

VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)

VĂN NHƯ CƯỜNG - NGUYỄN NGỌC ĐẠM

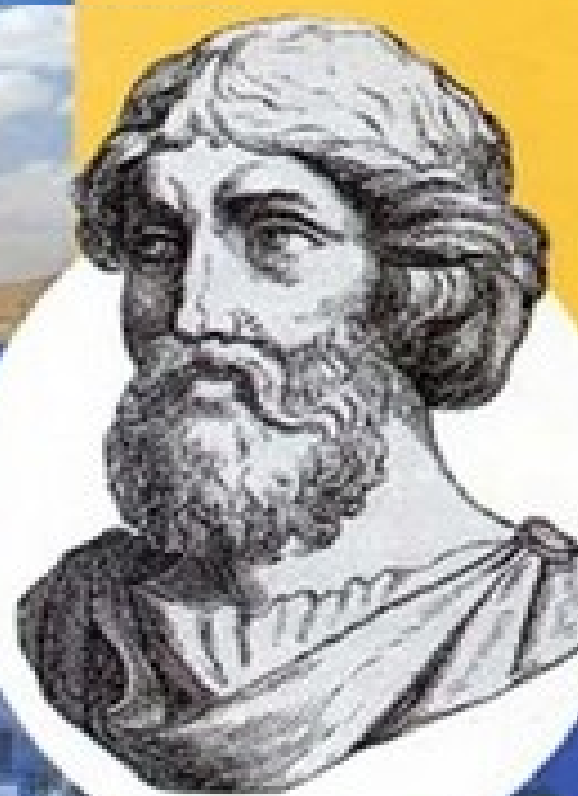
TRẦN HỮU NAM - PHẠM THỊ BẠCH NGỌC - TRƯƠNG CÔNG THÀNH

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

TOÁN 7

TẬP HAI

HÌNH HỌC



vuvuvu.onlsgol.com

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)

VĂN NHƯ CƯƠNG - NGUYỄN NGỌC ĐẠM

TRẦN HỮU NAM - PHẠM THỊ BẠCH NGỌC - TRƯƠNG CÔNG THÀNH

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

TOÁN 7

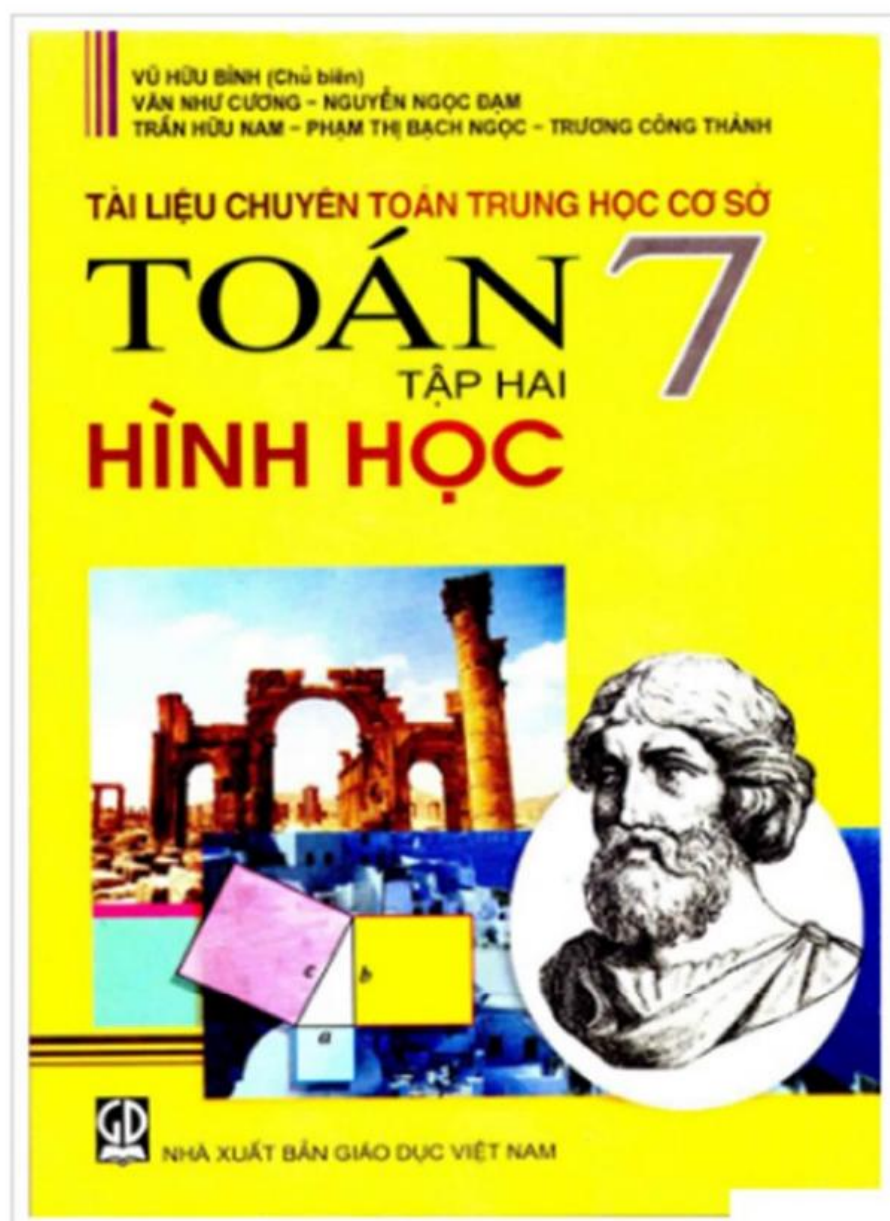
TẬP HAI – HÌNH HỌC

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHÂN CÔNG BIÊN SOẠN

Vũ Hữu Bình :	Chủ biên
Nguyễn Ngọc Đạm	Chuyên đề 1 - 11
Trần Hữu Nam :	Chuyên đề 12
Phạm Thị Bạch Ngọc :	Chuyên đề 13
Trương Công Thành :	Chuyên đề 14
Văn Như Cương :	Chuyên đề 15



Ảnh minh họa bìa một : Nhà toán học Pythagore (Py-ta-go)
(sinh khoảng năm 580 đến 572, mất khoảng năm 500
đến 490 trước Công nguyên)

Lời nói đầu

Bộ sách **Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở** gồm 8 cuốn, từ lớp 6 đến lớp 9, mỗi lớp 2 tập (tập một: Đại số, tập hai: Hình học), được biên soạn nhằm :

- Cung cấp cho các em học sinh một tài liệu có hệ thống và khá đầy đủ để học tập chuyên sâu về môn Toán ở cấp Trung học cơ sở.
- Tạo nguồn cho các lớp chuyên Toán ở Trung học phổ thông và giúp các em học sinh lớp 9 thi vào lớp 10 chuyên Toán.
- Giúp các cán bộ chỉ đạo môn Toán, các thầy cô giáo dạy Toán có thêm tài liệu để chỉ đạo và giảng dạy chuyên sâu về Toán tại các hoạt động chuyên đề, ngoại khóa, các câu lạc bộ Toán học nhằm bồi dưỡng cho học sinh về kiến thức, kĩ năng, tư duy và những phẩm chất tốt trong học tập, nghiên cứu và sáng tạo, góp phần vào việc đào tạo và bồi dưỡng nhân tài.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã và đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học, các trường Trung học cơ sở có uy tín, những chuyên gia Toán có kinh nghiệm ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Cuốn sách **Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở Toán 7, tập hai : Hình học** gồm 11 chuyên đề cơ bản và 4 chuyên đề nâng cao.

Ở mỗi chuyên đề cơ bản, cuốn sách không lặp lại các nội dung đã có trong Sách giáo khoa mà chỉ tóm tắt các kiến thức cơ bản, đồng thời bổ sung thêm một số kiến thức cần thiết. Do đó, khi giảng dạy các chuyên đề, các thầy cô giáo nên sử dụng kết hợp tài liệu này với Sách giáo khoa. Các ví dụ minh họa được chọn lọc nhằm giúp học sinh biết cách giải và trình bày một số dạng toán nâng cao thường gặp. Sau đó là các bài tập có hướng dẫn giải.

Các chuyên đề nâng cao nhằm giúp bạn đọc hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình, chúng được trình bày để học sinh có thể tiếp thu được.

Chúng tôi hi vọng cuốn sách này sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.

Mặc dù các tác giả đã làm việc nhiệt tình, nghiêm túc và có trách nhiệm, tuy nhiên, cuốn sách vẫn khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc. Các góp ý xin gửi về

*Ban Toán - Tin, Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội,
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, Hà Nội.*

Chủ biên
VŨ HỮU BÌNH

CÁC CHUYÊN ĐỀ CƠ BẢN

Chương I

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Chuyên đề 1. CÁC GÓC TẠO BỞI HAI ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

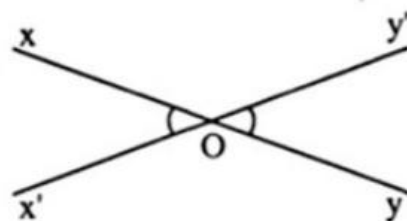
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hai góc đối đỉnh

* Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh góc kia (h.1.1).

* Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

$\widehat{xOx'}$ và $\widehat{yOy'}$ là hai góc đối đỉnh $\Rightarrow \widehat{xOx'} = \widehat{yOy'}$.

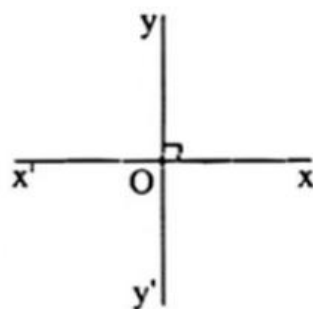


Hình 1.1

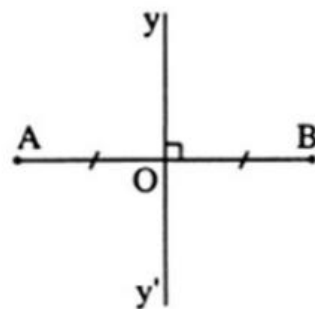
2. Hai đường thẳng vuông góc

* Hai đường thẳng vuông góc là hai đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông (h.1.2).

* Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy (h.1.3).



Hình 1.2



Hình 1.3

3. Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì :
- Hai góc so le trong còn lại bằng nhau ;
 - Hai góc đồng vị bằng nhau.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1.1. Qua điểm O, vẽ bốn đường thẳng phân biệt.

a) Có bao nhiêu góc trong hình vẽ ? Trong các góc ấy, có bao nhiêu cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt ?

b) Cũng hỏi như câu a), trong trường hợp có n đường thẳng phân biệt đi qua O.

Giải.

a) Bốn đường thẳng phân biệt cắt nhau tại O, tạo thành 8 tia chung gốc O nên có $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ góc, trong đó có 4 góc bẹt, còn lại $28 - 4 = 24$ góc nhỏ hơn góc bẹt.

Mỗi góc trong 24 góc này đều có một góc đối đỉnh với nó, do đó trong hình có $24 : 2 = 12$ cặp góc đối đỉnh.

b) Có n đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành 2n tia chung gốc, mỗi tia tạo với một trong (2n - 1) tia còn lại (2n - 1) góc nên 2n tia tạo với các tia còn lại $2n(2n - 1)$ góc. Nhưng mỗi góc đã được tính hai lần. Vậy có $\frac{2n(2n - 1)}{2} = n(2n - 1)$ góc,

trong đó có n góc bẹt, còn lại $n(2n - 1) - n = 2n(n - 1)$ góc nhỏ hơn góc bẹt. Mỗi góc trong $2n(n - 1)$ góc này đều có một góc đối đỉnh với nó và chúng tạo thành một cặp góc đối đỉnh. Vậy có $\frac{2n(n - 1)}{2} = n(n - 1)$ cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt.

Lưu ý : Vì có n góc bẹt nên có n cặp góc bẹt đối đỉnh. Do đó, nếu kể cả các cặp góc bẹt đối đỉnh thì có $n(n - 1) + n = n^2$ cặp góc đối đỉnh.

Ví dụ 1.2. Cho hai tia Ox, Oy vuông góc với nhau. Ở miền trong của góc xOy vẽ hai tia OA, OB sao cho $\widehat{AOx} = \widehat{BOy} = 30^\circ$. Vẽ tia OC sao cho tia Oy là tia phân giác của góc AOC. Chứng tỏ rằng :

a) Tia OA là tia phân giác của góc BOx ;

b) $OB \perp OC$.

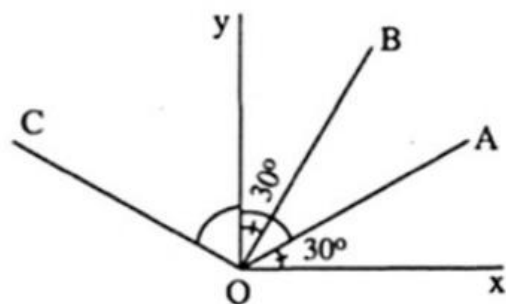
Giải. (h.1.4)

a) Tia OB nằm giữa hai tia Ox và Oy nên

$$\widehat{BOx} = \widehat{xOy} - \widehat{BOy}.$$

Vì $Ox \perp Oy$ nên $\widehat{xOy} = 90^\circ$.

$$\text{Do đó } \widehat{BOx} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$



Hình 1.4

Tia OA nằm giữa hai tia Ox và OB nên

$$\widehat{BOA} = \widehat{BOx} - \widehat{AOx} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

Suy ra $\widehat{AOx} = \widehat{BOA}$.

Tia OA nằm trong góc BOx và $\widehat{AOx} = \widehat{BOA}$ nên tia OA là tia phân giác của góc BOx.

b) Tia Oy là tia phân giác của góc AOC nên

$$\widehat{AOC} = 2\widehat{AOy} = 2.60^\circ = 120^\circ.$$

Tia OB nằm giữa hai tia OA và OC nên

$$\widehat{BOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOB} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Do đó $OB \perp OC$.

Ví dụ 1.3. Cho hình 1.5.

a) Kể tên các cặp góc so le trong, cặp góc đồng vị.

b) Cho biết thêm $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} + \widehat{DCB} + \widehat{CBA} = 360^\circ$.

Tính x.

Giải. (h.1.5)

a) Các cặp góc so le trong : $\widehat{ABC}$ và $\widehat{yAB}$;
 $\widehat{ADC}$ và $\widehat{DCx}$.

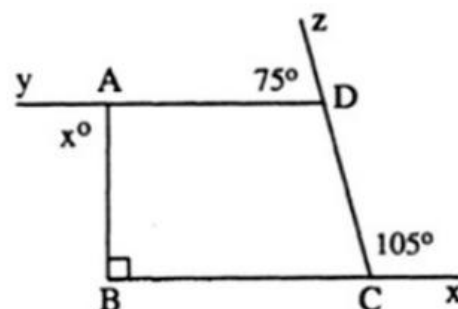
Cặp góc đồng vị : $\widehat{BCD}$ và $\widehat{ADz}$.

b) Ta có $\widehat{ADC} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

$$\widehat{DCB} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

$$\widehat{BAD} = 360^\circ - 90^\circ - 75^\circ - 105^\circ = 90^\circ.$$

$$\text{Do đó } x^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$



Hình 1.5

BÀI TẬP

1.1. Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.

1.2.* Cho 6 đường thẳng cắt nhau tại O. Xét các góc không có điểm trong chung, chứng tỏ rằng tồn tại một góc lớn hơn 30° , tồn tại một góc nhỏ hơn 30° .

1.3. Trên đường thẳng AA' lấy điểm O . Trên một nửa mặt phẳng bờ AA' vẽ tia OB sao cho $\widehat{AOB} = 45^\circ$, trên nửa mặt phẳng còn lại vẽ tia OC vuông góc với tia OA .

a) Gọi OB' là tia phân giác của góc $A'OC$. Chứng tỏ rằng hai góc AOB và $A'OB'$ là hai góc đối đỉnh.

b) Trên nửa mặt phẳng bờ AA' chứa tia OB vẽ tia OD vuông góc với OB . Tính góc $A'OD$, rồi suy ra OA' là tia phân giác của góc $B'OD$.

1.4. Cho hai góc kề nhau AOB và BOC có tổng bằng 160° và $\widehat{AOB} - \widehat{BOC} = 120^\circ$.

a) Tính các góc AOB và BOC .

b) Ở miền trong của góc AOC , vẽ $OD \perp OC$. Tia OD có phải là tia phân giác của góc AOB không?

c) Vẽ tia OC' là tia đối của tia OC . So sánh hai góc AOC và BOC' .

1.5. Chứng minh rằng hai tia phân giác của hai góc kề bù vuông góc với nhau.

1.6. Cho góc $\widehat{AOB} = 150^\circ$. Ở miền ngoài của góc AOB vẽ các tia $OC \perp OA$, $OD \perp OB$. Gọi Ox là tia phân giác của góc AOB , Oy là tia đối của tia Ox .

a) Chứng tỏ rằng Oy là tia phân giác của góc COD .

b) So sánh hai góc xOC và yOB .

1.7. Cho góc vuông AOB và tia OC nằm trong góc đó. Vẽ tia Ox sao cho OA là tia phân giác của góc xOC , vẽ tia Oy sao cho OB là tia phân giác của góc yOC . Chứng tỏ rằng Ox , Oy là hai tia đối nhau.

1.8. Ở miền trong của góc tù xOy , vẽ các tia Oz và Ot lần lượt vuông góc với Ox , Oy . Chứng tỏ rằng :

a) $\widehat{xOt} = \widehat{yOz}$;

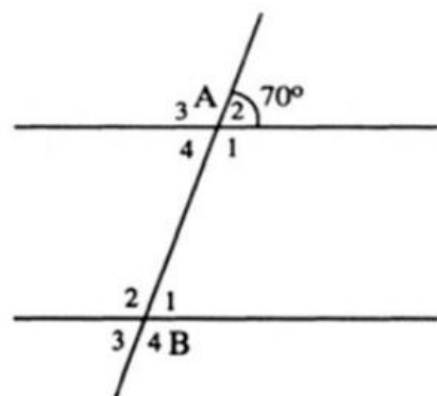
b) $\widehat{xOy} + \widehat{zOt} = 180^\circ$.

1.9. Cho góc nhọn AOB . Trên nửa mặt phẳng chứa tia OB bờ là đường thẳng OA vẽ tia $OA' \perp OA$, trên nửa mặt phẳng chứa tia OA bờ là đường thẳng OB vẽ tia $OB' \perp OB$. Chứng tỏ rằng :

a) Hai góc AOB và $A'OB'$ có chung tia phân giác ;

b) $\widehat{AOB} + \widehat{A'OB'} = 180^\circ$.

1.10. Cho hình 1.6. Biết $\widehat{A_4} = \widehat{B_1}$. Tính số đo các cặp góc so le trong, số đo các cặp góc đồng vị.



Hình 1.6

Chuyên đề 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hai đường thẳng song song

* Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

* Hai đường thẳng phân biệt thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

2. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a , b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì hai đường thẳng a và b song song với nhau.

3. Tiên đề Euclid (Ơ-clít)

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

4. Tính chất của hai đường thẳng song song

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì :

- a) Hai góc so le trong bằng nhau ;
- b) Hai góc đồng vị bằng nhau ;
- c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

5. Quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song

* Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

* Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.

6. Ba đường thẳng song song

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

7. Định lý

* Định lý là một khẳng định suy ra từ những khẳng định được coi là đúng.

Mỗi định lý được phát biểu dưới dạng : "Nếu có A thì có B".

Có A là phần giả thiết ; Có B là phần kết luận.

* Chứng minh định lý là dùng lập luận để từ giả thiết suy ra kết luận.

Bổ sung :

Định lí thuận, định lí đảo.

1. Nói chung trong một định lí, nếu đổi kết luận thành giả thiết và đổi giả thiết thành kết luận thì được một mệnh đề mới gọi là mệnh đề đảo của định lí đã cho. Nếu mệnh đề đảo này đúng thì nó được gọi là định lí đảo của định lí đã cho. Định lí cho trước gọi là định lí thuận.

Dạng tổng quát :

- Định lí thuận : Nếu có A thì có B.
 - Định lí đảo : Nếu có B thì có A.
2. Một định lí có thể có phần giả thiết tương đối phức tạp. Chẳng hạn : "Nếu có A_1 và A_2 thì có B". Khi đó có nhiều cách lập mệnh đề đảo :
 - Đảo toàn bộ : Nếu có B thì có A_1 và A_2 .
 - Đảo bộ phận : Nếu có B và có A_1 thì có A_2 . Nếu có B và có A_2 thì có A_1 .

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.1. Cho hình 2.1. Biết $\widehat{CAx} + \widehat{ACB} > 180^\circ$, chứng minh rằng :

- a) Nếu $Ax \parallel By$ thì $\widehat{xAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBy} = 360^\circ$;
- b) Nếu $\widehat{xAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBy} = 360^\circ$ thì $Ax \parallel By$.

Giải.

- a) Trên nửa mặt phẳng bờ CB chứa tia By vẽ tia $Cm \parallel Ax$ (h.2.1).

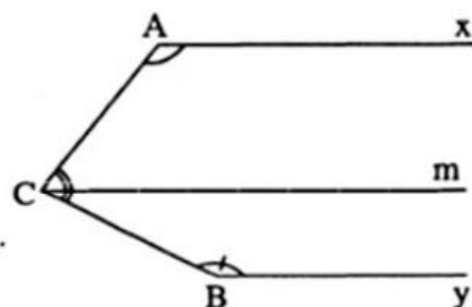
Ta có $\widehat{xAC}$ và $\widehat{ACm}$ là hai góc trong cùng phía,
nên : $\widehat{xAC} + \widehat{ACm} = 180^\circ$ (1),

Theo đề bài : $\widehat{xAC} + \widehat{ACB} > 180^\circ$. Kết hợp với (1) suy ra : $\widehat{ACm} < \widehat{ACB}$, nên tia Cm nằm giữa hai tia CA và CB, do đó $\widehat{ACB} = \widehat{ACm} + \widehat{mCB}$.

Do $Cm \parallel Ax$, mà $Ax \parallel By$ (theo đề bài), nên $Cm \parallel By$, suy ra $\widehat{mCB} + \widehat{CBy} = 180^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{xAC} + (\widehat{ACm} + \widehat{mCB}) + \widehat{CBy} = 360^\circ$,

hay $\widehat{xAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBy} = 360^\circ$.



Hình 2.1

b) Giải như phần a) ta được :

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACm} + \widehat{mCB} \text{ và } \widehat{xAC} + \widehat{ACm} = 180^\circ.$$

Theo đề bài : $\widehat{xAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBy} = 360^\circ$, do đó

$$(\widehat{xAC} + \widehat{ACm}) + \widehat{mCB} + \widehat{CBy} = 360^\circ.$$

Suy ra $180^\circ + \widehat{mCB} + \widehat{CBy} = 360^\circ$, do đó $\widehat{mCB} + \widehat{CBy} = 180^\circ$.

Hai góc $\widehat{mCB}$ và $\widehat{CBy}$ là hai góc trong cùng phía của hai đường thẳng Cm và By, chúng bù nhau nên $By \parallel Cm$.

Từ $By \parallel Cm$ và $Cm \parallel Ax$ suy ra $Ax \parallel By$.

Chú ý : Lời giải của câu a và câu b đều có một phần chung là $\widehat{ACB} = \widehat{ACm} + \widehat{mCB}$ và $\widehat{xAC} + \widehat{ACm} = 180^\circ$. Vì thế bài giải có thể trình bày gọn như sau :

Phần đầu của bài giải tiến hành như cách giải trên để có :

$$\widehat{xAC} + \widehat{ACm} = 180^\circ \quad (1).$$

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACm} + \widehat{mCB} \quad (2).$$

a) Do $Cm \parallel Ax$ nên nếu $Ax \parallel By$ (theo đề bài) thì $Cm \parallel By$, ta có

$$\widehat{mCB} + \widehat{CBy} = 180^\circ \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta được $\widehat{xAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBy} = 360^\circ$.

b) Nếu $\widehat{xAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBy} = 360^\circ$ (theo đề bài) (4).

Từ (1), (2) và (4) ta được $\widehat{mCB} + \widehat{CBy} = 180^\circ$.

Hai góc $\widehat{mCB}$ và $\widehat{CBy}$ là hai góc trong cùng phía của hai đường thẳng Cm và By, chúng bù nhau nên $Cm \parallel By$. Mà $Ax \parallel Cm$ suy ra $Ax \parallel By$.

Ví dụ 2.2. Chứng tỏ rằng : Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì :

a) Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù ;

b) Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù.

Giải.

Gọi xOy và $x'O'y'$ là hai góc có cạnh tương ứng song song :

$$Ox \parallel O'x' ; Oy \parallel O'y'.$$

a) Xét hai trường hợp :

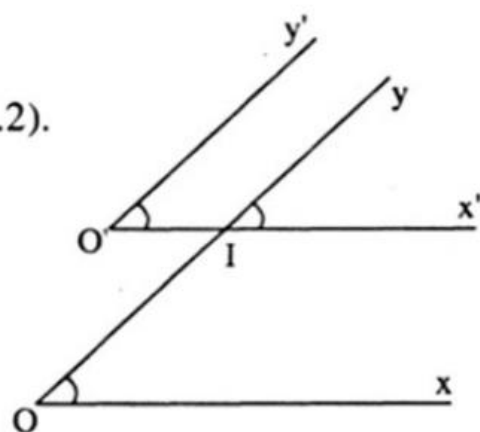
* Trường hợp $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ đều là góc nhọn (h.2.2).

Gọi I là giao điểm của tia Oy với tia O'x'.

Oy // O'y' nên $\widehat{x'O'y'} = \widehat{x'Iy}$ (hai góc đồng vị).

Ox // O'x' nên $\widehat{xOy} = \widehat{x'Iy}$ (hai góc đồng vị).

Suy ra $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.



Hình 2.2

* Trường hợp $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ đều là góc tù.

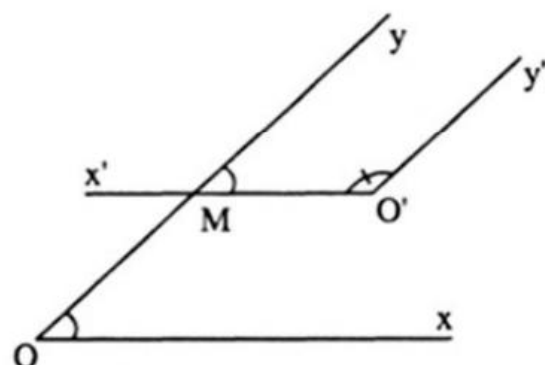
Chứng minh tương tự.

b) Trường hợp góc này nhọn, góc kia tù.

Chẳng hạn $\widehat{xOy}$ nhọn, $\widehat{x'O'y'}$ tù (h.2.3).

Gọi M là giao điểm của tia O'x' với tia Oy.

Chứng minh như câu a, ta có : $\widehat{O'My} = \widehat{xOy}$.



Hình 2.3

Vì góc O'My và góc x'O'y' là hai góc trong cùng phía của hai đường thẳng song song My // O'y' nên $\widehat{O'My} + \widehat{x'O'y'} = 180^\circ$.

Do đó $\widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^\circ$.

Chú ý : Trên hình 2.2, ta có Ox // O'x' và chiều từ O đến x cùng chiều với chiều từ O' đến x'. O'x' và Ox được gọi là hai tia song song "cùng chiều". Tương tự O'y' và Oy là hai tia song song cùng chiều.

Trên hình 2.3, O'y' và Oy là hai tia song song cùng chiều còn hai tia O'x' và Ox song song nhưng chiều từ O đến x ngược chiều với chiều từ O' đến x' nên gọi là hai tia song song "ngược chiều".

Do vậy, từ Ví dụ 2.2, ta có thể rút ra nhận xét sau :

Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì :

a) Chúng bằng nhau nếu cả hai cặp cạnh đều là các cặp tia cùng chiều ;

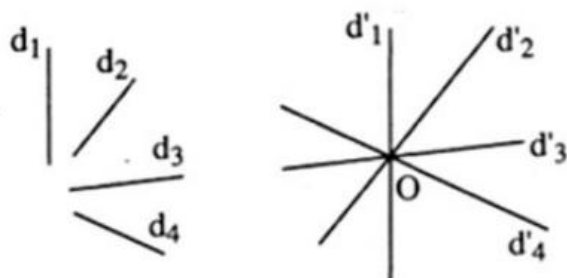
b) Chúng bù nhau nếu một cặp cạnh là cặp tia cùng chiều, cặp cạnh còn lại là cặp tia ngược chiều.

Ví dụ 2.3. Cho bốn đường thẳng trên một mặt phẳng trong đó không có hai đường thẳng nào song song với nhau. Chứng tỏ rằng trong bốn đường thẳng đó, tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc không vượt quá 45° .

Giải.

Gọi bốn đường thẳng đã cho là d_1, d_2, d_3, d_4 .

Qua điểm O bất kì, vẽ bốn đường thẳng d'_1, d'_2, d'_3, d'_4 tương ứng song song với bốn đường thẳng đã cho (h.2.4).



Hình 2.4

Trong bốn đường thẳng d'_1, d'_2, d'_3, d'_4 cũng không có hai đường thẳng nào trùng nhau, nên chúng tạo thành 8 góc đỉnh O không có điểm chung có tổng bằng 360° .

Nếu mỗi góc trong 8 góc này đều lớn hơn 45° thì tổng của chúng lớn hơn $45^\circ \cdot 8 = 360^\circ$, vô lí.

Như vậy, phải tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 45° .

Góc này bằng góc có cạnh tương ứng song song "cùng chiều" với nó (Ví dụ 2.2).

Vậy trong bốn đường thẳng đã cho, tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc không vượt quá 45° .

BÀI TẬP

2.1. Trên hình 2.5, ba đường thẳng AB, OC và DE có song song với nhau không? Vì sao?

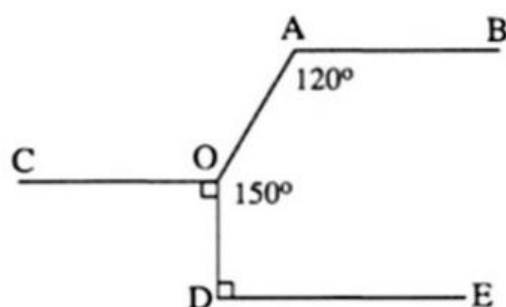
2.2. Cho góc nhọn $\widehat{xOy} = \alpha$, điểm A nằm trên Oy . Qua A vẽ tia AM . Tính số đo của góc OAm để Am song song với Ox .

2.3. Cho hình 2.6. Chứng tỏ rằng :

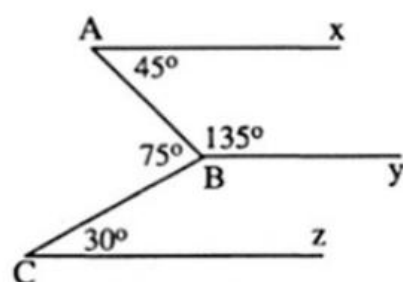
- a) $Ax \parallel By$; b) $Ax \parallel Cz$.

2.4. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì :

- a) Các tia phân giác của hai góc đồng vị song song với nhau ;
b) Các tia phân giác của hai góc trong cùng phía vuông góc với nhau.



Hình 2.5

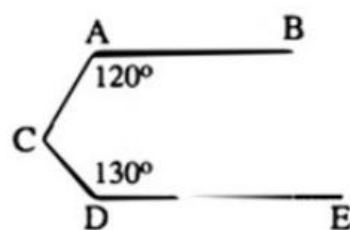


Hình 2.6

2.5. Trên hình 2.7, cho biết $AB \parallel DE$,

$$\widehat{BAC} = 120^\circ, \widehat{CDE} = 130^\circ.$$

Tính $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} + \widehat{CDE}$.



Hình 2.7

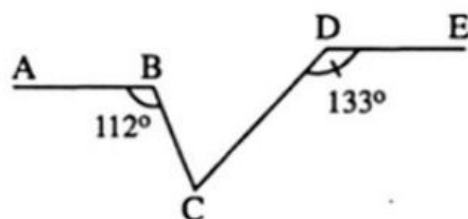
2.6. Chứng tỏ rằng : Nếu hai góc có cạnh

tương ứng vuông góc thì :

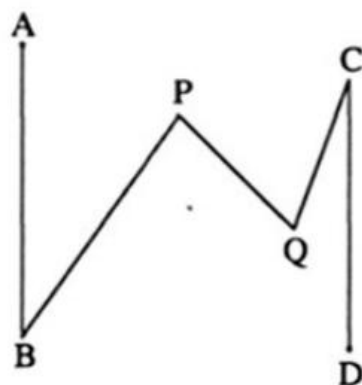
a) Chúng bằng nhau nếu cả hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.

b) Chúng bù nhau nếu góc này nhọn góc kia tù.

2.7. Cho hình 2.8, biết $AB \parallel DE$. Tính góc BCD.



Hình 2.8



Hình 2.9

2.8. Cho hình 2.9, biết $AB \parallel CD$, $\widehat{ABP} = 35^\circ$, $\widehat{BPQ} = 80^\circ$, $\widehat{QCD} = 20^\circ$.

Tính $\widehat{CQP}$.

2.9.* Đường thẳng EF cắt hai đường thẳng AB và CD lần lượt tại M và N. Cho biết

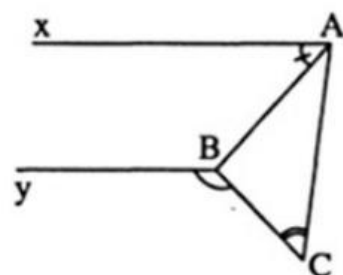
$\widehat{AME} = 3\widehat{EMB}$ và $\widehat{AME} + \widehat{EMB} + \widehat{MND} = 225^\circ$. Xác định quan hệ giữa hai đường thẳng AB và CD.

2.10.* Cho hình 2.10, biết $Ax \parallel By$ và

$\widehat{CBy} > \widehat{ACB}$. Chứng minh rằng

$\widehat{yBC} = \widehat{xAC} + \widehat{ACB}$. Lập và chứng

minh bài toán đảo của bài toán này.



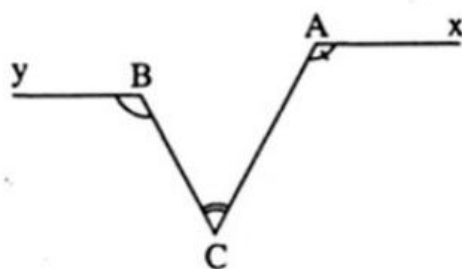
Hình 2.10

2.11. Cho hình 2.11 và $\widehat{CBy} > \widehat{ACB}$.

a) Chứng minh rằng nếu $Ax \parallel By$ thì
 $\widehat{CAx} + \widehat{CBy} - \widehat{ACB} = 180^\circ$.

b) Chứng minh rằng nếu

$\widehat{CAx} + \widehat{CBy} - \widehat{ACB} = 180^\circ$ thì $Ax \parallel By$.

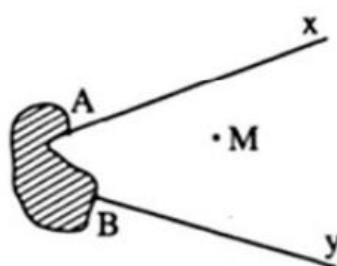


Hình 2.11

2.12.* Cho bảy đường thẳng trong đó không có hai đường thẳng nào song song.

Chứng minh rằng tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc nhỏ hơn 26° .

2.13.* Cho hình 2.12 trong đó vết mực đã xóa mất đỉnh O của góc xOy. Hãy trình bày cách vẽ qua M đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc xOy.



Hình 2.12

TAM GIÁC**Chuyên đề 3. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC****I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

1. Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .

$$\Delta ABC \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

2. Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.

* Trong một tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

$$\Delta ABC, \widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ.$$

3. Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác ấy.

* Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

Nhận xét : Góc ngoài của một tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

Bổ sung : Một tam giác có thể có ba góc nhọn nhưng không thể có nhiều hơn một góc tù.

Tam giác có ba góc nhọn gọi là *tam giác nhọn*. Tam giác có một góc tù gọi là *tam giác tù*.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 3.1. Cho tam giác ABC, hai đường phân giác AD, BE. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\widehat{ADC} = \widehat{BEC}$ thì $\widehat{A} = \widehat{B}$;

b) Nếu $\widehat{ADB} = \widehat{BEC}$ thì $\widehat{A} + \widehat{B} = 120^\circ$.

Giải.

- a) (h.3.1a) Góc ADC là góc ngoài tại đỉnh D của ΔADB , ta có :

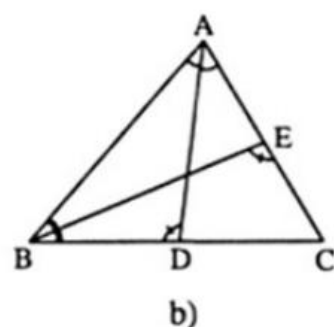
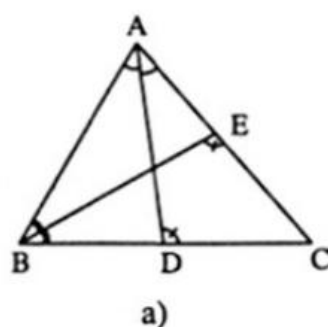
$$\widehat{ADC} = \widehat{B} + \widehat{BAD} = \widehat{B} + \frac{\widehat{BAC}}{2} \quad (1).$$

Tương tự $\widehat{BEC} = \widehat{BAC} + \frac{\widehat{B}}{2}$ (2).

Nếu $\widehat{ADC} = \widehat{BEC}$ thì từ (1) và (2),

$$\text{ta có } \widehat{B} + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{BAC} + \frac{\widehat{B}}{2},$$

$$\text{suy ra } \frac{1}{2}\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{B} \text{ do đó } \widehat{A} = \widehat{B}.$$



Hình 3.1

b) (h.3.1b) Trong tam giác ABD, ta có $\widehat{ADB} + \widehat{B} + \widehat{DAB} = 180^\circ$,

$$\text{suy ra } \widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{B} - \frac{\widehat{A}}{2} \quad (3).$$

Nếu $\widehat{ADB} = \widehat{BEC}$ thì từ (2) và (3), ta có $\widehat{A} + \frac{\widehat{B}}{2} = 180^\circ - \widehat{B} - \frac{\widehat{A}}{2}$,

$$\text{suy ra : } \frac{3}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ, \text{ do đó } \widehat{A} + \widehat{B} = 120^\circ.$$

Ví dụ 3.2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Đường phân giác góc ngoài BAx của tam giác cắt tia CB tại E.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AEB} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$;

b) Tính số đo các góc B, C của tam giác ABC, biết $\widehat{A} = 60^\circ$ và $\widehat{AEB} = 15^\circ$.

Giải. (h.3.2)

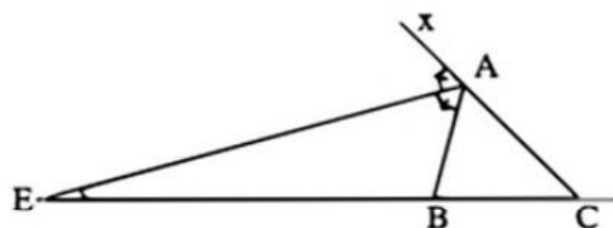
a) Góc ABC là góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABE, ta có

$$\widehat{ABC} = \widehat{E} + \widehat{BAE} = \widehat{E} + \frac{\widehat{xAB}}{2},$$

$$\text{suy ra } \widehat{E} = \widehat{B} - \frac{\widehat{xAB}}{2}$$

Trong tam giác AEC ta lại có $\widehat{E} + \widehat{EAC} + \widehat{C} = 180^\circ$,

$$\text{suy ra } \widehat{E} = 180^\circ - \frac{\widehat{xAB}}{2} - \widehat{A} - \widehat{C} \quad (2).$$



Hình 3.2

Từ (1) và (2), ta được :

$$2\hat{E} = 180^\circ - (\widehat{xAB} + \hat{A}) + \hat{B} - \hat{C}$$

$$2\hat{E} = 180^\circ - 180^\circ + \hat{B} - \hat{C}$$

$$2\hat{E} = \hat{B} - \hat{C}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{AEB} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}.$$

$$\text{b) Từ câu a), suy ra } \hat{B} - \hat{C} = 2\widehat{AEB} = 30^\circ \quad (3).$$

Theo tính chất tổng các góc của tam giác, ta có $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$ nên

$$\hat{B} + \hat{C} = 120^\circ \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $2\hat{B} = 150^\circ$, do đó $\hat{B} = 75^\circ$, từ đó $\hat{C} = 45^\circ$.

Vậy $\hat{B} = 75^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$.

BÀI TẬP

3.1. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng $\widehat{BOC} > \widehat{BAC}$.

3.2. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 180^\circ - 3\hat{C}$ và $\hat{B} = 70^\circ$.

a) Tính các góc của tam giác ABC.

b) Vẽ tia phân giác của góc B cắt AC tại E. Qua E kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại D. Chứng minh rằng ED là tia phân giác của góc AEB.

3.3. Cho tam giác ABC ($\hat{A} \neq \hat{B}$). Các tia phân giác trong và ngoài của góc C lần lượt cắt đường thẳng BA tại D và E. Tính góc CED theo góc A và góc B của tam giác ABC.

3.4. Cho tam giác ABC. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Tính các góc của tam giác ABC, biết $\widehat{ADB} = 80^\circ$ và $\hat{B} = 1,5\hat{C}$.

3.5.* Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BOC} = \hat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$.

b) Biết $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ và tia BO là tia phân giác của góc B, chứng minh CO là tia phân giác của góc C.

- 3.6.* Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E, trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho tia phân giác của góc C và góc AED cắt nhau tại I. Tính góc CIE theo các góc ABC và ADE.
- 3.7. Cho tam giác ABC, có $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$, tia phân giác của góc A cắt BC tại D.
- Tính các góc ADC và ADB.
 - Vẽ AH vuông góc với BC ($H \in BC$), tính góc HAD.

Chuyên đề 4. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau.

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C' \\ \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'. \end{cases}$$

2. Các trường hợp bằng nhau của tam giác

* Trường hợp bằng nhau thứ nhất cạnh – cạnh – cạnh (c-c-c).

Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

* Trường hợp bằng nhau thứ hai cạnh – góc – cạnh (c-g-c).

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Từ trường hợp bằng nhau cạnh – góc – cạnh nói trên, ta suy ra :

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

* Trường hợp bằng nhau thứ ba góc – cạnh – góc (g-c-g).

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Từ trường hợp bằng nhau góc – cạnh – góc nói trên, ta suy ra :

Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 4.1. Cho tam giác ABC có $AB = AC$, M là trung điểm của cạnh BC. Trên tia đối của các tia BC và CB lấy tương ứng hai điểm D và E sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng AM là tia phân giác chung của góc BAC và góc DAE.

Giải. (h.4.1)

$\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ có :

$AB = AC$ (giả thiết) ;

$MB = MC$ (giả thiết) ;

AM : cạnh chung.

Vậy $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c-c-c),

suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$.

Do đó AM là tia phân giác của góc BAC

$\triangle AMB = \triangle AMC$ nên $\widehat{AMD} = \widehat{AME}$.

Theo giả thiết $MB = MC$, $BD = CE$,

suy ra $MB + BD = MC + CE$ hay $MD = ME$.

Do đó $\triangle AMD = \triangle AME$ (c-g-c), suy ra $\widehat{MAD} = \widehat{MAE}$ nên AM là tia phân giác của góc DAE

Từ (1) và (2) suy ra AM là tia phân giác chung của hai góc BAC và DAE.

Ví dụ 4.2. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} \neq 90^\circ$). Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C, vẽ tia $Ax \perp AB$ rồi lấy trên đó điểm E sao cho $AE = AB$; trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ tia $Ay \perp AC$ rồi lấy trên đó điểm D sao cho $AD = AC$.

a) Chứng minh rằng $BD = CE$ và $BD \perp CE$.

b) Hai đường thẳng AB và DE có vuông góc với nhau hay không ? Vì sao ?

Giải.

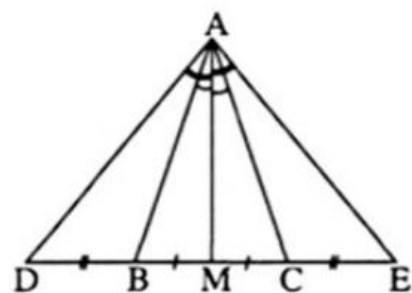
Xét hai trường hợp :

* Trường hợp $\widehat{A} < 90^\circ$ (h.4.2).

a) Ta có :

$$\widehat{EAC} = \widehat{EAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC},$$

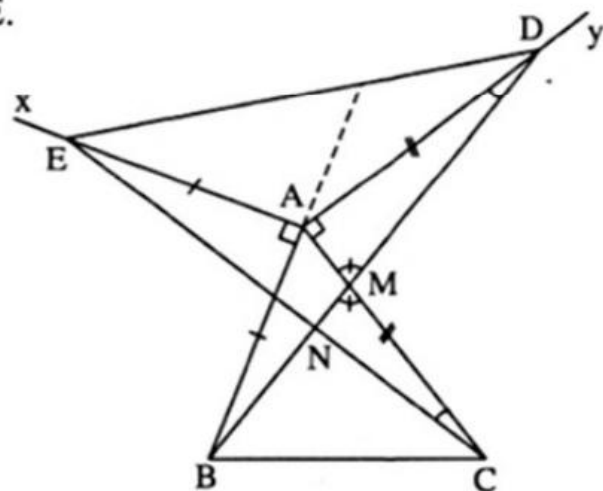
$$\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 90^\circ + \widehat{BAC}.$$



Hình 4.1

(1).

(2).



Hình 4.2

Suy ra $\widehat{EAC} = \widehat{BAD}$.

$AE = AB$ (giả thiết);

$AC = AD$ (giả thiết).

Vậy $\triangle AEC = \triangle ABD$ (c-g-c). Do đó $BD = CE$.

Gọi giao điểm của BD với AC và EC lần lượt là M và N .

Ta có $\widehat{CMN} = \widehat{DMA}$ (đối đỉnh). $\triangle AEC = \triangle ABD$ nên $\widehat{MCN} = \widehat{MDA}$.

Suy ra $\widehat{CMN} + \widehat{MCN} = \widehat{DMA} + \widehat{MDA} = 90^\circ$, do đó $\widehat{MNC} = 90^\circ$.

Vậy $BD \perp CE$.

b) Nếu $AB \perp DE$ thì từ điểm E ngoài đường thẳng AB có hai đường thẳng EA và ED cùng vuông góc với đường thẳng AB .

Điều này trái với tiên đề Euclid về đường thẳng vuông góc.

Vậy hai đường thẳng AB và DE không vuông góc với nhau.

* Trường hợp $\hat{A} > 90^\circ$, chứng minh tương tự.

Ví dụ 4.3. Cho tam giác ABC , D là trung điểm của cạnh AB , E là trung điểm của cạnh AC . Chứng minh $DE \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2}BC$.

Giải. (h.4.3)

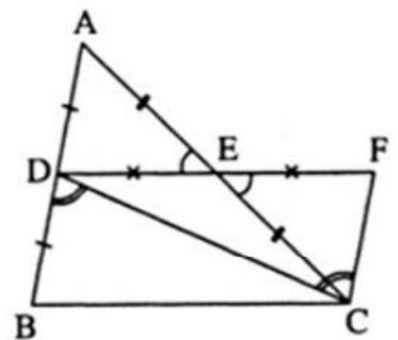
Trên tia đối của tia ED lấy điểm F sao cho $EF = ED$.

$\triangle EAD$ và $\triangle ECF$ có:

$EA = EC$ (giả thiết);

$\widehat{AED} = \widehat{CEF}$ (đối đỉnh);

$ED = EF$ (theo cách vẽ).



Hình 4.3

Do đó $\triangle EAD = \triangle ECF$ (c-g-c), suy ra $\widehat{EAD} = \widehat{ECF}$, $CF = AD$. Mà $AD = DB$ (giả thiết), nên $CF = BD$.

$\widehat{EAD} = \widehat{ECF}$, hai góc này lại ở vị trí so le trong của hai đường thẳng AB và CF nên $CF \parallel AB$, suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{FCD}$ (so le trong).

$\triangle BCD$ và $\triangle FDC$ có :

$DB = CF$ (chứng minh trên) ;

$\widehat{BDC} = \widehat{FCD}$ (chứng minh trên) ;

CD : cạnh chung.

Vậy $\triangle BCD = \triangle FDC$ (c-g-c). Suy ra :

* $\widehat{BCD} = \widehat{CDF}$. Mà hai góc này ở vị trí so le trong của hai đường thẳng BC và DF nên $DF \parallel BC$, tức là $DE \parallel BC$.

* $BC = DF$. Mà $DF = 2DE$, do đó $DE = \frac{1}{2}BC$.

Vậy $DE \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2}BC$.

Chú ý : Đoạn thẳng DE nối trung điểm hai cạnh AB và AC của tam giác ABC được gọi là đường trung bình của tam giác ABC . Vì thế ta có thể rút ra nhận xét sau : Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

Ví dụ 4.4. Cho tam giác ABC , $\widehat{A} = 120^\circ$. Hai đường phân giác BD và CE của tam giác cắt nhau tại O . Trên cạnh BC lấy hai điểm I và K sao cho $\widehat{IOB} = \widehat{KOC} = 30^\circ$. Chứng minh rằng :

a) $OI \perp OK$;

b) $BE + CD < BC$.

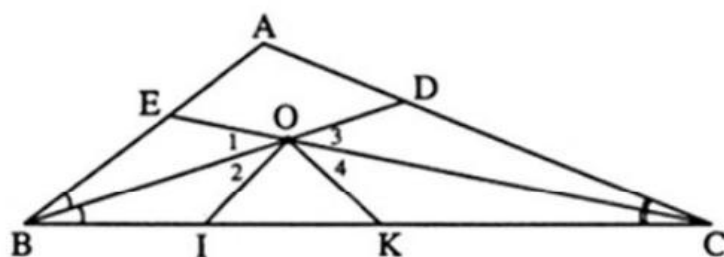
Giải. (h.4.4)

a) Xét $\triangle BOC$, ta có :

$$\begin{aligned}\widehat{BOC} &= 180^\circ - (\widehat{OBC} + \widehat{OCB}) \\ &= 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \\ &= 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.\end{aligned}$$

$$\widehat{O_1} = \widehat{EOB} = 180^\circ - \widehat{BOC} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ, \text{ suy ra}$$

$$\widehat{O_3} = \widehat{O_1} = 30^\circ \text{ (hai góc đối đỉnh).}$$



Hình 4.4

$$\widehat{IOK} = \widehat{BOC} - (\widehat{O_2} + \widehat{O_4}) = 150^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Vậy $OI \perp OK$.

b) $\triangle OEB$ và $\triangle OIB$ có :

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \text{ (bằng } 30^\circ \text{)} ;$$

OB : cạnh chung ;

$$\widehat{OBE} = \widehat{OBI} \text{ (giả thiết).}$$

Vậy $\triangle OEB = \triangle OIB$ (g-c-g), suy ra $BE = BI$ (1).

Tương tự $\triangle ODC = \triangle OKC$ (g-c-g), suy ra $CD = CK$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BE + CD = BI + CK < BI + CK + IK = BC$.

BÀI TẬP

* Trường hợp bằng nhau c-c-c

4.1. Cho góc nhọn xOy . Trên Ox , Oy tương ứng lấy hai điểm A và B khác O sao cho $OA = OB$. Vẽ hai đường tròn tâm A và B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại M và N nằm trong góc xOy . Chứng minh rằng :

a) Ba điểm O , M , N thẳng hàng ;

b) MN là tia phân giác của góc AMB .

4.2. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi H là trung điểm của cạnh BC .

a) Chứng minh rằng AH là tia phân giác của góc BAC và AH vuông góc với BC .

b) Trên tia đối của tia HA lấy điểm K sao cho $HK = HA$. Chứng minh rằng $CK \parallel AB$.

4.3. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B , vẽ tam giác ACD sao cho $AD = BC$, $CD = AB$. Chứng minh rằng $AB \parallel CD$ và $AH \perp AD$.

* Trường hợp bằng nhau c-g-c

4.4. Cho tam giác ABC . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC , AB . Trên tia đối của các tia MB và NC lấy các điểm D và E sao cho $MD = MB$, $NE = NC$. Chứng minh rằng A là trung điểm của đoạn thẳng DE .

4.5. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 90^\circ$, $BC = 2AB$. Tia phân giác của góc B cắt cạnh AC tại D.

a) Chứng minh rằng $DB = DC$; b) Tính góc B, góc C của tam giác ABC.

4.6. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\widehat{A} = 90^\circ$ thì $MA = \frac{1}{2}BC$; b) Nếu $MA = \frac{1}{2}BC$ thì $\widehat{A} = 90^\circ$.

4.7. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của đoạn thẳng đó. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB, kẻ hai tia Ax và By sao cho $Ax \parallel By$. Trên tia Ax lấy hai điểm C và E (E nằm giữa A và C), trên tia By lấy hai điểm D và F sao cho $BD = AC$, $BF = AE$. Chứng minh rằng :

a) Ba điểm C, O, D thẳng hàng và ba điểm E, O, F thẳng hàng ;

b) $DE = CF$ và $DE \parallel CF$.

4.8. Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa A và B (C không trùng với trung điểm của AB). Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB, kẻ hai tia $Ax \perp AB$ và $By \perp AB$. Trên tia Ax lấy hai điểm M, M' ; trên tia By lấy hai điểm N, N' sao cho $AM = BC$, $BN = AC$, $AM' = AC$, $BN' = BC$. Chứng minh rằng :

a) $AN = BM'$; $AN' = BM$; $MC = NC$.

b) MN' và $M'N$ cắt nhau tại điểm O là trung điểm của AB.

4.9. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AE = AC$.

a) Chứng minh rằng $DE \perp BC$.

b) Cho biết $4\widehat{B} = 5\widehat{C}$, tính $\widehat{AED}$.

4.10. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $\widehat{B} = 45^\circ$. Vẽ phân giác AD. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho $AE = BC$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $CF = AB$. Chứng minh rằng $BE = BF$ và $BE \perp BF$.

4.11.* Cho góc xAy khác góc bẹt, Az là tia phân giác của góc xAy, B là điểm cố định trên Ax, C là điểm chuyển động trên đoạn AB, D là điểm chuyển động trên tia Ay sao cho $AD = BC$. Chứng minh rằng đường trung trực của CD luôn đi qua một điểm cố định khi C và D chuyển động.

4.12.* Cho tam giác ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ tia $Ax \perp AB$, trên tia Ax lấy điểm F sao cho $AF = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ

AC không chứa điểm B, vẽ tia Ay $\perp$ AC, trên đó lấy điểm H sao cho AH = AC. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng :

- a) FH = 2AD ; b) FH $\perp$ AD.

4.13. Cho tam giác ABC, AB = AC. Gọi M là trung điểm của AB. Vẽ điểm D sao cho B là trung điểm của AD. Chứng minh $CM = \frac{1}{2}CD$.

*** Trường hợp bằng nhau g-c-g**

4.14. Cho tam giác ABC. Qua A vẽ đường thẳng xy $\parallel$ BC. Từ điểm M trên cạnh BC vẽ các đường thẳng song song với AB, AC, chúng cắt xy theo thứ tự tại D và E. Chứng minh rằng :

- a) $\triangle ABC = \triangle MDE$; b) Ba đường thẳng AM, BD, CE đồng quy.

4.15.* Cho tam giác ABC. Ở miền ngoài của tam giác ABC, vẽ hai tam giác ABD và ACE là những tam giác vuông tại A và có AD = AB, AE = AC. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC và M là trung điểm của BC. Tia HA cắt DE tại K, tia MA cắt DE tại I. Chứng minh rằng :

- a) AI $\perp$ DE ; b) KD = KE.

4.16.* Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 90^\circ$ và AB = AC. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy điểm D và E sao cho AD = AE. Qua A và D kẻ đường vuông góc với BE cắt BC lần lượt tại M và N. Tia ND cắt tia CA tại I. Chứng minh rằng :

- a) A là trung điểm của CI ; b) CM = MN.

Chuyên đề 5. TAM GIÁC CÂN. TAM GIÁC ĐỀU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tam giác cân

- * Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.
- * Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.
- * Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.
- * Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

2. Tam giác đều

- * Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.
- * Trong một tam giác đều, mỗi góc bằng 60° .
- * Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.
- * Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

Bổ sung :

- * Trong một tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° thì cạnh đối diện với góc ấy bằng nửa cạnh huyền.
- * Trong một tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông ấy bằng 30° .

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 5.1. Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại O. Biết $OC = AB$, tính góc ACB.

Giải.

Trước hết ta thấy rằng góc ACB không thể là góc vuông.

Vì nếu $\widehat{ACB} = 90^\circ$ thì E và O trùng với C nên $CO = 0$, do đó $CO \neq AB$, trái với giả thiết.

Xét hai trường hợp :

a) Trường hợp $\widehat{ACB} < 90^\circ$ (h.5.1)

$\triangle EAB$ và $\triangle EOC$ có :

$$\widehat{AEB} = \widehat{OEC} = 90^\circ,$$

$$AB = OC \text{ (giả thiết),}$$

$$\widehat{ABE} = \widehat{OCE} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BAC}).$$

Do đó $\triangle EAB = \triangle EOC$ (cạnh huyền – góc nhọn).

Suy ra $EB = EC$. Vậy $\triangle EBC$ vuông cân tại E.

Ta có $\widehat{ECB} = 45^\circ$ hay $\widehat{ACB} = 45^\circ$.

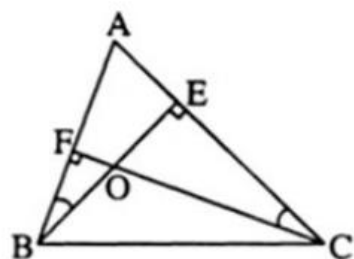
b) Trường hợp $\widehat{ACB} > 90^\circ$ (h.5.2)

$\triangle EAB$ và $\triangle EOC$ có :

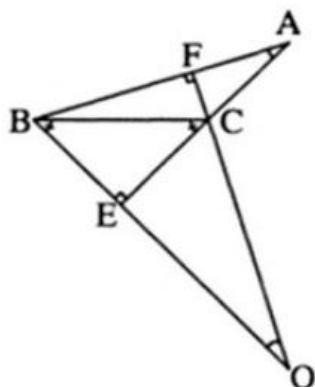
$$\widehat{AEB} = \widehat{OEC} = 90^\circ,$$

$$AB = OC \text{ (giả thiết),}$$

$$\widehat{EAB} = \widehat{EOC} \text{ (cùng phụ với } \widehat{ABO}).$$



Hình 5.1



Hình 5.2

Do đó $\triangle EAB = \triangle EOC$ (cạnh huyền – góc nhọn).

Suy ra $EB = EC$. Vậy $\triangle EBC$ vuông cân tại E, ta có

$$\widehat{BCE} = 45^\circ \text{ nên } \widehat{ACB} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Tóm lại, $\widehat{ACB} = 45^\circ$ hoặc $\widehat{ACB} = 135^\circ$.

Ví dụ 5.2. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính $\widehat{BDC}$.

Giải.

Theo đề bài, tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 20^\circ$

$$\text{ nên } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ.$$

Cách 1. (h.5.3)

Trên nửa mặt phẳng bờ BC, chứa điểm A, dựng tam giác đều BEC thì điểm E thuộc miền trong của tam giác ABC, suy ra

$$\widehat{ACE} = \widehat{ACB} - \widehat{ECB} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ.$$

$\triangle AEB$ và $\triangle AEC$ có :

$AB = AC$ (giả thiết),

AE : cạnh chung,

$EB = EC$ (vì $\triangle BEC$ đều).

Do đó $\triangle AEB = \triangle AEC$ (c-c-c), suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{CAE} = \frac{1}{2} \widehat{A} = 10^\circ$.

$\triangle DAC$ và $\triangle ECA$ có :

$AD = EC$ (vì cùng bằng BC),

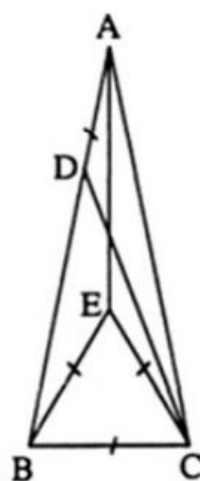
$\widehat{DAC} = \widehat{ECA}$ (cùng bằng 20°),

AC : cạnh chung.

Do đó $\triangle DAC = \triangle ECA$ (c-g-c), suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{EAC} = 10^\circ$.

Góc BDC là góc ngoài của tam giác ADC, nên

$$\widehat{BDC} = \widehat{DAC} + \widehat{ACD} = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ.$$



Hình 5.3

Cách 2. (h.5.4)

Trên nửa mặt phẳng bờ AB, chứa điểm C, vẽ tam giác đều AIB.

