

NGÔ LONG HẬU
HOÀNG MẠNH HẠ - LÊU MAI HIỀN

TOÁN

THÔNG MINH & PHÁT TRIỂN 7



NHA XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM



5

AN PHAM UNION - UNION OF AN PHAM
VĂN VĂN UNION

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO

Tổng biên tập ĐINH VĂN VANG

Chịu trách nhiệm nội dung và bản quyền:

Nhà sách HỒNG AN

Biên tập nội dung:

NGUYỄN NGỌC ĐỨC

Trình bày bìa:

THÁI HỌC

Mã số: 02.02.990/1001.PT2013

TOÁN THÔNG MINH VÀ PHÁT TRIỂN 7

In 3000 cuốn, khổ 16 x 24cm tại Công ty Cổ phần Văn hóa Văn Lang – Tp. Hồ Chí Minh.

Đăng kí kế hoạch xuất bản số: 74- 2013/CXB/990-84/ĐHSP ngày 14/01/2013.

QĐXB số: 455/QĐ-ĐHSP, ngày 11/04/2013.

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2013.

PHẦN I. KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI TẬP

Chương I. SỐ HỮU TỈ – SỐ THỰC

I- KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ

- Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với a, b thuộc $\mathbb{Z}$ và $b \neq 0$.

- So sánh hai số hữu tỉ

Với hai số hữu tỉ bất kì x, y ta luôn có : hoặc $x = y$ hoặc $x < y$ hoặc $x > y$.

Ta có thể so sánh hai số hữu tỉ bằng cách viết chúng dưới dạng phân số rồi so sánh hai phân số đó.

* Số hữu tỉ lớn hơn không gọi là số hữu tỉ dương.

* Số hữu tỉ nhỏ hơn không gọi là số hữu tỉ âm.

Số 0 không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm.

2. Các phép toán trong $\mathbb{Q}$

Với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, m > 0$, ta có :

- Phép cộng : $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$.
- Phép trừ : $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$.
- Phép nhân : $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ($b \neq 0$ và $d \neq 0$).
- Phép chia : $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ ($b, c, d \neq 0$).
- Phép lũy thừa : Với $x, y \in \mathbb{Q}; m, n \in \mathbb{N}$
 - * $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
 - * $x^m : x^n = x^{m-n}$ ($x \neq 0, m \geq n$)
 - * $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

$$* (x.y)^n = x^n.y^n$$

$$* \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0).$$

3. Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

4. Tỷ lệ thức

• *Tỷ lệ thức* là đẳng thức của hai tỉ số. Chẳng hạn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

• Tính chất cơ bản của tỷ lệ thức

$$* \text{ Nếu } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ thì } ad = bc.$$

* Nếu $ad = bc$ thì ta có các tỷ lệ thức :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

5. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f} \quad (\text{giả thiết các tỉ số đều có nghĩa}).$$

6. Số vô tỉ. Số thực

• *Số vô tỉ* là số được viết dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Chẳng hạn $\sqrt{2} = 1,41421356237309504...$

Tập hợp số vô tỉ, kí hiệu là I .

• *Số thực*

Số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi chung là *số thực*. Tập hợp số thực được kí hiệu là $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I.$$

7. Quan hệ giữa các tập hợp $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

II- BÀI TẬP

§1. TẬP HỢP SỐ HỮU TỈ

1.1. Cho $x = \frac{15}{a-17}$ với $a \in \mathbb{Z}$. Xác định a để :

- a) x là một số hữu tỉ b) x là số hữu tỉ dương
c) x là số hữu tỉ âm d) $x = -1$
e) $x > 1$ f) $0 < x < 1$.

1.2. Tìm các phân số có tử bằng 7, biết rằng giá trị của mỗi phân số đó lớn hơn $\frac{-5}{11}$ và nhỏ hơn $\frac{-5}{13}$.

1.3. So sánh các số hữu tỉ :

- a) $\frac{-17}{23}$ và $\frac{-25}{31}$ b) $\frac{-27}{38}$ và $\frac{-125}{195}$ c) $\frac{-22}{111}$ và $\frac{-27}{134}$.

1.4. Tìm hai phân số có mẫu số bằng 5, tử số là hai số tự nhiên liên tiếp sao cho trên trục số điểm biểu diễn phân số $\frac{7}{9}$ nằm giữa các điểm biểu diễn của hai phân số phải tìm.

1.5. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{7}{15x} + \frac{9}{10y} = \frac{2}{5} - \frac{359}{30xy}$$

1.6. Cho hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ với $b, d > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

§2. CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

1.7. Thực hiện phép tính bằng cách hợp lý (nếu có thể) :

a) $\left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{33} - \frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{15}{12} + \frac{6}{11} - \frac{48}{49}\right)$

b) $1 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{2}{3} + 3 - \frac{3}{4} + 4 - \frac{1}{4} - 3 - \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{2} - 1.$

1.8. Tìm x biết :

$$a) \frac{19}{13} - \left(\frac{5}{42} - x \right) = - \left(\frac{15}{28} - \frac{19}{13} \right)$$

$$b) \left| x + \frac{5}{13} \right| - |-4,75| = -|-2,35|.$$

1.9. Tìm x, y biết :

$$a) \left| \frac{2}{7} - \frac{1}{6} + x \right| = -\frac{9}{4} - |y|$$

$$b) \left| x - \frac{7}{5} \right| + \left| y + \frac{9}{25} \right| = 0.$$

1.10. Tìm x biết :

$$a) \left| x - \frac{9}{7} \right| = \frac{1}{21}$$

$$b) \left| x + \frac{17}{2} \right| > |-8,5|$$

$$c) \frac{3}{7} < \left| x - \frac{6}{7} \right| < \frac{8}{7}$$

$$d) |x + 1| - |x^2 - 1| = 0.$$

1.11. a) Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức :

$$A = \left| x + \frac{23}{19} \right|; B = \left| x - \frac{5}{7} \right| - \frac{3}{2}.$$

b) Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức :

$$C = -\left| \frac{7}{9} - x \right|; D = 11 - \left| x - \frac{3}{7} \right|.$$

1.12. Cho 25 số, trong đó 4 số bất kì nào cũng có tổng là một số dương. Chứng minh rằng tổng của 25 số ấy là một số dương.

§3. NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

1.13. Thực hiện phép tính :

$$a) A = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{11}}{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}} + \frac{\frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}{\frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$$

$$b) B = \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$$

$$c) C = -\frac{1}{3} + \frac{0,2 - 0,375 + \frac{5}{11}}{-0,3 + \frac{9}{16} - \frac{15}{22}}$$

1.14. Tìm các số hữu tỉ x, y thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{6x - 14}{13} = \frac{5y + 9}{11} \text{ và } 3x - 2y = 19.$$

1.15. Tìm số hữu tỉ x , biết rằng :

$$a) |2x + 3| = x + 1$$

$$b) |x - 1| + |x| + |x + 1| = 5$$

$$c) \frac{x+4}{2008} + \frac{x+3}{2009} = \frac{x+2}{2010} + \frac{x+1}{2011}$$

1.16. Chứng minh rằng :

$$a) A = \frac{1.2-1}{2!} + \frac{2.3-1}{3!} + \frac{3.4-1}{4!} + \dots + \frac{99.100-1}{100!} < 2$$

$$b) B = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99}. \text{ Chứng minh } 12 < B < 13.$$

$$1.17. a) \text{ Tìm giá trị lớn nhất của : } C(x) = \frac{\frac{7}{2}(2x-3) + \frac{21}{2} - 8}{2x-3}$$

$$b) \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của : } h(x) = 3(x-5)^2 - 2|x-5| + 1.$$

1.18. Tìm các số hữu tỉ x, y, z thỏa mãn :

$$x.y = \frac{1}{2}; y.z = \frac{3}{5}; z.x = \frac{27}{10}.$$

$$1.19. \text{ Tìm } x \in \mathbb{Z} \text{ biết : } \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \dots \cdot \frac{14}{30} \cdot \frac{15}{32} = 2^x.$$

1.20. Cho 20 số, trong đó ba số bất kì có tích là một số dương. Chứng minh rằng tất cả 20 số ấy đều là số dương.

§4. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

1.21. Thực hiện các phép tính :

$$a) A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$$

$$b) B = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$$

$$\text{c) } C = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - 3^{-1}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 3^{-1}}} \quad \text{d) } D = \frac{\left[1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{-2}\right] \cdot 64}{(2 - 3)^{-2} + 16}.$$

1.22. Tìm x biết :

$$\text{a) } (3x - 5)^4 = (3x - 5)^6$$

$$\text{b) } \left[\frac{1}{3}x^3(3x - 1)^m - \frac{1}{3}x^{m+3} \right] : \frac{1}{3}x^3 = 0 \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\text{c) } \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^6$$

$$\text{d) } (2x^2 - 5)^{2n} = (-3)^{2n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1.23. Tìm x và y biết :

$$\text{a) } (x - 13 + y)^2 + (x - 6 - y)^2 = 0$$

$$\text{b) } 2x^{2k} + \left(y - \frac{2}{3}\right)^{4k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{c) } \frac{7}{3}x + \left(-\frac{11}{12}\right)^2 = \left(\frac{29}{12}\right)^2 - x = y^2.$$

1.24. Chứng minh rằng :

$$\text{a) } C = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{99}} < \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } D = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1.$$

1.25. So sánh A và B :

$$A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{50} \text{ và } B = 2^{51}.$$

§5. TỈ LỆ THỨC VÀ TÍNH CHẤT CỦA TỈ LỆ THỨC.

TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

1.26. Tìm x trong các tỉ lệ thức sau :

$$\text{a) } 0,2 : 1\frac{1}{5} = \frac{2}{3} : (6x + 7)$$

$$\text{b) } (2x - 1) : 1\frac{3}{7} = 1\frac{13}{15} : 1\frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \frac{37 - x}{x + 13} = \frac{3}{7}$$

$$\text{d) } \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{x - 2}{x + 3}$$

1.27.

a) Cho tỉ lệ thức : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Chứng minh rằng : $(a + c)(2b + 3d) = (2a + 3c)(b + d)$.

b) Cho tỉ lệ thức : $\frac{a + c}{b + d} = \frac{2a + 3c}{2b + 3d}$ ($b, d \neq 0$).

Chứng minh rằng : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

c) Cho tỉ lệ thức : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng : $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$.

1.28. Tìm x, y, z biết :

a) $2x = 3y$; $5y = 7z$ và $3x + 5z - 7y = 30$

b) $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3}$ và $x^2 + y^2 - z^2 = 585$

c) $\frac{12x - 15y}{7} = \frac{20z - 12x}{9} = \frac{15y - 20z}{11}$ và $x + y + z = 48$

d) $\frac{y + z + 2}{x} = \frac{x + z + 3}{y} = \frac{x + y - 5}{z} = \frac{1}{x + y + z}$.

1.29. Trong đợt thi đua chào mừng ngày Nhà giáo Việt Nam 20/11, tổ 1, tổ 2, tổ 3 của lớp 7C đạt số điểm tỉ lệ với 3; 4; 2. Biết rằng 5 lần bình phương số điểm của tổ 1 cộng với 7 lần bình phương số điểm của tổ 3 nhiều hơn bình phương số điểm của tổ 2 là 1282500 điểm. Tính số điểm mỗi tổ đạt được.

1.30. Tìm ba phân số có tổng bằng $1\frac{37}{44}$, biết các tử của chúng tỉ lệ với 4 : 3 : 5, các mẫu của chúng tỉ lệ với 1 : 2 : 4.

1.31. Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{2009} = \frac{b}{2011} = \frac{c}{2013}$.

Chứng minh rằng : $\frac{(a - c)^2}{4} = (a - b)(b - c)$.

1.32.

a) Tìm x, y biết : $\frac{x^3 + y^3}{6} = \frac{x^3 - 2y^3}{4}$ và $x^6 \cdot y^6 = 64$.

b) Tìm x, y, z biết : $\frac{3}{x - 1} = \frac{4}{y - 2} = \frac{5}{z - 3}$ và $x \cdot y \cdot z = 192$.

1.33. Một ô tô đi từ A đến B trong thời gian dự định. Sau khi đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường thì ô tô tăng vận tốc lên 20%. Do đó đến B sớm hơn được 10 phút. Tính thời gian ô tô đi từ A đến B.

(Trích đề thi HSG lớp 7 Hà Nội, 1976)

1.34. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$ thì $\frac{a}{e} = \left(\frac{a-b+c-d}{b-c+d-e} \right)$, ($a, b, c, d, e \neq 0$).

1.35. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $\left(\frac{a-b}{c-d} \right)^4 = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4}$.

(Trích đề thi Toán cấp 2 - 1960)

§6. SỐ THẬP PHẦN HỮU HẠN, SỐ THẬP PHẦN VÔ HẠN TUẦN HOÀN

1.36. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân :

$$\frac{-7}{8}, \frac{4}{125}, \frac{3}{40}, \frac{8}{15}, \frac{-5}{9}, \frac{15}{14}.$$

1.37. Viết các số thập phân sau dưới dạng số tối giản :

$$0,(7); 1,(21); -0,(123); 1,11(23); 1,1123.$$

1.38. Hãy so sánh các số thập phân sau : $0,(32); 0,3(23); 0,(3232).$

1.39. Thực hiện các phép tính :

$$a) 1,(6).2,(3) : 0,(7)$$

$$b) 0,2777... + 0,3555...$$

$$c) 1,5454... - 0,8181... - 0,75$$

$$d) 1 : 10,2(6) : 0,41(6).0,42(7).$$

1.40. Thay các chữ cái bởi chữ số thích hợp.

$$a) 1 : 0,\overline{abc} = a + b + c$$

$$b) 1 : 0,0\overline{abc} = a + b + c + d$$

$$c) \overline{0,y(x)} - \overline{0,y(x)} = 8.0,0(1), \text{ biết } x + y = 9.$$

1.41. Tìm một phân số dương tối giản nhỏ hơn 1, biết rằng khi chia tử cho mẫu ta được một số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn chu kỳ có 3 chữ số và phân số này bằng lập phương của một phân số khác.

- 1.42. Tìm các phân số tối giản có mẫu khác 1, biết rằng tích của tử và mẫu bằng 420 và phân số này có thể viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

§7. LÀM TRÒN SỐ. SỐ YÔ TỈ KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI

- 1.43. Viết các hỗn số sau đây dưới dạng số thập phân gần đúng, chính xác đến chữ số thập phân thứ hai.

a) $5\frac{2}{7}$

b) $2\frac{2}{3}$

c) $3\frac{1}{6}$

- 1.44. Tính giá trị gần đúng, sát số đúng nhất của chiều dài sân trường với kết quả của 5 lần đo là :

40,27m; 40,28m; 40,23m; 40,24m; 40,25m

(chính xác đến chữ số thập phân thứ hai).

- 1.45. Hết học kỳ I, điểm Toán của bạn Dũng như sau :

– Điểm hệ số 1 : 8, 7, 9, 6

– Điểm hệ số 2 : 6, 9, 7

– Điểm hệ số 3 (điểm học kỳ) : 8.

Em hãy tính điểm trung bình môn Toán học kỳ I của bạn Dũng (chính xác đến chữ số thập phân thứ nhất).

- 1.46. Tính giá trị của biểu thức :

a) $(\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{5^2} - \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{3^2}) : \sqrt{\frac{1}{4}}$

b) $\sqrt{0,36} + \sqrt{0,49} - \frac{5}{7} : \frac{2}{5}$

c) $\left(\sqrt{\frac{4}{9}} - \sqrt{\frac{25}{36}}\right) : \sqrt{\frac{0,01}{1,21}}$

d) $(2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{0,5})^2 - \left(\frac{1}{5} \cdot \sqrt{125}\right)^2$

- 1.47. Cho biểu thức : $A = 2013 + \sqrt{2012 - x}$.

a) Với giá trị nào của x thì A có nghĩa.

b) Với giá trị nào của x thì A đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

1.48. Trong hai số sau, số nào lớn hơn :

- a) $-\sqrt{15}$ và $-\sqrt{20}$ b) 7 và $\sqrt{(-8)^2}$ c) $\sqrt{25-9}$ và $\sqrt{25}-\sqrt{9}$.

§8. SỐ THỰC

1.49. Tìm x biết :

- a) $3,4x + (-1,4)x + 3,5 = -5,5$
 b) $\frac{3}{5}x + 0,4x - \left(\frac{9}{25} - 2,18\right) : \left(3\frac{4}{5} + 0,2\right) = 0$
 c) $x + 1,44 : \frac{12}{13} = \frac{1}{4} + 3,5 \cdot \frac{4}{5}$
 d) $\frac{2\frac{2}{3}}{0,03} = \frac{1\frac{7}{9}}{x}$

1.50. Tính giá trị của các biểu thức :

- a) $A = \left(0,645 : 0,3 - 1\frac{17}{50}\right) : \left(4 : 6,25 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdot 1,96\right) - 11,125$
 b) $B = 11,26 - 5,13 : \left[5\frac{5}{28} - 1\frac{8}{9} \cdot 1,25 + 1\frac{16}{63}\right]$
 c) $C = \left\{[(2\sqrt{2})^2 : 2,4] \cdot [5,25 : (\sqrt{7})^2]\right\} : \left\{\left[2\frac{1}{2} : \frac{(\sqrt{5})^2}{7}\right] : \left[2^2 : \frac{(2\sqrt{2})^2}{\sqrt{81}}\right]\right\}$
 d) $D = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{49}} + \frac{1}{49} - \frac{1}{(7\sqrt{7})^2}}{\frac{\sqrt{64}}{2} - \frac{4}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 - \frac{4}{343}}$

1.51. Tìm các số x, y, z thỏa mãn :

$$\sqrt{(x-3\sqrt{5})^2} + \sqrt{(y+3\sqrt{5})^2} + |x+y+z| = 0$$

1.52. So sánh các số thực :

- a) $-0,636363\dots$ và $-\frac{7}{11}$ b) $8\frac{5}{13}$ và $8,415415415\dots$
 c) $0,(237)$ và $0,237$ d) $[0,(5)]^2$ và $(0,5)^2$
 e) $0,(5) + 0,(2)$ và $0,5 + 0,2$.

Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

I- KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đại lượng tỉ lệ thuận

- Định nghĩa : Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = kx$ (k là hằng số, $k \neq 0$) thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo tỉ số k .
- Tính chất : Nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận thì :
 - * Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi.
 - * Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

Chẳng hạn, $y = kx$ thì $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = k$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_5}{x_6} = \frac{y_5}{y_6}, \dots$$

2. Đại lượng tỉ lệ nghịch

- Định nghĩa: Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$ (a là hằng số, $a \neq 0$) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo tỉ lệ a .
- Tính chất
Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau thì :
 - * Tích hai giá trị tương ứng của chúng không thay đổi và bằng hệ số tỉ lệ.
 - * Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

Chẳng hạn $y = \frac{a}{x}$ thì $x_1y_1 = x_2y_2 = \dots = a$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}, \quad \frac{x_6}{x_7} = \frac{y_7}{y_6}, \dots$$

3. Hàm số

- Khái niệm hàm số

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho ứng với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số.

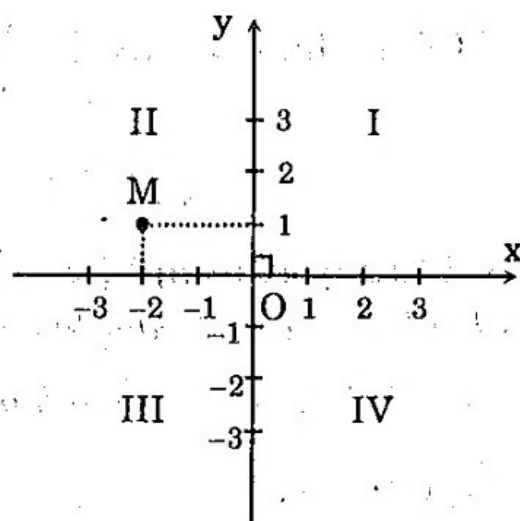
• **Chú ý**

- * Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y gọi là *hàm hằng*.
- * Hàm số có thể cho bằng bảng hay biểu đồ, đồ thị, cho bằng công thức. Khi hàm số cho bằng công thức thì biến số x chỉ nhận những giá trị làm cho công thức có nghĩa, tập hợp những giá trị đó gọi là *tập xác định* của hàm số.
- * Khi y là hàm số của biến x thì có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$... Chẳng hạn $y = 3x + 1$, ta còn viết $y = f(x) = 3x + 1$. Khi $x = 0$ thì $y = 1$, khi $x = 1$ thì $y = 4$. Ta viết $f(0) = 1$; $f(1) = 4$.

4. Mặt phẳng tọa độ

• **Mặt phẳng tọa độ**

Trên mặt phẳng vẽ hai trục số Ox và Oy vuông góc với nhau tại gốc mỗi trục số O (h.1). Khi đó có hệ trục Oxy . Các trục Ox , Oy gọi là trục tọa độ. Trục Ox (nằm ngang) gọi là trục hoành, trục Oy (thẳng đứng) gọi là trục tung, O gọi là gốc tọa độ. Hai trục tọa độ chia mặt phẳng tọa độ thành 4 góc I, II, III, IV (h.1).



Hình 1

• **Tọa độ của một điểm trên mặt phẳng tọa độ**

Cho điểm M bất kì trên mặt phẳng tọa độ. Từ M kẻ các đường thẳng vuông góc với hai trục tọa độ. Các đường thẳng vuông góc này cắt trục hoành tại điểm -2 và cắt trục tung tại điểm 1 . Khi đó cặp số $(-2; 1)$ gọi là tọa độ của điểm M và kí hiệu là $M = (-2; 1)$ hay $M(-2; 1)$; -2 gọi là hoành độ của điểm M , 1 gọi là tung độ của điểm M .

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy :

Mỗi điểm I xác định một cặp số $(x_0; y_0)$ và ngược lại một cặp số $(x_0; y_0)$ xác định một điểm I .

5. Đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$)

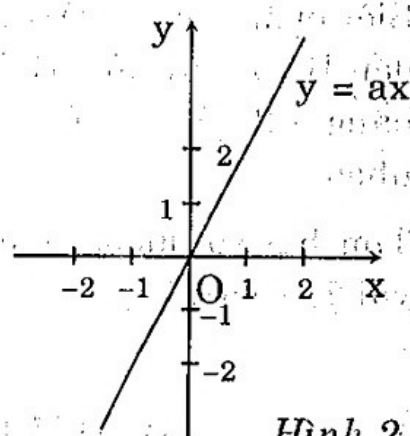
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

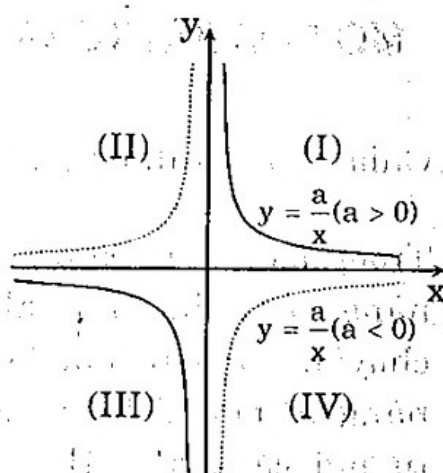
- Đồ thị hàm số $y = ax$

Đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ. Muốn vẽ đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) ta chỉ cần xác định điểm $M(1; a)$ và đường thẳng OM là đồ thị hàm số trên (h.2).

- Đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) là tập hợp điểm nằm trên đường cong gọi là hyperbol gồm hai nhánh nằm trong góc I và III hoặc II và IV (h.3).



Hình 2



Hình 3

II- BÀI TẬP

§1. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN.

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

- 2.1. Chia số -460 thành các số tỉ lệ thuận với $\frac{1}{3}$; $0,4$; $\frac{1}{7}$.
- 2.2. Quãng đường AB dài $31,5\text{km}$. An đi từ A đến B, Bình đi từ B đến A. Vận tốc của An so với Bình là $2 : 3$. Đến lúc gặp nhau, thời gian đã đi của An so với Bình là $3 : 4$. Tính quãng đường mỗi người đã đi đến lúc gặp nhau.
- 2.3. Tổng kết cuối năm học của một trường THCS có số học sinh giỏi thuộc các khối 6; 7; 8; 9 tỉ lệ với $1,5$; $1,1$; $1,3$; $1,2$ và khối 8 nhiều hơn khối 9 là 3 học sinh giỏi. Tính số học sinh giỏi của toàn trường.

- 2.4. Biết quãng đường AB dài 151,8km. Cùng một lúc một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 34,5 km/h; một ô tô đi từ B đến A với vận tốc bằng 1,2 vận tốc ô tô đi từ A. Hỏi sau bao lâu thì hai ô tô gặp nhau?
- 2.5. Tìm hai số dương, biết : Tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ thuận với 7, 1 và 24.

§2. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

- 2.6. Chia 786 thành ba phần tỉ lệ nghịch với các số : 0,2; 0,8; $3\frac{1}{3}$.
- 2.7. Trong một ngày ba đội xe tải cùng vận chuyển được tất cả 290 tấn hàng từ ba địa điểm khác nhau về nhập kho. Đội I có 5 xe phải chuyển hàng từ nơi cách kho 3km. Đội II có 4 xe phải chuyển hàng từ nơi cách kho 2km và đội III có 6 xe phải chuyển hàng từ nơi cách kho 1km. Hỏi mỗi đội xe chuyển được bao nhiêu hàng. Biết rằng số hàng mỗi đội xe chuyển được tỉ lệ thuận với số xe và tỉ lệ nghịch với khoảng cách từ nơi nhận hàng đến kho.
- 2.8. Một ô tô đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Sau khi đi được $\frac{1}{4}$ quãng đường với vận tốc dự định, ô tô tăng vận tốc 15% so với vận tốc ban đầu, do đó đến B sớm hơn chỉ định 10 phút. Tính thời gian ô tô dự định đi từ A đến B.
- 2.9. Có ba xe ủi đất đã san bằng được 50ha. Số ngày làm việc của các xe tỉ lệ theo 4 : 5 : 6. Số giờ làm việc mỗi ngày tỉ lệ theo 7 : 8 : 9, còn công suất của các xe tỉ lệ nghịch với 6; 5; 4. Hỏi mỗi xe san bằng được bao nhiêu ha đất.
- 2.10. Ba đường cao của tam giác ABC có độ dài bằng 4, 12, x. Biết rằng x là một số tự nhiên. Tìm x (biết mỗi cạnh của tam giác nhỏ hơn tổng hai cạnh kia và lớn hơn trị tuyệt đối hiệu của chúng).

§3. HÀM SỐ. MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

2.11. Đồ thị hàm số $y = ax$ đi qua điểm $A(-5; 6)$.

a) Xác định hệ số a .

b) Biết điểm $B(x_0; y_0)$ là một điểm thuộc đồ thị hàm số.

$$\text{Tính } \frac{x_0 - 5}{y_0 + 6}.$$

2.12. Cho $f(x) = \frac{4}{x}$; $g(x) = -3x$; $h(x) = x^2$; $k(x) = \overline{x^3}$.

a) Tính $f(-1)$; $g\left(\frac{1}{2}\right)$; $h(a)$; $k(2a)$.

b) Tính $f(-2) + g(3) + h(0)$.

c) Tính x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 biết $f(x_1) = \frac{1}{2}$; $g(x_2) = 3$; $h(x_3) = 9$; $k(x_4) = -8$.

d) Chứng minh hàm số $f(x)$ có tính chất $f(-x) = -f(x)$.

Trong các hàm số còn lại. Hàm số nào cũng có tính chất tương tự như trên?

2.13. Cho hàm số $y = f(x) = 2012x$.

a) Tính $f(0)$; $f(-1)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Chứng minh $f(a + b) = f(a) + f(b)$.

c) Tìm x sao cho $f(x) = x^2$.

2.14. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

a) Tìm những giá trị của x để hàm số xác định.

b) Tìm x sao cho $f(x) = 0$.

c) Với giá trị nào của x thì $f(x) > 0$.

2.15. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 7x + 12$ và $g(x) = x^2 - 12$.

a) Tìm x sao cho $f(x) = 0$; $g(x) = 4$.

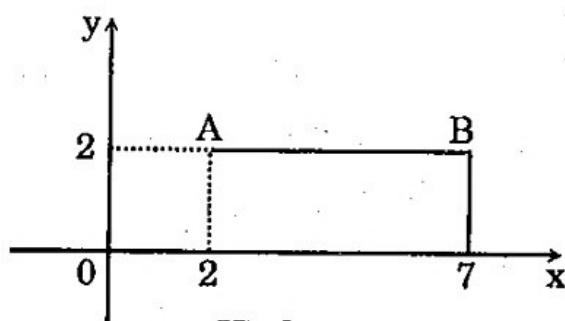
b) Với giá trị nào của x thì $f(x) - g(x) = 0$.

2.16. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là hai đoạn thẳng OA và AB (hình 4).

a) Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức nào.

b) Trong mặt phẳng Oxy nói trên vẽ đồ thị của hàm số $y = g(x) = \frac{1}{3}x$.

c) Dùng đồ thị trên hãy tìm với giá trị nào của x thì $f(x) = g(x)$.



Hình 4

2.17. Cho hàm số $y = f(x) = -5x$. Chứng minh rằng :

a) Với $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

b) $f(x_1 + 4x_2) = f(x_1) + 4f(x_2)$.

c) $-f(x) = f(-x)$.

2.18. Giả sử $\frac{x}{y} = 4$, $xy = 9$. Ngoài ra $x \geq 0$. Khi đó $(x; y)$ bằng :

- A. (4; 1) B. (8; 2) C. (3; 3) D. (9; 1) E. $\left(6; \frac{3}{2}\right)$.

(Thi Toán VWO của Bỉ)

2.19. Hàm số f được cho như sau :

Cho ứng với số tự nhiên có hai chữ số là tổng các chữ số của nó.

a) Tìm tập xác định của hàm số f .

b) Tính $f(99)$, $f(55)$, $f(32)$.

c) Cho $f(x) = 3$. Tìm x .

§4. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$ ($a \neq 0$)

2.20. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + b$:

a) Xác định các hệ số a , b biết $f(0) = -3$; $f(1) = -1$.

b) Tính các giá trị của x khi $y = 5$; $y = -2,5$.

c) Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc đồ thị hàm số : A(16; -35), B(-2; 5), C $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{25}{9}\right)$.

2.21. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x + 5$ và đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 3$ cắt nhau tại hai điểm M. Tìm tọa độ của điểm M.

2.22. Cho các hàm số f và g như sau : $f(x) = \begin{cases} x & \text{với } x \geq 0 \\ -x & \text{với } x < 0 \end{cases}$; $g(x) = 1$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Quy tắc f nói trên còn có thể được biểu diễn bởi công thức nào ?

c) Dựa vào đồ thị, tìm các giá trị của x sao cho $|x| < 1$.

2.23. Tính diện tích tam giác ABC, biết rằng A(-1; 2), B(2; -3), C(4; 3).

2.24. Vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = 2|x|$

b) $y = -\frac{|x|}{x}$

c) $y = \frac{2}{3}(2x + |x|)$

d) $y = \frac{1}{2}(|x| - x)$.

2.25. Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và $y = 1$ trên cùng hệ trục tọa độ xOy,

dựa vào đồ thị tìm các giá trị của x sao cho $\frac{1}{x} < 1$.

Chương III. THỐNG KÊ

I- KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Thu thập số liệu thống kê, tần số

- *Thu thập số liệu, bảng số liệu thống kê ban đầu*

Việc làm của người điều tra là thu thập số liệu về vấn đề, hiện tượng được quan tâm tìm hiểu. Các số liệu đó được ghi vào một bảng gọi là *bảng số liệu thống kê ban đầu*.

- *Dấu hiệu*

- * Một vấn đề hay một hiện tượng được người điều tra quan tâm, chẳng hạn, chiều cao cân nặng của học sinh của một lớp học... gọi là dấu hiệu, dấu hiệu được kí hiệu là X, Y, ... (chữ in hoa)

Khi người ta quan tâm về sự phát triển dân số của các thôn trong một xã thì mỗi thôn là một đơn vị điều tra.

- * Ứng với mỗi đơn vị điều tra có một số liệu thì số liệu đó gọi là *một giá trị của dấu hiệu*.

Số các giá trị (không nhất thiết khác nhau) của dấu hiệu đúng bằng số các đơn vị điều tra (thường được kí hiệu là N).

- *Tần số của mỗi giá trị*

- * Mỗi giá trị có thể xuất hiện nhiều lần trong dãy giá trị của dấu hiệu. *Số lần xuất hiện* của một giá trị trong dãy gọi là *tần số* của giá trị đó.

Giá trị của dấu hiệu kí hiệu là x, tần số của giá trị kí hiệu là n.

- * *Mốt* của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất. Mốt kí hiệu là M_0 .

Chẳng hạn, giá thành sản phẩm (tính theo 1000đ) của 20 cơ sở sản xuất được cho như sau :

15	25	30	25	20	25	30	25	30	15
20	35	20	35	30	15	25	25	20	25

Bảng 1

- * Trong ví dụ này bảng 1 gọi là bảng số liệu thống kê ban đầu.
- * Dấu hiệu là giá thành phẩm nào đó mà người điều tra cần tìm hiểu.
- * Số các giá trị là 20 và các giá trị khác nhau là 5.

* Số các giá trị khác nhau là 15, 20, 25, 30, 35 và tần số tương ứng là 3, 4, 7, 4, 2.

* Giá trị 25 có tần số là 7, nên $M_0 = 25$.

2. Bảng tần số

- *Lập bảng tần số*

Vẽ một hình chữ nhật gồm 2 dòng : Ở dòng đầu ghi các giá trị khác nhau của dấu hiệu theo thứ tự tăng dần, dòng thứ hai ghi tần số tương ứng.

Từ bảng 1 ta có bảng tần số sau :

Giá trị (x)	15	20	25	30	35
Tần số (n)	3	4	7	4	2

Bảng 2

- Ta có thể chuyển bảng tần số dạng ngang sang dạng dọc (chuyển dòng thành cột)

Giá trị (x)	Tần số (n)
15	3
20	4
25	7
30	4
35	2

Bảng 3

3. Biểu đồ có ba loại : Biểu đồ đoạn thẳng, biểu đồ hình chữ nhật, biểu đồ hình quạt.

- *Biểu đồ đoạn thẳng*

Dựng biểu đồ đoạn thẳng theo các bước :

- * Dựng hệ trục tọa độ, trục hoành biểu diễn các giá trị x, trục tung biểu diễn tần số n (độ dài trên hai trục có thể khác nhau).
- * Xác định các điểm gồm cặp số, giá trị và tần số của nó (x_i, n_i) .
- * Các đoạn thẳng nối mỗi điểm đó với điểm nằm trên trục hoành có cùng hoành độ gọi là biểu đồ đoạn thẳng.

- *Biểu đồ hình chữ nhật*

Thay các đoạn thẳng trong biểu đồ đoạn thẳng bằng các hình chữ nhật. Đôi khi các hình chữ nhật được vẽ sát nhau để dễ so sánh.

- **Biểu đồ hình quạt**

Là một hình tròn được chia ra thành những quạt tròn mà góc ở tâm tỉ lệ với *tần suất* ($f = \frac{n}{N}$, f là tần suất, N là số giá trị, n là tần số của mỗi giá trị. Người ta thường biểu diễn f dưới dạng tỉ số phần trăm).

4. Số trung bình cộng

- Công thức tính số trung bình cộng (trung bình cộng kí hiệu là $\bar{X}$)

$$\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{N}$$

Trong đó $x_1, x_2, \dots, x_k$ là k giá trị khác nhau của dấu hiệu
 $n_1, n_2, \dots, n_k$ là k tần số tương ứng
 N là số các giá trị ($N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$).

- **Ý nghĩa**

Số trung bình cộng thường được dùng làm "đại diện" cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại.

Chú ý : Khi các giá trị của dấu hiệu có sự chênh lệch lớn thì không nên lấy số trung bình cộng là "đại diện" cho dấu hiệu đó.

Số trung bình cộng có thể không thuộc dãy giá trị của dấu hiệu.

II. BÀI TẬP

§1. THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ. BẢNG TẦN SỐ CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU. BIỂU ĐỒ

3.1. Bài thi môn Toán của lớp 8A trường trung học cơ sở được cho bởi bảng sau :

7,5; 5; 5; 8; 7; 4,5; 6,5; 6,5; 8; 8; 7; 8,5
6; 5; 6,5; 8; 9; 5,5; 6; 4,5; 6; 7; 8; 6; 5
7,5; 7; 6; 8; 7; 6,5

a) Dấu hiệu cần quan tâm là gì ? Và dấu hiệu đó có tất cả bao nhiêu giá trị.

- b) Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong dãy giá trị của dấu hiệu đó.
- c) Lập bảng "tần số" và bảng "tần suất" của dấu hiệu.
- d) Hãy lập biểu đồ đoạn thẳng.

3.2. Tổng số điểm 4 môn thi của các học sinh trong một phòng thi được cho bởi bảng sau :

32	30	22	30	30	22	31	35
35	19	28	22	30	39	32	30
30	30	31	28	35	30	22	28

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu?
- b) Lập bảng tần số.
- c) Từ bảng tần số, hãy biểu diễn bằng biểu đồ hình chữ nhật.
- 3.3.** Khi chơi cá ngựa, thay vì gieo một con súc sắc, ta gieo cả hai con súc sắc cùng một lúc thì điểm thấp nhất là 2, cao nhất là 12. Các điểm khác là 3, 4, 5, ..., 11. Hãy lập bảng "tần số" về khả năng xuất hiện mỗi loại điểm nói trên. Tính tần suất của mỗi loại điểm đó.

§2. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. MỐT

3.4. Số cơn bão hàng năm đổ bộ vào lãnh thổ Việt Nam trong 20 năm cuối cùng của thế kỷ XX được ghi lại trong bảng sau :

3	3	6	6	3	5	4	3	9	8
2	4	3	4	3	4	3	5	2	2

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ?
- b) Lập bảng "tần số" và tính xem trong vòng 20 năm, mỗi năm trung bình có bao nhiêu cơn bão đổ bộ vào nước ta. Tìm mốt.
- c) Lập biểu đồ đoạn thẳng dựa vào bảng tần số nói trên.
- 3.5.** Người ta đếm số hạt thóc trên mỗi bông lúa lấy từ khu trồng thí nghiệm, kết quả ghi trong bảng sau :

102	175	127	185	181	246	180	216
165	184	170	132	143	188	170	232
150	159	235	105	190	218	153	123

a) Dấu hiệu ở đây là gì ?

b) Lập bảng "tần số ghép lớp" và tính trung bình cộng (chia các lớp : trên 100 – 120; trên 120 – 140; trên 140 – 160...)

3.6. Cho bảng "tần số" các giá trị của dấu hiệu X cho bảng sau :

Giá trị (x)	Tần số (n)
x_1	n_1
x_2	n_2
x_3	n_3
...	...
x_k	n_k

a) Tính số trung bình cộng.

b) Nếu mỗi giá trị của dấu hiệu đều tăng lên 2 lần thì số trung bình cộng thay đổi như thế nào ?

c) Nếu mỗi giá trị của dấu hiệu tăng thêm 5 đơn vị thì số trung bình cộng thay đổi như thế nào ?

3.7. Trọng lượng của 40 học sinh lớp 7 được ghi trong bảng sau :

Trọng lượng (xếp theo khoảng)	Tần số (số học sinh)
33 – 35	8
36 – 38	10
39 – 41	12
42 – 44	7
45	2
46	1

a) Bảng này có gì khác so với những bảng "tần số" đã biết ?

b) Ước tính số trung bình cộng trong trường hợp này.

Chương IV. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

I- KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Biểu thức đại số

- a) • Một biểu thức gồm các số và các chữ (đại diện cho các số) và các phép toán (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa) trên các số và các chữ gọi là *biểu thức đại số*.
- Các chữ (đại diện cho các số thuộc một tập hợp số nào đó) gọi là *biến số*. Các chữ biểu thị cho một số xác định gọi là *hằng số*.
 - Biểu thức đại số không chứa biến ở mẫu gọi là *biểu thức nguyên*. Biểu thức có chứa ở mẫu gọi là *phân thức*.

b) Giá trị của một biểu thức đại số

- Khi thay các biến của một biểu thức đại số bằng những số đã cho rồi thực hiện các phép toán đã chỉ ra trong biểu thức ấy (nếu có thể) ta được một kết quả bằng số gọi là *giá trị của biểu thức đại số* tại những giá trị đã cho của các biến.
- Một biểu thức nguyên xác định với mọi giá trị của biến.

c) Biểu thức bằng nhau

Hai biểu thức đại số có cùng một giá trị với mọi giá trị của biến lấy trên những tập hợp số nào đó gọi là *hai biểu thức đại số bằng nhau trên tập hợp số đó*.

2. Đơn thức

- a) *Đơn thức* là biểu thức đại số gồm một số hoặc một biến hoặc một tích của các số và các biến.
- b) *Đơn thức thu gọn* là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương.
- c) *Bậc của đơn thức*
- Bậc của đơn thức một biến là *số mũ* của biến đó trong dạng thu gọn của đơn thức.
 - Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là *tổng số mũ* của tất cả các biến đó trong dạng thu gọn của đơn thức.
 - Số thực khác 0 có bậc 0, còn số 0 không có bậc.

d) *Nhân hai đơn thức.* Để nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các biến với nhau.

e) *Đơn thức đồng dạng – Cộng, trừ đơn thức đồng dạng*

- *Đơn thức đồng dạng*

Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.

- *Cộng, trừ đơn thức đồng dạng*

Muốn cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau giữ nguyên phần biến.

3. Đa thức

a) *Đa thức* là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

b) *Thu gọn đa thức.* Một đa thức có những đơn thức đồng dạng thực hiện phép cộng và trừ các đơn thức đồng dạng, ta được một đa thức không còn hạng tử nào đồng dạng gọi là đa thức thu gọn của đa thức đã cho.

c) *Bậc của đa thức* là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

d) *Cộng, trừ đa thức*

Muốn cộng (hay trừ) hai đa thức ta làm như sau :

- Viết liên tiếp các hạng tử của hai đa thức cùng với dấu của chúng.
- Cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng (nếu có). Trong quá trình thực hiện các phép toán cộng, trừ có thể sử dụng tính chất giao hoán, kết hợp.

e) *Đa thức một biến*

- Đa thức một biến là đa thức của cùng một biến.
- Mỗi một số coi như một đa thức một biến.
- Để chỉ A là đa thức một biến x, kí hiệu là $A(x)$. Chẳng hạn, $A(x) = 5x^2 + 6x - 11$

$A(1) = 5(1)^2 + 6(1) - 11 = 0$, $A(1)$ gọi là giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = 1$

- Bậc của đa thức một biến (khác đa thức 0 và đã thu gọn) là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó.
Đa thức $A(x)$ nêu trên có bậc 2.
- Người ta thường sắp xếp các hạng tử của đa thức một biến theo lũy thừa tăng hay giảm dần của biến.
- Hệ số. Trong đa thức $A(x)$ đã cho thì 5 là hệ số của lũy thừa bậc 2 (bậc của đa thức) nên gọi 5 là hệ số cao nhất.

f) *Cộng, trừ đa thức một biến*

- Cộng, trừ đa thức một biến như cộng, trừ đa thức.
- Sắp xếp các đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến và đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột rồi đặt phép tính như cộng, trừ các số.

g) *Nghiệm của đa thức một biến*

- Nếu $x = a$ mà đa thức $f(x)$ có giá trị bằng 0 thì $x = a$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.
- Một đa thức (khác đa thức 0) có thể có một nghiệm, hai nghiệm... hoặc vô nghiệm.

Người ta đã chứng minh được số nghiệm của một đa thức (khác đa thức 0) không vượt quá số bậc của nó.

- Để tìm nghiệm một đa thức được dễ dàng hơn ta thừa nhận định lý sau :

Đa thức $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ có hệ số nguyên có nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q} \Leftrightarrow a_n : p$ và $a_0 : q$.

II- BÀI TẬP

§1. GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

4.1. Tính giá trị của các biểu thức :

a) $A = 2a^2 - 4|a| + 3a - 1$. Tại $a = \frac{2}{3}$; $a = -2$.

b) $B = 2x^2 - 3xy - 6y^2$. Tại $|x| = \frac{1}{2}$; $|y| = \frac{2}{3}$.

$$c) C = \frac{2a - 5b}{a - 3b} \text{ với } \frac{a}{b} = \frac{3}{4}.$$

$$d) D = \frac{3a - b}{2a + 7} + \frac{3b - a}{2b - 7}. \text{ Với } a - b = 7; a \neq -3,5; b \neq 3,5.$$

4.2. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

$$a) (2x + 1)^4 - 3$$

$$b) (x^2 - 9)^2 + |y - 2| + 10$$

$$c) (x + 2)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 - 8.$$

4.3. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức :

$$a) \frac{3}{(x - 2)^2 + 5}$$

$$b) -10 - (x - 3)^2 - |y - 5|$$

$$c) \frac{1}{2x^2 + 5}.$$

4.4. Cho biểu thức $A = \frac{8 - x}{x - 3}$ ($x \in \mathbb{Z}$). Tìm các giá trị nguyên của x để

a) A có giá trị nguyên b) A có giá trị nhỏ nhất.

4.5. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ với mọi giá trị của x . Chứng minh rằng : $a = b = c = 0$.

§2. ĐƠN THỨC. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

4.6. Thu gọn các biểu thức :

$$a) 2^{n+3} + 2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n$$

$$b) 90 \cdot 10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}$$

$$c) 2,5 \cdot 5^{n-3} \cdot 10 + 5^n - 6 \cdot 5^{n-1}.$$

4.7. Tính tích các đơn thức rồi cho biết hệ số và bậc của đơn thức (a, b, c là các hằng số).

$$a) \left[-\frac{1}{2}(a - 1)x^3y^4z^2 \right]^5$$

$$b) (a^5b^2xy^2z^{n-1}) \cdot (-b^3cx^4z^{7-n})$$

$$c) \left(-\frac{3}{5}a^4x^2y \right) \cdot \left(-\frac{5}{7}ax^5y^3z \right)^3.$$

4.8. Thu gọn các đơn thức trong biểu thức đại số.

$$a) A = \frac{7}{9}x^3y^2 \cdot \left(\frac{6}{11}axy^3\right) + (-5bx^2y^4) \cdot \left(-\frac{1}{2}axz\right) + ax(x^2y)^3$$

$$b) B = \frac{(2x^4y^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}x^2y\right) + (8x^{n-7}) \cdot (-2x^{7-n})}{15x^3y^2 \cdot (0,2ax^2y^2z^2)} \text{ với } a, x, y, z \neq 0.$$

4.9. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì :

$$a) 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n \text{ chia hết cho } 10$$

$$b) 8 \cdot 2^n + 2^{n+1} \text{ có tận cùng bằng chữ số } 0.$$

4.10. Tìm các số a, b, c biết rằng : $(-2a^2b^3)^{10} + (3b^2c^4)^{15} = 0$.

§3. ĐA THỨC. CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC

4.11. Cho đa thức $A = 2x^2 + |7x - 1| - (5 - x + 2x^2)$.

a) Thu gọn A

b) Tìm x để $A = 3$.

4.12. Tính giá trị của các đa thức sau biết $x - y = 0$.

$$a) M = 7x - 7y + 4ax - 4ay - 5$$

$$b) N = x(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2) + 3.$$

4.13. Rút gọn các biểu thức :

$$a) M + N - P \text{ với } M = 2a^2 - 3a + 1; N = 5a^2 + a; P = a^2 - 4$$

$$b) 2y - x - \{2x - y - [y + 3x - (5y - x)]\}. \text{ Với } x = a^2 + 2ab + b^2 \\ y = a^2 - 2ab + b^2.$$

4.14. a) Cho $A = 3x(x - y)$ và $B = y^2 - x^2$. Biết $x - y$ chia hết cho 7. Chứng minh $A - B$ chia hết cho 7.

b) Cho $f(g) = C_n g^n + C_{n-1} g^{n-1} + \dots + C_1 g + C_0$. Biết $g \vdots d$. Chứng minh rằng $f(g) \vdots d \Leftrightarrow C_0 \vdots d$.

4.15. Cho $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$a) A = x^2 + y^2$$

$$b) B = 3 - xy.$$

4.16. Cho $x + 2y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x \cdot y$.

§4. ĐA THỨC MỘT BIẾN CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

4.17. Cho đa thức $P(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x$. Tìm các đa thức $Q(x)$, $R(x)$ sao cho :

a) $P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^2 + 1$ b) $P(x) - R(x) = x^5$.

4.18. a) Cho $f(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + \dots + x^2 - x + 1$ ($x \in \mathbb{N}$)

$$g(x) = -x^{2n+1} + x^{2n} - x^{2n-1} + \dots + x^2 - x + 1 \quad (x \in \mathbb{N})$$

Tính : $f(x) - g(x)$ tại $x = \frac{1}{10}$.

b) Cho $h(x) = x^8 - 101x^7 + 101x^6 - 101x^5 + \dots + 101x^2 - 101x + 25$.
Tính $h(100)$.

