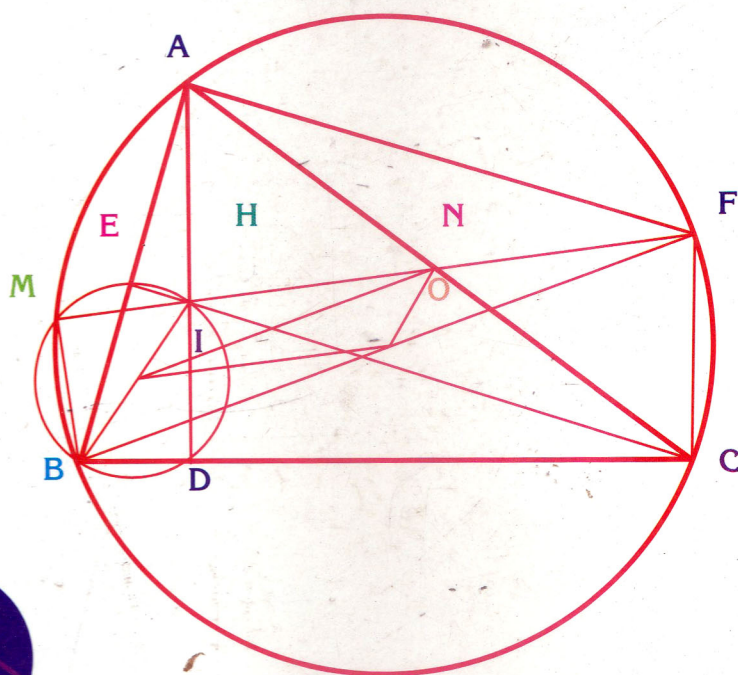


Cầm Nang

CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

(Sách dùng cho học sinh các lớp 7,8,9)



Phần 1

A. CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG SỬ DỤNG

1. PHƯƠNG PHÁP 1

a) Phương pháp sử dụng góc “bù”

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng (trên hình vẽ nhận ra B nằm giữa A và C), chúng ta có thể chứng minh $\widehat{ABC} = 180^\circ$.

b) Một số ví dụ

Ví dụ 1: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC vuông tại A. D là điểm trên cạnh BC (D khác B, C). Vẽ điểm M sao cho AB là tia phân giác của góc DAM, vẽ điểm N sao cho AC là tia phân giác của góc DAN. Chứng minh rằng ba điểm M, A, N thẳng hàng.

Gợi ý: Chúng ta dễ nhận ra rằng $\widehat{MAN} = \widehat{DAM} + \widehat{DAN}$ thêm nữa từ giả thiết cho ta $\widehat{BAD} = \frac{1}{2} \widehat{MAN}$, $\widehat{CAD} = \frac{1}{2} \widehat{DAN}$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Giúp dễ chứng minh được $\widehat{MAN} = 180^\circ$.

Lời giải

Ta có $\widehat{BAD} = \frac{1}{2} \widehat{DAM}$ (tia AB là tia phân giác của góc DAM)

$\widehat{CAD} = \frac{1}{2} \widehat{DAN}$ (tia AC là tia phân giác của góc DAN)

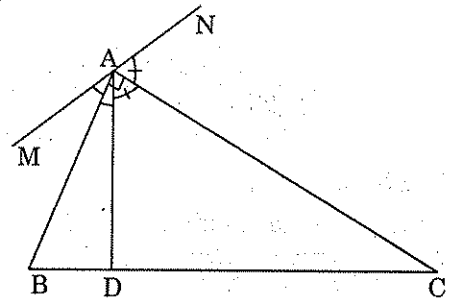
Do đó $\frac{1}{2} \widehat{DAM} + \frac{1}{2} \widehat{DAN} = \widehat{BAD} + \widehat{CAD}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} (\widehat{DAM} + \widehat{DAN}) = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DAM} + \widehat{DAN} = 90^\circ \cdot 2$

Nên $\widehat{MAN} = \widehat{DAM} + \widehat{DAN} = 180^\circ$

Vậy ba điểm M, A, N thẳng hàng.



Ví dụ 2: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC cân tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C dựng điểm D sao cho $\widehat{BAD} = 2\widehat{BCA}$. Chứng minh rằng ba điểm C, A, D thẳng hàng.

Gợi ý: Tam giác ABC cân tại A như vậy có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{BAC} + 2\widehat{BCA} = 180^\circ$.

Từ đó, cho ta $\widehat{DAC} = \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = 180^\circ$.

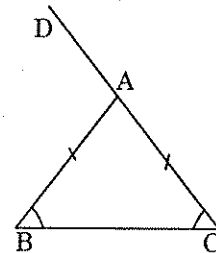
Lời giải

$\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$

$\triangle ABC$ cân tại A (gt) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

Do đó $\widehat{BAC} + 2\widehat{BCA} = 180^\circ$. Mà $\widehat{BAD} = 2\widehat{BCA}$ (gt)

Nên $\widehat{BAC} + \widehat{BAD} = 180^\circ$



Ta có $\widehat{DAC} = \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = 180^\circ$

Vậy ba điểm C, A, D thẳng hàng.

Ví dụ 3: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC. Qua A vẽ đường thẳng d song song với BC. Gọi M là trung điểm cạnh AC, D là điểm trên cạnh BC, E là điểm trên đường thẳng d sao cho E nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C và $AE = CD$.

Chứng minh rằng ba điểm D, M, E thẳng hàng.

Gợi ý: Rất dễ nhận ra rằng hai tam giác MAE, MDC bằng nhau (trường hợp cạnh–góc–cạnh) nên có được $\widehat{AME} = \widehat{CMD}$ và như thế giúp có $\widehat{DME} = \widehat{CMD} + \widehat{EMD} = 180^\circ$.

Lời giải

Xét $\triangle MAE$ và $\triangle MCD$ có:

$MA = MC$ (M là trung điểm AC)

$AE = CD$ (gt)

$\widehat{MAE} = \widehat{MCD}$ (so le trong và $d \parallel BC$)

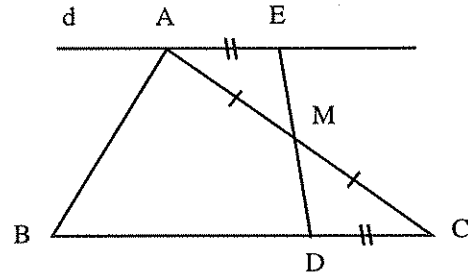
Do đó $\triangle MAE = \triangle MCD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{CMD}$

Mà $\widehat{AME} + \widehat{EMC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Nên $\widehat{CMD} + \widehat{EMC} = 180^\circ$. Do đó $\widehat{DME} = \widehat{CMD} + \widehat{EMD} = 180^\circ$

Vậy ba điểm D, M, E thẳng hàng.



Ví dụ 4: (Lớp 8)

Cho tam giác ABC vuông tại A. M là điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi D là điểm đối xứng của điểm M qua đường thẳng AB, E là điểm đối xứng của điểm M qua đường thẳng AC. Chứng minh rằng D, A, E thẳng hàng.

Gợi ý: Vì D và M đối xứng qua đường thẳng AB, E và M đối xứng qua đường thẳng AC nên cho ta các tam giác cân ADM (tại A), AME (tại A).

Do vậy có $\widehat{DAM} = 2\widehat{BAM}$, $\widehat{EAM} = 2\widehat{CAM}$.

Mặt khác $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên giúp có được $\widehat{DAE} = 180^\circ$.

Lời giải

M và D đối xứng với nhau qua đường thẳng AB

$\Rightarrow AB$ là đường trung trực của đoạn thẳng DM

$\Rightarrow \triangle ADM$ cân tại A.

Nên AB là đường phân giác của góc DAM.

Do đó: $\widehat{DAM} = 2\widehat{BAM}$.

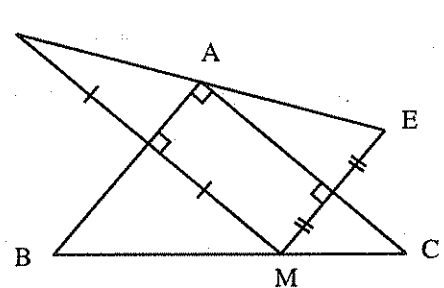
Chứng minh tương tự cũng có $\widehat{EAM} = 2\widehat{CAM}$

Mà $\widehat{BAM} + \widehat{CAM} = \widehat{BAC} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{DAE} = \widehat{DAM} + \widehat{EAM} = 2\widehat{BAM} + 2\widehat{CAM}$

$$= 2(\widehat{BAM} + \widehat{CAM}) = 2.90^\circ = 180^\circ$$

Vậy ba điểm D, A, E thẳng hàng.



Ví dụ 5: (Lớp 8)

Cho hình vuông ABCD. Về phía trong hình vuông vẽ tam giác đều CDM, về phía ngoài hình vuông vẽ tam giác đều BCN.

Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Gợi ý: Để thấy các tam giác cân DAM tại D, CMN tại C và $\widehat{ADM} = 30^\circ$, $\widehat{MCN} = 90^\circ$ nên có được $\widehat{AMD} = 75^\circ$, $\widehat{CMN} = 45^\circ$. Do vậy $\widehat{AMN} = 180^\circ$.

Lời giải

Tứ giác ABCD là hình vuông (gt)

$\Rightarrow AB = BC = CD = DA$, $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Mà $\triangle CDM$ đều (gt)

$\Rightarrow DM = CM = CD$, $\widehat{DMC} = \widehat{MDC} = \widehat{MCD} = 60^\circ$

$\triangle BCN$ đều (gt)

$\Rightarrow BC = CN$, $\widehat{BCN} = 60^\circ$

Mặt khác $\widehat{ADM} + \widehat{MDC} = \widehat{ADC}$

nên $\widehat{ADM} + 60^\circ = 90^\circ$, $\widehat{ADM} = 30^\circ$.

$\triangle DAM$ có $DA = DM (= CD)$

$\Rightarrow \triangle DAM$ cân tại D.

Vì $\widehat{ADM} = 30^\circ$

Nên $\widehat{AMD} = (180^\circ - \widehat{ADM}) : 2 = 75^\circ$

Mà $\widehat{MCB} + \widehat{MCD} = \widehat{BCD}$

Nên $\widehat{MCB} + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MCB} = 30^\circ$

Do đó $\widehat{MCN} = \widehat{MCB} + \widehat{BCN} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

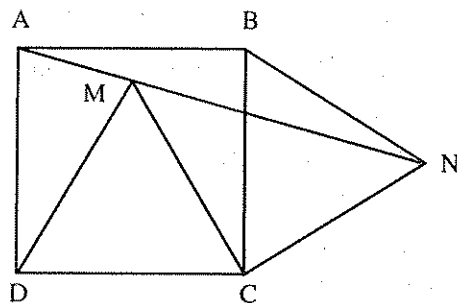
$\triangle CMN$ có $CM = CN (= CD = BC) \Rightarrow \triangle CMN$ cân tại C.

Vì $\widehat{MCN} = 90^\circ$

Nên $\widehat{CMN} = (180^\circ - \widehat{MCN}) : 2 = 45^\circ$

Ta có: $\widehat{AMN} = \widehat{AMD} + \widehat{DMC} + \widehat{CMN} = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

**Ví dụ 6:** (Lớp 8)

Cho tam giác ABC có $\hat{B}$ và $\hat{C}$ nhọn, đường cao AH. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác vuông cân, tam giác ABD vuông cân tại A, tam giác ACE vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DE.

Chứng minh ba điểm H, A, M thẳng hàng.

Gợi ý: Để chứng minh $\widehat{MAH} = 180^\circ$, chúng ta có thể vẽ thêm điểm N là điểm đối xứng của D qua A. Từ đó cho ta $\widehat{DAM} = \widehat{ANE}$, $\triangle ABC = \triangle ANE$ nên có $\widehat{DAM} = \widehat{ABC}$.

Lời giải

Trên tia đối của tia AD lấy điểm N sao cho $AN = AD$.

$\triangle DEN$ có A, M lần lượt là trung điểm của DN, DE

$\Rightarrow AM$ là đường trung bình của tam giác DEN

$$\Rightarrow AM \parallel NE$$

$$\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{ANE}$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ANE$ có:

$AC = AE$ ($\triangle ACE$ vuông cân tại A), $\widehat{BAC} = \widehat{NAE}$ (cùng bù với góc DAE), $AB = AN (= AD)$

Do đó $\triangle ABC = \triangle ANE$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ANE}$$

$$\text{Vậy } \widehat{DAM} = \widehat{ABC} (= \widehat{ANE})$$

$$\triangle BAH \text{ vuông tại H} \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{BAH} = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \widehat{MAH} &= \widehat{DAM} + \widehat{BAH} + \widehat{BAD} \\ &= \widehat{ABC} + \widehat{BAH} + \widehat{BAD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

Vậy ba điểm H, A, M thẳng hàng.

Ví dụ 7: (Lớp 9)

Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau ở A, B. Vẽ đường kính AOC của đường tròn (O), vẽ đường kính AO'D của đường tròn (O').

Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Gợi ý: Vì AC, AD lần lượt là đường bán kính của các đường tròn (O), (O') do vậy có $\widehat{BAC} = 90^\circ$; $\widehat{ABD} = 90^\circ$ như vậy $\widehat{CBD} = 180^\circ$. Chúng ta có lời giải của bài toán.

Lời giải

$\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O), đường kính AC

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại B

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ$$

$\triangle ABD$ nội tiếp đường tròn (O'), đường kính AD

$\Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại B

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ$$

$$\text{Ta có: } \widehat{CBD} = \widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Vậy ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Ví dụ 8: (Lớp 9)

Cho tam giác nhọn ABC. Đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt ở E, F. Gọi H là giao điểm của BE và CF, D là giao điểm của AH và BC, M là điểm đối xứng của điểm F qua đường thẳng BC. Chứng minh ba điểm E, D, M thẳng hàng.

