

CHỦ ĐỀ 1**RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC
VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN**

- Dạng bài này thuộc bài 1 trong cấu trúc đề thi vào 10, được đánh giá là dạng bài dễ ghi điểm nhất.
- Thông thường bài này sẽ chiếm 2 điểm trong cấu trúc đề thi, với các vấn đề liên quan đến rút gọn biểu thức chứa căn thức. Vì đây là câu gỡ điểm nên HS cần chú ý đến cách trình bày, ĐKXĐ và kết luận khi làm bài để lấy 1,5 điểm.
- Trong bài này thường có 0,5 điểm của câu hỏi phụ để phân loại HS, thuộc dạng: Giải pt, bpt, tìm giá trị của biến để biểu thức có giá trị nguyên, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức....
- Bài này thường gồm 3 phần:
 - + Tính giá trị của biểu thức chứa căn thức dạng đơn giản (0,5đ)
 - + Rút gọn biểu thức chứa căn thức (1,0đ)
 - + Các bài toán liên quan: Giải pt, bpt, tìm giá trị của biến để biểu thức có giá trị nguyên, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức....(0,5đ).

Ví dụ. Đề thi năm 2018-2019.

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2. Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

3. Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$

PHẦN 1: Tính giá trị của biểu thức chứa căn thức dạng đơn giản.

- Lưu ý HS không được làm tắt và giá trị của biến có thỏa mãn ĐKXĐ không, để không bị mất 0,25đ

Ví dụ: Đề năm 2018-2019. Trình bày như sau:

Thay $x = 9$ (thỏa mãn ĐKXĐ) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{9} + 4}{\sqrt{9} - 1} = \frac{3 + 4}{3 - 1} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Vậy $x = 9$ thì biểu thức $A = 3,5$

PHẦN 2: Rút gọn biểu thức chứa căn thức.

Phần này yêu cầu HS có kỹ năng phân tích đa thức thành nhân tử, vận dụng hằng đẳng thức, kỹ năng cộng trừ nhân chia phân thức, quy tắc đổi dấu...

Để tránh sai lầm, lưu ý HS không làm tắt.

Các bước giải:

Bước 1: Tìm ĐKXD (thường đề bài đã cho).

Bước 2: Tìm MTC $\Rightarrow$ quy đồng mẫu $\Rightarrow$ thu gọn tử $\Rightarrow$ phân tích tử thành nhân tử.

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho NTC của tử và mẫu.

Bước 4: Khi nào biểu thức tối giản $\Rightarrow$ hoàn thành việc rút gọn.

I. Bài tập bổ trợ.

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

$x - 1$	$4x - 1$
$x - 4$	$4x - 9$
$x - 9$	$4x - 25$
$x - 16$	...
$x - 25$	
$x - 36$	

Bài 2: Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử.

$x \pm 2\sqrt{x} + 1$	$x \pm 8\sqrt{x} + 16$
$x \pm 4\sqrt{x} + 4$	$x \pm 10\sqrt{x} + 25$
$x \pm 6\sqrt{x} + 9$	$4x \pm 4\sqrt{x} + 1$
	$9x \pm 6\sqrt{x} + 1$
	...

Bài 3: Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử.

$x\sqrt{x} \pm 1$

$x\sqrt{x} \pm 8$

Bài 4: Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử.

$x \pm \sqrt{x}$

$x \pm 4\sqrt{x}$

$x \pm 2\sqrt{x}$

$x \pm 5\sqrt{x}$

$x \pm 3\sqrt{x}$

Bài 5: Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử (có dạng: $ax + b\sqrt{x} + c$)

$x \pm 3\sqrt{x} + 2$

$x \pm 5\sqrt{x} + 6$

$x \pm \sqrt{x} - 2$

$x \pm 7\sqrt{x} + 12$

$x \pm \sqrt{x} - 6$

...

II. Bài tập về rút gọn biểu thức chứa căn thức.

Ví dụ. Đề thi năm 2018-2019.

Cho biểu thức $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

Bài làm. Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có :

$$\begin{aligned} B &= \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3} = \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}+1-2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3\sqrt{x}+1-2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ (đpcm)

PHẦN III : Các bài toán liên quan.

Dạng 1: Tìm giá trị của x để $P(x) = k$ (k là hằng số), hoặc $P(x) = A(x)$

Phương pháp giải: Giải phương trình
$$\begin{cases} P(x) - k = 0 \\ P(x) - A(x) = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$

Giải

Với $x > 0, x \neq 1$, ta có $2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{x} + 1) = \sqrt{x}(2\sqrt{x} + 5)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)(2\sqrt{x} - 1) = 0$$

Vì $\sqrt{x} + 2 > 0$ nên $2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn ĐKXD)

Vậy $x = \frac{1}{4}$ thì $2P = 2\sqrt{x} + 5$

Cách 2: từ pt: $2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$, ta đặt $\sqrt{x} = t; t > 0, t \neq 1$

Ta được phương trình ẩn t sau: $2t^2 + 3t - 2 = 0$

Giải pt bậc hai ẩn t , ta được $t = -2$ (không thỏa mãn) và $t = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$. Vậy $x = \frac{1}{4}$ thì $2P = 2\sqrt{x} + 5$

Ví dụ 2(Đề thi năm 2017-2018).

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B|x-4|$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Với } x \geq 0, x \neq 25, \text{ ta có } A = B|x-4| &\Leftrightarrow \frac{A}{B} = |x-4| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} : \frac{1}{\sqrt{x}-5} = |x-4| \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{1} = |x-4| \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = |x-4| \end{aligned}$$

Cách 1: Bỏ dấu giá trị tuyệt đối bằng cách xét từng khoảng giá trị của biến.

$$\text{Ta có } |x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{khi } x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \\ 4-x & \text{khi } x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4 \end{cases}$$

+) Với $x \geq 4, x \neq 25$, ta có pt:

$$\sqrt{x}+2 = x-4 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3) = 0$$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn).

+) Với $0 \leq x < 4$, ta có pt:

$$\sqrt{x}+2 = 4-x \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) = 0$$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn).

$$\text{Vậy } x \in \{1; 9\} \text{ thì } A = B|x-4|$$

Cách 2: Bỏ dấu giá trị tuyệt đối bằng cách sử dụng tính chất

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = \pm g(x) \end{cases}$$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $x-4 = \pm(\sqrt{x}+2)$

$$+) \text{ Với } x-4 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3) = 0$$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn).

$$+) \text{ Với } x-4 = -(\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) = 0$$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn).

$$\text{Vậy } x \in \{1; 9\} \text{ thì } A = B|x-4|$$

Cách 3. Ta có $x - 4 = (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$ và $\sqrt{x} + 2 > 0$, nên ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + 2 = |x - 4| &\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = |(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)| \\ &\Leftrightarrow |\sqrt{x} - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 9 \\ \sqrt{x} - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Cách 4: Bỏ dấu giá trị tuyệt đối bằng cách bình phương hai vế.

Xét phương trình $\sqrt{x} + 2 = |x - 4|$, Vì hai vế không âm ta bình phương hai vế:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + 2)^2 &= (x - 4)^2 \Leftrightarrow x + 4\sqrt{x} + 4 = x^2 - 8x + 16 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 9x - 4\sqrt{x} + 12 = 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) - 4(\sqrt{x} - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(x\sqrt{x} + 3x - 4) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(x\sqrt{x} - x + 4x - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)[(x(\sqrt{x} - 1) + 4(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1))] = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)^2 = 0\end{aligned}$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} + 2 > 0 \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 9 \\ \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

Tìm tất cả các giá trị của x để $P.(\sqrt{x} - 2) + 2\sqrt{x} = x - \sqrt{7(x - 2)} + 7$

Giải.

Với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có $P.(\sqrt{x} - 2) + 2\sqrt{x} = x - \sqrt{7(x - 2)} + 7$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}(\sqrt{x} - 2) + 2\sqrt{x} = x - \sqrt{7(x - 2)} + 7$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2\sqrt{x} = x - \sqrt{7(x-2)} + 7$$

$$\Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} - \sqrt{7(x-2)} + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6\sqrt{x} - 2\sqrt{7(x-2)} + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 6\sqrt{x} + 9 + (x-2) - 2\sqrt{7(x-2)} + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)^2 + (\sqrt{(x-2)} - \sqrt{7})^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 0 \\ \sqrt{(x-2)} - \sqrt{7} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 9(\text{tm})$$

Vậy $x = 9$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho hai biểu thức $A = \frac{6}{x - \sqrt{x} - 2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$

2) Đặt $P = A + B$. Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $P = \frac{x-4}{2}$

Bài 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x} - 3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} - 10}{x - 4}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq \frac{9}{16}$.

1) Tính giá trị của A khi $x = 25$.

2) Rút gọn B.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $B = 2A$.

Bài 3. Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$ và $B = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{11\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị của A khi $x = 25$.

2) Rút gọn biểu thức $P = A + B$.

3) Tìm các giá trị của x sao $P^2 = 5P$.

$$\text{HD: Giải pt } P^2 = 5P \Leftrightarrow P(P-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ P - 5 = 0 \end{cases}$$

Bài 4. Cho hai biểu thức $A = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị của B khi $x = 49$

2) Đặt $P = A.B$. Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $|2P| = 2\sqrt{x} + 5$

Bài 5. Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$

1) Rút gọn P.

2) Tìm tất cả các giá trị của x để $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$

Bài 6. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+11\sqrt{x}+6}{9-x}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x = 49$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$

3) Đặt $M = A.B$. Chứng tỏ rằng không có giá trị nào của x thỏa mãn

$$M.(\sqrt{x}+3) = \sqrt{x-5} - 2$$

Dạng 2: Tìm giá trị của x để $P(x) > k$ ($< k; \geq k; \leq k$) (k là hằng số),

Hoặc $P(x) > A(x)$ ($< A(x); \geq A(x); \leq A(x)$)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHUNG:

+) Tìm x để $P(x) > k \Leftrightarrow P(x) - k > 0$

+) Tìm x để $P(x) > A(x) \Leftrightarrow P(x) - A(x) > 0$

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Tìm tất cả các giá trị của x để $P < \frac{1}{2}$.

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Với } x \geq 0, x \neq 1, \text{ ta có } P < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow P - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}-1)} - \frac{1(\sqrt{x}-1)}{2(\sqrt{x}-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{2(\sqrt{x}-1)} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 > 0, \text{ do đó } 2(\sqrt{x}-1) < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Vậy, kết hợp ĐKXD của bài ta có $0 \leq x < 1$ thì $P < \frac{1}{2}$

*** Chú ý:** Sai lầm HS thường mắc phải trong ví dụ này:

$$\begin{aligned} \text{Với } x \geq 0, x \neq 1, \text{ ta có } P < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow P < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x}+2 < \sqrt{x}-1 \\ &\Rightarrow \sqrt{x} < -3 \end{aligned}$$

Mà $\sqrt{x} \geq 0$ nên không có giá trị nào của x thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Cách làm trên, Hs đã nhân chéo bằng cách áp dụng tính chất $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow ad > bc$

với điều kiện $b > 0, d > 0$

Trong bài này $\sqrt{x}-1$ chưa xác định được dấu của nó. Vì vậy lưu ý HS khi sử dụng tính chất trên và nên nhắc nhở HS dùng phương pháp an toàn đó là chuyển vế $\Rightarrow$ rút gọn $\Rightarrow$ xét dấu.

Ví dụ 2: Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$. Tìm tất cả các giá trị của x để $P \geq 1$.

Giải:

Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có $P \geq 1 \Leftrightarrow$

$$P - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \geq 0$$

+) Trường hợp: $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$

+) Trường hợp $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Vậy $x = 0$, hoặc $x > 1$ thì $P \geq 1$

* Chú ý: Sai lầm HS thường mắc phải trong trường hợp này.

+) HS “tích chéo” mà không chuyển vế.

+) Bỏ quên trường hợp “=”.

Ví dụ 3: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$. Tìm giá trị của x để $P^2 < P$.

Giải.

Cách 1: với $x \geq 0, x \neq 4$, để $P^2 < P$

$$\Leftrightarrow P^2 - P < 0 \Leftrightarrow P(P-1) < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - 1 \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{-3}{\sqrt{x}+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)^2} < 0$$

$$\text{Vì } (\sqrt{x}+2)^2 > 0 \Rightarrow -3(\sqrt{x}-1) < 0 \Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Vậy $x > 1, x \neq 4$ thì $P^2 < P$.

Cách 2: Có $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+2}$, vì $\frac{3}{\sqrt{x}+2} > 0$ nên $1 - \frac{3}{\sqrt{x}+2} < 1$

$\Rightarrow P < 1$ với mọi $x \geq 0, x \neq 4$

$$\text{Do đó, để } P^2 < P \text{ thì } P > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Vậy $x > 1, x \neq 4$ thì $P^2 < P$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1. Đề năm 2013-2014

Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}}$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$
- 2) Rút gọn biểu thức B.
- 3) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$

Bài 2. Đề năm 2018-2019.

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- 2) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$.
- 3) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$

* **Chú ý:** Sai lầm của HS thường mắc phải:

$$\text{Có } \frac{A}{B} = \sqrt{x} + 4$$

Để

$$\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5 \text{ thì}$$

$$\sqrt{x} + 4 \geq \frac{x}{4} + 5 \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

HS không chú ý đến $(\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0$, do đó chỉ xảy ra trường hợp “=”. Kết quả đúng là $x = 4$

Bài 3.

1) Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$. Tính giá trị của A khi $x = 9$.

2) Cho biểu thức $B = \left(\frac{x+14\sqrt{x}-5}{x-25} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

a) Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$

b) Tìm giá trị của x để $B^2 < B$.

(Hoặc có thể thay bằng câu: Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $B^2 < B$)

Giải ra được $\frac{1}{4} < x < 9$. Vậy $x = 8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

1) Tính giá trị của A khi $x = 9$.

2) Đặt $P = A.B$. Chứng tỏ giá trị của P không phụ thuộc vào biến x.

3) Tìm x để $A \geq B$. (Lưu ý trường hợp “=”).

Bài 5. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}-6}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$

với $x > 0, x \neq 4$

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm các giá trị của x để $\sqrt{A.B} \leq \frac{2}{3}$. (Chú ý ĐK để $\sqrt{A.B}$ xác định).

Bài 6. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} + \frac{x-4\sqrt{x}-9}{9-x}$, và $B = \frac{\sqrt{x}+5}{3-\sqrt{x}}$ với

$x \geq 0, x \neq 9$

1) Tính giá trị của B khi $x = 49$

2) Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

3) Đặt $P = A:Q$. Tìm giá trị của x để $|P| < \frac{1}{2}$

HD: Ta có $P = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} \leq 0 \Rightarrow |P| = -P$

Dạng 3. Chứng minh $P(x) > k$ ($< k; \geq k; \leq k$) (k là hằng số),

Hoặc $P(x) > A(x)$ ($< A(x); \geq A(x); \leq A(x)$)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHUNG:

+) Để chứng minh $P(x) > k$, ta xét hiệu $P(x) - k$, sau đó chứng minh $P(x) - k > 0$

+) Để chứng minh $P(x) > A(x)$, xét hiệu $P(x) - A(x) \Rightarrow$ chứng minh $P(x) - A(x) > 0$

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Chứng minh $P < 2$.

Giải:

Cách 1: Ta có $P = \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$,

để chứng minh $P < 2$, ta xét hiệu

$$P - 2 = \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} - 2 = \frac{2\sqrt{x}-4-2(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{-6}{\sqrt{x}+1}$$

Vì $\sqrt{x}+1 > 0$, nên $\frac{-6}{\sqrt{x}+1} < 0$ hay $P - 2 < 0 \Rightarrow P < 2$ (đpcm).

*** Chú ý: Sai lầm của HS trong cách làm này:**

HS thường mắc sai lầm trong phần trình bày, đó là:

để chứng minh $P < 2$, ta xét hiệu $P - 2 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-4-2(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-6}{\sqrt{x}+1} < 0$$

Vì $\sqrt{x}+1 > 0$, nên $\frac{-6}{\sqrt{x}+1} < 0$ hay $P - 2 < 0 \Rightarrow P < 2$ (đpcm).

HS đã nhầm sang cách trình bày của dạng 2.

Nhấn mạnh HS: Đề chứng minh $P > k$

B1: Xét hiệu $P - k \Rightarrow$ thu gọn $P - k$

B2. Chứng minh $P - k > 0$.

B3. Kết luận.

Cách 2: Ta có $P = \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}+1)-6}{\sqrt{x}+1} = 2 - \frac{6}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$,

Vì $\frac{6}{\sqrt{x}+1} > 0$ nên $2 - \frac{6}{\sqrt{x}+1} < 2$. Hay $P < 2$ (đpcm)

Ví dụ 2: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Chứng minh $P < \frac{1}{3}$.

Giải.

Cách 1: Để chứng minh $P < \frac{1}{3}$, xét hiệu $\frac{1}{3} - P = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow 3(x + \sqrt{x} + 1) > 0$. Do $x \neq 1 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - P > 0$

Do đó $P < \frac{1}{3}$ (đpcm).

Cách 2. Ta có $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

+) Xét $x = 0$ ta có $P = 0 < \frac{1}{3}$ (1)

+) Xét $x > 0$, ta có $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1}$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số dương $\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}$ ta có

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1} \leq \frac{1}{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 1$ (không thỏa mãn vì $x \neq 1$)

$\Rightarrow$ trường hợp “=” không xảy ra, do đó $P < \frac{1}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P < \frac{1}{3}$ với mọi $x \geq 0, x \neq 1$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho hai biểu thức $A = \frac{6}{x - \sqrt{x} - 2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 16$
- 2) Đặt $P = A + B$. Rút gọn P
- 3) Chứng minh $P < 1$.

Bài 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$ và $B = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- 1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 4$.
- 2) Đặt $P = A - B$. Rút gọn P.
- 3) Chứng minh $-5 < P \leq \frac{2}{3}$

Bài 3. Cho hai biểu thức $A = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ và $B = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2}{\sqrt{x} + 3} - \frac{9\sqrt{x} - 3}{x + \sqrt{x} - 6}$

với
 $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

1) Tính giá trị của A khi $x = 25$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 3}$

3) Chứng minh rằng khi $B > 0$ thì $A > 3$.

HD. B1 Giải bất pt $B > 0$ ta được $x > 1$

B2. Với $x > 1, x \neq 4$, ta chứng minh $A > 3$

Bài 4. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - \sqrt{x} + 1}$ và $B = \left(\frac{3x + 6}{x - 9} - \frac{2}{\sqrt{x} - 3} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$ với
 $x \geq 0, x \neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

2) Rút gọn B.

3) Cho $P = A.B$. Chứng minh $|P| = P$

HD: Chứng minh $P \geq 0$

Bài 5. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{3\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2}$ với
 $x \geq 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị của A khi $x = 49$.

2) Rút gọn B.

3) Cho $P = \frac{1}{AB}$. Chứng minh $P < \sqrt{P}$

HD: Chứng minh $0 < P < 1$

Dạng 4. So sánh $P(x)$ với k (k là hằng số), hoặc $P(x) > A(x)$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHUNG:

B1: Xét hiệu $P(x) - k$, $P(x) - A(x) \Rightarrow$ Thu gọn.

B2: Xét dấu của hiệu $P(x) - k$, $P(x) - A(x)$

+) Nếu $P(x) - k > 0 \Rightarrow P(x) > k$

+) Nếu $P(x) - k < 0 \Rightarrow P(x) < k$

B3: Kết luận.

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1}$ với $x > 0$.

So sánh P với 1.

Giải.

Cách 1. Xét $P - 1 = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} - 1 = \frac{4}{\sqrt{x} + 1}$

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x} + 1} > 0$ hay $P - 1 > 0$. Vậy $P > 1$.

Cách 2. $P = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} + 1}$, Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x} + 1} > 0$

Nên $1 + \frac{4}{\sqrt{x} + 1} > 1$. Hay $P > 1$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

So sánh P với 4.

Giải.

Cách 1. Xét $P - 4 = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - 4 = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}$

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0$ và $x \neq 1 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 > 0$. Do đó $\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} > 0$ hay $P - 4 > 0$.

Do đó $P > 4$.

Cách 2. Ta có $P = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

Vì $x > 0$, nên $P = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số dương $\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}$ ta có

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \geq 4. \text{ Hay } P \geq 4$$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 1$ (không thỏa mãn vì $x \neq 1$).

Do đó $P > 4$.

Ví dụ 3: Cho $P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

So sánh P và $\sqrt{P}$.

Giải.

Cách 1.

+) Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0$ và có $x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

Do đó $P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} > 0$ với mọi $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{P}$ xác định với mọi $x > 0, x \neq 1$.

+ Lại có $P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$ do $x > 0$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số dương $\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}$ ta có

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \geq 1. \text{ Hay } P \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x=1$ (không thỏa mãn vì $x \neq 1$). Nên $P > 1$

$$\Rightarrow \sqrt{P} > 1 \Rightarrow \sqrt{P} - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{P}(\sqrt{P} - 1) > 0 \Rightarrow P - \sqrt{P} > 0 \Rightarrow P > \sqrt{P}.$$

Cách 2. + ta có: $P > 0 \Rightarrow \sqrt{P} > 0 \Rightarrow P + \sqrt{P} > 0$

$$+ \text{ xét } P^2 - P = P(P - 1) = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - 1 \right) = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x + 1}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\Rightarrow P^2 - P = (P + \sqrt{P})(P - \sqrt{P}) > 0, \text{ vì } P + \sqrt{P} > 0 \Rightarrow P - \sqrt{P} > 0 \Rightarrow P > \sqrt{P}$$

$$\text{Hoặc } P^2 - P > 0 \Rightarrow P^2 > P \Rightarrow P > \sqrt{P} \text{ (vì } P > 0).$$

*** Chú ý.** Dạng này có thể đổi thành so sánh P với P^2 (với P dương)

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1. Cho hai biểu thức $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của B khi $x = 49$.
- 2) Rút gọn biểu thức $P = A - B$.
- 3) So sánh P với $\frac{1}{3}$.

Bài 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của B khi $x = 49$
- 2) Đặt $P = A.B$. Rút gọn P
- 3) So sánh $P + \sqrt{x}$ với 3.

Bài 3. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 49$.
- 2) Rút gọn B.

3) Cho $P = \frac{1}{AB}$. So sánh P và $\sqrt{P}$ (Hoặc so sánh P và P^2).

HD: Cách 1. Chứng minh $0 < P < 1 \Rightarrow P < \sqrt{P}$

Cách 2. Xét $P - P^2$

Bài 4.

1) Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$. Tính giá trị của A khi $x = 9$.

2) Cho biểu thức $B = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn B.

b) So sánh B và $\sqrt{B}$.

* Chú ý ĐKXĐ của $\sqrt{B}$

Dạng 5. Tìm giá trị của biến để biểu thức có giá trị nguyên.

- Trong dạng toán này HS cần hiểu rõ tập hợp các số: Tập hợp số tự nhiên(N), số nguyên (Z), số hữu tỉ (Q), số vô tỉ (I), số thực (R).

A. Bài tập bổ trợ.

Bài 1. Tìm số nguyên x để các biểu thức sau có giá trị là số nguyên.

a) $\frac{3}{2x-1}$ b) $\frac{5}{x^2+1}$ c) $\frac{7}{x^2-x+1}$ d) $\frac{x^2-59}{x+8}$ e) $\frac{x+2}{x^2+4}$

HD Giải.

a) Vì x là số nguyên $\Rightarrow 2x - 1$ cũng là số nguyên, do đó để $\frac{3}{2x-1}$ có giá trị là số nguyên thì $2x - 1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

+ Với $2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1(\text{tm})$

+ Với $2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0(\text{tm})$

+ Với $2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2(\text{tm})$

+ Với $2x - 1 = -3 \Rightarrow x = -1$ (tm)

Vậy $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

- b) Vì x là số nguyên $\Rightarrow x^2 + 1$ cũng là số nguyên, do đó để $\frac{5}{x^2 + 1}$ có giá trị là số nguyên thì $x^2 + 1 \in U(5)$, vì $x^2 + 1 \geq 1$ nên $x^2 + 1 \in \{1; 5\}$

+ Với $x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$ (tm)

+ Với $x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x = \pm 2$ (tm)

Vậy $x \in \{-2; 0; 2\}$.

- c) Làm tương tự phần b, c. chú ý: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Kết quả $x \in \{-2; 0; 1; 3\}$.

- d) Vì bậc của tử cao hơn bậc của mẫu, ta sẽ lấy tử chia cho mẫu được:

$$\frac{x^2 - 59}{x + 8} = \frac{x^2 - 64 + 5}{x + 8} = x - 8 + \frac{5}{x + 8}$$

Vì x là số nguyên $\Rightarrow x - 8, x + 8$ cũng là các số nguyên, do đó để $\frac{x^2 - 59}{x + 8}$

có giá trị là số nguyên thì $\frac{5}{x + 8}$ (tiếp theo làm tương tự như phần a, b)

- e) Trong phần này tử là một đa thức có bậc nhỏ hơn đa thức dưới mẫu, ta không thể làm như phần d được.

Để làm dạng này ta sẽ sử dụng tính chất chia hết.

Khi x nguyên thì $x + 2, x^2 + 4$ cũng là số nguyên, do đó $\frac{x + 2}{x^2 + 4}$ có giá trị là

số nguyên thì $x + 2 : x^2 + 4 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) : x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 : x^2 + 4$

$$\Rightarrow x^2 + 4 - 8 : x^2 + 4 \Rightarrow 8 : x^2 + 4$$

$\Rightarrow x^2 + 4 \in U(8)$, vì $x^2 + 4 \geq 4$ nên $x^2 + 4 \in \{4; 8\}$

+ Với $x^2 + 4 = 4 \Rightarrow x = 0$

+ Với $x^2 + 4 = 8 \Rightarrow x = \pm 2$

Vì cách này các bước biến đổi không tương đương nhau, nên ta phải thử lại các kết quả.

Thử lại, ta thấy $x = -2$ thỏa mãn. Vậy $x = -2$ thì $\frac{x+2}{x^2+4}$ có giá trị là số nguyên.

Bài 2. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$.

- 1) Tìm các số nguyên x để P có giá trị là số nguyên.
- 2) Chứng minh rằng với $x = \frac{4}{9}$ thì P là số nguyên.
- 3) Tìm các số hữu tỉ x để P có giá trị là số nguyên.

Giải

- 1) Nhận thấy bậc của tử và mẫu bằng nhau, nên chia tử cho mẫu ta được.

$$P = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)+5}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}+1}$$

+ Để P là số nguyên thì $\frac{5}{\sqrt{x}+1}$ phải là số nguyên

+ Khi x là số nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên (nếu x là số chính phương), hoặc là số vô tỉ (nếu x không là số chính phương).

+ Để $\frac{5}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên thì $\sqrt{x}$ không thể là số vô tỉ, do đó $\sqrt{x}$ là số nguyên, suy ra $\sqrt{x}+1 \in U(5)$, vì $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$ nên $\sqrt{x}+1 \in \{1; 5\}$

- Với $\sqrt{x}+1 = 1 \Rightarrow x = 0$ (tm). Khi đó $P = 6$

- Với $\sqrt{x}+1 = 5 \Rightarrow x = 16$ (tm). Khi đó $P = 2$.

$$2) \text{ Với } x = \frac{4}{9} \text{ thì } P = \frac{\sqrt{\frac{4}{9}} + 6}{\sqrt{\frac{4}{9}} + 1} = \frac{\frac{2}{3} + 6}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{20}{3} : \frac{5}{3} = \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{5} = 4$$

$$3) P = 1 + \frac{5}{\sqrt{x} + 1}. \text{ Để } P \text{ là số nguyên thì } \frac{5}{\sqrt{x} + 1} \text{ phải là số nguyên}$$

Trong trường hợp này x là số hữu tỉ (ví dụ $x = \frac{4}{9}$), để tìm được các số hữu tỉ x để P là số nguyên ta sẽ dùng phương pháp đánh giá, tức là chặn P theo kiểu $m \leq P \leq n$ với m, n là các số nguyên.

Cách 1: Dùng bất đẳng thức.

$$+ \text{ Ta có } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x} + 1} > 0 \quad (1)$$

$$+ \text{ Vì } \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x} + 1} \leq 5 \quad (2)$$

$$+ \text{ Từ (1) và (2) } \Rightarrow 0 < \frac{5}{\sqrt{x} + 1} \leq 5, \text{ mà } \frac{5}{\sqrt{x} + 1} \text{ là số nguyên nên } \frac{5}{\sqrt{x} + 1} \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$- \text{ Với } \frac{5}{\sqrt{x} + 1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (tm)}$$

$$- \text{ Với } \frac{5}{\sqrt{x} + 1} = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \text{ (tm)}$$

$$- \text{ Với } \frac{5}{\sqrt{x} + 1} = 3 \Rightarrow 3\sqrt{x} + 3 = 5 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{9} \text{ (tm)}$$

$$- \text{ Với } \frac{5}{\sqrt{x} + 1} = 4 \Rightarrow 4\sqrt{x} + 4 = 5 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{16} \text{ (tm)}$$

$$- \text{ Với } \frac{5}{\sqrt{x} + 1} = 5 \Rightarrow 5\sqrt{x} + 5 = 5 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (tm)}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{0; \frac{1}{16}; \frac{4}{9}; \frac{9}{4}; 16\right\}$$

Cách 2. Đặt $\frac{5}{\sqrt{x}+1} = n \in \mathbb{Z}, n > 0$

$$\text{Ta có } \frac{5}{\sqrt{x}+1} = n \Rightarrow n\sqrt{x} + n = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{5-n}{n}$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{5-n}{n} \geq 0 \Rightarrow 0 < n \leq 5$$

Tiếp tục làm như cách 1 ta tìm được $x \in \left\{0; \frac{1}{16}; \frac{4}{9}; \frac{9}{4}; 16\right\}$.

=> Dù là dạng toán yêu cầu tìm x nguyên hay x là số thực để biểu thức P có giá trị nguyên, nếu P có bậc trên tử $\geq$ bậc dưới mẫu ta đều lấy tử chia cho mẫu.

II. Bài tập vận dụng.

Dạng 5.1. Tìm số nguyên x để biểu thức P có giá trị nguyên.

Ví dụ 1. Tìm các số nguyên x để $P = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$) có giá trị là số nguyên

Giải.

$$\text{Với } x \geq 0; x \neq 1, \text{ ta có } P = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}+1)+3}{\sqrt{x}+1} = 2 + \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

P có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in U(3)$, mà $\sqrt{x}+1 \geq 1$

$$\text{Do đó } \sqrt{x}+1 \in \{1; 3\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{0; 2\} \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}.$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \frac{x-15}{\sqrt{x}+3}$ với $x > 0; x \neq 9$.

Tìm các số nguyên x để P nhận giá trị nguyên.

Giải .

Với $x > 0; x \neq 9$, ta có $P = \frac{x-15}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 - \frac{6}{\sqrt{x}+3}$

- Với $x = 15$ thì $P = 0 \in \mathbb{Z}$

- Với $x \neq 15$,

$$\text{Nếu } x \in \mathbb{Z} \text{ thì } \begin{cases} \sqrt{x} \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{x} \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 15 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ để P nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x} + 3 \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x} - 3 \in \mathbb{Z}$$

Do đó để P có giá trị nguyên thì $\sqrt{x} + 3 \in U(6)$, vì $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 > 3$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + 3 = 6 \Rightarrow x = 9 (\text{không tm}).$$

Vậy $x = 15$ thì P nhận giá trị nguyên.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+5}{3\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

Tìm các số nguyên x để P nhận giá trị nguyên.

Giải.

Cách 1. Khi P nhận giá trị nguyên $\Rightarrow 3P$ cũng nhận giá trị nguyên.

+ Ta có $3P = \frac{3(\sqrt{x}+5)}{3\sqrt{x}} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}}$. Để $3P$ nguyên thì $\sqrt{x} \in U(5)$, vì $\sqrt{x} > 0$, nên $\sqrt{x} \in \{1; 5\}$

- Với $\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ và $3P = 6 \Rightarrow P = 2 (\text{tm})$.

- Với $\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$ và $3P = 2 \Rightarrow P = \frac{2}{3} (\text{không tm})$.

Vậy $x = 1$ thì P nhận giá trị nguyên.

+ **Cách 2.** Để P nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x}$ phải nguyên $\Rightarrow \sqrt{x} + 5$ cũng nguyên.

Khi đó $\sqrt{x} + 5 : 3\sqrt{x} \Rightarrow 3\sqrt{x} + 15 : 3\sqrt{x} \Rightarrow 15 : 3\sqrt{x} \Rightarrow 5 : 3\sqrt{x}$, do đó $\sqrt{x} \in U(5)$,

vì $\sqrt{x} > 0$, nên $\sqrt{x} \in \{1; 5\}$

- Với $\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ và $3P = 6 \Rightarrow P = 2$ (tm).

- Với $\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$ và $3P = 2 \Rightarrow P = \frac{2}{3}$ (không tm).

Vậy $x = 1$ thì P nhận giá trị nguyên.

Dạng 5.2. Tìm x để P có giá trị nguyên.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \frac{7}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0; x \neq 9$. Tìm x để P nhận giá trị nguyên.

Cách 1. + Với $x \geq 0; x \neq 9 \Rightarrow P = \frac{7}{\sqrt{x} + 3} > 0$ (1)

+ Vì $x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{7}{3}$ hay $P \leq \frac{7}{3}$ (2)

+ Từ (1) và (2) ta có $0 < P \leq \frac{7}{3}$, mà P nhận giá trị nguyên, nên $P \in \{1; 2\}$

- Với $P = 1 \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x} + 3} = 1 \Rightarrow x = 16$ (tm)

- Với $P = 2 \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x} + 3} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (tm)

Vậy với $x \in \left\{\frac{1}{4}; 16\right\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

Cách 2. Biểu thị $\sqrt{x}$ theo P .

Với $x \geq 0; x \neq 9 \Rightarrow P = \frac{7}{\sqrt{x} + 3} > 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{7 - 3P}{P}$, vì $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{7 - 3P}{P} \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7 - 3P \geq 0 \Leftrightarrow P \leq \frac{7}{3} \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < P \leq \frac{7}{3}, \text{ mà } P \text{ nhận giá trị nguyên, nên } P \in \{1; 2\} \dots$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \frac{5\sqrt{x} - 10}{2\sqrt{x} + 4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$. Tìm x để P nhận giá trị nguyên.

Giải.

$$+ \text{ Với } x \geq 0; x \neq 4, \text{ ta có } P = \frac{5\sqrt{x} - 10}{2\sqrt{x} + 4} \Rightarrow 2P = \frac{5\sqrt{x} - 10}{\sqrt{x} + 2} = 5 - \frac{20}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{20}{\sqrt{x} + 2} > 0 \Rightarrow 5 - \frac{20}{\sqrt{x} + 2} < 5. \text{ Hay } 2P < 5 \Rightarrow P < \frac{5}{2} \quad (1)$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-20}{\sqrt{x} + 2} \geq \frac{-20}{2} \Leftrightarrow 5 - \frac{20}{\sqrt{x} + 2} \geq 5 - 10.$$

$$\text{Hay } 2P \geq -5$$

$$\Rightarrow P \geq -\frac{5}{2} \quad (2).$$

$$+ \text{ Từ (1) và (2) suy ra } -\frac{5}{2} \leq P \leq \frac{5}{2}, \text{ mà } P \text{ nhận giá trị nguyên } \Rightarrow P \in \{-2; -1; 0; 1; 2\} \dots \Rightarrow x \dots$$

$$\text{Cách 2. Với } x \geq 0; x \neq 4, \text{ ta có } P = \frac{5\sqrt{x} - 10}{2\sqrt{x} + 4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{x} + 2} \right)$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x} + 2} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{4}{\sqrt{x} + 2} < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{x} + 2} \right) < \frac{5}{2}.$$

$$\text{Hay } P < \frac{5}{2} \quad (1)$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} + 2 \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-4}{\sqrt{x} + 2} \geq \frac{-4}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{\sqrt{x} + 2} \geq 1 - 2 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{x} + 2} \right) \geq \frac{-5}{2}.$$

$$\text{Hay } P \geq -\frac{5}{2} \quad (2).$$

$$\text{Cách 3. Biểu thị } \sqrt{x} \text{ theo } P \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-4P - 10}{2P - 5}$$

$$+ \text{ Giải đk } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq P \leq \frac{5}{2}$$

$$+ \text{ Giải đk } x \neq 4 \Rightarrow P \neq 0. \text{ Từ đó suy ra } P \in \{-2; -1; 1; 2\} \dots \Rightarrow x \dots$$

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$. Tìm các giá trị của x để $\frac{9}{P}$ nhận giá trị nguyên.

GIẢI.

$$+ \text{ Vì } x > 0 \text{ nên ta có } P = \frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 4$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số dương $\sqrt{x}; \frac{4}{\sqrt{x}}$ ta được:

$$\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 4 \geq 8. \text{ Hay } P \geq 8$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 4 \text{ (không tm)} \Rightarrow P > 8.$$

$$\text{Do đó } 0 < \frac{1}{P} < \frac{1}{8} \Leftrightarrow 0 < \frac{9}{P} < \frac{9}{8}, \text{ vì } \frac{9}{P} \text{ nhận giá trị nguyên} \Rightarrow \frac{9}{P} = 1 \Leftrightarrow P = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} = 9 \Rightarrow$$

$$x + 4\sqrt{x} + 4 = 9\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 5\sqrt{x} + 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1(\text{tm}) \\ \sqrt{x} - 4 = 0 \Rightarrow x = 16(\text{tm}) \end{cases}. \text{ Vậy ...}$$

Ví dụ 4. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$. Tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Giải

Cách 1. Để P nguyên, điều kiện cần là $\sqrt{x}$ phải có giá trị nguyên

Do đó để $P = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}$ có giá trị nguyên thì

$$(\sqrt{x} + 2):(x + \sqrt{x} + 1) \Rightarrow (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1):(x + \sqrt{x} + 1) \Rightarrow (x + \sqrt{x} - 2):(x + \sqrt{x} + 1)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} + 2):(x + \sqrt{x} + 1 - 3):(x + \sqrt{x} + 1) \Rightarrow 3:(x + \sqrt{x} + 1) \Rightarrow (x + \sqrt{x} + 1) \in U(3),$$

$$\text{vì } x \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 \in \{1; 3\}$$

$$\text{- Với } x + \sqrt{x} + 1 = 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{- Với } x + \sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Thử lại: với $x = 0$ ta có $P = 2(\text{tm})$

với $x = 1$ ta có $P = 1(\text{tm})$

Vậy ...

Cách 2. Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn.

$$\text{Với } x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow P = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} > 0$$

$$\Rightarrow P(x + \sqrt{x} + 1) = \sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow Px + (P - 1)\sqrt{x} + P - 2 = 0$$

Đặt $\sqrt{x} = t \geq 0$, ta được phương trình bậc hai ẩn t với P là tham số:

$$Pt^2 + (P - 1)t + P - 2 = 0 (*)$$

ta có: $\Delta = (P-1)^2 - 4P(P-2) = -3P^2 + 6P + 1$

Để tồn tại giá trị P thì pt (*) phải có nghiệm $\Rightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3P^2 + 6P + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow P^2 - 2P + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (P-1)^2 \leq \frac{4}{3}$. Do P nguyên, nên P-1 cũng nguyên $\Rightarrow (P-1)^2$ bằng 0 hoặc 1.

Nếu $(P-1)^2 = 0 \Rightarrow P = 1 \Rightarrow x = 1(\text{tm})$

Nếu $(P-1)^2 = 1 \Rightarrow P = 2$ (vì $P > 0$) $\Rightarrow x = 0(\text{tm})$.

Vậy...

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1.

1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2}$. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.

2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} + \frac{4}{\sqrt{x} - 4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0; x \neq 16$

3) Với các biểu thức A, B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để B(A-1) là số nguyên.

Bài 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x} + 1)}{25 - x}$ và $B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$ với $x \geq 0; x \neq 25$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm tất cả các số nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Bài 3. Cho hai biểu thức $A = \frac{9 - 3\sqrt{x}}{x - 4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 4}{x - \sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$

2) Chứng minh $B = \frac{-3}{\sqrt{x}-2}$

3) Tìm các số thực x để biểu thức $P = A:B$ nhận giá trị là một số nguyên âm.

Bài 4. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+5}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 9$.

2) Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$

3) Đặt $P = A:B$. Chứng minh rằng: Không tồn tại số thực của x để P là số nguyên.

Bài 5. Cho hai biểu thức $A = \frac{x-6}{x+3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-6}{x+1}$ với $x > 0; x \neq 9$

1) Tính giá trị của B khi $x = 4$.

2) Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$

3) Đặt $P = A:B$. Tìm x để $\frac{2}{P}$ là số nguyên.

Dạng 6. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

* Quy tắc chung:

+ Nếu biểu thức có bậc trên tử $\geq$ bậc của mẫu thì lấy tử chia cho mẫu.

+ Bài toán tìm min, max: phải tồn tại dấu bằng xảy ra.

* Bất đẳng thức thường dùng:

1) $A^2 \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $A = 0$

2) $\sqrt{A} \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $A = 0$

3) Bất đẳng thức côsi (hay AM-GM) cho hai số không âm: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.

Dạng 6.1: Tìm các giá trị của x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$. Tìm tất cả các giá trị của x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

$$+ \text{ Với } x \geq 0; x \neq 1, \text{ ta có } P = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = 2 - \frac{5}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+1} \leq 5 \Leftrightarrow -\frac{5}{\sqrt{x}+1} \geq -5$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{5}{\sqrt{x}+1} \geq 2 - 5. \text{ Hay } P \geq -3, \text{ dấu “=” xảy ra khi } x = 0 \text{ (tm).}$$

Vậy min $P = -3$ khi $x = 0$.

Ví dụ 2: Cho biểu thức $P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

$$\text{Với } x > 0, \text{ ta có } P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$$

Áp dụng bất côsi cho hai số dương $\sqrt{x}; \frac{1}{\sqrt{x}}$, ta được:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \geq 3. \text{ Hay } P \geq 3$$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 1$ (tm). Vậy min $P = 3$ khi $x = 1$.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 25$. Tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải.

Với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 25$, ta có $P =$

$$\frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6$$

Áp dụng bất côsi cho hai số dương $\sqrt{x} + 3$; $\frac{25}{\sqrt{x}+3}$, ta được:

$$\sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{25}{\sqrt{x}+3}} = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6 \geq 10 - 6. \text{ Hay } P \geq 4$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\sqrt{x} + 3 = \frac{25}{\sqrt{x}+3} \Rightarrow (\sqrt{x}+3)^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 = 5 (\text{do } \sqrt{x} + 3 > 0)$$

$\Leftrightarrow x = 4$ (tm). Vậy min $P = 4$ khi $x = 4$.

Ví dụ 4. Cho biểu thức $A = \frac{1}{2\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{A} + 4A$.

Giải

Với $x \geq 1$, ta có $P = 2\sqrt{x} + 1 + \frac{4}{2\sqrt{x}+1}$

** Chú ý sai lầm HS thường mắc phải:*

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số dương $2\sqrt{x} + 1$; $\frac{4}{2\sqrt{x}+1}$ ta được :

$$2\sqrt{x} + 1 + \frac{4}{2\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{(2\sqrt{x}+1) \cdot \frac{4}{2\sqrt{x}+1}} = 4$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$2\sqrt{x} + 1 = \frac{4}{2\sqrt{x}+1} \Rightarrow (2\sqrt{x}+1)^2 = 4 \Rightarrow 2\sqrt{x} + 1 = 2 (\text{do } 2\sqrt{x} + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Kết luận....}$$

- Lời giải trên cho kết quả không đúng, vì $x = \frac{1}{4}$ không thỏa mãn đk $x \geq 1$.

** Lời giải đúng:*

- Chú ý vì $x \geq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 1 \geq 3$. Do đó nếu áp dụng bất đẳng thức côsi thì có thể dấu “=” xảy ra khi $2\sqrt{x} + 1 = 3$. Do đó phải phân tích biểu thức P tiếp theo đk dấu “=” xảy ra khi $2\sqrt{x} + 1 = 3$.

$$\text{Ta có } P = 2\sqrt{x} + 1 + \frac{4}{2\sqrt{x} + 1} = \frac{4(2\sqrt{x} + 1)}{9} + \frac{5(2\sqrt{x} + 1)}{9} + \frac{4}{2\sqrt{x} + 1}$$

+ Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số dương $\frac{4(2\sqrt{x} + 1)}{9}$; $\frac{4}{2\sqrt{x} + 1}$, ta được:

$$\frac{4(2\sqrt{x} + 1)}{9} + \frac{4}{2\sqrt{x} + 1} \geq 2\sqrt{\frac{4(2\sqrt{x} + 1)}{9} \cdot \frac{4}{2\sqrt{x} + 1}} = \frac{8}{3}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \frac{4(2\sqrt{x} + 1)}{9} = \frac{4}{2\sqrt{x} + 1} \Rightarrow 2\sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1(\text{tm})$$

$$+ \text{ Vì } x \geq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 1 \geq 3 \Rightarrow \frac{5(2\sqrt{x} + 1)}{9} \geq \frac{5}{3}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } x = 1(\text{tm})$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \frac{13}{3}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } x = 1.$$

$$* \text{ Hoặc ta giữ nguyên } 2\sqrt{x} + 1, \text{ tách } \frac{4}{2\sqrt{x} + 1} = \frac{9}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5}{2\sqrt{x} + 1}$$

$$\Rightarrow P = 2\sqrt{x} + 1 + \frac{9}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5}{2\sqrt{x} + 1} \geq 2 \cdot 3 - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 2\sqrt{x} + 1 = \frac{9}{2\sqrt{x} + 1} \Leftrightarrow x = 1 \\ 2\sqrt{x} + 1 = 3 \end{cases}$$

Vậy

Dạng 6.2: Tìm các giá trị của x để biểu thức P đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$. Tìm tất cả các giá trị của x để P đạt giá trị lớn nhất.