4.19. Cho $f(x) = 2x^2 + ax + 4$ (a là hằng số)

$$g(x) = x^2 - 5x - b \quad (b \text{ là hằng số})$$

Tìm các hệ số a , b sao cho $f(1) = g(2)$ và $f(-1) = g(5)$.

4.20. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $3a + b = 0$, hỏi $f(5).f(-2)$ có thể là số âm không ?

4.21. Cho đa thức : $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^{n-(n-1)} + x^{n-n}$.

a) Chứng minh $f(1) = n + 1$

b) Chứng minh $f(-1) = \begin{cases} 0 & n \text{ lẻ} \\ 1 & n \text{ chẵn.} \end{cases}$

§5. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

4.22. Cho các đa thức $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 5$

$$g(x) = 4x^2 - 2x^3 - 2x + 7.$$

a) Tính $h(x) = f(x) + g(x)$; $k(x) = f(x) - (2x^3 - 4x^2 + 6x - 6)$.

b) Tìm nghiệm của $h(x)$; $k(x)$.

4.23. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $(x^2 - 9).f(x) = x.f(x)$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất ba nghiệm.

4.24. Cho các nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ và $g(x) = bx + a$, ($b \neq 0$).
 Chứng minh rằng nếu x_0 là nghiệm của $f(x)$ thì $\frac{1}{x_0}$ là nghiệm của $g(x)$.

4.25. Cho biểu thức $M = \frac{x-3}{x+2}$.

- Với giá trị nào của x thì biểu thức trên xác định.
- Tính giá trị của M khi $x^2 + x = 0$.
- Với giá trị nào của x thì $M = 2$.
- Tìm x nguyên sao cho M có giá trị nguyên.
- Tìm x để $M < 1$.

4.26. Chứng tỏ :

a) Đa thức $A = -x^2 + 4x - 6$

$B = -2 - x - x^2$ không có nghiệm.

b) Đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ thỏa mãn
 $a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 = 0$ thì $f(x)$ có một nghiệm là $x = 1$.

4.27. Cho $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, trong đó a, b, c, d là hằng số.
 Giả sử $P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30$. Hãy tính $\frac{P(12) + P(-8)}{10}$.

(Trích đề thi HSG Toán ở Mỹ)

4.28. Các số p, q phải như thế nào để :

a) Đa thức $P(x) = x^2 + px + q$ có giá trị chẵn với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

b) Đa thức $Q(x) = x^3 + px + q$ có giá trị là bội của 3 với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

(Trích đề thi vô địch Rumani - 1962)

4.29. Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $P(0)$ và $P(1)$ là số lẻ.
 Chứng minh $P(x)$ không có nghiệm là số nguyên.

(Trích đề thi vô địch Toán Matxcova - 1980)

4.30. Hãy tìm tập hợp M gồm 7 số tự nhiên liên tiếp sao cho có một đa thức $P(x)$ bậc 5 thỏa mãn các điều kiện sau đây :

a) Tất cả các hệ số của $P(x)$ đều là số nguyên.

b) Với năm số $k \in M$ (kể cả số lớn nhất và số nhỏ nhất) ta đều có $P(k) = k$.

c) Có một số $k \in M$ sao cho $P(k) = 0$.

(Trích đề thi vô địch Anh – 1980)

4.31. Tìm đa thức bậc hai sao cho $f(x) - f(x - 1) = x$.

Áp dụng tính $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

(Trích đề thi HSG Toán lớp 7 – 2010)

4.32. Tìm tổng các hệ số của đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức $(3 - 4x + x^2)^{2006} \cdot (3 + 4x + x^2)^{2007}$.

(Trích đề thi HSG Toán lớp 7 – 2007)

CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

I. Nội dung của phương pháp quy nạp toán học

Nội dung của phương pháp này là tiên đề quy nạp toán học : Cho một mệnh đề phụ thuộc vào số nguyên dương n . Nếu :

- Mệnh đề đúng với $n = 1$.
- Từ giả thiết mệnh đề đã đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$) suy ra được mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$; thế thì mệnh đề cũng đúng với mọi số nguyên dương n .

Như vậy để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương n bằng phương pháp quy nạp toán học ta phải tiến hành theo ba bước :

Bước 1 : Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2 : Chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$ nếu giả thiết rằng mệnh đề đúng với $n = k$ (gọi giả thiết này là giả thiết quy nạp).

Bước 3 : Kết luận mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương n .

II. Vận dụng phương pháp quy nạp vào chứng minh

1. Chứng minh quan hệ chia hết

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng $a^5 - a$ (1) chia hết cho 5 với mọi số nguyên dương a .

Giải

- Mệnh đề (1) đúng với $a = 1$ vì $1^5 - 1$ chia hết cho 5.
- Giả sử (1) đã đúng với $a = k$ ($k \in \mathbb{N}$), tức là ta đã có $k^5 - k$ chia hết cho 5. Cần chứng minh (1) cũng đúng với $a = k + 1$, tức là phải chứng minh $(k + 1)^5 - (k + 1)$ chia hết cho 5.

Ta có : $(k + 1)^5 - (k + 1)$

$$= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1$$

$$= (k^5 - k) + (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k)$$

Mà : $(k^5 - k)$ chia hết cho 5 theo giả thiết quy nạp.

$(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k)$ hiển nhiên chia hết cho 5.

Do đó : $(k + 1)^5 - (k + 1)$ chia hết cho 5.

- Kết luận : Mệnh đề (1) đúng với mọi số nguyên dương a .

2. Chứng minh đẳng thức

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì :

$$5n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (2)$$

Giải

a) Mệnh đề (2) đúng với $n = 1$ vì $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$.

b) Giả sử mệnh đề (2) đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), tức là ta đã có :

$$\begin{aligned} S_k &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1). \text{ Cần chứng} \\ \text{minh : } S_{k+1} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Có } S_{k+1} &= S_k + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3). \end{aligned}$$

c) Kết luận : Mệnh đề (2) đúng với mọi số nguyên dương n .

3. Chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng $n^2 > n + 5$ (3) với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

Giải

a) Mệnh đề (3) đúng với $n = 3$ vì $3^2 > 3 + 5$.

b) Giả sử (3) đúng với $n = k$, tức là ta đã có $k^2 > k + 5$ ($k \geq 3$)

Cần chứng minh : $(k+1)^2 > k+1+5$ hay $(k+1)^2 > k+6$

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu : } (k+1)^2 - (k+6) &= k^2 + 2k + 1 - k - 6 = k^2 + k - 5 \\ &= k^2 - (k+5) + 2k \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp thì $k^2 - (k+5) > 0$

$$\Rightarrow k^2 - (k+5) + 2k > 0 \quad (k \geq 3)$$

Vậy $(k+1)^2 > k+6$.

c) Kết luận : Mệnh đề (3) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

III- BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì :

- a) $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ chia hết cho 19.
- b) $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ chia hết cho 24.
- c) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ chia hết cho 9.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì :

- a) $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- b) $B = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
- c) $C = 1.4 + 2.7 + 3.10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$.

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n .

- a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$
- b) $2^n > n^3$ ($n \geq 10$).

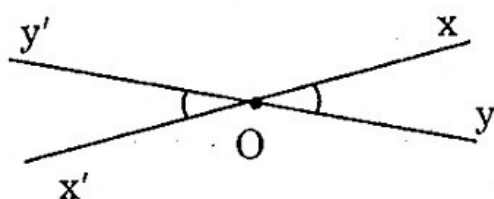
Bài 4. Chứng minh rằng : $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n + a_{n-2}}$ là phân số tối giản với mọi $n \geq 2$.

Chương V. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC, ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG (*)

I- KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hai góc đối đỉnh :

a) Định nghĩa : Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh góc kia.



Hình 5

Ví dụ : $\widehat{xOy}$ đối đỉnh với $\widehat{x'Oy'}$.

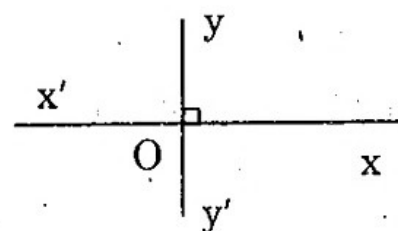
b) Tính chất : Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

$\widehat{xOy}$ đối đỉnh với $\widehat{x'Oy'}$ thì $\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'}$.

Chú ý : Điều ngược lại là không đúng. Hai góc bằng nhau chưa chắc là hai góc đối đỉnh.

2. Hai đường thẳng vuông góc :

a) Định nghĩa : Hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là hai đường thẳng vuông góc với nhau, kí hiệu là $xx' \perp yy'$.

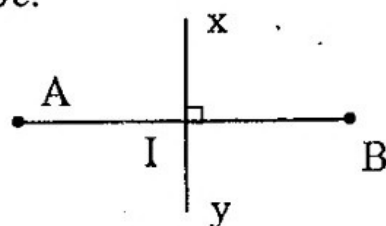


Hình 6

b) Tính chất : Có một và chỉ một đường thẳng a' đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a cho trước.

3. Đường trung trực của đoạn thẳng :

* Định nghĩa : Đường thẳng đi qua trung điểm của một đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng ấy được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng.



Hình 7

* Ví dụ : Đường thẳng xy là đường trung trực của của đoạn thẳng AB vì đường thẳng xy đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và xy vuông góc với đoạn thẳng AB.

(*) Chương V là chương I phần Hình học

Khi xy là đường trung trực của đoạn thẳng AB ta nói : hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng xy.

4. Hai đường thẳng song song :

a) Định nghĩa :

- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

- Khi hai đường thẳng a song song với đường thẳng b được kí hiệu là $a // b$.

Hình 8

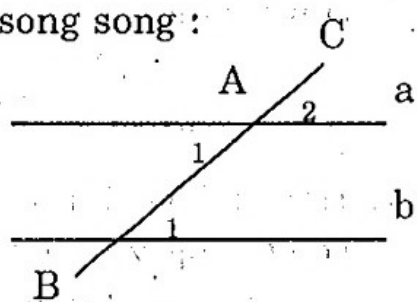
* Chú ý : Trong mặt phẳng, hai đường thẳng có thể có 3 vị trí tương đối :

- + Trùng nhau (có nhiều hơn một điểm chung)
- + Cắt nhau (chỉ có một điểm chung)
- + Song song (không có điểm chung)

Hai đường thẳng phân biệt thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

b) Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song :

Tính chất (thừa nhận) : Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong (hoặc một cặp góc đồng vị) bằng nhau thì a song song với b.



Hình 9

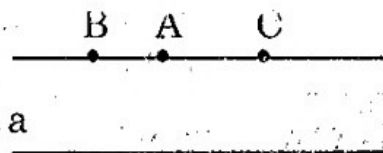
Đường thẳng c cắt đường thẳng a và b thứ tự tại A và B.

- Nếu $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ thì $a // b$.

- Nếu $\hat{A}_2 = \hat{B}_1$ thì $a // b$.

c) Tiên đề Ôclit về đường thẳng song song :

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đó.



Hình 10

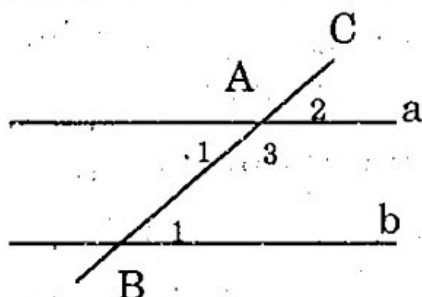
d) Tính chất của hai đường thẳng song song :

Định lý : Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì

- Hai góc so le trong bằng nhau.
- Hai góc đồng vị bằng nhau.
- Hai góc trong cùng phía bù nhau.

Chẳng hạn :

$$a // b \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 & (\text{hai góc so le trong}) \\ \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 & (\text{hai góc đồng vị}) \\ \widehat{A}_3 + \widehat{B}_1 = 180^\circ & (\text{hai góc trong cùng phía}) \end{cases}$$

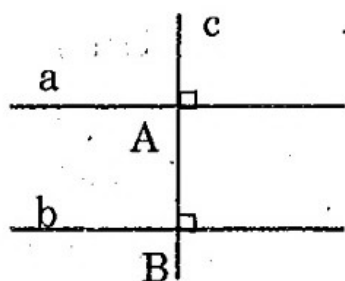


Hình 11

5. Liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc :

- a) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

$$\begin{cases} a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a // b.$$



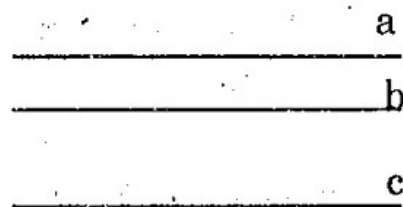
Hình 12

- b) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.

$$\begin{cases} a // b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b.$$

- c) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

$$\begin{cases} a // c \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b.$$



Hình 13

6. Định lí :

- Một tính chất được khẳng định là đúng bằng suy luận gọi là một định lí.
- Chứng minh định lí là dùng lập luận để từ giả thiết suy ra kết luận.

II- CÁC VÍ DỤ :

Ví dụ 1 : Cho hình vẽ :

Hai đường thẳng xy và zt cắt nhau tại O. Biết $\widehat{xOt} = 4\widehat{xOz}$. Tính các góc $\widehat{xOt}$, $\widehat{tOy}$, $\widehat{yOz}$ và $\widehat{zOx}$?

Giải

- Vì $\widehat{xOt}$ kề bù với $\widehat{xOz}$ nên :

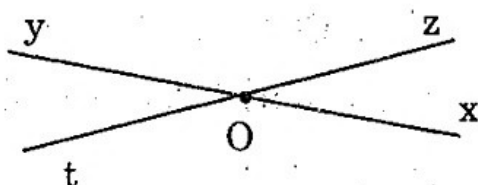
$$\widehat{xOt} + \widehat{xOz} = 180^\circ \text{ mà } \widehat{xOt} = 4\widehat{xOz}$$

$$\Rightarrow 4\widehat{xOz} + \widehat{xOz} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 5\widehat{xOz} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{xOz} = 180^\circ : 5 = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{xOt} = 4.36^\circ = 144^\circ$$



Hình 14

- Vì $\widehat{xOz}$ đối đỉnh với $\widehat{yOt} \Rightarrow \widehat{xOz} = \widehat{yOt} = 36^\circ$.

- Vì $\widehat{xOt}$ đối đỉnh với $\widehat{yOz} \Rightarrow \widehat{xOt} = \widehat{yOz} = 144^\circ$.

Ví dụ 2 : Cho góc bẹt $\widehat{AOB}$. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ 3 tia OM, ON, OC sao cho $\widehat{AOM} = \widehat{BON} < 90^\circ$ và tia OC là tia phân giác của $\widehat{MON}$. Chứng tỏ : $OC \perp AB$.

Giải

Ta có $\widehat{AOB}$ là góc bẹt $\Rightarrow \widehat{AOB} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^\circ$$

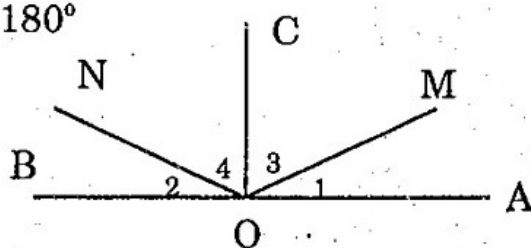
$$\text{Mà } \widehat{O_1} = \widehat{O_2}, \widehat{O_3} = \widehat{O_4}$$

$$\Rightarrow \widehat{O_1} + \widehat{O_1} + \widehat{O_3} + \widehat{O_3} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\widehat{O_1} + 2\widehat{O_3} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2.(\widehat{O_1} + \widehat{O_3}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AB \text{ tại } O.$$



Hình 15

Ví dụ 3 : Cho góc $\widehat{AOB} = 140^\circ$. Trong góc ấy vẽ các tia OC và OD sao cho $OC \perp OA$, $OD \perp OB$.

a) Chứng tỏ : $\widehat{AOD} = \widehat{COB}$. b) Tính $\widehat{DOC}$?

c) Vẽ tia OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$. Tia OM có phải là tia phân giác của $\widehat{COD}$ không ? Vì sao ?

Giải

a) Chứng tỏ : $\widehat{AOD} = \widehat{COB}$.

$$\text{Vì } OA \perp OC \Rightarrow \widehat{AOC} = 90^\circ$$

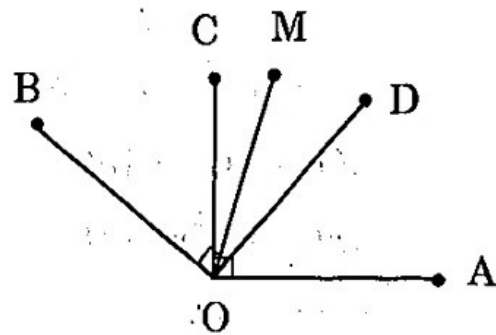
$$\Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{COD} = 90^\circ.$$

$$\text{Vì } OD \perp OB \Rightarrow \widehat{BOD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{COB} + \widehat{COD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{COD} = \widehat{COB} + \widehat{COD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{COB}.$$



Hình 16

b) Vì tia OD nằm giữa 2 tia OA và OB $\Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{BOD} = \widehat{AOB}.$

Mà $\widehat{AOB} = 140^\circ$, $\widehat{BOD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOD} + 90^\circ = 140^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AOD} = 140^\circ - 90^\circ = 50^\circ.$$

Vì tia OD nằm giữa 2 tia OA và OC $\Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{DOC} = \widehat{AOC}.$

Mà $\widehat{AOD} = 50^\circ$, $\widehat{AOC} = 90^\circ \Rightarrow 50^\circ + \widehat{DOC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{DOC} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

Vậy $\widehat{DOC} = 40^\circ.$

c) Tia OM là tia phân giác của

$$\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BOM} = 140^\circ : 2 = 70^\circ$$

Vì trên cùng nửa mặt phẳng bờ có chứa tia OA có 2 tia OD và OM mà $\widehat{AOD} < \widehat{AOM}$ ($50^\circ < 70^\circ$)

$$\Rightarrow \text{Tia OD nằm giữa 2 tia OA và OM} \Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{DOM} = \widehat{AOM}.$$

Mà $\widehat{AOD} = 50^\circ$, $\widehat{AOM} = 70^\circ$

$$\Rightarrow 50^\circ + \widehat{DOM} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{DOM} = 20^\circ \quad (1)$$

Tương tự ta cũng tính được $\widehat{COM} = 20^\circ \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DOM} = \widehat{COM}$. Mà tia OM nằm giữa 2 tia OC và OD

$\Rightarrow$ tia OM là tia phân giác của $\widehat{COD}$.

Ví dụ 4: Cho hình vẽ. Biết $Ax \parallel By$, $\widehat{xAO} = 30^\circ$, $\widehat{yBO} = 150^\circ$. Tính $\widehat{AOB}$? (h.17)

Giải

– Kẻ tia $Oz \parallel Ax$. Mà $Ax \parallel By \Rightarrow Oz \parallel Ax \parallel By$.

- $\widehat{O}_1 = \widehat{xAO}$ (so le trong).

Mà $\widehat{xAO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{O}_1 = 30^\circ$.

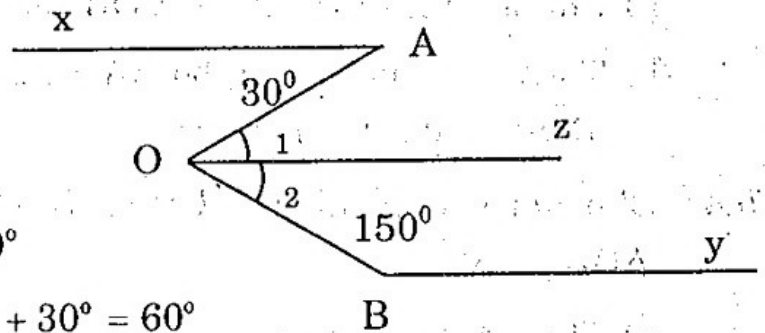
- $\widehat{O}_2 + \widehat{yBO} = 180^\circ$ (2 góc trong cùng phía).

Mà $\widehat{yBO} = 150^\circ$

$\Rightarrow \widehat{O}_2 = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

- Vậy $\widehat{AOB} = 60^\circ$.



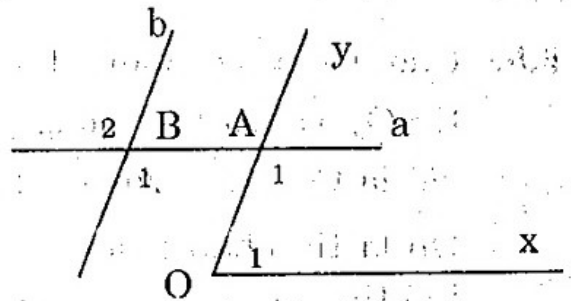
Hình 17

Ví dụ 5 : Cho hình 18. Biết $\widehat{O}_1 = 70^\circ$,

$\widehat{A}_1 = 110^\circ$, $\widehat{B}_2 = 110^\circ$. Chứng tỏ :

a) $a \parallel Ox$

b) $b \parallel Oy$.



Hình 18

Giải

a) Ta có $\widehat{O}_1$ và $\widehat{A}_1$ là 2 góc trong cùng phía.

Mà $\widehat{O}_1 + \widehat{A}_1 = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ \Rightarrow a \parallel Ox$.

b) Ta có $\widehat{B}_2 = \widehat{B}_1$ (đối đỉnh). Mà $\widehat{B}_2 = 110^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = 110^\circ$.

Mà $\widehat{A}_1 = 110^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

Mà $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_1$ là 2 góc đồng vị $\Rightarrow b \parallel Oy$.

III- Bài tập

5.1. Cho góc tù $\widehat{xOy}$. Trong góc $\widehat{xOy}$ vẽ tia Oz sao cho $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$. Gọi Ot là tia phân giác của $\widehat{xOz}$. Chứng tỏ rằng : $\widehat{yOt} = 90^\circ$.

5.2. Cho 2 đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O. Vẽ tia phân giác OM của $\widehat{BOC}$. Gọi tia ON là tia đối của tia OM. Chứng minh :

a) $\widehat{NOA} = \widehat{NOD}$

b) Tia ON là tia phân giác của $\widehat{AOD}$.

5.3. Trên đường thẳng AA' lấy điểm O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AA' vẽ tia OB sao cho $\widehat{AOB} = 45^\circ$, trên nửa mặt

phẳng còn lại vẽ tia OC sao cho $\widehat{AOC} = 90^\circ$. Gọi OB' là tia phân giác của $\widehat{A'OC}$.

a) Chứng minh : $\widehat{AOB}$ và $\widehat{A'OB'}$ là 2 góc đối đỉnh.

b) Trên nửa mặt phẳng bờ AA' có chứa tia OB, vẽ tia OD sao cho $\widehat{DOB} = 90^\circ$. Tính $\widehat{A'OD}$.

5.4. Cho hai góc kề nhau $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$. Biết $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 160^\circ$ và $\widehat{AOB} = 7\widehat{BOC}$.

a) Tính $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$.

b) Trong góc $\widehat{AOC}$ vẽ tia OD vuông góc với tia OC. Chứng minh: tia OD là tia phân giác của $\widehat{OAB}$.

5.5. Cho góc $\widehat{xOy}$ nhọn. Trên nửa mặt phẳng có bờ chứa tia Ox có tia Oy vẽ tia Oz vuông góc với tia Oy. Trên nửa mặt phẳng kia vẽ tia Ot vuông góc với tia Ox. Gọi Om là tia phân giác của $\widehat{xOy}$, On là tia phân giác của $\widehat{zOt}$. Chứng minh : hai tia Om và On là hai tia đối nhau.

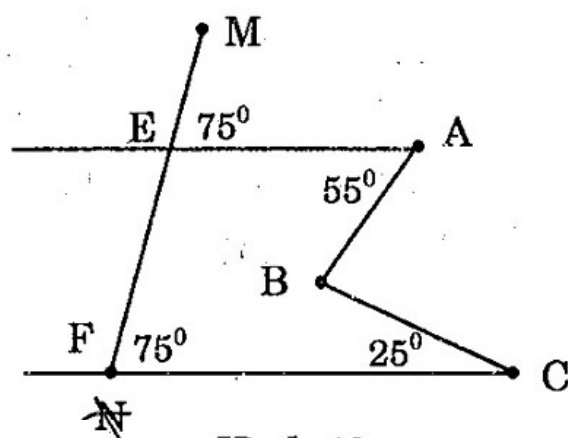
5.6. Cho hình vẽ.

Biết $\widehat{MEA} = 75^\circ$, $\widehat{EFC} = 75^\circ$,

$\widehat{A} = 55^\circ$, $\widehat{C} = 25^\circ$.

a) Chứng minh : $AE \parallel CF$.

b) Tính góc $\widehat{ABC}$?



Hình 19

5.7. Cho hình 20.

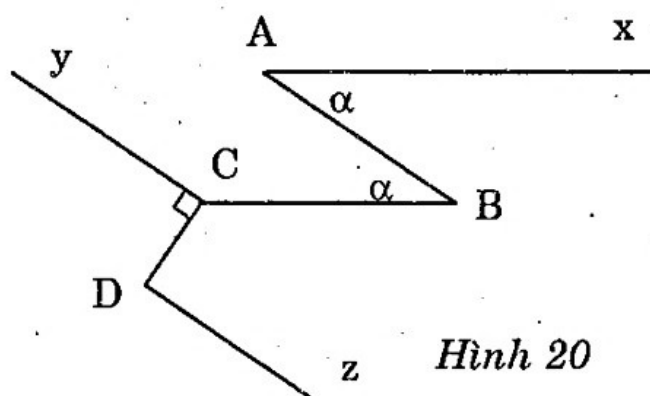
Biết $\widehat{xAB} = \widehat{ABC} = \alpha$,

$Cy \perp CD$, $Dz \perp CD$,

$AB \parallel Cy$.

a) Chứng minh : $Ax \parallel BC$
và $Cy \parallel Dz$.

b) Tính góc $\widehat{BCD}$?



Hình 20

5.8. Cho $\widehat{xOy} = 150^\circ$. Trên tia Ox lấy điểm A rồi kẻ tia Az nằm trong $\widehat{xOy}$ sao cho $\widehat{OAz} = 30^\circ$. Kẻ tia Az' là tia đối của tia Az.

a) Chứng tỏ : zz' song song với Oy .

b) Gọi OM và AN thứ tự là các tia phân giác của $\widehat{xOy}$ và $\widehat{OAz'}$.

Chứng minh : $AN \parallel OM$.

5.9. Cho hình 21.

Biết $AB \parallel DE$,

$$\widehat{ABC} = 110^\circ,$$

$$\widehat{CDE} = 130^\circ.$$

Tính $\widehat{BCD}$?

5.10. Cho hình 22.

Biết $Ax \parallel Cy$;

$$\widehat{BAD} = 40^\circ; \widehat{ABC} = 90^\circ$$

Tính góc ADB ?

5.11. Cho hình 23.

Biết $AB \perp AC$,

$$\widehat{DAC} = 140^\circ,$$

$$\widehat{B} = 50^\circ,$$

$$\widehat{C} = 40^\circ.$$

Chứng tỏ :

a) $AD \parallel CF$

b) $AD \parallel BE$.

5.12. Cho đoạn thẳng AB . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB . Vẽ các tia Ax và By trong đó $\widehat{BAx} = \alpha$, $\widehat{AB y} = 4\alpha$. Tính α để cho $Ax \parallel By$.

5.13. Cho hình 24.

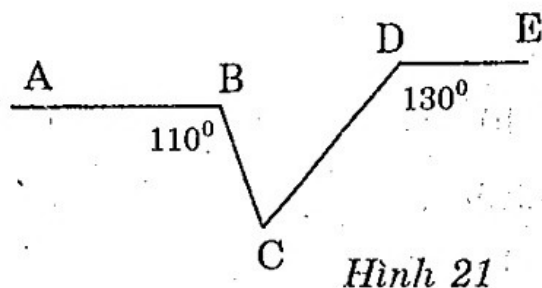
Biết $\widehat{eBa'} = 125^\circ$,

$$\widehat{BA b} = 55^\circ,$$

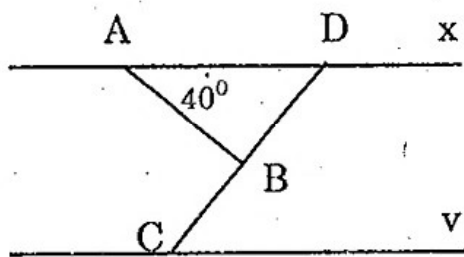
$$b \perp d, c \perp d.$$

a) Chứng minh : $a \parallel c$.

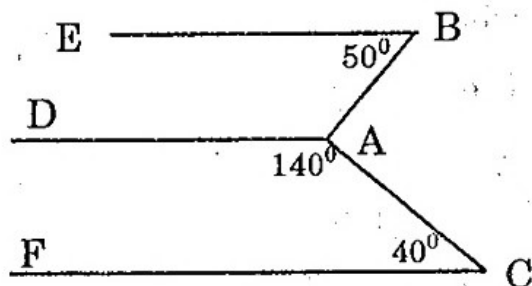
b) Tính số đo x, y của các góc CDE và DEN ? Biết $3x = 2y$.



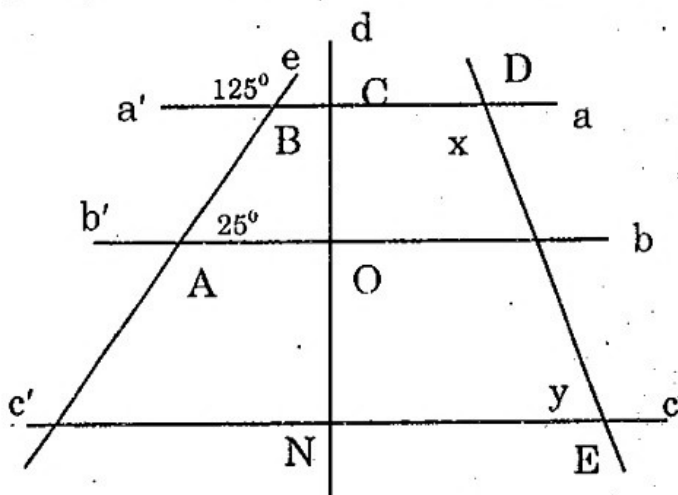
Hình 21



Hình 22



Hình 23



Hình 24

5.14. Cho 2 góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ có cạnh $Ox \parallel O'x'$ và $Oy \parallel O'y'$.

a) Nếu 2 góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ cùng nhọn hoặc cùng tù thì $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

b) Nếu $\widehat{xOy}$ nhọn và $\widehat{x'O'y'}$ tù thì $\widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^\circ$.

5.15. Cho hình 25.

Biết $Dx \perp a$,

$Ey \perp a$, $\widehat{xDH} = 35^\circ$,

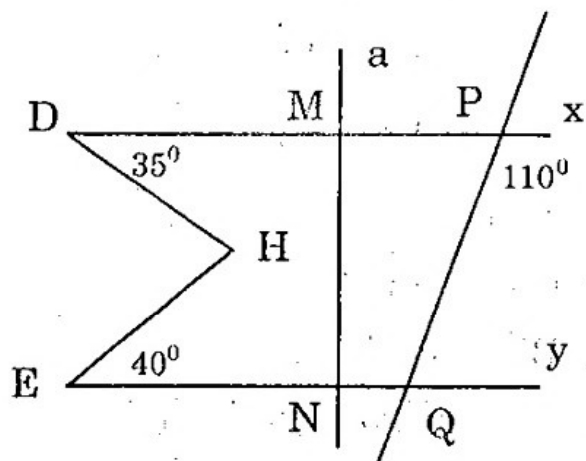
$\widehat{HEy} = 40^\circ$,

$\widehat{xPQ} = 110^\circ$.

a) Chứng minh : $Dx \parallel Ey$

b) Tính góc DHE ?

c) Tính góc PQy ?



Hình 25

5.16. Cho hình 26.

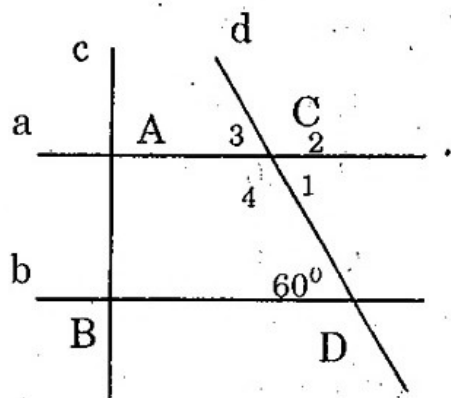
Biết $c \perp a$,

$c \perp b$,

$\widehat{CDB} = 60^\circ$.

a) Chứng tỏ : $a \parallel b$

b) Tính $\widehat{C_1}$, $\widehat{C_2}$, $\widehat{C_3}$, $\widehat{C_4}$?



Hình 26

Chương VI. TAM GIÁC

I- KIẾN THỨC CƠ BẢN

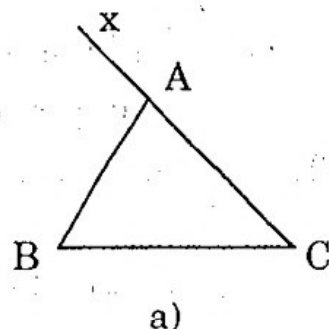
1. Tổng 3 góc trong tam giác

$$\Delta ABC : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ (h.27a)}$$

Góc ngoài của tam giác có số đo bằng tổng số đo 2 góc trong không kề với nó :

$\widehat{xAB}$ là góc ngoài ΔABC tại đỉnh A

$$\Rightarrow \widehat{xAB} = \hat{B} + \hat{C}.$$

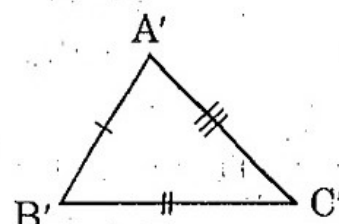
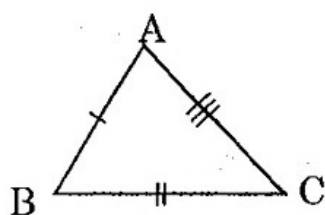


2. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác thường :

a) Trường hợp cạnh – cạnh – cạnh : (h.27b)

ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có :

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ AC = A'C' \end{array} \right\}$$



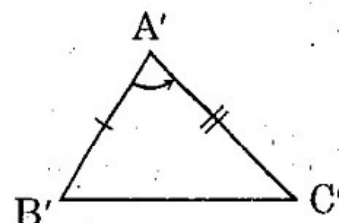
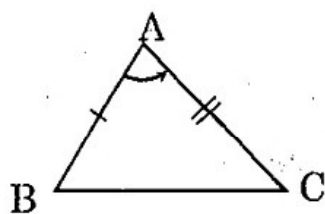
$$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (c - c - c).}$$

b)

c) Trường hợp cạnh – góc – cạnh : (h.27c)

ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có :

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AC = A'C' \end{array} \right\}$$



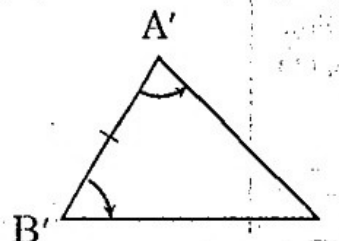
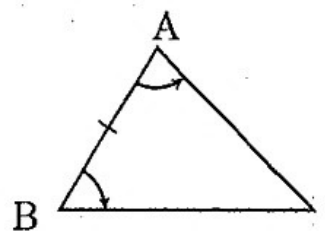
$$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (c - g - c)}$$

c)

c) Trường hợp góc – cạnh – góc : (h.27d)

ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ AB = A'B' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\}$$



$$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (g - c - g).}$$

d)

Hình 27

3. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông :

a) Áp dụng các trường hợp bằng nhau của 2 tam giác thường :

- Nếu hai tam giác vuông có 2 cặp cạnh góc vuông bằng nhau thì bằng nhau.
- Nếu hai tam giác vuông có 1 cặp cạnh góc vuông và 1 cặp góc nhọn bằng nhau thì bằng nhau.

b) Các trường hợp bằng nhau đặc biệt của hai tam giác vuông :

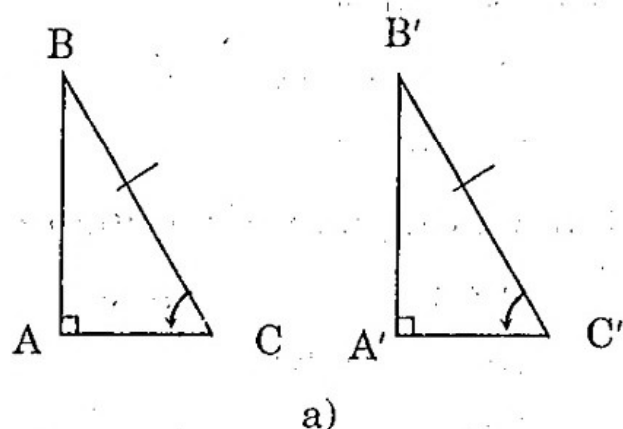
TH1 : Cạnh huyền – góc nhọn : (h.28a)

$\triangle ABC$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) và

$\triangle A'B'C'$ ($\widehat{A'} = 90^\circ$)

$$\left. \begin{array}{l} BC = B'C' \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$
(cạnh huyền – góc nhọn).



a)

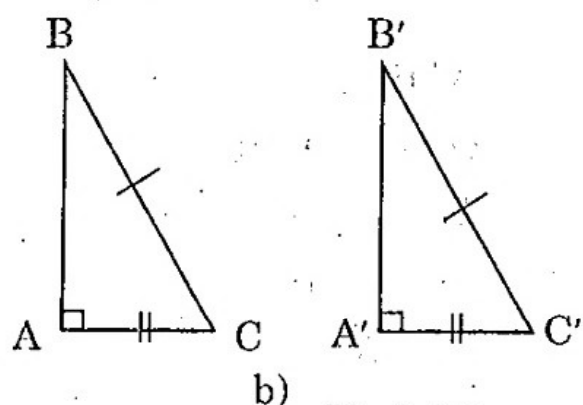
TH2 : Cạnh huyền – cạnh góc vuông : (h.28b)

$\triangle ABC$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) và

$\triangle A'B'C'$ ($\widehat{A'} = 90^\circ$)

$$\left. \begin{array}{l} BC = B'C' \\ AC = A'C' \end{array} \right\}$$

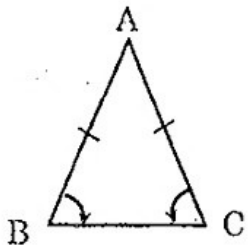
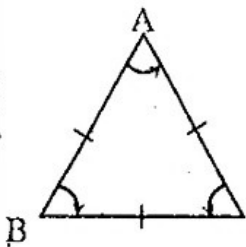
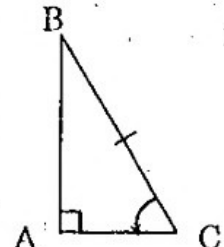
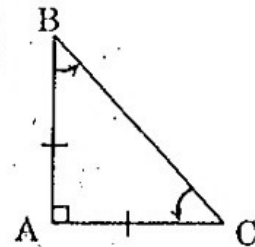
$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$
(cạnh huyền – cạnh góc vuông).



b)

Hình 28

4. Các tam giác đặc biệt :

	Tam giác cân	Tam giác đều	Tam giác vuông	Tam giác vuông cân
Định nghĩa				
	$\triangle ABC$ cân tại A $\Leftrightarrow$ $AB = AC$	$\triangle ABC$ đều $\Leftrightarrow AB = AC = BC$	$\triangle ABC$ vuông tại A $\Leftrightarrow \widehat{A} = 90^\circ$	$\triangle ABC$ vuông cân tại A $\Leftrightarrow$ và $AB = AC$

Quan hệ giữa các góc	$\widehat{B} = \widehat{C}$ $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ $\widehat{A} = 180^\circ - 2\widehat{B}$ $= 180^\circ - 2\widehat{C}$	$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$	$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$	$\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$
Quan hệ giữa các cạnh	$AB = AC$	$AB = AC = BC$	$B^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Pitago) $BC > AB$ và $BC > AC$	$AB = AC$ $BC = AB\sqrt{2}$

II. Các ví dụ :

Ví dụ 1 : Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$. Đường phân giác của góc A cắt BC tại D.

a) Tính $\widehat{ADC}$ và $\widehat{ADB}$?

b) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Tính $\widehat{HAD}$?

Giải

a) Ta có : $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^\circ$ (kề bù) (1)

$$\widehat{ADC} = \widehat{B} + \widehat{A_1} = \widehat{B} + \frac{\widehat{A}}{2} \quad (\text{tính chất góc ngoài tam giác})$$

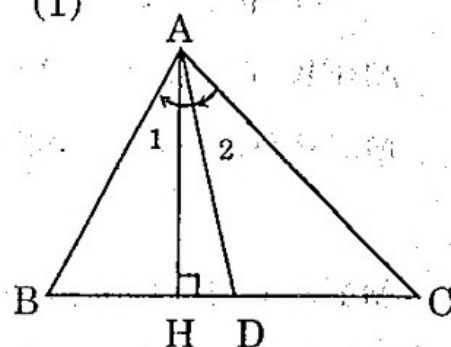
$$\widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{A_2} = \widehat{C} + \frac{\widehat{A}}{2} \quad (\text{tính chất góc ngoài tam giác})$$

$$\Rightarrow \widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \left(\widehat{B} + \frac{\widehat{A}}{2} \right) - \left(\widehat{C} + \frac{\widehat{A}}{2} \right) = \widehat{B} - \widehat{C} = \alpha \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \widehat{ADC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}, \quad \widehat{ADB} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

b) Trong tam giác vuông HAD ta có :

$$\widehat{HAD} = 90^\circ - \widehat{ADH} = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\alpha}{2}.$$



Hình 30

Ví dụ 2 : Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 70^\circ$. Các tia phân giác của B và C cắt nhau ở I. Các đường thẳng chứa các tia phân giác các góc ngoài tại đỉnh B và đỉnh C cắt nhau ở K. Gọi E là giao điểm của BI và KC. Tính số đo các góc $\widehat{BIC}$, $\widehat{BEC}$ và $\widehat{BKC}$?

Giải

$$\hat{A} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 110^\circ$$

$$\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{ABC}, \hat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{C}_2 &= \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 110^\circ = 55^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - (\hat{B}_2 + \hat{C}_2) = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CIE} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$$

$$\text{Ta có : } \widehat{xCB} = 2\hat{C}_3, \widehat{BCA} = 2\hat{C}_2 \Rightarrow \widehat{xCB} + \widehat{BCA} = 2(\hat{C}_3 + \hat{C}_2)$$

$$\Rightarrow 180^\circ = 2(\hat{C}_3 + \hat{C}_2) \Rightarrow \hat{C}_2 + \hat{C}_3 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ICE} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{IEC} = 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ) = 35^\circ$$

$$\text{Tương tự } \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EBK} = 90^\circ$$

$$\triangle BEK \text{ có : } \widehat{EBK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEK} + \widehat{BKE} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{BEK} = \widehat{BEC} = 35^\circ \Rightarrow 35^\circ + \widehat{BKE} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BKE} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

$$\text{Mà E, C, K thẳng hàng} \Rightarrow \widehat{BKC} = 55^\circ.$$

Ví dụ 3 : Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh :

a) $\hat{B} = \hat{C}$

b) $AM \perp BC$.

Giải

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ có :

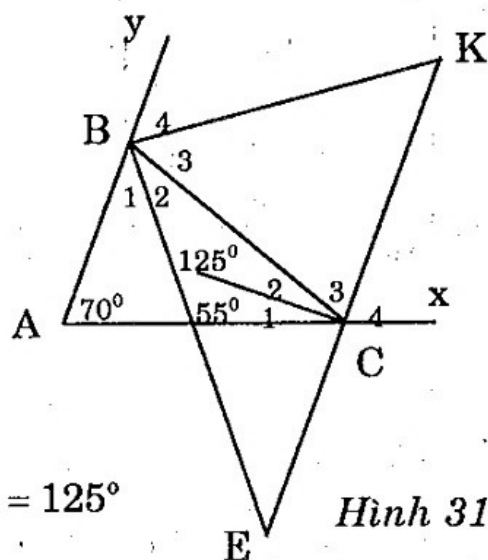
$$AB = AC \text{ (giả thiết)}$$

AM cạnh chung

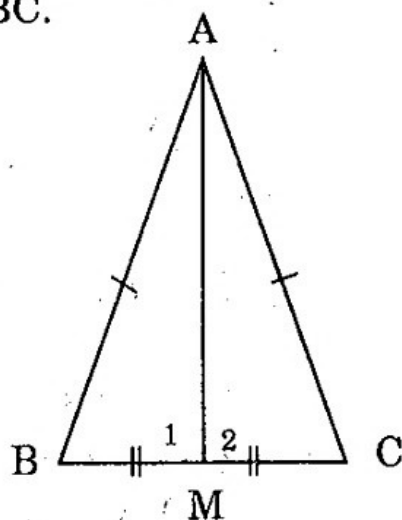
$$MB = MC \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle AMC \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \text{ (góc tương ứng) và } \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ (góc tương ứng)}$$



Hình 31



Hình 32a

Mà $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BC.$$

Ví dụ 4 : Cho $\triangle ABC$. Gọi D là trung điểm của AB, E là trung điểm của BC. Nối DE. Trên tia đối của tia DE lấy điểm K sao cho $DK = DE$. Chứng minh :

a) $AK \parallel BC$.

b) Gọi I là trung điểm của AE. Chứng minh : I là trung điểm của KC.

Giải

a) Xét $\triangle BDE$ và $\triangle ADK$ có :

$BD = AD$ (giả thiết)

$\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ (đối đỉnh)

$DE = DK$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle BDE = \triangle ADK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{B}_1$ và $\widehat{A}_1$ là 2 góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow AK \parallel BC$.

b) $\triangle BDE = \triangle ADK$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BE = AK$. Mà $BE = EC$ (giả thiết) $\Rightarrow AK = EC$.

Xét $\triangle KAI$ và $\triangle CEI$ có :

$KA = EC$ (chứng minh trên)

$\widehat{KAI} = \widehat{CEI}$ (so le trong)

$AI = IE$ (giả thiết)

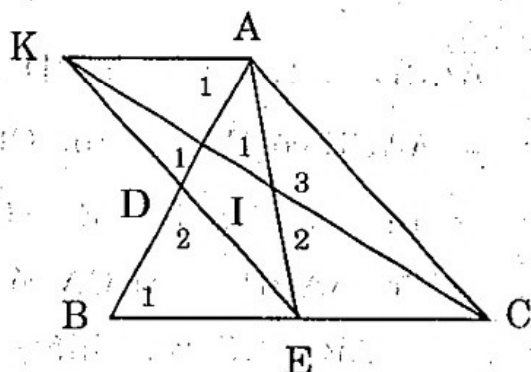
$\Rightarrow \triangle KAI = \triangle CEI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$ (2 góc tương ứng).

Mà $\widehat{I}_2 + \widehat{I}_3 = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{I}_1 + \widehat{I}_3 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{KIC} = 180^\circ$

$\Rightarrow K, I, C$ thẳng hàng (1)

Mà $IK = IC$ (2 cạnh tương ứng) (2)

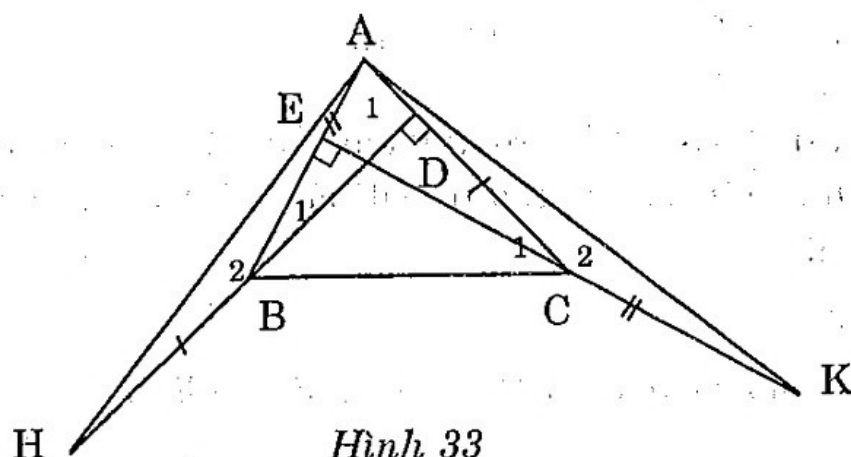
Từ (1) và (2) $\Rightarrow I$ là trung điểm của KC.



Hình 32b

Ví dụ 5 : Cho $\triangle ABC$. Kẻ BD vuông góc với AC. Kẻ CE vuông góc với AB. Trên tia đối của tia BD, lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh : $AH = AK$.

Giải



Hình 33

- $\triangle ABD$ có $\widehat{D} = 90^\circ$ (do $BD \perp AC$) $\Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{A}_1 = 90^\circ$
- $\triangle ACE$ có $\widehat{E} = 90^\circ$ (do $CE \perp AB$) $\Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{A}_1 = 90^\circ$
- $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$. Mà $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 (= 180^\circ) \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{C}_2$
- Xét $\triangle ABH$ và $\triangle KCA$ có :

$$AB = KC \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2 \text{ (chứng minh trên)}$$

$$BH = AC \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle KCA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AH = AK \text{ (2 cạnh tương ứng).}$$

Ví dụ 6 : Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở M, tia phân giác của góc C cắt AB ở N. Gọi giao điểm của BM và CN là I. Tia phân giác của góc BIC cắt BC tại D. Chứng minh :

a) $BN = BD$

b) $BN + CM = BC$.