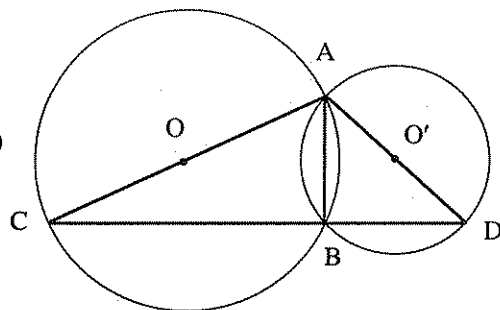
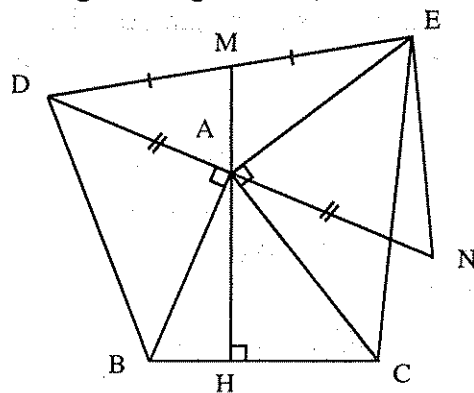
Gợi ý: Dễ thấy H là trực tâm của tam giác ABC nên có được các tứ giác nội tiếp BEHF, BAED giúp có $\widehat{EDF} = 2\widehat{FDH}$. Mặt khác F, M đối xứng qua BC nên có $\widehat{MDF} = 2\widehat{BDF}$. Do vậy sẽ cho ta $\widehat{MDE} = 180^\circ$.

Lời giải

Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\triangle ABC$ có BE, CF là hai đường cao cắt nhau tại H $\Rightarrow$ H là trực tâm của tam giác ABC.

$\Rightarrow$ AH là đường cao của tam giác ABC $\Rightarrow AH \perp BC$.



Tứ giác BFHD có $\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác BFHD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{FDH}$

Ta cũng có tứ giác BAED nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{ADE}$

Ta có $\widehat{ADE} = \widehat{FDH} = \widehat{FBH}$.

Vậy $\widehat{EDF} = 2\widehat{FDH}$

Mặt khác F và M đối xứng qua BC.

$\Rightarrow \triangle DFM$ cân tại D có DB là đường phân giác

$\Rightarrow \widehat{MDF} = 2\widehat{BDF}$

Ta có $\widehat{MDE} = \widehat{MDF} + \widehat{EDF} = 2(\widehat{BDF} + \widehat{FDH}) = 2\widehat{BDA} = 180^\circ$

Vậy ba điểm E, D, M thẳng hàng.

Ví dụ 9: (Lớp 9)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là điểm trên cung BC. Không chứa điểm A.

Vẽ $MD \perp AB$ tại D, $ME \perp BC$ tại E, $MF \perp AC$ tại F.

Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Gợi ý: Chúng ta nhận ra các tứ giác nội tiếp BDEM, MECF, ABMC giúp đến được $\widehat{DEF} = \widehat{DEM} + \widehat{MEF} = \widehat{DEM} + \widehat{DBM} = 180^\circ$.

Đường thẳng DE được gọi là đường thẳng Sim – son của điểm M.

Lời giải

$$\widehat{BDM} = \widehat{BEM} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BDEM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DEM} + \widehat{DBM} = 180^\circ$

Tứ giác MECF có

$$\widehat{MEC} + \widehat{MFC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác MECF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{MCF}$

Mà $\widehat{MCF} = \widehat{ABM}$ (tứ giác ABMC nội tiếp)

Ta có $\widehat{MEF} = \widehat{DBM}$ ($= \widehat{MCF}$)

Do đó $\widehat{DEF} = \widehat{DEM} + \widehat{MEF} = \widehat{DEM} + \widehat{DBM} = 180^\circ$

Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.

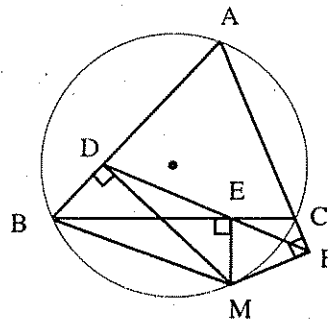
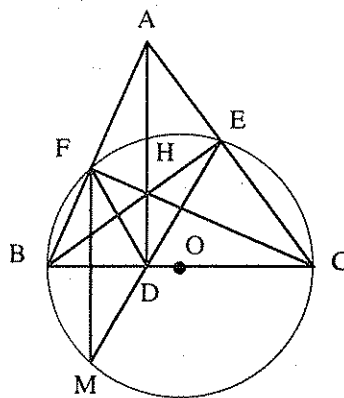
Ví dụ 10:

Cho điểm S nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (O). (A, B là tiếp điểm) G là điểm trên đoạn thẳng AB (GA > GB). I là trung điểm của GA. Vẽ $GH \perp AS$ tại H, GH cắt OB ở K. Vẽ đường tròn (J) qua S, I. Vẽ đường kính SM của đường tròn (J). Chứng minh rằng ba điểm M, I, K thẳng hàng.

Gợi ý: Để chứng minh $\widehat{MIK} = 180^\circ$, chúng ta có thể tìm cách chứng minh $\widehat{SIM} = 90^\circ$ và $\widehat{SIK} = 90^\circ$. Do vậy cần tìm cách chứng minh S, H, I, K, B cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

$\triangle HAG$ vuông tại H, HI là đường trung tuyến $\Rightarrow IH = IA$



Ví dụ 2: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ tam giác ACD vuông tại C có $CD < AB$. Vẽ đường thẳng m qua A và song song với BC. E là điểm trên đường thẳng m sao cho E và C cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB, $AE = BC$.

Chứng minh rằng ba điểm D, C, E thẳng hàng.

Gợi ý: Nhận ra rằng hai tam giác ABC, CEA bằng nhau (trường hợp cạnh-góc-cạnh) nên có $\widehat{BAC} = \widehat{ECA}$, do vậy CE và AB song song. Mặt khác dễ thấy CD và AB song song. Như vậy hai đường thẳng CE, CD.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CEA$ có: $BC = AE$ (gt)

$\widehat{ACB} = \widehat{CAE}$ (so le trong và $AE \parallel BC$), AC (cạnh chung)

Do đó $\triangle ABC = \triangle CEA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ECA}$

Mà $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ECA}$ so le trong

$\Rightarrow CE \parallel AB$

Mặt khác $CD \perp AC$ ($\triangle ACD$ vuông tại C) và

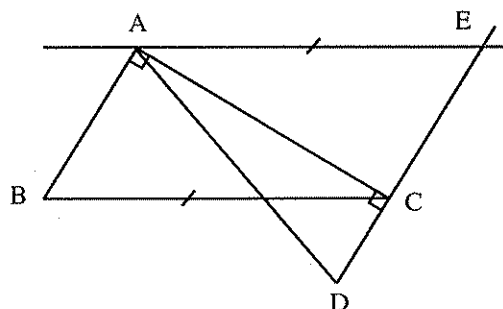
$AB \perp AC$ ($\triangle ABC$ vuông tại A)

$\Rightarrow CD \parallel AB$

Ta có $CE \parallel AB$, $CD \parallel AB$.

Theo tiên đềƠ-clít ta có hai đường thẳng CE, CD trùng nhau

Vậy ba điểm D, C, E thẳng hàng.

**Ví dụ 3:** (Lớp 7)

Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm D, E lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $AD = AE$.

Gọi M là trung điểm đoạn thẳng CE. Trên tia đối của tia MB lấy F sao cho $MF = MB$.

Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Gợi ý: Các tam giác cân ABC (tam giác ADE cân tại A) sẽ cho ta $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, như vậy có được DE và BC song song với nhau.

Mặt khác, từ M là trung điểm của EC và BF giúp ta có được $\triangle MEF = \triangle MCB$ (c.g.c) nên $\widehat{MEF} = \widehat{MCB}$. Vì vậy có EF và BC song song với nhau.

Theo tiên đềƠ-clít cho ta hai đường thẳng DE, DF trùng nhau.

Lời giải

$\triangle ABC$ cân tại A (gt) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

$\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$

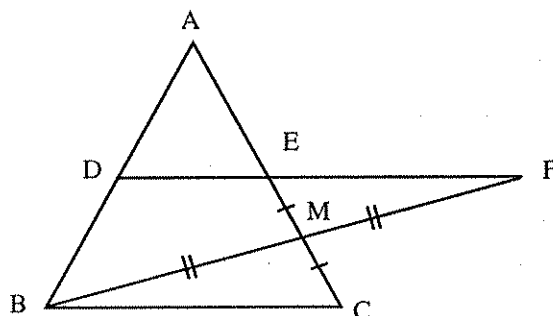
Do đó $2\widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ (1)

$\triangle ADE$ có $AD = AE$ (gt) $\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A.

Tương tự có $2\widehat{ADE} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) có $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$.

Mà $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADE}$ đồng vị



Do đó $DE \parallel BC$

Xét $\triangle MEF$ và $\triangle MCB$ có $ME = MC$ (gt), $MF = MB$ (gt), $\widehat{EMF} = \widehat{BMC}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle MEF = \triangle MCB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{MCB}$. Mà $\widehat{MEF}$ và $\widehat{MCB}$ so le trong

$\Rightarrow EF \parallel BC$

Ta có $DE \parallel BC$ và $EF \parallel BC$

Theo tiên đề Ơ-clit có DE và EF trùng nhau

Vậy D, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 4: (Lớp 8)

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AD, BC, AC . Chứng minh rằng ba điểm M, N, K thẳng hàng.

Gợi ý: Vì có MK là đường trung bình của tam giác ADC , MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$, do vậy có $MN \parallel CD$ và $MK \parallel CD$.

Lời giải

$\triangle ADC$ có M, K lần lượt là trung điểm của AD, AC (gt)

$\Rightarrow MK$ là đường trung bình của tam giác ADC

$\Rightarrow MK \parallel CD$

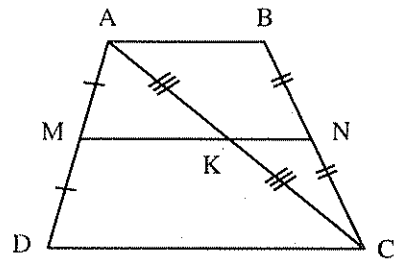
Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC (gt).

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của hình thang $ABCD$.

$\Rightarrow MN \parallel CD$

Vì $MN \parallel CD, MK \parallel CD$.

Theo tiên đề Ơ-clit ta có M, N, K thẳng hàng.



Ví dụ 5: (Lớp 8)

Cho tam giác ABC cân tại A . Từ một điểm D trên đáy BC vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt ở E, F . Vẽ các hình chữ nhật $BDEG, CDFH$. Chứng minh rằng A, G, H thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi I, K lần lượt là tâm của các hình chữ nhật $BDEG, CDFH$.

Từ đó tìm cách chứng minh $GA \parallel IK$ và tương tự cũng có $AH \parallel OK$. Do vậy hai đường thẳng GA, AH trùng nhau.

Lời giải

Gọi I, K lần lượt là tâm của các hình chữ nhật $BDEG, CDFH$

$\triangle ABC$ cân tại A (gt) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

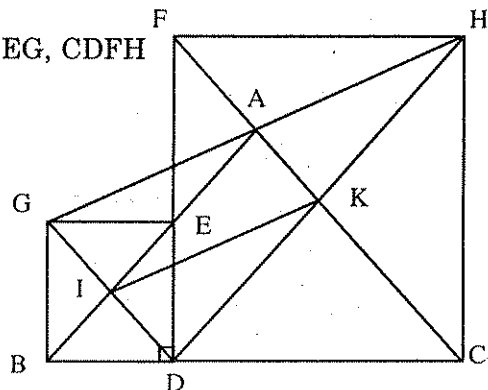
Hình chữ nhật $BDEG$, tâm $I \Rightarrow IB = ID$

$\Rightarrow \triangle IBD$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IBD} = \widehat{IDB}$

Tương tự $\widehat{KDC} = \widehat{KCD}$

Do đó $\widehat{IBD} = \widehat{IDB} = \widehat{KDC} = \widehat{KCD}$

$\widehat{IBD} = \widehat{KDC}$ và ở vị trí đồng vị $\Rightarrow AI \parallel KD$



$IDB = KCD$ và ở vị trí đồng vị $\Rightarrow ID \parallel AK$

Ta có $AI \parallel KD$; $ID \parallel AK$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AIDK$ là hình bình hành $\Rightarrow ID = AI$ mà $GI = ID$. Nên $GI = AK$.

Ta có $GI = AK$, $GI \parallel AK$

$\Rightarrow$ Tứ giác $IGAK$ là hình bình hành $\Rightarrow GA \parallel IK$

Chứng minh tương tự cũng có $AH \parallel IK$

Ta có $GA \parallel IK$, $AH \parallel IK$ theo tiên đề Ô-clit có hai đường thẳng GA , AH trùng nhau.

Vậy ba điểm A , G , H thẳng hàng.

Ví dụ 6: (Lớp 8)

Cho tam giác ABC , D là điểm nằm giữa B và C . Gọi E , F lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BD , CD . I là điểm trên đoạn thẳng AE , M là giao điểm của BI và AD , N là giao điểm của DI và AB , K là giao điểm của CM và AF , S là giao điểm của DK và AC .

Chứng minh rằng ba điểm M , N , S thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi J là điểm đối xứng của I qua E . Giúp ta có được tứ giác $BIDJ$ là hình bình hành $\Rightarrow$ vậy BI và JD song song với nhau. BJ và ID song song với nhau. Vận dụng định lí Ta-lét, định lí Ta-lét đảo từ đó có được MN , BD song song với nhau.

Lời giải

Gọi J là điểm đối xứng của I qua E .

Ta có tứ giác $BIDJ$ là hình bình hành (vì E là trung điểm của BD và IJ)

$\Rightarrow BI \parallel JD$; $BJ \parallel ID$

$$\triangle ABJ \text{ có } BJ \parallel NI \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AI}{AJ}$$

$$\triangle ADJ \text{ có } JD \parallel MI \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AI}{AJ}$$

$$\triangle ABD \text{ có } \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AD} \left(= \frac{AI}{AJ} \right)$$

$\Rightarrow MN \parallel BD$ (định lí Ta-lét đảo)

Chứng minh tương tự cũng có $MS \parallel CD$.

Ta có $MN \parallel BC$ và $MS \parallel BC$, theo tiên đề Ô-clit có M , N , S thẳng hàng.

Ví dụ 7: (Lớp 9)

Cho hai đường tròn (O) , (O') cắt nhau tại A , B . Vẽ hình bình hành $OAO'C$, AD là đường kính của đường tròn (O') . Chứng minh rằng C , B , D thẳng hàng.

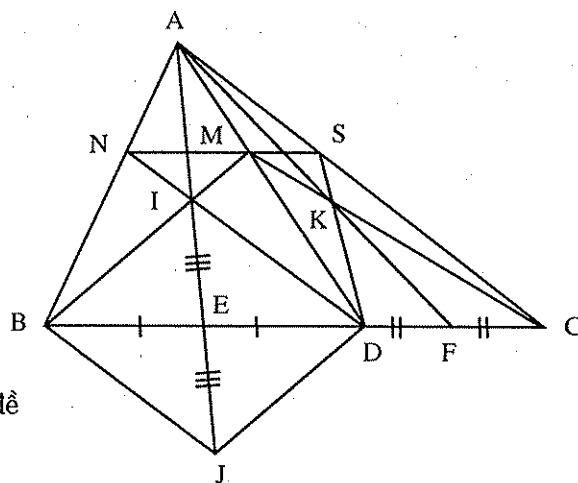
Gợi ý: Gọi I , K lần lượt là giao điểm của OO' với AB , AC . Chứng minh được KI , KO lần lượt là các đường trung bình của các tam giác ABC , ACD giúp có được lời giải của bài toán.