Ta có $IA = IB = AB = AC$;

$$\widehat{IAC} = \widehat{IAB} - \widehat{CAB} = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ;$$

$$\widehat{IBC} = \widehat{CBA} - \widehat{IBA} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ.$$

Tam giác AIC cân tại A vì có $AI = AC$ nên

$$\begin{aligned}\widehat{AIC} &= \widehat{ACI} = (180^\circ - \widehat{IAC}) : 2 \\ &= (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ,\end{aligned}$$

$$\text{suy ra } \widehat{BCI} = \widehat{BCA} + \widehat{ACI} = 80^\circ + 70^\circ = 150^\circ.$$

$\triangle ADC$ và $\triangle BCI$ có :

$$AD = BC \text{ (giả thiết),}$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{IBC} \text{ (cùng bằng } 20^\circ),$$

$$AC = BI.$$

Do đó $\triangle ADC = \triangle BCI$ (c-g-c), suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{BCI} = 150^\circ$,

$$\text{do đó } \widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

Ví dụ 5.3. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 2AB$. Gọi D là điểm trên cạnh AC sao cho $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$, E là một điểm trên cạnh AB sao cho

$$\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}. \text{ BD và CE cắt nhau tại F ; I và K theo thứ tự là chân các đường}$$

vuông góc kẻ từ F đến BC và AC. Vẽ các điểm G và H sao cho I là trung điểm của FG, K là trung điểm của FH. Chứng minh rằng ba điểm H, D, G thẳng hàng.

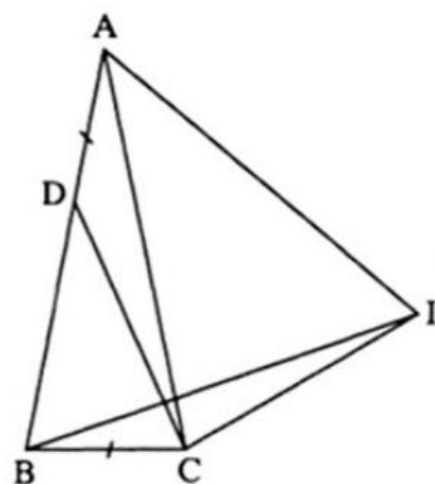
Giải. (h.5.5)

Theo đề bài $\triangle ABC$ vuông tại A,

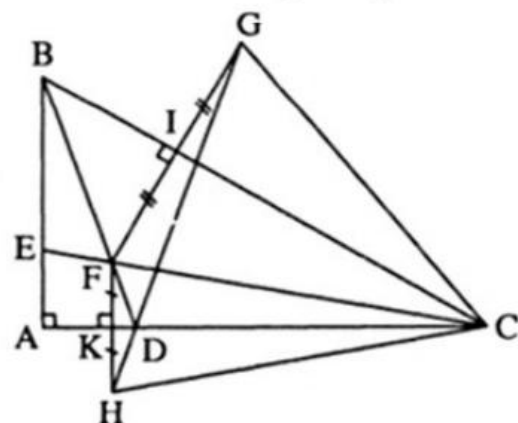
$$\text{có } BC = 2AB \text{ nên } \widehat{ABC} = 60^\circ; \widehat{ACB} = 30^\circ.$$

$$\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC} = 20^\circ \text{ nên } \widehat{DBC} = 40^\circ;$$

$$\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB} = 10^\circ \text{ nên } \widehat{BCE} = 20^\circ.$$



Hình 5.4



Hình 5.5

$\triangle CIF$ và $\triangle CIG$ có :

$$IF = IG \text{ (giả thiết),}$$

$$\widehat{CIF} = \widehat{CIG} = 90^\circ,$$

IC : cạnh chung.

Do đó $\triangle CIF = \triangle CIG$ (c-g-c), suy ra $CG = CF$ và $\widehat{ICG} = \widehat{ICF} = 20^\circ$.

Tương tự $\triangle CKF = \triangle CKH$ (c-g-c), suy ra $CF = CH$ và $\widehat{KCH} = \widehat{KCF} = 10^\circ$.

Từ đó ta có $CG = CH$ và $\widehat{GCF} + \widehat{FCH} = 2\widehat{ACB} = 60^\circ$, do đó $\widehat{CHG} = 60^\circ$.

$\triangle DKF = \triangle DKH$ vì có $KF = KH$ (giả thiết), $\widehat{DKF} = \widehat{DKH} = 90^\circ$, cạnh DK chung, do đó $DF = DH$, vì thế $\triangle CDF = \triangle CDH$ (c-c-c), suy ra $\widehat{CHD} = \widehat{CFD}$. Tam giác ABD vuông tại A có $\widehat{ABD} = 20^\circ$ nên $\widehat{ADB} = 70^\circ$, do đó $\widehat{CDF} = 110^\circ$ suy ra $\widehat{CFD} = 180^\circ - \widehat{CDF} - \widehat{FCD} = 180^\circ - 110^\circ - 10^\circ = 60^\circ$ vì thế $\widehat{CHD} = 60^\circ$.

Ta có $\widehat{CHD} = 60^\circ = \widehat{CHG}$. Mà hai tia HD và HG cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng HC nên HD trùng với HG, nghĩa là ba điểm H, D, G thẳng hàng.

BÀI TẬP

5.1. Cho tam giác ABC, $AB < AC$. Qua trung điểm D của cạnh BC vẽ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc A, cắt AB và AC theo thứ tự tại M và N.

a) Chứng minh rằng $BM = CN$. b) Tính BM, AM theo $AC = b$, $AB = c$.

5.2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $AM + AN = 2AB$. Gọi I là giao điểm của MN và BC. Chứng minh rằng I là trung điểm của MN.

5.3. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 100^\circ$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $AE = BC$. Tính góc AEC.

5.4. Cho tam giác ABC, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, đường cao AH. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Chứng minh rằng đường thẳng EH cắt AC tại trung điểm của AC.

5.5.* Cho tam giác ABC, $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{A} = 15^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2BC$. Vẽ $DE \perp AC$ ($E \in AC$).

a) Chứng minh rằng $EB = ED$. b) Tính $\widehat{ADB}$.

- 5.15.* Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 80^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm I sao cho $\widehat{BAI} = 50^\circ$; trên cạnh AC lấy điểm K sao cho $\widehat{ABK} = 30^\circ$. Hai đoạn thẳng AI và BK cắt nhau tại H. Chứng minh rằng tam giác HIK là tam giác cân.
- 5.16.* Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 100^\circ$, tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Chứng minh rằng $BC = BD + AD$.
- 5.17. Cho tam giác nhọn ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C, vẽ tia Ax; trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ tia Ay sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{CAy} = 21^\circ$. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ điểm B và điểm C đến Ax và Ay; M là trung điểm của BC.
- Chứng minh rằng tam giác MEF là tam giác cân.
 - Tính các góc của tam giác MEF.
- 5.18.* Cho tam giác ABC, hai đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I. Biết $ID = IE$ và $AD = AE$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.
- 5.19. Cho tam giác ABC cân tại A, phân giác BD ($D \in AC$), vẽ phân giác DM của góc BDC ($M \in BC$). Đường phân giác của góc ADB cắt tia BC tại N. Chứng minh $BD = \frac{1}{2}MN$.

Chuyên đề 6. TAM GIÁC VUÔNG VÀ ĐỊNH LÝ PYTHAGORE

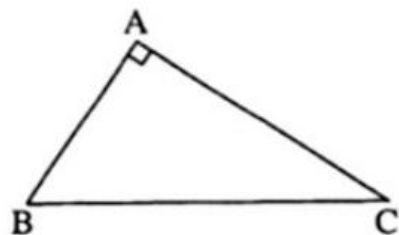
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định lý Pythagore (Py-ta-go)

* Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.

* Đảo lại, nếu một tam giác có bình phương một cạnh bằng tổng bình phương hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$$\triangle ABC, \widehat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$



Hình 6.1

2. Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông

Ngoài các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông suy ra từ các trường hợp bằng nhau cạnh – góc – cạnh, góc – cạnh – góc và trường hợp cạnh huyền – góc nhọn, đối với tam giác vuông còn có trường hợp bằng nhau cạnh huyền – cạnh góc vuông :

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 6.1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D và E lần lượt là các điểm trên hai cạnh AB và AC (D, E không trùng với đỉnh của tam giác). Chứng minh rằng $BE^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

Giải. (h.6.2)

Áp dụng định lí Pythagore vào các tam giác vuông ADC, ABE, ADE, ABC ta lần lượt có :

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 \quad (1).$$

$$BE^2 = AE^2 + AB^2 \quad (2).$$

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 \quad (3).$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (4).$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$CD^2 + BE^2 = AD^2 + AC^2 + AE^2 + AB^2 \quad (5).$$

Từ (3) và (4) suy ra :

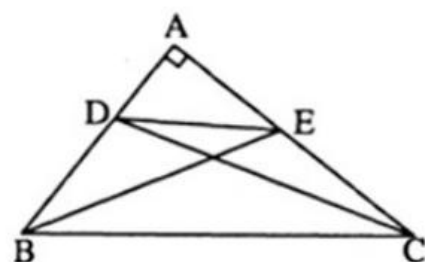
$$DE^2 + BC^2 = AD^2 + AE^2 + AB^2 + AC^2 \quad (6).$$

Từ (5) và (6) ta được $CD^2 + BE^2 = DE^2 + BC^2$.

Ví dụ 6.2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Qua D vẽ đường vuông góc với BC cắt AC tại E.

a) So sánh độ dài AE và DE.

b) Đường phân giác góc ngoài tại C cắt đường thẳng BE tại K. Tính $\widehat{BAK}$.



Hình 6.2

Giải. (h.6.3)

a) $\triangle ABE$ và $\triangle DBE$ có :

$$\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ \text{ (vì } AE \perp AB, ED \perp BC),$$

$$AB = BD \text{ (giả thiết),}$$

BE : cạnh chung.

Vậy $\triangle ABE = \triangle DBE$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Do đó $AE = DE$.

b) Từ câu a) suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{DBE}$, do đó BK là phân giác của góc ABC .

Vẽ $KN \perp BA$, $KH \perp AC$, $KM \perp BC$.

Tam giác vuông KMC và tam giác vuông KHC có :

$$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \text{ (giả thiết) ; cạnh } KC \text{ chung.}$$

Do đó $\triangle KMC = \triangle KHC$ (cạnh huyền – góc nhọn), ta có $KM = KH$. (1)

Ta lại có $\triangle KMB = \triangle KNB$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $KM = KN$. (2)

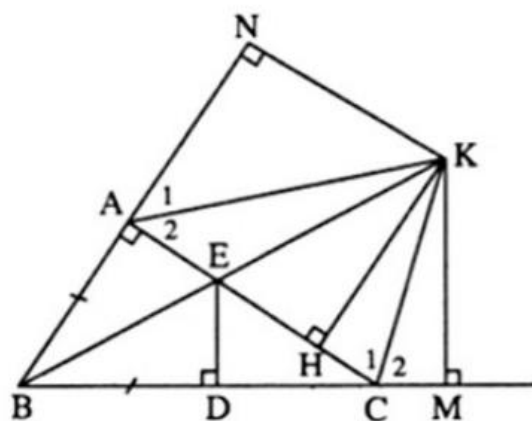
Từ (1) và (2) suy ra $KH = KN$.

Tam giác vuông AKH và tam giác vuông AKN có :

$$KH = KN ; \text{ cạnh } AK \text{ chung.}$$

Do đó $\triangle AKH = \triangle AKN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông),

suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 45^\circ$. Vậy $\widehat{BAK} = 135^\circ$.



Hình 6.3

BÀI TẬP

* Định lí Pythagore

- 6.1. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6$, $\widehat{B} = 30^\circ$. Phân giác của góc C cắt AB tại D . Tính độ dài các đoạn thẳng AD , BD .
- 6.2. Tam giác vuông ABC có cạnh huyền $BC = 102\text{cm}$. Hai cạnh góc vuông tỉ lệ với 8 và 15. Tính các cạnh góc vuông AB , AC .
- 6.3. Cho tam giác ABC , $\widehat{A} = 90^\circ$, $AB = 8\text{cm}$, $BC = 17\text{cm}$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC , không chứa điểm B , vẽ $CD \perp AC$ sao cho $CD = 36\text{cm}$. Tính tổng $AB + BC + CD + DA$.
- 6.4. Cho tam giác vuông cân ABC , $\widehat{A} = 90^\circ$. Một đường thẳng d kẻ qua A . Từ B và C kẻ BH và CE vuông góc với d ($H \in d$, $E \in d$). Chứng minh rằng tổng $BH^2 + CE^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d .

6.5.* Cho O là điểm tùy ý trong tam giác ABC. Vẽ OA_1, OB_1, OC_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

$$AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2.$$

6.6.* Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 30^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{CBD} = 60^\circ$. Tính độ dài AD, biết $BC = a$.

6.7.* Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH và điểm D nằm giữa A và H. Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho $HE = AD$. Đường thẳng vuông góc với AH tại D cắt AC tại F. Chứng minh rằng $EB \perp EF$.

*** Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông**

6.8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Vẽ $EK \perp AC$ ($K \in AC$). Chứng minh rằng $AK = AH$.

6.9.* Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, E là điểm nằm giữa B và C nhưng không trùng với M. Kẻ BH, CK vuông góc với AE (H và K thuộc AE). Tam giác MHK có đặc điểm gì ? Vì sao ?

6.10. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M. Đường thẳng vuông góc với BE kẻ từ E cắt AC tại N. Chứng minh rằng :

a) BC cắt MN tại I là trung điểm của MN ;

b) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên đoạn BC.

6.11. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của các tia BC và CB tương ứng lấy hai điểm D và E sao cho $BD = CE$. Gọi M là trung điểm của BC. Từ B và C kẻ $BH \perp AD, CK \perp AE$ ($H \in AD, K \in AE$). Chứng minh rằng ba đường thẳng BH, CK, AM đồng quy.

6.12. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{C} = 30^\circ$, đường cao AH. Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ $CE \perp AD$. Chứng minh rằng :

a) Tam giác ABD là tam giác đều ;

b) EH song song với AC.

6.13. Cho tam giác cân ABC, $\widehat{A} = 90^\circ$. Qua A kẻ đường thẳng d. Từ B và C kẻ $BD \perp d, CE \perp d$. Tính độ dài DE theo BD và CE.

6.14. Cho tam giác ABC vuông tại A, hai đường phân giác BM và CN. Từ M và N kẻ $MM' \perp BC$ và $NN' \perp BC$ ($M', N' \in BC$). Chứng minh rằng $\widehat{M'AN'} = 45^\circ$.

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

Chuyên đề 7. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH TRONG TAM GIÁC. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

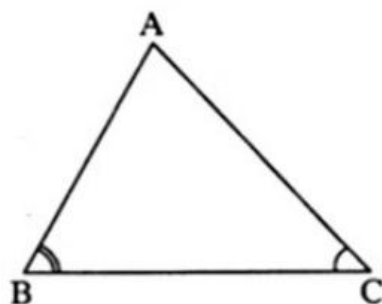
1. Quan hệ giữa góc và cạnh trong một tam giác

Trong một tam giác :

- Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn ;
- Cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Trong hình 7.1, tam giác ABC có

$$AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}.$$



Hình 7.1

2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu

Xét các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ một điểm ở ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó, ta có các định lý sau :

- Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên.
- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.
- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau. Đảo lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

Bổ sung :

Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau nhưng các góc xen giữa không bằng nhau thì đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn. Đảo lại, đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

$$\Delta ABC \text{ và } \Delta A'B'C' \text{ có } AB = A'B', AC = A'C' : \hat{B} > \hat{B}' \Leftrightarrow AC > A'C'.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 7.1. Cho tam giác ABC, $AB < AC$, M là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng $\widehat{MAB} > \widehat{MAC}$, từ đó suy ra tia phân giác của góc BAC cắt BC tại một điểm nằm giữa B và M.

b) Vẽ tia Mx sao cho MA là tia phân giác của góc BMx. Gọi D là giao điểm của Mx với AC. Chứng minh $MB > MD$.

Giải. (h.7.2)

a) Trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho $MN = MA$.

$\triangle MCN$ và $\triangle MBA$ có :

$$MC = MB \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{CMN} = \widehat{AMB} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$MN = MA \text{ (theo cách vẽ).}$$

Do đó $\triangle MCN = \triangle MBA$ (c-g-c), suy ra :

$$\widehat{MNC} = \widehat{MAB} \quad (1)$$

và $CN = AB$. Mà $AB < AC$ (giả thiết), do đó $CN < AC$.

Khi đó trong tam giác CAN, ta có $\widehat{ANC} > \widehat{NAC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAM} > \widehat{MAC}$

$$\text{nên } \widehat{BAM} > \frac{1}{2} \widehat{BAC} \quad (3).$$

Gọi I là giao điểm của cạnh BC với tia phân giác của góc BAC,

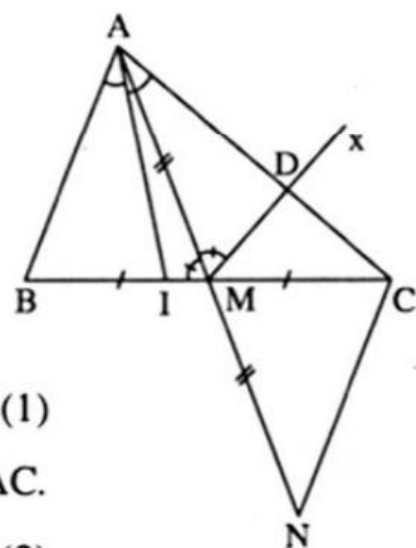
$$\text{ta có } \widehat{BAI} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BAI} < \widehat{BAM}$ nên tia AI nằm giữa hai tia AB và AM, do đó điểm I nằm giữa hai điểm B và M.

b) Tam giác AMD có $\widehat{MDC} > \widehat{DMA}$.

$$\text{Mà } \widehat{DMA} = \widehat{AMB}, \text{ do đó } \widehat{MDC} > \widehat{AMB} \quad (5).$$

$$\text{Tam giác AMC có } \widehat{AMB} > \widehat{MCA} \text{ hay } \widehat{AMB} > \widehat{MCD} \quad (6).$$



Hình 7.2

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{MDC} > \widehat{MCD}$.

Khi đó trong ΔMCD ta có $MC > MD$. Mà $MC = MB$.

Vậy $MB > MD$.

Ví dụ 7.2. Cho tam giác ABC , $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 54^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{DBC} = 18^\circ$. Chứng minh rằng $BD < AC$.

Giải. (h.7.3)

Do $\hat{B} = 54^\circ$ (giả thiết), $\widehat{DBC} = 18^\circ$ (giả thiết),

nên $\widehat{ABD} = 36^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.

Vẽ phân giác BE của góc ABD ,

ta có $\widehat{ABE} = \widehat{EBD} = 18^\circ$.

Từ E kẻ $EF \perp BD$.

ΔAEB và ΔFEB có :

$$\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ ;$$

BE : cạnh chung ;

$$\widehat{ABE} = \widehat{FBE}.$$

Vậy $\Delta AEB = \Delta FEB$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $AE = EF$. (1)

ΔBEC cân tại B vì có $\widehat{EBC} = \widehat{ECB} = 36^\circ$ nên $EB = EC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC = AE + EC = EF + EB$. (3)

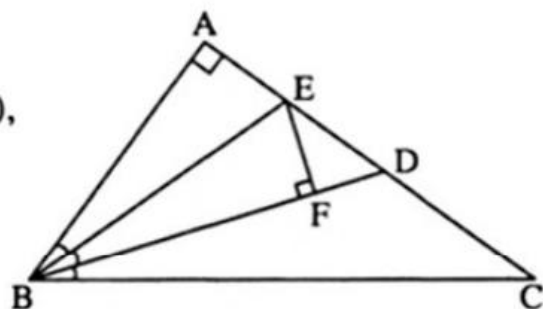
ΔABD có $\widehat{ADB} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$, tức là $\widehat{EDF} = 54^\circ$.

ΔEDF có $\widehat{EDF} = 54^\circ > \widehat{DEF}$ nên $EF > FD$. (4)

Ta lại có $EB > BF$ (5) (đường xiên lớn hơn đường vuông góc).

Từ (4) và (5) suy ra $EF + EB > FD + BF = BD$. (6)

Từ (3) và (6) suy ra $AC > BD$.



Hình 7.3

Ví dụ 7.3. Dùng định lý về hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau để giải bài toán sau : Cho tam giác ABC , $AB < AC$. Hai đường cao BD và CE . So sánh BD và CE .

Giải. (h.7.4)

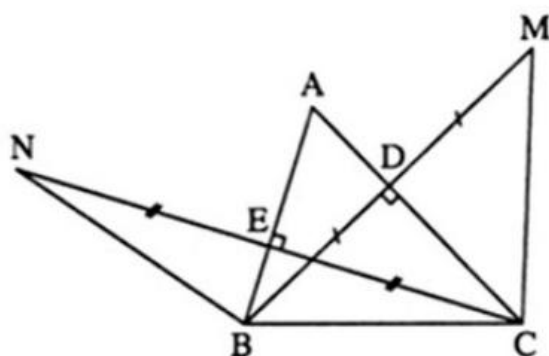
Trên tia đối của tia DB lấy điểm M sao cho $DM = DB$, suy ra $BM = 2BD$.

$\triangle DMC$ và $\triangle DBC$ có :

$$MD = DB,$$

$$\widehat{CDM} = \widehat{CDB} = 90^\circ,$$

CD : cạnh chung.



Hình 7.4

Do đó $\triangle DMC = \triangle DBC$ (c-g-c), nên $CM = CB$, $\widehat{MCD} = \widehat{BCD}$, suy ra $\widehat{MCB} = 2\widehat{BCA}$ (1).

Tương tự, trên tia đối của tia EC lấy điểm N sao cho $EN = EC$, ta có $CN = 2CE$; $BN = BC$ và $\widehat{NBC} = 2\widehat{ABC}$ (2).

Vì $AC > AB$ (giả thiết), nên $\widehat{ABC} > \widehat{BCA}$, do đó từ (1) và (2) suy ra $\widehat{NBC} > \widehat{MCB}$.

$\triangle NBC$ và $\triangle MCB$ có :

$$NB = MC,$$

$$\widehat{NBC} > \widehat{MCB},$$

BC : cạnh chung.

Do đó $NC > MB$, suy ra $CE > BD$.

Nhận xét : Trong một tam giác, đường cao ứng với cạnh bé lớn hơn đường cao ứng với cạnh lớn.

Lưu ý : Nếu sử dụng công thức diện tích tam giác, ta giải bài toán trên như sau :

Ta có $AB \cdot CE = AC \cdot BD$ (cùng bằng 2 lần diện tích $\triangle ABC$).

Do đó nếu $AB < AC$ thì $CE > BD$.

BÀI TẬP

* Quan hệ giữa góc và cạnh trong tam giác

7.1. Cho tam giác ABC, $AB > AC$. Vẽ phân giác AD ($D \in BC$). Chứng minh $DB > DC$.

7.2. Cho tam giác ABC, $\widehat{B} > 90^\circ$. Gọi D là điểm trên tia đối của tia CB. Chứng minh rằng $AB < AC < AD$.

7.3. Cho tam giác ABC, $AB < AC$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CA$. Nối AD, AE. So sánh chu vi $\triangle ABD$ với chu vi $\triangle ACE$.

- 7.4. Trên cạnh BC của tam giác ABC cân tại A, lấy hai điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$. Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{EAC} < \widehat{DAE}$.
- 7.5. Cho tam giác ABC, $90^\circ < \hat{B} < 135^\circ$, $\hat{C} < 45^\circ$. Vẽ $AD \perp BC$.
Chứng minh rằng $BD < AD < CD$.
- 7.6. Cho tam giác đều ABC. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Trên cạnh AB lấy điểm D. Tia DM cắt AC tại E. Chứng minh rằng $MD < ME$.
- 7.7. Cho tam giác nhọn ABC, $\hat{B} > \hat{C}$, hai đường cao BD và CE. Chứng minh rằng $AC - AB > CE - BD$.
- 7.8. Cho tam giác ABC cân tại A, $\hat{A} = 110^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm D, biết $\widehat{ADC} = 105^\circ$. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD cắt tia BA tại E.
Chứng minh rằng $AE < CA = CE$ và $EC < BC < BE$.
- 7.9. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $BE = CD$. Từ C kẻ $Cx \parallel DE$; từ E kẻ $Ey \parallel CD$. Các tia Cx và Ey cắt nhau tại F. So sánh BC và CF.
- 7.10.* Cho góc xOy. Trên hai cạnh Ox và Oy lấy lần lượt các điểm A và B sao cho $OA + OB = 2a$. Xác định vị trí các điểm A và B sao cho AB có độ dài nhỏ nhất.
- 7.11.* Chứng minh rằng trong các tam giác có một góc bằng α và tổng hai cạnh kề góc ấy bằng s, tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.
- 7.12.* Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB < MC$. Trên đoạn AM lấy điểm O. Chứng minh rằng $\widehat{AOC} < \widehat{AOB}$.
- 7.13.* Cho tam giác ABC, $AB < AC$ và điểm P nằm trong tam giác sao cho $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống AB và AC, I là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $\widehat{HIB} < \widehat{KIC}$.
- 7.14.* Cho tam giác ABC, $AB > AC$. Trên các cạnh AB và AC lấy tương ứng các điểm N và M sao cho $AN = AM$. Gọi O là giao điểm của BM và CN. Chứng minh rằng $OB > OC$.
- 7.15.* Cho tam giác ABC. Trên tia đối của các tia CB, AC, BA lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $CA_1 = AB_1 = BC_1$. Chứng minh rằng nếu $A_1B_1C_1$ là tam giác đều thì ABC cũng là tam giác đều.

*** Đường vuông góc, đường xiên**

- 7.16. Cho tam giác ABC và điểm D nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng nếu $AD = AB$ thì $AB < AC$.
- 7.17. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$. Vẽ đường cao AH rồi lấy điểm O nằm giữa A và H.
- Chứng minh rằng góc B và góc C là các góc nhọn.
 - So sánh OB và OC ; OD và HD.
- 7.18. Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ trung điểm K của cạnh BC kẻ đường vuông góc với AK, cắt AB và AC lần lượt tại D và E. Gọi I là trung điểm của DE.
- Chứng minh rằng $AI \perp BC$.
 - Có thể nói DE nhỏ hơn BC được không ? Vì sao ?
- 7.19. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của cạnh AC. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của A và C trên BM. So sánh tổng $BD + BE$ với $2AB$.
- 7.20. Cho tam giác ABC, kẻ $AH \perp BC$, $BK \perp AC$. Biết rằng AH không nhỏ hơn BC, BK không nhỏ hơn AC. Tính các góc của tam giác ABC.
- 7.21.* Cho tam giác ABC, $\widehat{C} = 90^\circ$, đường cao CH. Chứng minh rằng
- $$AC + BC < AB + CH.$$
- 7.22.* Cho tam giác ABC vuông tại B, phân giác AD. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tia AD tại E. Chứng minh rằng chu vi $\triangle ECD$ lớn hơn chu vi $\triangle ABD$.
- 7.23. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} > 90^\circ$ và $AB = \frac{1}{2}AC$. Chứng minh rằng $\widehat{C} > \frac{\widehat{A}}{2}$.
- 7.24. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là một điểm tùy ý nằm trong $\triangle ABC$ sao cho $\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$. Chứng minh rằng $DC > DB$.

Chuyên đề 8. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

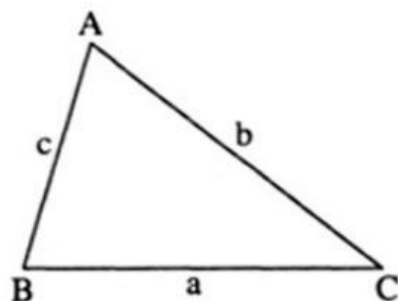
Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

Trong hình 8.1, ta có

$$|b - c| < a < b + c.$$

Bổ sung :

- Ba đoạn thẳng có độ dài a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nếu chúng thỏa mãn một trong các điều kiện sau :
 - Hoặc $a < b + c ; b < c + a ; c < a + b ;$
 - Hoặc $|b - c| < a < b + c ;$
 - Hoặc đoạn thẳng lớn nhất nhỏ hơn tổng của hai đoạn thẳng kia.
- Với ba điểm A, B, C bất kì, bao giờ cũng có :
 $AB \leq AC + CB$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A, B, C$ thẳng hàng và C nằm giữa A và B).



Hình 8.1

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 8.1. Cho tam giác ABC ($AC > AB$), tia phân giác của góc BAC cắt BC tại D , điểm E nằm trên đoạn thẳng AD . Chứng minh rằng $AC - AB > EC - EB$.

Giải. (h.8.2)

Vì $AC > AB$ (giả thiết), do đó trên cạnh AC lấy điểm K sao cho $AK = AB$ thì K nằm giữa A và C , ta có

$$KC = AC - AB \quad (1).$$

$\triangle AEB$ và $\triangle AEK$ có

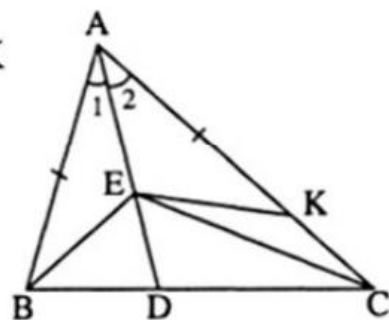
$AB = AK ; \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (giả thiết) ; AE là cạnh chung.

Do đó $\triangle AEB = \triangle AEK$ (c-g-c), suy ra $EB = EK$.

Xét $\triangle EKC$, ta có :

$$KC > EC - EK \text{ nên } KC > EC - EB \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $AC - AB > EC - EB$.



Hình 8.2

Ví dụ 8.2. Cho tam giác ABC, M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng

$$\frac{AB + AC - BC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}.$$

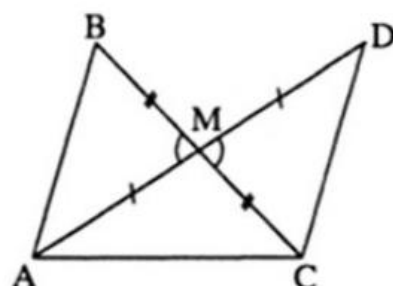
Giải. (h.8.3)

Xét các tam giác MAB và MAC, ta lần lượt có

$AM > AB - BM$; $AM > AC - MC$. Suy ra

$2AM > AB + AC - (BM + MC) = AB + AC - BC$,

do đó $AM > \frac{AB + AC - BC}{2}$. (1)



Hình 8.3

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$, ta có

$\triangle MAB = \triangle MDC$ (c-g-c), suy ra $CD = AB$.

Xét $\triangle ACD$, ta có $AD < AC + CD$, suy ra $2AM < AC + AB$, do đó

$$AM < \frac{AB + AC}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{AB + AC - BC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}$.

BÀI TẬP

8.1. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng

$$MB + MC < AB + AC.$$

8.2. Cho O là một điểm nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{AB + BC + CA}{2} < OA + OB + OC < AB + BC + CA.$$

8.3. Cho góc xOy khác góc bẹt, tia phân giác Oz. Từ điểm M trong góc xOz, vẽ $MH \perp Ox$ ($H \in Ox$), $MK \perp Oy$ ($K \in Oy$). Chứng minh rằng $MH < MK$.

8.4. Cho tam giác ABC, M là điểm trên phân giác ngoài của góc C.

Chứng minh rằng $MA + MB > AC + BC$.

- 8.5. Cho đoạn thẳng AD và hai điểm B, C nằm giữa A và D sao cho $AB = CD$ (B nằm giữa A và C). M là điểm nằm ngoài đường thẳng AD. Chứng minh rằng $MA + MD > MB + MC$.
- 8.6. Cho tam giác đều ABC và điểm O nằm trong tam giác. Chứng tỏ rằng ba đoạn OA, OB, OC là độ dài ba cạnh của một tam giác.
- 8.7.* Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi D và E là hai điểm theo thứ tự trên hai cạnh AB và AC sao cho $AD = AE$. Gọi K là điểm thuộc cạnh BC. Trên nửa mặt phẳng bờ AC, không chứa điểm B vẽ điểm I sao cho $\widehat{EAI} = \widehat{DAK}$ và $AI = AK$. Chứng minh rằng $KE + KD \geq AB$.
- 8.8.* Cho tam giác ABC, $\widehat{BAC} \geq 60^\circ$. Chứng minh rằng $AB + AC \leq 2BC$.

Chuyên đề 9. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Đường trung tuyến của tam giác là đoạn thẳng nối đỉnh của tam giác với trung điểm của cạnh đối diện.
- Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Giao điểm của các đường trung tuyến gọi là *trọng tâm* của tam giác.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 9.1. Cho tam giác ABC, ba đường trung tuyến AD, BE, CF. Từ F kẻ đường thẳng song song với AD cắt ED tại I.

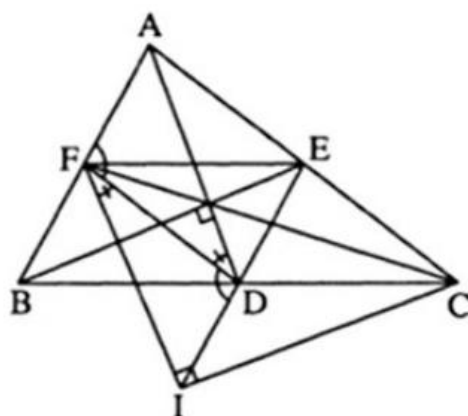
a) Chứng minh rằng $IC \parallel BE$ và $IC = BE$.

b) Cho biết $AD \perp BE$, chứng minh ICF là tam giác vuông và chu vi của tam giác này bằng tổng độ dài ba đường trung tuyến của tam giác ABC.

Giải. (h.9.1).

a) Vì D là trung điểm của BC, E là trung điểm của AC (giả thiết) nên theo Ví dụ 4.3, ta có $ED \parallel AB$ và $ED = \frac{1}{2}AB$, suy ra : $ED = AF$.

Do $ED \parallel AB$ suy ra $DI \parallel AF$; $FI \parallel AD$ (giả thiết) nên $\widehat{AFD} = \widehat{FDI}$ (so le trong) và $\widehat{ADF} = \widehat{IFD}$ (so le trong), do đó $\triangle AFD = \triangle IDF$ (g-c-g), nên $ID = AF$, suy ra $DI = DE$ và $FI = AD$.



Hình 9.1

Xét $\triangle BDE$ và $\triangle CDI$ có :

$ID = ED$, $\widehat{BDE} = \widehat{CDI}$ (đối đỉnh), $BD = DC$ (giả thiết).

Do đó $\triangle BDE = \triangle CDI$ (c-g-c).

Suy ra $BE = CI$ và $\widehat{EBC} = \widehat{BCI}$ nên $BE \parallel CI$.

b) Ta có $FI \parallel AD$ và $CI \parallel BE$. Mà $BE \perp AD$ (giả thiết), do đó $FI \perp IC$.

Vậy $\triangle ICF$ là tam giác vuông tại I.

Ta có chu vi $\triangle ICF$ bằng : $FI + IC + CF = AD + BE + CF$.

Vậy chu vi $\triangle ICF$ bằng tổng độ dài ba đường trung tuyến của tam giác ABC.

Ví dụ 9.2. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến AM và BN vuông góc với nhau tại G. Cho biết $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, chứng minh rằng $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Giải. (h.9.2)

Vì G là trọng tâm của $\triangle ABC$ (giả thiết) nên

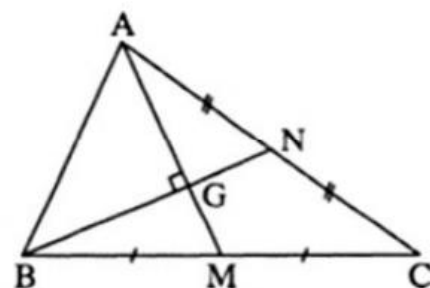
$$GA = \frac{2}{3}AM ; GM = \frac{1}{3}AM ; GB = \frac{2}{3}BN ;$$

$$GN = \frac{1}{3}BN.$$

Đặt $GM = x$, $GN = y$ thì $AM = 3x$, $BN = 3y$,
 $GA = 2x$, $GB = 2y$.

Áp dụng định lý Pythagore với $\triangle AGN$ và $\triangle BGM$, ta lần lượt có :

$$4x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4} \text{ và } x^2 + 4y^2 = \frac{a^2}{4}.$$



Hình 9.2

$$\text{Suy ra } 5(x^2 + y^2) = \frac{a^2 + b^2}{4} \quad (1).$$

Tam giác GAB vuông tại G, theo định lý Pythagore, ta có

$$4(x^2 + y^2) = c^2, \text{ suy ra } x^2 + y^2 = \frac{c^2}{4} \quad (2).$$

Thay (2) vào (1) ta được $a^2 + b^2 = 5c^2$.

BÀI TẬP

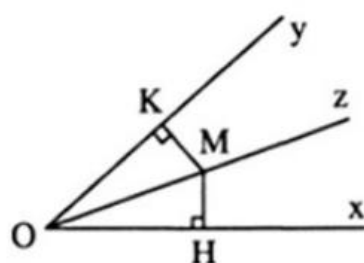
- 9.1. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BM và CN. Biết $AB < AC$, chứng minh rằng $BM < CN$.
- 9.2. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BM và CN. Biết $BM < CN$, chứng minh rằng $AB < AC$.
- 9.3. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng :
- Nếu ABC là tam giác đều thì $GA = GB = GC$;
 - Nếu $GA = GB = GC$ thì ABC là tam giác đều.
- 9.4. Cho tam giác ABC, O là một điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng :
- Nếu O là trọng tâm của tam giác thì $S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OCA}$;
 - Nếu $S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OCA}$ thì O là trọng tâm của tam giác ABC.
- 9.5. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 5\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$. Tính độ dài các đường trung tuyến AM, BN, CE.
- 9.6. Cho tam giác ABC, ba đường trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại O. Chứng minh rằng 6 tam giác OAE, OEC, OCD, ODB, OBF và OFA có diện tích bằng nhau.
- 9.7.* Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC ; M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Trên tia AG lấy điểm D sao cho M là trung điểm của GD.
- Tính các cạnh của tam giác BGD theo các đường trung tuyến của tam giác ABC ;
 - Tính các đường trung tuyến của tam giác BGD theo các cạnh của tam giác ABC.

Chuyên đề 10. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

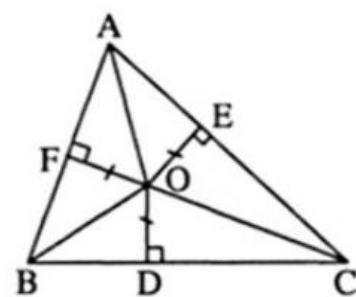
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

Đảo lại, điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó (h.10.1).



Hình 10.1



Hình 10.2

- Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm, điểm này cách đều ba cạnh của tam giác (h.10.2).

Bổ sung :

- Hai đường phân giác của hai góc ngoài của tam giác và tia phân giác của góc trong không kề với chúng cũng gặp nhau tại một điểm.
- Đối với tam giác cân, đường trung tuyến ứng với cạnh đáy cũng là đường phân giác của tam giác đó.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

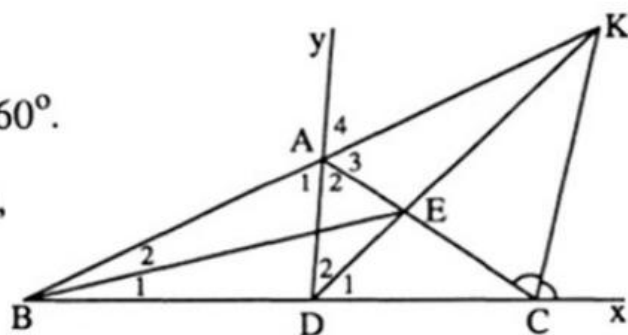
Ví dụ 10.1. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 120^\circ$, đường phân giác AD. Đường phân giác góc ngoài tại C cắt đường thẳng AB ở K. Gọi E là giao điểm của DK và AC. Tính số đo của góc BED.

Giải. (h.10.3)

Vì $\widehat{BAC} = 120^\circ$ nên $\widehat{A_3} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

AD là phân giác của góc BAC (giả thiết),

$$\text{nên } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 60^\circ.$$



Hình 10.3

Vẽ Ay là tia đối của tia AD ta có $\widehat{A_4} = \widehat{A_1} = 60^\circ$ (đối đỉnh).

Suy ra $\widehat{A_3} = \widehat{A_4} (= 60^\circ)$. Vậy AK là tia phân giác của góc CAy.

$\triangle ADC$ có K là giao điểm của hai tia phân giác góc ngoài tại C và A nên DK là phân giác của góc ADC, ta có $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$.

Do $\widehat{A_2} = \widehat{A_3} (= 60^\circ)$ nên AE là phân giác của góc DAK.

$\triangle ADB$ có E là giao điểm của hai tia phân giác góc ngoài tại A và D nên BE là phân giác của góc B, ta có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$. Do đó

$$\widehat{BED} = \widehat{D_1} - \widehat{B_1} = \frac{\widehat{ADC} - \widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Ví dụ 10.2. Cho tam giác ABC có BC = 17cm, CA = 15cm, AB = 8cm. Ba đường phân giác của tam giác cắt nhau tại O. Tính tổng các khoảng cách từ O đến ba cạnh của tam giác.

Giải. (h.10.4)

Ta có : $AB^2 + AC^2 = 8^2 + 15^2 = 289$,

$$BC^2 = 17^2 = 289.$$

Suy ra $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Do đó theo định lí Pythagore đảo, tam giác ABC vuông tại A.

Kẻ $OD \perp BC$, $OE \perp AB$, $OF \perp AC$.

Do O là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC nên $OD = OE = OF$

(1).

AO là phân giác của góc A nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 45^\circ$.

Suy ra $\triangle AEO$ vuông cân tại E, $\triangle AFO$ vuông cân tại F, ta có :

$$AE = AF = OE = OF$$

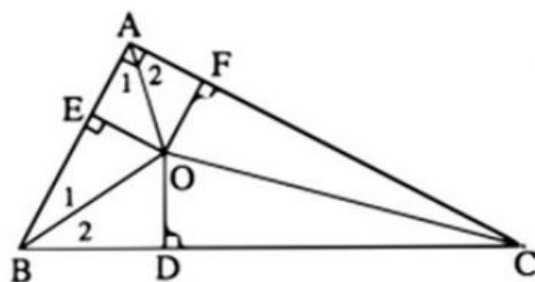
(2).

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE = OF = AE = AF$.

$\triangle OBD$ và $\triangle OBE$ có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, cạnh OB chung.

Do đó $\triangle OBD = \triangle OBE$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $BD = BE$.

Tương tự $CD = CF$.



Hình 10.4

Ta có : $AE = AB - EB = AB - BD$,

$$AF = AC - FC = AC - CD.$$

Suy ra $AE + AF = AB + AC - (BD + DC) = AB + AC - BC$

hay $2AE = AB + AC - BC = 8 + 15 - 17 = 6$ (cm), do đó $AE = 3$ (cm).

Vậy $OD + OE + OF = 3.AE = 9$ (cm).

BÀI TẬP

- 10.1. Cho tam giác ABC. Từ điểm E trên cạnh AC kẻ $ED \parallel AB$ ($D \in BC$), kẻ $EF \parallel BC$ ($F \in AB$). Biết rằng $AE = BF$. Chứng minh rằng điểm D cách đều AB và AC.
- 10.2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, M là trung điểm của BC. Gọi D là điểm thuộc đoạn MC ; H là hình chiếu của B trên AD. Chứng minh rằng HM là tia phân giác của góc BHD.
- 10.3.* Cho tam giác ABC, $BC > CA > AB$. Gọi O là giao điểm của các tia phân giác góc ngoài tại B và C; I là hình chiếu của O trên AB. Cho biết $AI = 1$ cm, tính chu vi tam giác ABC.
- 10.4.* Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$. Qua D kẻ đường thẳng xy vuông góc với BC. Trên Dx lấy điểm P, trên Dy lấy điểm Q sao cho $DP = DQ = BC$. Chứng minh AQ, AP là các phân giác trong, phân giác ngoài góc BAC của $\triangle ABC$.
- 10.5.* Cho tam giác ABC vuông tại A, có $\hat{B} = \alpha$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{EBA} = \frac{1}{3}\alpha$, trên tia đối của tia EB lấy điểm D sao cho $DE = BC$. Chứng minh tam giác CED là tam giác cân.
- 10.6. Cho tam giác ABC và điểm I là giao điểm ba đường phân giác của tam giác. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AI. Chứng minh rằng $\widehat{IBH} = \widehat{ICA}$.
- 10.7. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 50^\circ$, $\hat{C} = 20^\circ$, đường cao AH. Tia phân giác của góc AHC cắt AC ở D. Vẽ tia Ax là tia đối của tia AB. Chứng minh rằng điểm D nằm trên tia phân giác của góc ABC.

Chuyên đề 11. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó. Đảo lại, điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.
2. Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác và là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó (ta gọi đó là *đường tròn ngoại tiếp* tam giác).
Nếu một tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường trung trực ứng với cùng một cạnh thì tam giác đó là tam giác cân.
3. *Đường cao* của một tam giác là đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện.
Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này gọi là *trực tâm* của tam giác đó.
Trực tâm của tam giác nhọn nằm trong tam giác. Trực tâm của tam giác vuông nằm tại đỉnh góc vuông. Trực tâm của tam giác tù nằm ngoài tam giác.
4. Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.
5. Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao cùng xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện của đỉnh này) trùng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.
6. Trong tam giác đều, trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 11.1. Cho tam giác ABC, có $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$, đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{CBD} = 10^\circ$. Vẽ đường phân giác của góc BAD cắt BC tại E. Chứng minh rằng AE là đường trung trực của đoạn thẳng BD.

Giải. (h.11.1)

$\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$

nên $\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 50^\circ$.

Lại có $\widehat{CBD} = 10^\circ$

nên $\widehat{ABD} = \widehat{B} - \widehat{CBD} = 40^\circ$.

Mặt khác góc ADB là góc ngoài tại đỉnh D của tam giác BCD

nên $\widehat{ADB} = \widehat{CBD} + \widehat{C} = 40^\circ$. Suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$, do đó $\triangle ABD$ cân tại A , ta có $AB = AD$.

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AED$ có :

$AB = AD$, $\widehat{EAB} = \widehat{EAD}$ (giả thiết), AE là cạnh chung.

Vậy $\triangle AEB = \triangle AED$ (c-g-c), suy ra $EB = ED$.

Ta có : $AB = AD$ nên A thuộc đường trung trực của BD (1).

$EB = ED$ nên E thuộc đường trung trực của BD (2).

Từ (1) và (2) suy ra AE là đường trung trực của đoạn thẳng BD .

Chú ý : Có thể sử dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh đáy đồng thời là đường trung trực của tam giác cân để lập luận như sau :

Gọi giao điểm của AE với BD là I .

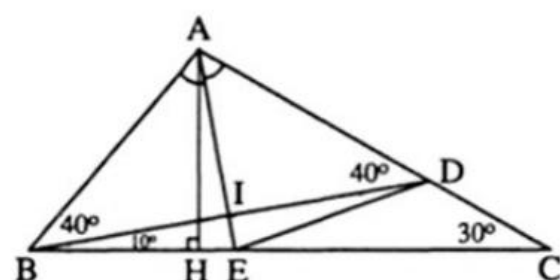
Xét $\triangle AIB$ và $\triangle AID$ có :

$AB = AD$, $\widehat{IAB} = \widehat{IAD}$ (giả thiết), AI là cạnh chung.

Vậy $\triangle AIB = \triangle AID$ (c-g-c), suy ra $IB = ID$.

Tam giác ABD cân tại A , có AI là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy BD nên AI là đường trung trực của đoạn thẳng BD . Suy ra AE là đường trung trực của đoạn thẳng BD .

Ví dụ 11.2. Cho tam giác ABC . Vẽ ra phía ngoài của tam giác hai tam giác vuông cân ABD và ACE ($\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 90^\circ$). Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Chứng minh rằng ba đường thẳng AH , BE , CD cùng đi qua một điểm.



Hình 11.1

Giải. (h.11.2)

Trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$.

Ta có $\widehat{IAC} = 180^\circ - \widehat{HAC}$.

$$\begin{aligned}\widehat{BCE} &= \widehat{BCA} + \widehat{ACE} \\ &= 90^\circ - \widehat{HAC} + 90^\circ \\ &= 180^\circ - \widehat{HAC}.\end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{IAC} = \widehat{BCE}$.

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle CBE$ có :

$$IA = CB, \widehat{IAC} = \widehat{BCE}, AC = CE \text{ (giả thiết)}.$$

Vậy $\triangle AIC = \triangle CBE$ (c-g-c), suy ra $\widehat{ACI} = \widehat{BEC}$.

Gọi M là giao điểm của CI và BE, ta có :

$$\widehat{MEC} + \widehat{MCE} = \widehat{ACI} + \widehat{ICE} = \widehat{ACE} = 90^\circ.$$

Suy ra $\widehat{EMC} = 90^\circ$, do đó $BE \perp CI$ tại M.

Gọi N là giao điểm của BI với CD, chứng minh tương tự ta có $CD \perp BI$ tại N.

Xét tam giác IBC có IH, BM, CN là ba đường cao nên chúng cùng đi qua một điểm, nghĩa là ba đường thẳng AH, BE, CD cùng đi qua một điểm.

Ví dụ 11.3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của các góc BAH và CAH cắt BC lần lượt tại D và E. Gọi O là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng đường tròn tâm O, bán kính OA đi qua ba điểm A, D, E.

b) Tính số đo góc DOE.

Giải. (h.11.3)

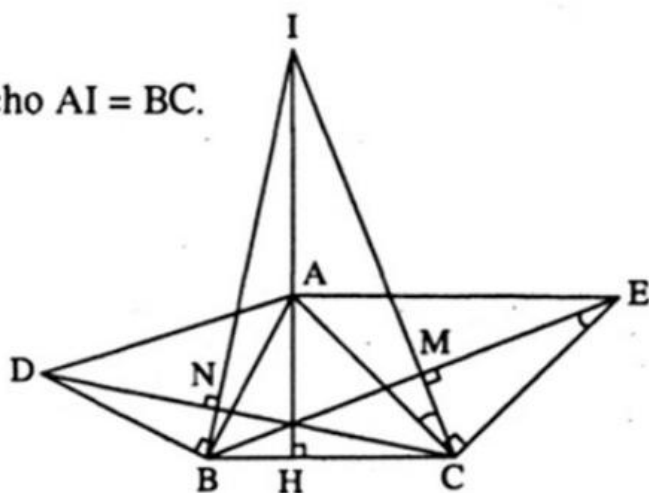
a) Ta có :

$$\widehat{BAE} = \widehat{BAC} - \widehat{EAC} = 90^\circ - \widehat{EAC} \quad (1).$$

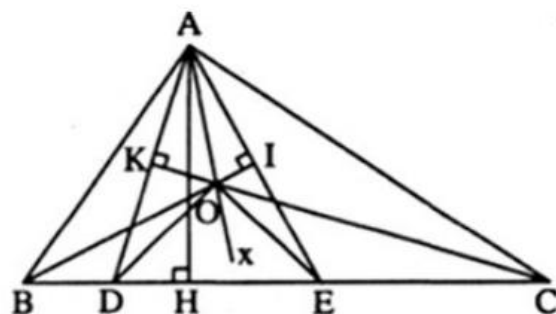
$$\widehat{AEB} = 90^\circ - \widehat{HAE} \quad (2).$$

Mà $\widehat{EAC} = \widehat{HAE}$ (giả thiết), do đó từ (1) và (2)

suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{AEB}$ nên $\triangle AEB$ cân tại B.



Hình 11.2



Hình 11.3

Vì O là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC nên BO là đường phân giác của tam giác cân ABE, do đó BO là đường trung trực của AE, suy ra $OA = OE$ (3).

Chứng minh tương tự, CO là đường trung trực của AD, suy ra $OA = OD$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $OA = OD = OE$. Điều này chứng tỏ rằng ba điểm A, E, D nằm trên đường tròn tâm O, bán kính OA hay đường tròn tâm O bán kính OA đi qua ba điểm A, D, E.

b) Từ (3) suy ra $\triangle OAE$ cân tại O, nên $\widehat{OAE} = \widehat{OEA}$. Vẽ tia Ox là tia đối của tia OA, ta có $\widehat{EOx} = \widehat{OAE} + \widehat{OEA} = 2\widehat{xAE}$.

Tương tự, $\widehat{xOD} = 2\widehat{xAD}$.

$$\begin{aligned}\text{Do đó, } \widehat{DOE} &= 2(\widehat{xAD} + \widehat{xAE}) = 2\widehat{DAE} = 2(\widehat{DAH} + \widehat{HAE}) \\ &= 2 \cdot \frac{\widehat{BAH} + \widehat{HAC}}{2} = 2 \cdot \frac{\widehat{BAC}}{2} = 90^\circ.\end{aligned}$$

Vậy $\widehat{DOE} = 90^\circ$.

BÀI TẬP

* Tính chất ba đường trung trực của tam giác

11.1. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 40^\circ$. Đường trung trực của AB cắt BC tại D.

a) Tính số đo góc CAD.

b) Trên tia đối của tia AD lấy điểm M sao cho $AM = CD$. Chứng minh rằng tam giác BMD là tam giác cân.

11.2. Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông cắt nhau tại trung điểm của cạnh huyền.

11.3.* Cho tam giác đều ABC. Gọi D và E là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AB và AC sao cho $BD = AE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của đoạn DE luôn đi qua một điểm cố định khi D và E di chuyển trên các cạnh AB và AC.

11.4.* Cho tam giác ABC, $AC > AB$. Hai điểm D và E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB và AC sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định.

- 11.5.** Cho đoạn thẳng AB và đường trung trực d của AB. Lấy điểm M sao cho M và A thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ d. Gọi C là giao điểm của MB với d.
- Chứng minh $MA + MB > CA + CB$.
 - Lấy D thuộc d sao cho D không trùng với C. Chứng minh $MC + AC < MD + AD$.
- 11.6.*** Cho tam giác nhọn ABC, $\widehat{A} = 45^\circ$. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau ở I và cắt BC lần lượt tại E và F.
- Tính số đo góc EAF.
 - Chứng minh đường tròn tâm I, bán kính IA đi qua ba điểm A, B, C.
- 11.7.*** Cho tam giác nhọn ABC. Trên các đường trung trực của các cạnh AB, AC, BC kẻ từ trung điểm I, K, L của các cạnh này và ở miền ngoài của tam giác, lấy tương ứng các điểm M, N, P sao cho $IM = \frac{1}{2}AB$, $KN = \frac{1}{2}AC$, $LP = \frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng :
- $IN = IP$ và $IN \perp IP$;
 - $\triangle AIP = \triangle MIN$;
 - $AP \perp MN$.
- 11.8.*** Cho tam giác ABC. Hai điểm M và N theo thứ tự di chuyển trên hai tia BA và CA sao cho $BM + CN = BC$. Chứng minh rằng các đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.
- 11.9.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = BA$ và $CE = CA$.
- Chứng minh giao điểm I các đường phân giác của tam giác ABC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.
 - * Tính số đo góc DIE.
- 11.10.** Cho tam giác ABC, $\widehat{B} = 75^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$. Vẽ đường thẳng d là đường trung trực của BC, d cắt BC tại M. Lấy điểm O thuộc d và thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A sao cho $MO = MB$. Chứng minh rằng :
- Tam giác BOC vuông cân tại O ;
 - $\widehat{BAC} = \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$;
 - * $OA = OB = OC$.
- 11.11.** Cho tam giác ABC, $\widehat{B} = 75^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Vẽ đường trung trực d của BC cắt BC tại M. Gọi E là điểm thuộc d và thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A sao cho $\widehat{EBC} = 30^\circ$. Chứng minh rằng :
- Tam giác BEC cân tại E.
 - $\widehat{BAC} = \widehat{ABE} + \widehat{ACE}$.
 - * $\widehat{AEB} = 90^\circ$.

11.12. Cho tam giác ABC cân tại A, cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên. Đường trung trực của AC cắt đường thẳng BC tại M. Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$.

a) Tam giác CMN là tam giác gì ? Vì sao ?

b)* Tam giác ABC cho trước phải có thêm điều kiện gì để CM vuông góc với CN ?

*** Tính chất ba đường cao của tam giác**

11.13. Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao BD và CE. Trên tia đối của các tia BD và CE lấy theo thứ tự hai điểm I và K sao cho $BI = AC$, $CK = AB$. Chứng minh rằng tam giác AIK là tam giác vuông cân.

11.14. Cho tam giác ABC. Qua các đỉnh A, B, C kẻ đường thẳng song song với cạnh đối diện, chúng cắt nhau tạo thành tam giác DEF. Chứng minh rằng các đường cao của tam giác ABC là các đường trung trực của tam giác DEF.

11.15.* Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và BH. Chứng minh CM vuông góc với AN.

11.16.* Cho tam giác ABC. Vẽ ra phía ngoài của tam giác hai tam giác đều ABE và ACF. Gọi I là trung điểm của BC, H là trực tâm của tam giác ABE. Trên tia đối của tia IH lấy điểm K sao cho $IH = IK$. Chứng minh rằng tam giác HKF là tam giác đều.

11.17.* Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Vẽ $HE \perp AC$. Gọi O và I lần lượt là trung điểm của EH và EC. Chứng minh rằng AO vuông góc với BE.

11.18.* Cho tam giác ABC, đường cao AD. Vẽ hai điểm E và F sao cho AB, AC theo thứ tự là đường trung trực của DE, DF. Gọi giao điểm của EF với AB, AC lần lượt là K và I. Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BI, CK cùng đi qua một điểm.

11.19. Cho tam giác ABC, cạnh BC lớn nhất. Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = BA$ và $CE = CA$. Tia phân giác của góc B cắt AE tại M, tia phân giác của góc C cắt AD tại N. Chứng minh rằng tia phân giác của góc BAC vuông góc với MN.

11.20.* Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Chứng minh rằng :

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC).$$

11.21.* Chứng minh rằng trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác cùng nằm trên một đường thẳng.

CÁC CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO

Chuyên đề 12. CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

I. THẾ NÀO LÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH PHẢN CHỨNG ?

Phương pháp chứng minh phản chứng là phương pháp chứng minh gián tiếp, trong đó để chứng tỏ kết luận của bài toán là đúng, ta chứng minh phủ định của kết luận là sai. Điều sai này có thể là điều trái với giả thiết hoặc điều trái với một kết quả đúng đã biết.

Trong chứng minh phản chứng, ta thực hiện các bước sau :

- *Bước 1* (phủ định kết luận) : Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán.
- *Bước 2* (đưa đến mâu thuẫn) : Từ điều giả sử trên và từ giả thiết của bài toán, ta suy ra một điều mâu thuẫn với giả thiết hay với các kiến thức đã học.
- *Bước 3* (khẳng định kết luận) : Vậy kết luận của bài toán là đúng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 12.1. Cho định lí : Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, nhưng các góc xen giữa không bằng nhau thì đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn (Ví dụ 15.2).

Hãy lập và chứng minh định lí đảo của định lí trên.

Giải.

Định lí đảo : Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, nhưng cặp cạnh thứ ba không bằng nhau thì đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

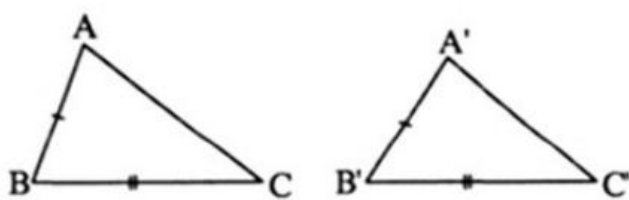
Chứng minh :

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC > A'C'$. Ta sẽ chứng minh $\widehat{B} > \widehat{B'}$ (h.12.1).

Giả sử $\widehat{B} = \widehat{B'}$ thì $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c-g-c) nên $AC = A'C'$, trái với giả thiết.

Giả sử $\widehat{B} < \widehat{B'}$ thì theo định lí thuận $AC < A'C'$, trái với giả thiết.

Vậy $\widehat{B} > \widehat{B'}$.



Hình 12.1

Ví dụ 12.2. Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau thì tam giác đó cân.

Giải. Xét $\triangle ABC$ có hai đường phân giác trong bằng nhau $BM = CN$. Ta sẽ chứng minh $\triangle ABC$ cân tại A (h.12.2).

Giả sử tam giác ABC không cân tại A.

Xét $\hat{B} > \hat{C}$. Suy ra $\hat{B}_1 > \hat{C}_1$ (1). Qua M kẻ đường thẳng song song với AB, qua N kẻ đường thẳng song song với BM, hai đường thẳng này cắt nhau tại D.