Giải

a) $\widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$ (tổng 3 góc của tam giác)

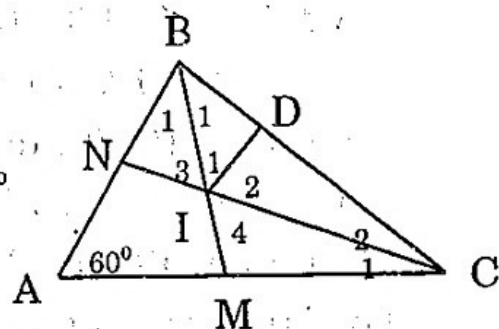
$$\widehat{B}_2 = \frac{1}{2}\widehat{B}, \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C} \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$ID \text{ là phân giác của } \widehat{BIC} \Rightarrow \widehat{I}_1 = \widehat{I}_2 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{I}_3 = 180^\circ - \widehat{BIC} = 60^\circ \text{ và } \widehat{I}_4 = \widehat{I}_3 = 60^\circ$$



Hình 34

Xét $\triangle BNI$ và $\triangle BDI$ có :

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 \text{ (giả thiết)}$$

BI cạnh chung

$$\hat{I}_3 = \hat{I}_1 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BNI = \triangle BDI \text{ (g.c.g)} \Rightarrow BN = BD \text{ (2 cạnh tương ứng)} \quad (1)$$

$$\text{b) Chứng minh tương tự ta có : } \triangle CMI = \triangle CDI \text{ (g.c.g)} \Rightarrow CM = CD \text{ (2 cạnh tương ứng)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow BN + CM = BD + CD = BC.$$

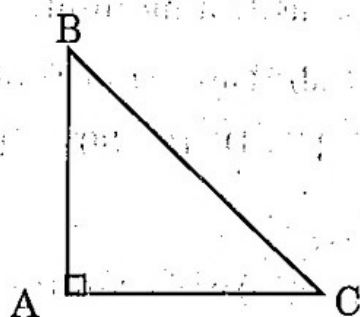
Ví dụ 7 : Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB : AC = 6 : 8$ và $BC = 55$ (cm).
Tính độ dài AB và AC.

Giải

$$\text{Vi } \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = k$$

$$\Rightarrow AB = 3k, AC = 4k.$$



Hình 35

$$\triangle ABC \text{ vuông tại A} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (định lý Pitago)}$$

$$\Rightarrow BC^2 = (3k)^2 + (4k)^2 \Rightarrow 55^2 = 9k^2 + 16k^2 \Rightarrow 25k^2 = 3025$$

$$\Rightarrow k^2 = 121 \Rightarrow k = 11$$

$$\text{Vậy } AB = 3.11 = 33 \text{ (cm) và } AC = 4.11 = 44 \text{ (cm).}$$

Ví dụ 8 : Cho $\triangle ABC$, kẻ AH vuông góc với BC.

$$\text{a) Chứng minh : } AB^2 + HC^2 = AC^2 + HB^2.$$

b) Trên tia đối của tia HA lấy điểm D tùy ý, nối DB và DC.

$$\text{Chứng minh : } AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2.$$

Giải

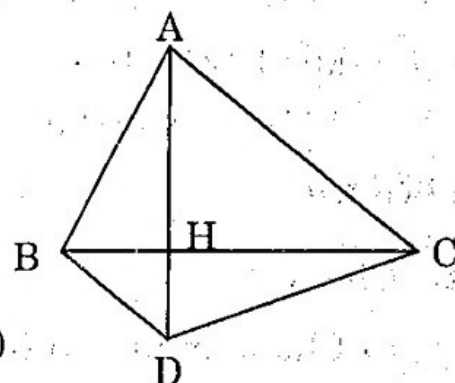
$$\text{a) } AB^2 + HC^2 = AC^2 + HB^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2$$

$$\text{– Xét } \triangle ABH \text{ có } \hat{H} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AB^2 = BH^2 + AH^2 \text{ (định lý Pitago)}$$

$$\Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2$$



(1) Hình 36

$$- \text{Tương tự, } \triangle ACH \text{ vuông tại H} \Rightarrow AH^2 = AC^2 - CH^2 \quad (2)$$

$$- \text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + HC^2 = AC^2 + HB^2.$$

$$\text{b) } \triangle ABH \text{ vuông tại H có: } AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad (3)$$

$$\triangle CDH \text{ vuông tại H có: } DC^2 = HC^2 + HD^2 \quad (4)$$

$$\text{Cộng (3) với (4) ta có: } AB^2 + DC^2 = AH^2 + BH^2 + HC^2 + HD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + DC^2 = (AH^2 + HC^2) + (HD^2 + BH^2) = AC^2 + BD^2.$$

Ví dụ 9 : Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{ABC} = 50^\circ$. Vẽ $\triangle EBC$ đều sao cho E và A cùng phía với BC.

a) Chứng minh : $\triangle EAB = \triangle EAC$.

b) Gọi D. là điểm nằm trong $\triangle ABC$ sao cho $\widehat{DBC} = 10^\circ$, $\widehat{DCB} = 30^\circ$. Chứng minh : $BA = BD$.

Giải

a) $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow AB = AC$ (định nghĩa)

$\triangle EBC$ đều $\Rightarrow EB = EC = BC$ và $\widehat{EBC} = \widehat{ECB} = \widehat{BEC} = 60^\circ$

Xét $\triangle EAB$ và $\triangle EAC$ có :

$$EB = EC$$

$$EA \text{ chung}$$

$$AB = AC$$

$$\Rightarrow \triangle EAB = \triangle EAC \text{ (c.c.c)}$$

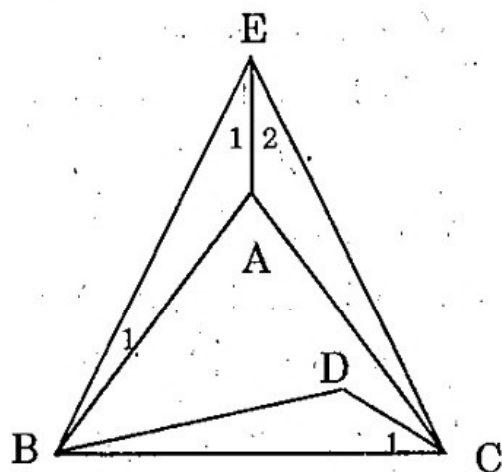
$$\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

b) $\widehat{EBC} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 50^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{EBA} = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ.$$

$$\text{Mà } \widehat{DBC} = 10^\circ \Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{DBC}$$

$$\triangle EBA = \triangle CBD \text{ (g.c.g)} \Rightarrow BA = BD \text{ (2 cạnh tương ứng).}$$



Hình 37

III. Bài tập

6.1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Tia phân giác của góc B cắt AC tại E.

a) Chứng minh : $\widehat{BEC}$ là góc tù.

b) Giả sử $\widehat{BEC} = 110^\circ$. Tính $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$?

6.2. Cho ΔABC . Các tia phân giác của góc B và của góc C cắt AC và AB thứ tự ở D và E. BD cắt CE tại I. Biết $\widehat{CID} = 60^\circ$.

a) Tính $\widehat{A}$?

b) Chứng minh : $\widehat{BEC}$ và $\widehat{BDC}$ bù nhau.

6.3. Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Tìm các cặp góc nhọn bằng nhau trong hình vẽ.

6.4. Cho 2 đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại E. Các tia phân giác của $\widehat{ACE}$ và $\widehat{DBE}$ cắt nhau ở K.

Chứng minh : $\widehat{BKC} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BDC}}{2}$.

6.5. Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Các tia phân giác của góc BAH và góc C cắt nhau ở K. Tính góc AKC ?

6.6. Cho ΔABC . Gọi D và E thứ tự là trung điểm của các cạnh AC và AB. Trên tia đối của tia DB lấy điểm G sao cho $DG = DB$. Trên tia đối của tia EC lấy điểm H sao cho $EH = EC$. Chứng minh :

a) $AG \parallel BC$.

b) H, A, G thẳng hàng.

6.7. Cho ΔABC . Các đường phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I. Đường thẳng qua I song song với BC cắt AB, AC thứ tự ở M và N. Chứng minh : $MN = MB + NC$.

6.8. Cho ΔABC cân tại A. Lấy điểm D thuộc cạnh AB. Vẽ DE song song với BC và $DI \parallel AC$ ($E \in AC, I \in BC$).

a) Chứng minh : $DI = DB$ và $DI = EC$.

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $CF = CE$. Gọi K là giao điểm của DF và BC. Chứng minh : $DK = KF$.

6.9. Cho ΔABC . Tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Từ D vẽ $DE \parallel AB$ ($E \in AC$). Từ E vẽ $EK \parallel BC$ ($K \in AB$). Chứng minh $AE = BK$.

6.10. Cho ΔABC cân tại A. Lấy điểm D thuộc cạnh AB, E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$. Từ D và E kẻ DH và EK vuông góc với đường thẳng BC (H, K thuộc BC).

a) Chứng minh : $DH = EK$.

b) Gọi I là trung điểm của HK. Chứng minh : D, I, E thẳng hàng.

- 6.11. Cho $\triangle ABC$ có góc B và góc C nhỏ hơn 90° . Vẽ ra phía ngoài tam giác ấy các tam giác vuông cân ABD và ACE (trong đó góc ABD và góc ACE đều bằng 90°). Vẽ DI và EK cùng vuông góc với đường thẳng BC. Chứng minh : $BC = DI + EK$.
- 6.12. Cho $\triangle ABC$ vuông tại B. Kẻ BE vuông góc với AC (E thuộc AC). Biết $EC - EA = AB$. Tính góc A và góc C ?
- 6.13. Cho $\widehat{xAy} = 60^\circ$. Vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt tia Az tại C. Vẽ BH vuông góc với Ay (H thuộc Ay). Chứng minh : $BH = \frac{AC}{2}$.
- 6.14. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, $\widehat{A} = 120^\circ$. AI là phân giác của $\widehat{A}$ (I thuộc BC). Từ I kẻ IH vuông góc với AB (H thuộc AB). Kẻ IK vuông góc với AC (K thuộc AC).
- Chứng minh : $\triangle IHK$ đều và HK song song với AC.
 - Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Chứng minh : $\triangle ACD$ đều.
- 6.15. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Kẻ EK vuông góc với AC (K thuộc AC). Chứng minh : $AK = AH$.
- 6.16. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Kẻ phân giác BE của góc B. Vẽ EH vuông góc với BC (H thuộc BC). Chứng minh :
- $\triangle ABE = \triangle HBE$.
 - BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.
 - Gọi K là giao điểm của các đường thẳng AB và EH. Chứng minh : $EK = EC$.
- 6.17. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 26\text{cm}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$. Tính độ dài AB và AC ?
- 6.18. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A có trung tuyến AM, E là một điểm thuộc cạnh BC. Kẻ BH và CK vuông góc với AE (H, K thuộc đường thẳng AE). $\triangle MHK$ là tam giác gì ? Chứng minh.
- 6.19. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Vẽ ra phía ngoài của $\triangle ABC$ hai tam giác đều AMB và ANC.

a) Chứng minh : 3 điểm M, A, N thẳng hàng.

b) Chứng minh : $BN = CM$.

6.20. Cho $\triangle ABC$ vuông cân ở A. Vẽ ra phía ngoài $\triangle ABC$ hai tam giác đều ABD và ACE.

a) Chứng minh : $BE = CD$.

b) Gọi I là giao điểm của BE và CD. Tính góc BIC.

6.21. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{B} > \hat{C}$. Kẻ đường cao AH và đường phân giác AD.

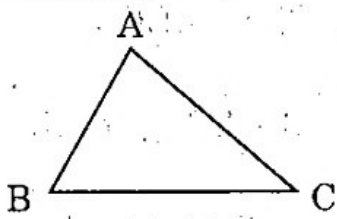
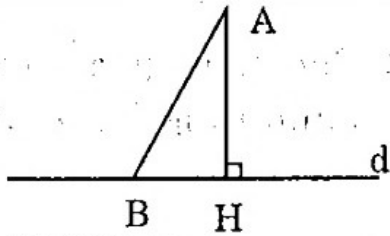
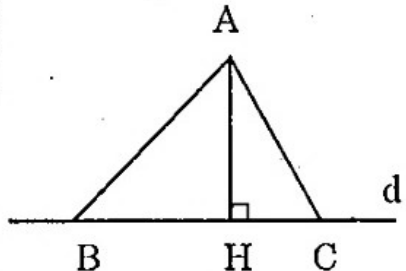
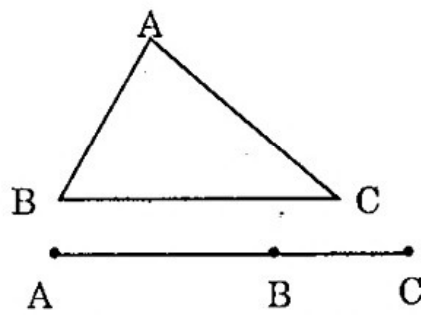
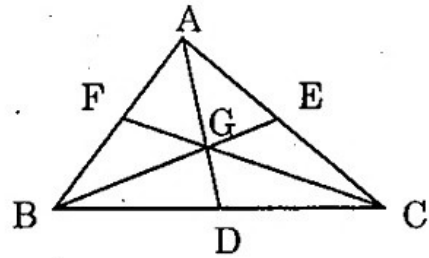
a) Chứng minh $\widehat{HAD} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$.

b) Tính góc A biết $\widehat{HAD} = 15^\circ$ và $3\hat{B} = 5\hat{C}$.

6.22. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = \hat{C} = 40^\circ$. Kẻ phân giác BD. Chứng minh rằng $BD + AD = BC$.

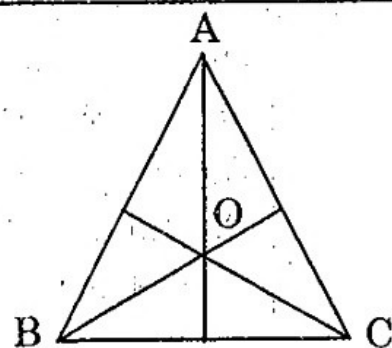
Chương VII. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC (10 tiết)

I- KIẾN THỨC CƠ BẢN

	Nội dung kiến thức	Hình vẽ
Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác	$\widehat{B} > \widehat{C} \Leftrightarrow AC > AB$ $\widehat{B} = \widehat{C} \Leftrightarrow AC = AB$	
	A $\notin$ d; B $\in$ d; AH $\perp$ d. Khi đó AB $\geq$ AH. Dấu bằng xảy ra khi điểm B trùng điểm H	
	A $\notin$ d; B $\in$ d; C $\in$ d; AH $\perp$ D. Khi đó $AB > AC \Leftrightarrow HB > HC$ $AB = AC \Leftrightarrow HB = HC$	
	Trong tam giác ABC thì : $ AB - AC < BC < AB + AC$ Với 3 điểm A; B; C bất kỳ, luôn có $AB + BC \geq AC$. Dấu bằng xảy ra khi điểm B nằm giữa hai điểm A và C.	
Tính chất các đường đồng quy trong tam giác.	Trong tam giác ABC, ba đường trung tuyến AD, BE, CF đồng quy tại điểm G và $\frac{GA}{DA} = \frac{GB}{EB} = \frac{GC}{FC} = \frac{2}{3}$ Điểm G là trọng tâm của tam giác	

Tính chất các đường đồng quy trong tam giác.	Điểm M nằm trong góc xOy. $MK \perp Ox$; $MH \perp Oy$. Khi đó Điểm M thuộc tia phân giác Oz của góc xOy $\Leftrightarrow MH = MK$	
	Trong tam giác ABC, ba đường phân giác đồng quy tại điểm I và điểm I cách đều ba cạnh của tam giác; $IK = IM = IL$	
	Điểm M thuộc trung trực của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow MA = MB$	
	Trong tam giác ABC, ba đường trung trực đồng quy tại điểm O và điểm O cách đều ba đỉnh của tam giác; $OA = OB = OC$.	
	Trong tam giác ABC, ba đường cao đồng quy tại điểm H. Điểm H được gọi là trực tâm của tam giác.	
	Tam giác ABC cân tại A $\Leftrightarrow$ Hai trong bốn đường sau trùng nhau : đường trung trực của cạnh BC, đường cao, đường trung tuyến; đường phân giác cùng xuất phát từ đỉnh A	

Nếu tam giác ABC đều thì bốn điểm trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba cạnh; điểm cách đều ba đỉnh là bốn điểm trùng nhau.



Hình 39

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Tia phân giác Ax của góc BAC cắt BC tại H. Trên cạnh AB lấy điểm M. Trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$.

- Nối MN cắt BC tại I. Chứng minh I là trung điểm của MN.
- Đường trung trực của MN cắt Ax tại O. Chứng minh OC vuông góc với AC.

Giải

- a) Kẻ $MK \parallel AC$ ($K \in BC$) $\Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{ACB}$ (đồng vị)

Mà $\triangle ABC$ cân tại A (gt)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{MBK}$$

$\Rightarrow \triangle MKB$ cân tại M và $\widehat{MKI} = \widehat{NCI}$
(hai góc kề bù với hai góc bằng nhau)

$$\triangle MKB \text{ cân tại M} \Rightarrow MK = MB$$

$$\text{Do } MB = CN \text{ (gt)}$$

$$\text{Suy ra } MK = CN$$

Xét $\triangle MKI$ và $\triangle NCI$ có :

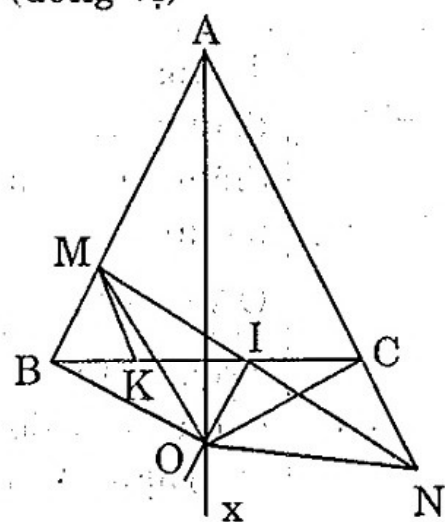
$$\widehat{MKI} = \widehat{NCI}; MK = NC; \widehat{KMI} = \widehat{CNI} \text{ (cặp góc so le trong do } MK \parallel CN)$$

$$\Rightarrow \triangle MKI = \triangle NCI \text{ (g-c-g)}$$

Suy ra $MI = NI$ hay I là trung điểm của MN.

- b) * Do O thuộc trung trực của MN (gt) nên $OM = ON$

$\triangle ABC$ cân tại A có Ax là tia phân giác của góc A



Hình 40

$\Rightarrow Ax$ là đường trung trực của BC mà O thuộc Ax nên $OB = OC$

Xét $\triangle MBO$ và $\triangle NCO$ có :

$OM = ON; OB = OC; MB = NC \Rightarrow \triangle MBO = \triangle NCO$ (c-c-c)

$\Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{NCO}$ (1)

* Xét $\triangle ABO$ và $\triangle ACO$ có :

Cạnh OA chung

$\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ (do Ax là phân giác của $\widehat{A}$)

$AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A)

Suy ra $\triangle ABO = \triangle ACO$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{ACO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ACO} = \widehat{NCO}$. Mà $\widehat{ACO} + \widehat{NCO} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{NCO} = 90^\circ$ hay $OC \perp AC$.

Ví dụ 2 : Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Điểm M và N thuộc cạnh BC sao cho $BM = MN = NC$. So sánh góc BAM ; góc MAN ; góc NAC .

Giải

* $\triangle ABC$ cân tại A (gt) suy ra $AB = AC; \widehat{B} = \widehat{C}$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$ có :

$AB = AC; \widehat{B} = \widehat{C}; BM = CN$

Suy ra $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAN}$ (*)

* Lấy điểm E thuộc tia đối của tia MA sao cho M là trung điểm của AE

– Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ENM$ có :

$BM = MN; \widehat{BMA} = \widehat{NME}$ (đ đ); $MA = ME$

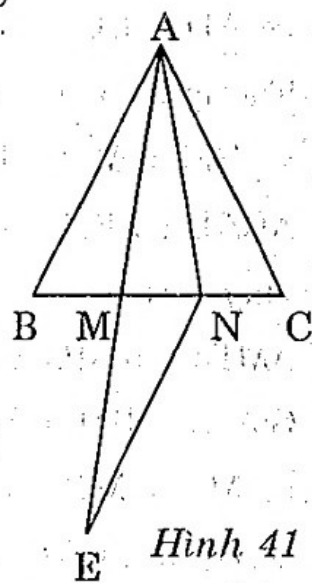
Suy ra $\triangle ABM = \triangle ENM$ (c-g-c)

$\Rightarrow AB = NE$ và $\widehat{BAM} = \widehat{E}$ (1)

– Mặt khác góc ANC là góc ngoài của $\triangle ABN \Rightarrow \widehat{ANC} > \widehat{B}$

Mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên $\widehat{ANC} > \widehat{C}$

– Tam giác ANC có $\widehat{ANC} > \widehat{C} \Rightarrow AC > AN$ (quan hệ giữa cạnh và



Hình 41

góc đối diện trong tam giác)

Lại có $AC = AB$; $AB = NE$ suy ra $NE > AN$

- Tam giác AEN có $NE > AN$ nên $\widehat{EAN} > \widehat{AEN}$ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MAN} > \widehat{BAM}$ (**)

Vậy từ (*) và (**) suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{CAN} < \widehat{MAN}$.

Ví dụ 3 : Cho $\triangle ABC$, điểm M nằm trong tam giác.

a) Chứng minh $MB + MC < AB + AC$.

b) Chứng minh tổng $MB + MA + MC$ nhỏ hơn chu vi và lớn hơn nửa chu vi của tam giác ABC.

Giải

- a) BM cắt AC tại D. Do điểm M nằm trong tam giác nên M nằm trong góc BAC

$\Rightarrow$ Tia BM nằm giữa hai tia BA và BC

$\Rightarrow$ Điểm D nằm giữa hai điểm A và C

$\Rightarrow AD + DC = AC$

Tương tự M nằm giữa hai điểm B và D

$\Rightarrow BM + MD = BD$

+ $\triangle BAD$ có $BD < BA + AD$ (bđt tam giác)

Hay $BM + MD < AB + AD$

+ $\triangle MDC$ có $MC < MD + DC$ (bđt tam giác)

Suy ra : $BM + MD + MC < AB + AD + MD + DC$

$\Rightarrow MB + MC < AB + AC$

- b) + Áp dụng kết quả phần a) ta có :

$MB + MC < AB + AC$

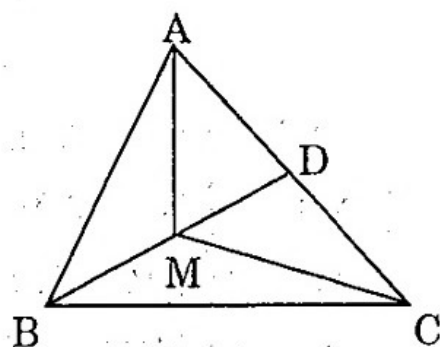
$MC + MA < BA + BC$

$MA + MB < CA + CB$

Suy ra $2(MB + MA + MC) < 2(AB + BC + CA)$

$(MB + MA + MC) < (AB + BC + CA)$

+ $\triangle AMB$ có : $MA + MB > AB$ (bđt tam giác)



Hình 42

$\triangle AMC$ có : $MA + MC > AC$ (bđt tam giác)

$\triangle CMB$ có : $MC + MB > CB$ (bđt tam giác)

Do đó $2(MB + MA + MC) > AB + BC + AC$

Hay $MB + MA + MC > \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$

Vậy tổng $MB + MA + MC$ nhỏ hơn chu vi và lớn hơn nửa chu vi của tam giác ABC .

Ví dụ 4 : Cho bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn điều kiện AB song song CD ; AD song song BC . Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của DC và BC . Gọi M là trung điểm của AB . Gọi E, F lần lượt là giao điểm của BD với AP và AQ ; O là giao điểm của AC và BD .

a) Chứng minh O là trung điểm của AC và BD .

b) Chứng minh C, F, M thẳng hàng.

c) Chứng minh $DE = EF = FB$.

Giải.

a) $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ (so le trong)

$AD \parallel CB \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ (so le trong)

+ Xét $\triangle ADB$ và $\triangle CBD$ có :

$$\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$$

Cạnh BD chung

$$\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$$

$$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle CBD \text{ (g-c-g)}$$

$$\Rightarrow AB = CD \text{ và } AD = BC$$

+ Xét $\triangle AOB$ và $\triangle COD$ có :

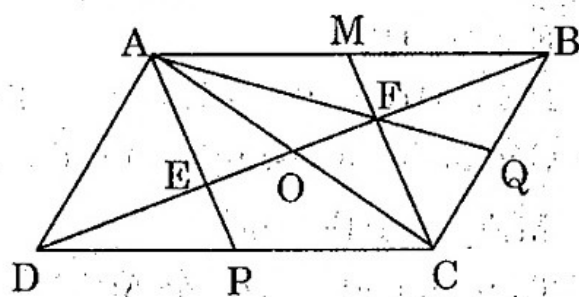
$$\widehat{ABD} = \widehat{CDB}; AB = CD; \widehat{BAC} = \widehat{ACD} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle COD \text{ (g-c-g)}$$

$$\Rightarrow OA = OC; OB = OD \Rightarrow O \text{ là trung điểm của } AC \text{ và } BD.$$

b) $\triangle ABC$ có hai trung tuyến BO và AQ cắt nhau tại F nên F là trọng tâm của tam giác ABC .

Mà M là trung điểm của $AB \Rightarrow CM$ là trung tuyến của tam giác $ABC \Rightarrow C, M, F$ thẳng hàng.



Hình 43

c) Có F là trọng tâm của tam giác ABC

$$\Rightarrow BF = \frac{2}{3}BO \text{ và } OF = \frac{1}{3}BO$$

Tam giác ADC có hai trung tuyến DO và AP cắt nhau tại E $\Rightarrow$ E là trọng tâm của tam giác

$$\Rightarrow DE = \frac{2}{3}DO \text{ và } OE = \frac{1}{3}DO \Rightarrow \text{Mà } OB = OD$$

Suy ra $DE = EF = FB$.

Ví dụ 5 : Cho $\triangle ABC$ nhọn, $AB < AC$. Hạ $AH \perp BC$. Trên đoạn HC lấy điểm E sao cho $BH = HE$. Gọi M là một điểm nằm giữa A và H. Tia BM cắt cạnh AC ở D.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng MB; ME; MC.

b) Chứng minh rằng : $MD < DH$.

Giải

a) + Do $AH \perp BC$ tại H nên H, E, B thuộc BC

$\Rightarrow$ HB và HE lần lượt là hình chiếu của MB; ME trên đường thẳng BC

$$\text{Mà } HB = HE \Rightarrow MB = ME$$

+ Vì $AB < AC \rightarrow HB < HC$

E $\in$ tia HC

$$HE = HB < HC \rightarrow E \in \text{đoạn HC}$$

Góc MEC là góc ngoài tại đỉnh E của $\triangle MHE$

$$\widehat{MEC} > \widehat{MHE} = 90^\circ$$

Tam giác MEC có góc MEC là góc tù nên MC là cạnh lớn nhất

$$\Rightarrow MC > ME$$

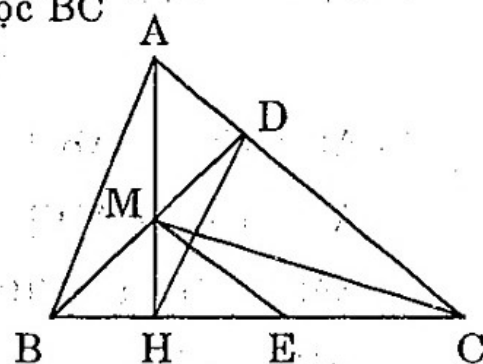
$$\text{Vậy } MB = ME < MC.$$

b) Ta có góc HMD là góc ngoài của đỉnh M của $\triangle MHB$

$$\Rightarrow \widehat{DMH} > \widehat{MHB} = 90^\circ$$

$\triangle HDM$ có $\widehat{HMD}$ là góc tù nên DH là cạnh lớn nhất

$$\Rightarrow HD > MD.$$



Hình 44

Ví dụ 6 : Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM; CF cắt nhau tại G.

a) Chứng minh $AM + CF > \frac{3}{2}AC$.

- b) Nếu $\triangle ABC$ vuông tại B có $BA = 5\text{cm}$; $BC = 12\text{cm}$. Chứng minh $AM + CF > 19,5$.

Giải

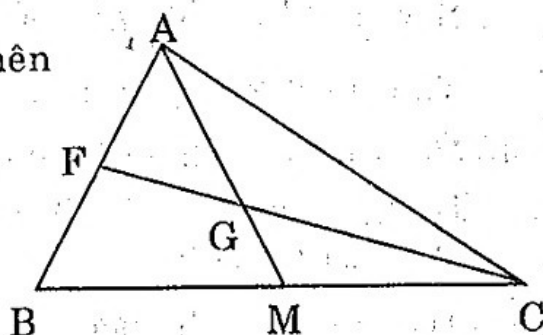
- a) $\triangle AGC$ có $AG + GC > AC$.

Vì G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên

$$AG = \frac{2}{3}AM; CG = \frac{2}{3}CF$$

$$\text{Do đó } \frac{2}{3}AM + \frac{2}{3}CF > AC$$

$$\text{Suy ra } AM + CF > \frac{3}{2}AC.$$



Hình 45

- b) Nếu $\triangle ABC$ vuông tại B theo định lý Pitago ta có :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$\text{Suy ra } AC = 13 \text{ (cm)}$$

Áp dụng kết quả của phần a) ta có :

$$AM + CF > \frac{3}{2}AC = \frac{3}{2} \cdot 13 = 19,5 \Rightarrow AM + CF > 19,5.$$

Ví dụ 7 : Cho tam giác ABC đều. Lấy M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $AM = BN = CP$. Gọi I là trung điểm của MP. Qua M kẻ $MQ \parallel AC$ ($Q \in BC$).

- a) Chứng minh I là trung điểm của AQ.

- b) Gọi O là giao điểm 3 đường trung trực của $\triangle ABC$. Chứng minh O là giao điểm ba đường trung trực của $\triangle MNP$.

Giải

- a) Để chứng minh được $MB = AP = CN$

$MQ \parallel AC$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{MQB} = \widehat{C} = 60^\circ \text{ và } \widehat{IPA} = \widehat{IMQ}$$

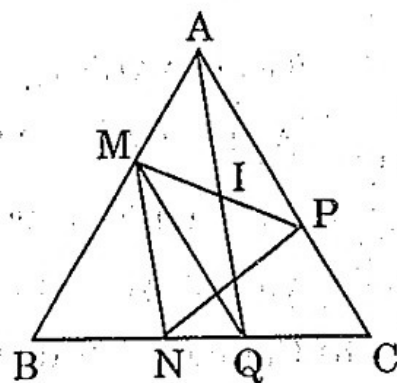
$$\Rightarrow \triangle MQB \text{ đều } (\widehat{B} = \widehat{MQB} = 60^\circ)$$

$$\Rightarrow MQ = MB = AP$$

Xét $\triangle IPA$ và $\triangle AMQ$ có : $IP = IM$

$$\widehat{IPA} = \widehat{IMQ}$$

$$AP = MQ$$



Hình 46

$$\Rightarrow \Delta IPA = \Delta IMQ \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AIP} = \widehat{MIQ} \text{ và } IQ = IA \quad (1)$$

$$\text{Mà } \widehat{AIP} + \widehat{AIM} = \widehat{MIP} = 180^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{AIM} + \widehat{MIQ} = 180^\circ = \widehat{AIQ} \Rightarrow A, I, Q \text{ thẳng hàng} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra I là trung điểm của AQ.

- b) Vì O là giao điểm ba đường trung trực của ΔABC nên
 $OA = OB = OC$

Dễ chứng minh được

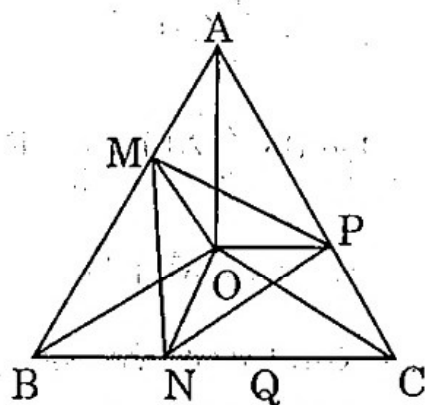
$$\widehat{MAO} = \widehat{NBO} = \widehat{PCO} = 30^\circ$$

Từ đó ta chứng minh được

$$\Delta MAO = \Delta NBO \Rightarrow OM = ON$$

$$\Delta NBO = \Delta PCO \Rightarrow ON = OP$$

$\Rightarrow O$ là giao điểm ba đường trung trực của ΔMNP .



Hình 47

Ví dụ 8 : Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, phân giác AD. Gọi I; J lần lượt là giao điểm các đường phân giác của ΔABH và ΔACH . Gọi E là giao điểm của BI và AJ. Chứng minh :

a) ΔABE vuông.

b) $AD \perp IJ$.

Giải

a) Ta chứng minh được

$$\widehat{HAC} = \widehat{HBA} = \alpha$$

(cùng phụ với góc C)

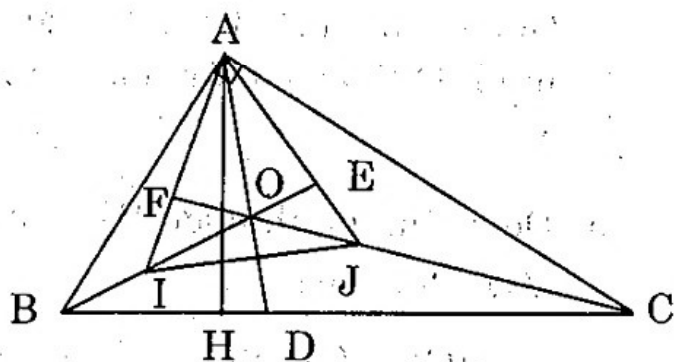
$$\widehat{ABE} = \widehat{JAC} = \frac{\alpha}{2}$$

Trong ΔABE có

$$\widehat{ABE} + \widehat{BAE} = \widehat{BAE} + \widehat{JAC} = 90^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BEA} = 90^\circ$$

Vậy ΔBAE vuông tại E.



Hình 48

b) Chứng minh tương tự như phần a) ta có ΔACF vuông tại F.

ΔABC có BI; CJ; AD là các đường phân giác $\Rightarrow BI; CJ; AD$

đồng quy tại O

Mà $BI \perp AJ$ tại E ($\triangle ABE$ vuông tại E) $\Rightarrow IE \perp AJ$

$CJ \perp AI$ tại F ($\triangle ACF$ vuông tại F) $\Rightarrow JF \perp AI$

Lại có JE cắt JF tại O

$\Rightarrow O$ là trực tâm của $\triangle AIJ \Rightarrow AO \perp IJ$ hay $AD \perp IJ$.

III. BÀI TẬP

7.1. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC.

a) So sánh MA với MI + IA, từ đó chứng minh $MA + MB < IA + IB$.

b) So sánh IB với CI + CB, từ đó chứng minh $IA + IB < CA + CB$.

c) Chứng minh $MA + MB < CA + CB$.

7.2. Cho tam giác DEF cân tại D, trung tuyến DI.

a) Chứng minh $\triangle DEI = \triangle DFI$.

b) Các góc DIE và góc DIF là góc gì ?

c) Biết $DE = DF = 13\text{cm}$; $FE = 10\text{cm}$. Hãy tính độ dài đường trung tuyến DI.

7.3. Cho tam giác ABC. Hai trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia MG lấy điểm E sao cho $ME = MG$. Trên tia đối của tia NG lấy điểm F sao cho $NF = NG$. Chứng minh : $BF = CE$ và $BF \parallel CE$.

7.4. Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy hai điểm A và B, trên tia Oy lấy hai điểm C và D sao cho $OA = OC$, $OB = OD$. Gọi I là giao điểm của hai đoạn thẳng AD và BC. Chứng minh rằng

a) $BC = AD$

b) $IA = IC$; $IB = ID$

c) OI là tia phân giác của góc xOy.

7.5. Cho tam giác KIL có góc I bằng 62° . Gọi O là giao điểm của ba đường phân giác trong tam giác. Tính các góc KOL và góc KIO.

7.6. Cho tam giác ABC có $AB < AC$; AD là phân giác, I là giao điểm của ba phân giác và H là hình chiếu của I trên cạnh BC. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{BIH} = \widehat{CID}$

b) $\widehat{BIC} = \frac{1}{2} \widehat{A} + 90^\circ$.

minh rằng :

a) $\widehat{BIH} = \widehat{CID}$

b) $\widehat{BIC} = \frac{1}{2}\widehat{A} + 90^\circ$.

7.7. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$. Các tia phân giác AD, BE, CF.

a) Chứng minh DE là tia phân giác góc ngoài ở đỉnh D của tam giác ADB.

b) Tính góc EDF ?

7.8. Cho tam giác ABC nhọn, có các đường cao AH, BI, CK. Chứng minh

a) $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$

b) $AH + BI + CK < AB + AC + CB$.

7.9. Cho tam giác ABC đều. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $BD = CE = AF$. Chứng minh rằng :

a) Tam giác EDF đều.

b) Các đường trung trực của $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$ cùng đi qua một điểm.

7.10. Cho tam giác ABC, đường cao BD và CE. Trên tia đối của tia BD lấy điểm I sao cho $BI = AC$ và trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh :

a) $AI = AK$.

b) Tam giác AIK là tam giác vuông cân.

7.11. Cho tam giác ABC cân tại A. Từ điểm D trên cạnh AB, vẽ đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC tại E. Chứng minh rằng :

$BE > \frac{1}{2}(DE + BC)$.

7.12. Cho tam giác ABC vuông ở A. Các tia phân giác BM và CN cắt nhau tại I. Gọi D, E, F là hình chiếu của điểm I xuống các cạnh AB; AC; BC.

a) So sánh AN và BN; AM và CM.

b) Chứng minh : $AD = AE$.

c) Tính độ dài các đoạn AD; AE nếu $AB = 8\text{cm}$; $AC = 15\text{cm}$.

d) Trong trường hợp tam giác ABC vuông cân tại A. Chứng minh tam giác DEF cân.

7.13. Cho đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và B ($MA < MB$). Vẽ tia Mx vuông góc với AB. Lấy C và D thuộc tia Mx sao cho: $MC = MA$; $MB = MD$.

7.14. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên AB và AC thứ tự lấy hai điểm M và N sao cho $\widehat{ABN} = \frac{1}{3} \widehat{ABC}$; $\widehat{ACM} = \frac{1}{3} \widehat{ACB}$. Tính góc MNB?

7.15. Chứng minh rằng trong một tam giác, một góc sẽ là nhọn, vuông hay góc tù tùy theo cạnh đối diện với góc ấy nhỏ hơn bằng hay lớn hơn hai lần trung tuyến kẻ tới cạnh đó.

(Thi vào lớp 9 chuyên Toán TP. Hồ Chí Minh – 1983)

7.16. Cho một tam giác có độ dài các cạnh là a, b, c đồng thời $a - b = b - c$. Điểm M là giao điểm của hai trung tuyến, P là giao điểm của các đường phân giác của các góc trong của tam giác đã cho. Chứng minh rằng MP song song với cạnh có độ dài b.

(Trích đề thi HSG Toán cấp 2, 1976 – 1977)

7.17. Từ trung điểm M cạnh đáy AC của tam giác cân ABC, kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$). Gọi P là trung điểm MH. Chứng minh rằng AH vuông góc với BP.

(Trích đề thi vô địch Toán lớp 10 Matxcova, 1962)

7.18. Cho tam giác ABC. Từ trung điểm D của cạnh BC, kẻ đường vuông góc với đường phân giác của góc A cắt AB và AC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng $BM = CN$.

b) Đặt $AB = c$, $AC = b$. Tính AM và BM theo b và c.

(Trích đề thi các lớp chuyên cấp 3 – 1973)

7.19. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trong tam giác lấy điểm D vẽ tam giác vuông cân DAE ($\widehat{DAE} = 90^\circ$ và E, D nằm về hai phía của AC). Chứng minh rằng:

a) $BD = EC$

b) BD vuông góc với EC.

7.20. Cho tam giác ABC cân tại B và $\widehat{B} = 80^\circ$. Trong tam giác ABC lấy điểm E sao cho ABE là tam giác cân tại A và $\widehat{BAE} = 40^\circ$. Tính góc ECB.

7.21. Trong tam giác nhọn ABC, đường cao lớn nhất AH bằng trung tuyến BM (đoạn thẳng một đầu là đỉnh của tam giác, đầu mút kia là trung điểm cạnh đối diện gọi là trung tuyến).

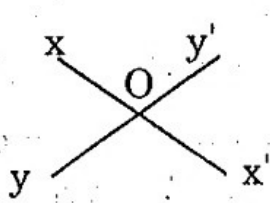
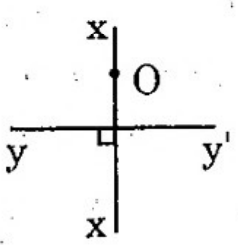
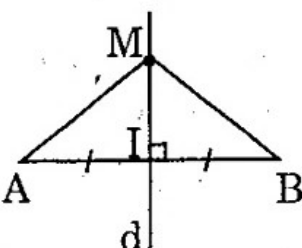
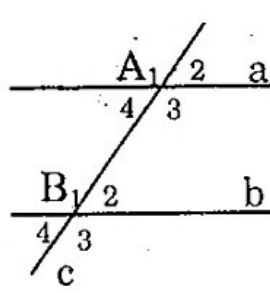
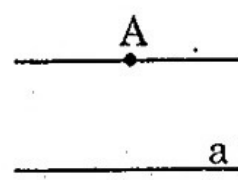
Chứng minh rằng $\widehat{ABC}$ không lớn hơn 60° .

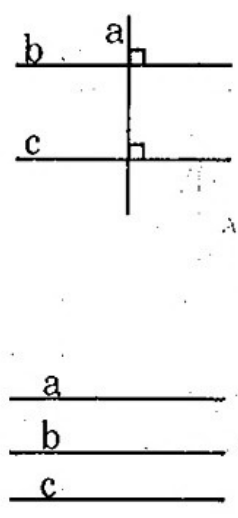
(Đề thi vô địch lớp 8 Tbilisi năm 1967)

KIẾN THỨC TỔNG HỢP HÌNH HỌC 7

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

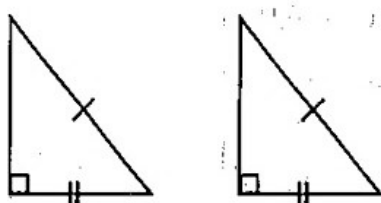
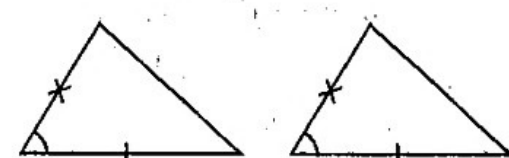
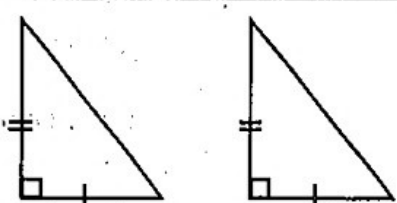
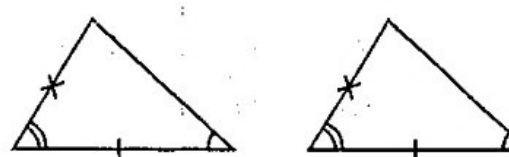
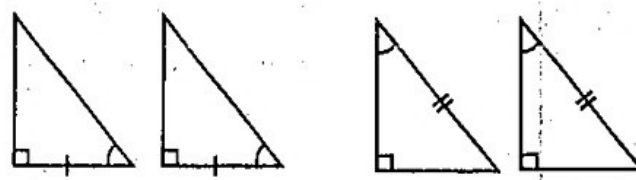
1. Đường thẳng vuông góc, đường thẳng song song.

Tên gọi	Định nghĩa	Hình vẽ	Tính chất
Hai góc đối đỉnh	Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này thuộc tia đối với một cạnh của góc kia		Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau
Hai đường thẳng vuông góc	Hai đường thẳng xx' , yy' cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là hai đường thẳng vuông góc.		Có một và chỉ một đường thẳng xx' đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng yy' cho trước
Đường trung trực của đoạn thẳng	Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy		Điểm M thuộc trung trực của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $MA = MB$
Hai đường thẳng song song	Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung		Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng song song thì : - Hai góc so le trong bằng nhau. - Hai góc đồng vị bằng nhau. - Hai góc trong cùng phía bù nhau.
Tiên đề O-clit	Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đó.		

Từ vuông góc đến song song		 Hình 49	- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau. - Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia. - Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
-----------------------------------	--	---	--

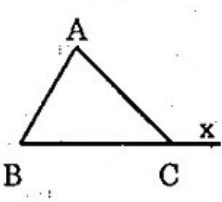
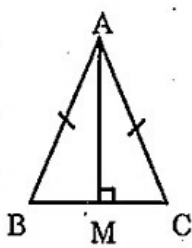
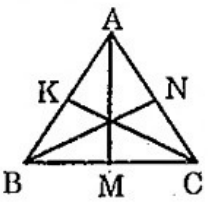
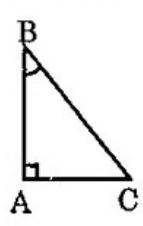
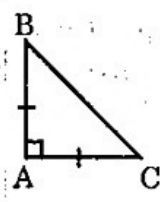
2. Tam giác

a) Các trường hợp bằng nhau của tam giác

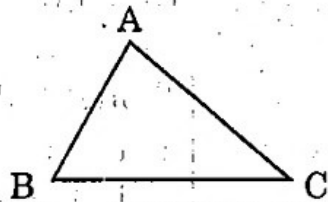
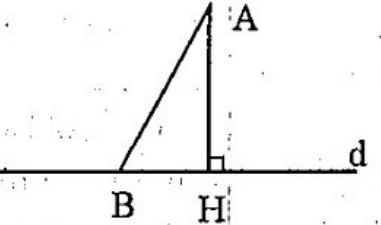
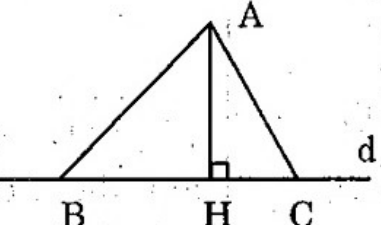
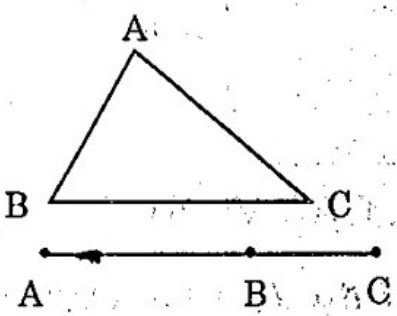
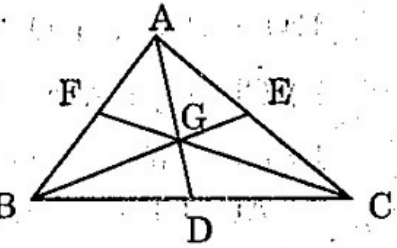
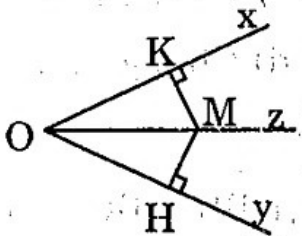
Tam giác thường	Tam giác vuông
 c - c - c	 Cạnh huyền - cạnh góc vuông
 c - g - c	 c - g - c
 g - c - g	 g - c - g Cạnh huyền - góc nhọn

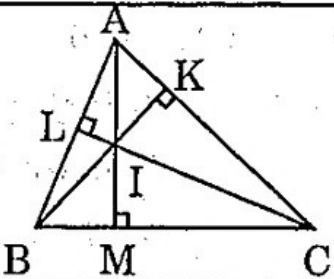
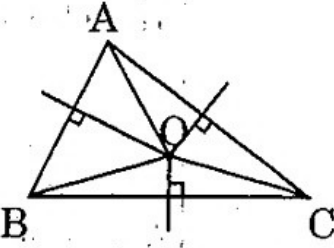
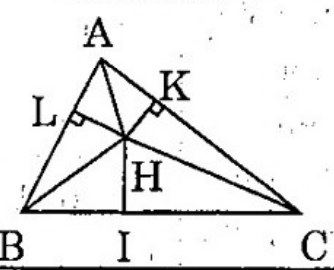
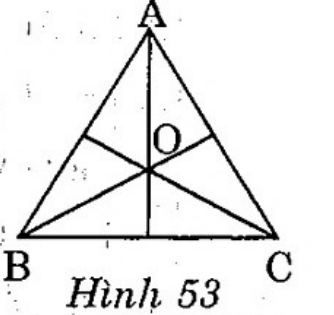
Hình 50

b) Tam giác và một số dạng đặc biệt

	Tam giác	Tam giác cân	Tam giác đều	Tam giác vuông	Tam giác vuông cân
Định nghĩa	 A, B, C không thẳng hàng	 $\triangle ABC$ có $AB = AC$	 $\triangle ABC$ có $AB = AC = BC$	 $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ$	 $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ$ $AB = AC$
Quan hệ giữa các góc	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ $\widehat{ACx} = \hat{A} + \hat{B}$ $\widehat{ACx} > \hat{A}$ $\widehat{ACx} > \hat{B}$	$\hat{B} = \hat{C}$ $\hat{B} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$ $\hat{A} = 180^\circ - 2\hat{B}$	$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$	$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$	$\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$
Quan hệ giữa các cạnh	$\hat{B} > \hat{C}$ $\Leftrightarrow AC > AB$ $* AC - AB < BC$ $* BC < AC + AB$	$AB = AC$	$AB = BC = AC$	$BC^2 = AB^2 + AC^2$ $BC > AB$ $BC > AC$	$AB = AC$ $BC = \sqrt{2}AB$
Dấu hiệu nhận biết		$+ AB = AC$ $+ \hat{B} = \hat{C}$ $+ \text{Hai trong 4 đường sau trùng nhau: đường trung trực của cạnh BC, đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác cùng xuất phát từ đỉnh A}$	$+ AB = BC = AC$ $+ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ $+ \triangle ABC$ cân có một góc bằng 60°	$\triangle ABC$ vuông tại A nếu: $+ \hat{A} = 90^\circ$ $+ \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ $+ BC^2 = AB^2 + AC^2$	$\triangle ABC$ vuông cân đỉnh A nếu: $+ \hat{A} = 90^\circ$ và $AB = AC$ $+ \hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$

3. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác. Các đường đồng quy trong tam giác

	Nội dung kiến thức	Hình vẽ
Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác	$\hat{B} > \hat{C} \Leftrightarrow AC > AB$ $\hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow AC = AB$	
	$A \notin d; B \in d; AH \perp d$. Khi đó $AB \geq AH$. Dấu bằng xảy ra khi điểm B trùng điểm H	
	$A \notin d; B \in d; C \in d; AH \perp d$. Khi đó $AB > AC \Leftrightarrow HB > HC$ $AB = AC \Leftrightarrow HB = HC$	
	Trong $\triangle ABC$ thì : $ AB - AC < BC < AB + AC$ Với 3 điểm A, B, C bất kì, luôn có : $AB + BC \geq AC$. Dấu bằng xảy ra khi điểm B nằm giữa hai điểm A và C.	
Tính chất các đường đồng quy trong tam giác.	Trong $\triangle ABC$, ba đường trung tuyến AD, BE, CF đồng quy tại điểm G và $\frac{GA}{DA} = \frac{GB}{EB} = \frac{GC}{FC} = \frac{2}{3}$. Điểm G gọi là trọng tâm của tam giác.	
	Điểm M nằm trong góc xOy. $MK \perp Ox$; $MH \perp Oy$. Khi đó Điểm M thuộc tia phân giác Oz của góc xOy $\Leftrightarrow MH = MK$	 Hình 52

Trong ΔABC, ba đường phân giác đồng quy tại điểm I và điểm I cách đều ba cạnh của tam giác; $IK = IM = IL$	
Trong ΔABC, ba đường trung trực đồng quy tại điểm O và điểm O cách đều ba đỉnh của tam giác; $OA = OB = OC$.	
Trong ΔABC, ba đường cao đồng quy tại điểm H. Điểm H được gọi là trực tâm của tam giác.	
Nếu ΔABC đều thì trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba cạnh; điểm cách đều ba đỉnh là bốn điểm trùng nhau.	

