\right)$ và $y = \sqrt{1089} - \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + 1\right)$;

b) $x = \sqrt{0,01} + \sqrt{0,04} + \sqrt{0,09} + \sqrt{0,16} + \dots + \sqrt{0,81}$ và $y = \sqrt{20 + 0,25}$;

c) $x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{16}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{36}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{64}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{100}}\right)$ và $y = \sqrt{0,1}$.

Giải

a) Ta có: $x = 31 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - 1\right) = 32 - \frac{1}{\sqrt{6}}$ và $y = 33 - \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + 1\right) = 32 - \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Mà $\sqrt{6} < \sqrt{7}$ nên $\frac{1}{\sqrt{6}} > \frac{1}{\sqrt{7}}$, suy ra $32 - \frac{1}{\sqrt{6}} < 32 - \frac{1}{\sqrt{7}}$ hay $x < y$.

b) Ta có $x = 0,1 + 0,2 + 0,3 + \dots + 0,9 = 4,5$

và $y = \sqrt{20 + 0,25} = \sqrt{20,25} = \sqrt{4,5^2} = 4,5$.

Vậy $x = y$.

c) Ta có: $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} > 0$.

Ta lại có: $x^2 < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{11}\right) = \frac{1}{11} < \frac{1}{10} = 0,1 \Rightarrow x < \sqrt{0,1}$

do $x > 0$.

Suy ra: $x < y$.

VÍ DỤ 3.18. Tìm x , nếu:

a) $x^4 = 256$; b) $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0,5625$;

c) $2\sqrt{x} - x = 0$; d) $x + \sqrt{x} = 0$;

e) $x^2 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3) \cdot 123454321$.

Giải

a) Ta có: $x = \pm 4$.

b) Ta có: $x \in \left(\frac{1}{16}; 3\frac{1}{16}\right)$.

c) Ta có: $x \in \{0; 4\}$.

d) Điều kiện $x \geq 0$, suy ra $x + \sqrt{x} \geq 0$. Vậy $x = 0$.

e) Ta có:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2 \text{ và } 123454321 = 11111^2.$$

Suy ra: $x = \pm 15.11111 = \pm 166665$.

Dạng 4. SỐ THỰC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi chung là *số thực*. Tập hợp các số thực được kí hiệu là $\mathbf{R}$.
2. Nếu a là một số thực thì a có thể được biểu diễn dưới dạng một số thập phân hữu hạn, hoặc một số thập phân vô hạn tuần hoàn, hoặc một số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
3. Việc so sánh hai số thực tương tự việc so sánh hai số hữu tỉ viết dưới dạng số thập phân.
4. Mỗi số thực được biểu diễn bởi một điểm trên trục số, ngược lại mỗi điểm trên trục số đều biểu diễn một số thực. Các điểm biểu diễn số thực lấp đầy trục số.
5. Các phép toán trong tập hợp số thực có các tính chất tương tự các phép toán trong tập hợp số hữu tỉ.

Kiến thức bổ sung

6. Cho một số thực a , nếu a là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là một số hữu tỉ, nếu a không là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là một số vô tỉ.

Thật vậy, giả sử a không là số chính phương nhưng $\sqrt{a}$ là một số hữu tỉ, hay $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$, thì $\sqrt{a} = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbf{N}$ ($n > 1$) và $(m, n) = 1$ nên $m^2 = an^2$. Gọi p

là một ước nguyên tố của n thì $n : p \Rightarrow m^2 : p \Rightarrow m : p \Rightarrow (m, n) = p \neq 1$, trái với điều giả sử. Vậy $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 3.19. Thực hiện phép tính:

$$a) A = \left(\sqrt{6,25} - 5\sqrt{0,49} \right) \cdot \left(19\sqrt{\frac{36}{361}} - 17\sqrt{\frac{81}{289}} \right);$$

$$b) B = \left(\sqrt{2\frac{14}{25}} - \sqrt{1,21} \right) \cdot \left(1,21 + 2\frac{14}{25} + \sqrt{1,21 \cdot 2\frac{14}{25}} \right).$$

Giải

a) Ta có $A = 3$.

b) Ta có $B = 2,765$.

VÍ DỤ 3.20. Sắp xếp các số sau từ nhỏ đến lớn:

$$a) \frac{54}{17}; -\frac{4}{5}; \sqrt{8}; 0; -\frac{3}{4}; -\frac{6}{5}; -\frac{5}{4}; \pi.$$

$$b) \sqrt{625} - \frac{1}{\sqrt{8}}; \sqrt{484} - \frac{1}{\sqrt{5}}; \sqrt{576} - \frac{1}{\sqrt{7}}; \sqrt{529} - \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Giải

$$a) \text{ Ta có: } -\frac{5}{4} < -\frac{6}{5} < -\frac{4}{5} < -\frac{3}{4} < 0 < \sqrt{8} < \pi < \frac{54}{17}.$$

$$b) \text{ Có: } \sqrt{484} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 22 - \frac{1}{\sqrt{5}}; \sqrt{529} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 23 - \frac{1}{\sqrt{6}}. \text{ Mặt khác } \frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\text{nên } 22 - \frac{1}{\sqrt{5}} < 22 - \frac{1}{\sqrt{6}} < 23 - \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Tương tự, ta suy ra: } 22 - \frac{1}{\sqrt{5}} < 23 - \frac{1}{\sqrt{6}} < 24 - \frac{1}{\sqrt{7}} < 25 - \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

VÍ DỤ 3.21. So sánh hai tổng A và B, nếu:

$$a) A = \sqrt{20+1} + \sqrt{40+2} + \sqrt{60+3}$$

$$\text{và } B = (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{20} + \sqrt{40} + \sqrt{60}).$$

$$b) A = \frac{1}{\sqrt{121}} + \frac{1}{\sqrt{12321}} + \frac{1}{\sqrt{1234321}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{12345678987654321}}$$

$$\text{và } B = 0,111111111.$$

Giải

a) Có $\sqrt{20+1} = \sqrt{21} < \sqrt{25} = 5$, mà $5 = 4 + 1 = \sqrt{16} + \sqrt{1} < \sqrt{20} + \sqrt{1}$
 $\Rightarrow \sqrt{20+1} < \sqrt{20} + \sqrt{1}$.

Tương tự, suy ra $A < B$.

b) Có $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{111} + \dots + \frac{1}{\underbrace{111\dots1}_9} < \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{\underbrace{1000\dots0}_9} = 0,111111111 = B$.

Vậy $A < B$.

VÍ DỤ 3.22. Cho $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

Chứng minh rằng với mọi $x \in A = \left\{ \frac{16}{9}; \frac{25}{16}; \frac{36}{25}; \frac{49}{36}; \frac{64}{49}; \frac{81}{64}; \frac{100}{81} \right\}$ thì y là số nguyên.

Giải

Ta có bảng tính các giá trị của y :

x	$\frac{16}{9}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{49}{36}$	$\frac{64}{49}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{100}{81}$
$\sqrt{x}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$
$1 + \sqrt{x}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{19}{9}$
$1 - \sqrt{x}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{9}$
y	-7	-9	-11	-13	-15	-17	-19

Vậy với mọi $x \in A$ thì $y \in \mathbb{Z}$.

VÍ DỤ 3.23. Chứng minh rằng $1 + \sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Giải

Giả sử số $1 + \sqrt{2}$ là số hữu tỉ, tức là $1 + \sqrt{2} = a \in \mathbb{Q}$. Suy ra $\sqrt{2} = a - 1 \in \mathbb{Q}$. Vô lí.

Vậy $1 + \sqrt{2}$ là số vô tỉ.

VÍ DỤ 3.24. Cho bốn mệnh đề sau:

Tổng của một số hữu tỉ và một số vô tỉ là một số vô tỉ. (1)

Tích của một số vô tỉ với một số hữu tỉ khác 0 là một số vô tỉ. (2)

Thương của một số vô tỉ với một số hữu tỉ khác 0 là một số vô tỉ. (3)

Tổng của hai số vô tỉ là một số vô tỉ. (4)

Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước khẳng định chính xác về số mệnh đề đúng trong số bốn mệnh đề nói trên: **A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.**

Giải

Kí hiệu hai số hữu tỉ là a và b , hai số vô tỉ là x và y .

• Mệnh đề (1) đúng.

Giả sử "Tổng của một số hữu tỉ và một số vô tỉ là một số hữu tỉ", tức là có $a + x = b \in \mathbb{Q}$.

Suy ra $x = b - a \in \mathbb{Q}$. Vô lí.

• Mệnh đề (2) đúng.

Giả sử "Tích của một số vô tỉ với một số hữu tỉ khác 0 là một số hữu tỉ", tức là có $x \cdot a = b \in \mathbb{Q}$.

Suy ra $x = b : a \in \mathbb{Q}$. Vô lí.

• Mệnh đề (3) đúng.

Giả sử "Thương của một số vô tỉ với một số hữu tỉ khác 0 là một số hữu tỉ", tức là có $x : a = b \in \mathbb{Q}$.

Suy ra $x = a \cdot b \in \mathbb{Q}$. Vô lí.

• Mệnh đề (4) sai, chẳng hạn $(1 + \sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) = 1 \in \mathbb{Q}$.

• Như vậy trong bốn mệnh đề trên có ba mệnh đề đúng. Ta chọn phương án C.

Dạng 5. PHẦN NGUYÊN VÀ PHẦN LẺ CỦA MỘT SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Phần nguyên* của một số x , kí hiệu là $[x]$, là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , chẳng hạn :

$$[0,15] = 0; \quad [-1,48] = -2; \quad [18] = 18.$$

2. *Phần lẻ* (còn gọi là *phần phân*) của một số x , kí hiệu là $\{x\}$, thoả mãn điều kiện $\{x\} = x - [x]$. Như vậy $0 \leq \{x\} \leq 1$.

Kiến thức bổ sung

3. Nếu $[x] = a$ thì $a \in \mathbf{Z}$ và $x = a + q$, với $0 \leq q < 1$.
 4. Nếu $[x] = a$ thì $a \in \mathbf{Z}$ và $a \leq x < a + 1$, hay $0 \leq x - a < 1$. Ta có $[x] \leq x < [x] + 1$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 3.25. Tìm phần nguyên

$$\left[\frac{5}{-7}\right]; [-3,4]; [0]; [12,4]; \left[\frac{-53}{9}\right].$$

Giải

Ta có các kết quả sau: $-1; -4; 0; 12; -6$.

VÍ DỤ 3.26. Tính tổng: $A = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{2^2}\right] + \left[\frac{100}{2^3}\right] + \left[\frac{100}{2^4}\right] + \left[\frac{100}{2^5}\right] + \left[\frac{100}{2^6}\right]$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= [50] + [25] + \left[12\frac{1}{2}\right] + \left[6\frac{1}{4}\right] + \left[3\frac{1}{8}\right] + \left[1\frac{9}{16}\right] \\ &= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97. \end{aligned}$$

Lưu ý:

• Xét tích $P = 1.2.3.4 \dots 100 = 100!$ thì số 97 ứng với số thừa số 2 được chứa trong $100!$, tức là $100! = 2^{97} \cdot m$ với $m \in \mathbf{N}$, $m \not\equiv 2$.

• Tương tự cách giải trên, ta sẽ tính được số thừa số nào đó được chứa trong tích P :

Số thừa số 3 chứa trong $100!$ là:

$$\begin{aligned} \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{3^2}\right] + \left[\frac{100}{3^3}\right] + \left[\frac{100}{3^4}\right] &= \left[33\frac{1}{3}\right] + \left[11\frac{1}{9}\right] + \left[3\frac{19}{27}\right] + \left[1\frac{19}{81}\right] \\ &= 33 + 11 + 3 + 1 = 48. \end{aligned}$$

Số thừa số 4 chứa trong $100!$ là:

$$\left[\frac{100}{4}\right] + \left[\frac{100}{4^2}\right] + \left[\frac{100}{4^3}\right] = [25] + \left[6\frac{1}{4}\right] + \left[1\frac{9}{16}\right] = 25 + 6 + 1 = 32.$$

VÍ DỤ 3.27. Tính tổng:

$$B = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] + \dots + [\sqrt{99}] + [\sqrt{100}].$$

Giải

Ta có $[x] = a$, thì $a \in \mathbb{Z}$ và $a \leq x < a + 1$ nên $[\sqrt{n}] = a$ thì $a \leq \sqrt{n} < a + 1$.

Nếu: $1 \leq n \leq 3$ thì $1 \leq \sqrt{n} < 2$, suy ra $[\sqrt{n}] = 1$ và có 3 số như vậy;

$4 \leq n \leq 8$ thì $2 \leq \sqrt{n} < 3$, suy ra $[\sqrt{n}] = 2$ và có 5 số như vậy;

$9 \leq n \leq 15$ thì $3 \leq \sqrt{n} < 4$, suy ra $[\sqrt{n}] = 3$ và có 7 số như vậy;

$16 \leq n \leq 24$ thì $4 \leq \sqrt{n} < 5$, suy ra $[\sqrt{n}] = 4$ và có 9 số như vậy;

...

$81 \leq n \leq 99$ thì $9 \leq \sqrt{n} < 10$, suy ra $[\sqrt{n}] = 9$ và có 19 số như vậy.

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } B = & \left(\underbrace{[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]}_3 \right) + \left(\underbrace{[\sqrt{4}] + \dots + [\sqrt{8}]}_5 \right) \\ & + \dots + \left(\underbrace{[\sqrt{81}] + \dots + [\sqrt{99}]}_{19} \right) + [\sqrt{100}]. \end{aligned}$$

$$B = 1.3 + 2.5 + 3.7 + 4.9 + 5.11 + 6.13 + 7.15 + 8.17 + 9.19 + 10 = 625.$$

VÍ DỤ 3.28. Tìm x , nếu:

$$\text{a) } 3.[x] - 2 = 4; \quad \text{b) } 2[x] + 3 = -5; \quad \text{c) } (3 - [x]).(2[x] + 5)^2 = 0.$$

Giải

$$\text{a) } 3.[x] - 2 = 4 \Leftrightarrow [x] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3.$$

$$\text{b) } 2.[x] + 3 = -5 \Leftrightarrow [x] = -4 \Leftrightarrow -4 \leq x < -3.$$

$$\text{c) } 3 - [x] = 0 \Leftrightarrow [x] = 3 \Leftrightarrow 3 \leq x < 4.$$

Trường hợp $2[x] + 5 = 0$ loại do $[x] = -2,5 \notin \mathbb{Z}$.

VÍ DỤ 3.29. Tìm số nguyên x mà:

$$\text{a) } \left[\frac{3x+1}{5} \right] = 1; \quad \text{b) } \left[\frac{7x-5}{3} \right] = -2.$$

Giải

a) Ta có: $\left[\frac{3x+1}{5} \right] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{3x+1}{5} < 2 \Leftrightarrow 1\frac{1}{3} \leq x < 3 \Leftrightarrow x = 2$, vì $x \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có: $\left[\frac{7x-5}{3} \right] = -2 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{7x-5}{3} < -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{7} \leq x < \frac{2}{7} \Leftrightarrow x = 0$, vì $x \in \mathbb{Z}$.

BÀI TẬP

3.1. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân:

$$\frac{9}{33}; \frac{13}{91}; \frac{148}{518}; \frac{133}{418}; \frac{15}{82}; \frac{73}{81}; \frac{10987654321}{504}.$$

3.2. Viết số $\frac{1}{\underbrace{1,000\dots01}_9}$ dưới dạng số thập phân.

3.3. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

$$0,000(1); -0,3(18); -2,37(1); 3,24(81).$$

3.4. Tìm chữ số thập phân thứ 2012 của phân số $\frac{15}{19}$ khi viết dưới dạng số thập phân.

3.5. Lấy $\pi \approx 3,14$.

a) Các bánh xe của một chiếc xe tải chạy với vận tốc 60km/h thực hiện 4 vòng quay trong một giây. Hỏi đường kính của bánh xe bằng bao nhiêu ?

b) Một hình tròn nằm bên trong một hình vuông. Biết cạnh hình vuông bằng 3,72cm và đường kính hình tròn bằng 2,48cm. Tính diện tích phần hình vuông còn lại không bị hình tròn che.

c) Một vệ tinh bay trên quỹ đạo tròn vòng quanh Trái Đất. Quỹ đạo có độ dài là 60000km. Hỏi độ dài quỹ đạo sẽ tăng thêm bao nhiêu kilômet nếu biết bán kính của quỹ đạo tăng lên 1km ?

3.6. Tính: $\sqrt{\frac{0,0009}{0,0121}}; \sqrt{10,24}; \sqrt{0,64} + \sqrt{0,81}; \sqrt{1,2321} + \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3}.$

3.7. So sánh hai tổng A và B, nếu:

$$A = \frac{2011}{\sqrt{2012}} + \frac{2012}{\sqrt{2011}} \text{ và } B = \sqrt{2011} + \sqrt{2012}.$$

3.8. Thực hiện phép tính:

$$A = \left(\sqrt{0,0289} + \sqrt{0,6889} \right) \cdot \left(1349 \cdot \sqrt{\frac{361}{5041}} - 1422 \cdot \sqrt{\frac{324}{6241}} \right).$$

3.9. Cho $x = a + b$ và $y = a \cdot b$. Biết x và y là các số vô tỉ. Hỏi trong hai số a và b , có thể có một số là số hữu tỉ được không?

3.10. Sắp xếp các số sau từ nhỏ đến lớn:

$$\frac{1}{\sqrt{121}}; \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{12321}}; \frac{\sqrt{12321}}{\sqrt{1234321}}; \dots; \frac{\sqrt{123456787654321}}{\sqrt{12345678987654321}}.$$

3.11. Khi phân tích $1000!$ ra thừa số nguyên tố sẽ có bao nhiêu thừa số 2, thừa số 3, thừa số 5?

3.12. Cho bảy số thập phân $a_1 = 2,56$; $a_2 = 2,61$; $a_3 = 2,65$; $a_4 = 2,71$; $a_5 = 2,79$; $a_6 = 2,82$; $a_7 = 2,86$. Thay mỗi số a_i ($1 \leq i \leq 7$ và $i \in \mathbf{N}$) bằng một số nguyên b_i xấp xỉ số a_i tương ứng mà tổng các số b_i bằng tổng các số a_i và sai số $M = |b_i - a_i|$ là nhỏ nhất. Tính giá trị của $100M$.

3.13. Biết $a + b = 9$. Tính $\overline{0,a(b)} + \overline{0,b(a)}$.

3.14. Tìm x và y , nếu: $\overline{0,xy(x)} - \overline{0,yx(y)} = 0,4(5)$ và $\overline{xy} + \overline{yx} = 99$.

3.15. Cho phân số $\frac{n}{90}$. Viết phân số đó dưới dạng số thập phân, biết n là số nguyên dương nhỏ nhất chia hết cho 15 mà trong cách viết chỉ dùng các chữ số 0 hoặc 8.

3.16. Tìm $[x]$, nếu:

a) $3 < x < \frac{17}{5}$;

b) $\frac{-9}{2} < x < -4$;

c) $\frac{-11}{3} < x < \frac{10}{-3}$.

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

**Chuyên đề 4. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN.
ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH****Dạng 1. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH****I. KIẾN THỨC CƠ BẢN****1. Đại lượng tỉ lệ thuận**

Định nghĩa: Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = kx$ (với k là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k .

Nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì :

– Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = \frac{y_n}{x_n} = k.$$

– Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} ; \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_1}{y_3} ; \dots$$

2. Đại lượng tỉ lệ nghịch

Định nghĩa: Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$ (với a là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a .

Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau thì :

– Tích hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = \dots = x_n \cdot y_n = a.$$

– Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia:

$$\frac{y_1}{y_5} = \frac{x_5}{x_1}; \frac{y_3}{y_7} = \frac{x_7}{x_3}; \dots$$

Kiến thức bổ sung

3. Quan hệ giữa hai đại lượng tỉ lệ thuận

- Khi đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $k \neq 0$ thì đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{k}$.
- Đại lượng z tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ k_1 ($k_1 \neq 0$), đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ k_2 ($k_2 \neq 0$), thì z tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k_1 \cdot k_2$.

4. Quan hệ giữa hai đại lượng tỉ lệ nghịch

- Khi đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $a \neq 0$ thì đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng y cũng theo hệ số tỉ lệ a .
- Đại lượng z tỉ lệ nghịch với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ a_1 ($a_1 \neq 0$), đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ a_2 ($a_2 \neq 0$), thì z tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $\frac{a_1}{a_2}$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 4.1. Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong các bảng dưới. Hỏi hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch với nhau? Nếu có, chỉ ra hệ số tỉ lệ của y đối với x .

a)

x	1	2	3	4	5
y	-0,(6)	-1,(3)	-2	-2,(6)	-3,(3)

b)

x	-2^1	2^2	-2^3	-2^4	2^5
y	4	-16	32	64	-128

Giải

a) Ta có: $\frac{-0,(6)}{1} = \frac{-1,(3)}{2} = \frac{-2,(6)}{4} = \frac{-3,(3)}{5} = \frac{-2}{3}$. Vậy tương quan giữa hai đại lượng y và x là tương quan tỉ lệ thuận, với hệ số tỉ lệ là $-\frac{2}{3}$.

b) Ta có: $\frac{-16}{2^2} = \frac{32}{-2^3} = \frac{64}{-2^4} = \frac{-128}{2^5} = -4$ còn $\frac{4}{-2^1} = -2$ mà $-4 \neq -2$.

Mặt khác: $4.(-2^1) \neq (-16).2^2 \neq 32.(-2^3) \neq 64.(-2^4) \neq (-128).2^5$.

Vậy tương quan giữa hai đại lượng y và x không là tương quan tỉ lệ thuận và cũng không là tương quan tỉ lệ nghịch.

VÍ DỤ 4.2. Viết công thức biểu thị sự phụ thuộc giữa các đại lượng sau và cho biết tương quan giữa chúng là tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch:

- Chu vi C và cạnh a của một hình vuông.
- Chu vi C và bán kính R của một đường tròn.
- Một số hữu tỉ x khác 0 và số đối của nó.
- Một số hữu tỉ x khác 0 và số nghịch đảo của nó.
- Quãng đường ánh sáng đi được (S km) và thời gian đi quãng đường đó (t giây).
- Số vòng quay y của kim giờ với số vòng quay x của kim phút trong cùng một thời gian.
- Diện tích đáy S và chiều cao h của hai bể nước hình hộp chữ nhật biết chúng có cùng thể tích.
- Số đo cạnh đáy a và số đo chiều cao tương ứng h của các tam giác có cùng diện tích.

Giải

• Ta có tỉ số $\frac{C}{a} = 4$ (hằng số), do đó chu vi C và cạnh a của một hình vuông là hai đại lượng tỉ lệ thuận với hệ số tỉ lệ là 4.

Tương tự, các đại lượng có tương quan tỉ lệ thuận là:

- Chu vi C và bán kính R của một đường tròn, vì $\frac{C}{R} = 2.\pi$ (hằng số).
- Quãng đường ánh sáng đi được và thời gian đi quãng đường đó, vì $\frac{S}{t} = v$ mà vận tốc ánh sáng là một hằng số ($\approx 300\,000$ km/s).

– Một số hữu tỉ x khác 0 và số đối của nó, vì $\frac{x}{-x} = -1$ (hằng số).

– Số vòng quay y của kim giờ với số vòng quay x của kim phút trong cùng một thời gian, vì $\frac{y}{x} = \frac{1}{12}$ (hằng số).

• Ta có tích $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ (hằng số), do đó một số hữu tỉ khác 0 và số nghịch đảo của nó là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Tương tự, các đại lượng có tương quan tỉ lệ nghịch là:

– Diện tích đáy S và chiều cao h của hai bể nước hình hộp chữ nhật có cùng thể tích V , vì $S \cdot h = V$ (hằng số).

– Số đo cạnh đáy a và chiều cao tương ứng h của các tam giác có cùng diện tích S , vì $ah = 2S$ (hằng số).

VÍ DỤ 4.3.

a) Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Biết tổng hai giá trị nào đó của x bằng 1 và tổng hai giá trị tương ứng của y bằng -2 . Viết công thức liên hệ giữa y và x .

b) Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Khi x nhận các giá trị $x_1 = -3$ và $x_2 = 2$ thì các giá trị tương ứng y_1, y_2 có hiệu bằng 13. Viết công thức liên hệ giữa y và x .

c) Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ dương. Biết rằng tích hai giá trị nào đó của x là 2 và hiệu bình phương của hai giá trị đó của x là 3; còn hiệu bình phương hai giá trị tương ứng của y là -12 . Viết công thức liên hệ giữa y và x .

Giải

a) Biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận, ta có $y = kx$ ($k \neq 0$).

Gọi hai giá trị của x là x_1, x_2 và hai giá trị tương ứng của y là y_1, y_2 .

$$\text{Ta có: } k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Vậy ta có công thức: $y = -2x$.

b) Biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có $xy = a$ ($a \neq 0$).

Gọi hai giá trị của x là x_1, x_2 và hai giá trị tương ứng của y là y_1, y_2 .

$$\text{Ta có: } \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{-3} \Rightarrow \frac{y_1}{2} = \frac{y_2}{-3} = \frac{y_1 - y_2}{2 - (-3)} = \frac{13}{5}.$$

$$\text{Suy ra } y_1 = 5,2 \Rightarrow x_1 \cdot y_1 = (-3) \cdot 5,2 = -15,6.$$

$$\text{Vậy ta có công thức: } y = \frac{-15,6}{x}.$$

c) Biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có $xy = a$ ($a > 0$).

Gọi hai giá trị của x là x_1, x_2 và hai giá trị tương ứng của y là y_1 và y_2 , ta có:

$$x_1 \cdot x_2 = 2; x_1^2 - x_2^2 = 3; y_1^2 - y_2^2 = -12.$$

$$\text{Đặt } b = \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1} \Rightarrow b^2 = \frac{y_1^2}{x_2^2} = \frac{y_2^2}{x_1^2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{-(x_1^2 - x_2^2)} = \frac{-12}{-3} = 4.$$

$$\text{Suy ra } b = \pm 2.$$

• Với $b = 2$ thì $y_1 = 2x_2$ và $y_2 = 2x_1$.

$$\text{Mà } x_2 \cdot x_1 = 2 \Rightarrow a = y_1 \cdot x_1 = (2x_2) \cdot x_1 = 2 \cdot (x_2 \cdot x_1) = 4 > 0 \text{ (chọn)} \Rightarrow y = \frac{4}{x}.$$

• Với $b = -2$ thì $y_1 = -2x_2$ và $y_2 = -2x_1$.

$$\text{Mà } x_2 \cdot x_1 = 2 \Rightarrow a = y_1 \cdot x_1 = (-2x_2) \cdot x_1 = -2 \cdot (x_2 \cdot x_1) = -4 < 0 \text{ (loại)}.$$

$$\text{Vậy ta có công thức: } y = \frac{4}{x}.$$

Dạng 2. CÁC BÀI TOÁN TỈ LỆ THUẬN VÀ TỈ LỆ NGHỊCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Các bước trình bày của dạng toán hai đại lượng tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch:

1. Bước 1: Chỉ ra tương quan giữa các đại lượng là tỉ lệ thuận hoặc tỉ lệ nghịch.

• Nếu $y = kx$ (với k là hằng số khác 0) thì y và x là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

• Nếu $xy = a$ (với a là hằng số khác 0) thì y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

2. Bước 2: Áp dụng các tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận hoặc tỉ lệ nghịch để giải toán.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 4.4. Có hai đội công nhân. Đội một có 35 người, nếu mỗi người làm trong 16 ngày thì đào được 864m^3 đất. Hỏi 20 người của đội hai, mỗi người làm trong 14 ngày sẽ đào được bao nhiêu mét khối đất ? (Giả thiết năng suất lao động của mỗi người là như nhau).

Giải

Một người đào đất trong một ngày được tính là 1 công lao động.

Vì $(\text{Số đất đào được}) : (\text{Số công}) = \text{Năng suất lao động} = \text{Const}$,
nên số đất đào được và số công là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Ta có

	Số đất đào được (m^3)	Số công lao động
Đội một	864	560 (= 35.16)
Đội hai	x	280 (= 20.14)

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận, ta có

$$\frac{864}{x} = \frac{560}{280} \Rightarrow x = \frac{864.280}{560} = 432.$$

Vậy 20 người của đội hai mỗi người làm trong 14 ngày sẽ đào được 432m^3 đất.

VÍ DỤ 4.5. Biết 78 người hoàn thành một công việc trong 65 ngày.

a) Nếu năng suất lao động của mỗi người như nhau thì cần thêm bao nhiêu người nữa để hoàn thành công việc đó trong 39 ngày ?

b) Nếu cải tiến công cụ để năng suất lao động tăng thêm 20% thì cần giảm bao nhiêu người mà vẫn hoàn thành công việc đó trong 65 ngày ?

Giải

a) Cùng một công việc thì số người và số ngày làm việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Ta có:

	Số người	Số ngày làm việc
Lúc trước	78	65
Lúc sau	x	39

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có: $\frac{78}{x} = \frac{39}{65} \Rightarrow x = \frac{78.65}{39} = 130$.

Vậy để hoàn thành công việc đó trong 39 ngày thì cần có 130 người và số người cần thêm là: $130 - 78 = 52$ (người).

b) Cùng một công việc và số ngày làm việc như nhau thì năng suất lao động và số người là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Ta có:

	Năng suất lao động	Số người
Lúc trước	100%	78
Lúc sau	120%	x

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{100\%}{120\%} = \frac{x}{78} \Rightarrow x = \frac{100\%.78}{120\%} = 65.$$

Khi cải tiến công cụ để năng suất lao động tăng thêm 20%, thì chỉ cần 65 người vẫn hoàn thành công việc mà 78 người làm trong 65 ngày.

Vậy số người cần giảm: $78 - 65 = 13$ (người).

(Trong bài toán này con số 65 ngày chỉ để minh họa cho số ngày là một số không đổi).

VÍ DỤ 4.6. Cà phê hạ giá $23\frac{1}{7}\%$. Với số tiền trước đây mua được 53,8kg cà phê thì nay mua được bao nhiêu kilôgam cà phê hạ giá ?

Giải

Theo đề bài ta có số tiền không đổi (Const).

Mà: (Số hàng) . (Giá hàng) = Số tiền = Const.

Nên số hàng và giá hàng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Ta có:

	Số hàng (kg)	Giá hàng
Lúc trước	53,8	100%
Lúc sau	x	$76\frac{6}{7}\%$

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{53,8}{x} = \frac{76\frac{6}{7}\%}{100\%} \Rightarrow x = \frac{53,8.100\%}{76\frac{6}{7}\%} = 70.$$

Vậy với số tiền trước đây mua được 53,8kg cà phê thì nay mua được 70kg cà phê hạ giá.

VÍ DỤ 4.7. Để truyền một chuyển động, người ta có thể dùng dây cu-roa (courroie), dùng xích hoặc dùng bánh xe có răng. Ta xét một bộ máy truyền chuyển động có hai bánh xe răng được khớp vào nhau dưới đây:

a) Nếu bánh xe thứ nhất có 65 răng và quay 36 vòng/phút thì bánh xe thứ hai có 45 răng sẽ quay được bao nhiêu vòng/phút ?

b) Muốn bánh xe thứ hai quay 78 vòng/phút thì bánh xe thứ hai cần thiết kế có bao nhiêu răng ?

Giải

Do hai bánh xe răng khớp vào nhau trong quá trình chuyển động nên số răng và số vòng quay của bánh xe là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

a) Ta có:

	Số răng bánh xe	Số vòng quay
Bánh xe thứ nhất	65	36
Bánh xe thứ hai	45	x

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch ta có: $\frac{65}{45} = \frac{x}{36}$ nên số vòng quay của bánh xe thứ hai là: $x = \frac{65 \cdot 36}{45} = 52$ (vòng/phút).

b) Tương tự, ta có bánh xe thứ hai cần thiết kế có 30 răng.

Dạng 3. BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

VÍ DỤ 4.8. Một người đi xe đạp và một người đi xe máy cùng đi một lúc từ A tới B. Vì vận tốc xe đạp nhỏ hơn vận tốc xe máy là 18km/h nên khi xe đạp tới C thì xe máy đã tới D quá C một quãng đường bằng 0,6 quãng đường AD. Tính vận tốc mỗi xe.

Giải

Kí hiệu quãng đường $S_1 = AC$ và $S_2 = AD$,
ta có $\frac{CD}{AD} = 0,6 = \frac{3}{5}$, do đó $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AC}{AD} = \frac{2}{5}$
(h.4.1).



Hình 4.1

Gọi vận tốc và thời gian xe đạp đi từ A tới C là v_1 và t_1 , vận tốc và thời gian xe máy đi từ A tới D là v_2 và t_2 . Theo đề bài ta có: $v_2 - v_1 = 18$ (km/h).

Hai xe khởi hành cùng một lúc từ A, một xe tới C và một xe tới D nên cùng thời gian thì quãng đường đi được và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

$$\text{Ta có } \frac{v_1}{v_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{5}. \text{ Suy ra } \frac{v_1}{2} = \frac{v_2}{5} = \frac{v_2 - v_1}{5 - 2} = \frac{18}{3} = 6.$$

Vậy vận tốc xe đạp: $v_1 = 6.2 = 12$ (km/h) và vận tốc xe máy: $v_2 = 6.5 = 30$ (km/h).

VÍ DỤ 4.9. Đi bộ từ nhà A đến xưởng B anh Toàn cần 50 phút, còn đi xe đạp chỉ cần 0,3 giờ. Tính quãng đường từ nhà A đến xưởng B, biết vận tốc xe đạp lớn hơn vận tốc đi bộ là 8km/h.

Giải

Gọi vận tốc và thời gian của anh Toàn đi từ nhà tới xưởng khi đi bộ là v_1 và t_1 ; khi đi bằng xe đạp là v_2 và t_2 . Theo đề bài ta có: $v_2 - v_1 = 8$ (km/h), $t_1 = \frac{5}{6}$ (h) và $t_2 = 0,3$ (h).

Trên cùng quãng đường AB, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} = 0,3 : \frac{5}{6} = \frac{9}{25}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{v_1}{9} = \frac{v_2}{25} = \frac{v_2 - v_1}{25 - 9} = \frac{8}{16} = 0,5 \text{ hay } v_2 = 0,5 \cdot 25 = 12,5 \text{ (km/h).}$$

Vậy quãng đường từ nhà đến xưởng: $AB = v_2 \cdot t_2 = 12,5 \cdot 0,3 = 3,75$ (km).

VÍ DỤ 4.10. Lúc 8 giờ sáng một người đi ô tô từ nhà A đến phi trường B. Nếu đi với vận tốc 40km/h thì đến chậm 30 phút so với lúc máy bay hạ cánh, nhưng nếu đi với vận tốc 50km/h thì sẽ đến trước 2 giờ so với lúc máy bay hạ cánh. Tìm quãng đường từ nhà đến phi trường và thời gian lúc máy bay hạ cánh.

Giải

Gọi vận tốc và thời gian của người đó đi từ nhà đến phi trường với vận tốc 40km/h là v_1 và t_1 ; với vận tốc 50km/h là v_2 và t_2 .

Ta có $v_1 = 40$ (km/h); $t_1 = t + 0,5$ (h) và $v_2 = 50$ (km/h); $t_2 = t - 2$ (h) với t là thời gian người đó đi từ nhà đến phi trường đúng lúc máy bay hạ cánh.

Trên cùng quãng đường AB thì thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch:

$$t_2 : t_1 = v_1 : v_2 = 40 : 50 = 4 : 5.$$

Suy ra $\frac{t_1}{5} = \frac{t_2}{4} = \frac{t_1 - t_2}{5 - 4} = \frac{(t + 0,5) - (t - 2)}{1} = 2,5$ hay $t_2 = 2,5 \cdot 4 = 10$ (h).

Vậy quãng đường từ nhà đến phi trường là $AB = v_2 \cdot t_2 = 50 \cdot 10 = 500$ (km).

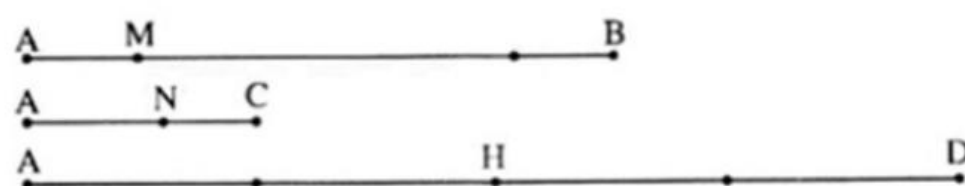
Và thời gian người đó đi từ nhà đến phi trường đúng lúc máy bay hạ cánh là $t = t_2 + 2 = 12$ (giờ), hay máy bay hạ cánh lúc $8 + 12 = 20$ (giờ), tức là 8 giờ tối.

VÍ DỤ 4.11. Một động tử (vật chuyển động) phải đi một quãng đường 900km với vận tốc 10km/h. Một động tử thứ hai phải đi một quãng đường 400km nhưng với vận tốc 20km/h. Nếu cả hai cùng khởi hành một lúc thì sau bao lâu quãng đường còn lại của động tử thứ nhất gấp 4 lần quãng đường còn lại của động tử thứ hai ?

Giải

Giả sử động tử thứ nhất phải đi một quãng đường $AB = 900$ (km) và động tử thứ hai phải đi một quãng đường $AC = 400$ (km) (h.4.2).

Nếu cả hai động tử cùng khởi hành một lúc từ A và sau t giờ thì động tử thứ nhất tới M và động tử thứ hai tới N mà $MB = 4 \cdot NC$.



Hình 4.2

Ta xét một động tử thứ ba đi một quãng đường $AD = 1600$ km với vận tốc 80km/h. Như vậy quãng đường và vận tốc của động tử thứ ba đều gấp 4 lần quãng đường và vận tốc của động tử thứ hai. Nếu khởi hành cùng một lúc với hai động tử trên thì sau t giờ động tử thứ ba sẽ tới H. Do trong cùng thời gian t , quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận nên sau t giờ kể từ khi khởi hành cùng một lúc với hai động tử trên thì quãng đường còn lại của động tử thứ ba gấp 4 lần quãng đường còn lại của động tử thứ hai, do đó $HD = 4NC = MB$.