Khi đó $\triangle BNM = \triangle DMN$ (g-c-g). Suy ra $BM = ND$, $\hat{B}_2 = \hat{D}_1$. Theo giả thiết $BM = CN$, nên $ND = NC$. Vậy tam giác NCD cân tại N. Suy ra $\widehat{NCD} = \widehat{NDC}$ (2).

Vì $\hat{B}_2 = \hat{D}_1$ và $\hat{B}_2 > \hat{C}_2$ nên $\hat{D}_1 > \hat{C}_2$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\hat{D}_2 < \hat{C}_3$, do đó $MC < MD = BN$. Hai tam giác BNC và BMC có BC chung, $CN = BM$ và $BN > CM$ nên $\hat{C}_1 > \hat{B}_1$, mâu thuẫn với (1).

Trường hợp $\hat{B} < \hat{C}$, chứng minh tương tự cũng dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy $\hat{B} = \hat{C}$, suy ra tam giác ABC cân tại A.

Ví dụ 12.3. Cho một tam giác có ba góc nhọn. Qua một đỉnh của tam giác đó vẽ đường cao, qua đỉnh thứ hai vẽ trung tuyến, qua đỉnh thứ ba vẽ phân giác. Chứng minh rằng nếu ba đường đã vẽ được cắt nhau, tạo thành một tam giác thì tam giác đó không phải tam giác đều.

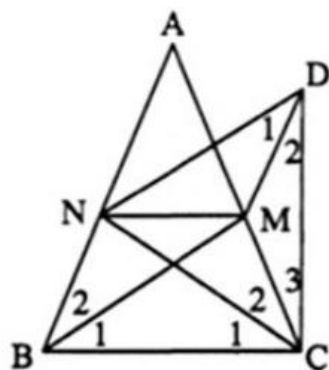
Giải. Xét $\triangle ABC$ có ba góc nhọn và đường cao AH, đường trung tuyến BM, đường phân giác CN cắt nhau và tạo thành tam giác RPQ như hình 12.3. Ta phải chứng minh $\triangle RPQ$ không là tam giác đều.

Giả sử ngược lại $\triangle RPQ$ đều. Khi đó trong tam giác vuông CRH có $\widehat{CRH} = 60^\circ$ nên $\widehat{RCH} = 30^\circ$. Do đó $\hat{C} = 2\widehat{RCH} = 60^\circ$, $\widehat{HAC} = 30^\circ$.

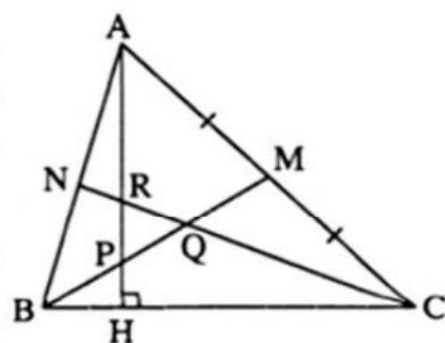
$\triangle APM$ có $\widehat{PAM} = 30^\circ$, $\widehat{APM} = 60^\circ$ nên $\widehat{AMP} = 90^\circ$ hay $BM \perp AC$.

$\triangle ABC$ có đường trung tuyến BM là đường cao nên là tam giác cân, lại có $\hat{C} = 60^\circ$ nên là tam giác đều. Vậy ba điểm R, P, Q trùng nhau, trái với giả thiết.

Vậy tam giác RPQ không thể là tam giác đều.



Hình 12.2



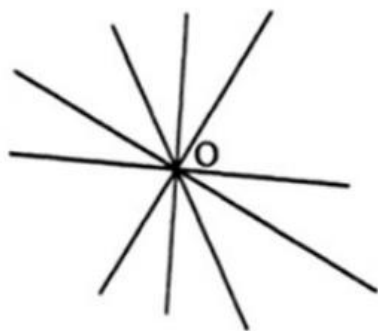
Hình 12.3

Ví dụ 12.4. Qua điểm O trong mặt phẳng vẽ 5 đường thẳng phân biệt.

a) Có bao nhiêu góc đỉnh O được tạo thành trong hình vẽ ?

b) Chứng minh rằng trong các góc đỉnh O đó, có ít nhất một góc có số đo không vượt quá 36° .

Giải. (h.12.4) a) 5 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành 10 tia chung gốc O. Mỗi tia trong 10 tia này tạo với 9 tia còn lại thành 9 góc, có 10 tia nên sẽ có $9 \cdot 10 = 90$ góc. Nhưng mỗi góc đã được tính hai lần nên có tất cả là $90 : 2 = 45$ góc đỉnh O được tạo thành.



Hình 12.4

b) Trong 45 góc tạo thành có đỉnh O thì chỉ có 10 góc không có điểm trong chung có tổng bằng 360° (như hình 12.4). Giả sử tất cả các góc đều lớn hơn 36° . Khi đó 10 góc không có điểm trong chung có tổng lớn hơn $10 \cdot 36^\circ = 360^\circ$, mâu thuẫn. Vậy phải có ít nhất một góc không vượt quá 36° .

Ví dụ 12.5. Trên một mặt phẳng có thể xếp được 7 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác được không ?

Giải. Câu trả lời là không. Thật vậy, giả sử xếp được 7 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác.

Ta lập bảng gồm 7 hàng, 7 cột và đánh dấu các ô : nếu hai đoạn thẳng cắt nhau ta đánh dấu $\times$, nếu không cắt nhau ta đánh dấu 0. Chẳng hạn nếu đoạn thẳng thứ i cắt đoạn thẳng thứ j ta đánh dấu $\times$ vào giao của dòng i cột j, và tất nhiên giao của dòng j cột i cũng có dấu $\times$ (như hình 12.5). Khi đó vì mỗi dòng có 3 dấu $\times$ nên cả bảng có 21 dấu $\times$.

	1		i		j	7
1	0					
		0				
i			0	$\times$		
				0		
j			$\times$	0		
					0	
7						0

Hình 12.5

Mặt khác, bảng sẽ có 7 dấu 0 xếp theo đường chéo của hình vuông. Như nói ở trên thì ô là giao của dòng i và cột j có dấu $\times$ thì ô là giao của dòng j cột i cũng có dấu $\times$, hai ô này đối xứng qua đường chéo gồm các ô có dấu 0. Vì vậy số ô được đánh dấu $\times$ trong bảng phải là số chẵn. Điều này mâu thuẫn với khẳng định trên là có 21 ô có dấu $\times$. Vậy giả sử trên là sai, suy ra điều cần chứng minh.

BÀI TẬP

12.1. Hãy tổng quát kết quả trong Ví dụ 12.4 cho n đường thẳng phân biệt đi qua O.

12.2. Chứng minh rằng trong một tam giác, góc đối diện với cạnh nhỏ nhất phải là góc nhọn.

12.3. Chứng minh định lí sau bằng phản chứng :

Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

12.4. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh a, b, c của một tam giác liên hệ với nhau bởi điều kiện $a^2 + b^2 > 5c^2$ thì c là độ dài của cạnh bé nhất.

12.5. Chứng minh rằng nếu một tam giác có một góc bằng 30° và cạnh đối diện với góc này bằng nửa một cạnh khác thì tam giác đó là tam giác vuông.

12.6. Cho tam giác MCD có $\widehat{MCD} = \widehat{MDC} = 15^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa điểm M , vẽ các đoạn thẳng CB và DA vuông góc với CD và bằng CD . Chứng minh rằng tam giác ABM đều.

12.7. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng tổng

$$M = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

không thể là số nguyên.

12.8. Chứng minh rằng trong một tam giác có một góc tù thì không thể có đường trung tuyến xuất phát từ một đỉnh của góc nhọn lại là đường phân giác của chính góc nhọn đó.

12.9. Cho 7 đoạn thẳng, mỗi đoạn có độ dài a với $a \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < 13$. Chứng minh rằng có thể chọn được 3 trong 7 đoạn thẳng ấy để dựng một tam giác. Mệnh đề trên còn đúng không nếu chỉ có 6 đoạn thẳng?

12.10. Tồn tại hay không một tam giác có :

a) tất cả các đường cao nhỏ hơn 1cm , còn diện tích lớn hơn 100cm^2 ?

b) hai đường cao lớn hơn 100cm , còn diện tích bé hơn 1cm^2 ?

12.11. Trên mặt phẳng cho n điểm ($n > 3$) thỏa mãn điều kiện bất kỳ đường thẳng nào đi qua hai trong những điểm đó đều chứa một điểm khác trong các điểm đã cho. Chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho cùng nằm trên một đường thẳng.

12.12. Tìm số tự nhiên n lớn nhất ($n > 3$) sao cho trên mặt phẳng có n điểm phân biệt mà ba điểm bất kỳ trong chúng là các đỉnh của một tam giác vuông.

Chuyên đề 13. NGUYÊN LÝ DIRICHLET

I. NỘI DUNG NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Khi gặp bài toán về chứng minh sự tồn tại của một hay nhiều đối tượng nào đó, người ta thường dùng một phương pháp rất thuận lợi – đó là nguyên lý Dirichlet (mang tên nhà Toán học người Đức Dirichlet (Đi-rích-lê) 1805 – 1859) : *Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi lồng có không quá 2 con thỏ.* Nói cách khác, nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con thỏ trở lên.

Một cách tổng quát hơn : *Khi nhốt m con thỏ vào k lồng*

+ Nếu $m = kn + r$ ($0 < r \leq k - 1$) thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn $n + 1$ con thỏ. Thật vậy, giả sử lồng nào cũng có không quá n thỏ thì k lồng có không quá nk thỏ, ít hơn m thỏ, vô lí.

+ Nếu $m = kn$ thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn n con thỏ và tồn tại ít nhất một lồng chứa không nhiều hơn n con thỏ. Thật vậy, giả sử lồng nào cũng chứa ít hơn n thỏ thì k lồng có không quá $k(n - 1)$ thỏ, vô lí. Tương tự, giả sử lồng nào cũng chứa nhiều hơn n thỏ thì k lồng có ít nhất là $k(n + 1)$ thỏ, vô lí.

Khi sử dụng nguyên lý này, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) *Lồng* hoặc *Thỏ* hoặc cả *Lồng* và *Thỏ*.

Một số bài toán cơ bản thường gặp như sau :

1. Nếu trên một đoạn thẳng độ dài bằng 1 đặt một số đoạn thẳng có tổng độ dài lớn hơn 1 thì có ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đó có điểm trong chung.

2. Nếu trên đường tròn bán kính 1 đặt một số cung có tổng độ dài lớn hơn 2π thì có ít nhất hai trong số các cung đó có điểm trong chung.

3. Nếu trong một hình diện tích S đặt một số hình có tổng diện tích lớn hơn S thì có ít nhất hai trong số các hình đó có điểm trong chung.

4. Nếu k đoạn thẳng có tổng độ dài không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) a thì luôn tồn tại ít nhất một đoạn thẳng có độ dài không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) $\frac{a}{k}$.

5. Nếu k góc có tổng độ lớn không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) a° thì luôn tồn tại ít nhất một góc có độ lớn không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) $\frac{a^\circ}{k}$.

6. Nếu k hình có tổng diện tích không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) S thì luôn tồn tại ít nhất một hình có diện tích không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) $\frac{S}{k}$.

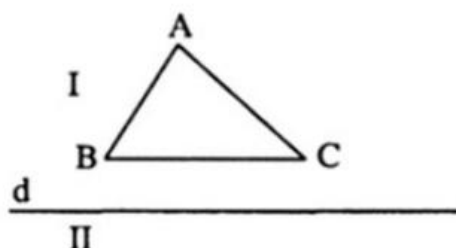
II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VẬN DỤNG NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Dạng 1. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG

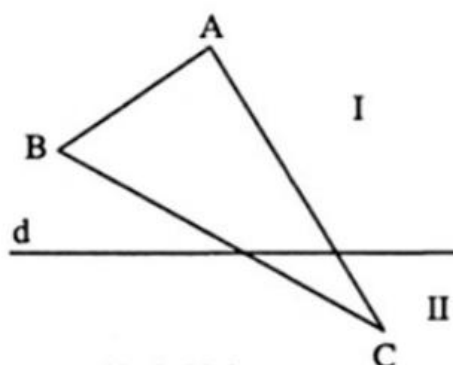
Ví dụ 13.1. (Định lý Pasch) Chứng minh rằng : Nếu một đường thẳng không đi qua đỉnh nào của tam giác thì nó hoặc không cắt cạnh nào của tam giác, hoặc cắt đúng hai cạnh của tam giác.

Giải.

Giả sử cho tam giác ABC và đường thẳng d . Đường thẳng d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng I và II bờ d . Vì A, B, C không thuộc d nên chúng chỉ có thể nằm ở miền I hoặc II . Ta có $3 = 2.1 + 1$, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai điểm cùng ở một miền, chẳng hạn đó là hai điểm A, B cùng nằm trong miền I . Do đó d không cắt cạnh AB .



Hình 13.1



Hình 13.2

- Nếu C cũng nằm ở miền I thì d không cắt các cạnh AC và BC (h.13.1).
- Nếu C nằm ở miền II thì d cắt cả hai cạnh AC và BC (h.13.2).

Vậy đường thẳng d không cắt cạnh nào của tam giác, hoặc cắt đúng hai cạnh của tam giác.

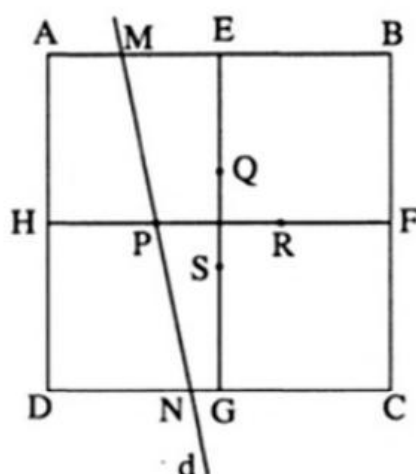
Nhận xét. Để giải bài toán ta đã vận dụng kiến thức : Nếu A, B cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ d thì d không cắt đoạn thẳng AB ; nếu A, B nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ d thì d cắt đoạn thẳng AB . Trong bài toán này để vận dụng nguyên lý Dirichlet, ta coi 3 "thỏ" là 3 điểm A, B, C ; 2 "lồng" là 2 nửa mặt phẳng bờ d (miền I và II).

Ví dụ 13.2. Cho một hình vuông và 13 đường thẳng, mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai hình thang có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng trong 13 đường thẳng đó, có ít nhất 4 đường thẳng đồng quy (cùng đi qua một điểm).

Giải. (h.13.3)

Gọi d là đường thẳng chia hình vuông $ABCD$ thành hai hình thang có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$.

Đường thẳng d phải cắt hai cạnh đối của hình vuông, giả sử d cắt hai cạnh AB và CD thứ tự tại M, N . Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA ; d cắt HF tại P .



Hình 13.3

Giả sử $S_{AMND} = \frac{2}{3} S_{BMNC}$ thì $AD \cdot HP = \frac{2}{3} BC \cdot PF$,

suy ra $HP = \frac{2}{3} PF$.

Như vậy mỗi đường thẳng đã cho chia đường trung bình của hình vuông theo tỉ số $\frac{2}{3}$. Có 4 điểm chia đường trung bình HF, EG của hình vuông theo tỉ số $\frac{2}{3}$ là P, Q, R, S . Có 13 đường thẳng, mỗi đường thẳng đi qua một trong 4 điểm P, Q, R, S . Mà $13 = 4 \cdot 3 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất $3 + 1 = 4$ đường thẳng cùng đi qua một điểm, tức là 4 đường thẳng này đồng quy.

Nhận xét. Ở bài này, coi "thỏ" là đường thẳng và có 13 "thỏ", coi "lông" là điểm chia đường trung bình của hình vuông theo tỉ số $\frac{2}{3}$ và có 4 "lông" (P, Q, R, S).

Sử dụng công thức tính : Diện tích hình thang = đường cao $\times$ đường trung bình.

Dạng 2. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI

Ví dụ 13.3. Cho 2013 điểm, trong đó cứ ba điểm bất kì trong chúng bao giờ cũng tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng luôn tìm được một điểm có khoảng cách tới ít nhất 1006 điểm khác nhỏ hơn 1.

Giải.

Trong 2013 điểm, lấy ra một điểm A tùy ý.

Nếu khoảng cách từ 2012 điểm còn lại đến A đều nhỏ hơn 1 thì kết luận của bài toán luôn đúng.

Giả sử tồn tại điểm B trong 2012 điểm còn lại mà $AB > 1$, thế thì theo điều kiện bài ra : Mỗi điểm C trong 2011 điểm còn lại (trừ A và B) hoặc có $AC < 1$, hoặc có $BC < 1$. Có 2011 điểm hoặc cách A hoặc cách B một khoảng nhỏ hơn 1, mà $2011 = 2 \cdot 1005 + 1$, nên theo nguyên lí Dirichlet luôn tồn tại $1005 + 1 = 1006$ điểm hoặc cách A hoặc cách B một khoảng nhỏ hơn 1. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Ở bài này, ta coi 2011 điểm còn lại (trừ A và B) là 2011 "thỏ"; coi khoảng cách đến A (hoặc B) nhỏ hơn 1 là "lồng" nên có 2 "lồng".

Ví dụ 13.4. Cho đường tròn bán kính bằng 1 và năm điểm A, B, C, D, E tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm M nằm trên đường tròn sao cho

$$MA + MB + MC + MD + ME \geq 5.$$

Giải. (h.13.4)

Vẽ đường kính MN của đường tròn thì $MN = 2$.

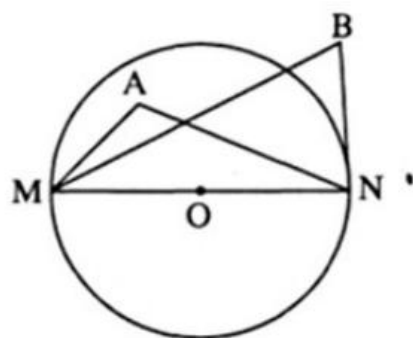
Với ba điểm M, N, A luôn có $MA + NA \geq MN = 2$.

Tương tự, ta có $MB + NB \geq MN = 2$,

$$MC + NC \geq MN = 2,$$

$$MD + ND \geq MN = 2,$$

$$ME + NE \geq MN = 2.$$



Hình 13.4

Cộng theo vế 5 bất đẳng thức cùng chiều trên ta được

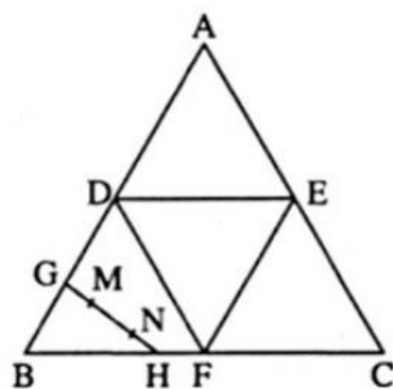
$$(MA + MB + MC + MD + ME) + (NA + NB + NC + ND + NE) \geq 10. \quad (*)$$

Theo nguyên lí Dirichlet trong hai tổng trong ngoặc ở vế trái của (*) luôn tồn tại ít nhất một tổng không nhỏ hơn $10 : 2 = 5$. Do đó trong hai điểm M, N, tồn tại ít nhất một điểm, chẳng hạn M có tính chất $MA + MB + MC + MD + ME \geq 5$.

Ví dụ 13.5. Bên trong của tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 2 cho năm điểm. Chứng minh rằng trong năm điểm đó luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

Giải.

Lấy D, E, F thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC. Khi đó ta có 4 tam giác đều có cạnh bằng 1 là ADE, BDF, CEF, DEF. Có 5 điểm nằm trong 4 tam giác nhỏ kể trên, nên theo nguyên lí Dirichlet luôn tồn tại một tam giác nhỏ chứa ít nhất 2 điểm đã cho, chẳng hạn tam giác BDF chứa hai điểm M và N, hai điểm này không trùng với B, D, F. Ta sẽ chứng minh rằng $MN < 1$ (h.13.5).



Hình 13.5

Thật vậy, MN luôn cắt hai cạnh của tam giác BDF, chẳng hạn MN cắt BD, BF thứ tự tại G, H. Xét tam giác BGH có $\widehat{G} + \widehat{H} = 120^\circ$ nên tồn tại một trong hai góc đó không nhỏ hơn 60° , chẳng hạn $\widehat{G} \geq 60^\circ$, thì $\widehat{G} \geq \widehat{B}$ nên $BH \geq GH$.

Ta có $MN \leq GH \leq BH \leq BF = 1$, mà M, N không trùng với B, D, F nên $MN < 1$.

Nhận xét. Để vận dụng nguyên lí Dirichlet, ta đã phân chia một hình thành nhiều hình. Ở đây coi "thỏ" là điểm đã cho nên có 5 "thỏ", coi "lồng" là tam giác độ dài cạnh bằng 1 nên có 4 "lồng".

Bằng cách chứng minh tương tự ta có kết quả : Khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm nằm bên trong hoặc trên cạnh một đa giác là độ dài cạnh lớn nhất hoặc đường chéo lớn nhất của đa giác.

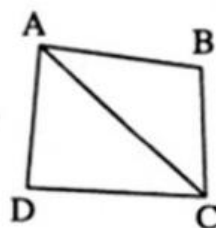
Dạng 3. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ LỚN GÓC

Ví dụ 13.6. Trong mặt phẳng cho 4 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có một góc không vượt quá 45° .

Giải.

Gọi 4 điểm là A, B, C, D. Xảy ra hai trường hợp :

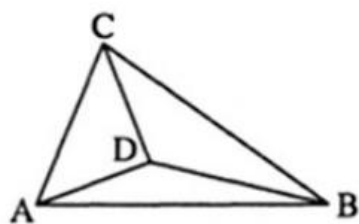
a) Nếu ABCD là tứ giác lồi thì $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 360^\circ$, do đó luôn tồn tại ít nhất một góc có độ lớn không nhỏ hơn 90° , chẳng hạn là góc ABC. Khi đó, xét



Hình 13.6

tam giác ABC ta suy ra $\widehat{BCA} + \widehat{CAB} \leq 90^\circ$, vì vậy tồn tại ít nhất một góc không vượt quá 45° . Ta chọn tam giác ABC thỏa mãn điều kiện bài toán (h.13.6).

b) Nếu D nằm trong tam giác ABC thì $\widehat{ADB} + \widehat{BDC} + \widehat{CDA} = 360^\circ$, do đó luôn tồn tại ít nhất một góc không nhỏ hơn 120° , chẳng hạn là góc ADB. Khi đó, xét tam giác ABD ta suy ra $\widehat{ABD} + \widehat{BAD} \leq 60^\circ$, vì vậy tồn tại ít nhất một góc không vượt quá $30^\circ < 45^\circ$. Ta chọn tam giác ABD thỏa mãn điều kiện bài toán (h.13.7).



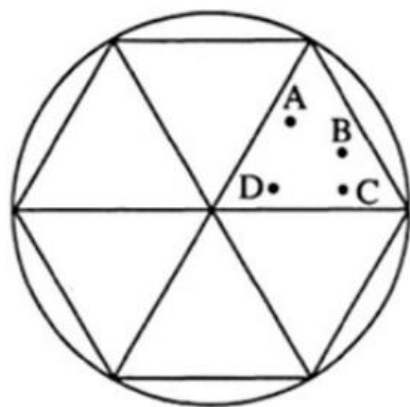
Hình 13.7

Ví dụ 13.7. Cho 19 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng nằm trong một lục giác đều có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác có đỉnh là 3 điểm trong các điểm đã cho mà có ít nhất một góc không lớn hơn 45° và nằm trong một đường tròn có bán kính nhỏ hơn $\frac{3}{5}$.

Giải. (h.13.8)

Chia lục giác đều thành 6 tam giác đều cạnh bằng 1 (có một đỉnh là tâm lục giác đều, hai đỉnh kia là hai đỉnh liên tiếp của lục giác). 19 điểm nằm trong lục giác sẽ nằm trong 6 tam giác đều này. Do $19 = 3 \cdot 6 + 1$, nên theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất một tam giác đều chứa 4 điểm (gọi là A, B, C, D) trong 19 điểm đã cho. Dễ thấy 4 điểm này đều nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh 1 nên có

$$\text{bán kính } R = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{5}.$$



Hình 13.8

Chứng minh trong bốn điểm này, tồn tại ba điểm là ba đỉnh của một tam giác có một góc không lớn hơn 45° như Ví dụ 13.6.

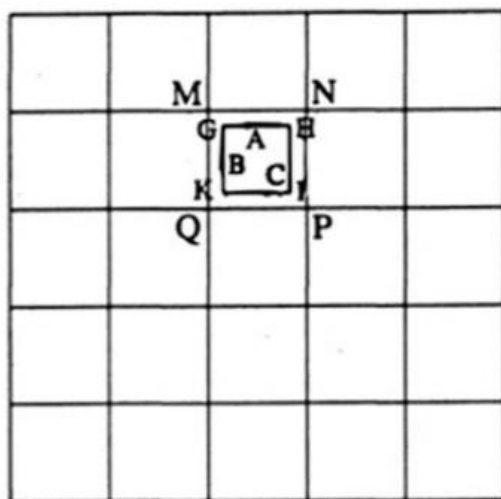
Dạng 4. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN DIỆN TÍCH

Ví dụ 13.8. Bên trong hình vuông có cạnh 5cm cho 51 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác có ba đỉnh là ba điểm đã cho mà có diện tích không lớn hơn $0,5\text{cm}^2$.

Giải. (h.13.9)

Diện tích của hình vuông là 25cm^2 .

Ta chia hình vuông cạnh 5cm thành 25 hình vuông nhỏ cạnh 1cm (như hình 13.9). Khi đó 51 điểm sẽ nằm trong 25 hình vuông nhỏ cạnh 1cm . Mà $51 = 25 \cdot 2 + 1$, nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất 3 điểm nằm trong một hình vuông cạnh 1cm , ta sẽ chứng minh rằng tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm này thỏa mãn điều kiện bài ra.



Hình 13.9

Thật vậy, ta gọi 3 điểm là A, B, C nằm trong hình vuông $MNPQ$. Vẽ hình chữ nhật $GHIK$ có các cạnh song song với các cạnh của hình vuông $MNPQ$ và có A, B, C nằm trên cạnh của nó. Khi đó

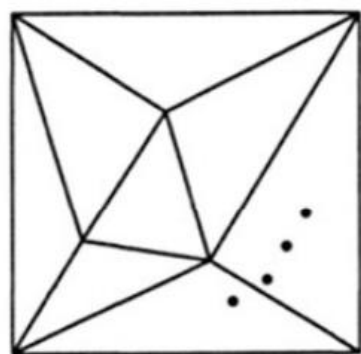
$$S_{ABC} \leq \frac{1}{2} S_{GHIK} \leq \frac{1}{2} S_{MNPQ} = \frac{1}{2} (\text{cm}^2).$$

(Ở đây, coi "thỏ" là điểm nên có 51 "thỏ", "lồng" là hình vuông cạnh 1cm nên có 25 "lồng".

Ví dụ 13.9. Bên trong hình vuông cạnh bằng 1 có 100 điểm. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc là các đỉnh hình vuông, tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{202}$.

Giải. (h.13.10)

Ta chia hình vuông thành các hình tam giác không có điểm trong chung sao cho đỉnh của mỗi tam giác là ba trong số $100 + 4 = 104$ điểm đã cho. Mỗi điểm này là một đỉnh của ít nhất một tam giác. Nhận thấy: Tổng các góc có đỉnh là 100 điểm bên trong hình vuông bằng $360^\circ \times 100 = 36000^\circ$. Tổng các góc có đỉnh là các đỉnh hình vuông bằng 360° . Do đó tổng các góc của tất cả các tam giác được tạo thành là 36360° . Số tam giác được tạo thành là $36360^\circ : 180^\circ = 202$.



Hình 13.10

Tổng diện tích của 202 tam giác bằng 1 . Vì vậy tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{202}$.

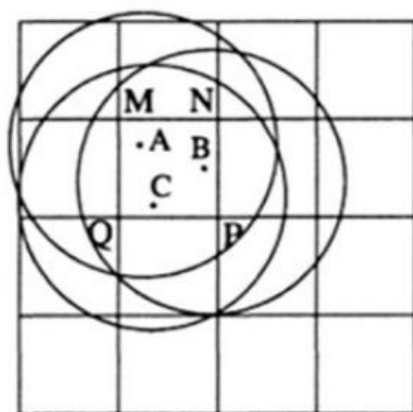
Nhận xét. Ta có thể phát biểu bài toán tổng quát : Bên trong hình vuông cạnh bằng 1 cho n điểm. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc là các đỉnh hình vuông, tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{2n+2}$.

Dạng 5. BÀI TOÁN VỀ HÌNH NẴM TRONG HÌNH KHÁC

Ví dụ 13.10. Cho 33 điểm nằm trong hình vuông có độ dài cạnh bằng 4, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ và tâm là các điểm đã cho. Hỏi có hay không ba điểm trong các điểm đã cho sao cho chúng đều thuộc phần chung của ba hình tròn có tâm cũng chính là ba điểm đó ? Vì sao ?

Giải. (h.13.11)

Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông đơn vị (các cạnh song song với cạnh hình vuông đã cho và có độ dài bằng 1). Do $33 = 2 \cdot 16 + 1 > 2 \cdot 16$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất ba điểm nằm trong hoặc trên cạnh hình vuông đơn vị. Giả sử đó là ba điểm A, B, C ở trong hình vuông đơn vị MNPQ. Ta có $MP = \sqrt{2}$ nên $AE \leq MP = \sqrt{2}$ với mọi điểm E thuộc hình vuông MNPQ. Từ đó hình tròn $(A; \sqrt{2})$ phủ toàn bộ hình vuông MNPQ.



Hình 13.11

Suy ra ba hình tròn $(A; \sqrt{2})$, $(B; \sqrt{2})$, $(C; \sqrt{2})$ đều chứa hình vuông MNPQ nên cả ba điểm A, B, C nằm trong phần chung của ba hình tròn nói trên.

(Ở đây, số "thỏ" là số điểm, số "lồng" là số lưới ô vuông nhỏ).

BÀI TẬP

- 13.1. Cho tứ giác ABCD và đường thẳng d không đi qua đỉnh nào của tứ giác. Chứng minh rằng đường thẳng d hoặc không cắt cạnh nào của tứ giác hoặc cắt đúng hai cạnh của tứ giác.
- 13.2. Cho đường tròn bán kính là 5 và ba điểm A, B, C tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại một điểm S nằm trên đường tròn sao cho $SA + SB + SC \geq 15$.

- 13.3. Trên đường tròn bán kính 1dm đánh dấu 20 điểm. Chứng minh rằng tồn tại một điểm trên đường tròn mà tổng các khoảng cách từ nó đến 20 điểm đánh dấu lớn hơn 20dm.
- 13.4. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo $AC \cong 16\text{cm}$, $BD = 12\text{cm}$. Chứng minh rằng tồn tại một cạnh của tứ giác có độ dài nhỏ hơn 14cm và tồn tại một cạnh của tứ giác có độ dài không nhỏ hơn 10cm.
- 13.5. Trong mặt phẳng cho 12 điểm tùy ý, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng.
- Chứng minh rằng tồn tại ba điểm là các đỉnh của một tam giác có một góc nhỏ hơn 18° .
 - Chứng minh rằng tồn tại ba điểm là các đỉnh của một tam giác có một góc không vượt quá 15° .
- 13.6. Bên trong một đường tròn có bán kính bằng 2 cho 7 điểm. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong 7 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 2.
- 13.7. Cho 17 điểm trong đó 3 điểm nào cũng được nối với nhau thành một tam giác bởi các cạnh tô màu xanh, đỏ hoặc vàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.
- 13.8. a) Bên trong hình chữ nhật có kích thước 3×4 cho 7 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong 7 điểm này có khoảng cách nhỏ hơn 2,24.
- b) Bên trong hình chữ nhật có kích thước 3×4 cho 6 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong 6 điểm này có khoảng cách nhỏ hơn 2,24.
- 13.9. Bên trong hình tam giác đều có diện tích bằng 1 cho 100 điểm. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc là các đỉnh tam giác đều, tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{201}$.
- 13.10. Người ta trồng 4500 cây thông lên một cánh rừng hình vuông mỗi chiều 1km. Biết rằng đường kính của thân cây thông là 50cm. Chứng minh rằng trong cánh rừng đó có thể chọn ra một mảnh đất trồng hình chữ nhật kích thước $10\text{m} \times 20\text{m}$.
- 13.11. Cho 5 đường tròn mà mỗi bộ gồm 4 đường tròn đều đi qua một điểm. Chứng minh rằng cả 5 đường tròn cùng đi qua một điểm.
- 13.12. Trong một tam giác có cạnh lớn nhất bằng 2, người ta lấy 5 điểm phân biệt. Chứng minh rằng trong 5 điểm đó luôn tồn tại 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá 1.
- 13.13. Bên trong của một tam giác đều cạnh 6cm cho 21 điểm phân biệt. Chứng minh rằng luôn tồn tại một hình tròn bán kính 1cm chứa ít nhất ba điểm trong 21 điểm đã cho.

Chuyên đề 14. TRÒ CHƠI VÀ CÂU ĐỐ

Ví dụ 14.1. Trò chơi "Tạo hình tam giác".

Trên tờ giấy có vẽ sẵn một số điểm, chẳng hạn 50 điểm. Hai người chơi lần lượt nối hai điểm thành một đoạn thẳng. Người nào nối được một tam giác mới thì lại được đi tiếp. Mỗi tam giác được tạo thành gọi là một "nhà" và được ghi một số bên trong (h.14.1). Ai có nhiều "nhà" hơn thì người đó thắng.

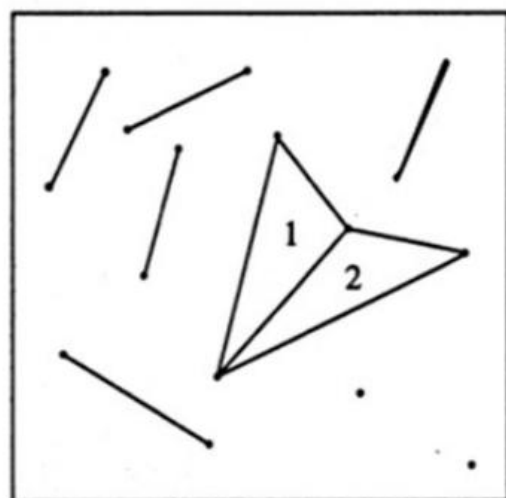
Lưu ý

– Không được kẻ đoạn thẳng cắt bên trong một đoạn thẳng khác.

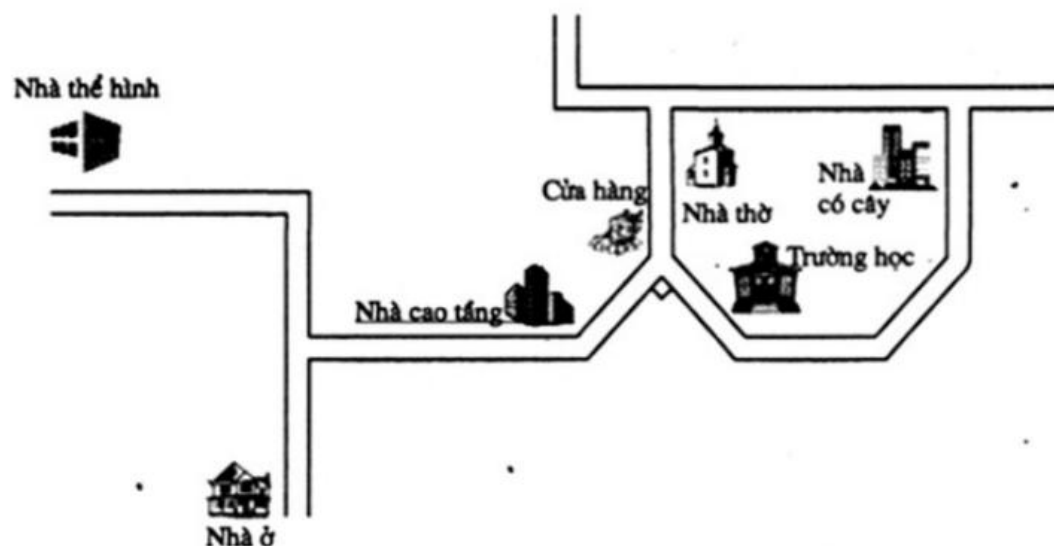
– Trò chơi rèn luyện óc phán đoán và tìm cách chơi hợp lí.

Ví dụ 14.2. Sáu vị trí đến thăm

Quan sát sáu vị trí đến thăm ở hình 14.2.



Hình 14.1



Hình 14.2

1. Nhà cao tầng.
2. Nhà có cây.
3. Trường học.
4. Nhà thờ sơn màu xanh.
5. Trung tâm thể hình có mái màu xanh và tường vàng.
6. Cửa hàng nhỏ màu hồng.

Bạn sống ở ngôi nhà nhỏ phía dưới của hình vẽ. Để đi từ nhà ở đến nhà cao tầng, có thể mô tả đường đi là : Từ chỗ ở đi thẳng về phía trước, đến chỗ rẽ đầu tiên quay góc 90° theo chiều kim đồng hồ.

Hãy mô-tả đường đi từ nhà ở đến :

- a) Nhà thể hình ; b) Cửa hàng ;
- c) Nhà thờ ; d) Trường học ;
- e) Nhà có cây.

Giải.

a) *Đi đến thăm nhà thể hình*

Từ chỗ ở đi thẳng về phía trước, đến chỗ rẽ thứ hai quay góc 90° ngược chiều kim đồng hồ.

b) *Đến cửa hàng*

Đi thẳng về phía trước đến chỗ rẽ đầu tiên, quay góc 90° theo chiều kim đồng hồ, đi đến nhà cao tầng, sau đó quay góc 45° ngược chiều kim đồng hồ.

c) *Đến nhà thờ*

Mô tả đường đi đến cửa hàng như câu b). Sau đó quay góc 45° ngược chiều kim đồng hồ.

d) *Đến trường học*

Mô tả đường đi đến cửa hàng như câu b). Sau đó đến chỗ rẽ quay góc 90° theo chiều kim đồng hồ.

e) *Đến nhà có cây*

Mô tả đường đi đến trường học như câu d). Sau đó quay góc 45° ngược chiều kim đồng hồ sẽ đi qua nhà trường, lại quay góc 45° ngược chiều kim đồng hồ ở hai chỗ rẽ tiếp theo.

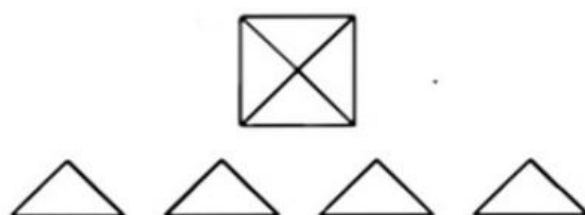
BÀI TẬP

14.1. Đúng giờ

Vào một thời điểm nào đó, kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành góc vuông. Sau khoảng thời gian ngắn nhất là bao lâu thì chúng lại tạo thành góc vuông ?

14.2. Câu đố về bốn tam giác

Nếu cắt một hình vuông theo hai đường chéo thì ta sẽ có bốn tam giác vuông cân (h.14.3).



Hình 14.3

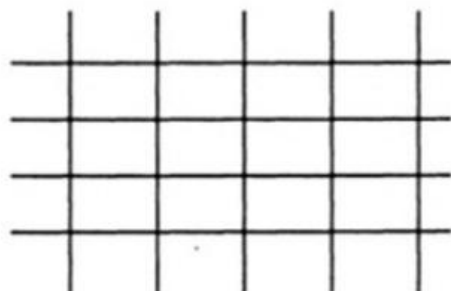
Hãy nêu một số cách ghép bốn tam giác này lại với nhau để có được những hình khác nhau.

Bạn chỉ được phép ghép cạnh dài với cạnh dài, cạnh ngắn với cạnh ngắn.

14.3. Trên hình 14.4, có bốn đường nằm ngang và năm đường thẳng đứng.

a) Có bao nhiêu cặp đường thẳng song song nằm ngang ?

b) Có bao nhiêu hình chữ nhật ?



Hình 14.4

Chuyên đề 15. TIÊN ĐỀ VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Định lý và tiên đề

Trong sách giáo khoa Hình học, các em thường gặp những định lý và chứng minh của các định lý đó. Định lý là một mệnh đề khẳng định một tính chất mà ta chứng minh là đúng. Muốn chứng minh một định lý thì ta phải dùng những suy luận có lý và dựa vào những định lý đã chứng minh trước đó.

Ta lấy ví dụ bằng cách xét mệnh đề A sau đây : "*Hai đường thẳng phân biệt có nhiều nhất là một điểm chung*". Nếu ta chứng minh được rằng mệnh đề đó đúng thì nó trở thành một định lý.

Ta có thể chứng minh mệnh đề A nếu mệnh đề B sau đây đã được chứng minh.

Mệnh đề B : "*Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước*".

Chứng minh mệnh đề A như sau : Giả sử cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Nếu chúng có hai điểm chung M và N thì có hai đường thẳng khác nhau a và b cùng đi qua hai điểm M và N, trái với mệnh đề B. Suy ra hai đường thẳng a và b có nhiều nhất là một điểm chung.

Vậy muốn chứng minh được mệnh đề A, ta phải chứng minh mệnh đề B.

Mệnh đề B chứng minh như thế nào ? Hãy xem chứng minh sau đây có đúng không : Giả sử có hai điểm phân biệt M và N. Nếu có hai đường thẳng a và b đi qua M và N thì hóa ra hai đường thẳng đó có hai điểm chung M và N, trái với mệnh đề A. Vậy mệnh đề B đúng.

Chúng minh trên không ổn vì định lí A chưa được chứng minh. Chúng ta gặp cái "vòng luẩn quẩn" : Muốn chứng minh mệnh đề A thì phải chứng minh được mệnh đề B, nhưng muốn chứng minh được mệnh đề B thì lại phải chứng minh mệnh đề A.

Nói chung việc chứng minh một định lí nào đó đều phải dựa vào một số định lí đã biết trước. Giả sử muốn chứng minh định lí A ta phải dựa vào định lí B, muốn chứng minh định lí B phải dựa vào định lí C, muốn chứng minh định lí C phải dựa vào định lí D, Cố nhiên quá trình đó không thể tiếp diễn mãi mãi, cho nên đến một lúc nào đó phải dừng lại, Chẳng hạn ta dừng lại tại định lí X, có nghĩa là ta không tiếp tục chứng minh định lí X nữa mà ta thừa nhận nó là đúng.

Một định lí thừa nhận như vậy được gọi là *tiên đề*.

Chúng ta kể ra đây một số tiên đề làm ví dụ :

Tiên đề về điểm và đường thẳng : *Trên mỗi đường thẳng có ít nhất là hai điểm. Có ít nhất là một điểm không nằm trên đường thẳng.*

Tiên đề về xác định đường thẳng : *Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước (mệnh đề B nói trên).*

Tiên đề về điểm nằm giữa hai điểm : *Trong ba điểm phân biệt và thẳng hàng có một và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại.*

Tiên đề về tia : *Mỗi điểm O nằm trên đường thẳng a chia đường thẳng đó thành hai phần (gọi là hai tia) sao cho : Nếu hai điểm thuộc hai tia khác nhau thì O nằm giữa hai điểm đó, còn nếu hai điểm thuộc cùng một tia thì O không nằm giữa hai điểm đó.*

Tiên đề về nửa mặt phẳng : *Mỗi đường thẳng d chia mặt phẳng thành hai phần (gọi là hai nửa mặt phẳng) sao cho nếu hai điểm A, B thuộc cùng một nửa mặt phẳng thì đoạn thẳng AB không cắt d, còn nếu hai điểm A, B thuộc hai nửa mặt phẳng khác nhau thì đoạn thẳng AB cắt d.*

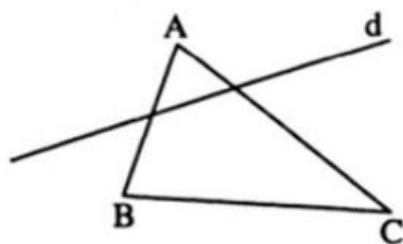
Chú ý : Đường thẳng d gọi là bờ của hai nửa mặt phẳng nói trong tiên đề.

Dựa vào tiên đề về nửa mặt phẳng, ta có thể chứng minh định lí sau đây :

Định lí Pasch : *Nếu một đường thẳng không đi qua đỉnh nào của tam giác thì nó hoặc không cắt cạnh nào của tam giác, hoặc cắt đúng hai cạnh của tam giác.*

Chứng minh.

Giả sử có tam giác ABC và d là đường thẳng không đi qua A, B, và C (h.15.1). Đường thẳng d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng (theo tiên đề về nửa mặt phẳng).



Hình 15.1

Nếu cả ba đỉnh đều thuộc cùng một nửa mặt phẳng thì theo tiên đề nói trên đường thẳng d không cắt cả ba cạnh AB , BC , CA của tam giác ABC .

Trong trường hợp ngược lại, có một đỉnh (chẳng hạn đỉnh A) thuộc nửa mặt phẳng này và hai đỉnh còn lại (B và C) thuộc nửa mặt phẳng kia thì theo tiên đề đó đường thẳng d cắt các cạnh AB , AC và không cắt cạnh BC .

Ví dụ 15.1. Cho bốn điểm phân biệt O , A , B , C nằm trên đường thẳng a . Biết rằng O nằm giữa A và B , B nằm giữa O và C . Chứng minh rằng O nằm giữa A và C .

Giải.

Theo tiên đề về tia thì điểm O chia đường thẳng a thành hai tia, ta kí hiệu Ox là tia có chứa điểm A và Oy là tia còn lại (tia đối) (h.15.2). Vì O nằm giữa A và B nên B thuộc tia Oy . Vì B nằm giữa O và C nên (theo tiên đề điểm nằm giữa hai điểm) O không nằm giữa B và C và do đó B và C đều thuộc tia Oy . Vì A và C thuộc hai tia khác nhau nên O nằm giữa A và C .



Hình 15.2

2. Tiên đề về sự bằng nhau của tam giác

Ta nhắc lại định nghĩa hai tam giác bằng nhau: *Hai tam giác gọi là bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau.*

Về sự bằng nhau của hai tam giác, chúng ta thừa nhận tiên đề sau đây:

Tiên đề c-g-c. *Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.*

Dựa vào tiên đề đó ta có thể chứng minh các định lý sau đây:

Định lý 1 (về tam giác cân).

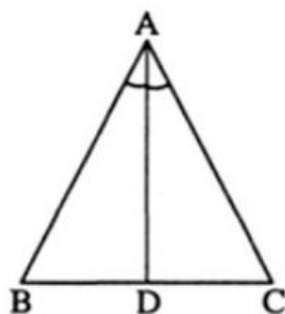
– Trong tam giác cân, đường phân giác của góc ở đỉnh cũng là đường cao và trung tuyến của tam giác đó.

– Hai góc ở đáy của tam giác cân bằng nhau.

Chứng minh.

Giả sử ta có tam giác cân ABC đỉnh A và AD là đường phân giác của góc A (h.15.3). Hai tam giác ABD và ACD có cạnh AD chung, $AB = AC$ và $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ nên hai tam giác đó bằng nhau theo tiên đề c-g-c. Suy ra:

+) $DB = DC$, vậy AD là đường trung tuyến.



Hình 15.3

+) $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ nên đó là các góc vuông. Vậy AD là đường cao.

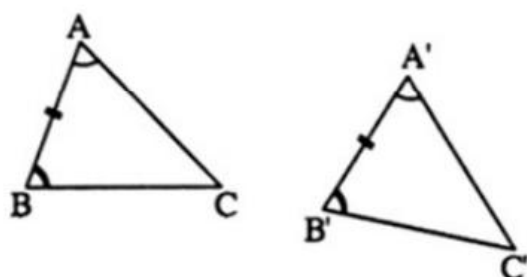
+) $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Vậy hai góc ở đáy của tam giác cân ABC bằng nhau.

Định lí 2 (trường hợp g-c-g). Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Chứng minh.

Giả sử hai tam giác ABC và A'B'C' có $AB = A'B'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ (h.15.4).

Trên tia A'C' ta lấy điểm C₁ sao cho $A'C_1 = AC$. Khi đó hai tam giác ABC và A'B'C₁ có $AB = A'B'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C_1}$, $AC = A'C_1$, vậy chúng bằng nhau theo tiên đề c-g-c, suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C_1}$. Nhưng vì $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ nên ta có $\widehat{A'B'C'} = \widehat{A'B'C_1}$.



Hình 15.4

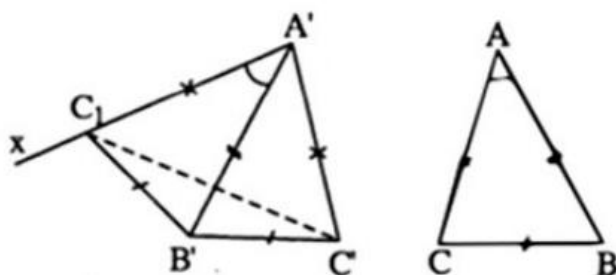
Vì hai tia B'C₁ và tia B'C' cùng nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng A'B' nên từ sự bằng nhau của hai góc $\widehat{A'B'C'}$ và $\widehat{A'B'C_1}$ ta suy ra tia B'C₁ và tia B'C' trùng nhau, ngoài ra vì tia A'C₁ và tia A'C' cũng trùng nhau nên C₁ trùng với C', và như vậy tam giác A'B'C₁ chính là tam giác A'B'C'. Vì hai tam giác ABC và A'B'C₁ bằng nhau nên hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau.

Định lí 3 (trường hợp c-c-c). Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Chứng minh.

Giả sử hai tam giác ABC và A'B'C' có $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ (h.15.5).

Gọi A'x là tia nằm khác phía với tia A'C' đối với đường thẳng A'B' sao cho $\widehat{B'A'x} = \widehat{BAC}$, và trên tia A'x lấy điểm C₁ sao cho $A'C_1 = AC$. Khi đó hai tam giác ABC và A'B'C₁ bằng nhau (tiên đề c-g-c)



Hình 15.5

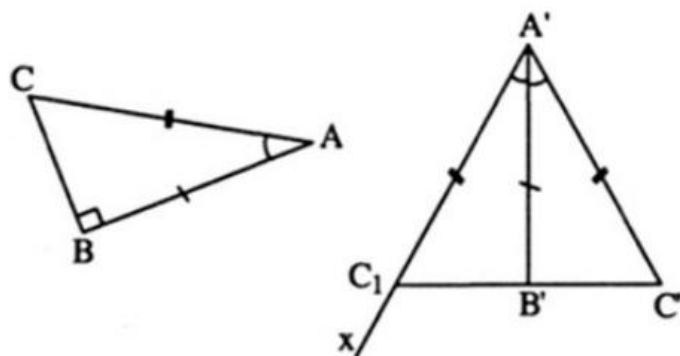
nên $B'C_1 = BC = B'C'$. Như vậy hai tam giác $A'C'C_1$ và $B'C'C_1$ là các tam giác cân tại A' và B' . Từ tính chất của tam giác cân ta có $\widehat{A'C'C_1} = \widehat{A'C_1C'}$ và $\widehat{B'C'C_1} = \widehat{B'C_1C'}$. Tia $C'C_1$ có thể nằm trong hoặc ngoài góc $\widehat{A'C'B'}$, tuy nhiên từ sự bằng nhau của các góc đó ta suy ra $\widehat{A'C'B'} = \widehat{A'C_1B'}$. Như vậy hai tam giác $A'B'C'$ và $A'B'C_1$ bằng nhau theo tiên đề c-g-c. Nhưng vì hai tam giác ABC và $A'B'C_1$ bằng nhau nên ta suy ra hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

Định lí 4 (Một trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông). *Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông ấy bằng nhau.*

Chứng minh.

Giả sử ABC và $A'B'C'$ là hai tam giác vuông tại B và B' , và có $AC = A'C'$, $AB = A'B'$ (h.15.6).

Gọi $A'x$ là tia nằm khác phía với tia $A'C'$ đối với đường thẳng $A'B'$ sao cho $\widehat{B'A'x} = \widehat{BAC}$, và trên tia $A'x$ lấy điểm C_1 sao cho $A'C_1 = AC$. Khi đó hai tam giác ABC và $A'B'C_1$ bằng nhau (c-g-c) nên $\widehat{A'B'C_1} = \widehat{ABC} = 90^\circ$, vậy ba điểm



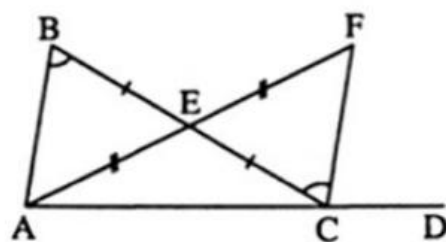
Hình 15.6

C', B', C_1 thẳng hàng. Vì $A'C_1 = AC = A'C'$ nên tam giác $A'C'C_1$ là tam giác cân và $A'B'$ là đường cao nên cũng là đường phân giác, do đó $\widehat{B'A'C_1} = \widehat{B'A'C'}$. Vậy hai tam giác $A'B'C'$ và $A'B'C_1$ bằng nhau theo tiên đề c-g-c. Từ đó suy ra hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

Định lí 5 (về góc ngoài của tam giác). *Mỗi góc ngoài của tam giác lớn hơn các góc trong không kề với nó.*

Chứng minh.

Giả sử $\widehat{BCD}$ là góc ngoài của tam giác ABC (h.15.7). Ta chứng minh rằng $\widehat{BCD} > \widehat{ABC}$ (tương tự có $\widehat{BCD} > \widehat{BAC}$).



Hình 15.7

Gọi E là trung điểm của BC, trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho $EF = EA$. Hai tam giác CEF và BEA có $EF = EA$, $EC = EB$ và $\widehat{CEF} = \widehat{BEA}$ (góc đối đỉnh), nên chúng bằng nhau (tiên đề c-g-c). Suy ra $\widehat{BCF} = \widehat{ABC}$. Vì đoạn thẳng EF không cắt đường thẳng AD nên hai điểm E và F nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AD, và do đó hai tia CB và CF cùng nằm trong nửa mặt phẳng đó. Từ đó suy ra tia CF nằm trong góc ACB, hoặc nằm trong góc BCD. Nhưng tia CF không thể nằm trong góc ACB vì điểm F không nằm giữa hai điểm A và E. Vậy tia CF phải nằm trong góc BCD và do đó $\widehat{BCD} = \widehat{BCF} + \widehat{FCD} > \widehat{BCF} = \widehat{ABC}$. Vậy $\widehat{BCD} > \widehat{ABC}$.

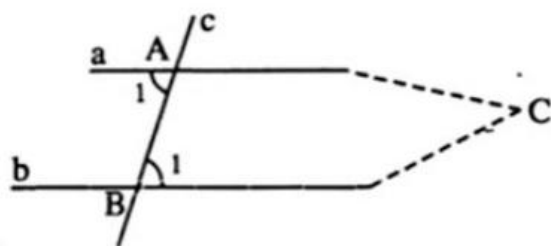
3. Đường thẳng song song và tiên đề Euclid

Trước tiên, ta chứng minh định lý sau đây :

Định lý 6 (Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song). *Nếu hai đường thẳng cắt đường thẳng thứ ba tạo thành các góc so le trong bằng nhau thì hai đường thẳng đó song song với nhau.*

Chứng minh.

Giả sử hai đường thẳng a và b cắt đường thẳng c lần lượt tại A và B và tạo thành các góc so le trong bằng nhau $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (h.15.8). Ta chứng minh rằng khi đó hai đường thẳng a và b song song với nhau.



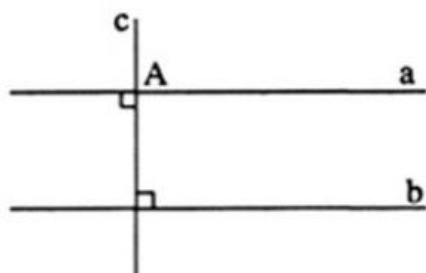
Hình 15.8

Thật vậy, nếu a và b cắt nhau tại C như hình 15.8 thì $\hat{A}_1$ là góc ngoài của tam giác ABC, còn $\hat{B}_1$ là góc trong của tam giác đó, vậy theo định lý 5 ta có $\hat{A}_1 > \hat{B}_1$, trái với giả thiết $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$. Suy ra a và b không cắt nhau, tức là song song với nhau.

Định lý 7. *Qua điểm A nằm ngoài đường thẳng b có ít ra là một đường thẳng song song với đường thẳng b.*

Chứng minh.

Gọi c là đường thẳng đi qua A và vuông góc với b (h.15.9), a là đường thẳng đi qua A và vuông góc với c. Khi đó hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với c nên tạo với c những góc so le trong bằng nhau (vì đều bằng 90°) nên chúng song song với nhau (theo dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song).



Hình 15.9

Một câu hỏi được đặt ra sau khi chứng minh định lý 7 : *Có bao nhiêu đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng b, tức là không cắt đường thẳng b ?*

Chúng ta đã chứng minh được rằng có ít nhất một đường thẳng như vậy. Nhưng liệu đường thẳng a như vậy có phải là duy nhất hay không ? Nếu có hai đường thẳng như vậy thì sao ?

Trong lịch sử phát triển của hình học suốt hai nghìn năm, các câu hỏi ấy luôn luôn ám ảnh các nhà toán học. Mọi người đều cố gắng chứng minh rằng đường thẳng a đi qua A và không cắt b là duy nhất. Trong tác phẩm "Cơ bản" của mình, nhà toán học Euclid (thế kỷ III trước Công nguyên) không chứng minh được tính duy nhất của đường thẳng a, bởi vậy ông phải thừa nhận như là một tiên đề mà ngày nay ta thường gọi là tiên đề Euclid. Nó được phát biểu như sau :

Tiên đề Euclid về đường thẳng song song : *Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó (tức là không cắt đường thẳng đó).*

Nhiều nhà toán học không muốn thừa nhận tiên đề đó mà muốn chứng minh nó như là một định lý. Nhưng mọi cố gắng của họ đều thất bại. Cuối cùng vào năm 1826 nhà toán học người Nga Lobachevsky (Lô-ba-sép-xki) đã chứng minh rằng không thể chứng minh được tiên đề Euclid. Từ đó ông đã xây dựng được một môn hình học gọi là Hình học Lobachevsky, bằng cách thay tiên đề của Euclid về đường song song bởi tiên đề sau :

Tiên đề Lobachevsky về đường thẳng song song : *Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có hai đường thẳng phân biệt không cắt đường thẳng đó.*

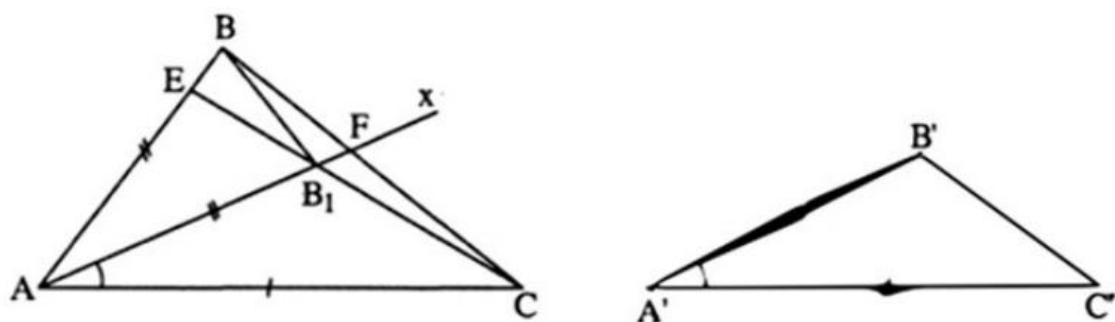
Bằng cách đó Lobachevsky đã xây dựng được môn hình học gọi là Hình học Lobachevsky. Còn môn hình học mà chúng ta đang học gọi là Hình học Euclid vì trong thứ hình học này ta thừa nhận tiên đề Euclid về đường song song.

Hình học Euclid và Hình học Lobachevsky khác nhau ở tiên đề về đường song song, còn các tiên đề khác đều được thừa nhận trong cả hai môn hình học. Như vậy những định lý mà các em đã biết đều đúng trong cả Hình học Euclid và Hình học Lobachevsky nếu chứng minh của nó không dùng tiên đề Euclid.

Ví dụ 15.2. Chứng minh rằng : "Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, nhưng các góc xen giữa không bằng nhau thì đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn".

Giải.

Giả sử hai tam giác ABC và A'B'C' có $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\hat{A} > \hat{A}'$ (h.15.10). Ta chứng minh rằng $BC > B'C'$.