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Cho ΔABC có góc B là góc nhọn. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C . Kẻ $BE \perp BC$ và $BE = BC$; kẻ $BD \perp BA$ và $BD = BA$.

- Chứng minh $AC = DE$.
- Gọi điểm N là trung điểm của DE , điểm M là trung điểm của AC . Chứng minh $BN = BM$.
- Chứng minh : $\widehat{DBN} = \widehat{ABM}$.
- Chứng minh : $BN \perp BM$ và $AC \perp DE$.

Giải

$$a) + BE \perp BC \Rightarrow \widehat{EBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ABE} = 90^\circ$$

$$BD \perp BA \Rightarrow \widehat{DBA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DBE} + \widehat{ABE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DBE} = \widehat{ABC}$$

+ Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DBE$ có :

$$AB = DB \text{ (gt)}$$

$$\widehat{DBE} = \widehat{ABC} \text{ (cmt)}$$

$$BC = BE$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DBE \text{ (c-g-c)} \Rightarrow AC = DE.$$

b) N là trung điểm của DE $\Rightarrow DN = \frac{1}{2}DE$

M là trung điểm của AC $\Rightarrow AM = \frac{1}{2}AC$

Mà $AC = ED$ nên $DN = AM$

$$\triangle ABC = \triangle DBE \text{ (cm phần a)} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDE}$$

Xét $\triangle BAM$ và $\triangle BDN$ có :

$$BA = BD; \widehat{BAC} = \widehat{BDE}; AM = DN \text{ suy ra } \triangle BAM = \triangle BDN \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow BN = BM.$$

c) $\triangle BAM = \triangle BDN$ (cm phần b) suy ra $\widehat{DBN} = \widehat{ABM}$.

d) * $\widehat{DBN} = \widehat{ABM}$ (do $\triangle BAM = \triangle BDN$).

$$\text{Mà } \widehat{DBN} + \widehat{NBA} = \widehat{DBA} = 90^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ABM} + \widehat{NBA} = 90^\circ = \widehat{NBM} \text{ nên } BN \perp BM$$

* $\triangle ABC = \triangle DBE \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{E}$

$$\text{Kéo dài AC cắt BE tại O và DE tại I} \Rightarrow \widehat{EOI} = \widehat{BOC} \text{ (đối đỉnh)}$$

Lại có $\triangle BOC$ vuông tại B

$$\Rightarrow \widehat{BOC} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EOI} + \widehat{E} = 90^\circ$$

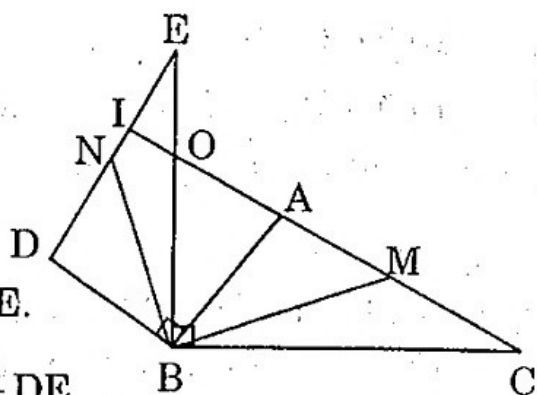
$$\Rightarrow \triangle OIE \text{ vuông tại I} \Rightarrow AC \perp DE.$$

Ví dụ 2 : Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$. Phân giác AD, đường cao AH.

a) Chứng minh góc C nhỏ hơn 60° .

b) Chứng minh $\widehat{HAD} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$.

c) Phân giác góc ngoài tại đỉnh A của $\triangle ABC$ cắt BC tại K. Tính góc AKB khi $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$.



Hình 54

d) Tính góc A khi $\widehat{HAD} = 12^\circ$; $3\widehat{B} = 5\widehat{C}$.

e) Từ B kẻ đường thẳng song song với AD cắt AK tại I. Chứng minh $\widehat{IBD} > \widehat{IAH}$.

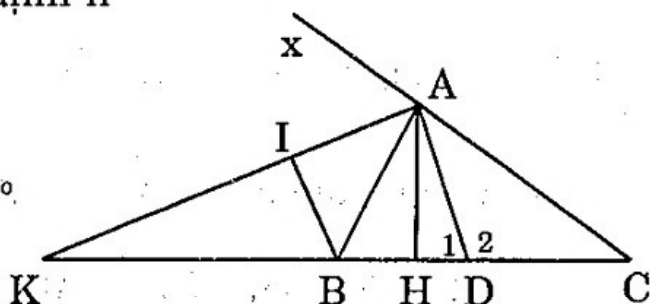
Giải

a) $\triangle ABC$ có : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (định lý tổng các góc trong tam giác)

Mà $\widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$

$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{C} + \widehat{C} < \widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{A} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3\widehat{C} < 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} < 60^\circ.$$



Hình 55

b) Ta có $\widehat{D}_1 = \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{C}$; $\widehat{D}_2 = \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{B}$

$$\Rightarrow \widehat{D}_1 < \widehat{D}_2 \Rightarrow \widehat{D}_1 < 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAH} < \widehat{BAD}$$

$\Rightarrow$ tia AH nằm giữa hai tia AB và AD $\Rightarrow$ H nằm giữa B và D

$\triangle HAD$ vuông tại H $\Rightarrow \widehat{HAD} = 90^\circ - \widehat{D}_1$

Mà góc $\widehat{D}_1$ là góc ngoài tại đỉnh D của $\triangle ADC$

$$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C} + \widehat{DAC} = \widehat{C} + \frac{\widehat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{HAD} = 90^\circ - \left(\widehat{C} + \frac{\widehat{A}}{2} \right) = \frac{[180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C})] - \widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}.$$

c) $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{HAD} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{ADH} = 75^\circ$. Mà AK và AD lần lượt là phân giác của hai góc kề bù $\widehat{xAB}$ và góc BAC $\Rightarrow AK \perp AD$

$\Rightarrow \triangle AKD$ vuông tại A, suy ra $\widehat{AKB} = 15^\circ$.

d) $\widehat{HAD} = 12^\circ \Rightarrow \widehat{B} - \widehat{C} = 24^\circ$ mà $3\widehat{B} = 5\widehat{C} \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ$; $\widehat{C} = 36^\circ$ nên góc $\widehat{A} = 84^\circ$.

e) $\widehat{IAH} < \widehat{IAD} = 90^\circ$ mà $\triangle HAD$ có $\widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D}_1 < 90^\circ$

Do $BI \parallel AD \Rightarrow \widehat{IBD} + \widehat{BDA} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{IBD} > 90^\circ$ hay $\widehat{IBD} > \widehat{IAH}$.

Ví dụ 3 : Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Qua C vẽ xy vuông góc với AC. Tia phân giác của góc B cắt xy tại E, cắt AC tại D. So sánh :

a) CE và AB

b) AD và DC

c) BD và DE.

Giải

- a) $\triangle CEB$ cân tại C (do $\widehat{E} = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$)

suy ra $CE = CB > AB$.

- b) Vẽ $DF \perp BC$

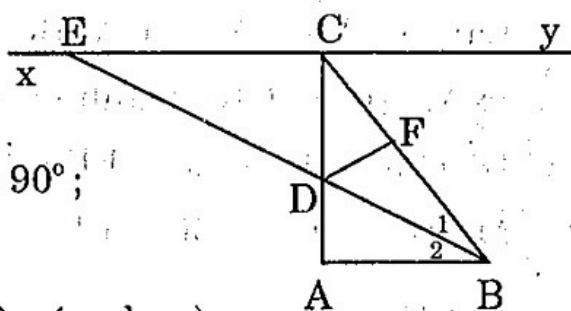
Xét $\triangle DAB$ và $\triangle DFB$ có : $\widehat{A} = \widehat{F} = 90^\circ$;

$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$; cạnh BD chung

$\Rightarrow \triangle DAB = \triangle DFB$ (cạnh huyền và góc nhọn).

$\Rightarrow CD > DF = DA \Rightarrow CP > DA$

Hình 56



- c) Xét $\triangle ECD$ và $\triangle BCD$ có :

Cạnh CD chung; $CE = CB$; $\widehat{ECD} = 90^\circ > \widehat{DCB}$. Suy ra $DE > DB$.

Ví dụ 4 : Cho $\triangle ABC$. Điểm M bất kì nằm trong tam giác. Từ M hạ $MD \perp BC$; $ME \perp AC$; $MF \perp AB$. Chứng minh : $BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$.

Giải

$\triangle BMD$ vuông tại D. Áp dụng định lí Pitago ta có :

$$BM^2 = BD^2 + MD^2 \Rightarrow BD^2 = BM^2 - MD^2$$

Chứng minh tương tự có :

$$CE^2 = CM^2 - ME^2;$$

$$AF^2 = MA^2 - MF^2;$$

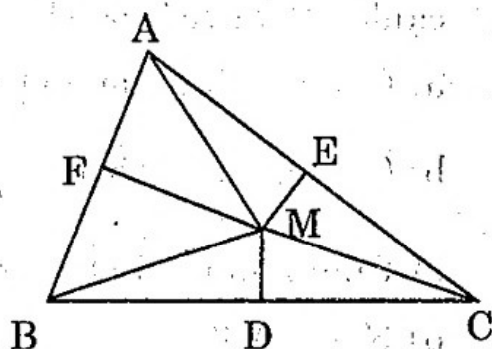
$$CD^2 = MC^2 - MD^2;$$

$$EA^2 = MA^2 - ME^2;$$

$$FB^2 = MB^2 - MF^2$$

Suy ra : $BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$.

Hình 57



Ví dụ 5 : Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Từ điểm E trên cạnh AB kẻ đường thẳng song song với BC nó cắt AC tại F. Chứng minh rằng :

a) $BF > \frac{1}{2}(EF + BC)$

b) $BE > \frac{1}{2}(BC - EF)$.

Giải

- a) Kẻ AI; EH; FK cùng vuông góc với BC

Do $EF \parallel BC$ nên $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$; $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

Mà $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{B}$

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AFE} \Rightarrow \triangle AEF$ cân tại A $\Rightarrow AE = AF$

Lại có : $AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A) $\Rightarrow BF = CE$

$\Rightarrow \triangle BHE = \triangle CKF$ (cạnh huyền-góc nhọn) $\Rightarrow BH = KC$

Dễ chứng minh được $EF = HK$

Mà $BH + KC = BC - EF$

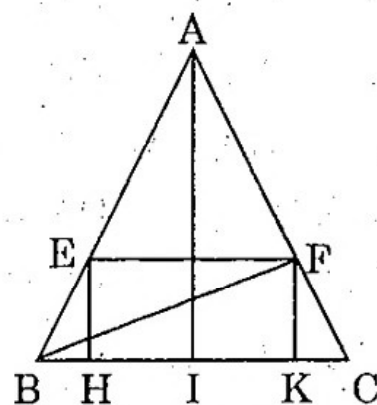
$\Rightarrow BH = KC = \frac{1}{2}(BC - EF)$

$BF > BK = BC - KC$

$BF > BK = EF + BH = EF + KC$

$\Rightarrow 2BF > (BC - KC) + (EF + KC)$

$BF > \frac{BC + EF}{2}$



Hình 58

b) $\triangle EBH$ có $BE > BH \Rightarrow BE > \frac{BC - EF}{2}$.

Ví dụ 6 : Cho $\triangle ABC$ cân tại A, kẻ đường cao AH. Gọi O là giao điểm của trung trực cạnh AC với AH. Lấy E, F theo thứ tự trên các cạnh AB và AC sao cho $AE = CF$.

a) Chứng minh điểm O cách đều ba đỉnh của $\triangle ABC$.

b) Chứng minh $\widehat{OCF} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ và $\triangle OAE = \triangle OCF$.

c) Chứng minh $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

d) Nếu $\triangle ABC$ là tam giác bất kì. Lấy M, N theo thứ tự thuộc cạnh AB và AC sao cho $AM = CN$. Gọi O là giao điểm của phân giác góc A và trung trực cạnh AC. Chứng minh trung trực của MN đi qua điểm O.

Giải

a) $\triangle ABC$ cân tại A có AH là đường cao nên AH đồng thời là trung trực của $\triangle ABC$.

Mà O là giao điểm của AH và trung trực của cạnh AC

$\Rightarrow$ O là giao điểm ba đường trung trực của $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ Điểm O cách đều ba đỉnh của $\triangle ABC$.

b) * Có $OA = OC$ nên $\triangle AOC$ cân $\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OAC}$

$\triangle ABC$ cân tại A có AH là đường cao nên AH đồng thời là phân giác của góc A $\Rightarrow \widehat{OAC} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$

Vậy $\widehat{OCF} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$.

* Xét $\triangle OAF$ và $\triangle OCF$ có :

$$OA = CO; \widehat{OAE} = \widehat{OCF} \left(= \frac{1}{2} \widehat{BAC} \right); AE = CF$$

Suy ra $\triangle OAF = \triangle OCF$ (c-g-c).

c) Ta có $\widehat{HOC} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA} = 2\widehat{OAC}$ (do góc HOC là góc ngoài tại đỉnh O của tam giác AOC cân tại đỉnh O)

Mà $\triangle BOC$ cân đỉnh O có đường cao OH nên OH cũng là phân giác của $\triangle BOC \Rightarrow \widehat{HOC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$

Mà $\widehat{OAC} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$. Suy ra $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

d) O thuộc trung trực của AC $\Rightarrow OA = OC \Rightarrow \triangle AOC$ cân

$$\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OAC}$$

Mà AO là phân giác của góc A

$$\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OAB} \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OCA}$$

Xét $\triangle OMA$ và $\triangle ONC$ có :

$$OA = OC$$

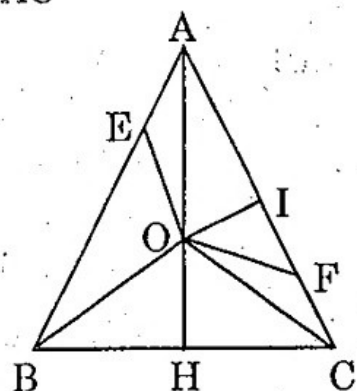
$$\widehat{OAM} = \widehat{OCN}$$

$$AM = CN$$

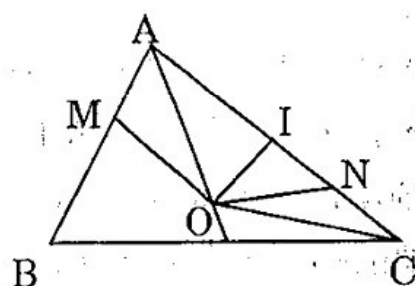
$$\Rightarrow \triangle OMA = \triangle ONC \text{ (c-g-c)} \Rightarrow OM = ON$$

$\Rightarrow$ O thuộc trung trực của MN. Hay trung trực của MN đi qua O.

Ví dụ 7 : Cho $\triangle ABC$. Đường cao AH và phân giác BE. Biết góc AEB bằng 45° . Tính góc EHC ?



Hình 59



Hình 60

Giải

$\triangle BEC$ có : $\widehat{AEB} = \widehat{EBC} + \widehat{C}$

$$45^\circ = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{C}$$

$$90^\circ = \widehat{B} + 2\widehat{C}$$

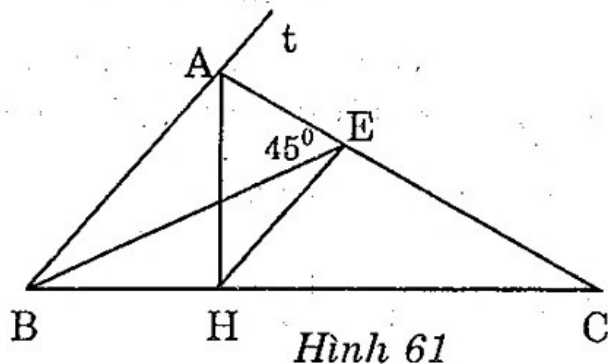
$$\Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ - 2\widehat{C}$$

$\triangle ABC$ có : $\widehat{tAC} = \widehat{B} + \widehat{C} = (90^\circ - 2\widehat{C}) + \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{C} = \widehat{HAC}$

$\Rightarrow AC$ là phân giác góc ngoài tại đỉnh A của $\triangle ABH$

Mà BE là phân giác của góc B. Nên HE là tia phân giác góc ngoài tại H của $\triangle ABH$

$$\Rightarrow \widehat{EHC} = \frac{1}{2} \widehat{AHC} = 45^\circ.$$



Ví dụ 8 : Cho $\triangle ABC$ đều và điểm M nằm giữa B và C. Đường thẳng kẻ qua M song song với AC cắt AB ở P, đường thẳng kẻ qua M song song với AB cắt AC ở N.

a) Chứng minh các tam giác BPM và MCN là các tam giác đều.

b) AM cắt PN tại I, gọi O là trọng tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh $\triangle OAN = \triangle OBP$.

c) Chứng minh OI là đường trung trực của NP.

Giải

a) $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$

$MP \parallel AC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{BMP} = \widehat{C} = 60^\circ$ (đồng vị)

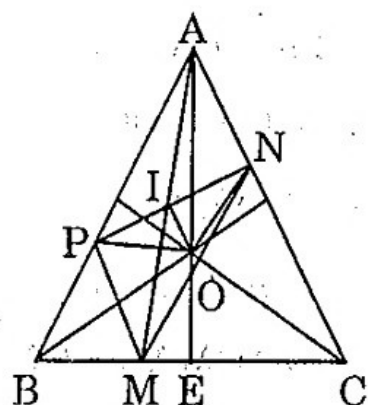
Suy ra $\triangle BPM$ là tam giác đều.

Chứng minh tương tự $\triangle CNM$ đều.

b) $\triangle ABC$ đều có O là trọng tâm nên O đồng thời là giao điểm của 3 đường trung tuyến, 3 đường trung trực, 3 đường cao.

$$\Rightarrow OB = OA; \widehat{OBA} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 30^\circ$$

$$\widehat{OAC} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = 30^\circ$$



Hình 62

+ Xét $\triangle APM$ và $\triangle MNA$ có :

$$\widehat{PAM} = \widehat{NMA} \text{ (so le trong - } MN \parallel AB)$$

Chung cạnh AM

$$\widehat{PMA} = \widehat{NAM} \text{ (so le trong - } MP \parallel AC)$$

Suy ra $\triangle APM = \triangle MNA$ (g-c-g) $\Rightarrow AN = PM; AP = MN$

Mặt khác $BM = BP = PM$ (do $\triangle MBP$ đều) $\Rightarrow AN = BP$

+ Xét $\triangle OAN$ và $\triangle OBP$ có : $OA = OB; \widehat{OAN} = \widehat{OBP} = 30^\circ; AN = BP$,
suy ra $\triangle OAN = \triangle OBP$ (c-g-c).

c) Xét $\triangle AIN$ và $\triangle MIP$ có :

$$\widehat{IAN} = \widehat{IMP} \text{ (so le trong - } AC \parallel PM)$$

$$AN = MP$$

$$\widehat{INA} = \widehat{IPM} \text{ (so le trong - } AC \parallel PM)$$

$\Rightarrow \triangle AIN = \triangle MIP$ (g-c-g), suy ra OI là trung tuyến của tam giác PON

Mặt khác $\triangle AON = \triangle BOP$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow OP = ON \Rightarrow \triangle PON \text{ cân đỉnh O}$$

Suy ra trung tuyến OI đồng thời là trung trực của tam giác cân PON.

III- BÀI TẬP

8.1. Tam giác ABC có góc C là góc nhỏ nhất. Từ B vẽ đường thẳng song song với phân giác AD của góc BAC. Đường thẳng này cắt đường thẳng AC ở E.

a) Chứng minh góc C là góc nhọn.

b) Chứng minh $\triangle ABE$ là tam giác cân.

c) Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh AM vuông góc với AD.

d) Gọi O là giao điểm của AD và đường cao BH của $\triangle ABC$. Tính các góc của $\triangle ABC$ nếu $\hat{A} = 2\hat{B}; \hat{C} = 30^\circ$.

8.2. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH. Vẽ về phía ngoài $\triangle ABC$ các tam giác vuông cân ABD và ACE đỉnh A. Gọi K là giao điểm của AH và DE.

a) Chứng minh $BE = CD$ và BE vuông góc với CD.

b) Chứng minh K là trung điểm của DE và $AK = \frac{1}{2}BC$.

- 8.3. Cho tam giác ABC nhọn, $\hat{A} > 60^\circ$, về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác đều ABD và ACE. Từ D và E vẽ các cung tròn tâm D bán kính bằng AC và tâm E bán kính AB chúng cắt nhau tại F (F nằm khác phía với A đối với đường thẳng DE). Chứng minh $\triangle FBC$ là tam giác đều.
- 8.4. Cho tam giác ABC có $AB = 8\text{cm}$; $AC = 15\text{cm}$; $BC = 17\text{cm}$. Qua A, B, C kẻ lần lượt các đường thẳng a, b, c song song với BC, AC, AB. Gọi D, E, F theo thứ tự là giao điểm của các đường thẳng a với b, b với c, c với a.
- Chứng minh $\triangle DEF$ là tam giác vuông.
 - Tính chu vi $\triangle DEF$.
- 8.5. Cho tam giác ABC cân tại A; $\hat{B} = \hat{C} = 40^\circ$. Trên AB kéo dài về phía B lấy điểm M sao cho $AM = BC$. Tính góc AMC?
- 8.6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $\hat{B} = 54^\circ$. Trên AC lấy điểm D sao cho $\widehat{DBC} = 18^\circ$. Chứng minh $BD < AC$.
- 8.7. Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông ở B có $\hat{A} = 60^\circ$, tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt BC ở D, kẻ DH vuông góc với AC ($H \in AC$). Gọi E là hình chiếu của điểm B trên đường thẳng AD. Chứng minh:
- $AB = AH$; $AD \perp BH$
 - $HA = HC$
 - $DC > AB$
 - Ba đường thẳng AB, CE, DH đồng quy.
- 8.8. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM. Vẽ MH vuông góc với AB tại H, MK vuông góc với AC tại K.
- Chứng minh rằng $BH = CK$.
 - Chứng minh rằng AM là đường trung trực của HK.
 - Từ B và C vẽ đường thẳng lần lượt vuông góc với AB, AC chúng cắt nhau tại D. Chứng minh rằng 3 điểm A, M, D thẳng hàng.
- 8.9. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, BE là phân giác của góc B. Trên tia đối của tia AE lấy điểm F sao cho $AE = AF$.
- Chứng minh $BE = BF$.

8.15. Cho hình vuông ABCD có cạnh $AB = a$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $MN \parallel AC$, $PQ \parallel AB$ và $\widehat{AMQ} = 30^\circ$.

a) Gọi A' đối xứng với A qua đường thẳng MQ, C' đối xứng với C qua đường thẳng NP. Giả sử QA' cắt đoạn NP tại E, đường thẳng PC cắt đoạn thẳng MQ tại F. Chứng minh rằng 5 điểm E, F, Q, D, P cách đều trung điểm I của PQ.

b) Cho $\frac{MN}{AC} = \frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}$. Tính diện tích hình thang MNPQ theo a.

8.16. Cho hình vuông ABCD và điểm P nằm trong $\triangle ABC$.

a) Giả sử $\widehat{BPC} = 135^\circ$. Chứng minh rằng $2PB^2 + PC^2 = PA^2$.

b) Các đường thẳng AP và CP cắt cạnh BC và BA tương ứng tại các điểm M và N. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua trung điểm của đoạn thẳng MN. Chứng minh rằng khi P thay đổi trong $\triangle ABC$, đường thẳng PQ luôn đi qua điểm D.

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán – Tin ĐHQG Hà Nội)

8.17. Cho góc $\angle xAy = 60^\circ$, vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C. Vẽ BH vuông góc với Ay, CM vuông góc với Ay, BK vuông góc với AC. Chứng minh :

a) K là trung điểm của AC b) $BH = \frac{AC}{2}$

c) $\triangle KMC$ là tam giác đều.

(Trích đề thi HSG lớp 7 – 2008)

8.18. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} > 90^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AC. Trên tia đối của tia IB lấy điểm D sao cho $IB = ID$. Nối C với D.

a) Chứng minh $\triangle AIB = \triangle CID$.

b) Gọi M là trung điểm của BC; N là trung điểm của AD. Chứng minh rằng I là trung điểm của MN.

c) Chứng minh $\widehat{AIB} < \widehat{BIC}$.

d) Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để AC vuông góc với CD.

(Trích đề thi HSG lớp 7 – 2009)

Chuyên đề : CHỨNG MINH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

I- KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Thế nào là phương pháp chứng minh phản chứng :

- Trong nhiều bài toán để chứng minh B là đúng, người ta chứng minh phủ định của B là sai.
- Phương pháp chứng minh phản chứng là phương pháp chứng minh gián tiếp, trong đó để chứng tỏ kết luận của bài toán là đúng, ta chứng minh phủ định của kết luận là sai.

Ví dụ : Để chứng minh $AB < CD$ ta chứng minh rằng $AB \geq CD$ là sai. Để chứng minh nếu 2 đường thẳng phân biệt bị cắt bởi đường thẳng thứ ba và tạo ra 2 góc trong cùng phía bù nhau thì 2 đường thẳng đó song song, ta chứng minh nếu 2 đường thẳng đó cắt nhau thì sai.

2. Các bước chứng minh bài toán phản chứng :

Bước 1: Phủ định kết luận (giả sử có điều trái với kết luận của bài toán).

Bước 2: Rút ra điều vô lí (từ giả thiết, lập luận dẫn đến điều vô lí, vô lí có thể là trái giả thiết hoặc trái với một điều đúng nào đó, trái với thực tế, trái với kiến thức đã học dẫn đến mâu thuẫn).

Bước 3: Khẳng định kết luận bài toán. Từ mâu thuẫn trên, ta khẳng định điều trái với kết luận bài toán là sai, kết luận của bài toán là đúng.

II- CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Cho $\triangle ABC$ có góc B bằng góc C. Chứng minh : $\triangle ABC$ là tam giác cân.

Giải

Giả sử $AB > AC$.

Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

Ta có $AD = AC \Rightarrow \triangle ADC$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACD}$ (1)

Mà $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$ ($\widehat{ADC}$ là góc ngoài của $\triangle BDC$) (2)

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (gt) (3)

$\widehat{ACB} > \widehat{ACD}$ (D nằm giữa A và B

$\Rightarrow$ tia CD nằm giữa 2 tia CA và CB) (4)

Từ (2), (3), (4) $\Rightarrow \widehat{ADC} > \widehat{ACD}$ (5)

Từ (1) và (5) dẫn đến mâu thuẫn :

$\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$ và $\widehat{ADC} > \widehat{ACD}$

Vậy $AB > AC$ là sai

Chứng minh tương tự $AB < AC$ cũng sai

Vậy $AB = AC$ là đúng $\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A.

Ví dụ 2 : Nếu một tam giác có đường trung tuyến cũng là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.

Giải

- Giả sử $AB > AC$.

Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

- Ta có : $\triangle AMD = \triangle AMC$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}$ (1)

- $MD = MC$, lại có : $MB = MC$ (gt)

$\Rightarrow MB = MD \Rightarrow \triangle MBD$ cân tại M

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D}_2$ (2)

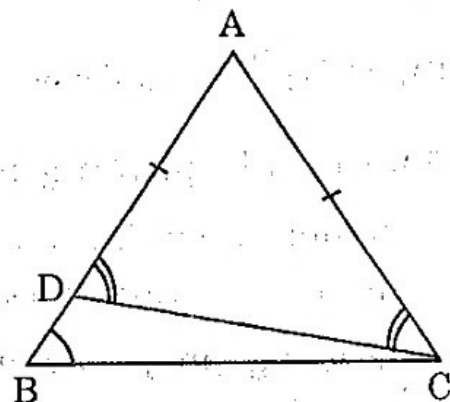
- Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2$ mà

$\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 180^\circ$ (2 góc kề bù)

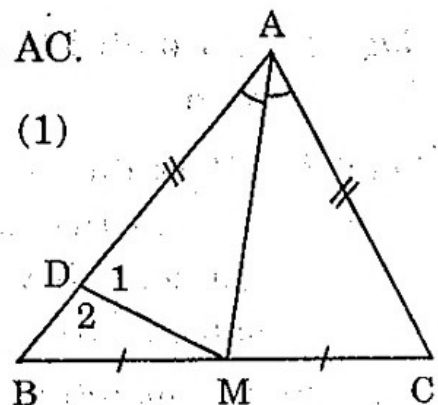
$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ mà $\widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ \Rightarrow$ mâu thuẫn

- Giả sử $AB < AC$. Chứng minh tương tự dẫn đến mâu thuẫn

Vậy $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A.



Hình 63



Hình 64

III- BÀI TẬP

1. Cho góc vuông xOy. Trên cạnh Ox lấy điểm A và trên cạnh Oy lấy điểm B. Kẻ đường thẳng a vuông góc với Ox tại A và đường thẳng b vuông góc với Oy tại B.

- a) Hai đường thẳng a và b có cắt nhau không ?
- b) Chỉ rõ rằng a vuông góc với b.
2. Cho góc $\widehat{xOy} < 180^\circ$. Trên cạnh Ox lấy điểm A, trên cạnh Oy lấy điểm B. Kẻ đường thẳng At vuông góc với Ox và Bz vuông góc với Oy. Hỏi At và Bz có cắt nhau không ?
3. Chứng minh rằng : nếu một tam giác có một góc bằng 30° và cạnh đối diện với góc ấy bằng nửa cạnh khác thì tam giác đó là tam giác vuông.
4. Cho điểm M là điểm nằm trong $\triangle ABC$ cân ở A sao cho $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$. Chứng minh : $MC > MB$.
5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. D là một điểm nằm trong tam giác, biết $\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$. Chứng minh rằng $DB < DC$.

Phần II. HƯỚNG DẪN GIẢI

Chương I. SỐ HỮU TỈ – SỐ THỰC

§1. TẬP HỢP SỐ HỮU TỈ

1.1. a) x là một số hữu tỉ $\Leftrightarrow a - 17 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 17$.

b) x là số hữu tỉ dương $\Leftrightarrow a - 17 > 0 \Leftrightarrow a > 17$.

c) x là số hữu tỉ âm $\Leftrightarrow a - 17 < 0 \Leftrightarrow a < 17$.

d) $x = -1 \Leftrightarrow a - 17 = -15 \Leftrightarrow a = 2$.

e) $x > 1 \Leftrightarrow 0 < a - 17 < 15 \Leftrightarrow 17 < a < 32$.

f) $0 < x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a - 17 > 0 \\ a - 17 > 15 \end{cases} \Leftrightarrow a > 32$.

1.2. Gọi các phân số phải tìm là $\frac{7}{x}$ ($x \in \mathbb{Z}; x \neq 0$). Ta có :

$$\frac{-5}{11} < \frac{7}{x} < \frac{-5}{13} \text{ hay } \frac{-35}{77} < \frac{-35}{-5x} < \frac{-35}{91};$$

$$\frac{35}{77} > \frac{35}{5x} > \frac{35}{91}; 77 < -5x < 91; 15,4 < -x < 18,2; -18,2 < x < -15,4$$

$$\text{Mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{-16; -17; -18\}$$

Vậy các phân số là :

$$\frac{-5}{11} < \frac{7}{-16} < \frac{-5}{13}; \frac{-5}{11} < \frac{7}{-17} < \frac{-5}{13} \text{ và } \frac{-5}{11} < \frac{7}{-18} < \frac{-5}{13}.$$

1.3. a) Ta có : $\frac{25}{31} > \frac{24}{31} > \frac{23}{31} = \frac{69}{92} > \frac{68}{92} = \frac{17}{23}$. Do đó $\frac{-17}{23} > \frac{-25}{31}$.

b) Ta có : $\frac{27}{38} = \frac{135}{190} > \frac{125}{190} > \frac{125}{195}$. Do đó $\frac{-27}{38} < \frac{-125}{195}$.

c) Ta có : $\frac{22}{111} < \frac{22}{110} = \frac{1}{5} = \frac{27}{135} < \frac{27}{134}$. Do đó $\frac{-22}{111} > \frac{-27}{134}$.

1.4. Gọi x và $x + 1$ là các tử của hai phân số phải tìm.

$$\text{Ta có : } \frac{x}{5} < \frac{7}{9} < \frac{x+1}{5}, \text{ do đó } x < \frac{35}{9} < x+1 \text{ hay } \frac{26}{9} < x < \frac{35}{9}.$$

Trên trục số, điểm $3\frac{8}{9}$ nằm giữa hai điểm nguyên liên tiếp là 3 và 4. Vậy $x = 3$.

Các phân số cần tìm là $\frac{3}{5}$ và $\frac{4}{5}$.

$$1.5. \quad \frac{7}{15x} + \frac{9}{10y} = \frac{2}{5} - \frac{359}{30xy} \Rightarrow \frac{14y + 27x}{30xy} = \frac{12xy - 359}{30xy}$$

$$\Rightarrow 12xy - 359 = 27x + 14y \Rightarrow 3x(4y - 9) - 14y = 359$$

$$\Rightarrow 6x(4y - 9) - 28y = 718 \Rightarrow 6x(4y - 9) - 7(4y - 9) = 719 + 63$$

$$\Rightarrow (4y - 9)(6x - 7) = 781 = 11 \cdot 71$$

$4y - 9$	$6x - 7$
-781	-1
-1	-781
11	71
71	11
-11	-71
-71	-11
781	1
1	781

x	y
1	-193
-129	2
13	5
3	20

Vậy

$$(x; y) = \{1; -193\}$$

$$(x; y) = \{-129; 2\}$$

$$(x; y) = \{13; 5\}$$

$$(x; y) = \{3; 20\}.$$

$$1.6. \text{ Theo đề bài : } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc \Rightarrow ad + ab < bc + ab$$

$$\Rightarrow a(b + d) < b(a + c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Mặt khác : } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc \Rightarrow ad + cd < bc + cd$$

$$\Rightarrow d(a + c) < c(b + d) \Rightarrow \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}.$$

§2. CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

$$1.7. a) \quad -\frac{1}{4} + \frac{7}{33} + \frac{-5}{3} + \frac{5}{4} + \frac{-6}{11} + \frac{48}{49} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{5}{3} + \frac{6}{11} + \frac{-7}{33}\right) + \frac{48}{49}$$

$$= 1 - 2 + \frac{48}{49} = -\frac{1}{49}$$

$$b) \quad [(-1) + 1] + [(-2) + 2] + [(-3) + 3] + 4 -$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 4 - 1 - 1 - 1 = 1.$$

$$1.8. a) \quad x = \frac{-5}{12}$$

$$b) \quad x = \frac{131}{65} \text{ hoặc } x = \frac{-181}{65}$$

$$1.9. a) \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Có } \left| \frac{2}{7} - \frac{1}{6} + x \right| \geq 0 \\ \bullet -\frac{9}{4} - |y| < 0 \end{array} \right\} \text{ Vậy không tồn tại } x, y.$$

$$b) \quad x = \frac{7}{5} \text{ và } y = \frac{-9}{25}$$

$$1.10. a) \quad x = \frac{4}{3} \text{ hoặc } x = \frac{26}{21}$$

$$b) \quad x > 0 \text{ hoặc } x < -17$$

$$c) \quad \frac{9}{7} < x < 2 \text{ hoặc } -\frac{2}{7} < x < \frac{3}{7}$$

$$d) \quad |x+1| \cdot (1 - |x-1|) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x+1| = 0 \\ |x-1| = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x-1 = 1 \\ x-1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$1.11. a) \quad A = \left| x + \frac{23}{19} \right| \geq 0 \Rightarrow \text{GTNN của } A = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{23}{19}$$

$$B = \left| x - \frac{5}{7} \right| - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{GTNN của } B = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{7}$$

$$b) C = -\left|\frac{7}{9} - x\right| \leq 0 \Rightarrow \text{GTLN của } C = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{9}$$

$$D = 11 - \left|x - \frac{3}{7}\right| \leq 11 \Rightarrow \text{GTLN của } D = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$$

1.12. Trong 25 số đã cho, phải có ít nhất một số dương, vì nếu cả 25 số đều âm thì tổng bốn số bất kì là âm, trái với đề bài. Tách riêng số dương đó, còn lại 24 số chia thành 6 nhóm, nên tổng của 6 nhóm đó là số dương. Vậy tổng của 25 số đó là dương.

§3. NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

$$1.13. a) A = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{6 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right)} + \frac{4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625} \right)}{6 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625} \right)} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$$

$$b) B = \frac{1}{100.99} - \left(\frac{1}{99.98} + \frac{1}{98.97} + \dots + \frac{1}{2.1} \right)$$

Biểu thức trong ngoặc bằng

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{9900} - \frac{98}{99} = \frac{-9799}{9900}$$

$$c) C = -\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{3}{2}} = -1.$$

$$1.14. \begin{cases} \frac{6x-14}{13} = \frac{5y+9}{11} & (1) \\ 3x-2y=19 & (2) \end{cases} \Rightarrow 6x-4y=38$$

$$\frac{6x-14}{13} = \frac{5y+9}{11} = \frac{4y+7,2}{8,8} = \frac{6x-14-4y-7,2}{13-8,8} = \frac{6x-4y-21,2}{4,2}$$

$$= \frac{38-21,2}{4,2} = \frac{16,8}{4,2} = 4$$

$$\bullet \frac{6x-14}{13} = 4 \Rightarrow x = 11$$

$$\bullet \frac{5y+9}{11} = 4 \Rightarrow y = 7$$

Vậy $(x; y) = (11; 7)$.

1.15. a) $|2x + 3| = x + 1$

- $x < -\frac{3}{2}$ ta có : $2x + 3 = -x - 1 \Leftrightarrow 3x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$

Vì $-\frac{4}{3} > -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$ (loại)

- $x \geq -\frac{3}{2}$ ta có : $2x + 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = -2$

Vì $-2 < -\frac{3}{2} \Rightarrow$ loại $x = -2 \Rightarrow$ vô nghiệm.

Cách khác $|2x + 3| = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x + 3 = x + 1 \end{cases} \Rightarrow$ vô nghiệm.
 $\begin{cases} x \geq -1 \\ 2x + 3 = -x - 1 \end{cases}$

b) • (Có thể lập bảng xét dấu để xét)

Ta lần lượt xét trên các khoảng $x \leq -1$; $-1 < x \leq 0$; $0 < x \leq 1$; $x > 1$

- $x \leq -1$ ta có : $-x + 1 - x - x - 1 = 5 \Leftrightarrow -3x = 5$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

- $-1 < x \leq 0$ ta có : $-x + 1 - x + x + 1 = 5 \Leftrightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$ (loại)

- $0 < x \leq 1$ ta có : $-x + 1 + x + x + 1 = 5 \Rightarrow x = 3$ (loại)

- $x > 1$ ta có : $x - 1 + x + x + 1 = 5 \Leftrightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ (thỏa mãn)

Vậy $x = -\frac{5}{3}$ hoặc $x = \frac{5}{3}$.

c) $\left(\frac{x+4}{2008} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{2009} + 1\right) = \left(\frac{x+2}{2010} + 1\right) + \left(\frac{x+1}{2011} + 1\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2012}{2008} + \frac{x+2012}{2009} = \frac{x+2012}{2010} + \frac{x+2012}{2011}$$

$$\Leftrightarrow (x+2012) \cdot \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}\right) = 0 \Leftrightarrow (x+2012) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -2012}$$

Vì ta có : $\frac{1}{2008} > \frac{1}{2009} > \frac{1}{2010} > \frac{1}{2011} \Rightarrow$ biểu thức trong ngoặc luôn khác không.

1.16. a) Ta có :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1.2-1}{2!} + \frac{2.3-1}{3!} + \frac{3.4-1}{4!} + \dots + \frac{99.100-1}{100!} \\
 &= \frac{1.2}{2!} - \frac{1}{2!} + \frac{2.3}{3!} - \frac{1}{3!} + \frac{3.4}{4!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{99.100}{100!} - \frac{1}{100!} \\
 &= \left(\frac{1.2}{2!} + \frac{2.3}{3!} + \frac{3.4}{4!} + \dots + \frac{99.100}{100!} \right) - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{100!} \right) \\
 &= \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{98!} \right) - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{100!} \right) \\
 &= 2 - \frac{1}{99!} - \frac{1}{100!} < 2.
 \end{aligned}$$

b) Ta có : $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}$ ($a, b > 0$)

$$B > \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99} \quad (\text{giữ nguyên 3 thừa số đầu tiên})$$

$$B = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99}$$

$$\Rightarrow B^2 > 2^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99} \cdot \frac{101}{100}$$

$$B^2 > \frac{2^8 \cdot 101}{7.25} = \frac{256 \cdot 101}{175} > 147 > 12^2 \Rightarrow B > 12 \quad (1)$$

Ta có : $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a-1}{b-1} > \frac{a}{b}$ ($a, b > 0$)

$$B = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99} \quad (\text{giữ nguyên 4 thừa số đầu tiên})$$

$$B < \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \dots \cdot \frac{99}{98}$$

$$\Rightarrow B^2 < 2^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^2 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \dots \cdot \frac{99}{98} \cdot \frac{100}{99}$$

$$B^2 < \frac{2^{13}}{49} = \frac{8192}{49} < 167,2 < 169 = 13^2 \Rightarrow B < 13 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 12 < B < 13$.

$$1.17. a) C(x) = \frac{\frac{7}{2} \cdot (2x-3) + \frac{21}{2} - 8}{2x-3} = \frac{\frac{7}{2}(2x-3) + \frac{5}{2}}{2x-3} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2x-3)}$$

$C(x)$ đạt giá trị lớn nhất thì $\frac{5}{2(2x-3)}$ đạt giá trị lớn nhất

$$\Leftrightarrow C(x) = 6 \text{ tại } 2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$b) \text{ Đặt } |x-5| = a \Rightarrow h(x) = 3a^2 - 2a + 1 = 3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$$

$$h(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow h(x) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{2}{3} \Leftrightarrow |x-5| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\frac{2}{3} \\ x = 5\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$1.18. \text{ Ta có : } (x.y)(y.z)(z.x) = \frac{81}{100} \Rightarrow x.y.z = \pm \frac{9}{10}$$

$$\bullet \text{ Nếu } x.y.z = \frac{9}{10} \text{ thì } x = \frac{3}{2}; y = \frac{1}{2}; z = \frac{9}{5}.$$

$$\bullet \text{ Nếu } x.y.z = -\frac{9}{10} \text{ thì } x = -\frac{3}{2}; y = -\frac{1}{2}; z = -\frac{9}{5}.$$

$$1.19. \text{ Có } 2^x = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdots \frac{14}{30} \cdot \frac{15}{32}$$

$$= \frac{1.2.3.4 \cdots 15}{2.2.2.3.2.4.2.5 \cdots 2.15.2.16} = \frac{1.2.3.4 \cdots 15}{(2.2).(2.3).(2.4).(2.5) \cdots (2.15).(2.16)}$$

$$= \frac{1.2.3.4 \cdots 15}{2^{15} \cdot 2.3.4 \cdots 16} = \frac{1}{2^{19}} = 2^{-19} \Rightarrow x = -19.$$

1.20. Gọi 20 số đã cho là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$. Giả sử $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{20}$.

Trong 20 số này, số số âm (nếu có) phải nhỏ hơn 3, vì nếu tồn tại từ 3 số âm trở lên thì tồn tại một tích của 3 số âm là số âm, trái với đề bài. Do đó $a_{19} > 0, a_{20} > 0$. Ta lại có $a_1 \cdot a_{19} \cdot a_{20} > 0$, nên $a_1 > 0$. Vậy mọi số $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ đều dương.

§4. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

$$1.21. a) A = \frac{(2^2)^5 \cdot (3^2)^4 - 2 \cdot (2 \cdot 3)^9}{2^{10} \cdot 3^8 + (2 \cdot 3)^8 \cdot (2^2 \cdot 5)} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5}$$

$$= \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1 - 3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1 + 5)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$b) B = \frac{1}{2}$$

$$c) C = -\frac{10}{7}$$

$$d) D = \frac{-2496}{425}$$

$$1.22. a) (3x - 5)^4 - (3x - 5)^6 = 0$$

$$(3x - 5)^4 \cdot [1 - (3x - 5)^2] = 0$$

$$(3x - 5)^4 \cdot [1 - (3x - 5)][1 + (3x - 5)] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet (3x - 5)^4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \\ \bullet 6 - 3x = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \bullet 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{Vậy } x \in \left\{ \frac{5}{3}; \frac{4}{3}; 2 \right\}.$$

$$b) \left[\frac{1}{3}x^3(3x - 1)^m - \frac{1}{3}x^3 \cdot x^m \right] : \frac{1}{3}x^3 = 0 \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$(3x - 1)^m - x^m = 0 \Rightarrow (3x - 1)^m = x^m$$

$$\bullet \text{ Nếu } m \text{ là số tự nhiên lẻ thì: } 3x - 1 = x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ Nếu } m \text{ là số tự nhiên chẵn thì: } \begin{cases} 3x - 1 = x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 3x - 1 = -x \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$c) \left(x - \frac{1}{3} \right)^3 = \left[\left(\frac{1}{5} \right)^2 \right]^3$$

$$\left(x - \frac{1}{3} \right)^3 = \left(\frac{1}{25} \right)^3 \Rightarrow x - \frac{1}{3} = \frac{1}{25} \Rightarrow x = \frac{28}{75}$$

$$d) \text{ Vì } n \in \mathbb{N}^* \text{ nên } 2^n \text{ là số chẵn khác không}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5 = -3 \\ 2x^2 - 5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \quad \text{Vậy } x \in \{\pm 1; \pm 2\}.$$

1.23. a) $x = 9,5; y = 3,5$.

b) Vì $k \in \mathbb{N}$ nên $2k, 4k$ là các số tự nhiên chẵn

$$\Rightarrow x^{2k} \geq 0; \left(y - \frac{2}{3}\right)^{4k} \geq 0$$

$$\Rightarrow x^{2k} + \left(y - \frac{2}{3}\right)^{4k} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2k} = 0 \\ \left(y - \frac{2}{3}\right)^{4k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

c) $\frac{10x}{3} = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{2}; \frac{625}{144}y^2 \Rightarrow y = \pm \frac{25}{12}$.

