

CHUYÊN ĐỀ

ĐỒNG DƯ

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Nếu hai số nguyên a và b chia cho số nguyên m ($m \neq 0$) cho cùng số dư thì ta nói rằng " a đồng dư với b theo môđun m " và viết :

$$a \equiv b \pmod{m} \quad (1)$$

Hệ thức (1) gọi là một đồng dư thức.

Chẳng hạn, hai số 9 và 3 khi chia cho 6 có cùng số dư, ta viết $9 \equiv 3 \pmod{6}$; hai số 8 và 3 chia cho 6 không có cùng số dư, ta viết $8 \not\equiv 3 \pmod{6}$.

Từ định nghĩa, ta suy ra hai số a và b đồng dư với nhau theo mod m khi và chỉ khi $a - b$ chia hết cho m .

2. Một số tính chất của đồng dư thức

a) Ta có thể cộng (hoặc trừ) theo từng vế của nhiều đồng dư thức theo cùng một môđun, tức là nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$ thì $a + b \equiv c + d \pmod{m}$ và $a - b \equiv c - d \pmod{m}$.

b) Ta có thể nhân từng vế các đồng dư thức có cùng môđun, tức là nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$ thì $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Chú ý : các tính chất trên có thể mở rộng cho nhiều đồng dư thức.

Từ hai tính chất trên suy ra :

Hệ quả 1. Ta có thể thêm vào hay bớt cùng một số vào hai vế của một đồng dư thức, nghĩa là :

Nếu có $a \equiv b \pmod{m}$ thì cũng có $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ và

$$a - c \equiv b - c \pmod{m}.$$

Hệ quả 2. Ta có thể nhân hai vế của một đồng dư thức với cùng một số tự nhiên tùy ý, nghĩa là:

Nếu có $a \equiv b \pmod{m}$ thì cũng có $a.c \equiv b.c \pmod{m}$ ($c \in \mathbf{N}$).

Hệ quả 3. Ta có thể nâng hai vế của một đồng dư thức lên cùng một lũy thừa với bậc là số tự nhiên tùy ý, nghĩa là :

Nếu có $a \equiv b \pmod{m}$ thì cũng có $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ với $n \in \mathbf{N}^*$.

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm chữ số tận cùng của 6^{195} và 2^{1000} .

Giải. Tìm một chữ số tận cùng của một số tự nhiên N có nghĩa là tìm số dư trong phép chia số N cho 10, tức là tìm số tự nhiên nhỏ hơn 10 đồng dư với N theo modun 10.

Ta có $6^2 = 36 \equiv 6 \pmod{10}$, do đó $6^n \equiv 6 \pmod{10}$ với n là số tự nhiên khác 0.

Suy ra $6^{195} \equiv 6 \pmod{10}$. Vậy chữ số tận cùng của 6^{195} là 6.

Ta có $2^{1000} = 2^{4 \cdot 250} = (2^4)^{250}$.

Vì $2^4 = 16 \equiv 6 \pmod{10}$, do đó :

$(2^4)^{250} = 16^{250} \equiv 6^{250} \equiv 6 \pmod{10}$. Do đó :

$2^{1000} \equiv 6^{250} \equiv 6 \pmod{10}$, nghĩa là chữ số tận cùng của 2^{1000} là 6.

Ví dụ 2. Tìm số dư trong phép chia 3^{100} cho 13.

Giải. Tìm số dư trong phép chia 3^{100} cho 13 nghĩa là tìm số tự nhiên nhỏ hơn 13, đồng dư với 3^{100} theo mod 13.

Ta có $3^{100} = 3^4 \cdot 3^{96} = 3^4 \cdot (3^3)^{32}$.

Vì $3^3 = 27 = 13 \cdot 2 + 1$, nên $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$, do đó :

$(3^3)^{32} \equiv 1^{32} \pmod{13}$ hay $3^{96} \equiv 1 \pmod{13}$.

$$3^4 = 81 = 13 \cdot 6 + 3, \text{ nên } 3^4 \equiv 3 \pmod{13}.$$

Vậy $3^4 \cdot 3^{96} \equiv 1 \cdot 3 \pmod{13}$, hay $3^{100} \equiv 3 \pmod{13}$, nghĩa là số dư trong phép chia số 3^{100} cho 13 là 3.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $2^{1995} - 1$ chia hết cho 31.