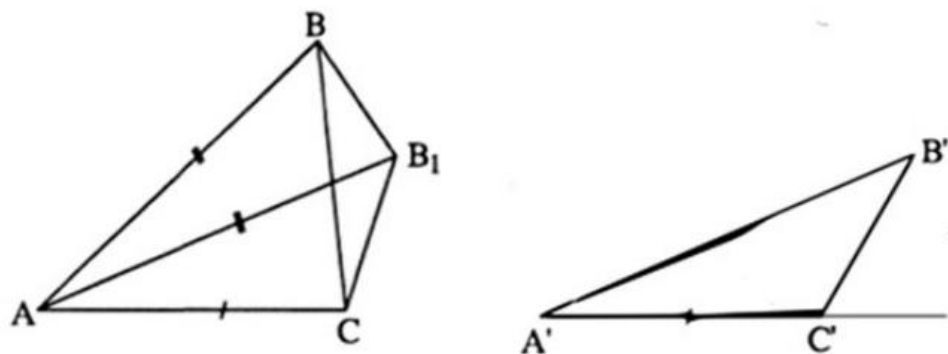


Hình 15.10

Vẽ tia Ax nằm cùng phía với tia AB đối với đường thẳng AC sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{C'A'B'}$ và trên tia Ax lấy điểm B_1 sao cho $AB_1 = A'B'$.

Khi đó hai tam giác AB_1C và $A'B'C'$ bằng nhau (c-g-c) nên có $AB_1 = A'B' = AB$ và $\widehat{B_1AC} = \widehat{B'A'C'} < \widehat{BAC}$. Suy ra tam giác ABB_1 là tam giác cân và tia AB_1 nằm trong góc BAC . Xét các trường hợp :

+ Điểm B_1 nằm trong tam giác ABC . Gọi E là giao điểm của tia CB_1 và cạnh AB , F là giao điểm của tia AB_1 và cạnh BC . Trong các tam giác BB_1F và BB_1E , góc ngoài lớn hơn góc trong không kề với nó : $\widehat{AB_1B} > \widehat{B_1BF} = \widehat{B_1BC}$ và $\widehat{BB_1C} > \widehat{B_1BE} = \widehat{AB_1B}$. Từ đó suy ra $\widehat{BB_1C} > \widehat{B_1BC}$ và nếu xét tam giác BB_1C thì bất đẳng thức đó cho ta $BC > B_1C = B'C'$.



Hình 15.11

+ Điểm B_1 nằm ngoài tam giác ABC (h.15.11). Khi đó tia BC nằm trong góc ABB_1 nên $\widehat{CBB_1} < \widehat{ABB_1}$, tia B_1A nằm trong góc BB_1C , nên $\widehat{AB_1B} < \widehat{BB_1C}$. Nhưng $\widehat{AB_1B} = \widehat{ABB_1}$ (hai góc ở đáy của tam giác cân ABB_1) nên ta suy ra $\widehat{CBB_1} < \widehat{BB_1C}$. Trong tam giác CBB_1 đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn nên $BC > B_1C = B'C'$.

+ Nếu điểm B_1 nằm trên cạnh BC thì cố nhiên $BC > B_1C = B'C'$.

4. Về định lý tổng ba góc trong tam giác

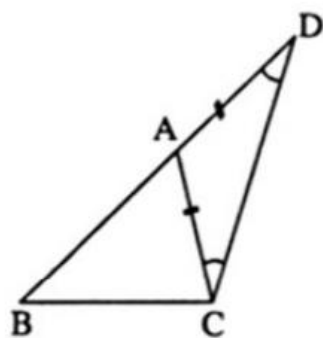
Ta chứng minh các định lý sau đây mà không dùng tiên đề về đường song song của Euclid hoặc của Lobachevsky. Nói cách khác, các định lý ấy đều đúng trong cả hai thứ hình học : Euclid và Lobachevsky.

Định lý 8 (về bất đẳng thức tam giác). *Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh còn lại.*

Chứng minh.

Cho tam giác ABC (h.15.12), ta chứng minh rằng $AB + AC > BC$.

Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Khi đó tam giác ACD là tam giác cân nên $\widehat{BDC} = \widehat{DCA} < \widehat{BCD}$. Trong tam giác BCD đối diện góc lớn hơn là cạnh lớn hơn nên $BD > BC$.



Hình 15.12

Vì $BD = AB + AD = AB + AC$ nên ta suy ra $AB + AC > BC$.

Định lý 9 (bất đẳng thức ba điểm). *Đối với ba điểm phân biệt bất kỳ A_1, A_2, A_3 ta luôn luôn có*

$$A_1A_2 + A_2A_3 \geq A_1A_3.$$

Chứng minh.

Nếu ba điểm A_1, A_2, A_3 không thẳng hàng thì bất đẳng thức đó suy ra từ định lý về bất đẳng thức trong tam giác $A_1A_2A_3$.

Nếu ba điểm A_1, A_2, A_3 thẳng hàng thì có thể xảy ra các trường hợp sau :

+ Điểm A_1 nằm giữa hai điểm A_2 và A_3 : Khi đó $A_2A_3 > A_1A_3$ nên

$$A_1A_2 + A_2A_3 > A_1A_3.$$

+ Điểm A_2 nằm giữa hai điểm A_1 và A_3 thì $A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_3$.

+ Điểm A_3 nằm giữa hai điểm A_1 và A_2 : Khi đó $A_1A_2 > A_1A_3$ nên

$$A_1A_2 + A_2A_3 > A_1A_3.$$

Định lý 10 (bất đẳng thức n điểm). *Với n điểm phân biệt $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$, ta luôn luôn có : $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$.*

Chứng minh.

Theo định lí về bất đẳng thức ba điểm ta có $A_1A_2 + A_2A_3 \geq A_1A_3$ và $A_1A_3 + A_3A_4 \geq A_1A_4$, từ đó suy ra

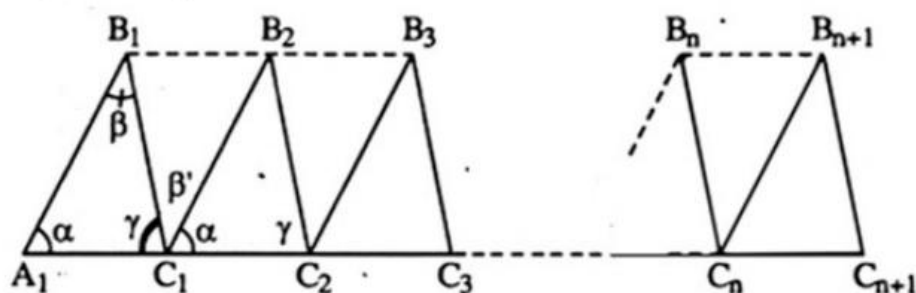
$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 \geq A_1A_3 + A_3A_4 \geq A_1A_4.$$

Tiếp tục như vậy cuối cùng ta có : $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$.

Định lí 11 (về tổng ba góc trong tam giác). *Tổng ba góc của một tam giác không thể lớn hơn 180° .*

Chứng minh.

Lấy một tam giác bất kì $A_1B_1C_1$ với $\hat{A}_1 = \alpha$, $\hat{B}_1 = \beta$, $\hat{C}_1 = \gamma$. Ta giả sử $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ (h.15.13).



Hình 15.13

Dựng các tam giác $C_1B_2C_2$, $C_2B_3C_3$, ..., $C_nB_{n+1}C_{n+1}$ bằng tam giác $A_1B_1C_1$ như trên hình vẽ 15.13. Dễ dàng chứng minh được rằng $B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_nB_{n+1}$.

Đặt $\widehat{B_1C_1B_2} = \beta'$ thì $\alpha + \beta' + \gamma = 180^\circ$ mà $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ nên $\beta' < \beta$. Hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $B_2C_1B_1$ có chung cạnh B_1C_1 , $B_1A_1 = C_1B_2$ và $\beta' < \beta$ nên $B_1B_2 < A_1C_1$. Ta đặt $d = A_1C_1 - B_1B_2 > 0$, tức là $B_1B_2 = A_1C_1 - d$. Theo định lí về bất đẳng thức n điểm ta có

$$\Sigma = A_1B_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + \dots + B_nB_{n+1} + B_{n+1}C_n \geq A_1C_n. \quad (*)$$

Vì $A_1B_1 = B_{n+1}C_n$ nên ta suy ra

$$\Sigma = 2A_1B_1 + nB_1B_2 = 2A_1B_1 + n(A_1C_1 - d) = 2A_1B_1 + nA_1C_1 - nd.$$

Chú ý rằng $nA_1C_1 = A_1C_n$ ta suy ra $\Sigma = 2A_1B_1 - nd + A_1C_n$. Ta có thể chọn số n đủ lớn sao cho $nd > 2A_1B_1$. Khi đó $\Sigma < A_1C_n$, trái với (*). Như vậy tổng ba góc của một tam giác không thể lớn hơn 180° .

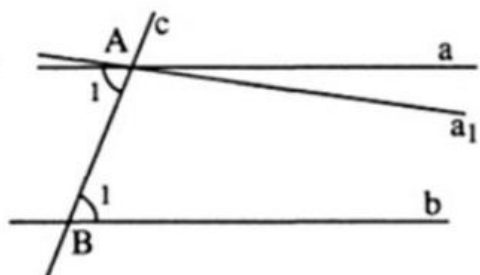
5. Nếu công nhận tiên đề Euclid, chúng ta có thể chứng minh được các định lý nào ?

Dưới đây chúng ta nêu ra một số định lý mà chứng minh của chúng phải dựa vào tiên đề Euclid. Điều đó có nghĩa là nếu không thừa nhận tiên đề Euclid thì các định lý này không thể chứng minh được.

Định lý 12. Nếu hai đường thẳng song song cắt đường thẳng thứ ba thì các góc so le trong bằng nhau.

Chứng minh.

Giả sử hai đường thẳng song song a và b cắt đường thẳng c lần lượt tại A và B tạo thành các góc so le trong $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_1$ (h.15.14). Qua A có đường thẳng a_1 sao cho hai đường thẳng a_1 và b tạo với đường thẳng c các góc so le trong bằng nhau. Khi đó theo dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song ta suy ra hai đường thẳng a_1 và b song song với nhau.



Hình 15.14

Theo tiên đề Euclid, qua A chỉ có một đường thẳng song song với b nên hai đường thẳng a và a_1 trùng nhau. Như vậy các góc so le trong tạo thành bởi hai đường thẳng a , b và đường thẳng c phải bằng nhau.

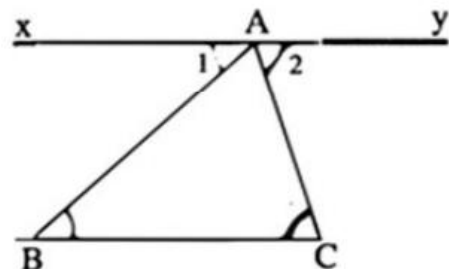
Định lý 13. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Chứng minh dành cho bạn đọc.

Định lý 14 (về tổng ba góc của một tam giác ở Hình học Euclid). Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .

Chứng minh.

Cho tam giác ABC (h.15.15). Gọi xy là đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng BC . Khi đó ta có $\hat{A}_1 = \hat{B}$, $\hat{A}_2 = \hat{C}$ (các góc so le trong bằng nhau).



Hình 15.15

Từ đó suy ra : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \widehat{BAC} + \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ$.

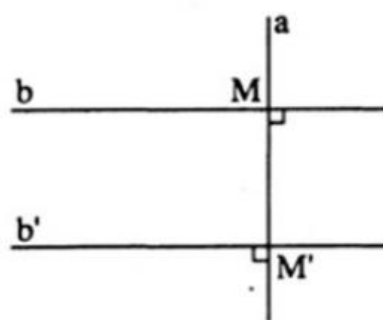
Chú ý rằng trong chứng minh trên ta phải sử dụng định lý 12, mà chứng minh định lý 12 lại phải dựa vào tiên đề Euclid.

Ví dụ 15.3. Chứng minh rằng nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b thì nó cũng vuông góc với mọi đường thẳng b' song song với b .

Giải.

Giả sử có $a \perp b$, $b \parallel b'$ (h.15.16). Ta chứng minh rằng $a \perp b'$.

Gọi M là giao điểm của a và b . Đường thẳng a không thể song song với b' vì nếu như thế thì qua điểm M có hai đường thẳng a và b cùng song song với b' (trái với tiên đề Euclid).



Hình 15.16

Vậy a và b' cắt nhau ở M' . Vì $b \parallel b'$ nên chúng cắt a tạo thành các góc so le trong bằng nhau, suy ra bốn góc ở M' đều vuông, tức là $a \perp b'$.

6. Nói thêm về tổng ba góc của một tam giác

Dùng tiên đề Euclid, chúng ta đã chứng minh được định lí "Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° ". Sau đây ta sẽ chứng tỏ rằng nếu ta thừa nhận định lí đó thì ta có thể chứng minh được tiên đề Euclid như là một định lí.

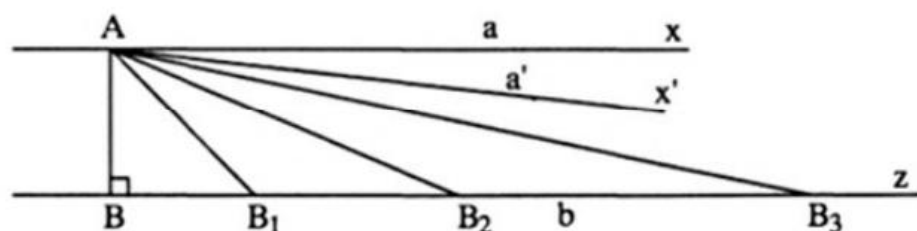
Như vậy, ta thừa nhận tiên đề sau đây :

Tiên đề về tổng ba góc trong tam giác : Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .

Và ta sẽ chứng minh định lí sau đây :

Định lí (về đường song song). Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Chứng minh.



Hình 15.17

Giả sử điểm A nằm ngoài đường thẳng b (h.15.17). Ta vẽ $AB \perp b$ và vẽ qua A đường thẳng a vuông góc với AB . Khi đó ta có $a \parallel b$.

Bây giờ gọi a' là đường thẳng cũng đi qua A nhưng khác với đường thẳng a . Ta chứng minh rằng a' phải cắt b .

Ta kí hiệu Ax' là tia nằm trên đường thẳng a' sao cho góc $\widehat{BAx'}$ là góc nhọn, Ax là tia nằm trên đường thẳng a sao cho tia Ax' nằm trong góc $\widehat{BAx}$, Bz là tia của đường thẳng b nằm cùng phía với tia Ax đối với đường thẳng AB .

Trên tia Bz ta lấy các điểm $B_1, B_2, B_3, \dots$ sao cho

$$BB_1 = AB, B_1B_2 = AB_1, B_2B_3 = AB_2, \dots, B_{n-1}B_n = AB_{n-1}.$$

Khi đó tam giác ABB_1 là tam giác vuông cân nên $\widehat{BAB_1} = \widehat{BB_1A}$. Theo tiên đề tổng ba góc của một tam giác ta có $\widehat{ABB_1} + \widehat{BAB_1} + \widehat{AB_1B} = 180^\circ$, suy ra $90^\circ + 2\widehat{BAB_1} = 180^\circ$. Vậy ta có $\widehat{BAB_1} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ$. Vì vậy :

$$\widehat{xAB_1} = \widehat{xAB} - \widehat{BAB_1} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ.$$

Trong tam giác cân AB_1B_2 ta có $\widehat{B_1AB_2} + \widehat{AB_2B_1} + \widehat{AB_1B_2} = 180^\circ$.

Nhưng vì $\widehat{B_1AB_2} = \widehat{AB_2B_1}$ nên $2\widehat{B_1AB_2} = 180^\circ - \widehat{AB_1B_2} = \widehat{AB_1B} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{B_1AB_2} = \frac{1}{4} \cdot 90^\circ = \frac{1}{2^2} \cdot 90^\circ$, và do đó :

$$\widehat{xAB_2} = \widehat{xAB_1} - \widehat{B_1AB_2} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ - \frac{1}{2^2} \cdot 90^\circ \text{ hay } \widehat{xAB_2} = \frac{1}{2^2} \cdot 90^\circ.$$

Hoàn toàn tương tự ta tính được $\widehat{xAB_3} = \frac{1}{2^3} \cdot 90^\circ, \dots, \widehat{xAB_n} = \frac{1}{2^n} \cdot 90^\circ$.

Bây giờ ta có thể chọn số nguyên n đủ lớn sao cho $\widehat{xAB_n} = \frac{1}{2^n} \cdot 90^\circ < \widehat{xAx'}$.

Từ đó suy ra $\widehat{BAB_n} > \widehat{BAx'}$, và điều đó chứng tỏ rằng tia Ax' nằm trong góc $\widehat{BAB_n}$. Bởi vậy tia Ax' phải cắt đoạn thẳng BB_n , tức là cắt đường thẳng b .

7. Đối thoại giữa thầy và trò về chứng minh tiên đề Euclid

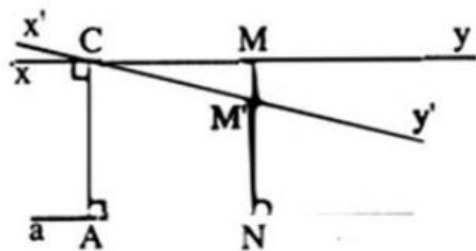
Học sinh : Thưa thầy, sau khi nghe thầy giảng về tiên đề Euclid, mấy ngày qua em đã cố gắng thử chứng minh tiên đề đó. Em muốn trình bày với thầy để thầy góp ý xem sai ở chỗ nào.

Thầy giáo : Tốt quá, em hãy trình bày đi.

Học sinh : Cho điểm C không nằm trên đường thẳng a (h.15.18).

Ta kẻ $CA \perp a$ và vẽ đường thẳng xy đi qua C và vuông góc với đường thẳng CA. Khi đó ta đã biết rằng $xy \parallel a$.

Bây giờ xét một đường thẳng x'y' cũng đi qua C nhưng khác với đường thẳng xy. Ta chứng minh rằng x'y' phải cắt đường thẳng a.



Hình 15.18

Thầy giáo : Đặt vấn đề như thế là đúng. Nếu em chứng minh được điều đó thì suy ra xy là đường thẳng duy nhất đi qua C và song song với a, tức là chứng minh được tiên đề Euclid. Thật là thú vị ! Em hãy trình bày chứng minh của em.

Học sinh : Em lấy một điểm M trên tia Cy và kẻ $MN \perp a$ và gọi M' là giao điểm của tia MN và tia Cy'.

Bây giờ ta cho điểm M di chuyển trên tia Cy càng ngày càng xa điểm C (tức là độ dài đoạn thẳng CM càng ngày càng lớn). Khi đó độ dài đoạn thẳng MM' cũng càng ngày càng lớn nên đến một lúc nào đó nó lớn hơn độ dài MN, tức là $MM' > MN$. Khi đó điểm N nằm giữa hai điểm M và M', tức là đường thẳng a cắt cạnh MM' của tam giác CMM'. Nhưng vì đường thẳng a không cắt cạnh CM nên a phải cắt cạnh CM', tức là tia Cy' phải cắt đường thẳng a. Thưa thầy, em xin hết ạ!

Thầy giáo : Thấy hỏi em một câu. Trên hình vẽ 15.18 ta thấy có lúc $MM' < MN$. Khi cho M di chuyển càng xa điểm C thì MM' càng ngày càng lớn, cứ cho là như thế đi ! Nhưng khi đó MN cũng có thể càng ngày càng lớn thì sao ? Và nếu như thế thì chắc gì đã có lúc MM' lớn hơn MN !

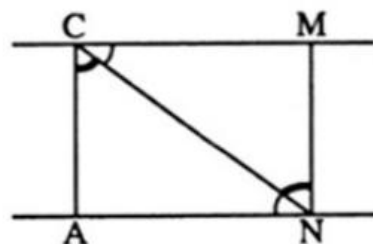
Học sinh : Thưa thầy, độ dài MN không thay đổi khi ta di chuyển điểm M trên tia Cy ạ !

Thầy giáo : Vì sao nó không thay đổi ?

Học sinh : Thưa thầy, vì nó luôn luôn bằng CA ạ !

Thầy giáo : Em chứng minh $MN = CA$ như thế nào ?

Học sinh : Như thế này ạ. Hai tam giác CAN và MNC có cạnh CN chung (h.15.19), ngoài ra vì $xy \parallel a$ nên $\widehat{ANC} = \widehat{MCN}$ (hai góc so le trong), vì $CA \parallel MN$ (do CA và MN cùng vuông góc với a) nên $\widehat{ACN} = \widehat{MNC}$ (hai góc so le trong). Vậy hai tam giác đó bằng nhau theo trường hợp g-c-g. Suy ra $CA = MN$.



Hình 15.19

Thầy giáo : Sai lầm của em chính là ở chỗ này. Để chứng minh $MN = CA$ em phải dựa vào định lí : "*Nếu hai đường thẳng song song cắt đường thẳng thứ ba thì các góc so le trong bằng nhau*". Nhưng để chứng minh định lí đó ta lại phải dùng tiên đề Euclid. Tóm lại, em dùng tiên đề Euclid để chứng minh $MN = CA$ và từ đó mới chứng minh được tiên đề Euclid. Đó là một vòng luẩn quẩn nên không chấp nhận được.

Học sinh : Thưa thầy em đã hiểu ra rồi ạ, đúng là một vòng luẩn quẩn !

8. Thêm một đối thoại

Chứng minh định lí về tổng ba góc của một tam giác

Học sinh : Thưa thầy, chúng ta đã chứng minh được định lí về tổng ba góc của một tam giác nếu thừa nhận tiên đề Euclid. Ngược lại, nếu thừa nhận rằng tổng ba góc của một tam giác bằng 180° thì ta chứng minh được tiên đề Euclid. Điều đó có ý nghĩa gì ?

Thầy giáo : Điều đó nói lên rằng tiên đề Euclid và tiên đề về tổng ba góc của một tam giác là tương đương với nhau. Thừa nhận tiên đề này thì chứng minh được tiên đề kia và ngược lại.

Học sinh : Vậy nếu chúng ta không thừa nhận tiên đề Euclid mà thừa nhận tiên đề về tổng ba góc của một tam giác (bằng 180°) thì chẳng có gì thay đổi.

Thầy giáo : Đúng như vậy. Khi đó ta vẫn xây dựng được Hình học Euclid.

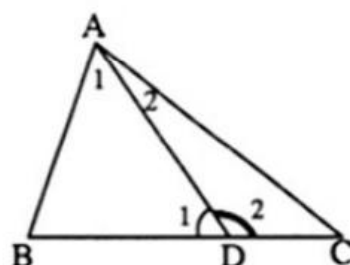
Học sinh : Bây giờ nếu em chứng minh được định lí về tổng ba góc của một tam giác mà không dựa vào tiên đề Euclid thì sao ạ ?

Thầy giáo : Thì em đã chứng minh được tiên đề Euclid. Tôi nghĩ rằng em sẽ gặp sai lầm ở một khâu lập luận nào đó.

Học sinh : Em cũng nghĩ như vậy, nhưng em không thấy chứng minh của mình có sai lầm. Bởi vậy em muốn xin ý kiến của thầy.

Thầy giáo : Em hãy trình bày chứng minh của mình !

Học sinh : Dạ em xin trình bày. Ta giả sử tổng ba góc của một tam giác là X . Ta vẽ tam giác ABC và lấy điểm D nằm giữa hai điểm B và C (h.15.20). Xét các tam giác ABD và ACD ta có :



Hình 15.20

$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{D}_1 = X$ và $\hat{A}_2 + \hat{C} + \hat{D}_2 = X$. Cộng hai đẳng thức đó vế với vế ta được $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 2X$ (*)

Vì $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \widehat{BAC} = \hat{A}$ và $\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ$ nên (*) trở thành $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + 180^\circ = 2X$. Nhưng $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = X$ nên $X + 180^\circ = 2X$. Suy ra $X = 180^\circ$, điều phải chứng minh.

Thầy giáo : Chứng minh của em là đúng nếu có giả thiết là *tam giác nào cũng có tổng ba góc bằng X*. Nhưng giả thiết ấy suy ra từ đâu ?

Học sinh : Vậy ta phải tìm cách chứng minh định lí "*Tổng ba góc của tam giác nào cũng bằng nhau*" hay sao ?

Thầy giáo : Đúng vậy ! Nhưng tôi e rằng muốn chứng minh định lí đó ta lại phải dùng tiên đề Euclid.

Học sinh : Thầy có thể cho em biết chứng minh đó được không ạ ?

Thầy giáo : Đây nhé ! Ta đã dùng tiên đề Euclid để chứng minh định lí "*Tổng ba góc của tam giác nào cũng bằng 180°* ". Như vậy suy ra : "*Tổng ba góc của tam giác nào cũng bằng nhau*".

Học sinh : Thưa thầy, bây giờ em đã hiểu thế nào là "cái vòng luẩn quẩn" rồi ạ !

9. Trong Hình học Lobachevsky thì tổng ba góc của tam giác bằng bao nhiêu ?

Ta biết rằng trong Hình học Euclid và Hình học Lobachevsky đều có định lí "*Tổng ba góc của một tam giác không thể lớn hơn 180°* ", vì khi chứng minh định lí đó ta không cần dùng tiên đề Euclid hoặc tiên đề Lobachevsky.

Mặt khác, ta đã chứng minh rằng trong Hình học Euclid, tổng ba góc trong tam giác bằng 180° . Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng :

Định lí. *Trong Hình học Lobachevsky, tổng ba góc của một tam giác bé hơn 180° .*

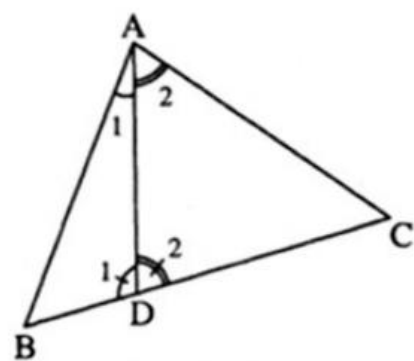
Chứng minh.

Giả sử ngược lại rằng trong hình học Lobachevsky tổng ba góc của một tam giác luôn bằng 180° . Khi đó như đã trình bày trong mục 6, ta suy ra qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một đường thẳng duy nhất không cắt đường thẳng đã cho, trái với tiên đề Lobachevsky.

Như vậy một câu hỏi đặt ra là : Trong Hình học Lobachevsky, tổng ba góc của một tam giác bằng bao nhiêu ? Bằng 90° hay 150° hay 179° , ... ?

Định nghĩa. Đối với mỗi tam giác ABC ta đặt $\delta(ABC) = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$ và gọi $\delta(ABC)$ là *góc sai* của tam giác ABC. Theo định lí trên, góc sai của mọi tam giác là số dương.

Bây giờ ta hãy xét một tam giác ABC (h.15.21).
Giả sử D là một điểm nằm giữa hai điểm B và C.
Khi đó ta có hai tam giác ABD và ACD. Ta có :



Hình 15.21

$$\begin{aligned} & \delta(ABD) + \delta(ACD) \\ &= 180^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{D}_1) + 180^\circ - (\hat{A}_2 + \hat{C} + \hat{D}_2) \\ &= 360^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}_1 + \hat{D}_2). \end{aligned}$$

Vì $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}$, $\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ$ nên

$$\delta(ABD) + \delta(ACD) = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + 180^\circ) = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = \delta(ABC).$$

Như vậy là góc sai của tam giác ABC lớn hơn góc sai của mỗi tam giác ABD và ACD.

Từ đó suy ra tổng các góc của tam giác ABC lớn hơn tổng các góc của mỗi tam giác ABD và ACD.

Có thể nói, tam giác càng lớn thì tổng ba góc càng bé, và ngược lại tam giác càng bé thì tổng ba góc càng lớn (nhưng không bao giờ lớn hơn hay bằng 180°).

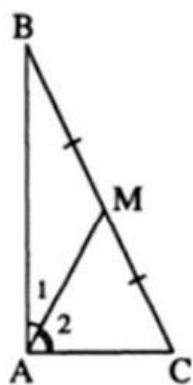
Ví dụ 15.4. Giải bài tập sau trong Hình học Lobachevsky :

- Chứng minh rằng tổng hai góc nhọn của tam giác vuông luôn bé hơn 90° .
- Chứng minh rằng trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bé hơn một nửa cạnh huyền.

Giải.

a) Nếu tổng hai góc nhọn của tam giác vuông lớn hay bằng 90° thì tổng các góc của tam giác vuông đó lớn hơn hay bằng 180° , vô lí. Suy ra điều phải chứng minh.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại A và AM là đường trung tuyến (h.15.22). Nếu $AM = BM = CM$ thì các tam giác ABM và ACM là những tam giác cân nên $\hat{B} = \hat{A}_1$ và $\hat{C} = \hat{A}_2$, như vậy $\hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A} = 90^\circ$, vô lí (theo câu a)).



Hình 15.22

Nếu $AM > BM$ thì $\hat{B} > \hat{A}_1$. Khi đó $AM > CM$ nên $\hat{C} > \hat{A}_2$. Vậy $\hat{B} + \hat{C} > \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$, vô lí (theo câu a)).

Từ hai trường hợp trên ta suy ra $AM < BM$.

BÀI TẬP

- 15.1. Cho bốn điểm phân biệt O, A, B, C nằm trên đường thẳng a . Biết rằng O nằm giữa A và B , O nằm giữa A và C . Chứng minh rằng O không nằm giữa B và C .
- 15.2. Cho tam giác ABC . Lấy điểm A' nằm giữa hai điểm B và C , điểm B' nằm giữa hai điểm A và C . Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và BB' cắt nhau và giao điểm của chúng nằm giữa A và A' cũng như nằm giữa B và B' .
- 15.3. Chứng minh rằng hai đường phân giác của tam giác luôn luôn cắt nhau.
- 15.4. Chứng minh rằng hai đường trung tuyến của tam giác luôn luôn cắt nhau.
- 15.5. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Một đường thẳng d không đi qua điểm nào trong bốn điểm đó. Hỏi đường thẳng d cắt nhiều nhất là bao nhiêu đoạn thẳng trong số sáu đoạn thẳng : AB, BC, CD, DA, AC, BD ?

Hãy giải các bài tập sau đây mà không dựa vào tiên đề song song của Euclid và của Lobachevsky.

- 15.6. Chứng minh rằng nếu tam giác có hai góc bằng nhau thì đó là tam giác cân.
- 15.7. Chứng minh rằng tam giác có ba góc bằng nhau là tam giác đều.
- 15.8. Chứng minh rằng nếu đường phân giác của một tam giác cũng là đường cao thì tam giác đó là tam giác cân.
- 15.9. Chứng minh rằng nếu đường trung tuyến của một tam giác cũng là đường cao thì tam giác đó là tam giác cân.
- 15.10. Chứng minh rằng nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.
- 15.11. Chứng minh rằng trong tam giác, đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn, đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.
- 15.12. Chứng minh rằng ba đường phân giác của tam giác đồng quy tại một điểm và điểm đó cách đều ba cạnh của tam giác.
- 15.13. Chứng minh rằng nếu tam giác có hai đường phân giác bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Hãy giải các bài tập sau đây mà trong lập luận cho phép dùng tiên đề Euclid. Hãy chỉ rõ khâu lập luận nào trong lời giải đã dùng tiên đề Euclid.

- 15.14. Chứng minh rằng tam giác đều có ba góc bằng 60° .
- 15.15. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} = 30^\circ$. Chứng minh rằng $BC = 2AC$.

- 15.16.** Cho góc nhọn xOy và một điểm M nằm trên tia Ox , d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với Ox . Chứng minh rằng d và tia Oy có điểm chung.
- 15.17.** Cho hai đường thẳng song song a và b . Chứng minh rằng khoảng cách từ các điểm trên đường thẳng a đến đường thẳng b luôn luôn bằng nhau.
- 15.18.** Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó a và b cắt nhau, $a \perp a', b \perp b'$. Chứng minh rằng a' và b' cắt nhau.

Giải các bài tập sau đây trong Hình học Lobachevsky.

- 15.19.** Chứng minh rằng qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước có vô số đường thẳng không cắt đường thẳng đó.
- 15.20.** Chứng minh rằng góc ngoài của tam giác lớn hơn tổng hai góc trong không kề với nó.
- 15.21.** Chứng minh rằng nếu tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° thì cạnh góc vuông đối diện với góc nhọn đó lớn hơn nửa cạnh huyền.
- 15.22.** Cho tam giác đều ABC . Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB .
- Chứng minh rằng $A'B'C'$ là tam giác đều.
 - So sánh các góc ở đỉnh của tam giác đều ABC và tam giác đều $A'B'C'$.
- 15.23.** Cho hai tia Ax và By cùng vuông góc với đường thẳng AB và cùng nằm về một phía so với đường thẳng đó. Trên Ax và By lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = BN$. Chứng minh rằng :
- $\widehat{AMN} = \widehat{BNM} < 90^\circ$;
 - Hai đường thẳng MN và AB không cắt nhau ;
 - $MN > AB$.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

Chuyên đề 1. CÁC GÓC TẠO BỞI HAI ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

1.1. (h.1.7)

Gọi $\angle xOy$ và $\angle x'Oy'$ là hai góc đối đỉnh,

Om và Om' tương ứng là tia phân giác của hai góc đó.

Cách 1. Ta có $\widehat{O_1} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$; $\widehat{O_4} = \frac{1}{2}\widehat{x'Oy'}$;

$\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'}$ nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_4}$.

Ta lại có $\widehat{O_4} + \widehat{xOm'} = 180^\circ$

nên $\widehat{O_1} + \widehat{xOm'} = 180^\circ$.

Vậy Om và Om' là hai tia đối nhau.

Cách 2. Ta có $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$; $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$; $\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'}$.

Mà $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{xOy'} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} + \widehat{x'Oy} = 360^\circ$, suy ra $\widehat{O_1} + \widehat{xOy'} + \widehat{O_3} = 180^\circ$.

Vậy Om và Om' là hai tia đối nhau.

1.2.* Có 6 đường thẳng cắt nhau tại O , tạo thành 12 góc không có điểm trong chung, tổng của chúng bằng 360° . Nếu mọi góc đều nhỏ hơn 30° thì tổng của chúng nhỏ hơn 360° , vô lí. Vậy phải có ít nhất một góc lớn hơn 30° .

Nếu mọi góc đều lớn hơn 30° thì tổng của chúng lớn hơn 360° , vô lí. Vậy phải có một góc nhỏ hơn 30° .

Tóm lại, trong các góc không có điểm trong chung, tồn tại một góc nhỏ hơn 30° , tồn tại một góc lớn hơn 30° .

1.3. (h.1.8)

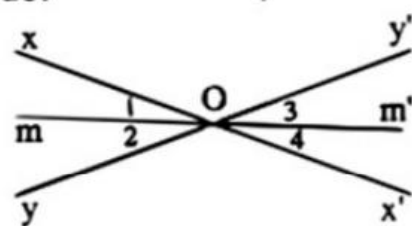
a) $\widehat{A'OB} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

$\widehat{A'OB'} = \frac{1}{2}\widehat{A'OC} = 45^\circ$.

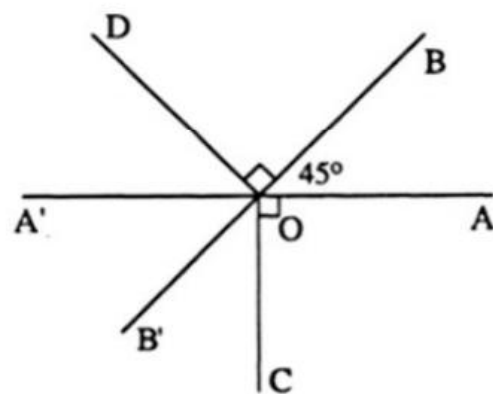
Suy ra $\widehat{A'OB} + \widehat{A'OB'} = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$

nên hai tia OB và OB' đối nhau.

Ta lại có hai tia OA và OA' đối nhau nên hai góc AOB và $A'OB'$ đối đỉnh.



Hình 1.7



Hình 1.8

$$b) \widehat{A'OD} = \widehat{A'OB} - \widehat{BOD} = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ.$$

$$\widehat{A'OB} = \widehat{A'OD} (= 45^\circ).$$

Mà tia OA' nằm giữa hai tia OB' và OD.

Vậy OA' là tia phân giác của góc B'OD.

1.4. (h.1.9)

$$a) \widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 160^\circ; \widehat{AOB} - \widehat{BOC} = 120^\circ,$$

suy ra $\widehat{AOB} = 140^\circ$ và $\widehat{BOC} = 20^\circ$.

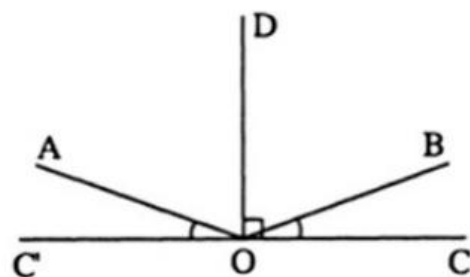
b) $\widehat{COD} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{COB} < \widehat{COD}$ nên tia OB nằm giữa hai tia OC và OD. Ta có

$$\widehat{COB} + \widehat{BOD} = \widehat{COD} = 90^\circ, \text{ suy ra}$$

$$\widehat{BOD} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ, \text{ do đó } \widehat{AOD} = \widehat{BOD}.$$

Vậy OD là tia phân giác của góc AOB.

$$c) \widehat{AOC} = \widehat{BOC} (= 160^\circ).$$



Hình 1.9

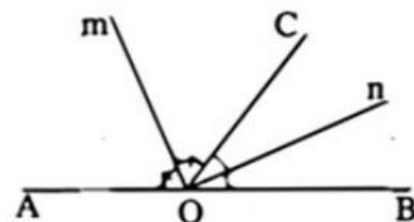
1.5. (h.1.10)

Gọi AOC và COB là hai góc kề bù, các tia Om, On theo thứ tự là tia phân giác của các góc đó. Ta có :

$$\begin{aligned} \widehat{mOC} + \widehat{CO n} &= \frac{\widehat{AOC}}{2} + \frac{\widehat{COB}}{2} \\ &= \frac{\widehat{AOC} + \widehat{COB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Ta thấy tia OC nằm giữa hai tia Om và On nên $\widehat{mOC} + \widehat{CO n} = \widehat{mOn}$.

Do đó $\widehat{mOn} = 90^\circ$. Vậy $Om \perp On$.

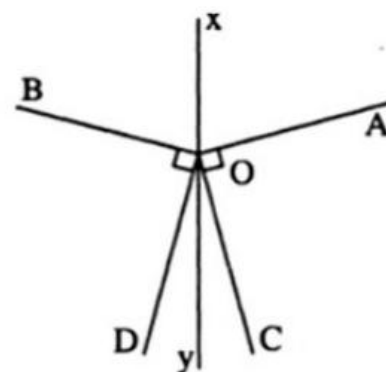


Hình 1.10

1.6. (h.1.11)

a) Ta thấy tia OA nằm giữa hai tia Ox và OC nên

$$\begin{aligned} \widehat{xOA} &= \widehat{xOA} + \widehat{AOC} = \frac{\widehat{AOB}}{2} + \widehat{AOC} \\ &= \frac{150^\circ}{2} + 90^\circ = 165^\circ. \end{aligned}$$



Hình 1.11

Do Ox và Oy là hai tia đối nhau nên $\widehat{xOC} + \widehat{COy} = 180^\circ$,

suy ra $\widehat{COy} = 180^\circ - \widehat{xOC} = 15^\circ$.

Tương tự $\widehat{yOD} = 15^\circ$.

Vậy Oy là tia phân giác của góc COD.

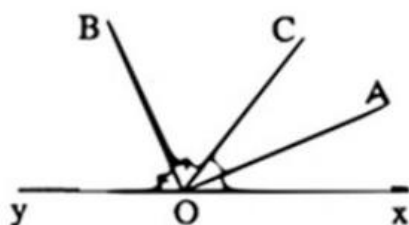
b) $\widehat{xOC} = 165^\circ$, $\widehat{yOB} = 105^\circ$, suy ra $\widehat{xOC} > \widehat{yOB}$.

1.7. (h.1.12)

Ta có $\widehat{xOC} + \widehat{COy} = 2\widehat{AOC} + 2\widehat{COB}$

$$= 2(\widehat{AOC} + \widehat{COB}) = 2\widehat{AOB} = 180^\circ.$$

Do đó Ox và Oy là hai tia đối nhau.



Hình 1.12

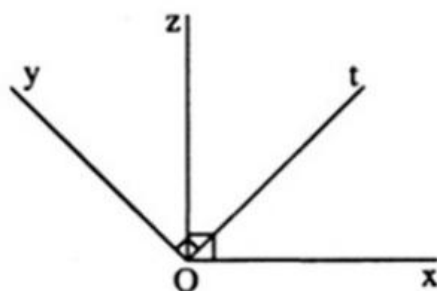
1.8. (h.1.13)

a) $\widehat{xOt} = \widehat{yOz}$ (cùng phụ với $\widehat{zOt}$)

b) $\widehat{xOy} + \widehat{zOt} = (\widehat{xOz} + \widehat{zOy}) + \widehat{zOt}$

$$= \widehat{xOz} + (\widehat{zOy} + \widehat{zOt}) = \widehat{xOz} + \widehat{yOt}$$

$$= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$



Hình 1.13

1.9. (h.1.14)

a) Gọi Om là tia phân giác của góc AOB.

Ta thấy tia Om nằm giữa hai tia OA' và OB'.

Tia OA nằm giữa hai tia Om và OB' nên

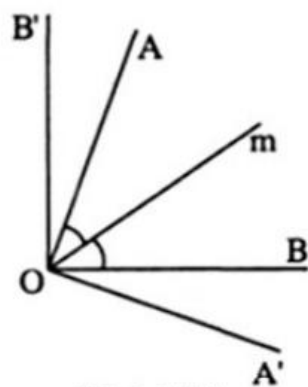
$$\widehat{mOB'} = \widehat{mOA} + \widehat{AOB'} = \frac{\widehat{AOB}}{2} + \widehat{AOB'} \quad (1).$$

$$\text{Tương tự } \widehat{mOA'} = \frac{\widehat{AOB}}{2} + \widehat{A'OB} \quad (2).$$

$$\widehat{AOB'} = \widehat{A'OB} \text{ (cùng phụ với } \widehat{AOB}) \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{mOA'} = \widehat{mOB'}$, lại có Om nằm giữa hai tia OA' và OB'. Vậy Om là tia phân giác của góc A'OB'. Do đó Om là tia phân giác chung của hai góc AOB và A'OB'.

$$\begin{aligned} \text{b) } \widehat{AOB} + \widehat{A'OB'} &= \widehat{AOB} + (\widehat{A'OB} + \widehat{BOB'}) = (\widehat{AOB} + \widehat{A'OB}) + \widehat{BOB'} \\ &= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$



Hình 1.14

1.10. (h.1.15)

$\widehat{A}_4$ và $\widehat{B}_1$ là hai góc so le trong.

Ta thấy $\widehat{A}_4 = \widehat{A}_2 = 70^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

Mà $\widehat{A}_4 = \widehat{B}_1$ (theo đề bài) suy ra $\widehat{B}_1 = 70^\circ$.

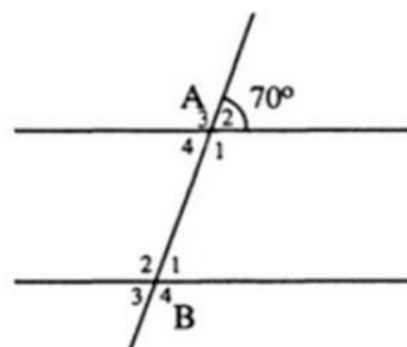
$\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_2$ là hai góc so le trong. Ta có

$$\widehat{B}_2 = \widehat{A}_1 = 180^\circ - \widehat{A}_4 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Các cặp góc đồng vị :

$$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_2 = 70^\circ ; \widehat{B}_4 = \widehat{A}_1 = 110^\circ ;$$

$$\widehat{B}_3 = \widehat{A}_4 = 70^\circ ; \widehat{A}_3 = \widehat{B}_2 = 110^\circ.$$



Hình 1.15

Chuyên đề 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

2.1. $OC \perp OD$, $DE \perp OD$ nên $OC \parallel DE$ (1).

$$\widehat{AOC} = 360^\circ - \widehat{COD} - \widehat{AOD} = 360^\circ - 90^\circ - 150^\circ = 120^\circ \text{ nên } \widehat{AOC} = \widehat{OAB}.$$

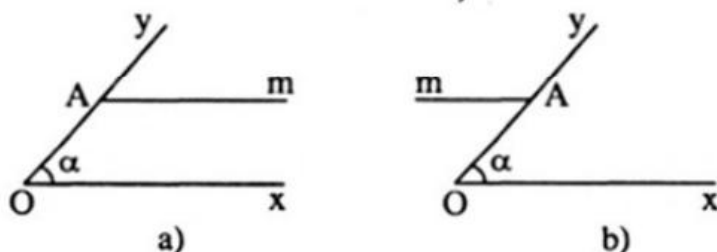
Hai góc này bằng nhau và ở vị trí so le trong, do đó $OC \parallel AB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AB \parallel OC \parallel DE$.

2.2. Xét hai trường hợp :

a) (h.2.13a). Nếu tia Am thuộc miền trong của góc xOy thì phải có $\widehat{OAm} = 180^\circ - \alpha$.

b) (h.2.13b). Nếu tia Am thuộc miền ngoài của góc xOy thì phải có $\widehat{OAm} = \alpha$.



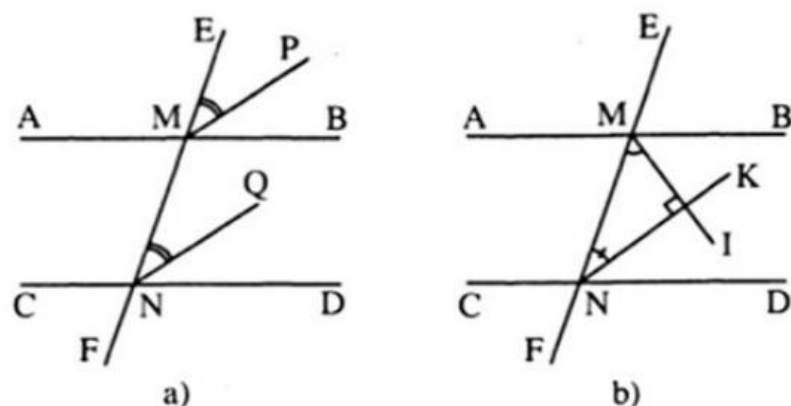
Hình 2.13

2.3. a) Kẻ tia By' là tia đối của tia By (học sinh tự vẽ hình).

Ta có $\widehat{AB'y'} = \widehat{BAx}$ (cùng bằng 45°), suy ra $Ax \parallel By'$ tức là $Ax \parallel By$.

b) $\widehat{CB'y'} = \widehat{BCz}$ (cùng bằng 30°), suy ra $Cz \parallel By'$ tức là $Cz \parallel By$.

2.4. (h.2.14a, b)



Hình 2.14

Gọi AB và CD là hai đường thẳng song song.

Đường thẳng EF cắt AB tại M, cắt CD tại N.

a) Xét hai góc đồng vị EMB và MND với hai tia phân giác MP và NQ.

$$\text{Ta có } \widehat{EMP} = \frac{\widehat{EMB}}{2}; \widehat{MNQ} = \frac{\widehat{MND}}{2}$$

Do $AB \parallel CD$ nên $\widehat{EMB} = \widehat{MND}$ (đồng vị).

Suy ra $\widehat{EMP} = \widehat{MNQ}$. Mà hai góc này là hai góc đồng vị tạo bởi đường thẳng EF cắt hai đường thẳng MP và NQ nên $MP \parallel NQ$.

b) Xét hai góc trong cùng phía BMN và MND với hai tia phân giác MI và NK.

$$\text{Ta có } \widehat{NMI} = \frac{\widehat{BMN}}{2}; \widehat{MNK} = \frac{\widehat{MND}}{2}; \widehat{BMN} + \widehat{MND} = 180^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{NMI} + \widehat{MNK} = \frac{\widehat{BMN} + \widehat{MND}}{2} = 90^\circ. \text{ Vậy } MI \perp NK.$$

2.5. Trên nửa mặt phẳng bờ CA chứa các tia AB và DE, vẽ tia Cm song song với AB (bạn đọc tự vẽ hình). Dễ dàng tính được các góc ACm, DCm, ACD rồi suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} + \widehat{CDE} = 360^\circ$.

2.6. a) Trường hợp cả hai góc cùng nhọn (h.2.15).

Gọi xOy và x'O'y' là các góc nhọn có

$O'x' \perp Ox$, $O'y' \perp Oy$.

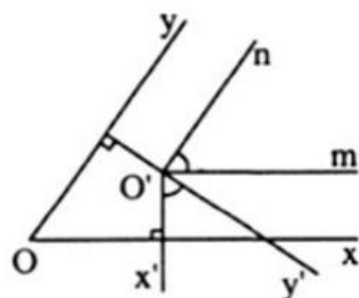
Qua O' vẽ tia O'm // Ox, tia O'n // Oy.

Theo Ví dụ 2.2, ta có $\widehat{mO'n} = \widehat{xOy}$. Ta lại

có $\widehat{mO'n} = \widehat{x'O'y'}$ (vì cùng phụ với $\widehat{mO'y'}$).

Từ đó suy ra $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

Trường hợp cả hai góc cùng tù, chứng minh tương tự.



Hình 2.15

b) Trường hợp góc xOy nhọn, góc $x'O'y'$ tù (h.2.16).

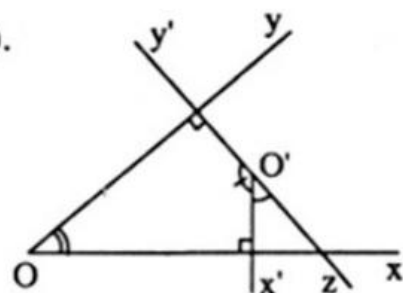
Vẽ tia $O'z$ là tia đối của tia $O'y'$. Vì

$\widehat{x'O'y'}$ là góc tù nên $\widehat{x'O'z}$ là góc nhọn

và $\widehat{x'O'y'} + \widehat{x'O'z} = 180^\circ$.

Mặt khác theo câu a) thì $\widehat{x'O'z} = \widehat{xOy}$.

Vậy $\widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^\circ$.



Hình 2.16

2.7. (h.2.17)

Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, ta có

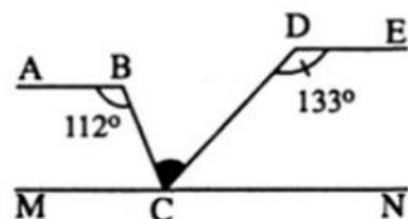
$\widehat{BCN} = \widehat{ABC} = 112^\circ$. Do $MN \parallel AB$, $AB \parallel DE$,

suy ra $CN \parallel DE$, ta có $\widehat{DCN} + \widehat{CDE} = 180^\circ$,

do đó $\widehat{DCN} = 180^\circ - \widehat{CDE} = 180^\circ - 133^\circ = 47^\circ$.

Như vậy tia CD nằm giữa hai tia CB và CN, ta có :

$$\widehat{BCD} = \widehat{BCN} - \widehat{DCN} = 112^\circ - 47^\circ = 65^\circ.$$



Hình 2.17

2.8. (h.2.18)

Từ P kẻ $PM \parallel AB$, ta có $\widehat{BPM} = \widehat{ABP} = 35^\circ$ (so le trong).

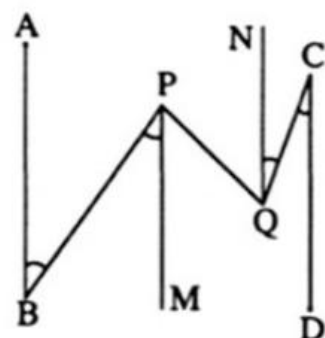
Suy ra $\widehat{MPQ} = 80^\circ - 35^\circ = 45^\circ$. Từ Q kẻ $QN \parallel CD$.

Do $CD \parallel AB$ (giả thiết), $AB \parallel PM$, suy ra $PM \parallel QN$, do đó

$$\widehat{PQN} = \widehat{MPQ} = 45^\circ \text{ (so le trong),}$$

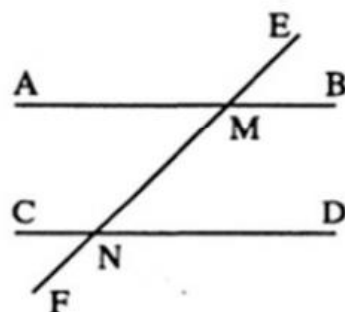
$$\widehat{NQC} = \widehat{QCD} = 20^\circ \text{ (so le trong).}$$

Vậy $\widehat{CQP} = \widehat{NQC} + \widehat{PQN} = 20^\circ + 45^\circ = 65^\circ$.

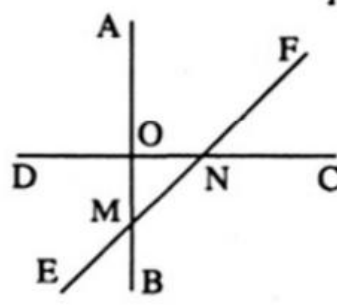


Hình 2.18

2.9.* (h.2.19)



a)



b)

Hình 2.19

Ta có $\widehat{AME} + \widehat{EMB} = 180^\circ$ (1) (hai góc kề bù), suy ra

$$4\widehat{EMB} = 180^\circ \text{ nên } \widehat{EMB} = 45^\circ.$$

Theo đề bài $\widehat{AME} + \widehat{EMB} + \widehat{MND} = 225^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MND} = 45^\circ$. Suy ra $\widehat{EMB} = \widehat{MND}$.

Nếu hai góc này ở vị trí đồng vị (h.2.19a) thì $AB \parallel CD$.

Nếu hai góc EMB, MND không ở vị trí đồng vị, AB cắt CD tại O thì $\widehat{OMN} + \widehat{ONM} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, do đó $AB \perp CD$ (h.2.19b).

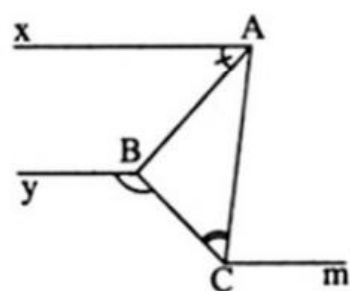
Tóm lại $AB \parallel CD$ hoặc $AB \perp CD$.

2.10.* (h.2.20)

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B , vẽ tia $Cm \parallel Ax$.

Ta có $\widehat{ACM} = \widehat{xAC}$ (so le trong). Do $Cm \parallel Ax$, $By \parallel Ax$ suy ra $By \parallel Cm$, ta có $\widehat{BCm} = \widehat{CBy}$ (so le trong), từ đó $\widehat{ACB} < \widehat{BCm}$ nên tia CA nằm giữa hai tia CB và Cm , do đó $\widehat{BCm} = \widehat{BCA} + \widehat{ACm}$.

Vậy $\widehat{yBC} = \widehat{BCA} + \widehat{ACm} = \widehat{BCA} + \widehat{xAC}$.



Hình 2.20

Bài toán đảo :

Từ bài toán 2.10 ta có thể lập được ba bài toán đảo sau :

Bài 1. Trên hình 2.10, cho biết $\widehat{yBC} = \widehat{xAC} + \widehat{ACB}$. Chứng minh rằng $\widehat{CBy} > \widehat{ACB}$ và $Ax \parallel By$.

Bài 2. Trên hình 2.10, cho biết $Ax \parallel By$ và $\widehat{yBC} = \widehat{xAC} + \widehat{ACB}$. Chứng minh rằng $\widehat{CBy} > \widehat{ACB}$.

Bài 3. Trên hình 2.10, cho biết $\widehat{CBy} > \widehat{ACB}$ và $\widehat{yBC} = \widehat{xAC} + \widehat{ACB}$. Chứng minh rằng $Ax \parallel By$.

Bài toán 2.10 đúng. Nhưng các bài toán đảo của bài toán này có thể đúng, cũng có thể sai. Bạn đọc tự kiểm tra điều này.

2.11. (h.2.21)

a) Từ C kẻ tia $Cm \parallel Ax$ (Cm và CB nằm trên hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ CA). Ta có $\widehat{xAC} + \widehat{ACm} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía).

$Ax \parallel Cm, Ax \parallel By$ suy ra $By \parallel Cm$,
ta có $\widehat{yBC} = \widehat{BCm}$ (so le trong).

Vì CA nằm giữa hai tia CB và Cm
nên $\widehat{BCm} = \widehat{ACB} + \widehat{ACm}$.

Do đó $\widehat{yBC} = \widehat{ACB} + \widehat{ACm}$, suy ra :

$$\widehat{yBC} + \widehat{xAC} = \widehat{ACB} + (\widehat{ACm} + \widehat{xAC}) = \widehat{ACB} + 180^\circ.$$

Từ đó ta có $\widehat{xAC} + \widehat{yBC} - \widehat{ACB} = 180^\circ$.

(Vì $\widehat{yBC} > \widehat{ACB}$ nên $\widehat{yBC} - \widehat{ACB} > 0$).

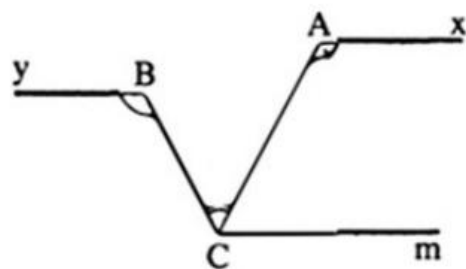
b) Vẽ $Cm \parallel Ax$ (Cm và CB nằm trên hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ CA).

$$\text{Ta có } \widehat{xAC} + \widehat{ACm} = 180^\circ \quad (1).$$

$$\text{Theo đề bài } \widehat{xAC} + \widehat{CBy} - \widehat{ACB} = 180^\circ \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CBy} - \widehat{ACB} = \widehat{ACm}$, do đó

$\widehat{CBy} = \widehat{ACB} + \widehat{ACm} = \widehat{BCm}$ nên $By \parallel Cm$ (hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau). Mà $Cm \parallel Ax$, suy ra $Ax \parallel By$.



Hình 2.21

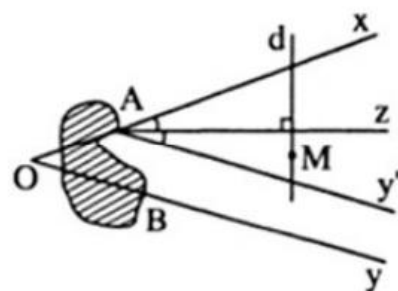
2.12.* Xem Ví dụ 2.3. Tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360^\circ : 14 = 25\frac{5}{7}$ (độ).

Suy ra tồn tại một góc nhỏ hơn 26° .

2.13.* (h.2.22)

Qua A vẽ tia $Ay' \parallel By$, thế thì góc xOy và góc xAy' là hai góc đồng vị của hai đường thẳng song song Ay' và Oy .

Vẽ tia phân giác Az của góc xAy' thì Az song song với tia phân giác của góc xOy (bài 2.4).



Hình 2.22

Qua M dựng đường thẳng d vuông góc với Az thì d vuông góc với tia phân giác của góc xOy (h.2.22).

Chuyên đề 3. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

3.1. (h.3.3)

Cách 1. Gọi giao điểm của BO với AC là D.

Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có :

$$\widehat{BOC} > \widehat{ODC} ; \widehat{ODC} > \widehat{BAD}. \text{ Suy ra } \widehat{BOC} > \widehat{BAC}.$$

Cách 2. Sử dụng tính chất tổng các góc của tam giác với hai tam giác ABC và BOC, ta có :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ ; \widehat{BOC} + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ.$$

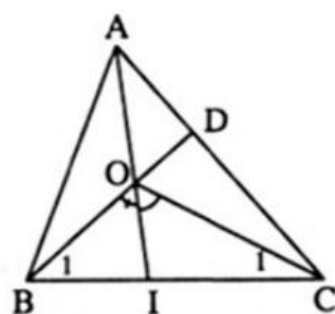
$$\text{Suy ra } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{BOC} + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1. \text{ Mà } \widehat{B}_1 < \widehat{B}, \widehat{C}_1 < \widehat{C}.$$

$$\text{Do đó } \widehat{BOC} > \widehat{BAC}.$$

Cách 3. Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác, ta có : $\widehat{BOI} > \widehat{BAO}$;

$$\widehat{IOC} > \widehat{OAC}. \text{ Suy ra } \widehat{BOI} + \widehat{IOC} > \widehat{BAO} + \widehat{OAC}$$

$$\text{hay là } \widehat{BOC} > \widehat{BAC}.$$



Hình 3.3

3.2. (h.3.4)

$$\begin{aligned} \text{a) Xét tam giác ABC, ta có : } \widehat{A} + \widehat{C} &= 180^\circ - \widehat{B} \\ &= 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Theo giả thiết } \widehat{A} = 180^\circ - 3\widehat{C}$$

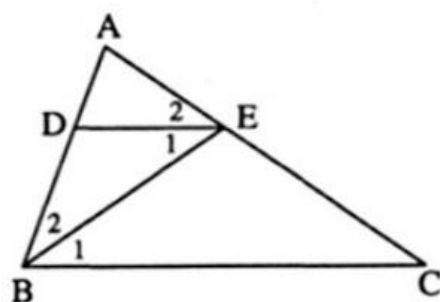
$$\text{nên } \widehat{A} + 3\widehat{C} = 180^\circ. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \widehat{C} = 35^\circ ; \widehat{A} = 75^\circ.$$

$$\text{b) BE là phân giác của B nên } \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2} = \widehat{C}.$$

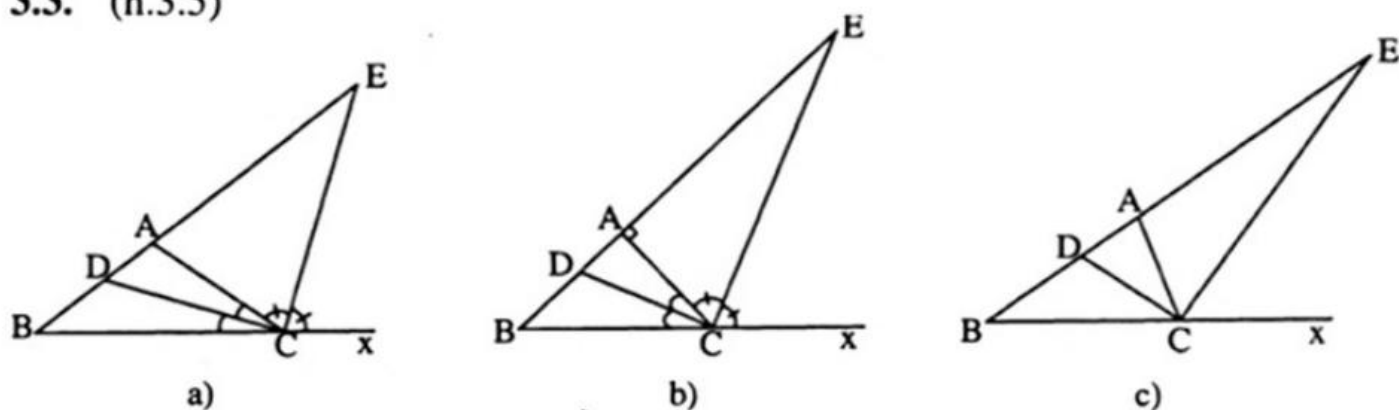
$$\text{ED} \parallel \text{BC (giả thiết) nên } \widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 \text{ (so le trong) ; } \widehat{C} = \widehat{E}_2. \text{ Từ đó ta có } \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2.$$

Vậy ED là tia phân giác của góc AEB.



Hình 3.4

3.3. (h.3.5)



Hình 3.5

Xét hai trường hợp :

a) $\widehat{A} > \widehat{B}$ (trên hình 3.5a có $\widehat{A} > 90^\circ$, trên hình 3.5b có $\widehat{A} = 90^\circ$, trên hình 3.5c có $\widehat{A} < 90^\circ$) :

$\widehat{BDC}$ là góc ngoài của $\triangle DCE$ nên $\widehat{BDC} = \widehat{DCE} + \widehat{CED} = 90^\circ + \widehat{CED}$, do đó $\widehat{CED} = \widehat{BDC} - 90^\circ$. (1)

Ta lại có $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} + \widehat{ACD} = \widehat{A} + \frac{\widehat{C}}{2}$ (góc ngoài của $\triangle ACD$) và

$90^\circ = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}$ nên từ (1) suy ra

$$\widehat{CED} = \left(\widehat{A} + \frac{\widehat{C}}{2} \right) - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} \right) = \frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2}.$$

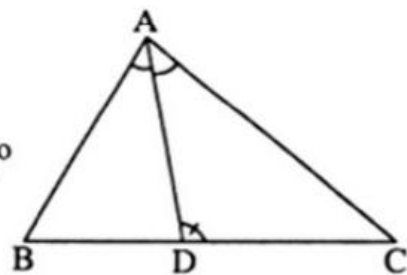
b) Trường hợp $\widehat{A} < \widehat{B}$, tức là $\widehat{B} > \widehat{A}$. Chứng minh tương tự ta có

$$\widehat{CED} = \frac{\widehat{B} - \widehat{A}}{2}.$$

3.4. (h.3.6)

Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{DAC} = \widehat{C} + \frac{\widehat{A}}{2}$. Mà $\widehat{ADB} = 80^\circ$

nên $\widehat{C} + \frac{1}{2}\widehat{A} = 80^\circ$, suy ra $\widehat{A} = 160^\circ - 2\widehat{C}$.



Hình 3.6

Lại có $\widehat{B} = 1,5\widehat{C}$ và $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$. Từ đó tìm được $\widehat{C} = 40^\circ$; $\widehat{B} = 60^\circ$ và $\widehat{A} = 80^\circ$.

3.5.* (h.3.7)

a) Tia CO cắt AB tại D.

Góc BDC là góc ngoài tại đỉnh D của $\triangle ADC$

nên $\widehat{D_1} = \widehat{A} + \widehat{C_1}$.

Vậy $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1}$ hay

$$\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}.$$

b) Nếu $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ thì $\widehat{BOC} = \widehat{A} + 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$.

Xét $\triangle BOC$ có $\widehat{C_2} = 180^\circ - (\widehat{O} + \widehat{B_2})$

$$= 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} \right) = 90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2}.$$

Suy ra CO là tia phân giác của góc C.

3.6.* (h.3.8)

Gọi giao điểm của CI với BE là M,

giao điểm của EI với CD là N.

Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có :

$$\widehat{BMI} = \widehat{B} + \widehat{C_1}; \widehat{BMI} = \widehat{I} + \widehat{E_1}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{B} + \widehat{C_1} = \widehat{I} + \widehat{E_1} \quad (1).$$

$$\text{Tương tự } \widehat{D} + \widehat{E_2} = \widehat{I} + \widehat{C_2} \quad (2).$$

$$\text{Mặt khác, theo giả thiết thì : } \widehat{C_1} = \widehat{C_2}, \widehat{E_1} = \widehat{E_2} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra :

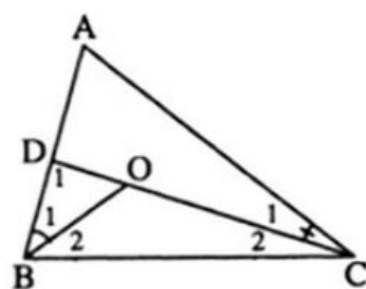
$$2\widehat{I} = \widehat{B} + \widehat{D} \text{ nên } \widehat{I} = \frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2} \text{ hay } \widehat{CIE} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ADE}}{2}.$$

3.7. (h.3.9)

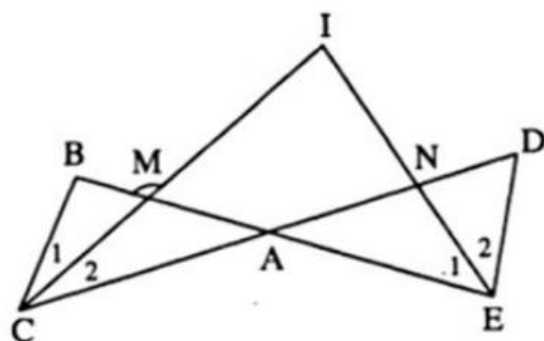
a) Ta có : $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} + \widehat{BAD} - (\widehat{C} + \widehat{CAD})$

$$= \left(\widehat{B} + \frac{\widehat{BAC}}{2} \right) - \left(\widehat{C} + \frac{\widehat{BAC}}{2} \right) = \widehat{B} - \widehat{C}.$$

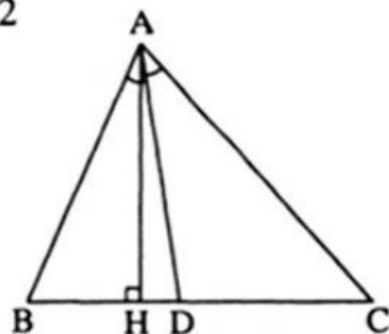
$$\text{Vậy } \widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \alpha \quad (1).$$



Hình 3.7



Hình 3.8



Hình 3.9

Mặt khác $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$; $\widehat{ADB} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

b) Trong tam giác HAD, ta có :

$$\widehat{HAD} = 90^\circ - \widehat{ADH} = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Chuyên đề 4. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

4.1. (h.4.5)

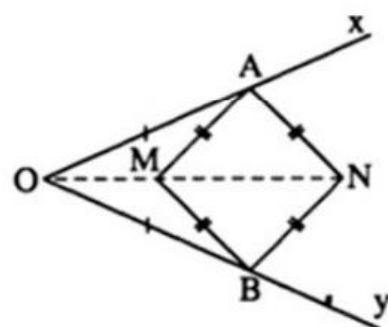
a) $\triangle OMA = \triangle OMB$ (c-c-c), suy ra $\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$,
do đó OM là tia phân giác của góc xOy (1).

$\triangle NOA = \triangle NOB$ (c-c-c), suy ra $\widehat{NOA} = \widehat{NOB}$,
do đó ON là tia phân giác của góc xOy (2).

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm O, M, N thẳng hàng.

b) $\triangle MAN = \triangle MBN$ (c-c-c), suy ra $\widehat{NMA} = \widehat{NMB}$.

Vậy MN là tia phân giác của góc AMB.



Hình 4.5

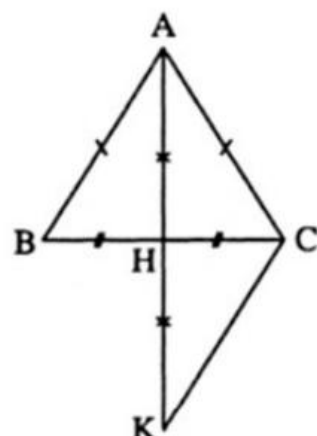
4.2. (h.4.6)

a) $\triangle AHB = \triangle AHC$ (c-c-c), suy ra $\widehat{HAB} = \widehat{HAC}$,
do đó AH là tia phân giác của góc BAC.

Ta có $\widehat{AHB} + \widehat{AHC} = 180^\circ$, mà $\widehat{AHB} = \widehat{AHC}$,
do đó $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$. Vậy $AH \perp BC$.

b) $\triangle HAB = \triangle HKC$ (c-g-c), suy ra $\widehat{BAK} = \widehat{ACK}$.

Hai góc này lại ở vị trí so le trong của hai đường thẳng AB và CK nên $AB \parallel CK$.

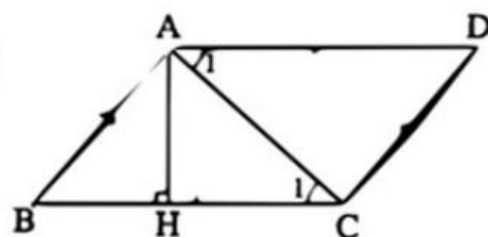


Hình 4.6

4.3. (h.4.7)

$\triangle ABC = \triangle CDA$ (c-c-c), suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{CAB}$
nên $AB \parallel CD$; tương tự $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$
nên $AD \parallel BC$.

Mà $AH \perp BC$ (giả thiết). Vậy $AH \perp AD$.



Hình 4.7

4.4. (h.4.8)

$\triangle MBC = \triangle MDA$ (c-g-c), suy ra

$AD = BC$ và $\widehat{MCB} = \widehat{MAD}$,

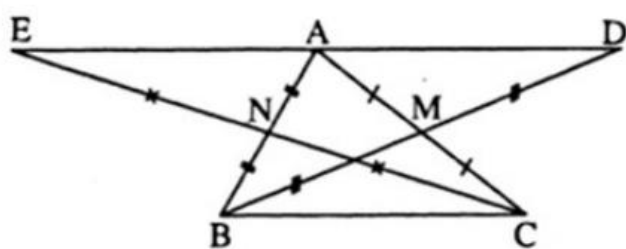
do đó $AD \parallel BC$.

$\triangle NBC = \triangle NAE$ (c-g-c),

suy ra $AE = BC$ và $\widehat{NBC} = \widehat{NAE}$, do đó $AE \parallel BC$.

Từ điểm A ngoài đường thẳng BC có hai đường thẳng AD và AE cùng song song với BC nên theo tiên đề Euclid về đường thẳng song song, ta có ba điểm A, E, D thẳng hàng.

Mà A thuộc DE và $AD = AE$ nên A là trung điểm của đoạn DE.



Hình 4.8

4.5. (h.4.9)

a) Trên BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$.

Ta có $\triangle ABD = \triangle EBD$ (c-g-c),

suy ra $\widehat{BED} = \widehat{BAD} = 90^\circ$. Vì $BE = AB$,

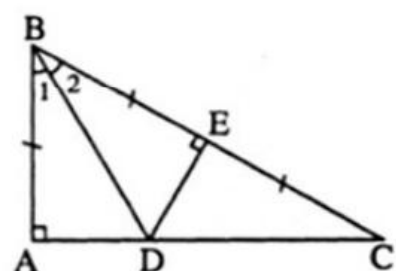
mà $BC = 2AB$ nên $EC = EB$.

$\triangle EBD = \triangle ECD$ (c-g-c), suy ra $DB = DC$ và $\widehat{B}_2 = \widehat{C}$.

b) Ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $\widehat{B}_2 = \widehat{C}$ nên $\widehat{B} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 2\widehat{C}$.

$\triangle ABC$ vuông tại A nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ hay $3\widehat{C} = 90^\circ$,

suy ra $\widehat{C} = 30^\circ$ và $\widehat{B} = 60^\circ$.



Hình 4.9

Chú ý : Từ bài tập này ta rút ra nhận xét : Nếu một tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc nhọn đối diện với cạnh góc vuông đó bằng 30° .

4.6. (h.4.10)

Xét tam giác ABC có M là trung điểm của BC.

Trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho $MN = MA$.

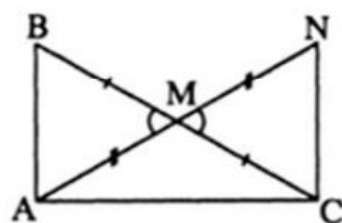
Ta có $\triangle MAB = \triangle MNC$ (c-g-c), suy ra

$\widehat{MBA} = \widehat{MCN}$; $NC = AB$.

a) Do $\widehat{MBA} = \widehat{MCN}$ nên $AB \parallel NC$ suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{ACN} = 180^\circ$.

Nếu $\widehat{A} = 90^\circ$ thì $\widehat{ACN} = 90^\circ$. Khi đó $\triangle ABC = \triangle CNA$ (c-g-c),

ta có $AN = BC$, suy ra $AM = \frac{1}{2}BC$.



Hình 4.10

b) Ta có $MA = \frac{1}{2}AN$. Nếu $MA = \frac{1}{2}BC$ thì $AN = BC$.

Khi đó $\triangle ABC = \triangle CNA$ (c-c-c), suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{NCA}$.

Mà $\widehat{BAC} + \widehat{NCA} = 180^\circ$ (vì $AB \parallel CN$) nên $\widehat{A} = 90^\circ$.

Chú ý : Đoạn thẳng AM nối đỉnh A với trung điểm M của cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC được gọi là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông.

Từ bài tập này, ta rút ra nhận xét sau :

- Trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh ấy.
- Nếu một tam giác có trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

4.7. (h.4.11)

a) $\triangle AOC = \triangle BOD$ (c-g-c),

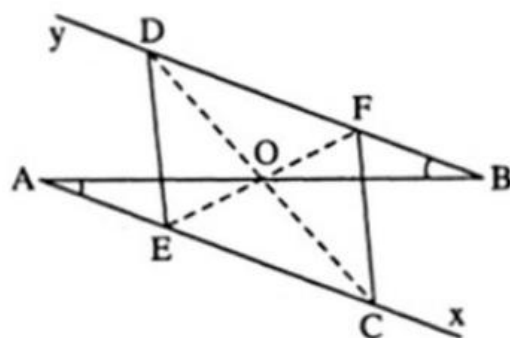
suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$.

Mà $\widehat{AOC} + \widehat{COB} = 180^\circ$,

nhân $\widehat{BOD} + \widehat{BOC} = 180^\circ$,

suy ra ba điểm C, O, D thẳng hàng.

Tương tự, ba điểm E, O, F thẳng hàng.



Hình 4.11

b) $\triangle ODE = \triangle OFC$ (c-g-c), suy ra $DE = CF$ và $\widehat{OED} = \widehat{OFC}$ nên $DE \parallel CF$.

4.8. (h.4.12)

a) $\triangle AM'B = \triangle BNA$ (c-g-c), suy ra $AN = BM'$.

$\triangle AMB = \triangle BN'A$ (c-g-c), suy ra $AN' = BM$.

$\triangle AMC = \triangle BCN$ (c-g-c), suy ra $MC = NC$.

b) Gọi O là trung điểm của AB.

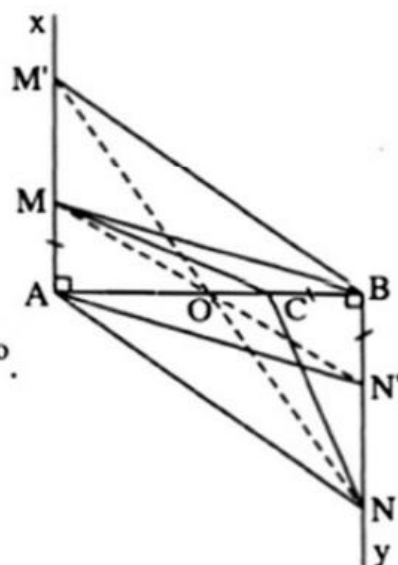
$\triangle AOM = \triangle BON'$ (c-g-c), suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{N'OB}$.

Mà $\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 180^\circ$ nên $\widehat{MOB} + \widehat{N'OB} = 180^\circ$.

Vậy ba điểm M, O, N' thẳng hàng.

Tương tự, ba điểm M', O, N thẳng hàng.

Suy ra hai đường thẳng MN', M'N cắt nhau tại trung điểm O của AB.



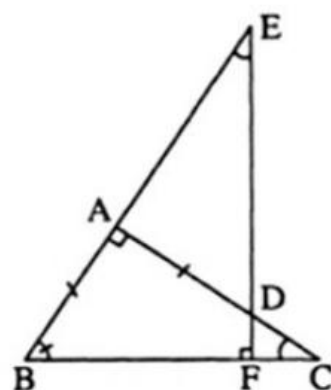
Hình 4.12

4.9. (h.4.13)

a) $\triangle AED = \triangle ACB$ (c-g-c), suy ra $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$.

Gọi giao điểm của DE với BC là F.

Ta có $\widehat{EBF} + \widehat{BEF} = \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{EFB} = 90^\circ$,
do đó $EF \perp BC$, tức là $DE \perp BC$.



Hình 4.13

b) Vì $4\widehat{B} = 5\widehat{C}$ nên $\widehat{C} = \frac{4}{5}\widehat{B}$, do đó

$\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{B} + \frac{4}{5}\widehat{B} = \frac{9}{5}\widehat{B} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{B} = 50^\circ$, do đó $\widehat{C} = \widehat{AED} = 40^\circ$.

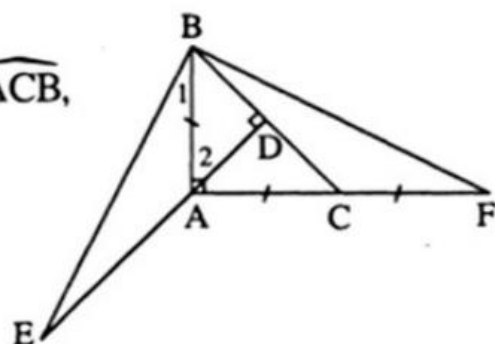
4.10. (h.4.14)

Ta có $\widehat{A_2} = 45^\circ$; $\widehat{ACB} = 45^\circ$, suy ra $\widehat{A_2} = \widehat{ACB}$,

do đó $\widehat{EAB} = \widehat{BCF}$ (cùng bù với hai góc bằng nhau).

$\triangle AEB = \triangle CBF$ (c-g-c), suy ra

$$BE = BF \text{ và } \widehat{B_1} = \widehat{F}.$$



Hình 4.14

Tam giác ABF vuông tại A có $\widehat{ABF} + \widehat{F} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{B_1} + \widehat{ABF} = 90^\circ$ hay $\widehat{EBF} = 90^\circ$. Vậy $BE \perp BF$.

4.11.* (h.4.15)

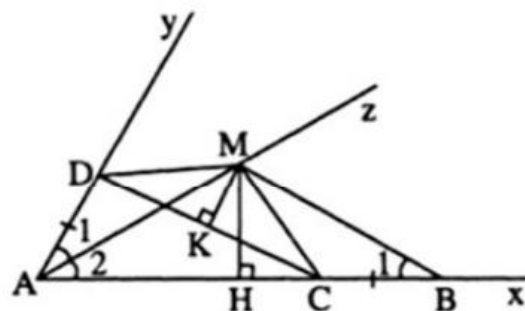
Vẽ đường trung trực của AB cắt Ax tại H, cắt tia Az tại M suy ra điểm M cố định và $HA = HB$.

$\triangle HMA = \triangle HMB$ (c-g-c), suy ra

$$\widehat{B_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_1} \text{ và } MA = MB.$$

Khi đó $\triangle AMD = \triangle BMC$ (c-g-c), ta có $MC = MD$.

Qua M kẻ MK vuông góc với CD. Bạn đọc dễ dàng chứng minh được MK là đường trung trực của CD. Từ đó suy ra đường trung trực của CD đi qua điểm M cố định.



Hình 4.15

4.12.* (h.4.16)

Xét ba trường hợp ($\widehat{A} < 90^\circ$, $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{A} > 90^\circ$) :

* Trường hợp $\widehat{A} < 90^\circ$

a) Trên tia đối của tia DA lấy điểm I sao cho $DI = DA$.

Ta có $\triangle BDI = \triangle CDA$ (c-g-c), suy ra $BI = CA = AH$

và $\widehat{IBD} = \widehat{ACD}$, do đó $BI \parallel AC$, mà $AH \perp AC$

nên $AH \perp BI$.

Lại có $AF \perp AB$, vì thế $\widehat{ABI} = \widehat{FAH}$ (cùng bù với $\widehat{BAC}$).

Vậy $\triangle ABI = \triangle FAH$ (c-g-c), nên $FH = AI = 2AD$ và $\widehat{AFH} = \widehat{BAI}$.

b) Gọi giao điểm của AD với FH là K. Ta có

$\widehat{AFK} + \widehat{FAK} = \widehat{BAI} + \widehat{FAK} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{AKF} = 90^\circ$,

do đó $AD \perp FH$.

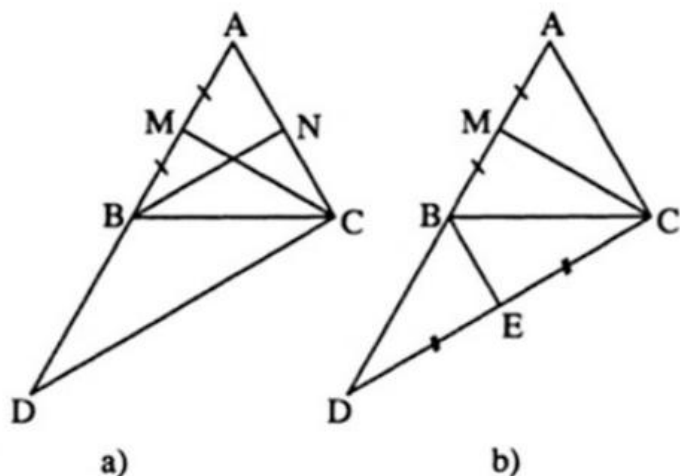
* Các trường hợp còn lại, bạn đọc tự chứng minh.

4.13. (h.4.17a, b)

Cách 1. (h.4.17a). Gọi N là trung điểm của AC.

Ta có $\triangle AMC = \triangle ANB$ (c-g-c), nên $CM = BN$.

$\triangle ACD$ có N là trung điểm của AC, B là trung điểm của AD.



Hình 4.17

Theo Ví dụ 4.3, ta có $BN = \frac{1}{2}CD$. Vậy $CM = \frac{1}{2}CD$.

Cách 2. (h.4.17b). Gọi E là trung điểm của CD.

Theo Ví dụ 4.3, ta có $AB = BD$ và $CE = ED$, do đó $BE \parallel AC$ nên $\widehat{DBE} = \widehat{MAC}$ (hai góc đồng vị)

và $BE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = MA$.

$\triangle AMC = \triangle BED$ (c-g-c), suy ra $CM = DE = \frac{1}{2}CD$.

4.14. (h.4.18)

a) $xy \parallel BC$ (giả thiết), suy ra

$$\widehat{MAD} = \widehat{AMB} \text{ (so le trong).}$$

Từ đó ta có $\triangle AMD = \triangle MAB$ (c-g-c),

suy ra $MD = AB$ và $AD = MB$.

$$\triangle AME = \triangle MAC \text{ (c-g-c),}$$

suy ra $ME = AC$ và $AE = MC$.

Từ đó có $MD = AB$, $ME = AC$, $DE = BC$.

Vậy $\triangle ABC = \triangle MDE$ (c-c-c).

b) $\triangle AMD = \triangle MAB$ nên $\widehat{AMD} = \widehat{MAB}$, suy ra $AB \parallel MD$, ta có $\widehat{BDA} = \widehat{DBM}$ (so le trong).

Gọi O là giao điểm của BD với AM , ta có $\triangle OAD = \triangle OMB$ (g-c-g), suy ra $OA = OM$.

Vậy O là trung điểm của AM

(1).

Gọi O_1 là giao điểm của CE với AM .

Chúng minh tương tự ta có O_1 là trung điểm của AM

(2).

Từ (1) và (2) suy ra $O_1 \equiv O$.

Vậy ba đường thẳng AM , BD , CE đồng quy tại O là trung điểm của AM .

4.15.* a) Chứng minh $AI \perp DE$: Xem bài 4.12.

b) Cách 1. (h.4.19a)

Theo câu a, ta có $AI \perp DE$. $\triangle AEK$ và $\triangle CAM$ có

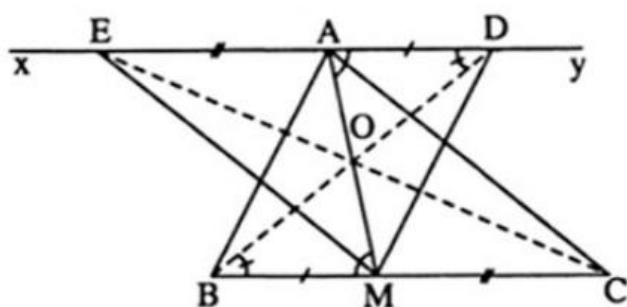
$$\widehat{E} = \widehat{CAM} \text{ (cùng phụ với } \widehat{IAE}), AE = AC \text{ (giả thiết),}$$

$$\widehat{EAK} = \widehat{ACM} \text{ (cùng phụ với } \widehat{CAH}).$$

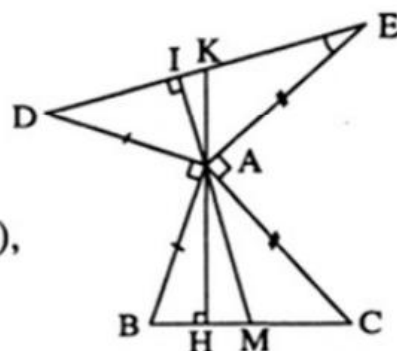
Do đó $\triangle AEK = \triangle CAM$ (g-c-g), ta có $EK = AM$.

Tương tự $\triangle ADK = \triangle BAM$ (g-c-g), ta có $DK = AM$.

Suy ra $DK = KE$.



Hình 4.18



Hình 4.19a

Cách 2. (h.4.19b)

Qua D kẻ đường thẳng song song với AE cắt AK tại F.

$\triangle FDA$ và $\triangle CAB$ có $\widehat{FDA} = \widehat{BAC}$

(cùng bằng $180^\circ - \widehat{DAE}$),

$DA = AB$ (giả thiết), $\widehat{FAD} = \widehat{ABC}$

(cùng phụ với $\widehat{HAB}$),

do đó $\triangle FDA = \triangle CAB$ (g-c-g), nên $DF = AC$,
suy ra $DF = AE$.

Từ đó $\triangle KAE = \triangle KFD$ (g-c-g), suy ra $KD = KE$.

Cách 3. (h.4.19c)

Kẻ $DF \perp AH$, $EN \perp AH$.

$\triangle FAD$ và $\triangle HAB$ có $\widehat{F} = \widehat{H} = 90^\circ$,

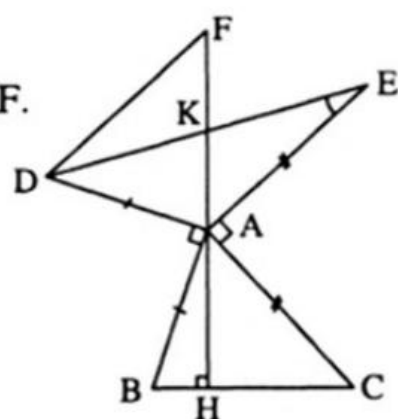
$AD = AB$ (giả thiết),

$\widehat{FAD} = \widehat{B}$ (cùng phụ với $\widehat{HAB}$), do đó $\triangle FAD = \triangle HAB$

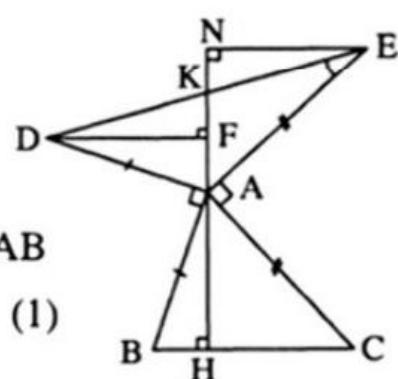
(cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $DF = AH$.

Tương tự $\triangle NAE = \triangle HCA$ (cạnh huyền – góc nhọn),
suy ra $EN = AH$.

Từ (1) và (2) suy ra $DF = EN$. Từ đó $\triangle FDK = \triangle NEK$ (g-c-g) nên $KD = KE$.



Hình 4.19b



Hình 4.19c

4.16.* (h.4.20)

a) $\widehat{AID} = \widehat{ABE}$ (cùng phụ với $\widehat{AEB}$).

$\triangle AID = \triangle ABE$ (g-c-g), ta có $AI = AB$.

Mà $AB = AC$ (giả thiết), suy ra $AI = AC$.

Vậy A là trung điểm của CI.

b) $AM \perp BE$, $IN \perp BE$ suy ra $AM \parallel IN$.

Gọi giao điểm của AM với đường thẳng kẻ qua N và

song song với AC là F. Ta có $\widehat{IAN} = \widehat{FNA}$ (so le

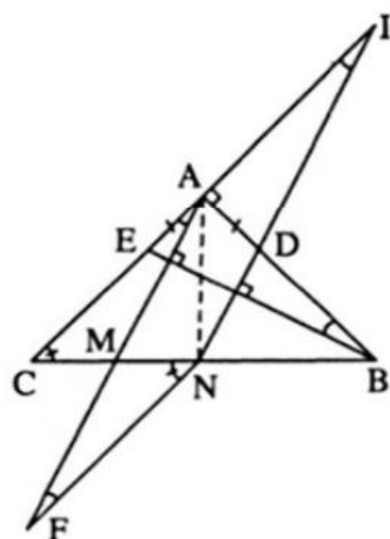
trong), $\widehat{ANI} = \widehat{NAF}$ (so le trong). Do đó

$\triangle AIN = \triangle NFA$ (g-c-g), suy ra $NF = AI = AC$. Lại

có $\widehat{CAM} = \widehat{MFN}$ (so le trong), $\widehat{ACM} = \widehat{MNF}$

(so le trong). Vậy $\triangle MAC = \triangle MFN$ (g-c-g), do đó

$CM = MN$.



Hình 4.20

Chuyên đề 5. TAM GIÁC CÂN. TAM GIÁC ĐỀU

5.1. (h.5.6)

a) Qua B vẽ đường thẳng song song với AC cắt MN tại E.

Ta có $\triangle BED = \triangle CND$ (g-c-g),

suy ra $BE = NC$

$\triangle AHM = \triangle AHN$ (g-c-g),

suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$

mà $\widehat{BEM} = \widehat{ANM}$ (hai góc đồng vị), nên $\widehat{BEM} = \widehat{BME}$, do đó

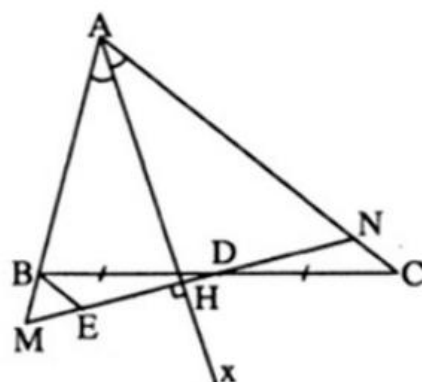
$\triangle BME$ cân tại B, ta có $BM = BE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BM = CN$.

b) Ta có $AB + BM = AN = AC - NC = AC - BM$, suy ra

$$2BM = AC - AB = b - c, \text{ do đó } BM = \frac{b - c}{2} \text{ (vì } b > c \text{);}$$

$$AM = AB + BM = \frac{b + c}{2}.$$



Hình 5.6

5.2. (h.5.7)

Vì $AM + AN = 2AB$ suy ra

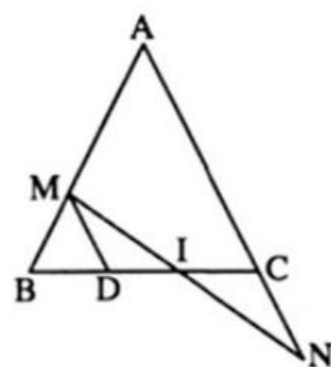
$$AB - MB + AC + NC = AB + AC$$

nên $NC - MB = 0$, do đó $MB = NC$.

Qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt BC tại D.

Bạn đọc dễ dàng chứng minh được $MD = NC$

và $\triangle IMD = \triangle INC$ (g-c-g) để suy ra $IM = IN$.



Hình 5.7

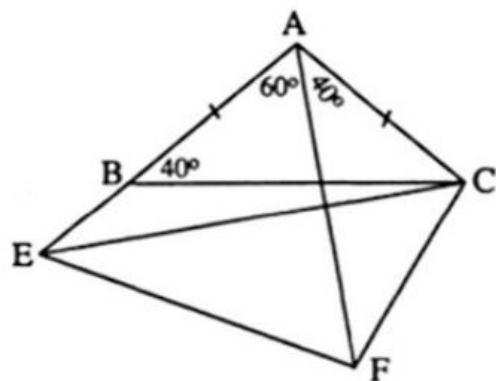
5.3. (h.5.8)

Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ là đường thẳng AE vẽ tam giác đều AEF, ta có $\widehat{CAF} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$.

Vì tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 100^\circ$ nên

$$\widehat{ABC} = (180^\circ - 100^\circ) : 2 = 40^\circ ;$$

do đó $\widehat{CAF} = 40^\circ = \widehat{ABC}$.



Hình 5.8

$\triangle ABC = \triangle CAF$ (c-g-c), nên $AC = CF$.

Từ đó $\triangle AEC = \triangle FEC$ (c-c-c), suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{FEC} = \frac{1}{2} \widehat{AEF} = 30^\circ$.

5.4. (h.5.9)

$BE = BH$ (giả thiết). $\triangle HBE$ cân tại B,

suy ra $\widehat{E} = \widehat{H}_1$.

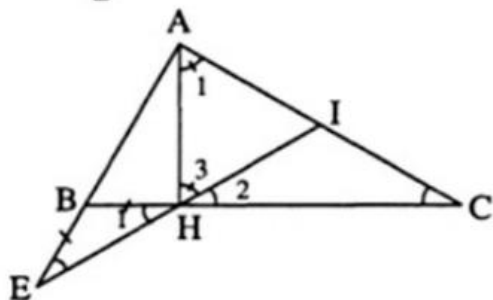
Mà $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ (đối đỉnh) nên $\widehat{E} = \widehat{H}_2$.

$\widehat{ABC}$ là góc ngoài tại đỉnh B của tam giác cân BEH, ta có $\widehat{ABC} = 2\widehat{H}_2$. Mặt khác $\widehat{ABC} = 2\widehat{C}$, từ đó $\widehat{H}_2 = \widehat{C}$.

Do đó $\triangle ICH$ cân tại I (I là giao điểm của EH với AC), suy ra $IH = IC$.

Bạn đọc dễ dàng chứng minh được $\triangle IAH$ cân tại I để có $IA = IH$.

Từ đó suy ra $IA = IC$.



Hình 5.9

5.5. (h.5.10)

a) Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$.

Từ đó trong tam giác vuông ECD ta có $\widehat{CDE} = 30^\circ$ nên $CD = 2CE$.

Ta lại có $CD = 2BC$ nên $CE = BC$, suy ra $\widehat{CBE} = 30^\circ = \widehat{CDE}$.

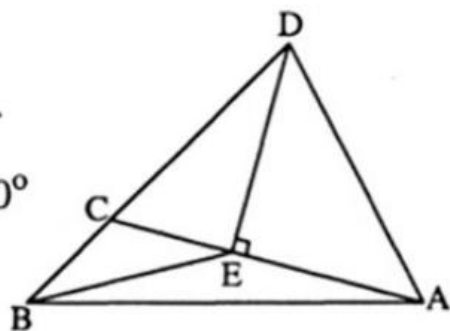
Tam giác EBD cân tại E, suy ra $EB = ED$.

b) $\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{CBE} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ = \widehat{EAB}$.

$\triangle EAB$ cân tại E, ta có $EA = EB = ED$.

Suy ra $\triangle EAD$ vuông cân tại E nên $\widehat{EDA} = 45^\circ$.

Vậy $\widehat{ADB} = \widehat{ADE} + \widehat{EDB} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.



Hình 5.10

5.6. (h.5.11)

Khi $\widehat{ACB} < 30^\circ$ thì D nằm giữa B và C.

Gọi M là trung điểm của CD.

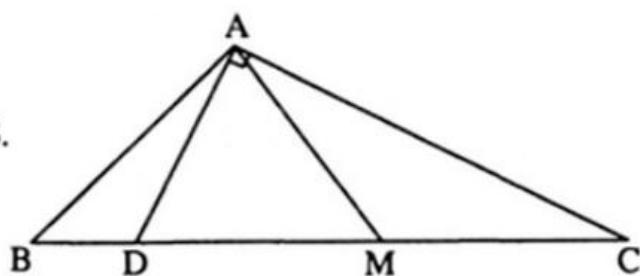
Tam giác ACD vuông tại A ,

suy ra $MA = MD = MC = \frac{1}{2}CD = AB$.

Các tam giác MAB và MAC là các tam giác cân lần lượt tại A và M ,

suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{AMB} = 2\widehat{ACM}$

hay $\widehat{ABD} = 2\widehat{ACB}$.



Hình 5.11

5.7. (h.5.12)

a) Ta có $\widehat{ACE} = \widehat{DCB} = 120^\circ$.

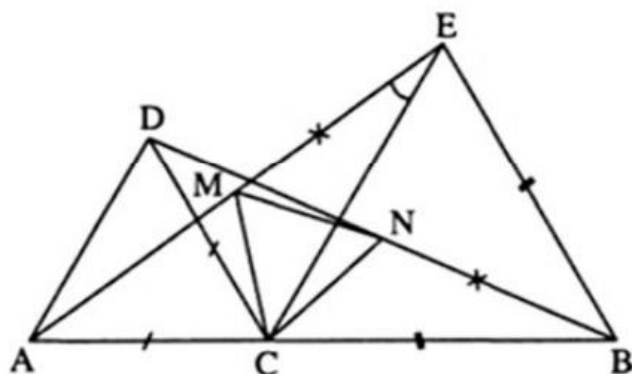
$\Delta ACE = \Delta DCB$ (c-g-c),

suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{DBC}$ và $AE = DB$,
do đó $ME = NB$.

b) $\Delta MEC = \Delta NBC$ (c-g-c),

suy ra $MC = NC$ và $\widehat{MCE} = \widehat{NCB}$

nên $\widehat{MCE} + \widehat{ECN} = \widehat{ECN} + \widehat{NCB} = \widehat{ECB} = 60^\circ$. Vậy ΔMCN là tam giác đều.



Hình 5.12

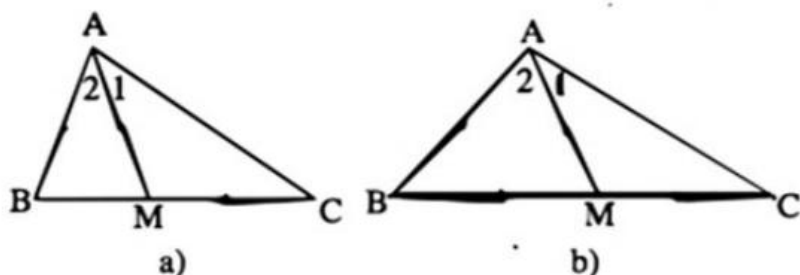
5.8. (h.5.13)

Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{AMC} \geq \widehat{AMB}$ thì $\widehat{AMC} \geq 90^\circ$ nên tam giác AMC phải cân tại M .

Xét ba trường hợp đối với tam giác AMB .

a) Trường hợp ΔAMB cân tại M .

Trường hợp này không xảy ra vì nếu hai tam giác AMB và AMC cùng là tam giác cân tại M thì $MA = MB = MC$, khi đó $\widehat{BAC} = 90^\circ$, trái với đề bài.



Hình 5.13

b) Trường hợp $\triangle AMB$ cân tại A, còn $\triangle AMC$ cân tại M (h.5.13a)

$$\widehat{A}_1 = \widehat{C}; \widehat{B} = \widehat{AMB} = \widehat{A}_1 + \widehat{C} = 2\widehat{C},$$

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$$

Suy ra $\widehat{C} = 35^\circ$ và $\widehat{B} = 70^\circ$.

c) Trường hợp $\triangle AMB$ cân tại B, còn $\triangle AMC$ cân tại M (h.5.13b).

$$\text{Ta có } \widehat{A}_1 = \widehat{C}; \widehat{A}_2 = \widehat{AMB} = \widehat{A}_1 + \widehat{C} = 2\widehat{C}.$$

$$\widehat{A} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 3\widehat{C} = 75^\circ.$$

Suy ra $\widehat{C} = 25^\circ$ và $\widehat{B} = 80^\circ$.

Do vai trò của các đỉnh B và C như nhau, nên bài toán có 4 đáp số sau :

$$\widehat{B} = 70^\circ \text{ và } \widehat{C} = 35^\circ; \quad \widehat{B} = 35^\circ \text{ và } \widehat{C} = 70^\circ;$$

$$\widehat{B} = 80^\circ \text{ và } \widehat{C} = 25^\circ; \quad \widehat{B} = 25^\circ \text{ và } \widehat{C} = 80^\circ.$$

5.9. (h.5.14)

a) Gọi giao điểm của FD với AC là K.

$\triangle CDF = \triangle CDK$ (g-c-g) nên $DK = DF$.

Ta chứng minh được hai tam giác EDC và EDK cân tại E.

$$\text{Suy ra } ED = EK = EC = \frac{1}{2}CK = \frac{1}{2}CF,$$

$$\text{suy ra } CF = 2CE \quad (1).$$

Vì $DE \parallel BC$ nên $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ (hai góc đồng vị);

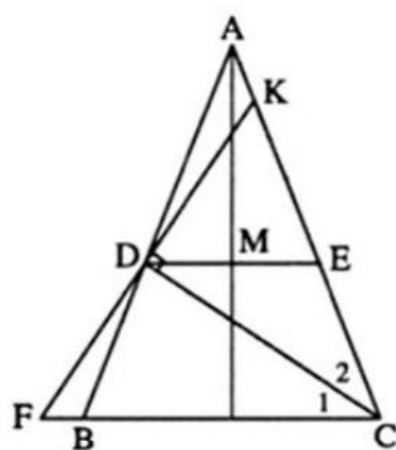
$$\widehat{AED} = \widehat{ACB} \text{ (hai góc đồng vị).}$$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$. Tam giác ADE cân tại A,

$$\text{ta có } AD = AE, \text{ suy ra } BD = CE \quad (2).$$

Từ (1) và (2), ta được $CF = 2BD$.

$$\text{b) } \triangle AMD = \triangle AME \text{ (c-g-c), suy ra } MD = ME = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{4}CF.$$



Hình 5.14

5.10. (h.5.15)

a) $\triangle ABC$ cân tại A, $\widehat{A} = 108^\circ$,

suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = 36^\circ$; $\widehat{OCA} = \widehat{OCB} = 18^\circ$.

$$\begin{aligned}\triangle BOC \text{ có } \widehat{BOC} &= 180^\circ - (\widehat{OBC} + \widehat{OCB}) \\ &= 180^\circ - (12^\circ + 18^\circ) = 150^\circ.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } \widehat{MOC} &= 360^\circ - (\widehat{MOB} + \widehat{BOC}) \\ &= 360^\circ - (60^\circ + 150^\circ) = 150^\circ \text{ nên } \widehat{BOC} = \widehat{MOC}.\end{aligned}$$

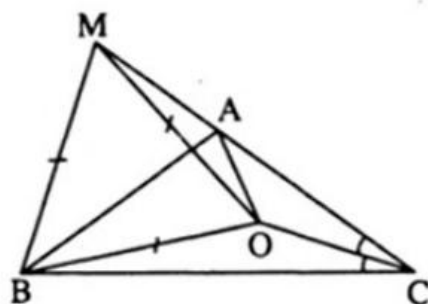
Do đó $\triangle BOC = \triangle MOC$ (c-g-c), ta có :

$\widehat{OCM} = \widehat{OCB} = \widehat{OCA} (= 18^\circ)$ nên hai tia CM và CA trùng nhau, vì thế ba điểm A, M, C thẳng hàng.

b) $\triangle BMC$ có $CB = CM$ nên là tam giác cân tại C suy ra

$$\widehat{CBM} = \widehat{CMB} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

$$\widehat{MAB} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ = \widehat{AMB}. \text{ Vậy } \triangle AMB \text{ cân tại B.}$$



Hình 5.15

5.11. (h.5.16)

Giả sử đã tìm được $E \in AB$ và điểm $F \in AC$ mà $EF \parallel BC$ và $AE = CF$.

Qua E dựng $ED \parallel AC$ cắt BC tại D.

Ta có $\triangle EDF = \triangle CFD$ (g-c-g),

suy ra $ED = CF = EA$.

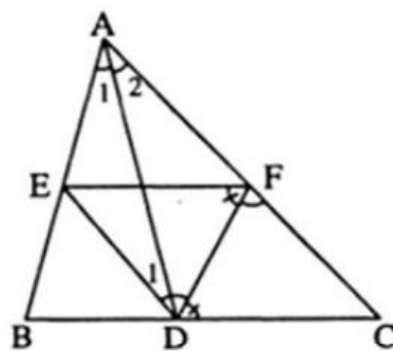
Tam giác AED cân tại E nên $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$.

Mà $\widehat{D_1} = \widehat{A_2}$ (so le trong), do đó $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Vậy AD là phân giác của góc BAC, suy ra điểm D được xác định.

Từ đó xác định được điểm E rồi suy ra điểm F.

Bạn đọc cần chứng minh rằng với cách xác định các điểm D, E, F như trên bao giờ cũng thỏa mãn các điều kiện của đề bài.



Hình 5.16

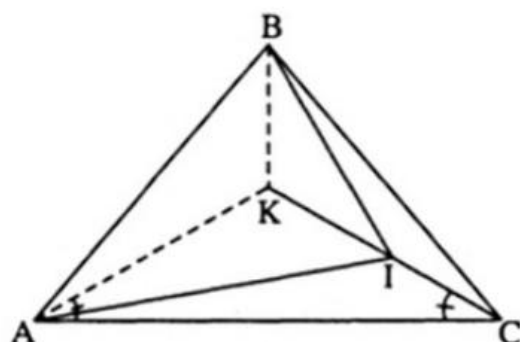
5.12.* (h.5.17 ; h.5.18)

Tam giác ABC cân tại B, $\widehat{B} = 80^\circ$

nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 50^\circ$.

Vì $\widehat{IAC} = 10^\circ$; $\widehat{ICA} = 30^\circ$

nên $\widehat{IAB} = 40^\circ$; $\widehat{ICB} = 20^\circ$.



Hình 5.17

• Cách 1. (h.5.17)

Vẽ phân giác của góc BAI cắt tia CI tại K, ta có

$\widehat{BAK} = \widehat{KAI} = 20^\circ$, suy ra $\widehat{KAC} = 30^\circ = \widehat{ICA}$.

ΔAKC cân tại K có $\widehat{KAC} = \widehat{KCA} = 30^\circ$ nên $\widehat{AKC} = 120^\circ$.

Tam giác KAC cân tại K nên $KA = KC$.

$\Delta AKB = \Delta CKB$ (c-c-c), do đó

$$\widehat{AKB} = \widehat{BKC} = \frac{360^\circ - \widehat{AKC}}{2} = \frac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ.$$

$\Delta AKB = \Delta AKI$ (g-c-g), suy ra $AI = AB$.

Tam giác ABI cân tại A có $\widehat{BAI} = 40^\circ$ nên $\widehat{AIB} = 70^\circ$.

• Cách 2. (h.5.18)

Trên nửa mặt phẳng bờ AC, chứa điểm B,

vẽ tam giác đều ACK, ta có

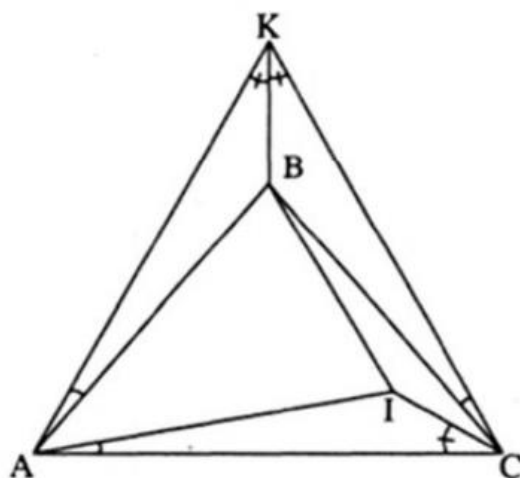
$$\widehat{BAK} = \widehat{BCK} = 10^\circ.$$

$\Delta ABK = \Delta CBK$ (c-g-c)

suy ra $\widehat{BKA} = \widehat{BKC} = 30^\circ$.

$\Delta ABK = \Delta AIC$ (g-c-g), suy ra $AB = AI$.

Do đó ΔABI cân tại A, ta có $\widehat{AIB} = 70^\circ$.



Hình 5.18

5.13.* (h.5.19)

Kẻ tia CF sao cho $\widehat{ACF} = 60^\circ$ ($F \in AB$), tia CF cắt AD tại O.

Dễ dàng chứng minh được các tam giác AOC và ODF là các tam giác đều, suy ra $OA = OC = AC$; $OD = OF = DF$.

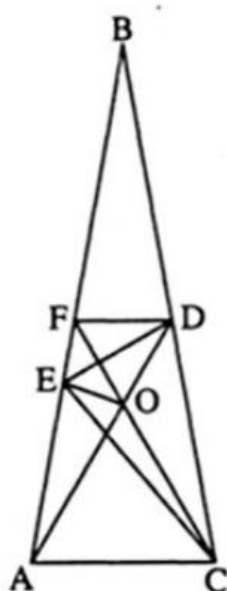
$\triangle AEC$ có $\widehat{EAC} = 80^\circ$, $\widehat{ACE} = 50^\circ$ nên $\widehat{AEC} = 50^\circ$ nên $\triangle AEC$ cân tại A, suy ra $AE = AC = AO$.

Do đó $\triangle AOE$ cân tại A, có $\widehat{OAE} = 20^\circ$ nên $\widehat{EOA} = 80^\circ$, từ đó có $\widehat{EOF} = 40^\circ$.

$\widehat{AFC} = 180^\circ - \widehat{CAF} - \widehat{ACF} = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ = \widehat{EOF}$. Hình 5.19

Vậy $\triangle EOF$ cân tại E, suy ra $EO = EF$ nên $\triangle DOE = \triangle DFE$ (c-c-c),

ta có $\widehat{ODE} = \widehat{FDE} = \frac{1}{2}\widehat{ODF} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$. Vậy $\widehat{ADE} = 30^\circ$.



5.14. (h.5.20)

a) Tam giác AHB vuông tại H, có $\widehat{A} = 30^\circ$ nên $BH = \frac{1}{2}AB$, $HE = \frac{1}{2}AB$, suy ra $HE = EB = BH$.

Vậy tam giác BEH là tam giác đều.

Tương tự, ta có $\triangle CKF$ là tam giác đều.

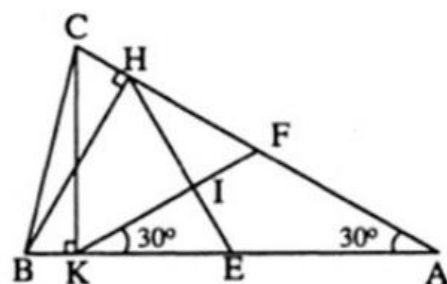
b) Tương tự câu a, ta có $FK = FA$.

Tam giác FAK cân tại F suy ra $\widehat{AKF} = 30^\circ$.

$\triangle EBH$ là tam giác đều, ta có $\widehat{BEH} = 60^\circ$,

do đó $\widehat{IEK} + \widehat{IKE} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ nên $\widehat{EIK} = 90^\circ$.

Vậy $KF \perp EH$.



Hình 5.20

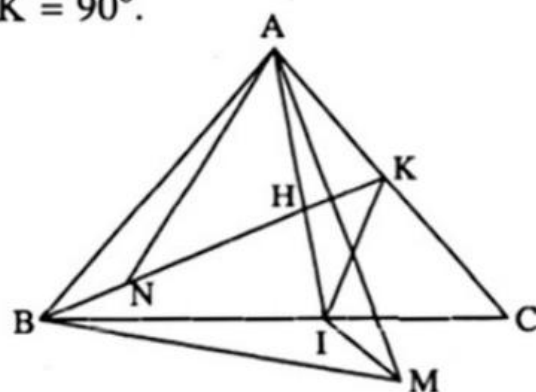
5.15.* (h.5.21)

$\triangle ABC$ cân tại A, $\widehat{A} = 80^\circ$,

suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = 50^\circ$.

Trên nửa mặt phẳng bờ AB, chứa đỉnh C vẽ tam giác đều AMB, ta có

$\widehat{CBM} = \widehat{ABM} - \widehat{ABC} = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$.



Hình 5.21

$\triangle BAI$ cân tại I vì có $\widehat{IAB} = \widehat{IBA} = 50^\circ$, suy ra $IA = IB$.

$\triangle AMI = \triangle BMI$ (c-c-c), suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{BMI} = 30^\circ$.

Trên tia BK lấy điểm N sao cho $BN = IM$, ta có :

$\triangle ABN = \triangle BMI$ (c-g-c), suy ra $\widehat{NAB} = \widehat{MBI} = 10^\circ$ và $NA = BI = AI$.

$\triangle NAK$ cân tại N vì có $\widehat{NAK} = \widehat{NKA} = 70^\circ$, suy ra $AN = NK$, do đó $AI = NK$.

$\triangle HAN$ cân tại H vì có $\widehat{HAN} = \widehat{HNA} = 40^\circ$, suy ra $HN = HA$. Từ đó $HK = HI$. Vậy $\triangle HIK$ cân tại H.

5.16.* (h.5.22)

$\triangle ABC$ cân tại A, có $\widehat{A} = 100^\circ$ nên $\widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ$,

suy ra $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = 20^\circ$.

$\widehat{ADB} = \widehat{B}_2 + \widehat{C} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

Trên cạnh BC lấy hai điểm K và E

sao cho $\widehat{BDK} = 60^\circ$, $\widehat{BDE} = 80^\circ$,

ta có $\triangle BDA = \triangle BDK$ (g-c-g), suy ra $DA = DK$ (1).

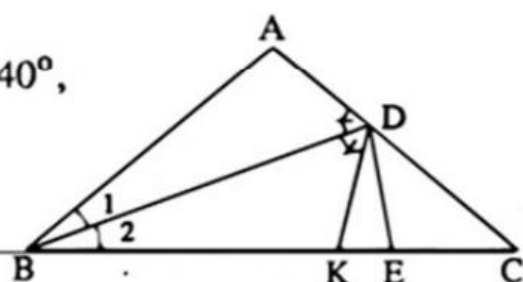
$\triangle BDE$ có $\widehat{B}_2 = 20^\circ$, $\widehat{BDE} = 80^\circ$ nên $\widehat{BED} = 80^\circ$, suy ra $BE = BD$.

$\widehat{DKE} = \widehat{B}_2 + \widehat{BDK} = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$, suy ra $\widehat{DEK} = \widehat{DKE}$, do đó $\triangle DEK$ cân tại D, ta có $DK = DE$ (2).

Do $\widehat{ECD} = 40^\circ$ nên $\widehat{ECD} = \widehat{EDC}$, suy ra $\triangle ECD$ cân tại E, ta có

$ED = EC$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AD = EC$. Do đó $BC = BE + EC = BD + AD$.



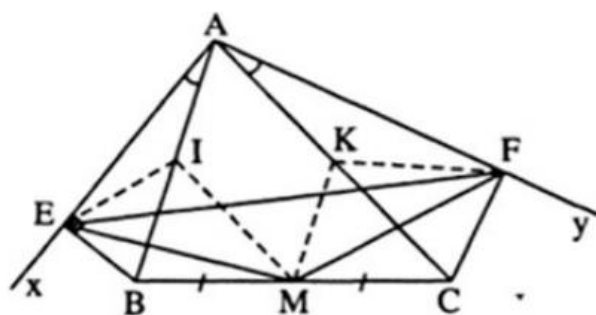
Hình 5.22

5.17. (h.5.23)

a) Gọi I là trung điểm của AB, K là trung điểm của AC. Ta có

$$IA = IE = MK = \frac{1}{2} AB ;$$

$$KF = KA = IM = \frac{1}{2} AC.$$



Hình 5.23

Các tam giác IAE và AKF tương ứng là các tam giác cân tại I và K, suy ra

$$\widehat{EIB} = 2.\widehat{xAB} = 42^\circ ; \widehat{CKF} = 2\widehat{CAy} = 42^\circ \text{ nên } \widehat{EIB} = \widehat{CKF}.$$

MI // AC nên $\widehat{BIM} = \widehat{BAC}$ (hai góc đồng vị) ; MK // AB nên $\widehat{MKC} = \widehat{BAC}$ (hai góc đồng vị), suy ra $\widehat{BIM} = \widehat{MKC}$. Từ đó ta có $\widehat{EIM} = \widehat{MKF}$.

$\triangle IEM = \triangle KMF$ (c-g-c), do đó $ME = MF$.

Vậy $\triangle MEF$ cân tại M.

b) Ta có $\widehat{EMF} = \widehat{EMI} + \widehat{IMK} + \widehat{KMF}$.

Ta lại có $\widehat{IMK} = \widehat{BIM}$ (vì $KM // AB$),

$$\widehat{KMF} = \widehat{IEM} \text{ (vì } \triangle KMF = \triangle IEM)$$

$$\begin{aligned} \text{nên } \widehat{EMF} &= \widehat{EMI} + \widehat{BIM} + \widehat{IEM} \\ &= 180^\circ - \widehat{EIB} \text{ (xét } \triangle EMI) \\ &= 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{MEF} = \widehat{MFE} = 21^\circ$.

5.18.* (h.5.24)

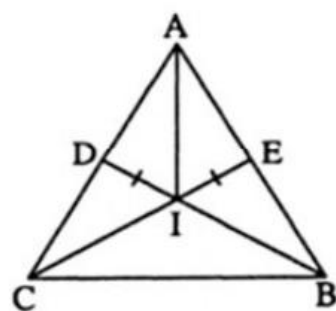
$$\triangle ADI = \triangle AEI \text{ (c-c-c),}$$

suy ra $\widehat{ADI} = \widehat{AEI}$. Do đó

$$\widehat{DCI} + \widehat{DIC} = \widehat{EBI} + \widehat{EIB}.$$

Mà $\widehat{DIC} = \widehat{EIB}$ (hai góc đối đỉnh), do đó $\widehat{DCI} = \widehat{EBI}$,

suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$. Vậy $\triangle ABC$ cân tại A.



Hình 5.24

5.19. (h.5.25)

DM và DF là các tia phân giác của hai góc kề bù nên $DM \perp DN$.

Gọi E là trung điểm của MN,

ta có $DE = \frac{1}{2}MN$.