1.24. a) $C = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{99}}$

$$5C = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{98}}$$

$$4C = 5C - C = 1 - \frac{1}{5^{99}} < 1 \Rightarrow C < \frac{1}{4}.$$

b) $D = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2}$
 $= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{10^2} < 1.$

1.25. $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{50}$

$$2A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{51} \Rightarrow 2A - A = 2^{51} - 2^0 = 2^{51} - 1$$

Vậy $A < B$.

§5. TỈ LỆ THỨC VÀ TÍNH CHẤT CỦA TỈ LỆ THỨC TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

1.26. a) $x = -\frac{1}{2}$

b) $x = 1,5$

c) Cộng 1 vào mỗi tỉ số ta được $\frac{50}{x+13} = \frac{10}{7}$

$$\Rightarrow x + 13 = 35 \Rightarrow x = 22.$$

d) $x = -\frac{1}{2}$.

$$1.27. a) \text{ Có } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} \\ \frac{c}{d} = \frac{3c}{3d} \end{array} \right\} \quad \frac{2a}{2b} = \frac{3c}{3d} = \frac{2a+3c}{2b+3d} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{2a+3c}{2b+3d}$$

$$\Rightarrow (a+c)(2b+3d) = (b+d)(2a+3c).$$

$$b) \text{ Từ } (a+c)(2b+3d) = (b+d)(2a+3c)$$

$$\Rightarrow 2ab + 3ad + 2bc + 3cd = 2ab + 3bc + 2ad + 3cd$$

$$\Rightarrow ab = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Từ chứng minh câu a và câu b nên

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a+c)(2b+3d) = (2a+3c)(b+d).$$

c) Chứng minh tương tự như câu a, hoặc cách khác :

$$\text{Đặt } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ thì } a = bk; c = dk \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{bk \cdot dk}{bd} = k^2 \quad (1)$$

$$\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{(bk)^2 + (dk)^2}{b^2 + d^2} = \frac{k^2(b^2 + d^2)}{b^2 + d^2} = k^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}.$$

1.28.

$$a) 2x = 3y; 5y = 7z \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{y}{7} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{10}$$

Áp dụng tính chất cơ bản của phân số và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{3x}{63} = \frac{7y}{98} = \frac{5z}{50} = \frac{3x+5z-7y}{63+50-98} = \frac{30}{15} = 2$$

$$\Rightarrow x = 42; y = 28; z = 20.$$

$$b) \text{ Đặt } \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3} = k \Rightarrow x = 5k; y = 7k; z = 3k \text{ và } x^2 + y^2 - z^2 = 585$$

$$\Rightarrow 25k^2 + 49k^2 - 9k^2 = 585 \Rightarrow x = \pm 15; y = \pm 21; z = \pm 9.$$

$$\begin{aligned} \text{c) Từ } \frac{12x-15y}{7} &= \frac{20z-12x}{9} = \frac{15y-20z}{11} \\ &= \frac{12x-15y+20z-12x+15y-20z}{7+9+11} \\ &= \frac{0}{27} = 0 \Rightarrow 12x-15y=0 \Leftrightarrow 12x=15y \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} \quad (1) \end{aligned}$$

$$20z-12x=0 \Leftrightarrow 12x=20z \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{z}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{5+4+3} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\Rightarrow x=20; y=16; z=12.$$

d) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{(y+z+2)+(x+z+3)+(x+y-5)}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

$$(\text{vì } x+y+z \neq 0) \Rightarrow x+y+z = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Rút x, y, z từ (1) thay vào đầu bài ta có :

$$\frac{\frac{1}{2}-x+2}{x} = \frac{\frac{1}{2}-y+3}{y} = \frac{\frac{1}{2}-z-5}{z} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2,5-x}{x} = \frac{3,5-y}{y} = \frac{-4,5-z}{z} = 2$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{6}; y = \frac{7}{6}; z = -\frac{3}{2}.$$

1.29. Gọi a, b, c là số điểm mỗi tổ đạt được. Ta có :

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{5a^2}{45} = \frac{7c^2}{28} = \frac{b^2}{16} = \frac{5a^2+7c^2-b^2}{45+28-16} = \frac{1282500}{57} = 22500$$

$$\Rightarrow a=450; b=600; c=300.$$

1.30. Gọi ba phân số cần tìm là : x, y, z. Vì các tử tỉ lệ với 4 : 3 : 5, và các mẫu tỉ lệ với 1 : 2 : 4 nên

$$\begin{aligned} x:y:z &= \frac{4}{1} : \frac{3}{2} : \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x}{\frac{4}{1}} = \frac{y}{\frac{3}{2}} = \frac{z}{\frac{5}{4}} = \frac{x+y+z}{4+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}} = \frac{1\frac{37}{44}}{\frac{27}{4}} = \frac{3}{11} \\ &\Rightarrow x = \frac{12}{11}; y = \frac{9}{22}; z = \frac{15}{44}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.31. \text{ Ta có : } \frac{a}{2009} &= \frac{b}{2011} = \frac{c}{2013} = \frac{a-b}{-2} = \frac{b-c}{-2} = \frac{a-c}{-4} \\
 &\Rightarrow \frac{(a-c)^2}{16} = \left(\frac{a-b}{-2} \right) \left(\frac{b-c}{-2} \right) = \frac{(a-b)(b-c)}{4} \\
 &\Rightarrow \frac{(a-c)^2}{4} = (a-b)(b-c).
 \end{aligned}$$

1.32.

$$\begin{aligned}
 a) \quad \frac{x^3 + y^3}{6} &= \frac{x^3 - 2y^3}{4} = \frac{2x^3 + 2y^3}{12} = \frac{2x^3 + 2y^3 + x^3 - 2y^3}{12+4} = \frac{3x^3}{16} \\
 \frac{x^3 + y^3}{6} &= \frac{x^3 - 2y^3}{4} = \frac{(x^3 + y^3) - (x^3 - 2y^3)}{6-4} = \frac{3y^3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó : } \frac{3x^3}{16} = \frac{3y^3}{2} \Rightarrow \frac{x^3}{8} = y^3 \Rightarrow \frac{x^6}{64} = y^6$$

Nhân mỗi tỉ số với y^6 ta được :

$$\frac{x^6 \cdot y^6}{64} = y^{12} = \frac{64}{64} = 1 \Rightarrow y = \pm 1; x = \pm 2$$

Vậy ta có : (2; 1), (-2; -1).

$$b) \text{ Đặt } \frac{3}{x-1} = \frac{4}{y-2} = \frac{5}{z-3} = k$$

$$\Rightarrow kx = 3 + k; ky = 4 + 2k; kz = 5 + 3k$$

$$\Rightarrow kx \cdot ky \cdot kz = (3 + k)(4 + 2k)(5 + 3k)$$

$$\Rightarrow k^3 \cdot 192 = 6k^3 + 40k^2 + 86k + 60$$

$$\Rightarrow 93k^3 - 20k^2 - 43k - 30 = 0$$

$$\Rightarrow 93k^3 - 93k^2 + 73k^2 - 73k + 30k - 30 = 0$$

$$\Rightarrow 93k^2(k-1) + 73k(k-1) + 30(k-1) = 0$$

$$\Rightarrow (k-1)(93k^2 + 73k + 30) = 0 \Rightarrow k = 1$$

Vậy $x = 4; y = 6; z = 8$.

1.33. Gọi M là trung điểm của AB. Ô tô đến B sớm hơn dự định vì tăng tốc từ M. Gọi V_1 km/h là vận tốc dự định, vận tốc tăng là V_2 km/h.

$$\text{Theo đề bài ta có : } V_2 = \frac{120}{100} V_1 = \frac{6}{5} V_1$$

Thời gian đi từ M đến B với vận tốc V_1 thời gian t_1 , đi với vận tốc V_2 thời gian đi là t_2 . Thì ta có :

$$V_1 \cdot t_1 = V_2 t_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{t_1}{t_2}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{t_1}{6} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_1 - t_2}{6 - 5} = 10$$

$$\Rightarrow t_1 = 60 \text{ phút}, t_2 = 50 \text{ phút.}$$

Vậy thời gian ô tô đi từ A đến B là : $60 + 50 = 110$ phút
 $= 1$ giờ 50 phút.

$$1.34. \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{a - b + c - d}{b - c + d - e}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a - b + c - d}{b - c + d - e} \\ \frac{b}{c} &= \frac{a - b + c - d}{b - c + d - e} \\ \frac{c}{d} &= \frac{a - b + c - d}{b - c + d - e} \\ \frac{d}{e} &= \frac{a - b + c - d}{b - c + d - e} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{e} = \left(\frac{a - b + c - d}{b - c + d - e} \right)^4$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{e} = \left(\frac{a - b + c - d}{b - c + d - e} \right)^4$$

$$1.35. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a - b}{c - d} \Leftrightarrow \frac{a^4}{c^4} = \frac{b^4}{d^4} = \frac{(a - b)^4}{(c - d)^4} \quad (1)$$

$$\frac{a^4}{c^4} = \frac{b^4}{d^4} = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{(a - b)^4}{(c - d)^4} = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4}.$$

§6. SỐ THẬP PHẦN HỮU HẠN.

SỐ THẬP PHẦN VÔ HẠN TUẦN HOÀN.

$$1.36. -\frac{7}{8} = -0,875; \quad \frac{4}{125} = 0,032; \quad \frac{3}{40} = 0,075$$

$$\frac{8}{15} = 0,5(3); \quad -\frac{5}{9} = -0,(5); \quad \frac{15}{14} = 1,0(714285).$$

$$1.37. 0,(7) = \frac{7}{9}; \quad 1,(21) = 1\frac{7}{33}; \quad -0,(123) = \frac{-41}{333}$$

$$1,11(23) = 1 + \frac{1123 - 11}{9900} = 1\frac{1112}{9900} = 1\frac{278}{2475}$$

$$1,1123 = 1\frac{1123}{10000}$$

$$1.38. 0,(32) = 0,3(23) = 0,(3232).$$

$$1.39. a) = \left(1 + \frac{6}{9}\right) \cdot \left(2 + \frac{3}{9}\right) : \frac{7}{9} = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{7} = 5$$

$$b) = \frac{5}{18} + \frac{16}{45} = \frac{19}{30}$$

$$c) = \frac{17}{11} - \frac{9}{11} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{44}$$

$$d) = 1 : \frac{154}{15} : \frac{5}{12} \cdot \frac{77}{180} = \frac{15}{154} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{77}{180} = \frac{1}{10}$$

$$1.40. a) a + b + c \text{ là ước của } 1000 \text{ và không quá } 27$$

$$\text{Xét các trường hợp } \Rightarrow 1 : 0,125 = 1 + 2 + 5.$$

$$b) a + b + c + d \text{ là ước của } 10000 \text{ và } 10 < a + b + c + d \leq 36$$

$$\text{Xét các trường hợp } \Rightarrow 1 : 0,0625 = 6 + 2 + 5 + 3.$$

$$c) \text{ Ta có : } \frac{\overline{xy} - x}{90} - \frac{\overline{yx} - y}{90} = \frac{8}{90} \Rightarrow \overline{xy} - x - \overline{yx} + y = 8$$

$$\Rightarrow 8(x - y) = 8 \Rightarrow x - y = 1$$

$$\text{mà } x + y = 9. \text{ Do đó } x = 5; y = 4.$$

$$1.41. \text{ Gọi } \overline{abc} \text{ là chu kỳ của số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn}$$

$$(0 < \overline{abc} < 999) \text{ thì phân số phải tìm sẽ có dạng } \frac{\overline{abc}}{999}$$

$$\text{Ta có : } \frac{\overline{abc}}{999} = \frac{\overline{abc}}{3^3 \cdot 37} = \frac{\overline{abc} \cdot 37^2}{3^3 \cdot 37^3} = \frac{\overline{abc} \cdot 37^2}{(3 \cdot 37)^3}$$

$$\text{Đặt } \frac{\overline{abc} \cdot 37^2}{(3 \cdot 37)^3} = \frac{x^3 \cdot 37^3}{3^3 \cdot 37^3} \text{ với } x \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \overline{abc} \cdot 37^2 = x^3 \cdot 37^3 \text{ hay } \overline{abc} = 37x^3 < 999$$

$$\text{Do đó : } x^3 < 27; x < 3 \quad \text{Vậy } x \in \{1; 2\}$$

Với $x = 1$ thì $\overline{abc} = 037$

Với $x = 2$ thì $\overline{abc} = 296$

Vậy phân số phải tìm là : $\frac{037}{296} = \frac{1}{27}$; $\frac{296}{999} = \frac{8}{27}$.

1.42. Gọi phân số tối giản phải tìm là $\frac{a}{b}$; $(a; b) = 1$.

Ta có : $ab = 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

b không có ước nguyên tố 3 và 7 nên $b \in \{4; 5; 10; 20\}$.

Đáp số : $\frac{105}{4} = 26,25$; $\frac{84}{5} = 16,8$; $\frac{21}{20} = 1,05$; $\frac{42}{10} = 4,2$

§7. LÀM TRÒN SỐ - SỐ YÔ TỈ KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI

1.43. a) $5\frac{2}{7} \approx 5,29$ b) $2\frac{2}{3} \approx 2,67$ c) $3\frac{1}{6} \approx 3,17$.

1.44. Chiều dài sân trường là :

$$\frac{40,27 + 40,28 + 40,23 + 40,24 + 40,25}{5} \approx 40,25 \text{ (m)}.$$

1.45. Điểm trung bình học kì I của bạn Dũng là :

$$\frac{8 + 7 + 9 + 6 + 2 \cdot (6 + 9 + 7) + 3 \cdot 8}{13} \approx 7,5.$$

1.46. a) 8 b) $\frac{-17}{35}$ c) $\frac{-11}{6}$ d) -3.

1.47. a) A có nghĩa khi $2012 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2012$.

b) Với $x \leq 2012$ thì $\sqrt{2012 - x} \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2013 + \sqrt{2012 - x} \geq 2013$$

Vậy GTNN của A = 2013 $\Leftrightarrow x = 2012$.

1.48. a) $\sqrt{15} < \sqrt{20}$ nên $-\sqrt{15} > -\sqrt{20}$.

$$\left. \begin{array}{l} 7 = \sqrt{49} \\ \sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} \end{array} \right\} \Rightarrow 7 < \sqrt{(-8)^2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{25 - 9} > \sqrt{25} - \sqrt{9}.$$

§8. SỐ THỰC

1.49. a) $(3,4 - 1,4)x = -5,5 + 3,5$

$$2x = -9 \Rightarrow x = -4,5.$$

b) $(0,6 + 0,4)x - (0,36 - 2,18) : (3,8 + 0,2) = 0$

$$x = -1,82 : 4 \Rightarrow x = -0,455.$$

c) $x + 13,0,12 = \frac{1}{4} + 2,8$

$$x = 0,25 - 1,56 + 2,8 \Rightarrow x = 1,49.$$

d) $x = \frac{0,03 \cdot \frac{7}{9}}{2\frac{2}{3}} = 0,02.$

1.50. a) • $0,645 : 0,3 - 1\frac{17}{50} = 2,15 - 1,34 = 0,81$

• $4 : 6,25 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdot 1,96 = 0,64 - 0,2 + 0,28 = 0,72$

$$A = 0,81 : 0,72 - 11,125 = 1,125 - 11,125 = -10.$$

b) $5\frac{5}{28} - 1\frac{8}{9} \cdot 1,25 + 1\frac{16}{63} = 5\frac{5}{28} - \frac{17}{9} \cdot \frac{5}{4} + 1\frac{16}{63}$

$$= 5\frac{5}{28} - 2\frac{13}{36} + 1\frac{16}{63} = \left[(5 - 2 + 1) + \left(\frac{5}{28} - \frac{13}{36} + \frac{16}{63} \right) \right] = 4 + \frac{1}{14} = \frac{57}{14}$$

$$B = 11,26 - 5,13 : \frac{57}{14} = 11,26 - \frac{5,13 \cdot 14}{57} = 11,26 - 1,26 = 10.$$

c) $C = \frac{10}{3} \cdot 0,75 : \frac{7}{2} : \frac{9}{2} = 2,5 : \left\{ \frac{7}{2} : \frac{9}{2} \right\} = \frac{5}{2} : \frac{7}{9} = \frac{45}{14}.$

d) $D = \frac{1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}{\frac{8}{2} - \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}} = \frac{1}{4}.$

1.51. Có $\sqrt{(x - 3\sqrt{5})^2} \geq 0 \quad \forall x$

$$\sqrt{(y + 3\sqrt{5})^2} \geq 0 \quad \forall y$$

$$|x + y + z| \geq 0 \quad \forall x, y, z$$

$$\text{Do đó : } \sqrt{(x - 3\sqrt{5})^2} + \sqrt{(y + 3\sqrt{5})^2} + |x + y + z| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x - 3\sqrt{5})^2} = 0 \\ \sqrt{(y + 3\sqrt{5})^2} = 0 \\ |x + y + z| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{5} \\ y = -3\sqrt{5} \\ z = 0. \end{cases}$$

$$1.52. \text{ a) } -\frac{7}{11} = -0,636363... \quad (\text{vì } -\frac{7}{11} = -0,636363...)$$

$$\text{b) } 8\frac{5}{13} < 8,415415415... \quad (\text{vì } 8\frac{5}{13} = 8,384615385...)$$

$$\text{c) } 0,(237) > 0,237$$

$$\text{d) } [0,(5)]^2 > (0,5)^2$$

$$\text{e) } 0,(5) + 0,(2) > 0,5 + 0,2.$$

Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

§1. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN. MỘT SỐ BÀI TOÁN

VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

- 2.1. Gọi x, y, z là các số cần tìm và có tổng bằng -460 . Đối $0,4 = \frac{2}{5}$.

$$\text{Ta có : } \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{2}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{7}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{7}} = \frac{-460}{\frac{92}{105}} = -525$$

$$\Rightarrow x = -175; y = -210; z = -75.$$

- 2.2. Gọi x, y là quãng đường An và Bình đi trong cùng một thời gian, t_A là thời gian An đi. Khi đó quãng đường tỉ lệ thuận với vận tốc: $y = 1,5x$

Gọi z là quãng đường Bình đi trong thời gian t_B , t_B là thời gian Bình đi đến lúc gặp An. Quãng đường Bình đi tỉ lệ thuận với thời gian đi : $y = 0,75z$

$$\Rightarrow z = 2x \Rightarrow x = 10,5 \text{ (km); } z = 21 \text{ (km).}$$

- 2.3. Gọi x, y, z, t là số học giỏi các khối 6, 7, 8, 9.

$$\text{Ta có : } \frac{x}{1,5} = \frac{y}{1,1} = \frac{z}{1,3} = \frac{t}{1,2} = \frac{z-t}{0,1} = \frac{3}{0,1} = 30$$

$$\Rightarrow x = 45, y = 33, z = 39, t = 36 \Rightarrow \text{Toàn trường có 153 học sinh giỏi.}$$

- 2.4. Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là 2 đại lượng tỉ lệ thuận.

Gọi x, y là quãng đường ô tô đi từ A, từ B đã đi được :

$$y = 1,2x; y + x = 2,2x; x = 69$$

Thời gian hai ô tô đi để gặp nhau là : $69 : 34,5 = 2 \text{ (h).}$

- 2.5. Gọi x, y là 2 số dương cần tìm.

$$\text{Ta có : } \frac{x+y}{7} = \frac{x-y}{1} = \frac{xy}{24} = \frac{x+y+x-y}{7+1} = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow 4xy = 24x \Rightarrow y = 6 \text{ và } x = 8.$$

§2. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

2.6. Gọi x, y, z là các phần được chia.

$$\text{Ta có : } 0,2x = 0,8y = 3\frac{1}{3}z; \frac{x}{100} = \frac{y}{25} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{131} = \frac{786}{131} = 6$$

$$\Rightarrow x = 600; y = 150; z = 36.$$

2.7. Gọi x, y, z là số hàng mà mỗi đội xe phải chuyển.

$$\text{Ta có : } x + y + z = 290.$$

$$\text{Ta có : } \frac{x}{5 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{y}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{z}{6 \cdot 1} = \frac{x+y+z}{\frac{5}{3} + \frac{4}{2} + 6} = \frac{290}{\frac{29}{3}} = 30$$

$$\Rightarrow x = 50 \text{ (tấn); } y = 60 \text{ (tấn); } z = 180 \text{ (tấn).}$$

2.8. Gọi vận tốc ban đầu của ô tô là x .

Vận tốc sau khi đã tăng là y ($y = x + 15\% x$)

$$\text{Ta có : } \frac{x}{y} = \frac{x}{x + 15\%x} = \frac{x}{115\%x} = \frac{20}{23}$$

Gọi t_1, t_2 là thời gian tương ứng để ô tô đi hết $\frac{3}{4}$ quãng đường với các vận tốc tương ứng x, y .

Trên cùng một quãng đường vận tốc và thời gian là 2 đại lượng tỉ lệ nghịch. Ta có :

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{y}{x} = \frac{23}{20} \Rightarrow \frac{t_1}{23} = \frac{t_2}{20} = \frac{t_1 - t_2}{23 - 20} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{230}{3} = 76 \text{ phút } 40 \text{ giây và } t_2 = \frac{200}{3} = 66 \text{ phút } 40 \text{ giây}$$

Từ đó tính được thời gian đi hết quãng đường AB.

2.9. Gọi x, y, z là số đất (ha) mỗi xe đã san bằng

Chia số 50 thành ba phần tỷ lệ thuận với $4 : 5 : 6$ và với $7 : 8 : 9$ đồng thời tỷ lệ nghịch với $6 : 5 : 4$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{28} = \frac{y}{40} = \frac{z}{54} = \frac{x+y+z}{157} = \frac{50}{157} = \frac{300}{157}$$

Từ đó tính được x, y, z .

2.10. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tương ứng với các đường cao bằng 4, 12, x .

$$\text{Ta có: } 4a = 12b = xc = 2S \Rightarrow a = \frac{S}{2}; b = \frac{S}{6}; c = \frac{2S}{x}$$

Do $a - b < c < a + b$ nên:

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} - \frac{S}{6} < \frac{2S}{x} < \frac{S}{2} + \frac{S}{6} &\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{6} < \frac{2}{x} < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2}{6} < \frac{2}{x} < \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow 3 < x < 6 \end{aligned}$$

Do $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 4$ hoặc $x = 5$.

§3. HÀM SỐ - MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

2.11. a) Vì điểm $A(-5; 6)$ thuộc đồ thị $y = ax \Rightarrow x = -5; y = 6$

$$\text{Nên } 6 = a(-5) \Rightarrow a = -\frac{6}{5}$$

b) Hàm số được cho bởi công thức $y = -\frac{6}{5}x$. Vì điểm $B(x_0; y_0)$

$$\text{thuộc đồ thị hàm số } y = -\frac{6}{5}x \Rightarrow y_0 = -\frac{6}{5}x_0$$

$$\text{hay } \frac{x_0}{y_0} = \frac{-5}{6} = \frac{x_0 + (-5)}{y_0 + 6} = \frac{x_0 - 5}{y_0 + 6} \quad \text{Vậy } \frac{x_0 - 5}{y_0 + 6} = \frac{-5}{6}$$

2.12. a) $f(-1) = \frac{-4}{x}; g\left(\frac{1}{2}\right) = -3\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}; h(a) = a^2; k(2a) = (2a)^3 = 8$.

b) Tính $f(-2) + g(3) + h(0) = \frac{4}{-2} + (-3).3 + 0^2 = -11$.

$$\text{c) } f(x_1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{x_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 8$$

$$g(x_2) = 3 \Rightarrow -3x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$h(x_3) = 9 \Rightarrow x_3^2 = 9 \Rightarrow x_3 = \pm 3$$

$$k(x_4) = -8 \Rightarrow x_4^3 = -8 \Rightarrow x_4 = -2.$$

$$d) f(-x) = \frac{4}{-x}; -f(x) = -\frac{4}{x}. \text{ Vậy } f(-x) = -f(x)$$

Các hàm số $g(x)$, $k(x)$ cũng có tính chất $g(-x) = -g(x)$

$$k(-x) = -k(x)$$

Hàm số $h(x)$ không có tính chất đó mà có tính chất $h(-x) = h(x)$.

$$2.13. a) f(0) = 0; f(-1) = -2012; f\left(\frac{1}{2}\right) = 1006$$

$$b) f(a + b) = 2012(a + b) = 2012a + 2012b = f(a) + f(b).$$

$$c) f(x) = 2012x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2012x = 0 \Rightarrow x(x - 2012) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2012. \end{cases}$$

$$2.14. a) \text{ Hàm số xác định khi: } x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1.$$

$$b) f(x) = \frac{x+2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

$$c) f(x) = \frac{x+2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x+2 \text{ và } x-1 \text{ cùng dấu.}$$

Mà $x+2 > x-1$ với $\forall x$. Vậy $x+2$ và $x-1$ cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 < 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 1. \end{cases}$$

$$2.15. a) f(x) = x^2 + 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3x + 12 = 0 \Leftrightarrow x(x+4) + 3(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 - 12 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4.$$

$$b) f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 7x + 12) - (x^2 - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 7x + 12 - x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow 7x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{24}{7}.$$

$$2.16. a) \text{ Hàm số } y = f(x) \text{ được cho bởi công thức } y = \begin{cases} x & \text{với } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{với } 2 < x \leq 7 \end{cases}$$

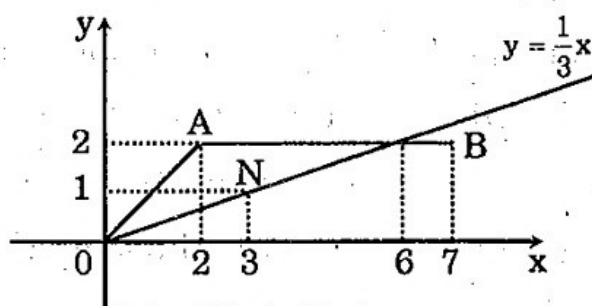
b) Xét hàm số $y = g(x) = \frac{1}{3}x$. Cho $x = 3 \Rightarrow y = 1$

Vẽ điểm $N(3; 1)$, vẽ đường thẳng ON , đó là đồ thị của hàm số $y = g(x) = \frac{1}{3}x$.

c) Đồ thị của hàm số $y = g(x)$ và $y = f(x)$ cắt nhau tại $O(0; 0)$ và $M(6; 2)$.

Với $x = 0$ thì $f(x) = g(x) = 0$

$x = 6$ thì $f(x) = g(x) = 2$.



Hình 65

2.17. a) $x_1 < x_2 \Rightarrow -5x_1 > -5x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

b) $f(x_1 + 4x_2) = -5(x_1 + 4x_2) = -5x_1 + 4(-5x_2) = f(x_1) + 4f(x_2)$.

c) $-f(x) = -(-5x) = 5x$; $f(-x) = -5(-x) = 5x \Rightarrow -f(x) = f(-x)$.

2.18. Từ giả thiết $y = \frac{x}{4}$ và $\frac{x^2}{4} = 9$ suy ra $x = \sqrt{36} = 6$ ($x \geq 0$)

$y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Vậy E đúng.

2.19. a) Hàm f đã cho chỉ tính được f (f xác định) khi và chỉ khi biến x là số tự nhiên có hai chữ số. Vậy tập xác định của hàm số là $\{10; 11; 12; \dots; 99\}$.

b) Theo cách cho hàm số f thì $f(99) = 9 + 9 = 18$,

$f(55) = 5 + 5 = 10$, $f(32) = 3 + 2 = 5$.

c) $f(x) = 3$, giả sử $x = \overline{ab}$ ($a = 1, 2, 3, \dots, 9$; $b = 0, 1, 2, \dots, 9$)

thì $f(\overline{ab}) = a + b = 3$ nên $a = 1 \Rightarrow b = 2$,

$a = 2$ thì $b = 1$, $a = 3$ thì $b = 0$

Vậy ta có: $x = \overline{ab} = 12, 21, 30$.

§4. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$ ($a \neq 0$)

2.20. a) Ta có : $f(0) = a \cdot 0 + b = -3 \Rightarrow b = -3$

$$f(1) = a \cdot 1 + b = -1 \Rightarrow a = -1 - b = -1 - (-3) = 2$$

Vậy hàm số được cho bởi công thức : $y = 2x^2 - 3$.

b) • $y = 5$ thì $2x^2 - 3 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

• $y = -2,5$ thì $2x^2 - 3 = -2,5 \Rightarrow x^2 = 0,25 \Rightarrow x = \pm 0,5$.

c) Điểm B và C thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3$.

Điểm A không thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3$.

2.21. Giả sử $M(x_M; y_M)$. Mà điểm M vừa thuộc đồ thị hàm số $y = 2x + 5$ và đồ thị hàm số $y = x + 3$ nên :

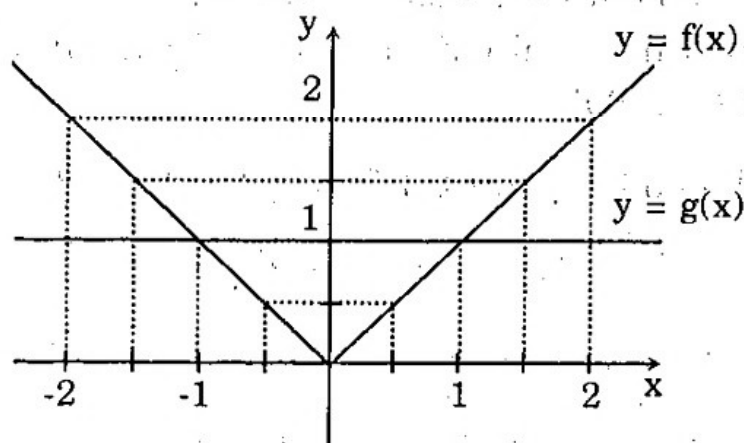
$$y_M = 2x_M + 5 \quad (1) \quad \text{và} \quad y_M = x_M + 3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow 2x_M + 5 = x_M + 3 \Rightarrow x_M = -2 \Rightarrow y_M = 1$$

Vậy $M(-2; 1)$.

2.22. a) Cho x là một giá trị $\Rightarrow$ có giá trị tương ứng của $f(x)$, $g(x)$.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	2	1,5	1	0,5	0	0,5	1	1,5	2
g(x)	1	1	1	1	1	1	1	1	1



Hình 66

b) Quy tắc f còn được diễn đạt bởi $f(x) = |x|$.

c) Các giá trị x phải tìm là hoành độ của các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = |x|$ nằm phía dưới đường thẳng $y = 1$. Đó là $-1 < x < 1$.

2.23. Qua A và C vẽ đường thẳng song song với trục tung.

Qua C và B vẽ đường thẳng song song với trục hoành.

Gọi giao điểm của các đường thẳng đó là M, N, H $\Rightarrow$ Diện tích hình chữ nhật MCNH là :

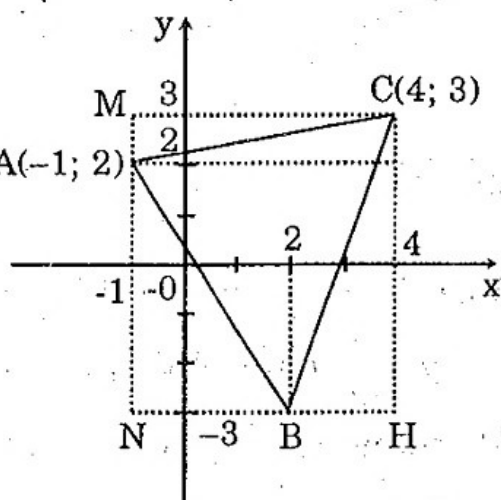
$$5.6 = 30 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

$$S_{CMA} = \frac{5.1}{2} = 2,5 \text{ (đơn vị diện tích)} \quad A(-1; 2)$$

$$S_{ANB} = \frac{3.5}{2} = 7,5 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

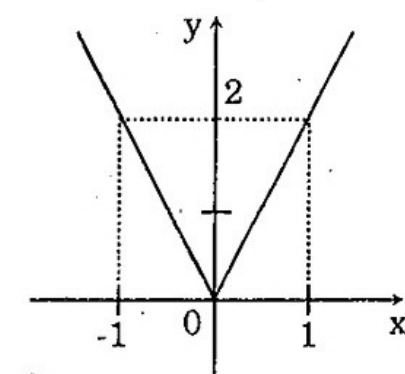
$$S_{CHB} = \frac{2.6}{2} = 6 \text{ (đơn vị diện tích)}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 30 - (2,5 + 7,5 + 6) = 14 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

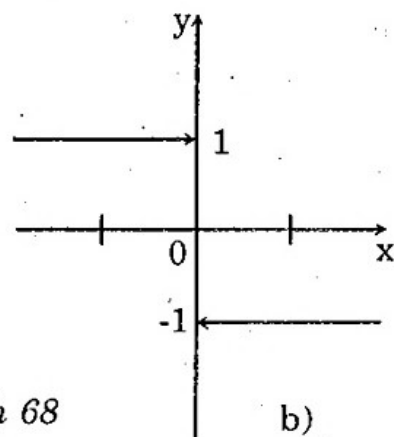


Hình 67

2.24.



a)



b)

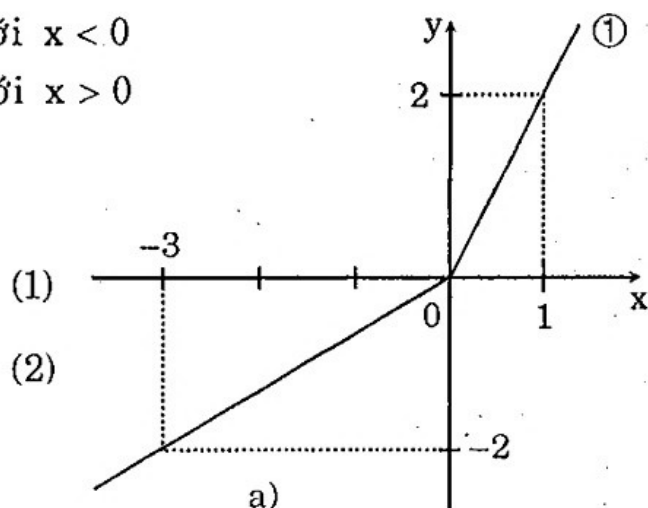
Hình 68

$$a) y = 2|x| \text{ (h.68a)} \Rightarrow y = \begin{cases} 2x & \text{với } x \geq 0 \\ -2x & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

$$b) y = -\frac{|x|}{x} \text{ (h.68b)} \Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{với } x < 0 \\ -1 & \text{với } x > 0 \end{cases}$$

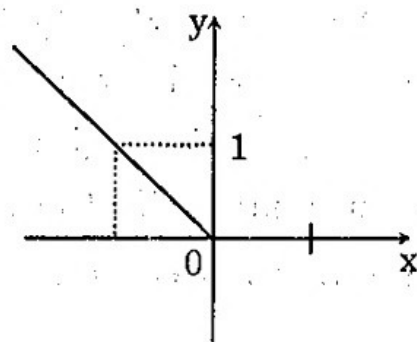
$$c) y = \frac{2}{3}(2x + |x|) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ \frac{2}{3}x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

(h.69a)



$$d) y = \frac{1}{2}(|x| - x)$$

$$= \begin{cases} -x & \text{với } x < 0 \\ 0 & \text{với } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{h.69b})$$



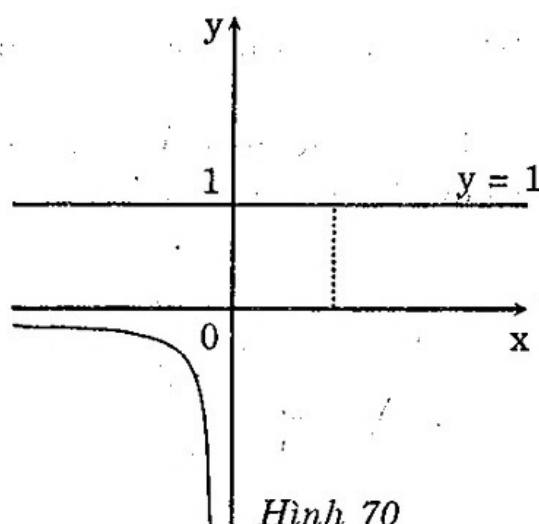
b)

Hình 69

2.25. Các điểm của đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{x}$ nằm phía dưới đường thẳng $y = 1$ có hoành độ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} < 1$.

Trên hình vẽ ta tìm được $x < 0$ hoặc $x > 0$ là các giá trị phải tìm.



Hình 70

Chương III. THỐNG KÊ

§1. THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ.

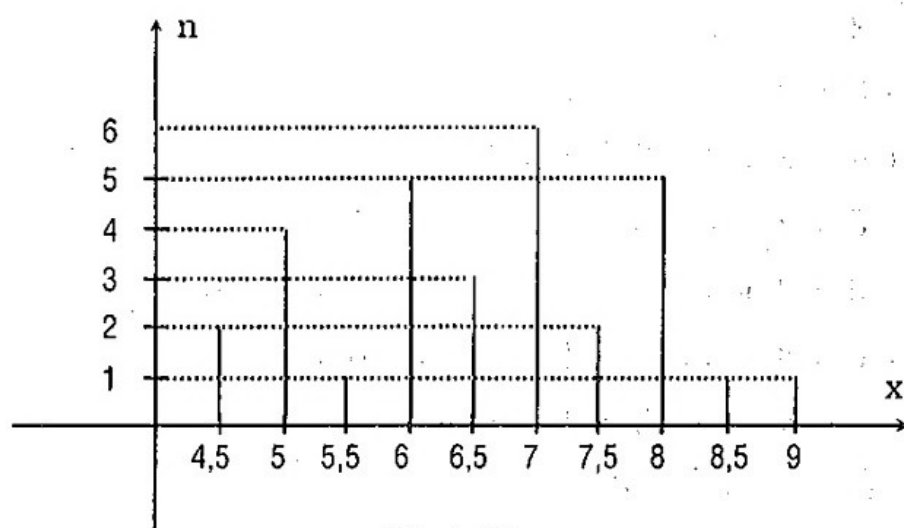
BẢNG TẦN SỐ CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU. BIỂU ĐỒ

3.1.

- a) Dấu hiệu là : Điểm từng bài thi môn Toán. Số giá trị của dấu hiệu là : 30.
- b) Số giá trị khác nhau của dấu hiệu là : 10.
- c) Bảng "tần số" và bảng "tần suất" :

Giá trị (x)	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	
Tần số (n)	2	4	1	5	3	6	2	5	1	1	N = 30
Tần suất (f)	6%	13%	3%	16%	10%	20%	6%	16%	3%	3%	

- d) Biểu đồ đoạn thẳng :



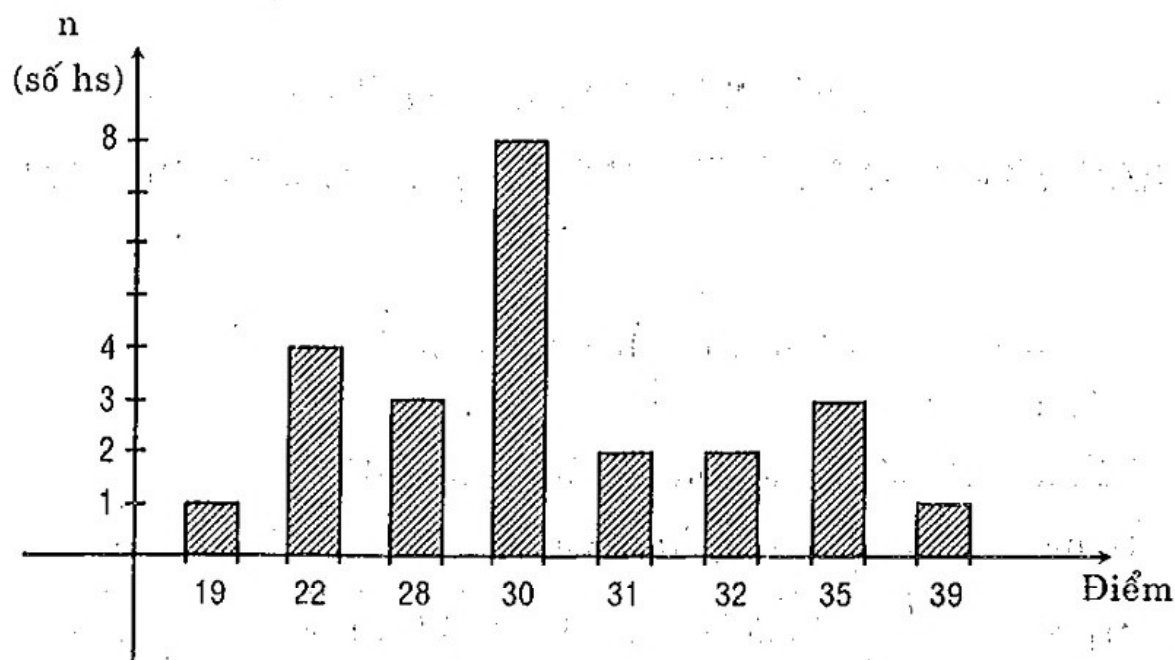
Hình 71

3.2.

- a) Dấu hiệu là : Tổng điểm thi của mỗi học sinh. Có tất cả 24 giá trị.
- b) Bảng tần số :

Điểm số (x)	19	22	28	30	31	32	35	39	
Số học sinh (n)	1	4	3	8	2	2	3	1	N = 24

c) Biểu đồ :



Hình 72

3.3. Tổng số điểm ghi ở 2 mặt trên của 2 con súc sắc có thể là :

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 1 + 2 = 2 + 1$$

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$$

$$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$$

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1$$

$$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1$$

$$8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2$$

$$9 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3$$

$$10 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4$$

$$11 = 5 + 6 = 6 + 5$$

$$12 = 6 + 6$$

Điểm số (x)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tần số (n)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Tần suất (f)	2,8%	5,6%	8,3%	11,1%	13,9%	16,7%	13,9%	11,1%	8,3%	5,6%	2,8%

Vậy tổng số 7 điểm có nhiều khả năng xảy ra nhất 16,7%.

§2. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG - MỘT

3.4.

a) Dấu hiệu ở đây là : Số cơn bão hàng năm đổ bộ vào nước ta (trong vòng 20 năm).

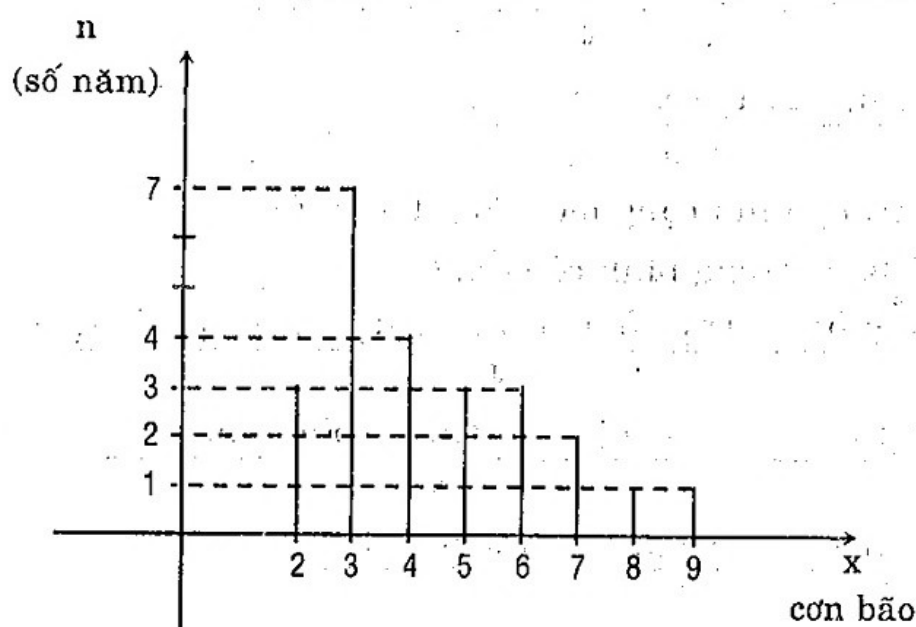
b) Bảng tần số :

Giá trị (x)	Tần số (n)	Tích x.n
2	3	6
3	7	21
4	4	16
5	2	10
6	2	12
8	1	8
9	1	9
	N = 20	82

$$\bar{X} = \frac{82}{20} = 4,1$$

Trung bình mỗi năm có 4,1 cơn bão đổ bộ vào nước ta. $M_0 = 3$.

c) Biểu đồ đoạn thẳng :



Hình 73

3.5.a) Dấu hiệu ở đây là : Số hạt thóc trên mỗi bông lúa.

b) Bảng "tần số ghép lớp" :

Số hạt thóc (x) (1)	Giá trị trung tâm (2)	Tần số (n) (3)	Tích (2) × (3) (4)
Trên 100 – 120	110	2	220
Trên 120 – 140	130	3	390
Trên 140 – 160	150	6	900
Trên 160 – 180	170	3	510
Trên 180 – 200	190	5	950
Trên 200 – 220	210	2	420
Trên 220 – 240	230	2	460
Trên 240 – 260	250	1	250
		N = 24	4100

$$\bar{X} = \frac{4100}{24} \approx 171$$

3.6.

a) $\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \dots + x_k n_k}{N}$

b) Gọi $\bar{X}'$ là số trung bình cộng mới.

$$\begin{aligned}\bar{X}' &= \frac{(2x_1)n_1 + (2x_2)n_2 + (2x_3)n_3 + \dots + (2x_k)n_k}{N} \\ &= \frac{2(x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \dots + x_k n_k)}{N} = 2\bar{X}\end{aligned}$$

Vậy số trung bình cộng mới tăng lên 2 lần.

c) Gọi $\bar{X}''$ là số trung bình cộng mới.

$$\begin{aligned}\bar{X}'' &= \frac{(x_1 + 5)n_1 + (x_2 + 5)n_2 + (x_3 + 5)n_3 + \dots + (x_k + 5)n_k}{N} \\ &= \frac{(x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \dots + x_k n_k) + 5(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k)}{N} \\ &= \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \dots + x_k n_k}{N} + \frac{5N}{N}\end{aligned}$$

(vì tổng các tần số $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = N$)

Do đó $\bar{X}'' = \bar{X} + 5$

Vậy số trung bình cộng mới đã tăng thêm 5 đơn vị.

3.7.

a) Sự khác biệt của bảng này so với bảng tần số đã biết : Trong bảng này chỉ biết 45, 46 là các giá trị dấu hiệu, còn lại chỉ biết trong mỗi khoảng đã cho chứa bao nhiêu giá trị của dấu hiệu mà không biết chính các giá trị đó.

b) Lập bảng phụ :

Trọng lượng (x)	34	37	40	43	45	46	
Tần số (n)	8	10	12	7	2	1	N = 40

Số trung bình cộng :

$$\bar{X} = \frac{34 \times 8 + 37 \times 10 + 40 \times 12 + 43 \times 7 + 45 \times 2 + 46 \times 1}{40}$$

$$\bar{X} \approx 38,98.$$

Chương IV. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§1. GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

4.1.

a) $A = -\frac{7}{9}; -7.$

b) Nếu x và y cùng dấu thì biểu thức $B = -3\frac{1}{6}$

Nếu x và y trái dấu thì biểu thức $B = -1\frac{1}{6}$

c) $C = \frac{2a - 5b}{a - 3b} = \frac{2\left(\frac{a}{b}\right) - 5}{\left(\frac{a}{b}\right) - 3} = \frac{2\frac{3}{4} - 5}{\frac{3}{4} - 3} = \frac{14}{9}.$

d) $D = \frac{3a - b}{2a + 7} + \frac{3b - a}{2b - 7} = \frac{3(b + 7) - b}{2(b + 7) + 7} + \frac{3b - (b + 7)}{2b - 7}$ (thay $a = b + 7$)
 $= \frac{2b + 21}{2b + 21} + \frac{2b - 7}{2b - 7} = 1 + 1 = 2$ ($2b + 21 \neq 0$; $2b - 7 \neq 0$).

4.2.

a) Biểu thức có giá trị nhỏ nhất bằng -3 ; tại $x = -\frac{1}{2}$.

b) Biểu thức có giá trị nhỏ nhất bằng 10 , tại $x = \pm 3$; $y = 2$.

c) Biểu thức có giá trị nhỏ nhất bằng -8 , tại $x = -2$; $y = \frac{1}{5}$.

4.3.

a) Có $(x - 2)^2 + 5 \geq 5 \forall x \Rightarrow \frac{3}{(x - 2)^2 + 5} > 0$

Vậy $\frac{3}{(x - 2)^2 + 5}$ đạt giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất.