Xét bài toán với động tử thứ nhất và động tử thứ ba. Gọi quãng đường và vận tốc mà động tử thứ nhất và động tử thứ ba cùng đi trong thời gian t là: S_1 , v_1 , và S_3 , v_3 .

Cùng khởi hành, sau một thời gian t , quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận: $S_1 : S_3 = v_1 : v_3 = 10 : 80 = 1 : 8$.

Vì hai quãng đường còn lại bằng nhau nên $S_3 - S_1 = 1600 - 900 = 700$ (km).

$$\text{Ta có } \frac{S_1}{1} = \frac{S_3}{8} = \frac{S_3 - S_1}{8 - 1} = \frac{700}{7} = 100.$$

Suy ra quãng đường động tử thứ nhất đi trong t giờ là: $S_1 = 100.t = 100$ (km).

Vậy thời gian để quãng đường còn lại của động tử thứ nhất gấp 4 lần quãng đường còn lại của động tử thứ hai là: $t = S_1 : v_1 = 100 : 10 = 10$ (giờ).

Thật vậy, sau 10 giờ kể từ lúc khởi hành thì quãng đường còn lại của:

– Động tử thứ nhất: $900 - 100 = 800$ (km);

– Động tử thứ hai: $400 - 20.10 = 200$ (km).

Quãng đường còn lại của động tử thứ nhất gấp 4 lần quãng đường còn lại của động tử thứ hai.

Lưu ý: Bài toán này còn có thể giải bằng nhiều cách khác, cách giải trên minh họa cho cách sử dụng đại lượng tỉ lệ thuận.

BÀI TẬP

4.1. Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong bảng dưới. Hỏi hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch với nhau? Nếu có, chỉ ra hệ số tỉ lệ của y đối với x .

a)

x	-15	-3	5	60	120
y	2	10	-6	-0,5	-0,25

b)

x	2	5	13	7	2^3
y	5,2	13	33,8	18,2	20,8

4.2. Gọi x , y và z theo thứ tự là số vòng quay của kim giây, kim phút và kim giờ trong cùng một thời gian. Viết công thức biểu diễn x theo z , rồi điền các số thích hợp vào bảng sau:

x	1				
y		1			
z			1	0,5	5

- 4.3. Với số tiền trước đây mua được 32,9kg bột mì thì nay mua được 40kg bột mì. Hỏi bột mì được hạ giá bao nhiêu phần trăm ?
- 4.4. Hai người cùng làm xong một công việc sau 3 giờ. Nếu người A làm sớm hơn 1 giờ và người B làm chậm đi nửa giờ thì họ hoàn thành công việc đó sớm hơn 18 phút. Nếu người B làm sớm hơn 1 giờ và người A làm chậm đi nửa giờ thì người A nhận tiền công ít hơn so với thực tế là 56000 đồng. Hỏi thực tế người A nhận được bao nhiêu tiền công ?
- 4.5. Khoảng cách giữa hai ga A và B bằng 48km. Cùng một lúc có hai đoàn tàu từ A và B đi theo một hướng thì sau một thời gian tàu A đuổi kịp tàu B. Nếu hai đoàn tàu đi ngược chiều nhau thì thời gian gặp nhau chỉ bằng $\frac{2}{7}$ thời gian đuổi kịp. Hỏi hai đoàn tàu gặp nhau tại đâu trên quãng đường AB ?
- 4.6. Một người đi ngựa từ A tới B với vận tốc 7km/h. Cùng lúc đó một người đi xe đạp từ B về A với vận tốc 13km/h. Biết quãng đường AB bằng 48km.
- a) Hỏi sau bao lâu kể từ khi khởi hành, quãng đường còn lại của người đi ngựa bằng 3 lần quãng đường còn lại của người đi xe đạp ?
- b) Giả sử M là điểm chính giữa của quãng đường AB (trung điểm của AB) thì sau bao lâu kể từ khi khởi hành người đi xe đạp sẽ cách M một khoảng bằng $\frac{1}{3}$ khoảng cách từ người đi ngựa tới M ?

Chuyên đề 5. CHIA TỈ LỆ

Dạng 1. ĐƯA VỀ TỈ LỆ GIỮA CÁC SỐ NGUYÊN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. x, y, z tỉ lệ (thuận) với các số a, b, c có thể thay bằng tỉ lệ giữa các số nguyên: Nếu các số a, b, c là các số thập phân với số chữ số thập phân lần lượt là n_1, n_2, n_3 thì thực hiện $a : b : c = (a \cdot 10^n) : (b \cdot 10^n) : (c \cdot 10^n)$, trong đó $n = \max\{n_1, n_2, n_3\}$.

Nếu a, b, c là các phân số thì thực hiện $a : b : c = \left(a \cdot \frac{m}{n}\right) : \left(b \cdot \frac{m}{n}\right) : \left(c \cdot \frac{m}{n}\right)$, trong đó m là BCNN của các mẫu số và n là ƯCLN của các tử số.

2. x, y, z tỉ lệ nghịch với các số $a, b, c \Leftrightarrow x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$, rồi thực hiện như phần 1.

Kiến thức bổ sung

3. Nếu các số a, b, c là số thập phân vô hạn tuần hoàn thì đổi thành phân số và thực hiện như phần 1.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 5.1. Thay các tỉ lệ sau bằng tỉ lệ giữa các số nguyên:

a) $0,12 : 1,5 : 0,432$. b) $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5}$. c) $0,(6) : 1,5 : 0,1(6)$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } 0,12 : 1,5 : 0,432 &= (0,12 \cdot 1000) : (1,5 \cdot 1000) : (0,432 \cdot 1000) \\ &= 120 : 1500 : 432 = 10 : 125 : 36. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \left(\frac{2}{3} \cdot 60 \right) : \left(\frac{3}{4} \cdot 60 \right) : \left(\frac{4}{5} \cdot 60 \right) = 40 : 45 : 48.$$

$$\text{c) } 0,(6) : 1,5 : 0,1(6) = \frac{6}{9} : \frac{3}{2} : \frac{15}{90} = \frac{2}{3} : \frac{3}{2} : \frac{1}{6} = 4 : 9 : 1 \text{ (nhân các tỉ số với 6).}$$

VÍ DỤ 5.2. Thay tỉ lệ giữa các số a, b, c bằng tỉ lệ giữa các số nguyên, nếu:

a) $a; b; c$ tỉ lệ nghịch với các số $\frac{2}{3}; 0,7; 1\frac{1}{2}$.

b) $a; b; c$ tỉ lệ nghịch với các số $0,(2); 0,0(4); 0,00(6)$.

Giải

$$\text{a) } a : b : c = \frac{1}{\frac{2}{3}} : \frac{1}{0,7} : \frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} : \frac{10}{7} : \frac{2}{3} = 63 : 60 : 28 \text{ (nhân các tỉ số với 42).}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a : b : c &= \frac{1}{0,(2)} : \frac{1}{0,0(4)} : \frac{1}{0,00(6)} = \frac{9}{2} : \frac{45}{2} : \frac{150}{1} = 3 : 15 : 100 \text{ (nhân các} \\ &\text{tỉ số với } \frac{2}{3} \text{).} \end{aligned}$$

VÍ DỤ 5.3. Hỏi các số a, b, c tỉ lệ theo các số nguyên nào, nếu:

- a) Số a và số b tỉ lệ theo $0,8$ và $0,375$; còn số b và số c tỉ lệ theo $0,25$ và $1,75$?
b) Số a và số b tỉ lệ theo $1,(3)$ và $1,(6)$; còn số b và số c tỉ lệ theo $0,125$ và $0,2$?

Giải

a) Có $a : b = 0,8 : 0,375 = 32 : 15$ và $b : c = 0,25 : 1,75 = 1 : 7 = 15 : 105$.

Suy ra $a : b : c = 32 : 15 : 105$.

b) Có $a : b = 1,(3) : 1,(6) = 4 : 5$ và $b : c = 0,125 : 0,2 = 5 : 8$.

Suy ra $a : b : c = 4 : 5 : 8$.

Dạng 2. CHIA MỘT SỐ THÀNH CÁC PHẦN TỈ LỆ VỚI CÁC SỐ CHO TRƯỚC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. x, y, z tỉ lệ (thuận) với các số a, b, c có thể thay bằng tỉ lệ giữa các số nguyên:
- Nếu các số a, b, c là các số thập phân với số chữ số phần thập phân lần lượt là n_1, n_2, n_3 thì thực hiện $a : b : c = (a \cdot 10^n) : (b \cdot 10^n) : (c \cdot 10^n)$ trong đó $n = \max\{n_1, n_2, n_3\}$.
 - Nếu a, b, c là các phân số thì thực hiện $a : b : c = \left(a \cdot \frac{m}{n}\right) : \left(b \cdot \frac{m}{n}\right) : \left(c \cdot \frac{m}{n}\right)$, trong đó m là BCNN của các mẫu số và n là ƯCLN của các tử số.
 - Sau khi đã có dãy tỉ số bằng nhau, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để giải toán.
2. x, y, z tỉ lệ nghịch với các số $a, b, c \Leftrightarrow x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$, rồi thực hiện như phần 1.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 5.4.

- a) Chia số 330 thành ba số tỉ lệ với $0,4; 0,6$ và $1,2$.
b) Chia số 1208 thành ba số tỉ lệ nghịch với $0,(6); 0,7$ và $1,5$.

c) Ba số tỉ lệ theo $0,8; \frac{2}{3};$ và $0,05$. Tìm ba số biết số thứ nhất lớn hơn tổng hai số còn lại là $7,5$.

d) Chia số 4500 thành ba số mà 80% số thứ nhất bằng $53,(3)\%$ số thứ hai và bằng 40% số thứ ba.

Giải

Gọi ba số phải tìm là x, y, z .

a) Ta có $x + y + z = 330$.

Theo đề bài, có $x : y : z = 0,4 : 0,6 : 1,2 = 2 : 3 : 6$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$k = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{x + y + z}{11} = \frac{330}{11} = 30.$$

Suy ra $x = 60, y = 90, z = 180$.

b) Ta có $x + y + z = 1208$ và $x : y : z = \frac{1}{0,(6)} : \frac{1}{0,7} : \frac{1}{1,5} = 63:60:28$.

Tương tự, có $k = 8$. Suy ra: $x = 504, y = 480, z = 224$.

c) Ta có $x - (y + z) = 7,5$ và $x : y : z = 0,8 : \frac{2}{3} : 0,05 = 48 : 40 : 3$.

Tương tự, có $k = 1,5$. Suy ra $x = 72, y = 60; z = 4,5$.

d) Ta có $x + y + z = 4500$ và $x : y : z = \frac{1}{80\%} : \frac{1}{53,(3)\%} : \frac{1}{40\%} = 2 : 3 : 4$.

Tương tự, có $k = 500$. Suy ra $x = 1000, y = 1500, z = 2000$.

VÍ DỤ 5.5. Một cửa hàng có ba súc vải dài tất cả là $86,1\text{m}$. Khi bán 28% súc vải thứ nhất, 40% súc vải thứ hai và 64% súc vải thứ ba thì chiều dài ba súc vải còn lại bằng nhau. Hỏi chiều dài mỗi súc vải khi chưa bán?

Giải

Gọi chiều dài ba súc vải khi chưa bán là x, y, z (m). Ta có $x + y + z = 86,1$ (m).

Sau khi bán, ta có $72\%.x = 60\%.y = 36\%.z$

hay $x : y : z = \frac{1}{72\%} : \frac{1}{60\%} : \frac{1}{36\%} = 5 : 6 : 10$. Vậy $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{10} = k$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có $k = 4,1$.

Chiều dài ba súc vải lần lượt là $20,5\text{m}; 24,6\text{m}; 41\text{m}$.

VÍ DỤ 5.6. Biết tổng hai số đầu hơn số thứ ba là 2000. Tìm ba số, nếu số thứ nhất bằng 45% số thứ hai và số thứ ba bằng 135% số thứ hai.

Giải

Gọi ba số phải tìm là x, y, z . Ta có $x + y - z = 2000$.

Theo đề bài, có $x : y = 45\% \Rightarrow x : y = 9 : 20$ và $z : y = 135\% \Rightarrow z : y = 27 : 20$.

Suy ra dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{9} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$k = \frac{x}{9} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27} = \frac{x+y-z}{9+20-27} = \frac{2000}{2} = 1000.$$

Suy ra $x = 9000, y = 20000, z = 27000$.

VÍ DỤ 5.7. Một xe tải chạy từ thành phố A đến hải cảng B gồm ba chặng đường dài bằng nhau, nhưng chất lượng mặt đường xấu tốt khác nhau nên vận tốc trên mỗi chặng đường lần lượt bằng 40, 24 và 60 (km/h). Biết tổng thời gian đi từ A đến B là 5 giờ, tính độ dài quãng đường AB.

Giải

Gọi vận tốc và thời gian xe tải đi trên ba chặng đường lần lượt là $v_1, v_2, v_3; t_1, t_2, t_3$. Ta có $t_1 + t_2 + t_3 = 5$.

Vì ba chặng đường dài bằng nhau nên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Ta có

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{v_1} : \frac{1}{v_2} : \frac{1}{v_3} = \frac{1}{40} : \frac{1}{24} : \frac{1}{60} = 3 : 5 : 2.$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{t_1}{3} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_3}{2} = \frac{t_1+t_2+t_3}{10} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Suy ra $t_1 = 0,5.3 = 1,5$ (h) và quãng đường $AB = 3.(40.1,5) = 180$ (km).

VÍ DỤ 5.8. Một người mang một số tiền vào siêu thị hoa quả và nhắm tính thấy với số tiền đó có thể mua được 3kg nho, hoặc 4kg táo, hoặc 5kg mận. Tính giá tiền mỗi loại, biết 3kg táo đắt hơn 2kg mận là 210 000 đồng.

Giải

Gọi giá tiền nho, táo và mận là x, y, z (đ/kg). Ta có $3y - 2z = 210000$.

Vì cùng một số tiền có thể mua được 3kg nho, hoặc 4kg táo, hoặc 5kg mận nên giá tiền và khối lượng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Ta có $3x = 4y = 5z$.

$$\text{Suy ra } x : y : z = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 20 : 15 : 12$$

$$(\text{hoặc có thể biến đổi như sau: } 3x \cdot \frac{1}{60} = 4y \cdot \frac{1}{60} = 5z \cdot \frac{1}{60} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12}).$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{3y - 2z}{45 - 24} = \frac{210000}{21} = 10000.$$

Suy ra giá nho, táo và mận tương ứng là 200000 (đ/kg), 150000 (đ/kg), 120000 (đ/kg).

Dạng 3. TẠO NÊN MỘT DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nếu trong một bài toán có tổng hoặc hiệu của một số đại lượng mà ta tạo nên được các dãy tỉ số bằng nhau thì có thể sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để giải bài toán đó.
2. Chú ý nên đưa các tỉ lệ về tỉ lệ giữa các số nguyên.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 5.9. Chia số 38 thành ba số sao cho số thứ nhất và số thứ hai tỉ lệ theo 0,8 và 0,375; còn số thứ hai và số thứ ba tỉ lệ theo 0,25 và 1,75.

Giải

Gọi số thứ nhất, số thứ hai và số thứ ba lần lượt là x, y, z . Điều kiện $x, y, z \neq 0$.

Theo đề bài, ta có $x : y = 0,8 : 0,375 = 32 : 15$ và $y : z = 0,25 : 1,75 = 15 : 105$.

$$\text{Suy ra } \frac{x}{32} = \frac{y}{15} = \frac{z}{105} = \frac{x+y+z}{152} = \frac{38}{152} = 0,25.$$

Vậy số thứ nhất là 8, số thứ hai là 3,75 và số thứ ba là 26,25.

VÍ DỤ 5.10. Tìm tổng của năm số, biết rằng số thứ nhất và số thứ ba tỉ lệ theo 5 và 9; số thứ hai và số thứ tư tỉ lệ theo 0,2 và 0,(3); số thứ hai và số thứ ba tỉ lệ theo 3 và 4,5; số thứ năm và số thứ tư tỉ lệ theo 1 và 2,5; còn tổng của số thứ ba và số thứ tư là 3,8.

Giải

Gọi năm số phải tìm lần lượt là a, b, c, d và e. Điều kiện a, b, c, d, e $\neq$ 0.

Theo đề bài, có:

$$\begin{aligned} a : c &= 5 : 9 ; & b : c &= 3 : 4,5 = 2 : 3 ; \\ b : d &= 0,2 : 0,(3) = 3 : 5 ; & e : d &= 1 : 2,5 = 2 : 5 ; & c + d &= 3,8. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{9} = \frac{d}{10} = \frac{e}{4} = \frac{a+b+c+d+e}{34} = \frac{c+d}{19} = \frac{3,8}{19} = 0,2.$$

Vậy tổng năm số bằng 6,8.

VÍ DỤ 5.11. Một nông trường trồng rừng trên ba lô đất. Biết diện tích lô đất thứ nhất bằng 40% diện tích cả ba lô đất, còn diện tích lô đất thứ hai và thứ ba tỉ lệ theo 1,5 và 1,(3). Nếu diện tích lô đất thứ nhất lớn hơn diện tích lô đất thứ ba là 12ha thì diện tích cả ba lô đất là bao nhiêu ?

Giải

Gọi diện tích ba lô đất lần lượt là x, y, z (ha). Điều kiện x, y, z > 0.

Theo đề bài, ta có: $x = 40\%(x + y + z)$;

$$y : z = 1,5 : 1,(3) = 9 : 8 \quad \text{và} \quad x - z = 12 \text{ (ha)}.$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{2}{5} \cdot (x + y + z) \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x+y+z}{5} = \frac{y+z}{3} \Rightarrow \frac{x}{34} = \frac{y+z}{51};$$

$$\frac{y}{9} = \frac{z}{8} = \frac{y+z}{17} \Rightarrow \frac{y}{27} = \frac{z}{24} = \frac{y+z}{51}.$$

$$\text{Ta có } \frac{x}{34} = \frac{y}{27} = \frac{z}{24} = \frac{x+y+z}{85} = \frac{x-z}{10} = \frac{12}{10} = 1,2.$$

Vậy diện tích cả ba lô đất là: $x + y + z = 1,2 \cdot 85 = 102$ (ha).

VÍ DỤ 5.12. Nhà trường dự định chia vở viết cho ba lớp 7A, 7B và 7C tỉ lệ theo số học sinh là 7 : 6 : 5. Nhưng sau đó vì có học sinh chuyển chuyển giữa ba lớp

nên phải chia lại theo tỉ lệ 6 : 5 : 4. Như vậy có lớp đã nhận được ít hơn theo dự định là 12 quyển vở. Tính số vở mỗi lớp nhận được.

Giải

Gọi số vở ba lớp 7A, 7B, 7C nhận được theo dự định tương ứng là x, y, z và số vở ba lớp nhận được trong thực tế là a, b, c . Có $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Theo đề bài, ta có $x : y : z = 7 : 6 : 5$ hay $\frac{x}{7} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{18}$;

$$a : b : c = 6 : 5 : 4 \text{ hay } \frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{15}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{35} = \frac{y}{30} = \frac{z}{25} = \frac{x+y+z}{90} \text{ và } \frac{a}{36} = \frac{b}{30} = \frac{c}{24} = \frac{a+b+c}{90}.$$

Do số học sinh chỉ chuyển chuyển giữa các lớp nên tổng số học sinh không đổi, kéo theo tổng số vở cũng không đổi $x+y+z = a+b+c$ và ta có

$$\frac{x}{35} = \frac{y}{30} = \frac{z}{25} = \frac{a}{36} = \frac{b}{30} = \frac{c}{24} = k.$$

Từ dãy tỉ số bằng nhau trên, ta nhận xét $\frac{x}{35} = \frac{a}{36}$, do đó $x < a$ nên số vở lớp 7A nhận được nhiều hơn so với dự định. Tương tự, số vở lớp 7B nhận được không thay đổi và số vở lớp 7C nhận được ít hơn so với dự định.

$$\text{Suy ra: } k = \frac{z-c}{25-24} = 12.$$

Vậy lớp 7A nhận được 432 vở, lớp 7B nhận được 360 vở, lớp 7C được 288 vở.

VÍ DỤ 5.13. Tìm ba phân số có tổng bằng $9\frac{9}{70}$, biết các tử số tỉ lệ theo 3 : 4 : 5 và các mẫu số tương ứng tỉ lệ theo 5 : 1 : 2.

Giải

Gọi ba phân số phải tìm lần lượt là $x = \frac{a}{a'}$, $y = \frac{b}{b'}$ và $z = \frac{c}{c'}$. Có $a', b', c' \neq 0$.

Ta có $a : b : c = 3 : 4 : 5$ hay $a = 3k$, $b = 4k$ và $c = 5k$ ($k \neq 0$);

$a' : b' : c' = 5 : 1 : 2$ hay $a' = 5h$, $b' = h$ và $c' = 2h$ ($h \neq 0$).

$$\text{Suy ra: } x : y : z = \frac{3k}{5h} : \frac{4k}{h} : \frac{5k}{2h} = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6 : 40 : 25.$$

$$\text{Có } \frac{x}{6} = \frac{y}{40} = \frac{z}{25} = \frac{x+y+z}{71} = \frac{9 \frac{9}{70}}{71} = \frac{9}{70}.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{27}{35}, y = 5\frac{1}{7}, z = 3\frac{3}{14}.$$

VÍ DỤ 5.14. Một người thợ làm một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có dung tích 8900cm^3 . Biết chiều dài và chiều cao tỉ lệ theo 5 và 2, còn chiều rộng và chiều cao tỉ lệ theo 7 và 8. Tìm kích thước của chiếc hộp.

Giải

Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp lần lượt là x, y, z (cm). Có $x, y, z > 0$.

Ta có $x : z = 5 : 2$ và $y : z = 7 : 8$. Suy ra $\frac{x}{20} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8} = k$ và $x = 20k$, $y = 7k, z = 8k$ ($k > 0$).

Thể tích hình hộp: $V = (20k) \cdot (7k) \cdot (8k) = 1120 \cdot k^3 = 8960$, do đó $k = 2$.

Vậy kích thước của hình hộp chữ nhật bằng 40cm, 14cm và 16cm.

VÍ DỤ 5.15. Hiện nay tuổi cha bằng 2,2 lần tuổi con. Trước đây 25 năm tuổi con bằng $\frac{5}{41}$ tuổi cha. Hỏi khi tuổi cha gấp 3 lần tuổi con thì con bao nhiêu tuổi ?

Giải

Gọi tuổi cha và tuổi con hiện nay lần lượt là x và y . Điều kiện $x, y \in \mathbf{Z}$ và $x, y > 0$.

Ta có tỉ số giữa tuổi cha và con hiện nay $\frac{x}{y} = 2,2 = \frac{11}{5}$ và trước đây 25 năm là $\frac{x-25}{y-25} = \frac{41}{5}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$\frac{x}{11} = \frac{y}{5} = \frac{x-y}{6} \text{ và } \frac{x-25}{41} = \frac{y-25}{5} = \frac{x-y}{36}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{66} = \frac{y}{30} = \frac{x-25}{41} = \frac{y-25}{5} = \frac{x-y}{36} = k.$$

$$\text{Do đó } k = \frac{x - (x - 25)}{66 - 41} = \frac{25}{25} = 1.$$

Vậy hiện nay tuổi cha là 66, tuổi con là 30.

• *Cách thứ nhất:* Giả sử trước (hoặc sau) t năm nữa thì tuổi cha gấp 3 lần tuổi con ($t > 0$ là sau t năm, còn $t < 0$ là trước t năm, do tỉ số giữa tuổi cha và con hiện nay là $\frac{x}{y} = \frac{66}{30} \neq 3$).

Có $\frac{66+t}{3} = \frac{30+t}{1} = \frac{36}{2} = 18$. Suy ra $t = -12$. Như vậy, trước đây 12 năm tuổi cha gấp 3 lần tuổi con. Khi đó tuổi con là 18.

• *Cách thứ hai:* Từ $k = 1$ ta có $x - y = 36$. Gọi tuổi cha và con khi tuổi cha gấp 3 lần tuổi con tương ứng là x' và y' , ta có $x' - y' = x - y$ (hiệu giữa tuổi cha và con không đổi). Có $\frac{x'}{3} = \frac{y'}{1} = \frac{x' - y'}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$. Suy ra khi đó con 18 tuổi.

Vậy khi tuổi cha gấp 3 lần tuổi con thì con 18 tuổi.

VÍ DỤ 5.16. Anh hơn em 3 tuổi. Tìm tuổi anh và tuổi em, biết tuổi anh hiện nay bằng 2 lần tuổi em khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay.

Giải

Gọi tuổi anh và tuổi em hiện nay lần lượt là x và y . Điều kiện $x, y \in \mathbb{Z}$ và $x, y > 0$. Anh hơn em 3 tuổi nên $x = y + 3$.

Khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay thì tuổi anh là y và tuổi em là $y - 3$. Ta lập bảng so sánh sau:

	Hiện nay	Trước đây khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay
Tuổi anh	x	y
Tuổi em	y	$y - 3$

Biết tuổi anh hiện nay bằng 2 lần tuổi em khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay, ta có $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1}$.

Ta có $\frac{x}{2} = \frac{y+3}{2}$ vì $x = y + 3$. Do đó $\frac{x}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{6}{1} = 6$. Suy ra $x = 12$ và $y = 9$.

Vậy hiện nay tuổi anh bằng 12 và tuổi em bằng 9.

BÀI TẬP

5.1. Thay các tỉ lệ sau bằng tỉ lệ giữa các số nguyên:

a) $0,4 : 0,06 : 1,2$;

b) $0,(3) : 0,(5) : 0,(7)$;

c) $0,(12) : 0,0(6) : 0,01(72)$;

d) $0,8 : \frac{2}{3} : 0,05$.

5.2. Thay tỉ lệ giữa các số a, b, c sau bằng tỉ lệ giữa các số nguyên, nếu:

a) a, b, c tỉ lệ nghịch với các số $\frac{2}{3}$; 0,75; 0,8;

b) a, b, c tỉ lệ thuận với các số 0,8; $\frac{2}{3}$; 0,05.

5.3. Hỏi ba số a, b, c tỉ lệ theo các số nguyên nào, nếu:

a) 5% số a bằng 7% số b và bằng 8% số c ?

b) 80% số a bằng 53,(3)% số b và bằng 40% số c ?

c) 0,(6) số a bằng 0,75 số b và bằng 80% số c ?

5.4. Số a và số c tỉ lệ theo 5 và 9; số b và số d tỉ lệ theo 0,2 và 0,(3); số e và số d tỉ lệ theo 1 và 2,5; còn số b và số c tỉ lệ theo 3 và 4,5. Hỏi các số a, b, c, d, e tỉ lệ theo các số nguyên nào ?

5.5. Chia số 85 thành ba số sao cho số thứ nhất và số thứ hai tỉ lệ theo 4 và 5; còn số thứ hai và số thứ ba tỉ lệ theo 0,125 và 0,2.

5.6. Tìm tổng của năm số biết số thứ nhất và số thứ hai tỉ lệ theo 0,75 và 0,(6); số thứ hai và số thứ ba tỉ lệ theo 2 và 2,(3); số thứ ba và số thứ tư tỉ lệ theo 0,4 và 0,5; số thứ tư và số thứ năm tỉ lệ theo 0,375 và 0,(714285); còn hiệu giữa số thứ tư và số thứ hai là 66.

5.7. Ba đội thiếu niên tham gia trồng cây. Đội thứ nhất trồng toàn bộ 32,5% số cây. Biết số cây đội thứ hai và đội thứ ba trồng được tỉ lệ theo 1,5 và 1,2. Hỏi số cây cả ba đội trồng được là bao nhiêu, biết số cây đội thứ nhất trồng được ít hơn số cây đội thứ hai trồng được là 120 cây ?

5.8. Tìm ba phân số biết trung bình cộng của chúng bằng $\frac{136}{315}$, các tử số tỉ lệ theo

$1 : 2 : 3$ và các mẫu số tương ứng tỉ lệ nghịch theo $1 : 0,(3) : 0,2$.

- 5.9. Tìm diện tích ba thửa ruộng biết diện tích thửa ruộng thứ nhất bằng 40% diện tích cả ba thửa ruộng; diện tích thửa ruộng thứ hai và thứ ba tỉ lệ theo 1,5 và 1,(3); còn diện tích thửa ruộng thứ nhất lớn hơn diện tích thửa ruộng thứ ba là 12ha.
- 5.10. Hiện nay tuổi cha bằng 4 lần tuổi con. Trước đây 6 năm tuổi cha gấp 13 lần tuổi con. Tìm tuổi cha và tuổi con hiện nay.
- 5.11. Tìm tuổi cha và con hiện nay, biết 10 năm trước thì tuổi cha bằng 10 lần tuổi con, nhưng 22 năm sau thì tuổi con bằng một nửa tuổi cha.
- 5.12. Tuổi của bạn A bằng 0,25 tổng số tuổi của các bạn và tỉ số này không thay đổi theo thời gian. Hỏi bạn A có bao nhiêu bạn ?
- 5.13. Biết A có nhiều hơn B là 80% số tem, còn số tem của B bằng 60% của C. Nếu B chuyển 150 con tem của mình cho C thì số tem của C sẽ gấp 3 lần số tem còn lại của B. Hỏi ba bạn có bao nhiêu con tem ?

Chuyên đề 6. HÀM SỐ. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Dạng 1. HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x được gọi là biến số.
 - Các đại lượng x và y đều nhận giá trị số.
 - Đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng x .
 - Với mỗi giá trị của x luôn tìm được một giá trị tương ứng duy nhất của đại lượng y .
- Khi đại lượng y là hàm số của đại lượng x , ta có thể viết $y = f(x)$; $y = h(x)$; ...
- Hàm số có thể cho bằng bảng, bằng công thức, ...
 - Qua bảng, qua công thức, ... ta biết được đại lượng này có phải là hàm số của đại lượng kia hay không.
 - Với bảng, với công thức, ... khi biết giá trị của biến số x ta tìm được giá trị tương ứng của hàm số y và ngược lại.
 - Với hàm số $y = -3x + 2$, tại $x = 0$ thì $y = 2$ ta có thể viết gọn như sau $y(0) = 2$.
- Khi x thay đổi mà y luôn chỉ nhận một giá trị thì y được gọi là hàm hằng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 6.1. Tính $f(-2)$; $f(0)$; $f(1)$ và $f(2)$, biết:

a) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

b) $y = f(x) = (x - 1) : (x + 1)$;

c) $y = f(x) = 5 : (-x)$;

d) $y = f(x) = |x - 1|$.

Giải

$y = f(x)$	-2	0	1	2
a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	-27	-1	0	1
b) $y = (x - 1) : (x + 1)$	3	-1	0	0,(3)
c) $y = 5 : (-x)$	2,5	không có	-5	-2,5
d) $y = x - 1 $	3	1	0	1

VÍ DỤ 6.2. Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức $f(x) = 5x^2 - 2$.

a) Tính $f(-0,5)$; $f(-0,2)$; $f(0,4)$; $f(1)$; $f(25)$.

b) Tìm x để $f(x) = -2$; $f(x) = 3$.

c) Chứng tỏ rằng với mọi $x \in \mathbf{R}$ thì $f(x) = f(-x)$.

Giải

a) Ta có: $f(-0,5) = 5.(-0,5)^2 - 2 = -0,75$;

$$f(-0,2) = 5.(-0,2)^2 - 2 = -1,8$$

$$f(0,4) = 5.(0,4)^2 - 2 = -1,2$$

$$f(1) = 5.(1)^2 - 2 = 3$$

$$f(25) = 5.(25)^2 - 2 = 3123.$$

b) Ta có: $f(x) = -2 \Leftrightarrow 5x^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow x = 0$;

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 5x^2 - 2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

c) Ta có: $f(-x) = 5(-x)^2 - 2 = 5x^2 - 2$, mà $f(x) = 5x^2 - 2$, suy ra $f(-x) = f(x)$.

VÍ DỤ 6.3.

a) Biết $f(x) = \frac{2}{x}$. Tính giá trị $f(-1\frac{2}{3}) : f(-1\frac{2}{3})$.

b) Biết $f(x) = (1-x)(x+1)$. Tính $\left[f\left(-1\frac{2}{3}\right)\right]^3$.

c) Biết $f(x) = (1-x).f(x-1)$ với $x > 1$. Tính $f(4)$ nếu $f(1) = 1$.

Giải

a) Ta có: $f(-1\frac{2}{3}) : f(-1\frac{2}{3}) = 0,36$.

b) Ta có: $\left[f(-1\frac{2}{3})\right]^3 = -\frac{4096}{729} = -5\frac{451}{729}$.

c) Ta có: $f(2) = (1-2).f(1) = -1$;

$$f(3) = (1-3).f(2) = 2;$$

$$f(4) = (1-4).f(3) = -6.$$

Vậy $f(4) = -6$.

VÍ DỤ 6.4. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = h(x)$ được xác định bởi công thức $f(x) = [x]$ và $h(x) = \{x\}$.

a) Tính $f(x)$ và $h(x)$ biết $x \in \{-4,2; -3,24; -1,15; -0,2; 0,2; 1,15; 3,24; 4,2\}$.

b) Tìm x để: $f(x) = \pm 3$.

c) Tìm x để: $h(x) = 0$; $h(x) = 0,1$.

Giải

a) Ta có: $[x] \leq x \leq [x] + 1$ và $\{x\} = x - [x]$.

Có: $[-4,2] = -5$ vì $-5 < -4,2 < -4$;

$$\{-4,2\} = -4,2 - [-4,2] = -4,2 + 5 = 0,8.$$

Tương tự, ta có:

	-4,2	-3,24	-1,15	-0,2	0,2	1,15	3,24	4,2
$f(x) = [x]$	-5	-4	-2	-1	0	1	3	4
$f(x) = \{x\}$	0,8	0,76	0,85	0,8	0,2	0,15	0,24	0,2

b) Ta có: $[x] \leq x \leq [x] + 1$.

Vậy $f(x) = [x] = 3$ khi $3 \leq x < 4$; $f(x) = [x] = -3$ khi $-3 \leq x < -2$.

c) Ta có: Nếu $x = a + q$ mà $a \in \mathbf{Z}$ và $0 \leq q < 1$ thì $\{x\} = q$.

Với $\{x\} = 0$ thì $x = a + 0 = a \in \mathbf{Z}$ suy ra khi $h(x) = \{x\} = 0$ thì $x \in \mathbf{Z}$.

Với $\{x\} = 0,1$ thì $x = a + 0,1$ và $a \in \mathbf{Z}$ suy ra:

- Nếu $a \geq 0$ thì $x \in \{0,1; 1,1; 2,1; \dots; \overline{n,1}$ với $n \in \mathbf{N}\}$.
- Nếu $a < 0$ thì $x \in \{-0,9; -1,9; -2,9; \dots; \overline{-n,9}$ với $n \in \mathbf{N}\}$.

VÍ DỤ 6.5. Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức:

$$y = f(x) = \begin{cases} 0,5x - 3 & \text{nếu } x \geq 6 \\ 3 - 0,5x & \text{nếu } x < 6. \end{cases}$$

a) Tính: $f(-2)$; $f(0)$; $f(7)$; $f(6)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có thể viết gọn như thế nào?

c) Đại lượng x có là hàm số của đại lượng y không?

Giải

a) Ta có: Do $-2 < 6$ nên $f(-2) = 3 - 0,5 \cdot (-2) = 4$;

Do $0 < 6$ nên $f(0) = 3 - 0,5 \cdot 0 = 3$;

Do $7 > 6$ nên $f(7) = 0,5 \cdot 7 - 3 = 0,5$;

Do $6 = 6$ nên $f(6) = 0,5 \cdot 6 - 3 = 0$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có thể viết gọn như sau: $y = f(x) = |0,5x - 3|$.

c) Đại lượng x không thể là hàm số của đại lượng y vì ứng với một giá trị của y ta có hai giá trị tương ứng của x nên theo định nghĩa hàm số ta không có tương quan hàm của x đối với y .

VÍ DỤ 6.6. Cho cặp số $(x; y)$ mà $x \in \{2; 0,2; -1\frac{2}{3}; 0; 1\}$ và y thoả mãn một trong các điều kiện sau:

$$xy = 1; \quad x + y = 0; \quad \frac{y}{x} = 3; \quad |y| = x.$$

a) Lập bảng tính giá trị y tương ứng của x trong bốn trường hợp trên.

b) Trong bốn tương quan trên, tương quan nào cho ta một hàm số? Trong trường hợp này viết công thức biểu diễn.

Giải

a) Ta có:

	x	$-1\frac{2}{3}$	0	0,2	1	2
1	$xy = 1$	$y = -0,6$	không có	$y = 5$	$y = 1$	$y = 0,5$
2	$x + y = 0$	$y = 1\frac{2}{3}$	$y = 0$	$y = -0,2$	$y = -1$	$y = -2$
3	$y : x = 3$	$y = -5$	không có	$y = 0,6$	$y = 3$	$y = 6$
4	$ y = x$	không có	$y = 0$	$y = \pm 0,2$	$y = \pm 1$	$y = \pm 2$

b) Ta có:

• Trong các trường hợp 1, 3 và 4 thì tương quan giữa hai đại lượng x và y không cho ta một hàm số vì tồn tại giá trị của x nhưng không có giá trị tương ứng của y.

• Trường hợp 2 cho ta một tương quan hàm số với công thức $y = -x$.

VÍ DỤ 6.7. Từ hai tập hợp số $X = \{22; 23; 24; 25\}$ và $Y = \{2; 3; 4; 5\}$ có thể tìm được một hàm số biểu thị sự tương quan sau không (nếu được hãy viết công thức biểu diễn):

a) Cặp số (x; y) thoả mãn $x \in X$ và $y \in Y$ sao cho $x + y$ chia hết cho 9 ?b) Cặp số (x; y) thoả mãn $x \in X$ và $y \in Y$ sao cho y là ước của x ?**Giải**

a) Ta có: $22 \in X$ và $5 \in Y$ và $22 + 5 = 27 : 9$ mà $22 + 2; 22 + 3; 22 + 4$ không chia hết cho 9.