$\triangle MED$ cân tại E nên $\widehat{M}_1 = \widehat{MDE}$,

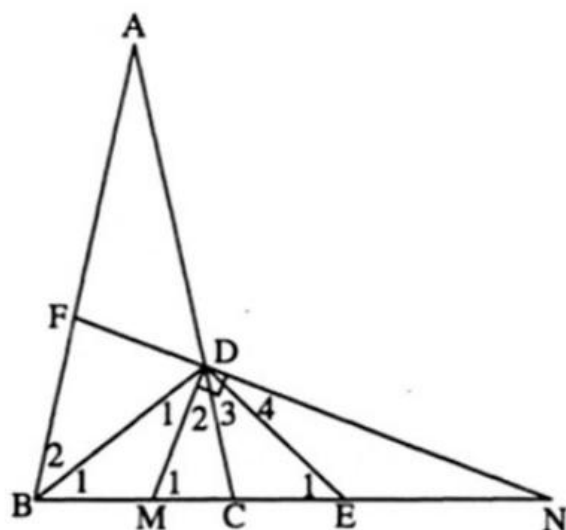
suy ra $\widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 + \widehat{D}_3$

suy ra $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_3$ (vì $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$).

$\widehat{E}_1 = \widehat{ACB} - \widehat{D}_3 = 2\widehat{B}_1 - \widehat{D}_3 = \widehat{B}_1$

nên $\triangle BDE$ cân tại D.

Suy ra $BD = DE = \frac{1}{2}MN$.



Hình 5.25

Chuyên đề 6. TAM GIÁC VUÔNG VÀ ĐỊNH LÝ PYTHAGORE

6.1. (h.6.4)

$\triangle ABC$ vuông tại A, $\widehat{B} = 30^\circ$ nên $\widehat{C} = 60^\circ$

suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = 30^\circ$, do đó $\widehat{B} = \widehat{C}_1$.

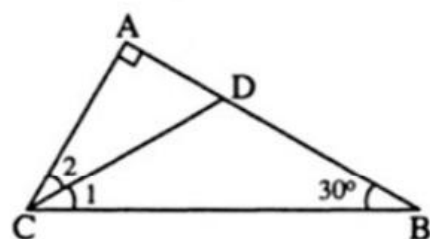
Tam giác BCD cân tại D nên $DC = DB$.

$\triangle ACD$ vuông tại A có $\widehat{C}_2 = 30^\circ$ nên $CD = 2AD$

suy ra $BD = 2AD$.

Ta có $BD + AD = 3AD = AB = 6$,

suy ra $AD = 2$ và $BD = 4$.



Hình 6.4

6.2. Giả sử $AB < AC$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{AB}{8} = \frac{AC}{15} \text{ suy ra } \frac{AB^2}{64} = \frac{AC^2}{225} = \frac{AB^2 + AC^2}{64 + 225} = \frac{BC^2}{289} \\ = \frac{102^2}{289} = \left(\frac{102}{17}\right)^2 = 6^2 \end{aligned}$$

(vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (định lí Pythagore)).

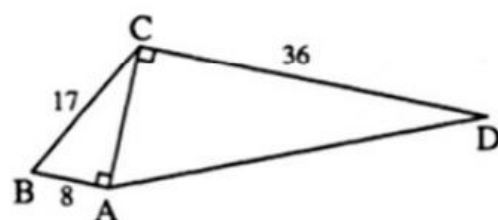
$$\text{Do đó } \frac{AB}{8} = \frac{AC}{15} = 6.$$

Suy ra $AB = 48\text{cm}$; $AC = 90\text{cm}$.

Nếu $AB > AC$ thì $AB = 90\text{cm}$; $AC = 48\text{cm}$.

6.3. (h.6.5)

$\triangle ABC$ vuông tại A, theo định lí Pythagore, ta có $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 17^2 - 8^2 = 225$, suy ra $AC = 15$ (cm).



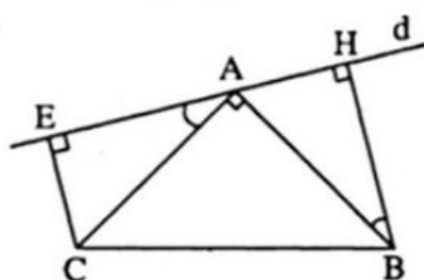
Hình 6.5

$\triangle ACD$ vuông tại C, theo định lí Pythagore, ta có

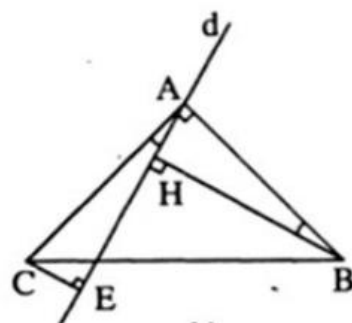
$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 15^2 + 36^2 = 1521, \text{ suy ra } AD = 39 \text{ (cm).}$$

$$\text{Vậy } AB + BC + CD + DA = 8 + 17 + 36 + 39 = 100 \text{ (cm).}$$

6.4. Xét các trường hợp sau :



Hình 6.6



Hình 6.7

- Trường hợp đường thẳng d không cắt cạnh BC (h.6.6)

Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{EAC}$ (cùng phụ với $\widehat{BAH}$).

$\triangle BAH = \triangle ACE$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $BH = AE$ và $AH = CE$.

$\triangle AHB$ vuông tại H, theo định lí Pythagore, ta có :

$$BH^2 + AH^2 = AB^2, \text{ suy ra } BH^2 + CE^2 = AB^2 \text{ không đổi.}$$

- Trường hợp đường thẳng d cắt BC tại một điểm nằm giữa B và C (h.6.7)

Tương tự trường hợp trên, ta cũng có $BH^2 + CE^2 = AB^2$ không đổi.

- Nếu đường thẳng d trùng với đường thẳng AB thì H trùng với B , E trùng với A . Khi đó $BH = 0$, $CE = CA$ nên $BH^2 + CE^2 = CA^2 = AB^2$ không đổi.
 - Nếu đường thẳng d trùng với đường thẳng AC , tương tự $BH^2 + CE^2 = AB^2$.
- Vậy tổng $BH^2 + CE^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d .

6.5.* (h.6.8)

$\triangle OAB_1$ vuông tại B_1 , theo định lý Pythagore, ta có

$$AB_1^2 = OA^2 - OB_1^2.$$

Tương tự $BC_1^2 = OB^2 - OC_1^2$

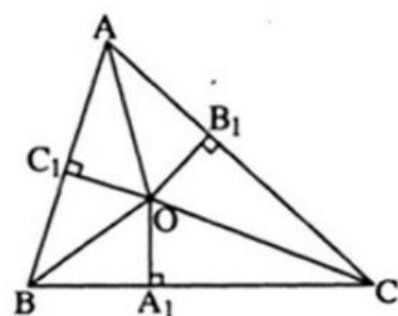
$$CA_1^2 = OC^2 - OA_1^2.$$

Suy ra $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2$

$$= (OA^2 + OB^2 + OC^2) - (OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2).$$

Tương tự $AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2 = (OA^2 + OB^2 + OC^2) - (OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2).$

Do đó $AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2 = AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2.$



Hình 6.8

6.6.* (h.6.9)

$\triangle ABC$ cân tại A , $\widehat{A} = 30^\circ$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 75^\circ$.

Trên nửa mặt phẳng bờ BC , chứa điểm A , vẽ $\triangle BIC$ vuông cân tại I thì I nằm trong $\triangle ABC$, ta có $\widehat{CBI} = 45^\circ$, $\widehat{IBA} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{IBD} = \widehat{ABD} = 15^\circ$.

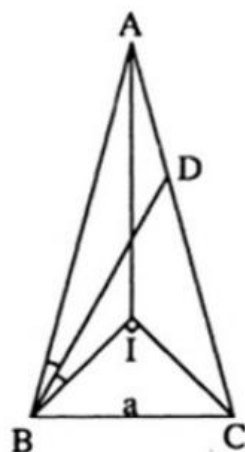
$\triangle IAB = \triangle IAC$ (c-c-c), suy ra $\widehat{IAB} = \widehat{IAC} = 15^\circ$.

$\triangle IAB = \triangle DBA$ (g-c-g), suy ra $IB = AD$.

Tam giác IBC vuông tại I , theo định lý Pythagore, ta có :

$$BI^2 + IC^2 = BC^2 = a^2, \text{ suy ra } BI = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Do đó $AD = \frac{a}{\sqrt{2}}.$



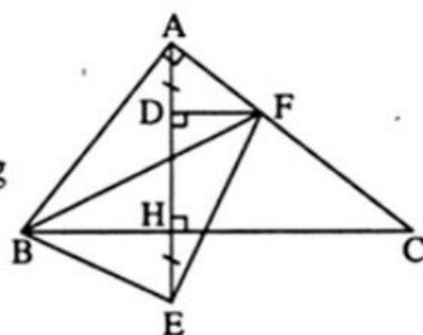
Hình 6.9

6.7.* (h.6.10)

Vì $AD = HE$ (theo giả thiết) nên $AH = DE$.

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABF , ABH , ADF , BHE , DEF ta được :

$$\begin{aligned} BF^2 &= AB^2 + AF^2 \\ &= (BH^2 + AH^2) + (AD^2 + DF^2) \\ &= BH^2 + DE^2 + HE^2 + DF^2 \quad (\text{vì } AH^2 = DE^2, AD^2 = HE^2) \\ &= (BH^2 + HE^2) + (DE^2 + DF^2) = BE^2 + EF^2. \end{aligned}$$



Hình 6.10

Theo định lý Pythagore đảo, tam giác BEF vuông tại E, suy ra $EB \perp EF$,

6.8. (h.6.11)

Tam giác ABE cân tại B nên $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$.

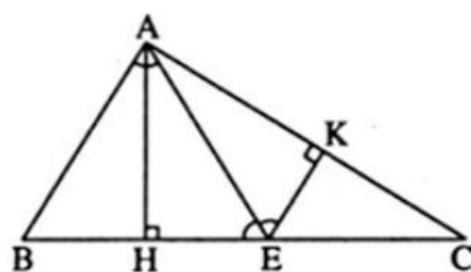
$EK \parallel AB$ (vì cùng vuông góc với AC), ta có

$\widehat{EAB} = \widehat{AEK}$ (hai góc so le trong),

suy ra $\widehat{AEH} = \widehat{AEK}$.

$\triangle AEH = \triangle AEK$ (cạnh huyền – góc nhọn).

Suy ra $AK = AH$.



Hình 6.11

6.9.* (h.6.12)

Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{CAK}$ (cùng phụ với $\widehat{BAK}$),

$\triangle HAB = \triangle KCA$ (cạnh huyền - góc nhọn),

suy ra $BH = AK$.

$\triangle AMB = \triangle AMC$ (c-c-c) nên

$\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$, do đó $AM \perp BC$,

suy ra $\widehat{MBH} = \widehat{MAK}$ (cùng phụ với $\widehat{AEB}$).

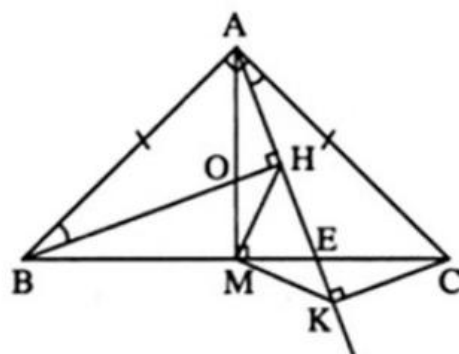
$\triangle AMB$ vuông tại M và $\widehat{ABM} = 45^\circ$ nên $MA = MB$.

Do đó $\triangle MBH = \triangle MAK$ (c-g-c) nên $MH = MK$ và

$\widehat{HMB} = \widehat{KMA}$, suy ra $\widehat{KMH} = \widehat{KMA} - \widehat{HMA}$

$$= \widehat{HMB} - \widehat{HMA} = \widehat{AMB} = 90^\circ.$$

Vậy $\triangle MKH$ vuông cân tại M.



Hình 6.12

6.10. (h.6.13)

a) Ta có $\widehat{MBD} = \widehat{NCE}$ (cùng bằng $\widehat{ACB}$).

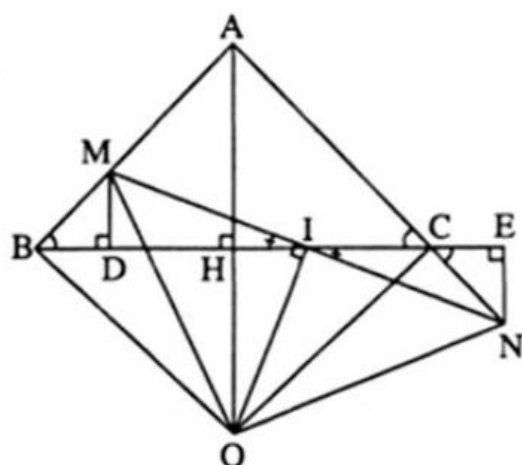
$$\Delta MDB = \Delta NEC \text{ (g-c-g),}$$

suy ra $DM = EN$.

Gọi I là giao điểm của MN với BC.

$$\text{Ta có } \Delta MDI = \Delta NEI \text{ (g-c-g),}$$

suy ra $IM = IN$. Vậy BC cắt MN tại trung điểm I của MN.



Hình 6.13

b) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC, ta có $\Delta AHB = \Delta AHC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông), suy ra $\widehat{HAB} = \widehat{HAC}$.

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng kẻ qua I vuông góc với MN, ta có :

$$\Delta OAB = \Delta OAC \text{ (c-g-c), suy ra } \widehat{OBA} = \widehat{OCA} \quad (1).$$

$$\Delta OIM = \Delta OIN \text{ (c-g-c), suy ra } OM = ON, \text{ từ đó suy ra}$$

$$\Delta OBM = \Delta OCN \text{ (c-c-c), suy ra } \widehat{OBM} = \widehat{OCN} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{OCN} = 90^\circ$ nên $OC \perp AC$, vì thế điểm O cố định.

6.11. (h.6.14)

$$\Delta ABC \text{ cân tại A nên } \widehat{ABC} = \widehat{ACB},$$

$$\text{suy ra } \widehat{ABD} = \widehat{ACE}.$$

$$\Delta ABD = \Delta ACE \text{ (c-g-c), ta có } AD = AE.$$

$$\Delta AMD = \Delta AME \text{ (c-c-c), ta có } \widehat{MAD} = \widehat{MAE},$$

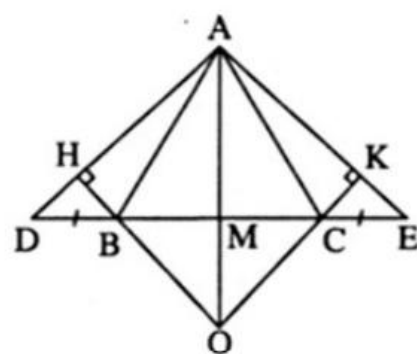
do đó AM là tia phân giác của góc DAE (1).

Gọi O là giao điểm của BH và CK.

$\Delta AOH = \Delta AOK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) nên $\widehat{OAK} = \widehat{OAH}$, do đó AO là tia phân giác của góc HAK hay AO là tia phân giác của góc DAE (2).

Từ (1) và (2) suy ra AM trùng với AO.

Vậy ba đường thẳng BH, CK và AM đồng quy tại O.



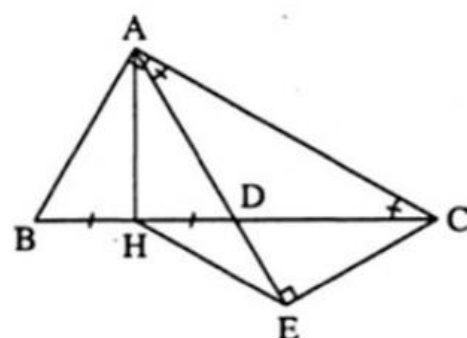
Hình 6.14

6.12. (h.6.15)

a) $\triangle AHB = \triangle AHD$ (c-g-c), suy ra $AB = AD$.

Tam giác cân ABD có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, do đó $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \widehat{EAC} &= \widehat{BAC} - \widehat{BAE} = 90^\circ - 60^\circ \\ &= 30^\circ = \widehat{ACB}. \end{aligned}$$



Hình 6.15

$\triangle AHC = \triangle CEA$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $CH = AE$.

$\triangle ADC$ cân tại D vì có hai góc ở đáy bằng nhau nên $DA = DC$.

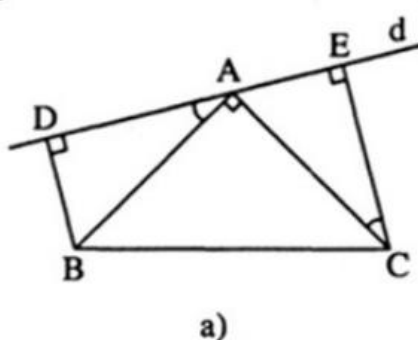
Suy ra $AE - AD = CH - CD$ hay $DE = DH$. Do đó $\triangle DEH$ cân tại D.

Hai tam giác cân DAC và DEH có góc ở đỉnh $\widehat{ADC} = \widehat{EDH}$ nên $\widehat{EAC} = \widehat{AEH}$.

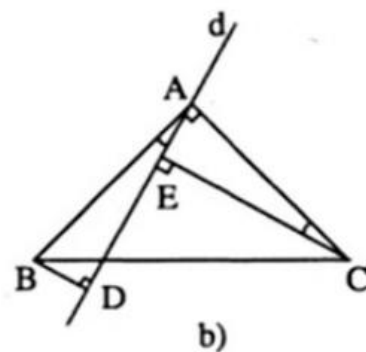
Vậy $EH \parallel AC$.

6.13. Xét các trường hợp sau :

- Trường hợp B và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ d (h.6.16a). Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{ACE}$ (cùng phụ với $\widehat{CAE}$).



a)



b)

Hình 6.16

$\triangle DBA = \triangle EAC$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $AD = CE$ và $BD = AE$. Vậy $DE = AD + AE = CE + BD$.

- Trường hợp B và C thuộc hai nửa mặt phẳng bờ d.

Chúng minh tương tự trường hợp trên ta vẫn có $AD = CE$ và $AE = BD$, do đó :

- Nếu E nằm giữa A và D thì $DE = DA - AE = CE - BD$ (h.6.16b).
- Nếu D nằm giữa A và E thì $DE = AE - AD = BD - CE$.

6.14. (h.6.17)

$\triangle CNN' = \triangle CNA$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $NN' = NA$. Do đó $\triangle NAN'$ cân tại N, ta có $\widehat{NN'A} = \widehat{NAN'}$.

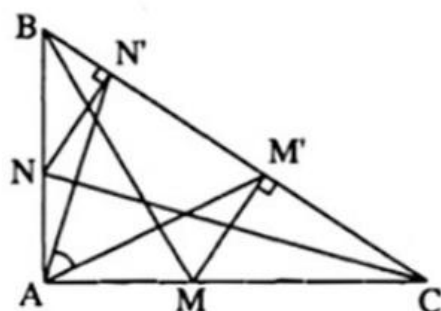
Tương tự, $\triangle MM'A$ cân tại M và $\widehat{MM'A} = \widehat{MAM'}$.

Ta có $\widehat{BNN'} = 90^\circ - \hat{B}$. Mà $\widehat{BNN'} = 2\widehat{NAN'}$, do đó

$$2\widehat{BAN'} = 90^\circ - \hat{B}, \text{ suy ra } \widehat{BAN'} = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}.$$

Tương tự $\widehat{CAM'} = 45^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \widehat{M'AN'} &= \widehat{BAC} - \widehat{BAN'} - \widehat{CAM'} = 90^\circ - \left(45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}\right) - \left(45^\circ - \frac{\hat{C}}{2}\right) \\ &= 90^\circ - 90^\circ + \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 45^\circ. \end{aligned}$$



Hình 6.17

Chuyên đề 7. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH TRONG TAM GIÁC. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

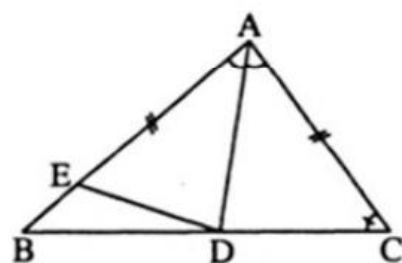
7.1. (h.7.5)

Do $AB > AC$ nên trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE = AC$ thì E nằm giữa A và B.

$\triangle AED = \triangle ACD$ (c-g-c), suy ra $ED = DC$ và $\widehat{AED} = \widehat{ACD}$, từ đó $\widehat{ACB} + \widehat{BED} = 180^\circ$ (1).

Mặt khác $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} < 180^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EBD} < \widehat{BED}$, do đó $BD > DE = CD$.



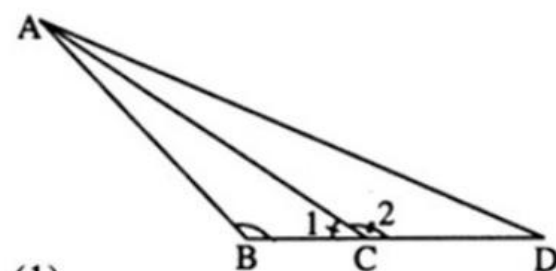
Hình 7.5

7.2. (h.7.6)

Tam giác ABC, có $\hat{B} > 90^\circ$,

suy ra $\hat{C}_1 < 90^\circ$ nên $\hat{C}_1 < \hat{B}$,

do đó $AB < AC$



(1).

Hình 7.6

Vì $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$, mà $\hat{C}_1 < 90^\circ$ nên $\hat{C}_2 > 90^\circ$,

vì thế trong tam giác ACD ta có $AC < AD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AB < AC < AD$.

7.3. (h.7.7)

$AB < AC$ (giả thiết) nên

$$\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$$

(1).

$\triangle ABD$ cân tại B nên $\hat{A}_1 = \hat{D}$.

$$\widehat{ABC} = \hat{A}_1 + \hat{D} = 2\hat{D}$$

(2).

Tương tự $\widehat{ACB} = 2\hat{E}$

(3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\hat{D} > \hat{E}$.

Xét $\triangle ADE$ có $\hat{D} > \hat{E}$, suy ra $AE > AD$.

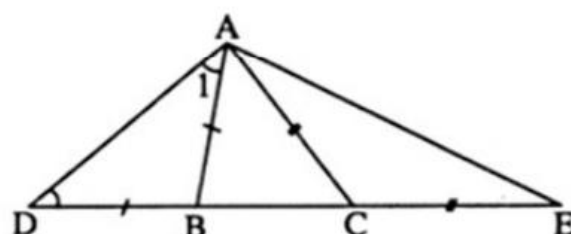
Ta có chu vi $\triangle ABD$ bằng $AD + DB + BA = AD + 2AB$

(4).

Chu vi $\triangle ACE$ bằng $AE + AC + CE = AE + 2AC$

(5).

Mà $AB < AC$, $AD < AE$ nên từ (4) và (5) ta có chu vi $\triangle ABD$ nhỏ hơn chu vi $\triangle ACE$.



Hình 7.7

7.4. (h.7.8)

$\triangle ABD = \triangle ACE$ (c-g-c), suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$

(1).

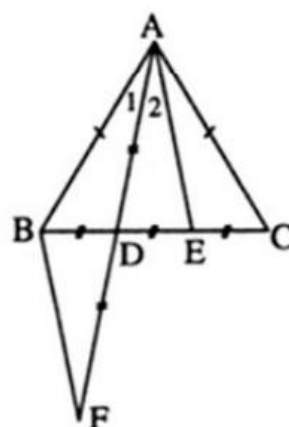
Trên tia đối của DA lấy điểm F sao cho $DF = DA$,

ta có $\triangle AED = \triangle FBD$ (c-g-c), suy ra $\hat{A}_2 = \hat{F}$ và $AE = BF$.

Vì $\widehat{AEC} > \widehat{ABC}$. Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{AEC} > \widehat{ACE}$.

Vì vậy trong $\triangle AEC$, ta có $AE < AC$. Từ đó trong $\triangle ABF$

ta có $BF < AB$ nên $\hat{A}_1 < \hat{F}$. Mà $\hat{F} = \hat{A}_2$ nên $\hat{A}_1 < \hat{A}_2$



Hình 7.8

$$\text{hay } \widehat{BAD} < \widehat{DAE} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BAD} = \widehat{CAE} < \widehat{DAE}$.

7.5. (h.7.9)

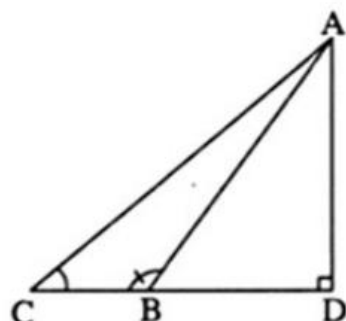
Vì $\widehat{ABC} < 135^\circ$ nên $\widehat{ABD} > 45^\circ$

suy ra $\widehat{ABD} > \widehat{BAD}$ nên $BD < AD$.

$\triangle ADC$ vuông tại D, có $\widehat{C} < 45^\circ$

nên $\widehat{ACD} < \widehat{CAD}$ suy ra $AD < CD$.

Vậy $BD < AD < CD$.



Hình 7.9

7.6. (h.7.10)

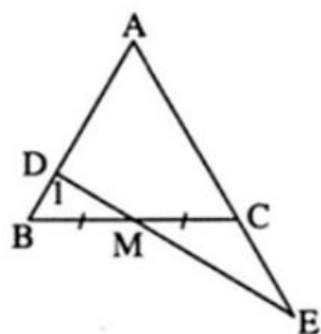
$\triangle ABC$ là tam giác đều, nên $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{D_1} > \widehat{A} = 60^\circ$.

Xét $\triangle DBM$ có $\widehat{B} < \widehat{D_1}$, suy ra $MD < MB$ (1).

Trong $\triangle MCE$, góc MCE lớn nhất vì $\widehat{MCE} = 120^\circ$,

nên $ME > MC$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp với $MB = MC$, ta có $MD < ME$.



Hình 7.10

7.7. (h.7.11)

Vì $\widehat{B} > \widehat{C}$ nên $AC > AB$. Trên AC lấy điểm M sao cho $AM = AB$.

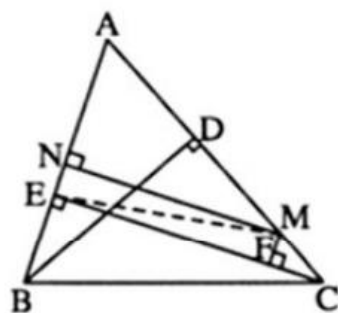
Vẽ $MN \perp AB$, $MF \perp CE$, ta có

$\triangle ABD = \triangle AMN$ (cạnh huyền – góc nhọn),
suy ra $BD = MN$.

$\triangle MNE = \triangle EFM$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $MN = EF$, do đó
 $BD = MN = EF$.

Xét $\triangle FCM$ vuông tại F ta có $CM > CF$ hay $AC - AM > CE - EF$.

Suy ra $AC - AB > CE - BD$.



Hình 7.11

7.8. (h.7.12)

$\triangle ABC$ cân tại A, có $\widehat{A} = 110^\circ$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 35^\circ$.

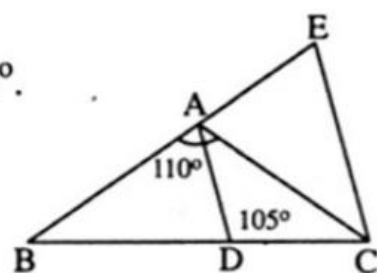
Suy ra $\widehat{CAD} = 40^\circ$.

Vì $CE \parallel AD$ nên $\widehat{ACE} = \widehat{CAD} = 40^\circ$.

Ta lại có $\widehat{CAE} = 70^\circ$ nên $\widehat{E} = 70^\circ$.

$\triangle ACE$ có $\widehat{ACE} < \widehat{CAE} = \widehat{E}$ nên $AE < CE = CA$.

Ta có $\widehat{BCE} = \widehat{BCA} + \widehat{ACE} = 75^\circ$. Do đó $\triangle BEC$ có $\widehat{EBC} < \widehat{E} < \widehat{BCE}$ nên $EC < BC < BE$.



Hình 7.12

7.9. (h.7.13)

$\triangle CDE = \triangle EFC$ (g-c-g), suy ra $\widehat{CDE} = \widehat{EFC}$

và $EF = CD$, mà $CD = BE$ nên $BE = EF$.

Do đó $\triangle EBF$ cân tại E, suy ra $\widehat{EBF} = \widehat{EFB}$

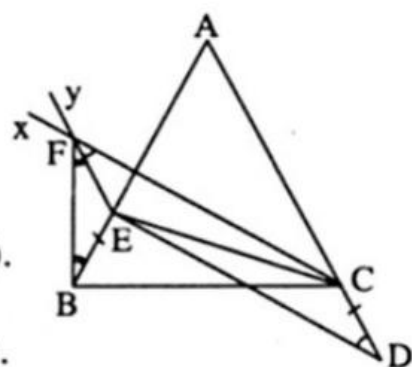
(1).

Mặt khác, ta lại có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} > \widehat{CDE} = \widehat{EFC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra :

$\widehat{EBF} + \widehat{ABC} > \widehat{EFB} + \widehat{EFC}$, tức là $\widehat{CBF} > \widehat{CFB}$.

Vì thế trong $\triangle BFC$, ta có $CF > BC$.



Hình 7.13

7.10.* (h.7.14)

Trên tia Ox lấy điểm A', trên tia Oy lấy điểm B' sao cho $OA' = OB' = a$ thì A' và B' cố định và A'B' không đổi.

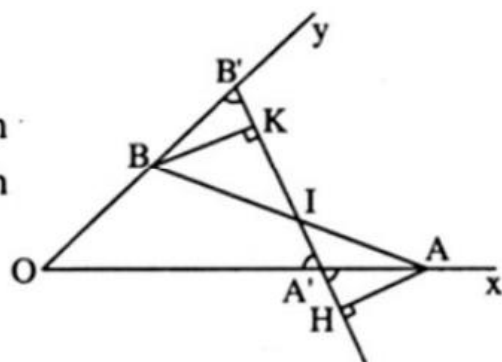
Ta có $OA' + OB' = OA + OB = 2a$

suy ra $AA' = BB'$.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B trên đường thẳng A'B', ta có $\triangle HAA' = \triangle KBB'$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $HA' = KB'$, do đó

$$HK = A'B'.$$

(1)



Hình 7.14

Gọi I là giao điểm của AB với A'B'. Ta có $IH \leq IA$; $IK \leq IB$, suy ra

$$HK \leq AB. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB \geq A'B'$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ A trùng với A' và B trùng với B'.

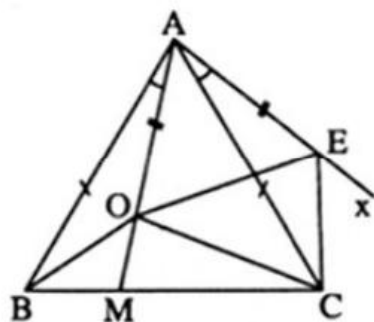
Vậy AB nhỏ nhất bằng A'B' khi $OA = OB = a$.

7.11.* Giải tương tự bài 7.10 ta suy ra trong các tam giác có một góc bằng α , tổng hai cạnh kề góc ấy bằng s thì tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.

7.12.* (h.7.15)

$\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ có $AB = AC$ (giả thiết) ; AM là cạnh chung ; $MB < MC$ (giả thiết), nên $\widehat{MAB} < \widehat{MAC}$.

Trên nửa mặt phẳng bờ AC, không chứa điểm B, vẽ tia Ax sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{MAB}$. Trên Ax lấy điểm E sao cho $AE = AO$.



Hình 7.15

Ta có $\triangle AEC = \triangle AOB$ (c-g-c), suy ra $EC = OB$ và $\widehat{AEC} = \widehat{AOB}$.

$\triangle AEC$ và $\triangle AOC$ có AC chung ; $AE = AO$ và $\widehat{EAC} < \widehat{OAC}$

nên $EC < OC$ suy ra $\widehat{EOC} < \widehat{OEC}$ (1).

$\triangle AOE$ cân tại A nên $\widehat{AOE} = \widehat{AEO}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AOC} < \widehat{AEC}$, do đó $\widehat{AOC} < \widehat{AOB}$.

7.13.* (h.7.16)

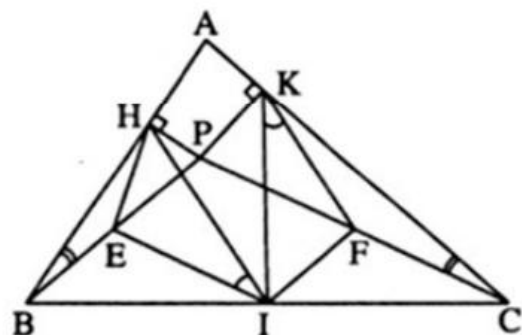
Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của PB và PC.

Ta chứng minh được $\triangle EIH = \triangle FKI$ (g-c-g, xem bài 5.17) nên $\widehat{EIH} = \widehat{FKI}$ (1).

Vì $AB < AC$ nên $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$. Kết hợp

với $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$ suy ra $\widehat{PBC} > \widehat{PCB}$, dẫn

đến $\widehat{CIF} > \widehat{ICF}$.



Hình 7.16

Mà $\widehat{ICF} = \widehat{EIB}$, suy ra $\widehat{FIC} > \widehat{EIB}$ (2).

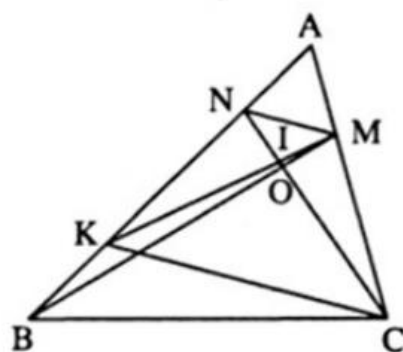
Cũng từ $\widehat{CIF} > \widehat{ICF}$ suy ra $FC > IF$, mà $FC = FK$ nên $IF < FK$, do đó $\widehat{KIF} > \widehat{IKF}$ hay $\widehat{KIF} > \widehat{HIE}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{HIE} + \widehat{EIB} < \widehat{KIF} + \widehat{FIC}$ hay $\widehat{HIB} < \widehat{KIC}$.

7.14.* (h.7.17)

Vì $AB > AC$ (giả thiết), nên tồn tại điểm K trên cạnh AB sao cho $AK = AC$. Gọi I là giao điểm của MK và CN .

Vì K thuộc đoạn NB nên I thuộc đoạn ON , suy ra $\widehat{OMN} > \widehat{IMN}$.



Hình 7.17

Dễ dàng chứng minh được $\triangle IMN$ cân tại I nên $\widehat{IMN} = \widehat{INM}$, từ đó ta có $\widehat{OMN} > \widehat{ONM}$, suy ra $ON > OM$ (1).

$\triangle AKM = \triangle ACN$ (c-g-c), suy ra $KM = CN$ (2).

$\triangle AKC$ cân tại A vì có $AK = AC$, suy ra $\widehat{AKC} < 90^\circ$, do đó $\widehat{BKM} > 90^\circ$, do đó $\widehat{BKM} > \widehat{KBM}$ nên $BM > MK$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $BM > CN$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $BM - OM > CN - ON$ hay $OB > OC$.

7.15.* (h.7.18)

Gọi $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ là các góc của $\triangle ABC$. Kí hiệu các số đo góc x, y, z, x', y', z' như hình 7.18.

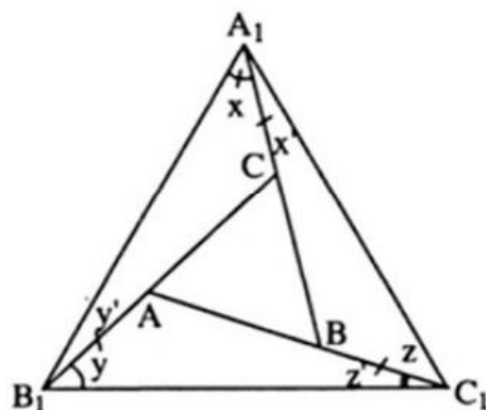
Giả sử $A_1B_1C_1$ là tam giác đều.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \geq y \geq z$.

Xét các tam giác có hai cạnh tương ứng bằng nhau, ta có $CB_1 \geq AC_1 \geq BA_1$

hay $CA \geq AB \geq BC$ (vì $AB_1 = BC_1 = CA_1$).

Suy ra $\hat{B} \geq \hat{C} \geq \hat{A}$.



Hình 7.18

(1)

Do $A_1B_1C_1$ là tam giác đều nên $x + x' = y + y' = z + z' (= 60^\circ)$
suy ra $x' \leq y' \leq z'$.

Ta có $\widehat{A} = y + z' \geq z + x' = \widehat{B}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B} \geq \widehat{C} \geq \widehat{A} \geq \widehat{B}$, do đó $\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{A}$.

Vậy ABC là tam giác đều.

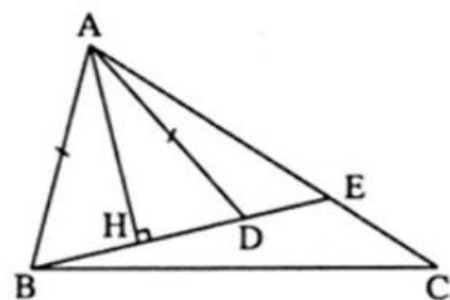
7.16. (h.7.19)

Vẽ $AH \perp BD$ ($H \in BD$).

Gọi E là giao điểm của BD với AC .

Do $AH \perp BD$ và $AB = AD$, suy ra $HB = HD$
(quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).

Mà $HD < HE$, do đó $AD < AE$. Suy ra $AB = AD < AE < AC$.



Hình 7.19

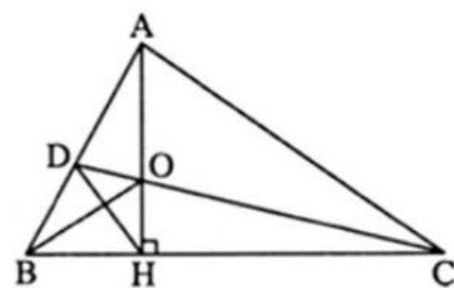
7.17. (h.7.20)

a) Nếu $\widehat{B} \geq 90^\circ$ thì $\widehat{A} > 90^\circ$. Khi đó trong tam giác ABC ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ$. Điều này trái với tính chất về tổng các góc của tam giác. Vậy $\widehat{B} < 90^\circ$, do đó $\widehat{C} < 90^\circ$.

b) Ta lần lượt có $\widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow AC > AB \Rightarrow HC > HB \Rightarrow OC > OB$.

Ta có $\widehat{DOH} > \widehat{OHC} = 90^\circ$.

Khi đó từ $\triangle OHD$ ta có $OD < DH$.



Hình 7.20

7.18. (h.7.21)

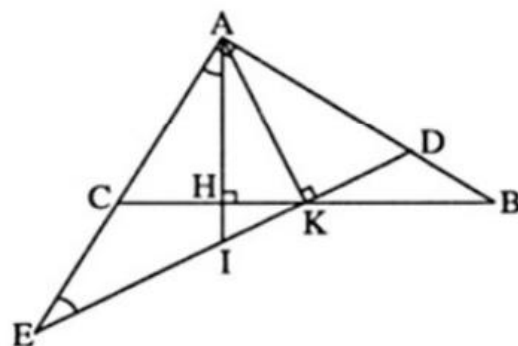
a) Bạn đọc dễ dàng chứng minh được $\triangle AIE$ cân tại I và $\triangle AKC$ cân tại K . Từ đó suy ra $\widehat{IAE} = \widehat{IEA}$ và $\widehat{KAC} = \widehat{C}$.

Mà $\widehat{C} = \widehat{IEA} + \widehat{CKE}$;

$$\widehat{KAC} = \widehat{IAE} + \widehat{IAK}$$

do đó $\widehat{IAK} = \widehat{CKE}$.

Gọi H là giao điểm của AI và BC , ta có $\widehat{HIK} + \widehat{HKI} = \widehat{AIK} + \widehat{IAK} = 90^\circ$.
Vậy $AI \perp BC$.



Hình 7.21

b) Ta có $DE = 2AI$; $BC = 2AK$. Mà $AI \geq AK$, do đó $DE \geq BC$, nghĩa là DE không nhỏ hơn BC .

$DE = BC$ khi và chỉ khi $AI = AK$ tức là I trùng với K

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A .

7.19. (h.7.22)

ΔABC vuông tại A , ta có

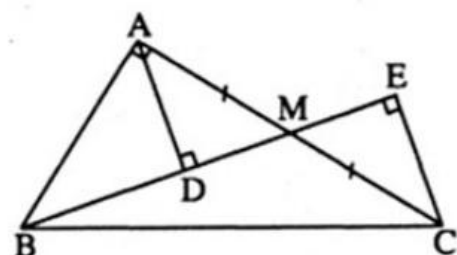
$AB < BM = BD + MD$.

Mặt khác, $AB < BM = BE - ME$.

Suy ra $2AB < BD + BE + MD - ME$. (1)

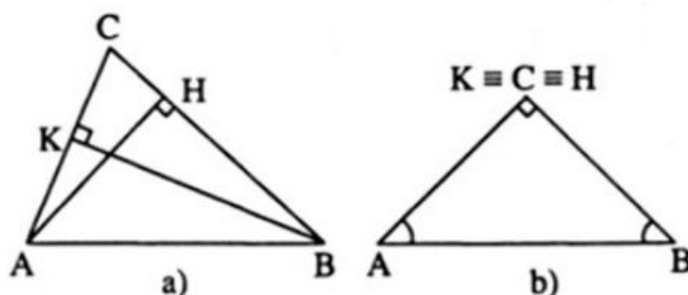
$\Delta MDA = \Delta MEC$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $MD = ME$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD + BE > 2AB$.



Hình 7.22

7.20. (h.7.23)



Hình 7.23

Theo giả thiết, ta có $AH \geq BC$; $BK \geq AC$ (1).

Theo quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc, ta lại có

$AH \leq AC$; $BK \leq BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BC \leq AH \leq AC \leq BK \leq BC$.

Điều này chứng tỏ rằng $AH = AC = BK$.

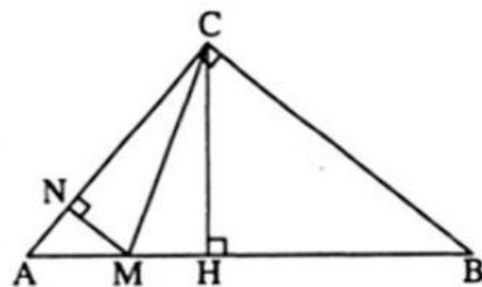
Khi đó điểm H và điểm K trùng với điểm C , tam giác ABC vuông cân tại C (h.7.23b), do đó $\hat{C} = 90^\circ$, $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$.

7.21.* (h.7.24)

Tam giác ABC vuông tại C nên $AB > AC$;

$BH < BC$, do đó trên BA tồn tại điểm M nằm giữa H và A sao cho $BM = BC$. Ta có ΔBMC

cân tại B nên $\widehat{BCM} = \widehat{BMC}$.



Hình 7.24

$$\text{Mà } \widehat{BCM} + \widehat{MCA} = 90^\circ ;$$

$$\widehat{BMC} + \widehat{MCH} = 90^\circ ,$$

suy ra $\widehat{MCA} = \widehat{MCH}$. Kẻ $MN \perp AC$.

Ta có $\triangle MCN = \triangle MCH$ (cạnh huyền – góc nhọn),

suy ra $MN = MH$; $CH = CN$ và $AM > AN$.

Do đó $AB + CH = BM + MA + CH > BC + NA + CN = BC + AC$.

Vậy $AB + CH > AC + BC$.

Từ kết quả trên, ta có thể rút ra nhận xét sau :

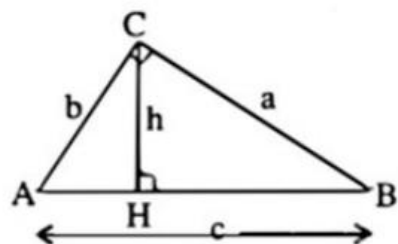
Trong một tam giác vuông, tổng hai cạnh góc vuông nhỏ hơn tổng của cạnh huyền và đường cao ứng với cạnh ấy.

Lưu ý. Với kiến thức lớp 8, ta có thể chứng minh nhận xét trên như sau :

Xét $\triangle ABC$ vuông tại C có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, đường cao $CH = h$ (h.7.25).

Ta có

$$\begin{aligned} a + b < c + h &\Leftrightarrow (a + b)^2 < (c + h)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab < c^2 + h^2 + 2ch \\ &\Leftrightarrow 0 < h^2. \end{aligned}$$



Hình 7.25

Bất đẳng thức cuối đúng. Vậy $a + b < c + h$.

7.22.* (h.7.26)

Ta có $AB \parallel CE$ (cùng vuông góc với BC), suy ra $\widehat{E} = \widehat{A}_1$

(so le trong). Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (giả thiết), nên $\widehat{E} = \widehat{A}_2$.

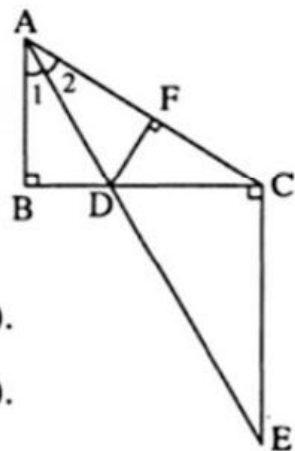
Do đó $\triangle ACE$ cân tại C , ta có $CA = CE$. Mà $AC > AB$ nên

$$CE > AB \text{ suy ra } CE^2 > AB^2 \quad (1).$$

Kẻ $DF \perp AC$ ta có $DC > DF = DB$, suy ra $CD^2 > DB^2$ (2).

Áp dụng định lý Pythagore với hai tam giác vuông CDE và BDA , ta có :

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 ; AD^2 = AB^2 + DB^2.$$



Hình 7.26

Từ đó kết hợp với (1) và (2) ta được $DE^2 > AD^2$, suy ra $DE > AD$.

Vậy $CE + CD + DE > AB + BD + AD$ hay chu vi tam giác ECD lớn hơn chu vi tam giác ABD.

7.23. (h.7.27)

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $MA = MC = AB$.

Vẽ tia phân giác của góc A cắt BC tại I.

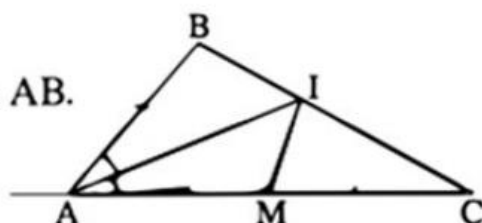
$\triangle ABI = \triangle AMI$ (c-g-c), suy ra

$\widehat{AMI} = \widehat{ABI} > 90^\circ$, do đó $\widehat{AMI} > \widehat{CMI}$. Hai

tam giác AMI và CMI có cạnh MI chung,

$MA = MC$, $\widehat{AMI} > \widehat{CMI}$ nên $IA > IC$.

$\triangle AIC$ có $IA > IC$, suy ra $\widehat{C} > \widehat{CAI} = \frac{\widehat{A}}{2}$.



Hình 7.27

7.24. (h.7.28)

Giả sử điều ngược lại xảy ra $DC \leq DB$.

Nếu $DC = DB$ thì $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c-c-c), suy ra

$\widehat{ADC} = \widehat{ADB}$, trái với giả thiết.

Nếu $DC < DB$ thì trong tam giác BCD ta có $\widehat{C}_2 > \widehat{B}_2$.

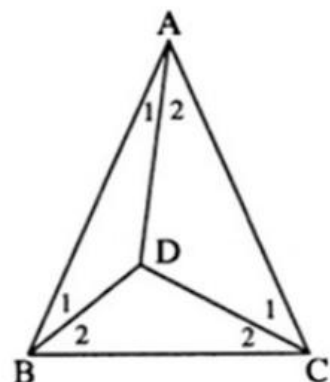
Mà $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2$ nên $\widehat{C}_1 < \widehat{B}_1$ (1).

$\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ có $AB = AC$, AD chung, $DC < DB$

suy ra $\widehat{A}_2 < \widehat{A}_1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$, trái với giả thiết.

Tóm lại không thể xảy ra $DC \leq DB$. Vậy $DC > DB$.



Hình 7.28

Chuyên đề 8. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

8.1. (h.8.4)

BM cắt AC tại D. Vì M nằm trong $\triangle ABC$ nên D nằm giữa A và C, ta có $AC = AD + DC$.

$\triangle ABD$ có $DB < AB + AD$, suy ra

$$MB + MD < AB + AD \quad (1).$$

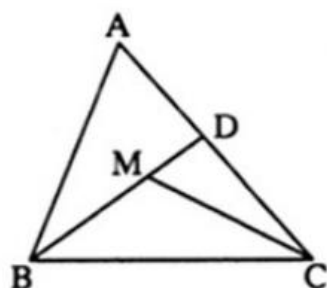
$$\triangle MDC \text{ có } MC < DC + MD \quad (2).$$

Cộng (1) và (2) theo từng vế, ta được

$$MB + MC + MD < AB + AD + DC + MD$$

$$\Rightarrow MB + MC < AB + (AD + DC)$$

$$\Rightarrow MB + MC < AB + AC.$$



Hình 8.4

8.2. (h.8.5)

Theo bài 8.1, ta có :

$$OB + OC < AB + AC$$

$$OA + OB < AC + BC$$

$$OA + OC < AB + BC.$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên rồi suy ra

$$OA + OB + OC < AB + AC + BC.$$

Xét các tam giác OAB, OAC, OBC ta lần lượt có

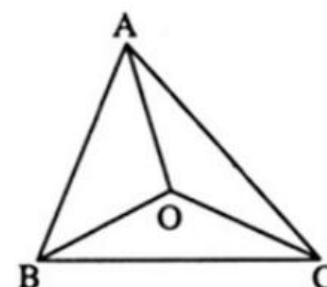
$$OA + OB > AB; \quad OA + OC > AC; \quad OB + OC > BC.$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức này rồi suy ra

$$OA + OB + OC > \frac{AB + AC + BC}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được

$$\frac{AB + AC + BC}{2} < OA + OB + OC < AB + AC + BC.$$



Hình 8.5

(1)

8.3. (h.8.6)

Gọi A là giao điểm của MK với tia Oz.

$\triangle AOB = \triangle AOK$ (cạnh huyền – góc nhọn), ta có

$$AK = AB.$$

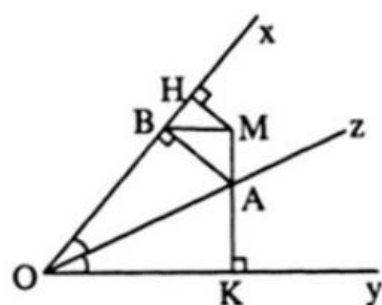
Xét $\triangle AMB$, ta có $BM < AB + MA$, suy ra

$$BM < AK + AM$$

hay $BM < MK$.

Mặt khác $MH < MB$ (đường vuông góc nhỏ hơn đường xiên).

Do đó $MH < MK$.



Hình 8.6

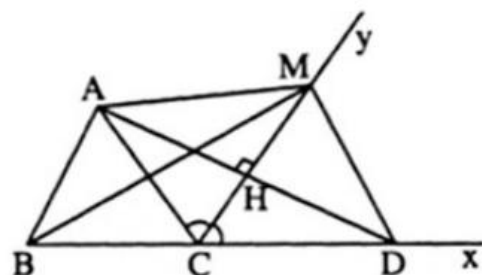
8.4. (h.8.7)

Từ A vẽ AH vuông góc với tia phân giác Cy của góc ACx, cắt tia BC tại D.

Ta có $\triangle MAH = \triangle MDH$ (c-g-c), suy ra

$MA = MD$. $\triangle MBD$ có $MD + MB > BD$ nên $MA + MB > BD$. Mà $BD = CD + BC = AC + BC$.

Vậy $MA + MB > AC + BC$.



Hình 8.7

8.5. (h.8.8)

Gọi I là trung điểm của BC, suy ra $IA = ID$.

Trên tia đối của tia IM lấy điểm N sao cho

$$IN = IM.$$

Ta có $\triangle IAM = \triangle IDN$ (c-g-c), suy ra

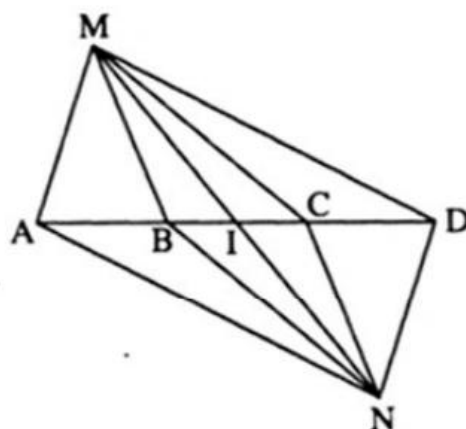
$$MA = ND.$$

Xét $\triangle MDN$ có điểm C nằm trong tam giác đó, nên theo bài 8.1, ta có $ND + MD > NC + MC$.

$\triangle IBM = \triangle ICN$ (c-g-c), suy ra $MB = NC$.

Ta có $MA = ND$, $MB = NC$ và $MD + ND > MC + NC$.

Do đó $MA + MD > MB + MC$.



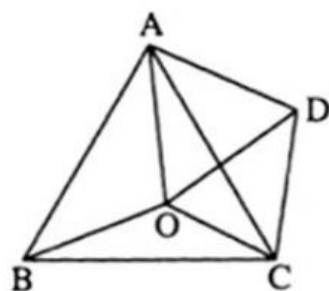
Hình 8.8

8.6. (h.8.9)

Trên nửa mặt phẳng bờ AO, không chứa điểm B, vẽ tam giác đều AOD. Ta có $\widehat{OAB} = \widehat{DAC}$ (bằng $60^\circ - \widehat{OAC}$).

$\triangle AOB = \triangle ADC$ (c-g-c), suy ra $OB = CD$.

Như vậy ba đoạn OA, OB, OC lần lượt bằng ba cạnh OD, CD, OC của $\triangle COD$.



Hình 8.9

8.7.* (h.8.10)

$\triangle ADK = \triangle AEI$ (c-g-c), suy ra $DK = EI$, do đó

$$KE + KD = KE + EI \geq KI. \quad (1)$$

Lại có $\widehat{DAK} = \widehat{EAI}$ nên $\widehat{KAI} = \widehat{BAC} = 90^\circ$.

Vậy $\triangle AKI$ vuông cân tại A.

Theo định lý Pythagore, ta có $KI^2 = AK^2 + AI^2 = 2AK^2$, suy ra $KI = AK\sqrt{2} \geq AH\sqrt{2}$ (2)

(dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $K \equiv H$).

$\triangle AHB$ vuông cân tại H, ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2$, suy ra $AB = AH\sqrt{2}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $KE + KD \geq AB$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow K \equiv H$).

8.8.* Xét hai trường hợp :

• Trường hợp 1. $\widehat{BAC} = 60^\circ$ (h.8.11).

Vẽ phân giác AE ($E \in BC$) của góc BAC.

Kẻ $BH \perp AE$, $CK \perp AE$.

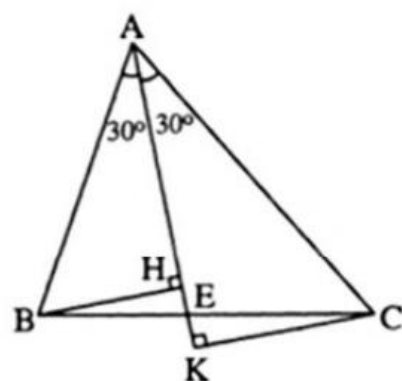
Từ hai tam giác vuông ABH và ACK, suy ra :

$$BH = \frac{1}{2}AB; CK = \frac{1}{2}AC.$$

Do đó $BH + CK = \frac{1}{2}(AB + AC)$ nên $AB + AC = 2(BH + CK)$ (1).

Mặt khác $BH \leq BE$, $CK \leq CE$

suy ra $BH + CK \leq BE + CE = BC$ (2).

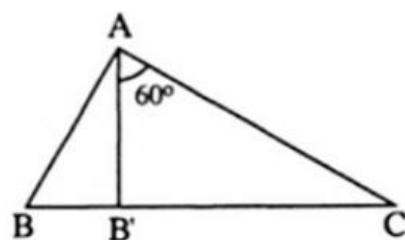


Hình 8.11

Từ (1) và (2) suy ra $AB + AC \leq 2BC$.

Đẳng thức xảy ra khi $H \equiv E \equiv K \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

• Trường hợp 2. $\widehat{BAC} > 60^\circ$ (h.8.12).



Hình 8.12

Trên BC lấy điểm B' sao cho $\widehat{CAB'} = 60^\circ$.

Theo trường hợp 1, ta có $AB' + AC \leq 2B'C$ (3).

Trong tam giác ABB' , ta lại có $AB - AB' < BB' < 2BB'$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $AB + AC < 2BC$ (trường hợp 2 không xảy ra dấu đẳng thức).

Tóm lại, ta luôn có $AB + AC \leq 2BC$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

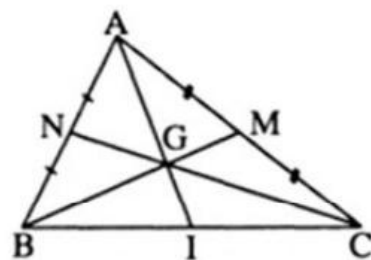
Chuyên đề 9. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

9.1. (h.9.3)

Gọi G là giao điểm của BM và CN, ta có

$$GB = \frac{2}{3}BM; GC = \frac{2}{3}CN.$$

Tia AG cắt BC tại I thì $IB = IC$. Xét ΔAIB và ΔAIC có :



Hình 9.3

AI chung, $IB = IC$, $AB < AC$ (giả thiết), suy ra $\widehat{AIB} < \widehat{AIC}$.

Xét ΔGIB và ΔGIC có : GI chung, $IB = IC$, $\widehat{GIB} < \widehat{GIC}$.

Suy ra $GB < GC$, do đó $BM < CN$.

9.2. (h.9.4)

Gọi G là giao điểm của BM và CN ; AG cắt BC tại I.

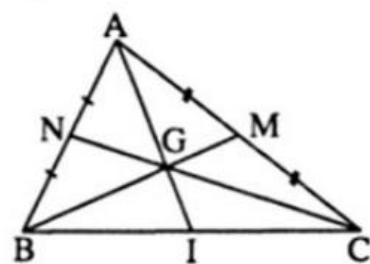
Ta có $GB = \frac{2}{3}BM$; $GC = \frac{2}{3}CN$; $IB = IC$.

Theo giả thiết $BM < CN$ suy ra $GB < GC$.

Xét $\triangle GIB$ và $\triangle GIC$ có :

GI chung ; $IB = IC$ và $GB < GC$, suy ra $\widehat{GIB} < \widehat{GIC}$.

Xét $\triangle AIB$ và $\triangle AIC$ có : AI chung ; $IB = IC$ và $\widehat{AIB} < \widehat{AIC}$ suy ra $AB < AC$.



Hình 9.4

9.3. (h.9.5)

Xét $\triangle ABC$ và ba đường trung tuyến AM, BN và CP

cắt nhau tại G, ta có $GA = \frac{2}{3}AM$; $GB = \frac{2}{3}BN$;

$GC = \frac{2}{3}CP$. (1)

a) Nếu $\triangle ABC$ là tam giác đều thì $AB = BC = CA$ và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$. Khi đó, ta có

$$\triangle ABN = \triangle ACP \text{ (c-g-c),}$$

suy ra $BN = CP$, do đó $\frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}CP$ nên $GB = GC$. (2)

Chứng minh tương tự, ta có $GA = GC$. (3)

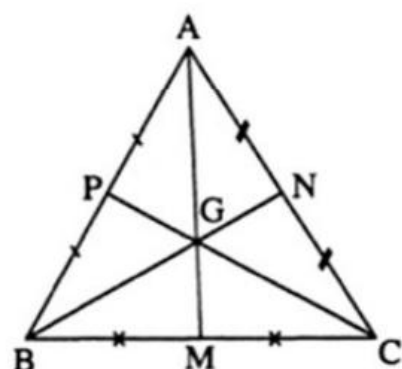
Từ (2) và (3) suy ra $GA = GB = GC$.

b) Nếu $GB = GC$ thì $GN = GP$.

Ta có $\triangle GBP = \triangle GCN$ (c-g-c), suy ra $BP = CN$, do đó $AB = AC$. (4)

Từ $GA = GB$, chứng minh tương tự có $AC = BC$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra $AB = BC = CA$. Vậy $\triangle ABC$ là tam giác đều.