Lời giải

Gọi I , K lần lượt là giao điểm của OO' với AB , AC .

Tứ giác $OAO'C$ là hình bình hành (gt)

$\Rightarrow K$ là trung điểm của AC .



(O), (O') cắt nhau tại A, B

$\Rightarrow OO'$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB $\Rightarrow I$ là trung điểm của AB.

ΔABC có K, I lần lượt là trung điểm của AC, AB

$\Rightarrow KI$ là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow BC \parallel KI$.

ΔACD có K, O' lần lượt là trung điểm của AC, AD

$\Rightarrow KO'$ là đường trung bình của tam giác ACD $\Rightarrow CD \parallel KO'$

Ta có $CD \parallel KO'$, $CB \parallel KO'$.

Theo tiên đề O-clit có C, B, D thẳng hàng.

Ví dụ 8: (Lớp 9)

Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A, B. Vẽ các cát tuyến CAD, EBF (C, E thuộc (O), B, F thuộc (O')), C và D cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ EF). Vẽ hình bình hành EDFG. Chứng minh ba điểm C, E, G thẳng hàng.

Gợi ý: Chúng ta đã có EDFG là hình bình hành nên có $EG \parallel DF$, để có được C, E, G thẳng hàng chỉ cần chứng minh thêm CE, DF song song với nhau, các tứ giác nội tiếp ABEC, ABFD sẽ giúp chúng ta có được điều này.

Lời giải

Nối A với B

Ta có $\widehat{ECA} = \widehat{ABF}$ (tứ giác ABEC nội tiếp)

Và $\widehat{ADF} = \widehat{ABE}$ (tứ giác ABFD nội tiếp)

Mà $\widehat{ABF} + \widehat{ABE} = 180^\circ$ (kề bù)

Do đó $\widehat{ECA} + \widehat{ADF} = 180^\circ$

$\Rightarrow CE \parallel DF$

Ta có $CE \parallel DF$, $EG \parallel DF$ (tứ giác EDFG là hình bình hành).

Theo tiên đề O-clit có ba điểm C, E, G thẳng hàng.

Ví dụ 9: (Lớp 9)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. AI cắt đường tròn (O) ở D. Gọi E, F lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB (không chứa C), AC (không chứa B), M là giao điểm của DE và AB, N là giao điểm của DF và AC. Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng.

Gợi ý: Dễ nhận thấy $DB = DI = DC$, DM và DN lần lượt là tia phân giác của các góc ADB, ADC. Từ đó có được các tam giác cân MBI (tại M), NIC (tại N). Giúp có được MI, NI cùng song song với BC.

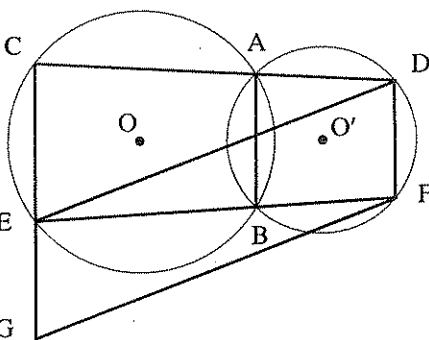
Lời giải

I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

$\Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{CD} \Rightarrow BD = CD$

Ta có $\widehat{DIB} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI}$

$\widehat{DBI} = \widehat{CBI} + \widehat{CBD}$



Mà $\widehat{ABI} = \widehat{CBI}$, $\widehat{BAI} = \widehat{CBD}$ ($\widehat{BD} = \widehat{CD}$)

Do đó $\widehat{DIB} = \widehat{DBI} \Rightarrow \triangle DBI$ cân tại D

$\Rightarrow BD = DI$

Vậy $BD = BI = CD$

Ta có $\widehat{BDM} = \widehat{ADM}$ ($\widehat{BE} = \widehat{AE}$)

$\triangle DBI$ cân tại D, DM là đường phân giác

$\Rightarrow DM$ là đường trung trực

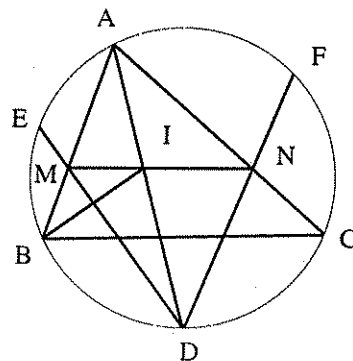
$\Rightarrow MB = MI \Rightarrow \triangle MBI$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{MIB} = \widehat{MBI}$

Ta có $\widehat{MIB} = \widehat{IBC}$ ($= \widehat{MBI}$) $\Rightarrow MI \parallel BC$

Chứng minh tương tự có $IN \parallel BC$

Ta có $MI \parallel BC$ và $IN \parallel BC$.

Theo tiên đề O-clit có M, I, N thẳng hàng.



Ví dụ 10:

Cho tam giác nhọn ABC, trên cạnh AC lấy điểm D. Gọi O, O₁, O₂ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ABD, BCD. Gọi M, N, K lần lượt là giao điểm của OO₁ với AB, O₁O₂ với BD, OO₂ với BC. Chứng minh rằng ba điểm M, N, K thẳng hàng.

Gợi ý: Tìm cách chứng minh MN, MK lần lượt là các đường trung bình của các tam giác ABD, ABC. Do vậy có MN, MK cùng song song với AC.

Lời giải

Hai đường tròn (O) và (O₁) cắt nhau A, B

$\Rightarrow OO_1$ là đường trung trực của AB

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AB.

Tương tự có N là trung điểm của BD, K là trung điểm của BC.

$\triangle ABD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BD.

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác ABD

$\Rightarrow MN \parallel AD$

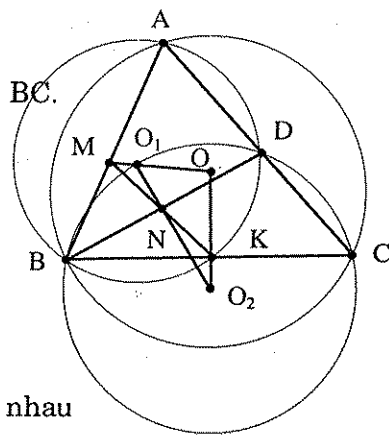
Tương tự MK là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow MK \parallel AC$

Ta có $MN \parallel AC$ và $MK \parallel AC$

Theo tiên đề O-clit ta có hai đường thẳng MN, MK trùng nhau

Vậy M, N, K thẳng hàng.



3. PHƯƠNG PHÁP 3

a) Phương pháp sử dụng tiên đề vẽ đường thẳng vuông góc

Sử dụng tiên đề vẽ đường thẳng vuông góc. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với đường thẳng cho trước.

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, chúng ta có thể chứng minh $AB \perp d$ và $AC \perp d$ (hoặc $AB \perp d$ và $BC \perp d$ hoặc $AC \perp d$ và $BC \perp d$)

b) Một số ví dụ

Ví dụ 1: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC cân tại A, AD là đường trung tuyến. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A vẽ tam giác DCE vuông tại D. Chứng minh rằng A, D, E thẳng hàng.

Gợi ý: Tam giác ABC cân tại A có AD là đường trung tuyến nên cũng là đường cao nên $AD \perp BC$. Mà cũng có $DE \perp BC$. Vì vậy có hai đường thẳng AD, AE trùng nhau.

Lời giải

$\triangle ABC$ cân tại A (gt)

AD là đường trung tuyến (gt)

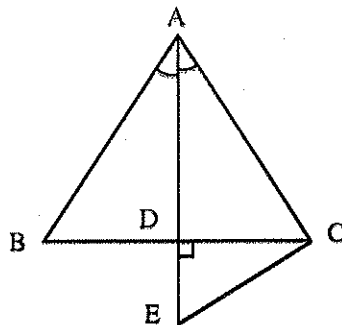
$\Rightarrow$ AD là đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow AD \perp BC$

Mà $DE \perp BC$ ($\triangle DCE$ vuông tại D)

Do vậy hai đường thẳng AD, DE trùng nhau

Vậy A, D, E thẳng hàng.



Ví dụ 2: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = 13$. Vẽ tam giác ACD sao cho $AD = 16$, $CD = 20$. Chứng minh rằng B, A, D thẳng hàng.

Gợi ý: Từ các bộ số “5, 12, 13”; “16, 20, 12” giúp ta nghĩ đến các tam giác vuông ABC (tại A), ACD (tại A) từ định lý Py-ta-go đảo.

Lời giải

Ta có $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

$$BC^2 = 13^2 = 169$$

Nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\triangle ABC$ có $AB^2 + AC^2 = BC^2$

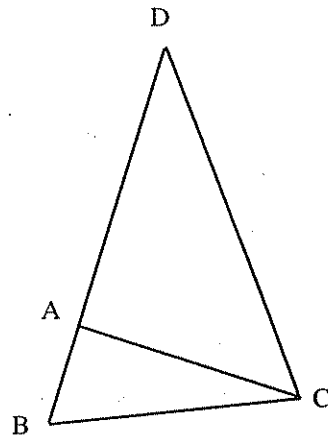
$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A (định lý Py-ta-go đảo) $\Rightarrow AB \perp AC$

Tương tự: $\triangle ACD$ có: $AC^2 + AD^2 = CD^2 = (400)$

$\Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại A (định lý Py-ta-go đảo) $\Rightarrow AD \perp AC$

Ta có $AB \perp AC$ và $AD \perp AC$

$\Rightarrow$ Hai đường thẳng AB, AD trùng nhau. Vậy ba điểm B, A, D thẳng hàng.



Ví dụ 3: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác ABC cắt cạnh AC ở D. Trên cạnh BC lấy E sao cho $BE = AB$. Đường thẳng qua C vuông góc với BD cắt AB ở F.

Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

Gợi ý: Dễ nhận thấy hai tam giác ABD, EBD bằng nhau (trường hợp cạnh – góc – cạnh) nên có $\widehat{BAD} = \widehat{BED} = 90^\circ$. Suy ra DE vuông góc BC. Mặt khác D là trực tâm của tam giác FBC nên cũng có DF vuông góc với BC. Ta có lời giải của bài toán.

Lời giải

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có $AB = BE$ (gt), $\widehat{ABD} = \widehat{EBD}$

(BD là tia phân giác góc ABC), BD (cạnh chung)

Do đó $\triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BED}$

Mà $\widehat{BAD} = 90^\circ$ (gt)

Nên $\widehat{BED} = 90^\circ \Rightarrow DE \perp BC$

Mặt khác $\triangle FBC$ có CA, BD là hai đường cao cắt nhau tại D ($BD \perp AC$ (gt), $CA \perp AB$ (gt))

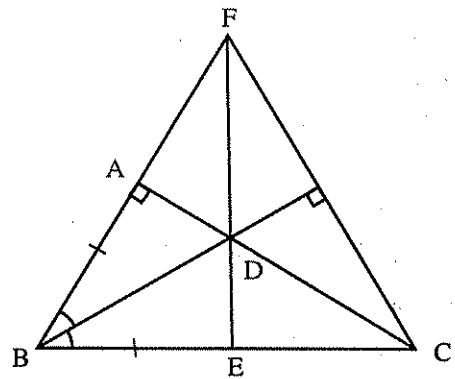
Nên D là trực tâm của tam giác FBC

$\Rightarrow DF \perp BC$.

Ta có $DE \perp BC, DF \perp BC$

$\Rightarrow$ Hai đường thẳng DE, DF trùng nhau

Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.



Ví dụ 4: (Lớp 8)

Cho tam giác ABC cân tại A , các đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Đường thẳng qua B song song với AC cắt đường thẳng qua C song song với AB ở F .

Chứng minh rằng ba điểm A, H, F thẳng hàng.

Gợi ý: Chúng ta dễ phát hiện được tứ giác $ABFC$ là hình thoi nên có AF vuông góc với BC . Mà H là trực tâm của tam giác ABC nên còn có AH vuông góc với BC . Chúng ta có được lời giải của bài toán

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có BD, CE là hai đường cao cắt nhau tại H (gt)

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow AH$ là đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow AH \perp BC$

Tứ giác $ABFC$ có $AB \parallel CF$ (gt)

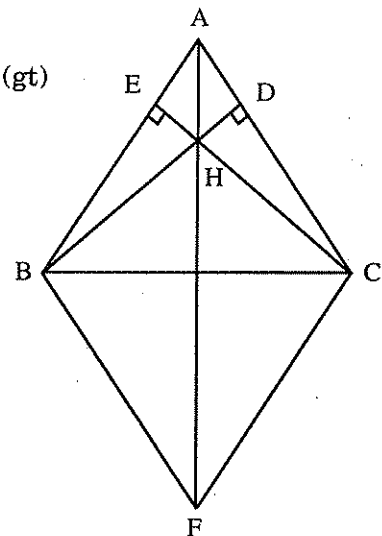
và $AC \parallel BF$ (gt) nên $ABFC$ là hình bình hành.

Mà $AB = AC$ (gt). Do đó $ABFC$ là hình thoi

$\Rightarrow AF \perp BC$.

Ta có $AF \perp BC, AH \perp BC$

Vậy A, H, F thẳng hàng.



Ví dụ 5: (Lớp 8)

Cho tam giác nhọn ABC , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . M là điểm trên tia đối của tia BC , N là điểm nằm trên tia đối của CB . Đường thẳng qua M vuông góc với AN cắt đường thẳng qua N vuông góc với AM ở K . Chứng minh rằng K, A, H thẳng hàng.

Gợi ý: Dễ phát hiện ra rằng H, A lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC, KMN

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có:

BD, CE là hai đường cao cắt nhau tại H ($BD \perp AC, CE \perp AB$)

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow AH$ là đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow AH \perp BC$

Xét ΔKMN có MA, NA là hai đường cao cắt nhau tại A ($MA \perp KN, NA \perp KM$)
 $\Rightarrow A$ là trực tâm của tam giác KMN
 $\Rightarrow KA$ là đường cao của tam giác KMN
 $\Rightarrow KA \perp BC$

Ta có $KA \perp BC$ và $AH \perp BC$

Vậy ba điểm K, A, H thẳng hàng.