Tương tự: $23 \in X$ và $4 \in Y$ và $23 + 4 = 27 : 9$ mà $23 + 5; 23 + 2; 23 + 3$ không chia hết cho 9.

$24 \in X$ và $3 \in Y$ và $24 + 3 = 27 : 9$ mà $24 + 4; 24 + 5; 24 + 2$ không chia hết cho 9.

$25 \in X$ và $2 \in Y$ và $25 + 2 = 27 : 9$ mà $25 + 3; 25 + 4; 25 + 5$ không chia hết cho 9.

Như vậy, ứng với mỗi phần tử $x \in X$ ta tìm được duy nhất một phần tử $y \in Y$ mà $(x, y) \in R$. Vậy tương quan đó là một hàm số.

Ta có công thức biểu diễn hàm số đó: $y = 27 - x$.

b) Ta có $24 \in X$ và tìm được ba phần tử 2, 3 và 4 thuộc tập Y mà 2, 3 và 4 là ước số của 24 nên tương quan này không cho ta một hàm số.

VÍ DỤ 6.8. Cho tập hợp $A = \{10; 20; 30; 40; 50; 60; 70\}$. Hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức nào mà x và y đều thuộc tập A .

Giải

Ta có các công thức biểu diễn của các hàm số như sau:

- $y = f(x) = x$ với x và $y \in A$.
- $y = f(x) = 80 - x$ với x và $y \in A$.

VÍ DỤ 6.9. Cho hàm số $y = f(x) = ax$ ($a \neq 0$) xác định với mọi $x \in \mathbb{Q}$.

a) Chứng minh rằng $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

b) Chứng minh rằng $f(kx) = k.f(x)$ với $k \neq 0$.

c) Tìm giá trị của a để $f(x_1).f(x_2) = f(x_1.x_2)$.

Giải

a) Ta có: $f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$.

b) Do $k \neq 0$, ta có: $f(kx) = a.(kx) = k.(ax) = k.f(x)$.

c) Ta có: $f(x_1).f(x_2) = (ax_1).(ax_2) = a^2(x_1.x_2)$. Mặt khác $f(x_1.x_2) = a.(x_1.x_2)$.

Ta có $f(x_1).f(x_2) = f(x_1.x_2)$ khi $a^2(x_1.x_2) = a.(x_1.x_2) \Rightarrow a = 1$ vì $a \neq 0$.

Vậy với $a = 1$ thì $f(x_1).f(x_2) = f(x_1.x_2)$.

VÍ DỤ 6.10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{Q}$ và có tính chất $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ với mọi x_1 và x_2 thuộc $\mathbb{Q}$. Chứng minh rằng $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$.

Giải

Ta có: $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

Mặt khác: $f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = 0$, do $f(0) = 0$.

$\Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$, với mọi $x \in \mathbb{Q}$.

VÍ DỤ 6.11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{Q}$ và có tính chất $f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2)$ với mọi x_1 và $x_2 \in \mathbb{Q}$. Chứng minh rằng nếu $f(1) = a$ ($a \neq 0$) thì $y = f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$.

Giải

Vì $x \in \mathbb{Q}$ nên ta có: $x = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ và $(m, n) = 1$.

Xét $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ và $f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2)$ với mọi x_1 và $x_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(n) = f(n \cdot 1) = n \cdot f(1) = n \cdot a$ do $f(1) = a$.

Với $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, ta xét $f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = n \cdot f(\frac{1}{n}) = a \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = \frac{a}{n}$.

Với $x = \frac{m}{n}$, ta xét $f(x) = f(\frac{m}{n}) = f(m \cdot \frac{1}{n}) = m \cdot f(\frac{1}{n}) = m \cdot \frac{a}{n} \Rightarrow f(x) = a \cdot \frac{m}{n} = ax$ với $x \in \mathbb{Q}$.

VÍ DỤ 6.12. Hàm số $y = f(x)$ được xác định như sau: Ứng với mỗi số tự nhiên có ba chữ số là tổng các chữ số của số đã cho.

a) Tính $f(123)$; $f(212)$; $f(999)$.

b) Tìm x , biết $f(x) = 3$.

Giải

a) Ta có: $f(124) = 1 + 2 + 4 = 7 \Rightarrow f(124) = 7$.

$f(212) = 2 + 1 + 2 = 5 \Rightarrow f(212) = 5$.

$f(999) = 9 + 9 + 9 = 27 \Rightarrow f(999) = 27$.

b) Biết $x = \overline{abc} \Rightarrow f(x) = a + b + c = 3$ và $a \neq 0$.

Ta có $x = \overline{abc} \in \{102; 111; 120; 201; 210; 300\}$.

Dạng 2. MẶT PHẪNG TOẠ ĐỘ. ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax$ VÀ $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mặt phẳng toạ độ Oxy được xác định bởi hai trục số Ox và Oy vuông góc với nhau (h.6.1).

- Các trục Ox, Oy là các trục toạ độ: Ox là trục hoành, Oy là trục tung. Các đơn vị dài trên hai trục toạ độ được chọn bằng nhau.

- Điểm O là gốc toạ độ.
- Hai trục toạ độ chia mặt phẳng thành bốn góc là góc phần tư thứ I, II, III và IV (theo thứ tự ngược chiều quay của kim đồng hồ).

2. Toạ độ của điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy:

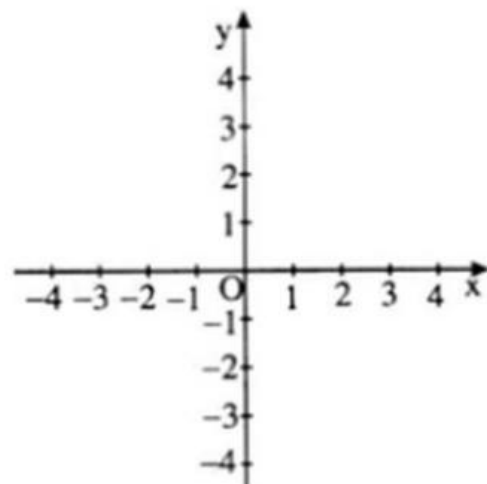
- Điểm M có toạ độ $(x_0; y_0)$ viết là $M(x_0; y_0)$, trong đó x_0 là hoành độ của điểm M và y_0 là tung độ của điểm M.
- Mọi điểm M xác định một cặp số $(x_0; y_0)$, ngược lại mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ xác định một điểm M trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

3. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; y)$ trên mặt phẳng toạ độ.

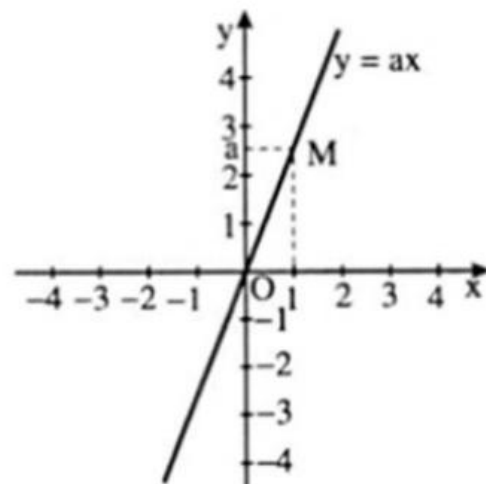
- Một điểm M thuộc đồ thị (F) của một hàm số $y = f(x)$ thì toạ độ của điểm M thoả mãn đẳng thức $y = f(x)$. Ngược lại, một điểm M có toạ độ thoả mãn đẳng thức $y = f(x)$ thì điểm M thuộc đồ thị (F) của hàm số $y = f(x)$.

- Đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ. Do đó, để vẽ đồ thị của hàm số ta chỉ cần vẽ một đường thẳng đi qua hai điểm là gốc toạ độ $O(0; 0)$ có sẵn và điểm $M(1; a)$ như trên hình 6.2.

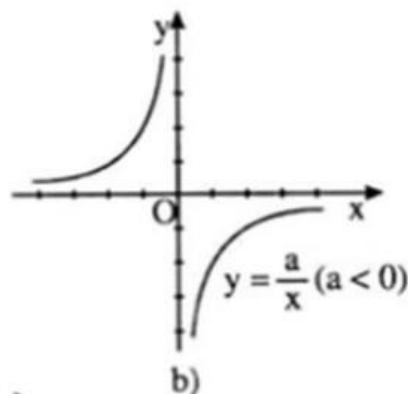
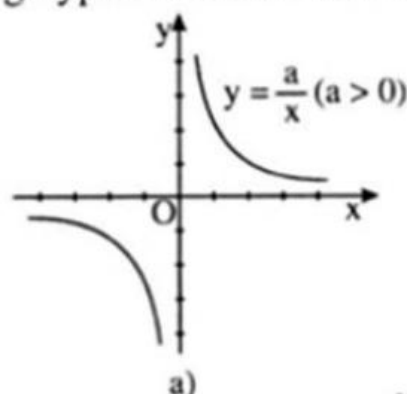
- Đồ thị của hàm số $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) là đường cong (hypebol) gồm hai nhánh (h.6.3). Nếu $a > 0$ thì đồ thị là đường hypebol như hình 6.3a, nếu $a < 0$ thì đồ thị là đường hypebol như hình 6.3b.



Hình 6.1



Hình 6.2

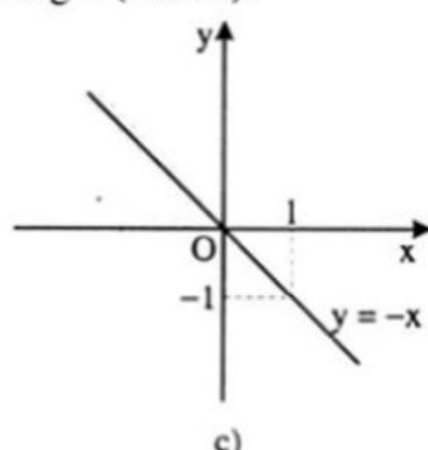
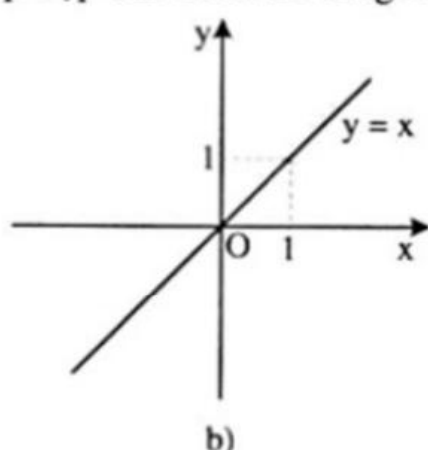
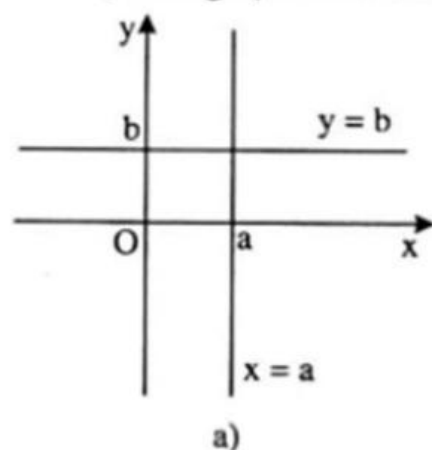


Hình 6.3

Kiến thức bổ sung

4. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy:

- Trục tung là tập hợp các điểm có hoành độ bằng 0 và trục hoành là tập hợp các điểm có tung độ bằng 0.
- Đường thẳng vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm a là tập hợp các điểm có hoành độ bằng a. Đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm b là tập hợp các điểm có tung độ bằng b (h.6.4a).



Hình 6.4

- Đồ thị của hàm số $y = x$ là tập hợp các điểm nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ I và III (h.6.4b). Đồ thị của hàm số $y = -x$ là tập hợp các điểm nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ II và IV (h.6.4c).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 6.13. Cho ba điểm A(2 ; 6), B(2 ; 2) và C(6 ; 2).

a) Vẽ các điểm A, B, C trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

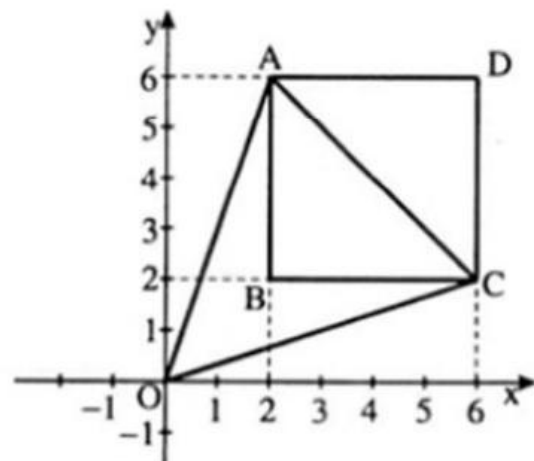
b) Xác định tọa độ điểm D sao cho ABCD là một hình vuông.

c) Tính chu vi và diện tích hình vuông ABCD.

d) Chứng tỏ rằng điểm D thuộc phân giác của góc phần tư thứ I và thứ III.

e) Hỏi ba điểm O, B và D có thẳng hàng không ?

g) Chứng tỏ rằng tam giác AOC không là tam giác đều.



Hình 6.5

Giải

a) Các điểm A, B và C được vẽ trên một mặt phẳng toạ độ Oxy (h.6.5).

b) Để ABCD là một hình vuông thì toạ độ của điểm D là (6; 6).

c) Có $BC = 4$ (đơn vị độ dài) nên chu vi hình vuông ABCD bằng $4 \cdot 4 = 16$ (đơn vị độ dài) và diện tích hình vuông bằng $4^2 = 16$ (đơn vị diện tích).

d) Điểm D có toạ độ (6; 6) tức là $f(6) = 6$ thoả mãn $f(x) = x$, nên điểm D thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ I và III.

e) Điểm B có toạ độ (2; 2) cũng thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ I và III. Các điểm B và D đều thuộc đồ thị hàm số $y = x$ đi qua điểm gốc toạ độ O nên ba điểm O, B và D thẳng hàng.

g) Có $OC^2 = 6^2 + 2^2 = 40$ và $OA^2 = 6^2 + 2^2 = 40$, suy ra $OC = OA$.

Nhưng $AC^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \neq 40$ nên $AC \neq OC$ và $AC \neq OA$. Vậy tam giác AOC không là tam giác đều.

VÍ DỤ 6.14. Vẽ trên mặt phẳng toạ độ Oxy các điểm A, B và C. Tính diện tích của tam giác ABC, biết:

Điểm A có toạ độ $(x_0; y_0)$ mà $x_0 + 1 = 0$ và $y_0 - 2 = 0$;

Điểm B có toạ độ $(x_1; y_1)$ mà $(x_1 - 2)^2 + (y_1 + 3)^2 = 0$;

Điểm C có toạ độ $(x_2; y_2)$ mà $|x_2 - 4| + \sqrt{y_2 - 3} = 0$.

Giải

Từ đề bài ta suy ra toạ độ của các điểm $A(-1; 2)$, $B(2; -3)$, $C(4; 3)$.

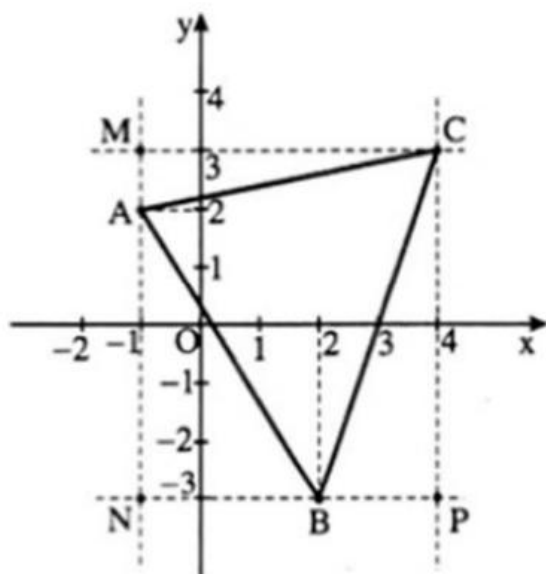
Qua điểm A và C vẽ các đường thẳng song song với trục tung, qua điểm B và C vẽ các đường thẳng song song với trục hoành. Gọi giao điểm của các đường thẳng đó là M, N, P như hình 6.6.

Có: $S_{CMNP} = 5 \cdot 6 = 30$;

$$S_{CMA} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2,5; \quad S_{ANB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7,5;$$

$$S_{BPC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6.$$

Vậy $S_{ABC} = 30 - (2,5 + 7,5 + 6) = 14$ (đơn vị diện tích).



Hình 6.6

VÍ DỤ 6.15. Vẽ đồ thị của các hàm số:

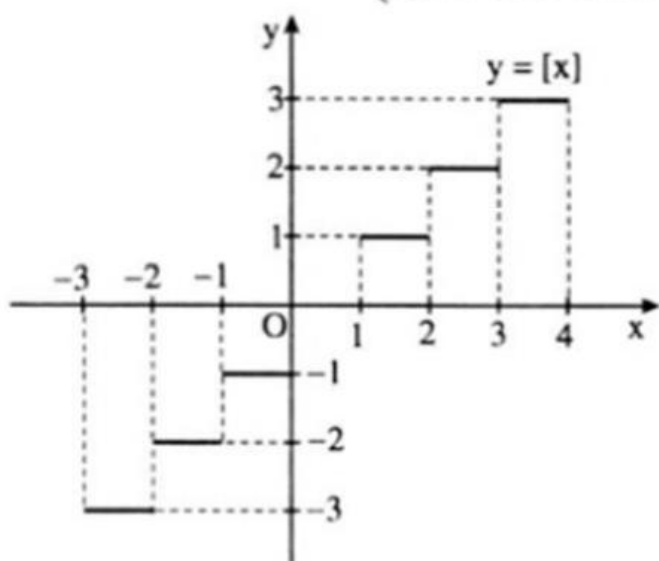
a) $y = [x]$;

b) $y = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0,5x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

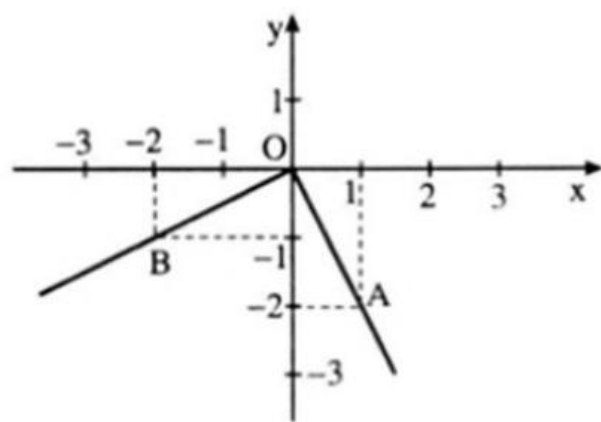
Giải

a) Đồ thị hàm số $y = [x]$ được biểu diễn trên hình 6.7.

b) Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0,5x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ được biểu diễn trên hình 6.8.



Hình 6.7



Hình 6.8

BÀI TẬP

6.1. Các điểm sau cùng thuộc đồ thị của hàm số nào trong các hàm số: $y = kx$ ($k \neq 0$)

và $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) :

a) $A(1; 2)$ và $B(0; 0)$;

b) $C(1; 2)$ và $D(-1; -2)$;

c) $E(1; 2)$ và $F(0; 1)$.

6.2. Cho hàm số $y = f(x) = mx + n$. Xác định các giá trị m, n biết đồ thị của hàm số

$f(x)$ đi qua các điểm $M(-3; 2)$ và $N(\frac{1}{2}; \frac{5}{6})$.

6.3. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Tính $f(0)$; $f(-2)$; $f(10)$.

6.4. Hàm số $y = f(x)$ được xác định như sau: Ứng với mỗi số tự nhiên n là số dư r của n khi chia cho 3.

a) Tính $f(124)$; $f(2012)$; $f(999)$.

b) Tìm x , nếu $f(x) = 3$.

6.5. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^2 + 2$. Chứng minh rằng với mọi x thì $f(-x) = f(x)$.

6.6. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^3 - 2x$. Chứng minh rằng với mọi x thì $f(-x) = -f(x)$.

6.7. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^6 + 1}{x^3}$. Chứng minh rằng $f(\frac{1}{x}) = f(x)$, với mọi $x \neq 0$.

6.8. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Chứng minh rằng $f(x) = f(-x)$, với mọi $x \neq 0$.

6.9. Cho hàm số $y = f(x) = 5^x$. Tính $f(x+1) - f(x)$.

6.10. Cho hàm dấu $y = \text{Sgn}(x)$ được xác định như sau:

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Tính $\text{Sgn}(x^2 + 1)$; $\text{Sgn}(-(1)^{2n})$; $\text{Sgn}((-1)^{2n-1})$.

6.11. Xác định các hệ số a, b, c của hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, biết $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ và $f(2) = 4$.

6.12. Hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x > 1$. Biết $f(n) = (n-1) \cdot f(n-1)$ và $f(1) = 1$. Tính $f(4)$.

6.13. Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức:

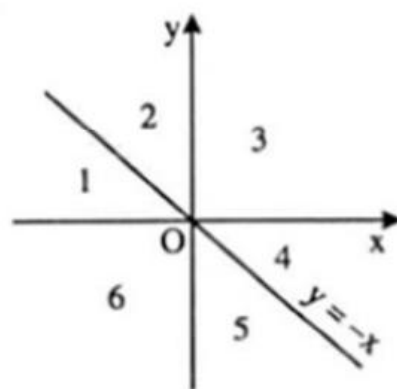
$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3 & \text{nếu } x \geq 6 \\ 3 - \frac{1}{2}x & \text{nếu } x < 6. \end{cases}$$

a) Đại lượng x có là hàm số của đại lượng y không?

b) Tính $f(-2)$; $f(0)$; $f(7)$.

c) Hàm số $f(x)$ có thể viết gọn bằng công thức nào?

6.14. Đường thẳng $y = -x$ cùng với trục tung và trục hoành chia mặt phẳng thành sáu miền như hình 6.9 (không kể các đường biên). Hãy chỉ ra miền nào thoả mãn đồng thời $x < 0$, $y > 0$, $y > -x$.



Hình 6.9

6.15. Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = \{x\}$; b) $y = -|x|$; c) $y = \text{Sgn}(x)$.

Chuyên đề 7. THỐNG KÊ. TẦN SỐ. TẦN SUẤT**Dạng 1. THỐNG KÊ. TẦN SỐ. TẦN SUẤT****I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

1. Các số liệu thu thập được khi điều tra về một dấu hiệu X gọi là *số liệu thống kê*. Mỗi số liệu được thống kê gọi là một giá trị của dấu hiệu X.
 - Các số liệu thống kê được ghi lại trong một bảng, gọi là *bảng số liệu thống kê ban đầu*.
 - Số các giá trị của dấu hiệu đúng bằng số các đơn vị điều tra (kí hiệu là N).
2. Số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy giá trị của dấu hiệu là *tần số* của giá trị đó (kí hiệu là n).
 - Các giá trị khác nhau của dấu hiệu (theo thứ tự tăng dần) và các tần số tương ứng với mỗi giá trị đó được ghi lại trong một bảng gọi là bảng "tần số" (bảng 2).
 - Bảng "tần số" có thể viết theo dạng "ngang" (bảng 5), hoặc dạng "dọc" (bảng 2).
 - Bảng "tần số" giúp người điều tra có được những nhận xét chung về sự phân phối các giá trị của dấu hiệu và thuận lợi cho việc tính toán.
3. Tần suất một giá trị của dấu hiệu được tính theo công thức $f = \frac{n}{N}$.
 - N là số các giá trị; n là tần số của một giá trị; f là tần suất của giá trị đó.
 - Tần suất thường được tính dưới dạng tỉ số phần trăm.
4. Người ta dùng biểu đồ minh họa một hình ảnh cụ thể về giá trị của dấu hiệu và tần số. Các biểu đồ thường dùng: biểu đồ đoạn thẳng, biểu đồ hình chữ nhật, biểu đồ hình quạt.

Kiến thức bổ sung

5. Người ta có thể nhóm các giá trị dấu hiệu khá gần nhau thành từng lớp (Ví dụ 7.3).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 7.1. Kết quả điểm (theo thang điểm 20) của 120 học sinh một trường trong đợt thi học sinh giỏi Toán được viết ở bảng 1 dưới đây:

15	12	8	4	18	17	9	3	5	10	11	2	0	7	13
16	0	18	16	12	6	6	7	12	15	13	4	3	9	10
11	9	14	2	13	1	7	0	18	16	14	10	11	8	11
1	8	11	12	3	7	17	14	11	11	10	9	6	16	1
13	12	1	5	4	5	4	1	17	19	14	9	10	11	7
8	11	1	5	10	10	11	7	13	17	12	11	14	0	8
7	6	14	15	10	19	18	9	10	2	18	17	11	10	13
16	15	8	2	5	16	11	11	11	10	13	3	7	17	16

Bảng 1

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất của mỗi giá trị.

Cách thống kê: Mỗi học sinh nhận được một điểm được đánh dấu bởi một gạch. Chẳng hạn, kiểm tra lần lượt từng học sinh từ trên xuống dưới, từ trái qua phải, học sinh nhận được điểm nào thì đánh dấu vào ô tương ứng. Ví dụ sau khi kiểm tra có 11 học sinh nhận được điểm 10 thì ở cột 6 dòng điểm 10 sẽ được đánh dấu: ☒ ☒ | (Bảng 2).

Giải

a) Dấu hiệu X ở bảng 1 là điểm số của mỗi học sinh. Bảng 1 có 120 giá trị.

b) Cách thống kê điểm (Bảng 2) giúp thống kê một cách chính xác:

Điểm	Đếm	Điểm	Đếm	Điểm	Đếm	Điểm	Đếm	Điểm	Đếm
		1	☒	6	☐	11	☒ ☒ ☒	16	☒ ☐
		2	☐	7	☒ ☐	12	☒	17	☒ ☐
		3	☐	8	☒	13	☒ ☐	18	☒
		4	☐	9	☒	14	☒	19	☐ ☐
0	☐	5	☒	10	☒ ☒ ☐	15	☐	20	

Bảng 2

Bảng "tần số", tần suất (Bảng 3).

Giá trị (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)		Giá trị x	Tần số (n)	Tần suất (f)	
0	4	$\frac{1}{30}$	3,(3)%				
1	6	$\frac{1}{20}$	5%	11	15	$\frac{1}{8}$	12,5%
2	4	$\frac{1}{30}$	3,(3)%	12	6	$\frac{1}{20}$	5%
3	4	$\frac{1}{30}$	3,(3)%	13	7	$\frac{7}{120}$	5,8(3)%
4	4	$\frac{1}{30}$	3,(3)%	14	6	$\frac{1}{20}$	5%
5	5	$\frac{1}{24}$	4,1(6)%	15	4	$\frac{1}{30}$	3,(3)%
6	4	$\frac{1}{30}$	3,(3)%	16	7	$\frac{7}{120}$	5,8(3)%
7	8	$\frac{1}{15}$	6,(6)%	17	6	$\frac{1}{20}$	5%
8	6	$\frac{1}{20}$	5%	18	5	$\frac{1}{24}$	4,1(6)%
9	6	$\frac{1}{20}$	5%	19	2	$\frac{1}{60}$	1,(6)%
10	11	$\frac{11}{120}$	9,1(6)%	20	0	0	0%
						N = 120	

Bảng 3

VÍ DỤ 7.2. Số đại biểu Quốc hội khoá XIII của tất cả các tỉnh, thành phố trong cả nước được cho trong bảng 4 dưới đây.

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu ?
 b) Lập bảng "tần số" và tần suất của mỗi giá trị (ứng với số đại biểu).
 c) Lập bảng "tần số" và tần suất của mỗi giá trị (ứng với số đại biểu nữ).

TT	TỈNH, THÀNH PHỐ	SỐ ĐẠI BIỂU	ĐẠI BIỂU NỮ
1	TP Hà Nội	30	8
2	TP Hồ Chí Minh	30	8
3	TP Hải Phòng	9	1
4	TP Đà Nẵng	6	1
5	TP Cần Thơ	7	2
6	An Giang	10	2
7	Bà Rịa - Vũng Tàu	6	2
8	Bắc Giang	8	2
9	Bắc Kạn	6	2
10	Bạc Liêu	6	1
11	Bắc Ninh	6	2
12	Bến Tre	7	3
13	Bình Dương	8	0
14	Bình Định	8	2
15	Bình Phước	6	2
16	Bình Thuận	7	1
17	Cà Mau	7	1
18	Cao Bằng	6	2
19	Đắc Lắc	9	3
20	Đắk Nông	6	1
21	Điện Biên	6	2
22	Đồng Nai	11	2
23	Đồng Tháp	8	1
24	Gia Lai	7	1
25	Hà Giang	6	3

TT	TỈNH, THÀNH PHỐ	SỐ ĐẠI BIỂU	ĐẠI BIỂU NỮ
33	Kiên Giang	9	3
34	Kon Tum	6	2
35	Lai Châu	6	2
36	Lạng Sơn	6	2
37	Lào Cai	6	2
38	Lâm Đồng	7	3
39	Long An	8	2
40	Nam Định	9	2
41	Nghệ An	13	3
42	Ninh Bình	6	3
43	Ninh Thuận	6	1
44	Phú Thọ	7	2
45	Phú Yên	6	1
46	Quảng Bình	6	1
47	Quảng Nam	8	1
48	Quảng Ngãi	7	1
49	Quảng Ninh	7	2
50	Quảng Trị	6	1
51	Sóc Trăng	7	2
52	Sơn La	7	1
53	Tây Ninh	6	0
54	Thái Bình	9	2
55	Thái Nguyên	7	2
56	Thanh Hoá	16	3
57	Thừa Thiên - Huế	7	0

26	Hà Nam	6	2
27	Hà Tĩnh	7	1
28	Hải Dương	9	2
29	Hậu Giang	6	1
30	Hoà Bình	6	2
31	Hưng Yên	7	3
32	Khánh Hoà	7	2

58	Tiền Giang	8	1
59	Trà Vinh	6	2
60	Tuyên Quang	6	2
61	Vĩnh Long	6	1
62	Vĩnh Phúc	6	2
63	Yên Bái	6	2

Bảng 4

Giải

a) Dấu hiệu X ở bảng 4 là số đại biểu của mỗi tỉnh thành. Bảng 4 có tất cả là 63 giá trị.

b) Bảng "tần số", tần suất ứng với số đại biểu (Bảng 5).

Giá trị (x)	6	7	8	9	10	11	13	16	30	
Tần số (n)	28	16	7	6	1	1	1	1	2	N = 63
Tần suất (f)	$\frac{28}{63}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{7}{63}$	$\frac{6}{63}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{2}{63}$	
	44,44%	25,40%	11,11%	9,52%	1,59%	1,59%	1,59%	1,59%	3,17%	100%

Bảng 5

c) Bảng "tần số", tần suất ứng với số đại biểu nữ (Bảng 6).

Giá trị (x)	0	1	2	3	8	
Tần số (n)	3	19	30	9	2	N = 63
Tần suất (f)	$\frac{3}{63}$	$\frac{19}{63}$	$\frac{30}{63}$	$\frac{9}{63}$	$\frac{2}{63}$	
	4,76%	30,16%	47,62%	14,29%	3,17%	100%

Bảng 6

Dạng 2. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. MỐT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Số trung bình cộng thường được dùng làm "đại diện" cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại. Số trung bình cộng được kí hiệu là $\bar{X}$.

- Khi các giá trị của dấu hiệu có khoảng chênh lệch rất lớn với nhau thì không nên lấy số trung bình cộng làm "đại diện" cho dấu hiệu đó.
- Số trung bình cộng có thể không thuộc dãy giá trị của dấu hiệu.

2. Công thức tính số trung bình cộng của dấu hiệu:

$$\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \dots + x_k n_k}{N}$$

Trong đó: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ là k giá trị khác nhau của dấu hiệu;

$n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ là k tần số tương ứng;

N là số các giá trị và $N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$.

3. Mốt của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng "tần số" và được kí hiệu là M_0 .

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 7.3. Số điểm kiểm tra môn Toán thi học kì I của học sinh khối lớp 7 của một trường THCS được cho trong bảng 7.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	7	10	21	60	84	72	38	15	8

Bảng 7

- a) Cho biết dấu hiệu là gì? Các giá trị khác nhau của dấu hiệu.
- b) Lập bảng "tần số" của mỗi giá trị.
- c) Lập bảng "tần số" của dấu hiệu điểm kiểm tra theo quy định phân loại điểm, trong đó thêm cột tần suất biểu diễn dưới dạng %, biết cách phân loại điểm như sau:

Điểm kém	$0 \leq x < 3,5$
Điểm yếu	$3,5 \leq x < 5$
Điểm trung bình	$5 \leq x < 6,5$
Điểm khá	$6,5 \leq x < 8$
Điểm giỏi	$8 \leq x$

d) Tính điểm trung bình cộng môn Toán thi học kì I của khối lớp 7.

e) Từ bảng "tần số" dấu hiệu điểm kiểm tra theo từng loại hãy biểu diễn bằng biểu đồ hình chữ nhật.

g) Dùng biểu đồ hình quạt biểu diễn tần suất tỉ lệ % các loại điểm theo phân loại.

Giải

a) Dấu hiệu X ở bảng 7 là số điểm kiểm tra môn Toán thi học kì I theo từng điểm số.

Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

b) Bảng "tần số" (Bảng 8):

Điểm (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	9	7	10	21	60	84	72	38	15	8	N = 324

Bảng 8

c) Bảng tần số có thêm cột tần suất theo từng loại điểm (Bảng 9):

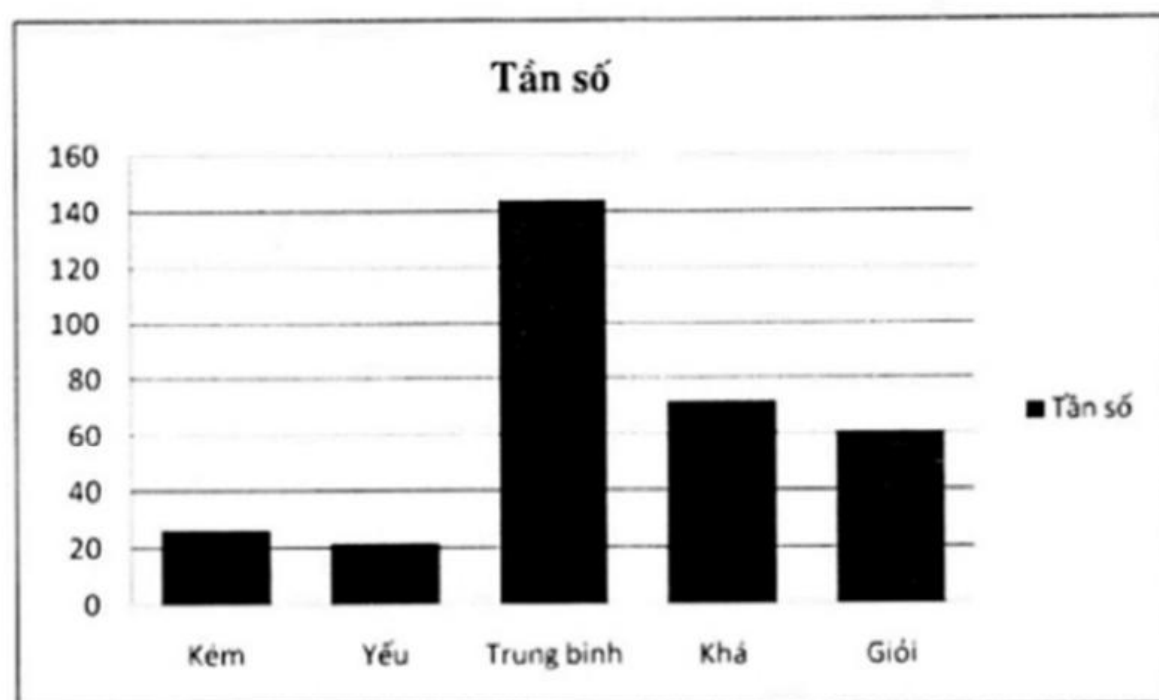
TT	Loại điểm	Điểm	Tần số	Tần suất
1	Kém	$0 \leq x < 3,5$	26	$\frac{26}{324} \approx 8,03\%$
2	Yếu	$3,5 \leq x < 5$	21	$\frac{21}{324} \approx 6,48\%$
3	Trung bình	$5 \leq x < 6,5$	144	$\frac{144}{324} \approx 44,44\%$
4	Khá	$6,5 \leq x < 8$	72	$\frac{72}{324} \approx 22,22\%$
5	Giỏi	$8 \leq x$	61	$\frac{61}{324} \approx 18,83\%$

Bảng 9

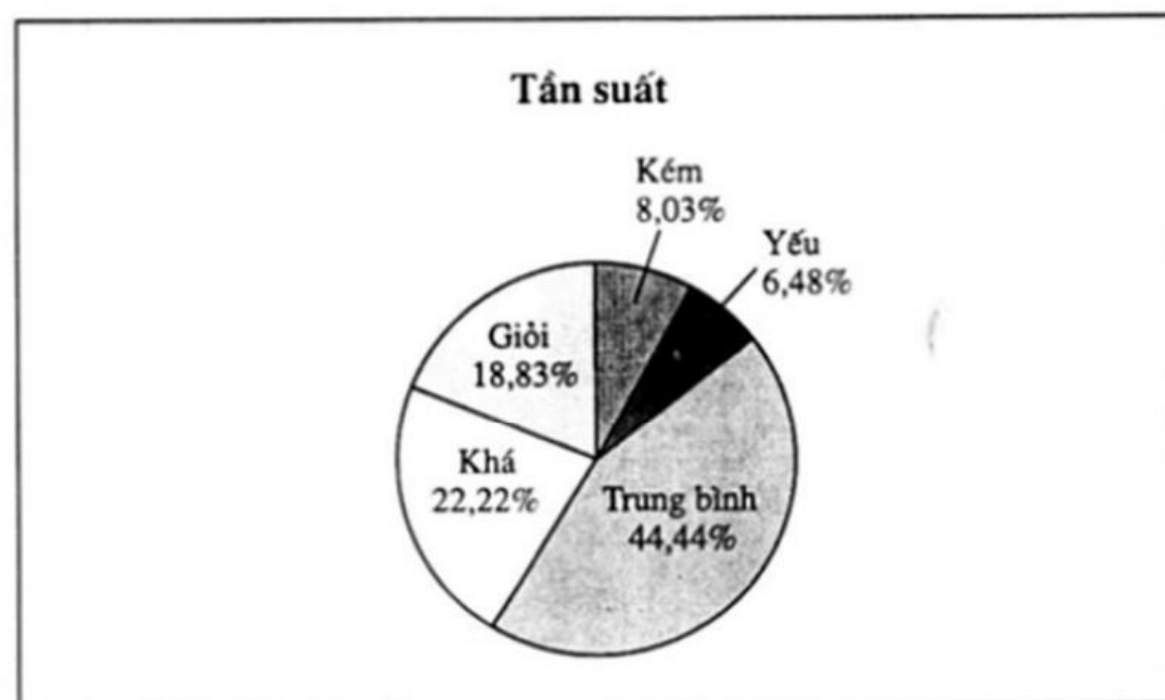
d) Điểm trung bình cộng:

$$\bar{X} = \frac{1.9 + 2.7 + 3.10 + 4.21 + 5.60 + 6.84 + 7.72 + 8.38 + 9.15 + 10.8}{9 + 7 + 10 + 21 + 60 + 84 + 72 + 38 + 15 + 8} \approx 6,06.$$

e) Biểu đồ tần số:



g) Biểu đồ tần suất:



VÍ DỤ 7.4. Rùa và Thỏ chạy thi với nhau nhiều lần. Trong một cuộc thi chạy mà yêu cầu là phải chạy 20 lần – mỗi lần trong cùng một đơn vị thời gian (phút), rồi so sánh trung bình kết quả quãng đường chạy được (đơn vị mét). Thỏ cậy mình chạy nhanh mà thi những 20 lần nên rất nhiều lần không chạy, chỉ nằm chơi hoặc la cà hái hoa bắt bướm nghịch, trong khi đó Rùa biết sức yếu hơn nên chăm chỉ chạy. Quãng đường chạy trong 20 lần (1 phút mỗi lần) được ghi trong bảng 10.