Giải.

Với $x \geq 0; x \neq 1$, ta có $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \leq 1 + \frac{1}{2}$. Hay $P \leq \frac{3}{2}$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Vậy $\max P = \frac{3}{2}$ khi $x = 0$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$. Tìm giá trị của x để $P = A - 9\sqrt{x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải.

Cách 1: Với $x > 0; x \neq 1$, ta có $P = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} - 1 - 9x}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{-9x + 6\sqrt{x} - 1 - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{-(3\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} - 5$$

Vì $\sqrt{x} > 0; -(3\sqrt{x} - 1)^2 \leq 0$, nên suy ra $P \leq -5$

Dấu “=” xảy ra khi $(3\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$ (tm)

Vậy....

Cách 2: Dùng bất côsi.

Với $x > 0; x \neq 1$, ta có $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x} \right)$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số dương $\frac{1}{\sqrt{x}}$; $9\sqrt{x}$ ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 9\sqrt{x}} = 6$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x} \right) \leq -5. \text{ Hay } P \leq -5$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{1}{\sqrt{x}} = 9\sqrt{x} \Rightarrow 9x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ (tm)}$

Vậy....

Cách 3: Dùng đk có nghiệm của pt bậc hai.

+ Với $x > 0; x \neq 1$, ta có $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} < 1$ (do $\sqrt{x} > 0$)

+ Từ $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} \Rightarrow P\sqrt{x} = \sqrt{x} - 1 - 9x \Leftrightarrow 9x + (P-1)\sqrt{x} + 1 = 0$ (*)

Coi phương trình (*) là phương trình bậc hai của $\sqrt{x}$, ta có:

$$\Delta = (P-1)^2 - 36$$

Để tồn tại giá trị của P thì pt * phải có nghiệm $\Rightarrow \Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow (P-1)^2 - 36 \geq 0 \quad |P-1| \geq 6 \Rightarrow \begin{cases} P-1 \geq 6 \\ P-1 \leq -6 \end{cases}$$

Vì $P < 1$ nên $P-1 \leq -6 \Leftrightarrow P \leq -5$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{-(P-1)}{2.9} = \frac{-(-5-1)}{2.9} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ (tm)}$

Vậy $\max P = -5$ khi $x = \frac{1}{9}$.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \frac{2}{x - \sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0$. Tìm tất cả các giá trị của x để P đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Cách 1: Ta có $x - \sqrt{x} + 3 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} \Rightarrow \frac{2}{x - \sqrt{x} + 3} \leq \frac{8}{11}$

Hay $P \leq \frac{8}{11}$ dấu “=” xảy ra khi $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (tm)

Vậy $\max P = \frac{8}{11}$ khi $x = \frac{1}{4}$.

Cách 2: Sử dụng đk có nghiệm của pt bậc hai.

Ví dụ 4. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 9}$ với $x \geq 0$. Tìm giá trị của x để P đạt giá trị lớn nhất.

Giải.

Cách 1: Ta có $x - 2\sqrt{x} + 9 = (\sqrt{x} - 1)^2 + 8 > 0$ và $x \geq 0$, nên suy ra $B \geq 0$

+ Khi $x = 0$ thì $P = 0$ (1)

+ Khi $x > 0$ thì $P > 0$, ta có $\frac{1}{P} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} - 2$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số dương $\sqrt{x}$; $\frac{9}{\sqrt{x}}$ ta được:

$$\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{9}{\sqrt{x}}} = 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} - 2 \geq 4. \text{ Hay } \frac{1}{P} \geq 4 \Leftrightarrow P \leq \frac{1}{4} \quad (2)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{9}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 9$

+ Từ (1) và (2) suy ra $\max P = \frac{1}{4}$ khi $x = 9$.

Cách 2: Sử dụng đk có nghiệm của pt bậc hai.

* Chú ý 1: HS thường mắc sai lầm khi đưa về $\frac{1}{P}$ mà không xét trường hợp $x = 0$ (biểu thức $\frac{1}{P}$ chỉ xác định khi $x > 0$).

* Chú ý 2. Khi tìm cực trị của biểu thức, nhiều khi ta thay điều kiện để biểu thức này đạt cực trị bởi điều kiện tương đương là biểu thức khác đạt cực trị.

Như: - P lớn nhất $\Leftrightarrow P$ nhỏ nhất.

$\frac{1}{P}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ khi P nhỏ nhất với $P > 0$.

P lớn nhất $\Leftrightarrow P^2$ lớn nhất với $P > 0$.

Dạng 6.3. Tìm x nguyên (hoặc x là số tự nhiên) để biểu thức đạt GTLN, GTNN.

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0; x \neq 9$. Với x nguyên, tìm giá trị lớn nhất của P .

Giải.

+ Khi $0 \leq \sqrt{x} < 3$, thì $P < 0$.

+ Khi $\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$ thì $P > 0$.

$\Rightarrow P$ đạt giá trị lớn nhất khi $P > 0$, ta có $P = \frac{2}{\sqrt{x} - 3}$, suy ra P lớn nhất khi $\sqrt{x} - 3$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow \sqrt{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x$ nhỏ nhất, mà $x > 9$, x nguyên, nên suy ra $x = 10$.

Khi đó $\max P = \frac{2}{\sqrt{10} - 3} = 2\sqrt{10} + 6$

Vậy $x = 10$ thì $P_{\max} = 2\sqrt{10} + 6$

Cách 2. Vì $x > 9$, x nguyên $\Rightarrow x \geq 10 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 \geq \sqrt{10} - 3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} \leq \frac{1}{\sqrt{10}-3} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-3} \leq \frac{2}{\sqrt{10}-3}. \text{ Hay } P \leq \frac{2}{\sqrt{10}-3} = 2\sqrt{10} + 6$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 10$.

Vậy...

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của P khi x là số tự nhiên và $x < 101$.

Giải.

$$+ \text{ Với } x \geq 0, x \neq 4, \text{ ta có } P = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 4 - \frac{8}{\sqrt{x}+2}$$

Vì $x < 101$, x là số tự nhiên $\Rightarrow x \leq 100$

$$\sqrt{x} \leq 10 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 \leq 10 + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{8}{12} \Leftrightarrow 4 - \frac{8}{\sqrt{x}+2} \leq 4 - \frac{2}{3}. \text{ Hay } P \leq \frac{10}{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 100$.

Vậy khi $x = 100$ thì $P_{\max} = \frac{10}{3}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1. (Đề năm 2015-2016).

Cho hai biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị của P khi $x = 9$

2) Rút gọn Q .

3) Tìm x để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2. (Đề năm 2020-2021).

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+5}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1) Tính giá trị của A khi $x = 4$

2) Chứng minh $B = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$

3) Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức $P = 2.AB + \sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. Cho hai biểu thức $A = \frac{x+7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{8\sqrt{x}+24}{9-x}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}-3}$

3) Tìm giá trị của x để biểu thức $P = \sqrt{AB}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

* Chú ý đk để P xác định.

Bài 4. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{x+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{x+6\sqrt{x}+2}{2x+5\sqrt{x}-3}$

với $x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}$

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

3) Tìm giá trị của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} + \frac{12}{4-x}$ với

$x \geq 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

3) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $P = \frac{1}{AB}$ đạt giá trị lớn nhất.

* Chú ý đk để P xác định.

Dạng 7. Tìm giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm.

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

Tìm các giá trị của m để pt $P = m$ có nghiệm.

Giải. Với $x \geq 0; x \neq 1$, ta có $P = m \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = m \Rightarrow (1-m)\sqrt{x} = m$ (1)

+ Nếu $m = 1$ thì pt (1) có dạng $0\sqrt{x} = 1$ (không có gt nào của x thỏa mãn).

+ Nếu $m \neq 1$ thì từ pt (1) ta có $\sqrt{x} = \frac{m}{1-m}$ (2)

Vì $x \geq 0; x \neq 1$, nên suy ra $\sqrt{x} \geq 0; \sqrt{x} \neq 1$. Do đó để pt $P = m$ có nghiệm thì từ (2) ta cần có:

$$\begin{cases} \frac{m}{1-m} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq m < 1 \\ \frac{m}{1-m} \neq 1 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $0 \leq m < 1, m \neq \frac{1}{2}$ thì pt $P = m$ có nghiệm.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

Tìm các giá trị của m để pt $(\sqrt{x}+1)P = m - x$ có nghiệm.

Giải. Với $x \geq 0; x \neq 1$, ta có $(\sqrt{x}+1)P = m - x$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \cdot (\sqrt{x}+1) = m - x \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - (m+1) = 0 \quad (1)$$

+ Đặt $\sqrt{x} = t$, thì $t \geq 0, t \neq 1$, từ pt (1) ta có pt bậc hai ẩn t sau: $t^2 + t - (m+1) = 0$ (2).

$$\text{Có } \Delta = 1 + 4(m + 1) = 4m + 5$$

$$\text{Pt (2) có nghiệm khi } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-5}{4}$$

Gọi t_1, t_2 là nghiệm của pt (2), theo định lí viết ta có
$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -1 \\ t_1 \cdot t_2 = -(m + 1) \end{cases}$$

+ Do $t_1 + t_2 = -1 < 0 \Rightarrow$ pt (2) hoặc có hai nghiệm cùng âm hoặc có hai nghiệm trái dấu.

Vì $t \geq 0, t \neq 1$, để pt (2) có nghiệm thì
$$\begin{cases} t_1 \cdot t_2 \leq 0 \\ 1^2 + 1 - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(m + 1) \leq 0 \Rightarrow m \geq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy $m \geq -1; m \neq 1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 4}$ và $B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 4} + \frac{5\sqrt{x} + 12}{x - 16}$ với $x > 0; x \neq 16$

1) Tính giá trị của A khi $x = 25$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 4}$

3) Tìm giá trị của m để pt $\frac{A}{B} = m + 1$ có nghiệm.

Bài 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3} - \frac{7\sqrt{x} - 9}{x - 9}$ với $x > 0; x \neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3}$

3) Tìm giá trị của m để pt $\frac{A}{B} = m - 2$ có nghiệm.

Hết

Phong Vân, ngày 5/9/2020

CHỦ ĐỀ 2:**PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH****A. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN****1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM**

a. Phương trình bậc hai một ẩn có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ (*) trong đó x là ẩn; a, b, c là các hệ số cho trước với ($a \neq 0$).

Cách giải:

+ Nếu $c = 0$, ta có phương trình: $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$

+ Nếu $b = 0$, ta có phương trình: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$

$$\text{Khi } -\frac{c}{a} > 0 \text{ thì } x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Khi $-\frac{c}{a} < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $b \neq 0; c \neq 0$, biến đổi phương trình về dạng: $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \end{cases}$

b. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Để giải phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

* Biệt thức Delta: $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm **phân biệt**:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

* Lưu ý: nếu $a.c < 0$ (a, c trái dấu) thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

c. Công thức nghiệm thu gọn

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và $b = 2b'$

Tính biệt thức: $\Delta' = b'^2 - ac$

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a}$

Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

d. Hệ thức Viet và ứng dụng

+ Định lý Viet: nếu $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

thì tổng và tích của hai nghiệm là:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

+ Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$. (Điều kiện để có hai số đó là: $S^2 - 4P \geq 0$).

e. Cách nhẩm nghiệm của phương trình:

+ Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$.

+ Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$.

+ Nếu nhẩm được: $x_1 + x_2 = m + n; x_1 x_2 = mn$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = m, x_2 = n$.

f. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

1. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

2. Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

3. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

4. Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$

5. Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

6. Phương trình có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

$$7. \text{ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

$$8. \text{ Phương trình có 2 nghiệm âm} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

$$9. \text{ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

$$10. \text{ Phương trình có 2 nghiệm đối nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S = 0 \end{cases}$$

$$11. \text{ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa } x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \end{cases}$$

$$12. \text{ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa } \alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases}$$

$$13. \text{ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa } x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} < \alpha \end{cases}$$

g. Các biểu thức thường gặp trong việc giải toán phương trình bậc hai chứa tham số ($\Delta \geq 0$):

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2p$
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4p$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3Sp$
- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2p)^2 - 2p^2$
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{p}$
- $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{S^2 - 2p}{p}$

Đây là một số biểu thức căn bản nhất, thường xuất hiện trong các bài toán phương trình bậc hai có thức tham số, nằm trong cấu trúc đề thi vào 10. Do đó, các em cần nắm vững những kiến thức này, để có thể vận dụng thuần thục, giúp biến đổi các loại biểu thức khác để giải quyết bài toán một cách đơn giản hơn.

2. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Phương trình bậc hai không có tham số

1. Phương trình bậc hai ($a \neq 0$) dạng khuyết hạng tử bậc nhất ($b=0$), ta có phương trình: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$

Khi $-\frac{c}{a} > 0$ thì $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

Khi $-\frac{c}{a} < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Phương trình bậc hai dạng khuyết hạng tử tự do ($c=0$), ta có phương trình:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

3. Phương trình bậc hai có đầy đủ các hạng tử ($b \neq 0; c \neq 0$):

Ta biến đổi phương trình về dạng: $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \end{cases}$

Ví dụ minh họa 1: Chỉ ra các hệ số a, b, c trong mỗi phương trình, sau đó giải phương trình:

a. $3x^2 + 5x = 0$

b. $x^2 - 16 = 0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2 + 5x = 0$, có hệ số $a = 3$; $b = 5$ và $c = 0$.

$$3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x = 0$; $x = -\frac{5}{3}$.

b. Phương trình $x^2 - 16 = 0$, có hệ số $a = 1$; $b = 0$ và $c = -16$.

$$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x = -4$; $x = 4$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Rồi chỉ ra các hệ số a, b, c ?

a. $3x^2 + 3x + 5 = 5x + 1$

b. $\frac{3}{4}x^2 - 4x - 3 = 3x + \frac{1}{3}$

c. $-\sqrt{5}x^2 + x - 1 = \sqrt{5}x + 3$

d. $x^2 - 3(k-2)x - 8 = 1 - k^2$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. $x^2 - 5x = 0$

b. $2x^2 - 32 = 0$

c. $3x^2 + 4 = 0$

d. $2x^2 + \sqrt{2}x = 0$

Bài 3: Đưa các phương trình sau bằng cách chuyển về dạng $f(x)^2 = m$ với m là hằng số:

a. $x^2 - 10x + 9 = 0$

b. $x^2 + 2x - 3 = 0$

c. $x^2 + 2x + 7 = 0$

d. $4x^2 - 7x + 3 = 0$

Hướng dẫn giải:

Bài 1: Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Rồi chỉ ra các hệ số a, b, c ?

a. Phương trình $3x^2 + 3x + 5 = 5x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 4 = 0$ có hệ số $a = 3; b = -2; c = 4$.

b. Phương trình $\frac{3}{4}x^2 - 4x - 3 = 3x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - 7x - \frac{10}{3} = 0$ có hệ số $a = \frac{3}{4}; b = -7;$
 $c = -\frac{10}{3}$.

c. Phương trình $-\sqrt{5}x^2 + x - 1 = \sqrt{5}x + 3 \Leftrightarrow -\sqrt{5}x^2 + (1 - \sqrt{5})x - 4 = 0$ có hệ số $a = -\sqrt{5};$
 $b = 1 - \sqrt{5}; c = -4$.

d. Phương trình $x^2 - 3(k - 2)x - 8 = 1 - k^2 \Leftrightarrow x^2 - 3(k - 2)x + k^2 - 9 = 0$ có hệ số $a = 1;$
 $b = k - 2; c = k^2 - 9$.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. Phương trình $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x = 0, x = 5$.

b. Phương trình $2x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 16 \end{cases}$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x = 0, x = 16$.

c. Phương trình $3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -4$

$VT = 3x^2 \geq 0$ với mọi x , $VP = -4 < 0$. Do đó, phương trình $3x^2 = -4$ vô nghiệm.

d. Phương trình $2x^2 + \sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x(\sqrt{2}x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Vậy, phương trình có hai nghiệm: $x = 0, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 3: Giải các phương trình sau bằng cách chuyển về dạng: $f(x)^2 = m$ với m là hằng số:

a. Phương trình $x^2 - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 16 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 16 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 4^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=4 \\ x-5=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=9$.

b. Phương trình $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=-3$.

c. Phương trình $x^2 + 2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -6 \Leftrightarrow (x+1)^2 = -6 \text{ không có giá trị } x \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

d. Phương trình $4x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 7x + \frac{49}{16} - \frac{1}{16} = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 7x + \frac{49}{16} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(2x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(2x - \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} \\ 2x - \frac{7}{4} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 2x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=\frac{3}{4}$.

Dạng 2. Giải phương trình bằng công thức nghiệm

1. Giải phương trình bậc hai bằng công thức nghiệm:

Để giải phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

* Biệt thức Delta: $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm **phân biệt**:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

* Lưu ý: nếu $a.c < 0$ (a, c trái dấu) thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

2. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và $b = 2b'$

Tính biệt thức: $\Delta' = b'^2 - ac$

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ minh họa 1: Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c, rồi tính biệt thức delta (Δ) và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

a. $3x^2 + 5x + 2 = 0$

b. $x^2 - 5x + 9 = 0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2 + 5x + 2 = 0$, có hệ số $a = 3$; $b = 5$ và $c = 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.3.2 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $x^2 - 5x + 9 = 0$, có hệ số $a = 1$; $b = -5$ và $c = 9$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.9 = 25 - 36 = -11 < 0$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ minh họa 2: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm.

a. $3x^2 - 5x + 8 = 0$

b. $5x^2 - 3x - 2 = 0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2 - 5x + 8 = 0$, có hệ số $a = 3$; $b = -5$ và $c = 8$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.3.8 = 25 - 96 = -71 < 0$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $5x^2 - 3x - 2 = 0$, có hệ số $a = 5$; $b = -3$ và $c = -2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.5.(-2) = 9 + 40 = 49 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - 7}{2.5} = -\frac{2}{5}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + 7}{2.5} = 1$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -\frac{2}{5}$; $x_2 = 1$.

Ví dụ minh họa 3: Với giá trị nào của m thì:

a. Phương trình $3x^2 + (m+1)x + 5 = 0$ có nghiệm $x = 1$.

b. Phương trình $mx^2 - 4x - 3 = 0$ có nghiệm kép? Tìm nghiệm đó.

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2 + (m+1)x + 5 = 0$ có nghiệm $x = 1$

Thay $x = 1$ vào phương trình đã cho:

$$3.1^2 + (m+1).1 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3 + m + 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -9$$

Vậy, với $m = -9$ thì phương trình có nghiệm $x = 1$.

b. Phương trình $mx^2 - 4x - 3 = 0$.

Với hệ số $a = m$, $\Delta = (-4)^2 - 4.m.(-3) = 16 + 12m$.

$$\text{Để phương trình có nghiệm kép} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 16 + 12m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$$

Với $m = -\frac{4}{3}$ thì phương trình có nghiệm kép, và

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.m} = -\frac{(-4)}{2.\left(-\frac{4}{3}\right)} = -\frac{3}{2}$$

Ví dụ minh họa 4: Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) luôn có hai nghiệm phân biệt nếu a, c trái dấu.

Áp dụng: Không giải phương trình, hãy cho biết mỗi phương trình sau có mấy nghiệm:

a. $(1 + \sqrt{2})x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0$

b. $5x^2 - 3mx - 1 - m^2 = 0$.

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $\Delta = b^2 - 4ac$.

Khi a, c trái dấu thì $ac < 0$, suy ra $-ac > 0$, do đó $-4ac > 0$.

Mặt khác: $b^2 \geq 0$ với mọi b.

Vì vậy, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Vậy, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt nếu a, c trái dấu. Điều này cũng đúng khi chứng minh với (Δ') .

Áp dụng:

a. Phương trình $(1 + \sqrt{2})x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0$ có hệ số $a = 1 + \sqrt{2} > 0$, hệ số $c = -\sqrt{3} < 0$.

Do đó, a và c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $5x^2 - 3mx - 1 - m^2 = 0$ có hệ số $a = 5 > 0$, hệ số $c = -1 - m^2 < 0$ với mọi m.

Do đó, a và c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ minh họa 5: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm thu gọn.

a. $3x^2 - 5x + 8 = 0$

b. $5x^2 - 3x - 2 = 0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2 - 5x + 8 = 0$, có hệ số $a = 3$; $b = -5 \Rightarrow b' = -\frac{5}{2}$ và $c = 8$.

$$\Delta' = (b')^2 - ac = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 3 \cdot 8 = \frac{25}{4} - 24 = -\frac{71}{4} < 0$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $5x^2 - 3x - 2 = 0$, có hệ số $a = 5$; $b = -3 \Rightarrow b' = -\frac{3}{2}$ và $c = -2$.

$$\Delta' = (b')^2 - ac = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 5 \cdot (-2) = \frac{9}{4} + 10 = \frac{49}{4} > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \frac{7}{2}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{2}}{5} = -\frac{2}{5}; \quad x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{7}{2}}{5} = 1$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -\frac{2}{5}$; $x_2 = 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c của phương trình. Tính biệt thức delta a và cho biết số nghiệm của phương trình:

a. $x^2 - 5x + 1 = 0$

b. $2x^2 - 9x + 10 = 0$

c. $2x^2 + 7x + 3 = 0$

d. $-x^2 + 6x - 9 = 0$

Bài 2: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:.

a. $x^2 - 8x + 17 = 0$

b. $\frac{1}{2}x^2 - 5x - 3 = 0$

c. $-x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$

d. $5x^2 + \sqrt{3}x - 2 = 0$

Bài 3: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. $3x^2 + \sqrt{2}x - 3 + \sqrt{2} = 0$

b. $5x^2 - 5\sqrt{2}x + \frac{5}{2} = 0$

c. $x^2 - (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

d. $x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$

Bài 4: Với giá trị nào của k thì các phương trình sau có nghiệm kép? Tính nghiệm kép đó.

a. $x^2 - 10x + k + 2 = 0$

b. $x^2 + kx - 3 = 0$

c. $x^2 + 2kx + 7 - k = 0$

d. $x^2 - (k+1)x - 1 = 0$

Hướng dẫn giải:

Bài 1: Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c của phương trình. Tính biệt thức delta Δ và cho biết số nghiệm của phương trình:

a. Phương trình $x^2 - 5x + 1 = 0$ có hệ số $a = 1$; $b = -5$ và $c = 1$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.1 = 25 - 4 = 21 > 0$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $2x^2 - 9x + 10 = 0$ có hệ số $a = 2$; $b = -9$ và $c = 10$.

$$\Delta = (-9)^2 - 4.2.10 = 81 - 80 = 1 > 0$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c. Phương trình $2x^2 + 7x + 3 = 0$ có hệ số $a = 2$; $b = 7$ và $c = 3$.

$$\Delta = (7)^2 - 4.2.3 = 49 - 24 = 25 > 0$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

d. Phương trình $-x^2 + 6x - 9 = 0$ có hệ số $a = -1$; $b = 6$ và $c = -9$.

$$\Delta = (6)^2 - 4.(-1).(-9) = 36 - 36 = 0$$

Vậy, phương trình có nghiệm kép.

Bài 2: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. Phương trình $x^2 - 8x + 17 = 0$, có hệ số $a = 1$; $b = -8$ và $c = 17$.

$$\Delta = (-8)^2 - 4.1.17 = 64 - 68 = -4 < 0$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình $\frac{1}{2}x^2 - 5x - 3 = 0$, có hệ số $a = \frac{1}{2}$; $b = -5$ và $c = -3$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3) = 25 + 6 = 31 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{31}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{31}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 5 - \sqrt{31} \text{ và } x_2 = \frac{5 + \sqrt{31}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 5 + \sqrt{31}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 5 - \sqrt{31}$; $x_2 = 5 + \sqrt{31}$

c. Phương trình $-x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$, có hệ số $a = -1$; $b = \sqrt{5}$ và $c = -1$.

$$\Delta = (\sqrt{5})^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 5 - 4 = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-(\sqrt{5}) - 1}{2 \cdot (-1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}; \quad x_2 = \frac{-(\sqrt{5}) + 1}{2 \cdot (-1)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$; $x_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

d. Phương trình $5x^2 + \sqrt{3}x - 2 = 0$, có hệ số $a = 5$; $b = \sqrt{3}$ và $c = -2$.

$$\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 3 + 40 = 43 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{43}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-(\sqrt{3}) - \sqrt{43}}{2 \cdot 5} = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{43}}{10}; \quad x_2 = \frac{-(\sqrt{3}) + \sqrt{43}}{2 \cdot 5} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{43}}{10}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{43}}{10}$; $x_2 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{43}}{10}$

Bài 3: Giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm:

a. Phương trình $3x^2 + \sqrt{2}x - 3 + \sqrt{2} = 0$ có

$$\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3 + \sqrt{2}) = 2 + 36 - 12\sqrt{2} = (6 - \sqrt{2})^2 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6 - \sqrt{2}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-(\sqrt{2}) - (6 - \sqrt{2})}{2.3} = \frac{-6}{6} = -1; \quad x_2 = \frac{-(\sqrt{2}) + (6 - \sqrt{2})}{2.3} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{6} = \frac{3 - \sqrt{2}}{3}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{3 - \sqrt{2}}{3}$

b. Phương trình $5x^2 - 5\sqrt{2}x + \frac{5}{2} = 0$ có

$$\Delta = (-5\sqrt{2})^2 - 4.5.\frac{5}{2} = 50 - 50 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-(-5\sqrt{2})}{2.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. Phương trình $x^2 - (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$ có:

$$\Delta = [-(1 - \sqrt{3})]^2 - 4.1.(-\sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{[-(1 - \sqrt{3})] - (1 + \sqrt{3})}{2.1} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}; \quad x_2 = \frac{[-(1 - \sqrt{3})] + (1 + \sqrt{3})}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x_1 = -\sqrt{3}$ và $x_2 = 1$

d. Phương trình $x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$ có:

$$\Delta = [-(\sqrt{3} - \sqrt{2})]^2 - 4.1.(-\sqrt{6}) = 5 - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-\left[-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right] - (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2.1} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2};$$

$$x_2 = \frac{-\left[-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right] + (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2.1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x_1 = -\sqrt{2}$ và $x_2 = \sqrt{3}$

Bài 4: Tìm m để phương trình có nghiệm kép

a. Phương trình $x^2 - 10x + k + 2 = 0$ có:

$$\Delta = (-10)^2 - 4.1.(k+2) = 100 - 4k - 8 = 92 - 4k$$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 92 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 23$

Vậy, với $k = 23$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 5$

b. Phương trình $x^2 + kx - 3 = 0$ có:

$\Delta = k^2 - 4.1.(-3) = k^2 + 12 > 0$ với mọi k . Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, không có giá trị k thỏa mãn điều kiện bài toán.

c. Phương trình $x^2 + 2kx + 7 - k = 0$ có:

$$\Delta = (2k)^2 - 4.1.(7-k) = 4k^2 + 4k - 28$$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k - 28 = 0(*)$

Giải phương trình $4k^2 + 4k - 28 = 0(*)$ ta được $k = \frac{-1-\sqrt{29}}{2}$; $k = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$

Vậy, với $k = \frac{-1-\sqrt{29}}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

với $k = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

d. Phương trình $x^2 - (k+1)x - 1 = 0$ có:

$$\Delta = [-(k+1)]^2 - 4.1.(-1) = (k+1)^2 + 4 > 0 \text{ với mọi } k.$$

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi k .

Vậy, không có giá trị k thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 3: Ứng dụng hệ thức Viét

1. Không giải phương trình, tính tổng và tích các nghiệm số

+ **Định lý Viét:** nếu $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

thì tổng và tích của hai nghiệm là:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

2. Giải phương trình bằng phương pháp tính nhẩm nghiệm

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số thỏa mãn:

+ Trường hợp: $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

+ Trường hợp: $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

3. Tính giá trị biểu thức đối xứng giữa các nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình

Để làm dạng toán này các em cần nhớ một số biểu thức sau:

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$
- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$
- $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$

4. Lập phương trình bậc hai khi biết tổng và tích của hai nghiệm phương trình:

Nếu u và v là hai số cần tìm có $\begin{cases} u+v=S \\ u.v=P \end{cases}$ thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$

(Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$)

Ví dụ minh họa 1: Không giải phương trình, dùng hệ thức Vi-ét hãy tính tổng và tích các nghiệm của mỗi phương trình sau:

a. $3x^2 - 11x + 4 = 0$

b. $x^2 - 3\sqrt{7}x + 2\sqrt{3} = 0$

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình $3x^2 - 11x + 4 = 0$ có $\Delta = (-11)^2 - 4.3.4 = 121 - 48 = 73 > 0$.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{11}{3}; x_1.x_2 = \frac{4}{3}$.

b. Phương trình $x^2 - 3\sqrt{7}x + 2\sqrt{3} = 0$ có $\Delta = (-3\sqrt{7})^2 - 4.1.2\sqrt{3} = 63 - 8\sqrt{3} > 0$.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 3\sqrt{7}; x_1.x_2 = 2\sqrt{3}$.

Ví dụ minh họa 2:

a. Chứng tỏ rằng phương trình $7x^2 - 3x - 54 = 0$ có một nghiệm là 3. Tìm nghiệm còn lại.

b. Cho phương trình $4x^2 + 3x + m^2 - 5 = 0$. Biết phương trình có nghiệm $x = -1$, hãy dùng hệ thức Vi-ét để tìm nghiệm còn lại của phương trình, từ đó tính giá trị của m .

Hướng dẫn giải:

a. Thay $x_1 = 3$ vào phương trình $7x^2 - 3x - 54 = 0$ được:

$$7(3)^2 - 3(3) - 54 = 63 - 9 - 54 = 0 \text{ nên } x_1 = 3 \text{ là một nghiệm của phương trình.}$$

Theo định lý Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = \frac{3}{7} \Leftrightarrow 3 + x_2 = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{7} - 3 = -\frac{18}{7}$.

b. Phương trình $4x^2 + 3x + m^2 - 5 = 0$ có nghiệm $x = -1$.

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow -1 + x_2 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$$

Cũng theo hệ thức Vi ét: $x_1 x_2 = \frac{m^2 - 5}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (-1) = \frac{m^2 - 5}{4} \Leftrightarrow -1 = m^2 - 5 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy, với $m = 2$ hoặc $m = -2$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$

Ví dụ minh họa 3: Cho phương trình: $3x^2 + 5x - 6 = 0$ có nghiệm $x_1; x_2$.

Không tính giá trị của $x_1; x_2$, hãy lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là u và v.

Biết $u = x_1 + \frac{1}{x_2}$ và $v = x_2 + \frac{1}{x_1}$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình: $3x^2 + 5x - 6 = 0$ có hệ số $a = 3 > 0$; $c = -6 < 0$. Do đó tích $a.c < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo Định lý vi ét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{3}$ và $x_1 x_2 = -2$. Khi đó:

$$\begin{aligned} u + v &= x_1 + \frac{1}{x_2} + x_2 + \frac{1}{x_1} & uv &= \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) \\ &= (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}\right) & &= x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} + 2 \\ & & \text{và} & \\ &= (x_1 + x_2) + \left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right) & &= -2 + \frac{1}{-2} + 2 \\ &= -\frac{5}{3} + \frac{5}{6} = -\frac{5}{6} & &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy, u và v là nghiệm của phương trình: $X^2 + \frac{5}{6}X - \frac{1}{2} = 0$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Không giải phương trình, hãy dùng hệ thức Vi ét, tính tổng và tích các nghiệm của các phương trình sau:

a. $2x^2 + 5x + 3 = 0$

b. $3x^2 - 11x + 4 = 0$

c. $x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

d. $(\sqrt{7} - \sqrt{3})x^2 + 2x + \sqrt{7} + \sqrt{3} = 0$

Bài 2: Dùng điều kiện $a + b + c = 0$, hoặc $a - b + c = 0$ để nhằm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a. $3x^2 - 4x + 1 = 0$

b. $-4x^2 - 3x + 7 = 0$

c. $x^2 + (1 + \sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0$

d. $3x^2 - (3 + \sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0$

e. $(\sqrt{3} - 2)x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 2 = 0$

f. $(5 - \sqrt{2})x^2 - 10x + 5 + \sqrt{2} = 0$

Bài 3:

a. Cho phương trình $2x^2 + 5x + 2 = 0$. Biết phương trình có một nghiệm $x = -2$. Sử dụng định lý Vi ét để tìm nghiệm còn lại.

b. Cho phương trình $-3x^2 + 5x + 12 = 0$. Chứng tỏ phương trình có một nghiệm $x = 3$. Sử dụng định lý Vi ét để tìm nghiệm còn lại.

Bài 4: Hãy sử dụng hệ thức Vi ét để tìm nghiệm còn lại và tham số m trong mỗi phương trình sau:

a. Phương trình $3x^2 - 10x + 3m + 1 = 0$, biết phương trình có nghiệm $x_1 = \frac{7}{3}$

b. Phương trình $4x^2 - 2x + m - 3 = 0$, biết phương trình có nghiệm $x_1 = 3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a. Phương trình $2x^2 + 5x + 3 = 0$ có $\Delta = 5^2 - 4.2.3 = 25 - 24 = 1 > 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$; $x_1 x_2 = \frac{3}{2}$.

b. Phương trình $3x^2 - 11x + 4 = 0$ có $\Delta = 11^2 - 4.3.4 = 121 - 48 = 73 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 + x_2 = \frac{11}{3}$; $x_1 x_2 = \frac{4}{3}$.

c. Phương trình $x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ có

$$\Delta' = (1 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4 + \sqrt{3} > 0.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 + x_2 = -2(1 + \sqrt{3})$; $x_1 x_2 = \sqrt{3}$.

d. Phương trình $(\sqrt{7} - \sqrt{3})x^2 + 2x + \sqrt{7} + \sqrt{3} = 0$ có

$$\Delta = 2^2 - 4(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = 4 - 4(7 - 3) = -12 < 0.$$

Phương trình vô nghiệm.

Bài 2: Dùng điều kiện $a + b + c = 0$, hoặc $a - b + c = 0$ để nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a. Phương trình $3x^2 - 4x + 1 = 0$ có $a + b + c = 3 + (-4) + 1 = 0$. Nên có nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{1}{3}$

b. Phương trình $-4x^2 - 3x + 7 = 0$ có $a + b + c = (-4) + (-3) + 7 = 0$. Nên có nghiệm $x = 1$ và $x = -\frac{7}{4}$.

c. Phương trình $x^2 + (1 + \sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0$ có $a - b + c = 1 - (1 + \sqrt{5}) + \sqrt{5} = 0$. Nên có nghiệm $x = -1$ và $x = \sqrt{5}$.

d. Phương trình $3x^2 - (3 + \sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0$ có $a + b + c = 3 - (3 + \sqrt{5}) + \sqrt{5} = 0$. Nên có nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

e. Phương trình $(\sqrt{3} - 2)x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 2 = 0$ có $a - b + c = \sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2 = 0$.

Nên có nghiệm $x = -1$ và $x = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 2}$.

f. Phương trình $(5-\sqrt{2})x^2 - 10x + 5 + \sqrt{2} = 0$ có $a+b+c = 5-\sqrt{2} + (-10) + 5 + \sqrt{2} = 0$.

Nên có nghiệm $x=1$ và $x = \frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$

Bài 3:

a. Cho phương trình $2x^2 + 5x + 2 = 0$. Biết phương trình có một nghiệm $x = -2$.

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow -2 + x_2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$

b. Cho phương trình $-3x^2 + 5x + 12 = 0$. Chứng tỏ phương trình có một nghiệm $x = 3$.

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow -2 + x_2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$

Bài 4:

a. Phương trình $3x^2 - 10x + 3m + 1 = 0$. Phương trình có nghiệm $x_1 = \frac{7}{3}$

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{3} + x_2 = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x_2 = 1$

Khi đó, $x_1 x_2 = \frac{3m+1}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{3} = \frac{3m+1}{3} \Leftrightarrow 3m+1 = 7 \Leftrightarrow m = 2$

Vậy, với $m = 2$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = \frac{7}{3}$ và nghiệm còn lại $x_2 = 1$.

b. Phương trình $4x^2 - 2x + m - 3 = 0$, biết phương trình có nghiệm $x_1 = 3$.

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 + x_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{2}$

Khi đó, $x_1 x_2 = \frac{m-3}{4} \Leftrightarrow -\frac{15}{2} = \frac{m-3}{4} \Leftrightarrow m-3 = 30 \Leftrightarrow m = -27$

Vậy, với $m = -27$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 3$ và nghiệm còn lại $x_2 = -\frac{5}{2}$.

Dạng 4. Giải và biện luận phương trình bậc hai có chứa tham số

Cho phương trình bậc hai có chứa tham số, thường là tham số m có dạng:

$$f(x, m) = 0.$$

1. Giải phương trình khi biết giá trị của tham số

Phương pháp: Thay giá trị m vào phương trình để tìm nghiệm.

2. Tìm tham số khi biết nghiệm x_0 của phương trình

+ Thay x_0 vào phương trình, ta tìm được giá trị m .

+ Kiểm tra xem giá trị m có thoả mãn điều kiện bài toán không. Nếu thoả mãn, ta kết luận đó là giá trị m cần tìm.

3. Tìm tham số m để phương trình bậc hai

+ Trong bài toán tìm tham số m để phương trình bậc hai thoả mãn điều kiện về số nghiệm, mối quan hệ giữa các nghiệm,...

Ta cần phân tích yêu cầu bài toán để xác định đúng các điều kiện cần thiết. Nếu tham số m có mặt ở hệ số a , ta cần phải chú ý điều kiện tương ứng của nó.

Các dạng toán thường gặp khi có tham số là tìm m để phương trình:

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$	Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$
Phương trình (*) có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt biệt âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) < 0 \end{cases}$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) < 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases}$
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} < \alpha \end{cases}$	Phương trình có 1 nghiệm: có 2 TH + Phương trình có một nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$



	+ PT có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$
--	---

4. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số.

Phương pháp: Biểu thức liên hệ không phụ thuộc m là biểu thức không có chứa tham số m . Áp dụng hệ thức Vi ét gồm tổng và tích của hai nghiệm. Biểu diễn tham số m theo các nghiệm (rút m).

Ví dụ minh họa 1: Cho phương trình: $x^2 - (2m+3)x + m = 0$

- Giải phương trình với $m = 2$
- Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m
- Viết hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 mà không phụ thuộc vào m .

Hướng dẫn giải:

Phương trình : $x^2 - (2m+3)x + m = 0$ (1)

a. Với $m = 2$, phương trình (1): $x^2 - 7x + 2 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4.1.2 = 41 > 0$, nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{41}}{2}; x_2 = \frac{7 - \sqrt{41}}{2}.$$

b. Phương trình : $x^2 - (2m+3)x + m = 0$ (1) có

$$\Delta = (2m+3)^2 - 4.1.m = 4m^2 + 12m + 9 - 4m$$

$$= 4m^2 + 8m + 9 = 4m^2 + 8m + 4 + 5$$

$$= (2m+2)^2 + 5 > 0 \text{ với mọi } m.$$

Vậy, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

c. Theo câu b. Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Nên áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 3 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$

Thay $m = x_1 x_2$ vào $x_1 + x_2 = 2x_1 x_2 + 3$ (*)

Vậy, biểu thức liên hệ giữa $x_1; x_2$ không phụ thuộc m là $x_1 + x_2 = 2x_1 x_2 + 3$ (*).

Ví dụ minh họa 2: Cho phương trình : $mx^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$

- Xác định m để phương trình có một nghiệm duy nhất.
- Xác định m để phương trình có một nghiệm.
- Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 3$

Hướng dẫn giải:

Phương trình : $mx^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$

- Để phương trình có một nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -2(m+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy, với $m = 0$ thì phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

- Để phương trình có một nghiệm

$$\text{TH1: } \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -2(m+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ ((m+1)^2 - m(m-5)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 2m + 1 - m^2 + 5m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 7m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -\frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{7}$$

Vậy, khi $m = 0$ hoặc $m = -\frac{1}{7}$ thì phương trình có một nghiệm.

c. Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 3$

Để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m+1)^2 - m(m-5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 2m + 1 - m^2 + 5m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 7m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -\frac{1}{7} \end{cases}$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$:

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m-5}{m} \end{cases}$$

Theo đề ra: $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 3 \Leftrightarrow x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = 3 \Leftrightarrow x_1 x_2 + (x_1 + x_2) = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{m-5}{m} + \frac{2m+1}{m} = 2 \Leftrightarrow \frac{3m-4}{m} = 2 \Leftrightarrow 3m-4 = 2m \Leftrightarrow m = 4 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Kết luận: Vậy với $m = 4$ thì phương trình có hai nghiệm thỏa điều kiện bài toán.

Lưu ý:

Ở câu này, học sinh chú ý, do mức độ phong phú của Tiếng Việt nên gặp đề yêu cầu phương trình có MỘT NGHIỆM (hoặc MỘT NGHIỆM DUY NHẤT) thì các em cần phân biệt chính xác.

Nếu đề yêu cầu phương trình có 1 nghiệm thì sẽ có hai trường hợp thỏa mãn là:



Phương trình có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hoặc phương trình có nghiệm kép

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

Nếu đề yêu cầu phương trình có 1 nghiệm duy nhất thì chỉ có trường hợp

$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ là đúng. Nếu đề yêu cầu phương trình có nghiệm kép thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$.

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1} = \frac{13}{4}$
- Viết hệ thức liên hệ giữa x_1 ; x_2 mà không phụ thuộc vào tham số m.

Bài 2: Cho phương trình : $x^2 - 5x + 2m - 1 = 0$

- Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt
- Tìm m để $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{19}{3}$

Bài 3: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$

- Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt
- Tìm GTNN của biểu thức $A = 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Phương trình: $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$.

Có $\Delta' = (-m)^2 - 1(4m - 4) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 \geq 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$.

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = 4m - 4 \end{cases}$

a. Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1} = \frac{13}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_1 + x_2^2 + x_2}{x_1x_2} = \frac{13}{4} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_1 + x_2)}{x_1x_2} = \frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2m)^2 - 2(4m - 4) + (2m)}{4m - 4} = \frac{13}{4} \Leftrightarrow \frac{4m^2 - 6m + 8}{m - 1} = 13$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2 - 6m + 8}{m - 1} - 13 = 0 \Leftrightarrow \frac{4m^2 - 6m + 8 - 13(m - 1)}{m - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2 - 19m + 21}{m-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 19m + 21 = 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -\frac{7}{4} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

Vậy, với $m = 3$ hoặc $m = -\frac{7}{4}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$\frac{x_1+1}{x_2} + \frac{x_2+1}{x_1} = \frac{13}{4}.$$

b. Phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m , ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 4m - 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ m = \frac{x_1 x_2 + 4}{4} \end{cases}. \text{ Suy ra } \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_1 x_2 + 4}{4} \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = x_1 x_2 + 4 (*)$$

Vậy, biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m là:
 $2(x_1 + x_2) = x_1 x_2 + 4 (*)$.

Bài 2. Phương trình : $x^2 - 5x + 2m - 1 = 0$

a. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (-5)^2 - 4.1.(2m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -8m + 29 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{29}{8}$$

Vậy, với $m < \frac{29}{8}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình có hai nghiệm $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{19}{3}$

Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{29}{8}$, khi đó:

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 2m - 1 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{19}{3} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{19}{3} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} - \frac{19}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5)^2 - 2(2m - 1)}{2m - 1} - \frac{19}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{75 - 12m + 6 - 38m + 19}{3(2m - 1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{75 - 12m + 6 - 38m + 19}{3(2m - 1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-50m + 100}{3(2m - 1)} = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy, với $m = 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa điều kiện.

Bài 3. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$

a. Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ ((m+1)^2 - (2m+10)) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - 2m - 10 > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases}$$

Vậy, với $m < -3$ hoặc $m > 3$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt,

b. Tìm GTNN của biểu thức $A = 10x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2$

Tìm GTNN của biểu thức $A = 10jCj jr2 + X2 + x22$

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$ Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m + 10 \end{cases}, \text{ thay vào biểu thức}$$

$$A = 10x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 8x_1 x_2$$

$$A = 4(m+1)^2 + 8(2m+10) = 4m^2 + 8m + 4 + 16m + 80$$

$$A = 4m^2 + 24m + 84$$

$$A = 4(m+3)^2 + 48 \geq 48 \text{ với mọi giá trị } m \text{ thuộc } \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $A_{\min} = 48 \Leftrightarrow m = -3$.

Dạng 5. Một số dạng toán khác liên quan phương trình bậc hai

1. Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức hàm số bậc hai:

$$M = ax^2 + bx + c \text{ với } (a \neq 0).$$

$$+ \text{ Ta tính được } x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ và } f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$$

$$+ \text{ Biến đổi: } M = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$$

$$+ \text{ Nếu } a > 0 \Rightarrow M_{\min} = f(x_0), \text{ xảy ra khi và chỉ khi } x = x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

$$+ \text{ Nếu } a < 0 \Rightarrow M_{\max} = f(x_0), \text{ xảy ra khi và chỉ khi } x = x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

2. Bài toán đồ thị hàm số bậc hai (Parabol)

Đồ thị hàm $y = ax^2 + bx + c$ với $(a \neq 0)$ là parabol (P) .

Đồ thị hàm số $y = mx + n$ là đường thẳng (d) .

+ Biện luận sự tương giao của hai đồ thị là biện luận số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$ax^2 + bx + c = mx + n \quad (1)$$

+ Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

+ Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì (d) tiếp xúc với (P) . Khi đó, ta gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị (P) , và hoành độ tiếp điểm chính là nghiệm kép của phương trình.

+ Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì (d) không cắt (P) .

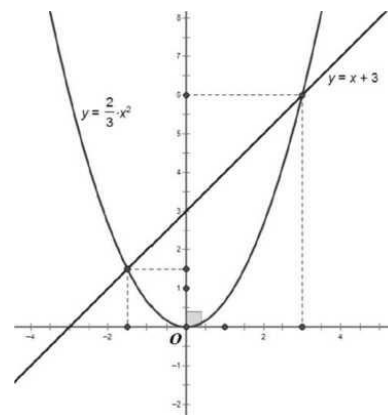
Ví dụ minh họa 1: Xác định tọa độ giao điểm của (P): $y = \frac{2}{3}x^2$ và

(d): $y = x + 3$ bằng phương pháp đại số và đồ thị.