Ví dụ 6: (Lớp 8)

Cho tam giác ABC . Về phía ngoài tam giác ABC vẽ các hình vuông $ABDE, ACFG$ và hình bình hành $EAKG$. Gọi H là giao điểm của BF và CD , I là giao điểm của KA và BC . Chứng minh rằng K, H, I thẳng hàng.

Gợi ý: Chúng ta cần tìm cách chứng minh $KH \perp BC$ và $KI \perp BC$. Các cặp tam giác bằng nhau ($\Delta EAK = \Delta ABC$ và $\Delta AKC = \Delta CBF$) giúp đến với lời giải của bài toán.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của BF và CK .

Ta có $\widehat{KEA} + \widehat{EAG} = 180^\circ$ (vì $EK \parallel AG$), $\widehat{BAC} + \widehat{EAG} = 180^\circ$

Nên $\widehat{KEA} = \widehat{BAC}$

Xét ΔEAK và ΔABC

$EA = AB, \widehat{KEA} = \widehat{BAC}, EK = AC (= AG)$

Do đó $\Delta EAK = \Delta ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{ABC}, AK = BC$

Ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} + \widehat{BAI} &= \widehat{EAK} + \widehat{BAI} \\ &= 180^\circ - \widehat{BAE} \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

Nên $\widehat{BIA} = 90^\circ \Rightarrow KI \perp BC$

Xét ΔAKC và ΔCBF

Có $AK = BC, AC = CF; \widehat{KAC} = \widehat{BCF} (= 90^\circ + \widehat{ACB})$

Do đó $\Delta AKC = \Delta CBF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{CFB}$. Nên $\widehat{CFB} + \widehat{MCF} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CMF} = 90^\circ \Rightarrow BM \perp KC$

Tương tự có $CD \perp KB$

ΔKBC có BM, CD là hai đường cao cắt nhau tại H

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác $KBC \Rightarrow KH$ là đường cao của tam giác $KBC \Rightarrow KH \perp BC$

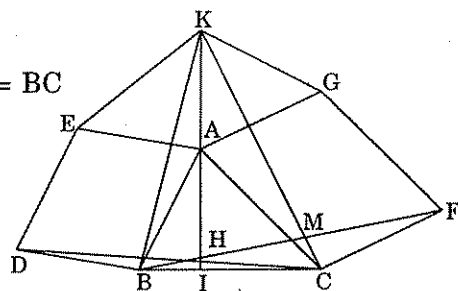
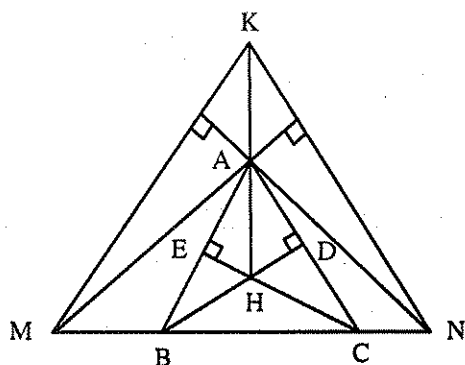
Ta có $KH \perp BC$ và $KI \perp BC$

Vậy K, H, I thẳng hàng.

Ví dụ 7: (Lớp 9)

Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Đường tròn đường kính BH cắt BC ở K (K khác B). Chứng minh rằng ba điểm A, H, K thẳng hàng.

Gợi ý: Từ đường tròn đường kính BH giúp có được $KH \perp BC$.



Mặt khác có H là trực tâm của tam giác ABC nên $AH \perp BC$.

Chúng ta có được lời giải của bài toán.

Lời giải

Đường tròn đường kính BH cắt BC ở K

$\Rightarrow \Delta KBH$ vuông tại K

$\Rightarrow KH \perp BC$.

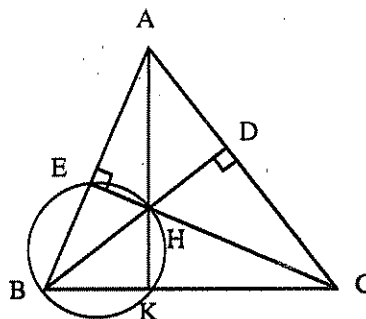
ΔABC có BD, CE là hai đường cao cắt nhau tại H (gt)

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow AH \perp BC$

Ta có $AH \perp BC$, $KH \perp BC$

Vậy ba điểm A, H, K thẳng hàng.



Ví dụ 8: (Lớp 9)

Cho hình vuông ABCD. I là điểm trên cạnh BC. Vẽ BE vuông góc với DI tại E, BE cắt CD ở F. Gọi K là giao điểm của AE và BD. Chứng minh rằng ba điểm F, I, K thẳng hàng.

Gợi ý: Dễ thấy các tứ giác nội tiếp IEFC, BECD nên có được tứ giác BKIF nội tiếp, do vậy $\widehat{DKI} = \widehat{BCI} = 90^\circ \Rightarrow IK \perp BD$. Hơn nữa có I là trực tâm của tam giác BDF nên $FI \perp BD$. Giúp có lời giải của bài toán.

Lời giải

Ta có $\widehat{ICF} = 90^\circ$, $\widehat{IEF} = 90^\circ$

Nên tứ giác IEFC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EIF} = \widehat{ECF}$

Tứ giác BECD có $\widehat{BCD} = \widehat{BED} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác BECD nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ECF} = \widehat{KBE}$

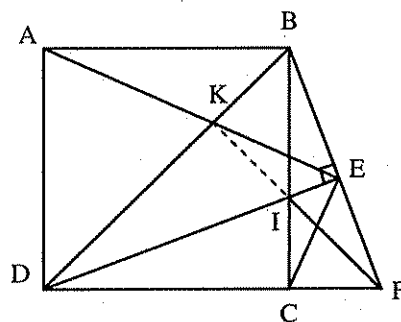
Ta có $\widehat{EIF} = \widehat{KBE} (= \widehat{ECF})$

$\Rightarrow$ Tứ giác BKIE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DKI} = \widehat{BEI} = 90^\circ \Rightarrow IK \perp BD$

ΔBDF có DE, BC là hai đường cao cắt nhau tại I $\Rightarrow I$ là trực tâm của tam giác BDF $\Rightarrow FI$ là đường cao của tam giác BDF $\Rightarrow FI \perp BD$

Ta có $IK \perp BD$, $FI \perp BD$

Vậy F, I, K thẳng hàng.



Ví dụ 9: (Lớp 9)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường tròn (O) đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Gọi H là giao điểm của E và CD. Đường thẳng qua O và vuông góc với CE cắt đường thẳng vuông góc với BC tại C ở M. Gọi N là trung điểm của AH. Chứng minh rằng M, N, E thẳng hàng.

Gợi ý: Chứng minh được H là trực tâm của tam giác ABC nên có $AH \perp BC$, giúp có được NE vuông góc với OE. Mặt khác hai tam giác OEM, OCM bằng nhau cho ta $\widehat{OEM} = \widehat{OCM}$ nên AM vuông góc với OE.

Lời giải

Ta có $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\triangle HAE$ vuông tại E, E là đường trung tuyến

$\Rightarrow NA = NE \Rightarrow \triangle NAE$ cân tại N $\Rightarrow \widehat{NAE} = \widehat{NEA}$

$OE = OC (= R) \Rightarrow \triangle OEC$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OEC} = \widehat{OCE}$

$\triangle ABC$ có BE, CD là hai đường cao cắt nhau tại H

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow AH \perp BC$

$\Rightarrow \widehat{NAE} + \widehat{OCE} = 90^\circ$. Nên $\widehat{NEA} + \widehat{OEC} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{OEN} = 90^\circ \Rightarrow NE \perp OE$

$OM \perp EC \Rightarrow OM$ đi qua trung điểm của CE

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của EC

$\Rightarrow ME = MC$.

Xét $\triangle OEM$ và $\triangle OCM$ có $OE = OC (= R)$, $ME = MC$, OM (cạnh chung)

Do đó $\triangle OEM = \triangle OCM$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{OEM} = \widehat{OCM}$; $\widehat{OEM} = 90^\circ \Rightarrow EM \perp OE$

Ta có $NE \perp OE$, $EM \perp OE$

Vậy ba điểm M, N, E thẳng hàng.

Ví dụ 10: (Lớp 9)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD và CE cắt nhau tại H. Đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác BDH cắt đường tròn (O) ở M (M khác B). Vẽ đường kính BF của đường tròn (O). Chứng minh rằng M, H, F thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi N là giao điểm của AC và HF. Tứ giác AHCF là hình bình hành giúp có tứ giác HNOI là hình bình hành nên $HF \parallel OI$ mà $OI \perp BM \Rightarrow HF \perp BM$ mà $HM \perp BM$ nên giúp có được lời giải của bài toán.

Lời giải

Gọi N là giao điểm của AC và HF

Ta có $\widehat{BAF} = 90^\circ$, $\widehat{BCF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{BDH} = 90^\circ$, nên I là trung điểm của BH

Ta có $AH \perp BC$ (gt), $FC \perp BC$ ($\widehat{BCF} = 90^\circ$) $\Rightarrow AH \parallel FC$

Tương tự có $AF \parallel HC$. Do đó tứ giác AHCF là hình bình hành $\Rightarrow N$ là trung điểm của HF

$\triangle BHF$ có N, O lần lượt là trung điểm của HF và BF

$\Rightarrow ON$ là đường trung bình của tam giác BHF

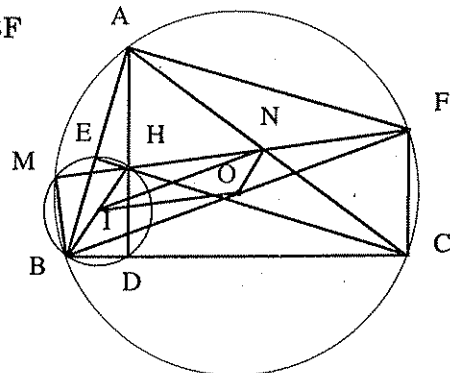
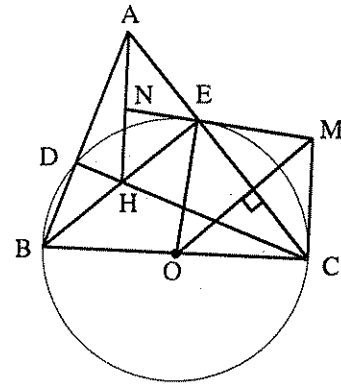
$\Rightarrow ON \parallel BH$, $ON = \frac{BH}{2}$

Ta có $ON = IH$, $ON \parallel IH$

$\Rightarrow$ Tứ giác HNOI là hình bình hành

$\Rightarrow HF \parallel OI$.

Mà hai đường tròn (O) và (I) cắt nhau ở B, M



$\Rightarrow OI$ là đường trung trực của $BM \Rightarrow OI \perp BM$

Ta có $HF \parallel OI, OI \perp BM \Rightarrow HF \perp BM$

Mà $\widehat{BMH} = \widehat{BEH} = 90^\circ \Rightarrow HM \perp BM$. Ta có $HF \perp BM$ và $HM \perp BM$

Vậy ba điểm M, H, F thẳng hàng.

4. PHƯƠNG PHÁP 4

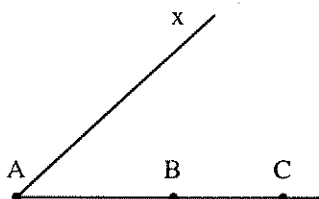
a) Phương pháp sử dụng hai tia trùng nhau

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng (trên hình vẽ nhận ra B nằm giữa A và C), chúng ta có thể chứng minh hai tia AB và AC trùng nhau (hoặc hai tia CB, CA trùng nhau)

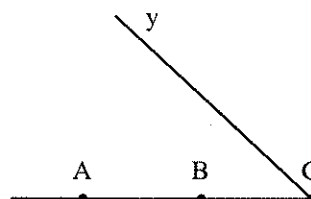


Thường là chứng minh $\widehat{BAx} = \widehat{CAx}$ (hình 1)

Hoặc chứng minh $\widehat{ACy} = \widehat{BCy}$ (hình 2)



(hình 1)



(hình 2)

b) Một số ví dụ

Ví dụ 1: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC , D là điểm trên cạnh AB . Đường thẳng qua D song song với AC cắt BC ở E . Vẽ điểm M, N trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A sao cho $\widehat{BMC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ và $\widehat{BMN} + \widehat{BDE} = 180^\circ$. Chứng minh rằng ba điểm M, N, C thẳng hàng.

Gợi ý: Hai đường thẳng DE và AC song song với nhau cho ta $\widehat{BAC} = \widehat{BDE}$.

Mặt khác giả thiết có $\widehat{BMC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ và $\widehat{BMN} + \widehat{BDE} = 180^\circ$

Do vậy $\widehat{BMC} = \widehat{BMN}$. Từ đó giúp có điều cần chứng minh

Lời giải

Ta có $DE \parallel AC \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDE}$

Mà $\widehat{BMC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ (gt) và $\widehat{BMN} + \widehat{BDE} = 180^\circ$ (gt)

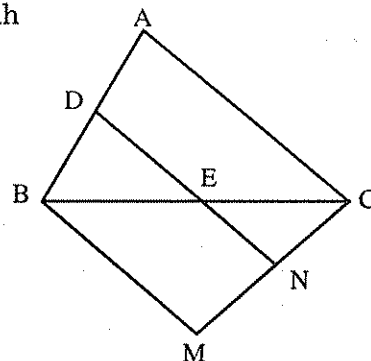
Suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{BMN}$

$\Rightarrow$ Hai tia MN, MC trùng nhau.

Vậy ba điểm M, N, C thẳng hàng.

Ví dụ 2: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC có $AB < BC$. Tia phân giác của góc ABC cắt AC ở D . E là điểm trên tia đối của tia DB . Trên nửa mặt phẳng bờ BD có chứa A vẽ tia Ex sao cho $\widehat{BEx} = \widehat{BEC}$. Trên tia Ex lấy điểm F sao cho $EF = EC$. Chứng minh rằng ba điểm F, A, B thẳng hàng.



Gợi ý: Dễ thấy hai tam giác ECB, EFB bằng nhau nên $\widehat{EBC} = \widehat{EBF}$

Mặt khác BD là tia phân giác của góc ABC.

Do vậy cho ta hai góc EBF, EBA bằng nhau.