Rùa					Thỏ				
15	14	13	14	12	0	0	0	0	5
13	13	14	14	10	0	0	0	7	0
11	12	13	12	10	10	9	0	0	8
15	13	14	15	14	10	45	50	51	51

Bảng 10

- Lập bảng "tần số" mỗi giá trị của Rùa, rồi của Thỏ.
- Tính vận tốc trung bình của Rùa và Thỏ.
- Trong quá trình thi, Rùa và Thỏ ai chạy được quãng đường nhiều hơn ?
- Tìm một dấu hiệu của Rùa và Thỏ.

Giải

- Bảng "tần số" của Rùa (bảng 11) và Thỏ (bảng 12):

Rùa	Quãng đường (x)	10	11	12	13	14	15	
	Tần số (n)	2	1	3	5	6	3	N = 20

Bảng 11

Thỏ	Quãng đường (x)	0	5	7	8	9	10	45	50	51	
	Tần số (n)	10	1	1	1	1	2	1	1	2	N = 20

Bảng 12

- Vận tốc trung bình của Rùa:

$$\bar{X} = \frac{10.2 + 11.1 + 12.3 + 13.5 + 14.6 + 15.3}{2 + 1 + 3 + 5 + 6 + 3} = 13,05 \text{ (m/phút)}.$$

Vận tốc trung bình của Thỏ:

$$\overline{X} = \frac{0.10 + 5.1 + 7.1 + 8.1 + 9.1 + 10.2 + 45.1 + 50.1 + 51.2}{10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2} = 12,30 \text{ (m/phút)}.$$

c) Quãng đường của Rùa chạy được: $13,05 \cdot 20 = 261 \text{ (m)}$.

Quãng đường của Thỏ chạy được: $12,30 \cdot 20 = 246 \text{ (m)}$.

Như vậy trong cuộc thi, tổng quãng đường chạy được của Rùa nhiều hơn của Thỏ ($261 > 246$).

d) $M_0(\text{Rùa}) = 14$; $M_0(\text{Thỏ}) = 0$.

Nhận xét:

Nhìn vào các số liệu ở bảng 11 và 12 ta thấy trong mỗi phút Rùa chạy được một quãng đường ngắn hơn của Thỏ nhưng Rùa luôn chăm chỉ chạy (theo dạng kiến tha lâu đầy tổ). Trong khi đó cậy có sức, Thỏ nhản nhơ chơi đùa nên số lần chạy được quãng đường nhiều hơn của Rùa rất ít (chỉ có 4 lần). Chính vì vậy vận tốc trung bình của Thỏ kém của Rùa. Cùng một thời gian mà vận tốc nhỏ hơn thì quãng đường chạy được cũng nhỏ hơn và kết cục Thỏ thua Rùa (ta có thể nhận thấy qua $M_0(\text{Rùa}) > M_0(\text{Thỏ})$ khi số lần không chơi của Thỏ nhiều quá ! Bài toán trên cho chúng ta một bài học: Phải kiên trì không nản lòng và cũng phải chăm chỉ nếu không với tổ chất có sẵn cũng sẽ bỏ phí.

Dạng 3. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

VÍ DỤ 7.5. Cần loại đi số nào trong tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 9; 10; 11\}$ để giá trị trung bình của các số còn lại bằng 6,1 ?

Giải

Gọi số phải loại đi là x .

Tổng 11 số của tập hợp A bằng: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 11 = \frac{(1+11) \cdot 11}{2} = 66$.

Tổng 10 số của tập hợp A sau khi loại đi số x bằng: $S' = 6,1 \cdot 10 = 61$.

Vậy số phải loại đi là: $x = S - S' = 66 - 61 = 5$.

VÍ DỤ 7.6.

a) Biết trung bình cộng của 16 số bằng 4. Thêm số thứ mười bảy thì trung bình cộng của chúng bằng 5. Tìm số thứ mười bảy.

b) Một bảng thống kê dân số của quận cho thấy tỉ số giữa số nữ và số nam bằng $\frac{10}{11}$. Nếu tuổi trung bình của nữ là 34 và của nam là 32 thì tuổi trung bình của người dân trong quận bằng bao nhiêu ?

Giải

a) Biết trung bình cộng của 16 số bằng 4, nên tổng 16 số đó bằng $4 \cdot 16 = 64$.

Gọi số thứ 17 là x , có trung bình cộng của 17 số bằng 5, tức là

$$\frac{64 + x}{17} = 5 \Rightarrow x = 5 \cdot 17 - 64 = 21.$$

Vậy số thứ 17 cần thêm vào là 21 để trung bình cộng của 17 số bằng 5.

b) Tuổi trung bình của người dân trong quận bằng: $\frac{10 \cdot 34 + 11 \cdot 32}{10 + 11} = 32 \frac{20}{21}$.

VÍ DỤ 7.7. Bạn A đã có một số bài kiểm tra môn Toán. Để có được điểm trung bình là 9 thì bài kiểm tra tới phải được điểm 10, nhưng không may bài đó A chỉ được 7,5 điểm nên điểm trung bình là 8,5. Hỏi A đã có trước đó bao nhiêu bài kiểm tra ?

Giải

Gọi số bài kiểm tra môn Toán của A có trước đó là x ($x \in \mathbb{Z}$ và $x > 0$) và tổng điểm x bài đó của A là S .

Biết nếu thêm một điểm 10 thì điểm trung bình bằng 9, nên tổng điểm của A khi đó là

$$S + 10 = 9 \cdot (x + 1).$$

Nhưng vì chỉ được 7,5 điểm nên điểm trung bình bằng 8,5, do đó tổng điểm của A là: $S + 7,5 = 8,5 \cdot (x + 1)$.

$$\text{Suy ra } (S + 10) - (S + 7,5) = 9 \cdot (x + 1) - 8,5 \cdot (x + 1) \Rightarrow 0,5x = 2 \Rightarrow x = 4.$$

Vậy bạn A đã có 4 bài kiểm tra Toán.

VÍ DỤ 7.8. Trong lần sau cùng chơi bóng gổ (bowling) với 10 con ky, bạn H đạt được 199 điểm và số điểm này nâng mức điểm trung bình của bạn H trong các lần chơi từ 177 lên 178. Để nâng điểm trung bình lên 179 thì với lần chơi tiếp theo bạn H phải có số điểm là bao nhiêu ?

Giải

Giả sử bạn H đã chơi được n trận với điểm trung bình của n trận là 177.

Đến trận tiếp theo bạn H nâng điểm trung bình lên 178, ta có:

$$\frac{177n+199}{n+1}=178.$$

Suy ra bạn H đã chơi tất cả $n = 21$ trận.

Như vậy, bạn H đã chơi 21 trận đạt được trung bình là 177 điểm, đến trận thứ 22 bạn H đã nâng điểm trung bình lên 178.

Nếu x là điểm của lần chơi kế tiếp thì ta có: $\frac{178.22+x}{22+1}=179$, suy ra $x = 201$.

Vậy để nâng điểm trung bình lên 179 thì với lần chơi tiếp theo (trận thứ 23) bạn H phải có số điểm đạt được là 201.

VÍ DỤ 7.9. Một ô tô đi với vận tốc 40km/h trong 20km đầu và đi với vận tốc 60km/h trong 20km sau. Hỏi vận tốc trung bình của ô tô trong cả hành trình đó là bao nhiêu ?

Giải

Ta biết vận tốc trung bình được tính bằng công thức sau:

$$V_{TB} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n}.$$

Vậy vận tốc trung bình của ô tô:

$$V_{TB} = \frac{20+20}{\frac{20}{40} + \frac{20}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = 48 \text{ (km/h)}.$$

VÍ DỤ 7.10. Một người leo núi với vận tốc 2km/h, lúc xuống núi với vận tốc 6km/h. Tìm vận tốc trung bình của người đó trong toàn hành trình lên và xuống núi.

Giải

Vì không biết quãng đường đi nên ta sẽ tính trong cùng một đơn vị quãng đường leo núi 1km và xuống núi 1km.

Thời gian người đó leo núi 1km bằng $1 : 2 = \frac{1}{2}$ (h).

Thời gian người đó xuống núi 1km bằng $1 : 6 = \frac{1}{6}$ (h).

Thời gian người đó leo núi 1km và xuống núi 1km bằng $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ (h).

Vậy vận tốc trung bình của người đó trong hành trình lên và xuống núi bằng

$$2 : \frac{2}{3} = 3 \text{ (km/h)}.$$

VÍ DỤ 7.11. Cho bốn số nguyên dương a, b, c, d mà trong đó b là trung bình cộng của hai số a và c . Chứng minh rằng bốn số a, b, c, d lập thành một tỉ lệ thức nếu $\frac{2}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

Giải

Vì số b là trung bình cộng của hai số a và c nên $a + c = 2b$. (1)

Mặt ta có: $\frac{2}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} \Rightarrow bc + cd = 2bd$. (2)

Thay $2b = a + c$ từ (1) vào (2) suy ra:

$$bc + cd = (2b)d = (a + c)d = ad + cd \Rightarrow bc = ad.$$

Vậy bốn số a, b, c, d lập thành một tỉ lệ thức.

BÀI TẬP

7.1. Thống kê cấp độ và số trận bão đổ bộ vào Việt Nam trong thập niên đầu tiên của thế kỉ XXI được ghi lại trong bảng 13.

Năm	Số trận bão	Cấp độ bão từng trận														
2001	3	6	11	8												
2002	2	6	6													
2003	3	6	6	11												
2004	2	6	7													
2005	7	9	7	12	9	8	7	10								
2006	3	13	8	6												
2007	8	12	6	6	6	11	9	8	8							
2008	14	7	6	7	7	8	9	6	6	8	10	7	13	6	6	
2009	13	6	6	6	6	6	6	8	6	6	6	6	8	7		
2010	7	6	12	9	10	7	7	6								

Bảng 13

1. Chọn cột thứ nhất và cột thứ hai của bảng 13.

a) Cho biết dấu hiệu là gì ?

b) Lập bảng "tần số" và tính trong vòng 10 năm của thập niên thứ nhất của thế kỉ XXI, mỗi năm trung bình có bao nhiêu trận bão đổ bộ vào Việt Nam ?
Tìm một.

2. Chọn cột thứ nhất và cột ba (gồm 14 cột nhỏ) theo từng hàng ngang ta được một bảng.

a) Cho biết dấu hiệu ở đây là gì ?

b) Lập bảng "tần số" và tìm trung bình cấp độ bão đổ bộ vào Việt Nam.

7.2. Số bàn thắng trong mỗi trận đấu ở vòng đấu bảng World Cup 2010 được ghi trong bảng 14:

2	0	3	2	1	3	1	2	3	5	4	2
2	1	4	0	1	1	4	1	1	2	1	3
2	1	1	3	4	3	2	2	2	2	5	0
0	3	4	7	0	3	1	1	1	2	3	0

Bảng 14

a) Dấu hiệu ở đây là gì ?

b) Lập bảng "tần số" và tính trung bình số bàn thắng trong một trận đấu ở vòng bảng.

7.3. Điểm trung bình môn Toán của một nhóm chưa giỏi Toán trong một đợt kiểm tra là 5,2. Có một bạn được điểm 7 chuyển sang nhóm khá nên điểm trung bình của các bạn còn lại bằng 5. Vậy trong nhóm chưa giỏi Toán còn bao nhiêu bạn ?

7.4. Cho 7 số xếp theo thứ tự giảm dần. Biết trung bình cộng của 7 số bằng 40, trung bình cộng của 4 số đầu bằng 50 và trung bình cộng của 4 số sau bằng 31. Hỏi số đứng chính giữa bằng bao nhiêu ?

7.5. Bạn Nam đã có một số bài kiểm tra môn Toán. Bạn Nam thấy nếu được thêm 3 điểm 10 và 3 điểm 9 thì điểm trung bình của mình bằng 8. Nếu chỉ được thêm 2 điểm 10 và 1 điểm 9 thì điểm trung bình bằng 7,5. Hỏi điểm trung bình của bạn Nam hiện tại là bao nhiêu ?

7.6. Một lớp có ba tổ 1, 2, 3. Điểm trung bình của các tổ trong một bài kiểm tra như sau:

Tổ	1	2	3	1 và 2	2 và 3
Điểm trung bình	9,0	8,8	7,8	8,9	8,2

Biết tổ 1 có 10 học sinh. Tính số học sinh của các tổ 2, 3 và điểm trung bình của cả lớp.

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Chuyên đề 8. GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ**Dạng 1. GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC****I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

1. Biểu thức mà trong đó ngoài các số, các kí hiệu phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên một lũy thừa còn có các chữ đại diện cho các số được gọi là *biểu thức đại số*.

2. Trong một biểu thức đại số:

Các chữ có thể đại diện cho những số tùy ý nào đó và những chữ như vậy được gọi là các *biến số* (gọi tắt là *biến*).

Vì chữ đại diện cho số nên khi thực hiện các phép toán trên các chữ, ta có thể áp dụng những tính chất, quy tắc phép toán như trên các số.

Để tính giá trị của một biểu thức đại số ứng với giá trị nào đó của biến số, ta thường thay giá trị đó của biến vào biểu thức rồi làm phép tính theo thứ tự thực hiện đã được quy ước.

Kiến thức bổ sung

3. Mỗi biểu thức đại số là một công thức Toán học, Vật lí,
4. Trong các biểu thức đại số, đơn vị đo được cho vào trong dấu ngoặc có dụng ý:
Có thể thay bằng các bội số hoặc ước số của các đơn vị đo.
Trong phép toán khi thực hiện không ghi đơn vị, đến kết quả cuối cùng mới ghi đơn vị.
5. Một biểu thức đại số có thể chứa biến ở mẫu số, với điều kiện phải loại trừ giá trị của biến làm biểu thức thành vô nghĩa.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 8.1. Viết các biểu thức đại số thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a) Số nhỏ hơn 3 lần một số a cho trước 2 đơn vị.

b) Tích của tổng hai số với hiệu giữa tổng bình phương của hai số với tích của chúng.

c) Bình phương của một số tự nhiên gọi là một số chính phương. Nếu a là một số chính phương thì số chính phương liền ngay sau số a là số nào ?

d) Diện tích của một hình tròn có chu vi là p được viết như thế nào ?

Giải

a) Số nhỏ hơn 3 lần một số a cho trước 2 đơn vị được viết: $3a - 2$.

b) Gọi hai số đã cho là a và b , thì tích của tổng hai số với hiệu giữa tổng bình phương của hai số với tích của chúng được viết: $(a + b)(a^2 + b^2 - ab)$.

c) Gọi a và b là hai số chính phương liên tiếp thì số chính phương b có thể viết bằng hai cách:

Cách 1: $a = n^2$ thì $b = (n + 1)^2$.

Cách 2: $a = (\sqrt{a})^2$ thì $b = (\sqrt{a} + 1)^2$.

d) Gọi diện tích của hình tròn có bán kính R , đường kính d là S , thì:

$$S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{(\pi \cdot d)^2}{4\pi} = \frac{p^2}{4\pi}.$$

VÍ DỤ 8.2. Tính giá trị của biểu thức $A = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$, nếu:

a) $x = 2$ và $y = 1$; b) $2x = 3y$ và $x - 2y = -1$; c) $|x| = 1$ và $|y| = 0,5$.

Giải

a) Thay $x = 2$ và $y = 1$ vào biểu thức A , ta có:

$$A = 2^3 - 6 \cdot 2^2 \cdot 1 + 12 \cdot 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1^3 = 0.$$

b) Có $2x = 3y$ nên $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{x-2y}{3-4} = \frac{-1}{-1} = 1$, suy ra $x = 3$ và $y = 2$.

Thay $x = 3$ và $y = 2$ vào biểu thức A , ta có: $A = 3^3 - 6 \cdot 3^2 \cdot 2 + 12 \cdot 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2^3 = -1$.

c) Do $|x| = 1$ nên $x = \pm 1$ và $|y| = 0,5$ nên $y = \pm 0,5$. Ta xét bốn trường hợp sau:

x	y	Giá trị biểu thức A
1	0,5	$A = 1^3 - 6.1^2.(0,5) + 12.1.(0,5)^2 - 8.(0,5)^3 = 0$
1	-0,5	$A = 1^3 - 6.1^2.(-0,5) + 12.1.(-0,5)^2 - 8.(-0,5)^3 = 8$
-1	0,5	$A = (-1)^3 - 6.(-1)^2.(0,5) + 12.(-1).(0,5)^2 - 8.(0,5)^3 = -8$
-1	-0,5	$A = (-1)^3 - 6.(-1)^2.(-0,5) + 12.(-1).(-0,5)^2 - 8.(-0,5)^3 = 0$

VÍ DỤ 8.3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{3a-2b}{2a-3b}$, biết $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$.

b) $B = \frac{3a-b}{2a+13} - \frac{3b-a}{2b-13}$, với $a-b=13$ và $a \neq -6,5$, $b \neq 6,5$.

c) $C = \frac{(1^3+2^3+3^3+\dots+10^3) \cdot (x^2+y^2) \cdot (x^3+y^3) \cdot (x^4+y^4)}{1^2+2^2+3^2+\dots+10^2}$, với $x = -0,3$

và $y = \frac{1}{3}$.

Giải

a) Từ $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$, có $a \neq 0$ và $b \neq 0$. Chia cả tử và mẫu của A cho b, ta có:

$$A = \frac{3 \cdot \frac{a}{b} - 2}{2 \cdot \frac{a}{b} - 3} = \frac{3 \cdot \frac{5}{6} - 2}{2 \cdot \frac{5}{6} - 3} = -\frac{3}{8}.$$

b) Do $a-b=13$ nên ta có thể thay $a=b+13$, hoặc $b=a-13$, hoặc $13=a-b$.

Cách 1: Thay $a-b=13$; có $2a+13 \neq 0$ và $2b-13 \neq 0$:

$$B = \frac{2a+(a-b)}{2a+13} - \frac{2b-(a-b)}{2b-13} = \frac{2a+13}{2a+13} - \frac{2b-13}{2b-13} = 1-1=0.$$

Cách 2: Thay $b=a-13$ và $a=b+13$; có $2a+13 \neq 0$ và $2b-13 \neq 0$:

$$B = \frac{3a-(a-13)}{2a+13} - \frac{3b-(b+13)}{2b-13} = \frac{2a+13}{2a+13} - \frac{2b-13}{2b-13} = 1-1=0.$$

Cách 3: Thay $13 = a - b$; có $3a - b \neq 0$ và $3b - a \neq 0$:

$$B = \frac{3a-b}{2a+(a-b)} - \frac{3b-a}{2b-(a-b)} = \frac{3a-b}{3a-b} - \frac{3b-a}{3b-a} = 1 - 1 = 0.$$

c) Nhận thấy: $x^3 + y^3 = (-0, (3))^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0.$

Trong biểu thức C, biểu thức ở mẫu số khác 0. Biểu thức ở tử số là một tích của nhiều thừa số, mà trong đó có một thừa số $x^3 + y^3 = 0$, nên tích của các thừa số ở tử bằng 0. Suy ra $C = 0$.

Dạng 2. ĐƠN THỨC. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Đơn thức* là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.
2. *Đơn thức thu gọn* là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên một lũy thừa với số mũ nguyên dương, trong đó phần số được gọi là hệ số và phần còn lại được gọi là phần biến của đơn thức thu gọn.
 - Một số cũng được coi là một đơn thức thu gọn.
 - Trong đơn thức thu gọn, mỗi biến chỉ được viết một lần. Các biến được viết theo thứ tự bảng chữ cái.
 - Để nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.
3. Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.
 - Số 0 được coi là đơn thức không có bậc.
 - Số thực khác 0 là đơn thức bậc không.
4. Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.
 - Các số khác 0 được coi là các đơn thức đồng dạng.
 - Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Kiến thức bổ sung

5. Lũy thừa của một đơn thức được đưa về nhân hai đơn thức đồng dạng với nhau.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 8.4. Cho các biểu thức sau:

$$A = 0,25.x^2y^3 - 0,5.x^2y^3 + 4.x^2y^3;$$

$$B = 1,5.(xy^2)^3.x^2y - 2(xy)^3.x^2y^4 + [0,(3)x^2y]^2.xy^5;$$

$$C = (0,5.xy). \left(-\frac{1}{3}.xy^2 \right);$$

$$D = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}.x^3y^5 \right). (0,6.xy)^2.$$

a) Thu gọn các biểu thức trên để được các đơn thức.

b) Chỉ ra các đơn thức đồng dạng.

c) Tính giá trị của các đơn thức sau khi thu gọn tại $x = \frac{1}{3}$ và $y = -1$.

Giải

a) Có: $A = 3,75.x^2y^3$; $B = -\frac{7}{18}x^5y^7$; $C = -\frac{1}{6}x^2y^3$; $D = \frac{\sqrt{2}}{5}x^5y^7$.

b) Các đơn thức đồng dạng là A và C; B và D.

c) Giá trị của các đơn thức sau khi thu gọn tại $x = \frac{1}{3}$ và $y = -1$ là:

$$A = -\frac{5}{12}; \quad B = \frac{7}{4374}; \quad C = \frac{1}{54}; \quad D = -\frac{\sqrt{2}}{1215}.$$

VÍ DỤ 8.5. Tìm giá trị của các đơn thức sau:

a) $P = 0,007.a^2.b^9$, với $a = -5$ và $b = 2$.

b) $Q = 0,0625.a^7.b^5$, với $a = -4$ và $b = 0,25$.

Giải

a) $P = 0,007.(ab)^2.b^7 = 0,007.((-5).2)^2.2^7 = 0,007.100.128 = 89,6$.

b) $Q = 0,0625.(ab)^5.a^2 = 0,0625.((-4).0,25)^5.(-4)^2 = 0,0625.(-1).16 = -1$.

VÍ DỤ 8.6.

a) Xác định dấu của a , biết rằng $x = -2abc^3$ trái dấu với $y = 3a^2b^3c^5$.

b) Biết rằng hai đơn thức $x = -1\frac{1}{8}a^3b$ và $y = \frac{4}{15}a^2b^3$ cùng dấu. Xác định dấu của a .

c) Hai đơn thức $x = -5a^{2n}b$ và $y = 3a^{4n}b^5$ có thể có cùng giá trị âm được không ?

Giải

a) Vì x và y trái dấu nên $xy < 0$ với a, b và c khác 0.

$$\text{Có: } xy = (-2abc^3) \cdot (3a^2b^3c^5) = -6a^3b^4c^8 < 0.$$

Lại có $b^4c^8 > 0$ (do b và c khác 0) nên $-6a^3 < 0$ hay $a^3 > 0$ tức là $a > 0$.

b) Vì x và y cùng dấu nên $xy > 0$ với a và b khác 0.

$$\text{Có: } xy = \left(-1\frac{1}{8}a^3b\right) \cdot \left(\frac{4}{15}a^2b^3\right) = -0,3a^5b^4 > 0.$$

Lại có $b^4 > 0$ (do b khác 0) nên $-0,3a^5 > 0$ hay $a^5 < 0$, tức là $a < 0$.

c) Xét tích của hai đơn thức $xy = (-5a^{2n}b) \cdot (3a^{4n}b^5) = -15a^{6n}b^6 = -15 \cdot (a^n b)^6$.

Có $(a^n b)^6 > 0$ nên $xy = -15 \cdot (a^n b)^6 < 0$, tức là x và y trái dấu nhau, hay x và y không thể cùng âm được.

VÍ DỤ 8.7. Cho 9 số $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3$ khác 0. Hỏi tất cả 6 số sau $x_1 = a_1b_2c_3; x_2 = a_2b_3c_1; x_3 = a_3b_1c_2$ và $y_1 = -a_1b_3c_2; y_2 = -a_2b_1c_3; y_3 = -a_3b_2c_1$ có thể cùng âm hoặc cùng dương được không ?

Giải

Xét tích của sáu đơn thức $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = -(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3)^2 < 0$.

Vậy cả 6 đơn thức trên không thể cùng âm hoặc cùng dương được.

VÍ DỤ 8.8.

a) Cho $a^{2k} = -5$. Tính $2a^{6k} - 4$.

b) Cho phép toán $*$ như sau: $a * b = a^b + b^a$, với a, b là các số nguyên dương.

Biết $2 * x = 100$. Tính x .

c) Tìm x, y, z , nếu: $(5x^2y^4)^3 + (-7y^3z^5)^2 = 0$.

Giải

a) Có $2a^{6k} - 4 = 2(a^{2k})^3 - 4 = 2(-5)^3 - 4 = -254$.

b) Thay $a = 2$ và $b = x$ vào đẳng thức đã cho, ta có: $2^x + x^2 = 2 * x = 100$.

Từ $2^x + x^2 = 100$, ta nhận xét thấy $x \neq 1$, vì nếu $x = 1$ thì

$$2 * 1 = 2^1 + 1^2 = 2 + 1 = 3 \neq 100.$$

Có x là số nguyên dương và lớn hơn 1 nên $x \geq 2$, nên 2^x chia hết cho 4. Mà 100 chia hết cho 4 nên suy ra x^2 cũng chia hết cho 4. Vậy x là số chẵn.

Lại có $x < 10$, vì nếu $x = 10$ thì

$$2 * 10 = 2^{10} + 10^2 = 1024 + 100 = 1124 > 100.$$

Suy ra $2 \leq x \leq 10$ và x là số chẵn, nên $x \in \{2; 4; 6; 8\}$.

Từ đó suy ra $x = 6$ để $2 * 6 = 2^6 + 6^2 = 64 + 36 = 100$.

c) Có: $(5x^2y^4)^3 + (-7y^3z^5)^2 = 125(x^3y^6)^2 + 49(y^3z^5)^2 = 0$ mà $(x^3y^6)^2 \geq 0$ và $(y^3z^5)^2 \geq 0$. Suy ra: $(x^3y^6)^2 = (y^3z^5)^2 = 0$ hay $xy = yz = 0$.

Vậy $y = 0$ và x, z bằng bất kì số nào hoặc $x = z = 0$ và y bằng bất kì số nào.

Dạng 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp D .

Nếu $f(x) \geq m$, mà m là một hằng số ($m = \text{Const}$) và $f(x) = m$ tại $x = x_0 \in D$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là m , đạt được tại $x = x_0$, khi đó ta viết $\min(f(x)) = m$ tại $x = x_0$.

2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp D .

Nếu $f(x) \leq M$, mà M là một hằng số ($M = \text{Const}$) và $f(x) = M$ tại $x = x_0 \in D$ thì giá trị lớn nhất của $f(x)$ là M , đạt được tại $x = x_0$, khi đó ta viết $\max(f(x)) = M$ tại $x = x_0$.

Chú ý:

Để $f(x) = m$, có thể có nhiều giá trị của x .

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 8.9. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = 7(x + 5)^2 + 3$;

b) $B = x + \sqrt{x} - 5$;

c) $C = \sqrt{92-x} + \sqrt{29}$;

d) $D = (x^4 + 4)^4$.

Giải

a) Có: $7(x + 5)^2 + 3 \geq 3$ do $7(x + 5)^2 \geq 0$ nên $A \geq 3$.

Lại có $A = 3$ khi và chỉ khi $x = -5$. Suy ra $A \geq 3$ và $A = 3$ tại $x = -5$.

Vậy $\min A = 3$ tại $x = -5$.

b) Điều kiện $x \geq 0$ để căn thức có nghĩa.

Có: $x + \sqrt{x} - 5 \geq -5$ do $x \geq 0$ và $\sqrt{x} \geq 0$ nên $B \geq -5$.

Lại có $B = -5$ khi và chỉ khi $x = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Suy ra $B \geq -5$ và $B = -5$ tại $x = 0$. Vậy $\min B = -5$ tại $x = 0$.

c) Điều kiện $x \leq 92$ để căn thức $\sqrt{92-x}$ có nghĩa.

Có: $\sqrt{92-x} + \sqrt{29} \geq \sqrt{29}$ do $\sqrt{92-x} \geq 0$ nên $C \geq \sqrt{29}$.

Lại có $C = \sqrt{29}$ khi và chỉ khi $x = 92$ (thỏa mãn điều kiện).

Suy ra $C \geq \sqrt{29}$ và $C = \sqrt{29}$ khi và chỉ khi $x = 92$. Vậy $\min C = \sqrt{29}$ tại $x = 92$.

d) Có: $x^4 + 4 \geq 4$ do $x^4 \geq 0$ nên $D = (x^4 + 4)^4 \geq 4^4 = 256$.

Lại có $D = 256$ khi và chỉ khi $x = 0$. Suy ra $D \geq 256$ và $D = 256$ tại $x = 0$.

Vậy $\min D = 256$ tại $x = 0$.

Chú ý: Tránh sai lầm khi lập luận: $D = (x^4 + 4)^4 \geq 0$ nhưng đẳng thức không xảy ra nên kết luận là không tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức D !

VÍ DỤ 8.10. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{421} - \sqrt{124-x}$;

b) $B = 1 - \sqrt{5}(\sqrt{x} - \sqrt{3})^2$.

Giải

a) Điều kiện $x \leq 124$ để căn thức $\sqrt{124-x}$ có nghĩa.

Có: $\sqrt{421} - \sqrt{124-x} \leq \sqrt{421}$ do $\sqrt{124-x} \geq 0$ nên $A \leq \sqrt{421}$.

Lại có $A = \sqrt{421}$ khi và chỉ khi $x = 124$ (thỏa mãn điều kiện).

Suy ra $A \leq \sqrt{421}$ và $A = \sqrt{421}$ khi và chỉ khi $x = 124$.

Vậy $\max A = \sqrt{421}$ tại $x = 124$.

b) Điều kiện $x \geq 0$ để căn thức $\sqrt{x}$ có nghĩa.

Có: $1 - \sqrt{5} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 \leq 1$ do $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 \geq 0$, nên $B \leq 1$.

Lại có $B = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 > 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Suy ra $B \leq 1$ và $B = 1$ khi và chỉ khi $x = 3$. Vậy $\max B = 1$ tại $x = 3$.

VÍ DỤ 8.11. Tìm số nguyên x để:

a) Biểu thức A đạt giá trị lớn nhất, với $A = \frac{13}{17-x}$;

b) Biểu thức B đạt giá trị nhỏ nhất, với $B = \frac{3}{x-7}$;

c) Biểu thức C đạt giá trị lớn nhất, với $C = \frac{40-3x}{13-x}$;

d) Biểu thức D đạt giá trị nhỏ nhất, với $D = \frac{20-x}{x-12}$.

Giải

a) Điều kiện $x \neq 17$, ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu $x < 17$ thì $17 - x > 0$, mà $13 > 0$ nên $A > 0$.
- Nếu $x > 17$ thì $17 - x < 0$, mà $13 > 0$ nên $A < 0$.

Do đó muốn $A_{\max}$, ta phải chọn x sao cho $A > 0$, tức là chọn $x < 17$. Khi đó $A_{\max}$ khi và chỉ khi $(17 - x)_{\min}$ do 13 là hằng số dương.

Có $17 - x > 0$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $(17 - x)_{\min} \Leftrightarrow 17 - x = 1$, hay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $A = \frac{13}{17-x}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 13 khi và chỉ khi $x = 16$.

b) Điều kiện $x \neq 7$, ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu $x < 7$ thì $x - 7 < 0$, mà $3 > 0$ nên $B < 0$.
- Nếu $x > 7$ thì $x - 7 > 0$, mà $3 > 0$ nên $B > 0$.

Như vậy, muốn $B_{\min}$ ta phải chọn x sao cho $B < 0$, tức là chọn $x < 7$. Khi đó

$$B_{\min} \text{ khi số đối của } B_{\max} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7-x} \right)_{\max} \Leftrightarrow (7-x)_{\min} \text{ do } 3 \text{ là hằng số dương.}$$

Giải tương tự như trên, ta có $B_{\min} = -3$ khi và chỉ khi $x = 6$.

c) Điều kiện $x \neq 13$, ta có $C = \frac{(39-3x)+1}{13-x} = 3 + \frac{1}{13-x} = 3 + P$, với

$$P = \frac{1}{13-x}.$$

Suy ra $C_{\max}$ khi và chỉ khi $P_{\max}$. Giải tương tự câu a), ta có $C_{\max} = 4$ khi và chỉ khi $x = 12$.

d) Điều kiện $x \neq 12$, ta có $D = \frac{8-(x-12)}{x-12} = \frac{8}{x-12} - 1 = Q - 1$, với

$$Q = \frac{8}{x-12}.$$

Suy ra $D_{\min}$ khi và chỉ khi $Q_{\min}$.

Giải tương tự câu b), ta có $D_{\min} = -9$ khi và chỉ khi $x = 11$.

VÍ DỤ 8.12. Cho $(a-b)^2 + 6ab = 36$. Tìm giá trị lớn nhất của $x = ab$.

Giải

Có $x = ab = [36 - (a-b)^2] : 6 \leq 6$ do $(a-b)^2 \geq 0$ và $x = 6$ khi và chỉ khi $a = b = \sqrt{6}$ hoặc $a = b = -\sqrt{6}$.

Vậy giá trị lớn nhất của x bằng 6 khi và chỉ khi $a = b = \sqrt{6}$ hoặc $a = b = -\sqrt{6}$.

VÍ DỤ 8.13. Cho a, b và c là các số tự nhiên khác 0. Biết $\frac{28}{29} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $S = a + b + c$.

Giải

Để $(a + b + c)_{\min}$ ta phải cực tiểu hoá các giá trị a, b và c . (i)

Không mất tính tổng quát, ta đặt $1 < a \leq b \leq c$. Suy ra $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$.

Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{a}$, do đó $\frac{28}{29} < \frac{3}{a}$. Suy ra: $1 < a < 3\frac{3}{28} \Rightarrow a \in \{2; 3\}$ vì

$a \in \mathbb{N}$.

• Nếu $a = 2 \Rightarrow b > 2$, vì nếu $b = a = 2$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Theo (i) ta chọn $b = 3$ và

$c = 7$, vì $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$ mà $\frac{28}{29} < \frac{41}{42} < 1$.

• Nếu $a = 3 \Rightarrow c \geq b \geq 3$; nếu $a = b = c = 3$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$; nếu $a = 3$ và

$b, c \geq 4$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} < \frac{28}{29}$. Do đó loại $a = 3$.

Vậy $\min(a + b + c) = 2 + 3 + 7 = 12$.

VÍ DỤ 8.14. Cho các số nguyên a, b, c, d . Biết $a < 2b$; $b < 3c$; $c < 4d$ và $d < 5$. Tìm giá trị lớn nhất của số a .

Giải

Ta có $d \in \mathbb{Z}$ và $d < 5$ nên $\max(d) = 4$.

Ta lại có $c < 4d$ mà $\max(d) = 4$ nên $c < 16$, mà $c \in \mathbb{Z}$ nên $\max(c) = 15$.

Tương tự $b < 3c \Rightarrow b < 45$ mà $b \in \mathbb{Z}$ nên $\max(b) = 44$.

$a < 2b \Rightarrow a < 88$ mà $a \in \mathbb{Z}$ nên $\max(a) = 87$.

Vậy giá trị lớn nhất của a là 87.

VÍ DỤ 8.15. Cho hình vuông kích thước 3×3 , ta chia được 9 ô vuông nhỏ bằng nhau. Điền các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào 9 ô vuông nhỏ. Gọi "tổng lớn" là tổng các số trên tất cả các hàng, các cột và các đường chéo. Tìm giá trị lớn nhất của tổng lớn đó.