Hướng dẫn giải:

a. Đồ thị của parabol (P) và đường thẳng (d) được biểu diễn như hình vẽ.

Dựa vào đồ thị ta thấy, đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm có tọa độ (3; 6) và $(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$.



b. Tìm giao điểm bằng phương pháp đại số:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{2}{3}x^2 = x + 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 - x - 3 = 0, \text{ giải phương trình ta được nghiệm là } \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Với $x = 3$, thay vào (d) suy ra $y = 6$. Ta có giao điểm (3; 6).

Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào (d) suy ra $y = \frac{3}{2}$. Ta có giao điểm $(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$.

Ví dụ minh họa 2: Cho (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = -x + 3$

a. Xác định giao điểm của (P) và (d)

b. Viết phương trình đường thẳng (d') vuông góc với (d) và tiếp xúc với (P)

Hướng dẫn giải:

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$-x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0 \text{ có } \Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy, đường thẳng (d) không cắt parabol (P).

b. Viết phương trình đường thẳng (d') vuông góc với (d) và tiếp xúc với (P) .
 Đường thẳng (d') có dạng: $y = ax + b$

+ (d') vuông góc với (d) suy ra: $a(-1) = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow (d'): y = x + b$.

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (d') và (P) :

$$-x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 + x + b = 0 \quad (1)$$

(d') tiếp xúc với (P) nên (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{4}$

Vậy, phương trình đường thẳng $(d'): y = x + \frac{1}{4}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho $(P): y = ax^2$ ($a \neq 0$) và $(d): y = mx + n$

a. Tìm m, n biết (d) đi qua hai điểm $A(0; -1)$ và $B(3; 2)$

b. Tính a biết (d) tiếp xúc với (P) .

Bài 2: Cho $(P): y = \frac{1}{3}x^2$ và $(d): y = -x + 6$.

a. Hãy vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b. Xác định tọa độ giao điểm của chúng bằng đồ thị.

Bài 3: Chứng minh $(d): y = x + \frac{1}{2}$ và $(P): y = -\frac{1}{2}x^2$ tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm của chúng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Cho $(P): y = ax^2$ ($a \neq 0$) và $(d): y = mx + n$

a. Đường thẳng $(d): y = mx + n$ đi qua $A(0; -1) \Rightarrow -1 = m.0 + n \Leftrightarrow m = -1$

Đường thẳng $(d): y = mx + n$ đi qua $B(3; 2)$

$$\Rightarrow 2 = 3m + n \Leftrightarrow 2 = 3(-1) + n \Leftrightarrow n = 5$$

Vậy, đường thẳng $(d): y = -x + 5$

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và $(P): ax^2 = -x + 5$

$$\Leftrightarrow ax^2 + x - 5 = 0 \quad (*) \text{ với } (a \neq 0)$$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow ax^2 + x - 5 = 0 \quad (*)$ có nghiệm kép.

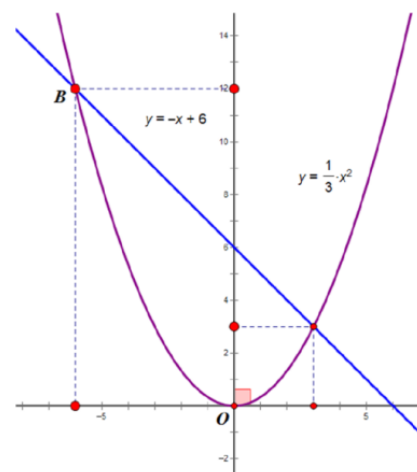
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 1 - 4.a.(-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 1 + 20a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{20}$$

Vậy, với $a = -\frac{1}{20}$ thì $(d): y = -x + 5$ tiếp xúc với $(P): y = -\frac{1}{20}x^2$

Bài 2: Cho $(P): y = \frac{1}{3}x^2$ và $(d): y = -x + 6$.

a. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ có đồ thị là parabol (P) . Có đỉnh $O(0;0)$, có trục đối xứng là Oy, và đi qua các điểm sau:

x	-3	0	3
$y = \frac{1}{3}x^2$	3	0	3



Hàm số $y = -x + 6$ có đồ thị là đường thẳng (d) đi qua các điểm $(0;6)$ và $(6;0)$.

b. Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại các điểm $(3;3)$ và $(-6;12)$.

Bài 3:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$-\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = 0 \text{ có } \Delta = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Do đó, phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép, hay đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P) .

Khi đó, phương trình có nghiệm là: $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$ suy ra $y = -\frac{1}{2}$

Vậy, toạ độ tiếp điểm là $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$

III. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Dạng 1. Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1) với $(a \neq 0)$.

Phương pháp giải:

+ Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$).

+ Đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai ẩn (t) là:

$$at^2 + bt + c = 0 (a \neq 0), (t \geq 0) \quad (2)$$

- + Giải phương trình (2) tìm (t), loại các giá trị $t < 0$, chỉ lấy các giá trị $t \geq 0$
- + Với $t \geq 0, t = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$ là nghiệm của phương trình (1).

Ví dụ 1: Giải phương trình $4x^4 - x^2 - 18 = 0$

Giải: Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 4t^2 - t - 18 = 0 (t \geq 0)$ (*)

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 18 = 289 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17$$

$$t_1 = \frac{1-17}{8} = -2 < 0 \text{ (loại); } t_2 = \frac{1+17}{8} = \frac{9}{4} > 0 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Với } t_2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{2}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\frac{3}{2}$.

Dạng 2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Thực hiện các bước sau:

- + Tìm điều kiện xác định của phương trình
- + Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu
- + Giải phương trình vừa nhận được
- + Loại các giá trị không thỏa mãn điều kiện. Các giá trị thỏa mãn điều kiện là nghiệm của PT.
- + Kết luận.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4} = \frac{1}{x + 2}$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$\text{Quy đồng mẫu thức ta được: } PT \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$$

$$\text{Khử mẫu ta được: } x^2 - 3x + 1 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1; x = 3$.

Dạng 3. Phương trình tích

Phương trình tích là phương trình có dạng $A.B = 0$.

Cách giải: $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $(3x^2 - 5x - 2)(x^2 - 8) = 0$

Giải:

$$\text{Ta có: } (3x^2 - 5x - 2)(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải phương trình (1): } 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Giải phương trình (2): } x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{3}; x_3 = 2\sqrt{2}; x_4 = -2\sqrt{2}$.

Dạng 4. Phương pháp đặt ẩn phụ để quy về giải phương trình bậc hai

Ví dụ 4: Giải phương trình: $3(x^2 - 3x)^2 - 4(x^2 - 3x + 1) + 5 = 0$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Phương trình: } 3(x^2 - 3x)^2 - 4(x^2 - 3x + 1) + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(x^2 - 3x)^2 - 4(x^2 - 3x) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = (x^2 - 3x), \text{ ta có phương trình: } t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Với } t_1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0.$$

$$\text{Có nghiệm là: } x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Với } t_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 3x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 3x - \frac{1}{3} = 0.$$

$$\text{Có nghiệm là: } x_3 = \frac{9 + \sqrt{93}}{6}; x_4 = \frac{9 - \sqrt{93}}{6}$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là: } x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2};$$

$$x_3 = \frac{9 + \sqrt{93}}{6}; x_4 = \frac{9 - \sqrt{93}}{6}.$$

e. Dạng 5. Phương trình chứa căn thức

$$\text{Dạng: } \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\text{Dạng: } a.f(x) + b.\sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^2 + 4x - 7 + \sqrt{x^2 + 4x - 1} = 0$

Giải:

$$\text{Phương trình: } x^2 + 4x - 7 + \sqrt{x^2 + 4x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 + \sqrt{x^2 + 4x - 1} - 6 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 4x - 1} (t \geq 0)$, ta có phương trình:

$$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -3 \end{cases} \text{ loại nghiệm } t_2 = -3 \text{ vì không thỏa điều kiện,}$$

$$\text{Với } t_1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x - 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 4.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x_1 = 1; x_2 = -5$

f. Dạng 6. Phương trình dạng $A^2 + B^2 = 0$

$$\text{Phương pháp: } A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 6: Giải phương trình: $(x^2 - x)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$

Giải:

$$\text{Phương trình: } (x^2 - x)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. $x(x-1)(x-2)-x^3+1=0$

b. $(x+6)^2-4x+7=2(x+3)^2$

c. $\frac{x+3}{4}-3=\frac{(x+5)(x-2)}{3}$

d. $\frac{(x+5)^2}{2}-\frac{x}{3}=\frac{(x-3)^2}{3}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. $x^4-6x^2-7=0$

b. $x^4-5x^2+4=0$

c. $\frac{9}{2}x^4+4x^2-\frac{1}{2}=0$

d. $4x^2-29+\frac{25}{x^2}=0$

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích:

a. $x^3-5x^2-2x+10=0$

b. $x^3-3x^2-3x+1=0$

c. $x^3-6x^2+6x-1=0$

d. $(2x^2-5x+1)^2-(x^2-5x+6)^2=0$

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a. Phương trình $x(x-1)(x-2)-x^3+1=0$

$$\Leftrightarrow x(x^2-3x+2)-x^3+1=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2x-x^3+1=0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=1$ và $x=-\frac{1}{3}$.

b. Phương trình $(x+6)^2-4x+7=2(x+3)^2$

$$\Leftrightarrow x^2+12x+36-4x+7=2(x^2+6x+9)$$

$$\Leftrightarrow x^2+12x+36-4x+7=2(x^2+6x+9)$$

$$\Leftrightarrow x^2+8x+43=2x^2+12x+18$$

$$\Leftrightarrow -x^2-4x+25=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+\sqrt{29} \\ x=-2-\sqrt{29} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = -2 - \sqrt{29}$ và $x = -2 + \sqrt{29}$

c. Phương trình $\frac{x+3}{4} - 3 = \frac{(x+5)(x-2)}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3-12}{4} = \frac{x^2-2x+5x-10}{3} \Leftrightarrow \frac{x-9}{4} = \frac{x^2+3x-10}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-27}{12} = \frac{4x^2+12x-40}{12} \Leftrightarrow 3x-27 = 4x^2+12x-40$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+9x-13=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{13}{4} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=1$ và $x=-\frac{13}{4}$

d. Phương trình $\frac{(x+5)^2}{2} - \frac{x}{3} = \frac{(x-3)^2}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+10x+25}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x^2-6x+9}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+10x+25}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x^2-6x+9}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+30x+75-2x}{6} = \frac{2x^2-12x+18}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+30x+75-2x = 2x^2-12x+18$$

$$\Leftrightarrow x^2+40x+57=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-20+7\sqrt{7} \\ x=-20-7\sqrt{7} \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = -20 - 7\sqrt{7}$ và $x = -20 + 7\sqrt{7}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a. Phương trình $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$

Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 = 0$.

Ta thấy $a - b + c = 1 - (-6) + (-7) = 0$

Nên phương trình có nghiệm $t = -1$ (loại); $t = 7$ (thỏa)

Với $t = 7 \Rightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = \pm\sqrt{7}$.

b. Phương trình $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$.

Ta thấy $a + b + c = 1 + (-5) + 4 = 0$

Nên phương trình có nghiệm $t = 1$ (thỏa); $t = -7$ (loại).

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = \pm 1$.

c. Phương trình $\frac{9}{2}x^4 + 4x^2 - \frac{1}{2} = 0$

Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.

Phương trình $\frac{9}{2}t^2 + 4t - \frac{1}{2} = 0$

Ta thấy $a - b + c = \frac{9}{2} - 4 + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Nên phương trình có nghiệm $t = -1$ (loại); $t = \frac{1}{9}$ (thỏa)

Với $t = \frac{1}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{3}$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = \pm \frac{1}{3}$

d. Phương trình $4x^2 - 29 + \frac{25}{x^2} = 0$ có điều kiện: $x \neq 0$, ta có:

$$4x^2 - 29 + \frac{25}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^4 - 29x^2 + 25}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 29x^2 + 25 = 0$$

Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t > 0$.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 4t^2 - 29t + 25 = 0$$

$$\text{Ta thấy } a + b + c = 4 + (-29) + 25 = 0$$

Nên phương trình có nghiệm $t = 1$ (thỏa); $t = \frac{25}{4}$ (thỏa)

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Với } t = \frac{25}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{2}$$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm là: $x = \pm 1$; $x = \pm \frac{5}{2}$.

Bài 3. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích:

a. Phương trình $x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 5) - 2(x - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Phương trình có ba nghiệm $x = \pm\sqrt{2}$; $x = 5$.

b. Phương trình $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 1) - (3x^2 + 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) - 3x(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm là $x = -1$; $x = 2 - \sqrt{3}$; $x = 2 + \sqrt{3}$.

c. Phương trình $x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1) - (6x^2 - 6x) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)-6x(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-5x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-5x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{5+\sqrt{29}}{2} \\ x=\frac{5-\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm là: $x=1; x=\frac{5-\sqrt{29}}{2}; x=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$.

d. Phương trình $(2x^2-5x+1)^2-(x^2-5x+6)^2=0$

$$\Leftrightarrow (2x^2-5x+1-x^2+5x-6)(2x^2-5x+1+x^2-5x+6)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5)(3x^2-10x+7)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5=0 \\ 3x^2-10x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{5} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{7}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm là: $x=-\sqrt{5}; x=1; x=\sqrt{5}; x=\frac{7}{3}$

B: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

CHỦ ĐỀ 1: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

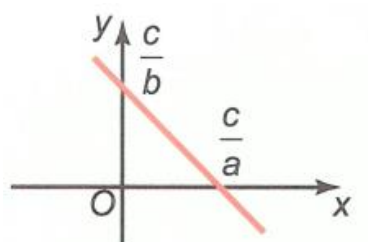
Phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm.

Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by=c$, $(a, b, c \in \mathbb{R}; a^2+b^2 \neq 0)$

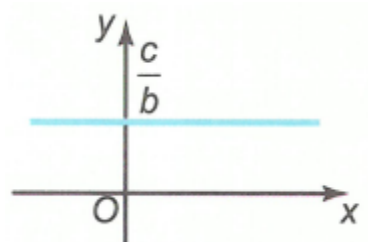
• Công thức nghiệm tổng quát

$$\left(x; \frac{c-ax}{b}\right), x \in \mathbb{R}, b \neq 0 \text{ hoặc } \left(\frac{c-by}{a}; y\right), y \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

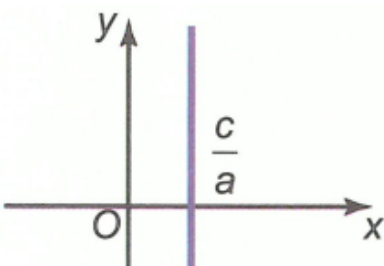
- $a \neq 0; b \neq 0 \Rightarrow$ Đường thẳng (d) là đồ thị hàm số $ax + by = c$ ($cb > 0; ca > 0$).



- $a = 0; b \neq 0 \Rightarrow$ Đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung ($cb > 0$).



- $a \neq 0; b = 0 \Rightarrow$ Đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành ($ca > 0$).



Hệ hai phương trình tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm

Hệ phương trình (HPT) bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad (a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}; a^2 + b^2 \neq 0; a'^2 + b'^2 \neq 0)$$

- *Số nghiệm của HPT*

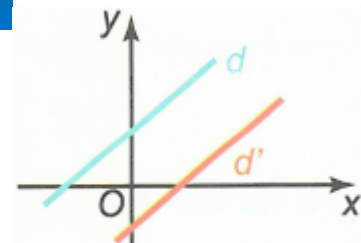
Số nghiệm của hệ chính là số giao điểm của hai đường thẳng:

$$(d): ax + by = c$$

$$(d'): a'x + b'y = c'$$

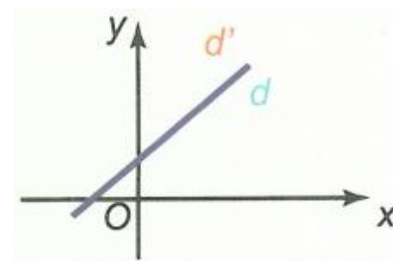
- (d) cắt $(d') \Rightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

- $(d) // (d') \Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$.



- $(d) \equiv (d') \Rightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$



1. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn không chứa hàm số

- **Phương pháp giải:**

- Phương pháp cộng đại số

Bước 1: Nhân hai vế của phương trình trong hệ với một hệ số thích hợp.

Bước 2: Cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình để được phương trình chỉ còn x hoặc y.

Bước 3: Giải tìm x, y.

Bước 4: Kết luận.

- Phương pháp thế:

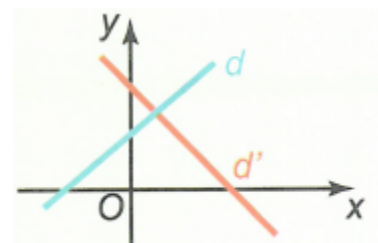
Bước 1: Từ một phương trình của hệ rút x theo y hoặc y theo x.

Bước 2: Thế vào phương trình còn lại.

Bước 3: Giải hệ phương trình mới.

Bước 4: Kết luận.

- Phương pháp đặt ẩn phụ:



Bước 1: Đặt điều kiện của phương trình.

Bước 2: Đặt ẩn phụ, điều kiện của ẩn phụ. Đưa hệ ban đầu về hệ mới.

Bước 3: Giải hệ mới tìm ẩn phụ.

Bước 4: Thay giá trị vào ẩn phụ tìm x và y .

Bước 5: Kết luận.

** Nếu hệ phương trình có biểu thức chứa căn hoặc phân thức chứa x và y thì phải có điều kiện xác định của hệ.*

• Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}.$$

(Đề thi vào lớp 10 tỉnh Bình Phước năm 2017 – 2018).

Giải chi tiết

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & (1) \\ 2x + y = 8 & (2) \end{cases}$$

Cách 1: Giải bằng phương pháp cộng đại số

Nhận xét: Bằng phương pháp cộng đại số, bài toán có hai hướng làm:

- Để hệ số x bằng nhau ta nhân hai vế của (1) với 2, nhân hai vế của (2) với 3.
- Để hệ số y bằng nhau đổi nhau ta nhân hai vế của (2) với 2.

Ở bài này, làm theo hướng 2:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}.$$

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình ta có: $7x = 21 \Leftrightarrow x = 3$.

Thay vào phương trình (2) ta được: $6 + y = 8 \Leftrightarrow y = 2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (3; 2)$.

Cách 2: Giải bằng phương pháp thế

Nhận xét: Ta nên rút y theo x ở phương trình hai của hệ, vì hệ số của y là 1.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow y = 8 - 2x$.

Thay $y = 8 - 2x$ vào (1) ta được: $3x - 2(8 - 2x) = 5 \Leftrightarrow 7x - 16 = 5 \Leftrightarrow 7x = 21 \Leftrightarrow x = 3$.

Với $x = 3$ thì $y = 8 - 2 \cdot 3 = 2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (3; 2)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x - 2(2y - 1) = 0 \\ 3x + 2y = 2(7 - x) \end{cases}$$

Giải chi tiết

Nhận xét: Hệ phương trình chưa có dạng bậc nhất hai ẩn nên bước đầu tiên chúng ta rút gọn các phương trình của hệ đưa về phương trình bậc nhất hai ẩn.

$$\begin{cases} 3x - 2(2y - 1) = 0 \\ 3x + 2y = 2(7 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -2 \\ 3x + 2y + 2x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -2 \\ 5x + 2y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -2 \\ 10x + 4y = 28 \end{cases}$$

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình ta có: $13x = 26 \Leftrightarrow x = 2$.

Thay $x = 2$ vào phương trình thứ hai: $5 \cdot 2 + 2y = 14 \Leftrightarrow y = 2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2; 2)$.

** Ta cũng có thể dùng phương pháp thế để giải hệ phương trình.*

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} & (1) \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải chi tiết

Nhân cả hai vế của (1) với $(\sqrt{2} + 1)$ ta được:

$$\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)x - (\sqrt{2} + 1)y = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (\sqrt{2} + 1)y = 2 + \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases}$$

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình ta có: $2x = 3 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$.

Thay $x = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$ vào (1): $\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{2}-1) - y = \sqrt{2} \Leftrightarrow y = \left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y) + (x+2y) = -2 \\ 3(x+y) + (x-2y) = 1 \end{cases}$$

Giải chi tiết

$$\begin{cases} (x+y) + (x+2y) = -2 \\ 3(x+y) + (x-2y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x+y+2y = -2 \\ 3x+x+3y-2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y = -2 & (1) \\ 4x+y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = 1 - 4x.$$

Thay $y = 1 - 4x$ vào (1) ta được: $2x + 3(1 - 4x) = -2 \Leftrightarrow 10x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Với $x = \frac{1}{2}$ thì $y = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(y+5) + 2y = xy + 9 \\ (3x+1)(2y-1) = 6xy \end{cases}$$

Giải chi tiết

$$\begin{cases} x(y+5) + 2y = xy + 9 \\ (3x+1)(2y-1) = 6xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 5x + 2y = xy + 9 \\ 6xy - 3x + 2y - 1 = 6xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 9 & (1) \\ -3x + 2y = 1 & (2) \end{cases}$$

Trừ các vế tương ứng của hai phương trình ta có: $8x = 8 \Leftrightarrow x = 1$.

Thay $x = 1$ vào phương trình thứ nhất: $5 \cdot 1 + 2y = 9 \Leftrightarrow y = 2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; 2)$.

** Hệ phương trình chưa có dạng bậc nhất hai ẩn nên bước đầu tiên chúng ta rút gọn các phương trình của hệ đưa về phương trình bậc nhất hai ẩn. Rút gọn xy ở cả hai vế của hai phương trình.*

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x - |y + 2| = 3 \\ x + 2|y + 2| = 3 \end{cases} \quad (I).$$

(Đề thi vào lớp 10 Thành phố Hà Nội năm 2018 – 2019)

Giải chi tiết

Đặt $t = |y + 2|$ (điều kiện: $t \geq 0$)

Ta có hệ:
$$\begin{cases} 4x - t = 3 \\ x + 2t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 2t = 6 \\ x + 2t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 9 \\ x + 2t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Với $t = 1$ thì $|y + 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2 = 1 \\ y + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -3 \end{cases}.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1; -1), (1; -3)$.

** Vì cả hai phương trình đều có $|y + 2|$ nên ta sẽ sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Hệ phương trình có trị tuyệt đối nên ta có thể chia hai trường hợp để phá dấu trị tuyệt đối để được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (nhưng cách này sẽ dài hơn cách đặt ẩn phụ).*

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - 3\sqrt{y+2} = 2 \\ 2\sqrt{x-1} + 5\sqrt{y+2} = 15 \end{cases}.$$

Giải chi tiết

Điều kiện xác định: $x \geq 1; y \geq -2$.

Đặt $a = \sqrt{x-1}; b = \sqrt{y+2} (a \geq 0; b \geq 0)$.

Ta có hệ:
$$\begin{cases} a - 3b = 2 \\ 2a + 5b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 6b = 4 \\ 2a + 5b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11b = 11 \\ a - 3b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 5 \\ \sqrt{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 25 \\ y+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 26 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(26; -1)$.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{|x+3|} + \frac{4}{|y|-2} = \frac{11}{6} \\ \frac{5}{|x+3|} - \frac{2}{|y|-2} = \frac{11}{6} \end{cases}.$$

Giải chi tiết

Điều kiện xác định: $x \neq -3; y \neq \pm 2$.

Đặt $a = \frac{1}{|x+3|}; b = \frac{2}{|y|-2} (a > 0; b > 0)$.

Ta có hệ:
$$\begin{cases} 2+2b = \frac{11}{6} \\ 5a-b = \frac{11}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b = \frac{11}{6} \\ 10a-2b = \frac{22}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11a = \frac{11}{2} \\ a+2b = \frac{11}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ 2b = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

$$a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x+3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 2 \\ x+3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$b = \frac{2}{3} \Leftrightarrow |y|-2 = 3 \Leftrightarrow |y| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-1; 5), (-1; -5), (-5; 5), (-5; -5)$.

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-y}} - \frac{21}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2x-y}} + \frac{7-x-y}{x+y} = 1 \end{cases}.$$

(Đề thi thử vào lớp 10 trường THCS&THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội năm 2018 – 2019)

Giải chi tiết

Nhận xét: Cả hai phương trình đều có $\frac{1}{\sqrt{2x-y}}$ nên đặt được ẩn phụ.

Ta biến đổi: $\frac{7-x-y}{x+y} = \frac{7-(x+y)}{x+y} = \frac{7}{x+y} - 1$. Vậy đặt $\frac{7}{x+y} = b, \frac{1}{\sqrt{2x-y}} = a$.

Điều kiện xác định: $2x > y$ và $x \neq -y$.

$$\begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-y}} - \frac{21}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2x-y}} + \frac{7-x-y}{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-y}} - \frac{21}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2x-y}} + \frac{7-(x+y)}{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-y}} - \frac{21}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2x-y}} + \frac{7}{x+y} - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-y}} - \frac{21}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2x-y}} + \frac{7}{x+y} = 2 \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{1}{\sqrt{2x-y}}$; $b = \frac{7}{x+y}$, ($a > 0$).

Ta có hệ: $\begin{cases} 4a - 3b = \frac{1}{2} \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 3b = \frac{1}{2} \\ 9a + 3b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a = \frac{13}{2} \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa

mãn).

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x-y}} = \frac{1}{2} \\ \frac{7}{x+y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 18 \\ y = 14 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là (6;8).

Dạng 2: Hệ phương trình chứa tham số

• Phương pháp giải

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Cách 1: Tìm (x; y) theo m, rồi tìm điều kiện của m.

Cách 2: + Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

+ Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

+ Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

• Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải chi tiết

Với $m = 0$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$, hệ có nghiệm.

Với $m \neq 0$. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{1}{m} \neq \frac{-m}{2} \Leftrightarrow -m^2 \neq 2 \Leftrightarrow m^2 \neq -2$ (luôn đúng).

Vậy phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi m .

* Khi lập tỉ số $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ nếu a' hoặc b' có tham số m thì ta phải xét thêm trường hợp $a' = 0$ hoặc $b' = 0$.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - 2y = 2m \\ -2x + y = m + 1 \end{cases}$. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm duy nhất đó.

Giải chi tiết

$$\text{Hệ } \begin{cases} mx - 2y = 2m & (1) \\ -2x + y = m + 1 & (2) \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{m}{-2} \neq \frac{-2}{1} \Leftrightarrow m \neq 4$.

Từ phương trình (2) ta có: $y = 2x + m + 1$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$mx - 2(2x + m + 1) = 2m \Leftrightarrow (m - 4)x = 4m + 2 \Leftrightarrow x = \frac{4m + 2}{m - 4}, (m \neq 4)$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot \left(\frac{4m + 2}{m - 4} \right) + m + 1 = \frac{m^2 + 5m}{m - 4}.$$

Vậy với $m \neq 4$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất là

$$(x; y) = \left(\frac{4m + 2}{m - 4}; \frac{m^2 + 5m}{m - 4} \right).$$

Ví dụ 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 2m + 3 \\ x + 2y = 3m + 1 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 5$.

Giải chi tiết

a) Với $m = 2$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 14 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ hệ phương trình có nghiệm là $(3; 2)$.

b) Vì $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{2}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$.

$$\begin{cases} 3x - y = 2m + 3 \\ x + 2y = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 4m + 6 \\ x + 2y = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7m + 7 \\ 3x - y = 2m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ y = 3(m + 1) - 2m - 3 = m \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (m + 1; m)$.

Theo đề bài, ta có: $x^2 + y^2 = 5$

$$\Leftrightarrow (m + 1)^2 + m^2 = 5 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(m - 1)(m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = -2$ thì phương trình có nghiệm thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + ay = 3a \\ -ax + y = 2 - a^2 \end{cases}$ (I) (a là tham số).

a) Giải hệ phương trình với $a = 1$.

b) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{2y}{x^2 + 3}$ là số nguyên.

(Đề thi vào lớp 10 môn Toán tỉnh Lào Cao năm 2018 – 2019)

Giải chi tiết

a) Với $a=1$, ta có hệ: $\begin{cases} x+y=3 \\ -x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=4 \\ x=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$

Vậy với $a=1$ hệ phương trình có nghiệm là $(1;2)$.

b) Với $a=0$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$, hệ có nghiệm.

Với $a \neq 0$. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{1}{-a} \neq \frac{a}{1} \Leftrightarrow -a^2 \neq 1 \Leftrightarrow a^2 \neq -1$ (luôn đúng).

Hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi a .

$$\begin{cases} x+ay=3a \\ -ax+y=2-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-ay \\ -a(3a-ay)+y=2-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-ay \\ (a^2+1)y=2a^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=a \end{cases}$$

(Vì $a^2+1>0$ nên rút gọn được ta có $y=2$).

Hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)=(a;2)$.

Xét: $A = \frac{2y}{x^2+3} = \frac{4}{a^2+3}$

Ta có: $a^2+3 \geq 3, \forall a \Rightarrow \frac{4}{a^2+3} \leq \frac{4}{3}, \forall a \Rightarrow 0 < A \leq \frac{4}{3}$.

Mà theo đề bài để $A \in \mathbb{Z}$ thì $A=1 \Rightarrow a^2+3=4 \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$.

Vậy $a=1$ hoặc $a=-1$ thỏa mãn đề bài.

Lưu ý: Đối với bài toán tìm a để biểu thức A nhận giá trị nguyên thì ta đi tìm khoảng giá trị của biểu thức A , tìm các giá trị nguyên của A trong khoảng này rồi thay vào tìm a . Phân biệt với bài toán tìm a là số nguyên để A nhận giá trị nguyên thì khi đó mới có $a^2+3 \in U(4)$.

Ví dụ 5: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx-y=3-m \\ x-my=2m \end{cases}$ (m là tham số). Tìm m để hệ

phương trình có nghiệm duy nhất. Khi đó, hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m .

Giải chi tiết

Với $m = 0$, ta có hệ: $\begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \end{cases}$. Hệ có nghiệm duy nhất.

Với $m \neq 0$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{m}{1} \neq \frac{-1}{-m} \Leftrightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Vậy với $m \neq \pm 1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx - y = 3 - m \\ x - my = 2m \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = mx + m - 3 \\ x - m(mx + m - 3) = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx + m - 3 \\ (1 - m^2)x = m^2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{m}{m+1} \\ y = \frac{-m^2}{m+1} + m - 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{m}{m+1} \\ y = \frac{-2m-3}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{1}{m+1} \\ y = -2 - \frac{1}{m+1} \end{cases}. \end{aligned}$$

Cộng hai vế của hai phương trình ta khử được tham số m . Hệ thức cần tìm là $x + y = -3$.

2. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$ (Đề thi vào lớp 10 tỉnh Bắc Giang năm 2018 – 2019).

2) $\begin{cases} 9x + y = 11 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$ (Đề thi vào lớp 10 tỉnh Bình Dương năm 2018 – 2019).

Câu 2: Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$ (Đề thi vào lớp 10 TP Hà Nội năm 2017 – 2018).

2) $\begin{cases} 3x + \sqrt{y+6} = 11 \\ 5x - \sqrt{y+6} = 13 \end{cases}$ (Đề thi vào lớp 10 TP Hà Nội năm 2017 – 2018).

Câu 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x = 2 \\ mx + y = m^2 + 3 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm m để $x + y$ nhỏ nhất.

(Đề thi vào lớp 10 tỉnh Lào Cai năm 2017 – 2018)

Gợi ý giải

Câu 1:

- 1) Nghiệm của hệ phương trình là $(4;1)$.
- 2) Nghiệm của hệ phương trình là $(1;2)$.

Câu 2:

- 1) Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 1$

Đặt $a = \sqrt{x}; b = \sqrt{y-1} (a \geq 0; b \geq 0)$

Ta có hệ: $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ 4a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

- 2) Điều kiện: $y \geq -6$

Đặt $b = \sqrt{y+6} (b \geq 0)$

Ta có hệ: $\begin{cases} 3x + b = 11 \\ 5x - b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Nghiệm của hệ phương trình là: $(3; -2)$.

Câu 3:

$$\begin{cases} x = 2 \\ mx + y = m^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2m + y = m^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = m^2 - 2m + 3 \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm với mọi m .

Ta có: $A = x + y = m^2 - 2m + 5 = (m-1)^2 + 4$

$\Rightarrow A \geq 4, \forall m$.

Giá trị nhỏ nhất của $x + y$ là 4 đạt được khi $m = 1$.

CHỦ ĐỀ 2: MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ HỆ BẬC NHẤT

Dạng 1: Hệ phương trình đối xứng loại I

Phương pháp giải

Hệ phương trình đối xứng loại I theo ẩn x và y là hệ phương trình mà khi ta đổi vai trò của các ẩn x và y thì hệ phương trình vẫn không thay đổi.

Hệ phương trình đối xứng loại I có dạng $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$, trong đó $\begin{cases} f(x, y) = f(y, x) \\ g(x, y) = g(y, x) \end{cases}$.

Bước 1: Đặt $S = x + y$; $P = xy$. Điều kiện: $S^2 \geq 4P$.

Bước 2: Biến đổi hệ phương trình có hai ẩn S, P giải ra S và P (sử dụng phương pháp thế hoặc cộng đại số).

Bước 3: Tìm được S và P , khi đó x và y là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$X^2 - SX + P = 0$$

Giải phương trình bậc hai theo ẩn X .

Bước 4: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Chú ý: Nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình.

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Giải chi tiết

Ý tưởng: Biến đổi phương trình (1) về tổng và tích của x và y .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy + xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Đặt $S = x + y$; $P = xy$. Điều kiện: $S^2 \geq 4P$.

Ta có hệ: $\begin{cases} S^2 - P = 3 \\ S = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ 4 - P = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

x và y là nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1; 1)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ (x+1)(y+1) = 8 \end{cases}$.

Giải chi tiết

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ (x+1)(y+1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 10 \\ xy + x + y + 1 = 8 \end{cases}$$

Đặt $S = x + y$; $P = xy$. Điều kiện: $S^2 \geq 4P$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có hệ: } \begin{cases} S^2 - 2P = 10 \\ P + S + 1 = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 10 \\ P = 7 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2(7 - S) = 10 \\ P = 7 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S - 24 = 0 \\ P = 7 - S \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = -6 \\ P = 13 \end{cases}. \end{aligned}$$

Mà $S^2 \geq 4P \Rightarrow S = 4, P = 3$ thỏa mãn.

Khi đó, x và y là nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1; 3), (3; 1)$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + 4\sqrt{xy} = 16 \\ x + y = 10 \end{cases}$.

Giải chi tiết

Điều kiện xác định: $x \geq 0; y \geq 0$.

Đặt $S = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; $P = \sqrt{xy}$. Điều kiện: $S^2 \geq 4P$ và $S \geq 0; P \geq 0$.

Ta có hệ: $\begin{cases} S + 4P = 16 \\ S^2 - 2P = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + 4P = 16 \\ 2S^2 - 4P = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + 4P = 16 \\ 2S^2 + S - 36 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn) } \text{ hoặc } \begin{cases} S = -\frac{9}{2} \\ P = \frac{41}{8} \end{cases} \text{ (loại).}$$

Khi đó $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$ là nghiệm của phương trình bậc hai.

$$X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1; 9), (9; 1)$.

Dạng 2: Hệ phương trình đối xứng loại II

Phương pháp giải

Hệ phương trình đối xứng loại II theo ẩn x và y là hệ phương trình mà khi ta đổi vai trò của các ẩn x và y thì hai phương trình trong hệ sẽ hoán đổi cho nhau.

Hệ phương trình đối xứng loại II có dạng $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0 \end{cases}$.

Bước 1: Cộng hoặc trừ hai vế của hai hệ phương trình thu được phương trình. Biến đổi phương trình này về phương trình tích, tìm biểu thức liên hệ giữa x và y đơn giản.

Bước 2: Thế x theo y (hoặc y theo x) vào một trong hai phương trình của hệ ban đầu.

Bước 3: Giải và tìm ra nghiệm x (hoặc y). Từ đó suy ra nghiệm còn lại.

Bước 4: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x = -2y & (1) \\ y^2 - 3y = -2x & (2) \end{cases}$.

Giải chi tiết

Trừ từng vế của hai phương trình ta được:

$$x^2 - y^2 - 3x + 3y = -2y + 2x \Leftrightarrow (x - y)(x + y) - 5(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 5 - y \end{cases}$$

Với $x = y$ thay vào (1) ta được: $y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y(y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$.

Với $x = 5 - y$ thay vào (1) ta được: $y^2 - 3y = -2(5 - y) \Leftrightarrow y^2 - 3y = -10 + 2y$ (vô nghiệm).
 $\Leftrightarrow y^2 - 5y + 10 = 0$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) \in \{(0; 0), (1; 1)\}$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2x = y & (1) \\ y^3 + 2y = x & (2) \end{cases}$.

Giải chi tiết

Trừ từng vế của hai phương trình ta được:

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 + 3x - 3y &= 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y) \left[\left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 3 \right] = 0 \Leftrightarrow y = x \end{aligned}$$

Với $y = x$ thay vào (1) ta được: $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0; 0)$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \\ 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \end{cases}$.

Giải chi tiết

Vì vế phải của mỗi phương trình đều dương nên ta có $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Ta có:
$$\begin{cases} 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \\ 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy^2 = x^2 + 2 & (1) \\ 3yx^2 = y^2 + 2 & (2) \end{cases}.$$

Trừ từng vế của hai phương trình (1) và (2) ta được:

$$3xy^2 - 3yx^2 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow 3xy(y - x) = (x - y)(x + y) \Leftrightarrow (x - y)(3xy + x + y) = 0$$

Vì $x > 0, y > 0 \Rightarrow 3xy + x + y > 0$

$$\Rightarrow x = y.$$

Với $x = y$ thay vào (1) ta được:

$$3x^3 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1; 1)$.

Dạng 3: Một số hệ phương trình khác

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \end{cases}$ (m là tham số).

Hãy tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ sao cho biểu thức $A = xy + 2(x + y)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

(Trích đề thi vào 10 tỉnh Cao Bằng năm 2017 – 2018)

Giải chi tiết

Nhận xét: $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \end{cases}$ là hệ phương trình đối xứng loại 1.

Đặt $S = x + y$; $P = xy$. Điều kiện: $S^2 \geq 4P$.

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P.$$

Ta có hệ: $\begin{cases} S = m \\ S^2 - 2P = -m^2 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = m \\ P = m^2 - 3 \end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ khi và chỉ khi

$$S^2 \geq 4P \Leftrightarrow m^2 \geq 4m^2 - 12 \Leftrightarrow 3m^2 \leq 12 \Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Ta có: $A = xy + 2(x + y) = m^2 - 3 + 2m = m^2 + 2m + 1 - 4 = (m + 1)^2 - 4.$

Vì $-2 \leq m \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq (m + 1)^2 \leq 9$

$$\Rightarrow -4 \leq A \leq 5.$$

Giá trị nhỏ nhất của A là -4 đạt được khi $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2$ biết a, b thỏa mãn:
$$\begin{cases} \frac{3a^2}{b^2} + \frac{1}{b^3} = 1 \\ \frac{3b^2}{a^2} + \frac{2}{a^3} = 1 \end{cases}.$$

(Trích đề thi vào 10 tỉnh Quảng Ninh năm 2017 – 2018)

Giải chi tiết

Điều kiện xác định: $a \neq 0; b \neq 0.$

Ta có:
$$\begin{cases} \frac{3a^2}{b^2} + \frac{1}{b^3} = 1 \\ \frac{3b^2}{a^2} + \frac{2}{a^3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2b + 1 = b^3 \\ 3ab^2 + 2 = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3 - 3a^2b = 1 \\ a^3 - 3ab^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b^3 - 3a^2b)^2 = 1 \\ (a^3 - 3ab^2)^2 = 4 \end{cases}$$

Cộng từng vế của hai phương trình ta được:

$$\begin{aligned} & (b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2) + (a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4) = 5 \\ & \Leftrightarrow b^6 + 3a^2b^4 + 3a^4b^2 + a^6 = 5 \Leftrightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5 \\ & \Rightarrow a^2 + b^2 = \sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

Vậy $M = \sqrt[3]{5}.$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = xy + 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} = 1 \end{cases}.$$

(Trích đề thi vào 10 tỉnh Nam Định năm 2017 – 2018)

Giải chi tiết

Điều kiện xác định: $x \neq 0$ và $y \neq -1.$

$$\begin{cases} 2x+3y=xy+5 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y+1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=xy+5 \\ y+1+x=x(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2x+3y-5 & (1) \\ xy=y+1 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế của hai phương trình ta có: $2x+2y-6=0 \Leftrightarrow x=3-y$

Thay $x=3-y$ vào phương trình (2) ta được:

$$(3-y)y=y+1 \Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=1$$

$$\Rightarrow x=2$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(2;1)$.

2. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y=x^2 \\ 2y+x=y^2 \end{cases}$.

Câu 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3=2y+x \\ y^3=2x+y \end{cases}$.

Câu 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ x^2y+xy^2=2 \end{cases}$.

Gợi ý giải

Câu 1:

Hệ phương trình đối xứng loại II, trừ từng vế của hai phương trình ta được

$$(x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=1-y \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0;0), (3;3), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 2:

Hệ phương trình đối xứng loại II, trừ từng vế của hai phương trình ta được

$$(x-y)(x^2+xy+y^2+1)=0 \Leftrightarrow x=y$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0;0), (\sqrt{3};\sqrt{3}), (-\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

Câu 3:

Hệ phương trình đối xứng loại I.

Đặt $S = x + y; P = xy$ (điều kiện: $S^2 \geq 4P$), ta được

$$\begin{cases} P + S = 3 \\ S.P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1; P = 2 \\ S = 2; P = 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow S = 2; P = 1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;1)$.

CHUYÊN ĐỀ

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHUNG.

Bước 1. Lập hệ phương trình, phương trình.

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số, ghi rõ đơn vị của ẩn (nếu có).

Đối với giải bằng cách lập hệ pt: Chọn hai đại lượng chưa biết làm ẩn.

Đối với giải bằng cách lập pt: Chọn một đại lượng chưa biết làm ẩn.

- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và theo các đại lượng đã biết.
- Lập hpt, pt diễn đạt sự tương quan giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hpt, pt.

Bước 3. Nhận định kết quả và trả lời.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN.

DẠNG 1. TOÁN VỀ QUAN HỆ GIỮA CÁC SỐ.

*** Một số dạng quan hệ thường gặp và phương trình diễn đạt sự tương quan.**

Xét hai số x và y

+ Tổng của x và y bằng m thì $x + y = m$

+ Số x lớn hơn số y là n thì $x - y = n$

+ Số x bằng k lần số y thì ta có $x = k.y$

+ Tỉ số của x và y bằng k thì ta có $\frac{x}{y} = k$

+ Tổng bình phương của x và y là a thì ta có $x^2 + y^2 = a$

...

*** BÀI TẬP MINH HỌA****1.1. VÍ DỤ CÁC BÀI TOÁN LẬP HỆ PT.**

Ví dụ 1. Hai số dương có tỉ số là 3:4. Nếu giảm số lớn đi 100 và tăng số nhỏ thêm 200 thì tỉ số mới là 5: 3. Tìm hai số đó.

* Phân tích: *Hai số cần tìm: Hai số dương*

- *Mối quan hệ 1: Có tỉ số là $\frac{3}{4} \Rightarrow$ pt thứ nhất*

- *Mối quan hệ thứ hai: Giảm số lớn đi 100, tăng số nhỏ thêm 200 thì tỉ số mới là $\frac{5}{3} \Rightarrow$ pt thứ hai*

Lời giải

Gọi số nhỏ là x , số lớn là y (Đk: $0 < x < y$)

+ Tỉ số của hai số là 3:4 $\Rightarrow$ pt: $\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x - 3y = 0$ (1)

+ Nếu giảm số lớn đi 100, tăng số nhỏ thêm 200 thì tỉ số mới là 5: 3

$$\Rightarrow \text{pt: } \frac{x+200}{y-100} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 3x - 5y = -1100$$
 (2)

+ Từ (1) và (2) có hệ pt:
$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x - 5y = -1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 400 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy hai số dương cần tìm là 300 và 400.

Ví dụ 2. Hai kho chứa 450 tấn hàng. Nếu chuyển 50 tấn hàng từ kho A sang kho

B thì số hàng ở kho B bằng $\frac{4}{5}$ số hàng ở kho A. Tính số hàng mỗi kho lúc đầu.

*** Phân tích;**

- Hai số cần tìm: Số hàng mỗi kho
- Mối quan hệ 1: Tổng số hàng ở hai kho bằng 450 $\Rightarrow$ pt thứ nhất
- Mối quan hệ 2: Nếu chuyển 50 tấn hàng từ kho A sang kho B thì số hàng ở kho B bằng $\frac{4}{5}$ số hàng ở kho A $\Rightarrow$ pt thứ 2.

Lời giải:

Gọi số hàng lúc đầu của kho A là x(tấn), của kho B là y (tấn). ĐK: $x > y > 0$

+ Vì hai kho có số hàng là 450 tấn $\Rightarrow$ pt: $x + y = 450$ (1).

+ Khi chuyển 50 tấn hàng từ kho A sang kho B, thì lúc này:

- Kho A có số hàng là: $x - 50$ (tấn)
- Kho B có số hàng là $y + 50$ (tấn)

$$\text{Theo đề bài ta có: } y + 50 = \frac{4}{5}(x - 50) \Leftrightarrow 5x - 4y = 450 \quad (2)$$

$$+ \text{ Từ (1) và (2) ta có hpt: } \begin{cases} x + y = 450 \\ 4x - 5y = 450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 150 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy lúc đầu, kho A có 300 tấn hàng, kho B có 150 tấn hàng.