Lời giải

Xét $\triangle ECB$ và $\triangle EFB$ có $EC = EF$ (gt),

$\widehat{CEB} = \widehat{FEB}$ (gt) EB (cạnh chung)

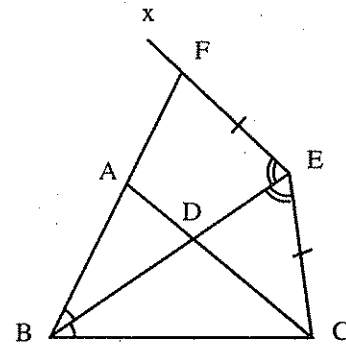
Do đó $\triangle ECB = \triangle EFB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{EBF}$

Mà $\widehat{EBC} = \widehat{EBA}$ (BD là tia phân giác của góc ABC)

Do đó $\widehat{EBF} = \widehat{EBA}$

$\Rightarrow$ Hai tia BA, BF trùng nhau

Vậy ba điểm F, A, B thẳng hàng.



Ví dụ 3: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C vẽ tam giác ABD vuông tại A có $BD = 2AB$. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng.

Lời giải

Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AE = AB$

Tam giác DBE có DA là đường cao ($\triangle ABD$ vuông tại A) là đường trung tuyến ($AE = AB$)

$\Rightarrow \triangle DBE$ cân tại D $\Rightarrow BD = DE$

Mà $BE = 2AB$, $BD = 2AB$ (gt) $\Rightarrow BE = BD$

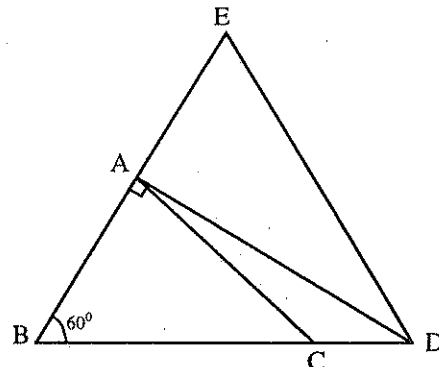
$\triangle DBE$ có $BD = DE = BE$

$\Rightarrow \triangle DBE$ đều $\Rightarrow \widehat{DBA} = 60^\circ$

Ta có $\widehat{DBA} = \widehat{CBA}$ ($= 60^\circ$)

$\Rightarrow$ Hai tia BC, BD trùng nhau.

Vậy ba điểm B, C, D thẳng hàng.



Ví dụ 4: (Lớp 8)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Các điểm D, E lần lượt trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABD} = 20^\circ$, $\widehat{ACE} = 10^\circ$. Gọi I là giao điểm của BD và CE. Gọi M là điểm đối xứng của I qua BC, N là điểm đối xứng của I qua AC.

Chứng minh rằng ba điểm M, D, N thẳng hàng.

Gợi ý: Nhận ra rằng $\widehat{DIC} = 60^\circ$, theo tính chất đối xứng trục cho ta $\widehat{DNC} = \widehat{DIC}$ nên $\widehat{DNC} = 60^\circ$. Mặt khác tam giác CMN đều. Do vậy $\widehat{MNC} = 60^\circ$

Ta có được $\widehat{MNC} = \widehat{DNC}$ ($= 60^\circ$). Như vậy hai tia ND, NM trùng nhau.

Lời giải

Ta có $\widehat{IDC} = \widehat{ABD} + \widehat{BAD}$ (góc ngoài của tam giác ABD)

$$\widehat{IDC} = 20^\circ + 90^\circ = 110^\circ$$

$\triangle DIC$ có $\widehat{DIC} + \widehat{IDC} + \widehat{ICD} = 180^\circ$

Nên $\widehat{DIC} = 60^\circ$

I, N đối xứng qua CD

$$\Rightarrow \widehat{DNC} = \widehat{DIC} = 60^\circ$$

Theo tính chất đối xứng trục ta có $CN = CI$, $CM = CI$

$$\Rightarrow CM = CN$$

$$\Rightarrow \triangle CMN \text{ cân tại } C \text{ vì cũng có } \widehat{BCI} = \widehat{BCM}, \widehat{DCI} = \widehat{DCN}$$

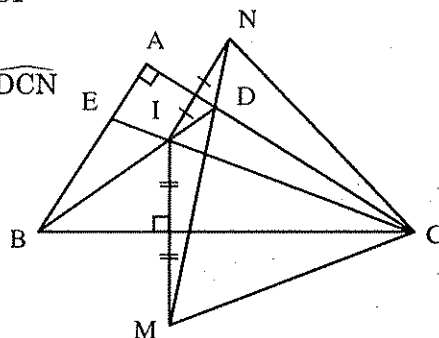
$$\text{Nên } \widehat{MCN} = 2(\widehat{DCI} + \widehat{BCI}) = 2\widehat{ACB} = 60^\circ$$

$$\triangle CMN \text{ cân tại } C \text{ có } \widehat{MCN} = 60^\circ$$

$$\text{Ta có } \widehat{MNC} = \widehat{DNC} (= 60^\circ)$$

$\Rightarrow$ Hai tia MD, NM trùng nhau

Vậy ba điểm M, D, N thẳng hàng.



Ví dụ 5:

Cho hình thoi ABCD, M là điểm trên đường chéo BD ($MD < MB$) gọi E là giao điểm của CM và AB. Trên tia AM lấy điểm F sao cho $AF = CE$.

Chứng minh rằng ba điểm B, C, F thẳng hàng.

Gợi ý: Tứ giác ABCD là hình thoi nên có BD là đường phân giác góc ABC. Hai tam giác ABM, CBM bằng nhau cho ta hai góc bằng nhau BAM, BCM. Từ đó giúp chứng minh được hai tam giác bằng nhau ABF, CBE giúp có $\widehat{ABF} = \widehat{CBE}$

Như vậy hai tia BC, BF trùng nhau.

Lời giải

Tứ giác ABCD là hình thoi.

$\Rightarrow$ BD là tia phân giác của góc ABC

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{CBM}$$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle CBM$ có:

$$AB = BC \text{ (ABCD là hình thoi),}$$

$$\widehat{ABM} = \widehat{CBM}, BM \text{ (cạnh chung)}$$

$$\text{Do đó } \triangle ABM = \triangle CBM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BCM}$$

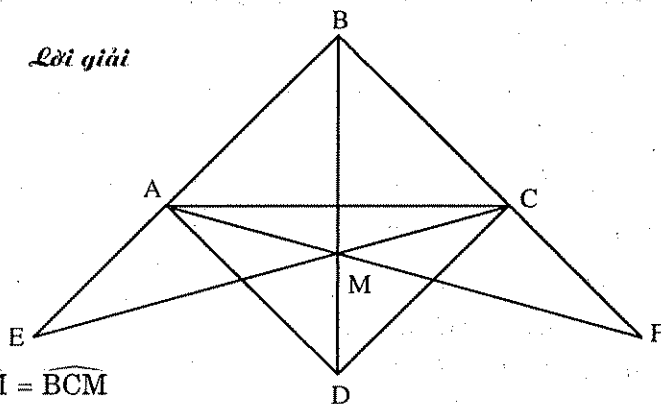
Xét $\triangle ABF$ và $\triangle CBE$ có:

$$AB = BC, \widehat{BAF} = \widehat{BCE}, AF = CE \text{ (gt)}$$

$$\text{Do đó } \triangle ABF = \triangle CBE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{CBE}$$

$\Rightarrow$ Hai tia BC, BF trùng nhau

Vậy ba điểm B, C, F thẳng hàng.



Ví dụ 6: (Lớp 8)

Cho tam giác ABC, D là điểm trên cạnh AB. Đường thẳng qua D song song với BC cắt AC ở E. M, N lần lượt trên các đoạn thẳng BC, DE sao cho $BM = 2MC$, $DN = 2NE$.

Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Gợi ý: Chúng ta dễ chứng minh được $\frac{AD}{AB} = \frac{DN}{BM}$. Từ đó giúp có hai tam giác đồng dạng

ADN, ABM.

Lời giải

Ta có: $BM = 2MC \Rightarrow 3BM = 2MC + 2BM \Rightarrow BM = \frac{2}{3}BC$

Tương tự có $DN = \frac{2}{3}DE$

$\triangle ABC$ có $DE \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

Nên $\frac{AD}{AB} = \frac{DN}{BM}$

Xét $\triangle ADN$ và $\triangle ABM$ có: $\widehat{ADN} = \widehat{ABM}$ ($DE \parallel BC$), $\frac{AD}{AB} = \frac{DN}{BM}$

Do đó $\triangle ADN \sim \triangle ABM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{BAM}$

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Ví dụ 7: (Lớp 9)

Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Điểm E bất kì trên CD. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AC tại C và đi qua E. Hai đường tròn (O) và (I) cắt nhau tại E, F. Chứng minh rằng ba điểm B, E, F thẳng hàng.

Gợi ý: Tìm cách chứng minh năm điểm A, D, F, C, B cùng thuộc một đường tròn, để có được $\widehat{DFE} = \widehat{DFB}$ giúp có hai tia FE, FB trùng nhau.

Lời giải

ABCD là hình thang cân (gt) $\Rightarrow$ Tứ giác ABCD nội tiếp.

Ta có: $\widehat{DFE} = \widehat{ADC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{CFE} = \widehat{ECA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\triangle ADC$ có $\widehat{DAC} + \widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 180^\circ$

Do đó: $\widehat{DAC} + \widehat{DFC} = \widehat{DAC} + \widehat{DFE} + \widehat{CFE} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác ADFC nội tiếp.

Do vậy A, D, F, C, B cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $\widehat{DFE} = \widehat{ADC}$, $\widehat{ADC} = \widehat{DCB}$, $\widehat{DCB} = \widehat{DFB}$

Do đó $\widehat{DFE} = \widehat{DFB}$

Ta có hai tia FE, FB trùng nhau

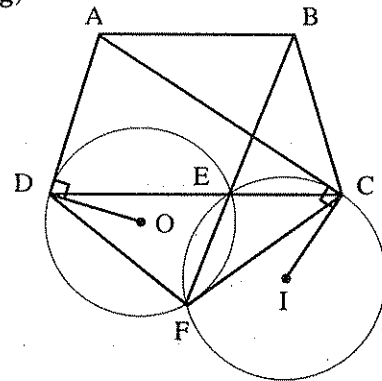
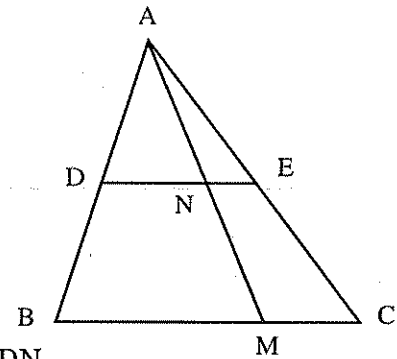
Vậy ba điểm B, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 8: (Lớp 9)

Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB. Đường thẳng qua F song song với BC cắt DE tại K. Gọi M là trung điểm của FK. Chứng minh rằng ba điểm A, M, D thẳng hàng.

Gợi ý: Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt DE, DF lần lượt ở S, L giúp có được $LA = AF$. Từ đó chứng minh được hai tam giác DFM, DLA đồng dạng, giúp có $\widehat{FDM} = \widehat{LDA}$.

Do đó hai tia DM, DA trùng nhau.



Lời giải

Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt DE, DF lần lượt ở S, L

Ta có: $\widehat{ALF} = \widehat{BDF}$ (so le trong và $LS \parallel BC$)

$$\widehat{AFL} = \widehat{DFB} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{DFB} = \widehat{BDF} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{DF} \right)$$

Suy ra $\widehat{ALF} = \widehat{AFL}$

$\Rightarrow \triangle ALF$ cân tại A $\Rightarrow LA = AF$

Tương tự $AS = AE$

Mà $AE = AF$, nên $LA = AS = \frac{LS}{2}$

$\triangle DLS$ có $FK \parallel LS \Rightarrow \frac{DF}{DL} = \frac{FK}{LS}$

$$FM = \frac{FK}{2}, LA = \frac{LS}{2} \text{ nên } \frac{DF}{DL} = \frac{FM}{LA}$$

Xét $\triangle DFM$ và $\triangle DLA$ có $\widehat{DFM} = \widehat{DLA}$, $\frac{DF}{DL} = \frac{FM}{LA}$

Do đó $\triangle DFM \sim \triangle DLA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FDM} = \widehat{LDA}$

$\Rightarrow$ Hai tia DM, DA trùng nhau.

Vậy ba điểm A, M, D thẳng hàng.

Ví dụ 9: (Lớp 9)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác AD của tam giác ABC cắt cung BC ở E. Đường tròn (I) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại S và tiếp xúc với BC tại T. Chứng minh rằng S, T, E thẳng hàng.

Gợi ý: Hai đường tròn (O), (I) tiếp xúc nhau tại S, do đó có O, I, S thẳng hàng. Mặt khác hai tam giác cân OES (tại O) ITS (tại I) có $\widehat{EOS} = \widehat{TIS}$ nên đồng dạng, giúp có $\widehat{OSE} = \widehat{IST}$. Do vậy hai tia ST, SE trùng nhau.

Lời giải

Hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc nhau tại S $\Rightarrow$ O, I, S thẳng hàng.

$\widehat{BAE} = \widehat{EAC} \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CE} \Rightarrow OE \perp BC$. $IT \perp BC$. Nên $OE \parallel IT \Rightarrow \widehat{EOS} = \widehat{TIS}$

$OE = OS (= R) \Rightarrow \triangle OES$ cân tại O

$IT = TS (= r) \Rightarrow \triangle ITS$ cân tại I.

Do đó $\triangle OES \sim \triangle ITS$

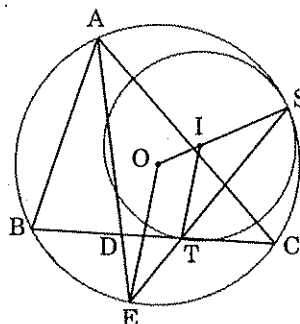
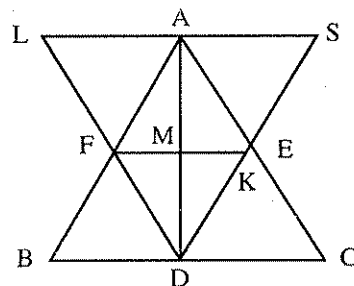
$\Rightarrow \widehat{OSE} = \widehat{IST}$

$\Rightarrow$ Hai tia ST, SE trùng nhau

Vậy S, T, E thẳng hàng.

Ví dụ 10: (Lớp 9)

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AB. I là giao điểm của AC và BD. Vẽ $IE \perp AB$ tại E. CE cắt BD tại K. Đường thẳng vuông góc với BK tại K cắt AC ở M. Gọi N



là điểm đối xứng của A qua D. Chứng minh rằng ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Gợi ý: Hai tứ giác nội tiếp IEBC, MCBK giúp có $\widehat{FBK} = \widehat{KBM}$. Mặt khác tam giác BAN cân tại B nên có $\widehat{ABD} = \widehat{KBM}$. Do vậy $\widehat{KBM} = \widehat{DBN}$ nên hai tia BM, BN trùng nhau.