Mẫu nhỏ nhất bằng $5 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \frac{3}{(x - 2)^2 + 5}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{5} \Leftrightarrow x = 2$.

$$b) -10 - (x-3)^2 - |y-5| = -10 - [(x-3)^2 + |y-5|].$$

Biểu thức đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow [(x-3)^2 + |y-5|]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Vậy $-10 - (x-3)^2 - |y-5|$ đạt giá trị lớn nhất bằng -10

$$\Leftrightarrow x = 3; y = 5.$$

$$c) \frac{1}{2x^2+5} \text{ đạt giá trị lớn nhất bằng } \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = 0.$$

4.4.

$$a) A = \frac{5-(x-3)}{x-3} = \frac{5}{x-3} - 1$$

A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x-3 \in U(5) \Leftrightarrow x-3 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

$x-3$	-5	-1	1	5
x	-2	2	4	8

Vậy $x \in \{-2; 2; 4; 8\}$ thì A có giá trị nguyên

$$b) A = \frac{5}{x-3} - 1 \text{ có giá trị nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{5}{x-3} \text{ có giá trị nhỏ nhất.}$$

Với $x > 3$ thì $\frac{5}{x-3} > 0$; với $x < 3$ thì $\frac{5}{x-3} < 0$.

Vậy ta chỉ xét những giá trị $x < 3$.

$$\frac{5}{x-3} \text{ có GTNN} \Leftrightarrow \frac{5}{3-x} \text{ có GTNN}$$

$$\Leftrightarrow 3-x \text{ có GTNN (vì } \frac{5}{3-x} > 0)$$

$$\Leftrightarrow x \text{ lấy GTLN} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (vì } x \in \mathbb{Z}; x < 3)$$

$$\text{Khi đó GTNN của } A = \frac{5}{x-3} - 1 = \frac{5}{2-3} - 1 = -6 \text{ tại } x = 2.$$

4.5. Vì $f(x) = 0$ với mọi x nên cho x nhận ba giá trị tùy ý.

$$\text{Giả sử } x = 0; x = 1; x = -1 \Rightarrow f(0) = c;$$

$$f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c$$

$$\text{nên } c = 0; a + b + c = 0; a - b + c = 0$$

$$\text{Do đó } a - b = 0; a + b = 0 \Rightarrow a = 0; b = 0.$$

§2. ĐƠN THỨC - ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

4.6.

- a) 11.2^n b) 0 c) 0.

4.7.

a) $-\frac{1}{32}(a-1)^5 x^{15} y^{20} z^{10}$. Có hệ số là $-\frac{1}{32}(a-1)^5$, có bậc là 45.

b) $-a^5 b^5 c x^5 y^2 z^6$. Có hệ số là $-a^5 b^5 c$, có bậc là 13.

c) $\frac{75}{343} a^7 x^{17} y^{10} z^3$. Có hệ số là $\frac{75}{343} a^7$, có bậc là 30.

4.8.

a) $A = \frac{14}{33} a x^4 y^5 + \frac{5}{2} a b x^3 y^4 z + a x^7 y^3$.

b) $B = \frac{\frac{2}{3} x^{10} y^7 + (-16)}{3 a x^5 y^4 z^2}$.

4.9.

a) $= 3^n \cdot 3^2 - 2^n \cdot 2^2 + 3^n - 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) : 10$.

b) $= 2^3 \cdot 2^n + 2^n \cdot 2 = 2^n(2^3 + 2)$ có tận cùng bằng chữ số 0.

4.10. Có $(-2a^2b^3)^{10} = 2^{10} \cdot a^{20} \cdot b^{30}$

$$(3b^2c^4)^{15} = 3^{15} \cdot b^{30} \cdot c^{60}$$

$$\Rightarrow 2^{10} \cdot a^{20} \cdot b^{30} + 3^{15} \cdot b^{30} \cdot c^{60} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^{20} \cdot b^{30} = 0 \\ b^{30} \cdot c^{60} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 0 \\ bc = 0 \end{cases}$$

Do đó : $b = 0$, a và c tùy ý, hoặc $a = c = 0$, b tùy ý.

§3. ĐA THỨC - CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC

4.11.

a) Với $7x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{7}$ thì $|7x - 1| = 7x - 1$

$$\Rightarrow A = 2x^2 + (7x - 1) - 5 + x - 2x^2 = 8x - 6$$

$$\text{Với } 7x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{7} \text{ thì } |7x - 1| = 1 - 7x$$

$$\Rightarrow A = 2x^2 + (1 - 7x) - 5 + x - 2x^2 = -6x - 4$$

$$\text{b) Với } x \geq \frac{1}{7} \text{ thì } 8x - 6 = 3 \Leftrightarrow 8x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } x < \frac{1}{7} \text{ thì } -6x - 4 = 3 \Leftrightarrow -6x = 7 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{6} \text{ (thỏa mãn).}$$

4.12.

$$\text{a) } M = 7(x - y) + 4a(x - y) - 5 = 7.0 + 4a.0 - 5 = -5.$$

$$\text{b) } N = (x^2 + y^2)(x - y) + 3 = (x^2 + y^2).0 + 3 = 3.$$

4.13.

$$\text{a) } M + N - P = 2a^2 - 3a + 1 + 5a^2 + a - (a^2 - 4) = 6a^2 - 2a + 5.$$

$$\text{b) } 2y - x - \{2x - y - [y + 3x - (5y - x)]\} = x - y.$$

Thay giá trị của x và y vào ta có :

$$= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab.$$

4.14.

$$\begin{aligned} \text{a) } A - B &= 3x(x - y) - (y^2 - x^2) = 3x(x - y) - (y^2 + xy - xy - x^2) \\ &= 3x(x - y) - [y(y + x) - x(y + x)] \\ &= 3x(x - y) + (x - y)(x + y) \\ &= (x - y)(4x + y) \text{ chia hết cho 7.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(g) &= g.(C_n g^{n-1} + C_{n-1} g^{n-2} + \dots + C_1) + C_0. \text{ Ta có } g : d \\ &\Rightarrow g(C_n g^{n-1} + C_{n-1} g^{n-2} + \dots + C_1) : d. \text{ Vậy } f(g) : d \Leftrightarrow C_0 : d. \end{aligned}$$

4.15. Từ $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$. Do đó :

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= x^2 + y^2 = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 2\left[x\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right] \\ &= 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right] = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vì $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi x nên $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ với mọi x .

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2$ là $\frac{1}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

$$b) B = 3 - xy = 3 - x(1 - x) = 3 - x + x^2$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 3$$

$$= x\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{4}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} \text{ với mọi } x \text{ (vì } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $B = 3 - xy$ là $\frac{11}{4}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

$$4.16. \text{ Từ } x + 2y = 1 \Rightarrow x = 1 - 2y$$

Biến đổi tương tự như phần (1) ta có :

$$\Rightarrow x.y = y(1 - 2y) = -2y^2 + y = -2\left(y^2 - \frac{1}{2}y\right) = -2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \leq \frac{1}{8}$$

với mọi y (vì $\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$ với mọi y)

Vậy giá trị lớn nhất của $A = x.y$ là $\frac{1}{8}$ khi $y = \frac{1}{4}$; $x = \frac{1}{2}$.

§4. ĐA THỨC MỘT BIẾN - CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

$$4.17. P(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x = x^4 - 3x^2 - x + \frac{1}{2}$$

$$a) P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^2 + 1 \Rightarrow Q(x) = x^5 - 2x^2 + 1 - P(x)$$

$$\text{Thay giá trị của } P(x) \text{ vào ta có : } Q(x) = x^5 - x^4 + x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$b) P(x) - R(x) = x^3 \Rightarrow P(x) - x^3 = R(x)$$

$$\text{Thay giá trị của } P(x) \text{ vào ta có : } R(x) = -x^5 + x^4 - 3x^2 - x + \frac{1}{2}$$

4.18.

a) $f(x) - g(x) = x^{2n+1}$

$$f\left(\frac{1}{10}\right) - g\left(\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+1} = \frac{1}{10^{2n+1}} = 10^{-(2n+1)}$$

b) $h(x) = x^7(x - 100) - x^6(x - 100) + x^5(x - 100) - \dots + x(x - 100) - (x - 25)$

$$h(100) = 100^7(100 - 100) - 100^6(100 - 100) + \dots + 100(100 - 100) - (100 - 25) = -75.$$

4.19. Vì $f(1) = g(2)$. Nên $2 + a + 4 = 4 - 10 - b \Leftrightarrow a + b = -12$

$f(-1) = g(5)$. Nên $2 - a + 4 = 25 - 25 - b \Leftrightarrow a - b = 6$

Vậy $a = -3; b = -9$.

4.20. Vì $3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a$

Vậy $f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + (-3a)x + c$

$$f(5) = 25a - 3a \cdot 5 + c = 25a - 15a + c = 10a + c$$

$$f(-2) = 4a + 6a + c = 10a + c$$

Do đó $f(5) \cdot f(-2) = (10a + c)^2 \geq 0$. Tích này không thể là số âm.

4.21.

a) Đa thức $f(x)$ có $n + 1$ số hạng

$$\text{Vậy } f(1) = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ số } 1} = n + 1.$$

b) Với n lẻ : $f(x)$ có $n + 1$ số hạng.

Chia ra hai nhóm : nhóm với số mũ chẵn và nhóm với số mũ lẻ

$$f(x) = (x^n + x^{n-2} + \dots + x) + (x^{n-1} + x^{n-3} + \dots + x^0)$$

với $(-1)^n = -1; (-1)^{n-1} = 1$

$$\text{Vậy } f(-1) = (-1 - 1 - 1 - \dots - 1) + (1 + 1 + \dots + 1) = 0$$

Chứng minh tương tự với n chẵn, ta có : $f(-1) = 1$.

§5. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

4.22.

a) Tính :

• $h(x) = f(x) + g(x)$. Thay các giá trị của $f(x)$ và $g(x)$ vào ta có :
 $\Rightarrow h(x) = x^2 + 3x + 2$

- $k(x) = f(x) - (2x^3 - 4x^2 + 6x - 6)$. Thay giá trị của $f(x)$ vào
 $\Rightarrow k(x) = x^2 - x + 1$.

b) Tìm nghiệm của :

- $h(x) = x^2 + 3x + 2 = x^2 + 2x + x + 2 = (x + 2)(x + 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

- $k(x) = x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy $k(x)$ không có nghiệm.

4.23. Có $(x^2 - 9)f(x) = xf(x)$ (*)

Thay $x = 0$ vào (*) $\Rightarrow -9f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của đa thức $f(x)$.

Thay $x = 3$ vào (*) $\Rightarrow f(3) = 0 \Rightarrow x = 3$ cũng là nghiệm của $f(x)$

$x = -3$ vào (*) $\Rightarrow f(-3) = 0$

$\Rightarrow x = -3$ cũng là nghiệm của $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất ba nghiệm.

4.24. x_0 là nghiệm của $f(x)$ nên $f(x_0) = ax_0 + b = 0$

Mà $f(0) = a \cdot 0 + b \neq 0$ nên $x_0 \neq 0$; $\frac{1}{x_0}$ có nghĩa

$$\text{Xét } g\left(\frac{1}{x_0}\right) = b \cdot \frac{1}{x_0} + a = \frac{b + ax_0}{x_0} = \frac{0}{x_0} = 0$$

Do đó $\frac{1}{x_0}$ là nghiệm của đa thức $g(x)$.

4.25.

a) Biểu thức M xác định khi $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

b) Khi $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

$$\text{Nếu } x = 0 \Rightarrow M = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Nếu } x = -1 \Rightarrow M = -4.$$

$$c) M = \frac{x-3}{x+2} = 2 \Leftrightarrow x-3 = 2x+4 \Leftrightarrow x = -7 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$d) M = \frac{x-3}{x+2} = \frac{x+2-5}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{5}{x+2} = 1 - \frac{5}{x+2} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 5 : (x+2) \text{ hay } x+2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$x+2$	-5	-1	1	5
x	-7	-3	-1	3

$$\text{Vậy } x \in \{-7; -3; -1; 3\}$$

$$e) M < 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-5}{x+2} < 0$$

$$\Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2.$$

4.26.

$$\begin{aligned} a) A &= -x^2 + 4x - 6 = -(x^2 - 2x - 2x + 4 - 4 + 6) \\ &= -[x(x-2) - 2(x-2) + 2] = -(x-2)^2 - 2 \end{aligned}$$

Vì $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi x nên $-(x-2)^2 - 2 < 0$ với mọi x

$\Rightarrow A = -x^2 + 4x - 6$ không có nghiệm

$B = -2 - x - x^2$. Cách làm tương tự như trên

$$= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} < 0 \text{ với mọi } x.$$

Vậy $B = -2 - x - x^2$ không có nghiệm.

$$b) \text{ Ta có : } f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\Rightarrow f(1) = a_n 1^n + a_{n-1} 1^{n-1} + \dots + a_2 1^2 + a_1 + a_0$$

$$= a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 = 0$$

Vậy $x = 1$ là nghiệm của $f(x)$.

4.27. Đặt $Q(x) = P(x) - 10x$. Khi đó $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$.

Vì vậy $Q(x)$ chia hết cho $(x-1)(x-2)(x-3)$. $Q(x)$ là đa thức bậc 4 (do $P(x)$ là đa thức bậc 4) nên $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-r)$ và $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-r) + 10x$

Ta tính $\frac{P(12) + P(-8)}{10}$

$$P(12) = 12000 - 990r$$

$$P(-8) = 7840 + 990r$$

Vậy $\frac{P(12) + P(-8)}{10} = 1984.$

4.28.

a) Ta có $P(0) = q$ mà $P(0)$ chẵn $\Rightarrow q$ chẵn;

$$P(1) = 1 + p + q \text{ chẵn} \Rightarrow p \text{ lẻ.}$$

Vậy với p lẻ và q chẵn thì $P(x)$ là số chẵn với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có $Q(0) = q$ mà $Q(0)$ là bội của 3 $\Rightarrow q$ là bội của 3.

$Q(1) = 1 + p + q$ là bội của 3 mà q là bội của 3 nên $p + 1$ là bội của 3. Với các điều kiện đó của p và q thì $Q(3x)$ và $Q(3x \pm 1)$ luôn chia hết cho 3 (mọi số nguyên đều được viết dưới dạng $3x$ hoặc $3x \pm 1$).

4.29. $P(0) = d$ là số lẻ, $P(1) = a + b + c + d$ là số lẻ.

Giả sử có $x_0 \in \mathbb{Z}$ mà $P(x_0) = 0$.

* Nếu x_0 là số chẵn $\Rightarrow P(x_0) - d = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0$ chẵn

$P(x_0) - d = P(x_0) - P(0) = -P(0)$ chẵn, trái với giả thiết vì $P(0)$ lẻ.

* Nếu x_0 là số lẻ $\Rightarrow P(x_0) - P(1) = a(x_0^3 - 1) + b(x_0^2 - 1) + c(x_0 - 1)$ cũng là số chẵn do $x_0^3 - 1, x_0^2 - 1, x_0 - 1$ là số chẵn $\Rightarrow P(1)$ là số chẵn, trái với giả thiết. Vậy $P(x)$ không có nghiệm là số nguyên.

4.30. Ta có tập $M = \{25; 26; 27; 28; 29; 30; 31\}$ và đa thức :

$Q(x) = x + (x - 25)(x - 27)(x - 28)(x - 29)(x - 31)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

* Rõ ràng đa thức $Q(x)$ có các hệ số đều nguyên (thỏa mãn điều kiện a).

* Có 5 số $25, 27, 28, 29, 31 \in M$ (số nhỏ nhất là 26, số lớn nhất là 31 ta đều có : $Q(25) = 25, Q(27) = 27, Q(28) = 28, Q(29) = 29, Q(31) = 31$ (thỏa mãn điều kiện b)).

* $Q(30) = 30 + 5.3.2.1.(-1) = 30 - 30 = 0$, thỏa mãn điều kiện.

4.31. Dạng tổng quát của đa thức bậc hai là : $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Ta có : $f(x - 1) = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$

$$f(x) - f(x - 1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức phải tìm là : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$ (c là hằng số).

Áp dụng :

• Với $x = 1$, ta có : $1 = f(1) - f(0)$

• Với $x = 2$, ta có : $2 = f(2) - f(1)$

• Với $x = n$, ta có : $n = f(n) - f(n - 1)$

$$S = 1 + 2 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + c - c = \frac{n(n + 1)}{2}$$

4.32. Tổng các hệ số của một đa thức $P(x)$ bất kì bằng giá trị của đa thức đó tại $x = 1$.

Vậy tổng các hệ số của đa thức

$$\begin{aligned} P(x) &= (3 - 4x + x^2)^{2006} \cdot (3 + 4x + x^2)^{2007} \\ &= P(1) = (3 - 4 + 1)^{2006} \cdot (3 + 4 + 1)^{2007} = 0. \end{aligned}$$

Chuyên đề : PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

1. a) Với $n = 1$ thì $7^3 + 8^3$ chia hết cho $7^2 - 56 + 8^2$ nên chia hết cho 19.

Giả sử $7^{k+2} + 8^{k+2}$ chia hết cho 19 ($k \geq 1$)

Xét $7^{k+3} + 8^{k+3} = 7 \cdot 7^{k+2} + 64 \cdot 8^{k+1} = 7(7^{k+2} + 8^{2k+1}) + 57 \cdot 8^{2k+1}$ chia hết cho 19.

b) Với $n = 1$ thì $1 + 6 + 11 + 6 = 24$ chia hết cho 24.

Giả sử $k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k$ chia hết cho 24 ($k \geq 1$).

Xét $(k+1)^4 + 6(k+1)^3 + 11(k+1)^2 + 6(k+1)$

$$= (k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k) + 24(k^2 + 1) + 4(k^3 + 11k)$$

Ta thấy hai số hạng đầu chia hết cho 24. Phải chứng minh $4(k^3 + 11k)$ chia hết cho 24, tức là chứng minh $k^3 + 11k$ chia hết cho 6. Điều này được chứng minh một cách dễ dàng.

c) Với $n = 1$ thì $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ chia hết cho 9.

Giả sử $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ chia hết cho 9 ($k \geq 1$).

Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, tức là :

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \text{ chia hết cho 9}$$

Có $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$

$$= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27$$

$$= [k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3)$$

Mà $[k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3]$ chia hết cho 9 do giả thiết quy nạp còn $9(k^2 + 3k + 3)$ chia hết cho 9 với mọi k .

Do đó $[(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3]$ chia hết cho 9.

2. a) Mệnh đề đúng với $n = 1$.

$$\text{Giả sử } S_k = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad (k \geq 1)$$

$$\text{Xét } S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = S_k + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

b) Mệnh đề đúng với $n = 1$ vì $1 = 1^2$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), tức là $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Tức là : $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$

Thật vậy : $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1)$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

c) Với $n = 1$ thì mệnh đề đúng vì $1(3 + 1) = 1.4$ (vế trái)

$$1(1 + 1)^2 = 1.4 \text{ (cế phải)}$$

Giả sử với $n = k \geq 1$ ($k \in \mathbb{N}$), ta có :

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + k(3k + 1) = k(k + 1)$$

Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy : $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (k + 1)(3k + 4)$

$$= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4)$$

$$= k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4)$$

$$= [k(k + 1) + 3k + 4](k + 1) = (k + 2)^2(k + 1).$$

3. a) Với $n = 1$ thì mệnh đề đúng vì $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$.

$$\text{Giả sử } S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+1} > 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Khi đó } S_{k+1} = S_k + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}$$

$$= S_k + \frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)} > 1.$$

b) Mệnh đề đúng với $n = 10$ vì $2^{10} = 1024 > 10^3$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ ($k \geq 10$, $k \in \mathbb{N}$) tức là $2^k > k^3$. Ta chứng minh

$$2^{k+1} > (k + 1)^3 \quad \text{với } k \geq 10$$

$$\text{Xét hiệu } 2^{k+1} - (k + 1)^3 = 2.2^k - k^3 - 3k^2 - 3k - 1$$

$$= 2(2^k - k^3) + k^3 - 3k^2 - 3k - 1$$

Ta có : $2^k - k^3 > 0$ (theo giả thiết quy nạp)

$$\text{Mà } k^3 - 3k^2 - 3k - 1 = k(k^2 - 3k - 3) - 1 = k[k(k - 3) - 3] - 1$$

Do $k \geq 10 \Rightarrow k(k-3) \geq 70 \Rightarrow k[k(k-3)-3]-1 \geq 669 > 0$

Vậy $2^{k+1} > (k+1)^3$.

Chúng minh rằng $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n + a_{n+2}}$ (2) là phân số tối giản với mọi $n \geq 2$.

4. a) Mệnh đề (2) đúng với $n = 2$ và $\frac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4} = \frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4}$.

b) Giả sử mệnh đề (2) đúng với $n = k$, tức là :

$\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{a_k + a_{k+2}}$ là phân số tối giản. Cần chứng minh rằng

$\frac{a_k + a_{k+2}}{a_{k+1} + a_{k+3}}$ là phân số tối giản.

Gọi d là ước chung của $a_k + a_{k+2}$ và $a_{k+1} + a_{k+3}$ thì

$(a_{k+1} + a_{k+3}) - (a_k + a_{k+2})$ chia hết cho d

$\Rightarrow (a_{k+1} - a_k) + (a_{k+3} - a_{k+2})$ chia hết cho d

$\Rightarrow a_{k-1} + a_{k+1}$ chia hết cho d . Vậy d là ước chung của $a_k + a_{k+2}$ và $a_{k-1} + a_{k+1} \Rightarrow d = 1$

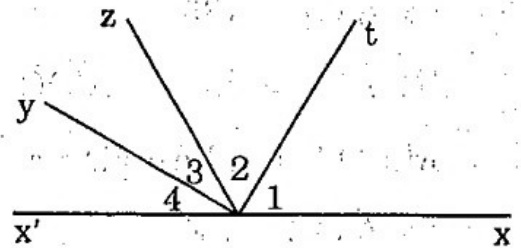
Vậy $\frac{a_k + a_{k+2}}{a_{k+1} + a_{k+3}}$ là phân số tối giản.

c) Kết luận : Mệnh đề (2) đúng với mọi $n \geq 2$.

Chương V.

5.1. Chứng tỏ : $\widehat{yOt} = 90^\circ$.

- Vẽ tia Ox' là tia đối của tia Ox .
- Ta có : $\widehat{xOy} + \widehat{x'Oy} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)
- Mà $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$ (giả thiết)
- $\Rightarrow \widehat{x'Oy} = \widehat{yOz}$



Hình 74

Mà tia Oy nằm giữa 2 tia Oz và Ox'
 $\Rightarrow Oy$ là tia phân giác của $\widehat{x'Oz}$.

Ta có : Oy và Ot thứ tự là 2 tia phân giác của 2 góc kề bù $\widehat{x'Oz}$ và $\widehat{xOz} \Rightarrow \widehat{yOt} = 90^\circ$.

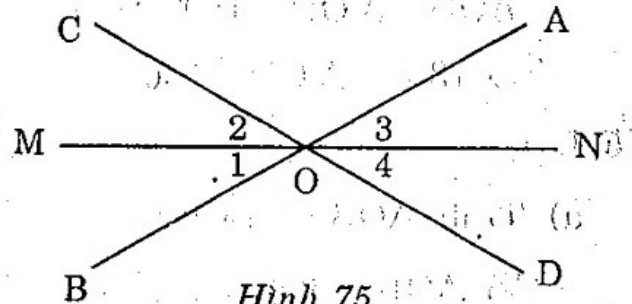
5.2.

a) $\widehat{NOA} = \widehat{NOD}$.

Ta có : $\widehat{O_1} = \widehat{O_3}$ (đối đỉnh)
 $\widehat{O_2} = \widehat{O_4}$ (đối đỉnh)

Mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (tia OM là tia phân giác của $\widehat{BOC}$)

$\Rightarrow \widehat{O_3} = \widehat{O_4} \Rightarrow \widehat{NOA} = \widehat{NOD}$.



Hình 75

b) Tia ON là tia phân giác của $\widehat{AOD}$.

Vì $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ (2 góc đối đỉnh). Mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$

$\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \frac{1}{2}\widehat{AOD}$.

Mà $\widehat{O_3} = \widehat{O_4} = \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \widehat{O_3} = \widehat{O_4} = \frac{1}{2}\widehat{AOD}$

$\Rightarrow$ Tia ON là tia phân giác của $\widehat{AOD}$.

5.3.

a) $\widehat{AOB}$ và $\widehat{A'OB'}$ là 2 góc đối đỉnh :

Vì $\widehat{AOB} + \widehat{A'OB} = 180^\circ$ (2 góc kề bù)

Mà $\widehat{AOB} = 45^\circ$ (đề bài)

$$\Rightarrow 45^\circ + \widehat{A'OB} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A'OB} = 135^\circ.$$

Vì $\widehat{AOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A'OC} = 90^\circ$

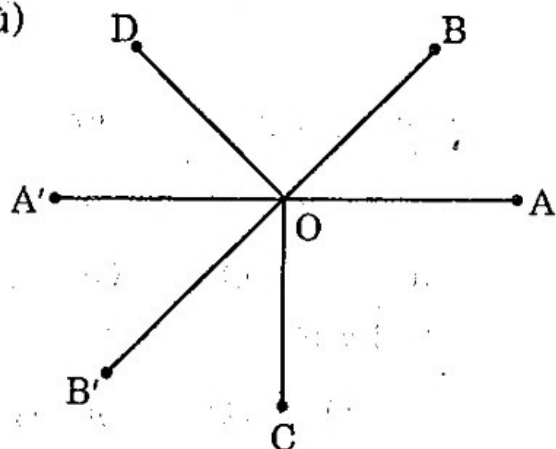
Mà OB là phân giác của $\widehat{A'OC}$

$$\Rightarrow \widehat{A'OB} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BOB'} = \widehat{A'OB} + \widehat{A'OB'} = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tia OB và OB' đối nhau. Mà tia OA và OA' đối nhau

$\Rightarrow \widehat{AOB}$ đối đỉnh với $\widehat{A'OB'}$.



Hình 76

b) Tính $\widehat{A'OD}$?

Vì tia OB nằm giữa 2 tia OA và OD $\Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{BOD} = \widehat{AOD}$

$$\Rightarrow 45^\circ + 90^\circ = \widehat{AOD} \Rightarrow \widehat{AOD} = 135^\circ$$

$\widehat{AOD} + \widehat{A'OD} = 180^\circ$ (2 góc kề bù). Mà $\widehat{AOD} = 135^\circ$

$$\Rightarrow 135^\circ + \widehat{A'OD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A'OD} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

5.4.

a) Tính $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$:

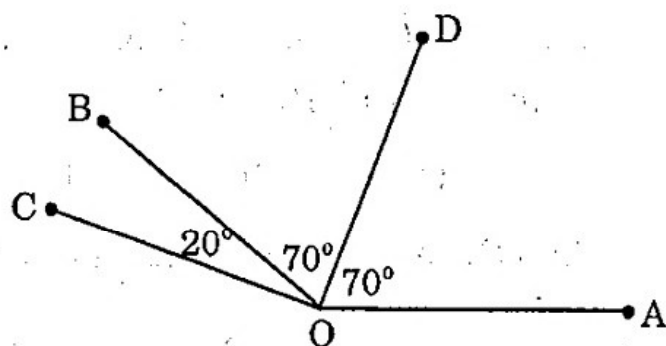
Vì $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 160^\circ$.

Mà $\widehat{AOB} = 7\widehat{BOC}$

$$\Rightarrow 7\widehat{BOC} + \widehat{BOC} = 160^\circ$$

$$\Rightarrow 8\widehat{BOC} = 160^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 7.20^\circ = 140^\circ. \text{ (Xem hình vẽ)}$$



Hình 77

b) Chứng minh : tia OD là tia phân giác của $\widehat{AOB}$.

Vì $OD \perp OC \Rightarrow \widehat{DOC} = 90^\circ$.

Vì tia OD nằm giữa 2 tia OA và OC $\Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{DOC} = \widehat{AOC}$

$$\Rightarrow \widehat{AOD} + 90^\circ = 160^\circ \Rightarrow \widehat{AOD} = 70^\circ.$$

Trên cùng nửa mặt phẳng có bờ chứa tia OA có 2 tia OD và OB sao cho $\widehat{AOD} < \widehat{AOB}$ ($70^\circ < 140^\circ$) nên tia OD là tia nằm giữa 2 tia

OA và OB (1)

$$\begin{aligned} - \text{ Mà } \widehat{AOD} + \widehat{DOB} &= \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{DOB} = \widehat{AOB} - \widehat{AOD} = 140^\circ - 70^\circ = 70^\circ, \\ \widehat{AOD} &= 70^\circ \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{BOD} \quad (2) \end{aligned}$$

- Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tia OD là tia phân giác của $\widehat{AOB}$.

5.5. Hướng dẫn :

- Vẽ tia ON' là tia đối của tia Om.
- Ta chứng minh : 2 tia On và On' trùng nhau.

Giải

- Vẽ tia On' là tia đối của tia Om.
- Hai tia Om và Ot thuộc 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng chứa tia Ox nên tia Ox nằm giữa 2 tia Om và Ot.
- Ta có :

$$\widehat{mOt} = \widehat{xOm} + \widehat{tOx} = \widehat{xOm} + 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{mOt} + \widehat{n'Ot} = 180^\circ \text{ (2 góc kề bù)}$$

$$\Rightarrow \widehat{n'Ot} = 180^\circ - \widehat{mOt} = 180^\circ - (\widehat{xOm} + 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \widehat{n'Ot} = 180^\circ - \widehat{xOm} - 90^\circ \Rightarrow \widehat{n'Ot} = 90^\circ - \widehat{xOm} \quad (1)$$

$$\text{- Chứng minh tương tự ta có : } \widehat{zOn'} = 90^\circ - \widehat{mOy} \quad (2)$$

$$\text{- Mà } \widehat{xOm} = \widehat{mOy} \text{ (do tia Om là tia phân giác của } \widehat{xOy}) \quad (3)$$

$$\text{- Từ (1), (2), (3) } \Rightarrow \widehat{n'Ot} = \widehat{zOn'}$$

- Mà tia On' nằm giữa 2 tia Oz và Ot $\Rightarrow$ tia On' là tia phân giác của $\widehat{zOt}$.

Vậy 2 tia On và On' trùng nhau $\Rightarrow$ 2 tia Om và On là 2 tia đối nhau.

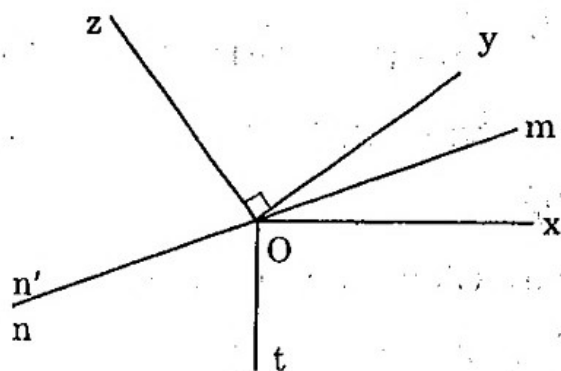
5.6.

a) Chứng minh : AE // CF.

$$\text{Ta có : } \widehat{MEA} = 75^\circ, \widehat{EFC} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{EFC}$$

Mà $\widehat{MEA}$ và $\widehat{EFC}$ là 2 góc đồng vị

$\Rightarrow$ AE // CF (dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song).



Hình 78

b) Tính góc ABC :

Kẻ tia BD // AE. Mà AE // CF

$\Rightarrow BD // CF$.

Vì AE // BD $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{ABD}$.

Mà $\widehat{A} = 55^\circ \Rightarrow \widehat{ABD} = 55^\circ$

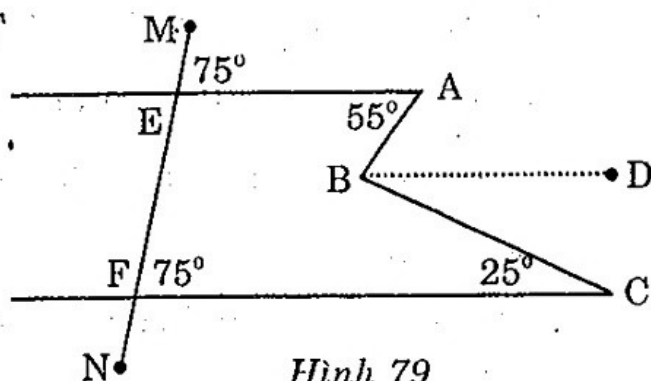
Vì BD // CF $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{DBC}$.

Mà $\widehat{C} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{DBC} = 25^\circ$

Tia BD nằm giữa 2 tia BA và BC

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 55^\circ + 25^\circ = 80^\circ$

Vậy $\widehat{ABC} = 80^\circ$.



5.7.

a) Chứng minh : Ax // BC và Cy // Oz.

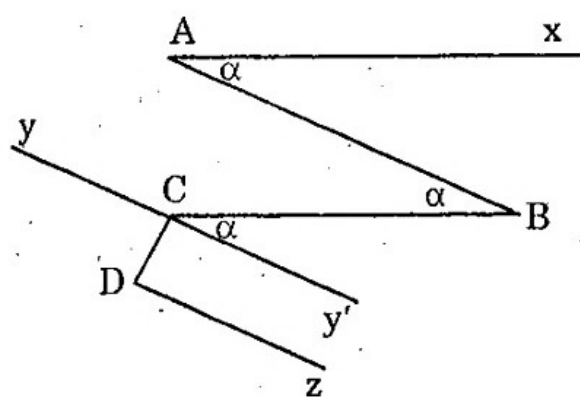
Vì $\widehat{xAB} = \widehat{ABC} = \alpha$.

Mà $\widehat{xAB}$ và $\widehat{ABC}$ là 2 góc so le trong

$\Rightarrow Ax // BC$ (dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song).

Vì Cy $\perp$ CD, Dz $\perp$ CD

$\Rightarrow Cy // Dz$ (từ vuông góc đến song song).



b) Tính góc BCD ?

Kẻ tia Cy' là tia đối của tia Cy.

Vì Cy // AB $\Rightarrow Cy' // AB$.

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BCy'} = \alpha$ (2 góc so le trong).

Vì $\widehat{yCy'} = 180^\circ$. Mà $\widehat{DCy} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DCy'} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BCy'} + \widehat{DCy'} = \alpha + 90^\circ$.

5.8.

a) Chứng tỏ : $zz' \parallel Oy$.

Vì Ox cắt Oy và zz' tại O và A .

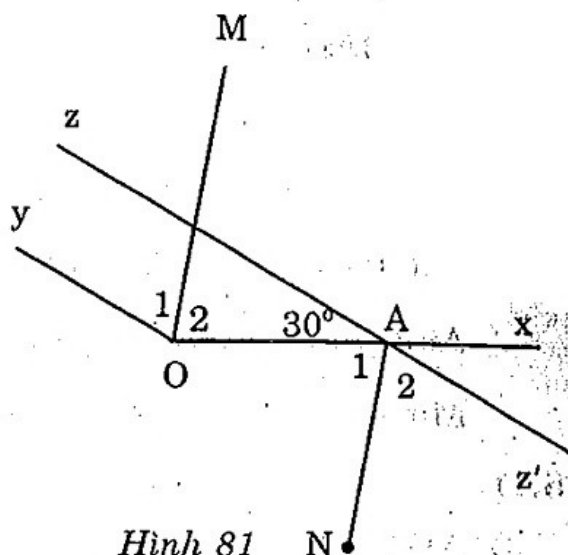
Lại có :

$$\widehat{xOy} + \widehat{OAz} = 150^\circ + 30^\circ = 180^\circ.$$

Mà $\widehat{xOy}$ và $\widehat{OAz}$ là 2 góc
trong cùng phía

$$\Rightarrow Oy \parallel zz'$$

$$\Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{OAz'} = 150^\circ \text{ (2 góc so le trong).}$$



Hình 81

b) Chứng minh : $AN \parallel OM$.

Vì OM là tia phân giác của $\widehat{xOy}$, AN là tia phân giác của $\widehat{OAz'}$

$\Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{A}_1$ (cùng bằng $150^\circ : 2 = 75^\circ$). Mà $\hat{O}_2$ và $\hat{A}_1$ là 2 góc so
le trong $\Rightarrow OM \parallel AN$.

5.9. Tính $\widehat{BCD}$?

- Qua C kẻ đường thẳng $xy \parallel AB$. Mà $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow xy \parallel AB \parallel CD.$$

- $AB \parallel Cx \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{BCx} = 180^\circ$.

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = 110^\circ$$

$$\Rightarrow 110^\circ + \widehat{BCx} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BCx} = 70^\circ.$$

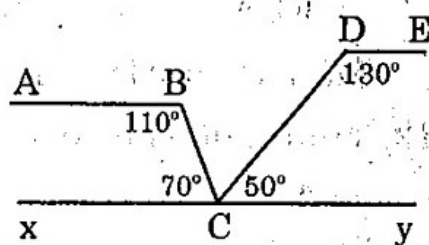
- $DE \parallel Cy \Rightarrow \widehat{EDC} + \widehat{DCy} = 180^\circ$. Mà $\widehat{EDC} = 130^\circ$

$$\Rightarrow 130^\circ + \widehat{DCy} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DCy} = 50^\circ.$$

- $\widehat{DCx} = 180^\circ - \widehat{DCy} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

- Mà $\widehat{BCx} + \widehat{BCD} = \widehat{DCx}$ và $\widehat{BCx} = 70^\circ \Rightarrow 70^\circ + \widehat{BCD} = 130^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BCD} = 130^\circ - 70^\circ = 60^\circ.$$



Hình 82

5.10. Tính góc ADB ?

Kẻ tia $Bz \parallel Ax \parallel Cy$.

$Bz \parallel Ax \Rightarrow \widehat{DAB} = \hat{B}_1$ (so le trong).

$$\text{Mà } \widehat{DAB} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = 40^\circ$$

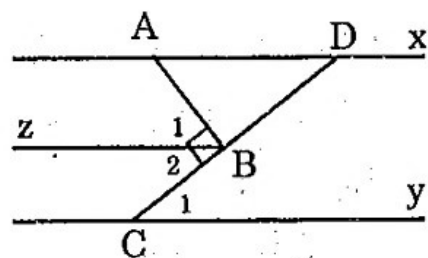
$$\text{Mà } \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B}_2 = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$Bz \parallel Cy \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{C} \text{ (so le trong).}$$

$$\text{Mà } \widehat{B}_2 = 50^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 50^\circ$$

$$Ax \parallel Cz \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{C} \text{ (so le trong).}$$

$$\text{Mà } \widehat{C} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 50^\circ.$$



Hình 83

5.11.

a) $AD \parallel CF$:

Ta có : $\widehat{DAC}$ và $\widehat{C}$ là 2 góc trong cùng phía.

$$\text{Mà } \widehat{DAC} + \widehat{C} = 140^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow AD \parallel CF$ (dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song).

b) $AD \parallel BE$:

Kẻ tia AD' là tia đối của tia AD .

Vì $AD \parallel CF \Rightarrow AD' \parallel CF \Rightarrow \widehat{D'AC} = \widehat{C} = 40^\circ$ (2 góc so le trong)

$$\Rightarrow \widehat{BAD'} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{BAD'} = 50^\circ$, $\widehat{EBA}$ so le trong $\widehat{BAD'} \Rightarrow BE \parallel AD'$

Mà AD và AD' đối nhau $\Rightarrow BE \parallel AD$.

5.12. Tính α để cho $Ax \parallel By$?

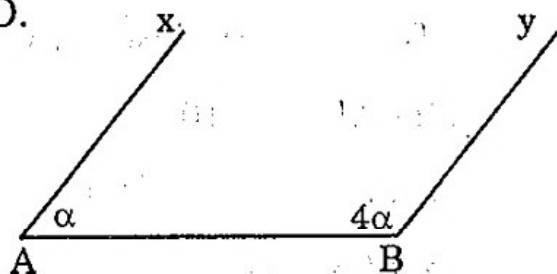
$$Ax \parallel By$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BAx} + \widehat{ABx} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 5\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 180^\circ : 5 = 36^\circ$$

Vậy với $\alpha = 36^\circ$ thì $Ax \parallel By$.



Hình 84

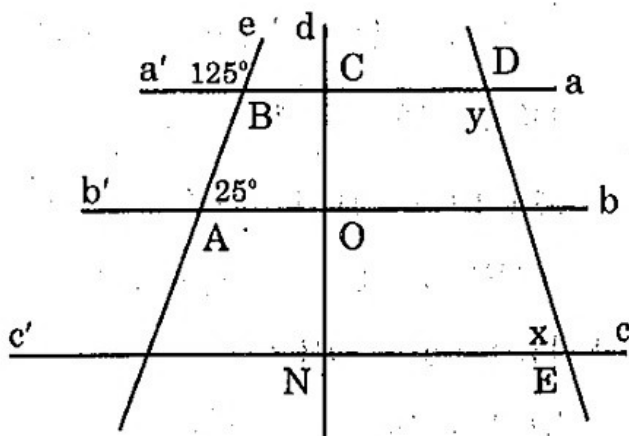
5.13.

a) Chứng minh : $a \parallel c$.

- Ta có : $\widehat{eBa'} = 125^\circ$.

Mà $\widehat{eBa'} = \widehat{ABC}$ (2 góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 125^\circ.$$



Hình 85

- Lại có : $\widehat{ABC} + \widehat{BAb} = 125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow a \parallel b$ (1)

- Mà $b \perp d, c \perp d \Rightarrow b \parallel c$ (2)

- Từ (1) và (2) $\Rightarrow a \parallel c$.

b) Tính số đo x, y của các góc CDE và DEN ?

- Vì $a \parallel c \Rightarrow x + y = 180^\circ$.

Mà $3x = 2y \Rightarrow y = \frac{3x}{2}$

$\Rightarrow x + \frac{3x}{2} = 180^\circ \Rightarrow \frac{5x}{2} = 180^\circ \Rightarrow 5x = 360^\circ \Rightarrow x = 72^\circ$.

- Vì $y = \frac{3x}{2} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 72^\circ}{2} = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$

Vậy $x = 72^\circ, y = 108^\circ$.

5.14.

a) $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ cùng nhọn thì $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

- Gọi giao điểm của tia đối của tia $O'y'$ với tia Ox là điểm A.

- Đặt $\widehat{x'O'y'} = \alpha$.

Vì $O'x' \parallel Ox \Rightarrow O'x' \parallel Ax$

$\Rightarrow \widehat{x'O'y'} = \widehat{xAy'} = \alpha$

Vì $O'y' \parallel Oy \Rightarrow Oy \parallel Ay'$

$\Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{xAy'} = \alpha$

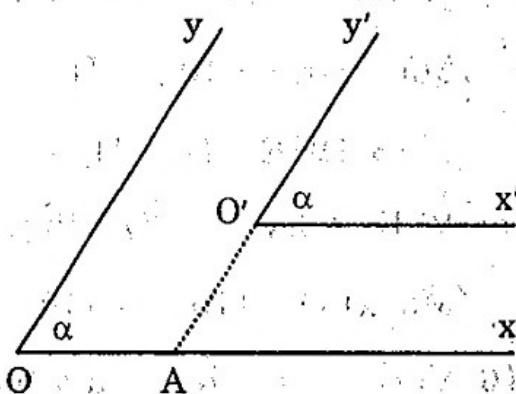
$\Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$ (cùng bằng α)

Chứng minh tương tự nếu $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ cùng tù thì $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

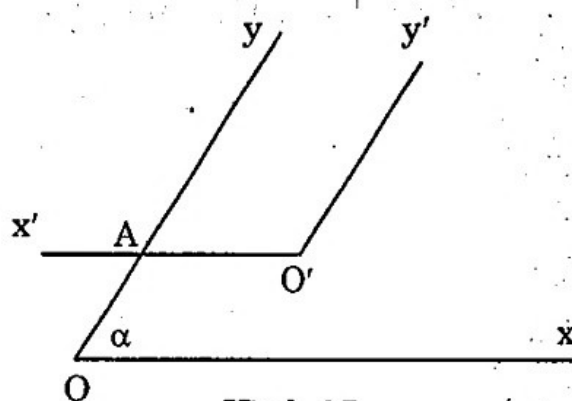
b) $\widehat{xOy}$ nhọn và $\widehat{x'O'y'}$ tù thì

$\widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^\circ$.

- Gọi giao điểm của $O'x'$ và Oy là điểm A.



Hình 86



Hình 87

$$- \text{ Vì } Ox // O'x' \Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{O'Ay} \text{ (2 góc đồng vị)} \quad (1)$$

$$- \text{ Vì } O'y' // Oy \Rightarrow O'y' // Ay \\ \Rightarrow \widehat{O'Ay} + \widehat{x'O'y'} = 180^\circ \text{ (2 góc trong cùng phía)} \quad (2)$$

$$\text{ Từ (1) và (2) } \Rightarrow \widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^\circ \text{ (đpcm).}$$

5.15.

a) Chứng minh : $Dx // Ey$.

Vì $Dx \perp a$, $Ey \perp a \Rightarrow Dx // Ey$ (từ vuông góc đến song song).

b) Tính góc DHE ?

Kẻ $Hx // Dx \Rightarrow Hx // Ey$.

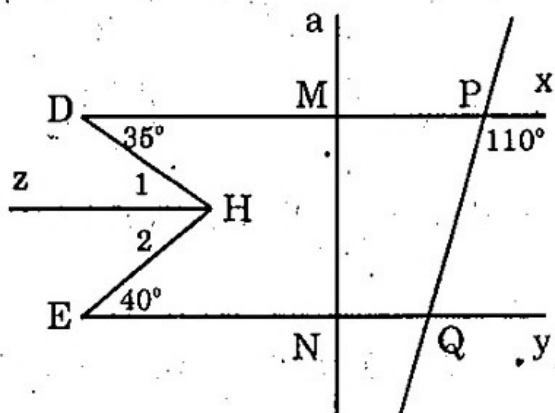
$$- \text{ Vì } Hx // Dx \\ \Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{xDH} \text{ (so le trong)} \\ \text{ Mà } \widehat{xDH} = 35^\circ \Rightarrow \widehat{H_1} = 35^\circ$$

$$- \text{ Vì } Hx // Ey \\ \Rightarrow \widehat{H_2} = \widehat{HEy} \text{ (so le trong)} \\ \text{ Mà } \widehat{HEy} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{H_2} = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DHE} = \widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 35^\circ + 40^\circ = 75^\circ.$$

c) Vì $Dx // Ey \Rightarrow \widehat{xPQ} + \widehat{PQy} = 180^\circ$ (2 góc trong cùng phía bù nhau)

$$\text{ Mà } \widehat{xPQ} = 110^\circ \Rightarrow 110^\circ + \widehat{PQy} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{PQy} = 70^\circ.$$



Hình 88

5.16. Vì $c \perp a$, $c \perp b \Rightarrow a // b$ (từ vuông góc đến song song)

$$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D} \text{ (2 góc so le trong). Mà } \widehat{D} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{C_1} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C_2} = 120^\circ, \widehat{C_3} = 60^\circ, \widehat{C_4} = 120^\circ.$$

Chương VI

6.1.

a) $\widehat{BEC}$ là góc tù.

- $\triangle ABC$ vuông tại A

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow 0^\circ < \hat{B} < 90^\circ.$$

- BE là phân giác của $\widehat{ABC}$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}.$$

- $\triangle ABE$ có $\widehat{BEC}$ là góc ngoài của tam giác tại đỉnh E

$$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BAE} + \hat{B}_1 = 90^\circ + \hat{B}_1 \quad (1)$$

- Vì $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$. Mà $0^\circ < \hat{B} < 90^\circ \Rightarrow 0^\circ < \frac{\hat{B}}{2} < 45^\circ \Rightarrow 0^\circ < \hat{B}_1 < 45^\circ \quad (2)$

- Từ (1) và (2) $\Rightarrow 90^\circ < 90^\circ + \hat{B}_1 < 135^\circ \Rightarrow 90^\circ < \widehat{BEC} < 180^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{BEC}$ là góc tù.

b) Cho $\widehat{BEC} = 110^\circ$. Tính $\hat{B}$ và $\hat{C}$?

$$\text{Xét } \triangle BEC \text{ có } \widehat{BEC} = 110^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{C} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

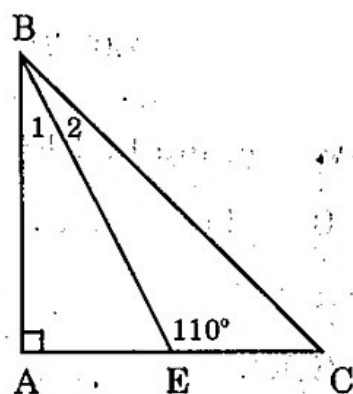
$$\Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \hat{C} = 70^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B} + 2\hat{C}}{2} = 70^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} + 2\hat{C} = 140^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} + \hat{C} = 140^\circ$$

$$\text{Mà } \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{C} = 140^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 50^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

$$\text{Vậy } \hat{B} = 40^\circ, \hat{C} = 50^\circ.$$



Hình 89

6.2.

a) - $\widehat{CID} = 60^\circ$. Mà $\widehat{CID} + \widehat{BIC} = 180^\circ$ (2 góc kề bù)

$$\Rightarrow 60^\circ + \widehat{BIC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 120^\circ$$

- BD là phân giác của góc B $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$

CE là phân giác của góc C $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \frac{\hat{C}}{2}$

$\triangle BIC$ có $\widehat{BIC} = 120^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ + 120^\circ = 260^\circ$

$\Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 120^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

b) Chứng minh: $\widehat{BEC}$ và $\widehat{BDC}$ bù nhau.