Ví dụ 3. Hai lớp 9A, 9B của một trường THCS có 90 học sinh. Trong đợt quyền góp vở viết ủng hộ học sinh vùng lũ lụt, mỗi bạn 9A ủng hộ 3 quyển, mỗi bạn 9B ủng hộ 2 quyển. Tính số HS của mỗi lớp, biết rằng cả hai lớp ủng hộ được 222 quyển vở.

*** Phân tích;**

- Hai số cần tìm: Số HS của mỗi lớp
- Mối quan hệ 1: Tổng số HS của hai lớp là 90 $\Rightarrow$ pt thứ nhất.
- Mối quan hệ 2: mỗi bạn 9A ủng hộ 3 quyển, mỗi bạn 9B ủng hộ 2 quyển, cả hai lớp ủng hộ được 222 quyển vở $\Rightarrow$ pt thứ 2.

Lời giải.

Gọi số HS của lớp 9A là x (học sinh), của lớp 9B là y (hs). ĐK x, y nguyên dương.

+ Tổng số HS hai lớp là 90 $\Rightarrow$ pt: $x + y = 90$ (1)

+ Ta có:

- Mỗi bạn 9A ủng hộ 3 quyển $\Rightarrow$ lớp 9A ủng hộ được là $3x$ (quyển)
- Mỗi bạn 9B ủng hộ 2 quyển $\Rightarrow$ lớp 9B ủng hộ được là $2y$ (quyển)

$$\text{Theo đề bài có pt: } 3x + 2y = 222 \quad (2)$$

+ Từ (1) và (2) ta có hpt:
$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 3x + 2y = 222 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 42 \\ y = 48 \end{cases} \text{(tm)}$$

Vậy lớp 9A có 42 học sinh, 9B có 48 học sinh.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài tập 1. Mẫu của một phân số lớn hơn tử của nó là 3. Nếu tăng cả tử và mẫu của phân số đó thêm 1 đơn vị thì được phân số mới bằng $\frac{1}{2}$. Tìm phân số đã cho.

Đáp số: $\frac{2}{5}$

Bài tập 2: Hai giá sách có tất cả 500 cuốn sách. Nếu bớt ở giá thứ nhất 50 cuốn và thêm vào giá thứ hai 20 cuốn thì số sách ở cả hai giá sẽ bằng nhau. Hỏi lúc đầu mỗi giá có bao nhiêu cuốn?

(Đ/S: 285 và 215)

Bài tập 3. Trong đợt quyên góp ủng hộ người nghèo, lớp 9A và 9B có 79 học sinh quyên góp được 975000 đồng. Mỗi học sinh lớp 9A đóng góp 10000 đồng, mỗi học sinh lớp 9B đóng góp 15000 đồng. Tính số học sinh mỗi lớp.

(Đ/S: 42 và 37)

Bài tập 4: Nhân ngày quốc tế thiếu nhi, 13 học sinh (nam và nữ) tham gia gói 80 phần quà cho các em thiếu nhi. Biết tổng số quà mà học sinh nam gói được bằng tổng số quà mà học sinh nữ gói được. Số quà mỗi bạn nam gói nhiều hơn số quà mà mỗi bạn nữ gói là 3 phần. Tính số học sinh nam và nữ.

(Đ/S: 5 và 8)

Bài tập 5: Số tiền mua 1 quả dưa và một quả thanh long là 25 nghìn đồng. Số tiền mua 5 quả dưa và 4 quả thanh long là 120 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi quả dưa và giá mỗi quả thanh long là bao nhiêu? Biết rằng mỗi quả dưa có giá như nhau và mỗi quả thanh long có giá như nhau.

(Đ/S: 20 nghìn và 5 nghìn)

Bài tập 6: Có hai can đựng dầu, can thứ nhất đang chứa 38 lít và can thứ hai đang chứa 22 lít. Nếu rót từ can thứ nhất sang cho đầy can thứ hai thì lượng dầu trong can thứ nhất chỉ còn lại một nửa thể tích của nó. Nếu rót từ can thứ hai sang cho đầy can thứ nhất thì lượng dầu trong can thứ hai chỉ còn lại một phần ba thể tích của nó. Tính thể tích của mỗi can.

1.2. CÁC VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN LẬP PT.

Ví dụ 1. Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau 5 và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh, Lan phải chọn những số nào?

* *Phân tích.*

- *Yêu cầu: Tìm hai số thỏa mãn:*

+ *Hơn kém nhau 5 (mối quan hệ 1)*

+ *Tích của chúng bằng 150 (mối quan hệ 2)*

=> *Nếu số một bạn chọn là x, từ mối quan hệ 1 biểu thị số bạn kia chọn là x + 5 hoặc x - 5*

Từ mối quan hệ thứ 2 => pt bài toán: $x(x + 5) = 150$ hoặc $x(x - 5) = 150$

Hoặc nếu số một bạn chọn là x, từ mối quan hệ thứ 2 biểu thị được số bạn kia chọn là $\frac{150}{x}$

Từ mối quan hệ thứ nhất => pt bài toán: $x - \frac{150}{x} = 5$ hoặc $\frac{150}{x} - x = 5$

=> *GV cho HS thấy cách biểu thị thứ nhất được pt gọn, đơn giản hơn.*

Lời giải.

Gọi số mà một bạn chọn là x. ĐK $x \neq 0, x \neq \pm 5$.

+ Vì hai số hơn kém nhau là 5 => số bạn kia chọn là x + 5

+ Tích của hai số là 150, nên ta có pt:

$$\begin{aligned} x(x + 5) = 150 &\Leftrightarrow x^2 + 5x - 150 = 0 \Leftrightarrow (x + 15)(x - 10) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = -15 & (\text{tm}) \\ x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10 & (\text{tm}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, - nếu số bạn Minh chọn là 10 thì số bạn Lan chọn là 15 và ngược lại.

- Nếu số bạn Minh chọn là -15 thì số bạn Lan chọn là -10 và ngược lại

(Các cách còn lại các bạn tự giải).

Ví dụ 2. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

* *Phân tích.*

Yêu cầu: Tìm hai số tự nhiên thỏa mãn:

+ *Là hai số tự nhiên liên tiếp (mối quan hệ 1)*

+ *Tích lớn hơn tổng là 109 (mối quan hệ 2)*

Nếu gọi số tự nhiên nhỏ hơn là x , từ mối quan hệ 1 biểu thị được số lớn hơn là $x + 1$. Từ mối quan hệ 2 đưa ra pt của bài toán: $x(x + 1) - (x + x + 1) = 109$.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên nhỏ hơn là x . ĐK: $x \geq 1; x \in \mathbb{N}$

+ Hai số tự nhiên liên tiếp hơn kém nhau 1 đơn vị $\Rightarrow$ số tự nhiên lớn hơn là $x + 1$

+ Ta có: - Tích của chúng là: $x(x + 1) = x^2 + x$
 - Tổng của chúng là: $x + x + 1 = 2x + 1$

Theo đề bài ta có pt: $x^2 + x - (2x + 1) = 109$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 110 = 0 \Leftrightarrow (x - 11)(x + 10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = 11 \text{ (tm)} \\ x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -10 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 11 và 12.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 19, tổng các bình phương của chúng bằng 185.

Bài tập 2. Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 9, tổng các số nghịch đảo của chúng bằng $9/14$.

Bài tập 3. Tìm hai số biết rằng tổng của hai số đó bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

(Đ/S: Hai số cần tìm là 12 và 5 hoặc 4 và 13).

Bài tập 4. Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 5 đơn vị và tăng mẫu số thêm 4 đơn vị thì sẽ được phân số mới là nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.

DẠNG 2: TOÁN TÌM CHỮ SỐ CỦA SỐ TỰ NHIÊN

* Một số kiến thức cần nhớ.

- Số có hai chữ số được ký hiệu là $\overline{ab}$
- Giá trị của số: $\overline{ab} = 10a + b$; (Đk: $1 \leq a \leq 9$ và $0 \leq b \leq 9, a, b \in \mathbb{N}$)
- số tự nhiên $\overline{ab} \Rightarrow$ số tự nhiên viết theo thứ tự ngược lại là $\overline{ba}$

$$\text{Ta có } \overline{ba} = 10b + a$$

* BÀI TẬP MINH HOẠ

2.1. CÁC VÍ DỤ VỀ GIẢI BÀI TOÁN LẬP HPT.

Ví dụ 1: Cho số tự nhiên có hai chữ số, tổng của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14. Nếu đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vị. Tìm số đã cho.

Hướng dẫn giải

Gọi chữ số hàng chục của số cần tìm là x , chữ số hàng đơn vị của số cần tìm là y
(ĐK: $x, y \in \mathbb{N}$; $0 < x$; $y \leq 9$)

+ Tổng chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14

$$\Rightarrow \text{có phương trình: } x + y = 14 \quad (1)$$

+ Đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vị nên có phương trình: $\overline{yx} - \overline{xy} = 18 \Rightarrow$

$$(10y + x) - (10x + y) = 18$$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 14 \\ y - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Ví dụ 2: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị và khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới lớn hơn số đó là 280 đơn vị.

Hướng dẫn giải

Gọi chữ số hàng chục là a ($a \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9$); chữ số hàng đơn vị là b ($b \in \mathbb{N}, 0 \leq b \leq 9$)

Số cần tìm là $\overline{ab} = 10a + b$

Ta có chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị nên ta có phương trình:

$$b - a = 5 \Leftrightarrow -a + b = 5 \quad (1)$$

Lại có: khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới là

$$\overline{a1b} = 100a + 10 + b \quad (2)$$

Do số mới lớn hơn số đó là 280 đơn vị nên ta có phương trình:

$$(100a + 10 + b) - (10a + b) = 280 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình}$$

$$\begin{cases} -a + b = 5 \\ (100a + 10 + b) - (10a + b) = 280 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 5 \\ 90a = 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases} \text{ (tmdk)}$$

*** BÀI TẬP TỰ LUYỆN.**

Bài tập 1. Tổng các chữ số của 1 số có hai chữ số là 9. Nếu thêm vào số đó 63 đơn vị thì số thu được cũng viết bằng hai chữ số đó nhưng theo thứ tự ngược lại. Hãy tìm số đó?

(Đ/S: Số cần tìm là 18).

Bài tập 2. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng các chữ số của nó là 7. Nếu đổi chỗ hai chữ số hàng đơn vị và hàng chục cho nhau thì số đó giảm đi 45 đơn vị.

(Đ/S: Số cần tìm là 61).

Bài tập 3. Tìm một số tự nhiên có ba chữ số sao cho tổng các chữ số bằng 17, chữ số hàng chục là 4, nếu đổi chỗ các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị cho nhau thì số đó giảm đi 99 đơn vị.

(Đ/S: Số cần tìm là 746).

Bài tập 4. Tìm một số có hai chữ số biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5 và nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 7 và dư 6.

(Đ/S: Số cần tìm là 83).

Bài tập 5. Tìm số tự nhiên có hai chữ số. Biết tổng hai chữ số của nó bằng 11 và nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì ta được số mới lớn hơn số ban đầu 27 đơn vị.

ĐS: 47

2.2) CÁC VÍ DỤ VỀ GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PT.

Ví dụ 1. Tìm số tự nhiên có hai chữ số mà hiệu chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị là 3, còn tổng các bình phương hai chữ số của số đó bằng 45.

Hướng dẫn giải.

Gọi chữ số hàng chục là x (ĐK: $x \in \mathbb{N}$; $3 < x \leq 9$)

+ Hiệu chữ số hàng chục và hàng đơn vị là 3 $\Rightarrow$ chữ số hàng đơn vị là $x - 3$

+ Tổng các bình phương của hai chữ số bằng 45

$$\Rightarrow \text{pt: } x^2 + (x - 3)^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 & (\text{ktm}) \\ x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6 & (\text{tm}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ chữ số hàng chục là 6, chữ số hàng đơn vị là $6 - 3 = 3$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 63.

Ví dụ 2. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng hai chữ số bằng 10 và tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12.

Hướng dẫn giải.

Gọi chữ số hàng chục là x (ĐK: $x \in \mathbb{N}$; $0 < x \leq 9$)

+ Tổng hai chữ số là 10 $\Rightarrow$ chữ số hàng đơn vị là $10 - x$

+ Tích của hai chữ số nhỏ hơn số đã cho là 12

$$\Rightarrow \text{pt: } (10x + 10 - x) - x(10 - x) = 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 & (\text{ktm}) \\ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 & (\text{tm}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ chữ số hàng chục là 2, chữ số hàng đơn vị là $10 - 2 = 8$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 28.

* BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài tập 1. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 13 và nếu cộng thêm 34 vào tích của hai chữ số của số đó thì được chính số cần tìm.

Đáp số:

76

Bài tập 2. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 và số đó lớn hơn tổng các bình phương các chữ số của nó là 1.

* Với hai dạng 1,2 này GV nên cho HS tự phát biểu các bài toán tương tự, hoặc từ một số cụ thể yêu cầu HS phát biểu thành những bài toán giải bằng cách lập pt, hpt $\Rightarrow$ Giúp HS hiểu rõ ràng, sâu rộng, nhận biết thành thạo những dạng bài nào nên giải bằng cách lập hpt, những dạng bài nào giải bằng cách lập pt.

DẠNG 3: TOÁN VỀ CHUYỂN ĐỘNG

* KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Bài toán luôn có 3 đại lượng là **quãng đường (s)**, **vận tốc (v)** và **thời gian (t)**

$$\text{liên hệ bởi công thức: } s = v.t \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{s}{t} \\ t = \frac{s}{v} \end{cases}$$

- + Vận tốc tỷ lệ nghịch với thời gian và tỷ lệ thuận với quãng đường đi được:
- + Nếu hai xe đi ngược chiều nhau cùng xuất phát khi gặp nhau lần đầu: Thời gian hai xe đi được là như nhau, tổng quãng đường 2 xe đi được bằng đúng quãng đường cần đi của 2 xe.
- + Nếu hai phương tiện chuyển động cùng chiều từ hai địa điểm khác nhau là A và B, xe từ A chuyển động nhanh hơn xe từ B thì khi xe từ A đuổi kịp xe từ B ta luôn có hiệu quãng đường đi được của xe từ A với quãng đường đi được của xe từ B bằng quãng đường AB

2. Chuyển động có sự tác động của yếu tố khách quan. (gió, dòng chảy) (thường gặp các bài toán chuyển động trên dòng chảy: như ca nô, tàu xuồng, thuyền):

- Vận tốc khi nước đứng yên = vận tốc riêng.

- Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước

- Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng – vận tốc dòng nước

Vận tốc của dòng nước là vận tốc của một vật trôi tự nhiên theo dòng nước (Vận tốc riêng của vật đó bằng 0).

*** Với dạng toán này, việc biết kẻ bảng phân tích là một lợi thế cho học sinh. Từ việc kẻ bảng, học sinh thực hiện từng bước cẩn thận: gọi ẩn đặt điều kiện cho ẩn, biểu diễn những đại lượng chưa biết qua ẩn và đại lượng đã biết, từ mối quan hệ của các đại lượng lập phương trình, thực hiện giải phương trình, chọn kết quả và trả lời.**

3.1. BÀI TOÁN CÓ MỘT ĐỐI TƯỢNG CHUYỂN ĐỘNG

* Trong dạng toán có một đối tượng chuyển động thường chia thành các giai đoạn chuyển động với vận tốc khác nhau: Dự định- thực tế; Lúc đi – Lúc về; nửa đầu – nửa sau...

3.1.1. CÁC BÀI TOÁN VỀ GIẢI BẢNG CÁCH LẬP HPT.

Ví dụ 1: Một người dự định đi từ A đến B với thời gian đã định. Nếu tăng vận tốc thêm 10km/h thì đến B sớm hơn dự định 1h. Nếu giảm vận tốc đi 10km/h thì đến B muộn hơn dự định 2h. Tính vận tốc, thời gian dự định và quãng đường AB

- **Phân tích bài tìm cách giải**

Bài yêu cầu tìm s, v, t dự định

Biết: V tăng 10km/h thì t sớm hơn dự định 1h

V giảm 10km/h thì t đến muộn hơn dự định 2h

- **Bảng tóm tắt cách giải**

	S (km)	v (km/h)	t (h)
--	--------	----------	-------

Dự định		xy	x	y
Thực tế	Lúc đầu	$(x + 10)(y - 1)$	$x + 10$	$y - 1$
	Lúc sau	$(x - 10)(y + 2)$	$x - 10$	$y + 2$

Điều kiện $x > 10; y > 1$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} xy = (x+10)(y-1) \\ xy = (x-10)(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -x + 10y - 10 \\ xy = xy + 2x - 10y - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 10y = 10 \\ 2x - 10y = 20 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Quãng đường AB gồm đoạn lên dốc dài 4km, đoạn xuống dốc dài 5km. Một người đi xe đạp từ A đến B hết 40 phút và đi từ B về A hết 41 phút (vận tốc lên dốc lúc đi và lúc về bằng nhau, vận tốc xuống dốc lúc đi và lúc về bằng nhau). Tính vận tốc lên dốc và vận tốc xuống dốc

* Bảng phân tích bài toán: Gọi vận tốc lên dốc, xuống dốc lần lượt là x (km/h); y(km/h)

ĐK: $x > 0; y > 0$.

		S (km)	v (km/h)	t (h)	
Từ A đến B	Lên dốc	4	x	$\frac{4}{x}$	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{40}{60}$
	Xuống dốc	5	y	$\frac{5}{y}$	
Từ B về A	Lên dốc	5	x	$\frac{5}{x}$	$\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{41}{60}$
	Xuống dốc	4	y	$\frac{4}{y}$	

LỜI GIẢI.

Gọi vận tốc lên dốc, xuống dốc lần lượt là x (km/h); y(km/h)

ĐK: $x > 0; y > 0$.

+ Khi đi từ A đến B:

- Thời gian lên dốc là: $\frac{4}{x}$ (giờ)

- Thời gian xuống dốc là $\frac{5}{y}$ (giờ)

$$\text{Vì thời gian đi từ A đến B hết 40 phút} = \frac{40}{60} \text{ giờ} \Rightarrow \text{pt: } \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{40}{60} \quad (1)$$

+ Khi từ B về A:

$$\text{- Thời gian lên dốc là: } \frac{5}{x} \text{ (giờ)}$$

$$\text{- Thời gian xuống dốc là } \frac{4}{y} \text{ (giờ)}$$

$$\text{Vì thời gian đi từ A đến B hết 41 phút} = \frac{41}{60} \text{ giờ} \Rightarrow \text{pt: } \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{41}{60} \quad (2)$$

$$\text{+ Từ (1) và (2) có hpt: } \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{40}{60} \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{41}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy vận tốc lên dốc là 12km/h; vận tốc xuống dốc là 15km/h

Ví dụ 3: Trên một khúc sông một canô xuôi dòng 80km, sau đó chạy ngược dòng 80km hết tất cả 9h. Cũng khúc sông ấy canô xuôi dòng 100km sau đó ngược dòng 64km cũng hết tất cả 9h. Tính vận tốc riêng của canô và vận tốc của dòng nước (biết vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước không đổi).

Phân tích tìm lời giải

Bài cho biết

Lúc đầu

- Quãng đường xuôi 80km, quãng đường ngược là 80km
- Tổng thời gian xuôi và ngược là 9h

Lúc sau:

- Quãng đường xuôi 100km, quãng đường ngược là 64km
- Tổng thời gian xuôi và ngược là 9h

=> Tìm vận tốc của ca nô và vận tốc dòng nước

Sơ đồ tóm tắt cách giải

		S (km)	v (km/h)	t (h)
Lúc đầu	Xuôi dòng	80	$x + y$	$\frac{80}{x + y}$
	Ngược dòng	80	$x - y$	$\frac{80}{x - y}$

Phương trình $\frac{80}{x+y} + \frac{80}{x-y} = 9$				
Lúc sau	Xuôi dòng	100	$x+y$	$\frac{100}{x+y}$
	Ngược dòng	64	$x-y$	$\frac{64}{x-y}$
Phương trình $\frac{100}{x+y} + \frac{64}{x-y} = 9$				

Lời giải vắn tắt

Gọi vận tốc của canô là x (km/h); Vận tốc của dòng nước là y (km/h). Điều kiện $x > y > 0$

Vận tốc xuôi dòng là $x + y$ (km/h)

Vận tốc ngược dòng là $x - y$ (km/h)

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{80}{x+y} + \frac{80}{x-y} = 9 \\ \frac{100}{x+y} + \frac{64}{x-y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{400}{x+y} + \frac{400}{x-y} = 45 \\ \frac{400}{x+y} + \frac{256}{x-y} = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=24 \\ x-y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=4 \end{cases}$$

*** BÀI TẬP TỰ LUYỆN.**

Bài tập 1. Một ô tô đi từ tỉnh A đến tỉnh B với một vận tốc đã định. Nếu vận tốc tăng thêm 20km/h thì thời gian đi sẽ giảm 1 giờ, nếu vận tốc bớt đi 10km/h thì thời gian đi tăng thêm 1 giờ. Tính vận tốc và thời gian dự định của ô tô.

Bài tập 2. Một ô tô đi từ A và dự định đến B lúc 12 giờ trưa cùng ngày. Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì sẽ đến B sớm 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB và thời điểm xuất phát tại A của ô tô.

Bài tập 3. Một người đi xe đạp từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC và đoạn xuống dốc CB. Thời gian đi từ A đến B là 4 giờ 20 phút, thời gian từ B về A là 4 giờ. Biết vận tốc lên dốc (lúc đi cũng như lúc về) là 10km/h, vận tốc xuống dốc (lúc đi cũng như lúc về) là 15km/h. Tính quãng đường AC, CB.

Bài tập 4. Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 81km và ngược dòng 105km. Một lần khác cũng trên khúc sông đó, ca nô chạy trong 4 giờ, xuôi dòng 54km và ngược dòng 42km. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và vận tốc khi ngược dòng của ca nô, biết vận tốc của dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi.

Bài tập 5. Hàng ngày, Nam đạp xe đi học với vận tốc không đổi trên quãng đường dài 10 km. Nam tính toán và thấy rằng đạp xe với vận tốc lớn nhất thì thời gian đi học sẽ rút ngắn 10 phút so với đạp xe với vận tốc hàng ngày. Tuy nhiên, thực tế sáng nay lại khác dự kiến. Nam chỉ đạp xe với vận tốc lớn nhất trên nửa đầu quãng đường (dài 5km), nửa quãng đường còn lại đường phố đông đúc nên Nam đã đạp xe với vận tốc hàng ngày. Vì vậy thời gian đạp xe đi học sáng nay của Nam là 35 phút. Hãy tính vận tốc đạp xe hàng ngày và vận tốc đạp xe lớn nhất của Nam (lấy đơn vị vận tốc là km/h).

Lời giải tham khảo:

Gọi vận tốc đạp xe hàng ngày của Nam là x (km/h, $x > 0$)

Vận tốc đạp xe lớn nhất của Nam là y (km/h, $y > x$)

$$\Rightarrow \text{hệ pt: } \begin{cases} \frac{10}{x} - \frac{10}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{5}{x} + \frac{5}{y} = \frac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{60} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15(TM) \\ y = 20(TM) \end{cases}$$

Bài 1. Một canô chạy trên sông trong 7h, xuôi dòng 108km và ngược dòng 63km. Một lần khác, canô cũng chạy trong 7h, xuôi dòng 81km và ngược dòng 84km. Tính vận tốc dòng nước chảy và vận tốc thật của canô (vận tốc thật của canô không thay đổi)

ĐS:

Vận tốc thật của canô là x (km/h)

Vận tốc dòng nước chảy là y (km/h)

Vận tốc xuôi dòng là $x + y$ (km/h)

Vận tốc ngược dòng là $x - y$ (km/h)

Điều kiện: $x > y$

		Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Lần đầu	Xuôi dòng	$x + y$	$\frac{108}{x + y}$	108

	Ngược dòng	$x - y$	$\frac{63}{x - y}$	63
Lần sau	Xuôi dòng	$x + y$	$\frac{81}{x + y}$	81
	Ngược dòng	$x - y$	$\frac{84}{x - y}$	84

$$\text{Hệ PT: } \begin{cases} \frac{108}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 7 \\ \frac{81}{x+y} + \frac{84}{x-y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{ĐS: 24km/h và 3km/h}$$

3.1.2. CÁC BÀI TOÁN VỀ GIẢI BẰNG CÁCH LẬP PT.

Ví dụ 1: Một người dự định đi từ A đến B cách nhau 36km bằng xe đạp trong thời gian nhất định. Sau khi đi được nửa đường người đó nghỉ 18 phút. Do đó để đến B đúng hẹn người đó tăng vận tốc thêm 2km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đó.

- **Bảng tóm tắt:** Gọi vận tốc ban đầu của người đó là x (km/h). ĐK $x > 0$

		S (km)	v (km/h)	t (h)
Dự định		36	x	$\frac{36}{x}$
Thực tế	Đi nửa đầu	18	x	$\frac{18}{x}$
	Nghỉ	0	0	$18' = \frac{3}{10}h$
	Đi nửa sau	18	$x + 2$	$\frac{18}{x+2}$

Lời giải.

Gọi vận tốc ban đầu của người đó là x (km/h). Điều kiện $x > 0$

=> thời gian dự định đi hết quãng đường AB là $\frac{36}{x}$ (h)

+ Thực tế:

- Nửa quãng đường đầu người đó đi với vận tốc x (km/h)

=> Thời gian đi hết nửa quãng đường đầu là $\frac{18}{x}$ (h)

- Nửa quãng đường sau người đó đi với vận tốc $x + 2$ (km/h)

=> Thời gian đi hết nửa quãng đường sau là $\frac{18}{x+2}$ (h)

- Thời gian nghỉ là 18 phút = $\frac{3}{10}$ (h)

+ Theo bài người đó đến B đúng hẹn, ta có phương trình

$$\frac{36}{x} = \frac{18}{x} + \frac{18}{x+2} + \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{18}{x} = \frac{18}{x+2} + \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow 180(x+2) = 180x + 3x(x+2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 360 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-10)(x+12) = 0 \text{ (Sử dụng máy tính đưa về phương trình tích)}$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = -12 \text{ (loại)}$$

Vậy vận tốc ban đầu của người đó là 10km/h

Ví dụ 2. Một người đi xe đạp từ quãng đường từ A đến B dài 30km. Khi từ B về A, người đó đi con đường khác dài hơn 6km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3km/h. Tính vận tốc lúc đi, biết thời gian lúc về ít hơn thời gian lúc đi là 20 phút.

* Bảng phân tích. Gọi vận tốc lúc đi là x (km/h). ĐK: $x > 0$

	S (km)	v (km/h)	t (h)
Lúc đi	30	x	$\frac{30}{x}$
Lúc về	36	x + 2	$\frac{36}{x+2}$

Vì thời gian lúc về ít hơn thời gian lúc đi là 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ

$$\Rightarrow \text{pt: } \frac{30}{x} - \frac{36}{x+2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 + 21x - 270 = 0$$

Giải pt ta được $x_1 = 9$ (tm), $x_2 = -30$ (không thỏa mãn)

Vậy vận tốc lúc đi là 9km/h

Ví dụ 3: Một canô chạy trên dòng sông dài 30km. Thời gian canô xuôi dòng ít hơn thời gian canô ngược dòng là 1 giờ 30 phút. Tìm vận tốc của canô biết vận tốc dòng nước chảy là 5km/h

- **Phân tích đề bài**

Biết quãng đường 30km

Vận tốc dòng nước là 5km/h

Biết thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược là 1 giờ 30 phút

=> Tìm vận tốc của canô

- **Sơ đồ tóm tắt cách giải**

	S (km)	v (km/h)	t (h)
Xuôi dòng	30	$x + 5$	$\frac{30}{x + 5}$
Ngược dòng	30	$x - 5$	$\frac{30}{x - 5}$

Gọi vận tốc của canô là x (km/h)

Điều kiện $x > 5$

Vận tốc canô xuôi dòng là $x + 5$ (km/h)

Vận tốc canô ngược dòng là $x - 5$ (km/h)

Theo bài thời gian canô xuôi dòng ít hơn thời gian canô ngược dòng là

$$1h30' = \frac{3}{2}h$$

Ta có phương trình $\frac{30}{x+5} + \frac{3}{2} = \frac{30}{x-5}$

$$\Rightarrow 60(x-5) + 3(x+5)(x-5) = 60(x+5)$$

$$\Leftrightarrow 60x - 3000 + 3x^2 - 75 = 60x + 3000$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2025 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-45)(x+45) = 0 \text{ (Sử máy tính)}$$

$$\Leftrightarrow x = 45 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = -45 \text{ (loại)}.$$

Vậy vận tốc của canô là 45km/h

*** BÀI TẬP TỰ LUYỆN.**

Bài tập 1: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36 km. Khi đi từ B trở về A, người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

Hướng dẫn giải

Gọi vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h), ($x > 0$).

Ta có phương trình: $\frac{36}{x} - \frac{36}{x+3} = \frac{36}{60}$

Giải phương trình này ra hai nghiệm $\begin{cases} x=12 \\ x=-15(\text{loại}) \end{cases}$

Bài tập 2: (Hà nội năm 2013-2014). Quảng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

(Đ/S: 36 km/h)

Bài tập 3: Một tàu hoả đi từ A đến B với quãng đường 40 km. Khi đi đến B, tàu dừng lại 20 phút rồi đi tiếp 30 km nữa để đến C với vận tốc lớn hơn vận tốc khi đi từ A đến B là 5 km/h. Tính vận tốc của tàu hoả khi đi trên quãng đường AB, biết thời gian kể từ khi tàu hoả xuất phát từ A đến khi tới C hết tất cả 2 giờ.

(Đ/S: 40 km/h)

Bài tập 4: Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120 km với vận tốc và thời gian dự định trước. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB, người đó tăng vận tốc thêm 10 km/giờ trên quãng đường còn lại nên đến B sớm hơn dự định 24 phút. Tìm vận tốc dự định và thời gian dự định đi từ A đến B lúc đầu.

(Đ/S: 40 km/h và 3h)

Bài tập 5: (Hà nội 2015-2016). Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km, sau đó chạy xuôi dòng 48km trên cùng một dòng sông có vận tốc dòng nước là 2 km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Bài tập 6. (Hà nội 2020-2021). Quảng đường từ nhà An đến nhà Bình dài 3km. Buổi sáng, An đi bộ từ nhà An đến nhà Bình. Buổi chiều cùng ngày, An đi xe đạp từ nhà Bình về nhà An trên cùng quãng đường đó với vận tốc lớn hơn vận tốc đi bộ của An là 9km/h. Tính vận tốc đi bộ của An, biết thời gian đi buổi chiều ít hơn thời gian đi buổi sáng là 45 phút (giả định rằng An đi bộ với vận tốc không đổi trên toàn bộ quãng đường đó.)

Bài tập 7. Một khách du lịch đi trên ô tô trong 4h, sau đó đi trên tàu hỏa trong 7h được quãng đường 640km. Tính vận tốc tàu hỏa và ô tô, biết rằng mỗi giờ tàu hỏa đi nhanh hơn ô tô 5km.

- Phân tích tìm cách giải

- Biết tổng quãng đường tàu và ô tô đi được 640km
 - Biết vận tốc tàu nhanh hơn vận tốc của ô tô là 5km/h
- => Tìm vận tốc tàu và vận tốc của ô tô

- Bảng tóm tắt cách giải

Cách 1: Lập hệ phương trình

	S (km)	v (km/h)	t (h)
Tàu hỏa	7x	x	7
Ôtô	4y	y	4

Điều kiện $x > 0; y > 0$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x + 4y = 640 \\ x = y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 640 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 640 \\ 7x - 7y = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 55 \end{cases}$$

Cách 2: Lập phương trình

	S (km)	v (km/h)	t (h)
Tàu hỏa	7x	x	7
Ôtô	4(x - 5)	x - 5	4

Điều kiện: $x > 5$

Ta có phương trình $7x + 4(x - 5) = 640 \Leftrightarrow x = 60$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài tập 8. Một người dự định đi xe đạp từ địa điểm A tới địa điểm B cách nhau 36km trong một thời gian nhất định. Sau khi đi được nửa quãng đường, người đó dừng lại nghỉ 18 phút. Do đó để đến B đúng hạn, người đó đã tăng thêm vận tốc 2km trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu và thời gian xe lăn bánh trên đường.

Gợi ý: Đổi đơn vị: 18 phút = $\frac{3}{10}$ giờ. Điều kiện: $x > 0$

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Dự định	x	$\frac{36}{x}$	36
Thực tế	x	$\frac{18}{x}$	18
	x + 2	$\frac{18}{x+2}$	18

$$\text{PT: } \frac{36}{x} - \left(\frac{18}{x} + \frac{18}{x+2} \right) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow x = 10 \text{ (km/h)}$$

Vậy vận tốc ban đầu là 10(km/h)

Thời gian xe lăn bánh trên đường là $\frac{18}{10} + \frac{18}{12} = 3.3 \text{ (h)}$

Bài tập 9. Một ô tô dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc trung bình 40km/h. Lúc đầu ô tô đi với vận tốc đó, khi còn 60km nữa thì được một nửa quãng đường

AB, người lái xe tăng vận tốc lên thêm 10km/h trên quãng đường còn lại. Do đó, ô tô đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB.

Gợi ý: Điều kiện: $x > 120$

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Dự định	40	$\frac{x}{40}$	x
Thực tế	40	$\frac{\frac{1}{2}x - 60}{40}$	$\frac{1}{2}x - 60$
	50	$\frac{\frac{1}{2}x + 60}{50}$	$\frac{1}{2}x + 60$

$$\text{PT: } \frac{x}{40} - \left(\frac{\frac{1}{2}x - 60}{40} + \frac{\frac{1}{2}x + 60}{50} \right) = 1 \Leftrightarrow x = 280 \text{ (km)}$$

Bài tập 10. Một ô tô dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 120km trong một thời gian quy định. Sau khi đi được một giờ ô tô bị chặn đường bởi xe hoả 10 phút. Do đó, để đến tỉnh B đúng hạn, xe phải tăng vận tốc thêm 6km/h. Tính vận tốc ô tô lúc đầu.

Gợi ý:

Điều kiện: $x > 0$

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Dự định	x	$\frac{120}{x}$	120
Thực tế	x	1	x
	$x + 6$	$\frac{120 - x}{x + 6}$	$120 - x$

$$\text{PT: } \frac{120}{x} - \left(1 + \frac{120 - x}{x + 6} \right) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 48 \text{ (km / h)}$$

Bài tập 11. Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120km với vận tốc dự định. Khi đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường AB, người đó dừng xe nghỉ 12 phút. Để đảm bảo đến B đúng thời gian dự định, người đó đã tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định của người đi xe máy đó.

Gợi ý.

Đổi đơn vị: 12 phút = $\frac{1}{5}$ giờ. Điều kiện: $x > 0$

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Dự định	x	$\frac{120}{x}$	120
Thực tế	x	$\frac{80}{x}$	80
	$x + 10$	$\frac{40}{x + 10}$	40

$$\text{PT: } \frac{120}{x} - \left(\frac{80}{x} + \frac{40}{x + 10} \right) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = 40 \text{ (km/h)}$$

3.2. BÀI TOÁN CÓ HAI ĐỐI TƯỢNG CHUYỂN ĐỘNG.

3.2.1. Hai đối tượng đi ngược chiều.

Ví dụ 1. Bác Toàn đi xe đạp từ thị xã về làng, cô Ba Ngân cũng đi xe đạp nhưng từ làng lên thị xã. Họ gặp nhau khi bác Toàn đi được 1 giờ rưỡi, còn cô Ba Ngân đã đi được 2 giờ. Một lần khác, hai người cũng đi từ hai địa điểm như thế nhưng họ khởi hành đồng thời; sau 1 giờ 15 phút họ còn cách nhau 10,5 km. Tính vận tốc của mỗi người, biết làng cách thị xã 38km.

Phân tích:

		Vận tốc (km/h)	Thời gian (giờ)	Quãng đường
Lần 1	Bác Toàn	x	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}x$
	Cô Ba Ngân	y	2	$2y$
Lần 2	Bác Toàn	x	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}x$
	Cô Ba Ngân	y	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}y$

$$\Rightarrow \text{hpt: } \begin{cases} \frac{3}{2}x + 2y = 38 \\ \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}y = 38 - 10,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \text{ (km/h)} \\ y = 10 \text{ (km/h)} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Hai xe lửa khởi hành đồng thời từ hai ga cách nhau 750km và đi ngược chiều nhau, sau 10 giờ chúng gặp nhau. Nếu xe thứ nhất khởi hành trước xe thứ

hai 3 giờ 45 phút thì sau khi xe thứ hai đi được 8 giờ chúng gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe.

Phân tích lời giải:

		Vận tốc (km/h)	Thời gian (giờ)	Quãng đường
Tình huống 1	Xe thứ nhất	x	10	10x
	Xe thứ hai	y	10	10y
Tình huống 2	Xe thứ nhất	x	$8 + \frac{15}{4}$	$\frac{47}{4}x$
	Xe thứ hai	y	8	$\frac{5}{4}y$

$$\Rightarrow \text{Hpt} \begin{cases} 10x + 10y = 750 \\ \frac{47}{4}x + 8y = 750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (km/h)} \\ y = 35 \text{ (km/h)} \end{cases}$$

Ví dụ 3. Hai ca nô cùng khởi hành từ hai bến A và B cách nhau 85 km đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc riêng của mỗi ca nô, biết rằng vận tốc ca nô đi xuôi lớn hơn vận tốc ca nô đi ngược 9km/h và vận tốc dòng nước là 3 km/h.

ĐS: Điều kiện: $x > 0$; $y > 3$. Đổi đơn vị: $1\text{h}40' = \frac{5}{3}h$

	Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Ca nô đi xuôi	$x + 3$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}(x + 3)$
Ca nô đi ngược	$y - 3$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}(y - 3)$

$$\text{Hệ PT:} \begin{cases} \frac{5}{3}(x + 3) + \frac{5}{3}(y - 3) = 85 \\ (x + 3) - (y - 3) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 \text{ (km/h)} \\ y = 24 \text{ (km/h)} \end{cases}$$

* BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài tập 1. Lúc 6 giờ một ô tô chạy từ A đến B. Sau đó nửa giờ, một xe máy chạy từ B về A. Ô tô gặp xe máy lúc 8 giờ. Biết vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy lớn là 10 km/h và khoảng cách AB bằng 195km. Tính vận tốc của mỗi xe. Lời giải tham khảo.

Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h), của xe máy là y (km/h). ĐK: $x; y > 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 10 \\ 2x + \frac{3}{2}y = 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 50 \end{cases}$$

Bài tập 2. Hai địa điểm A và B cách nhau 360 km. Cùng lúc đó, một xe tải khởi hành từ A đến B và một xe con chạy từ B về A. Sau khi gặp nhau, xe tải chạy tiếp 5 giờ nữa thì đến B và xe con chạy tiếp 3 giờ 12 phút nữa thì tới A. Tính vận tốc của mỗi xe?

Lời giải tham khảo.

Đổi 3 giờ 12 phút = $\frac{16}{5}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe tải là x (km/h), của xe con là y (km/h). ĐK: x, y > 0

$$\Rightarrow \text{hpt} \begin{cases} 5x + \frac{16}{5}y = 360 \\ \frac{\frac{16}{5}y}{x} = \frac{5x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 50 \end{cases}$$

Bài tập 3. Quãng đường AB dài 90 km, có hai ô-tô khởi hành cùng một lúc. Ô-tô thứ nhất đi từ A đến B, ô-tô thứ hai đi từ B đến A. Sau 1 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi. Xe ô-tô thứ hai tới A trước xe thứ nhất tới B là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải tham khảo.

Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất là x (km/h), của ô tô thứ hai là y (km/h). ĐK: 0 < x; y < 90.

$$\Rightarrow \text{Hpt} \begin{cases} x + y = 90 \\ \frac{90}{x} - \frac{90}{y} = \frac{9}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 50 \end{cases}$$

Bài tập 4. Trên quãng đường AB, một xe máy đi từ A đến B cùng lúc đó một xe ô-tô đi từ B đến A, sau 4 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi thì xe ô-tô đến A sớm hơn xe máy đến B là 6 giờ. Tính thời gian mỗi xe đi hết quãng đường AB.

Lời giải tham khảo.

Gọi x (h) là thời gian xe máy đi hết quãng đường AB (đk: x > 4)

Gọi y (h) là thời gian ô-tô đi hết quãng đường AB (đk: y > 4)

Trong 1 giờ xe máy đi được: $\frac{1}{x}$ (quãng đường)

Trong 1 giờ xe ô tô đi được: $\frac{1}{y}$ (quãng đường)

Trong 1 giờ hai xe đi được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ (1)

Mà thời gian xe ô tô về đến A sớm hơn xe máy về đến B là 6 giờ nên: $x - y = 6$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{4} \\ y = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 14x + 24 = 0 \\ y = x - 6 \end{cases} \quad (DK : x \neq 6)$$

Giải hệ phương trình trên được: $x = 12$ (thỏa mãn); hoặc $x = 2$ (loại)

Với $x = 12$, tìm được $y = 6$. Do đó, nghiệm của hệ là (12;6)

Vậy thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là 12 giờ, ô tô đi hết quãng đường AB là 6 giờ.

Bài tập 5. Hai địa điểm A và B cách nhau 200km. Cùng một lúc một xe máy đi từ A và một ô tô đi từ B. Xe máy và ô tô gặp nhau tại điểm C cách A 120km. Nếu xe máy khởi hành sau ô tô 1h thì sẽ gặp nhau ở điểm D cách C 24km. Tính vận tốc của ô tô và xe máy.

Gợi ý:

		Vận tốc	Thời gian	Quãng đường
Lần đầu	Xe máy	x	$\frac{120}{x}$	120
	Ô tô	y	$\frac{80}{y}$	$200 - 120 = 80$
Lần sau	Xe máy	x	$\frac{144}{x}$	144
	Ô tô	y	$\frac{56}{y}$	$200 - 144 = 56$

$$\text{Hệ PT: } \begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{80}{y} = 0 \\ \frac{144}{x} - \frac{56}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 (km/h) \\ y = 40 (km/h) \end{cases}$$

3.2.2. Hai đối tượng đi cùng chiều nhau.

Ví dụ 1. Hai ô tô đi từ A đến B cách nhau 200km. Biết vận tốc ô tô thứ nhất nhanh hơn xe thứ hai là 10km/h nên xe thứ nhất đến B trước xe thứ hai là 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe

- Phân tích tìm lời giải

- Bài cho quãng đường AB bằng 200km
- Vận tốc ô tô thứ nhất lớn hơn vận tốc của ô tô thứ hai là 10km/h
- Thời gian ô tô thứ nhất đến B trước ô tô thứ hai là 1 giờ

- Sơ đồ tóm tắt cách giải

	S (km)	v (km/h)	t (h)
Ô tô 1	200	x	$\frac{200}{x}$
Ô tô 2	200	$x - 10$	$\frac{200}{x - 10}$

Điều kiện $x > 10$

Ta có phương trình $\frac{200}{x} + 1 = \frac{200}{x - 10}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 2000 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 50)(x + 40) = 0 \text{ (Sử dụng máy tính đưa về phương trình tích)}$$

$$\Leftrightarrow x = 50 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = -40 \text{ (loại)}$$

Ví dụ 2. Đường bộ từ A đến B là 240 km. Hai người đi cùng lúc từ A đến B, một người đi xe máy, một người đi ô tô. Người đi ô tô đến B sớm hơn người đi xe máy là 2 giờ. Biết mỗi giờ, ô tô đi nhanh hơn xe máy là 20 km. Tìm vận tốc xe máy và vận tốc ô tô.

Lời giải tham khảo:

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) với $x > 0$

thì vận tốc của ô tô là $x + 20$ (km/h)

Thời gian xe máy đi hết quãng đường AB: $\frac{240}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB: $\frac{240}{x + 20}$ (h)

Ta có PT: $\frac{240}{x} - \frac{240}{x + 20} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 20x - 2400 = 0$

Giải từng bước tìm được $x_1 = 40$; $x_2 = -60$ (loại)

Trả lời: vận tốc của xe máy là 40 km/h, vận tốc của ô tô là $40 + 20 = 60$ km/h

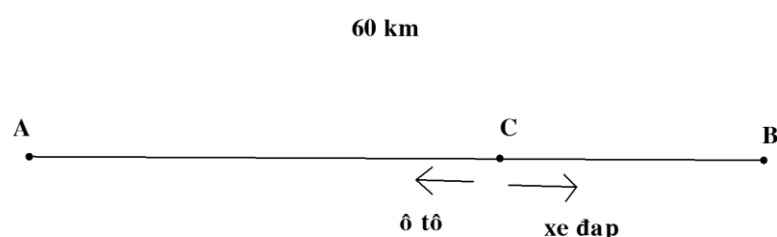
Ví dụ 3. Hai người đi xe đạp cùng xuất phát từ A để đến B với vận tốc bằng nhau.

Đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường, người thứ nhất bị hỏng xe nên dừng lại 20 phút và đón ô tô quay về A, còn người thứ hai không dừng lại mà tiếp tục đi với vận tốc cũ để tới B. Biết rằng khoảng cách từ A đến B là 60 km, vận tốc ô tô hơn vận tốc xe đạp là 48 km/h và khi người thứ hai tới B thì người thứ nhất đã về A trước đó 40 phút. Tính vận tốc của xe đạp

Lời giải tham khảo:

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe đạp, (Điều kiện: $x > 0$)

thì vận tốc của ô tô là $x + 48$ (km/h).