Lời giải

Gọi F là giao điểm của MK và AB.

Ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{IEB} = \widehat{ICB} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác IEBC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FBK} = \widehat{ECI}$

$\widehat{MKB} = \widehat{MCB} = 90^\circ$

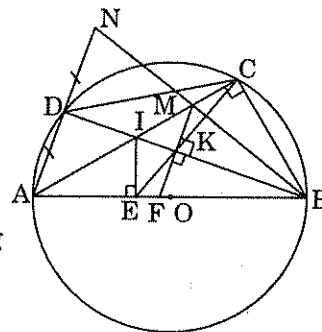
Tứ giác MCBK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KBM} = \widehat{ECI}$

Do đó $\widehat{FBK} = \widehat{KBM}$

ΔBAN có BD là đường cao ($\widehat{ADB} = 90^\circ$) và là đường trung tuyến nên tam giác BAN cân tại B. Do đó có $\widehat{ABD} = \widehat{DBN}$

Ta có $\widehat{KBM} = \widehat{DBN} \Rightarrow$ Hai tia BM, BN trùng nhau.

Vậy ba điểm B, M, N thẳng hàng.



5. PHƯƠNG PHÁP 5

a) Phương pháp sử dụng hình duy nhất

Một số bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng nếu vận dụng đến kiến thức hình duy nhất như sau:

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, trong đó C thuộc hình A (hình A là đường thẳng, tia, đoạn thẳng, đường tròn, cung tròn,...), chúng ta có thể gọi C' là giao điểm của AB với hình A tìm cách chứng minh hai điểm C và C' trùng nhau.

b) Một số ví dụ

Ví dụ 1: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC. Vẽ tam giác ABD sao cho D nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C và $AD \parallel BC$. Gọi M là trung điểm cạnh AC. Trên tia đối của tia MB lấy điểm E sao cho $ME = MB$. Chứng minh rằng ba điểm D, A, E thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi E' là giao điểm của BM và AD. Hai tam giác bằng nhau $\Delta MAE'$, ΔMCB cho ta $ME' = MB$, giúp có $E = E'$.

Lời giải

Gọi E' là giao điểm của BM và AD.

Xét $\Delta MAE'$ và ΔMCB có $MA = MC$ (M là trung điểm của AC), $\widehat{AME'} = \widehat{CMB}$ (đối đỉnh)

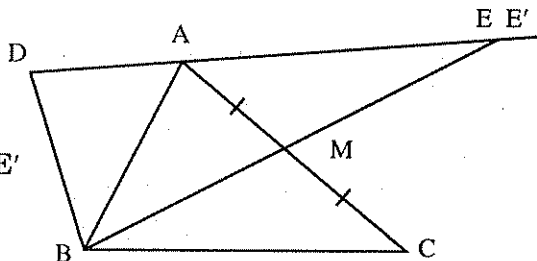
$\widehat{MAE'} = \widehat{MCB}$ (so le trong và $AE' \parallel BC$)

Do đó $\Delta MAE' = \Delta MCB$ (g.c.g)

$\Rightarrow ME' = MB$

Mà $ME = MB$ (gt). Do đó $ME = ME' \Rightarrow E = E'$

Vậy ba điểm D, A, E thẳng hàng.



Ví dụ 2: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC, M là trung điểm cạnh AC. Trên tia đối của tia MB lấy điểm D sao cho MD = MB. Trên các đoạn thẳng AD, BC lần lượt lấy I, K sao cho AI = CK.

Chứng minh rằng ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi I' là giao điểm của KM và AD.

Hai tam giác MAD, MCB bằng nhau cho ta $\widehat{MAI'} = \widehat{MCK}$

Do vậy $\triangle MAI' = \triangle MCK$ (trường hợp góc-cạnh-góc)

Vì vậy $AI' = CK = AI$, nên có được $I' = I$

Lời giải

Gọi I' là giao điểm của KM và AD

Xét $\triangle MAD$ và $\triangle MCB$ có MA = MC (M là trung điểm cạnh AC), $\widehat{AMD} = \widehat{CMB}$ (đối đỉnh), MD = MB (gt)

Do đó $\triangle MAD = \triangle MCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MCB}$

Xét $\triangle MAI'$ và $\triangle MCK$ có :

$\widehat{MAI'} = \widehat{MCK}$ (vì $\widehat{MAD} = \widehat{MCB}$), MA = MC

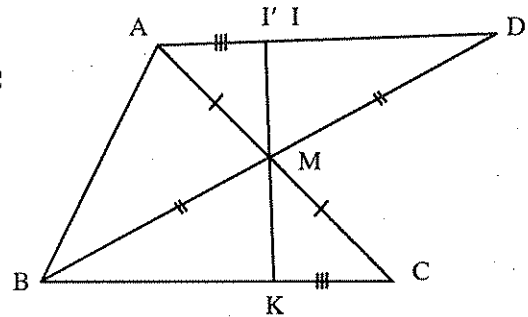
$\widehat{AMI'} = \widehat{CMK}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle MAI' = \triangle MCK$ (g.c.g) $\Rightarrow AI' = CK$

Mà AI = CK (gt)

Do đó $AI' = AI \Rightarrow I' = I$

Vậy ba điểm I, M, K thẳng hàng.

**Ví dụ 3: (Lớp 7)**

Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy D, E sao cho AD = AE.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, DE.

Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi N' là giao điểm của AM và DE. Tìm cách chứng minh $N' = N$.

Chú ý hai tam giác cân ABC (tại A), ADE (tại A) sẽ giúp chúng ta có điều này.

Lời giải

Gọi N' là giao điểm của AM và DE.

$\triangle ABC$ cân tại A, AM là đường trung tuyến (M là trung điểm của cạnh BC)

$\Rightarrow$ AM là đường phân giác của góc BAC.

$\triangle ADE$ có AD = AE (gt)

$\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A

$\triangle ADE$ cân tại A, AN' là đường phân giác.

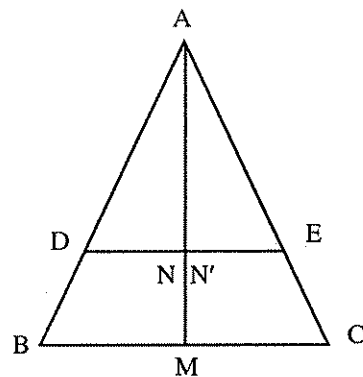
$\Rightarrow AN'$ là đường trung tuyến của tam giác ADE

$\Rightarrow N'$ là trung điểm của cạnh DE

Mà N là trung điểm cạnh DE.

Do đó $N' = N$

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.



Ví dụ 4: (Lớp 8)

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $CD = AD + BC$. Các tia phân giác của các góc BAD, ABC cắt nhau tại M . Chứng minh rằng ba điểm C, M, D thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi M' là giao điểm của tia phân giác góc BAD và CD . Tìm cách chứng minh BM' là tia phân giác góc ABC , ta có M' và M trùng nhau.

Chú ý tam giác DAM' cân tại M' và $AB \parallel CD$, sẽ tìm được lời giải của bài toán.

Lời giải

Gọi M' là giao điểm của tia phân giác góc BAD và CD

Ta có $\widehat{BAM'} = \widehat{DAM'}$ (so le trong và $AB \parallel CD$)

Nên $\widehat{DAM} = \widehat{AM'D}$

$\Rightarrow \triangle DAM'$ cân tại M'

$\Rightarrow DM' = AD$

Ta có $DM' + M'C = CD$.

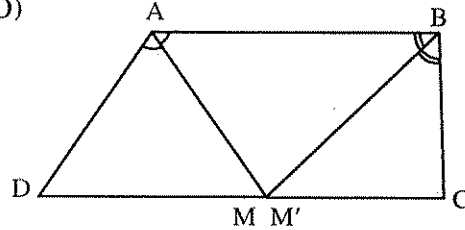
Mà $AD + BC = CD$ (gt)

Suy ra $M'C = BC \Rightarrow \triangle M'BC$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{M'BC} = \widehat{BM'C}$

Mà $\widehat{BM'C} = \widehat{ABM'}$ (so le trong và $AB \parallel CD$)

Suy ra $\widehat{M'BC} = \widehat{ABM'} \Rightarrow BM'$ là tia phân giác của góc ABC . Nên $M' \equiv M$

Vậy C, M, D thẳng hàng.

**Ví dụ 5:** (Lớp 8)

Cho tam giác ABC cân tại A , AM là đường trung tuyến. D là điểm trên tia đối của tia

BA . N là điểm trên đoạn thẳng CD sao cho $\frac{ND}{NC} = \frac{AD}{AC}$.

Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi N' là giao điểm của AM và CD . Chứng minh được $N' \equiv N$

Lời giải

Gọi N' là giao điểm của AM và CD .

Xét $\triangle ABC$ cân tại A , AM là đường trung tuyến

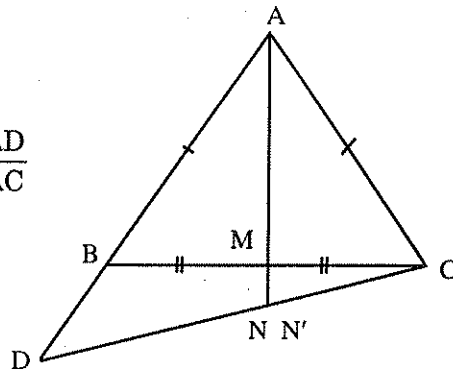
$\Rightarrow AM$ là đường phân giác của góc BAC

Xét $\triangle ADC$ có AN' là đường phân giác $\Rightarrow \frac{N'D}{N'C} = \frac{AD}{AC}$

Mà $\frac{ND}{NC} = \frac{AD}{AC}$ (gt)

Nên $\frac{N'D}{N'C} = \frac{ND}{NC} \Rightarrow N' \equiv N$

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

**Ví dụ 6:** (Lớp 8)

Cho tam giác ABC . Đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt ở D, E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, DE .

Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi N' là giao điểm của AM và DE .

Dễ dàng chứng minh được N' là trung điểm của DE

Do vậy hai điểm N', N trùng nhau. Giúp có được lời giải của bài toán.

Lời giải

Gọi N' là giao điểm của AM và DE .

$$\text{Xét } \triangle ABM \text{ có } DN' \parallel BM \Rightarrow \frac{DN'}{BM} = \frac{AN'}{AM}$$

$$\text{Xét } \triangle AMC \text{ có } N'E \parallel MC \Rightarrow \frac{N'E}{MC} = \frac{AN'}{AM}$$

$$\text{Ta có } \frac{DN'}{BM} = \frac{N'E}{MC} = \left(\frac{AN'}{AM} \right).$$

Mà $BM = MC$ (M là trung điểm của BC)

$\Rightarrow DN' = N'E$. Nếu N' là trung điểm của DE

Ta có $N' \equiv N$

Vậy A, M, N thẳng hàng.

Ví dụ 7: (Lớp 9)

Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao. Vẽ hai đường tròn $(O), (I)$ có đường kính lần lượt là BH, HC . Vẽ CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $(O), (I)$ ($C \in (O), D \in (I)$, C và D nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A). Gọi M là trung điểm đoạn thẳng CD . Chứng minh rằng A, H, M thẳng hàng.

Gợi ý: Dễ thấy rằng AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(O), (O')$. Do vậy gọi M' là giao điểm của AH và CD . Chúng ta chứng minh được M' là trung điểm của đoạn thẳng CD . Nên có $M' \equiv M$. Như vậy có được A, H, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $AH \perp OO'$ tại $H, H \in (O), H \in (O')$

$\Rightarrow AH$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O')

Gọi M' là giao điểm của AH và CD

Ta có $M'H, M'C$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow M'H = M'C$ và $M'H, M'D$ là tiếp tuyến của đường tròn (O')

$\Rightarrow M'H = M'D$

Do đó $M'C = M'D$

$\Rightarrow M'$ là trung điểm của CD

Mà M là trung điểm của CD .

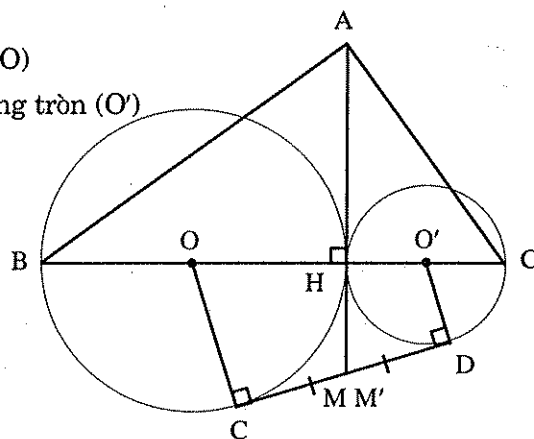
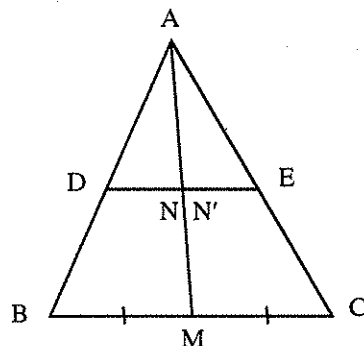
Do đó $M' \equiv M$

Vậy ba điểm A, H, M thẳng hàng.

Ví dụ 8: (Lớp 9)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$), AD là đường phân giác, AH là đường cao. Vẽ $DE \perp AB$ tại $E, DF \perp AC$ tại F . Gọi M là giao điểm của BF và CE .

Chứng minh rằng A, M, H thẳng hàng.



Gợi ý: Gọi N là giao điểm của AH và CE, K là giao điểm của BN và AC. Tìm cách chứng minh K, F trùng nhau.

Lời giải

Gọi N là giao điểm của AH và CE, K là giao điểm của BN và AC.

Chứng minh được $\widehat{AHE} = \widehat{AHK}$

Và chứng minh được $AE = AF$, năm điểm A, E, D, H,

F cùng thuộc một đường tròn.

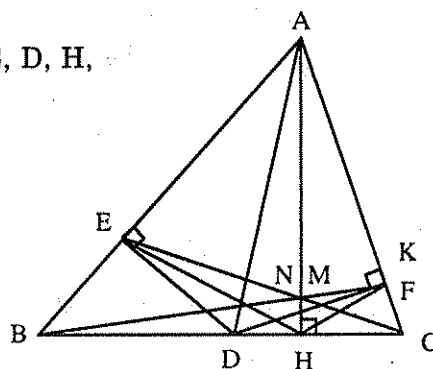
Nên có $\widehat{AHE} = \widehat{AHK}$

Ta có $\widehat{AHK} = \widehat{AHF}$

$\Rightarrow$ Hai tia HK, HF trùng nhau $\Rightarrow K = F$.