Giải. Để chứng minh rằng $2^{1995} - 1$ chia hết cho 31, ta phải chứng minh $2^{1995} - 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

$$\text{Chú ý rằng } 2^{1995} = 2^5 \cdot (2^{10})^{199}.$$

$$\text{Ta có : } 2^5 = 32 = 31 \cdot 1 + 1, \text{ nên } 2^5 \equiv 1 \pmod{31}.$$

$$2^{10} \equiv 1024 = 31 \cdot 33 + 1, \text{ nên } 2^{10} \equiv 1 \pmod{31}, \text{ do đó } (2^{10})^{199} \equiv 1^{199} \pmod{31}, \text{ hay } 2^{1990} \equiv 1 \pmod{31}.$$

$$\text{Vậy } 2^5 \cdot 2^{1990} \equiv 1 \pmod{31}, \text{ hay } 2^{1995} \equiv 1 \pmod{31}. \text{ Suy ra : } 2^{1995} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{31}, \text{ nghĩa là } 2^{1995} - 1 \text{ chia hết cho 31.}$$

Ví dụ 4. Chứng minh dấu hiệu chia hết cho 9 (hoặc cho 3).

Giải. Ta biết rằng nếu một số tự nhiên N có chữ số hàng đơn vị là a , chữ số hàng chục là b , chữ số hàng trăm là c , chữ số hàng nghìn là $d, \dots$, thì :

$$N = a + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \dots$$

$$\text{Ta có : } a \equiv a \pmod{9};$$

$$10^1 \equiv 1 \pmod{9}, \text{ nên } b \cdot 10^1 \equiv b \pmod{9};$$

$$10^2 \equiv 1 \pmod{9}, \text{ nên } c \cdot 10^2 \equiv c \pmod{9};$$

$$10^3 \equiv 1 \pmod{9}, \text{ nên } d \cdot 10^3 \equiv d \pmod{9};$$

.....

Cộng theo từng vế các đồng dư thức trên ta được :

$$N = a + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \dots \equiv$$

$$\equiv a + b + c + d + \dots \pmod{9}.$$

Như vậy số N đồng dư với tổng các chữ số của nó theo mod 9, do đó N chia hết cho 9 khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 9.

Ví dụ 5. Biết rằng ngày 20-11-1994 là ngày chủ nhật. Tính xem :

a) Ngày 20-11-1996 là ngày thứ mấy ?

b) Ngày 20-11-1999 là ngày thứ mấy ?

Giải.

a) Chú ý năm 1996 là năm nhuận, có 366 ngày.

Từ 20-11-1994 đến 19-11-1996 là hai năm và có :

$$365.2 + 1 = 731 \text{ (ngày).}$$

Biết rằng cứ mỗi tuần lễ có 7 ngày và $731 = 7.104 + 3$, nên trong hai năm này có 104 tuần lễ và lễ 3 ngày. Nói cách khác $731 \equiv 3 \pmod{7}$.

Như vậy ngày 19-11-1996 là ngày thứ ba và ngày 20-11-1996 là thứ tư.

b) Tương tự, từ 20-11-1996 đến 19-11-1999 là 5 năm và có $365.5 + 1 = 1826$ (ngày).

Ta có : $1826 = 7.260 + 6$, nên

$$1826 \equiv 6 \pmod{7}.$$

Như vậy ngày 19-11-1999 là thứ sáu và ngày 20-11-1999 là thứ bảy.

C. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

1. Tìm số dư khi :

a) Chia 3^{100} cho 7 ;

b) Chia $8!$ cho 11.

2. Tìm số dư khi :

a) Chia tổng $3^{100} + 3^{105}$ cho 13 ;

b) Chia hiệu $1532^5 - 1$ cho 9.

3. Chứng minh rằng :

a) $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13.

b) $2090^n - 803^n - 464^n + 261^n$ chia hết cho 271 với n là số tự nhiên khác 0.

4. Chứng minh rằng : $\overline{abc} \equiv 0 \pmod{21}$ khi và chỉ khi $(a - b) + 4c \equiv 0 \pmod{21}$.

5. Tìm dấu hiệu chia hết của một số tự nhiên cho 4, cho 8, cho 125.

6. Tìm hai chữ số tận cùng của :

a) 2^{999} ;

b) 3^{999} .

7. Bạn Nam kỉ niệm ngày sinh lần thứ 14 của mình vào ngày chủ nhật 25-12-1994. Hỏi bạn Nam sẽ kỉ niệm ngày sinh lần thứ 16, 17, 18 vào ngày thứ mấy ?