Giải

Điền các chữ cái vào các ô số của hình vuông (h.8.1) và gọi T là "tổng lớn", ta có:

$$\begin{aligned} T &= [(a + m + b) + (p + \alpha + q) + (d + n + c)] + [(a + p + d) + (m + \alpha + n) \\ &\quad + (b + q + c)] + [(a + \alpha + c) + (d + \alpha + b)] \\ &= 4\alpha + 3(a + b + c + d) + 2(m + n + p + q). \end{aligned}$$

Như vậy, số α được tính 4 lần; các số a, b, c, d được tính 3 lần và các số m, n, p, q được tính 2 lần. Để T đạt giá trị lớn nhất ta chọn $\alpha = 9; a = 8, b = 7, c = 6, d = 5, m = 4, n = 3, p = 2$ và $q = 1$.

$$\text{Vậy } \max(T) = 4.9 + 3.(8 + 7 + 6 + 5) + 2.(4 + 3 + 2 + 1) = 134.$$

a	m	b
p	α	q
d	n	c

Hình 8.1

Dạng 4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho $x, y \in \mathbf{R}$, ta có: $|x + y| \leq |x| + |y|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $xy \geq 0$.

Thật vậy, ta có: $|x| \geq -x$ và $|y| \geq -y$ nên $|x| + |y| \geq -(x + y)$

$$\Rightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y.$$

$$x \leq |x| \text{ và } y \leq |y| \text{ nên } x + y \leq |x| + |y|.$$

$$\text{Suy ra: } -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|, \text{ hay } |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Dễ thấy, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $xy \geq 0$.

Vậy, giá trị tuyệt đối của một tổng không lớn hơn tổng các giá trị tuyệt đối.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 8.16. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = |x - 2012| + |2011 - x|;$

b) $B = |x - 456| + |x - 789|.$

Giải

a) Ta có $A = |x - 2012| + |2011 - x| \geq |(x - 2012) + (2011 - x)| = 1 \Rightarrow A \geq 1$.

Mà $A = 1$ khi và chỉ khi $(x - 2012)(2011 - x) \geq 0$, suy ra $2011 \leq x \leq 2012$.

Vậy $\min(A) = 1$ khi $2011 \leq x \leq 2012$.

Lưu ý: Không sử dụng được $|x - 2012| \geq 0$ và $|2011 - x| \geq 0$, vì dấu đẳng thức không xảy ra đồng thời:

$|x - 2012| = 0 \Leftrightarrow x = 2012$ và $|2011 - x| = 0 \Leftrightarrow x = 2011$, nhưng $2012 \neq 2011$.

b) Ta có: $B = |x - 456| + |x - 789|$
 $= |x - 456| + |789 - x| \geq |(x - 456) + (789 - x)| = 333$.

Có $B \geq 333$, mà $B = 333$ khi và chỉ khi $(x - 456)(789 - x) \geq 0$, suy ra $456 \leq x \leq 789$.

Vậy $\min(B) = 333$ khi $456 \leq x \leq 789$.

Lưu ý: Điểm hay của cách giải này là ở chỗ sử dụng $|x - 789| = |789 - x|$ (hai số đối nhau có giá trị tuyệt đối bằng nhau) để triệt tiêu x khi đánh giá B .

VÍ DỤ 8.17. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$;

b) $B = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4|$.

Giải

a) Ta có

$$A = (|-x + 1| + |x - 3|) + |x - 2| \geq |-x + 1 + x - 3| + |x - 2| = 2 + |x - 2| \geq 2.$$

$$\text{Mà } A = 2 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} (-x+1) \cdot (x-3) \geq 0 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy $A \geq 2$ và $A = 2$ khi và chỉ khi $x = 2$.

Suy ra $\min(A) = 2$ khi $x = 2$.

Lưu ý: Không thực hiện được các cách ghép khác, chẳng hạn

$$A = (|-x + 1| + |x - 2|) + |x - 3| \geq |-x + 1 + x - 2| + |x - 3| = 1 + |x - 3| \geq 1.$$

$$\text{Mà } A = 1 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} (-x+1) \cdot (x-2) \geq 0 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x=3 \end{cases}, \text{ không có giá trị}$$

nào của x thoả mãn.

Vậy $A \geq 1$ nhưng dấu đẳng thức không xảy ra, do đó không tìm được giá trị nhỏ nhất của A.

b) Ta có: $B = (|-x+1| + |x-4|) + (|-x+2| + |x-3|) \geq 4$.

Mà $B = 4$ khi và chỉ khi $\begin{cases} (-x+1) \cdot (x-4) \geq 0 \\ (-x+2) \cdot (x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$.

Vậy $B \geq 4$ và $B = 4$ khi và chỉ khi $2 \leq x \leq 3$.

Suy ra $\min(B) = 4$ khi $2 \leq x \leq 3$.

Lưu ý: Không thực hiện được các cách ghép khác, chẳng hạn

$B = (|-x+1| + |x-2|) + (|-x+3| + |x-4|) \geq 2$.

Mà $B = 2$ khi và chỉ khi $\begin{cases} (-x+1) \cdot (x-2) \geq 0 \\ (-x+3) \cdot (x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$, không có giá trị

nào của x thỏa mãn.

Vậy $B \geq 2$ nhưng dấu đẳng thức không xảy ra, do đó không tìm được giá trị nhỏ nhất của B.

VÍ DỤ 8.18.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của A, biết

$$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|.$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của B, biết $B = 124 - 5|x - 7|$.

Giải

a) Ta có

$$|7x - 5y| \geq 0, |2z - 3x| \geq 0 \text{ và } |xy + yz + zx - 2000| \geq 0.$$

Suy ra $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000| \geq 0$.

Mà $A = 0$ khi và chỉ khi $|7x - 5y| = |2z - 3x| = |xy + yz + zx - 2000| = 0$.

Có: $|7x - 5y| = 0 \Leftrightarrow 7x = 5y \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7}$;

$$|2z - 3x| = 0 \Leftrightarrow 2z = 3x \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{3};$$

$$|xy + yz + zx - 2000| = 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 2000.$$

Suy ra $\frac{x}{5} = \frac{y}{7}; \frac{x}{2} = \frac{z}{3}$ và $xy + yz + zx = 2000$.

Ta có dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{10} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = k$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$k^2 = \frac{x}{10} \cdot \frac{y}{14} = \frac{y}{14} \cdot \frac{z}{15} = \frac{z}{15} \cdot \frac{x}{10} = \frac{xy + yz + zx}{140 + 210 + 150} = \frac{2000}{500} = 4.$$

Ta có $k = \pm 2$ nên $x = 20, y = 28, z = 30$ hoặc $x = -20, y = -28, z = -30$.

Có $A \geq 0$, mà $A = 0 \Leftrightarrow (x; y; z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x; y; z) = (-20; -28; -30)$.

Vậy $\min(A) = 0 \Leftrightarrow (x; y; z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x; y; z) = (-20; -28; -30)$.

b) Ta có $|x - 7| \geq 0$, suy ra $B = 124 - 5|x - 7| \leq 124$. (1)

Mà $B = 0$ khi và chỉ khi $5 \cdot |x - 7| = 0 \Leftrightarrow x = 7$. (2)

Vậy từ (1) và (2), ta có $\max(B) = 124$ khi $x = 7$.

BÀI TẬP

8.1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = x^3 - 5x^2 + 10x - 2$ với $x = -\frac{1}{3}$.

b) $B = x^3 - 4x^2 - 7x - 10$ với $x \in \{-0,5; 0; 0,6; 1\}$.

c) $C = 2x^2 - 3|x| + 5$ với $x \in \{-2; -0,6\}$.

8.2. Cho biểu thức: $P = a^3 - 12a^2b + 48ab^2 - 64b^3$.

a) Tính giá trị của biểu thức P với $a = 1$ và $b = 0,25$.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $3a = 2b$ và $a - b = 1$.

8.3. Tính giá trị của biểu thức $Q = 3x^2 - 2xy - 8y^2$ với $|x| = \frac{1}{3}$ và $|y| = \frac{3}{2}$.

8.4. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{(x-y) \cdot (x^2-y^2) \cdot (x^3-y^3)}{x^4-y^4} \text{ với } x=1 \text{ và } y=0,1.$$

$$\text{b) } B = \frac{3b+28}{3a-5} - \frac{38-3a}{5-3b} \text{ với } a-b=11 \text{ và } a \neq \frac{5}{3}, b \neq \frac{5}{3}.$$

$$\text{c) } C = \frac{0,25x^2-4y^2}{3x^2+7y^2} + \frac{6x+y}{5x-2y} \text{ với } \frac{x}{y} = -4.$$

8.5. So sánh giá trị của các biểu thức sau khi $a = -5$ và $b = 3$:

$$A = a^2 - ab + b^2; \quad B = (a+b)^2 - 3ab; \quad C = (a^3 + b^3) : (a+b).$$

8.6. Cho ba đơn thức $A = 2xy^2$, $B = -2y^2z^4$ và $C = 2z^2x$. Hỏi cả ba đơn thức A, B và C có thể cùng dương được không?

8.7. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = |x+11| + |x+21| + |x+500| + |x+1012| + |x+1032|;$$

$$\text{b) } B = |\sqrt{x} - 7| + |\sqrt{x} - 5|.$$

8.8. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{13}{(3x-2)^2+11}$.

8.9. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau với x là số nguyên:

$$\text{a) } A = \frac{17}{x-13};$$

$$\text{b) } B = \frac{17-x}{x-11}.$$

8.10. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau với x là số nguyên:

$$\text{a) } A = \frac{17}{13-x};$$

$$\text{b) } B = \frac{32-2x}{11-x}.$$

8.11. Xét phép toán $a * b = a^a + b^b$ với mọi số nguyên dương a, b.

Tìm số nguyên dương x, nếu $2 * x = 31$.

Chuyên đề 9. CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC

Dạng 1. CỘNG VÀ TRỪ ĐƠN THỨC, ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.
 - a) Mỗi đơn thức cũng được coi là một đa thức.
 - b) Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.
2. Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.
3. Có thể thực hiện các phép tính cộng (hay trừ) hai hay nhiều đa thức dựa trên quy tắc "dấu ngoặc" và tính chất của các phép tính.
4. Phép cộng các đa thức có các tính chất giao hoán, kết hợp.

Kiến thức bổ sung

5. Hai đa thức là đồng nhất nếu chúng có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 9.1. Tính $P = A + B + C$; $Q = A + B - C$;

$$R = -A + B + C; \quad S = A - B + C.$$

a) Biết các đa thức: $A = 3x^2 - 4x + 5$; $B = 2x^2 + 5x - 4$; $C = 4x^2 - x + 3$.

b) Biết các đa thức: $A = 5a^2 - 3ab + 7b^2$; $B = 6a^2 - 8ab + 9b^2$; $C = 4a^2 - 3ab - 7b^2$.

Giải

a) Có: $P = 9x^2 + 4$; $Q = x^2 + 2x - 2$;

$$R = 3x^2 + 8x - 6; \quad S = 5x^2 - 10x + 12.$$

b) Có: $P = 15a^2 - 14ab + 9b^2$; $Q = 7a^2 - 8ab + 23b^2$;

$$R = 5a^2 - 8ab - 5b^2; \quad S = 3a^2 + 2ab - 9b^2.$$

VÍ DỤ 9.2. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $M = a - \{2b + [c - (d - a)]\} + d - [(a - b) - c];$

b) $N = 1 - [(m - 1) - (m + 2)] - 3m + \{5m - [2m - (3m - 4)]\}.$

Giải

a) Có $M = a - [2b + (c - d + a)] + d - (a - b - c)$

$$= a - 2b - c + d - a + d - a + b + c.$$

Vậy $M = -a - b + 2d.$

b) Có $N = 1 - (m - 1 - m - 2) - 3m + [5m - (2m - 3m + 4)]$

$$= 1 - (-3) - 3m + [5m - (-m + 4)] = 1 + 3 - 3m + 6m - 4 = 3m.$$

VÍ DỤ 9.3. Tìm đa thức P, biết :

a) $P + (4x^2 - 3xy) = y^2 - 9xy + 6x^2;$

b) $(3y^2 - 4xy) - P = 4x^2 - 12xy + 5y^2;$

c) $P - (2x^2 - 3y^2 + z^2) + (x^2 - y^2 + z^2) = 5x^2 - 2y^2 - 3z^2.$

Giải

a) $P = (y^2 - 9xy + 6x^2) - (4x^2 - 3xy) = 2x^2 - 6xy + y^2.$

b) $P = (3y^2 - 4xy) - (4x^2 - 12xy + 5y^2) = -4x^2 + 8xy - 2y^2.$

c) $P = (5x^2 - 2y^2 - 3z^2) + (2x^2 - 3y^2 + z^2) - (x^2 - y^2 + z^2) = 6x^2 - 4y^2 - 3z^2.$

VÍ DỤ 9.4. Xác định a, b, c để hai đa thức sau là hai đa thức đồng nhất:

$$A = ax^2 - 9x + 6x^2 - (4x^2 - 3x) \quad \text{và} \quad B = 2x^2 - 3bx + c - 1.$$

Giải

Thu gọn hai đa thức được $A = (a + 2)x^2 - 6x$ và $B = 2x^2 - 3bx + (c - 1).$

$$\text{Có hai đa thức đồng nhất: } A \equiv B \Leftrightarrow \begin{cases} a+2=2 \\ -6=-3b \\ 0=c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}.$$

VÍ DỤ 9.5. Biết $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $u_{124}.$

Giải

Các số hạng	Phép tính	Chu kì
u_1	$a = a$	Chu kì của dãy số là 6
u_2	$b = b$	
u_3	$b - a = b - a$	
u_4	$(b - a) - b = -a$	
u_5	$(-a) - (b - a) = -b$	
u_6	$(-b) - (-a) = a - b$	
u_7	$(a - b) - (-b) = a$	
u_8	$a - (a - b) = b$	

Ta có $124 = 6 \cdot 20 + 4 \Rightarrow u_{124} = -a$.

VÍ DỤ 9.6. Cho hai đơn thức $A = (-2x^5y^3)^2$ và $B = (4x^2z^2)^3$. Tìm x , y và z biết $A + B = 0$.

Giải

Có $A + B = 4x^{10}y^6 + 64x^6z^6 = 0$, mặt khác $4x^{10}y^6 \geq 0$ và $64x^6z^6 \geq 0$.

Suy ra $4x^{10}y^6 = 0$ và $64x^6z^6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z = 0. \end{cases}$

VÍ DỤ 9.7. Chứng minh rằng:

- Tổng của ba số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 3.
- Tổng của năm số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 5.
- Tìm giá trị của n để tổng của n số nguyên liên tiếp chia hết cho n .

Giải

a) Gọi ba số nguyên liên tiếp là $a - 1$, a , $a + 1$ ($a \in \mathbb{Z}$), ta có

$$S = (a - 1) + a + (a + 1) = 3a : 3 \text{ vì } a \in \mathbb{Z}.$$

b) Gọi năm số nguyên liên tiếp là $a - 2, a - 1, a, a + 1, a + 2$ ($a \in \mathbb{Z}$), ta có $S = 5a : 5$.

c) Theo cách giải trên, ta dự đoán tổng của n số nguyên liên tiếp chia hết cho n nếu n lẻ.

Xét $2k - 1$ số nguyên liên tiếp:

$$a - k, a - (k - 1), \dots, a - 1, a, a + 1, \dots, a + (k - 1), a + k.$$

Tổng của $2k - 1$ số nguyên liên tiếp đó là:

$$S = (a - k) + [a - (k - 1)] + \dots + (a - 1) + a + (a + 1) + \dots + [a + (k - 1)] + (a + k)$$

$$S = (2k - 1)a : (2k - 1).$$

Để thấy tổng của hai số nguyên liên tiếp không chia hết cho 2.

Vậy để tổng của n số nguyên liên tiếp chia hết cho n thì n phải là số lẻ.

Dạng 2. BÀI TOÁN VỀ CHỮ SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Dạng tổng quát của một số tự nhiên có nhiều chữ số:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

Các số $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ là các chữ số ($0 \leq a_i \leq 9, i \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$ và $a_n \neq 0$).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 9.8. Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$, biết:

a) $C = \overline{ab} + \overline{ba}$ là một số chính phương.

b) $M = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \overline{bc} = \overline{abc}$.

Giải

a) Có $C = \overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$.

Biết C là một số chính phương và $C = 11(a + b)$, mà 11 là một số nguyên tố nên $C : 11$.

Suy ra $(a + b) : 11 \Rightarrow a + b = 11$. Vì a, b là các chữ số, ta có bảng:

$a + b$	11							
a	2	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3	2
$\overline{ab}$	29	38	47	56	65	74	83	92
$\overline{ba}$	92	83	74	65	56	47	38	29
$\overline{ab} + \overline{ba}$	$121 = 11^2$							

Vậy $\overline{ab} \in \{29; 38; 47; 56; 65; 74; 83; 92\}$.

$$b) \text{ Ta có } M = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \overline{bc} = \frac{(\overline{bc} + 1) \cdot \overline{bc}}{2} = \overline{abc}.$$

$$\text{Suy ra } (\overline{bc} + 1) \cdot \overline{bc} = 2 \cdot \overline{abc} = 200a + 2 \cdot \overline{bc} \Rightarrow (\overline{bc} - 1) \cdot \overline{bc} = 200a = 8 \cdot 25 \cdot a.$$

Do $(\overline{bc} - 1) \cdot \overline{bc}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên

$$(8a) \cdot 25 = (8 \cdot 3) \cdot 25 = 24 \cdot 25 \Rightarrow a = 3.$$

Vậy: $a = 3$ và $\overline{bc} = 25$ (Thật vậy $M = 1 + 2 + 3 + \dots + 25 = 325$).

VÍ DỤ 9.9. Tìm số $\overline{abc}$, biết a, b, c là các chữ số khác nhau mà:

- Số $\overline{abc}$ bằng 11 lần tổng các chữ số của nó;
- Tổng $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ là một số chính phương;
- Tổng $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ bằng 777.

Giải

$$a) \text{ Có } \overline{abc} = 11 \cdot (a + b + c) \Rightarrow 100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c.$$

$$\text{Suy ra } 89a = \overline{cb} \Rightarrow a = 1 \text{ và } \overline{cb} = 89 \text{ (vì } \overline{cb} \text{ là số có hai chữ số).}$$

$$\text{Vậy } \overline{abc} = 198.$$

$$b) \text{ Tổng } S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a + b + c) = 3 \cdot 37(a + b + c).$$

Vì S là một số chính phương mà 37 là một số nguyên tố nên $S : 37$. Nhưng $a + b + c$ không chia hết cho 37. Vậy $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không là một số chính phương. Do đó không tồn tại số thoả mãn bài toán.

c) Có $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 777 \Rightarrow 111(a + b + c) = 777 \Rightarrow a + b + c = 7$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a < b < c$. Biết a, b và c là các chữ số khác nhau nên ta có $a = 1, b = 2$ và $c = 4$. Vậy $\overline{abc} = 124$ (Thật vậy: $124 + 241 + 412 = 777$).

BÀI TẬP

9.1. Tính $P = A + B + C$; $Q = A + B - C$;

$R = -A + B + C$; $S = A - B + C$.

a) Biết các đa thức: $A = 4x^2 - 2x + 1$; $B = 2x^2 + x - 4$; $C = x^2 - 4x + 2$.

b) Biết các đa thức: $A = 3a^2 - 5ab + 7b^2$; $B = 5a^2 - 7ab + 9b^2$;

$C = 7a^2 - 9ab - 11b^2$.

9.2. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $M = 2a - [(2b - 3c) - d] + a - [2b - (c - d)] + a + [2b - (c + 2d)]$.

b) $N = a + (2a + c) - 3a^2 + [(a + 3a - 7a) + c] - 2a^2$.

9.3. Tính tổng và hiệu của hai đa thức P và Q :

a) $P = [x + (y - z) - 2x] + y + z - (z - x - y)$ và $Q = x - [x - (y - z) - x]$;

b) $P = 2a^2 + ab - b^2 - (-a^2 - ab + b^2)$ và $Q = 3a^2 + b^2 - (ab - a^2)$.

9.4. Tìm đa thức P , biết :

a) $P + (3x^2 - 4xy) = 6y^2 - 9xy + x^2$;

b) $(4y^2 - 8xy) - P = 5x^2 - 12xy + 4y^2$;

c) $P - (x^2 - 2y^2 + 3z^2) + (3x^2 - y^2 + 2z^2) = 2x^2 - 3y^2 - z^2$.

9.5. Xác định a, b và c để hai đa thức sau là hai đa thức đồng nhất:

$A = ax^2 - 6x + 9x^2 - (3x^2 - 4x)$ và $B = 2x^2 - bx + c - 3$.

9.6. Biết $u_1 = a, u_2 = -b, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính u_{2012} .

9.7. Tìm số $\overline{ab}$, biết:

a) $C = \overline{ab} - \overline{ba}$ là một số chính phương;

b) $\overline{ab} = 2ab$;

c) $\overline{ab} = 8(a + b)$.

9.8. Tìm các chữ số a, b, c, biết:

$$M = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 + \dots + \overline{b,c} = \overline{ab,c}.$$

9.9. Tìm số $\overline{abc}$, biết a, b, c là các chữ số khác nhau và khác 0, mà:

a) $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$;

b) Số $\overline{abc}$ là trung bình cộng của hai số $\overline{bca}$ và $\overline{cab}$;

c) Số $\overline{abc}$ là trung bình cộng của tất cả các số có ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số a, b, c;

d) $3a + 5b = 8c$.

9.10. Tổng $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$ có là một số chính phương không?

Chuyên đề 10. ĐA THỨC MỘT BIẾN

Dạng 1. ĐA THỨC MỘT BIẾN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

- Đa thức một biến x được kí hiệu là f(x), hoặc g(x), hoặc h(x), ...
- Mỗi số cũng được coi là một đa thức một biến.
- Giá trị của đa thức một biến f(x) tại $x = a$ được kí hiệu là f(a).

2. Đa thức một biến (sau khi thu gọn) thường được sắp theo lũy thừa giảm dần hoặc tăng dần của biến.

- Bậc của đa thức một biến (khác với đa thức không) là số mũ cao nhất của biến.

3. Đa thức một biến bậc n có dạng thu gọn:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad (\text{với } a_n \neq 0)$$

$$\text{hoặc } f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n \quad (\text{với } a_n \neq 0).$$

- Các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các hệ số. Số a_0 được gọi là số hạng độc lập hay hệ số tự do.

- Đa thức $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) được gọi là nhị thức bậc nhất.
 - Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) được gọi là tam thức bậc hai.
4. Các phép tính về đa thức một biến cũng tương tự như đối với các đa thức nhiều biến.

Kiến thức bổ sung

5. Tại $x = 1$ thì $f(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$. Như vậy, tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ chính là giá trị của đa thức đó tại $x = 1$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 10.1. Cho đa thức: $f(x) = -x - 7x^2 + 6x^3 - 3x^4 - 2x^2 - 6x + 2x^4 - 1$.

- Thu gọn rồi sắp xếp các số hạng của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Xác định bậc của đa thức, hệ số tự do, hệ số cao nhất.
- Tính $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(-a)$.

Giải

a) Có $f(x) = -x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 7x - 1$.

b) Đa thức $f(x)$ có bậc 4, hệ số tự do là -1 , hệ số cao nhất là -1 .

c) Ta có:

$$f(-1) = -(-1)^4 + 6(-1)^3 - 9(-1)^2 - 7(-1) - 1 = -10;$$

$$f(0) = -1;$$

$$f(1) = -1^4 + 6.1^3 - 9.1^2 - 7.1 - 1 = -12;$$

$$f(-a) = -(-a)^4 + 6(-a)^3 - 9(-a)^2 - 7(-a) - 1 = -a^4 - 6a^3 - 9a^2 + 7a - 1.$$

VÍ DỤ 10.2.

a) Cho đa thức $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x + 1$. Tính $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(a)$, $f(-a)$.

b) Cho các đa thức $f(x) = x^3 + x + 1$ và $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

Tính $f(a) + f(-a)$ và $g(a) - g(-a)$.

Giải

a) Có: $f(0) = 1$;

$$f(1) = 1^5 - 2 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 1 + 1 = 2;$$

$$f(-1) = (-1)^5 - 2 \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - (-1) + 1 = -4;$$

$$f(a) = a^5 - 2a^4 + 3a^3 - a + 1;$$

$$f(-a) = (-a)^5 - 2(-a)^4 + 3(-a)^3 - (-a) + 1 = -a^5 - 2a^4 - 3a^3 + a + 1.$$

b) Có $f(a) + f(-a) = (a^5 + a + 1) + [(-a)^5 + (-a) + 1] = 2$;

$$g(a) - g(-a) = (a^4 - 2a^2 + 1) - [(-a)^4 - 2(-a)^2 + 1] = 0.$$

VÍ DỤ 10.3.

a) Cho đa thức $f(x) = 100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + \dots + 2x^2 + x + 1$. Tính $f(1)$.

b) Cho đa thức $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2011} + x^{2012}$. Tính $g(1)$ và $g(-1)$.

c) Cho đa thức $\varphi(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$). Tính $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ và $\varphi(-1)$.

d) Cho đa thức $h(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$). Tính $h(0)$, $h(-1)$.

Giải

a) Có $f(1) = (100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1) + 1 = 5050 + 1 = 5051$.

b) Có $g(1) = 1 + (1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^{2011} + 1^{2012}) = 2013$.

$$\begin{aligned} \text{Có } g(-1) &= 1 + [(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{2011} + (-1)^{2012}] \\ &= 1 + [(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1)] = 1 + [0 + 0 + 0 + \dots + 0] = 1. \end{aligned}$$

c) Có $\varphi(0) = 1$.

• Xét n chẵn $\Rightarrow n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}^*$), đa thức $\varphi(x)$ có $(n + 1)$ hạng tử hay $(2k + 1)$ hạng tử.

$$\varphi(1) = 1 + \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{2k} = 1 + 1 \cdot (2k) = 1 + n;$$

$$\varphi(-1) = 1 + [(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{2k}] = 1 + \underbrace{(0 + 0 + 0 + \dots + 0)}_k = 1.$$

• Xét n lẻ $\Rightarrow n = 2k - 1$ ($k \in \mathbf{N}^*$), đa thức $\varphi(x)$ có $(n + 1)$ hạng tử hay $2k$ hạng tử.

$$\varphi(1) = 1 + \underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_{2k-1} = 1 + 1 \cdot (2k - 1) = 1 + n;$$

$$\begin{aligned}\varphi(-1) &= 1 + [(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{2k-1}] \\ &= 1 + \underbrace{(0+0+0+\dots+0)}_{k-1} - 1 = 0.\end{aligned}$$

Vậy $\varphi(1) = 1 + n$; $\varphi(-1) = 1$ nếu n chẵn và $\varphi(-1) = 0$ nếu n lẻ.

d) Có $h(0) = 1$.

• Xét n chẵn $\Rightarrow n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) $\Rightarrow$ hạng tử cuối cùng khi $x = -1$ là:

$$(-1)^n x^n = (-1)^{2k}.$$

$$\begin{aligned}h(-1) &= 1 + [-(-1) + (-1)^2 - (-1)^3 + \dots + (-1)^{2k}] \\ &= 1 + \underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_{2k} = 1 + n.\end{aligned}$$

• Xét n lẻ $\Rightarrow n = 2k - 1$ ($k \in \mathbf{N}^*$) $\Rightarrow$ hạng tử cuối cùng khi $x = -1$ là:

$$(-1)^n x^n = -(-1)^{2k-1}.$$

$$\begin{aligned}h(-1) &= 1 + [-(-1) + (-1)^2 - (-1)^3 + \dots - (-1)^{2k-1}] \\ &= 1 + \underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_{2k-1} = 1 + n.\end{aligned}$$

Vậy $h(-1) = n + 1$ với mọi $n \in \mathbf{N}^*$.

VÍ DỤ 10.4. Tìm tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp, biết:

a) Đa thức $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 2x + 1)^{10}$;

b) Đa thức $g(x) = (3x^2 - 11x + 9)^{2011} \cdot (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 12x - 1)^{2012}$.

Giải

Ta biết rằng tổng các hệ số của đa thức bằng giá trị của đa thức đó tại $x = 1$.

a) Ta có: $f(1) = (2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

b) Có: $g(1) = (3 \cdot 1^2 - 11 \cdot 1 + 9)^{2011} \cdot (5 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 - 1)^{2012}$
 $= 1^{2011} \cdot (-1)^{2012} = 1.$

Dạng 2. CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.
2. Cộng hay trừ đa thức một biến tương tự như cộng hay trừ đa thức nhiều biến.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 10.5. Cho các đa thức:

$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 3;$$

$$g(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 7$$

và $h(x) = 5x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 5.$

a) Tính $f(x) - g(x)$ và $g(x) + h(x)$.

b) Tìm các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$, biết:

$$P(x) + Q(x) = f(x) - g(x) \text{ và } P(x) - Q(x) = g(x) + h(x).$$

Giải

a) Sử dụng phương pháp cộng theo cột dọc:

$f(x)$	-	$3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 3$
$g(x)$		$x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 7$
$f(x) - g(x)$		$2x^4 - 2x^2 - 4x + 4$

$g(x)$	+	$x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 7$
$h(x)$		$5x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 5$
$g(x) + h(x)$		$6x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 8x - 12$

b) Ta có

$$P(x) + Q(x) = f(x) - g(x) = 2x^4 - 2x^2 - 4x + 4.$$

$$P(x) - Q(x) = g(x) + h(x) = 6x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 8x - 12.$$

$$\text{Suy ra } 2.P(x) = 8x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 8 \Rightarrow P(x) = 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 4.$$

$$\text{Ta có } 2.Q(x) = -4x^4 - 4x^3 - 12x + 16 \Rightarrow Q(x) = -2x^4 - 2x^3 - 6x + 8.$$

VÍ DỤ 10.6.

$$\text{Cho } f(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \dots + x^2 - x + 1$$

$$\text{và } g(x) = 1 - x + x^2 - \dots + x^{2n-2} - x^{2n-1} + x^{2n}.$$

Tính giá trị của đa thức $h(x)$ tại $x = 2012$, biết $h(x) = [f(x) + g(x)].[g(x) - f(x)]$.

Giải

$$\text{Ta có } g(x) - f(x) = 0 \text{ nên } h(x) = [f(x) + g(x)].[g(x) - f(x)] = 0.$$

$$\text{Vậy } h(x) = 0 \text{ với mọi } x \text{ nên } h(2012) = 0.$$

VÍ DỤ 10.7.

$$\text{a) Tính } f(-0,5), \text{ biết } f(x) = x^5 + 0,125x^2 - 0,5.$$

$$\text{b) Tính } g(12), \text{ biết } g(x) = x^{14} - 13x^{13} + 13x^{12} - \dots + 13x^2 - 13x + 13.$$

Giải

$$\text{a) Có } f(x) = x^5 - (-0,5)^3 x^2 - 0,5 = x^5 - x^3 x^2 - 0,5 = -0,5 \text{ (thay } -0,5 = x).$$

$$\text{Vậy } f(-0,5) = -0,5.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{14} - (12+1).x^{13} + (12+1).x^{12} - \dots + (12+1).x^2 - (12+1).x + (12+1) \\ &= x^{14} - (x+1).x^{13} + (x+1).x^{12} - \dots + (x+1).x^2 - (x+1).x + (x+1) \\ &= x^{14} - x^{14} - x^{13} + x^{13} + x^{12} - \dots + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{(ta thay } 13 = 12 + 1 = x + 1). \text{ Vậy } g(12) = 1.$$

VÍ DỤ 10.8. Xác định các đa thức sau:

a) Nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$, biết $f(-1) = 1$ và $f(1) = -1$.

b) Tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$, biết $g(-2) = 9$, $g(-1) = 2$, $g(1) = 6$.

Giải

a) Có $f(1) = a + b = -1$ và $f(-1) = -a + b = 1$, suy ra $2b = 0 \Rightarrow b = 0$ và $a = -1$.

Vậy đa thức $f(x) = -x$.

b) Có $g(-2) = 4a - 2b + c = 9$; $g(-1) = a - b + c = 2$; $g(1) = a + b + c = 6$.

Suy ra $a + c = 4$ và $b = 2$

Từ $b = 2 \Rightarrow 4a + c = 13$, từ đó ta có $a = 3$ và $c = 1$.

Vậy đa thức $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

VÍ DỤ 10.9.

a) Đa thức $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$). Biết $f(0) = 0$. Chứng minh rằng $f(x) = -f(-x)$ với mọi x .

b) Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Biết $f(1) = f(-1)$. Chứng minh rằng $f(x) = f(-x)$ với mọi x .

Giải

a) Có $f(0) = b$.

Vì $f(0) = 0$ nên suy ra $b = 0$.

Vậy đa thức đã cho là $f(x) = ax$ ($a \neq 0$).

Ta lại có $ax = -a(-x)$, suy ra $f(x) = -f(-x)$ với mọi x .

b) Có $f(1) = a + b + c$ và $f(-1) = a - b + c$.

Vì $f(1) = f(-1)$ nên $a + b + c = a - b + c$, suy ra $b = 0$.

Vậy đa thức đã cho là $f(x) = ax^2 + c$ ($a \neq 0$).

Ta lại có $ax^2 + c = a(-x)^2 + c$, suy ra $f(x) = f(-x)$ với mọi x .

VÍ DỤ 10.10. Cho đa thức

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

Biết $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $x_0 \in \mathbb{Z}$ mà $f(x_0) = 0$ thì x_0 là một ước của a_0 .

Giải

$$\text{Có } f(x_0) = a_n \cdot x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0 = 0.$$

Ta lại có $a_n \cdot x_0^n, a_{n-1} \cdot x_0^{n-1}, \dots, a_2 \cdot x_0^2, a_1 \cdot x_0$ đều chia hết cho x_0 mà 0 chia hết cho x_0 , nên a_0 chia hết cho x_0 , hay x_0 là một ước của a_0 .

VÍ DỤ 10.11. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên mà $f(8!) = 2012$ và $f(9!) = 2072$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Có } f(9!) - f(8!) &= a_n \cdot ((9!)^n - (8!)^n) + a_{n-1} \cdot ((9!)^{n-1} - (8!)^{n-1}) + \dots + a_1 \cdot (9! - 8!) \\ &= 2072 - 2012 = 60. \end{aligned}$$

Ta nhận thấy $9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9$ và $8! = 1.2.3.4.5.6.7.8$ nên vế trái của đẳng thức chia hết cho 7, nhưng vế phải là 60 không chia hết cho 7.

Vậy không tồn tại đa thức $f(x)$ có các hệ số là số nguyên mà $f(8!) = 2012$ và $f(9!) = 2072$.

Dạng 3. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Nếu tại $x = a$, đa thức $f(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức $f(x)$.
 - a là một nghiệm của đa thức $f(x) \Leftrightarrow f(a) = 0$.
 - Khi $f(x) = 0$ tại $x = a$, ta nói đa thức $f(x)$ triệt tiêu tại $x = a$.
 - Tìm nghiệm của đa thức $f(x)$ là tìm các giá trị của x để $f(x) = 0$.

2. Một đa thức (khác với đa thức không) có thể có 1 nghiệm, 2 nghiệm, ... hoặc không có nghiệm nào.
- Số nghiệm của đa thức (khác với đa thức không) không vượt quá bậc của nó.
 - Một đa thức không có nghiệm (vô nghiệm) nếu $f(x) \neq 0$ với mọi x .

Kiến thức bổ sung

3. Cho đa thức $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ ($a_n \neq 0$).
- Nếu tổng các hệ số của các hạng tử bằng 0 thì đa thức có một nghiệm là 1.
Nếu $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ thì $f(1) = 0$ và 1 là một nghiệm của đa thức.
 - Nếu tổng các hệ số của các hạng tử có bậc lẻ bằng tổng các hệ số của các hạng tử có bậc chẵn thì đa thức có một nghiệm là -1 .
Nếu $a_0 + a_2 + a_4 + \dots = a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ thì $f(-1) = 0$ và -1 là một nghiệm của đa thức.
4. Nếu đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên có nghiệm nguyên thì nghiệm đó là ước của hệ số tự do.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

VÍ DỤ 10.12. Tìm nghiệm của các đa thức:

- a) $f(x) = x^3 - 2x$; b) $f(x) = x^3 + 8$;
c) $f(x) = x^2 + \sqrt{2}$; d) $f(x) = x^2 - 5x + 6$;
e) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Giải

a) Xét $f(x) = x^3 - 2x = 0$. Suy ra $x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = 0$.

Ta có $x = 0$ hoặc $x^2 - 2 = 0$.

Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $f(x)$ là $S = \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$.

b) Xét $f(x) = x^3 + 8 = 0$. Suy ra $x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $f(x)$ là $S = \{-2\}$.

c) Nhận xét $x^2 \geq 0$ và $\sqrt{2} > 0$ nên $x^2 + \sqrt{2} \geq \sqrt{2} > 0$.

Vậy đa thức $f(x) = x^2 + \sqrt{2} \neq 0$ với mọi x . Suy ra đa thức $f(x) = x^2 + \sqrt{2}$ vô nghiệm.

Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $f(x)$ là $S = \emptyset$.

d) Xét $f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } f(x) &= x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) \\ &= (x - 2)(x - 3) = 0.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $f(x)$ là $S = \{2; 3\}$.

e) Xét $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

$$\text{Ta có } f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1) = 0.$$

Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $f(x)$ là $S = \{-1\}$, do $x^2 + 1 > 0$.

VÍ DỤ 10.13.

a) Tìm giá trị của m để đa thức $f(x) = mx^2 + 2x + 8$ có một nghiệm là -1 .

b) Tìm giá trị của m để đa thức $g(x) = x^4 + 3m^2x^3 + 2mx^2 + mx - 1$ có một nghiệm là 1 .

c) Tìm giá trị của m để đa thức $h(x) = x^5 - 3x^2 + m$ có một nghiệm là -2 .

d) Cho đa thức $k(x) = d + cx + bx^2 + ax^3$ với $a \neq 0$.

- Tìm giá trị của a, b, c, d để đa thức $k(x)$ có các nghiệm là 1 và -1 .
- Tìm nghiệm thứ ba còn lại của đa thức đó.