Hai người cùng đi xe đạp một đoạn đường $AC = \frac{2}{3}AB = 40$ km

Đoạn đường còn lại người thứ hai đi xe đạp để đến B là: $CB = AB - AC = 20$ km

Thời gian người thứ nhất đi ô tô từ C đến A là: $\frac{40}{x+48}$ (giờ)

và người thứ hai đi từ C đến B là: $\frac{20}{x}$ (giờ)

Theo giả thiết, ta có phương trình: $\frac{40}{x+48} + \frac{1}{3} = \frac{20}{x} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{40}{x+48} + 1 = \frac{20}{x}$

Giải phương trình trên:

$$40x + x(x+48) = 20(x+48) \text{ hay } x^2 + 68x - 960 = 0$$

Giải phương trình ta được hai nghiệm: $x_1 = -80 < 0$ (loại) và $x_2 = 12$

Vậy vận tốc của xe đạp là: 12 km/h

*** BÀI TẬP TỰ LUYỆN.**

Bài tập 1: Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ A đến B. Xe máy thứ nhất có vận tốc trung bình lớn vận tốc trung bình của xe máy thứ hai 10 km/h, nên đến trước xe máy thứ hai 1h. Tính vận tốc trung bình của mỗi xe máy, biết rằng quãng đường AB dài 120 km

Lời giải tham khảo

Gọi vận tốc trung bình của xe máy thứ hai là x (km/h), $x > 0$.

Suy ra vận tốc trung bình của xe máy thứ nhất là $x + 10$ (km/h)

$$\Rightarrow \text{phương trình: } \frac{120}{x} - \frac{120}{x+10} = 1 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 10x - 1200 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -40 & (L) \\ x = 30 & (TM) \end{cases}$$

Bài tập 2: Hai ô tô cùng lúc khởi hành từ thành phố A đến thành phố B cách nhau 100km với vận tốc không đổi. Vận tốc ô tô thứ hai lớn hơn vận tốc ô tô thứ nhất 10km/h nên ô tô thứ hai đến B trước ô tô thứ nhất 30 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô trên. (Đ/S: 40 km/h và 50 km/h)

Bài tập 3. Một ô tô khách và một ô tô tải cùng xuất phát từ địa điểm A đi đến địa điểm B đường dài 180 km do vận tốc của ô tô khách lớn hơn ô tô tải 10 km/h nên ô tô khách đến B trước ô tô tải 36 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô. Biết rằng trong quá trình đi từ A đến B vận tốc của mỗi ô tô không đổi. (Đ/S: 60 km/h và 50 km/h)

Bài tập 4. Hai xe cùng xuất phát từ A đến B, xe thứ nhất chạy nhanh xe thứ hai 10km/h nên đến B sớm hơn xe thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc của hai xe biết quãng đường AB dài là 300km. (Đ/S: 60 km/h và 50 km/h)

Bài tập 5. Một xe máy đi từ A đến B. Sau đó 1 giờ, một ô tô cũng đi từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 10 km/h. Biết rằng ô tô và xe máy đến B cùng một lúc. Tính vận tốc của mỗi xe, với giả thiết quãng đường AB dài 200km (Đ/S: 40 km/h và 50 km/h)

Bài tập 6: Quãng đường từ địa điểm A tới địa điểm B dài 90 km. Lúc 6 giờ một xe máy đi từ A để tới B. Lúc 6 giờ 30 phút cùng ngày, một ô tô cũng đi từ A để tới B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h (Hai xe chạy trên cùng một con đường đã cho). Hai xe nói trên đều đến B cùng lúc. Tính vận tốc mỗi xe. (Đ/S: 45 km/h và 60km/h)

Bài tập 7: Hai ô tô khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10 km nên đến B trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô. (Đ/S: 60 km/h và 50km/h)

Bài tập 8 (Hà nội 2017-2018). Một xe ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120 km. Do vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc xe máy 10km/h nên xe ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

DẠNG 4. TOÁN CÔNG VIỆC THAY ĐỔI NĂNG SUẤT.

***) KIẾN THỨC CƠ BẢN**

+) Bài toán công việc gồm có 3 đại lượng:

- Khối lượng công việc. (KLCV)
- Năng suất: Khối lượng công việc làm được trong một đơn vị thời gian (N)
- Thời gian hoàn thành công việc. (T)

Được liên hệ bởi công thức: $KLCV = N.T$

+ Với dạng toán này luôn có hai tình huống: kế hoạch (dự định) và thực tế, có bảng phân tích số liệu như sau.

	Khối lượng cv	Năng suất	Thời gian
Dự định			
Thực tế			

Ví dụ 1. Một đội máy kéo dự định mỗi ngày cày 40ha. Khi thực hiện mỗi ngày đội cày được 52ha, vì vậy đội không những cày xong trước thời hạn 2 ngày mà còn cày thêm được 4ha nữa. Tính diện tích đội phải cày?

Bảng phân tích.

	A	n	t
Dự định	x	40	$\frac{x}{40}$
Thực tế	x + 4	52	$\frac{x+4}{52}$

Điều kiện $x > 0$

Phương trình $\frac{x}{40} = \frac{x+4}{52} + 2 \quad \dots\dots\dots \Leftrightarrow x = 360$ (TMDK).

Ví dụ 2. Một tổ sản xuất có kế hoạch làm 200 sản phẩm với năng suất dự định. Thực tế mỗi ngày họ làm tăng thêm 10 sản phẩm nên tổ đã hoàn thành kế hoạch sớm 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày đội làm bao nhiêu sản phẩm

- Bảng phân tích số liệu.

	Khối lượng công việc	Năng suất	Thời gian (ngày)
--	----------------------	-----------	------------------

Dự định	200	x (x nguyên dương)	$\frac{200}{x}$
Thực tế	200	x + 10	$\frac{200}{x+10}$

. Ta có phương trình $\frac{200}{x} = \frac{200}{x+10} + 1$

$$\Rightarrow 200(x+10) = 200x + x(x+10) \Leftrightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0 \Leftrightarrow (x-40)(x+50) = 0 \text{ (Sử dụng máy tính)}$$

$\Leftrightarrow x = 40$ (thỏa mãn) hoặc $x = -50$ (loại). Kết luận

Ví dụ 3. Một đội công nhân dự định bốc dỡ 400 tấn hàng trong thời gian dự định. Do mỗi ngày làm tăng thêm 20 tấn nên đã xong sớm 1 ngày. Tính thời gian dự định bốc dỡ hàng

Bảng phân tích số liệu.

	Khối lượng công việc	Năng suất trên ngày	Thời gian
Dự định	400	$\frac{400}{x}$	x
Thực tế	400	$\frac{400}{x-1}$	x - 1

Điều kiện $x > 1$

Ta có phương trình $\frac{400}{x} + 20 = \frac{400}{x-1} \Rightarrow 400(x-1) + 20x(x-1) = 400x$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+4) = 0 \text{ (Sử dụng máy tính)}$$

$\Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn) hoặc $x = -4$ (loại). Kết luận

Ví dụ 4: Một đội công nhân xây dựng hoàn thành căn nhà với 480 ngày công. Khi thực hiện đội tăng cường thêm 3 công nhân nên thời gian hoàn thành công việc sớm hơn 8 ngày. Tính số công nhân ban đầu của đội.

- Bảng phân tích số liệu.

	Khối lượng công việc	Số công nhân	Thời gian
Dự định	480	x (x nguyên dương)	$\frac{480}{x}$
Thực tế	480	x + 3	$\frac{480}{x+3}$

Ta có phương trình $\frac{480}{x} = \frac{480}{x+3} + 8$

$\Rightarrow 480(x + 3) = 480x + 8x(x + 3) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$ (Sử dụng máy tính)
 $\Leftrightarrow (x - 12)(x + 15) = 0 \Leftrightarrow x = 12$ (thỏa mãn) hoặc $x = -15$ (loại). Kết luận

*** BÀI TẬP TỰ LUYỆN.**

Bài tập 1. Một tổ sản xuất theo kế hoạch cần làm 600 sản phẩm trong một thời gian quy định. Thực tế, do thao tác hợp lí, mỗi ngày tổ làm thêm được 10 sản phẩm nên không những hoàn thành sớm hơn kế hoạch 2 ngày mà còn vượt mức kế hoạch 50 sản phẩm. Tính số sản phẩm mà tổ phải làm mỗi ngày theo kế hoạch.

Bài tập 2. Một đội công nhân dự định bốc dỡ 400 tấn hàng trong thời gian dự định. Do mỗi ngày làm tăng thêm 20 tấn nên đã xong sớm 1 ngày. Tính thời gian dự định bốc dỡ hàng.

Bài tập 3. Một tổ công nhân theo kế hoạch được giao làm 72 sản phẩm trong một thời gian quy định. Nhưng thực tế, xí nghiệp lại giao cho tổ làm 80 sản phẩm. Vì vậy, mặc dù tổ đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm, song thời gian hoàn thành công việc vẫn tăng so với quy định 12 phút. Tính số sản phẩm mà tổ phải làm mỗi giờ theo kế hoạch, biết rằng mỗi giờ tổ làm không quá 20 sản phẩm).

Bài tập 4. Một tập đoàn đánh cá dự định trung bình mỗi tuần đánh bắt được 20 tấn cá, nhưng đã vượt mức được 6 tấn mỗi tuần nên chẳng những đã hoàn thành kế hoạch sớm 1 tuần mà còn vượt mức kế hoạch 10 tấn. Tính mức kế hoạch đã định.

Bài tập 5. Một nhóm thợ dệt kế hoạch sản xuất 3000 sản phẩm. Trong 8 ngày đầu họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành kế hoạch sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Bài tập 6. Theo kế hoạch, một công nhân phải hoàn thành 60 sản phẩm trong thời gian nhất định. Nhưng do cải tiến kĩ thuật nên mỗi giờ người công nhân đó đã làm thêm được 2 sản phẩm. Vì vậy, chẳng những đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 30 phút mà còn vượt mức 3 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm?

Bài tập 7(Hà nội 2011-2012). Một đội xe theo kế hoạch phải chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hàng hết bao nhiêu ngày?

Bài tập 8 (Hà nội 2021-2022). Một tổ sản xuất phải làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày quy định. Thực tế; mỗi ngày tổ đó làm được nhiều hơn 100

bộ so với số bộ phải làm theo kế hoạch. Vì thế 8 ngày trước khi hết thời hạn, tổ sản xuất đã làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế đó. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ làm xong trong mỗi ngày là bằng nhau).

DẠNG 5. TOÁN LÀM CHUNG LÀM RIÊNG MỘT CÔNG VIỆC

* KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Khi công việc không được đo bằng số lượng cụ thể, ta xem toàn bộ công việc là 1.

Nếu đội nào làm xong công việc trong x (ngày) thì trong 1 ngày đội đó làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

5.1. GIẢI BẰNG CÁCH LẬP HỆ PT.

Ví dụ 1: Hai công nhân cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi công nhân làm một mình thì trong bao lâu làm xong công việc.

* **Lời giải tham khảo.**

Gọi thời gian làm một mình để xong công việc của người thứ nhất, thứ hai lần lượt là x (giờ), y (giờ). ĐK: $x, y > 16$

+ Trong 1 giờ:

- Người thứ nhất làm được: $\frac{1}{x}$ (công việc)

- Người thứ hai làm được: $\frac{1}{y}$ (công việc)

- Cả hai người làm được: $\frac{1}{16}$ (công việc)

=> Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$ (1)

+ Trong 3 giờ, người thứ nhất làm được: $\frac{3}{x}$ (công việc)

Trong 6 giờ người thứ hai làm được: $\frac{6}{y}$ (công việc)

Theo đề bài cả hai làm được $\frac{1}{4}$ công việc => phương trình: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases} \text{ (t / m)}$$

Vậy: Thời gian làm một mình để xong công việc của người thứ nhất là 24 giờ, của người thứ hai là 48 giờ

Ví dụ 2. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì trong 5 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ 2 chảy trong 4 giờ thì được $\frac{2}{3}$ bể nước. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể.

*** Lời giải tham khảo.**

Gọi thời gian chảy một mình để đầy bể của vòi thứ nhất x (giờ), của vòi thứ hai là y (giờ). ĐK: x; y > 5.

+ Trong 1 giờ:

- Vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể);
- Vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ (bể)
- Trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{1}{5}$ (bể)

Vì hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước thì trong 5 giờ sẽ đầy bể nên ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ (1)

+ Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ 2 chảy trong 4 giờ thì được $\frac{2}{3}$ bể

nên ta có phương trình: $3 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ (2)

+ Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được x = 7,5 (thỏa mãn điều kiện)

y = 15 (thỏa mãn điều kiện)

Vậy thời gian vôi thứ nhất chảy một mình đầy bể là 7,5 giờ, thời gian vôi thứ hai chảy một mình đầy bể là 15 giờ.

Ví dụ 3. Hai máy ủi cùng làm việc trong vòng 12 giờ thì san lấp được $\frac{1}{10}$ khu đất.

Nếu máy ủi thứ nhất làm một mình trong 42 giờ rồi nghỉ và sau đó máy ủi thứ hai làm một mình trong 22 giờ thì cả hai máy ủi san lấp được 25% khu đất đó. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi máy ủi san lấp xong khu đất đã cho trong bao lâu ?

*** Lời giải tham khảo.**

Gọi x (giờ) và y (giờ) lần lượt là thời gian làm một mình của máy thứ nhất và máy thứ hai để san lấp toàn bộ khu đất ($x > 0$; $y > 0$)

Nếu làm 1 mình thì trong 1 giờ máy ủi thứ nhất san lấp được $\frac{1}{x}$ (khu đất),

và máy thứ 2 san lấp được $\frac{1}{y}$ (khu đất).

Theo giả thiết ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{10} \\ \frac{42}{x} + \frac{22}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$ và $v = \frac{1}{y}$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 12u + 12v = \frac{1}{10} \\ 42u + 22v = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được $u = \frac{1}{300}$; $v = \frac{1}{200}$, Suy ra: $(x; y) = (300; 200)$

Trả lời: Để san lấp toàn bộ khu đất thì: Máy thứ nhất làm một mình trong 300 giờ, máy thứ hai làm một mình trong 200 giờ .

*** BÀI TẬP TỰ LUYỆN:**

Bài tập 1. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được 25% công việc. Hỏi mỗi người là công việc đó trong mấy giờ thì xong.

Bài tập 2. Hai tổ công nhân làm chung trong 12 giờ sẽ hoàn thành xong công việc đã định. Họ làm chung với nhau trong 4 giờ thì tổ thứ nhất được điều đi làm việc khác, tổ thứ hai làm nốt công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi tổ thứ hai làm một mình thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc.

Bài tập 3. Hai người làm chung công việc trong 20 ngày sẽ hoàn thành. Sau khi làm chung được 12 ngày thì một trong hai người đi làm việc khác trong khi đó

người kia vẫn tiếp tục làm. Đi được 12 ngày người đó trở về làm tiếp 6 ngày nữa và hoàn thành công việc, trong khi đó người còn lại nghỉ làm. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc?

Bài tập 4. Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể chứa không có nước thì sau 1 giờ 30 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 15 phút rồi khoá lại và mở vòi thứ hai chảy tiếp trong 20 phút thì sẽ được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

Bài tập 5. Hai đội xây dựng cùng làm chung một công việc và dự định làm xong trong 12 ngày. Họ cùng làm với nhau được 8 ngày thì đội I được điều động làm việc khác, còn đội II tiếp tục làm. Do cải tiến kĩ thuật, năng suất tăng gấp đôi nên đội II đã làm xong phần công việc còn lại trong 3 ngày rưỡi. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì sau bao nhiêu ngày sẽ làm xong công việc nói trên (với năng suất bình thường)?

Bài tập 6 (Hà nội 2019-2020). Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên.

5.2. GIẢI BẰNG CÁCH LẬP PT.

Ví dụ 1. Lớp 9A và lớp 9B cùng lao động tổng vệ sinh sân trường thì sau 6 giờ sẽ hoàn thành xong công việc. Nếu làm riêng thì lớp 9A mất nhiều thời gian hơn lớp 9B là 5 giờ mới hoàn thành xong công việc. Hỏi nếu làm riêng, mỗi lớp cần bao nhiêu thời gian để hoàn thành xong công việc ?

Lời giải tham khảo.

Gọi thời gian làm một mình để xong công việc của lớp 9A là x (giờ). ĐK : $x > 6$

$\Rightarrow$ Thời gian làm một mình để xong công việc của lớp 9B là $x - 5$ (giờ)

+ Trong 1 giờ :

- Lớp 9A làm được: $\frac{1}{x}$ (công việc)
- Lớp 9B làm được: $\frac{1}{x-5}$ (công việc)
- Cả hai lớp làm được: $\frac{1}{6}$ (công việc)

$$\Rightarrow \text{Pt: } \frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6} \Rightarrow x^2 - 17x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x-15)(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2(\text{ktm}) \\ x = 15(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy, thời gian để lớp 9A hoàn thành 1 mình xong công việc là 15 giờ, lớp 9B hoàn thành 1 mình xong công việc là 10 giờ.

Ví dụ 2. (Hà nội năm 2012-2013). Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc?

*** Lời giải tham khảo.**

Gọi số giờ người thứ nhất hoàn thành công việc một mình là x (giờ), (ĐK: $x > \frac{12}{5}$)

Số giờ người thứ hai hoàn thành công việc một mình là $x + 2$ (giờ)

Trong 1 giờ :

- Người thứ nhất làm được : $\frac{1}{x}$ (công việc)
- Người thứ 2 làm được : $\frac{1}{x+2}$ (công việc)
- Cả hai người làm được: $1 : \frac{12}{5} = \frac{5}{12}$ (công việc)

$$\Rightarrow \text{phương trình : } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \text{ Giải pt ta được : } x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy người thứ nhất làm xong công việc trong 4 giờ và người thứ hai làm xong công việc trong 6 giờ

Ví dụ 3. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 4giờ 48phút bể đầy. Mỗi giờ lượng nước của vòi I chảy được bằng 1,5 lượng nước chảy được của vòi II. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

*** Lời giải tham khảo:**

$$\text{Đổi 4 giờ 48 phút} = \frac{24}{5} \text{ (giờ)}$$

Gọi thời gian chảy riêng để đầy bể của vòi II là x (giờ). ĐK: $x > \frac{24}{5}$

$\Rightarrow$ Thời gian chảy riêng để đầy bể của vòi I là $1,5.x$ (giờ).

+ Trong 1 giờ:

- Vòi II chảy được: $\frac{1}{x}$ (bể).

- Vòi I chảy được: $\frac{1}{1,5x} = \frac{2}{3x}$ (bể)

- Cả hai vòi chảy được: $1: \frac{24}{5} = \frac{5}{24}$ (bể)

$$\Rightarrow \text{Pt: } \frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow \frac{5}{3x} = \frac{5}{24} \Rightarrow x = 8(\text{tm})$$

Vậy:.....

* BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài tập 1. Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 12 giờ, nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 7 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian để mỗi đội hoàn thành công việc là bao nhiêu?

Bài tập 2. Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành trong 4 ngày. Biết rằng, nếu làm một mình xong việc thì người thứ hai làm chậm hơn người thứ nhất 6 ngày. Tính thời gian mỗi người làm một mình để xong công việc.

Bài tập 3. Hai vòi cùng chảy vào một bể cạn không có nước trong 4 giờ thì được $\frac{2}{3}$ bể. Nếu chảy riêng thì vòi I chảy đầy bể nhanh hơn vòi II là 5 giờ. Hỏi,

nếu chảy riêng để đầy bể thì mỗi vòi chảy trong bao nhiêu giờ?

Bài tập 4. Hai người thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm thì trong 6 ngày xong việc. Nếu họ làm riêng thì người thợ thứ nhất hoàn thành công việc chậm hơn người thợ thứ hai là 9 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người thợ phải làm trong bao nhiêu ngày để xong việc.

Bài tập 5. Nếu mở cả hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút thì đầy bể. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi, nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu thì đầy bể?

DẠNG 6. TOÁN CHỖ HÀNG.

* *Dạng toán này tương tự như toán năng suất: Gồm có ba đại lượng:*

- *Khối lượng hàng cần chở.*
- *Số xe đi chở hàng.*
- *Khối lượng hàng mỗi xe chở được.*

Liên hệ với nhau bởi công thức:

Khối lượng hàng = Số xe . khối lượng mỗi xe chở được.

*** Luôn có hai tình huống: kế hoạch và thực tế**

+ Với toán này dùng bảng phân tích số liệu như sau:

	KL hàng	Số xe chở hàng	KL hàng mỗi xe chở
Kế hoạch			
Thực tế			

Ví dụ 1. Một công ty vận tải điều một số xe tải đến kho hàng để chở 21 tấn hàng. Khi đến kho hàng thì có 1 xe bị hỏng nên để chở hết lượng hàng đó, mỗi xe phải chở thêm 0,5 tấn so với dự định ban đầu. Hỏi lúc đầu công ty đã điều đến kho hàng bao nhiêu xe. Biết rằng khối lượng hàng chở ở mỗi xe là như nhau.

Bảng phân tích số liệu như sau:

	KL hàng (tấn)	Số xe chở hàng	KL hàng mỗi xe chở
Kế hoạch	21	x	$\frac{21}{x}$
Thực tế	21	x - 1	$\frac{21}{x-1}$

*** Lời giải tham khảo.**

Gọi số xe đã điều đến kho hàng lúc đầu là x (xe). ĐK: (x > 1, x ∈ Z)

⇒ số xe thực tế chở hàng là x - 1 (xe)

Dự định mỗi xe chở $\frac{21}{x}$ (tấn hàng); Thực tế mỗi xe chở $\frac{21}{x-1}$ (tấn hàng)

Thực tế, mỗi xe phải chở thêm 0,5 tấn so với dự định ban đầu nên ta có phương

$$\text{trình: } \frac{21}{x-1} - \frac{21}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 7 \text{ (t/m) ; } x_2 = -6 \text{ (loại)}$$

Vậy lúc đầu công ty đã điều đến kho hàng 7 xe.

Ví dụ 2. Một công ty vận tải dự định điều một số xe tải để vận chuyển 24 tấn hàng. Thực tế khi đến nơi thì công ty bổ sung thêm 2 xe nữa nên mỗi xe chở ít đi 2 tấn so với dự định. Hỏi số xe dự định được điều động là bao nhiêu? Biết số lượng hàng chở ở mỗi xe như nhau và mỗi xe chở một lượt.

*** Bảng phân tích số liệu**

	KL hàng (tấn)	Số xe chở hàng	KL hàng mỗi xe chở
Kế hoạch	24	x	$\frac{24}{x}$
Thực tế	24	$x + 2$	$\frac{24}{x + 2}$

*** Lời giải tham khảo.**

Gọi số xe ban đầu là x (xe). ĐK: ($x > 0, x \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow$ số xe thực tế chở hàng là $x + 2$ (xe)

+ Theo dự định mỗi xe chở là $\frac{24}{x}$ (tấn hàng); thực tế mỗi xe chở là $\frac{24}{x + 2}$ (tấn)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{24}{x} - \frac{24}{x + 2} = 2 \Leftrightarrow \frac{12}{x} - \frac{12}{x + 2} = 1$

$$\Rightarrow 12(x + 2) - 12x = x(x + 2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$$

Từ đó ta tìm được $x_1 = 4$ (thỏa mãn điều kiện) và $x_2 = -6$ (loại).

Vậy số xe ban đầu là 4 xe.

Ví dụ 3. Hướng ứng phong trào “*Vì biển đảo Trường Sa*” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau?

*** Bảng phân tích số liệu**

	KL hàng (tấn)	Số xe chở hàng	KL hàng mỗi xe chở
Kế hoạch	280	x	$\frac{280}{x}$
Thực tế	286	$x + 1$	$\frac{286}{x + 1}$

*** Lời giải tham khảo.**

Gọi số tàu đội dự định chở hàng là x (chiếc). ĐK: ($x > 0, x \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow$ Số tàu thực tế chở hàng là $x + 1$ (chiếc)

+ Theo dự định mỗi tàu chở: $\frac{280}{x}$ (tấn hàng); Thực tế mỗi tàu chở: $\frac{286}{x + 1}$ (tấn hàng)

Theo đề bài ta có pt: $\frac{280}{x} - \frac{286}{x + 1} = 2 \Rightarrow x^2 + 4x - 140 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (t/m)} \\ x = -14 \text{ (l)} \end{cases}$

Vậy đội dự định 10 chiếc tàu đi chở hàng.

*** BÀI TẬP TỰ LUYỆN.**

Bài tập 1. Một đội xe cần chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc, đội được bổ sung thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn hàng so với dự định. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu xe, biết khối lượng hàng chở trên mỗi xe như nhau.

Bài tập 2: Một đội xe cần phải chuyên chở 150 tấn hàng. Hôm làm việc có 5 xe được điều đi làm nhiệm vụ khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 5 tấn. Hỏi đội xe ban đầu có bao nhiêu chiếc? (Đ/S: 15 chiếc)

Bài tập 3: Một đội xe dự định chở 120 tấn hàng. Để tăng sự an toàn nên đến khi thực hiện, đội xe được bổ sung thêm 4 chiếc xe, lúc này số tấn hàng của mỗi xe chở ít hơn số tấn hàng của mỗi xe dự định chở là 1 tấn. Tính số tấn hàng của mỗi xe dự định chở, biết số tấn hàng của mỗi xe chở khi dự định là bằng nhau, khi thực hiện là bằng nhau.

Bài tập 4: Một đội xe nhận vận chuyển 72 tấn hàng nhưng khi sắp khởi hành thì có 3 xe bị hỏng, do đó mỗi xe phải chở nhiều hơn 2 tấn so với dự định. Hỏi lúc đầu đội xe có bao nhiêu chiếc, biết khối lượng hàng mỗi xe phải chở là như nhau.

DẠNG 7: TOÁN CÓ TỈ LỆ PHẦN TRĂM

1. Một số lưu ý khi giải bài toán phần trăm

1.1) Kế hoạch có x

Thực tế

- Tăng, vượt m% khi đó có: $x + m\%x = (100 + m)\%x$

- Giảm n% khi đó có: $x - n\%x = (100 - n)\%x$

1.2) Làm được, đạt m% khi đó bằng: $m\%x$

1.3) Chú ý:

$$m\%x + n\%y = a \Leftrightarrow mx + ny = 100.a$$

1.4) Bảng phân tích số liệu.

	Tổng số công việc	Đối tượng A	Đối tượng B
Dự định			
Thực tế			
Vượt mức			

Ví dụ 1: Theo kế hoạch 2 ô tô chở tất cả 360 tấn hàng. Xe 1 chở vượt mức 12%, xe 2 chở vượt mức 10% do đó hai xe chở được 400 tấn. Hỏi theo kế hoạch mỗi xe chở bao nhiêu tấn.

- Bảng phân tích:**Cách 1: Dùng phương trình**

	Tổng số hàng	Số hàng xe 1 chỗ	Số hàng xe 2 chỗ
Dự định	360	x	360 - x
Thực tế	400	$x + 12\%x$	$360 - x + 10\%(360 - x)$
Vượt mức	40	$12\%x$	$10\% (360 - x)$

Điều kiện $x > 0$ Ta có phương trình: $12\%x + 10\%(360 - x) = 40$

$$\Leftrightarrow 12x + 10(360 - x) = 4000$$

$$\Leftrightarrow 2x = 400 \Leftrightarrow x = 200 \text{ (thỏa mãn)}$$

Cách 2: Dùng hệ phương trình

	Tổng số hàng 2 xe chỗ	Số hàng xe 1 chỗ	Số hàng xe 2 chỗ
Dự định	360	x	y
Thực tế	400	$x + 12\%x$	$y + 10\%y$
Vượt mức	40	$12\% x$	$10\% y$

Điều kiện $x > 0; y > 0$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 360 \\ 12\%x + 10\%y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 360 \\ 12x + 10y = 4000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 160 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch ?

	Tổng số hàng 2 xe chỗ	Tổ I	Tổ II
Dự định	600	x	y
Thực tế	720	$x + 18\%x$	$y + 21\%y$
Vượt mức	120	$18\% x$	$21\% y$

Hướng dẫn giải

Gọi x, y là số sản phẩm của tổ I, II theo kế hoạch .

ĐK: x, y nguyên dương và $x < 600; y < 600$.+ Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm nên ta có phương trình: $x + y = 600$

(1)

+ Thực tế :

- Tổ I vượt mức 18% $\Rightarrow$ Số sản phẩm vượt mức của tổ I là: $\frac{18}{100}x$ (sp)
- Tổ II vượt mức 21% $\Rightarrow$ Số sản phẩm vượt mức của tổ II là: $\frac{21}{100}y$ (sp).

Do số sản phẩm của hai tổ vượt mức 120(sp) nên ta có phương trình:

$$\frac{18}{100}x + \frac{21}{100}y = 120 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 600 \\ \frac{18}{100}x + \frac{21}{100}y = 120 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = 200$ (thỏa mãn điều kiện), $y = 400$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy số sản phẩm được giao theo kế hoạch của tổ I là 200, của tổ II là 400.

* BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài tập 1: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất được giao làm 600 sản phẩm. Nhờ tăng năng suất lao động tổ 1 làm vượt mức 10% và tổ hai làm vượt mức 20% so với kế hoạch của mỗi tổ, nên cả hai tổ làm được 685 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ làm theo kế hoạch.

Bài tập 2: Tháng đầu, hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai, do cải tiến kỹ thuật nên tổ I vượt mức 10% và tổ II vượt mức 12% so với tháng đầu, vì vậy, hai tổ đã sản xuất được 1000 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

(Đ/S: 400 và 500)

Bài tập 3 Trong tháng thanh niên Đoàn trường phát động và giao chỉ tiêu mỗi chi đoàn thu gom 10kg giấy vụn làm kế hoạch nhỏ. Để nâng cao tinh thần thi đua bí thư chi đoàn 10A chia các đoàn viên trong lớp thành hai tổ thi đua thu gom giấy vụn. Cả hai tổ đều rất tích cực. Tổ 1 thu gom vượt chỉ tiêu 30%, tổ hai gom vượt chỉ tiêu 20% nên tổng số giấy chi đoàn 10A thu được là 12,5 kg. Hỏi mỗi tổ được bí thư chi đoàn giao chỉ tiêu thu gom bao nhiêu kg giấy vụn?

(Đ/S: 5kg và 5kg)

Bài tập 4: Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 600 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 10%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 20% so với năm ngoái. Do đó cả hai đơn vị thu hoạch được 685 tấn thóc. Hỏi năm ngoái, mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc?

Bài tập 5: Tháng giêng hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy; tháng hai do cải tiến kỹ thuật tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% so với tháng giêng, vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng giêng mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Bài tập 6. Hai trường A và B có 420 học sinh đỗ vào lớp 10 đạt tỉ lệ đỗ là 84%. Riêng trường A tỉ lệ đỗ là 80%, riêng trường B tỉ lệ đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Bài tập 7: Anh Bình đến siêu thị để mua một cái bàn ủi và một cái quạt điện với tổng số tiền theo giá niêm yết là 850 ngàn đồng. Tuy nhiên, thực tế khi trả tiền, nhờ siêu thị khuyến mãi để tri ân khách hàng nên giá của bàn ủi và quạt điện đã lần lượt giảm bớt 10% và 20% so với giá niêm yết. Do đó, anh Bình đã trả ít hơn 125 ngàn đồng khi mua hai sản phẩm trên. Hỏi số tiền chênh lệch giữa giá bán niêm yết với giá bán thực tế của từng loại sản phẩm mà anh Bình đã mua là bao nhiêu?

DẠNG 8. TOÁN CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC

*) KIẾN THỨC CƠ BẢN

Diện tích hình chữ nhật $S = x.y$ (x là chiều rộng; y là chiều dài)

Diện tích tam giác $S = \frac{1}{2}x.y$ (x là chiều cao, y là cạnh đáy tương ứng)

Độ dài cạnh huyền : $a^2 = b^2 + c^2$ (a là độ dài cạnh huyền; b, c là độ dài các cạnh góc vuông)

8.1 MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP GIẢI BẰNG CÁCH LẬP HỆ PT.

* Chú ý

Hình chữ nhật có các kích thước là x và y

- Chu vi là $2(x + y)$
- Diện tích là xy

Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là x và y

Diện tích là $\frac{1}{2}xy$

* BẢNG PHÂN TÍCH LỜI GIẢI.

	Chiều dài	Chiều rộng	Chu vi	Diện tích
Lúc đầu				
Lúc sau				

Ví dụ 1: Một sân trường hình chữ nhật có chu vi là 340m. Biết 3 lần chiều dài hơn 4 lần chiều rộng là 20m. Tính chiều dài và chiều rộng của sân trường

*** Bảng phân tích số liệu.**

	Chiều dài	Chiều rộng	Chu vi
Lúc đầu	x	y	$2(x + y)$
Lúc sau	3x	4y	

Điều kiện $85 < y < x < 170$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(x + y) = 340 \\ 3x = 4y + 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 170 \\ 3x - 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 510 \\ 3x - 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 70 \end{cases}$$

Kết luận

Ví dụ 2. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34m. Nếu tăng thêm chiều dài 3m và chiều rộng 2m thì diện tích tăng thêm 45m^2 . Hãy tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

*** Bảng phân tích số liệu.**

	Chiều dài	Chiều rộng	Chu vi	Diện tích
Lúc đầu	x	y	$2(x + y) = 34$	$x \cdot y$
Lúc sau	$x + 3$	$y + 2$		$(x + 3)(y + 2)$

Gọi chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là $x(\text{m})$; $y(\text{m})$.

ĐK : $x ; y > 0$

+ Chu vi của mảnh vườn là 34 (m) $\Rightarrow$ pt: $2(x + y) = 34 \Leftrightarrow 2x + 2y = 34$ (1).

+ Diện tích trước khi tăng: xy (m^2).

Diện tích sau khi tăng: $(x + 3)(y + 2)$ (m^2).

Theo đề bài có pt: $(x + 3)(y + 2) - xy = 45 \Leftrightarrow 2x + 3y = 39$ (2)

+ Từ (1) và (2) có hệ: $\begin{cases} 2x + 2y = 34 \\ 2x + 3y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$ (t/m)

Vậy chiều dài là 12m, chiều rộng là 5m.

Ví dụ 3: Cho mảnh đất hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 45 m. Nếu giảm chiều dài 2 lần tăng chiều rộng lên 3 lần thì chu vi không đổi. Tính diện tích mảnh đất

*** Lời giải tham khảo.**

Gọi chiều dài, chiều rộng của thửa ruộng lần lượt là x (m), y (m). Điều kiện $x >$

$0, y > 0$; + Vì chiều rộng ngắn hơn chiều dài 45(m) nên ta có pt: $x - y = 45$ (1).

+ Sau khi thay đổi: Chiều dài giảm 2 lần; chiều rộng tăng 3 lần ta được hình chữ nhật có hai kích thước là $\frac{x}{2}$ (m) và $3y$ (m).

Theo giả thiết chu vi không thay đổi nên $2(x + y) = 2\left(\frac{x}{2} + 3y\right)$ (2).

$$+ \text{ Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x - y = 45 \\ 2(x + y) = 2\left(\frac{x}{2} + 3y\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \text{ (tm)} \\ y = 45 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy diện tích của thửa ruộng là $S = xy = 900 \text{ (m}^2\text{)}$.

* BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài tập 1. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 100 m. Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4m thì diện tích giảm 2 m^2 . Tính diện tích của mảnh vườn.

Bài tập 2: Một hình chữ nhật ban đầu có chu vi bằng 2010 cm. Biết rằng nếu tăng chiều dài của hình chữ nhật thêm 20 cm và tăng chiều rộng thêm 10 cm thì diện tích hình chữ nhật ban đầu tăng lên $13\,300 \text{ cm}^2$. Tính chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu.

Bài tập 3. Một khu đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng là 10m. Nếu chiều dài tăng thêm 6m, chiều rộng giảm đi 3m thì diện tích mới tăng hơn diện tích cũ là 12 m^2 . Tính các kích thước của khu đất.

Bài tập 4. Một hình chữ nhật có chu vi 320m. Nếu tăng chiều dài 10m, tăng chiều rộng 20m thì diện tích tăng thêm 2700 m^2 . Tính độ dài mỗi chiều.

Bài tập 5. Một hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 2cm. Nếu tăng thêm chiều dài 4cm và giảm chiều rộng đi 3cm thì diện tích hình chữ nhật không thay đổi. Tính chiều dài ban đầu của các cạnh hình chữ nhật.

Bài tập 6. Một hình chữ nhật có chu vi 800m. Nếu giảm chiều dài đi 20%, tăng chiều rộng thêm $\frac{1}{3}$ của nó thì chu vi không đổi. Tính số đo chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật.

8.2: MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP GIẢI BẰNG CÁCH LẬP PT.

Ví dụ 1: Một mảnh vườn hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 15m và chiều dài hơn chiều rộng 3m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.

* Lời giải tham khảo.

Gọi chiều dài mảnh vườn là x (m). Điều kiện $x > 3$

⇒ Chiều rộng mảnh vườn là $x - 3$ (m).

+ Theo bài, biết mảnh vườn hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 15m, ta có phương trình

$$x^2 + (x - 3)^2 = 15^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 216 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 108 = 0 \quad (1)$$

Giải pt (1) ta được : $x = 12$ (thỏa mãn) hoặc $x = -9$ (loại)

Vậy chiều dài mảnh vườn là 12m ; chiều rộng mảnh vườn là 9m

*** Bài này có thể giải bằng cách lập hpt:**

Gọi chiều dài mảnh vườn là x (m) ; chiều rộng mảnh vườn là y (m)

Điều kiện $x > 3$; $y > 0$

Ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} x = y + 3 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 15^2 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta được $y^2 + (y + 3)^2 = 15^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 6y - 216 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 3y - 108 = 0 \quad (1)$

Giải pt (1) ta được $y = 9$ (thỏa mãn) hoặc $y = -12$ (loại)

Vậy chiều dài mảnh vườn là 12m ; chiều rộng mảnh vườn là 9m

*** Nhận xét cách giải**

Chọn lập phương trình thì cách giải đơn giản hơn

Ví dụ 2: Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 3m và diện tích bằng 270m^2 . Tìm chiều dài, chiều rộng của khu vườn.

Tham khảo lời giải

Gọi x (m) là chiều rộng của khu vườn. (ĐK: $x > 0$). Chiều dài của khu vườn là: $x + 3$ (m)

Do diện tích khu vườn là 270m^2 nên ta có phương trình:

$$x(x + 3) = 270 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 270 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = 15$ (thỏa mãn điều kiện),

$$x_2 = -18 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy chiều rộng khu vườn là 15 m, chiều dài khu vườn là 18 m.

Ví dụ 3: Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 13 cm .Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 7 cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Tham khảo lời giải.

Gọi x (cm) là độ dài cạnh góc vuông lớn (điều kiện: $7 < x < 13$)

⇒ độ dài cạnh nhỏ là : $x - 7$ (cm)

+ Vì độ dài cạnh huyền bằng 13 cm nên ta có phương trình: $x^2 + (x - 7)^2 = 13^2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 60 = 0$$

+ Giải phương trình ta được : $x_1 = 12$ (tmđk)

$$x_2 = -5 \text{ (loại)}$$

Trả lời : Vậy độ dài hai cạnh của tam giác vuông là : 12cm và 7cm.

* BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài tập 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Tính kích thước của mảnh đất, biết rằng diện tích mảnh đất là 150 m^2 .

Bài tập 2: Một hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 2 cm và diện tích của nó là 15 cm^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó.

Bài tập 3 (Hà nội 2018-2019): Một hình chữ nhật có chu vi bằng 28 cm và mỗi đường chéo của nó có độ dài 10 cm. Tìm độ dài các cạnh của hình chữ nhật đó.

Bài tập 4 (Hà nội 2010-2011): Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Bài tập 5 (Hà nội 2016-2017): Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m^2 . Nếu tăng chiều dài thêm 10m và giảm chiều rộng 6m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn?

Bài tập 6 : Một hình chữ nhật có diện tích bằng 12 m^2 . Nếu tăng chiều dài 2m đồng thời giảm chiều rộng 5m thì thu được một hình vuông. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật?

* CÁC DẠNG TOÁN KHÁC

1) Dạng xếp ghế trong một phòng họp

Bài tập 1 Một phòng họp có 90 người họp được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu ta bớt đi 5 dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm 3 người mới đủ chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế và mỗi dãy ghế được xếp bao nhiêu người?

Bài tập 2: Một phòng học có 10 băng ghế. Học sinh của lớp 9A được sắp xếp chỗ ngồi đều nhau trên mỗi băng ghế. Nếu bớt đi 2 băng ghế, thì mỗi băng ghế phải bố trí thêm một học sinh ngồi nữa mới đảm bảo chỗ ngồi cho tất cả học sinh của lớp. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh.

Bài tập 3: Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì số chỗ ngồi

trong phòng không thay đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy.

2) Dạng toán có nội dung vật lý, hóa học.

Bài tập 1. Một vật là hợp kim đồng và kẽm có khối lượng là 124g và có thể tích là 15cm^3 . Tính xem trong đó có bao nhiêu gam đồng và bao nhiêu gam kẽm, biết rằng cứ 89g đồng thì có thể tích là 10cm^3 và 7g kẽm thì có thể tích là 1cm^3 .

Bài tập 2. Có hai dung dịch muối I và II. Người ta hòa 200 gam dung dịch muối I với 300 gam dung dịch muối II thì được dung dịch có nồng độ muối là 4%. Tính nồng độ muối trong mỗi dung dịch I và II biết rằng nồng độ muối trong dung dịch I lớn hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 5%.

Bài tập 3. Cho một lượng dung dịch chứa 10% muối. Nếu pha thêm 200 gam nước thì được một dung dịch 6%. Hỏi có bao nhiêu gam dung dịch đã cho.

Bài tập 4. Trong 300 gam dung dịch a-xit, lượng a-xit nguyên chất chiếm 10%. Phải thêm bao nhiêu gam nước vào dung dịch để được nồng độ a-xit trong dung dịch là 6%.

Với dạng toán này, việc biết kẻ bảng là một lợi thế cho học sinh. Từ việc kẻ bảng, học sinh thực hiện từng bước cẩn thận: gọi ẩn đặt điều kiện cho ẩn, biểu diễn những đại lượng chưa biết qua ẩn và đại lượng đã biết, từ mối quan hệ của các đại lượng lập phương trình, thực hiện giải phương trình, chọn kết quả và trả lời. Học sinh nên xem lại SGK, tài liệu ôn tập để ôn tập theo từng dạng bài: chuyển động, năng suất, toán %, toán chung riêng, toán có nội dung hình học...

Thứ nhất, với dạng bài giải toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình, lưu ý học sinh không nên có tư duy làm tắt. Các em có thể diễn giải các bước dài một chút nhưng nhất định phải làm đầy đủ các bước. Với lối trình bày không đầy đủ ý hay thiếu kết luận trong dạng bài này, học sinh có thể bị trừ đến 0,25 điểm trong bài thi. Đây là điều rất đáng tiếc bởi vì bài toán này được coi là câu “gỡ điểm” trong đề thi.

Thứ hai, trong những bài Toán về giải toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình, học sinh thường mắc những sai lầm phổ biến như:

- Không đọc kỹ đề.
- Đặt ẩn thiếu (sai) điều kiện.
- Khi biểu diễn các đại lượng quên không ghi đơn vị.
- Không chú ý các đại lượng chưa đưa về cùng đơn vị.

- Không trả lời đúng câu hỏi.

Để tránh những lỗi sai, thiếu sót khi làm bài, các em cần đặc biệt chú ý:

- Đọc thật kỹ đề bài, có thể tóm tắt hoặc vẽ biểu đồ, sơ đồ ra nháp để dễ hiểu hơn
- Liên hệ thực tế để đặt đúng điều kiện của ẩn (ví dụ số người phải là số tự nhiên, thời gian phải là số dương,...)
- Không chỉ ghi điều kiện ở phần đặt ẩn mà sau mỗi lần biểu diễn các đại lượng khác theo ẩn đều phải ghi đơn vị.
- Đảm bảo các số đo của cùng một đại lượng thì cùng đơn vị (ví dụ trong bài có đại lượng thời gian thì phải đổi hết về cùng giờ hoặc phút, ... chứ không được để số thì theo giờ số thì theo phút). Đảm bảo 2 vế của một phương trình luôn cùng đại lượng và cùng đơn vị
- Sau khi tìm ra nghiệm, cần đọc lại yêu cầu đề bài lần nữa, đảm bảo kết luận đúng trọng tâm.

CHỦ ĐỀ : CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ - ĐỒ THỊ

1/Dạng 1: Xác định hàm số. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

A, Phương pháp giải

Hàm số $y = ax + b$

- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$.
Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.
- $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị khi $y_0 = ax_0 + b$

Hàm số $y = ax^2$

- * Nếu $a > 0$
 - + Hàm số đồng biến khi $x > 0$
 - + Hàm số nghịch biến khi $x < 0$
- * Nếu $a < 0$
 - + Hàm số đồng biến khi $x < 0$
 - + Hàm số nghịch biến khi $x > 0$

$A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị khi $y_0 = ax_0^2$

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = (a+1)x^2$. Tìm a để hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.

Hướng dẫn

Hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$ $\hat{U}$ $a+1 > 0$ $\hat{U}$ $a > -1$.

Vậy $a > -1$.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng $d: y = (m-1)x + n$. Tìm các giá trị của m và n để đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -1)$ và có hệ số góc bằng -3 .

Hướng dẫn

Đường thẳng d có hệ số góc bằng -3 nên $m-1 = -3$ $\hat{U}$ $m = -2$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -1)$ nên $-1 = -3 \cdot 1 + n$ $\hat{U}$ $n = 2$

Vậy $m = -2, n = 2$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị là (D) . Tìm a, b biết rằng (D) đi qua hai điểm $A(5; 1)$ và $B(-1; -1)$.

Hướng dẫn

Theo giả thiết (D) đi qua hai điểm $A(5; 1)$ và $B(-1; -1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 1 = 5a + b \\ -1 = -a + b \end{cases} \hat{U} \begin{cases} 6a = 2 \\ b = a - 1 \end{cases} \hat{U} \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Thay vào phương trình của hàm số ta được: $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

Ví dụ 4: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m^2 - m + 2017)x + 2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\hat{U} a > 0 \hat{U} m^2 - m + 2017 > 0$, với mọi m .