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) Ta có $3^{100} = 3^4 \cdot 3^{96} = 3^4 \cdot (3^6)^{16}$.

Vì $3^4 = 81 = 7 \cdot 11 + 4$, nên $3^4 \equiv 4 \pmod{7}$

$3^6 = 729 = 7 \cdot 104 + 1$, nên $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$, do đó

$(3^6)^{16} \equiv 1 \pmod{7}$ hay $3^{96} \equiv 1 \pmod{7}$.

Vậy $3^4 \cdot 3^{96} \equiv 4 \pmod{7}$, nghĩa là 3^{100} chia hết cho 7 dư 4.

b) Chú ý : $8! = 1.2.3.4.5.6.7.8$.

Và $3.4 \equiv 2.6 \equiv 7.8 \equiv 1 \pmod{11}$.

Từ đó suy ra số dư khi chia $8!$ cho 11 là 5.

2. a) Theo ví dụ 2 thì $3^{100} \equiv 3 \pmod{13}$, còn $3^{105} = (3^3)^{35}$ mà $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$, do đó $(3^3)^{35} \equiv 1 \pmod{13}$ hay $3^{105} \equiv 1 \pmod{13}$.

Vậy $3^{100} + 3^{105} \equiv 3 + 1 \equiv 4 \pmod{13}$, nghĩa là $3^{100} + 3^{105}$ chia cho 13 dư 4.

b) Ta có $1532 \equiv 2 \pmod{9}$ nên $1532^5 \equiv 2^5 \pmod{9}$ mà $2^5 = 32 \equiv 5 \pmod{9}$, do đó $1532^5 \equiv 5 \pmod{9}$, còn $1 \equiv 1 \pmod{9}$. Vậy $1532^5 - 1 \equiv 5 - 1 \equiv 4 \pmod{9}$. Vậy số dư khi chia $1532^5 - 1$ cho 9 là 4.

3. a) Ta có $3012 \equiv 9 \pmod{13}$, nên $3012^3 \equiv 9^3 \equiv 1 \pmod{13}$

Do đó $3012^{93} \equiv 3012^{3 \cdot 21} \equiv 1^{21} \pmod{13}$.

Vậy $3012^{93} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{13}$, hay $3012^{93} - 1$ chia hết cho 13.

b) Ta có :

$$2090 \equiv 193 \pmod{271}, \text{ nên } 2090^{11} \equiv 193^{11} \pmod{271};$$

$$464 \equiv 193 \pmod{271}, \text{ nên } 464^{11} \equiv 193^{11} \pmod{271};$$

$$803 \equiv 261 \pmod{271}, \text{ nên } 803^{11} \equiv 261^{11} \pmod{271}$$

$$\text{còn } 261^{11} \equiv 261^{11} \pmod{271}$$

Vậy $2090^{11} - 803^{11} - 464^{11} + 261^{11} \equiv 193^{11} - 261^{11} - 193^{11} + 261^{11} \equiv 0 \pmod{271}$,
nghĩa là tổng trên chia hết cho 271.

4. Ta có $4 \cdot \overline{abc} = 21(19a + 2b) + (a - 2b + 4c)$.

Vì $21(19a + 2b) \equiv 0 \pmod{21}$, do đó :

$4 \cdot \overline{abc} \equiv 0 \pmod{21}$ khi và chỉ khi $(a - 2b + 4c) \equiv 0 \pmod{21}$, tức là $4 \cdot \overline{abc}$ chia hết cho 21 khi và chỉ khi $a - 2b + 4c$ chia hết cho 21.

Vì $(4, 21) = 1$, suy ra $\overline{abc} \div 21$. Vậy $\overline{abc}$ chia hết cho 21 khi và chỉ khi $a - 2b + 4c$ chia hết cho 21.

5. Gọi chữ số hàng đơn vị của số tự nhiên N là a, chữ số hàng chục là b, chữ số hàng trăm là c, chữ số hàng nghìn là d, ...

Ta có $N = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \dots$

Vì $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod{4}$, nên $c \cdot 10^2 \equiv 0 \pmod{4}$.

$10^3 = 10^2 \cdot 10 \equiv 0 \pmod{4}$, nên $d \cdot 10^3 \equiv 0 \pmod{4}$.

.....