Giải

a) Đa thức $f(x) = mx^2 + 2x + 8$ có một nghiệm là -1 khi

$$m - 2 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -6.$$

Vậy đa thức $f(x) = mx^2 + 2x + 8$ có một nghiệm là -1 khi $m = -6$.

b) Đa thức $g(x) = x^4 + 3m^2x^3 + 2mx^2 + mx - 1$ có một nghiệm là 1 khi

$$1 + 3m^2 + 2m + m - 1 = 0 \Leftrightarrow 3m(m + 1) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1; 0\}.$$

Vậy đa thức $g(x) = x^4 + 3m^2x^3 + 2mx^2 + mx - 1$ có một nghiệm là 1 khi $m \in \{-1; 0\}$.

c) Đa thức $h(x) = x^5 - 3x^2 + m$ có một nghiệm là -2 khi

$$(-2)^5 - 3 \cdot (-2)^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 44.$$

Vậy đa thức $h(x) = x^5 - 3x^2 + m$ có một nghiệm là -2 khi $m = 44$.

d) Đa thức $k(x) = d + cx + bx^2 + ax^3$ với $a \neq 0$ có nghiệm là 1 và -1 khi

$$a + b + c + d = 0 \quad \text{và} \quad a - b + c - d = 0 \Leftrightarrow a = -c \quad \text{và} \quad b = -d.$$

Vậy khi $a = -c$ và $b = -d$ thì đa thức $k(x) = d + cx + bx^2 + ax^3$ có hai nghiệm ± 1 .

Ta có đa thức $k(x) = ax^3 + bx^2 - ax - b$ có hai nghiệm ± 1 .

Xét $k(x) = ax^3 + bx^2 - ax - b = 0 \Leftrightarrow (ax + b)(x^2 - 1) = 0$, ngoài $x = \pm 1$ ta còn có một nghiệm khác là $x = -\frac{b}{a}$.

Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $k(x)$ là $S = \{\pm 1; -\frac{b}{a}\}$.

VÍ DỤ 10.14. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = x^3 - 1$ có duy nhất một nghiệm là $x = 1$.

Giải

Giả sử a là một nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - 1$ và tập hợp nghiệm của đa thức $f(x)$ là S .

Xét các khoảng giá trị của a :

- Nếu $a < 0$ thì $a^3 < 0$, do đó $f(a) = a^3 - 1 < 0$ nên khi $a < 0$ thì $a \notin S$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $0 < a^3 < 1$, do đó $f(a) = a^3 - 1 < 0$ nên khi $0 < a < 1$ thì $a \notin S$.
- Nếu $a = 1$ thì $f(1) = 1^3 - 1 = 0$ nên $1 \in S$.
- Nếu $a > 1$ thì $a^3 > 1$, do đó $f(a) = a^3 - 1 > 0$ nên khi $a > 1$ thì $a \notin S$.

Vậy đa thức $f(x) = x^3 - 1$ có nghiệm duy nhất là 1.

VÍ DỤ 10.15. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ không có nghiệm nguyên.

Giải

Nếu đa thức $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm nguyên thì nghiệm đó là ước của -1 . Mặt khác -1 có hai ước là ± 1 .

$$\text{Ta có: } f(-1) = -4(-1)^4 + 3(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) - 1 = -11 \neq 0;$$

$$f(1) = -4.1^4 + 3.1^3 - 2.1^2 + 1 - 1 = -3 \neq 0.$$

Vậy đa thức $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ không có nghiệm nguyên.

BÀI TẬP

10.1. Cho đa thức: $f(x) = 4x^2 - 7x^2 + 4x - 5x^4 - x^2 + 6x^3 + 5x^4 - 5$.

- Thu gọn rồi sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Xác định bậc của đa thức, hệ số tự do, hệ số cao nhất.
- Tính $f(-1)$, $f(0)$, $f(0,5)$, $f(1)$.

10.2. a) Cho $f(x) = 99x + 98x^2 + 97x^3 + \dots + 2x^{98} + x^{99} + 1$. Tính $f(-1)$.

b) Cho $g(x) = 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 - x^7 + \dots + x^{100}$. Tính $g(-1)$.

c) Cho $h(x) = 0,1x + 0,01x^2 + 0,001x^3 + \dots + \underbrace{0,000\dots 01}_n x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Tính $h(-1)$, $h(1)$.

10.3. Tìm tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp, biết:

a) Đa thức $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3x - 4)^{10}$;

b) Đa thức $g(x) = (3x^2 - 12x + 8)^{1111} \cdot (4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 12x + 1)^{2222}$.

10.4. Cho các đa thức: $A = -4x^3 - 2x + 2$; $B = 4x - 6x^2 + 5x^3 - 2$.

- Tính: $A + B$; $A - B$.
- Tính giá trị của A , B , $A + B$, $A - B$ với $x = 2$.

10.5. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $f(x) = x^4 - x^2$;

b) $g(x) = x^3 - x$;

$$\text{c) } h(x) = x^3 - x^2 + x - 1; \quad \text{d) } k(x) = x^2 - 7x + 12.$$

10.6. Tìm giá trị của m để :

a) Đa thức $f(x) = mx^3 + x^2 + x + 1$ có nghiệm là -1 .

b) Đa thức $g(x) = x^4 + m^2x^3 + mx^2 + mx - 1$ có nghiệm là 1 .

c) Đa thức $h(x) = x^3 - 2x^2 + m$ có nghiệm là -3 .

10.7. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

a) Tìm a, b, c, d để đa thức $f(x)$ có hai nghiệm là -2 và 2 .

b) Tìm nghiệm còn lại của $f(x)$.

10.8. Tìm các hệ số a, b, c, d của đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, biết

$$f(0) = -5; f(1) = 4; f(2) = 31; f(3) = 88.$$

10.9. Cho các đa thức bậc nhất: $f(x) = ax + b$ và $g(x) = bx + a$ (a và b khác 0). Giả sử đa thức $f(x)$ có nghiệm là x_0 , tìm nghiệm của đa thức $g(x)$.

10.10. Chứng tỏ rằng đa thức $f(x) = -8x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ không có nghiệm nguyên.

10.11. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có giá trị nguyên với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ rằng $6a$ và $2b$ là các số nguyên.

CÁC CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO

Chuyên đề 11. CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

I. CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG LÀ GÌ ?

Trong chứng minh bằng phản chứng (tiếng La tinh là *reductio ad absurdum*, có nghĩa là "thu giảm đến sự vô lý"), người ta sẽ chứng minh nếu một phát biểu nào đó xảy ra, thì dẫn đến mâu thuẫn về logic, vì vậy phát biểu đó không được xảy ra. Phương pháp này có lẽ là phương pháp phổ biến nhất trong chứng minh toán học.

II. BA BƯỚC CỦA CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

Bước 1 (phủ định kết luận): Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán.

Bước 2 (đưa đến mâu thuẫn): Từ điều giả sử trên và từ giả thiết của bài toán, ta suy ra một điều mâu thuẫn với giả thiết hay với các kiến thức đã học.

Bước 3 (khẳng định kết luận): Vậy kết luận của bài toán là đúng.

III. VÍ DỤ MINH HỌA

Một ví dụ nổi tiếng về cách chứng minh phản chứng là chứng minh $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

VÍ DỤ 11.1. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Giải

Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, ta sẽ biểu diễn được $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, $(a, b) = 1$.

Do đó $a = b\sqrt{2}$. Bình phương hai vế ta được: $a^2 = 2b^2$. Vì vế phải chia hết cho 2 nên vế trái cũng phải chia hết cho 2 (vì chúng bằng nhau và đều là số

nguyên). Do đó a^2 là số chẵn, có nghĩa là a cũng phải là số chẵn. Do vậy ta có thể viết $a = 2c$, trong đó c cũng là số nguyên. Thay vào phương trình ban đầu ta có: $(2c)^2 = 2b^2$ hay $b^2 = 2c^2$. Nhưng khi đó, tương tự như trên, b^2 chia hết cho 2 nên b phải là số chẵn. Nhưng nếu a và b đều là số chẵn thì chúng sẽ có chung một ước số là 2. Điều này trái với giả thiết $(a, b) = 1$. Vậy giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ là sai. Do đó $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

VÍ DỤ 11.2. Không dùng máy tính, hãy chứng minh $6 - \sqrt{35} < \frac{1}{10}$.

Giải

Giả sử $6 - \sqrt{35} \geq \frac{1}{10}$. Khi đó $6 - \frac{1}{10} \geq \sqrt{35}$ hay $59 \geq 10\sqrt{35}$. Bình phương hai vế ta có: $59^2 \geq 100 \cdot 35$ hay $3481 \geq 3500$, điều này là vô lí. Vậy giả sử trên là sai, do đó $6 - \sqrt{35} < \frac{1}{10}$.

VÍ DỤ 11.3. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn đồng thời các đẳng thức sau:

$$x + xyzt = 1987 \quad (1)$$

$$y + xyzt = 987 \quad (2)$$

$$z + xyzt = 87 \quad (3)$$

$$t + xyzt = 7. \quad (4)$$

Giải

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn các đẳng thức (1), (2), (3), (4). Trừ từng vế các đẳng thức này ta được:

$$x - y = 1000, \quad y - z = 900, \quad z - t = 80.$$

Suy ra x, y, z, t có cùng tính chẵn lẻ.

Nếu x, y, z, t cùng chẵn thì $x + xyzt$ là số chẵn, mâu thuẫn với (1).

Nếu x, y, z, t cùng lẻ thì $x + xyzt$ vẫn là số chẵn, mâu thuẫn với (1).

Điều này chứng tỏ giả sử trên là sai. Vậy ta có điều phải chứng minh.

VÍ DỤ 11.4. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì số $2010^n - 1$ không chia hết cho $1000^n - 1$.

Giải

Giả sử với n là số nguyên dương thì $2010^n - 1$ chia hết cho $1000^n - 1$.

Khi đó, do $1000^n - 1$ chia hết cho 3 nên $2010^n - 1$ chia hết cho 3. Điều này là vô lí vì $2010^n - 1$ không chia hết cho 3. Vậy điều giả sử $2010^n - 1$ chia hết cho $1000^n - 1$ là sai. Suy ra $2010^n - 1$ không chia hết cho $1000^n - 1$.

VÍ DỤ 11.5. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là một hoán vị tùy ý của các số $1, 2, \dots, n$ với n là số lẻ, thì tích $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$ là số chẵn.

Giải

Đầu tiên, ta có nhận xét rằng tổng của một số lẻ các số lẻ là một số lẻ. Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh rằng tồn tại một hiệu $a_k - k$ nào đó là số chẵn. Giả sử rằng tất cả các hiệu $a_k - k$ đều là số lẻ. Khi đó tổng

$$S = (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \dots + (a_n - n) = 0,$$

vì các số a_k là sắp xếp lại của các số $1, 2, \dots, n$. Nhưng theo nhận xét trên thì S là số lẻ vì là tổng của một số lẻ các số lẻ. Điều này mâu thuẫn. Do đó giả sử tất cả các hiệu $a_k - k$ đều là số lẻ là sai. Vậy sẽ có ít nhất một hiệu $a_k - k$ là số chẵn, suy ra tích $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$ là số chẵn.

- Có nhiều cách chứng minh về sự tồn tại vô hạn các số nguyên tố, ví dụ sau đưa ra cách chứng minh bằng phản chứng của Euclid cho kết quả này.

VÍ DỤ 11.6. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên tố.

Giải

Giả sử chỉ có hữu hạn các số nguyên tố là $p_1, p_2, \dots, p_n$ và giả sử $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Xét tích $A = p_1 \cdot p_2 \dots p_n + 1$. Rõ ràng $A > p_n$ nên A là hợp số, do đó A có ít nhất một ước nguyên tố p . Khi đó do $p_1, p_2, \dots, p_n$ là tất cả các số nguyên tố nên tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $p = p_i$.

Như vậy $A : p ; (p_1 \cdot p_2 \dots p_n) : p$ nên $1 : p$, mâu thuẫn.

Do đó giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là sai. Vậy có vô hạn các số nguyên tố.

VÍ DỤ 11.7. Cho số nguyên n là hợp số, $n > 1$. Chứng minh rằng n có ước nguyên tố $p \leq \sqrt{n}$.

Giải

Do n là hợp số nên n có thể viết dưới dạng $n = a.b$ với $a, b \in \mathbb{N}$, $a > 1$, $b > 1$. Bây giờ nếu cả $a > \sqrt{n}$ và $b > \sqrt{n}$ thì $ab > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, mâu thuẫn. Do đó phải có $a \leq \sqrt{n}$ hoặc $b \leq \sqrt{n}$, và do đó n có ước nguyên tố $p \leq \sqrt{n}$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét: Kết quả trong ví dụ này có thể dùng làm tiêu chuẩn để kiểm tra một số có là số nguyên tố hay không. Ví dụ: Để kiểm tra số 101 có là số nguyên tố hay không, trước tiên ta tính $\sqrt{101} \approx 10,04$. Khi đó, theo Ví dụ 11.7 thì hoặc 101 là số nguyên tố hoặc 101 chia hết cho 2, 3, 5 hoặc 7 (là các số nguyên tố nhỏ hơn 10,04). Do không có số nào trong các số 2, 3, 5, 7 là ước của 101 nên 101 là số nguyên tố.

VÍ DỤ 11.8. Chứng minh rằng:

- a) Tích của những số nguyên có dạng $4k+1$ là số có dạng $4k+1$;
- b) Tồn tại vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

Giải

- a) Vì với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ thì

$$(4k_1 + 1)(4k_2 + 1) = 16k_1k_2 + 4k_1 + 4k_2 + 1 = 4(4k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 4k_3 + 1,$$

do đó tích của những số nguyên có dạng $4k+1$ là số có dạng $4k+1$.

- b) **Nhận xét:** Mỗi số dạng $n = 4k+3$ sẽ có ít nhất một ước nguyên tố có dạng đó.

Thật vậy, rõ ràng n có ước cùng dạng với nó vì bản thân n là ước của n . Gọi p là ước nhỏ nhất trong các ước như thế. Nếu p là số nguyên tố thì nhận xét được chứng minh. Nếu p là hợp số thì p phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố lẻ (do p lẻ). Các thừa số này không thể có cùng dạng $4m+1$ (vì khi đó theo câu a, p sẽ có dạng $4m+1$). Vậy ít nhất một thừa số nguyên tố có dạng $4k+3$. Do ước của p cũng là ước của n nên n có ước nguyên tố dạng $4k+3$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh có vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

Giả sử chỉ có hữu hạn các số nguyên tố có dạng $4k+3$ là $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Xét số $N = 4p_1p_2\dots p_n - 1$ thì N có dạng $4k+3$. Theo nhận xét trên thì N có ít nhất một ước nguyên tố có dạng $4k+3$. Nhưng từ cách xác định N thì N không chia hết cho bất cứ số nguyên tố nào có dạng $4k+3$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ giả sử trên là sai. Vậy có vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

VÍ DỤ 11.9. Cho a, b là hai số thực sao cho với mọi số thực $\varepsilon > 0$ ta luôn có $a < b + \varepsilon$. Chứng minh rằng $a \leq b$.

Giải

Giả sử ngược lại là $a > b$. Khi đó $\frac{a-b}{2} > 0$. Do $a < b + \varepsilon$ với mọi $\varepsilon > 0$ nên với $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, ta có: $a < b + \frac{a-b}{2}$ hay $a < b$. Điều này mâu thuẫn với giả sử $a > b$. Suy ra giả sử $a > b$ là sai. Vậy $a \leq b$.

VÍ DỤ 11.10. Cho a, b là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y để $ax + by = ab$.

Giải

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x_0, y_0 thỏa mãn đẳng thức đã cho, tức là: $ax_0 + by_0 = ab$ (1).

Ta có: $ax_0 = ab - by_0 = b(a - y_0)$. Vì $(a, b) = 1$ nên $x_0 \vdots b$.

Do đó, tồn tại $x_1 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $x_0 = bx_1$.

Tương tự, tồn tại $y_1 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $y_0 = ay_1$. Thay vào đẳng thức (1) ta được $abx_1 + aby_1 = ab$ hay $x_1 + y_1 = 1$. Điều này vô lí vì $x_1, y_1 \geq 1$. Vậy điều giả sử trên là sai. Ta có điều phải chứng minh.

VÍ DỤ 11.11. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b, c , ta luôn tìm được số nguyên dương n sao cho số $f(n) = n^3 + an^2 + bn + c$ không phải là số chính phương.

Giải

Giả sử ngược lại, tồn tại $a, b, c \in \mathbf{Z}$ để với mọi số nguyên dương n thì $f(n)$ là số chính phương.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } f(1) &= 1 + a + b + c, & f(2) &= 8 + 4a + 2b + c, \\ f(3) &= 27 + 9a + 3b + c, & f(4) &= 64 + 16a + 4b + c \end{aligned}$$

là các số chính phương.

Nhận xét rằng: Một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1. Do đó số dư trong phép chia hiệu của hai số chính phương cho 4 chỉ có thể là 0, 1 hoặc -1.

Ta có : $f(4) - f(2) = 12a + 2b + 56 = 4(3a + 14) + 2b$, mà $2b$ là số chẵn nên theo nhận xét trên thì $2b \div 4$. (1)

Tương tự, $f(3) - f(1) = 8a + 2b + 26 = 4(2a + 6) + 2b + 2$, mà $2b + 2$ cũng là số chẵn nên $(2b + 2) \div 4$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2 \div 4$, vô lí. Do đó giả sử trên là sai. Vậy với mọi số nguyên a, b, c luôn tìm được số nguyên dương n sao cho số $f(n) = n^3 + an^2 + bn + c$ không phải là số chính phương.

BÀI TẬP

11.1. Chứng minh rằng:

- Tổng của một số hữu tỉ và một số vô tỉ là một số vô tỉ.
- Không tồn tại số hữu tỉ dương nhỏ nhất.

11.2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là tối giản.

11.3. Tích của 34 số nguyên cho trước bằng 1. Chứng minh rằng tổng của chúng không thể bằng 0.

11.4. Gọi $a_1, a_2, \dots, a_{2000}$ là các số tự nhiên thỏa mãn

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2000}} = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số a_k là số chẵn.

11.5. Số *palindrome* (còn gọi là *số xuôi ngược* hay *số đối xứng*) là số mà đọc xuôi hay đọc ngược đều như nhau, ví dụ các số 151, 1991, 1211121, 15677651 là những số đối xứng. Chứng minh rằng không tồn tại số đối xứng dương chia hết cho 10.

11.6. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có $A = n^2 + 3n - 38$ không chia hết cho 49.

- 11.7. Cho n là số tự nhiên khác 0; a là ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh rằng $n^2 + a$ không thể là số chính phương.
- 11.8. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ thì giữa n và $n!$ có ít nhất một số nguyên tố. Từ đó suy ra có vô hạn các số nguyên tố.
- 11.9. Đặt các số 1, 2, 3, ..., 25 trên một vòng tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng luôn có 3 số liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 39.
- 11.10. Cho các dãy số: 3, 7, 11, 15, 19, 23, ... (1)
và: 5, 11, 17, 23, 29, 35, ... (2)
- Chứng minh rằng trong những số hạng của mỗi dãy số trên có vô số các số nguyên tố.

Chuyên đề 12. NGUYÊN LÝ DIRICHLET

I. GIỚI THIỆU VỀ NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Dirichlet (Đi-rích-lê) (1805 – 1859) là nhà toán học người Đức, được cho là người đưa ra định nghĩa hiện đại về hàm số. Trên cơ sở quan sát thực tế, ông đã phát biểu thành một nguyên lý mang tên ông – nguyên lý Dirichlet: *Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi lồng có không quá 2 con thỏ. Nói cách khác, nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con thỏ trở lên.* Một cách tổng quát hơn, *nếu có k lồng để nhốt m con thỏ (với $m = kn + r$ ($0 < r \leq k - 1$)) thì tồn tại ít nhất một lồng có chứa từ $n + 1$ con thỏ trở lên.*

Ta có thể dễ dàng chứng minh nguyên lý Dirichlet bằng phương pháp phản chứng như sau: Giả sử không có một lồng nào chứa từ $n + 1$ con thỏ trở lên, tức là mỗi lồng chứa nhiều nhất n con thỏ, thì số con thỏ chứa trong k lồng nhiều nhất chỉ có thể là kn con. Điều này mâu thuẫn vì có m con thỏ với $m = kn + r$ ($0 < r \leq k - 1$).

Nguyên lý Dirichlet thật đơn giản, dễ hiểu nhưng được vận dụng vào giải rất nhiều bài toán trong số học, đại số, hình học về việc chỉ ra sự tồn tại của một hay nhiều đối tượng thỏa mãn một điều kiện đặt ra.

Khi sử dụng nguyên lý Dirichlet vào bài toán cụ thể, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) *Lồng* hoặc *Thỏ* hoặc cả *Lồng* và *Thỏ*.

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. CHỨNG MINH SỰ TỒN TẠI CHIA HẾT

Thông thường ta coi m số tự nhiên đã cho là m "con thỏ", các số dư trong phép chia các số tự nhiên đó cho n là những "lồng"; như vậy sẽ có n cái lồng: Lồng i ($0 \leq i < n$) gồm những số tự nhiên đã cho chia cho n dư i .

VÍ DỤ 12.1. Chứng minh rằng :

- a) Trong 2012 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho 2011 có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho 2011).
- b) Trong 2012 số tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho 2012 hoặc luôn tìm được hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Giải

a) Ta coi 2012 số tự nhiên đã cho là 2012 "con thỏ"; "lồng i " gồm các số chia cho 2011 dư i ($0 \leq i < 2011$) nên có 2011 lồng: lồng 0, lồng 1, ..., lồng 2010. Như vậy có 2011 lồng chứa 2012 con thỏ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn hai con thỏ, tức là có ít nhất hai số chia cho 2011 có cùng số dư.

b) Nếu trong 2012 số đã cho có ít nhất một số chia hết cho 2012 thì ta chọn luôn số này. Nếu không có số nào chia hết cho 2012 thì khi chia cho 2012 chỉ nhận nhiều nhất 2011 số dư khác nhau là 1, 2, ..., 2011. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài toán trên như sau :

- 1) Trong $n + 1$ số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho n).
- 2) Trong n số tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho n hoặc luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư.

VÍ DỤ 12.2. Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 20122012...2012 (gồm các số 2012 viết liên tiếp nhau) chia hết cho 2013.

Giải

Xét 2014 số sau : 2012, 20122012, ..., 2012...2012 (gồm 2014 bộ số 2012).

Đem 2014 số này lần lượt chia cho 2013, có 2014 số mà chỉ có 2013 số dư trong phép chia cho 2013 (là 0, 1, 2, ..., 2012) nên luôn tồn tại hai số chia cho

2013 có cùng số dư, chẳng hạn đó là $a = 2012 \dots 2012$ (gồm i bộ 2012) và $b = 2012 \dots 2012$ (gồm j bộ 2012) với $1 \leq i < j \leq 2014$. Khi đó

$$b - a = 2012 \dots 2012 \cdot 10^{4i} \text{ (gồm } j - i \text{ bộ 2012) sẽ chia hết cho 2013.}$$

Lại có $\text{ƯCLN}(10^{4i}, 2013) = 1$ nên số $2012 \dots 2012$ (gồm $j - i$ bộ 2012) sẽ chia hết cho 2013. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây "thỏ" là số có dạng $2012 \dots 2012$, "lông" là số dư trong phép chia cho 2013).

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là chọn ra 2014 ($= 2013 + 1$) số tự nhiên có dạng đã cho. Từ đó ta có thể phát biểu nhiều bài toán tương tự, chẳng hạn như: Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng $111 \dots 1$ chia hết cho 29.

VÍ DỤ 12.3. Cho sáu số tự nhiên a, b, c, d, e, g . Chứng minh rằng trong sáu số ấy, tồn tại một số chia hết cho 6 hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho 6.

Giải

Trường hợp có một số bằng 0 thì ta chọn số 0 thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Trường hợp sáu số đều lớn hơn 0. Xét 6 số sau

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a + b$$

$$S_3 = a + b + c$$

$$S_4 = a + b + c + d$$

$$S_5 = a + b + c + d + e$$

$$S_6 = a + b + c + d + e + g.$$

Đem mỗi số này chia cho 6 ta nhận được số dư thuộc tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Nếu tồn tại S_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) chia hết cho 6 thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu không có S_i nào chia hết cho 6 thì ta có 6 số chia cho 6 chỉ nhận 5 loại số dư khác nhau (1, 2, 3, 4, 5); theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia cho 6 có cùng số dư, chẳng hạn là S_2 và S_5 do đó hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 6, tức là $c + d + e$ chia hết cho 6. Bài toán đã được chứng minh.

(Ở đây "thỏ" là các số S_i , "lông" là số dư trong phép chia cho 6).

Nhận xét. Ta có thể phát biểu bài toán tổng quát sau:

Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho n hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho n .

VÍ DỤ 12.4. Chứng minh rằng :

a) Trong n số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho n .

b) Trong 39 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11.

Giải

a) Giả sử không tìm được số nào trong n số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho n . Khi đó n số này chia cho n chỉ nhận được nhiều nhất là $n - 1$ số dư khác nhau ($1, 2, 3, \dots, n - 1$), theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số chia cho n có cùng số dư, chẳng hạn là a và b với $a > b$, khi đó $a - b$ chia hết cho n , điều này mâu thuẫn với $0 < a - b < n$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Lấy 20 số tự nhiên liên tiếp đầu của dãy, ta luôn tìm được một số có chữ số hàng đơn vị là 0 và có chữ số hàng chục khác 9.

Giả sử số đó là N và tổng các chữ số của N là s . Khi đó 11 số $N, N + 1, N + 2, N + 3, \dots, N + 9, N + 19$ sẽ nằm trong 39 số đã cho. Vì N tận cùng bằng 0 nên tổng các chữ số của $N, N + 1, N + 2, \dots, N + 9$ lần lượt bằng $s, s + 1, s + 2, \dots, s + 9$. Vì N tận cùng bằng 0 và có chữ số hàng chục khác 9 nên tổng các chữ số của $N + 10$ bằng $s + 1$, tổng các chữ số của $N + 19$ bằng $s + 10$.

11 số của dãy $N, N + 1, N + 2, N + 3, \dots, N + 9, N + 19$ có tổng các chữ số lần lượt là $s, s + 1, s + 2, s + 3, \dots, s + 9, s + 10$.

Trong 11 số tự nhiên liên tiếp $s, s + 1, s + 2, s + 3, \dots, s + 9, s + 10$ luôn tìm được một số chia hết cho 11. Chẳng hạn số đó là $s + i$ ($0 \leq i \leq 10$): Nếu $0 \leq i \leq 9$ thì ta chọn được số $N + i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán; nếu $i = 10$ thì ta chọn được số $N + 19$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Mấu chốt để giải bài toán câu b) là phải tìm ra 11 số trong 39 số đã cho có tổng các chữ số thứ tự là 11 số tự nhiên liên tiếp, đồng thời sử dụng kết quả câu a).

VÍ DỤ 12.5. Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kì trong chúng không chia hết cho hiệu của nó ?

Giải

Nhận thấy, nếu hai số chia cho 3 cùng dư 2 thì hiệu của chúng chia hết cho 3, còn tổng của chúng chia cho 3 dư 1; nên tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.

Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2012, sẽ có 671 số chia cho 3 dư 2 là các số có dạng $3k + 2$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 670$). Khi đó hai số bất kì trong 671 số này có tổng chia 3 dư 1, hiệu chia hết cho 3, nên tổng không chia hết cho hiệu của chúng. Ta sẽ chứng minh rằng chọn được nhiều nhất là 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Thật vậy, nếu chọn 672 ($= 671 + 1$) số trong các số từ 1 đến 2012, thì trong 672 số này luôn tìm được a, b ($a > b$) sao cho $a - b \leq 2$ (Thật vậy, giả sử ngược lại thì hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong các số đã chọn sẽ không nhỏ hơn $3 \cdot 671 = 2013$. Điều này mâu thuẫn với hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá $2012 - 1 = 2011$), nghĩa là $a - b$ bằng 1 hoặc 2.

- Nếu $a - b = 1$ thì hiển nhiên $a + b$ chia hết cho $a - b$ ($= 1$).
- Nếu $a - b = 2$ thì $a + b$ là số chẵn nên $a + b$ chia hết cho $a - b$ ($= 2$).

Như vậy từ 2012 số đã cho không thể chọn được hơn 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán. Suy ra số lượng lớn nhất các số phải tìm là 671.

Dạng 2. BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT CỦA CÁC PHẦN TỬ TRONG TẬP HỢP

Thông thường ta phải lập ra những tập hợp có tính chất cần thiết rồi sử dụng nguyên lí Dirichlet để chứng tỏ có hai phần tử của hai tập hợp bằng nhau.

VÍ DỤ 12.6. Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được ba số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

Giải

Gọi sáu số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ với $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_6 < 10$.

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ gồm 5 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1\}$ gồm 5 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 9 phần tử $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $5 + 5 = 10$.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B, tức là $a_m = a_n - a_1$, do đó $a_n = a_m + a_1$.

Ba số a_m, a_n, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_1$ và $a_n \neq a_1$ theo cách đặt các tập hợp A và B, còn $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$, trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_n, a_1 trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$ (đpcm).

(Ở đây, có 10 "thỏ" là 10 số $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1$, và có 9 "lông" là 9 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Nhận xét. Để giải bài toán này, ta cần tạo ra hai tập hợp gồm các phần tử nhỏ hơn 10 và tổng số phần tử của hai tập hợp phải không nhỏ hơn 10. Từ đó suy ra tồn tại hai phần tử của hai tập hợp bằng nhau.

VÍ DỤ 12.7. Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Giải

Giả sử 700 số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_{700}$. Ta xét các tập hợp sau:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{700}\};$$

$$B = \{a_1 + 6, a_2 + 6, \dots, a_{700} + 6\};$$

$$C = \{a_1 + 9, a_2 + 9, \dots, a_{700} + 9\}.$$

Tổng số phần tử của ba tập hợp A, B, C là $700 \cdot 3 = 2100$, trong đó mỗi phần tử đều không vượt quá $2006 + 9 = 2015$, mà $2100 > 2015$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai phần tử bằng nhau. Vì trong mỗi tập hợp A, B, C có các phần tử đôi một khác nhau nên hai phần tử bằng nhau đó phải thuộc hai tập hợp: A và B, hoặc A và C, hoặc B và C.

- Nếu hai phần tử thuộc A và B, chẳng hạn $a_i = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 6$.
- Nếu hai phần tử thuộc A và C, chẳng hạn $a_i = a_j + 9$ suy ra $a_i - a_j = 9$.
- Nếu hai phần tử thuộc B và C, chẳng hạn $a_i + 3 = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 3$.

Như vậy luôn tồn tại hai số thuộc tập hợp A có hiệu là 3, 6, 9. Ta được điều phải chứng minh.

(Ở đây 2100 "thỏ" là 2100 phần tử của ba tập hợp A, B, C; 2015 "lông" là các số từ 1 đến 2015).

Nhận xét. Ta còn có kết quả mạnh hơn như sau :

Cho X là tập hợp gồm 505 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Chứng minh.

Gọi A là tập hợp các số thuộc X mà chia hết cho 3, gọi B là tập hợp các số thuộc X mà chia cho 3 dư 1, gọi C là tập hợp các số thuộc X mà chia cho 3 dư 2.

Có 505 số xếp vào ba tập hợp, mà $505 = 3 \cdot 168 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một tập hợp có chứa từ 169 số trở lên.

Trong tập hợp này, hai số bất kì có hiệu là một bội của 3. Tồn tại hai số x, y có hiệu nhỏ hơn 12. Thật vậy, nếu mọi số trong tập hợp này đều có hiệu không nhỏ hơn 12 thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn $12 \cdot 168 = 2016 > 2006$, trái với đề bài.

Vậy trong tập hợp X tồn tại hai phần tử x, y mà $x - y \in E$.

VÍ DỤ 12.8. Cho hai tập hợp số nguyên dương phân biệt mà mỗi số đều nhỏ hơn n . Chứng minh rằng nếu tổng số phần tử của hai tập hợp không nhỏ hơn n thì có thể chọn được trong mỗi tập hợp một phần tử sao cho tổng của chúng bằng n .

Giải

Giả sử hai tập hợp số nguyên dương đã cho là

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \quad \text{và} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$$

với $a_i < n$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $b_j < n$ ($j = 1, 2, \dots, k$) và $m + k \geq n$.

Xét tập hợp $C = \{n - b_1, n - b_2, \dots, n - b_k\}$.

Nhận thấy, có tất cả $n - 1$ số nguyên dương phân biệt nhỏ hơn n , các phần tử của A và C đều nhỏ hơn n và tổng số phần tử của A và C không nhỏ hơn n . Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai phần tử bằng nhau, chúng không cùng thuộc A và C, do đó một phần tử thuộc A và một phần tử thuộc C, tức là tồn tại hai số a_p và $n - b_q$ mà $a_p = n - b_q \Leftrightarrow a_p + b_q = n$ (điều phải chứng minh).

(Ở đây coi $m + k$ "thỏ" là các số nguyên dương thuộc tập hợp A hoặc C, $n - 1$ "lông" là các số nguyên dương từ 1 đến $n - 1$).

Dạng 3. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN BẢNG Ô VUÔNG

Một bảng ô vuông kích thước $n \times n$ gồm có n dòng, n cột và 2 đường chéo. Mỗi dòng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều có n ô vuông.

Một bảng các ô vuông kích thước $m \times n$ gồm m dòng và n cột.

VÍ DỤ 12.9. Cho một bảng ô vuông kích thước 5×5 . Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số $-1, 0, 1$; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Giải

Bảng ô vuông kích thước 5×5 có 5 dòng, 5 cột, 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng của các số được tính theo dòng, theo cột và theo đường chéo. Mỗi dòng, cột và đường chéo đều có ghi 5 số thuộc tập $\{-1; 0; 1\}$. Vì vậy giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ có 11 phần tử. Có 12 tổng nhận trong tập 11 giá trị khác nhau nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng nhận cùng một giá trị. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây "thỏ" là tổng nên có 12 "thỏ", "lồng" là giá trị của tổng nên có 11 "lồng").

Nhận xét. Với cách giải tương tự, ta có bài toán tổng quát sau:

Cho một bảng ô vuông kích thước $n \times n$. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số $-1, 0, 1$; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

VÍ DỤ 12.10. Trên bảng ô vuông kích thước 8×8 , ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

Giải

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai số này là 63.

Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).

Ta có $63 = 14 \cdot 4 + 7$ nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn $4 + 1 = 5$. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây, "thỏ" là hiệu của hai số trong 64 số (từ 1 đến 64) nên có 63 thỏ; "lồng" là số cặp ô vuông kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nên có nhiều nhất là 14 lồng).

Nhận xét.

• Mẫu chốt của bài toán là quan tâm đến hai ô vuông ghi số nhỏ nhất (số 1) và số lớn nhất (số 64) sẽ có hiệu lớn nhất là 63; đồng thời xét từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 chỉ cần tối đa là $(8 - 1) + (8 - 1) = 14$ ô. Ở đây ta đã vận dụng nguyên lý Dirichlet tổng quát: Có m thỏ, nhốt vào k lồng mà $m = kn + r$ ($1 \leq r \leq k - 1$) thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn $n + 1$ con thỏ.

• Nếu thay bởi bảng chữ nhật gồm 8×10 ô vuông, trên đó ghi các số từ 1 đến 80 không lặp một cách tùy ý thì kết quả của bài toán còn đúng không? Hãy chứng minh.

Dạng 4. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TẾ

Khi chứng minh sự tồn tại một số đối tượng thỏa mãn điều kiện nào đó, ta thường sử dụng nguyên lý Dirichlet.

Điều quan trọng nhất là phải xác định được "thỏ" và "lồng".

VÍ DỤ 12.11. Một tổ học tập có 10 học sinh. Khi viết chính tả, cả tổ đều mắc lỗi, trong đó bạn Bình mắc nhiều lỗi nhất (mắc 5 lỗi). Chứng minh rằng trong tổ ấy có ít nhất 3 bạn đã mắc một số lỗi bằng nhau.

Giải

Ta coi "thỏ" là học sinh (trừ bạn Bình) nên có 9 thỏ; "lồng" là số lỗi chính tả học sinh mắc phải nên có 4 lồng: Lồng i gồm những học sinh mắc i lỗi ($i = 1, 2, 3, 4$). Có 9 thỏ nhốt vào 4 lồng, mà $9 = 4 \cdot 2 + 1$, nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn $2 + 1 = 3$ thỏ, tức là có ít nhất 3 bạn mắc một số lỗi bằng nhau.

VÍ DỤ 12.12. Ở một vòng chung kết cờ vua có 8 đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ đều phải gặp đủ 7 đấu thủ còn lại, mỗi người một trận. Chứng minh rằng, trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Giải

Ta coi "thỏ" là đấu thủ nên có 8 thỏ; "lồng" là số trận đấu của đấu thủ nên có 8 lồng: "lồng i " gồm các đấu thủ đã đấu i trận (với $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$).

Ta thấy lồng 0 và lồng 7 không đồng thời tồn tại, vì nếu có một đấu thủ chưa đấu trận nào thì sẽ không có đấu thủ nào đã đấu đủ 7 trận, cũng như nếu có đấu thủ đã đấu đủ 7 trận thì không có ai chưa đấu trận nào.

Như vậy, có 7 lồng chứa 8 con thỏ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một lồng chứa không ít hơn 2 con thỏ, tức là trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu luôn tìm được 2 đấu thủ đã đấu cùng một số trận.

VÍ DỤ 12.13. Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài : bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Giải

Gọi 6 nhà khoa học là A, B, C, D, E, F.

Nhà khoa học A sẽ viết thư trao đổi với 5 nhà khoa học còn lại về 2 đề tài, có $5 = 2 \cdot 2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 nhà khoa học (chẳng hạn là B, C, D) được nhà khoa học A trao đổi về cùng một đề tài (chẳng hạn đề tài môi trường).

Trong ba nhà khoa học B, C, D nếu có hai người nào cũng trao đổi về đề tài môi trường (chẳng hạn là B, C) thì ta chọn được A, B, C cùng trao đổi về một đề tài.

Nếu trong ba nhà khoa học B, C, D không có hai người nào trao đổi về đề tài môi trường thì họ sẽ trao đổi với nhau về đề tài dân số, ta sẽ chọn được B, C, D cùng trao đổi về một đề tài.