$\hat{U} \frac{m^2}{2} - \frac{1}{2}m + \frac{8067}{4} > 0$, với mọi m (luôn đúng).

Vậy với mọi giá trị của m thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 5.

Cho đường thẳng $(d): y = 2x + m - 1$.

a) Khi $m = 3$, tìm a để điểm $A(a; -4)$ thuộc đường thẳng (d) .

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại M và N sao cho tam giác OMN có diện tích bằng 1.

Hướng dẫn

a) Khi $m = 3$ để điểm $A(a; -4)$ thuộc đường thẳng (d) thì $-4 = 2.a + 3 - 1 \hat{U} a = -3$.

Vậy $a = -3$

b) Đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại M và N thì

$$M\left(\frac{1-m}{2}; 0\right) \text{ và } N(0; m-1) \text{ nên } S_{MNO} = \frac{1}{2}MO.NO = \frac{1}{2}\left|(m-1) \cdot \frac{1-m}{2}\right|$$

$$\text{Mà } S_{MNO} = 1 \hat{U} \frac{1}{2}\left|(m-1) \cdot \frac{1-m}{2}\right| = 1 \hat{U} (m-1)^2 = 4 \hat{U} \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy $m = 3, m = -1$.

2/ Dạng 2: Vẽ đồ thị của hàm số

A, Phương pháp giải

- Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất:

+ Đồ thị hàm số $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và đi qua điểm $M(1; a)$.

+ Đồ thị hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng qua $A(0; b)$ và qua $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

Chú ý: Có thể thay điểm $B\left(\frac{-b}{a}; 0\right)$ với một điểm C khác bằng cách cho x bởi một giá trị nguyên nào đó rồi xác định y.

- Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

+ Lập bảng giá trị.

+ Vẽ đồ thị.

Bài tập mẫu

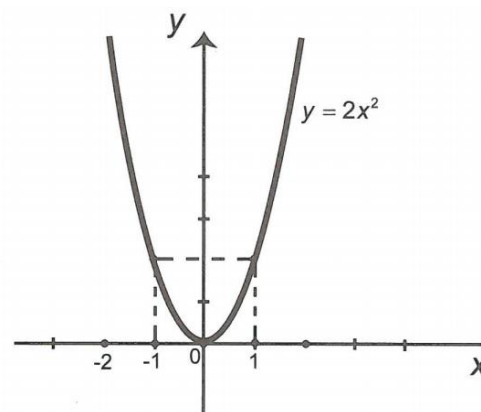
Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = 2x^2$. Vẽ đồ thị parabol (P).

Hướng dẫn

Bảng giá trị giữa x và y:

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

Đồ thị hàm số đã cho có dạng như hình vẽ.



Ví dụ 2: a) Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x + 2$

b) Gọi A, B là giao điểm của đồ thị hàm số trên với trục tung và trục hoành. Tính diện tích tam giác OAB.

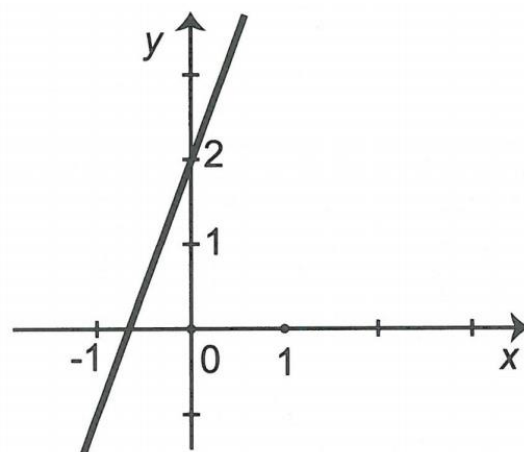
Hướng dẫn

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x + 2$

Đồ thị đi qua $A(0;2)$ và $B\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$

b) Ta có $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\left|2 \cdot -\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

Vậy $S_{OAB} = \frac{2}{3}$.



Ví dụ 3: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 4x + 9$.

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Viết phương trình đường thẳng (d_1) biết (d_1) song song với đường thẳng (d) và tiếp xúc (P) .

Hướng dẫn

a) Vẽ đồ thị $(P): y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số có dạng như hình vẽ.

b) Gọi phương trình đường thẳng (d_1) có dạng: $y = ax + b$.

Vì (d_1) song song với (d) nên ta có: $\begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$ $(d_1): y = 4x - 4$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_1) là:

$$x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (*)$$

Vì (d_1) tiếp xúc với (P) nên $(*)$ có nghiệm kép $\Delta = 0 \Leftrightarrow 16 - 4 = 0 \Leftrightarrow b = -4$ (thoả mãn).

Vậy phương trình đường thẳng (d_1) là: $y = 4x - 4$.

3/ Dạng 3: Tìm điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi tham số

A, Phương pháp giải

- Bước 1: Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng $(d): y = ax + b$ luôn đi qua.

- Bước 2: Đặt điều kiện $y_0 = ax_0 + b$ đúng với mọi m .

- Bước 3: Biến đổi $(*)$ về dạng $Am + B = 0 \quad \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

- Bước 4: Kết luận.

Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Cho đường thẳng: $(m-1)x + (m-2)y = 1$ (với m là tham số). Chứng minh rằng đường thẳng luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .

Hướng dẫn

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc đường thẳng đã cho. Ta có:

$$(m-1)x_0 + (m-2)y_0 = 1 \text{ với mọi } m \quad \hat{=} \quad m(x_0 + y_0) - (x_0 + 2y_0 + 1) = 0 \text{ với mọi } m$$

$$\hat{=} \begin{cases} x_0 + y_0 = 0 \\ x_0 + 2y_0 + 1 = 0 \end{cases} \quad \hat{=} \begin{cases} y_0 = -1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng đã cho luôn đi qua điểm $M(1; -1)$ với mọi m .

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng:

$$(d_1): y = -mx + m + 1, (d_2): y = \frac{1}{m}x - 1 - \frac{5}{m} \text{ (với } m \text{ là tham số khác } 0).$$

Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d_1) luôn đi qua. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng luôn thuộc một đường cố định.

Hướng dẫn

Giả sử $M(x_M; y_M)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d_1) luôn đi qua. Ta có:

$$y_M = -mx_M + m + 1 \text{ với mọi } m \quad \hat{=} \quad m(1 - x_M) + (1 - y_M) = 0 \text{ với mọi } m$$

$$\hat{=} \begin{cases} 1 - x_M = 0 \\ 1 - y_M = 0 \end{cases} \quad \hat{=} \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = 1 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm $M(1; 1)$ cố định.

Giả sử $N(x_0; y_0)$ là giao điểm của (d_1) và (d_2) . Khi đó:

$$\begin{cases} y_0 = -mx_0 + m + 1 \\ y_0 = \frac{1}{m}x_0 - 1 - \frac{5}{m} \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} y_0 - 1 = m(1 - x_0) \quad (1) \\ y_0 + 1 = \frac{1}{m}(x_0 - 5) \quad (2) \end{cases}$$

Nhân theo vế của (1) và (2) ta được:

$$(y_0 + 1)(y_0 - 1) = (1 - x_0)(x_0 - 5) \quad \hat{=} \quad y_0^2 - 1 = -x_0^2 + 6x_0 - 5 \quad \hat{=} \quad (x_0 - 3)^2 + y_0^2 = 5$$

Giả sử $I(3; 0)$ thuộc mặt phẳng tọa độ. Ta có $IN = \sqrt{(x_0 - 3)^2 + y_0^2} = \sqrt{5}$ không đổi.

Vậy N thuộc đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{5}$.

4/ Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy

A, Phương pháp giải

*** Chứng minh ba đường thẳng hàng**

- Bước 1: Tìm phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.
- Bước 2: Chứng minh đường thẳng còn lại thuộc đường thẳng đó.
- Bước 3: Kết luận.

*** Chứng minh ba đường thẳng đồng quy**

- Bước 1: Tìm tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) .
- Bước 2: Chứng minh M thuộc (d_3) .
- Bước 3: Kết luận.

B, Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường thẳng có phương trình:

$$(d_1): y = x + 2; (d_2): y = -2; (d_3): y = (k+1)x + k.$$

Tìm k để các đường thẳng trên đồng quy.

Hướng dẫn

Tọa độ giao điểm của (d_1) , (d_2) là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Do đó các đường thẳng trên đồng quy $\hat{=}$ (d_3) đi qua điểm $(-4; -2)$

$$\hat{=} -2 = -4(k+1) + k \hat{=} 3k = -2 \hat{=} k = -\frac{2}{3}$$

Vậy $k = -\frac{2}{3}$ thì các đường thẳng đã cho đồng quy.

Ví dụ 2: Trong cùng một hệ tọa độ Oxy cho ba điểm $A(2;4), B(-3;-1), C(-2;1)$.

Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Hướng dẫn

Giả sử đường thẳng đi qua $A(2;4)$ và $B(-3;-1)$ có phương trình là $y = ax + b$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} 2a + b = 4 \\ -3a + b = -1 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua A và B là $y = x + 2(d)$.

Mà $C(-2; 1)$ không thuộc đường thẳng (d) vì $1 \neq -2 + 2$ hay ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Chú ý: Ngoài ra, ta có thể chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng bằng cách chứng minh $AB \neq BC + AC$ hoặc $BC \neq AB + AC$ hoặc $AC \neq AB + BC$.

Khoảng cách giữa hai điểm A và B là $AB = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-1 - 4)^2} = 5\sqrt{2}$.

Khoảng cách giữa hai điểm B và C là

$$BC = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - (-3)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - (-1)\right)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Khoảng cách giữa hai điểm A và C là

$$AC = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

Ta có: $BC + AC = \sqrt{5} + 5 > 5\sqrt{2} = AB$. Tương tự, ta có $BC \neq AB + AC$ và $AC \neq AB + BC$. Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Tương tự, để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta có thể chứng minh $AB = BC + AC$ (chứng minh tổng hai đoạn bằng độ dài một đoạn còn lại).

Ví dụ 3: Tìm giá trị của m để hai đường thẳng $(d_1): mx + y = 1$ và $(d_2): x - my = m + 6$ cắt nhau tại một điểm M thuộc đường thẳng $(d): x + 2y = 8$.

* Phân tích đề bài

Tìm tọa độ giao điểm M của $(d_1), (d_2)$. Vì M thuộc đường thẳng (d) nên tọa độ M thỏa mãn phương trình của (d) .

* Hướng dẫn

Để hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ cắt nhau thì $\frac{m}{1} \neq \frac{1}{-m} \Leftrightarrow m^2 \neq -1$ luôn thỏa mãn với mọi m.

Tọa độ giao điểm M của $(d_1), (d_2)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x - my = m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - mx \\ x - m(1 - mx) = m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - mx \\ (1 + m^2)x = 2m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m + 6}{1 + m^2} \\ y = \frac{-m^2 - 6m + 1}{m^2 + 1} \end{cases}$$

Vì M thuộc đường thẳng (d) nên:

$$\frac{2m+6}{1+m^2} + 2 \cdot \frac{-m^2-6m+1}{m^2+1} = 8 \Leftrightarrow 2m+6 - 2m^2 - 12m + 2 = 8m^2 + 8$$

$$\Leftrightarrow 10m^2 + 10m = 0 \Leftrightarrow 10m(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy với $m = 0$ hoặc $m = -1$ thì hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm M thuộc đường thẳng (d).

5: Dạng 5: Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng

A, Phương pháp giải

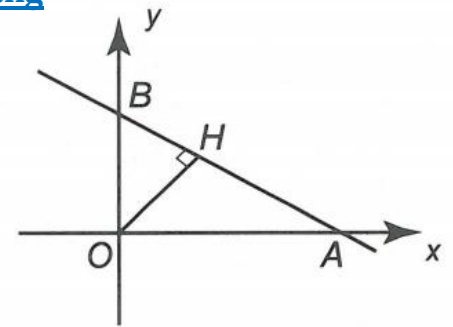
Cho đường thẳng (d): $y = ax + b (a, b \neq 0)$, ta có:

$$+ d(O, x) = A\left(\frac{-b}{a}; 0\right) \Rightarrow OA = \left| -\frac{b}{a} \right|$$

$$+ d(O, y) = B(0; b) \Rightarrow OB = |b|$$

+ Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng d. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông là:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$



B, Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là $x_A = -1; x_B = 2$.

- Tìm tọa độ của hai điểm A, B.
- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B.
- Tính khoảng cách từ điểm O (gốc tọa độ) tới đường thẳng (d).

Hướng dẫn

$$a) \text{ Vì A, B thuộc (P) nên: } y_A = \frac{1}{2}x_A^2 = \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}; y_B = \frac{1}{2}x_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$$

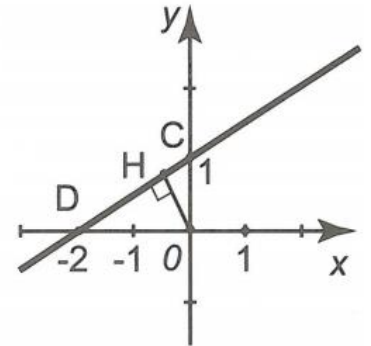
Vậy $A \left(-\frac{1}{2}; 1 \right); B(2;2)$.

b) Gọi phương trình đường thẳng (d) là: $y = ax + b$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = \frac{1}{2} \\ 2a + b = 2 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} 3a = \frac{3}{2} \\ 2a + b = 2 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy $(d): y = \frac{1}{2}x + 1$

c) (d) cắt Oy tại điểm $C(0;1)$ và cắt trục Ox tại điểm $D(-2;0)$.



Ta có: $OC = 1$ và $OD = 2$. Gọi h là khoảng cách từ O tới d .

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông OCD

$$\text{Ta có: } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Ví dụ 2: Cho đường thẳng $(d): y = (m - 1)x + 3$ (với m là tham số). Tìm m để:

a) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) bằng $\sqrt{2}$.

b) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Cho $x = 0$ thì $y = 3$. Suy ra (d) cắt trục Oy tại điểm $B(0;3)$

Cho $y = 0$ thì $x = \frac{3}{1-m}(m-1)$. Suy ra (d) cắt trục Ox tại điểm $A \left(\frac{3}{1-m}; 0 \right)$

Ta có: $OA = \frac{3}{|1-m|}$, $OB = 3$. Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) .

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{(1-m)^2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{m^2 - 2m + 2}{9}$$

$$\text{Theo giả thiết, } h = \sqrt{2} \Rightarrow h^2 = 2 \Rightarrow \frac{9}{m^2 - 2m + 2} = 2 \Rightarrow 2m^2 - 4m - 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{2}$$

b) Ta thấy, khoảng cách từ O đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất

$\Rightarrow m^2 - 2m + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

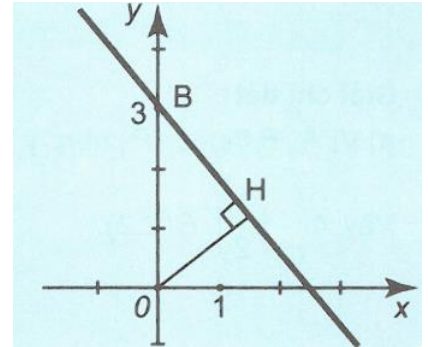
Ta có: $m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 \geq 1, \forall m$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$

Vậy $h_{\max} = 3 \Leftrightarrow m = 1$

Nhận xét:

Dễ thấy điểm $B(0;3)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua. Gọi H là hình chiếu của O lên (d) .



Ta có: $OH \perp OB$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \angle HOB = 90^\circ$ tại $B \Leftrightarrow m = 1$.

Do vậy OH lớn nhất bằng 3 khi và chỉ khi $m = 1$.

6/ Dạng 6: Sự tương giao giữa hai đồ thị

BÀI TOÁN 1: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

A, Phương pháp giải

Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b$ và $(d'): y = a'x + b'$

$$+ d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$$

$$+ d \cap d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

$$+ d \perp d' \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$$

$$+ d \text{ cắt } d' \Leftrightarrow a \neq a'$$

B, Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Cho hai đường thẳng $(d): y = -x + m + 2$ và $(d'): y = (m^2 - 2)x + 3$. Tìm m để (d) và (d') song song với nhau.

Hướng dẫn

$$\text{Điều kiện để hai đồ thị song song là } \begin{cases} -1 = m^2 - 2 \\ m + 2 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy $m = -1$ thì hai đường thẳng đã cho song song.

Ví dụ 2: Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng $d_1: y = -x + 2$ cắt đường thẳng $d_2: y = 2x + 3 - k$ tại một điểm nằm trên trục hoành.

Hướng dẫn

Ta thấy hai đường thẳng $d_1; d_2$ luôn cắt nhau:

+ Đường thẳng d_1 cắt trục hoành tại điểm $A(2;0)$

+ Đường thẳng d_2 cắt trục hoành tại điểm $B(\frac{k-3}{2}; 0)$

+ Để hai đường thẳng $d_1; d_2$ cắt nhau tại một điểm trên trục hoành thì

$$\frac{k-3}{2} = 2 \Rightarrow k = 7.$$

Vậy $k = 7$.

Ví dụ 3: Cho hai hàm số $y = (3m+2)x + 5$ với $m \neq -1$ và $y = -x - 1$ có đồ thị cắt nhau tại điểm $A(x; y)$. Tìm các giá trị của m để biểu thức $P = y^2 + 2x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

Với $m \neq -1$ hai đồ thị cắt nhau tại điểm $A(\frac{-2}{m+1}; \frac{2}{m+1} - 1)$

$$\text{Ta có: } P = y^2 + 2x - 3 = \left(\frac{2}{m+1} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{-2}{m+1}\right) - 3$$

$$\text{Đặt } t = \frac{2}{m+1} \text{ ta được } P = (t-1)^2 - 2t - 3 = t^2 - 4t - 2 = (t-2)^2 - 6$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \frac{2}{m+1} = 2 \Rightarrow m = 0$$

Vậy $m = 0$ thì biểu thức $P = y^2 + 2x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất.

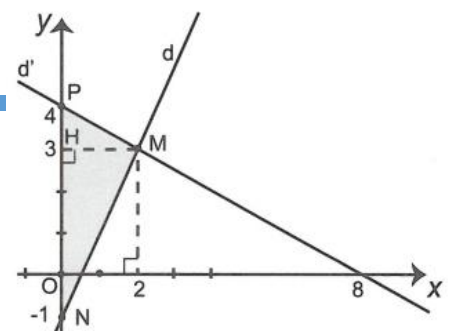
Ví dụ 4: Cho hai hàm số $y = 2x - 1$ và $y = -\frac{1}{2}x + 4$

a) Tìm tọa độ giao điểm M của hai đồ thị hàm số trên.

b) Gọi N, P lần lượt là giao điểm của hai đồ thị trên với trục tung. Tính diện tích tam giác MNP.

Hướng dẫn

a) Tọa độ giao điểm M của hai đồ thị hàm số trên là nghiệm của hệ phương trình:



$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ \frac{1}{2}x + y = 4 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow M(2;3)$$

$$b) N = d_{Oy} \Rightarrow N(0; -1); P = d_{Oy} \Rightarrow P(0; 4)$$

Gọi H là hình chiếu của M trên Oy.

$$\text{Ta có } MH = x_M = 2$$

$$\text{Diện tích tam giác } S_{MNP} = \frac{1}{2}MH \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5 \text{ (đvdt)}.$$

BÀI TOÁN 2: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

A, Phương pháp giải

- Tìm giao điểm của đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ và Parabol $y = Ax^2 (A \neq 0)$

+ Phương trình hoành độ giao điểm $Ax^2 = ax + b (*)$

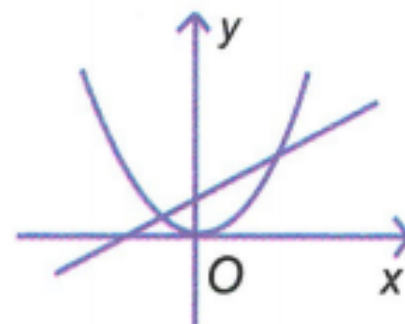
+ Hoành độ giao điểm là nghiệm của (*).

- Số giao điểm bằng số nghiệm của (*)

+ d cắt $(P) \hat{=} (*)$ có hai nghiệm phân biệt.

+ d tiếp xúc $(P) \hat{=} (*)$ có nghiệm kép.

+ d không cắt $(P) \hat{=} (*)$ vô nghiệm.



Bài tập mẫu

Ví dụ 1: Tìm tọa độ giao điểm của Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = -6x + 9$.

Hướng dẫn

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$-x^2 = -6x + 9 \hat{=} x^2 - 6x + 9 = 0 \hat{=} (x - 3)^2 = 0 \hat{=} x = 3$$

Thay $x = 3$ vào phương trình đường thẳng (d) ta được $y = -9$.

Vậy giao điểm của hai đồ thị là $M(3; -9)$

Ví dụ 2: Tìm tọa độ giao điểm A, B của đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = x + 2$. Gọi D, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục hoành. Tính diện tích tứ giác ABCD.

Hướng dẫn

Xét phương trình: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

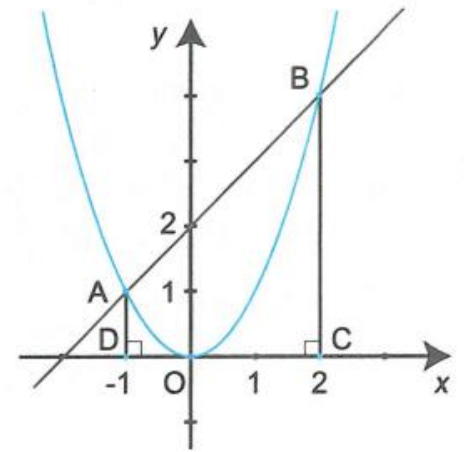
Thay $x = -1$ và $x = 2$ vào phương trình $y = x + 2$

ta lần lượt được $y = 1$ và $y = 4$.

Vậy $A(-1;1), B(2;4)$. Suy ra $D(-1;0), C(2;0)$.

Tứ giác ABCD là hình thang vuông nên có diện tích là:

$$S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot DC}{2} = \frac{(1 + 4) \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$$



Ví dụ 3: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$ và parabol $(P): y = x^2$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB.

(Đề thi vào 10 TP Hà Nội năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = 25 > 0$ suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 2, x = -3$

Với $x = 2$ thì $y = 4$, suy ra $A(2;4)$.

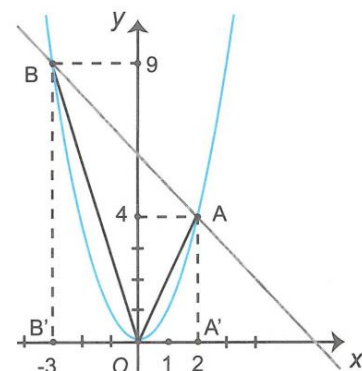
Với $x = -3$ thì $y = 9$, suy ra $B(-3;9)$.

Vậy (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(2;4)$ và $B(-3;9)$.

b) Gọi AA', BB' lần lượt là hình chiếu của A và B xuống trục hoành.

Ta có: $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAA'} + S_{\triangle OBB'} - S_{\triangle A'AB}$

$$S_{\triangle A'AB} = \frac{1}{2} |x_{B'} - x_{A'}| \cdot |y_B - y_A| = \frac{1}{2} |x_{B'} - x_{A'}| \cdot |y_B - y_A| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$$



Ta có: $S_{AA'B'B} = \frac{AA' + BB'}{2} \cdot AB = \frac{9 + 4}{2} \cdot 5 = \frac{65}{2}$ (đvdt)

$$S_{DOAA'} = \frac{1}{2} AA' OA = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ (đvdt)}$$

$$S_{DOBB'} = \frac{1}{2} BB' OB = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = \frac{27}{2} \text{ (đvdt)}$$

Vậy diện tích tam giác OAB là: $S_{DOAB} = S_{AA'B'B} - S_{DOAA'} - S_{DOBB'} = \frac{65}{2} - 4 - \frac{27}{2} = 15$ (đvdt).

Nhận xét:

Nếu tính diện tích tam giác OAB, bằng cách trực tiếp $S_{OAB} = \frac{1}{2} OB \cdot AH$, trong đó AH là đường cao kẻ từ đỉnh A. Dễ thấy có thể tính được độ dài đoạn OB, nhưng gặp khó khăn trong việc tính đường cao AH. Do vậy, ta nghĩ đến việc tính diện tích tam giác OAB bằng cách gián tiếp như trên.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng

$$(d): y = 2(m-1)x - m^2 + 3m.$$

- Với $m = 3$, tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).
- Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có diện tích bằng $\frac{7}{4}$.

Phân tích đề bài

- Giải phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) trong trường hợp $m = 3$, từ đó tìm được tọa độ giao điểm của (d) và (P).
- Ở câu này ta phải trả lời được hai câu hỏi:
 - + Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
 - + Hoành độ giao điểm lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có diện tích bằng $\frac{7}{4}$.

Giả sử (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 . Theo giả thiết x_1, x_2 là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có diện tích bằng $\frac{7}{4}$ nên x_1, x_2 là các số dương và $x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{4}$.

Hướng dẫn

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = 2(m-1)x - m^2 + 3m \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0 \quad (1)$$

a) Với $m = 3$ thì phương trình (1) trở thành: $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Thay $x = 0, x = 4$ lần lượt vào phương trình của parabol $(P): y = x^2$ ta được $y = 0, y = 16$.

Vậy với $m = 3$ thì (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(0;0), B(4;16)$.

b) Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có diện tích bằng $\frac{7}{4}$ thì phương trình (1) phải có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{4}$.

Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\begin{aligned} \text{Để } (1) \text{ có hai nghiệm dương phân biệt} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m^2 - 3m) > 0 \\ 2(m-1) > 0 \\ m^2 - 3m > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m > 1 \\ m(m-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3(*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow m^2 - 3m = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 4m^2 - 12m - 7 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{7}{2} \text{ (thỏa mãn (*))} \\ m = -\frac{1}{2} \text{ (không thỏa mãn (*))} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = \frac{7}{2}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = (m+2)x + 3$ và parabol $(P): y = x^2$.

- a) Chứng minh (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên.

(Đề thi vào 10 TP Hà Nội năm học 2018 - 2019)

Phân tích đề bài

- a) (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm của chúng luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
- b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Vì x_1, x_2 nguyên nên $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$ cũng là các số nguyên.

Hướng dẫn

- a) Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = (m+2)x + 3 \Leftrightarrow x^2 - (m+2)x - 3 = 0 \quad (1)$$

Ta có: $a = 1 > 0$

Xét $\Delta = (m+2)^2 + 4.3 = (m+2)^2 + 12 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ (vì $(m+2)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$).

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt. Vậy (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m .

- b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). Theo định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m+2 \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$$

Để $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ mà $x_1 x_2 = -3$ nên $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ hoặc

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 = 2 \\ m+2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}$

Vậy với $m = 0$ hoặc $m = -4$ thì (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên.

Ví dụ 6: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2mx - 4m$ (m là tham số).

a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Giả sử x_1, x_2 là hoành độ của A, B. Tìm m để $|x_1| + |x_2| = 3$.

Hướng dẫn

a) Để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2 + 2mx + 4m = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta > 0 \quad m^2 - 4m > 0 \quad m(m - 4) > 0 \quad \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$$

b) Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = 4m \end{cases}$

+ Xét $m > 4$ thì $x_1 x_2 = 4m > 0$, do đó:

$$|x_1| + |x_2| = 3 \quad |x_1 + x_2| = 3 \quad |-2m| = 3 \quad 2m = 3 \quad m = \frac{3}{2} \text{ (loại vì } m > 4 \text{)}$$

+ Xét $m < 0$ thì $x_1 x_2 = 4m < 0$, do đó: $|x_1| + |x_2| = 3 \quad |x_1 - x_2| = 3$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{m^2 - 4m} &= 3 \quad 4m^2 - 16m - 9 = 0 \quad \begin{cases} m = \frac{9}{2} \text{ (loại vì } m < 0 \text{)} \\ m = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } m = -\frac{1}{2}$$

Nhận xét

Ở câu b) đã sử dụng tính chất: $|a| + |b| = |a + b| \Leftrightarrow ab \geq 0$ và $|a| - |b| = |a - b| \Leftrightarrow ab \leq 0$

Ngoài ra, ta có thể làm như sau:

$$\text{Ta có: } |x_1| + |x_2| = 3 \quad (|x_1| + |x_2|)^2 = 9 \quad x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 9$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 9 \quad 4m^2 - 8m + 8|m| - 9 = 0 \quad (*)$$

+ Nếu $m > 4$ thì $(*)$ trở thành:

$$4m^2 - 8m + 8m - 9 = 0 \hat{=} 4m^2 - 9 = 0 \hat{=} m = \pm \frac{3}{2} \text{ (loại vì } m > 4 \text{)}$$

+ Nếu $m < 0$ thì (*) trở thành:

$$4m^2 - 8m - 8m - 9 = 0 \hat{=} 4m^2 - 16m - 9 = 0 \hat{=} \begin{cases} m = \frac{9}{2} \text{ (loại vì } m < 0) \\ m = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

PHẦN 2. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Xác định các hệ số a, b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(2; -2)$ và $B(-3; 2)$.

Câu 2: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

Câu 3: Cho parabol $(P): y = ax^2$. Tìm a biết rằng parabol (P) đi qua điểm $A(3; -3)$. Vẽ (P) với a vừa tìm được.

Câu 4: Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2\sqrt{3}x + m + 1$ (m là tham số).

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số k để đường thẳng $d_1: y = -x + 3$ cắt đường thẳng $d_2: y = x + 2 - k$ tại một điểm nằm trên trục hoành.

Câu 6: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số bậc nhất $y = (m - 2)x + 3$ đồng biến trên.

Câu 7: Cho hai đường thẳng $(d_1): y = 2x + 5$, $(d_2): y = -4x + 1$ cắt nhau tại I. Tìm m để đường thẳng $(d_3): y = (m + 1)x + 2m - 1$ đi qua điểm I.

Câu 8: Cho đường thẳng $(d_m): y = \frac{1-m}{m+2}x + (1-m)(m+2)$ (m là tham số).

a) Tìm m để đường thẳng (d_m) vuông góc với đường thẳng $(d): y = \frac{1}{4}x - 3$.

b) Với giá trị nào của m thì (d_m) là hàm số đồng biến?

Câu 9: Cho hàm số: $y = mx + 1$ (1), trong đó m là tham số.

a) Tìm m để đồ thị hàm số (1) đi qua điểm $A(1;4)$. Với giá trị m vừa tìm được, hàm số (1) đồng biến hay nghịch biến trên ?

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) song song với đường thẳng (d) có phương trình: $x + y + 3 = 0$.

Câu 10: Cho hàm số bậc nhất $y = ax - 2$ (1). Hãy xác định hệ số a , biết rằng $a > 0$ và đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $OB = 2OA$ (với O là gốc tọa độ).

Câu 11: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

a) Vẽ đồ thị của (P) .

b) Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ lần lượt là các giao điểm của (d) và (P) .

Tính giá trị biểu thức $T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$.

Câu 12: Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 4$.

a) Vẽ đồ thị của (P) .

b) Gọi A, B là các giao điểm của hai đồ thị (d) và (P) . Biết rằng đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét, tìm tất cả các điểm M trên tia Ox sao cho diện tích tam giác MAB bằng 30cm^2 .

Câu 13: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m - 1)x - m + 2$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$

- Vẽ (d) và (P) trên cùng một mặt phẳng tọa độ khi $m = 2$.
- Định các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.
- Tìm giá trị của m để độ dài đoạn thẳng $AB = 6\sqrt{2}$.

Câu 15: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m - 1)x - 2m + 2$.

- Xác định tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 0$.
- Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $C(x_1; y_1), D(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1 < \frac{3}{2} < x_2$.

Gợi ý giải

Câu 1:

Đáp số: $a = -\frac{4}{5}, b = -\frac{2}{5}$

Câu 2:

- HS tự làm.
- Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{P} & y = 4 \\ x = 1 & \text{P} & y = 1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là $(-2; 4), (1; 1)$.

Câu 3:

(P) đi qua điểm $A(3; -3)$ nên ta có $-3 = 3^2 \cdot a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$ Vậy $P = -\frac{1}{3}x^2$

Câu 4:

- HS tự vẽ hình.

b) Đáp số: $m < 2$

Câu 5:

Ta thấy hai đường thẳng $d_1; d_2$ luôn cắt nhau:

+ Đường thẳng d_1 cắt trục hoành tại điểm $A(3;0)$.

+ Đường thẳng d_2 cắt trục hoành tại điểm $B(k-2;0)$.

+ Để hai đường thẳng $d_1; d_2$ cắt nhau tại một điểm trên trục hoành thì $k-2=3 \Rightarrow k=5$.

Vậy $k=5$.

Câu 6:

Để hàm số bậc nhất $y = (m-2)x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$.

Câu 7:

Tọa độ I là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -4x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Do (d_3) đi qua điểm I nên $\frac{11}{3} = -\frac{2}{3}(m+1) + 2m - 1 \Rightarrow m = 4$

Câu 8:

a) Để đường thẳng (d_m) vuông góc với đường thẳng (d) thì

$$\frac{1-m}{m+2} \cdot \frac{1}{4} = -1 \Rightarrow \begin{cases} 4m+8+1-m=0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Rightarrow m = -3$$

b) Để hàm số $y = \frac{1-m}{m+2}x + (1-m)(m+2)$ đồng biến thì $\frac{1-m}{m+2} > 0 \Rightarrow -2 < m < 1$

Câu 9:

a) Ta có $y = mx + 1$ đi qua $A(1;4)$ khi và chỉ khi $4 = m + 1 \Rightarrow m = 3$.

Khi đó đường thẳng $y = 3x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Ta có $x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -x - 3$, đồ thị hàm số (1) song song với đường thẳng

(d) khi $m = -1$

Vậy $m = -1$

Câu 10:

Ta có $A\left(\frac{a^2}{4}; 0\right); B(0; -2)$, để $OB = 2OA \Rightarrow 4 = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

Câu 11:

a) HS tự vẽ.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Giao điểm của (d) và (P) là $A(2; 2), B\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$. Vậy $T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{2 + \left(-\frac{3}{2}\right)}{2 + \frac{9}{8}} = \frac{4}{25}$

Câu 12:

a) HS tự làm.

b) Giao điểm của (d) và (P) là $A(-2; 2), B(4; 8)$

Gọi $M(m; 0)$ thuộc tia $Ox (m > 0)$. Gọi $C(-2; 0), D(4; 0)$ lần lượt là hình chiếu của A và B trên Ox.

Xét hai trường hợp:

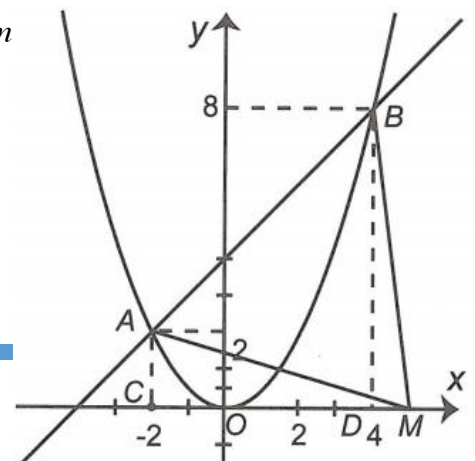
Trường hợp 1: M thuộc đoạn OD: Ta có: $S_{AMB} = S_{ABDC} - S_{ACM} - S_{BDM}$.

Có ABDC là hình thang, $AC = 2cm, BD = 8cm, CD = 6cm$

$$\Rightarrow S_{ABDC} = 30cm^2$$

Suy ra $S_{AMB} < 30cm^2$ (loại)

Trường hợp 2: M thuộc tia $Dx (M \neq D) \Rightarrow m > 4$



Ta có: $S_{AMB} = S_{ABDC} - S_{ACM} + S_{BDM}$

$$S_{ABDC} = 30cm^2$$

$$S_{ACM} = \frac{1}{2}AC.CM = \frac{1}{2}.2.(m+2) = m+2 (cm^2)$$

$$S_{BDM} = \frac{1}{2}BD.DM = \frac{1}{2}.8.(m-4) = 4(m-4) (cm^2)$$

$$\text{P } S_{AMB} = 30cm^2 \hat{=} S_{ACM} = S_{BDM} \hat{=} m+2 = 4(m-4) \hat{=} m = 6$$

Vậy $M(6;0)$

Câu 13:

a) Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - (2m-1)x + m-2 = 0(*)$

Ta có: $D = 4m^2 - 8m + 9 = 4(m-1)^2 + 5 > 0$ với mọi m .

Vậy parabol luôn cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt.

b) Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ x_1 x_2 = m-2 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \hat{=} x_1^3 + x_2^3 = 0 \hat{=} (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 0$$

$$\hat{=} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} 2m-1 = 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\hat{=} \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ 4m^2 - 7m + 7 = 0 \end{cases} \hat{=} m = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{1}{2}.$$

Câu 14:

a) HS tự làm.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$\frac{1}{2}x^2 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2m = 0 \quad (1)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 2m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$

c) Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$, với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Theo định lí Vi-ét có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -2m \end{cases}$$

Ta có: $y_1 = x_1 + m; y_2 = x_2 + m$

Theo giả thiết: $AB = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = 6\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = 6 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = 36 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 36$$

$$\Leftrightarrow 4 + 8m = 36 \Leftrightarrow m = 4 \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 15:

a) HS tự làm.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = (2m-1)x - 2m + 2 \Leftrightarrow x^2 - (2m-1)x + 2m-2 = 0 \quad (1)$$

Nhận thấy $a + b + c = 1 + \frac{1}{2}(2m-1) + (2m-2) = 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2m-2$.

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow 1 \neq 2m-2 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2} \quad (*)$$

$$\text{Để } x_1 < \frac{3}{2} < x_2 \text{ thì } x_2 = 2m-2 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow m > \frac{7}{4}$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ suy ra $m > \frac{7}{4}$.



PHẦN HÌNH HỌC

Phần Hình học trong cấu trúc các đề thi được chia thành 2 bài:

Bài 1: Bài toán tổng hợp về đường tròn

Bài 2: Bài toán hình có nội dung thực tế (ứng dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc hình học không gian)

A. BÀI TOÁN TỔNG HỢP VỀ ĐƯỜNG TRÒN:

I. Các câu trong bài thường có dạng:

1. Chứng minh tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh hệ thức về tích hai đoạn thẳng (hoặc tính toán)
3. Chứng minh quan hệ song song, quan hệ vuông góc
4. Tứ giác đặc biệt, tam giác đặc biệt.
5. Tiếp tuyến.
6. Thẳng hàng, đồng qui.
7. Quỹ tích.
8. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

.....

II. Giới thiệu phương pháp chứng minh một số dạng câu hỏi hình học thường gặp:

1. Chứng minh tứ giác nội tiếp:

Các cách chứng minh tứ giác nội tiếp:

Cách 1: Chứng minh 4 điểm cách đều một điểm

Cách 2: Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°

Cách 3: Chứng minh góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện

Cách 4: Hai đỉnh kề nhìn hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau

Cách 5: Dùng hệ thức lượng trong đường tròn

(Bài tập 43 sách bài tập)

$AC \cap BD = E$, biết $AE \cdot EC = BE \cdot ED \Rightarrow A, B, C, D$ thuộc một đường tròn

2. Chứng minh hệ thức hình học:

- Sử dụng Định lý Ta Let, tam giác đồng dạng, tính chất đường phân giác...
- Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông.

$$b^2 = a \cdot b',$$

$$h^2 = b' \cdot c'$$

$$c^2 = a \cdot c'$$

$$a.h = b.c$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

3. chứng minh hai đường thẳng song song:

1. Hai đường thẳng đó cắt một đường thẳng thứ ba và tạo thành một cặp góc ở vị trí so le trong, so le ngoài hay đồng vị bằng nhau, cặp góc trong cùng phía bù nhau.
2. Hai đường thẳng đó cùng song song hay cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba.
3. Hai đường thẳng đó là đường trung bình và cạnh tương ứng trong tam giác, hình thang.
4. Hai đường thẳng đó là hai cạnh đối của tứ giác đặc biệt.
5. Sử dụng định lý đảo của định lý Talet.

4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc:

1. Hai đường thẳng đó cắt nhau và tạo ra một góc bằng 90° .
2. Hai đường thẳng đó chứa hai tia phân giác của hai góc kề bù.
3. Hai đường thẳng đó chứa hai cạnh của tam giác vuông.
4. Có một đường thẳng thứ ba vừa song song với đường thẳng thứ nhất vừa vuông góc với đường thẳng thứ hai.
5. Sử dụng tính chất đường trung trực của đoạn thẳng.
6. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác.
7. Sử dụng tính chất đường trung tuyến, phân giác ứng với cạnh đáy của tam giác cân.
8. Hai đường thẳng có chứa đường chéo của hình vuông, hình thoi.
9. Sử dụng tính chất đường kính và dây trong đường tròn.
10. Sử dụng tính chất tiếp tuyến trong đường tròn.

5. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau:

1. Hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau.
2. Hai cạnh bên của tam giác cân, hình thang cân.
3. Sử dụng tính chất trung điểm.
4. Khoảng cách từ một điểm trên tia phân giác của một góc đến hai cạnh của góc.
5. Khoảng cách từ một điểm trên đường trung trực của đoạn thẳng đến hai đầu đoạn thẳng.
6. Hình chiếu của hai đường xiên bằng nhau và ngược lại.
7. Dùng tính chất bắc cầu.
8. Có cùng độ dài hoặc nghiệm đúng một hệ thức.
9. Sử dụng tính chất của các đẳng thức, hai phân số bằng nhau.
10. Sử dụng tính chất trung tuyến của tam giác vuông, đường trung bình của tam giác.
11. Sử dụng tính chất về cạnh và đường chéo của các tứ giác đặc biệt.
12. Sử dụng kiến thức về diện tích.
13. Sử dụng tính chất hai dây cách đều tâm trong đường tròn.
14. Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau trong đường tròn.
15. Sử dụng quan hệ giữa cung và dây trong một đường tròn.

6. Chứng minh trung điểm của đoạn thẳng:

1. Chứng minh M nằm giữa A, B và $MA = MB$ hoặc $MA = MB = \frac{AB}{2}$.
2. Sử dụng tính chất trọng tâm trong tam giác.
3. Sử dụng tính chất đường trung bình trong tam giác, hình thang.
4. Sử dụng tính chất đối xứng trục và đối xứng tâm.
5. Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt.
6. Sử dụng tính chất đường kính vuông góc với dây trong đường tròn.
7. Sử dụng tính chất đường kính đi qua điểm chính giữa cung trong đường tròn.

7. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng:

1. Chứng minh điểm A thuộc đoạn thẳng BC.
2. Chứng minh qua 3 điểm xác định một góc bẹt.
3. Chứng minh hai góc ở vị trí đối đỉnh mà bằng nhau.
4. Chứng minh 3 điểm xác định được hai đường thẳng cùng vuông góc hay cùng song song với một đường thẳng thứ ba. (Tiên đề Ôclit)
5. Dùng tính chất trung trực: chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai đầu một đoạn thẳng.
6. Dùng tính chất tia phân giác: chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai cạnh của một góc.
7. Sử dụng tính chất đồng quy của các đường: trung tuyến, phân giác, đường cao, trung trực trong tam giác.
8. Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt.
9. Sử dụng tính chất tâm và đường kính của đường tròn.
10. Sử dụng tính chất đường nối tâm của hai đường tròn tiếp xúc nhau.

8. Chứng minh ba đường thẳng đồng qui:

1. Chứng minh giao điểm của 2 đường thẳng nằm trên đường thẳng thứ 3.
2. Chứng minh giao điểm của đường thẳng thứ nhất và thứ hai trùng với giao điểm của hai đường thẳng thứ hai và thứ ba.
3. Sử dụng tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến, đường cao, trung trực, phân giác trong tam giác.
4. Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt.

Như vậy, mỗi dạng câu hỏi, bài tập hình học có rất nhiều phương pháp giải. Tuy nhiên, trong quá trình ôn luyện, giáo viên nên lưu ý cho học sinh các phương pháp dễ nhớ, dễ hiểu, dễ vận dụng, thường hay sử dụng nhất để học sinh có định hướng tốt nhất khi làm bài. Đặc biệt chú ý nhắc nhở học sinh các sai lầm thường gặp trong mỗi phương pháp....

Đặc biệt, bài toán quỹ tích, bài toán bất đẳng thức và cực trị hình học tương đối khó đối với học sinh.

9. Bài toán quỹ tích:

Có hai dạng quỹ tích thường gặp là đường thẳng và đường cong. Giáo viên hướng dẫn để **học sinh có thể định hướng quỹ tích mình cần tìm là đường thẳng hay đường tròn (cung tròn).**

*** Nếu quỹ tích là đường thẳng**, có thể là một trong các đường:

Đường trung trực của đoạn thẳng.

- Đường phân giác của góc.

- Đường thẳng song song và cách một đường thẳng cho trước một khoảng không đổi.

*** Nếu quỹ tích là đường cong**, có thể là:

- Cung chứa góc.

- Đường tròn.

Để học sinh không thấy sợ loại toán này, giáo viên hướng dẫn học sinh nhận biết ba loại yếu tố cơ bản:

- **Yếu tố cố định:** là các yếu tố có vị trí cố định và độ lớn không đổi, thông thường là các điểm, góc, tam giác,...

- **Yếu tố chuyển động:** là các yếu tố có vị trí và độ lớn thay đổi, thông thường là các điểm mà ta cần tìm tập hợp điểm, các hình có chứa các điểm đó.

- **Yếu tố không đổi:** độ dài đoạn thẳng, độ lớn góc, chu vi, diện tích của hình.