Vậy $N = a + 10 \cdot b + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \dots \equiv a + 10b \pmod{4}$ tức là $N \equiv \overline{ba} \pmod{4}$,
nghĩa là số N đồng dư với số tạo bởi hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị của nó theo mod 4, do đó N chia hết cho 4 khi và chỉ khi hai chữ số tận cùng của nó lập thành số chia hết cho 4.

Tương tự như trên, ta tìm được dấu hiệu chia hết cho 8 và cho 125 với chú ý $10^3 \equiv 0 \pmod{8}$, $10^3 \equiv 0 \pmod{125}$.

6. a) Chú ý rằng $2^{999} = 2^{1000} : 2$. Theo ví dụ 1 thì 2^{1000} chia cho 25 dư 1, do đó hai chữ số tận cùng của 2^{1000} có thể là 01 ; 26 ; 51 ; 76, nhưng 2^{1000} là bội của 4, nên hai chữ số tận cùng của nó phải là 76. Chia số này cho 2 thì hai chữ số tận cùng có thể là 38 ($= 76 : 2$) hoặc 88 ($= 186 : 2$). Nhưng cũng do 2^{999} là bội của 4 nên hai chữ số tận cùng của nó là 88.

b) Ta có $3^4 = 81 \equiv -19 \pmod{100}$; $3^8 \equiv 19^2 \equiv 61 \pmod{100}$.

$3^{10} \equiv 61.9 \equiv 49 \pmod{100}$; $3^{100} \equiv 49^{10} \equiv 01 \pmod{100}$.

$3^{1000} \equiv 01 \pmod{100}$, nghĩa là hai chữ số tận cùng của 3^{1000} là 01. Số 3^{1000} là bội của 3, nên chữ số hàng trăm của nó khi chia cho 3 phải cho số dư là 2 (chia tiếp thì số 201 chia hết cho 3, nếu số dư là 0 hay 1 thì số 001, 101 không chia hết cho 3). Vậy số $3^{999} = 3^{1000} : 3$ có hai chữ số tận cùng là 76 ($= 201 : 3$).

7. Từ 25-12-1994 đến 24-12-1996 là 2 năm và có

$$265.2 + 1 = 731 \text{ (ngày)}$$

và $731 = 7.104 + 3$, hay $731 \equiv 3 \pmod{7}$.

Vậy ngày 24-12-1996 là thứ ba và ngày 25-12-1996 là ngày thứ tư. Nam kỉ niệm ngày sinh lần thứ 16 vào thứ tư ngày 25-12-1996.

Giải tương tự ta có ngày 25-12-1997 là thứ năm và 15-12-1998 là thứ sáu.

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>	<i>Lời giải</i>
Lời nói đầu	3	
 <i>Phần thứ nhất</i> TOÁN NÂNG CAO Phần Số học		
Chương I. Ôn tập và bổ túc về số tự nhiên		
§1. Tập hợp. Phần tử của tập hợp	5	107
§2. Tập hợp các số tự nhiên	7	107
§3. Ghi số tự nhiên	8	108
§4. Số phần tử của một tập hợp. Tập hợp con	11	109
§5. Phép cộng và phép nhân	13	110
§6. Phép trừ và phép chia	16	113
§7. Lũy thừa với số mũ tự nhiên. Nhân hai lũy thừa cùng cơ số	18	115
§8. Chia hai lũy thừa cùng cơ số	20	116
§9. Thứ tự thực hiện các phép tính	22	117
§10. Tính chất chia hết của một tổng	24	118
§11. Dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5	26	120
§12. Dấu hiệu chia hết cho 3, cho 9	28	121
§13. Ước và bội	29	122
§14. Số nguyên tố. Hợp số. Bảng số nguyên tố	31	123
§15. Phân tích một số ra thừa số nguyên tố	32	124
§16. Ước chung và bội chung	34	125
§17. Ước chung lớn nhất	35	126
§18. Bội chung nhỏ nhất	36	127
Ôn tập chương I	38	128
 Chương II. Số nguyên		
§1. Làm quen với số nguyên âm	41	131
§2. Tập hợp các số nguyên	42	131
§3. Thứ tự trong tập hợp các số nguyên	42	132
§4. Cộng hai số nguyên cùng dấu	44	133