Do đó M = N

Vậy A, M, H thẳng hàng.



Ví dụ 9: (Lớp 9)

Cho tam giác ABC cân tại A, đường tròn (O) tiếp xúc AB tại B cắt đường tròn (O') tiếp xúc AC tại C ở D, E. Chứng minh rằng A, D, E thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi E_1 là giao điểm của AD với đường tròn (O), E_2 là giao điểm của AD với đường tròn (O') (E_1, E_2 khác D). Tìm cách chứng minh E_1, E_2 trùng nhau thì có được E_1, E_2, E trùng nhau. Do vậy có A, D, E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi E_1 là giao điểm của AD với (O).

E_2 là giao điểm của AD với (O') (E_1, E_2 khác D)

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AE_1B$ có: $\widehat{BAD}$ (chung), $\widehat{ABD} = \widehat{AE_1B}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle AE_1B$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE_1} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE_1$$

Tương tự có $AC^2 = AD \cdot AE_2$

Mà $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A) $\Rightarrow AB^2 = AC^2$

Do vậy có $AE_1 = AE_2 \Rightarrow E_1 = E_2$.

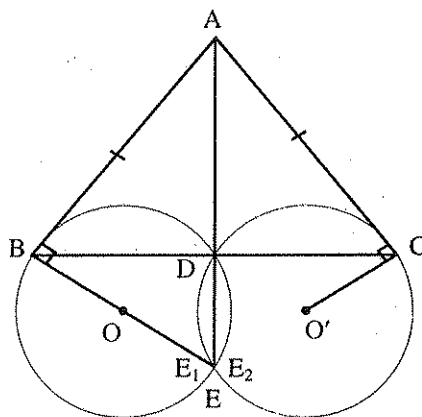
Suy ra E_1, E_2, E trùng nhau

Vậy A, D, E thẳng hàng.

Ví dụ 10: (Lớp 9)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) vẽ đường kính AD. Gọi E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của BD và AC. Các tiếp tuyến tại B, tại C của đường tròn (O) cắt nhau ở M. Chứng minh rằng E, M, F thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi N là giao điểm của tiếp tuyến By của đường tròn (O) với EF. Tìm cách chứng minh NC là tiếp tuyến của đường tròn (O) khi đó có được N, M trùng nhau. Do vậy E, M, F thẳng hàng.



Lời giải

Vẽ Ax , By là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (xem hình vẽ)

Gọi N là giao điểm của By với EF .

Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\triangle AEF$ có EC , FB là hai đường cao cắt nhau tại D

$\Rightarrow D$ là trực tâm của tam giác AEF

$\Rightarrow AD \perp EF$

Mà $AD \perp Ax$

Nên $Ax \parallel EF \Rightarrow \widehat{NEB} = \widehat{xAB}$

$$\widehat{xAB} = \widehat{yBA} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB} \right), \widehat{yBA} = \widehat{NBE} \text{ (đối đỉnh)}$$

Suy ra $\widehat{NEB} = \widehat{NBE} \Rightarrow \triangle NBE$ cân tại $N \Rightarrow NB = NE$

Mặt khác $\widehat{NBE} + \widehat{NBF} = \widehat{NEB} + \widehat{NFB} (= 90^\circ)$

Nên $\widehat{NBF} = \widehat{NFB} \Rightarrow \triangle NBF$ cân tại $N \Rightarrow NB = NF$

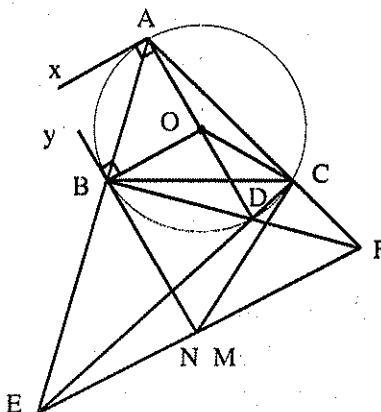
N là trung điểm của EF . Do vậy $NC = \frac{EF}{2} = NB$

Xét $\triangle NBO$ và $\triangle NCO$ có $NB = NC$, NO (cạnh chung) $OB = OC (= R)$

Do đó $\triangle NBO = \triangle NCO$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{NBO} = \widehat{NCO}$

$\widehat{NBO} = 90^\circ$ nên $\widehat{NCO} = 90^\circ \Rightarrow NC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Do vậy $N \equiv M$. Vậy E, M, F thẳng hàng.



6. PHƯƠNG PHÁP 6

a) Phương pháp thêm điểm

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, nếu có thể chúng ta hãy xác định thêm một điểm D khác các điểm A, B, C mà chúng ta chứng minh được hai trong ba bộ ba điểm A, B và D ; A, C và D ; B, C và D thẳng hàng. Từ đó suy ra bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng. Do vậy A, B, C thẳng hàng.

b) Một số ví dụ

Ví dụ 1: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC có AM , BN là hai đường trung tuyến. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A vẽ điểm D sao cho $CD \parallel AM$ và $CD = \frac{2}{3}AM$. Chứng minh rằng ba điểm B, N, D thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi G là giao điểm của AM và BN

Ta có B, G, N thẳng hàng và G là trọng tâm của tam giác ABC . Tìm cách chứng minh G, N, D thẳng hàng. Như vậy, ta có bốn điểm B, G, N, D thẳng hàng.

Lời giải

Gọi G là giao điểm của AM và BN .

Ta có B, G, N thẳng hàng (1)

Và G là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AM$

Mà $CD = \frac{2}{3}AM$ (gt) Nên $AG = CD$

Xét $\triangle NAG$ và $\triangle NCD$ có $AN = CN$,

$AG = CD$, $\widehat{NAG} = \widehat{NCD}$ (so le trong và $AG \parallel CD$)

Do đó $\triangle NAG = \triangle NCD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ANG} = \widehat{CND}$

Ta có $\widehat{GND} = \widehat{ANG} + \widehat{AND} = \widehat{CND} + \widehat{AND} = 180^\circ$

$\Rightarrow G, N, D$ thẳng hàng.

Từ (1) và (2) có B, G, N, D thẳng hàng.

Vậy ba điểm B, N, D thẳng hàng.

Ví dụ 2: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC có BD và CE là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G. Trên nửa mặt phẳng bờ BG có chứa điểm C vẽ điểm M sao cho $BM \parallel CG$, $BM = CG$.

Chứng minh rằng ba điểm A, G, M thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi N là trung điểm của cạnh BC. Tìm cách chứng minh A, G, N thẳng hàng và G, N, M thẳng hàng. Chúng ta sẽ có bốn điểm A, G, N, M thẳng hàng. Do vậy A, G, M thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là trung điểm của cạnh BC

Xét $\triangle ABC$ có BD và CE là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G (gt)

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác ABC.

$\Rightarrow AG$ là đường trung tuyến của tam giác ABC

Do đó A, G, N thẳng hàng (1)

Xét $\triangle NBM$ và $\triangle NCG$ có:

$BN = NC$ (N là trung điểm cạnh BC),

$\widehat{BNM} = \widehat{CNG}$ (so le trong và $MB \parallel CG$), $BM = CG$ (gt).

Do đó $\triangle NBM = \triangle NCG$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BNM} = \widehat{CNG}$

Mà $\widehat{BNM} + \widehat{MNC} = \widehat{BNC} = 180^\circ$

Do đó $\widehat{GNM} = \widehat{CNG} + \widehat{MNC}$

$= \widehat{BNM} + \widehat{MNC} = 180^\circ$

$\Rightarrow G, N, M$ thẳng hàng (2)

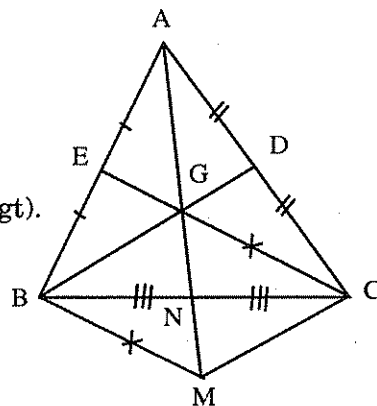
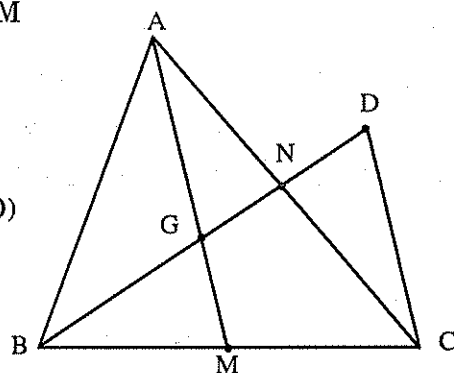
Từ (1) và (2) có A, G, N, M thẳng hàng.

Vậy ba điểm A, G, M thẳng hàng.

Ví dụ 3: (Lớp 7)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm D sao cho $DB \perp AB$ và $DB = \frac{1}{2}AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B lấy điểm E sao cho $CE \perp AC$ và $EC = \frac{1}{2}AB$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB.

B lấy điểm E sao cho $CE \perp AC$ và $EC = \frac{1}{2}AB$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB.



Chứng minh rằng D, M, E thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi N là trung điểm của cạnh AC

Tìm cách chứng minh: D, M, N thẳng hàng và M, N, E thẳng hàng. Các cặp tam giác bằng nhau MBD và MAN, NAM và NCE sẽ giúp chúng ta có được điều cần chứng minh.

Lời giải

Gọi N là trung điểm của cạnh AC, ta có $AN = NC = \frac{1}{2}AC$

Mà M là trung điểm của cạnh AB (gt). Ta có $AM = MB = \frac{1}{2}AB$

Mặt khác $DB = \frac{1}{2}AC$ (gt), $EC = \frac{1}{2}AB$ (gt)

Do đó $DB = AN$, $AM = CE$

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MAN$ có $MB = MA$

$\widehat{MBD} = \widehat{MAN}$ ($= 90^\circ$); $DB = AN$

Do đó $\triangle MBD = \triangle MAN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AMN}$

Ta có $\widehat{BMD} + \widehat{DMA} = \widehat{AMB} = 180^\circ$

Do đó $\widehat{DMN} = \widehat{AMN} + \widehat{DMA} = \widehat{BMD} + \widehat{DMA} = 180^\circ$

$\Rightarrow D, M, N$ thẳng hàng (1)

Xét $\triangle NAM$ và $\triangle NCE$ có: $NA = NC$, $\widehat{NAM} = \widehat{NCE}$ ($= 90^\circ$), $AM = CE$

Do đó $\triangle NAM = \triangle NCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{CNE}$

Ta có $\widehat{ANM} + \widehat{MNC} = \widehat{ANC} = 180^\circ$

Do đó $\widehat{MNE} = \widehat{CNE} + \widehat{MNC} = \widehat{ANM} + \widehat{MNC} = 180^\circ$

$\Rightarrow M, N, E$ thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) có D, M, N, E thẳng hàng

Vậy ba điểm D, M, E thẳng hàng.

Ví dụ 4: (Lớp 8)

Cho hình chữ nhật ABCD có tâm O, điểm M nằm trên đoạn OB, điểm E đối xứng với A qua M, điểm H là chân đường vuông góc kẻ từ E đến BC. Vẽ hình chữ nhật EHCF.

Chứng minh rằng M, H, F thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi I là giao điểm của HF và CE

Ta có H, I, F thẳng hàng. Chúng ta chỉ còn phải chứng minh ba điểm M, I, F thẳng hàng. Chú ý rằng các tam giác ODC, ICF lần lượt cân tại C và I. Điều này giúp chúng ta có được $IF \parallel AC$ và $MI \parallel AC$. Do vậy có được M, I, F thẳng hàng.

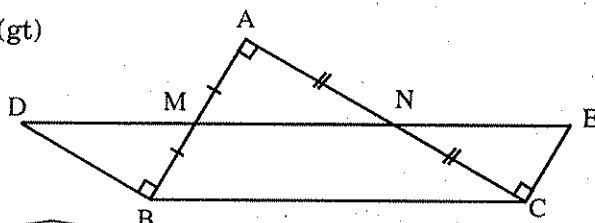
Lời giải

Gọi I là giao điểm của HF và CE, suy ra H, I, F thẳng hàng (1)

Ta sẽ chứng minh M, I, F thẳng hàng.

Vì H thuộc BC nên ta có $\widehat{BCD} + \widehat{HCF} = 180^\circ$

Suy ra D, C, F thẳng hàng.



Mà O, M lần lượt là trung điểm của AC, AE nên

$OM \parallel CE$, suy ra $\widehat{ODC} = \widehat{ICF}$ (2)

Các tam giác ODC và ICF lần lượt cân tại C và I

$\Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODC}; \widehat{ICF} = \widehat{IFC}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{OCD} = \widehat{IFC} \Rightarrow IF \parallel AC$

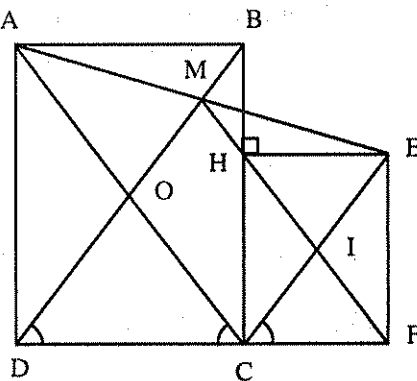
Mặt khác I, M lần lượt là trung điểm của EC, EA nên $MI \parallel AC$

Theo tiên đề O-clit ta có hai đường thẳng IF, IM trùng nhau

Do vậy M, I, F thẳng hàng (4).

Từ (3) và (4) suy ra M, H, I, F thẳng hàng.

Vậy ba điểm M, H, F thẳng hàng.



Ví dụ 5: (Lớp 8)

Cho tam giác ABC. Đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt ở D, E. Gọi N là trung điểm cạnh BC và M là giao điểm của BE và CD.

Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi K là giao điểm của AN và DE.