Để chứng minh mọi điểm M có tính chất α thuộc hình H, ta phải tìm mối quan hệ giữa điểm chuyển động với các yếu tố cố định rồi dùng lập luận để đưa về một trong những tập hợp điểm mà ta đã biết

10. Bài toán bất đẳng thức và cực trị hình học.

a. Dạng chung: Trong tất cả các hình có chung một tính chất tìm những hình sao cho một đại lượng nào đó (độ dài đoạn thẳng, số đo góc, diện tích...) có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất.

b. Phương pháp:

+ **Phương pháp 1:** Vận dụng bất đẳng thức để giải bài toán cực trị: học sinh cần nắm vững các kiến thức về:

- Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu.

- Bất đẳng thức tam giác.

- Quan hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây, quan hệ giữa dây và đường kính, quan hệ giữa dây và cung trong đường tròn.

- Các bất đẳng thức đại số: $x^2 \geq 0$, $(x+y)^2 \geq 4xy, \dots$

- Bất đẳng thức Côsi với hai số a, b không âm: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

- Bất đẳng thức Bunhia Côpxki với các số m, n, x, y:

$$(m^2 + n^2)(x^2 + y^2) \geq (mx + ny)^2.$$

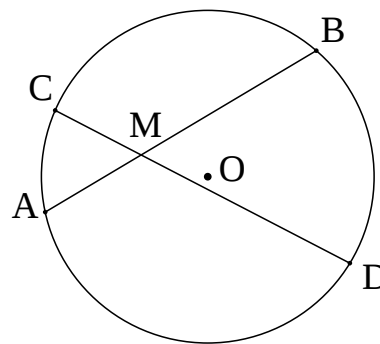
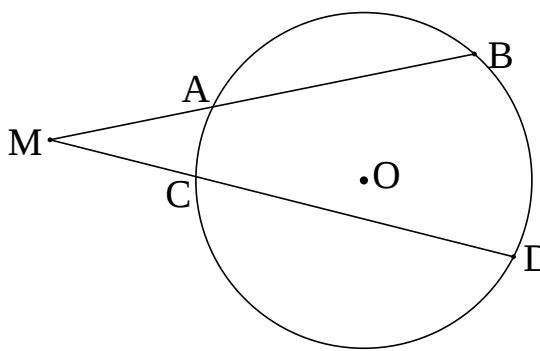
+ **Phương pháp 2:** Chọn biến trong bài toán cực trị: Giải bài toán cực trị bằng phương pháp đại số có thể chọn một đại lượng làm biến (độ dài đoạn thẳng, số đo

góc, tỉ số lượng giác của một góc,...), có trường hợp chọn hai đại lượng làm biến (chú ý các đại lượng không đổi để chọn biến cho phù hợp).

III. MỘT SỐ KẾT QUẢ CẦN NHỚ

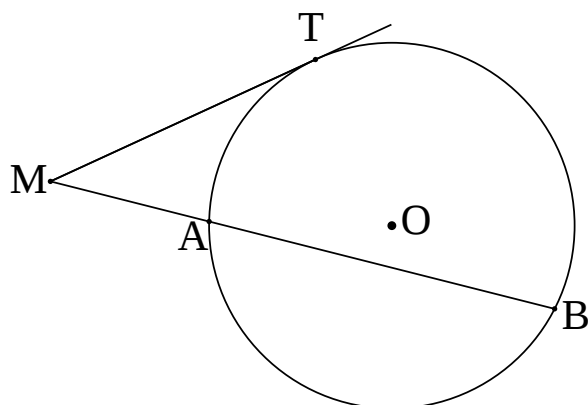
Từ các bài toán cơ bản SGK, SBT rút ra một số kết quả cần chú ý:

1. Đường kính vuông góc với dây thì đi qua điểm chính giữa của cung và ngược lại
2. Hai cung bị chắn bởi hai dây song song thì bằng nhau
3. Hệ thức lượng trong đường tròn
+ $MA.MB = MC.MD$ với MAB, MCD là cát tuyến của đường tròn (O)



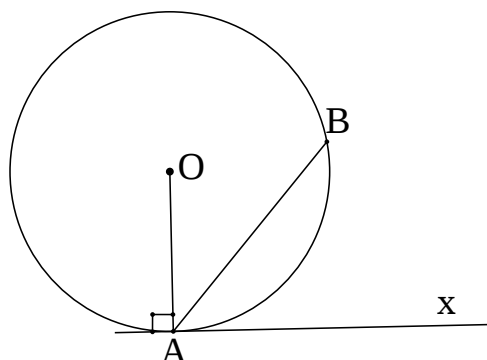
+ Với MT là tiếp tuyến MAB là cát tuyến

$$MT^2 = MA.MB$$



4. Định lý đảo của định lý về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

Nếu $A \in (O)$, AB là một dây cung $\widehat{BAx} = \frac{1}{2} \text{Sđ}\widehat{AB}$ thì Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O)

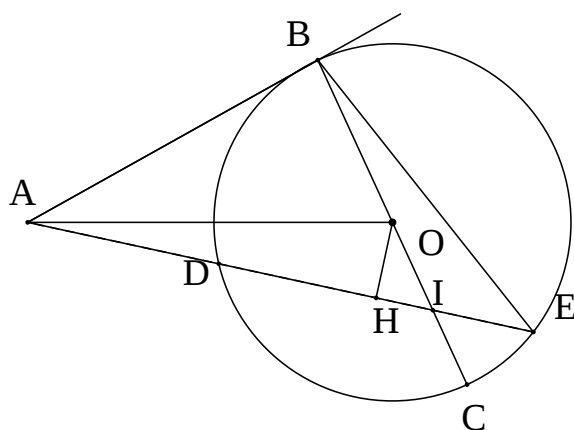


IV. MỘT SỐ BÀI TẬP

Bài 1: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC . Trên đoạn CO lấy điểm I (I khác C , I khác O). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn DE .

1. Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn
2. Chứng minh $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$
3. Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO , d cắt BC tại điểm K . Chứng minh $HK \parallel DC$.
4. Tia CD cắt AO tại điểm P , tia EO cắt BP tại điểm F . Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

Giải

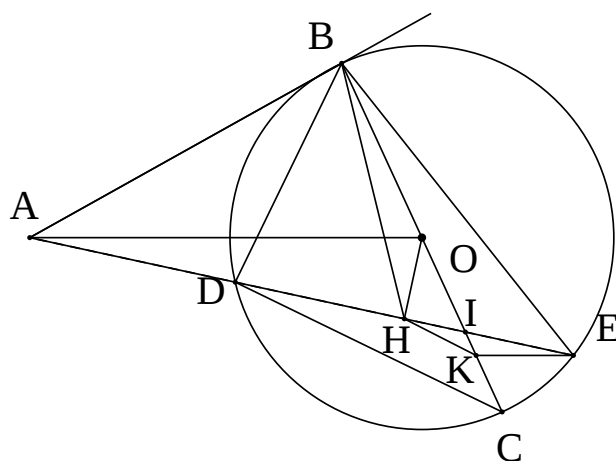


1. Vì AB là tiếp tuyến (O) nên $\widehat{ABO} = 90^\circ$ nên B thuộc đường tròn đường kính AO

H là trung điểm của DE nên $OH \perp DE \Rightarrow \widehat{AHO} = 90^\circ$

nên H thuộc đường tròn đường kính AO

Vậy 4 điểm A, B, O, H thuộc đường tròn đường kính AO



2. Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có :

$\widehat{EAB}$ chung

$\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ (g . g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$

3. Tứ giác ABOH nội tiếp suy ra $\widehat{OBH} = \widehat{OAH}$

Mà $\widehat{OAH} = \widehat{HEK}$ (do $EK \parallel AO$)

Suy ra $\widehat{HBK} = \widehat{HEK}$

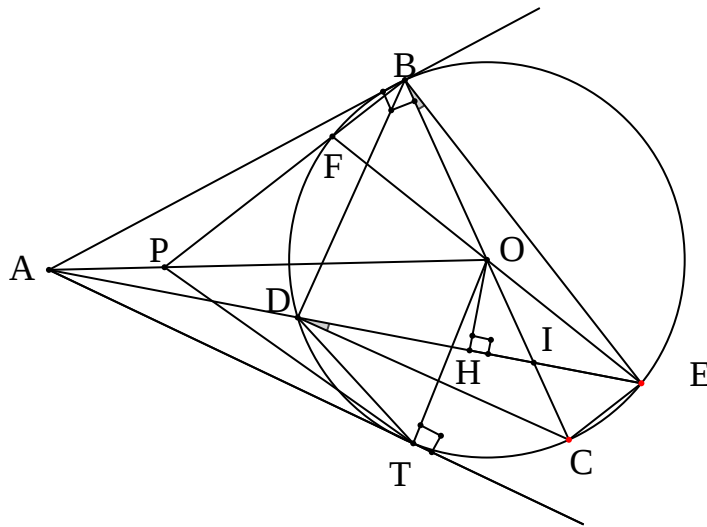
$\widehat{HBK}$ và $\widehat{HEK}$ cùng nhìn đoạn HK nên tứ giác BHKE nội tiếp

Có $\widehat{BKH} = \widehat{BEH}$ (cùng chắn cung BH)

$\widehat{BED} = \widehat{BCD}$ (cùng chắn cung BD)

Suy ra $\widehat{BKH} = \widehat{BCD}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HK \parallel DC$.

4.



$\widehat{TDC} = \widehat{TBC} = \widehat{TBO} = \widehat{TAO} \Rightarrow$ tứ giác APDT nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ATP} = \widehat{ADP}$ (cùng chắn AP)

Mà $\widehat{ADP} = \widehat{EDC} = \widehat{CBE}$

Có $\triangle ABP = \triangle ATP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{ATP}$

$\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{CBE}$

Lại có $\widehat{ABP} + \widehat{PBO} = 90^\circ$ (AP là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{EBP} + \widehat{CBE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PBE} = 90^\circ$ hay $\widehat{FBE} = 90^\circ$

$\Rightarrow EF$ là đường kính $\Rightarrow$ Tứ giác BECF là hình chữ nhật

Nhận xét:

- Phần a) Chứng minh 4 điểm thuộc một đường tròn bằng cách chỉ ra hai góc vuông

- Phần b) Chứng minh hệ thức hình học qua tam giác đồng dạng. Phần b) từ bài hệ thức lượng trong đường tròn.

- Phần c) Dùng phương pháp tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ hai góc nội tiếp cùng chắn một cung bằng nhau $\Rightarrow$ quan hệ song song

- Phần d) Chứng minh tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ góc bằng nhau $\Rightarrow$ góc vuông

$\Rightarrow$ 1 đoạn là đường kính $\Rightarrow$ tứ giác là hình chữ nhật (2 đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

Trong hình học ta thường gặp một lớp các bài toán khá hẹp. Sau đây là lớp các bài toán về hai tiếp tuyến cắt nhau

Bài 2: Cho đường tròn $(O; R)$. Qua K nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD với đường tròn (A, B là các tiếp điểm, C nằm giữa K và D). Gọi H là trung điểm của CD , M là giao điểm của AB và KO .

a) Chứng minh 5 điểm A, H, O, B, K thuộc một đường tròn.

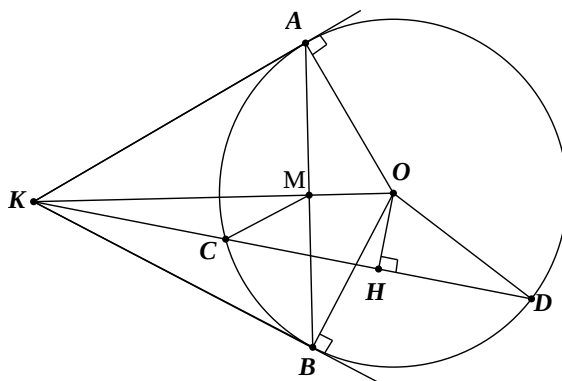
b) $\widehat{AHK} = \widehat{KOB}$.

c) $AM^2 = KM \cdot MO$ (hoặc $MK \cdot MO = \frac{AB^2}{4}$)

d) Tứ giác $CMOD$ nội tiếp.

e) Gọi I là giao KO với (O) (I thuộc cung nhỏ AB). CMR : I là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle KAB$.

Hướng dẫn:



a) Chứng minh 5 điểm A, H, O, B, K thuộc đường tròn đường kính KO

$$b) \widehat{AHK} = \widehat{ABK}$$

$$\widehat{ABK} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \widehat{KOB}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{KOB}$$

c) Chứng minh $AB \perp KO$ tại M

Xét $\Delta_{\text{vuông}} AKO$ có đường cao $AM \Rightarrow AM^2 = KM \cdot MO$

$$d) \text{Ta có } \left. \begin{array}{l} KC \cdot KD = KA^2 \\ KA^2 = KM \cdot KO \end{array} \right\} \Rightarrow KC \cdot KD = KM \cdot KO$$

$\Rightarrow$ Tứ giác CMOD nội tiếp

e) ΔKAB có I là điểm chính giữa của AB (OI là phân giác $\widehat{AOB}$)

$\widehat{KAI} = \widehat{IAB} \Rightarrow AI$ là phân giác KAB

Lại có KO là phân giác AKB

$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔKAB

Bài 3: (Đề 2018-2019)

Cho (O; R) dây AB không qua tâm. Điểm S bất kì thuộc tia đối của tia AB. Vẽ 2 tiếp tuyến SC, SD với đường tròn (C thuộc cung nhỏ AB). Gọi H là trung điểm của AB.

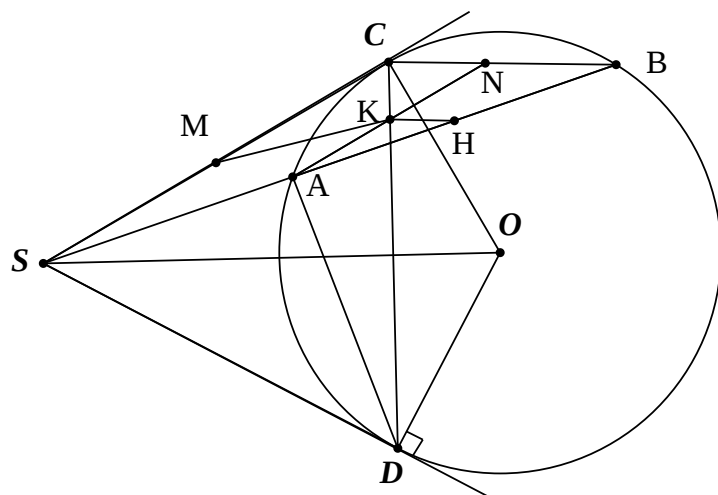
a) CMR: C, D, H, O, S thuộc một đường tròn đường kính SO.

b) Cho $SO = 2R$. Tính SD theo R và SđCSD

c) Đường thẳng qua A và song song với SC cắt CD tại K. Chứng minh rằng tứ giác ADHK nội tiếp và BK đi qua trung điểm SC

d) Gọi E là trung điểm của BD, F là hình chiếu vuông góc của E trên AD. CMR khi S thay đổi trên tia đối của tia AB thì F luôn thuộc một đường tròn cố định

Hướng dẫn:



a) Ba điểm C, H, D nhìn SO dưới góc $90^\circ \Rightarrow 5$ điểm C, D, H, O, S thuộc một đường tròn đường kính SO

b) Dùng định lí Pytago tính SD

Dùng TSLG trong $\Delta_{\text{vuông}}\text{SDO}$

Tính $\widehat{\sin\text{DSO}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{\text{DSO}} = 30^0 \Rightarrow \widehat{\text{CSD}} = 60^0$

c) * D₀ AK // SC => $\widehat{SCD} = \widehat{AKD}$ (đồng vị)

5 điểm S, C, D, O, D thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{SCD} = \widehat{SHD}$ (cùng chắn SD)

$\Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{SHD} \Rightarrow K, H$ thuộc một cung chứa góc dựng trên AD

$\Rightarrow$ Tứ giác AKHD nội tiếp

$$*) \text{ AN//SC (AK//SC)} \Rightarrow \frac{AK}{SM} = \frac{KN}{MC} \left(= \frac{BK}{BM} \right) \quad (1)$$

Tứ giác AKHD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HKD} = \widehat{HAD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn DH)

Mà $\widehat{DAH} = \widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn DB của (O))

$\Rightarrow \widehat{DKH} = \widehat{DCB}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HK \parallel BC$

$$\Delta ANB \text{ có } KH // NB \Rightarrow \frac{AK}{KN} = \frac{AH}{HB} = 1 \text{ (} HA = HB \text{)}$$

$$\Rightarrow AK = KN \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $SM = MC$ hay M là trung điểm của SC

d) Kẻ đường kính $AA' \Rightarrow \angle OAA' = 90^\circ$

$\Rightarrow A'D \perp AD \Rightarrow A'D \parallel FE$

Kéo dài FE cắt A'B tại G

$\triangle BDA'$ có E là trung điểm BD

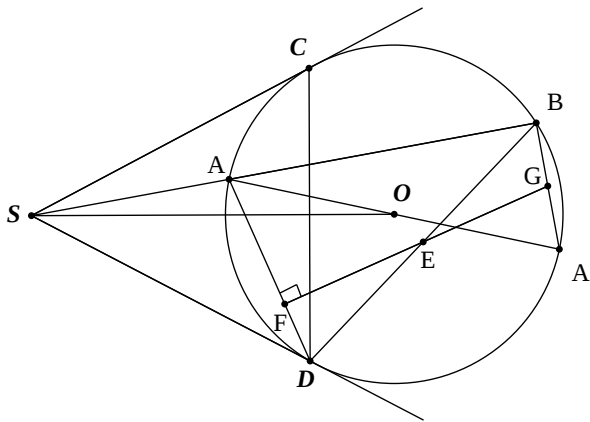
$EG \parallel DA'$

$\Rightarrow G$ là trung điểm của BA'

Mà A, O cố định $\Rightarrow A'$ cố định

B cố định $\Rightarrow G$ cố định

Ta có $\widehat{GFD} = 90^\circ \Rightarrow F$ thuộc đường
tròn đường kính DG cố định



Lớp bài toán về đường cao trong tam giác

Bài 4: (Bài 95- SGK)

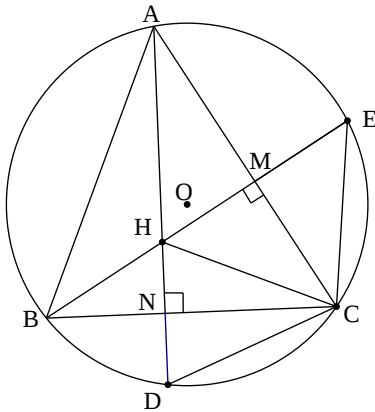
Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Đường cao hạ từ A và B của ΔABC cắt (O) lần lượt tại D và E. Chứng minh:

a) $CD = CE$

b) ΔBHD cân.

c) $CD = CH$.

Hướng dẫn:



a) Gọi M là giao điểm của BE và AC

N là giao điểm của AD và BC.

Tứ giác AMNB nội tiếp (vì $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ cùng nhìn AB dưới 1 góc vuông)

$$\Rightarrow \widehat{NAM} = \widehat{MBN} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MN)}$$

$$\text{Hay } \widehat{DAC} = \widehat{CBE}$$

Xét đường tròn (O): Vì $\widehat{DAC} = \widehat{CBE} \Rightarrow DC = EC \Rightarrow DC = EC$

b) Xét đường tròn (O): Vì $DC = EC$ nên $\widehat{EBC} = \widehat{CBD}$

$$\text{Hay } \widehat{HBN} = \widehat{NBD} \Rightarrow BN \text{ là phân giác của } \angle HBD$$

Xét ΔBHD có $BN \perp HD$ (do AD là đường cao)

Mà BN là phân giác của $\angle HBD$ nên ΔBHD cân tại B.

c) ΔHCD có CN là đường cao

Lại có ΔBHD cân $\Rightarrow BN$ vừa là đường cao vừa là đường trung trực

$\Rightarrow$ CN là đường trung trực của ΔHCD

$\Rightarrow \Delta HCD$ cân tại C $\Rightarrow CD = CH$

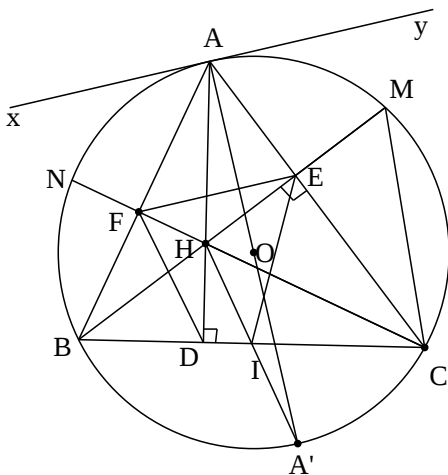
Từ kết quả của bài tập 95 (SGK) cho ta lớp bài toán về đường cao trong tam giác

Bài 5:

Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, BE và CF cắt đường tròn lần lượt tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O).

- Chứng minh tứ giác BFEC và tứ giác AFHE nội tiếp
- Chứng minh : $AF \cdot AB = AE \cdot AC$
- Chứng minh H và N đối xứng nhau qua AB.
- Qua A kẻ $xy \parallel EF$. Chứng minh xy là tiếp tuyến của (O; R).
- Tứ giác FEID nội tiếp.
- Cho BC cố định A và C chuyển động trên cung lớn BC sao cho ΔABC nhọn.
CMR: H chuyển động trên cung tròn cố định.

Hướng dẫn



- Tự làm
- Tứ giác BFEC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{FCE}$
 $\Rightarrow \Delta ABE \simeq \Delta ACF \Rightarrow \text{đpcm}$

(Sử dụng kết quả (a) bài 4)

c) Sử dụng kết quả b) bài 4

d) $\widehat{xAB} = \widehat{AFE}$ (So le trong); $\widehat{AFE} = \widehat{ECB}$ (cùng bù với BFE)

$$\Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{ECB} = \frac{1}{2} \text{Sđ } AB$$

$\Rightarrow Ax$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) (định lí đảo góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây)

$$\text{e) } \widehat{FDE} = \widehat{FDA} + \widehat{ADE} = \widehat{EBA} + \widehat{ABE} = 2\widehat{ABE}$$

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFEC có I là tâm đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{FIE} = 2\widehat{FBE} \text{ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)}$$

$$\Rightarrow \widehat{FDE} = \widehat{FIE} \Rightarrow \text{Tứ giác DIFE nội tiếp}$$

f) Kẻ đường kính AA'

Cách 1:

Tứ giác BHCA' là hình bình hành

$$\Rightarrow \widehat{BA'C} = \widehat{BHC} \text{ mà } \widehat{BA'C} = 180^\circ - \widehat{BAC} \text{ (Tứ giác ABCA' nội tiếp)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = \alpha \text{ không đổi}$$

$\Rightarrow H$ thuộc cung chứa góc α dựng trên BC

Cách 2: Lấy O' đối xứng với O qua BC $\Rightarrow O'$ cố định

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn (O') cố định $\Rightarrow$ giới hạn $\Rightarrow H$ thuộc cung BC của đường tròn (O') trên

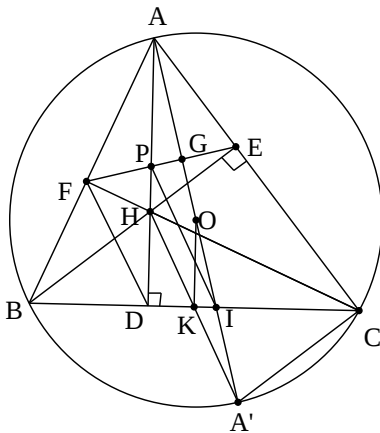
Bài 6: (Đề 2019)

Cho ΔABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

- a) Chứng minh: B, C, E, F thuộc một đường tròn
 b) Chứng minh $OA \perp EF$
 c) Gọi K là trung điểm của BC, AO cắt BC tại I, EF cắt AH tại P.

Chứng minh $\triangle APE \sim \triangle AIB$ và $KH \parallel IP$

Hướng dẫn



- a) Giống bài tập 5
 b) Là đảo của phần d) bài 5:

Kẻ thêm tiếp tuyến tại A là Ax

Chứng minh $EF \parallel Ax \Rightarrow OA \perp EF$

- c) *Chứng minh $\triangle APE \sim \triangle AIB$

Tứ giác BFEC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEP} = \widehat{ABI}$ (cùng bù với $\widehat{FEC}$)

Cách 1: $\frown$

$BAD = IAC$ (bài tập 5e)

$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{HAE}$ hay $\widehat{BAI} = \widehat{PAE}$

$\Rightarrow \triangle APE \sim \triangle AIB$

Cách 2:

Do $OA \perp EF$ (chứng minh phần b)

Gọi G là giao điểm của AA' và $EF \Rightarrow \widehat{PGI} = 90^\circ$

Tứ giác PDIG nội tiếp $\Rightarrow \widehat{APE} = \widehat{AIB}$ (cùng bù với $\widehat{DPG}$)

$\Rightarrow \triangle APE \sim \triangle AIB$

* Chứng minh $IP \parallel KH$

$$\triangle APE \sim \triangle AIB \Rightarrow \frac{AP}{AI} = \frac{AE}{AB} \quad (1)$$

Lại có tứ giác BHCA' là hình bình hành (tự chứng minh)

$\Rightarrow K$ là trung điểm của HA' hay H, K, A' thẳng hàng

Xét $\triangle_{\text{vuông}} AHE$ và $\triangle_{\text{vuông}} ABA'$ có $\widehat{BAA'} = \widehat{HAE}$ (do $\triangle APE \sim \triangle AIB$)

$$\triangle AHE \sim \triangle AA'B \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AA'} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AP}{AI} = \frac{AH}{AA'} \Rightarrow IP \parallel HA' \text{ (định lí Talet đảo)}$$

Hay $IP \parallel HK$.

V. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Lớp bài tập về hai tiếp tuyến và một cát tuyến kẻ từ một điểm đến một đường tròn

Bài toán: Cho đường tròn $(O; R)$. Qua điểm K nằm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD với đường tròn (A và B là các tiếp điểm, C nằm giữa K và D). H là trung điểm của CD .

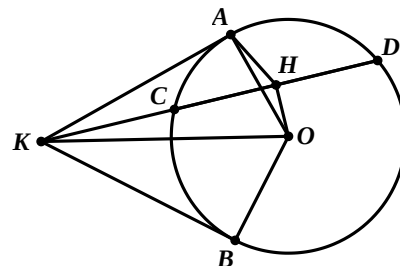
Câu 1. Chứng minh 5 điểm K, H, A, B, O cùng thuộc một đường tròn.

1.1 Chứng minh tứ giác $KBOA$ là tứ giác nội tiếp.

1.2 Chứng minh tứ giác $KHOB$ là tứ giác nội tiếp.

1.3 Chứng minh tứ giác $AHOB$ là tứ giác nội tiếp.

1.4 Chứng minh góc $AHK =$ góc KOB .



Câu 2. Gọi M là giao của AB và OK.
 Chứng minh $KC.KD = KM.KO$.

2.1 Chứng minh $KA^2 = KC.KD$.

2.2 Chứng minh $MK.MO = AM^2$
 (hoặc thay bằng chứng minh: $MK.MO = \frac{AB^2}{4}$)

2.3 Chứng minh $OM.OK + KC.KD = KO^2$

2.4 Chứng minh $\frac{AC}{AD} = \frac{KC}{KA}$.

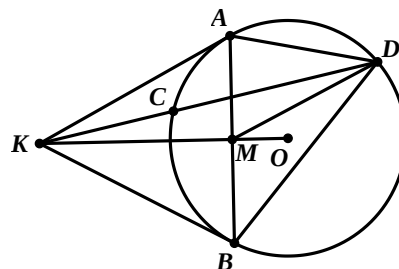
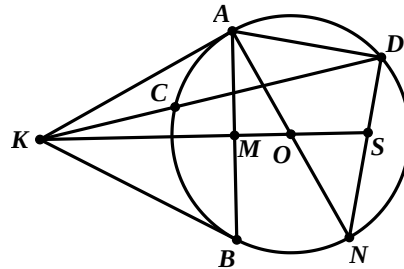
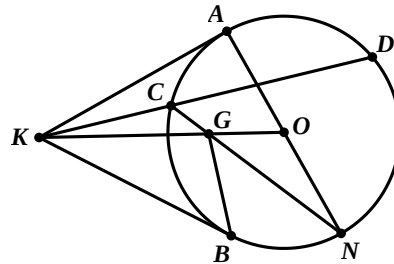
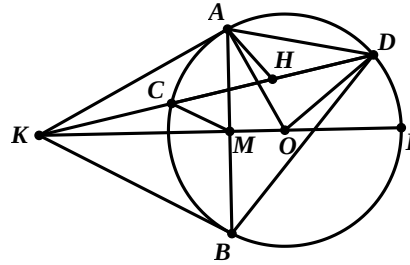
2.5 Chứng minh góc $ADB =$ góc AHK
 (phát triển từ câu 1. 4).

2.6 Gọi I là giao của đoạn KO với (O).
 Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle KAB$

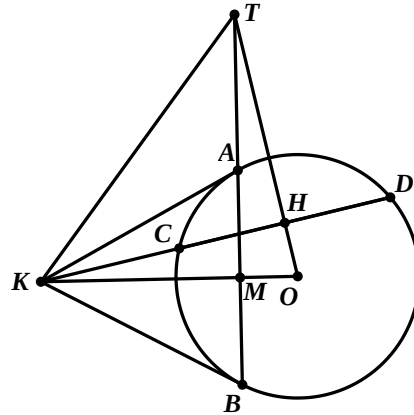
2.7 Kẻ đường kính AN của (O). Gọi G là
 giao của CN và KO. Chứng minh
 $KCGB$ là tứ giác nội tiếp.

2.8 Kẻ đường kính AN của (O). Gọi S là
 giao của DN và KO. Chứng minh tứ
 giác $AMSD$ nội tiếp.

2.9 Chứng minh góc $ADC =$ góc MDB .



2.10 Gọi giao của OH và AB là T, chứng minh KMHT là tứ giác nội tiếp.



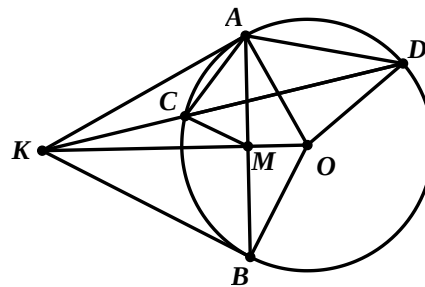
Câu 3. Chứng minh tứ giác OMCD là tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn

Từ $KC \cdot KD = KM \cdot KO$ ta chứng minh $\triangle KDM \sim \triangle KOC$

$$\Rightarrow \angle COM = \angle CDM$$

$\Rightarrow$ OMCD là tứ giác nội tiếp



3.1 Nếu cho cát tuyến KCD di động, chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\triangle CMD$

luôn đi qua một điểm cố định.

3.2 Khai thác câu 2.4 Chứng minh : $AC \cdot BD = BC \cdot AD$

Hướng dẫn:

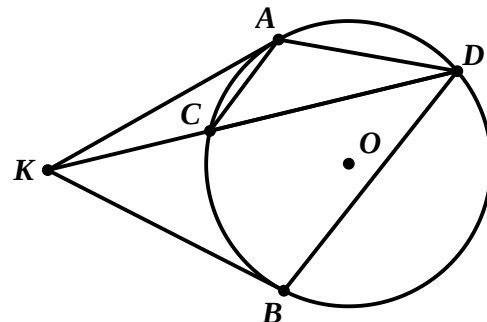
Chứng minh $\triangle KAC \sim \triangle KDA$ (g-g) $\Rightarrow$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{KC}{KA}$$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{KB}$.

$$\text{Từ đó có } \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

$$\Rightarrow AC \cdot BD = BC \cdot AD$$



3.3 Chứng minh AB chứa tia phân giác của góc CMD. (hoặc thay bằng câu:

Gọi I là giao của AB và CD, chứng minh $\frac{IC}{ID} = \frac{MC}{MD}$, hoặc chứng minh MI và

MK là các đường phân giác trong và ngoài của $\triangle MCD$). Khai thác tiếp: Kẻ đường kính AN, S là giao của DN với KO. Chứng minh $AS \parallel CN$

Hướng dẫn:

Tứ giác CMOD là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{CKD} = \widehat{ODC} \text{ và } \widehat{OMC} = \widehat{OCD}$$

Mà $\widehat{OCD} = \widehat{CDC}$ nên $\widehat{CMK} = \widehat{OMD}$.

$$\text{Mà } \widehat{CMK} + \widehat{CMI} = 90^\circ = \widehat{OMD} +$$

$\widehat{DMI}$

$$\Rightarrow \widehat{CMI} = \widehat{DMI} \Rightarrow$$

MI là phân giác của $\widehat{CMD}$

Tứ giác AMSD nội tiếp (Câu 2.8) $\Rightarrow$

$$\widehat{ASD} = \widehat{AMD} = \frac{1}{2} \widehat{CMD}$$

Mà $\widehat{CMD} = \widehat{COD}$ (CMOD là tứ giác nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{ASD} = \frac{1}{2} \widehat{COD}$

$$\text{Mà } \widehat{CND} = \frac{1}{2} \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{CND} = \widehat{ASD} \Rightarrow$$

AS//CN

3.4 Khai thác câu 2.4 và 2.8 Chứng minh $AC \cdot BD = CH \cdot AB$

(hoặc thay bằng câu: $2AC \cdot BD = AC \cdot CD$)

Hướng dẫn

Tứ giác AKBH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{ABK}$

$$\text{Mà } \widehat{ABK} = \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AHK}$$

Từ đó chứng minh $\triangle ACH \sim \triangle ABD$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CH}{BD} \Rightarrow AC \cdot BD = CH \cdot AB = \frac{1}{2} CD \cdot AC$$

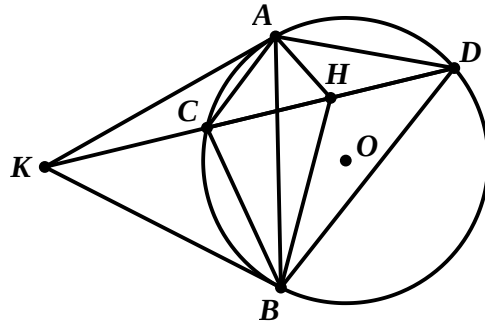
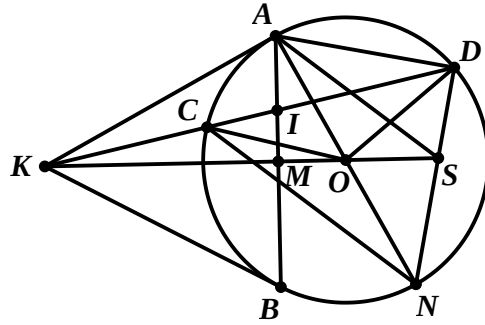
$$\text{Hay } 2AC \cdot BD = CD \cdot AC$$

$$\text{Mà } AC \cdot BD = BC \cdot AD \text{ (câu 3.2)}$$

$$\Rightarrow AC \cdot BD + BC \cdot AD = CD \cdot AC$$

3.5 Gọi E là giao của DM và đường tròn (O). Chứng minh KDOE là tứ giác nội tiếp. Khai thác tiếp: Chứng minh KO là phân giác của góc DKE, hoặc

$$\text{chứng minh: } \frac{ME}{MD} = \frac{KE}{KD}.$$



Hướng dẫn:

Chứng minh $MA \cdot MB = ME \cdot MD$ và $MA \cdot MB = MO \cdot MK$

$\Rightarrow ME \cdot MD = MO \cdot MK$. Từ đó chứng minh được KDOE là tứ giác nội tiếp.

Do $OD = OE \Rightarrow \widehat{OD} = \widehat{OE} \Rightarrow \widehat{EKO} = \widehat{OKD}$

$\Rightarrow KO$ là tia phân giác của góc EKD.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong ΔEKD

$$\frac{ME}{MD} = \frac{KE}{KD}$$

3.6 Qua A vẽ dây AF đi qua H. Chứng minh $BF \parallel CD$. Khai thác: Gọi P và Q lần lượt là giao của AC, AD với đường thẳng BF. Chứng minh $FP = FQ$.

Hướng dẫn:

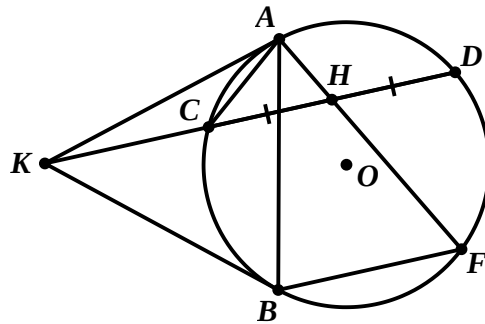
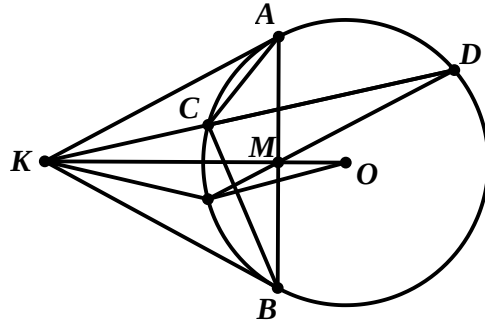
Xét (O) có $\widehat{AFB} = \widehat{ABK}$.

Xét đường tròn đi qua A, K, B, H có $\widehat{AHK} = \widehat{KBA}$ nên $\widehat{KHA} = \widehat{AFB} \Rightarrow BF \parallel CD$.

Khai thác:

Sử dụng hệ quả định lý Ta lét chứng minh được

$$\frac{CH}{FP} = \frac{HD}{FQ}, \text{ mà } CH = HD \Rightarrow FP = FQ$$



3.7 Qua C vẽ dây CT đi qua M. Chứng minh $DT \parallel AB$. (Do $DT \parallel AB$ nên tứ giác ABTD là hình thang cân. Ta lại có OK là trục đối xứng của hình thang cân đó nên $MD = MT$, góc $OMD =$ góc OMT) (Hoặc thay bằng câu: Qua D vẽ dây DT $\parallel AB$, chứng minh CT đi qua trung điểm của AB).

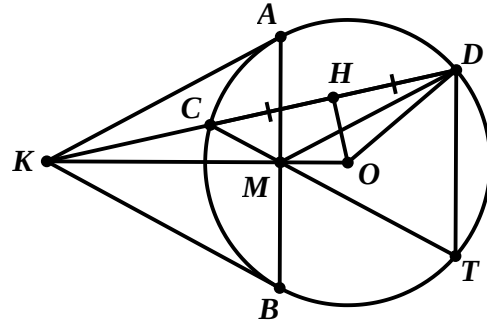
Hướng dẫn:**Hình vẽ**

Chứng minh $\widehat{CMA} = \widehat{HOD}$

(Do $\widehat{CMA} + \widehat{CMK} = 90^\circ = \widehat{HDO} + \widehat{HOD}$) $\Rightarrow \widehat{CMA} = \frac{1}{2} \widehat{COD}$

Mà $\widehat{CTD} = \frac{1}{2} \widehat{COD}$ nên $\widehat{CMA} = \widehat{CTD} \Rightarrow DT \parallel AB$.

ABTD là hình thang cân mà OK là trung trực của AB $\Rightarrow$ OK là trung trực của TD $\Rightarrow MT = MD$

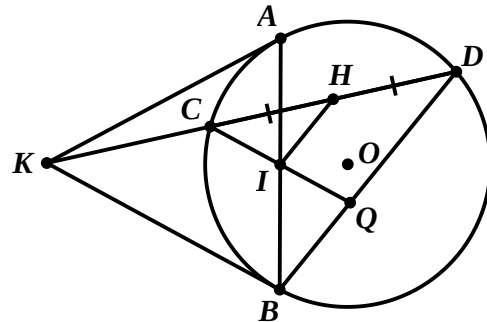


3.8 Qua H kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại I. Chứng minh CI // KB. (hoặc thay bằng câu: Qua C kẻ đường thẳng song song với KB nó cắt AB và BD thứ tự tại I và Q, chứng minh IC = IQ)

Hướng dẫn:

Hình vẽ:

Có $IH // BD \Rightarrow \widehat{AIH} = \widehat{ABD}$ mà $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$
 $\Rightarrow \widehat{AIH} = \widehat{ACH} \Rightarrow ACIH$ là tứ giác nội tiếp.
 $\Rightarrow \widehat{ICH} = \widehat{IAH}$; mà $\widehat{IAH} = \widehat{HKB}$ (KBHA nội tiếp)
 $\Rightarrow \widehat{ICH} = \widehat{BKH} \Rightarrow CI // BK$
 Kẻ $CI // BK$. Ta cũng chứng minh được ACIH là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng minh được $HI // BD$
 $\Rightarrow HI // QD$ mà $HC = HD \Rightarrow IC = IQ$.



3.9 Khai thác từ câu 2.6: Gọi I là giao của đoạn KO với (O). Chứng minh CI là phân giác của góc KCM.

Hướng dẫn:

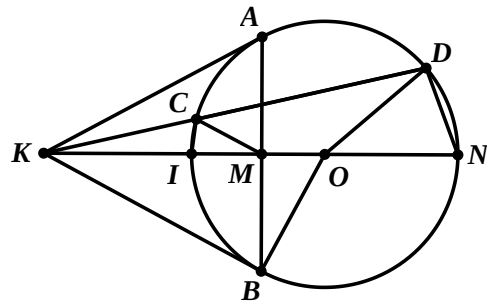
Cách 1:

$$\text{Do } \triangle KCM \sim \triangle KOD \Rightarrow \frac{CK}{CM} = \frac{OK}{OD}.$$

$$\text{Mà } OD = OB \Rightarrow \frac{CK}{CM} = \frac{OK}{OB}.$$

$$\text{Do } \triangle KMB \sim \triangle KBO \Rightarrow \frac{OK}{OB} = \frac{KB}{MB}.$$

$$\begin{aligned} \text{Mà BI là phân giác của } \widehat{KBM} &\Rightarrow \frac{KB}{MB} \\ &= \frac{IK}{IM}. \end{aligned}$$



Vậy $\frac{IK}{IM} = \frac{CK}{CM}$. Từ đó chứng minh được CI là phân giác của $\widehat{KCM}$.

Cách 2:

3.10 Khai thác câu 2.7: Kẻ đường kính AN của (O). Các dây NC, ND lần lượt cắt KO tại G và S. Chứng minh $OG = OS$ (hoặc thay bằng câu: Chứng minh AGNS là hình bình hành)

Hướng dẫn:

Cách 1: Chứng minh $AS \parallel CN$ (câu 3.3) $\Rightarrow \widehat{SAN} = \widehat{ANC}$.

Từ đó chứng minh $\Delta AOS = \Delta NOG$ ($g - c - g$) $\Rightarrow OS = OG$.

Cách 2: Có $BN \parallel KO \Rightarrow \widehat{GBN} = \widehat{KGB}$

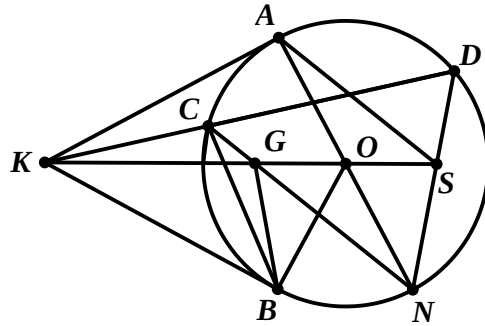
Mà KCGB là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KGB} = \widehat{KCB}$

Mà CDBN là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KCB} = \widehat{BND}$

Vậy $\widehat{GBN} = \widehat{BND}$ mà $\widehat{OBN} = \widehat{ONB} \Rightarrow \widehat{GBO} = \widehat{ONS}$.

$\Rightarrow \Delta GOB = \Delta SON$ ($g - c - g$)
 $\Rightarrow OG = OS$

Cách 3: Qua C kẻ đường thẳng song song với KO cắt AN và DN lần lượt tại E và F. Chứng minh CAHE nội tiếp $\Rightarrow HE \parallel DN$ mà $HC = HD \Rightarrow EC = EF$. Sử dụng hệ quả Ta lét chứng minh được $OG = OS$.



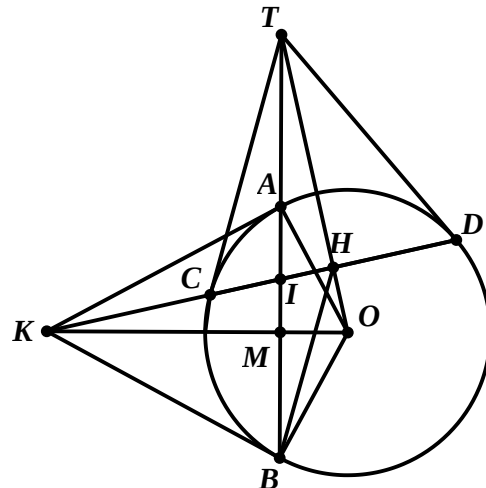
3.11 Khai thác câu 2.10: Gọi giao của OH và AB là T. I là giao của AB và CD. Chứng minh HT và HI là các đường phân giác ngoài và trong của ΔHAB . (hoặc thay bằng câu: Chứng minh $\frac{IA}{IB} = \frac{TA}{TB}$)

Hướng dẫn:

Do K, A, H, B thuộc một đường tròn mà $KA = KB$

$$\Rightarrow \widehat{KA} = \widehat{KB} \Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{BHK} \Rightarrow$$

HI là tia phân giác của $\widehat{AHB}$, mà $HI \perp HT \Rightarrow$
 HT là tia phân giác của góc ngoài của tam
 giác HAB .



3.12 Gọi giao của OH và AB là T. Chứng minh tứ giác TOMC là tứ giác nội tiếp. Khai thác tiếp: Chứng minh TC, TD là hai tiếp tuyến của (O) hoặc chứng minh 5 điểm T,D,O,M,C cùng thuộc một đường tròn. Hoặc: Gọi T là giao của hai tiếp tuyến với (O) tại C và D chứng minh T,A,B thẳng hàng.