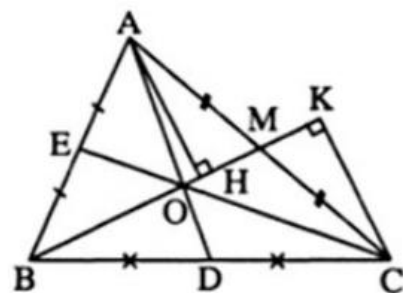
Hình 9.5

9.4. (h.9.6)

a) Xét tam giác ABC và điểm O là trọng tâm của tam giác.

Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, M, E. Vẽ $AH \perp BM$, $CK \perp BM$. Ta có :

$\triangle AHM = \triangle CKM$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $AH = CK$.



Hình 9.6

Hai tam giác OAB và OBC có đáy OB chung, $AH = CK$ nên $S_{OAB} = S_{OBC}$.

Tương tự, ta có $S_{OBC} = S_{OAC}$.

Từ đó suy ra $S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OAC}$.

b) Xét $\triangle ABC$ và điểm O nằm trong tam giác đó.

Các tia AO, BO, CO cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, M, E. Vẽ $AH \perp BM$, $CK \perp BM$.

Hai tam giác AOB và BOC có đáy BO chung, có diện tích bằng nhau nên $AH = CK$.

Khi đó $\triangle AHM = \triangle CKM$ (cạnh góc vuông – góc nhọn), suy ra $MA = MC$.

Tương tự, ta có $DB = DC$, $EA = EB$. Suy ra AD, BM, CE là ba đường trung tuyến của $\triangle ABC$ nên O là trọng tâm của tam giác đó.

9.5. (h.9.7)

Ta có $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 13 = 6,5$ (cm).

$\triangle ABC$ vuông tại A, suy ra :

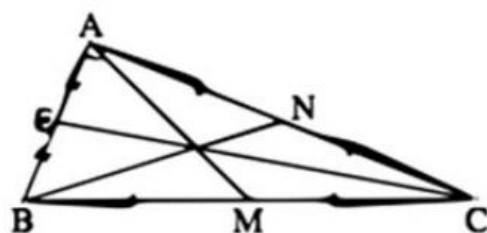
$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 144, \text{ suy ra } AC = 12 \text{ (cm).}$$

$\triangle ANB$ vuông tại A, ta có :

$$BN^2 = AB^2 + AN^2 = 5^2 + 6^2 = 61, \text{ suy ra } BN = \sqrt{61} \text{ (cm).}$$

$\triangle AEC$ vuông tại A, ta có :

$$CE^2 = AC^2 + AE^2 = 12^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{601}{4}, \text{ suy ra } CE = \frac{\sqrt{601}}{2} \text{ (cm).}$$



Hình 9.7

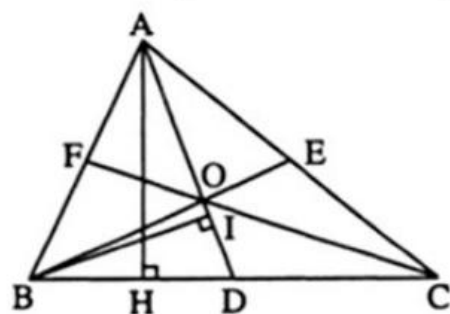
9.6. (h.9.8)

Kẻ $AH \perp BC$, ta có :

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AH \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}S_{ABC} \quad (1).$$

$$\text{Do } OD = \frac{1}{3}AD \text{ nên } S_{OBD} = \frac{1}{3}S_{ABD} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } S_{OBD} = \frac{1}{6}S_{ABC}.$$



Hình 9.8

Chứng minh tương tự, diện tích của 5 tam giác còn lại cũng bằng $\frac{1}{6}S_{ABC}$.

Vậy 6 tam giác nêu trong đề bài có diện tích bằng nhau và bằng $\frac{1}{6}$ diện tích tam giác ABC.

9.7.*.(h.9.9)

a) Vì $MD = MG$ nên $GD = 2GM = \frac{2}{3}AM$.

Mà $GA = \frac{2}{3}AM$, suy ra $GD = GA$.

$\triangle ABD$ có P là trung điểm của AB , G là trung điểm của AD nên theo Ví dụ 4.3,

ta có $BD = 2GP = 2 \cdot \frac{1}{3}CP = \frac{2}{3}CP$.

Lại có $GB = \frac{2}{3}BN$. Vậy ba cạnh của tam giác BGD : GD , GB , BD lần lượt bằng $\frac{2}{3}$ đường trung tuyến AM , BN , CP của tam giác ABC .

b) Ta có BM là đường trung tuyến ứng với cạnh GD của $\triangle BGD$, ta có

$$BM = \frac{1}{2}BC.$$

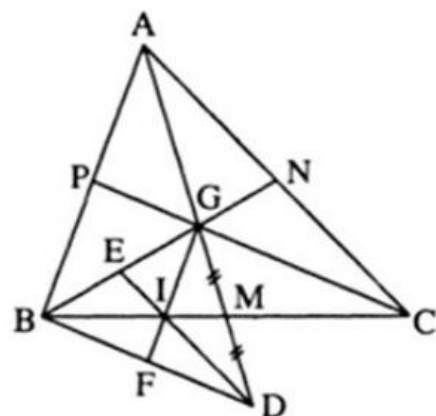
Gọi E là trung điểm của GB , ta có $\triangle EGD = \triangle NGA$ (c-g-c)

nên $ED = AN = \frac{1}{2}AC$.

Gọi I là giao điểm của BM và DE . GI cắt BD tại F thì F là trung điểm của BD .

Khi đó theo Ví dụ 4.3, ta có $GF = \frac{1}{2}AB$.

Vậy ba đường trung tuyến BM , DE , GF của $\triangle BGD$ lần lượt bằng nửa cạnh BC , AC , AB của tam giác ABC .



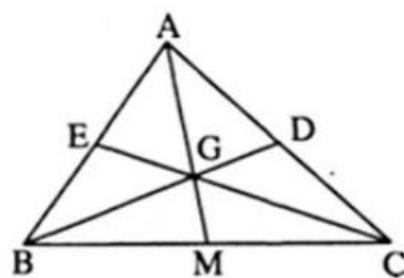
Hình 9.9

9.8.* (h.9.10)

Xét tam giác ABC có các đường trung tuyến AM, BD, CE.

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AM = m_a$,

$BD = m_b$, $CE = m_c$.



Hình 9.10

Theo Ví dụ 8.2, ta có $AM < \frac{AB + AC}{2}$

hay $m_a < \frac{b + c}{2}$.

Tương tự $m_b < \frac{a + c}{2}$, $m_c < \frac{a + b}{2}$.

Suy ra $m_a + m_b + m_c < a + b + c$ (1).

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Xét $\triangle GBC$, ta có :

$$GB + GC > BC \text{ hay } \frac{2}{3}BD + \frac{2}{3}CE > BC,$$

suy ra $\frac{2}{3}(BD + CE) > BC$, do đó $BD + CE > \frac{3}{2}BC$

hay $m_b + m_c > \frac{3}{2}a$.

Tương tự $m_a + m_b > \frac{3}{2}c$, $m_a + m_c > \frac{3}{2}b$.

Suy ra $m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c < a + b + c$.

Vậy tổng độ dài ba đường trung tuyến của một tam giác lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi của tam giác đó.

9.9. (h.9.11)

Tam giác AEC vuông tại A, ta có

$$CE^2 = AC^2 + AE^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4} \quad (1).$$

Tam giác ADB vuông tại A, ta có

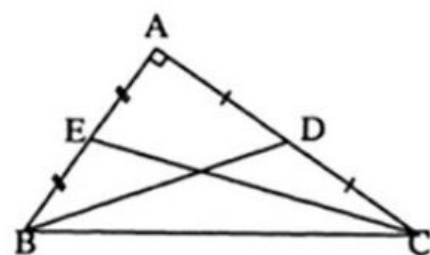
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = AB^2 + \frac{AC^2}{4} \quad (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$BD^2 + CE^2 = AB^2 + AC^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{AC^2}{4} = \frac{5(AB^2 + AC^2)}{4} \quad (3).$$

Do $\triangle ABC$ vuông tại A, lại có $AB^2 + AC^2 = BC^2$, do đó từ (3) suy ra

$$BD^2 + CE^2 = \frac{5BC^2}{4}.$$



Hình 9.11

9.10. (h.9.12)

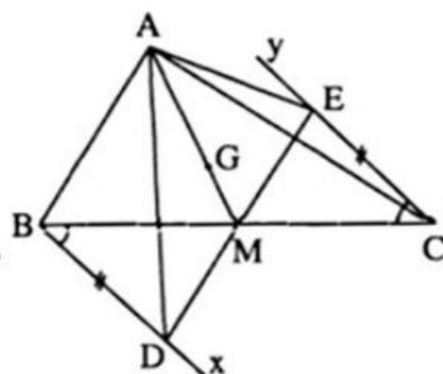
Vẽ trung tuyến AM của tam giác ABC.

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MCE$ có : $MB = MC$ (giả thiết),

$\widehat{MBD} = \widehat{MCE}$ (so le trong, $BD \parallel CE$) và $BD = CE$.

Do đó $\triangle MBD = \triangle MCE$ (c-g-c), suy ra $MD = ME$

và $\widehat{BMD} = \widehat{CME}$.



Hình 9.12

Ta có $\widehat{CME} + \widehat{EMB} = 180^\circ$, do đó $\widehat{DMB} + \widehat{BME} = 180^\circ$ nên ba điểm D, M, E thẳng hàng, suy ra M là trung điểm của DE.

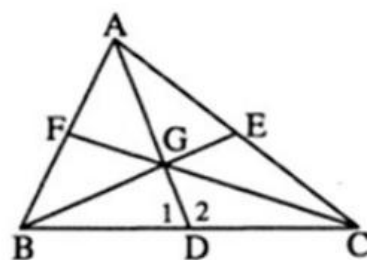
Vậy AM là đường trung tuyến của $\triangle ADE$.

Hai tam giác ABC và ADE có chung đường trung tuyến AM nên có cùng trọng tâm, nghĩa là G là trọng tâm của $\triangle ADE$.

9.11. (h.9.13)

a) G là trọng tâm của $\triangle ABC$, AD là đường trung tuyến nên AD đi qua G, do đó ba điểm A, G, D thẳng hàng.

b) $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ có AD chung, $DB = DC$, $AB < AC$ nên $\widehat{D}_1 < \widehat{D}_2$.



Hình 9.13

ΔGDB và ΔGDC có GD chung, $DB = DC$, $\widehat{D}_1 < \widehat{D}_2$ nên $BG < GC$, suy ra $\frac{2}{3}BE < \frac{2}{3}CF$.

Vậy $BE < CF$.

9.12. a) (h.9.14) Nếu $AM < \frac{1}{2}BC$, nghĩa là

$AM < BM$ và $AM < CM$.

Xét ΔABM có $AM < BM$ nên $\widehat{B} < \widehat{A}_1$.

Xét ΔACM có $AM < CM$ nên $\widehat{C} < \widehat{A}_2$.

Do đó $\widehat{B} + \widehat{C} < \widehat{A}$. Suy ra

$180^\circ = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 2\widehat{A}$ nên $\widehat{A} > 90^\circ$.

b) (h.9.15)

Chứng minh tương tự câu a), ta có :

$$\widehat{B} > \widehat{A}_1 ; \widehat{C} > \widehat{A}_2 .$$

Suy ra $\widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}$, nên $\widehat{A} < 90^\circ$.

c) (h.9.16)

Theo giả thiết $AM = \frac{1}{2}BC$,

suy ra $AM = BM = CM$. Do đó :

ΔAMB cân tại M nên $\widehat{B} = \widehat{A}_1$,

ΔAMC cân tại M nên $\widehat{C} = \widehat{A}_2$.

Suy ra $\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}$.

Do đó $180^\circ = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2\widehat{A}$, nên $\widehat{A} = 90^\circ$.

9.13. (h.9.17)

ΔABC đều nên $AB = AC = BC = a$ suy ra

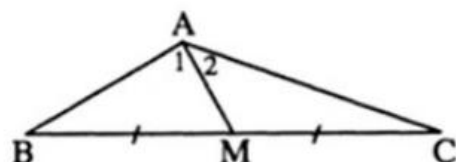
$AP = BM = CN = 2a$, và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$

suy ra $\widehat{NAP} = \widehat{MBP} = \widehat{MCN} = 120^\circ$.

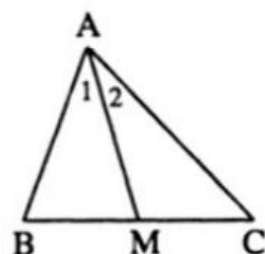
$\Delta ANP = \Delta BPM$ (c-g-c) nên $PN = PM$.

$\Delta BPM = \Delta CMA$ (c-g-c), nên $PM = MN$.

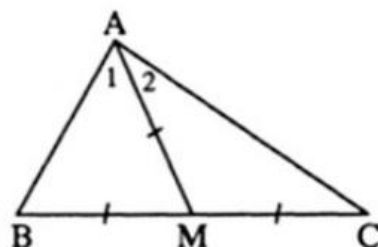
Suy ra $MN = NP = PM$.



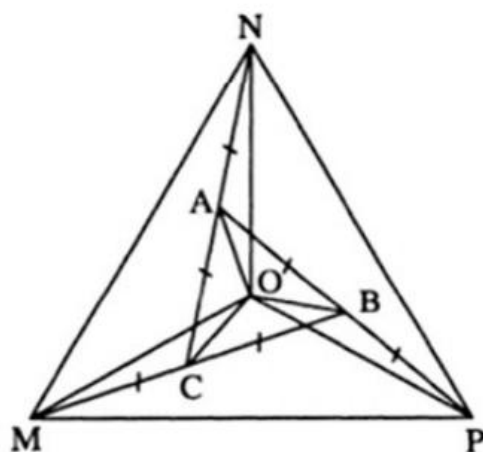
Hình 9.14



Hình 9.15



Hình 9.16



Hình 9.17

Bạn đọc dễ dàng chứng minh được ba đường trung tuyến của tam giác đều bằng nhau, từ đó suy ra $OA = OB = OC$.

Mặt khác lại có AO, BO, CO là các tia phân giác của các góc A, B, C của $\triangle ABC$ nên $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCA} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{OAN} = \widehat{OBP} = \widehat{OCM} = 150^\circ$.

Do đó :

$\triangle OAN = \triangle OBP$ (c-g-c), suy ra $ON = OP$;

$\triangle OAN = \triangle OCM$ (c-g-c), suy ra $ON = OM$.

Suy ra $OM = ON = OP$. Vậy ba điểm M, N, P cách đều điểm O .

9.14.* (h.9.18)

Vẽ $AF \perp BD, CG \perp BD$ và $CH \perp AE$, ta có :

$\triangle ABF = \triangle CAH$ (cạnh huyền – góc nhọn),

suy ra $AF = CH$.

$\triangle ADF = \triangle CDG$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra

$AF = CG$, từ đó ta có $CH = CG$.

$\triangle CEH = \triangle CEG$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông),

suy ra $\widehat{CEH} = \widehat{CEG}$. Mà $\widehat{CEG} = \widehat{EBC} + \widehat{ECB}$;

$\widehat{CEH} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA}$, do đó :

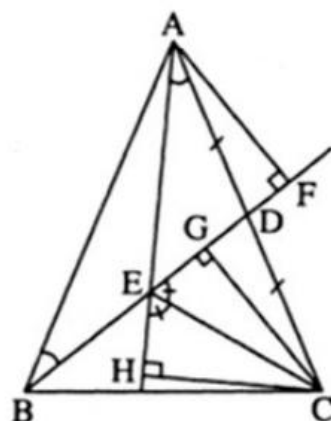
$$\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA} \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác, } \widehat{EBA} + \widehat{EBC} = \widehat{ECB} + \widehat{ECA} \quad (2).$$

Lấy (1) trừ (2) theo từng vế và do $\widehat{EAC} = \widehat{EBA}$, ta được :

$$\widehat{ECB} - \widehat{EBA} = \widehat{EBA} - \widehat{ECB}, \text{ suy ra } \widehat{EBA} = \widehat{ECB}.$$

Vậy $\widehat{DAE} = \widehat{ECB}$.



Hình 9.18

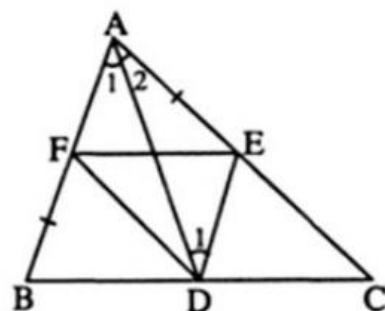
Chuyên đề 10. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

10.1. (h.10.5)

Ta có $\triangle BDF = \triangle EFD$ (g-c-g), suy ra $BF = ED$, do đó $ED = EA$. Tam giác AED cân tại E nên $\widehat{A_2} = \widehat{D_1}$ (1).

Ta lại có $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ (so le trong) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, do đó AD là tia phân giác của góc A . Vậy D cách đều AB và AC .



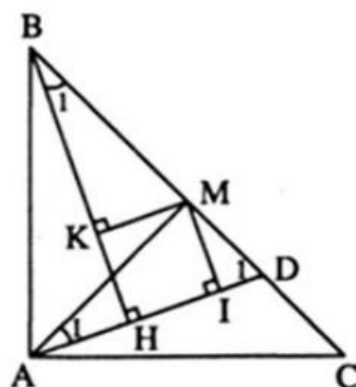
Hình 10.5

10.2. (h.10.6)

Kẻ $MI \perp AD$, $MK \perp BH$.

Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với $\widehat{D_1}$).

$\triangle BKM = \triangle AIM$ (cạnh huyền - góc nhọn), suy ra $MK = MI$ nên M thuộc tia phân giác của góc BHD hay HM là tia phân giác của góc BHD .



Hình 10.6

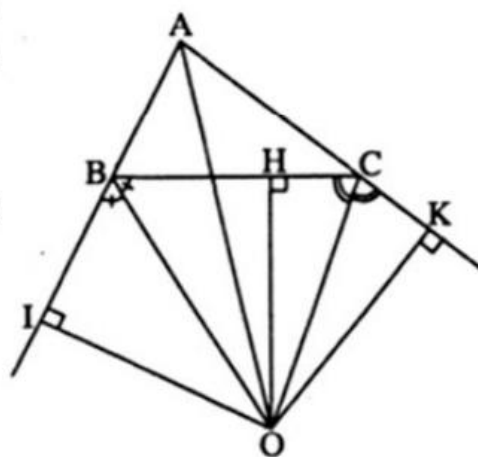
10.3.* (h.10.7)

O là giao điểm hai tia phân giác góc ngoài tại đỉnh B và C nên AO là tia phân giác của góc BAC , ta có $\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$.

Kẻ $OH \perp BC$, $OK \perp AC$, ta dễ dàng chứng minh được $AI = AK$, $BI = BH$, $CK = CH$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } AI + AK &= AB + BI + AC + CK \\ &= AB + AC + (BH + HC) \\ &= AB + AC + BC. \end{aligned}$$

Suy ra chu vi $\triangle ABC = 2AI = 22\text{cm}$.



Hình 10.7

10.4.* (h.10.8)

Giả sử P, Q ở vị trí như trên hình 10.8.

Bạn đọc dễ dàng chứng minh được

$$\widehat{A_1} = \widehat{D_2} = \widehat{D_1}; \widehat{D_3} = 2\widehat{A_2}.$$

ΔBCD có trung tuyến $DM = \frac{1}{2}CB$

nên $\widehat{CDB} = 90^\circ$, suy ra

$$\widehat{D_1} + \widehat{D_2} + \widehat{D_3} = 90^\circ$$

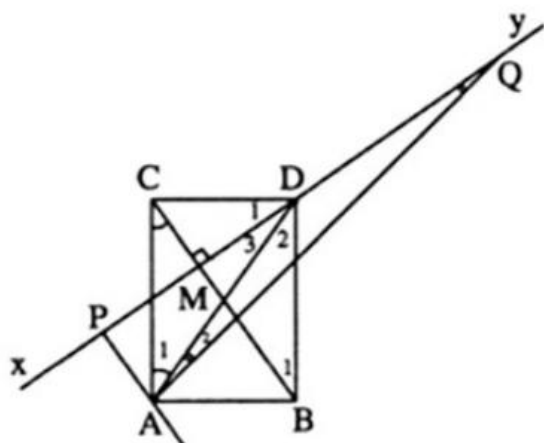
hay $2\widehat{A_1} + 2\widehat{A_2} = 90^\circ$, do đó $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 45^\circ$ hay $\widehat{CAQ} = 45^\circ$, suy ra

$$\widehat{CAQ} = \widehat{BAQ}.$$

Vậy AQ là tia phân giác của góc BAC.

Ta có AP vuông góc với AQ tại A nên

AP là tia phân giác ngoài góc BAC của ΔABC .



Hình 10.8

10.5.* (h.10.9)

Kẻ tia phân giác của góc CBD rồi từ C kẻ CI vuông góc với tia phân giác đó tại I.

Tia CI cắt BD tại F. Tam giác BCF cân tại B vì có BI vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên $BF = BC$, do đó $BF = ED$, vì thế ta có $BE = FD$.

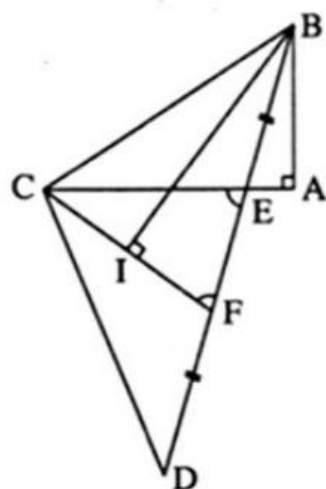
Từ hai tam giác vuông IBF và ABE ta lại có :

$$\widehat{CFE} = \widehat{CEF} \text{ (bằng } 90^\circ - \frac{1}{3}\alpha) \text{ nên } \Delta CEF \text{ cân tại C,}$$

suy ra $CE = CF$, vì thế $\widehat{CEB} = \widehat{CFD}$.

$\Delta EBC = \Delta FDC$ (c-g-c), suy ra $DC = BC$.

Mà $DE = BC$ nên $DC = DE$. Vậy ΔDEC cân tại D.

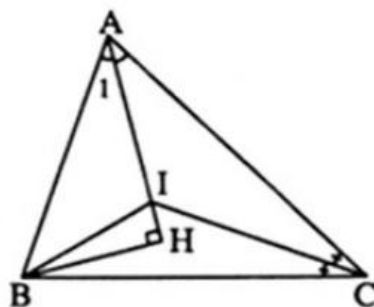


Hình 10.9

10.6. (h.10.10)

Xét ΔABH có $\widehat{H} = 90^\circ$ nên $\widehat{IBH} + \widehat{IBA} + \widehat{A_1} = 90^\circ$.

$$\text{Suy ra } \widehat{IBH} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ \quad (1).$$



Hình 10.10

Xét ΔABC , ta có: $\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90^\circ$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{IBH} = \frac{\widehat{C}}{2}$, do đó $\widehat{IBH} = \widehat{ICA}$.

10.7. (h.10.11)

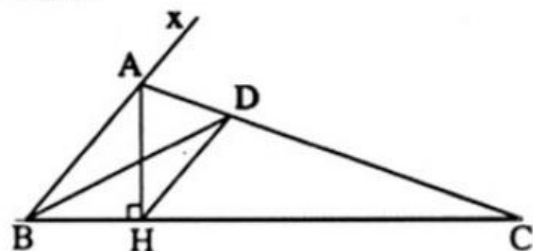
Tam giác AHC vuông tại H , ta có

$$\widehat{HAC} = 90^\circ - \widehat{C} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ.$$

$\widehat{CAx}$ là góc ngoài tại đỉnh A của ΔABC nên

$\widehat{CAx} = \widehat{B} + \widehat{C} = 50^\circ + 20^\circ = 70^\circ$. Suy ra $\widehat{HAC} = \widehat{CAx}$, do đó AC là tia phân giác của góc HAx .

ΔAHB có hai tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A và đỉnh H cắt nhau tại D nên BD là phân giác của góc ABH hay BD là phân giác của góc ABC .



Hình 10.11

10.8.* (h.10.12)

$$a) \widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{B}, \widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{C}$$

$$\text{nên } \widehat{FBC} = \frac{2}{3}\widehat{B}, \widehat{FCB} = \frac{2}{3}\widehat{C}.$$

$$\text{Do đó } \widehat{BFC} = 180^\circ - (\widehat{FBC} + \widehat{FCB})$$

$$= 180^\circ - \frac{2}{3}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - \frac{2}{3} \cdot 90^\circ = 120^\circ.$$

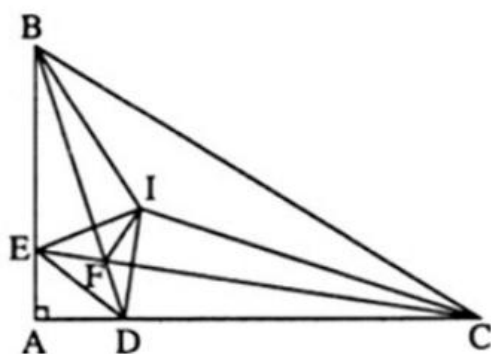
$$b) \widehat{BFC} = 120^\circ \text{ nên } \widehat{EFB} = 60^\circ, \widehat{DFC} = 60^\circ, \widehat{EFD} = 120^\circ.$$

Từ giả thiết ta có FI là tia phân giác của góc BFC , suy ra $\widehat{IFB} = \widehat{IFC} = 60^\circ$ nên $\widehat{IFE} = \widehat{IFD} = 120^\circ$.

Ta có: $\Delta BEF = \Delta BIF$ (g-c-g), suy ra $FE = FI$ (1).

$\Delta CDF = \Delta CIF$ (g-c-g), suy ra $FI = FD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $FE = FD = FI$.



Hình 10.12

Từ đó ta có :

$$\Delta FID = \Delta FIE \text{ (c-g-c), suy ra } ID = IE \quad (3).$$

$$\Delta FID = \Delta FDE \text{ (c-g-c), suy ra } ID = DE \quad (4).$$

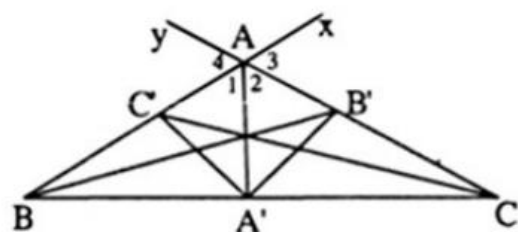
Từ (3) và (4) suy ra $ID = IE = ED$. Vậy ΔIED là tam giác đều.

10.9. (h.10.13)

Vẽ tia Ax là tia đối của tia AB , tia Ay là tia đối của tia AC .

Bạn đọc dễ dàng chứng minh được

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3} = \widehat{A_4} = 60^\circ.$$



Hình 10.13

Xét $\Delta ABA'$ ta có tia AB' là tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A , tia BB' là tia phân giác góc trong tại đỉnh B nên tia $A'B'$ là tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A' (1).

Xét tam giác ACA' , chứng minh tương tự, ta có $A'C'$ là tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A' (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A'B' \perp A'C'$ (hai tia phân giác của hai góc kề bù).

10.10.* (h.10.14)

a) Vẽ tia Ax là tia đối của tia AC , tia By là tia đối của tia BD .

Dễ dàng chứng minh được :

$$\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \widehat{B_3} = 60^\circ.$$

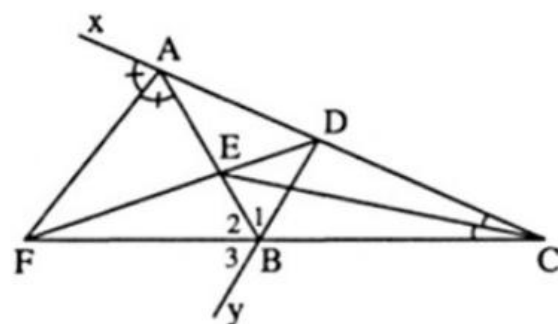
Suy ra BF là phân giác của góc ABD .

Xét ΔABD có F là giao điểm của hai tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A và đỉnh B nên DF là tia phân giác của góc ADB .

$$\text{Vậy } \widehat{ADF} = \widehat{BDF}.$$

b) Xét ΔBDC có E là giao điểm của tia phân giác trong tại đỉnh C và tia phân giác góc ngoài tại đỉnh B nên DE là tia phân giác của góc ADB .

Các tia DE và DF đều là tia phân giác của góc ADB nên ba điểm D, E, F thẳng hàng.



Hình 10.14

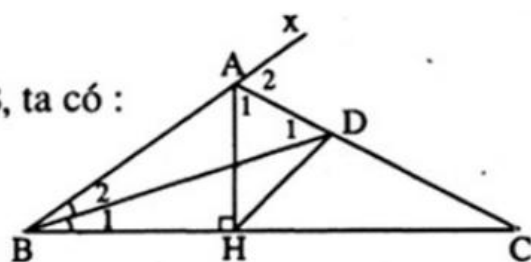
10.11.* (h.10.15)

Góc $\widehat{HAX}$ là góc ngoài tại đỉnh A của $\triangle AHB$, ta có :

$$\widehat{HAX} = \widehat{ABH} + 90^\circ = 2\hat{B}_2 + 90^\circ.$$

Lại có AC là tia phân giác của góc $\widehat{HAX}$

nên $\widehat{HAX} = 2\hat{A}_2$.



Hình 10.15

$$\text{Do đó } 2\hat{A}_2 = 2\hat{B}_2 + 90^\circ, \text{ suy ra } \hat{A}_2 = \hat{B}_2 + 45^\circ \quad (1).$$

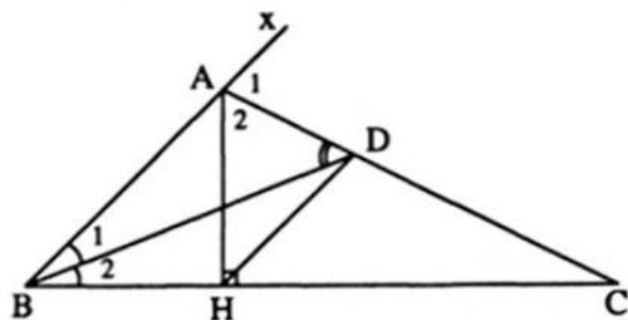
$$\text{Xét } \triangle ABD, \text{ ta có : } \hat{A}_2 = \hat{B}_2 + \hat{D}_1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{D}_1 = \widehat{ADB} = 45^\circ$.

10.12. (h.10.16)

$\widehat{ADB}$ là góc ngoài tại đỉnh D của tam giác BCD, ta có

$$\hat{C} = \widehat{ADB} - \hat{B}_2 = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}.$$



Hình 10.16

$\hat{A}_1$ là góc ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC, ta có :

$$\hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C} = \hat{B} + 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}, \text{ suy ra } \hat{A}_1 = 45^\circ + \frac{\hat{B}}{2} \quad (1).$$

$\triangle AHC$ vuông tại H, ta có $\hat{A}_2 = 90^\circ - \hat{C}$

$$= 90^\circ - \left(45^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \right) = 45^\circ + \frac{\hat{B}}{2} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

Xét $\triangle AHB$ có D là giao điểm của tia phân giác trong tại đỉnh B và tia phân giác ngoài tại đỉnh A nên HD là tia phân giác của góc $\widehat{AHC}$, suy ra $\widehat{DHC} = 45^\circ = \widehat{ABC}$, do đó $HD \parallel AB$.

10.13. (h.10.17)

$\triangle ABF$ cân tại B, ta có :

$$\widehat{FAB} = \widehat{AFB} = \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}.$$

$\triangle AHB$ vuông tại H, ta có $\widehat{HAB} = 90^\circ - \hat{B}$.

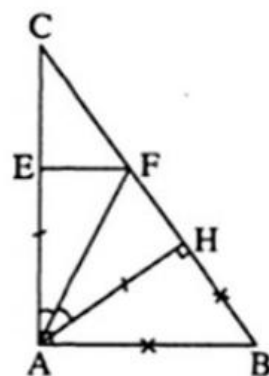
Suy ra $\widehat{FAH} = \widehat{FAB} - \widehat{HAB}$

$$= \left(90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \right) - (90^\circ - \hat{B}) = \frac{\hat{B}}{2}$$

$$\widehat{EAF} = 90^\circ - \widehat{FAB} = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \right) = \frac{\hat{B}}{2} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FAH} = \widehat{FAE}$.

Do đó AF là tia phân giác của góc EAH.



Hình 10.17

(1).

10.14.* (h.10.18)

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $OA = p$, $OB = m$, $OC = n$.

Để đưa công nhân từ O đến A, B, C rồi trở về O, có 6 đường đi với độ dài tương ứng là :

$$OABCO : S_1 = p + c + a + n ;$$

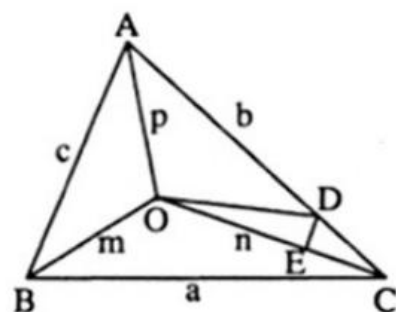
$$OBCAO : S_2 = m + a + b + p ;$$

$$OCABO : S_3 = n + b + c + m ;$$

$$OACBO : S_4 = p + b + a + m ;$$

$$OBACO : S_5 = m + c + b + n ;$$

$$OCBAO : S_6 = n + a + c + p.$$



Hình 10.18

Trong đó $S_1 = S_6$; $S_2 = S_4$; $S_3 = S_5$.

Để xét xem đi theo cách nào thì độ dài quãng đường là ngắn nhất, ta chỉ cần so sánh S_1 , S_2 , và S_3 (hoặc S_4 , S_5 và S_6).

Bạn đọc hãy chứng minh rằng với $a > b > c$ thì $n > m > p$.

Vì $AC > AB$ nên có điểm D thuộc AC mà $AD = AB$.

Khi đó $\triangle OAB = \triangle OAD$ (c-g-c), suy ra $OD = OB = m$ và $\widehat{ODA} = \widehat{OBA} < 90^\circ$, do đó $\widehat{ODC} > 90^\circ$, suy ra $OD < OC = n$.

Trên OC lấy điểm E sao cho $OE = OD = m$.

Ta có $\triangle ODE$ cân tại O nên $\widehat{OED} < 90^\circ$, suy ra $\widehat{DEC} > 90^\circ$, do đó $DC > EC$, suy ra $b - c > n - m$, từ đó có $b + m > n + c$, vì thế

$$m + b + a + p > n + c + a + p. \text{ Vậy } S_2 > S_1 \quad (1).$$

Chứng minh tương tự, ta có $S_1 > S_3$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $S_3 < S_1 < S_2$. Vậy S_3 chính là quãng đường đi ngắn nhất.

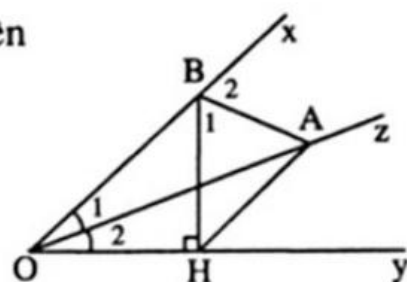
10.15.* (h.10.19)

a) Ta có $\widehat{HBx}$ là góc ngoài tại đỉnh B của $\triangle OBH$ nên

$$\widehat{HBx} = \widehat{BHO} + \widehat{HOB}$$

$$= 90^\circ + \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = 90^\circ + 2\widehat{O}_1$$

$$= 2(45^\circ + \widehat{O}_1) \quad (1).$$



Hình 10.19

$\widehat{B}_2$ là góc ngoài tại đỉnh B của tam giác AOB, nên

$$\widehat{B}_2 = \widehat{BAO} + \widehat{O}_1 = 45^\circ + \widehat{O}_1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HBx} = 2\widehat{B}_2$ hay $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 2\widehat{B}_2$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, do đó BA là tia phân giác của góc HBx.

$\triangle OBH$ có A là giao điểm của tia phân giác trong tại đỉnh O và tia phân giác góc ngoài tại đỉnh B nên HA là tia phân giác của góc BHy.

b) HA là tia phân giác của góc BHy nên $\widehat{AHy} = 45^\circ$.

$$\text{Do đó } \widehat{OHA} = 180^\circ - \widehat{AHy} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Chuyên đề 11. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

11.1. (h.11.4)

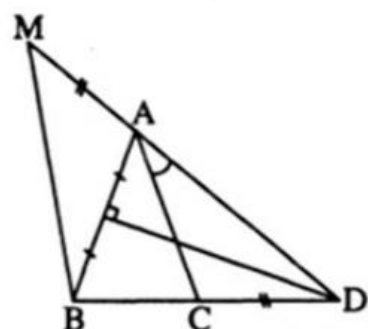
a) $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 40^\circ$, nên $\widehat{ABC} = 70^\circ$.

Vì D thuộc đường trung trực của AB nên $DA = DB$.

Tam giác ADB cân tại D, suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{ABD} = 70^\circ$,
do đó $\widehat{CAD} = \widehat{BAD} - \widehat{BAC} = 30^\circ$.

b) $\triangle AMB = \triangle CDA$ (c-g-c), suy ra $BM = AD$,
mà $AD = BD$ nên $BD = BM$.

Vậy $\triangle BMD$ là tam giác cân tại B.

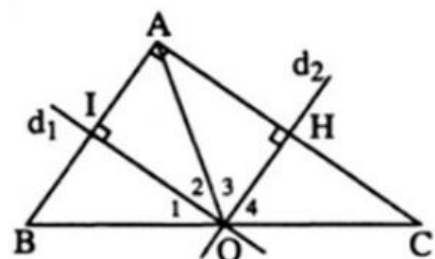


Hình 11.4

11.2. (h.11.5)

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A.

Vẽ đường trung trực d_1 của cạnh AB, cắt AB tại I. Vẽ đường trung trực d_2 của cạnh AC, cắt AC tại H.



Hình 11.5

Giả sử d_1 và d_2 cắt nhau tại O. Ta có $OA = OB$, do đó $\triangle OAI = \triangle OBI$ (c-g-c)
nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$. Tương tự $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$.

Ta có $OI \parallel AC$ mà $OH \perp AC$ nên $\widehat{IOH} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 2(\widehat{O_2} + \widehat{O_3}) = 2\widehat{IOH} = 180^\circ$.

Vậy ba điểm B, O, C thẳng hàng.

Mặt khác $OB = OC$ nên O thuộc đường trung trực của BC.

Vậy các đường trung trực của tam giác vuông cắt nhau tại trung điểm của cạnh huyền.

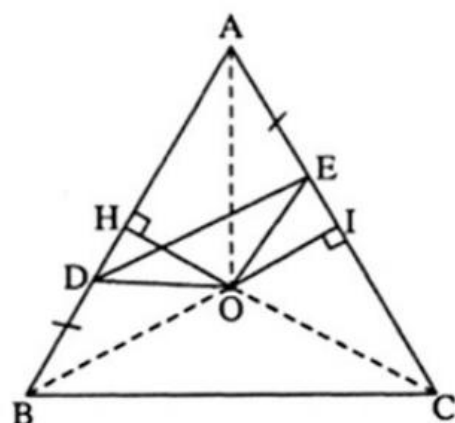
11.3.* (h.11.6)

Ta nhận thấy rằng :

Nếu D trùng với B thì E trùng với A, đường trung trực của DE là đường trung trực của AB.

Nếu D trùng với A thì E trùng với C, đường trung trực của DE là đường trung trực của AC.

Do đó, ta vẽ các đường trung trực của AB và cạnh AC, chúng cắt nhau tại O.



Hình 11.6

Ta sẽ chứng tỏ rằng đường trung trực của DE đi qua O bằng cách chứng minh $OD = OE$.

Gọi H và I theo thứ tự là trung điểm của AB và AC. Bạn đọc chứng minh $HD = IE$ rồi suy ra $\triangle OHD = \triangle OIE$ (c-g-c) để có $OD = OE$.

Hoặc chứng minh $\widehat{OAE} = \widehat{OBD}$ rồi suy ra $\triangle OAE = \triangle OBD$ (c-g-c) để có $OD = OE$.

11.4.* (h.11.7)

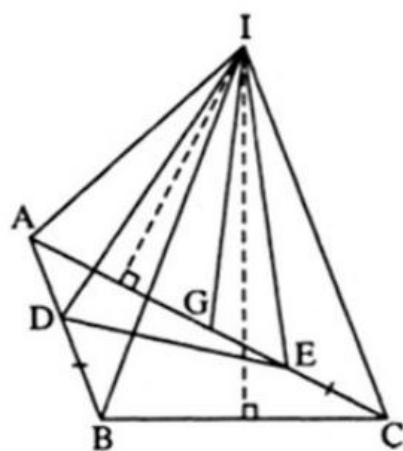
Trên cạnh AC lấy điểm G với $CG = AB$ thì điểm G cố định.

Ta nhận thấy rằng :

Khi D trùng với B thì E trùng với C, đường trung trực của DE là đường trung trực của BC.

Khi D trùng với A thì E trùng với G, đường trung trực của DE là đường trung trực của AG.

Vẽ đường trung trực của BC và AG chúng cắt nhau tại I thì I là điểm cố định.



Hình 11.7

Vì vậy nếu các đường trung trực của DE đi qua một điểm cố định thì điểm cố định đó phải là điểm I nói trên.

Thật vậy, I thuộc các đường trung trực của BC và AG nên $IB = IC$, $IA = IG$.

$\triangle IAB = \triangle IGC$ (c-c-c), nên $\widehat{IBA} = \widehat{ICG}$, suy ra $\widehat{IBD} = \widehat{ICE}$.

Do đó $\triangle IBD = \triangle ICE$ (c-g-c), nên $ID = IE$.

Điều này chứng tỏ rằng đường trung trực của DE luôn đi qua điểm I cố định.

11.5. (h.11.8)

a) Ta có $MA + MB = MA + (MC + CB)$
 $= (MA + MC) + CB.$

Xét $\triangle AMC$, ta có $MA + MC > CA.$

Do đó $MA + MB > CA + CB.$

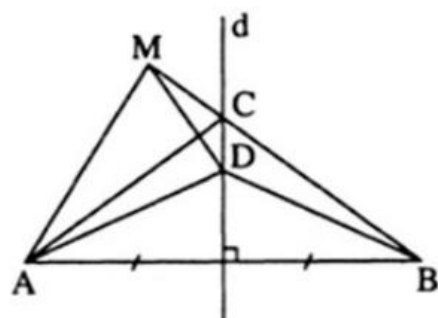
b) Vì C và D nằm trên đường trung trực d của AB, nên :

$$MC + CA = MC + CB = MB \quad (1)$$

$$MD + AD = MD + BD \quad (2)$$

$$\text{Xét } \triangle MBD \text{ có } MD + BD > MB \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $MC + AC < MD + AD.$



Hình 11.8

11.6.* (h.11.9)

a) Từ hai tam giác vuông AIM và AIN,

bạn đọc dễ dàng có $\widehat{MAN} + \widehat{MIN} = 180^\circ.$

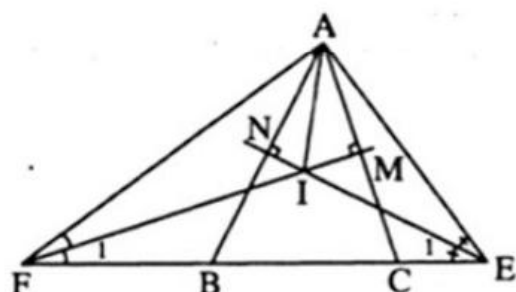
Từ đó suy ra $\widehat{MIN} = 180^\circ - \widehat{MAN}$

$$= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ, \text{ do đó } \widehat{EIF} = 135^\circ,$$

$$\text{suy ra } \widehat{E}_1 + \widehat{F}_1 = 45^\circ \text{ hay } \frac{\widehat{E}}{2} + \frac{\widehat{F}}{2} = 45^\circ$$

$$\text{nên } \widehat{E} + \widehat{F} = 90^\circ, \text{ do đó } \widehat{EAF} = 90^\circ.$$

b) I là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC nên ta có $IA = IB = IC.$
 Suy ra đường tròn tâm I, bán kính IA đi qua ba điểm A, B, C.



Hình 11.9

11.7.* (h.11.10)

a) Theo đề bài I, K, L theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC nên theo Ví dụ 4.3, ta có :

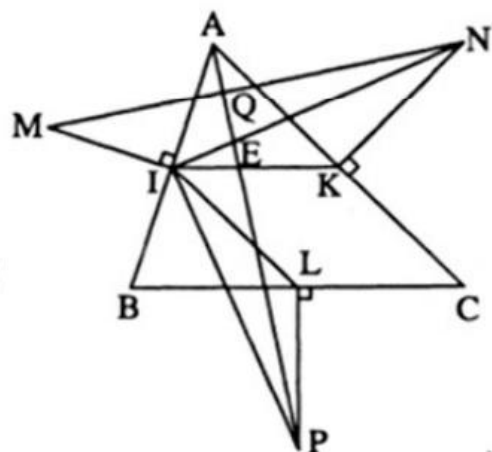
$$IK = \frac{1}{2}BC, IL = \frac{1}{2}AC,$$

suy ra $IK = LP, IL = KN$ và $IK \parallel BC, IL \parallel AC$

nên $\widehat{C} = \widehat{AKI}$ (đồng vị), $\widehat{C} = \widehat{ILB}$ (đồng vị),

suy ra $\widehat{AKI} = \widehat{ILB}$, do đó $\widehat{IKN} = \widehat{ILP}.$

Vậy $\triangle IKN = \triangle PLI$ (c-g-c), suy ra $IN = IP$



Hình 11.10

và $\widehat{NIK} = \widehat{IPL}$, do đó $\widehat{NIP} = \widehat{NIK} + \widehat{KIL} + \widehat{LIP} = \widehat{IPL} + \widehat{ILB} + \widehat{LIP} = 90^\circ$ (xét $\triangle IPL$), suy ra $IN \perp IP$.

b) $\widehat{MIN} = \widehat{AIP}$ (bằng $90^\circ + \widehat{AIN}$).

Ta có $\triangle AIP = \triangle MIN$ (c-g-c).

c) Từ câu b) ta có $\widehat{MNI} = \widehat{API}$.

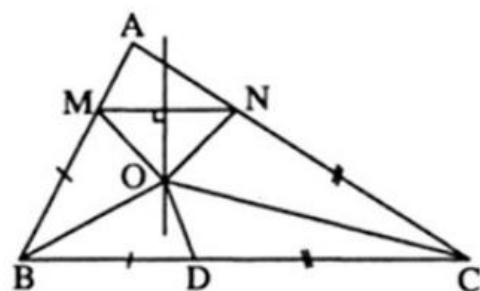
Gọi giao điểm của AP với MN là Q, AP với IN là E, ta có $\widehat{NEQ} = \widehat{IEP}$ (đối đỉnh), suy ra $\widehat{ENQ} + \widehat{NEQ} = \widehat{EPI} + \widehat{IEP} = 90^\circ$, nên $\widehat{EQN} = 90^\circ$.

Vậy AP vuông góc với MN.

11.8.* (h.11.11)

Vẽ tia phân giác của góc B và góc C, chúng cắt nhau tại O thì điểm O cố định.

Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BM$, ta có $CD = CN$.



Hình 11.11

$\triangle OMB = \triangle ODB$ (c-g-c), suy ra $OM = OD$ (1).

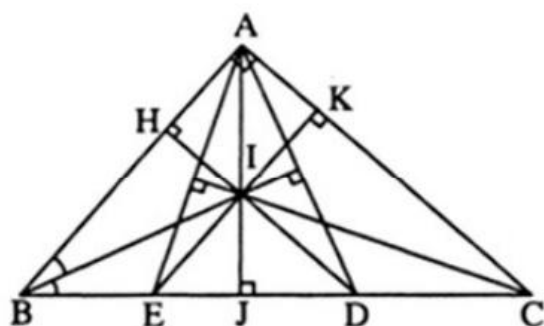
$\triangle ODC = \triangle ONC$ (c-g-c), suy ra $OD = ON$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OM = ON$.

Vậy đường trung trực của MN luôn đi qua điểm O cố định.

11.9. (h.11.12)

Giải tương tự Ví dụ 11.3.



Hình 11.12

11.10. (h.11.13)

a) Dễ dàng chứng minh được $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 45^\circ$.

Suy ra $\triangle BOC$ vuông cân tại O.

b) $\triangle ABC$ có $\hat{B} = 75^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$,

suy ra $\widehat{BAC} = 45^\circ$ (1).

Dễ dàng chứng minh được

$$\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ.$$

Vậy $\widehat{BAC} = \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$.

c*) Vì $OB = OC$, nên để chứng minh $OA = OB = OC$ ta chỉ cần chứng minh $OA = OB$ là đủ.

Nếu $OA > OB$ thì từ $\triangle OAB$ suy ra $\hat{A}_1 < 30^\circ$ (2).

Lại do $OC = OB$ nên $OA > OC$, vì thế từ $\triangle OAC$ suy ra $\hat{A}_2 < 15^\circ$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{BAC} < 45^\circ$, mâu thuẫn với (1).

Nếu $OA < OB$, chứng minh tương tự được $\widehat{BAC} > 45^\circ$, cũng mâu thuẫn với (1).

Vậy $OA = OB$, do đó $OA = OB = OC$.

11.11. (h.11.14)

a) Bạn đọc tự giải.

b) Dễ dàng tính được $\widehat{BAC} = 60^\circ$ (1),
 $\widehat{ABE} = 45^\circ$, $\widehat{ACE} = 15^\circ$.

Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{ABE} + \widehat{ACE}$.

c*) Để chứng minh $\widehat{AEB} = 90^\circ$, ta chứng minh góc AEB không thể lớn hơn 90° , cũng không thể nhỏ hơn 90° .

Thật vậy :

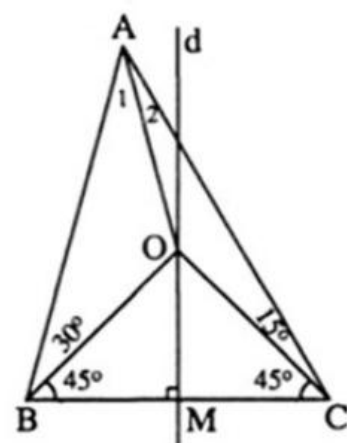
Nếu $\widehat{AEB} > 90^\circ$ thì trong $\triangle AEB$ ta có $\hat{A}_1 < 45^\circ$ và $EB < EA$. Ta lại có $EB = EC$ nên $EC < EA$.

Khi đó từ tam giác AEC ta có $\hat{A}_2 < \widehat{ECA} = 15^\circ$.

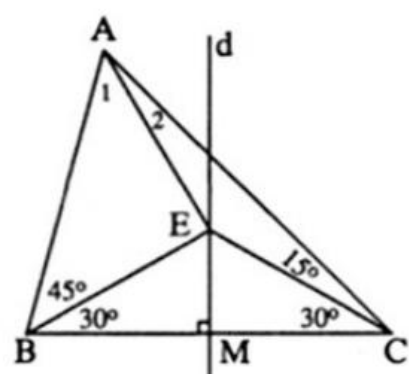
Vì thế $\widehat{BAC} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 < 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$, trái với (1).

Nếu $\widehat{AEB} < 90^\circ$, chứng minh tương tự ta có $\widehat{BAC} > 60^\circ$, trái với (1).

Vậy $\widehat{AEB} = 90^\circ$.



Hình 11.13



Hình 11.14

11.12. (h.11.15)

a) M nằm trên trung trực của AC nên $MA = MC$,
do đó $\triangle AMC$ cân tại M.

Hai tam giác cân ABC và MCA có chung góc đáy MCA
nên hai góc ở đỉnh bằng nhau $\widehat{AMC} = \widehat{BAC}$.

$$\begin{aligned}\text{Suy ra: } \widehat{ABC} &= \widehat{AMC} + \widehat{MAB} \\ &= \widehat{BAC} + \widehat{MAB} = \widehat{MAC},\end{aligned}$$

do đó $\widehat{ABM} = \widehat{CAN}$.

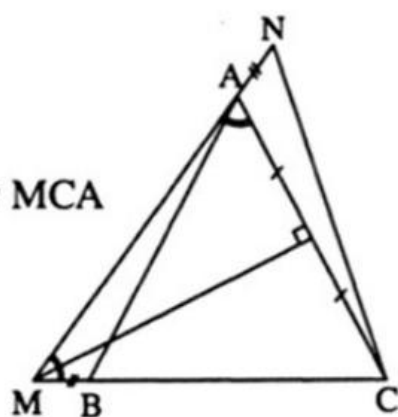
$\triangle ABM = \triangle CAN$ (c-g-c), suy ra $AM = CN$, mà $AM = CM$ nên $CM = CN$.
Vậy $\triangle MNC$ là tam giác cân tại C.

b) $\triangle CMN$ cân tại C

$$CM \perp CN \Leftrightarrow \widehat{MCN} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{AMC} = 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = 45^\circ \text{ (vì } \widehat{BAC} = \widehat{AMC}) \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ cân tại A và có } \widehat{A} = 45^\circ.$$

Vậy, nếu tam giác ABC cân tại A và có $\widehat{A} = 45^\circ$ thì $CM \perp CN$.



Hình 11.15

11.13. (h.11.16)

Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$),

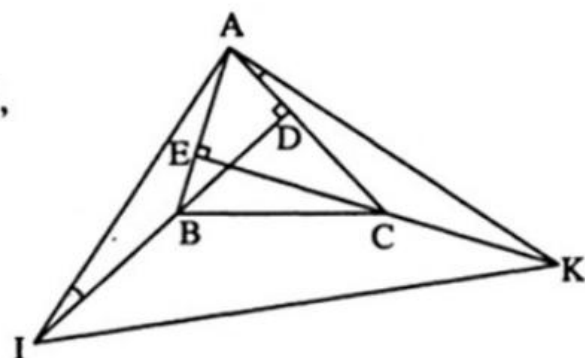
suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{ACK}$.

$\triangle ABI = \triangle KCA$ (c-g-c), suy ra $AI = AK$

và $\widehat{AIB} = \widehat{CAK}$. Do đó:

$$\begin{aligned}\widehat{IAK} &= \widehat{IAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAK} \\ &= \widehat{IAB} + \widehat{BAC} + \widehat{AIB} = 90^\circ \text{ (xét } \triangle AID).\end{aligned}$$

Vậy $\triangle AIK$ vuông cân tại A.



Hình 11.16

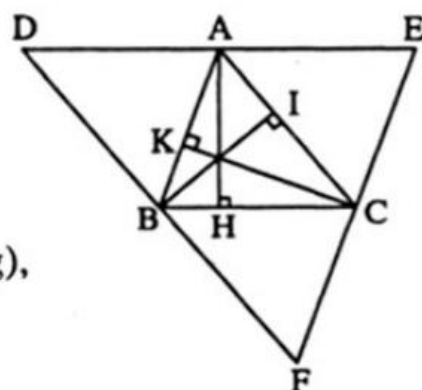
11.14. (h.11.17)

Kẻ $AH \perp BC$, $BI \perp AC$, $CK \perp AB$.

Dễ dàng chứng minh được $\triangle ADB = \triangle BCA$ (g-c-g),

suy ra $AD = BC$ (1).

Tương tự $AE = BC$ (2).



Hình 11.17

Từ (1) và (2) suy ra $AD = AE$ hay A là trung điểm của DE.

Ta có $AH \perp BC$, mà $DE \parallel BC$ nên $AH \perp DE$.

Vậy AH là đường trung trực của DE.

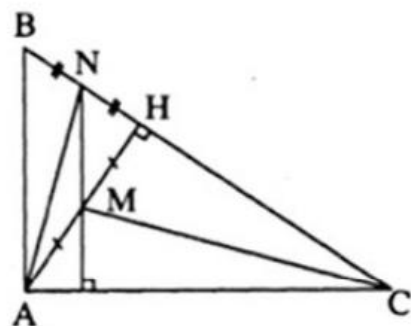
Chứng minh tương tự ta có BI là đường trung trực của DF, CK là đường trung trực của EF.

Vậy ba đường cao của $\triangle ABC$ là ba đường trung trực của $\triangle DEF$.

11.15.* (h.11.18)

Vì M là trung điểm của AH, N là trung điểm của BH nên theo Ví dụ 4.3 thì $MN \parallel AB$, mà $AB \perp AC$ nên $MN \perp AC$.

Tam giác ANC có $MN \perp AC$ và $AH \perp NC$, MN và AH cắt nhau tại M nên M là trực tâm của tam giác ANC, suy ra $CM \perp AN$.



Hình 11.18

11.16.* (h.11.19)

H là trực tâm của tam giác đều ABE nên AH và BH là các tia phân giác của góc EAB và góc EBA, ta có

$$\widehat{HAB} = \widehat{HBA} = 30^\circ.$$

$\triangle IBH = \triangle ICK$ (c-g-c), suy ra $CK = BH$, nhưng $BH = AH$

nên $CK = AH$ và $\widehat{KCI} = \widehat{IBH} = \widehat{CBA} + 30^\circ$.

Vẽ tia Cx là tia đối của tia CB, ta có

$$\widehat{KCF} = \widehat{KCx} + \widehat{xCF}$$

$$= 180^\circ - \widehat{KCI} + 180^\circ - \widehat{BCF}$$

$$= 180^\circ - (\widehat{CBA} + 30^\circ) + 180^\circ - (\widehat{BCA} + 60^\circ)$$

$$= 180^\circ - \widehat{CBA} - 30^\circ + 180^\circ - \widehat{BCA} - 60^\circ$$

$$= 270^\circ - (\widehat{CBA} + \widehat{BCA}) = 270^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC})$$

$$= 90^\circ + \widehat{BAC} = \widehat{HAF}.$$

Do đó $\triangle AHF = \triangle CKF$ (c-g-c), suy ra $FH = FK$

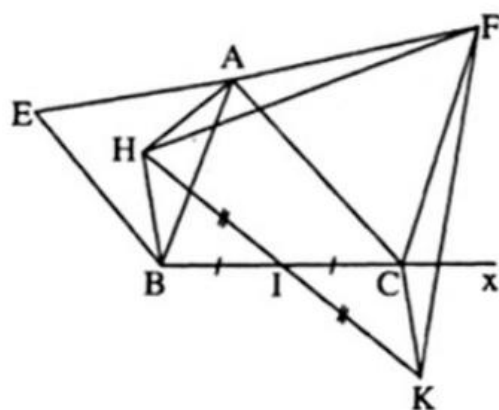
(1).

Và $\widehat{AFH} = \widehat{CFK}$ nên

$$\widehat{KFH} = \widehat{CFK} + \widehat{CFH} = \widehat{AFH} + \widehat{CFH} = \widehat{CFA} = 60^\circ$$

(2).

Từ (1) và (2) ta có HKF là tam giác đều.



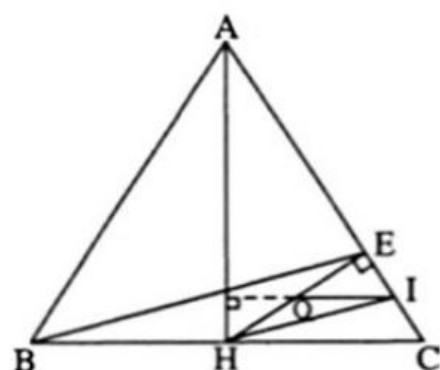
Hình 11.19

11.17.* (h.11.20)

I là trung điểm của EC, H là trung điểm của BC nên $HI \parallel BE$ (Ví dụ 4.3).

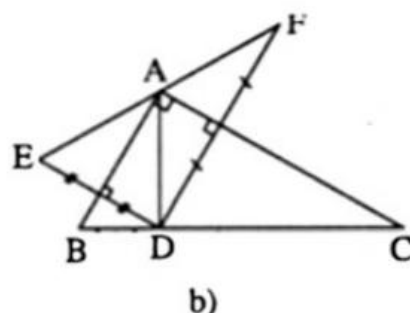
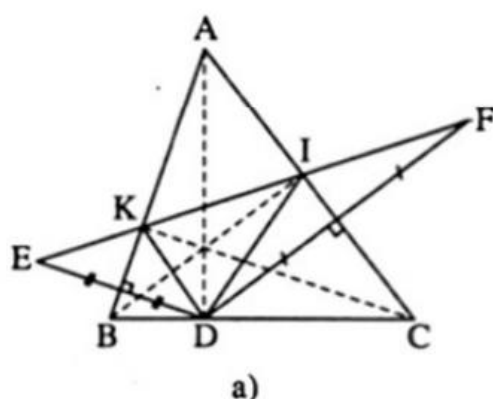
O là trung điểm của HE, I là trung điểm của EC nên $OI \parallel HC$ tức là $OI \parallel BC$, mà $AH \perp BC$ nên $OI \perp AH$.