(Ở đây coi nhà khoa học (trừ A) là "thỏ" nên có 5 thỏ, coi đề tài là "lồng" nên có 2 lồng và vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát).

Dạng 5. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỰ SẮP XẾP

Các bài toán về sắp xếp chỗ, phân công công việc không đòi hỏi nhiều về kiến thức và kĩ năng tính toán, chúng chủ yếu kết hợp suy luận logic để xét các khả năng có thể xảy ra với nguyên lí Dirichlet.

VÍ DỤ 12.14. Có 20 người quyết định đi bơi thuyền bằng 10 chiếc thuyền đôi. Biết rằng nếu hai người A và B mà không quen nhau thì tổng số những người quen của A và những người quen của B không nhỏ hơn 19. Chứng minh rằng có thể phân công vào các thuyền đôi sao cho mỗi thuyền đều là hai người quen nhau.

Giải

Nếu trong 20 người không có hai người nào quen nhau thì tổng số người quen của hai người bất kì là 0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là tổng số người quen của hai người không nhỏ hơn 19. Vậy tồn tại một số cặp quen nhau.

Ta xếp mỗi cặp quen nhau đó vào một thuyền đôi. Gọi k là số lượng thuyền lớn nhất mà trong đó ta có thể xếp được những cặp quen nhau vào một thuyền và kí hiệu thuyền thứ i xếp hai người A_i và B_i quen nhau ($1 \leq i \leq k$).

Giả sử $k \leq 9$, kí hiệu tập hợp M gồm những người chưa được xếp vào thuyền nào, tức là gồm những người đôi một không quen nhau. Chọn hai người A và B trong tập hợp M . Theo bài ra thì tổng số người quen của A và số người quen của B không nhỏ hơn 19 và những người quen A hoặc quen B đã được xếp vào thuyền rồi. Như vậy có 19 người quan hệ quen A hoặc B được xếp vào nhiều nhất là 9 thuyền đôi (trừ 1 thuyền vì A, B chưa được xếp), mà $19 = 9 \cdot 2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một thuyền chở 2 người quen cả A và B . Nhưng khi đó ta có thể xếp lại như sau : trong $k - 1$ thuyền đầu tiên vẫn giữ nguyên, còn thuyền thứ k xếp A_k và B , còn thuyền thứ $k + 1$ xếp A và B_k . Điều này mâu thuẫn với giả sử.

Theo cách xếp này ta tiếp tục xếp đến hết 10 thuyền sao cho trong mỗi thuyền hai người đều quen nhau.

Dạng 6. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

VÍ DỤ 12.15. Chứng minh rằng trong ba số thực bất kì luôn tìm được hai số có tích không âm.

Giải

Ta coi "thỏ" là số thực nên có 3 con thỏ; coi "lồng" là loại số (số không âm hoặc số âm) nên có 2 lồng. Có 3 con thỏ nhốt vào 2 lồng nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 2 thỏ chứa trong một lồng, tức là tồn tại hai số không âm (hoặc hai số âm), khi đó tích của chúng sẽ là số không âm.

VÍ DỤ 12.16. Chứng minh rằng trong bốn số khác nhau tùy ý được lấy ra từ tập hợp

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 3^4\},$$

có ít nhất hai số x, y thoả mãn $0 < \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} < 1$.

Giải

Ta có $\forall x \in A$ thì $1 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3$.

Xét ba tập hợp : $B = \{b \mid 1 \leq b < 2\}$; $C = \{c \mid 2 \leq c < 3\}$ và $D = \{3\}$. Với 4 số có dạng $\sqrt[4]{x}$ (với $x \in A$) sẽ thuộc vào một trong ba tập hợp B, C, D ở trên nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai số thuộc cùng một tập hợp, tập hợp đó là B hoặc C . Gọi hai số đó là $\sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{y}$, ta có $0 < \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} < 1$.

BÀI TẬP

- 12.1. Trong một cửa hàng hoa quả có 28 sọt cam gồm ba loại cam khác nhau, biết rằng mỗi sọt chỉ chứa một loại cam. Chứng minh rằng ít nhất có 10 sọt chứa cùng một loại cam.
- 12.2. Trong một lớp học có 50 học sinh, biết rằng tất cả học sinh đều sinh cùng một năm. Chứng minh rằng có không dưới 5 bạn sinh cùng một tháng.
- 12.3. Cho 12 số có hai chữ số. Chứng minh rằng trong 12 số đó có hai số mà hiệu của chúng là số có hai chữ số giống nhau.
- 12.4. Chứng minh rằng trong 27 số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 50.
- 12.5. Cho $n + 1$ số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn $2n$. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra 3 số mà một số bằng tổng của hai số còn lại.
- 12.6. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0, ta đều tìm được số tự nhiên biểu diễn bởi các chữ số 1 và 0, chia hết cho n .
- 12.7. Hỏi có thể tìm được một số tự nhiên là lũy thừa của 9 mà có tận cùng là 0001 ?
- 12.8. Chứng minh định lí: Nếu m, n nguyên tố cùng nhau thì luôn tìm được số tự nhiên k sao cho $m^k - 1$ chia hết cho n .
- 12.9. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n khác 0 thỏa mãn $(13579^n - 1)$ chia hết cho 3^{13579} .
- 12.10. Viết các số tự nhiên từ 1 đến 10 thành một hàng ngang theo thứ tự tùy ý, tiếp đó cộng mỗi một số với chỉ số thứ tự của nó ta sẽ được 10 tổng. Chứng minh rằng có ít nhất hai tổng có chữ số tận cùng giống nhau.
- 12.11. Có một người ngày nào cũng chơi cờ, nhưng một tuần chơi không quá 13 ván. Chứng minh rằng có một số ngày liên tục mà tổng số ván cờ người này chơi đúng bằng 20.
- 12.12. Có 6 bạn học sinh thi đấu bóng bàn với nhau, mỗi người phải đấu đúng một trận với mỗi bạn khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào giữa các trận đấu cũng có 3 bạn trong đó từng cặp đã đấu với nhau rồi hoặc chưa đấu với nhau trận nào.
- 12.13. Cho A là tập hợp gồm 500 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 1900. Chứng minh rằng trong tập A luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{2; 4; 6; 8\}$.

- 12.14.** Trên bảng 9×9 ô vuông, ta ghi các số tự nhiên từ 1 đến 81, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.
- 12.15.** Trên bảng 10×12 ô vuông, ta ghi các số tự nhiên từ 1 đến 120, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 6.
- 12.16.** Hãy tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho giữa mỗi bộ n số tự nhiên có hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 5.
- 12.17.** Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2000. Hỏi có thể chọn ra nhiều nhất là bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kì trong chúng không chia hết cho hiệu của nó?
- 12.18.** Chứng minh rằng với 6 người tùy ý luôn có thể chọn ra 3 người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau.
- 12.19.** Chứng minh rằng trong 2012 số khác nhau tùy ý được lấy ra từ tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots, 2011^{2012}\}$,
có ít nhất hai số x, y thỏa mãn $0 < \left| \sqrt[2012]{x} - \sqrt[2012]{y} \right| < 1$.

Chuyên đề 13. TRÒ CHƠI VÀ CÂU ĐỐ

VÍ DỤ 13.1. Trò chơi “LẤY QUÂN BÀI CUỐI CÙNG”.

Một bộ bài có 43 quân bài. Hai người lần lượt lấy từ 1 đến a quân bài, số a được quy định trong từng ván bằng cách rút thăm, $a \in \{2; 3; 4; 5\}$. Ai lấy được quân bài cuối cùng thì người đó thắng.

Hãy nêu cách chơi để người đi trước là người thắng cuộc.

Lưu ý:

- Xác định ai là người đi trước bằng cách rút thăm.
- Để cuộc chơi thêm sinh động, trong 43 quân bài có hai quân bài ghi chữ “May mắn”. Ai rút được quân bài “May mắn” được quyền đi tiếp một lượt nữa (nếu muốn).

Giải

Người thắng cuộc là người luôn để lại cho đối phương số quân bài là bội của $a + 1$. Sau đó, nếu đối phương lấy x quân bài ($1 \leq x \leq a$) thì mình lấy $a + 1 - x$ quân bài.

Cụ thể là người đi trước cần chơi như sau :

a (Số quân bài nhiều nhất được lấy)	Bội lớn nhất của $a + 1$	Số quân bài lấy lần đầu tiên	Số quân bài lấy sau khi đối phương lấy x quân
2	42	1	$3 - x$
3	40	3	$4 - x$
4	40	3	$5 - x$
5	42	1	$6 - x$

Lưu ý:

– Để cuộc chơi đa dạng, số quân bài có thể thay đổi : thay 43 quân bài bởi 42, 41, 40,... quân bài.

– Trò chơi rèn luyện khả năng tính toán và tư duy linh hoạt.

VÍ DỤ 13.2. Thoát ra từ lâu đài.

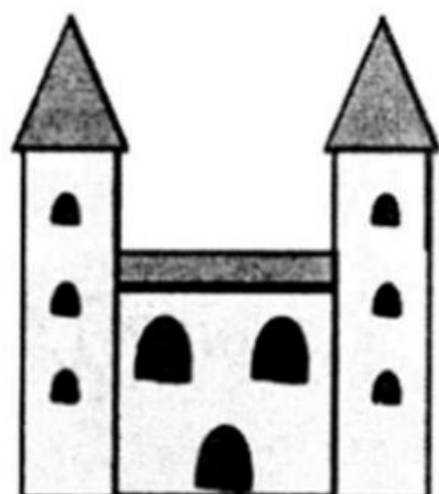
Cậu bé A bị nhốt trong một phòng ở tầng trên của một tòa lâu đài (h.13.1). Phòng này cũng như tất cả các phòng khác đều bị khóa – mỗi phòng theo một số, thực ra mỗi số này là một bài toán. Em hãy giúp cậu bé thoát ra khỏi lâu đài bằng cách tìm mã khóa của từng phòng (tức là tìm đáp số của từng bài toán).

Sau khi biết mã khóa của phòng đầu tiên, cần biết mã khóa phòng liền kề,... cho đến phòng cuối cùng.

*** Phòng thứ nhất**

Có một nhóm các quân súc sắc, ba trong các quân súc sắc đó xếp thành một hàng. Tổng số chấm ở các mặt trên của ba quân súc sắc này bằng 8. Tổng số chấm ở các mặt dưới (không nhìn thấy) của ba quân súc sắc này là bao nhiêu ? (Hình 13.2 chỉ có tính chất minh họa).

Đáp số tìm được là mã khóa của phòng thứ nhất.



Hình 13.1



Hình 13.2

** Phòng thứ hai*

Có năm tấm bìa, mỗi tấm bìa ghi một số. Đặt úp mặt năm tấm bìa xuống phía dưới (h.13.3).



Hình 13.3

Xét các tấm bìa theo thứ tự từ trái sang phải. Biết rằng :

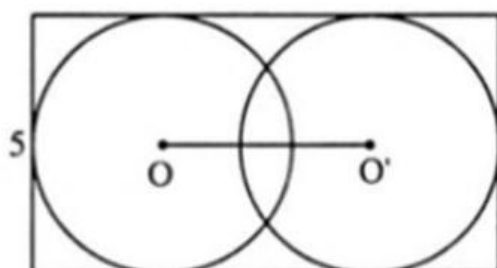
- Tổng các số trên hai tấm bìa đầu là mã khóa của phòng thứ nhất;
- Tổng các số trên hai tấm bìa thứ hai và thứ ba là 9;
- Tổng các số trên hai tấm bìa thứ ba và thứ tư là 11;
- Tổng các số trên hai tấm bìa thứ tư và thứ năm là 16;
- Tổng các số trên hai tấm bìa thứ năm và thứ nhất là 17.

Số ở tấm bìa cuối cùng là bao nhiêu ? Đây là mã khoá của phòng thứ hai.

** Phòng thứ ba*

Bên trong một hình chữ nhật có hai hình tròn giao nhau (h.13.4).

Chiều dài của hình chữ nhật bằng mã khóa của phòng thứ hai, chiều cao của nó là 5. Khoảng cách giữa hai tâm của các hình tròn là bao nhiêu ?



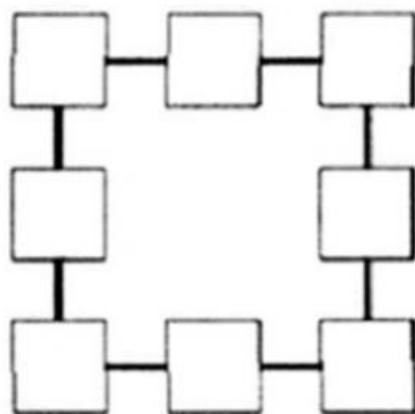
Hình 13.4

Bình phương kết quả và trừ đi 1 là mã khóa của phòng thứ ba.

** Phòng thứ tư*

Trên mặt sàn của căn phòng có một hình vẽ (h.13.5). Cần xếp tám số tự nhiên từ 1 đến 8 vào các ô vuông sao cho khi cộng các số trên mỗi cạnh thì bằng mã khóa của phòng thứ ba.

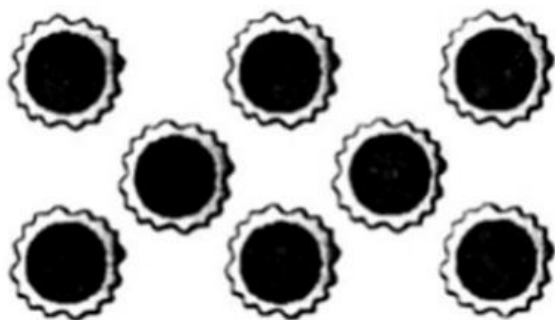
Để tìm mã khóa của phòng thứ tư, hãy cộng bốn số ở các góc của hình vẽ rồi trừ đi 10.



Hình 13.5

** Phòng thứ năm*

Trên một chiếc bàn, có một số khay nhỏ để làm bánh. Người ta xếp bánh vào một số khay (h.13.6). Nếu xếp vào một số khay mỗi khay 8 chiếc bánh thì còn thừa 3 chiếc bánh. Nếu xếp vào một số khay mỗi khay 7 chiếc bánh thì còn thừa 5 chiếc bánh. Nếu xếp vào một số khay mỗi khay 3 chiếc bánh thì còn thừa 1 chiếc bánh.



Hình 13.6

Biết số bánh chưa đến 100.

Có tất cả bao nhiêu chiếc bánh ? Đó là mã khóa của phòng thứ năm.

** Câu hỏi cuối cùng*

Trước khi rời lâu đài, cần phải trả lời câu hỏi :

Tên thực của A là gì ? Dùng bảng chữ cái tiếng Anh và thay 1 = A, 2 = B, 3 = C, ..., 26 = Z để chuyển toàn bộ mã khóa sang chữ. Lấy các mã khoá dạng chữ thứ tự của các phòng 5, 2, 1, 3, 4 xếp lại, ta được tên thực của A.

Giải

** Phòng thứ nhất*

Để ý rằng, tổng số chấm trên hai mặt đối diện của một quân súc sắc luôn bằng 7. Do tổng số chấm ở các mặt trên của ba quân súc sắc là 8 nên tổng số chấm ở các mặt dưới của ba quân súc sắc này là :

$$21 - 8 = 13.$$

Mã khóa của phòng thứ nhất là 13.

** Phòng thứ hai*

Gọi các số ghi trên các tấm bìa thứ nhất, thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm lần lượt là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Ta có :

$$a_1 + a_2 = 13$$

$$a_2 + a_3 = 9$$

$$a_3 + a_4 = 11$$

$$a_4 + a_5 = 16$$

$$a_5 + a_1 = 17$$

$$\text{nên } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{13 + 9 + 11 + 16 + 17}{2} = 33.$$

$$\text{Do đó } a_5 = 33 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 33 - (13 + 11) = 9.$$

Mã khoá của phòng thứ hai là 9.

** Phòng thứ ba*

Bán kính của các đường tròn là 2,5. Chiều dài của hình chữ nhật là 9.

Ta có khoảng cách giữa hai tâm là $OO' = 9 - 5 = 4$.

Mã khóa của phòng thứ ba là $4^2 - 1 = 15$.

** Phòng thứ tư*

Gọi các số ở tám ô là a, b, c, d, e, g, h, i (h.13.7).

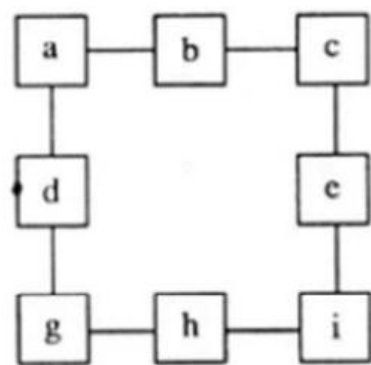
Ta có :

$$a + b + c = 15$$

$$g + h + i = 15$$

$$a + d + g = 15$$

$$c + e + i = 15.$$



Hình 13.7

Suy ra $(a + c + g + i) + (a + b + c + d + e + g + h + i) = 60$.

Tổng tám số a, b, c, d, e, g, h, i bằng : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$.

Nên $a + c + g + i = 60 - 36 = 24$.

Mã khóa của phòng thứ tư là $24 - 10 = 14$.

Lưu ý. Ta có thể tìm được các số ở mỗi ô như sau :

Trong bốn ô ở góc phải có số 8, vì nếu không có số 8 thì

$$a + c + g + i \leq 7 + 6 + 5 + 4 = 22 < 24.$$

Chẳng hạn $g = 8$.

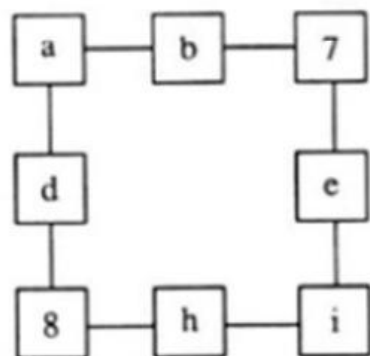
Trong ba ô ở góc còn lại, phải có số 7,

vì nếu không có số 7 thì

$$a + c + g + i \leq 8 + 6 + 5 + 4 = 23 < 24.$$

Ta có $c = 7$ (không thể $a = 7$ hay

$i = 7$). Ta có hình 13.8.

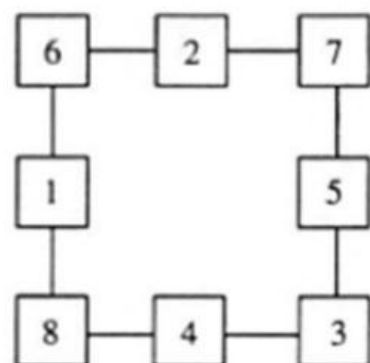


Hình 13.8

$a + i = 24 - 8 - 7 = 9$ nên a và i có thể là 6 và 3 hoặc 5 và 4.

Nếu $a = 6$ và $i = 3$ ta có hình 13.9 thỏa mãn bài toán.

Trường hợp $a = 5, i = 4$ không xảy ra (vì khi đó $e = 4$).



Hình 13.9

* Phòng thứ năm

Gọi số bánh là a .

Vì a chia cho 8 dư 3, chia cho 3 dư 1 nên $a + 5$ chia hết cho 8 và cho 3.

Suy ra $(a + 5) : 24$, tức là $a = 24k - 5$ ($k \in \mathbf{N}^*$).

Do $a < 100$ nên $a \in \{19; 43; 67; 91\}$.

Trong bốn số trên, chỉ có 19 chia cho 7 dư 5.

Vậy số bánh là 19. Mã khóa của phòng thứ năm là 19.

Đối chiếu với bảng chữ cái tiếng Anh, ta có :

13 là M

9 là I

15 là O

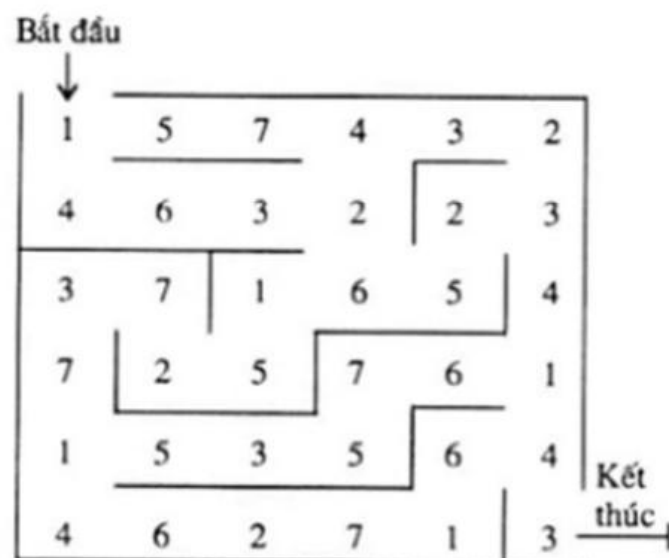
14 là N

19 là S.

Tên cậu bé A là SIMON.

BÀI TẬP

13.1. Hãy tìm đường đi trong mê lộ (h.13.10) bắt đầu từ góc trái phía trên và kết thúc ở góc phải phía dưới sao cho tổng các số ở các ô đi qua đúng bằng 100.

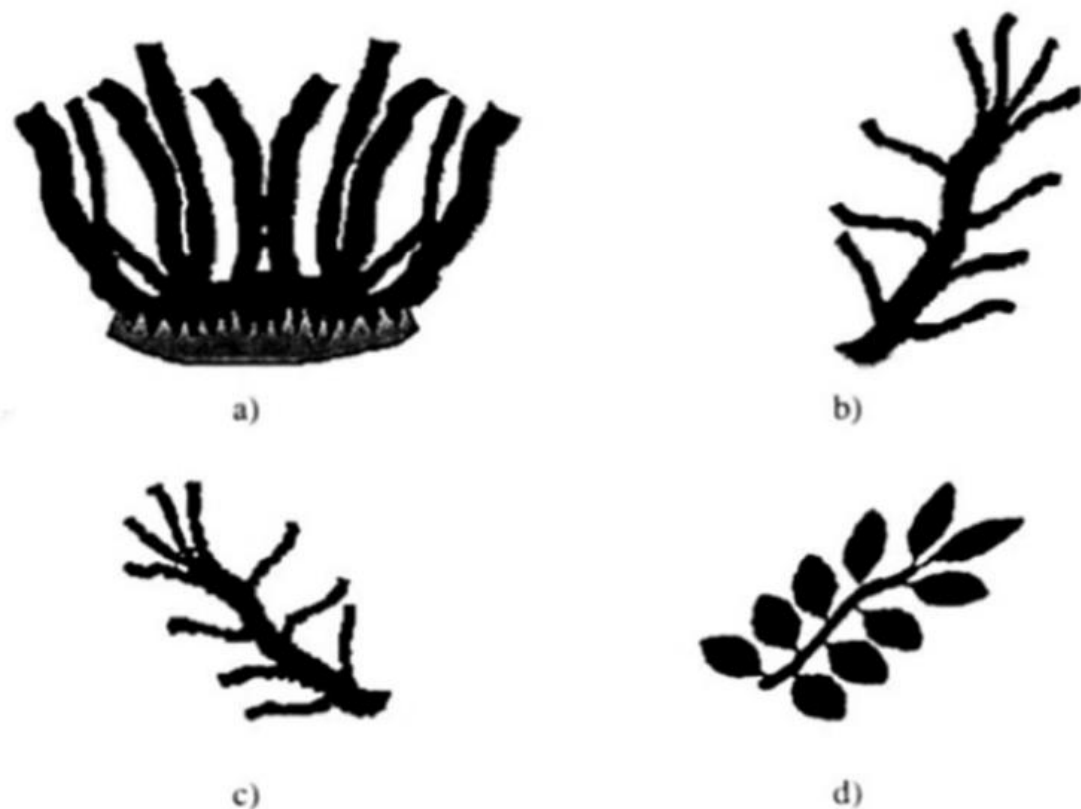


Hình 13.10

13.2. Cây mười cành.

Ở một khu vườn có 10 cây (h.13.11a), một cây có 10 cành (h.13.11b). Trên mỗi cành có 10 nhánh (h.13.11c). Trên mỗi nhánh có 10 lá (h.13.11d). Một ngày nào đó, người tiểu phu đến vườn và chặt một cây rồi cắt ra một cành ở một cây khác, kể đó là cắt một nhánh từ một cành khác. Cuối cùng anh ta ngắt một chiếc lá ở một nhánh khác.

Vườn cây còn lại bao nhiêu lá ?



Hình 13.11

13.3. Một số học sinh trao đổi với nhau về số điểm 10 đạt được. Biết rằng :

a bạn có số điểm 10 từ 1 trở lên ;

b bạn có số điểm 10 từ 2 trở lên ;

c bạn có số điểm 10 từ 3 trở lên ;

d bạn có số điểm 10 là 4 ;

Không có ai có hơn 4 điểm 10.

Tính tổng số điểm 10 mà các bạn học sinh có, biết rằng : $a + b + c + d = 15$.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

CHUYÊN ĐỀ 1

1.1. a) $\frac{-1941}{1931} < \frac{-2011}{2001}; \frac{-1930}{1945} > \frac{-1996}{2011}; \frac{37}{59} < \frac{47}{69}; \frac{-25}{124} > \frac{-27}{100}.$

b) $\frac{-97}{201} > \frac{-194}{399}; \frac{-189}{398} < \frac{-187}{394}; \frac{-289}{403} > \frac{-298}{401}.$

1.2. $\frac{-37}{41} < \frac{76}{-89} < \frac{23}{-27} < \frac{-15}{19} < \frac{-7}{11} < \frac{-5}{9}.$

1.3. Có hai mệnh đề đúng (MĐ 2 và MĐ 4).

1.4. Có hai số nằm giữa các số $\frac{-1}{3}$ và $\frac{1}{-5}$ là $\frac{-4}{15}, \frac{-1}{4}.$

1.5. Có các tập con $\{-42; 19\}; \{-28; 19\}.$

1.6. $A = 5\frac{4}{15}; \quad B = -\frac{155}{284}; \quad C = \frac{983}{15120}.$

1.7. $D = \frac{5}{24}; \quad E = -17; \quad G = \frac{2}{5}.$

1.8. a) $A = \frac{17}{35}; \quad$ b) $B = \frac{250}{671}; \quad$ c) $C = -1\frac{24}{25}.$

1.9. a) $x = 24; \quad$ b) $x = -\frac{1}{9}; \quad$ c) $x = -1; \quad$ d) $x = -2010.$

1.10. a) $A = -\frac{1}{3}; \quad$ b) $B = \frac{2}{3}(2^{100} - 1); \quad$ c) $C = \frac{3}{4}(3^{100} - 1); \quad$ d) $D = -62.$

1.11. Có $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \dots 2^x = 1024 \Leftrightarrow 2^{1+2+3+\dots+x} = 1024 \Rightarrow x = 4.$

1.12. Có $-2^{22} < -22^2 < -222 < -2^{22} < 2^{-22} < 22^{-2}$.

1.13. Xem cách giải ở Ví dụ 1.29.

1.14. Xem cách giải ở Ví dụ 1.29.

1.15. Xem cách giải ở Ví dụ 1.28.

1.16. Loại số -5 và số -4 .

1.17. Hiệu hai số nghịch đảo bằng 1 hoặc -1 .

- 1.18. a) $x < -3$ hoặc $x > 4$; b) $x > 3$;
c) Lập bảng xét dấu, ta được: $-2 \leq x \leq 2$ hoặc $x \geq 4$.

CHUYÊN ĐỀ 2

2.1. Có: $0,1 : 0,105 = 20 : 21$; $1 : 0,004 = 250 : 1$;
 $18,75 : 0,0375 = 500 : 1$; $46,2 : 0,1232 = 375 : 1$.

2.2. a) Lập được một tỉ lệ thức vì: $77 \frac{7}{9} \cdot 0,03 = \frac{7}{3}$ và $4,2 \cdot \frac{5}{9} = \frac{7}{3}$.

b) Không lập được một tỉ lệ thức nào (xét ba trường hợp).

c) Lập được một tỉ lệ thức vì: $3,4 \cdot 1,56 = 5,304$ và $17,0 \cdot 312 = 5,304$.

d) Lập được một tỉ lệ thức vì:

$$3^2 \cdot (2! + 3! + 4!) = 9 \cdot 32 \text{ và } 2^5 \cdot (1! + 2! + 3!) = 32 \cdot 9.$$

2.3. $x \in \{4; 36; 64\}$.

2.4. a) Có thể lập được một tỉ lệ thức vì chẳng hạn: $1 \cdot 27 = 3 \cdot 9$.

b) Không lập được một tỉ lệ thức nào.

c) Có thể lập được một tỉ lệ thức vì chẳng hạn $2^1 \cdot 2^4 = 2^2 \cdot 2^3$.

d) Có thể lập được một tỉ lệ thức vì chẳng hạn $3^{-1} \cdot 3^{-7} = 3^{-3} \cdot 3^{-5}$.

e) Có thể lập được một tỉ lệ thức vì chẳng hạn $\frac{31}{57} \cdot \frac{181818}{292929} = \frac{1818}{2929} \cdot \frac{3131}{5757}$.

2.5. a) $x = 10$; b) $x = 1,125$.

2.6. a) $x = 45$; b) $x = 60,48$; c) $x = \frac{1}{3}$; d) $x = 2,4$.

2.7. Có $x = -6$; $y = -9$ hoặc $x = 6$; $y = 9$.

2.8. a) $x = 52$; b) $x = -1$.

2.9. Không cần biết số nào cả vì $\frac{26}{39} = \frac{38}{57}$. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta tìm được $x = 0$.

2.10. Có:

	a	b	c
a)	80	120	192
b)	7	8	15
c)	70	60	96
d)	24	15	40

	a	b	c
e)	± 14	± 6	
g)	-8	-12	-20
h)	± 8	± 12	± 16
i)	4	6	8

2.11. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

2.12. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

2.13. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

2.14. Vì $a, b, c, d > 0$ nên $a + b + c + d \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a} = \frac{a+b+c+d}{b+c+d+a} = 1 \Rightarrow a = c.$$

2.15. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

2.16. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

2.17. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

2.18. Từ $\frac{\overline{ab}}{bc} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{10a+b}{10b+c} = \frac{9a+b}{10b} = \frac{9ak+bk}{10bk}$ với $k = \underbrace{111\dots1}_n$.

Suy ra: $\frac{a}{c} = \frac{(10^n - 1)a + bk}{10bk} = \frac{10^n a + bk}{10bk + c} = \frac{\overbrace{a \text{ bbb} \dots b}^n}{\underbrace{\text{bbb} \dots b}_n c},$

do $9k = 10^n - 1$.

2.19. Đó là phân số có tử số bằng mẫu số.

2.20. Có $x = 2$; $y = 3$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{2}{3}$.

2.21. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

2.22. $P = 8$ hoặc $P = -1$.

CHUYÊN ĐỀ 3

$$3.1. \quad \frac{9}{33} = 0,(27); \quad \frac{13}{91} = 0,(142857); \quad \frac{148}{518} = 0,(285714);$$

$$\frac{133}{418} = 0,3(18); \quad \frac{15}{82} = 0,1(82926); \quad \frac{73}{81} = 0,(901234567);$$

$$\frac{10987654321}{504} = 21800901,430(5).$$

$$3.2. \quad \text{Số } \frac{1}{\underbrace{1,000\dots01}_9} = 0,\underbrace{999\dots9}_{10}.$$

$$3.3. \quad \text{Có: } 0,(0001) = \frac{1}{9999}; \quad -0,3(18) = -\frac{7}{22};$$

$$-2,37(1) = -2\frac{167}{450}; \quad 3,24(81) = 3\frac{273}{1100}.$$

$$3.4. \quad \text{Có } \frac{15}{19} = 0,(78947 \ 36842 \ 10526 \ 315).$$

Số thập phân trên có chu kì gồm 18 chữ số, mà $2012 = 18.111 + 14$, suy ra chữ số thập phân thứ 2012 là 2.

$$3.5. \quad \text{a) } d \approx 1,33 \text{ (m);} \quad \text{b) Diện tích phần còn lại } \approx 9,01 \text{ (cm}^2\text{);}$$

$$\text{c) Độ dài quỹ đạo tăng thêm } \approx 6,28 \text{ (km).}$$

$$3.6. \quad \text{Có } \sqrt{\frac{0,0009}{0,0121}} = \frac{3}{11}; \quad \sqrt{10,24} = 3,2;$$

$$\sqrt{0,64} + \sqrt{0,81} = 1,7; \quad \sqrt{1,2321} + \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} = 1,11 + 6 = 7,11.$$

$$3.7. \quad \text{Có } A = \frac{2011}{\sqrt{2012}} + \frac{2012}{\sqrt{2011}} = \frac{2012-1}{\sqrt{2012}} + \frac{2011+1}{\sqrt{2011}}$$

$$= \sqrt{2012} - \frac{1}{\sqrt{2012}} + \sqrt{2011} + \frac{1}{\sqrt{2011}}$$

$$A = (\sqrt{2011} + \sqrt{2012}) + \left(\frac{1}{\sqrt{2011}} - \frac{1}{\sqrt{2012}} \right) > \sqrt{2011} + \sqrt{2012} = B.$$

Vậy $A > B$.

$$3.8. \quad A = (\sqrt{0,0289} + \sqrt{0,6889}) \cdot \left(1349 \cdot \sqrt{\frac{361}{5041}} - 1422 \cdot \sqrt{\frac{324}{6241}} \right) = 37.$$

3.9. Có thể, ví dụ $x = 1 + \sqrt{2}$ và $y = 1, \sqrt{2} \Rightarrow a = 1 \in \mathbb{Q}$.

3.10. Ta có $\frac{1}{\sqrt{121}} < \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{12321}} < \frac{\sqrt{12321}}{\sqrt{1234321}} < \dots < \frac{\sqrt{123456787654321}}{\sqrt{12345678987654321}}$.

Chẳng hạn $\frac{1}{\sqrt{121}} = \frac{1}{11} = 1 - \frac{10}{11} = 1 - \frac{100}{110}$ và $\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{12321}} = \frac{11}{111} = 1 - \frac{100}{111}$,

suy ra $\frac{1}{\sqrt{121}} < \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{12321}}$.

3.11. Sử dụng Ví dụ 3.26. Số 1000! Chứa 994 thừa số 2, chứa 498 thừa số 3, chứa 249 thừa số 5.

3.12. Kí hiệu tổng của các số a_i và b_i ($1 \leq i \leq 7; i \in \mathbb{N}$) tương ứng là $S(a_i)$, $S(b_i)$, ta có

$$S(a_i) = S(b_i) = 19.$$

Theo đề bài ta có số nguyên $b_i \in \{2; 3\}$ để $M < 1$.

Có bảy số 2 và 3 mà tổng bằng 19, suy ra có hai số 2 và năm số 3 (phương pháp giả thiết tạm).

Để M nhỏ nhất ta chọn hai số có phần thập phân nhỏ nhất bằng 2 và các số còn lại bằng 3.

$$M = \max\{|a_2 - 2|; |a_3 - 3|\} = \max\{0,61; 0,35\} = 0,61.$$

$$\text{Vậy } 100M = 61.$$

3.13. $\overline{0,a(b)} + \overline{0,b(a)} = 1$.

3.14. Có $x + y = 9$ và $x - y = 5 \Rightarrow x = 7$ và $y = 2$.

3.15. Vì trong cách viết chỉ dùng chữ số 0 hoặc 8, nên $n:15$ thì chữ số tận cùng của n bằng 0, $n:3$ nên n có số chữ số 8 chia hết cho 3 và số chữ số 0 tùy ý.

$$\text{Do } n \text{ là số nhỏ nhất, suy ra } n = 8880 \Rightarrow \frac{n}{90} = \frac{8880}{90} = 98, (6).$$

3.16. a) $3 < x < \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5} \Rightarrow [x] = 3$; b) $-\frac{9}{2} < x < -4 \Rightarrow [x] = -5$;

c) $-\frac{11}{3} < x < -\frac{10}{3} \Rightarrow [x] = -4$.

CHUYÊN ĐỀ 4

4.1. a) Tương quan giữa hai đại lượng y và x là tương quan tỉ lệ nghịch, với hệ số tỉ lệ -30 .

b) Tương quan giữa hai đại lượng y và x là tương quan tỉ lệ thuận, với hệ số tỉ lệ $2,6$.

4.2. Trong một giờ, kim giờ quay được $\frac{1}{12}$ vòng, kim phút quay được 1 vòng và kim giây quay được 60 vòng. Công thức biểu diễn x theo z là $x = 720z$. Ta điền vào bảng như sau:

x	1	60	720	360	3600
y	$\frac{1}{60}$	1	12	6	60
z	$\frac{1}{720}$	$\frac{1}{12}$	1	0,5	5

4.3. Bọt mỳ đã được hạ giá $100\% - 82,25\% = 17,75\%$.

4.4. Ta tính được trong 1 giờ, người A làm được $\frac{8}{45}$ công việc, người B làm được $\frac{7}{45}$ công việc.

Nếu người B làm sớm hơn 1 giờ và A làm chậm nửa giờ thì hai người làm chung được $\frac{23}{30}$ công việc. Khi đó một mình người A làm được $\frac{92}{225}$ công việc, từ đó tính được người A thực tế được lĩnh 450000đ.

4.5. Hai đoàn tàu gặp nhau cách một ga (ga B) là 18km.

4.6. a) Sau 3 giờ khởi hành thì quãng đường còn lại của người đi ngựa bằng 3 lần quãng đường còn lại của người đi xe đạp.

b) Nếu M là điểm chính giữa của quãng đường AB (trung điểm của AB) thì sau 1,5 giờ kể từ khi khởi hành người đi xe đạp sẽ cách M một khoảng bằng $\frac{1}{3}$ khoảng cách từ người đi ngựa tới M.