Hướng dẫn:

Chứng minh $\widehat{TMC} = \widehat{TOC}$ (câu 3.3)

$\Rightarrow$ TCMO là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh $\widehat{TMD} = \widehat{TOD}$ (câu 3.3)

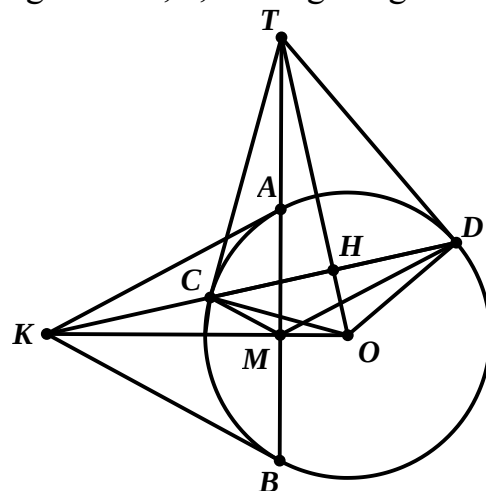
$\Rightarrow$ TMOD là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow T, M, O, C, D$ thuộc một đường

tròn

$$\Rightarrow \widehat{\text{TCO}} = \widehat{\text{TDO}} = \widehat{\text{TMO}} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ TC và TD là tiếp tuyến của (O).

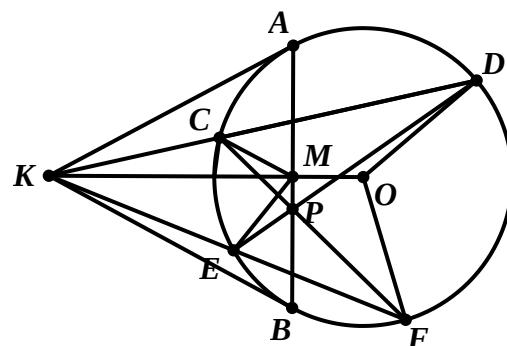


3.13 Qua K kẻ cát tuyến thứ hai là KEF . Gọi giao của DE và CF là P. Chứng minh A,P,B thẳng hàng.

Hướng dẫn:

c/m tứ giác EMOF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EMK} = \widehat{KFO}$

c/m tứ giác CMOD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{ODC}$

$$\Rightarrow \widehat{\text{EMC}} = \widehat{\text{EFO}} + \widehat{\text{CDO}}$$
$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{\text{sđEF}}) + \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{\text{sđCD}})$$
$$= \frac{1}{2}(\widehat{\text{sdEC}} + \widehat{\text{sdFD}}) = \widehat{\text{EPC}}.$$


Vậy $\widehat{EMC} = \widehat{EPC} \Rightarrow ECMP$ là tứ giác nội tiếp.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{PME} = \widehat{ECF} \\ \text{mà } \widehat{EMK} = \widehat{EFD} \end{aligned} \Rightarrow \widehat{PMK} = \widehat{ECF} + \widehat{EFO} = 90^\circ$$

$\Rightarrow PM \perp OK$, mà $AB \perp OK$ tại M

$\Rightarrow P, A, B$ thẳng hàng

3.14 Qua K kẻ cát tuyến thứ hai là KEF. Gọi giao của CE và DF là Q. Chứng minh Q, A, B thẳng hàng

Hướng dẫn:

Gọi giao của DE và CF là P. QP cắt (O) tại Y và S. Cần chứng minh $Y \equiv B; S \equiv A$.

Gọi T là giao của đường tròn (EPC) với QS.

$\Rightarrow ECTB$ là tứ giác nt $\Rightarrow \widehat{CTS} = \widehat{CED} = \widehat{CFD}$.

$\Rightarrow FPTD$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{CTD} = \widehat{COD} \Rightarrow TOCD$ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh tương tự có ETOF là tứ giác nội tiếp.

Từ đó chứng minh được O, K, T thẳng hàng.

$\Rightarrow \widehat{KTS} = \widehat{KTC} + \widehat{CTS} = \widehat{CED} + \widehat{ODC}$

$$= \frac{1}{2} \widehat{COD} + \widehat{ODC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow OK \perp YT$

Chứng minh $\triangle OTC \sim \triangle OCK \Rightarrow OS \cdot OK = OC^2$

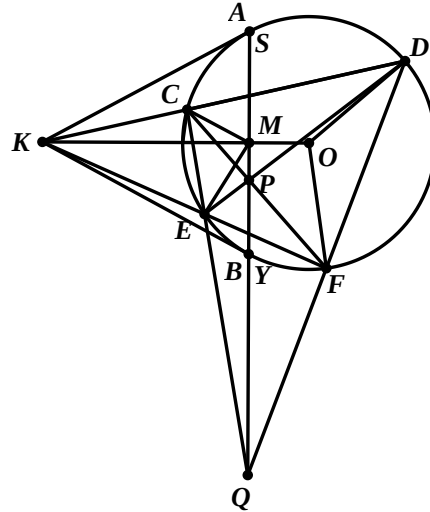
Chứng minh $\triangle OSK \sim \triangle OST \Rightarrow \widehat{OSK} = \widehat{OTS} = 90^\circ$

$\Rightarrow OS \perp KS \Rightarrow S \equiv A$.

Chứng minh tương tự ta có $Y \equiv B$.

3.15 Kẻ $AE \perp BD$ tại E. $BF \perp CD$ tại F. Chứng minh $\triangle DEM \sim \triangle DAK$.

Khai thác tiếp: Gọi I là giao của AB và CD; N là giao của EF và DM, chứng minh $NI \perp AB$



Hướng dẫn:**Cách 1:** $\triangle EAD \sim \triangle MKA$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AK} = \frac{DE}{MA} \Rightarrow \frac{AD}{AK} = \frac{AD}{DE} \\ = \frac{AK}{AM}$$

$$\text{Mà } MA = MB = ME \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AK}{EM}$$

Chứng minh được $\widehat{MED} = \widehat{DAK}$ (= $180^\circ - \widehat{ABE}$)

Cách 2: Chứng minh $\widehat{ADK} = \widehat{MDE}$ $\Rightarrow \triangle DEM \sim \triangle DAK$ (g – g)**Khai thác:**

$$\triangle DEN = \triangle DAI \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DN}{DI} \text{ mà } \frac{DE}{DA} = \frac{DM}{DK}$$

$$\Rightarrow \frac{DN}{DI} = \frac{DM}{DK} \Rightarrow \frac{DN}{DM} = \frac{DI}{DK} \\ \Rightarrow IN // KM$$

Mà $KM \perp AB \Rightarrow IN \perp AB$.

3.16 Chứng minh 2 tia phân giác của hai $\angle CAD$ và $\angle CBD$ cắt nhau tại một điểm trên cát tuyến KCD.

Hướng dẫn:

Gọi I là giao của tia phân giác $\angle CAD$ với CD

. Cần chứng minh BI là phân giác của $\angle CBD$

Ta có $\angle AIC = \angle ADI + \angle IAD$

Mà $\angle ADI = \angle KAC$; $\angle DAI = \angle CAI$ nên $\angle AIK = \angle KAI$

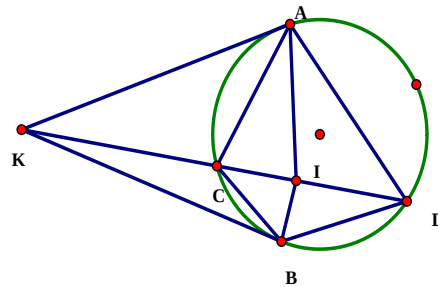
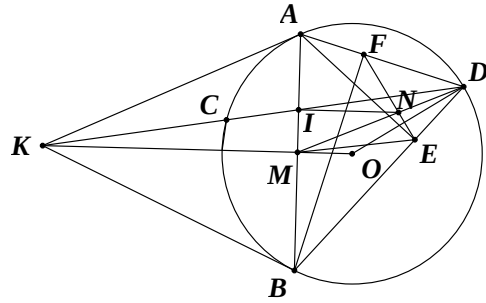
$\Rightarrow \triangle KAI$ cân tại K $\Rightarrow KA = KI$

$\Rightarrow KI = KB \Rightarrow \triangle KIB$ cân tại K

$\Rightarrow \angle KIB = \angle KBI$ mà $\angle IDB = \angle CBK \Rightarrow$

$\angle CBI = \angle DBI$

3.17 Kẻ dây DT // AB Chứng minh C, M, T thẳng hàng.



Hướng dẫn:

Gọi giao của CT với AB là N

Cần chứng minh $NA = NB$.

Chứng minh $\triangle BCN \sim \triangle DCA \Rightarrow$

$$\frac{BN}{CN} = \frac{AD}{AC}$$

Chứng minh tương tự có $\frac{AN}{CN} = \frac{BD}{BC}$

$$\text{Mà } \frac{AD}{AC} = \frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KC} = \frac{BD}{BC} \quad (\text{câu 3.2})$$

$$\text{Vậy } \frac{BN}{CN} = \frac{AN}{CN} \Rightarrow BN = AN \Rightarrow N \text{ trùng}$$

M

3.18 Gọi G là trọng tâm của $\triangle ACD$. Khi cát tuyến KCD thay đổi, K và (O) cố định thì G chạy trên đường nào?

Hướng dẫn:

Ta có 5 điểm A, B, K, H, O thuộc 1

đường tròn nên $\angle AHB = \angle AOB$ không đổi.

Kẻ $GF \parallel BH \Rightarrow \angle AGF = \angle AHB = \alpha$

không đổi

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow AF \text{ cố định}$$

Vậy G chạy trên cung chứa góc α dựng trên đoạn AF

3.19 Giả sử $AD \parallel KB$. Gọi P là giao của AC và KB. Chứng minh P là trung điểm của KB. Khai thác: Gọi G là giao của AC và KO, chứng minh G là trọng tâm của $\triangle ABK$.

Hướng dẫn:

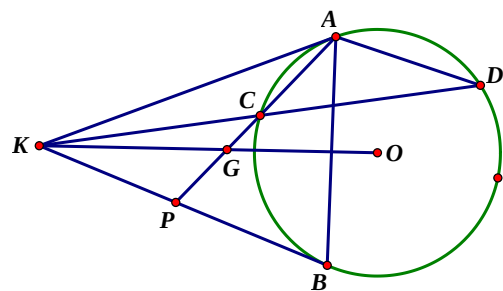
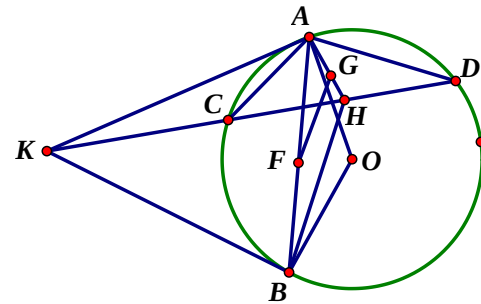
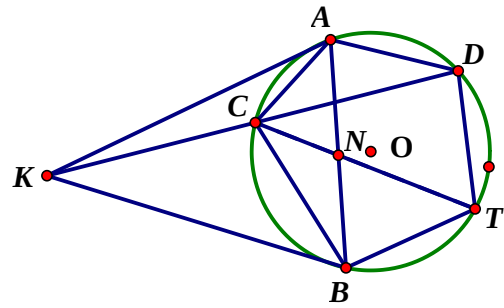
Chứng minh $\triangle KPC \sim \triangle APK \Rightarrow KP^2 =$

PC. PA

Chứng minh $\triangle PCB \sim \triangle PBA \Rightarrow PB^2 =$

PC. PA

$\Rightarrow PB = PK$



Câu 4: Giáo viên có thể lấy các ý ở câu 3 nhưng bớt các câu hỏi trung gian đi, hoặc có thể chuyển thành bài toán tĩnh toán, bài toán có yếu tố cố định và di động thì sẽ được câu hỏi khó hơn phù hợp với câu d ở bài hình thi vào 10

2. Lớp bài tập xuất phát từ ba đường cao của một tam giác:

Bài tập. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O, R) cố định. Kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. BE, CF cắt (O) tại điểm thứ hai lần lượt là M và N. Gọi I là trung điểm của BC. Kẻ đường kính AK của (O) .

1) Chứng minh các tứ giác: BFEC, AFHE, ... nội tiếp.

2)

2.1. Chứng minh tứ giác BHCK là hình bình hành.

2.2. Chứng minh DC. DB = DH. DA.

2.3. Chứng minh AF. AB = AE. AC.

2.4. Chứng minh H và N đối xứng nhau qua AB.

2.5. Chứng minh EF // MN.

2.6. Chứng minh AB. AC = 2R.AD.

3)

3.1. Chứng minh $EF = BC \cdot \cos \angle BAC$.

3.2. Chứng minh $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$.

3.3. Chứng minh $BH \cdot BE + CH \cdot CF + AH \cdot AD = \frac{1}{2} (AB^2 + BC^2 + AC^2)$.

3.4. Chứng minh $AO \perp EF$.

3.5. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của D trên BH và CH. Chứng minh $PQ \perp EF$.

3.6. Giả sử $\angle BAC = 45^\circ, S_{ABC} = 100 \text{ cm}^2$. Tính diện tích $\triangle AFE$.

3.7. Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EFD.

3.8. Chứng minh IO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF.

3.9. Tính tỉ số $\frac{OI}{AH}$.

3.10. Qua A kẻ đường thẳng xy song song với EF. Chứng minh xy là tiếp tuyến của $(O; R)$.

3.11. Gọi P là điểm đối xứng với K qua B. Chứng minh P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB.

3.12. Gọi P, Q lần lượt là điểm đối xứng với K qua B và C. Chứng minh H là trung điểm của PQ.

3.13. Chứng minh FEID là tứ giác nội tiếp.

4)

Cho B, C cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn.

4.1. Chứng minh EF có độ dài không đổi.

4.2. Chứng minh AH có độ dài không đổi. (Có thể hỏi cách khác: Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, tam giác HEF có bán kính hoặc chu vi không đổi).

- 4.3. Chứng minh H chuyển động trên cung tròn cố định.
 4.4. Tìm vị trí của điểm A để tứ giác AFHE có diện tích lớn nhất.
 4.5. Giả sử $45^\circ < \angle BAC < 90^\circ$ Tìm vị trí của điểm A để tam giác AEH có diện tích lớn nhất.
 4.6. Tìm vị trí của điểm A để tam giác HBC có diện tích lớn nhất.
 4.7. Tìm vị trí của A để $AB + AC$ đạt giá trị lớn nhất.
 4.8. Xác định vị trí của điểm A trên cung lớn BC để chu vi tam giác DEF có giá trị lớn nhất.
 4.9. Chứng minh $\sin A + \sin B + \sin C < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$.
 4.10. AI cắt OH tại G. Khi A di chuyển trên cung lớn BC thì G chuyển động trên đường nào?

Hướng dẫn:**3.****3.1.** Chứng minh $\triangle AFE \sim \triangle ACB$

$$\Rightarrow FE = BC \cdot \frac{AF}{AC} = BC \cdot \cos \angle BAC.$$

3.2. Chứng minh $BH \cdot BE = BD \cdot BC$; $CH \cdot CF = CD \cdot CB$
 $\Rightarrow BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC \cdot BD + BC \cdot CD = BC^2$. (1)

3.3. Chứng minh tương tự 3.2 ta có:

$$CH \cdot CF + AH \cdot AD = AC^2 \quad (2)$$

$$AH \cdot AD + BH \cdot BE = AB^2 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1); (2); (3) ta được điều cần chứng minh.

3.4.

Theo 2.5 có $\Rightarrow EF \parallel MN$.

Chứng minh $\angle ABE = \angle ACF \Rightarrow A$ là điểm chính giữa của cung MN

$$\Rightarrow AO \perp MN \Rightarrow AO \perp EF.$$

3.5.

Chứng minh tứ giác HPDQ là tứ giác nội tiếp $\angle HPQ = \angle HDQ$.

Chứng minh $\angle HCD = \angle HDQ$; $\angle NCB = \angle NMB \Rightarrow \angle NMP = \angle HPQ \Rightarrow MN \parallel QP$.

Mà $AO \perp MN \Rightarrow AO \perp PQ$.

$$\mathbf{3.6.} \quad \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB} \right)^2 = \left(\sin \angle EAF \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{AEF} = 50 \text{ cm}^2.$$

3.7.

Tứ giác BFHD nội tiếp $\Rightarrow FDH = FBH$.

Tứ giác HDCE nội tiếp $\Rightarrow HDE = HCE$.

Mà $FBH = ECH \Rightarrow FDH = EDH$.

$\Rightarrow DA$ là tia phân giác của FDE .

Chứng minh tương tự được FC là phân giác của DFE .

$\Rightarrow H$ là giao điểm 2 đường phân giác của tam giác DEF hay H là tâm

đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF .

3.8. Chứng minh AH là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF . Gọi O' là trung điểm của AH . Chứng minh $IF \perp FO' \Rightarrow IF$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF .

3.9.

Chứng minh I là trung điểm của HK .

Chứng minh IO là đường trung bình của

tam giác $AHK \Rightarrow \frac{IO}{AH} = \frac{1}{2}$.

3.10. Vì $xy \parallel EF$, mà $AO \perp EF$ nên $xy \perp AO$ tại A

$\Rightarrow xy$ là tiếp tuyến của $(O;R)$

3.11. Chứng minh tứ giác $PHCB$ là hình bình hành

$\Rightarrow PH \parallel BC \Rightarrow PH \perp AH \Rightarrow \angle AHP = 90^\circ$.

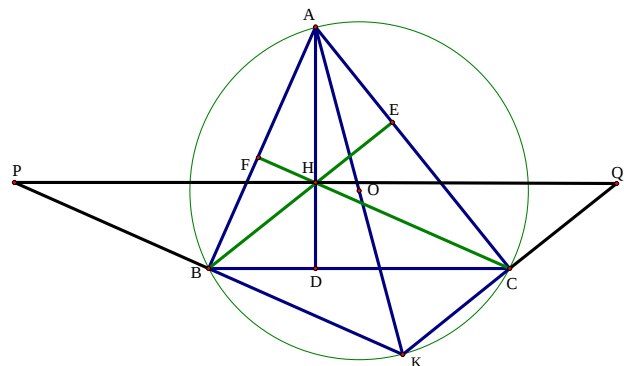
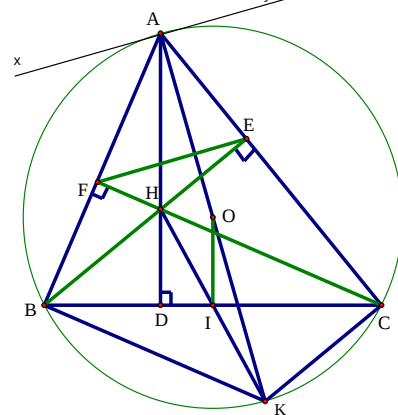
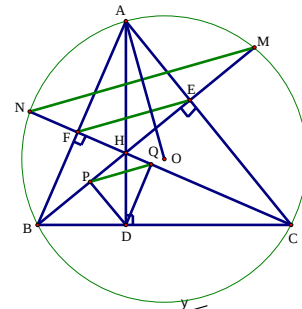
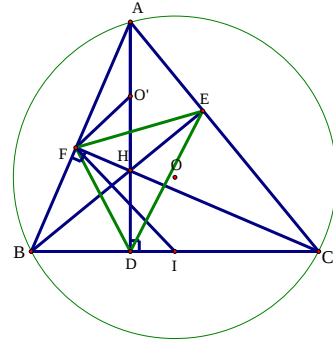
$KB \perp AB \Rightarrow \angle ABP = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHBP$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ Điểm P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB .

3.12. Tứ giác $PHCB$ là hình bình hành nên $PH = BC$ và $PH \parallel BC$.

Tứ giác $HQCB$ là hình bình hành nên $HQ = BC$ và $HQ \parallel BC$.



$\Rightarrow HP = HQ$ và P, H, Q thẳng hàng.
 $\Rightarrow H$ là trung điểm của PQ.

4)

4.1. Vì B, C cố định nên $\angle BAC$ không đổi. Mà $EF = BC \cdot \cos \angle BAC$ nên EF không đổi.

4.2. $AH = 2OI$, mà BC cố định nên I cố định, suy ra OI không đổi hay AH không đổi.

4.3. Vì B, C cố định nên trung điểm I của BC cố định $\Rightarrow OI$ không đổi.
 $AH = 2OM$ (theo 3.9) suy ra AH không đổi. 4.3.

Cách 1: Vì BC cố định nên $\angle BAC = \alpha$ không đổi. Chứng minh
 $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$ không đổi

$\Rightarrow$ Điểm H chuyển động trên cung chứa góc $180^\circ - \alpha$ dựng trên đoạn BC cố định.

Cách 2: BC cố định nên trung điểm I của BC cố định. Gọi O' là điểm đối xứng với O qua M

$\Rightarrow O'$ cố định. Chứng minh được tứ giác HOKO' là hình bình hành nên $O'H = OK = R$.

Vậy điểm H nằm trên cung tròn tâm O' cố định, bán kính R không đổi.

4.4 Gọi E', F' lần lượt là hình chiếu của E và F trên AH.

Q là giao điểm của AH và EF.

$$\begin{aligned} S_{AFHE} &= S_{AFH} + S_{AEH} = \frac{1}{2} AH \cdot FF' + \frac{1}{2} AH \cdot EE' \\ &= \frac{1}{2} AH (FF' + EE') \end{aligned}$$

Ta có: $FF' \leq FQ, EE' \leq EQ$.

$$\Rightarrow S_{AFHE} \leq \frac{1}{2} AH \cdot FE \text{ không đổi.}$$

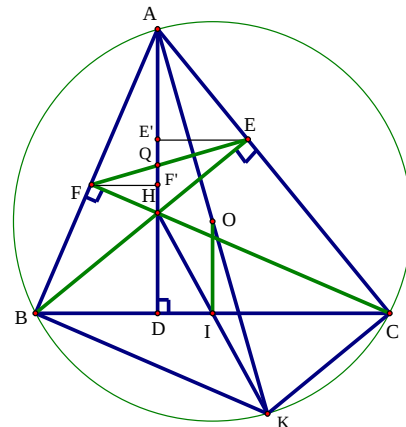
Dấu “=” xảy ra khi $EF \perp AH$ hay A là điểm chính giữa cung lớn BC.

4.5. S_{AEH} max khi AE. EH max, mà $AE \cdot EH \leq AE^2 + EH^2 = AH^2 = 4OI^2$ không đổi.

Dấu “=” xảy ra khi $AE = EH$ hay $\angle ACB = 45^\circ$.

4.6. S_{BHC} lớn nhất $\Leftrightarrow HD$ lớn nhất, mà AH không đổi nên HD lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ lớn nhất

$\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung lớn BC.



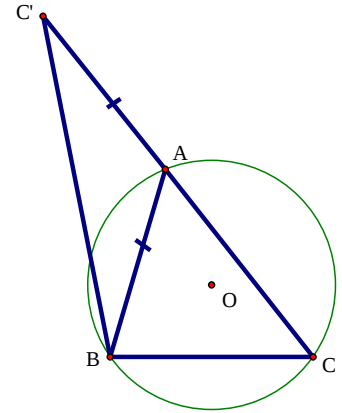
4.7. Gọi C' là điểm đối xứng của C qua A , khi đó $AB + AC = CC'$.

$$\Rightarrow \angle BC'C = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\alpha}{2} \text{ không đổi.}$$

$\Rightarrow C'$ thuộc cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn BC .

$AB + AC$ lớn nhất $\Leftrightarrow CC'$ lớn nhất $\Leftrightarrow CC'$ là đường kính của đường tròn $\Leftrightarrow \angle C'BC = 90^\circ \Leftrightarrow BA = C'A = CA$.

Vậy A là điểm chính giữa cung BC lớn thì $AB + AC$ lớn nhất.

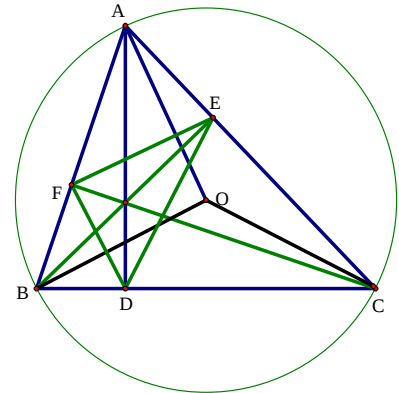


4.8. Ta có $AE \perp EF$ (theo 3.4)

Chứng minh tương tự ta có $BO \perp DF; CO \perp ED$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AEOF} + S_{BFOD} + S_{CDOE} = \frac{1}{2} AO \cdot FE + \frac{1}{2} OB \cdot FD + \frac{1}{2} OC \cdot ED \\ &= \frac{1}{2} R \cdot (FE + ED + DF) \end{aligned}$$

Vì R không đổi nên $(FE + ED + DF)$ lớn nhất $\Leftrightarrow S_{ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ lớn nhất (do BC không đổi)
 $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung lớn BC .



4.9. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC .

$$\text{Ta có } \angle BOI = \angle BAC \left(= \frac{1}{2} \angle BOC \right)$$

$$\sin A = \sin BOI = \frac{BI}{BO} = \frac{BI}{R}$$

$$\Rightarrow PQ = BI = R \sin A$$

$$\cos C = \cos POB = \frac{PO}{OB} = \frac{PO}{R} \Rightarrow$$

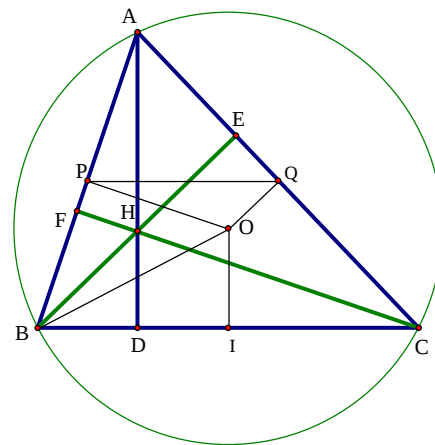
$$PO = R \cos C.$$

$$\text{Tương tự } OQ = R \cos B.$$

Tam giác OPQ có: $PQ < OP + OQ \Leftrightarrow R \sin A < R \cos C + R \cos B$
 $\Leftrightarrow \sin A < \cos B + \cos C$ (1)

Tương tự ta có $\sin B < \cos A + \cos C$; (2); $\sin C < \cos A + \cos B$ (3).

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.



4.10.

Chứng minh : G là trọng tâm $\triangle ABC$

Kẻ $GQ \parallel AO (Q \in OI)$

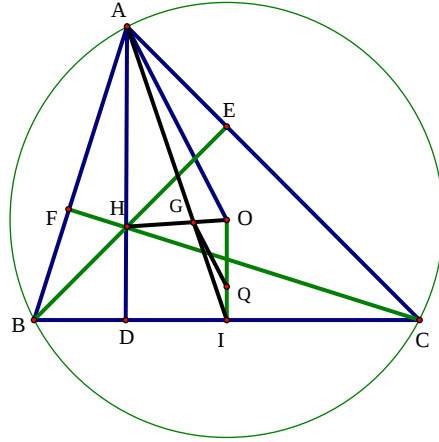
Chứng minh $\frac{GQ}{AO} = \frac{IQ}{IO} = \frac{IG}{IA} = \frac{1}{3}$

Vì B, C, O cố định $\Rightarrow I$ cố định

$\Rightarrow Q$ cố định và $GQ = \frac{1}{3}AO = \frac{1}{3}R$ không

đổi.

Suy ra G thuộc đường tròn cố định
tâm Q bán kính $\frac{1}{3}R$.



VI. MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI VÀO 10 HÀ NỘI

Bài 1. (Năm học 2015 - 2016). Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC . Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C và O). Đường thẳng AI cắt (O) tại D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm DE .

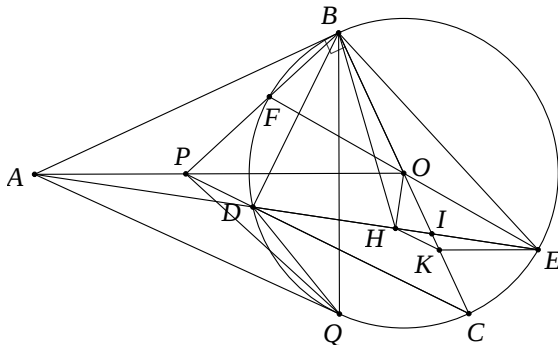
a) Chứng minh A, B, O, H cùng thuộc đường tròn

b) Chứng minh $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$.

c) Đường thẳng d qua E song song với AO cắt BC tại K . Chứng minh HK song song với CD .

d) Tia CD cắt AO tại P , tia EO cắt BP tại F . CHỨNG MINH tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật

Hướng dẫn:



a) $\widehat{ABO} = \widehat{AHO} = 90^\circ$

b) $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ (g.g)

c) $\widehat{OAH} = \widehat{OBH}$ (vì $ABOH$ là tứ giác nội tiếp). $\widehat{OAH} = \widehat{HEK}$ (vì $EK \parallel AO$) $\Rightarrow$
 $\widehat{HEK} = \widehat{OBH}$.

Suy ra BHKE là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{KHE} = \widehat{KBE}$

Mà $\widehat{KBE} = \widehat{CDE}$ (vì BDCE là tứ giác nội tiếp). Suy ra $\widehat{KHE} = \widehat{CDE}$. Vậy KH//CD

d) Gọi F' là giao điểm của BP và (O).

Gọi AQ là tiếp tuyến thứ hai của (O).

Vì tứ giác BDQC nội tiếp nên $\widehat{QDC} = \widehat{QBC}$ (cùng chắn cung QC)

Vì ABOQ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO nên $\widehat{QBC} = \widehat{QAO}$ (cùng chắn cung OQ). Suy ra $\widehat{QDC} = \widehat{QAO}$.

Xét tứ giác APDQ có $\widehat{QDC} = \widehat{QAO}$ nên APDQ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa 2 đỉnh còn lại các góc bằng nhau) $\Rightarrow \widehat{PDA} = \widehat{PQA}$ (cùng chắn cung AP)

Có $\widehat{PDA} = \widehat{EDC} = \widehat{EBC}$ Mà $\triangle ABP = \triangle AQP$ (c.g.c) nên $\widehat{PQA} = \widehat{PBA}$

Do đó $\widehat{PBA} = \widehat{EBC}$.

Suy ra $\widehat{PBE} = \widehat{ABC} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{F'BE} = 90^\circ$ nên F'E là đường kính (O)

Từ đó F' trùng với F và FBEC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{FCE} = 180^\circ - \widehat{FBE} = 90^\circ$

Tứ giác FBEC có $\widehat{FCE} = \widehat{FBE} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ nên tứ giác là hình chữ nhật.

Bài 2. (Năm học 2014 - 2015). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A và O). Đường thẳng qua C vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì trên cung KB (M khác K và B). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai N.

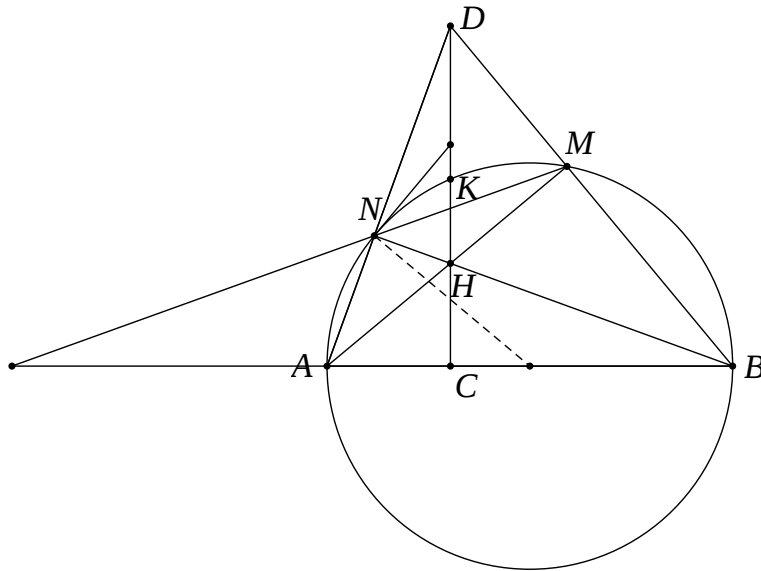
a) Chứng minh ACMD là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh CA.CB=CH.CD

c) Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm DH

d) Khi M di động trên cung KB. Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn:



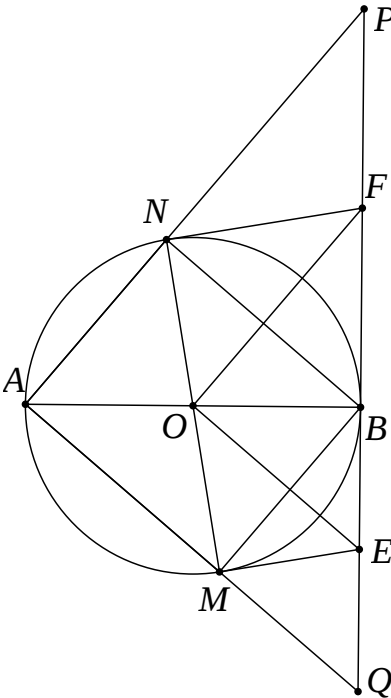
- a) $\widehat{ACD} = \widehat{AMD} = 90^\circ$
b) $\widehat{ACH} = \widehat{DCB} = 90^\circ$ và $\widehat{CAH} = \widehat{CDB}$ vì cùng phụ với góc CBM
c) Chứng minh H là trực tâm tam giác ABD nên AD vuông góc với BH
Mà AN cũng vuông góc với BH nên A, N, D thẳng hàng
Gọi E là giao điểm của CK và tiếp tuyến tại N
Ta có $BN \perp DN$, $ON \perp EN$ nên $\widehat{DNE} = \widehat{BNO}$
Mà $\widehat{BNO} = \widehat{OBN} = \widehat{END}$. Suy ra $\widehat{DNE} = \widehat{END}$ nên $ED = EN$
Dễ chứng minh tam giác HEN cân tại E nên $HE = NE$. Suy ra $ED = EH$
Vậy E là trung điểm của HD
d) Gọi I là giao điểm của MN và AB; Kẻ IT là tiếp tuyến của đường tròn với T là tiếp điểm $\Rightarrow IN \cdot IM = IT^2$
Ta có EM vuông góc với OM nên N, C, O, M cùng thuộc đường tròn $\Rightarrow IN \cdot IM = IC \cdot IO$
Do đó $IC \cdot IO = IT^2$ nên tam giác ICT và ITO đồng dạng
 $\Rightarrow CT$ vuông góc với $IO \Rightarrow T$ trùng với K nên I là giao điểm của tiếp tuyến tại K của nửa đường tròn và đường thẳng AB $\Rightarrow I$ cố định.

Bài 3. (Năm học 2013 - 2014). Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn đó (M khác A và B). Tiếp tuyến của đường tròn tại B cắt AM, AN tại Q và P.

- a) Chứng minh AMBN là hình chữ nhật
b) Chứng minh M, N, P, Q cùng thuộc đường tròn
c) Gọi E là trung điểm BQ, đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại F. Chứng minh F là trung điểm BP và ME song song với NF

- d) Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác MNPQ có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn:



- ABMN là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
- Chứng minh $\widehat{NPQ} = \widehat{NMA} (= \widehat{NBA})$.
- Chỉ ra OE là đường trung bình của tam giác ABQ.

Chứng minh được $OF \parallel AP$ nên OF là đường trung bình của tam giác ABP.

Suy ra F là trung điểm của BP.

Chứng minh: $ME \parallel NF$

Mà AP vuông góc với AQ nên OE vuông góc OF.

Xét tam giác vuông NPB có F là trung điểm của cạnh huyền BP.

Xét 2 $\triangle NOF = \triangle OFB$ (c-c-c) nên $\angle ONF = 90^\circ$.

Tương tự ta có $\angle OME = 90^\circ$ nên $ME \parallel NF$ vì cùng vuông góc với MN.

- d. Ta thấy :

$$2S_{MNPQ} = 2S_{APQ} = 2S_{AMN} = 2R \cdot PQ = AM \cdot AN = 2R \cdot (PB + BQ) = AM \cdot AN$$

Tam giác ABP đồng dạng tam giác QBA suy ra: $AB^2 = BP \cdot QB$

Áp dụng các bất đẳng thức $BP + BQ \geq 2\sqrt{BP \cdot BQ}$ và $2AM \cdot AN \leq AM^2 + AN^2$

Suy ra $S \geq 3R^2$. Dấu bằng xảy ra khi MN vuông góc AB.

B. BÀI TOÁN CÓ NỘI DUNG THỰC TẾ:

Các bài này thường sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc công thức tính S_{xq} , V các hình khối trong hình học không gian

I. CÁC CÔNG THỨC THƯỜNG SỬ DỤNG:**1. Hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông:**

2. $b^2 = a.b'$,	$h^2 = b'.c'$
$c^2 = a.c'$	$a.h = b.c$
1. $a^2 = b^2 + c^2$	$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

2. Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông:

$$b = a.\sin B; c = a.\sin C$$

$$b = a.\cos C; c = a.\cos B$$

$$b = c.\tan B; c = b.\tan C$$

$$b = c.\cot C; c = b.\cot B$$

(Nếu HS không nhớ hệ thức thì có thể dùng định nghĩa để tính toán)

3. Công thức diện tích xung quanh và thể tích các hình khối không gian:

a) Lăng trụ đứng

$$S_{xq} = 2p.h_p: \text{nửa chu vi đáy, } h: \text{chiều cao}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d \quad V = S_d .h$$

b) Hình hộp chữ nhật $S_{xq} = 2(a+b)c$, $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$, $V = a.b.c$

c) Hình lập phương $S_{xq} = 4a^2$, $S_{tp} = 6a^2$, $V = a^3$

d) Hình chóp đều $S_{xq} = p.d$, $S_{tp} = S_{xq} + S_d$, $V = S.h$

e) Hình trụ: $S_{xq} = 2\pi Rh$; $V = \pi R^2 h$.

g) Hình nón : $S_{xq} = \pi.R.l$; $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Nón cụt : $S_{xq} = \pi (R + r) .l$; $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$

h) Hình cầu : $S = 4\pi R^2$; $V = \frac{4}{3}\pi.R^3$

II. MỘT SỐ BÀI TẬP:

Bài 1: Một máy bay từ mặt đất có đường bay lên tạo với mặt đất một góc 30° . Hỏi sau khi bay được 10km thì khoảng cách của máy bay và mặt đất là bao nhiêu?

Bài 2: Một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m. Hãy tính góc (làm tròn đến độ) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.

Bài 3: Một cây cao 3 m. Ở một thời điểm vào ban ngày mặt trời chiếu tạo thành bóng dài 2 m. Hỏi lúc đó góc tạo bởi tia sáng mặt trời và mặt đất là bao nhiêu ? (làm tròn số đo góc tới độ).

Bài 4: Một cái thang dài 3m ghi: “ để đảm bảo an toàn khi dùng, phải đặt thang với mặt đất một góc từ 60° đến 70° “. Đo góc thì khó hơn đo độ dài. Vậy hãy cho biết :khi dùng thang đó chân thang phải đặt cách tường khoảng bao nhiêu mét để đảm bảo an toàn? (làm tròn 2 chữ số thập phân)

Bài 5: Một chiếc điều với đoạn dây thả điều AB dài 100 m, dây thả điều tạo với phương thẳng đứng một góc 40° (hình bên). Tính chiều cao của điều.

Bài 6: Tính chiều cao của một cây cổ thụ có bóng trên mặt đất dài 8m và có tia sáng từ đỉnh tạo với mặt đất một góc bằng 60°

Bài 7: Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 35° . Hỏi sau 1,2 phút máy bay lên cao được bao nhiêu kilômét theo phương thẳng đứng.

Bài 8: Một người muốn làm một mái che cho một cửa sổ, tính từ tường ra khoảng 1mét, nghiêng xuống 30 độ so với mặt đất. Hỏi người đó phải cắt miếng tôn dài bao nhiêu mét ? (kết quả làm tròn chữ số thập phân thứ 2)

Bài 9: Vào buổi trưa, bóng của toà nhà in trên mặt đất dài 16m. Tính độ cao của toà nhà đó biết góc tạo bởi tia nắng và mặt đất là 50° .

Bài 10: Tính chiều cao của một ngôi nhà có bóng trên mặt đất dài 3m và có tia sáng từ đỉnh tạo với mặt đất một góc bằng 60° .

Bài 11 : Bác Hùng xây một hồ cá hình trụ, đáy của hồ là một hình tròn có đường kính 2 m, người ta đo được mực nước có trong hồ cao 0,6 m. Tính thể tích nước có trong hồ

Bài 12: Một bình thủy tinh chứa nước. Trong bình có 1 vật rắn hình cầu ngập hoàn toàn trong nước. Khi lấy vật rắn đó ra khỏi bình thì mực nước trong bình giảm 48,6 mm. Biết đường kính bên trong của bình thủy tinh là 50 mm. Tính bán kính của vật hình cầu.

Bài 13: Một đồng cát hình nón có chu vi đáy là 12,56 m. Người ta dùng xe nhỏ chở 10 chuyến thì hết đồng cát. Biết mỗi chuyến chở 250dm^3 . Tính chiều cao đồng cát.

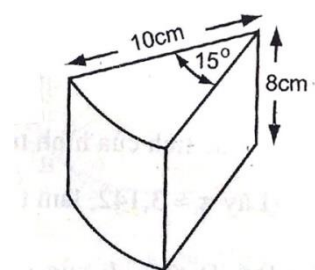
Bài 14: Một chi tiết máy có dạng hình trụ, bán kính hình tròn đáy và chiều cao của nó đều bằng 2cm. Người ta khoan một lỗ có dạng hình trụ, bán kính hình tròn đáy và độ sâu đều bằng 1cm. Thể tích phần vật thể còn lại là bao nhiêu?

Bài 15: Một chiếc thùng hình trụ có diện tích xung quanh bằng $\frac{1}{2}$ diện tích toàn phần, biết bán kính đáy là 40cm. Hỏi thùng chứa được xấp xỉ bao nhiêu lít nước?

Bài 16: Một bóng đèn huỳnh quang dài 0,6m; bán kính của đường tròn đáy là 2cm, được đặt khít vào một ống giấy cứng dạng hình hộp. Diện tích phần giấy cứng dùng để làm một hộp là (Hộp hở 2 đầu, không tính lề và mép dán):

Bài 17: Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thủy tinh có nước dạng hình trụ. Diện tích đáy lọ thủy tinh là $12,8\text{ cm}^2$. Nước trong lọ dâng lên 8,5 mm. Thể tích của tượng đá là:

Bài 18: Một mẫu pho mát được cắt ra từ một khối pho mát dạng hình trụ có các kích thước như hình bên. Biết khối lượng riêng của pho mát là 3g/cm^3 . Khối lượng của mẫu pho mát là:



C. MỘT SỐ LỖI HỌC SINH HAY MẮC KHI LÀM BÀI TẬP HÌNH HỌC

1. Sai lầm ở phần vẽ hình:

- +) Vẽ sai vì đọc không kỹ các vị trí như điểm thuộc tia, tia đối, thuộc đoạn, các yêu cầu về các đoạn thẳng lớn hơn, nhỏ hơn, cung lớn, cung nhỏ, ...
- +) Lấy các điểm cho bất kỳ ở những vị trí đặc biệt như trung điểm đoạn thẳng, chân đường vuông góc, điểm chính giữa của một cung, ..., để dẫn tới các cảm nhận trực quan sai và hình thành đường lối suy nghĩ, tìm lời giải cho bài toán chệch hướng.
- +) Không vẽ các đoạn thẳng mà trong phần bài làm có sử dụng.
- +) Cầu thả nên dễ bị nhầm các kí hiệu M với N; E với F; O với D, ...
- +) Đánh kí hiệu các góc $A_1; A_2; \dots$ từ câu a, b nên nếu tới câu c, d xuất hiện tia nằm bên trong góc mà học sinh không vẽ lại hình.
- +) Trong bài làm dụng các góc đánh số $A_1; A_2; \dots$ nhưng trên hình vẽ quên không đánh kí hiệu 1, 2 vào góc.
- +) Có hai ký hiệu trùng nhau trên hình vẽ.

2. Những lỗi sai, nhầm lẫn khi trình bày bài:

- +) Khi sử dụng các định lý chỉ áp dụng trong một tam giác, một tứ giác hay một đường tròn con không xét tam giác, tứ giác hay đường tròn đó.
- +) Làm tắt bước.
- +) Đưa ra các tính chất hình học song lại thiếu căn cứ.
- +) Khi chứng minh tứ giác nội tiếp đôi khi học sinh có $A = 90^0; B = 90^0$ nhưng không có biểu thức $A + B = 180^0$ (Khi đỉnh A; B đối nhau) hay $A = B = 90^0$ (Khi đỉnh A; B kề nhau).
- +) Khi chứng minh hai tam giác đồng dạng, bằng nhau viết kí hiệu hai tam giác đồng dạng, bằng nhau viết sai đỉnh tương ứng.
- +) Khi sử dụng các góc dùng kí hiệu 3 đỉnh, nhiều học sinh viết nhầm đỉnh (Ví dụ BAC thì viết là ABC).
- +) Nhiều học sinh dùng kí hiệu góc, cung còn nhầm lẫn, không chính xác.
- +) Khi gặp câu yêu cầu tính toán các em cần để kết quả đúng là một số vô tỷ (Ví dụ $\sqrt{2}$) chứ không để kết quả dưới dạng số thập phân ($\approx 1,4$). Kết quả cuối cùng phải có đơn vị đo nếu giả thiết cho đơn vị đo.
- +) Khi làm bài rất hay bị ngộ nhận vì vẽ hình rơi vào trường hợp đặc biệt.
- +) Khi chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường đồng quy học sinh hay ngộ nhận.