$\widehat{BEC}$ là góc ngoài của $\triangle AEC$ tại đỉnh E

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \hat{A} + \hat{C}_2 = 60^\circ + \hat{C}_2$

$\widehat{BDC}$ là góc ngoài của $\triangle ABD$ tại đỉnh D

$\Rightarrow \widehat{BDC} = \hat{A} + \hat{B}_2 = 60^\circ + \hat{B}_2$

$\Rightarrow \widehat{BEC} + \widehat{BDC} = 60^\circ + \hat{C}_2 + 60^\circ + \hat{B}_2 = 120^\circ + (\hat{C}_2 + \hat{B}_2)$

$= 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BEC}$ bù với $\widehat{BDC}$.

6.3. $AH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$

$\triangle AHB$ có $\widehat{AHB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \hat{B} + \hat{A}_2 = 90^\circ$.

Mà $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$

$\Rightarrow \hat{B} + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$

Chứng minh tương tự ta có: $\hat{C} = \hat{A}_2$

Vậy các cặp góc nhọn bằng nhau là: $\hat{B} = \hat{A}_1, \hat{C} = \hat{A}_2$.

6.4. Gọi G là giao điểm của CK và

H là giao điểm của BK và CD.

Xét $\triangle KGB$ có $\hat{K} + \hat{B}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$

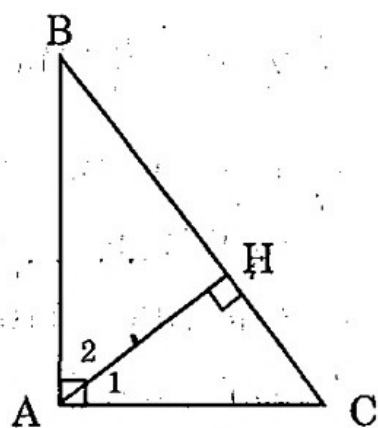
$\triangle AGC$ có $\hat{A} + \hat{C}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$

$\Rightarrow \hat{K} + \hat{B}_1 + \hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{C}_1 + \hat{C}_1$.

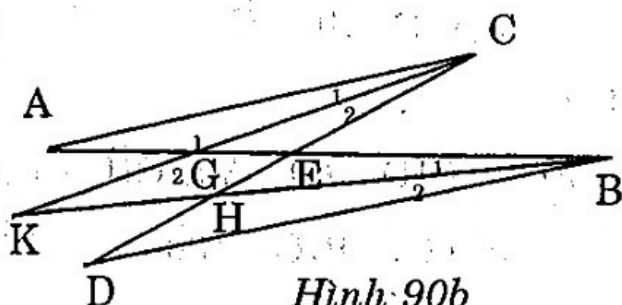
Mà $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \hat{K} + \hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{C}_1$

(1)



Hình 90a



Hình 90b

Tương tự ta có: $\widehat{K} + \widehat{C}_2 = \widehat{D} + \widehat{B}_2$ (2)

Do $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ nên cộng (1) với (2) ta có:

$$2\widehat{K} = \widehat{A} + \widehat{D} \Rightarrow \widehat{BKC} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BDC}}{2}$$

6.5. $\triangle ABC$ vuông tại A $\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{HAC} = 90^\circ \quad (1)$$

$$AH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AHC \text{ vuông tại H}$$

$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{HAC} = 90^\circ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{HAC} = \widehat{C} + \widehat{HAC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{C}$$

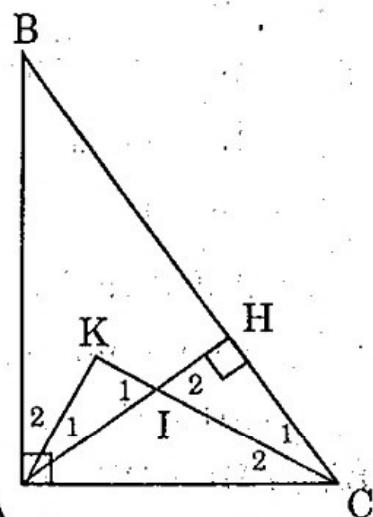
$$\text{Lại có: } \widehat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{BAH}, \widehat{C}_1 = \frac{1}{2}\widehat{C}. \text{ Mà } \widehat{BAH} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{A}_1$$

$\triangle AKI$ và $\triangle CHI$ có 2 cặp góc bằng nhau:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$$

$$\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2 \text{ (2 góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{CHI}, \text{ Mà } \widehat{CHI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AKI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AKC} = 90^\circ.$$



Hình 91

6.6. a) $AG \parallel BC$:

Xét $\triangle ADG$ và $\triangle CDB$ có:

$AD + DC$ (giả thiết)

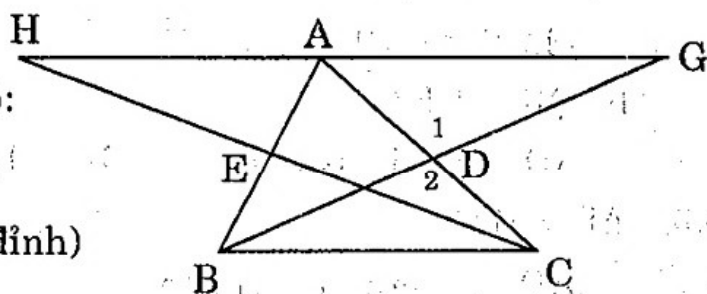
$\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ (2 góc đối đỉnh)

$DG = DB$ (giả thiết)

$$\Rightarrow \triangle ADG = \triangle CDB \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AGD} = \widehat{DBC} \text{ (2 góc tương ứng)}$$

Mà 2 góc $\widehat{AGD}$ và $\widehat{DBC}$ ở vị trí so le trong $\Rightarrow AG \parallel BC$.



Hình 92

b) H, A, G thẳng hàng.

– Chứng minh tương tự ta có: $AH \parallel BC$

– Lại có: $AG \parallel BC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow H, A, G$ thẳng hàng (tiên đề Ôclit).

6.7. Chứng minh: $MN = MB + NC$?

- Vì BI là tia phân giác của góc B

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

- Mà $MN \parallel BC$

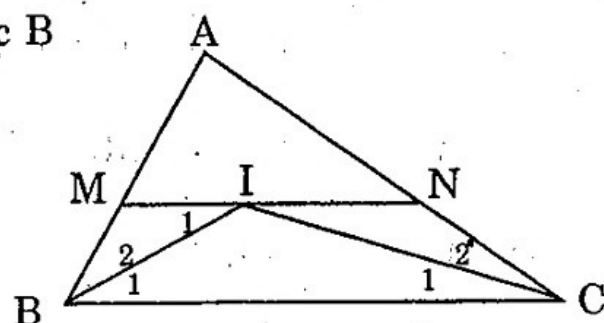
$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{I}_1 \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{I}_1$$

$$\Rightarrow \Delta MBI \text{ cân tại } M \Rightarrow MI = MB.$$

- Chứng minh tương tự ta có: $IN = NC$

$$\Rightarrow MI + IN = MB + NC \Rightarrow MN = MB + NC.$$



Hình 93

6.8. a) $DI = DB$ và $DI = EC$.

- ΔABC cân tại A $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$

- $DI \parallel AC \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{C}_1$ (đồng vị)

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{I}_1$$

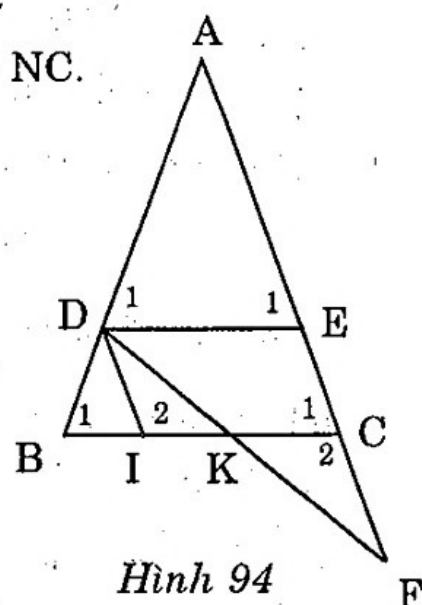
$$\Rightarrow \Delta DBI \text{ cân tại } D \Rightarrow DB = DI.$$

- $DE \parallel BC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$ và $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$.

$$\text{Mà } \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{E}_1$$

$$\Rightarrow \Delta ADE \text{ cân tại } A \Rightarrow AD = AE. \text{ Mà } AB = AC \Rightarrow BD = EC.$$

$$\text{Mà } BD = DI \Rightarrow DI = EC.$$



Hình 94

b) $DK = KF$?

$$\Delta DIK = \Delta FCK \text{ (g-c-g)} \Rightarrow DK = KF.$$

6.9. $AE = BK$?

- AD là phân giác của $\hat{A}$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

- $DE \parallel AB$ (giả thiết)

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1 \text{ (so le trong)}$$

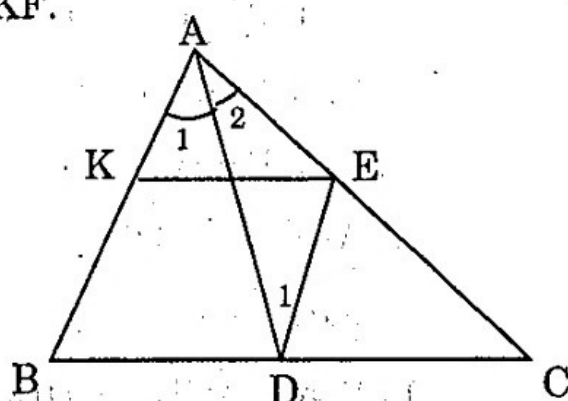
$$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D}_1 \Rightarrow \Delta AED \text{ cân tại } E$$

$$\Rightarrow AE = ED \quad (1)$$

- $DE \parallel BK$ (giả thiết), $KE \parallel BD$ (giả thiết)

$$\Rightarrow BK = ED \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AE = BK.$$



Hình 95

6.10. a) Chứng minh: $DH = EK$.

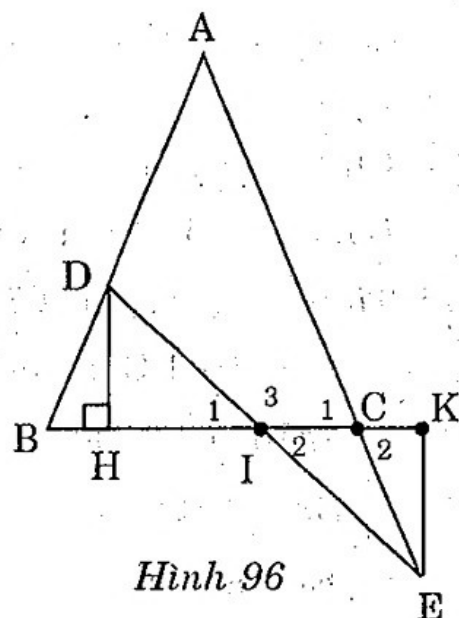
– $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}_1$.

Mà $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}_2$

– Tam giác vuông BDH bằng tam giác vuông CEK (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow DH = EK$.



Hình 96

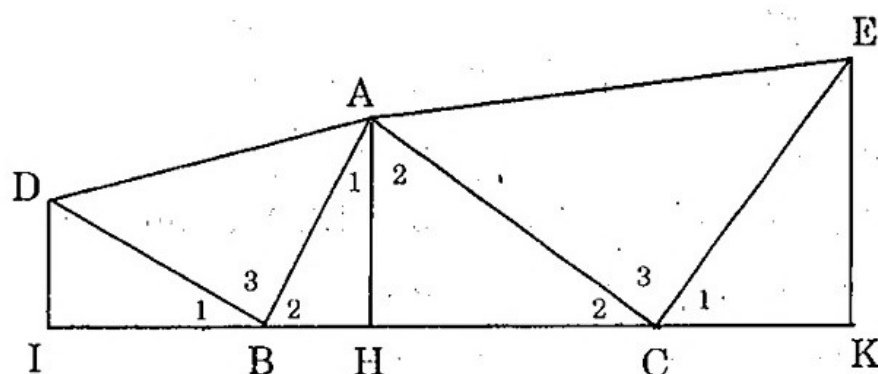
b) Chứng minh: D, I, E thẳng hàng.

Dễ dàng chứng minh: $\triangle DHI = \triangle EKI$ (g-c-g) $\Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{I}_2$

Mà $\hat{I}_1 + \hat{I}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{I}_2 + \hat{I}_3 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DIE} = 180^\circ$

$\Rightarrow D, I, E$ thẳng hàng.

6.11.



Hình 97

Kẻ $AH \perp BC$ (H thuộc BC) $\Rightarrow \triangle ABH$ vuông tại H và $\triangle ACH$ vuông tại H .

$\triangle ABH$ vuông tại $H \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ$

$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ$. Mà $\hat{B}_3 = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ$

$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$

Xét $\triangle ABH$ ($\hat{H} = 90^\circ$) và $\triangle BDI$ ($\hat{I} = 90^\circ$) có:

$AB = BD$ (giả thiết)

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle BDI$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = DI$ (1)

Chứng minh tương tự ta có: $\triangle AHC = \triangle CKE \Rightarrow HC = EK$ (2)

Cộng (1) với (2) ta có: $BH + HC = DI + EK \Rightarrow BC = DI + EK$.

6.12. Tính góc A và góc C?

– Trên tia EC lấy điểm D sao cho $ED = EA$.

– $\triangle ABE$ ($\hat{E}_1 = 90^\circ$) và $\triangle DBE$ ($\hat{E}_2 = 90^\circ$) có:

$EA = ED$ (giả thiết)

$\hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 90^\circ$

BE chung

$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle DBE$ (c-g-c) $\Rightarrow AB = BD$ (1)

– Lại có: $EC - EA = EC - DE = CD$.

Mà $EC - EA = AB$

$\Rightarrow CD = AB$

(2)

– Từ (1) và (2) $\Rightarrow BD = CD$ (cùng bằng AB)

$\Rightarrow \triangle DBC$ cân tại D $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{B}_1$

– Mà góc BDA là góc ngoài của $\triangle BCD$ tại đỉnh D

$\Rightarrow \widehat{BDA} = \hat{C}_1 + \hat{B}_1 = \hat{C}_1 + \hat{C}_1 = 2\hat{C}_1$

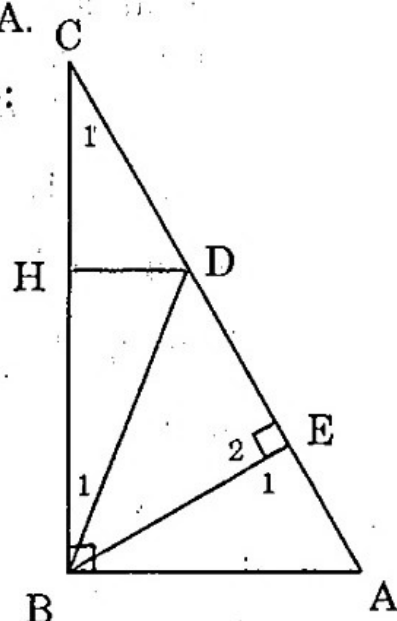
– $\triangle BAD$ có $BA = BD \Rightarrow \triangle BAD$ cân tại B

$\Rightarrow \widehat{BDA} = \hat{A} \Rightarrow 2\hat{C}_1 = \hat{A}$

– $\triangle ABC$, $\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow 2\hat{C}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ \Rightarrow 3\hat{C}_1 = 90^\circ$

$\Rightarrow \hat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{A} = 2.30^\circ = 60^\circ$

Vậy $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$.



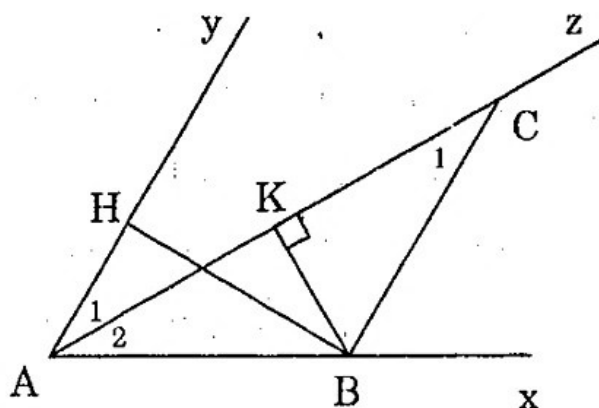
Hình 98

6.13. $BH = \frac{AC}{2}$?

– Az là tia phân giác của $\widehat{xAy}$

$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

– Vì $BC \parallel Ay \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$



Hình 99

$\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \Delta BAC$ cân tại B.

- Kẻ $BK \perp AC \Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{BKA} = 90^\circ$

- $\Delta BAK = \Delta BCK$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow AK = KC \Rightarrow AK = \frac{AC}{2} \quad (1)$$

- Dễ dàng chứng minh được: $\Delta AHB = \Delta BKA$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow BH = AK$ (2)

- Từ (1) và (2) $\Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$.

6.14. a) Chứng minh: ΔIHK đều và HK song song với AC .

- Xét ΔAIH ($\hat{H} = 90^\circ$) và ΔAIK ($\hat{K} = 90^\circ$) có:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (giả thiết)}$$

AI chung

$\Rightarrow \Delta AIH = \Delta AIK$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow IH = IK \Rightarrow \Delta IHK \text{ cân tại I} \quad (1)$$

$$\Delta AHI \text{ có } \hat{H} = 90^\circ, \hat{A}_1 = 60^\circ \Rightarrow \hat{I}_1 = 30^\circ$$

$$\text{Mà } \hat{I}_1 = \hat{I}_2 \Rightarrow \hat{I}_2 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{HIK} = 60^\circ \quad (2)$$

- Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta IHK$ đều.

- Dễ dàng chứng minh được: $HK \perp AI$ và $BC \perp AI \Rightarrow HK \parallel BC$.

b) Chứng minh: ΔACD đều.

- ΔACD có $AC = AD (= AB)$

$\Rightarrow \Delta ACD$ cân và $\widehat{CAD}$ kề bù với $\widehat{BAC}$.

$$\text{Mà } \widehat{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CAD} = 60^\circ.$$

- ΔACD cân tại A có $\widehat{CAD} = 60^\circ$

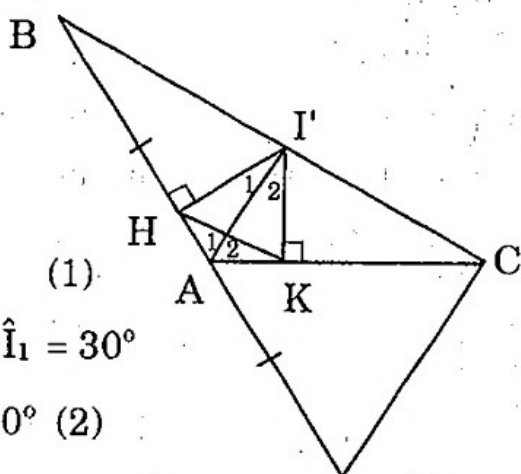
$\Rightarrow \Delta ACD$ đều.

6.15. Chứng minh: $AK = AH$.

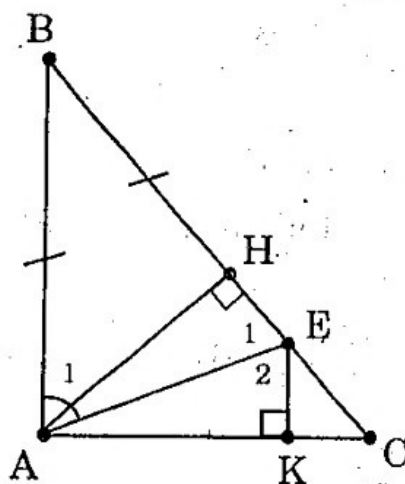
- Vì $BA = BE$ (gt) $\Rightarrow \Delta BAE$ cân tại B

$$\Rightarrow \widehat{BAE} = \hat{E}_1 \quad (1)$$

- Vì $AB \parallel EK$ (cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow \widehat{BAE} = \hat{E}_2 \quad (2)$



D Hình 100



Hình 101

- Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$

- Xét $\triangle AHE$ ($\widehat{H} = 90^\circ$) và $\triangle AKE$ ($\widehat{K} = 90^\circ$) có:

$$\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 \text{ (chứng minh trên)}$$

AE chung

$$\Rightarrow \triangle AHE = \triangle AKE \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow AH = AK.$$

6.16. a) $\triangle ABE = \triangle HBE$ (cạnh huyền - góc nhọn) vì:

$$\widehat{A} = \widehat{H} = 90^\circ$$

BE cạnh chung

$$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \text{ (giả thiết).}$$

b) BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

- Gọi I là giao điểm của BE và AH.

- Dễ dàng chứng minh được:

$$\triangle ABI = \triangle HBI \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{I}_1 = \widehat{I}_2 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \text{ và } IA = IH$$

$\Rightarrow$ BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

c) Chứng minh: $EK = EC$.

$$\triangle AEK = \triangle HEC \text{ (g-c-g)} \Rightarrow EK = EC.$$

6.17. Tính độ dài AB và AC?

$$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{AB}{5} = \frac{AC}{12} = k$$

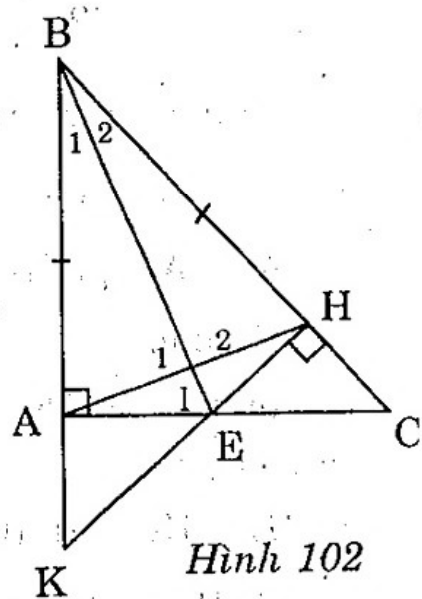
$$\Rightarrow B = 5k, AC = 12k$$

$$\text{Lại có: } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

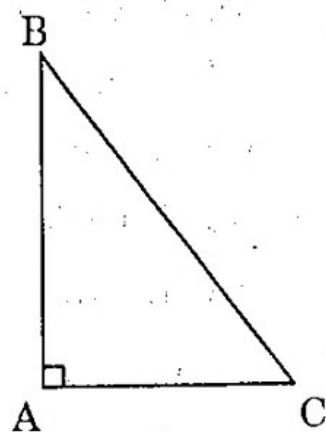
$$\Rightarrow 26^2 = (5k)^2 + (12k)^2$$

$$\Rightarrow 676 = 25k^2 + 144k^2 \Rightarrow 169k^2 = 676 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow AB = 5.2 = 10 \text{ (cm); } AC = 12.2 = 24 \text{ (cm).}$$



Hình 102



Hình 103

6.18. $\triangle MHK$ là tam giác gì?

- Ta có: $\widehat{ABH} = \widehat{CAK}$ (cùng phụ với $\widehat{BAH}$)

- $\triangle ABH = \triangle CAK$ (cạnh huyền - góc nhọn)

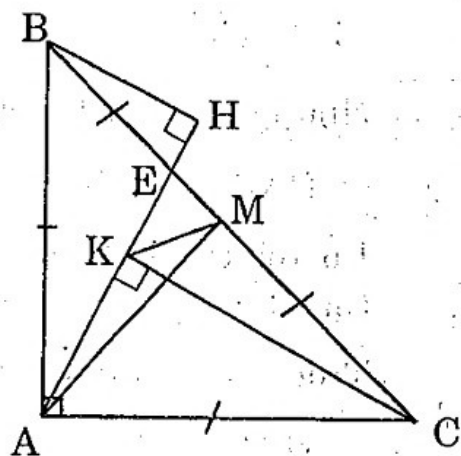
$$\Rightarrow BH = AK.$$

- Chứng minh:

$$\triangle MBH = \triangle MAK \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow MH = MK.$$

- Dễ dàng chứng minh được $\triangle MHK$ vuông tại M.



Hình 104

6.19. a) Chứng minh: 3 điểm M, A, N thẳng hàng.

Các $\triangle AMB$ và $\triangle ANC$ là tam giác đều

$$\Rightarrow \widehat{MAB} = 60^\circ, \widehat{NAC} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAN} = 180^\circ$$

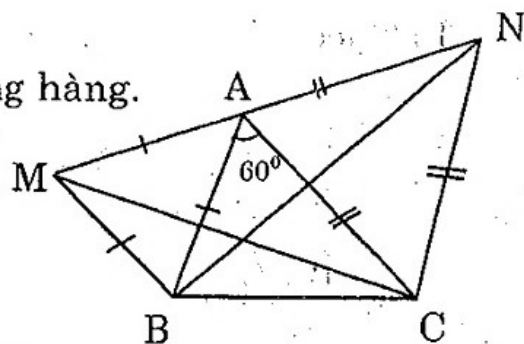
$$\Rightarrow \widehat{MAN} = 180^\circ \Rightarrow M, A, N \text{ thẳng hàng.}$$

b) Chứng minh: $BN = CM$.

$$\widehat{MAC} = \widehat{MAB} + \widehat{BAC} = 120^\circ$$

$$\widehat{BAN} = \widehat{BAC} + \widehat{CAN} = 120^\circ$$

$$\triangle ABN = \triangle AMC \text{ (c-g-c)} \Rightarrow BN = CM.$$



Hình 105

6.20. a) Chứng minh: $BE = CD$.

$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC}$$

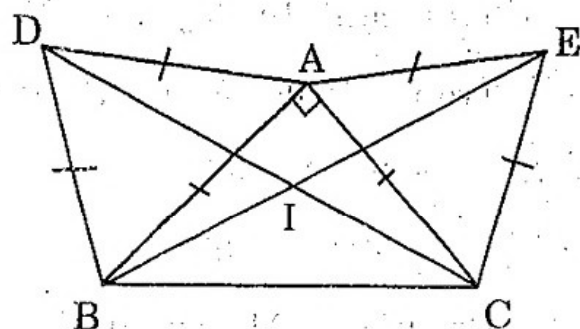
$$= 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

$$\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE}$$

$$= 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE} = 150^\circ$$

$$\triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c-g-c)} \Rightarrow BE = CD.$$



Hình 106

b) Tính góc BIC?

$\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ là các tam giác cân ở A có góc ở đỉnh bằng 150°

$$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACD} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{DCB} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ.$$

6.21. a) Vì $\widehat{B} > \widehat{C}$ nên $\widehat{C}$ là góc nhọn của $\triangle ABC$ và $\widehat{B} + \frac{\widehat{A}}{2} > \widehat{C} + \frac{\widehat{A}}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{CAD} < 90^\circ$$

$$\text{Nhưng } \widehat{C} + \widehat{CAH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} < \widehat{CAH}$$

Do đó tia AD nằm giữa hai tia AH và AC.

Trong tam giác vuông HAD ta có:

$$\widehat{HAD} = 90^\circ - \widehat{ADH}$$

$$= \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2} - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{C} \right) = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} \quad \text{Hình 107}$$

b) Theo Chứng minh trên $\widehat{HAD} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$

$$\frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{5 - 3} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ \text{ hay } \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{3} = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{8} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ.$$

6.22. Qua D kẻ DM // BC (M ∈ AB).

Trên cạnh BC lấy điểm N sao cho BD = BN.

Trong ΔBDN cân tại B có $\widehat{B} = 20^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BND} = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{NDC} = 40^\circ.$$

Dễ thấy ΔAMD cân ở M

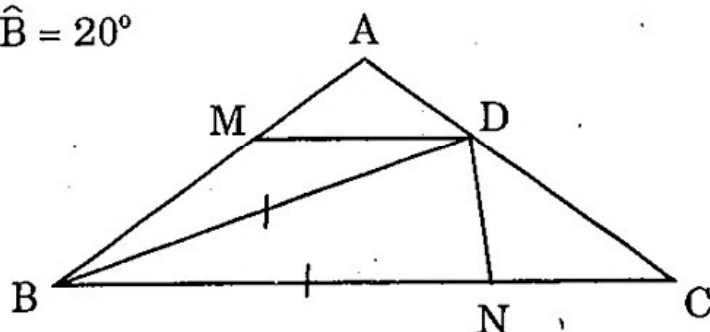
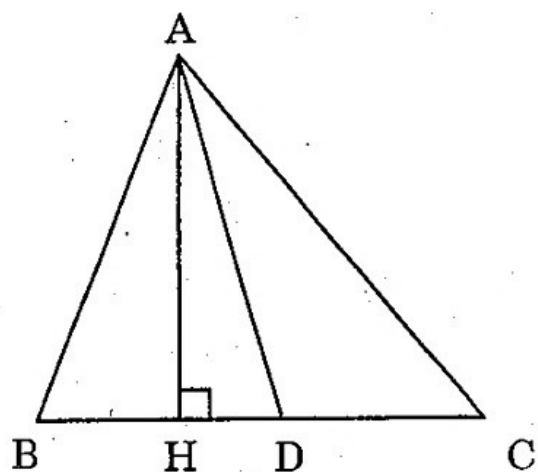
$$\Rightarrow MA, AD, BMD \text{ cân ở M}$$

$$\Rightarrow MB = MD \Rightarrow MD = DC.$$

Vậy ΔAMD = ΔNDC (g-c-g)

$$\Rightarrow AD = NC.$$

$$\text{Do đó } BD + DA = BN + NC = BC.$$



Hình 108

Chương VII.

7.1.

- a) Áp dụng bất đẳng thức tam giác cho $\triangle AMI$ có:

$$MA < MI + AI$$

$$\text{nên } MA + MB < MI + AI + MB$$

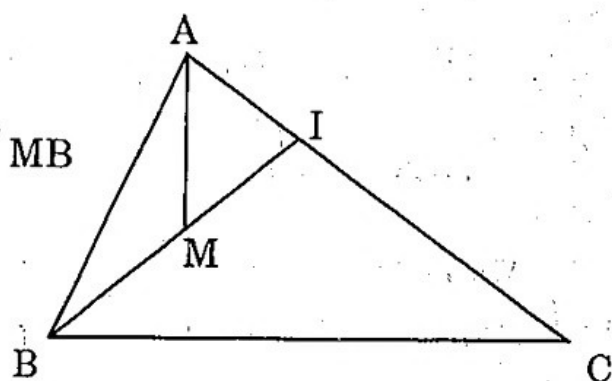
$$\Rightarrow MA + MB < IA + IB.$$

- b) Áp dụng bất đẳng thức tam giác cho $\triangle BIC$ có:

$$BI < IC + IB,$$

$$\text{từ đó suy ra } IB + IA < CA + CB.$$

- c) Từ kết quả phần a) và b) suy ra: $MA + MB < CA + CB$.



Hình 109

- 7.2. a) $\triangle DEI = \triangle DFI$ (c-g-c).

- b) $\widehat{DIE}$ và góc $\widehat{DIF}$ là các góc vuông.

- c) $DI = 12\text{cm}$.

- 7.3. G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $GB = 2GM$ mà $ME = MG$
 $\Rightarrow GE = GB$

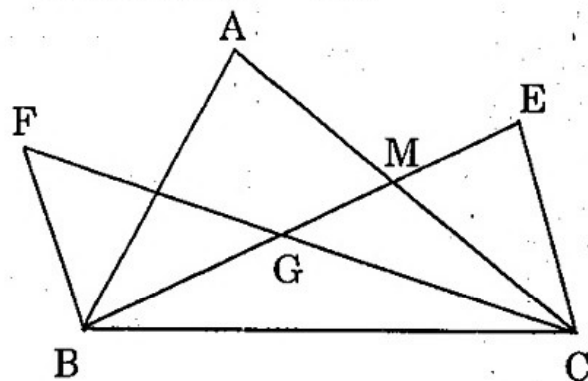
Tương tự có $GF = GC$

Lại có $\widehat{FGB} = \widehat{CGE}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\triangle FGB = \triangle CGE$ (c-g-c)

Nên: $CE = BF$

$$\widehat{GEC} = \widehat{GBF} \Rightarrow FB \parallel CE.$$



Hình 110

- 7.4. a) $\triangle OAD = \triangle OCB$ (c-g-c) $\Rightarrow AD = BC$.

- b) + Chứng minh $AB = CD$

$$\widehat{IAB} = \widehat{ICD}$$

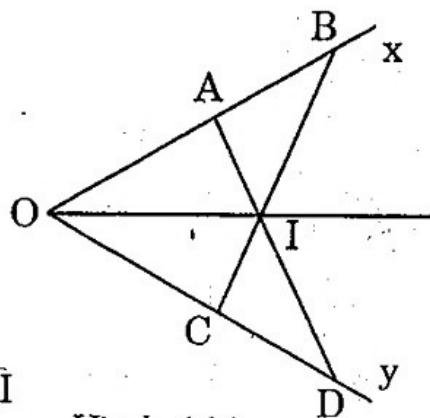
- + Chứng minh $\widehat{IBA} = \widehat{IDC}$

Từ đó suy ra $\triangle IAB = \triangle ICD$ (g-c-g)

$$\Rightarrow IA = IC; IB = ID.$$

- c) $\triangle OBI = \triangle ODI$ (c-c-c) suy ra $\widehat{BOI} = \widehat{DOI}$

Nên OI là phân giác của góc xOy.



Hình 111

7.5. + Góc $KIO = 31^\circ$.

+ KO ; LO lần lượt là phân giác của góc IKL và góc KLI nên:

$$\widehat{OKL} = \frac{1}{2} \widehat{IKL};$$

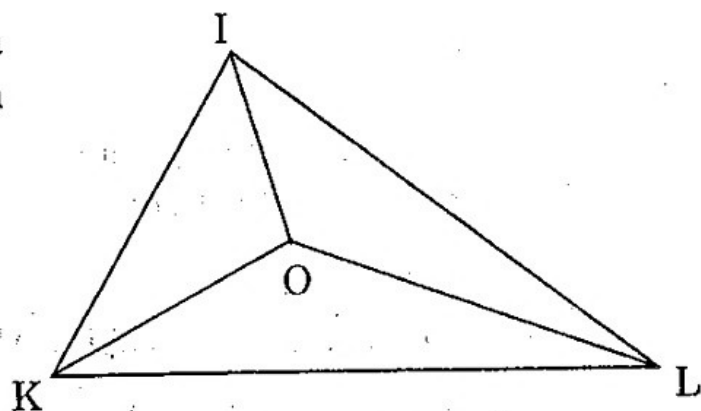
$$\widehat{OLK} = \frac{1}{2} \widehat{KLI}$$

Mà góc $KIL = 62^\circ$

Nên $\widehat{IKL} + \widehat{KLI} = 180^\circ - \widehat{KIL} = 118^\circ$

Do đó $\widehat{OKL} + \widehat{OLK} = \frac{1}{2}(\widehat{IKL} + \widehat{KLI}) = 59^\circ$

Suy ra góc $KOL = 121^\circ$.



Hình 112

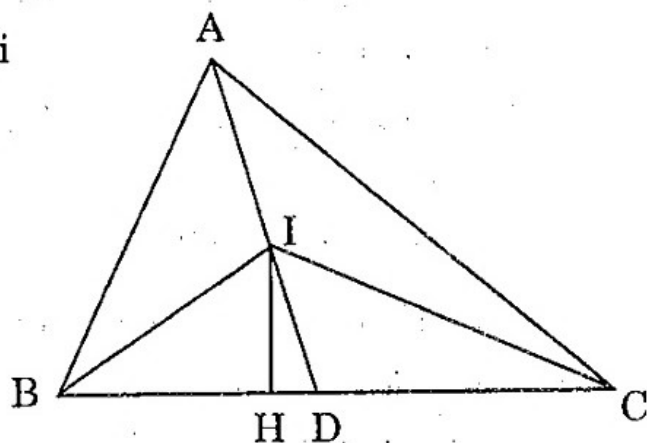
7.6. a) Ta có $\widehat{BIH} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$ (do $\triangle BIH$ vuông tại H)

Góc CID là góc ngoài tại đỉnh I của $\triangle AIC$ nên:

$$\widehat{CID} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2}$$

$$= \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} = \widehat{BIH}.$$



Hình 113

b) Trong $\triangle BIC$ có: $\widehat{BIC} = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} \right)$

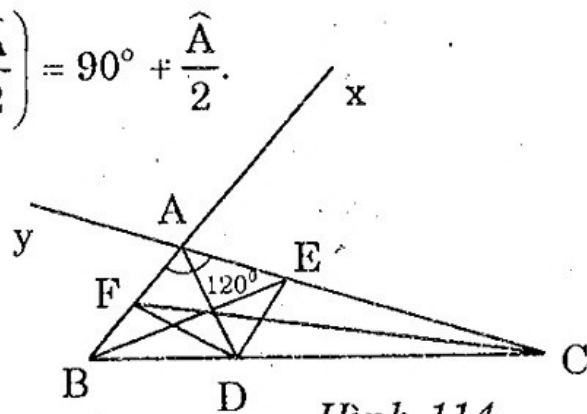
$$= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} \right) = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

7.7. a) Gọi Ax là tia đối của tia AB .

Vì $\widehat{BAC} = 120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CAx} = 60^\circ$

Do AD là tia phân giác của



Hình 114

góc BAC nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{CAx} = 60^\circ$

Xét $\triangle ABD$ có BE là phân giác của góc ABC nên điểm E cách đều AB và BC;

Mà $\widehat{DAE} = \widehat{EAx} = 60^\circ \Rightarrow AE$ là phân giác của góc DAx

$\Rightarrow$ Điểm E cách đều AB và AD $\Rightarrow$ Điểm E cách đều BC và AD

$\Rightarrow$ Điểm E thuộc phân giác của góc ADC $\Rightarrow$ Hay DE là phân giác của góc ADC.

b) Chứng minh tương tự phần a) ta có DF là phân giác của góc ADB.

Mà góc BDA và góc CDA là hai góc kề bù nên $DE \perp DF$. Hay $\widehat{EDF} = 90^\circ$.

7.8. a) $AH < AB$; $AH < AC \Rightarrow 2AH < AB + AC$

Suy ra $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

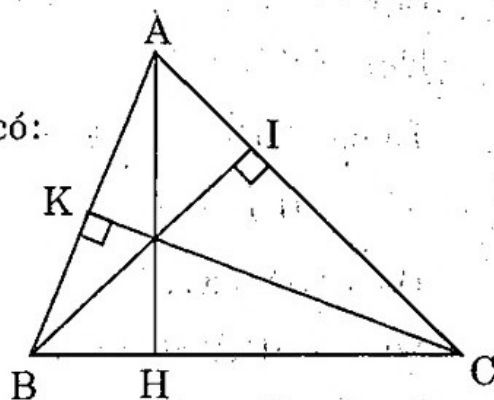
b) Chứng minh tương tự phần a) ta có:

$$AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$$

$$BI < \frac{1}{2}(AB + BC)$$

$$CK < \frac{1}{2}(CB + AC)$$

Suy ra: $AH + BI + CK < AB + AC + BC$.



Hình 115

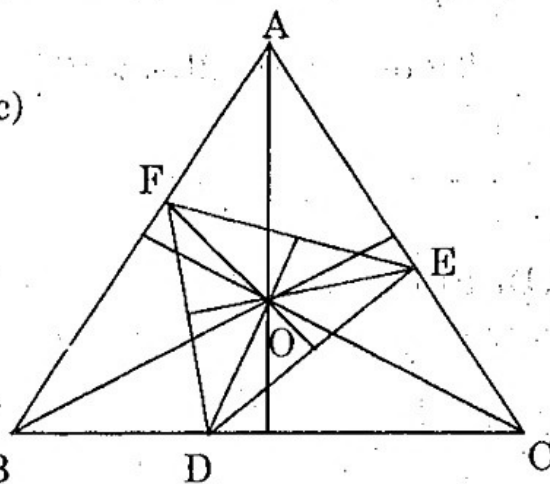
7.9. a) Chứng minh

$$\triangle AFE = \triangle BDF = \triangle CED \text{ (c-g-c)}$$

Suy ra $EF = FD = DE$.

Hay $\triangle DEF$ đều.

b) Gọi O là giao điểm ba đường trung trực của $\triangle ABC$, ta chứng minh O là giao điểm ba đường trung trực của $\triangle DEF$.



Hình 116

7.10. a) + BD; CE là hai đường cao của $\triangle ABC$ nên ta chứng minh được:

$$\widehat{ACE} = \widehat{ABD} \text{ (cùng phụ với góc BAC)}$$

- + Chứng minh $\widehat{ACK} = \widehat{IBA}$
 - + Chứng minh $\triangle ACK = \triangle IBA$ (c-g-c)
- Nên $AI = AK$.

b) Do $\triangle ACK = \triangle IBA$

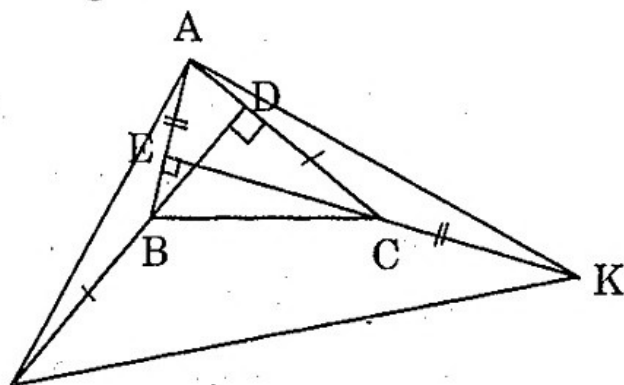
$$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CKA}$$

$\triangle AEK$ vuông tại E nên:

$$\widehat{EAK} + \widehat{EKA} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EAK} + \widehat{BAI} = 90^\circ = \widehat{IAK}$$

Vậy $\triangle KIA$ vuông cân đỉnh A.



Hình 117

7.11. Vẽ $EN \perp BC$; $BH \perp DE$. Do $DE \parallel BC$.

Suy ra: $\triangle BHE = \triangle ENB$

Nên $EN = BH$

Ta có: $\widehat{HDB} = \widehat{ADE} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

$$\Rightarrow \widehat{HDB} = \widehat{NCE}$$

Do $\widehat{BHD} = \widehat{ENC} = 90^\circ$

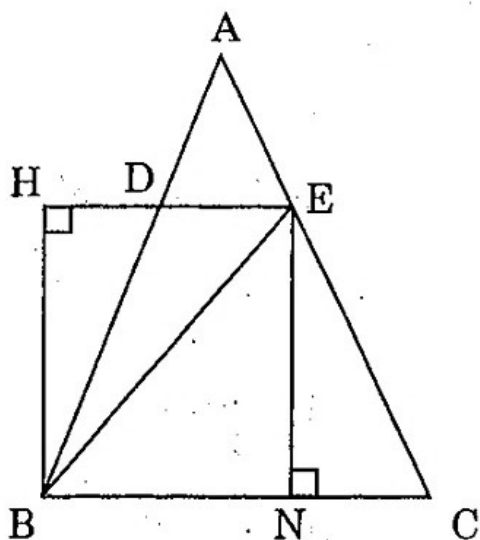
Suy ra $\triangle BHD = \triangle ENC$ nên $HD = NC$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } DE + BC &= DE + BN + NC \\ &= BN + HE \end{aligned}$$

Lại có: $BE > BN$; $BE > EH$

$$\text{Từ đó suy ra: } 2BE > BN + EH \Rightarrow BE > \frac{1}{2}(BN + EH)$$

$$\Rightarrow BE > \frac{1}{2}(DE + BC).$$



Hình 118

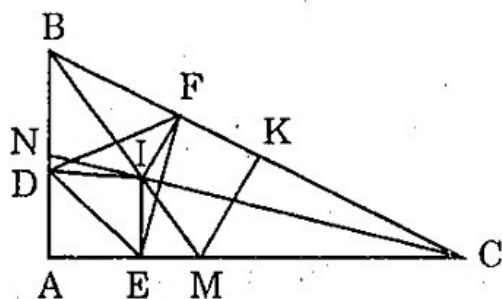
7.12. a) Kẻ $MK \perp BC$ tại K mà $MA \perp AB$ tại A.

Mặt khác BM là phân giác của góc ABC

$\Rightarrow MA = MK$ (tính chất tia phân giác của góc)

$\triangle MKC$ vuông tại K

$\Rightarrow$ cạnh huyền MC là cạnh



Hình 119

lớn nhất $\Rightarrow MC > MK$

Vậy $MC > MA$

Chứng minh tương tự có $NB > NA$.

b) Xét $\triangle ABC$ có phân giác BM cắt phân giác CN tại I

$\Rightarrow AI$ là phân giác của góc BAC ; mà $ID \perp AB$ tại D ; $IE \perp AC$ tại E

$\Rightarrow ID = IE$ (tính chất)

Xét $\triangle DAI$ và $\triangle EAI$ có : $\widehat{ADI} = \widehat{AEI} = 90^\circ$; $ID = IE$; cạnh AI chung

Suy ra $\triangle DAI = \triangle EAI$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AD = AE$.

c) Để chứng minh $\triangle BID = \triangle BIF$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BD = BF$

$\triangle CIE = \triangle CIF$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow CE = CF$

Suy ra $AD + AE = AB - BD + AC - EC$

$$= AB + AC - (BF + FC)$$

$$2AD = AB + AC - BC$$

$\triangle ABC$ vuông ở A nên áp dụng định lý Pitago ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 15^2 = 17^2 \Rightarrow BC = 17 \text{ (cm)}$$

Do vậy $2AD = 8 + 15 - 17 = 6$ suy ra $AD = AE = 3 \text{ (cm)}$.

d) Nếu $\triangle ABC$ vuông cân ở A thì $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{DBI} = \widehat{IBF} = \widehat{ICE} = \widehat{ICF} = 22,5^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BID} = \widehat{BIF} = \widehat{FIC} = \widehat{EIC} = 67,5^\circ$$

Chứng minh dễ dàng được $\triangle DIF = \triangle EIF$ (c-g-c)

$\Rightarrow FD = FE \Rightarrow \triangle DEF$ cân tại F .

7.13. a) $\triangle AMC$ có góc $AMC = 90^\circ$ và $AM = MC$ nên $\triangle AMC$ vuông cân tại $M \Rightarrow \widehat{CAM} = 45^\circ$

Tương tự ta có $\triangle BMD$ vuông cân tại $M \Rightarrow \widehat{DBM} = 45^\circ$

Kéo dài AC cắt BD tại E . Khi đó $\triangle AEB$ có $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle AEB$ vuông cân tại E . Nên $AC \perp BD$.

$\Rightarrow C$ là trực tâm của $\triangle ADB \Rightarrow BC \perp AD$.

c) BC cắt AD tại $F \Rightarrow BC \perp AD$ tại F

+ $\triangle ABD$ có đường cao AE và DM cắt nhau tại C

$\Rightarrow C$ là trực tâm của $\triangle ABD$

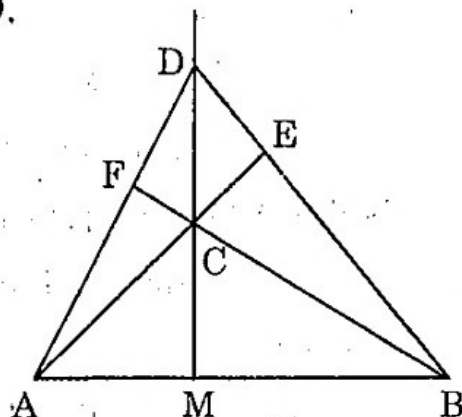
+ $\triangle ABC$ có : $BE \perp AC$ tại E ;

$AF \perp BC$ tại F ; AF cắt BE tại D

$\Rightarrow D$ là trực tâm của $\triangle ABC$.

Tương tự có A là trực tâm của $\triangle BCD$.

B là trực tâm của $\triangle ACD$.