CHUYÊN ĐỀ 5

- 5.1. a) $0,4 : 0,06 : 1,2 = 20 : 3 : 60$; b) $0,(3) : 0,(5) : 0,(7) = 3 : 5 : 7$;
 c) $0,(12) : 0,0(6) : 0,01(72) = 400 : 220 : 57$;
 d) $0,8 : \frac{2}{3} : 0,05 = 48 : 40 : 3$.
- 5.2. a) $a : b : c = 18 : 16 : 15$; b) $a : b : c = 48 : 40 : 3$.
- 5.3. a) $a : b : c = 56 : 40 : 35$; b) $a : b : c = 2 : 3 : 4$;
 c) $a : b : c = 18 : 16 : 15$.
- 5.4. Có $a : b : c : d : e = 5 : 6 : 9 : 10 : 4$.
- 5.5. Có $a = 20$, $b = 25$ và $c = 40$.
- 5.6. Có $a : b : c : d : e = 81 : 72 : 84 : 105 : 200 \Rightarrow a + b + c + d + e = 1084$.
- 5.7. $S = 2400$ (cây).
- 5.8. Ba phân số đó là $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{21}$ và $\frac{12}{35}$.
- 5.9. Diện tích ba thửa ruộng lần lượt bằng 40,8ha; 32,4ha và 28,8ha.
- 5.10. Tuổi cha và tuổi con hiện nay là 32 và 8.
- 5.11. Tuổi cha và tuổi con hiện nay là 50 và 14.
- 5.12. Giả sử bạn A có x bạn, tuổi của A là a và tổng tuổi x bạn là S . Ta có $\frac{a}{S} = \frac{1}{4}$.
 Biết tỉ số đó không đổi theo thời gian nên sau n năm ta có $\frac{a+n}{S+nx} = \frac{1}{4}$.
 Suy ra $\frac{a+n}{S+nx} = \frac{a}{S} = \frac{n}{nx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$. Vậy bạn A có 4 người bạn.
- 5.13. Ba bạn có 3450 con tem.

CHUYÊN ĐỀ 6

- 6.1. a) Các điểm $A(1; 2)$ và $B(0; 0)$ chỉ cùng thuộc đồ thị hàm số $y = kx$ ($k \neq 0$).
 b) Các điểm $C(1; 2)$ và $D(-1; -2)$ thuộc đồ thị hai hàm số $y = kx$ ($k \neq 0$) và $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$).

c) Hai điểm $E(1; 2)$ và $F(0; 1)$ không cùng thuộc đồ thị các hàm số $y = kx$ ($k \neq 0$) và $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$).

6.2. Hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

6.3. Có: $f(0) = 5$; $f(-2) = 21$; $f(10) = 285$.

6.4. a) Có: $124 = 41.3 + 1 \Rightarrow f(124) = 1$;
 $2012 = 670.3 + 2 \Rightarrow f(2012) = 2$;
 $999 = 333.3 + 0 \Rightarrow f(999) = 0$.

b) Vì số dư của một số khi chia cho 3 nhỏ hơn 3, nên không tồn tại giá trị x mà $f(x) = 3$.

6.5. Có $f(-x) = 3(-x)^2 + 2 = 3x^2 + 2 = f(x) \Rightarrow f(x) = f(-x), \forall x$.

6.6. Có $f(-x) = 4(-x)^3 - 2(-x) = -4x^3 + 2x = -(4x^3 - 2x) = -f(x)$
 $\Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x$.

6.7. Có $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^6 + 1}{\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{(1+x^6).x^3}{x^6} = \frac{1+x^6}{x^3} = f(x) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \forall x \neq 0$.

6.8. Có $f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = f(x) \Rightarrow f(x) = f(-x), \forall x \neq 0$.

6.9. Hàm số $y = f(x) = 5^x$. Ta có $f(x+1) - f(x) = 5^{x+1} - 5^x = 5^x(5 - 1) = 4.5^x$.

6.10. Có $\text{Sgn}(x^2 + 1) = 1$; $\text{Sgn}(-1)^{2n} = -1$; $\text{Sgn}((-1)^{2n-1}) = -1$.

6.11. Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.

6.12. Có $f(4) = 3.f(3)$; $f(3) = 2.f(2)$; $f(2) = 1.f(1) = 1 \Rightarrow f(4) = 3.2 = 6$.

6.13. Hàm số

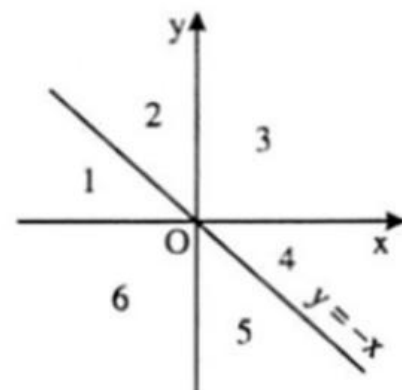
$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3 & \text{nếu } x \geq 6 \\ 3 - \frac{1}{2}x & \text{nếu } x < 6. \end{cases}$$

a) Đại lượng x không là hàm số của đại lượng y , chẳng hạn ứng với $y = 3$ ta tìm được hai giá trị của x là 0 và 12.

b) Có $f(-2) = 4$; $f(0) = 3$; $f(7) = 0,5$.

c) Hàm số $f(x)$ có thể viết gọn bằng công thức:

$$f(x) = |0,5x - 3|.$$



Hình 6.10

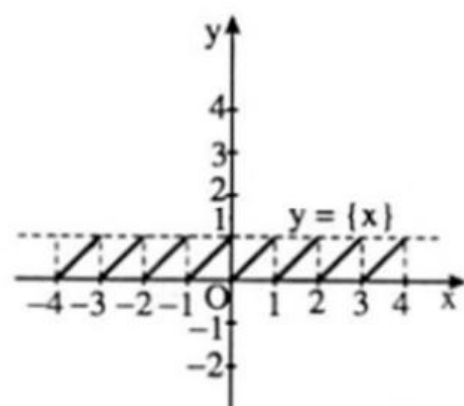
6.14. (h.6.10) Các miền 1 và 2 thỏa mãn $x < 0, y > 0$.

Ở miền 1 thì $y < -x$, ở miền 2 thì $y > -x$.

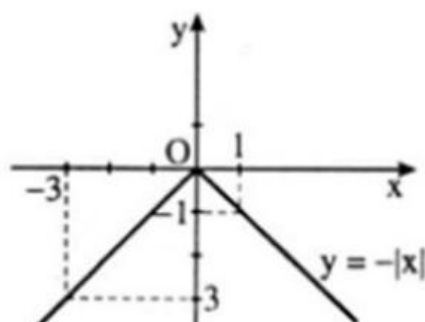
Vậy miền 2 thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x < 0, y > 0, y > -x$.

6.15. Đồ thị các hàm số: (h.6.11)

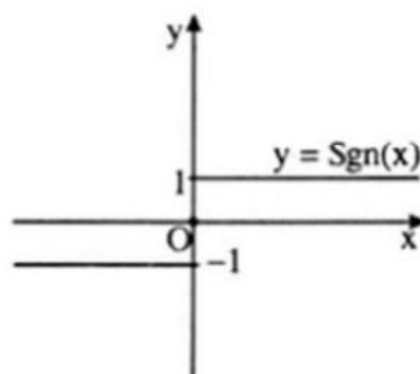
a) $y = \{x\}$; b) $y = -|x|$; c) $y = \text{Sgn}(x)$.



a)



b)



c)

Hình 6.11

CHUYÊN ĐỀ 7

7.1. 1. Chọn cột thứ nhất và thứ hai:

a) Dấu hiệu X là số trận bão đổ bộ vào Việt Nam trong thập niên đầu của thế kỉ XXI.

b) Bảng "tần số":

Số trận bão	2	3	7	8	13	14	
Số năm	2	3	2	1	1	1	N = 10

Trung bình số trận bão đổ bộ vào Việt Nam hàng năm:

$$\bar{X} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 13 \cdot 1 + 14 \cdot 1}{10} = 6,2.$$

Mốt: $M_0 = 3$.

2. Chọn cột thứ nhất và cột ba (gồm 14 cột nhỏ):

a) Dấu hiệu X ở đây là cấp độ bão đổ bộ vào Việt Nam trong thập niên đầu thế kỉ XXI.

b) Bảng tần số:

Cấp độ bão	6	7	8	9	10	11	12	13	
Số trận	27	10	9	5	3	3	3	2	$N = 62$

Trung bình cấp độ bão đổ bộ vào Việt Nam

$$\bar{X} = \frac{6.27 + 7.10 + 8.9 + 9.5 + 10.3 + 11.3 + 12.3 + 13.2}{62} \approx 7,6.$$

7.2. a) Dấu hiệu X ở bảng 14 là số bàn thắng trong mỗi trận đấu ở vòng đấu bảng World Cup 2010.

b) Bảng "tần số":

Số bàn thắng	0	1	2	3	4	5	7	
Số trận đấu	6	13	12	9	5	2	1	$N = 48$

Trung bình số bàn thắng trong một trận:

$$\bar{X} = \frac{0.6 + 1.13 + 2.12 + 3.9 + 4.5 + 5.2 + 7.1}{6 + 13 + 12 + 9 + 5 + 2 + 1} \approx 2,1.$$

Chỉ có duy nhất một trận có 7 bàn thắng. Số trận có 1 bàn thắng nhiều nhất (13 trận).

7.3. Trong nhóm còn lại 9 bạn.

7.4. Số đứng chính giữa bằng 44.

7.5. Điểm trung bình hiện tại của bạn Nam là 6,2.

7.6. Gọi x là số học sinh của tổ 2, y là số học sinh của tổ 3.

$$\text{Từ } \frac{9.10 + 8,8x}{10 + x} = 8,9, \text{ ta được } x = 10.$$

$$\text{Từ } \frac{8,8.10 + 7,8y}{10 + y} = 8,2, \text{ ta được } y = 15.$$

Điểm trung bình của cả lớp bằng 8,4.

CHUYÊN ĐỀ 8

- 8.1. a) $A = -5\frac{25}{27}$.
 b) $B(-0,5) = -7\frac{5}{8}$; $B(0) = -10$; $B(0,(6)) = -16\frac{4}{27}$; $B(1) = -20$.
 c) $C(-2) = 7$; $C(-0,(6)) = 3\frac{8}{9}$.
- 8.2. a) $P = 0$; b) $P = 1000$.
- 8.3. Giá trị của biểu thức Q thuộc tập $\{-18\frac{2}{3}; -16\frac{2}{3}\}$.
- 8.4. a) $A = \frac{8991}{10100}$; b) $B = 0$; c) $C = 1\frac{1}{22}$.
- 8.5. Ta có $A = B = C (= 49)$.
- 8.6. Ta có $A.B.C = -8x^2y^4z^6 < 0$ nên cả ba đơn thức đã cho không thể cùng dương được.
- 8.7. a) $\text{Min}A = 2012 \Leftrightarrow x = -500$; b) $\text{Min}B = 2 \Leftrightarrow 25 \leq x \leq 49$.
- 8.8. $\text{Max}A = \frac{13}{11} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.
- 8.9. a) $\text{Min}A = -17 \Leftrightarrow x = 12$; b) $\text{Min}B = -7 \Leftrightarrow x = 10$.
- 8.10. a) $\text{Max}A = 17 \Leftrightarrow x = 12$; b) $\text{Max}B = 12 \Leftrightarrow x = 10$.
- 8.11. Có $x = 3$.

CHUYÊN ĐỀ 9

- 9.1. a) $P = 7x^2 - 5x - 1$; $Q = 5x^2 + 3x - 5$;
 $R = -x^2 - x - 3$; $S = 3x^2 - 7x + 7$.
 b) $P = 15a^2 - 21ab + 5b^2$; $Q = a^2 - 3ab + 27b^2$;
 $R = 9a^2 - 11ab - 9b^2$; $S = 5a^2 - 7ab - 13b^2$.
- 9.2. a) $M = 4a - 2b + 3c - 2d$; b) $N = -5a^2 + 2c$.
- 9.3. a) $P + Q = x + 4y - 2z$; $P - Q = -x + 2y$.
 b) $P + Q = 7a^2 + ab - b^2$; $P - Q = -a^2 + 3ab - 3b^2$.
- 9.4. a) $P = -2x^2 - 5xy + 6y^2$; b) $P = -5x^2 + 4xy$; c) $P = -4y^2$.

- 9.5. Hai đa thức đồng nhất khi $a = -4, b = 2, c = 3$.
- 9.6. Có $u_{2012} = -b$.
- 9.7. a) $\overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98; 51; 62; 73; 84; 95\}$.
b) $\overline{ab} = 36$. c) $\overline{ab} = 72$;
- 9.8. Đáp số: $a = 3; b = 2; c = 5$.
- 9.9. a) $\overline{abc} = 198$; b) c) $\overline{abc} \in \{481; 592\}$;
d) Không tồn tại do a, b và c khác nhau.
- 9.10. Tổng $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 2.61(a + b + c)$ không là một số chính phương.

CHUYÊN ĐỀ 10

- 10.1. a) $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 4x - 5$.
b) Bậc của $f(x)$ là 3, hệ số tự do là -5 , hệ số cao nhất là 6.
c) $f(-1) = -19; f(0) = -5; f(0,5) = -3,25; f(1) = 1$.
- 10.2. a) $f(x) = (x^{99} + 2x^{98} + 3x^{97} + \dots + 99x) + 1$
 $\Rightarrow f(-1) = (-1 + 2 - 3 + 4 - \dots + 98 - 99) + 1 = -49$.
b) $g(-1) = (1 - 1 - 1 + 1) + (1 - 1 - 1 + 1) + \dots + (1 - 1 - 1 + 1) + (-1)^{100} = 1$.
c) $h(1) = 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots + \underbrace{0,000\dots01}_n = 0, \underbrace{111\dots1}_n$.
- Xét n chẵn và n lẻ:
Nếu $n = 2k$ thì $h(-1) = -0,090909\dots09$ với k nhóm (09).
Nếu $n = 2k - 1$ thì $h(-1) = -0,090909\dots091$ với $k - 1$ nhóm (09).
- 10.3. Tổng các hệ số của đa thức sau khi phá ngoặc và sắp xếp:
a) $f(1) = (1 - 2 + 3 - 4)^{10} = (-2)^{10} = 1024$.
b) $g(1) = (3 - 12 + 8)^{1111} \cdot (4 + 3 + 2 + 1 - 12 + 1)^{2222} = -1$.
- 10.4. a) $A + B = x^3 - 6x^2 + 2x; A - B = -9x^3 + 6x^2 - 6x + 4$.
b) $A(2) = -34; B(2) = 22; (A + B)(2) = -12; (A - B)(2) = -56$.
- 10.5. a) $f(x) = x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x \in \{0; \pm 1\}$;
b) $g(x) = x^3 - x = 0 \Rightarrow x \in \{0; \pm 1\}$;
c) $h(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$;
d) $k(x) = x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x \in \{3; 4\}$.

- 10.6. a) $f(-1) = 0$ khi $m = 1$; b) $g(1) = 0$ khi $m \in \{-2; 0\}$.
 c) $h(-3) = 0$ khi $m = 45$.
- 10.7. a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có nghiệm bằng ± 2 khi $c = -4a$ và $d = -4b$. Ta có $f(x) = ax^3 + bx^2 - 4ax - 4b$.
 b) Khi đó $ax^3 + bx^2 - 4ax - 4b = 0$
 $\Leftrightarrow ax(x^2 - 4) + b(x^2 - 4) = 0$
 $\Leftrightarrow (ax + b)(x^2 - 4) = 0$.
- Ngoài nghiệm ± 2 , đa thức $f(x)$ còn có nghiệm $x = -\frac{b}{a}$ (do $a \neq 0$).
- 10.8. Có đa thức $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$.
- 10.9. Nghiệm của đa thức $g(x)$ là $\frac{1}{x_0}$.
- 10.10. Nếu đa thức $f(x) = -8x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ có nghiệm nguyên thì nghiệm đó là ước số của -1 . Nhưng $f(-1) = -21 \neq 0$ và $f(1) = -5 \neq 0$. Vậy đa thức đã cho không có nghiệm nguyên.
- 10.11. Vì đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có giá trị nguyên với mọi $x \in \mathbb{Z}$ nên đa thức $f(x)$ cũng có giá trị nguyên với $x \in \{0; \pm 1; 2\}$. Thay x bằng các giá trị đó ta sẽ có $2b \in \mathbb{Z}$ và $6a \in \mathbb{Z}$.

CHUYÊN ĐỀ 11

- 11.1. a) Giả sử tổng của số hữu tỉ a và số vô tỉ b là số hữu tỉ c .

Ta có: $b = c - a$. Vì hiệu của hai số hữu tỉ c và a là một số hữu tỉ nên b là số hữu tỉ, trái với giả thiết. Vậy c phải là số vô tỉ.

- b) Giả sử q là số hữu tỉ dương nhỏ nhất. Viết $q = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Do

$q > 0$ nên có thể giả sử $a > 0, b > 0$. Xét số $r = \frac{a}{b+1}$ thì $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Mặt

khác $q - r = \frac{a}{b} - \frac{a}{b+1} = \frac{ab + a - ab}{b(b+1)} = \frac{a}{b(b+1)} > 0$, do đó $q > r$. Điều này

mâu thuẫn với q là số hữu tỉ dương nhỏ nhất. Do đó giả sử trên là sai. Vậy không tồn tại số hữu tỉ dương nhỏ nhất.

- 11.2.** Giả sử phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ không tối giản, nghĩa là nếu $d = (12n+1, 30n+2)$ thì $d > 1$. Ta có: $(12n+1):d, (30n+2):d \Rightarrow 5(12n+1) - 2(30n+2) = 1:d$, vô lí.

Vậy phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ tối giản.

- 11.3.** Do tích của 34 số nguyên cho trước bằng 1 nên các số nguyên đó là ± 1 và phải có số chẵn các số là -1 . Gọi k là số các số nguyên bằng -1 . Để tổng của chúng bằng 0 thì phải có k số nguyên là 1. Như vậy ta có $k+k=34$, suy ra $k=17$, không phải là số chẵn, mâu thuẫn. Vậy tổng của các số nguyên đó không thể bằng 0.

- 11.4.** Từ $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2000}} = 1$ suy ra

$$a_2 a_3 \dots a_{2000} + a_1 a_3 \dots a_{2000} + \dots + a_1 a_2 \dots a_{1999} = a_1 a_2 \dots a_{2000} \quad (1).$$

Giả sử tất cả các số $a_1, a_2, \dots, a_{2000}$ là số lẻ, khi đó vế trái của (1) là tổng của 2000 số lẻ nên là số chẵn, vế phải của (1) là số lẻ, mâu thuẫn. Suy ra điều phải chứng minh.

- 11.5.** Giả sử tồn tại số palindrome chia hết cho 10, vậy số đó có tận cùng là 0. Khi đó số này không thỏa mãn định nghĩa của số palindrome. Suy ra điều phải chứng minh.

- 11.6.** Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để $A = n^2 + 3n - 38$ chia hết cho 49.

Khi đó: $n^2 - 4n + 4 = n^2 + 3n - 38 - 7(n-6)$ chia hết cho 7. Mặt khác

$$n^2 - 4n + 4 = n^2 - 2n - 2n + 4 = n(n-2) - 2(n-2) = (n-2)(n-2) = (n-2)^2$$

nên $(n-2)^2 : 7$. Suy ra $(n-2) : 7$. Vậy $n = 7t + 2, t \in \mathbb{N}$. Thay vào A ta được:

$$A = (7t+2)^2 + 3(7t+2) - 38 = 49t^2 + 49t - 28 = 49(t^2 + t) - 28.$$

Do đó $A \not\equiv 0 \pmod{49}$, trái với giả sử trên. Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $A \not\equiv 0 \pmod{49}$.

11.7. Giả sử $n^2 + a = x^2$ (1) với $x \in \mathbb{Z}$. Do a là ước nguyên dương của $2n^2$ nên

$$2n^2 = ka, k \in \mathbb{N}^*. \text{ Khi đó: } x^2 = n^2 + a = n^2 + \frac{2n^2}{k} \Rightarrow \left(\frac{kx}{n}\right)^2 = k^2 + 2k \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $k^2 + 2k$ là số chính phương. Điều này là vô lí vì $k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$.
Suy ra điều cần chứng minh.

11.8. Do $n > 2$ nên $n! - 1 > 1$. Gọi p là một ước nguyên tố của $a = n! - 1$, khi đó ta có: $p \leq a \Rightarrow p < n!$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh $p > n$. Giả sử $p \leq n$, suy ra $n! \vdots p$.

Ta lại có $a \vdots p$ nên $1 \vdots p$, vô lí.

Vậy p là số thỏa mãn $n < p < n!$.

Do n là số nguyên dương tùy ý lớn hơn 2, nên có vô hạn các số nguyên tố.

11.9. Giả sử không có 3 số liên tiếp nào mà tổng lớn hơn hoặc bằng 39. Không mất tính tổng quát, giả sử chúng được sắp xếp theo thứ tự vòng tròn là $a_1, a_2, \dots, a_{25}$.

Xét tổng

$$A = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{24} + a_{25} + a_1) + (a_{25} + a_1 + a_2).$$

$$\text{Theo giả sử thì } A < 25 \cdot 39 = 975 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } A = 3(1 + 2 + 3 + \dots + 25) = 3 \cdot 325 = 975 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra vô lí. Ta có điều cần chứng minh.

11.10. Số hạng tổng quát của dãy (1) là $4k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$. Giả sử các số hạng của dãy (1) chỉ có hữu hạn các số nguyên tố là 3, 7, 11, 19, ..., p_n . Bằng cách đặt $N = 4(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \dots p_n) - 1$ thì như Ví dụ 11.8 sẽ dẫn tới sự mâu thuẫn. Vậy có vô số các số hạng của dãy (1) là các số nguyên tố.

Số hạng tổng quát của dãy (2) là $6k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$. Lập luận tương tự như đối với dãy (1), ta cũng thấy dãy (2) có vô số các số hạng là các số nguyên tố.

Nhận xét: Dãy số (1) và (2) đều có chung một đặc điểm là: Các số hạng của mỗi dãy, kể từ số hạng thứ hai, đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi. Dãy số như vậy được gọi là *cấp số cộng*, số không đổi đó gọi là *công sai*.

Kết quả tổng quát hơn của ví dụ này là: Bất kỳ cấp số cộng nào có số hạng đầu tiên và công sai nguyên tố cùng nhau cũng chứa vô hạn các số nguyên tố. Nhà toán học A. Selberg người Na Uy là người đầu tiên (không dùng toán cao cấp) chứng minh kết quả này.

CHUYÊN ĐỀ 12

12.1. Có 28 sọt cam gồm 3 loại cam khác nhau. Ta thấy $28 = 3 \cdot 9 + 1$, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất $9 + 1 = 10$ sọt chứa cùng một loại cam.

Có thể lập luận bằng phương pháp phản chứng như sau: Giả sử mỗi loại cam đều có không quá 9 sọt thì số lượng sọt cam sẽ không vượt quá $9 \cdot 3 = 27$. Điều này trái với giả thiết đã cho 28 sọt. Suy ra phải có một loại cam chứa ít nhất trong 10 sọt.

12.2. Có 50 bạn sinh vào 12 tháng trong năm. Nhận thấy $50 = 12 \cdot 4 + 2$, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất $4 + 1 = 5$ bạn sinh cùng tháng.

12.3. Đem 12 số đã cho lần lượt chia cho 11 nhận được 12 số dư trong đó có nhiều nhất 11 số dư khác nhau (0, 1, ..., 10). Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất hai số chia cho 11 có cùng số dư, chẳng hạn đó là a, b ($a > b$), khi đó $a - b$ chia hết cho 11. Nhưng a, b là các số có hai chữ số nên $a - b$ chỉ có thể là 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88.

12.4. Một số tự nhiên chia cho 50 có một trong các số dư 0, 1, ..., 49.

Tất cả các số dư trong phép chia cho 50 được chia thành 26 nhóm sau:

$$(0), (1; 49), (2; 48), \dots, (24; 26), (25).$$

Đem 27 số tự nhiên chia cho 50 nhận được 27 số dư, 27 số dư này sẽ thuộc vào 26 nhóm trên. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số dư thuộc vào một nhóm, tức là tồn tại hai số có tổng số dư trong phép chia cho 50

bằng 50 hoặc hiệu số dư trong phép chia cho 50 bằng 0. Hai số này có tổng hoặc hiệu chia hết cho 50.

12.5. Giải theo cách của Ví dụ 12.6.

12.6. Xét dãy gồm $n + 1$ số sau

$$1, 11, 111, \dots, \underbrace{111 \dots 1}_{n+1}.$$

Đem $n + 1$ số này lần lượt chia cho n , ta nhận được $n + 1$ số dư trong đó có nhiều nhất n số dư khác nhau (là $0, 1, \dots, n - 1$). Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai số khi chia cho n có cùng số dư, nên hiệu của chúng sẽ chia hết cho n . Hiển nhiên hiệu này là một số tự nhiên được biểu diễn bởi các chữ số 1 và 0.

12.7. Xét 10001 số $9, 9^2, 9^3, \dots, 9^{10001}$. Đem 10001 số này lần lượt chia cho 10^4 . Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số chia cho 10^4 có cùng số dư, chẳng hạn hai số đó là 9^m và 9^n (với $m > n$). Khi đó

$$9^m - 9^n = 9^n(9^{m-n} - 1) = 10^4 \cdot q \quad (q \text{ là số tự nhiên})$$

mà $(9^n, 10^4) = 1$ nên $9^{m-n} - 1$ chia hết cho 10^4 . Suy ra 9^{m-n} có tận cùng là 0001. Vậy có thể tìm được số tự nhiên là lũy thừa của 9 mà có tận cùng là 0001.

12.8. Xét $n + 1$ số $m, m^2, \dots, m^{n+1}$, ta luôn tìm được hai số có cùng số dư khi chia cho n , suy ra hiệu của chúng chia hết cho n . Khi đó

$m^k - m^q = m^q(m^{k-q} - 1)$ chia hết cho n ($1 \leq q < k \leq n + 1$). Vì $(m, n) = 1$ nên $m^{k-q} - 1$ chia hết cho n . Số $m^{k-q} - 1$ là số phải tìm.

12.9. Đặt $3^{13579} = m$. Do $(3, 13579) = 1$ nên $(13579^k, m) = 1$ với mọi số tự nhiên k .

Đem $m + 1$ số $13579, 13579^2, \dots, 13579^{m+1}$ chia cho m . Theo nguyên lí Dirichlet trong $m + 1$ số trên có ít nhất hai số khi chia cho m có cùng số dư. Tức là tồn tại hai số tự nhiên p, q ($p > q$) để $(13579^p - 13579^q)$ chia hết cho m . Do đó suy ra $(13579^{p-q} - 1)$ chia hết cho m . Đặt $n = p - q$, ta được điều phải chứng minh.

12.10. Giả sử 10 số được viết theo thứ tự $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ với $1 \leq a_i \leq 10, a_i \neq a_j$ với $i \neq j$. Ta lập dãy $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ với $b_i = a_i + i$.

Nếu trong 10 số $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ đôi một có tận cùng khác nhau thì tổng của chúng có tận cùng bằng chữ số tận cùng của $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$, tức là bằng 5. (1)

Mặt khác $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) + (1 + 2 + \dots + 10) = 110$. (2)

Vì (1) và (2) mâu thuẫn nhau nên phải tồn tại hai tổng có chữ số tận cùng như nhau.

12.11. Xét số ván cờ của ba tuần liên tiếp. Giả sử ngày thứ k số ván cờ đánh được là a_k ($1 \leq k \leq 21$). Vì số ván cờ đánh mỗi tuần không quá 13 nên

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{21} \leq 3 \cdot 13 = 39.$$

Ta xét dãy tổng sau:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

...

$$S_{21} = a_1 + a_2 + \dots + a_{21}.$$

Theo nguyên lí Dirichlet, trong các số $S_1, S_2, \dots, S_{21}$ nói trên thì tồn tại hai số chia cho 20 có cùng số dư nên hiệu của chúng chia hết cho 20. Vì các số $S_1, S_2, \dots, S_{21}$ đều khác nhau và không vượt quá 39 nên tồn tại hai số có hiệu bằng 20, ta có điều phải chứng minh.

12.12. Giả sử 6 bạn thi đấu bóng bàn là A, B, C, D, E, F. Tại mỗi thời điểm, bạn A có thể thi đấu hoặc chưa thi đấu với mỗi bạn trong 5 người còn lại. Ta có $5 = 2 \cdot 2 + 1$, theo nguyên lí Dirichlet thì A phải chưa đấu với ít nhất ba bạn khác hoặc đã đấu với ít nhất ba bạn khác.

Trường hợp 1: Giả sử A đã thi đấu với ba bạn B, C, D.

– Nếu B, C, D từng cặp chưa đấu với nhau thì ta chọn luôn B, C, D.

– Nếu B, C, D có một cặp đã thi đấu với nhau, chẳng hạn B và C thì chọn ba bạn A, B, C có từng cặp đã đấu với nhau.

Trường hợp 2: Giả sử A chưa đấu với B, C, D.

– Nếu B, C, D từng cặp đấu với nhau thì ta chọn luôn B, C, D.

– Nếu B, C, D có một cặp chưa đấu với nhau, chẳng hạn B và C thì chọn ba bạn A, B, C có từng cặp chưa đấu với nhau.

12.13. Giả sử 500 số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_{500}$. Ta xét các tập hợp sau:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{500}\}$$

$$B = \{a_1 + 4, a_2 + 4, \dots, a_{500} + 4\}$$

$$C = \{a_1 + 6, a_2 + 6, \dots, a_{500} + 6\}$$

$$D = \{a_1 + 8, a_2 + 8, \dots, a_{500} + 8\}.$$

Tổng số phần tử của A, B, C, D là 2000, trong đó mỗi phần tử đều không vượt quá $1900 + 8 = 1908$, nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai phần tử bằng nhau. Vì trong mỗi tập hợp A, B, C, D có các phần tử đôi một khác nhau nên hai phần tử bằng nhau đó thuộc A và B; B và C; C và D; A và C; A và D; B và D. Khi đó tồn tại hai số thuộc A có hiệu là 2, 4, 6, 8. Ta được điều phải chứng minh.

Lưu ý. Bài toán vẫn đúng nếu thay 500 số bởi 383 số. Giải tương tự phần Nhận xét của Ví dụ 12.7.

12.14. Ta xét hàng có ô chứa số 1 và cột có ô chứa số 81. Hiệu giữa hai số này là 80.

Số cặp ô kế nhau liên tiếp từ ô chứa số 1 đến ô chứa số 81 nhiều nhất là 16 (gồm 8 cặp ô tính theo hàng và 8 cặp ô tính theo cột). Ta có $80 = 16 \cdot 5$ nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kế nhau có hiệu hai số ghi trên đó không nhỏ hơn 5. Bài toán được chứng minh.

12.15. Ta xét hàng có ô chứa số 1 và cột có ô chứa số 120. Hiệu giữa hai số này là 119.

Số cặp ô kề nhau liên tiếp từ ô chứa số 1 đến ô chứa số 119 nhiều nhất là 20 (gồm 9 cặp ô tính theo hàng và 11 cặp ô tính theo cột). Ta có $119 = 20 \cdot 5 + 19$. Nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau có hiệu hai số ghi trên đó không nhỏ hơn $5 + 1 = 6$. Bài toán được chứng minh.

12.16. Ta chia tập hợp các số tự nhiên thành 5 tập hợp con A_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) sao cho A_i gồm các số chia cho 5 dư i . Nếu ta lấy 5 số tự nhiên thì có khả năng xảy ra chúng rơi vào 5 tập con khác nhau, khi đó hiệu của hai số bất kì trong chúng đều không chia hết cho 5. Nếu ta lấy 6 số tự nhiên bất kì thì theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 2 số nằm trong cùng một tập hợp con trên. Suy ra hiệu của hai số này chia hết cho 5. Như vậy số tự nhiên nhỏ nhất n phải tìm là 6.

12.17. Cách giải tương tự Ví dụ 12.5. Chọn được nhiều nhất là 667 số.

12.18. Xét người A bất kì trong 6 người đó thì A quen hoặc không quen với mỗi người trong 5 người còn lại. Ta có $5 = 2 \cdot 2 + 1$, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất $2 + 1 = 3$ người quen A hoặc không quen A.

+ Giả sử A quen 3 người B, C, D. Nếu B, C, D đôi một không quen nhau thì ta chọn luôn 3 người này. Nếu trong B, C, D có hai người quen nhau; chẳng hạn B, C thì chọn luôn 3 người A, B, C đôi một quen nhau.

+ Giả sử A không quen 3 người B, C, D. Nếu B, C, D đôi một quen nhau chọn luôn 3 người này. Nếu trong B, C, D có hai người không quen nhau; chẳng hạn B, C thì chọn luôn 3 người A, B, C đôi một không quen nhau.

12.19. Xét $A = \{1; 2; 3; \dots; 2011^{2012}\}$, $\forall x \in A$ thì $1 \leq \sqrt[2012]{x} \leq 2011$.

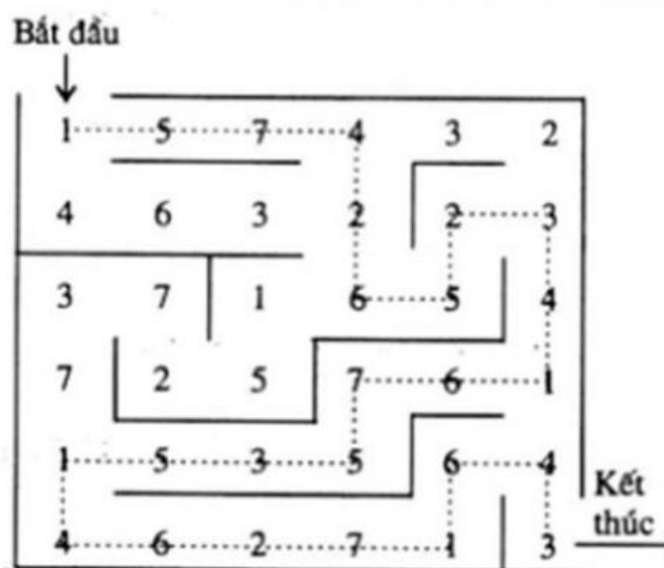
Xét 2011 tập hợp: $[1; 2), [2; 3), [3; 4), \dots, [2010; 2011), \{2011\}$, do có tới 2012 số thuộc 2011 tập hợp trên nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai số thuộc cùng một tập hợp. Gọi hai số đó là x, y , ta có $0 < \left| \sqrt[2012]{x} - \sqrt[2012]{y} \right| < 1$.

CHUYÊN ĐỀ 13

13.1. Xem hình 13.12. Tổng các số trên đường đi bằng :

$$1 + 5 + 7 + 4 + 2 + 6 + 5 + 2 + 3 + 4 + 1 + 6 + 7 + 5$$

$$+ 3 + 5 + 1 + 4 + 6 + 2 + 7 + 1 + 6 + 4 + 3 = 100.$$



Hình 13.12

13.2. Trên mỗi nhánh có 10 lá.

Trên mỗi cành có 10 nhánh nên có $10 \cdot 10 = 100$ (lá).

Có 10 cành ở mỗi cây, vậy ở mỗi cây có $100 \cdot 10 = 1000$ (lá).

Vườn cây có 10 cây nên có $1000 \cdot 10 = 10\,000$ (lá).

Cắt ra một cây (có 1000 lá), một cành (có 100 lá), một nhánh (có 10 lá) và một chiếc lá thì vườn cây mất đi

$$1000 + 100 + 10 + 1 = 1111 \text{ (lá).}$$

Vườn cây còn lại : $10\,000 - 1111 = 8889$ (lá).

13.3. Số bạn có đúng 1 điểm 10 là $a - b$.

Số bạn có đúng 2 điểm 10 là $b - c$.

Số bạn có đúng 3 điểm 10 là $c - d$.

Số bạn có đúng 4 điểm 10 là d .

Tổng số điểm 10 là :

$$(a - b) + 2(b - c) + 3(c - d) + 4d = a + b + c + d = 15.$$

MỤC LỤC

	Trang	
Lời nói đầu	3	
		HDG - ĐS
CÁC CHUYÊN ĐỀ CƠ BẢN		
Chương I. SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC		
Chuyên đề 1. CÁC PHÉP TÍNH TRONG TẬP HỢP SỐ HỮU TỈ	5	186
Chuyên đề 2. TỈ LỆ THỨC. DÂY TỈ SỐ BẰNG NHAU	37	187
Chuyên đề 3. SỐ THỰC	56	189
Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ		
Chuyên đề 4. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH	78	191
Chuyên đề 5. CHIA TỈ LỆ	89	192
Chuyên đề 6. HÀM SỐ. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ	100	192
Chương III. THỐNG KÊ		
Chuyên đề 7. THỐNG KÊ. TẦN SỐ. TẦN SUẤT	112	194
Chương IV. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ		
Chuyên đề 8. GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ	126	196
Chuyên đề 9. CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC	142	196
Chuyên đề 10. ĐA THỨC MỘT BIẾN	148	197
CÁC CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO		
Chuyên đề 11. CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG	161	198
Chuyên đề 12. NGUYÊN LÝ DIRICHLET	167	201
Chuyên đề 13. TRÒ CHƠI VÀ CÂU ĐỐ	179	206

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc **NGUYỄN QUÝ THAO**

Tổ chức bản thảo

và chịu trách nhiệm nội dung : Phó Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội **PHAN KẾ THÁI**

Biên tập lần đầu và tái bản : **ĐẶNG VĂN TUYẾN**

Trình bày bìa : **LƯƠNG QUỐC HIỆP**

Sửa bản in : **ĐẶNG VĂN TUYẾN**

Thiết kế sách : **NGUYỄN THANH THUÝ**

Chế bản : **PHÒNG CHẾ BẢN CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
HÀ NỘI**

Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ TOÁN 7 TẬP MỘT - ĐẠI SỐ

Mã số: T7T66h3 - SBE

Số ĐKKH xuất bản: 124-2013/CXB/186-116/GD.

In 5.000 bản (QĐ: 62), khổ 17 x 24 cm.

In tại Công ty Cổ phần In & Bao bì Đồng Tháp: 212 Lê Lợi -
Phường 3 - Thị xã Sa Đéc - Tỉnh Đồng Tháp.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 03 năm 2013.