§5. Cộng hai số nguyên khác dấu	46	134
§6. Tính chất của phép cộng các số nguyên	47	135
§7. Phép trừ hai số nguyên	49	136
§8. Quy tắc dấu ngoặc	50	138
§9. Quy tắc chuyển vế	51	139
§10. Nhân hai số nguyên khác dấu	53	140
§11. Nhân hai số nguyên cùng dấu	54	141
§12. Tính chất của phép nhân	56	142
§13. Bội và ước của một số nguyên	58	143
Ôn tập chương II	60	143
Chương III. Phân số		
§1. Mở rộng khái niệm phân số	61	145
§2. Phân số bằng nhau	63	146
§3. Tính chất cơ bản của phân số	65	147
§4. Rút gọn phân số	67	148
§5. Quy đồng mẫu nhiều phân số	70	150
§6. So sánh phân số	72	152
§7. Phép cộng phân số	75	155
§8. Tính chất cơ bản của phép cộng phân số	78	157
§9. Phép trừ phân số	80	159
§10. Phép nhân phân số	83	161
§11. Tính chất cơ bản của phép nhân phân số	86	163
§12. Số nghịch đảo	88	164
§13. Phép chia phân số	90	166
§14. Hỗn số. Số thập phân. Phần trăm	92	167
§15. Tìm giá trị phân số của một số cho trước	94	168
§16. Tìm một số biết giá trị một phân số của nó	96	169
§17. Tìm tỉ số của hai số	98	171
§18. Biểu đồ phần trăm	100	172
Ôn tập chương III	102	173
Ôn tập cuối năm	104	176

Phần Hình học

Chương I. Đoạn thẳng

§1. Điểm. Đường thẳng. Ba điểm thẳng hàng. Đường thẳng đi qua hai điểm. Hai đường thẳng cắt nhau	181	198
--	-----	-----

§2. Đoạn thẳng. Độ dài đoạn thẳng. Cộng độ dài đoạn thẳng	184	200
§3. Vẽ đoạn thẳng cho biết độ dài. Trung điểm của đoạn thẳng	186	202
Ôn tập chương I	189	204
<i>Chương II. Góc</i>		
§1. Nửa mặt phẳng	190	205
§2. Góc. Số đo góc. Cộng số đo góc	191	206
§3. Vẽ góc cho biết số đo. Tia phân giác của góc	193	206
§4. Đường tròn. Tam giác	195	207
Ôn tập chương II	196	208

Phần thứ hai

CHUYÊN ĐỀ

Đóng dư

A. Một số kiến thức cơ bản	210
B. Các ví dụ	211
C. Các bài toán luyện tập	213
D. Hướng dẫn giải	214

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Chịu trách nhiệm nội dung:

Giám đốc NXBGD tại Tp. Đà Nẵng ÔNG THỪA PHÚ
Phó Giám đốc Công ty Cổ phần Dịch vụ XBGD tại Tp. Đà Nẵng ĐỖ VĂN THẢO

Biên tập lần đầu :

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Biên tập tái bản :

NGUYỄN THỊ MINH CHÂU

Chế bản :

NGUYỄN TRỌNG THIỆP

Đơn vị liên doanh in và phát hành :

TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM

TOÁN NÂNG CAO LỚP 6

Mã số : 6TK04t1 - LKT

In 2.000 bản, khổ 16 x 24 cm. Tại **CÔNG TY CỔ PHẦN IN KHUYẾN HỌC PHÍA NAM**,
Tp. HCM. Số Đăng ký KHXB: **737-2011/CXB/79-1036/GD** do Cục xuất bản
cấp ngày 01.08.2011. In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2011.

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Chịu trách nhiệm nội dung:

Giám đốc NXBGD tại Tp. Đà Nẵng ÔNG THỪA PHÚ
Phó Giám đốc Công ty Cổ phần Dịch vụ XBGD tại Tp. Đà Nẵng ĐỖ VĂN THẢO

Biên tập lần đầu :

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Biên tập tái bản :

NGUYỄN THỊ MINH CHÂU

Chế bản :

NGUYỄN TRỌNG THIỆP

Đơn vị liên doanh in và phát hành :

TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM

TOÁN NÂNG CAO LỚP 6

Mã số : 6TK04t1 - LKT

In 2.000 bản, khổ 16 x 24 cm. Tại **CÔNG TY CỔ PHẦN IN KHUYẾN HỌC PHÍA NAM**,
Tp. HCM. Số Đăng ký KHXB: **737-2011/CXB/79-1036/GD** do Cục xuất bản
cấp ngày 01.08.2011. In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2011.