Hình 120

7.14. Gọi O là giao điểm của BN và CM ; và I là giao điểm tia phân giác góc MCB và góc NBC

Nên trong $\triangle BOC$ có OI là tia phân giác của góc BOC

Lại có

$$\widehat{BOC} = 180^\circ - \frac{2}{3}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 120^\circ$$

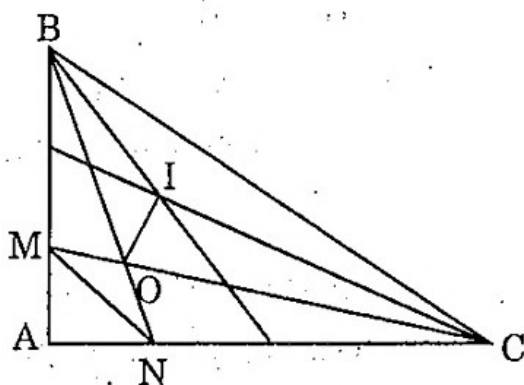
$$\text{Suy ra } \widehat{BOI} = \widehat{COI} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^\circ.$$

$$\text{Mà } \widehat{BOM} = 180^\circ - \widehat{BOC} = 60^\circ$$

Ta chứng minh được $\triangle BOM = \triangle BOI$ (g-c-g) $\Rightarrow OM = OI$

Chứng minh tương tự $ON = OI \Rightarrow \triangle MON$ cân tại O .

$$\text{Do đó } \widehat{MNB} = \frac{180^\circ - \widehat{MON}}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ.$$



Hình 121

7.15. Giả sử có $\triangle ABC$, AM là trung tuyến. Ta phải chứng minh 3 trường hợp sau :

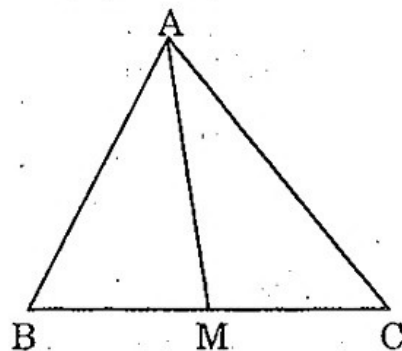
1. $BM < AM$ thì $\hat{A}$ nhọn

2. $BM = AM$ thì $\hat{A}$ vuông

3. $BM > AM$ thì $\hat{A}$ tù.

Chứng minh trường hợp 1.

Xét $\triangle ABM$ có $BM < AM \Rightarrow \widehat{BAM} < \hat{B}$



Hình 122

Xét $\triangle ACM$ có $MC < AM \Rightarrow \widehat{CAM} < \widehat{C}$

suy ra $\widehat{BAM} + \widehat{CAM} < \widehat{B} + \widehat{C}$ hay $\widehat{A} < \widehat{B} + \widehat{C}$

Nếu $\widehat{A}$ là góc vuông tù thì $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ$ trái với định lý tổng các góc trong một tam giác bằng 180° .

Vậy $\widehat{A}$ nhọn.

Trường hợp 2.

Nếu $AM = BM = MC \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$

mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$.

Trường hợp 3. Chứng minh tương tự như trường hợp 1.

7.16. Giả sử $\triangle ABC$ đã cho (h.123) có CN, AI là hai trung tuyến.

M là giao điểm của các đường trung tuyến, P là giao điểm các đường phân giác trong. Ta phải chứng minh $PM \parallel AC$.

Từ P kẻ PD, PE, PT theo thứ tự vuông góc với cạnh AB, AC, BC.

Do P là giao điểm các đường phân giác

$\Rightarrow PD = PE = PT = r$ (r là một số nhất định).

Ta có $S = \frac{(a+b+c)r}{2}$.

Kẻ $MK \perp AC$, dễ dàng chứng minh được

$$S_{AMC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{b \cdot MK}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a+b+c)r}{2}$$

Theo giả thiết $a - b = b - c \Rightarrow 2b = a + c$

$\Rightarrow MK = PE = r$ mà $PE \parallel MK$ (vì cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow KEPM$ là hình bình hành

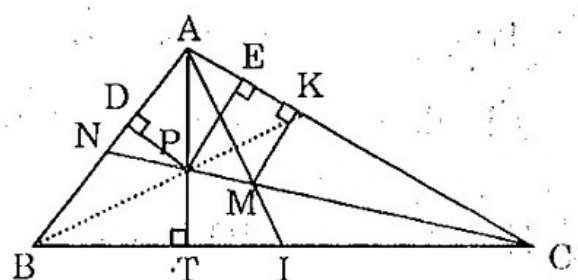
$\Rightarrow MP \parallel AC$ ($AC = b$).

7.17. Gọi N là trung điểm của HC.

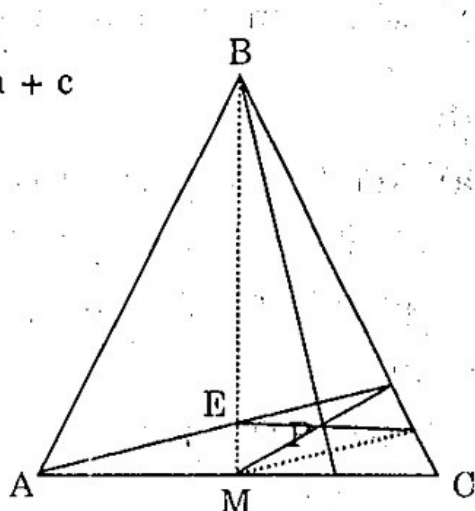
Từ N kẻ $NE \parallel MC$

$\Rightarrow NE$ đi qua trung điểm P của

MH (định lý) $\Rightarrow NE \perp BM$.



Hình 123



Hình 124

$E \in BM$, suy ra P là trực tâm của $\triangle BMN \Rightarrow BP \perp MN$

Mà MN là đường trung bình của $\triangle ACH \Rightarrow AH \parallel MN$

$\Rightarrow AH \perp BP$ (h.124).

7.18.

- a) Gọi K là giao điểm của MN và đường phân giác của góc A (h.125).

Từ B kẻ đường thẳng song song với MN nó cắt AC tại P . Dễ dàng chứng minh $\triangle AMN$ và $\triangle ABP$ là những tam giác cân

$$\Rightarrow AM = AN, AB = AP \Rightarrow BM = PN \quad (1)$$

Trong $\triangle BCP$, D là trung điểm của BC và $DN \parallel BP \Rightarrow N$ là trung điểm của CP hay $CN = NP$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BM = CN$.

- b) Ta phải chứng minh hai trường hợp :

- Trường hợp thứ nhất $AB < AC$ (h.125)

$$\text{Khi đó } PC = b - c \Rightarrow BM = NC = \frac{PC}{2} = \frac{b - c}{2}$$

$$\Rightarrow AM = AB + BM = c + \frac{b - c}{2} = \frac{c + b}{2}.$$

- Trường hợp thứ hai $AB > AC$.

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } AM = \frac{b + c}{2}; BM = \frac{c - b}{2}.$$

7.19.

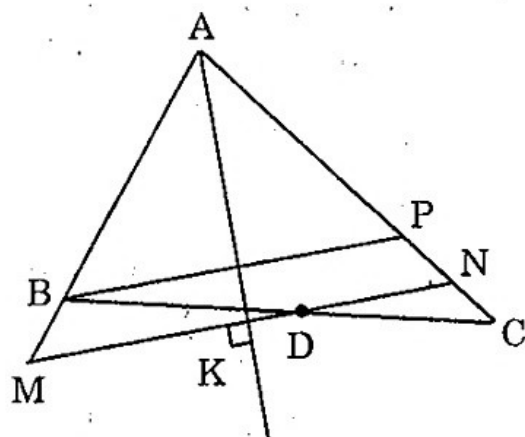
- a) Xét 2 tam giác ABD và ACE chúng có $AB = AC$ (gt), $AD = AE$

gt $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ (hai góc cùng có phần phụ là góc $\widehat{CAD}$)

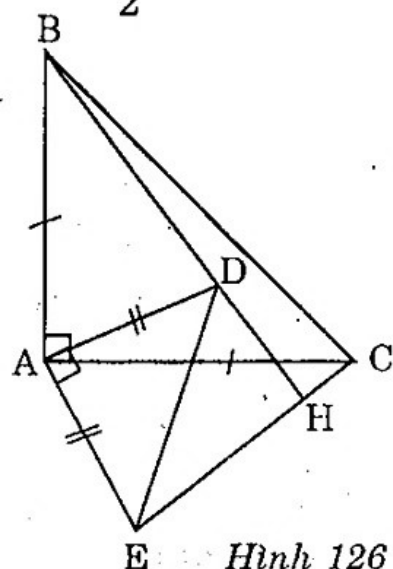
$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow BD = EC.$$

- b) Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$



Hình 125



Hình 126

$$\begin{aligned}\widehat{DEC} &= \widehat{AEC} - \widehat{AED} = \widehat{AEC} - 45^\circ \text{ (do } \triangle ADE \text{ vuông cân tại A)} \\ &= \widehat{ADB} - 45^\circ\end{aligned}\quad (1)$$

$$\widehat{EDH} = 180^\circ - (\widehat{ADB} + 45^\circ) = 135^\circ - \widehat{ADB} \quad (2)$$

Cộng vế với vế (1) và (2), ta có

$$\widehat{DEC} + \widehat{EDH} = \widehat{ADB} - 45^\circ + 135^\circ - \widehat{ADB} = 90^\circ$$

suy ra $\widehat{DHE} = 90^\circ$. Do đó $BD \perp EC$.

7.20. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm B và bờ là đường thẳng AC, vẽ tam giác đều ADC.

Dễ dàng chứng minh được $\triangle ADB = \triangle CDB$ (c-c-c)

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CDB} = 30^\circ \text{ (do } \widehat{ADC} = 60^\circ)$$

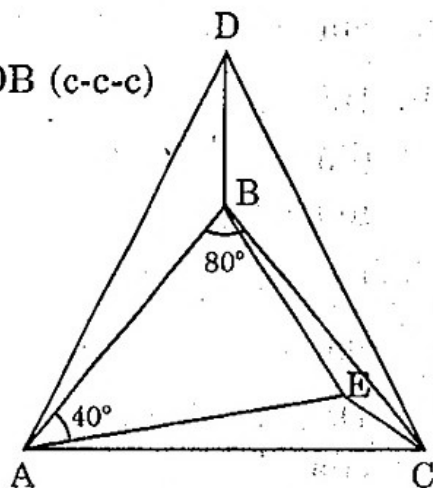
Cũng không khó khăn ta chứng minh được $\triangle ABD = \triangle AEC$ (c-g-c)

(Chú ý $\widehat{BAD} = \widehat{EAC} = 10^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACE} = 30^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{ECB} = \widehat{ACB} - \widehat{ACE}$$

$$= 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ.$$



Hình 127

7.21. Từ trung điểm M của cạnh CA kẻ $MI \perp AB$, $MD \perp BC$ (h.144)

Ta có $\widehat{MBC} = 30^\circ$;

$$BM = AH = 2MD$$

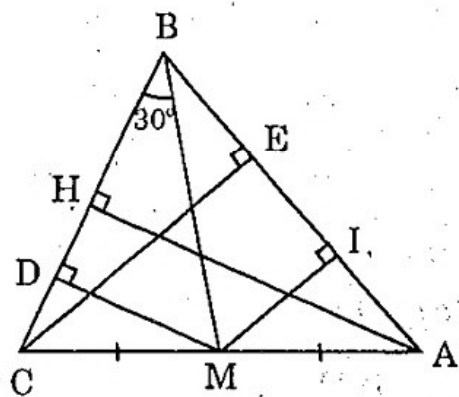
Dễ dàng chứng minh được

$$\widehat{MBI} < 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} < 60^\circ.$$

Ta thấy $\widehat{ABC} = 60^\circ$ khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Suy ra (đpcm).



Hình 128

KIẾN THỨC TỔNG HỢP HÌNH HỌC 7

8.1.

- a) Vì góc C là góc nhỏ nhất của $\triangle ABC$ nên

$$\widehat{C} < \widehat{B}; \widehat{C} < \widehat{A}$$

$$\widehat{C} + \widehat{C} + \widehat{C} < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$3\widehat{C} < 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} < 60^\circ < 90^\circ$$

Hay góc C là góc nhọn.

- b) $BE \parallel AD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{DAC}$
(đồng vị); $\widehat{EBA} = \widehat{BAD}$ (so
le trong)

Mà AD là phân giác của góc $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DAB}$ (t/c) $\widehat{E} = \widehat{EBA}$.

Suy ra $\triangle EAB$ cân tại A.

- c) Do $\triangle EAB$ cân tại A có AM là trung tuyến $\Rightarrow AM$ là đường cao của $\triangle EAB$

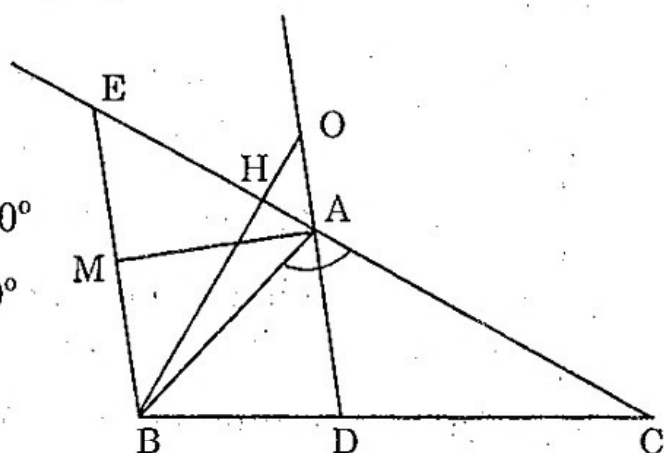
$\Rightarrow AM \perp BE$ mà $BE \parallel AD \Rightarrow AM \perp AD$.

- d) $\widehat{C} = 30^\circ$; $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. Mặt khác $\triangle ABC$ có :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$2\widehat{B} + \widehat{B} = 150^\circ$$

$$\widehat{B} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 100^\circ.$$



Hình 129

8.2.

a) $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}$

$$\widehat{BAE} = \widehat{EAC} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$$

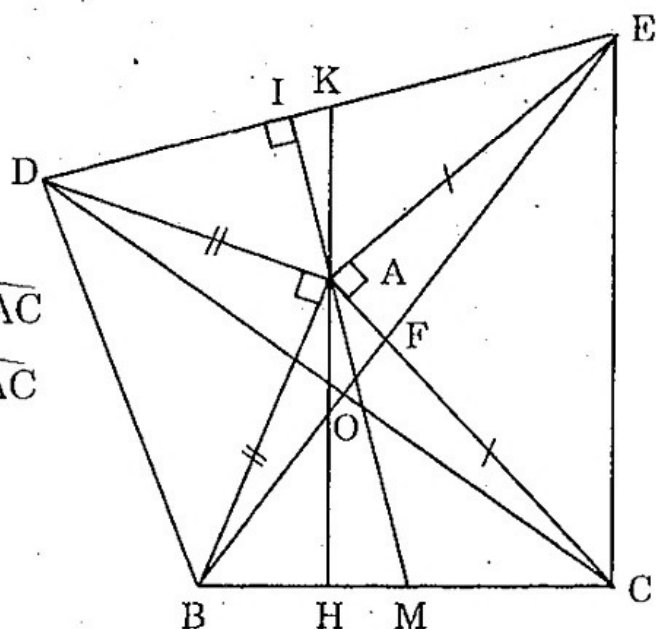
Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có :

$$AB = AD$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$$

$$AC = AE$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c-g-c)} \Rightarrow BE = CD \text{ và } \widehat{ACD} = \widehat{AEB}$$



Hình 130

BE cắt CD tại O và cắt AC tại F.

Xét $\triangle AFE$ và $\triangle OFC$ có :

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ACD} = \widehat{AEB} \\ \widehat{OFC} = \widehat{AFE} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{FOC} = \widehat{FAE} = 90^\circ \Rightarrow CD \perp BE.$$

b) Kẻ $AI \perp DE$ tại I, AI cắt BC tại M.

* $\triangle AIE$ vuông tại I $\Rightarrow \widehat{IAE} + \widehat{IEA} = 90^\circ$

Mà I, A, M thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{IAE} + \widehat{EAC} + \widehat{CAM} = 180^\circ$

Do $\widehat{EAC} = 90^\circ$ nên $\widehat{IAE} + \widehat{CAM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IEA} = \widehat{MAC}$

* $\triangle AHC$ vuông tại H $\Rightarrow \widehat{HAC} + \widehat{HCA} = 90^\circ$

Mà H, A, K thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{KAE} + \widehat{EAC} + \widehat{CAH} = 180^\circ$

Do $\widehat{EAC} = 90^\circ$ nên $\widehat{CAH} + \widehat{KAE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HCA} = \widehat{KAE}$

* Xét $\triangle KAE$ và $\triangle MCA$ có : $\widehat{KAE} = \widehat{MCA}$; $AE = AC$; $\widehat{KEA} = \widehat{MAC}$

Suy ra $\triangle KAE = \triangle MCA$ (g-c-g) $\Rightarrow KE = AM$ và $AK = MC$

* Chứng minh tương tự $\triangle AKD = \triangle BMA \Rightarrow DK = AM$ và $AK = BM$

Do đó $DK = KE \Rightarrow K$ là trung điểm của DE và $AK = MB = MC = \frac{1}{2}BC$.

8.3. Nối AF.

Chứng minh

$$\triangle DFA = \triangle EAF \text{ (c-c-c)}$$

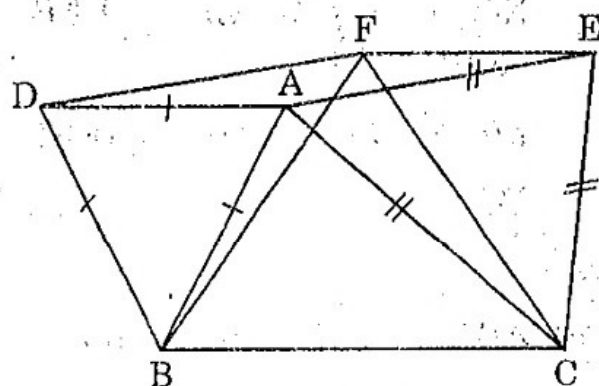
Suy ra các góc tương tự bằng nhau

Suy ra $DF \parallel AE$, $AD \parallel EF$.

Chứng minh $\triangle BDF = \triangle BAC$ (c-g-c) $\Rightarrow BF = BC$.

Chứng minh $\triangle FEC = \triangle BAC$ (c-g-c) $\Rightarrow CF = BC$

Suy ra $BC = CF = FB \Rightarrow \triangle FBC$ là tam giác đều.



Hình 131

8.4.

a) $\triangle ABC$ có : $AB^2 + AC^2 = 8^2 + 15^2 = 289 = 17^2 = CB^2$

Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại A

$$\triangle ABC = \triangle ECB \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle DEF \text{ vuông.}$$

b) Chu vi $\triangle DEF$ bằng 80cm.

8.5. Dựng $\triangle AMN$ đều sao cho N và C nằm cùng phía đối với AB.

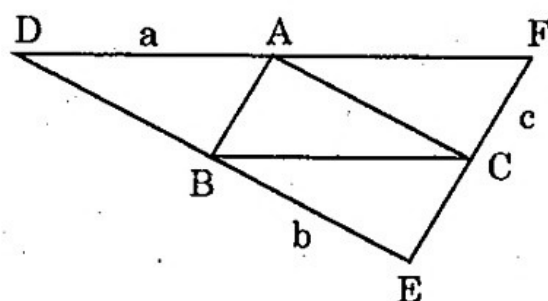
Khi đó : Xét $\triangle BAC$ và $\triangle NCA$ có :

$$BC = AN; \widehat{ACB} = \widehat{CAN} = 40^\circ; AC \text{ chung}$$

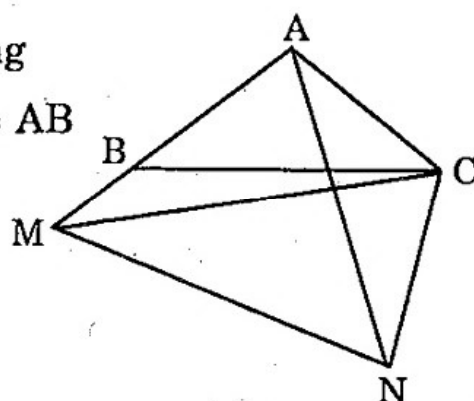
$$\Rightarrow \triangle BAC = \triangle NCA \text{ (c-g-c)} \Rightarrow AC = CN = AB$$

$$\Rightarrow MC \text{ là trung trực của } AN$$

$$\text{Vậy } \widehat{AMC} = \frac{1}{2} \widehat{AMN} = 30^\circ.$$



Hình 132



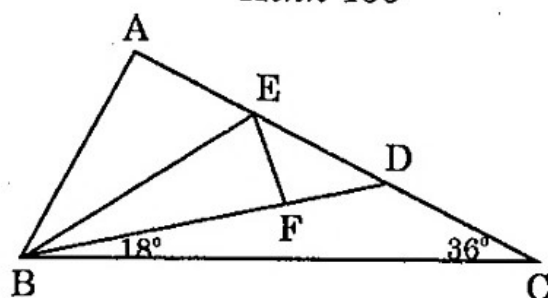
Hình 133

8.6. Trên AC lấy điểm E sao cho :

$$\text{góc DBE bằng } 18^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} = 18^\circ$$

Mà $EF \perp BD$; ta có $EF = EA$
(vì BE là phân giác của góc ABD)

Xét tam giác vuông EFB
có $BE > BF$



Hình 134

$$\text{Mà } \widehat{EBC} = \widehat{C} = 36^\circ \Rightarrow \triangle EBC \text{ cân tại E} \Rightarrow CE = BE \Rightarrow CE > BF$$

$$\text{Do đó } AE + EC > BF + FD. \text{ Tức là } AC > BD.$$

8.7.

a) $\triangle BAD = \triangle HAD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

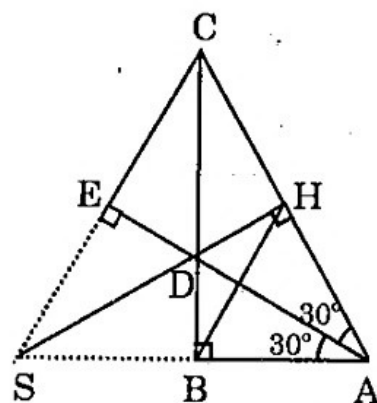
$$\Rightarrow AB = AH$$

$\triangle ABH$ cân tại A, AD là tia phân giác

$$\Rightarrow AD \perp BH.$$

b) $\triangle DAC$ cân tại D ($\widehat{DAC} = \widehat{ACD} = 30^\circ$)

mà $DH \perp AC \Rightarrow CH = HA$ (tính chất của tam giác cân).



Hình 135

c) Có $DC > CH$ (trong tam giác vuông CHD) mà $CH = HA, HA = AB$
suy ra $DC > AB$.

- d) Gọi S là giao điểm của AB và CE $\Rightarrow$ D là trực tâm của $\triangle SCA$
 $\Rightarrow SH \perp CA$ mà $DH \perp CA \Rightarrow S, D, H$ thẳng hàng hay AB, CE, DH đồng quy.

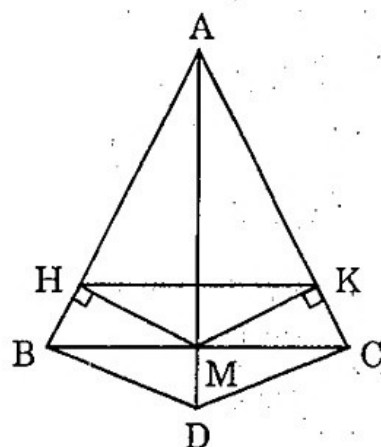
8.8.

- a) $\triangle BMH = \triangle CMK$ (cạnh huyền, góc nhọn)
 $\Rightarrow BH = CK$ và $MH = MK$.
 b) $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow AB = AC$.

Theo chứng minh trên :

$\frac{BH = CK}{AH = AK}$ mà $MH = MK$ chứng minh trên, suy ra AM là trung trực của đoạn thẳng HK.

- c) $\triangle ABD = \triangle ACD$ (cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow BD = DC \Rightarrow MD$ là đường trung trực của đoạn thẳng BC. Ta lại có AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC $\Rightarrow MD$ và AM trùng nhau (một đoạn thẳng chỉ có một đường trung trực). Vậy 3 điểm A, M, D thẳng hàng.



Hình 136

8.9.

- a) A là trung điểm của đoạn thẳng EF
 $\Rightarrow BA$ là trung trực của EF $\Rightarrow BE = BF$.

- b) BE là phân giác của góc $\widehat{ABC}$ mà $EK \perp BC$ và $EA \perp AB$
 $\Rightarrow EK = EA$ (tính chất đường phân giác của một góc)

- c) $\widehat{ABE} = \widehat{EBC}$ (1) (giả thiết BE là đường phân giác của góc ABC)

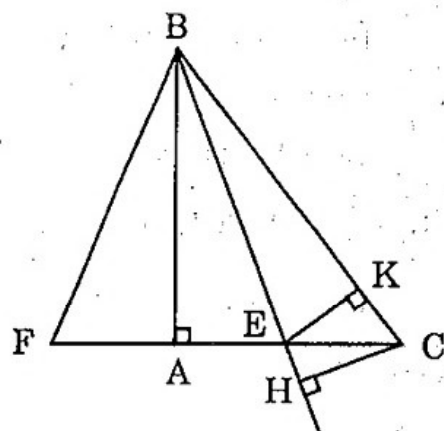
$\widehat{ECH} = \widehat{ABE}$ (2) (hai góc cùng phụ với hai góc bằng nhau)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ECH} = \widehat{EBC}$.

- d) CE là tia phân giác của góc BCH $\Rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{BCE}$ mà $\widehat{ECH} = \widehat{EBC}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{EBC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$

Vậy với điều kiện $\widehat{ABC} = 60^\circ$ thì CE là tia phân giác của $\widehat{BCH}$.



Hình 137

8.10. Ta có $AN \perp BC, AC \perp CE$

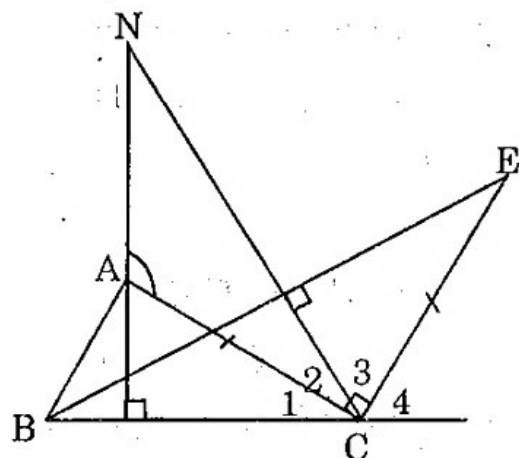
$\Rightarrow \widehat{NAC} = \widehat{BCE}$ (hai góc tù có cạnh tương ứng vuông góc).

Ta lại có $\widehat{C}_2 + \widehat{C}_3 = 90^\circ$ (gt),

$$\widehat{E} + \widehat{C}_3 = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$\Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{E}$ (hoặc góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn).

Xét $\triangle ACN$ và $\triangle CEB$ có $AC = CE, \widehat{C}_2 = \widehat{E}, \widehat{NAC} = \widehat{BCE}$ (chứng minh trên), suy ra $\triangle ACN = \triangle CEB$ (g-c-g) $\Rightarrow AN = BC$.



Hình 138

8.11.

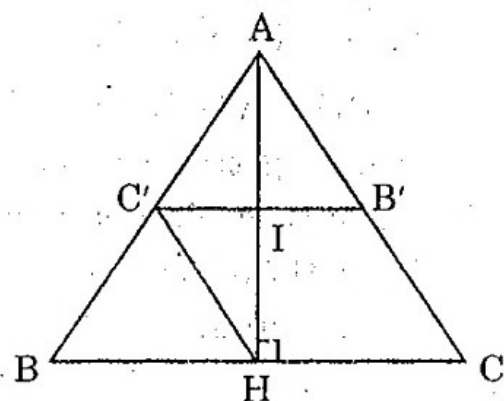
- a) Ta thấy $B'C'$ là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $B'C' \parallel BC$ mà $AH \perp BC$
 $\Rightarrow AH \perp B'C'$ tại I. Trong $\triangle ABH$ vuông có C' là trung điểm của AB và $C'I \parallel HB$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AH (định lý), $\triangle AC'H$ có $C'I$ vừa là trung tuyến vừa là đường cao

$\Rightarrow \triangle AC'H$ là tam giác cân, vậy $C'I$ cũng là phân giác (đpcm).

- b) $\triangle C'AH$ là tam giác cân đỉnh $C' \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{AHC'}$

mà $\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHC'} + \widehat{ABH} = 90^\circ$ (đpcm).



Hình 139

8.12.

- a) Áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông ABH ta có :

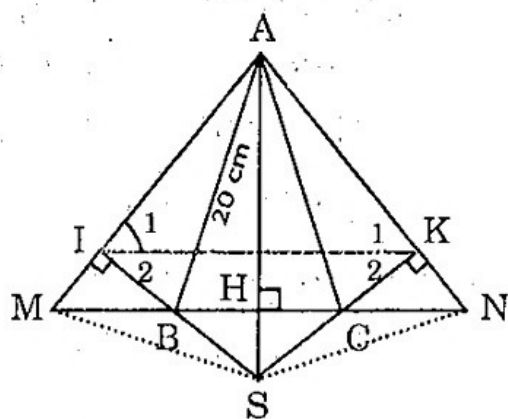
$$\begin{aligned} AH^2 &= AB^2 - BH^2 \\ &= 20^2 - 12^2 = 256 \end{aligned}$$

$$AH = 16\text{cm.}$$

- b) $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c-g-c)

$\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A.

- c) $\triangle IMB = \triangle KNC$ (cạnh huyền và góc nhọn)



Hình 140

$\Rightarrow IB = CK \Rightarrow \triangle AIB = \triangle AKC$ (cạnh góc vuông và cạnh huyền)

$\Rightarrow IA = KA \Rightarrow \triangle AIK$ cân tại A $\Rightarrow \hat{I} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$

Theo chứng minh trên $\triangle AMN$ cân tại A $\Rightarrow \hat{M} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$

Vậy $\hat{I} = \hat{M} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$ và ở vị trí đồng vị $\Rightarrow IK \parallel MN$.

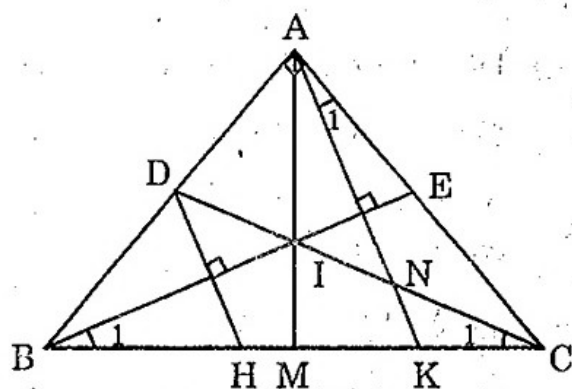
- d) AH là trung trực của BC. S là giao điểm của IB và KC, mà $\triangle AIK$ cân $\Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{K}_1$ mà $\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = 1v$, $\hat{K}_1 + \hat{K}_2 = 1v \Rightarrow \hat{I}_2 = \hat{K}_2 \Rightarrow \triangle SKI$ là tam giác cân tại S, vậy SA là trung trực của IK $\Rightarrow A, H, S$ thẳng hàng.

8.13.

- a) Xét hai tam giác vuông ABE và ACD có AB = AC, $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ (do ABC là tam giác vuông cân BE và CD là hai đường phân giác (gt)).

$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACD$ (hai tam giác cùng có một cạnh góc vuông và một góc nhọn bằng nhau).

Suy ra BE = CD và AE = AD.



Hình 141

- b) I là giao điểm của hai đường phân giác BE và CD $\Rightarrow AM$ là đường phân giác của $\hat{A}$ cũng là đường trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông cân ABC $\Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC$ hay $AM = MB = MC \Rightarrow \triangle MAB, \triangle MAC$ cân.
- c) Gọi N là giao điểm của AK và CD. Dễ dàng chứng minh được $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow AN = CN = ND$, nên N là trung điểm của CD, ta lại có DH $\parallel$ NK (do DH và AK cùng vuông góc với BE) $\Rightarrow K$ là trung điểm CH hay KH = KC.

8.14.

a) Xét hai tam giác ABE và ADC có :

$$\widehat{BAE} = \widehat{DAC} \text{ (vì cùng bằng } \widehat{A} + 60^\circ)$$

$$AB = AD \text{ (hai cạnh của tam giác đều ABD)}$$

$$AE = AC \text{ (hai cạnh của } \triangle ACE \text{ đều)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADC \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow BE = DC \text{ và } \widehat{AEB} = \widehat{ACD}$$

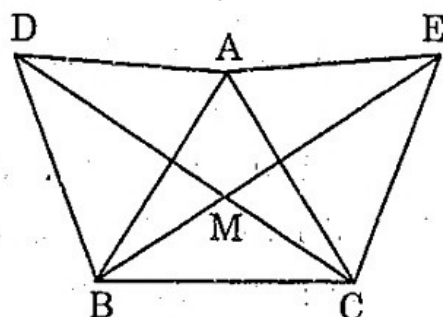
b) Xét $\triangle CME +$

$$\widehat{MEC} = 60^\circ - \widehat{AEB}$$

$$\widehat{MCE} = 60^\circ + \widehat{ACD}$$

$$\widehat{MEC} + \widehat{MCE} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CME} = 60^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{CME} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$



Hình 142

8.15.

a) Dễ dàng chứng minh được

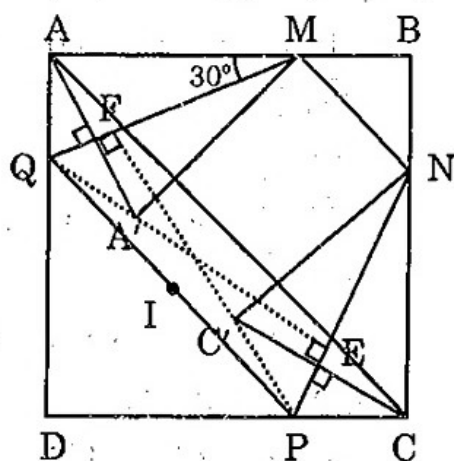
$$MA = NC, MQ = NP$$

$$\triangle AMQ = \triangle CNP \text{ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MQA} = \widehat{NPC} = 60^\circ.$$

$$\text{Ta lại có } \widehat{DQP} = \widehat{DPQ} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MQP} = \widehat{NPQ} = 75^\circ$$



Hình 143

$$\text{Theo tính chất đối xứng thì } \widehat{EQM} = \widehat{AQM} = 60^\circ \text{ suy ra } \widehat{QPF} = \widehat{EQP} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{QFP} = \widehat{PEQ} = 90^\circ$$

$$\text{Vậy } IF = IE = IP = IQ = ID = \frac{PQ}{2} \text{ (trong tam giác vuông trung}$$

$$\text{tuyến thuộc cạnh huyền, bằng } \frac{1}{2} \text{ cạnh huyền).}$$

$$\text{Vậy 5 điểm E, F, Q, D, P cách đều trung điểm I của PQ.}$$

b) $S_{ABCD} = a^2, S_{MNPQ} = S_{ABCD} - (S_{MNB} + S_{PQD} + S_{MQA} + S_{NPC})$

$$\text{Dễ dàng có } MB = NB = \frac{a}{3}; MA = NC = \frac{2a}{3}; AQ = PC =$$

$$\frac{2a}{3} \cdot \tan 30^\circ = \frac{2a}{3\sqrt{3}}; PD = QD = a - \frac{2a}{3\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S_{MNPQ} &= a^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} + \left(a - \frac{2a}{3\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{3\sqrt{3}} + \frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{3\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{10a^2 + 2\sqrt{3}a^2}{27} \end{aligned}$$

8.16.

- a) Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BP cắt CP tại E. Tam giác BPE vuông tại B có $\widehat{BPE} = 45^\circ$ nên BPE là tam giác vuông cân
 $\Rightarrow BP = BE$ và $PE^2 = 2PB^2$ (1)

$\widehat{EBA} = \widehat{PBC}$ (cùng phụ với góc ABP)

$\triangle ABE = \triangle PBC$ (c-g-c)

$\Rightarrow AE = PC, \widehat{AEB} = \widehat{BPC} = 135^\circ$

mà $\widehat{PEB} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AEP} = 90^\circ$. Trong tam giác vuông AEP vuông ở E ta có:

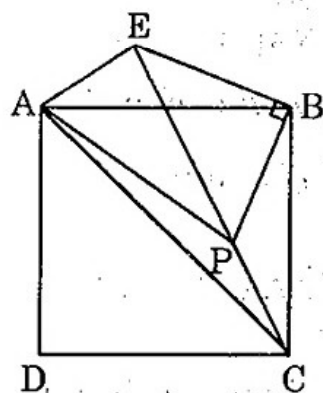
$$PA^2 = AE^2 + EP^2 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có: $2PB^2 + AE^2 = PA^2$ mà $AE = PC$

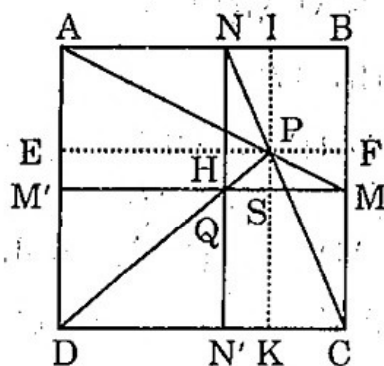
$$\Rightarrow AE^2 = PC^2.$$

$$\text{Do đó } 2PB^2 + PC^2 = PA^2.$$

- b) Trước hết ta chứng minh bài toán phụ: "Từ điểm M trong hình bình hành ABCD kẻ $EF \parallel AC$, $IK \parallel AD$ thì $M \in AC$ khi và chỉ khi $S_{BEMI} = S_{MKDF}$ " (HS tự chứng minh).



Hình 144



Hình 145

Giả sử DQ cắt AM tại P' (h.145). Từ giả thiết suy ra tứ giác BMQN là hình chữ nhật. Qua P' kẻ $IK \parallel BC$, $EF \parallel AB$.

MQ cắt AD tại M' , NQ cắt DC tại N' ta có $MM' \parallel AB$, $NN' \parallel DC$.

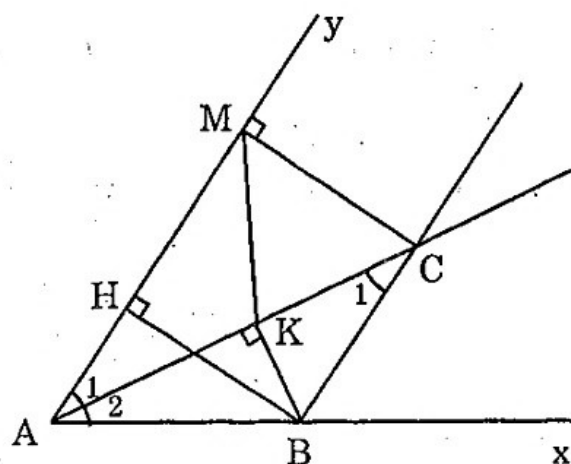
Do $Q \in DP'$ nên $S_{IP'FB} = S_{EP'SM'}$.

Suy ra $S_{IBFP'} = S_{HP'KN}$, do đó $P' \in CN$ mà $P' \in AM$ nên P' là giao điểm của AM và CN, suy ra P' trùng với P. Vậy ba điểm P, Q, D thẳng hàng hay đường thẳng DQ qua P.

8.17.

- a) Do Az là phân giác của góc xAy nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ ($Ay \parallel BC$, so le trong), suy ra $\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại B, mà $BK \perp AC \Rightarrow BK$ vừa là đường cao vừa là trung tuyến của tam giác cân $ABC \Rightarrow K$ là trung điểm của AC .



Hình 146

- b) Xét hai tam giác vuông ABH và BAK chúng có AB là cạnh huyền chung, $\widehat{A} = \widehat{ABK} = 60^\circ$ nên $\Delta ABH = \Delta BAK$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow BH = AK$ mà $AK = \frac{AC}{2} \Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$.

- c) ΔAMC vuông tại M có $AK = KC = \frac{AC}{2} \Rightarrow MK$ là trung tuyến thuộc cạnh huyền $\Rightarrow KM = \frac{AC}{2}$, vậy $KM = KC \Rightarrow \Delta KMC$ cân

Mặt khác trong tam giác vuông AMC , $\widehat{A_1} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ \Rightarrow \Delta KMC$ là tam giác đều.

8.18. (h.147)

- a) $\Delta AIB = \Delta CID$ (c-g-c) (vì có $IB = ID$, $IA = IC$ (gt)), $\widehat{AIB} = \widehat{CID}$ (đối đỉnh).

- b) $\Delta AID = \Delta CIB$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1}$, $BC = AD$ hay $MB = ND$

$\Rightarrow \Delta BMI = \Delta DNI$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{I_3} = \widehat{I_4}$ mà B, I, D thẳng hàng

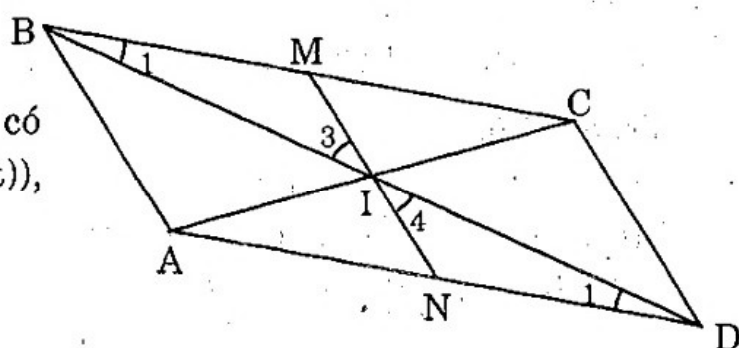
$\Rightarrow M, I, N$ thẳng hàng và $IM = IN$.

Vậy I là trung điểm của MN.

- c) ΔAIB có $\widehat{BAI} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} > 90^\circ$

Vậy $\widehat{AIB} < \widehat{BIC}$.

- d) Nếu $AC \perp CD \Rightarrow AB \perp AC$, do vậy ΔABC vuông tại A.



Hình 147

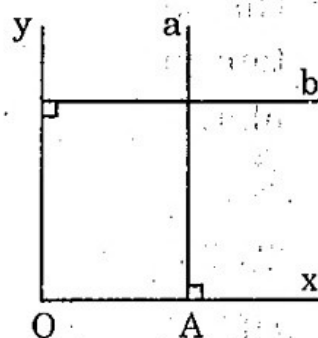
Chuyên đề : CHỨNG MINH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

1. a) Đường thẳng $a \perp Ox$ mà $Oy \perp Ox$ (gt)

$$\Rightarrow a \parallel Oy.$$

Giả sử a và b không cắt nhau thì $b \parallel a$.

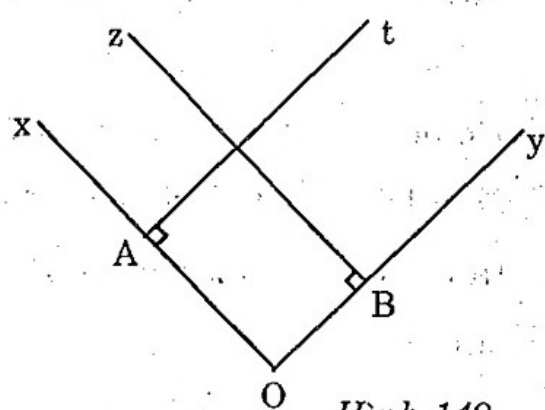
Như vậy, qua điểm B có hai đường thẳng Oy và b cùng song song với a . Điều này trái với tiên đề Ôclit. Vậy b phải cắt a .



- b) Như trên ta có $a \parallel Oy$ mà $b \perp Oy \Rightarrow b \perp a$.

Hình 148

2. Giả sử At và Bz không cắt nhau thì $At \parallel Bz$. Vì $Ox \perp At \Rightarrow Ox \perp Bz$ mà $Oy \perp Bz \Rightarrow Ox \parallel Oy$ (vì cùng vuông góc với Bz). Điều này mâu thuẫn với giả thiết ($\widehat{xOy} < 180^\circ$)



Hình 149

3. Xét $\triangle ABC$ có $\hat{B} = 30^\circ$, $AC = \frac{BC}{2}$.

Ta sẽ chứng minh $\hat{A} = 90^\circ$.

Thật vậy giả sử $\widehat{BAC} \neq 90^\circ$.

Qua C ta vẽ $CH \perp AB$ thì H không trùng với A , do đó $CH < CA$ (1)

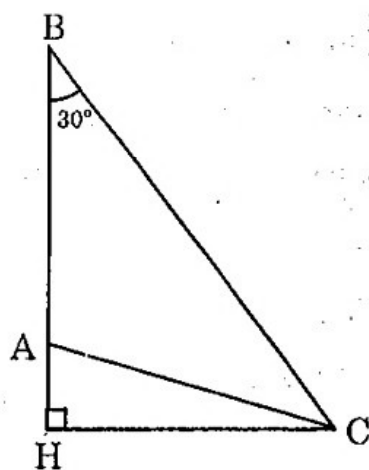
Tam giác vuông HBC có $\hat{B} = 30^\circ$

$$\text{nên } CH = \frac{BC}{2} \text{ mà } AC = \frac{BC}{2} \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow CH = CA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CH < CA$ và $CH = CA$ mâu thuẫn.

Vậy $\widehat{BAC} = 90^\circ$.



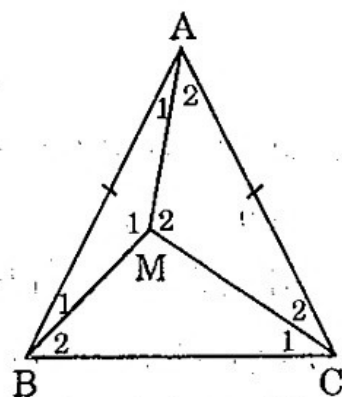
Hình 150

4. * Giả sử $MC = MB$ thì $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c-c-c) $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$

$\Rightarrow$ trái giả thiết.

* Giả sử $MC < MB$ thì $\widehat{A_2} < \widehat{A_1}$ (xét 2 tam giác có 2 cạnh tương ứng bằng nhau) mà $\widehat{M_2} < \widehat{M_1}$ (giả thiết) nên $\widehat{C_2} > \widehat{B_1}$ (1)

Ta lại có : $MB > MC$ nên $\widehat{C_1} > \widehat{B_2}$ (2)



Hình 151

5. Giả sử DC không lớn hơn DB hay $DC \leq DB$.

* Nếu $DC = DB$ thì $\triangle BDC$ cân tại D nên $\widehat{DBC} = \widehat{BCD}$

Suy ra : $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. Khi đó ta có :

$$\triangle ADB = \triangle ADC \text{ (c-g-c).}$$

Do đó : $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ (trái với giả thiết).

* Nếu $DC < DB$ thì trong $\triangle BDC$,

ta có $\widehat{DBC} < \widehat{BCD}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

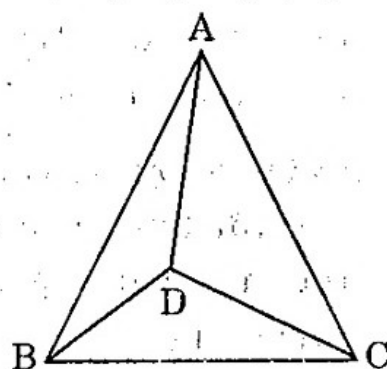
suy ra : $\widehat{ABD} > \widehat{ACD}$ (1)

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ACD$ có : $AB = AC$;

AD chung; $DC < DB$.

Suy ra $\widehat{DAC} < \widehat{DAB}$ (2)

Từ (1) và (2) trong $\triangle ADB$ và $\triangle ACD$ ta lại có $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$, điều này trái với giả thiết. Vậy $DC > DB$.



Hình 152

MỤC LỤC

PHẦN I. KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ ĐỀ BÀI TẬP	3
Chương I. SỐ HỮU TỈ – SỐ THỰC	3
§1. Tập hợp số hữu tỉ	5
§2. Cộng, trừ số hữu tỉ. Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ	5
§3. Nhân, chia số hữu tỉ	6
§4. Lũy thừa của một số hữu tỉ	7
§5. Tỷ lệ thức và tính chất của tỷ lệ thức. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau	8
§6. Số thập phân hữu hạn. Số thập phân vô hạn tuần hoàn	10
§7. Làm tròn số. Số vô tỉ. Khái niệm về căn bậc hai	11
§8. Số thực	12
Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ	13
§1. Đại lượng tỷ lệ thuận. Một số bài toán về đại lượng tỷ lệ thuận	15
§2. Đại lượng tỷ lệ nghịch. Một số bài toán về đại lượng tỷ lệ nghịch	16
§3. Hàm số. Mặt phẳng tọa độ	17
§4. Đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$)	18
Chương III. THỐNG KÊ	20
§1. Thu thập số liệu thống kê. Bảng tần số các giá trị của dấu hiệu. Biểu đồ	22
§2. Số trung bình cộng. Mốt	23
Chương IV. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ	25
§1. Giá trị của biểu thức đại số	27
§2. Đơn thức. Đơn thức đồng dạng	28

§3. Đa thức. Cộng và trừ đa thức	2
§4. Đa thức một biến. Cộng và trừ đa thức một biến	3
§5. Nghiệm của đa thức	3
Chuyên đề: Phương pháp quy nạp toán học	3
Chương V. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC, ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	3
Chương VI. TAM GIÁC	4
Chương VII. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC (10 tiết)	5
KIẾN THỨC TỔNG HỢP HÌNH HỌC 7	6
Chuyên đề: Chứng minh bằng phương pháp phản chứng	8
Phần II. HƯỚNG DẪN GIẢI	8

9

0

0

3

6

5

6

8

3

5