$\triangle AHI$ có $HE \perp AI$, $IO \perp AH$ nên O là trực tâm của $\triangle AHI$, suy ra $AO \perp HI$, nhưng $HI \parallel BE$, vì thế $AO \perp BE$.



Hình 11.20

11.18.* Xét ba trường hợp :



Hình 11.21

• Trường hợp $\widehat{A} < 90^\circ$ (h.11.21a)

Điểm K nằm trên đường trung trực của DE nên $KD = KE$ suy ra $\triangle DEK$ cân tại K, do đó KB là tia phân giác của góc EKD.

Chứng minh tương tự, ta có IC là tia phân giác của góc DIF.

Xét $\triangle DIK$ có hai đường phân giác góc ngoài tại K và I cắt nhau tại A nên DA là phân giác của góc IDK (1).

Do DA là phân giác của góc IDK, mà $BD \perp AD$ nên DB là tia phân giác góc ngoài tại D ; B là giao điểm hai tia phân giác ngoài tại K và D của $\triangle DIK$, suy ra IB là tia phân giác của góc DIK (2).

Tương tự, KC là tia phân giác của góc IKD (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra AD, BI và CK cùng đi qua một điểm.

• Trường hợp $\widehat{A} = 90^\circ$ (h.11.21b)

Bạn đọc dễ dàng chứng minh được ba điểm A, E, F thẳng hàng.

Khi đó hai điểm I và K trùng với A nên ba đường thẳng AD, BI và CK cùng đi qua điểm A.

• Trường hợp $\widehat{A} > 90^\circ$, bạn đọc tự chứng minh.

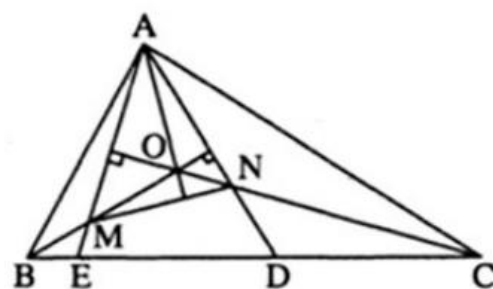
11.19. (h.11.24)

Gọi O là giao điểm các tia phân giác của góc B và góc C, suy ra AO là tia phân giác của góc A.

Tam giác ABD cân tại B nên $BO \perp AD$.

Tam giác ACE cân tại C nên $CO \perp AE$.

Xét $\triangle AMN$ có O là trực tâm, do đó $AO \perp MN$.



Hình 11.22

11.20.* (h.11.23)

Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại D, kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại E.

Ta có $\triangle ADH = \triangle HEA$ (g-c-g), suy ra $AD = HE$ và $AE = HD$.

Xét $\triangle AHD$ có $HA < HD + AD$, do đó

$$HA < AE + AD \quad (1).$$

Vì $HE \parallel AC$, mà $AC \perp BH$ nên $HE \perp BH$.

Xét tam giác vuông HBE có $HB < BE$ (2).

Tương tự $HC < DC$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra :

$$HA + HB + HC < (AE + EB) + (AD + DC) = AB + AC.$$

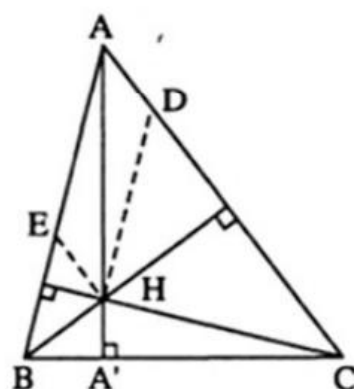
$$\text{Vậy } HA + HB + HC < AB + AC \quad (4).$$

$$\text{Tương tự : } HA + HB + HC < AB + BC \quad (5).$$

$$HA + HB + HC < AC + BC \quad (6).$$

Từ (4), (5), (6) suy ra $3(HA + HB + HC) < 2(AB + AC + BC)$.

$$\text{Vậy } HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC).$$



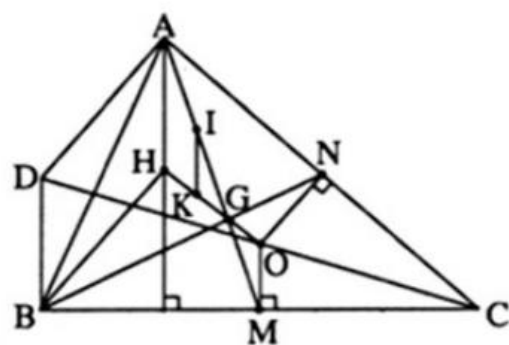
Hình 11.23

11.21.* (h.11.24)

Xét $\triangle ABC$, trung tuyến AM .

Gọi H là trực tâm, O là giao điểm các đường trung trực, G là giao điểm của AM và OH .

Ta chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC .



Hình 11.24

Trên tia đối của tia OC lấy điểm D sao cho $OD = OC$, ta có $OM = \frac{1}{2}BD$ và $BD \parallel OM$ (Ví dụ 4.3), suy ra $BD \parallel AH$.

$\triangle ADB = \triangle BHA$ (g-c-g), ta có $BD = AH$, suy ra $OM = \frac{1}{2}AH$.

Gọi I là trung điểm của AG , K là trung điểm của HG thì $IK \parallel AH$ và $IK = \frac{1}{2}AH$, do đó $IK \parallel OM$ và $IK = OM$.

Ta có $\triangle OGM = \triangle KGI$ (g-c-g), suy ra $GM = GI = \frac{1}{2}GA$ nên $GM = \frac{1}{3}AM$.

Do đó G là trọng tâm của tam giác ABC .

Đường thẳng đi qua ba điểm H, G, O được gọi là đường thẳng Euler của tam giác.

Chuyên đề 12. CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

12.1. Nếu qua điểm O ta vẽ n đường thẳng phân biệt thì số góc tạo thành có đỉnh O là $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ góc. Trong những góc này thì có $2n$ góc không có điểm trong chung. Tổng của $2n$ góc này là 360° . Vậy trong các góc được tạo thành sẽ có ít nhất một góc không vượt quá $\frac{360^\circ}{2n} = \left(\frac{180}{n}\right)^\circ$.

12.2. Xét $\triangle ABC$ có AB là cạnh nhỏ nhất. Ta sẽ chứng minh $\hat{C} < 90^\circ$.

Giả sử $\hat{C} \geq 90^\circ$.

Ta có $AC \geq AB$ nên $\hat{B} \geq \hat{C} \geq 90^\circ$.

Ta có $BC \geq AB$ nên $\hat{A} \geq \hat{C} \geq 90^\circ$.

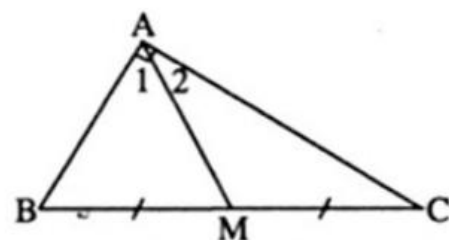
Suy ra $\hat{C} + \hat{B} + \hat{A} \geq 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$, trái với định lí về tổng ba góc trong tam giác.

Vậy $\hat{C} < 90^\circ$.

12.3. (h.12.6)

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, đường trung tuyến AM.

Ta sẽ chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$.



Hình 12.6

Giả sử $AM > \frac{1}{2}BC$ thì $AM > MB$ và $AM > MC$.

Do $AM > MB$ nên $\hat{B} > \hat{A}_1$. Do $AM > MC$ nên $\hat{C} > \hat{A}_2$. Suy ra $\hat{B} + \hat{C} > \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$, trái với $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$.

Giả sử $AM < \frac{1}{2}BC$, tương tự suy ra $\hat{B} + \hat{C} < \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$, trái với $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$.

Vậy $AM = \frac{1}{2}BC$.

12.4. Giả sử c không là cạnh bé nhất, chẳng hạn $a \leq c$.

Khi đó $a^2 \leq c^2$ (1).

Vì $a \leq c$ nên $b < a + c \leq c + c = 2c$. Do đó $b^2 < 4c^2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $a^2 + b^2 < 5c^2$, trái với giả thiết.

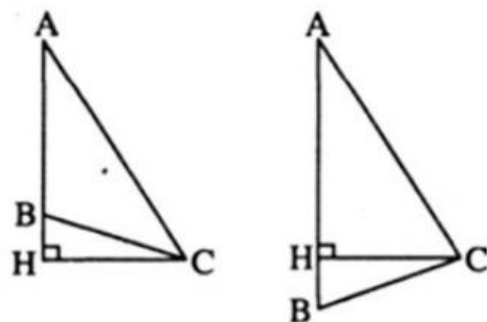
Suy ra điều phải chứng minh.

12.5. Xét $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 30^\circ$, $BC = \frac{1}{2}AC$.

Ta sẽ chứng minh $\hat{B} = 90^\circ$.

Giả sử $\hat{B} \neq 90^\circ$.

Kẻ $CH \perp AB$ thì $H \neq B$ (hình 12.7). Khi đó $CH < BC$ (*).



Hình 12.7

Tam giác vuông HAC có $\widehat{A} = 30^\circ$ nên $CH = \frac{1}{2}AC$. Mà $BC = \frac{1}{2}AC$ nên $CH = BC$, mâu thuẫn với (*).

Vậy $\widehat{B} = 90^\circ$.

12.6. (h.12.8) $\triangle AMD = \triangle BMC$ (vì $AD = BC$, $MD = MC$, $\widehat{ADM} = \widehat{BCM} = 75^\circ$) $\Rightarrow MA = MB$. Bạn đọc tự chứng minh $AB = CD$.

Đặt $AB = CD = AD = BC = a$, $MA = MB = b$. Ta phải chứng minh $\triangle ABM$ đều, tức là cần chứng minh $a = b$.

Thật vậy, giả sử $a \neq b$, khi đó $a > b$ hoặc $a < b$.

– Nếu $a > b$ thì $\widehat{AMD} > 75^\circ$, do đó $\widehat{DAM} < 30^\circ$. Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} > 60^\circ$, nên $\widehat{AMB} < 60^\circ$. Trong tam giác ABM, đối diện với cạnh a lớn hơn b , ta lại có $\widehat{AMB} < \widehat{MAB}$, mâu thuẫn.

– Nếu $a < b$ thì lập luận tương tự như trên ta có $\widehat{DAM} > 30^\circ$. Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} < 60^\circ$, nên $\widehat{AMB} > 60^\circ$. Trong tam giác ABM, đối diện với cạnh a nhỏ hơn b , ta lại có $\widehat{AMB} > \widehat{MAB}$, mâu thuẫn.

Vậy $a = b$, suy ra $\triangle ABM$ đều.

Nhận xét : Có thể chứng minh trực tiếp bài này như sau :

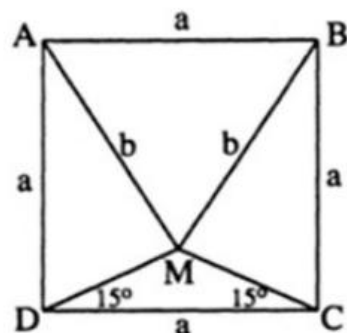
Dựng tam giác cân BNC có $\widehat{NBC} = \widehat{NCB} = 15^\circ$ (h.12.9). Khi đó $\triangle BNC = \triangle DMC$ (g-c-g) $\Rightarrow NC = MC$. Tam giác cân MNC có $\widehat{MCN} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

Vậy $NM = NC$ và $\widehat{NMC} = 60^\circ$. Nhưng $\widehat{MNB} = 150^\circ$ nên $\triangle BNC = \triangle BNM$ (c-g-c), suy ra $BM = BC$.

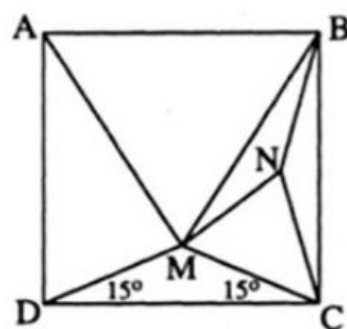
Mặt khác $\triangle BMC = \triangle AMD$ (c-g-c) nên $MA = MB$. Vậy $\triangle ABM$ đều.

12.7. Ta chứng minh $1 < M < 2$ (*). Cụ thể là

$$\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}, \quad \frac{b}{c+a} > \frac{b}{c+a+b}, \quad \frac{c}{a+b} > \frac{c}{a+b+c} \Rightarrow M > 1.$$



Hình 12.8



Hình 12.9

Áp dụng tính chất : Nếu $x, y, z > 0$, $\frac{x}{y} < 1$ thì $\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+z}$ (bạn đọc tự chứng minh). Khi đó

$$\frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{b+c+a} = \frac{2a}{a+b+c}, \quad \frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}, \quad \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c} \Rightarrow M < 2.$$

Vậy nếu M nguyên thì mâu thuẫn với (*).

Suy ra M không nguyên.

12.8. Xét tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^\circ$. Khi đó $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là các góc nhọn. Vẽ trung tuyến BM . Ta phải chứng minh BM không thể là phân giác của góc B (h.12.10).

Giả sử ngược lại BM là phân giác góc B .

Do $\widehat{A} > 90^\circ$ nên $BC > AB$. Trên BC lấy N sao cho $BN = BA$. Khi đó $\triangle BMA = \triangle BMN$ (c-g-c). Suy ra $MA = MN = MC$. Vậy $\triangle NMC$ cân tại M . Do đó $\widehat{N}_2 = \widehat{C}$ (1).

Ta cũng có :

$$\widehat{A} = \widehat{N}_1 \quad (2) \quad (\text{do } \triangle BMA = \triangle BMN).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = 180^\circ$, mâu thuẫn.

Suy ra điều phải chứng minh.

12.9. Ta đã biết :

Ba số dương là số đo ba cạnh của một tam giác khi số lớn nhất trong ba số đó nhỏ hơn tổng của hai số còn lại.

Quay trở lại bài toán, gọi 7 đoạn thẳng đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_7$ và giả thiết rằng

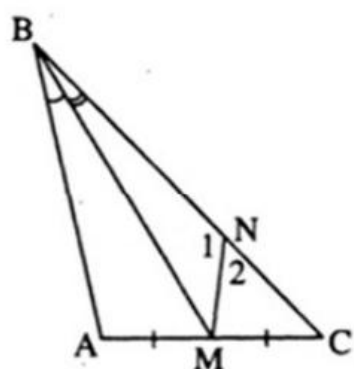
$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_7 < 13.$$

Nếu không chọn được 3 trong 7 đoạn thẳng trên làm ba cạnh của một tam giác thì theo nhận xét trên ta có :

$$a_3 \geq a_1 + a_2 \geq 1 + 1 = 2, \quad a_4 \geq a_2 + a_3 \geq 1 + 2 = 3, \quad a_5 \geq a_3 + a_4 \geq 2 + 3 = 5,$$

$$a_6 \geq a_4 + a_5 \geq 3 + 5 = 8, \quad a_7 \geq a_5 + a_6 \geq 5 + 8 = 13, \text{ trái với giả thiết } a_7 < 13.$$

Vậy tồn tại ba đoạn thẳng là ba cạnh của tam giác.



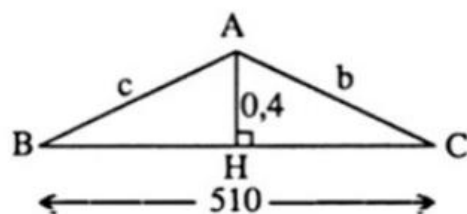
Hình 12.10

- Nếu chỉ có 6 đoạn thẳng thì mệnh đề trên không đúng, chẳng hạn với $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8$ thì không thể chọn được 3 trong 6 đoạn thẳng này để dựng một tam giác.

12.10. a) (h.12.11) Dựng tam giác cân ABC có cạnh đáy $a = 510$ cm, đường cao $h_a = 0,4$ cm.

Khi đó

$$S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} \cdot 510 \cdot 0,4 \\ = 102 \text{ cm}^2 > 100 \text{ cm}^2.$$

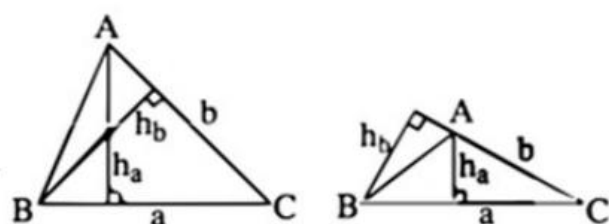


Hình 12.11

Mặt khác, do $b = c > 255$ cm nên $h_b = h_c = \frac{2S}{b} < \frac{2 \cdot 102}{255} < 1$ cm. Vậy tồn tại

ΔABC có các đường cao nhỏ hơn 1 cm, còn diện tích lớn hơn 100 cm^2 .

b) Giả sử ΔABC có hai đường cao $h_a, h_b > 100$ cm, nhưng $S_{\Delta ABC} < 1 \text{ cm}^2$ (*).



Hình 12.12

Ta có $h_a > 100$ cm, $h_b > 100$ cm

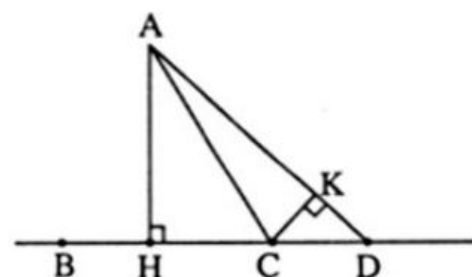
$\Rightarrow a \geq h_b > 100$ cm, $b \geq h_a > 100$ cm (h.12.12).

Khi đó $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a > \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 > 1 \text{ cm}^2$, mâu thuẫn với (*).

Vậy không tồn tại tam giác nào thỏa mãn điều kiện bài toán.

12.11. (h.12.13) Giả sử tất cả các điểm không cùng nằm trên một đường thẳng.

Qua mỗi cặp điểm vẽ một đường thẳng (có hữu hạn các đường thẳng này) và xét các khoảng cách (khác 0) từ các điểm đã cho đến các đường thẳng này. Giả sử khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC là nhỏ nhất (A, B, C là các điểm đã cho). Theo giả thiết, trên đường thẳng BC có chứa một điểm D nào đó.



Hình 12.13

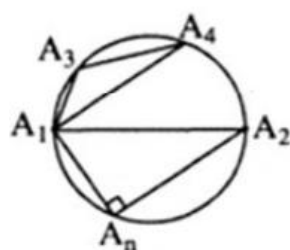
Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$) thì hai trong ba điểm B, C, D sẽ nằm cùng một phía đối với điểm H, chẳng hạn là C và D như hình vẽ. Khi đó ta có $HC < HD$.
Kẻ $CK \perp AD$ ($K \in AD$).

Ta có $CK \cdot AD = CD \cdot AH$ ($= 2S_{\Delta ACD}$).

Do $AD > CD$ nên $CK < AH$, mâu thuẫn với cách xác định ở trên là AH nhỏ nhất.

Suy ra điều phải chứng minh.

12.12. Giả sử có n điểm phân biệt $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n > 3$) thoả mãn đầu bài. Vì số các các đoạn thẳng nối các điểm trên là hữu hạn và vai trò các điểm là như nhau nên ta có thể giả sử A_1A_2 là đoạn thẳng dài nhất trong các đoạn đó (h.12.14).

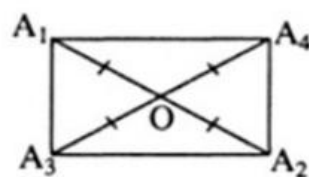


Hình 12.14

Khi đó $A_1A_2A_i$ ($i = 3, 4, \dots, n$) là các tam giác vuông có cạnh huyền là A_1A_2 . Do đó các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ đều nằm trên đường tròn đường kính A_1A_2 vì chúng cách đều trung điểm của A_1A_2 .

Nếu trong các điểm $A_3, A_4, \dots, A_n$ có hai điểm cùng nằm trên nửa đường tròn đường kính A_1A_2 , chẳng hạn là A_3 và A_4 thì dễ thấy tam giác $A_1A_3A_4$ là tam giác tù vì $\widehat{A_1A_3A_4} > \widehat{A_1A_3A_2} = 90^\circ$, trái với giả thiết. Vậy trên mỗi nửa đường tròn đường kính A_1A_2 có nhiều nhất một điểm thuộc tập hợp $\{A_3, A_4, \dots, A_n\}$. Vậy $n \leq 4$.

Với $n = 4$ thì bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 trên hình 12.15 thoả mãn điều kiện bài toán. Vậy số n lớn nhất cần tìm là 4.



Hình 12.15

Chuyên đề 13. NGUYÊN LÝ DIRICHLET

13.1. Cách làm tương tự Ví dụ 13.1.

13.2. Tương tự Ví dụ 13.4. Vẽ đường kính SS' của đường tròn. Chứng minh rằng S hoặc S' là điểm cần tìm.

13.3. Tương tự Ví dụ 13.4. Vẽ đường kính AB sao cho A, B không trùng vào 20 điểm $M_1, M_2, \dots, M_{20}$ đã cho. Hãy chứng minh rằng một trong hai điểm A, B là điểm phải tìm.

13.4. (h.13.12)

Gọi O là giao điểm của AC và BD . Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

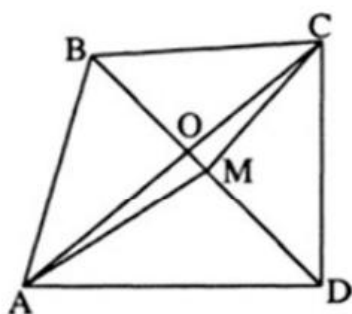
$$\begin{aligned} AB + CD &< (AO + OB) + (CO + OD) \\ &= AC + BD = 16 + 12 = 28 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

Vậy tồn tại một trong hai cạnh AB, CD có độ dài nhỏ hơn $28 : 2 = 14$ (cm). Chẳng hạn $AB < 14$ cm.

Lấy M là trung điểm của BD . Với ba điểm A, M, C luôn có $MA + MC \geq AC = 16$ cm nên tồn tại một trong hai đoạn MA, MC lớn hơn hoặc bằng $16 : 2 = 8$ (cm), chẳng hạn $MC \geq 8$ cm. Trong hai góc kề bù CMB và CMD luôn tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng 90° , chẳng hạn $\widehat{CMD} \geq 90^\circ$, khi đó

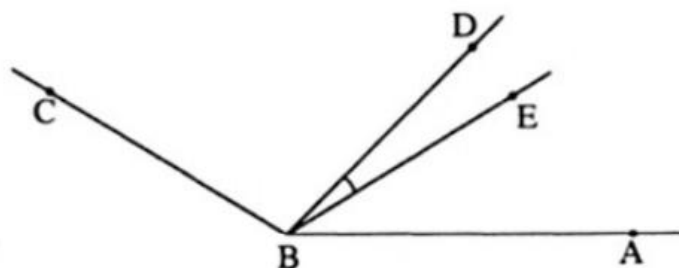
$$CD^2 \geq MC^2 + MD^2 \geq 8^2 + 6^2 = 10^2.$$

Vậy $CD \geq 10$ cm.



Hình 13.12

13.5. (h.13.13)



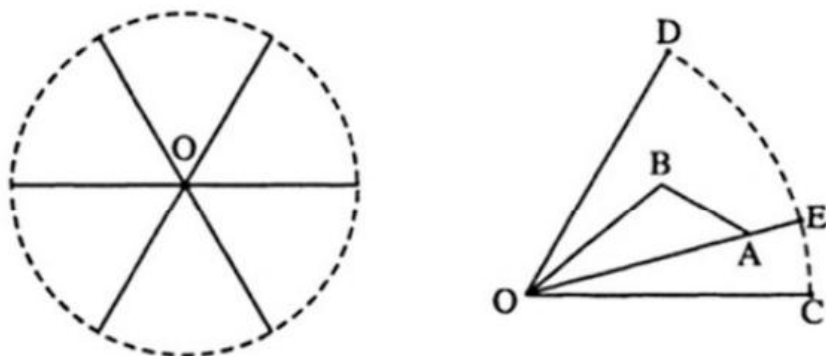
Hình 13.13

a) Trong 12 điểm đã cho luôn tìm được ba điểm gọi là A, B, C sao cho $\widehat{ABC} < 180^\circ$ và 9 điểm còn lại nằm bên trong góc đó. Nối B với 9 điểm còn lại được 9 tia, chia góc ABC ra 10 góc chung đỉnh B và không có điểm trong chung. Tổng độ lớn của 10 góc này bằng góc ABC nên nhỏ hơn 180° . Do đó luôn tồn tại một góc nhỏ hơn $180^\circ : 10 = 18^\circ$, chẳng hạn là góc DBE , khi đó ta chọn ba điểm D, B, E thỏa mãn điều kiện bài ra.

b) Nếu $\widehat{ABC} \leq 150^\circ$ thì trong 10 góc nhỏ nói trên, tồn tại một góc không vượt quá $150^\circ : 10 = 15^\circ$, chẳng hạn là góc DBE, khi đó ta chọn ba điểm D, B, E thoả mãn điều kiện bài ra.

Nếu $\widehat{ABC} > 150^\circ$ thì trong tam giác ABC có $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} < 30^\circ$. Do đó tồn tại góc nhỏ hơn $30^\circ : 2 = 15^\circ$, khi đó ta chọn ba điểm A, B, C thoả mãn điều kiện bài ra.

13.6. (h.13.14)



Hình 13.14

Chia đường tròn tâm O ra 6 hình quạt bằng nhau thì 7 điểm đã cho phải nằm trong 6 hình quạt này. Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 2 điểm đã cho nằm trong cùng một hình quạt, chẳng hạn A, B thuộc hình quạt COD.

Nếu một trong hai điểm A, B trùng với O thì $AB < 2$.

Nếu cả hai điểm A, B đều không trùng với O. Tam giác AOB có $\widehat{AOB} \leq 60^\circ$ nên $\widehat{OAB} + \widehat{OBA} \geq 120^\circ$. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại một trong hai góc $\widehat{OAB}, \widehat{OBA}$ không nhỏ hơn 60° , chẳng hạn $\widehat{OBA} \geq 60^\circ$. Do $\widehat{OBA} \geq \widehat{AOB}$ nên $OA \geq AB$. Kẻ bán kính OE đi qua A thì $OA < OE = 2$. Vậy $AB < 2$.

13.7. Giả sử A là một trong 17 điểm đã cho. Khi đó có 16 đoạn thẳng chung đầu mút A được tô bởi 3 màu (xanh, đỏ, vàng), mà $16 = 3 \cdot 5 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại $5 + 1 = 6$ đoạn thẳng cùng màu, chẳng hạn màu xanh.

Giả sử 6 đoạn thẳng đó là AB, AC, AD, AE, AF, AG. Xét 6 điểm B, C, D, E, F, G.

+ Nếu tồn tại 2 điểm được nối với nhau bởi màu xanh, chẳng hạn BC thì tam giác ABC có ba cạnh cùng màu (xanh).

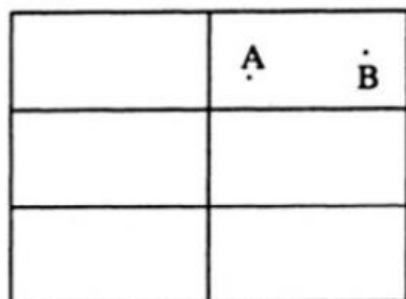
+ Nếu không tồn tại thì 6 điểm B, C, D, E, F, G được nối với nhau bởi các đoạn thẳng được tô bởi hai màu đỏ hoặc vàng. Khi đó có 5 đoạn thẳng chung

đầu mút B được tô bởi hai màu (đỏ, vàng), mà $5 = 2.2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại $2 + 1 = 3$ đoạn thẳng cùng màu, chẳng hạn màu đỏ.

Giả sử 3 đoạn thẳng đó là BC, BD, BE. Xét 3 điểm C, D, E. Nếu tồn tại 2 điểm được nối với nhau bởi màu đỏ, chẳng hạn C, D thì tam giác BCD có ba cạnh cùng màu (đỏ). Nếu không tồn tại thì 3 điểm C, D, E được nối với nhau bởi các đoạn thẳng được tô bởi màu vàng, khi đó tam giác CDE có ba cạnh cùng màu vàng.

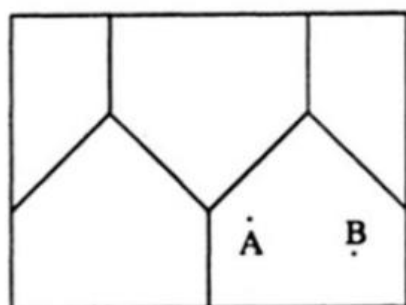
Như vậy bài toán đã được chứng minh.

- 13.8. a) Chia hình chữ nhật 3×4 thành 6 hình chữ nhật nhỏ kích thước 1×2 (hình 13.15). Khi đó 7 điểm đã cho nằm trong 6 hình chữ nhật này, mà $7 = 6.1 + 1$, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai điểm cùng thuộc một hình, chẳng hạn đó là hai điểm A, B. Để chứng minh được AB không vượt quá độ dài đường chéo của hình chữ nhật kích thước 1×2 , tức là $AB \leq \sqrt{5} < 2,24$.



Hình 13.15

- b) Chia hình chữ nhật 3×4 thành 5 phần như hình 13.16 gồm ba hình "ngôi nhà" và hai hình "nửa ngôi nhà". Khi đó 6 điểm đã cho nằm trong 5 hình này, mà $6 = 5.1 + 1$, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai điểm cùng thuộc một hình, chẳng hạn đó là hai điểm A, B. Để chứng minh được $AB \leq \sqrt{5} < 2,24$. Do đó kết quả bài toán vẫn đúng.



Hình 13.16

- 13.9. Ta chia tam giác đều thành các hình tam giác không có điểm trong chung sao cho đỉnh của mỗi tam giác là ba trong số $100 + 3 = 103$ điểm đã cho. Mỗi điểm này là một đỉnh của ít nhất một tam giác. Tổng các góc có đỉnh là 100 điểm bên trong tam giác đều bằng $360^\circ \cdot 100 = 36000^\circ$. Tổng các góc có đỉnh là các đỉnh tam giác đều bằng 180° . Do đó tổng các góc của tất cả các tam giác được tạo thành là 36180° . Số tam giác được tạo thành là $36180^\circ : 180^\circ = 201$.

Tổng diện tích của 201 tam giác bằng 1. Vì vậy tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{201}$.

Phát biểu bài toán tổng quát: Bên trong hình tam giác đều có diện tích bằng 1 cho n điểm. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc là các đỉnh tam giác đều, tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{2n+1}$.

13.10. Ta có $1000 = 48.20 + 0,6.47 + 2.5,9$;

$$1000 = 95.10 + 0,5.94 + 2.1,5.$$

Ta chia cánh rừng hình vuông thành các ô hình chữ nhật kích thước $10\text{m} \times 20\text{m}$ và khoảng cách giữa chúng theo cách sau:

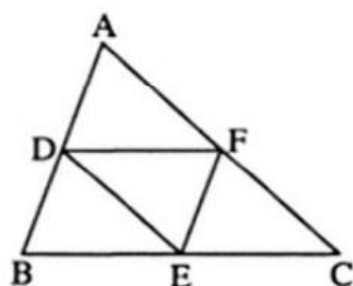
– Trên một cạnh hình vuông ta vạch 48 đoạn dài 20m , khoảng cách giữa hai đoạn là $0,6\text{m}$ và ở hai biên ta để chừa ra $5,9\text{m}$.

– Trên cạnh hình vuông còn lại ta vạch 95 đoạn dài 10m , khoảng cách giữa hai đoạn là $0,5\text{m}$ và ở hai biên ta để chừa ra $1,5\text{m}$.

Như vậy sẽ có $48.95 = 4560$ hình chữ nhật mà hình này phân cách với hình kia một khoảng không nhỏ hơn $0,5\text{m}$. Với cách phân chia này, bất kì một cây thông nào đó đã nằm ở hình chữ nhật này đều không nằm chạm vào hình chữ nhật kia. Trên cánh rừng đó có 4500 cây thông, mà ở đây ta có 4560 hình chữ nhật, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một hình chữ nhật trên đó không có một cây thông nào, tức là có thể chọn được mảnh đất trống kích thước $10\text{m} \times 20\text{m}$.

13.11. Gọi 5 đường tròn là C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 . Theo bài ra ta có bộ 4 đường tròn C_1, C_2, C_3, C_4 đi qua điểm A; C_1, C_3, C_4, C_5 đi qua điểm B; C_2, C_3, C_4, C_5 đi qua điểm C. Ta thấy ba điểm A, B, C cùng nằm trên hai đường tròn C_3, C_4 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai điểm trùng nhau, chẳng hạn là điểm A. Cả 5 đường tròn sẽ đi qua điểm A này.

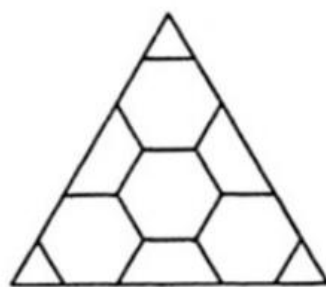
13.12. Ta chia tam giác ABC thành 4 tam giác nhỏ bằng nhau và có cạnh lớn nhất bằng 1 (như hình 13.17, với D, E, F là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA). Khi đó 5 điểm đã cho sẽ nằm trong 4 tam giác nhỏ này. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất 2 điểm nằm trong một tam giác nhỏ, khoảng cách giữa chúng sẽ không lớn hơn độ dài cạnh lớn nhất của tam giác nhỏ (tức là 1). Bài toán được chứng minh.



Hình 13.17

13.13. Chia tam giác đã cho thành các lục giác đều cạnh 1cm hoặc một phần của lục giác đều cạnh 1cm như hình 13.18, tất cả gồm 10 phần, 21 điểm đã cho sẽ nằm trong 10 phần này. Vì $21 = 10.2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại

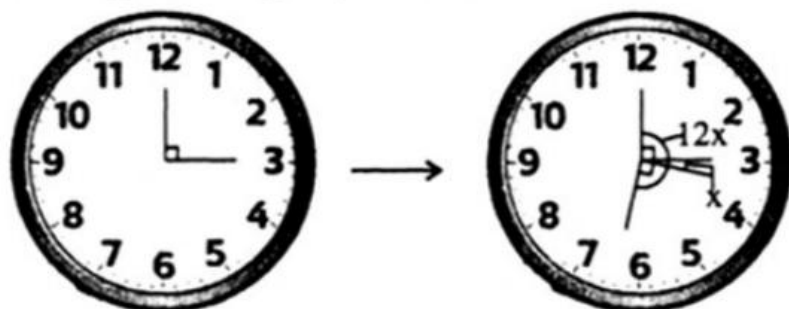
ít nhất 3 điểm cùng nằm trong một phần, phần này hoặc là lục giác đều cạnh 1cm hoặc là một phần lục giác đều cạnh 1cm. Đường tròn với tâm là tâm của lục giác, bán kính 1cm, sẽ chứa cả 3 điểm này.



Hình 13.18

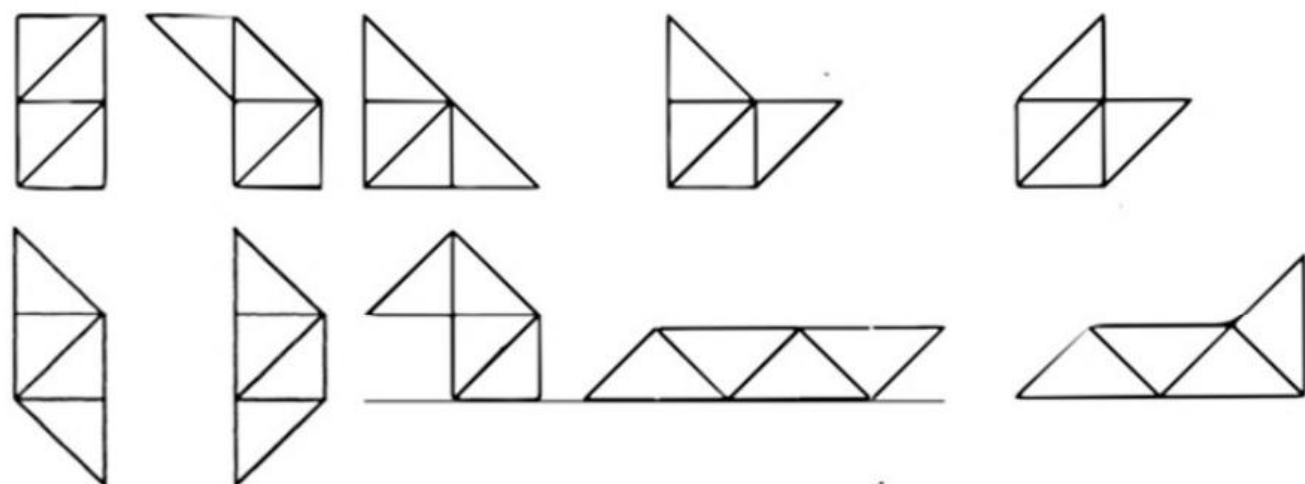
Chuyên đề 14. TRÒ CHƠI VÀ CÂU ĐỐ

- 14.1. Mỗi phút kim giờ quay một góc $0,5^\circ$, kim phút quay một góc 6° , như vậy góc chênh giữa các kim là $6 - 0,5 = 5,5^\circ$. Do cần thụ hẹp dần khoảng cách rồi tạo thành góc vuông một lần nữa nên cần $180 : 5,5 = 32\frac{8}{11}$ (phút).



Hình 14.5

- 14.2. Dưới đây là một số hình ghép từ bốn tam giác vuông cân (h.14.6).



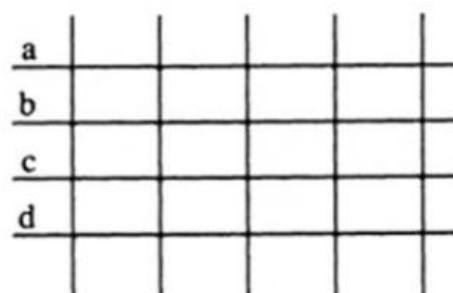
Hình 14.6

- 14.3. (h.14.7)

a) Cách 1. Có 6 cặp đường thẳng song song nằm ngang là $a \parallel b$, $a \parallel c$, $a \parallel d$, $b \parallel c$, $b \parallel d$, $c \parallel d$.

Cách 2. Một đường nằm ngang lần lượt tạo với ba đường nằm ngang còn lại thành 3 cặp đường thẳng song song.

Có 4 đường nằm ngang nên có $3.4 = 12$ cặp đường thẳng song song, trong đó mỗi cặp được tính hai lần nên số cặp đường thẳng song song nằm ngang là $\frac{12}{2} = 6$ (cặp).



Hình 14.7

b) Tương tự câu a, số cặp đường thẳng song song thẳng đứng là

$$\frac{5.4}{2} = 10 \text{ (cặp)}.$$

Một cặp đường thẳng song song nằm ngang và một cặp đường thẳng song song thẳng đứng tạo thành một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật là

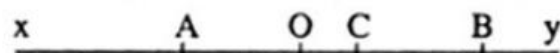
$$6.10 = 60.$$

Lưu ý. Tổng quát, nếu có m đường nằm ngang và n đường thẳng đứng thì số hình chữ nhật có là

$$\frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Chuyên đề 15. TIÊN ĐỀ VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

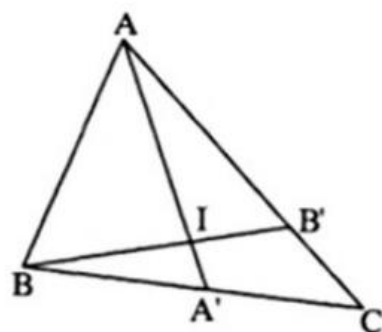
15.1. Theo tiên đề về tia thì điểm O chia đường thẳng a thành hai tia, ta kí hiệu Ox là tia có chứa điểm A và Oy là tia còn lại (tia đối) (h.15.23).



Hình 15.23

Vì O nằm giữa A và B nên B thuộc tia Oy , vì O nằm giữa A và C nên C thuộc tia Oy . Hai điểm B và C đều thuộc tia Oy nên điểm O không nằm giữa B và C .

15.2. Đường thẳng AA' không đi qua đỉnh nào của tam giác $BB'C$ (h.15.24). Nó cắt cạnh BC tại A' , nhưng không cắt cạnh $B'C$ (vì A không nằm giữa B' và C). Vậy theo định lý Pasch, đường thẳng AA' cắt cạnh BB' tại điểm I (nằm giữa B và B'). Tương tự, áp dụng định lý Pasch vào tam giác $AA'C$ và đường thẳng BB' ta có điểm I phải nằm giữa A và A' .

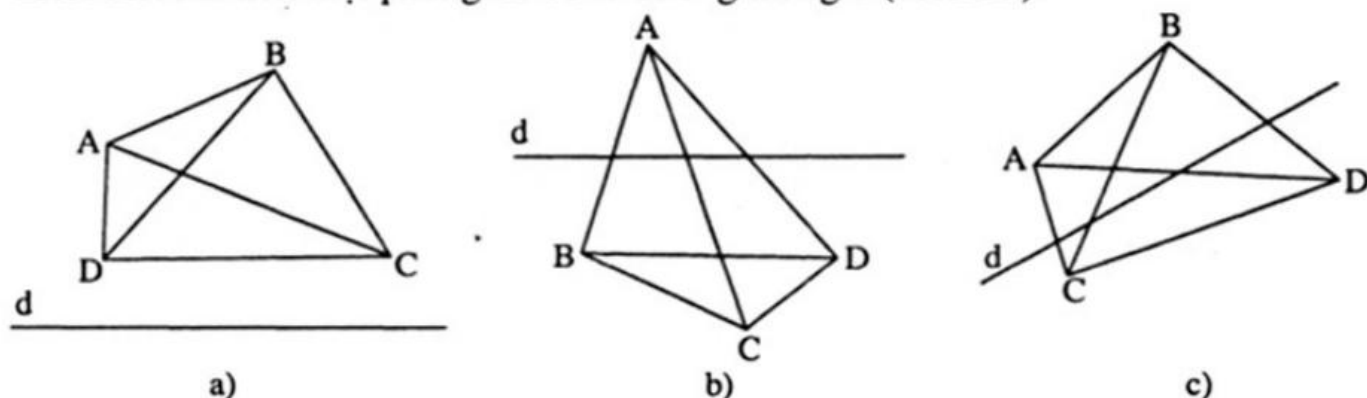


Hình 15.24

15.3. Suy ra từ bài 15.2.

15.4. Suy ra từ bài 15.2.

15.5. Xét hai nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d (h.15.25).



Hình 15.25

+ Nếu cả bốn điểm đã cho đều thuộc cùng một nửa mặt phẳng (h.15.25a) thì d không cắt đoạn thẳng nào cả.

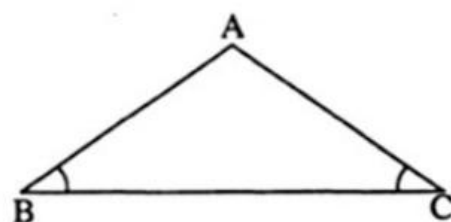
+ Nếu có một điểm (A chẳng hạn) thuộc nửa mặt phẳng này và ba điểm còn lại (B, C và D) thuộc nửa mặt phẳng kia (h.15.25b) thì đường thẳng d cắt ba đoạn thẳng AB, AC, AD.

+ Nếu có hai điểm (A và B chẳng hạn) thuộc một nửa mặt phẳng này và các điểm còn lại (C và D) thuộc nửa mặt phẳng kia (h.15.25c) thì d cắt bốn đoạn thẳng AC, AD, BC, BD.

Vậy d cắt nhiều nhất là bốn đoạn thẳng.

15.6. Giả sử tam giác ABC có $\hat{B} = \hat{C}$ (h.15.26).

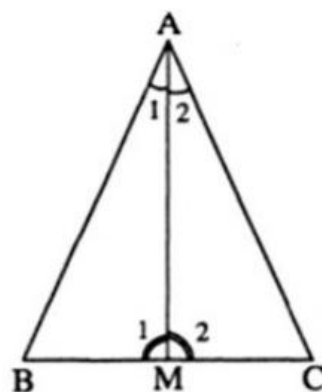
Hai tam giác ABC và ACB có chung cạnh BC và có các góc B và C (của tam giác ABC) lần lượt bằng góc C và B (của tam giác ACB) nên bằng nhau (g-c-g). Suy ra $AB = AC$, tức ABC là tam giác cân.



Hình 15.26

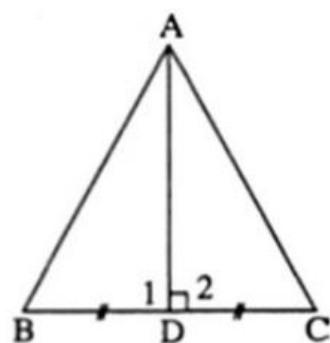
15.7. Suy ra từ bài 15.6.

15.8. Giả sử tam giác ABC có đường phân giác AM của góc A cũng là đường cao, tức là $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ và $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$ (h.15.27). Như vậy hai tam giác ABM và ACM bằng nhau theo trường hợp g-c-g. Suy ra $AB = AC$ và do đó ABC là tam giác cân.



Hình 15.27

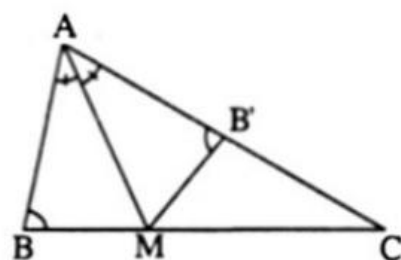
- 15.9. Giả sử tam giác ABC có đường trung tuyến AD cũng là đường cao, tức là $BD = CD$ và $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 90^\circ$ (h.15.28). Như vậy hai tam giác ABD và ACD bằng nhau theo tiên đề c-g-c. Suy ra $AB = AC$ và do đó ABC là tam giác cân.



Hình 15.28

- 15.10. Giả sử hai tam giác ABC và A'B'C' là các tam giác vuông tại A và A', ngoài ra $BC = B'C'$ và $\widehat{B} = \widehat{B}'$. Trên tia BA ta lấy điểm A_1 sao cho $A_1B = A'B'$. Khi đó hai tam giác A_1BC và A'B'C' bằng nhau (c-g-c). Từ đó suy ra $\widehat{BA_1C} = \widehat{B'A'C'} = 90^\circ$ và như vậy hai đường thẳng CA và CA_1 cùng vuông góc với AB nên A_1 trùng với A. Vậy hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau.

- 15.11. a) Giả sử tam giác ABC có $AC > AB$ (h.15.29). Gọi AM là phân giác của góc A và gọi B' là điểm nằm trên tia AC sao cho $AB' = AB$. Khi đó hai tam giác ABM và AB'M bằng nhau theo trường hợp c-g-c, suy ra $\widehat{B} = \widehat{AB'M}$. Mặt khác, góc AB'M là góc ngoài của tam giác MB'C nên $\widehat{AB'M} > \widehat{C}$. Vậy ta có $\widehat{B} > \widehat{C}$.



Hình 15.29

- b) Giả sử tam giác ABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Khi đó :

+ Nếu $AC = AB$ thì ABC là tam giác cân nên $\widehat{B} = \widehat{C}$, vô lí.

+ Nếu $AC < AB$ thì theo chứng minh ở a), ta có $\widehat{C} > \widehat{B}$, vô lí.

Vậy ta phải có $AC > AB$.

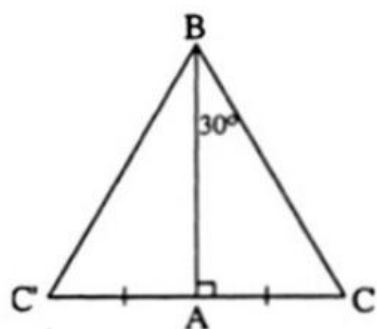
- 15.12. Xem sách giáo khoa Toán 7 (tập hai).

- 15.13. Xem Ví dụ 15.2.

- 15.14. Giả sử ABC là tam giác đều, tức là $AB = BC = CA$. Vì trong tam giác cân hai góc đáy bằng nhau nên ta có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$. Nhưng $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.

Ta đã dùng định lí "Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° " mà chứng minh của nó phải dùng tiên đề Euclid.

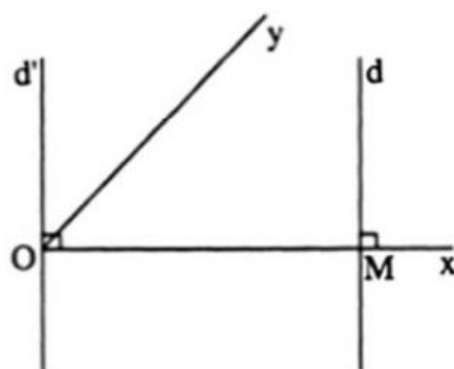
15.15. (h.15.30) Ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, mà $\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 30^\circ$ nên $\hat{C} = 60^\circ$. Lấy điểm C' sao cho A là trung điểm của CC' ta dễ dàng chứng minh được BCC' là tam giác đều nên $BC = CC' = 2AC$.



Hình 15.30

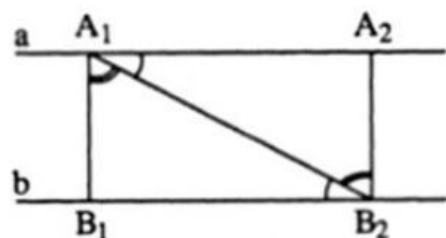
15.16. Gọi d' là đường thẳng đi qua O và vuông góc với Ox (h.15.31).

Khi đó $d \parallel d'$. Vì góc xOy là góc nhọn nên đường thẳng Oy khác với đường thẳng d' . Vì qua O chỉ có một đường thẳng d' song song với d (tiên đề Euclid) nên đường thẳng Oy không song song với d , nó phải cắt đường thẳng d tại điểm N . Hãy chứng minh rằng điểm N nằm trên tia Oy .



Hình 15.31

15.17. Ta lấy hai điểm khác nhau A_1 và A_2 trên đường thẳng a (h.15.32) và kẻ $A_1B_1 \perp b, A_2B_2 \perp b$. Ta chứng minh rằng $A_1B_1 = A_2B_2$.



Hình 15.32

Vì $a \parallel b$ nên $\widehat{A_2A_1B_2} = \widehat{A_1B_2B_1}$ (hai góc so le trong). Hai đường thẳng A_1B_1 và A_2B_2 cũng song song vì cùng vuông góc với b , do đó $\widehat{A_1B_2A_2} = \widehat{B_2A_1B_1}$ (hai góc so le trong). Từ đó hai tam giác $A_2A_1B_2$ và $B_1B_2A_1$ bằng nhau và do đó $A_1B_1 = A_2B_2$.

Ta đã dùng định lý "Hai đường thẳng song song cắt đường thẳng thứ ba tạo thành các góc so le trong bằng nhau" mà chứng minh nó phải dùng tiên đề Euclid.

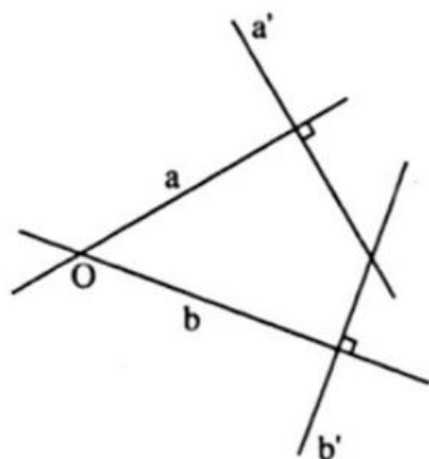
15.18. (h.15.33). Hai đường thẳng a' và b' không trùng nhau vì khi đó a và b cùng vuông góc với $a'(\equiv b')$ nên $a \parallel b$, trái giả thiết.

Ta chứng tỏ rằng hai đường thẳng a' và b' không song song.

Thật vậy, giả sử $a' \parallel b'$ thì vì $b \perp b'$ (giả thiết) nên $b \perp a'$ (theo Ví dụ 15.3). Như vậy hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với a' nên $a \parallel b$, trái với giả thiết a và b cắt nhau.

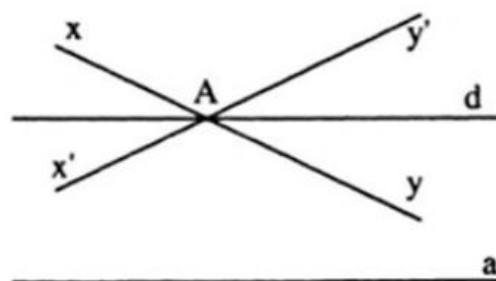
Vì a' và b' không trùng nhau, cũng không song song với nhau nên a' và b' cắt nhau.

Trong lời giải trên ta đã sử dụng kết quả của Ví dụ 15.3.



Hình 15.33

15.19. Giả sử điểm A nằm ngoài đường thẳng a (h.15.34). Theo tiên đề Lobachevsky thì qua A có ít nhất hai đường thẳng xy và $x'y'$ không cắt a . Hai đường thẳng đó tạo thành bốn góc có đỉnh là A , trong đó có góc $x'Ay$ chứa toàn bộ đường thẳng a , ba góc còn lại thì không chứa đường thẳng a .



Hình 15.34

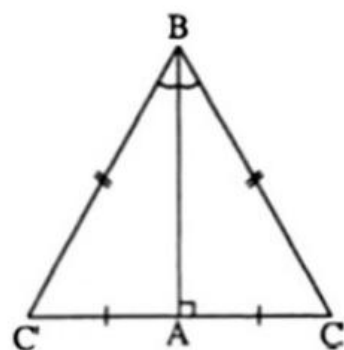
Gọi d là một đường thẳng bất kì đi qua A và nằm trong hai góc đối đỉnh xAx' và yAy' . Vì a không nằm trong hai góc đối đỉnh đó nên d và a không có điểm chung, vậy d không cắt a .

15.20. Giả sử $\widehat{xAB}$ là góc ngoài của tam giác ABC . Khi đó

$$\widehat{xAB} + \hat{A} = 180^\circ > \hat{A} + \hat{B} + \hat{C},$$

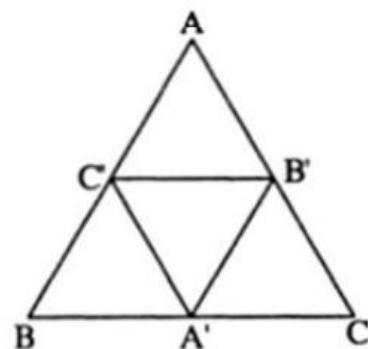
suy ra $\widehat{xAB} > \hat{B} + \hat{C}$.

15.21. Giả sử tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} = 30^\circ$ (h.15.35). Theo Ví dụ 15.4 thì $\hat{B} + \hat{C} < 90^\circ$ nên $\hat{C} < 60^\circ$. Gọi C' là điểm sao cho A là trung điểm của CC', khi đó hai tam giác ABC và ABC' bằng nhau theo trường hợp c-g-c. Vậy $BC = BC'$. Tam giác BCC' có $\hat{C} < \widehat{CBC'}$ nên $CC' > BC' = BC$, tức là $AC > \frac{BC}{2}$.



Hình 15.35

15.22. a) Để chứng minh rằng ba tam giác $AB'C'$, $BC'A'$, $CB'A'$ là những tam giác cân và bằng nhau (c-g-c) (h.15.36). Từ đó suy ra $A'B' = B'C' = C'A'$ do đó $A'B'C'$ là tam giác đều.



Hình 15.36

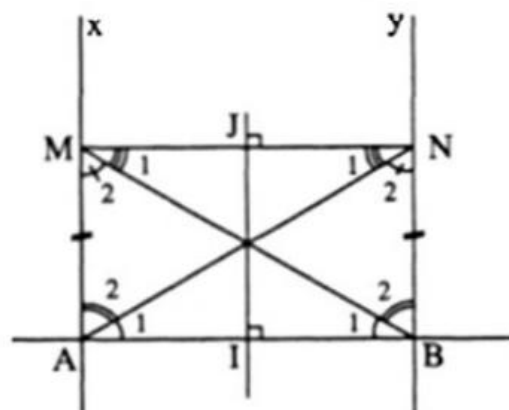
b) Xét tam giác $AB'C'$, theo tính chất góc ngoài lớn hơn tổng hai góc trong không kề với nó, ta có

$$\widehat{CB'A'} + \widehat{A'B'C'} = \widehat{CB'C'} > \widehat{B'AC'} + \widehat{AC'B'}.$$

Nhưng $\widehat{CB'A'} = \widehat{AC'B'}$ (góc ở đáy của hai tam giác cân bằng nhau $CA'B'$ và $AB'C'$).

Từ đó suy ra $\widehat{A'B'C'} > \widehat{B'AC'}$ tức là góc ở đỉnh của tam giác đều $A'B'C'$ lớn hơn góc ở đỉnh của tam giác đều ABC.

15.23. a) Hai tam giác vuông MAB và NBA bằng nhau vì có các cạnh góc vuông tương ứng bằng nhau (h.15.37), vậy $AN = BM$, $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, từ đó suy ra $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$. Hai tam giác AMN và BNM bằng nhau theo trường hợp c-g-c,



Hình 15.37

suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{BNM}$. Vì tổng ba góc trong mỗi tam giác AMB và NMB đều bé hơn 180° nên

$$90^\circ + \hat{M}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{M}_1 + \widehat{BNM} < 360^\circ.$$

Nhưng vì $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \widehat{AMN} = \widehat{BNM}$, $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ$ nên từ bất đẳng thức trên ta suy ra $180^\circ + 2\widehat{AMN} < 360^\circ$ hay $\widehat{AMN} = \widehat{BNM} < 90^\circ$.

b) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và MN, ta dễ dàng chứng minh được các tam giác IMN và JAB là những tam giác cân, vì vậy $IJ \perp MN$, $IJ \perp AB$. Hai đường thẳng MN và AB cùng vuông góc với đường thẳng IJ nên chúng không cắt nhau.

c) Ta có JN và IB cùng vuông góc với IJ nên nếu trên tia JN ta lấy điểm N' sao cho $JN' = IB$ thì theo chứng minh ở câu a) ta có $\widehat{IBN'}$ là góc nhọn, mà vì $\widehat{IBN}$ là góc vuông nên tia BN' phải nằm trong góc vuông đó, tức là điểm N' nằm giữa hai điểm J và N. Suy ra $JN > JN' = IB$, do đó $MN > AB$.

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>	
	HGD - ĐS	
<i>Lời nói đầu</i>		3
CÁC CHUYÊN ĐỀ CƠ BẢN		
Chương I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG		
<i>Chuyên đề 1. Các góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau</i>	5	91
<i>Chuyên đề 2. Hai đường thẳng song song</i>	9	94
Chương II. TAM GIÁC		
<i>Chuyên đề 3. Tổng ba góc của một tam giác</i>	16	99
<i>Chuyên đề 4. Hai tam giác bằng nhau</i>	19	102
<i>Chuyên đề 5. Tam giác cân. Tam giác đều</i>	25	109
<i>Chuyên đề 6. Tam giác vuông và định lý Pythagore</i>	31	118
Chương III. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC		
<i>Chuyên đề 7. Quan hệ giữa góc và cạnh trong tam giác. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu</i>	35	124
<i>Chuyên đề 8. Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác</i>	41	134
<i>Chuyên đề 9. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác</i>	43	137
<i>Chuyên đề 10. Tính chất ba đường phân giác của tam giác</i>	47	145
<i>Chuyên đề 11. Tính chất ba đường trung trực, ba đường cao của tam giác</i>	51	152
CÁC CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO		
<i>Chuyên đề 12. Chứng minh bằng phản chứng</i>	57	161
<i>Chuyên đề 13. Nguyên lý Dirichlet</i>	61	167
<i>Chuyên đề 14. Trò chơi và câu đố</i>	70	171
<i>Chuyên đề 15. Tiên đề về đường thẳng song song</i>	72	172

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc **NGUYỄN QUÝ THAO**

Tổ chức bản thảo

và chịu trách nhiệm nội dung : Phó Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội **PHAN KẾ THÁI**

Biên tập lần đầu và tái bản : **ĐẶNG VĂN TUYẾN**

Trình bày bìa : **LƯƠNG QUỐC HIỆP**

Sửa bản in : **ĐẶNG VĂN TUYẾN**

Thiết kế sách : **NGUYỄN THANH THUÝ**

Chế bản : **PHÒNG CHẾ BẢN CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
HÀ NỘI**

Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ TOÁN 7
TẬP HAI - HÌNH HỌC

Mã số: T7T67h3 - SBE

Số ĐKKH xuất bản: 124-2013/CXB/187-116/GD.

In 5.000 bản (QĐ: 62), khổ 17 x 24 cm.

In tại Công ty Cổ phần In & Bao bì Đồng Tháp: 212 Lê Lợi -
Phường 3 - Thị xã Sa Đéc - Tỉnh Đồng Tháp.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 03 năm 2013.