Chúng ta có được A, K, N thẳng hàng, do vậy nếu chứng minh được K, M, H thẳng hàng thì chúng ta có được A, K, N, M thẳng hàng. Vì vậy có được A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi K là giao điểm của AN và DE. Ta có A, K, N thẳng hàng (1)

Xét $\triangle ABN$ có $DK \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow \frac{DK}{BN} = \frac{AK}{AN}$

Xét $\triangle CAN$ có $KE \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow \frac{KE}{NC} = \frac{AK}{AN}$

Ta có $\frac{DK}{BN} = \frac{KE}{NC} \left(= \frac{AK}{AN} \right)$

Mà $BN = NC$ (N là trung điểm BC). Nên $DK = KE = \frac{DE}{2}$

Do vậy $\frac{DK}{NC} = \frac{DE}{BC}$ (2)

Xét $\triangle MDE$ và $\triangle MCB$ có: $\widehat{MDE} = \widehat{MCB}$ (so le trong và $DE \parallel BC$); $\widehat{DME} = \widehat{CMB}$ (đối đỉnh)

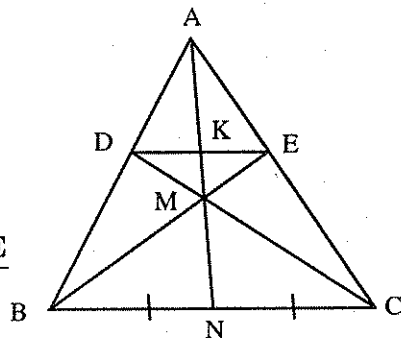
Do đó $\triangle MDE = \triangle MCB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MD}{MC} = \frac{DE}{BC}$ (3)

Từ (2) và (3) có $\frac{DK}{NC} = \frac{MD}{MC}$

Xét $\triangle MDK$ và $\triangle MCN$ có: $\frac{DK}{NC} = \frac{MD}{MC}$; $\widehat{MDK} = \widehat{MCN}$ (so le trong và $DE \parallel BC$)

Do đó $\triangle MDK \sim \triangle MCN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DMK} = \widehat{CMN}$

Ta có $\widehat{DMK} + \widehat{KMC} = \widehat{DMC} = 180^\circ$



$$\text{Nên } \widehat{KMN} = \widehat{CMN} + \widehat{KMC} = \widehat{DMK} + \widehat{KMC} = 180^\circ$$

$\Rightarrow K, M, N$ thẳng hàng (4)

Từ (1) và (4) có A, K, N, M thẳng hàng.

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Ví dụ 6: (Lớp 8)

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, AD . Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng PN . Chứng minh rằng ba điểm M, O, E thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi K là trung điểm cạnh CD . Dễ thấy tứ giác $MNKP$ là hình bình hành, vì vậy có được M, E, K thẳng hàng. Chỉ còn phải chứng minh M, O, K thẳng hàng.

Các cặp tam giác đồng dạng OAB và OCD , OAM và OCK sẽ giúp ta có được điều đó.

Lời giải

Gọi K là trung điểm cạnh CD

Xét $\triangle ABD$ có P, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD (gt)

Do PM là đường trung bình của tam giác ABD

$$\Rightarrow PM \parallel BD \text{ và } PM = \frac{1}{2}BD$$

Tương tự có KN là đường trung bình của tam giác OBD

$$\Rightarrow KN \parallel BD \text{ và } KN = \frac{1}{2}BD$$

$$\text{Ta có } PM \parallel BD \text{ và } KN \parallel BD \Rightarrow PM \parallel KN \text{ và } PM = KN \left(= \frac{1}{2}BD \right)$$

Tứ giác $MNKP$ có $PM \parallel KN$ và $PM = KN$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MNKP$ là hình bình hành.

Mà E là trung điểm của đoạn thẳng PN (gt)

Do đó E là trung điểm của đoạn thẳng MK

$\Rightarrow M, E, K$ thẳng hàng (1)

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OCD$ có: $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ (so le trong và $AB \parallel CD$), $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (đối đỉnh)

$$\text{Do đó } \triangle OAB \sim \triangle OCD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$$

$$M \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow AM = \frac{AB}{2}$$

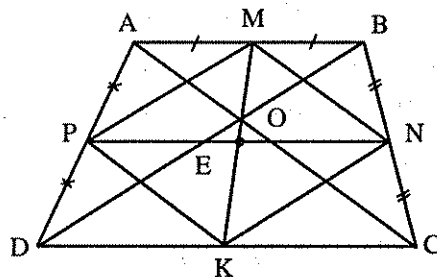
$$N \text{ là trung điểm của } CB \Rightarrow CN = \frac{CD}{2}$$

$$\text{Nên } \frac{AM}{CN} = \frac{AB}{CD}. \text{ Vậy } \frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CN}$$

$$\text{Xét } \triangle OAM \text{ và } \triangle OCN \text{ có: } \widehat{OAM} = \widehat{OCN} \text{ (so le và } AB \parallel CD), \frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CN} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{Do đó } \triangle OAM \sim \triangle OCN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{CON}$$

$$\text{Mà } \widehat{AOM} + \widehat{MOC} = \widehat{AOC} = 180^\circ$$



$$\text{Do đó } \widehat{MOK} = \widehat{COK} + \widehat{MOC} = \widehat{AOM} + \widehat{MOC} = 180^\circ$$

$\Rightarrow M, O, K$ thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) có M, E, K, O thẳng hàng. Vậy M, O, E thẳng hàng.

Ví dụ 7: (Lớp 9)

Cho tam giác nhọn ABC , AD là đường cao, H là trực tâm. Vẽ $DE \perp AB$ tại E , $DF \perp AC$ tại F , $DK \perp HB$ tại K . Chứng minh rằng ba điểm E, F, K thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $DI \perp HC$ tại I

Ta có $\widehat{BED} = \widehat{BKD} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $BEKD$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{EBD} + \widehat{EKD} = 180^\circ$$

$$\text{Ta có } \widehat{HKD} + \widehat{HID} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $KHID$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{DKI} = \widehat{DHI}$$

Mà $\widehat{DHI} = \widehat{EBD}$ (cùng phụ với góc HCD)

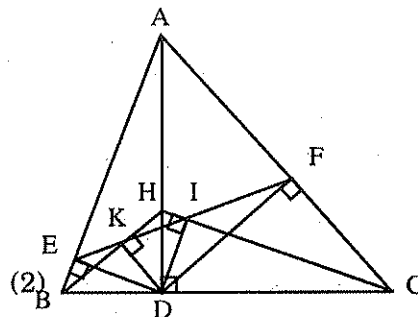
$$\text{Nên } \widehat{DKI} + \widehat{EKD} = \widehat{EBD} + \widehat{EKD} = 180^\circ$$

$\Rightarrow E, K, I$ thẳng hàng (1)

Chứng minh tương tự có F, K, I thẳng hàng

Từ (1) và (2) có E, K, I, F thẳng hàng.

Vậy ba điểm E, F, K thẳng hàng.



Ví dụ 8: (Lớp 9)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$), H là trực tâm tam giác ABC . Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) ở K ($K \neq A$). Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng M, H, K thẳng hàng.

Gợi ý: Vẽ đường kính AD của đường tròn (O) , do vậy ta có $\widehat{AKD} = 90^\circ$, giúp dễ có được D, H, K thẳng hàng. Tiếp tục hãy tìm cách chứng minh D, M, H thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ đường kính AD của đường tròn (O)

Ta có $\widehat{AKD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow DK \perp AK$$

Và $\widehat{AKH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow HK \perp AK$$

Do đó D, H, K thẳng hàng (1)

Ta có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

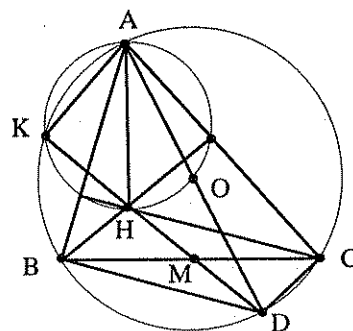
$$\Rightarrow DC \perp AC$$

Mà $BH \perp AC$ (H là trực tâm của tam giác ABC)

Do đó $BH \parallel DC$

Tương tự có $CH \parallel BD$

Do vậy tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.



Mà M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của HD

$\Rightarrow D, M, H$ thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) có D, H, M, K thẳng hàng. Vậy M, H, K thẳng hàng.

Ví dụ 9: (Lớp 9)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B (O, O' nằm khác phía đối với AB). Vẽ CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ($C \in (O), D \in (O')$, A, C, D nằm cùng phía đối với OO'). Đường thẳng C song song với AD cắt đường thẳng qua D song song với AC ở E. Chứng minh ba điểm A, B, E thẳng hàng.

Gợi ý: Gọi M là giao điểm của AB và CD. Tìm cách chứng minh E, M, A thẳng hàng.

Dễ thấy tứ giác ACED là hình bình hành, “chìa khóa” bài toán là chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng CD.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của AB và CD.

Ta có A, B, M thẳng hàng (1)

Xét $\triangle MCA$ và $\triangle MBC$ có: $\widehat{CMA}$ (chung), $\widehat{MCA} = \widehat{MBC}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$$\text{Do đó } \triangle MCA \sim \triangle MBC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA \cdot MB$$

Chứng minh tương tự cũng có:

$$\triangle MDA \sim \triangle MBD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MD} \Rightarrow MD^2 = MA \cdot MB$$

Ta có $MC^2 = MD^2 (= MA \cdot MB)$

$\Rightarrow MC = MD$

Tứ giác ACED có $AC \parallel DE$ (gt), $CE \parallel AD$ (gt)

Do đó tứ giác ACED là hình bình hành

M là trung điểm của đoạn thẳng CD.

Do đó M là trung điểm của đoạn thẳng EA $\Rightarrow E, M, A$ thẳng hàng (2)

Từ (1), (2) ta có E, M, A, B thẳng hàng.

Vậy A, B, E thẳng hàng.

Ví dụ 10: (Lớp 9)

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là giao điểm của AB, CD; F là giao điểm của AC, BD. Các tiếp tuyến với (O) tại B, C cắt nhau tại M.

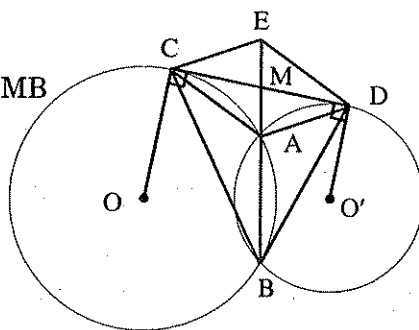
Chứng minh E, M, F thẳng hàng

Gợi ý: Gọi K là giao điểm của đường tròn qua B, D, E và đường tròn qua F, D, C (K khác D). Chúng ta sẽ tìm cách chứng minh K, E, M thẳng hàng và K, F, M thẳng hàng để có được K, E, M, F thẳng hàng. Do vậy E, M, F thẳng hàng.

Lời giải

Gọi K là giao điểm của đường tròn qua B, D, E và đường tròn qua F, D, C ($K \neq D$)

Ta có $\widehat{BKC} = \widehat{BKD} - \widehat{DKC} = 180^\circ - \widehat{AED} - \widehat{DFC}$ (vì hai tứ giác BKED, DKFC nội tiếp)



Mặt khác $\widehat{AED} + \widehat{DFC}$

$$= \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{BC}) + \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD}) = \frac{1}{2}(\widehat{BADC} - \widehat{BC}) = \widehat{MBC}$$

Suy ra $\widehat{AED} + \widehat{DFC} = \widehat{MBC}$

$$\Rightarrow \widehat{BKC} + \widehat{BMC} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BKCM nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{BCM}$$

Ta lại có:

$$\widehat{BCM} = \widehat{BDE} \text{ (tính chất của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)}$$

$$\widehat{BDE} = \widehat{BKE} \text{ (vì tứ giác BKDE nội tiếp)}$$

Suy ra $\widehat{BKM} = \widehat{BKE} \Rightarrow$ hai tia KE, KM trùng nhau

$$\Rightarrow K, E, M \text{ thẳng hàng} \quad (1)$$

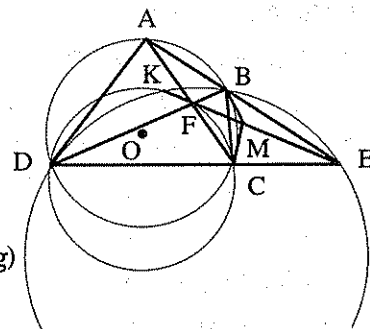
$$\text{Tương tự có } \widehat{CKF} = \widehat{CKM}$$

Do đó hai tia KF, KM trùng nhau

$$\Rightarrow K, M, F \text{ thẳng hàng} \quad (2)$$

Từ (1), (2) có K, E, M, F thẳng hàng.

Vậy E, M, F thẳng hàng.



BÀI ĐỌC THÊM

ĐỊNH LÝ MÊ-NÊ-LA-UYT (MENELAUS) VỚI BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Ở phần 1 của quyển sách này, chúng tôi đã trình bày các phương pháp thường sử dụng để chứng minh ba điểm thẳng hàng, đó là:

1. Phương pháp sử dụng góc "bù"
2. Phương pháp sử dụng tiên đề về đường thẳng song song.
3. Phương pháp sử dụng tiên đề về đường thẳng vuông góc.
4. Phương pháp sử dụng hai tia trùng nhau.
5. Phương pháp sử dụng hình duy nhất.
6. Phương pháp thêm điểm.

Một số bài toán hình học về chứng minh ba điểm thẳng hàng, vận dụng định lý cổ điển, định lý Mê-nê-lê-uyt (Menelaus) có lời giải rất đẹp. Tuy nhiên chỉ thích hợp với học sinh THPT vì đối với học sinh THCS không được vận dụng định lý này để giải bài toán, do vậy học sinh phải chứng minh định lý rồi mới được vận dụng. Lời giải của bài toán này sẽ dài dòng.

Tôi xin được giới thiệu cùng các bạn đọc định lý Mê-nê-lê-uyt (Menelaus) cùng với các bài toán áp dụng để các bạn tham khảo.

• ĐỊNH LÝ

Cho tam giác ABC và ba điểm A', B' và C' nằm trên các đường thẳng BC, AC và AB sao cho, hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm trên nằm trên phần kéo dài của một cạnh còn hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của tam giác.

Điều kiện cần và đủ để A', B', C' thẳng hàng là $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

Chứng minh

Phần thuận

Cách 1: Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt A'C' tại T.

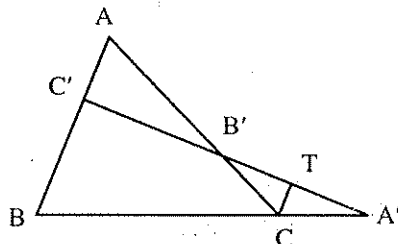
Xét $\triangle A'B'C'$ có $CT \parallel B'C'$

$$\Rightarrow \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{C'B}{CT} \quad (\text{hệ quả của định lý Ta-lét})$$

Xét $\triangle AB'C'$ có $CT \parallel AC'$

$$\Rightarrow \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{CT}{C'A} \quad (\text{hệ quả của định lý Ta-lét})$$

$$\text{Do đó } \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{C'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{C'B}{CT} \cdot \frac{CT}{C'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$



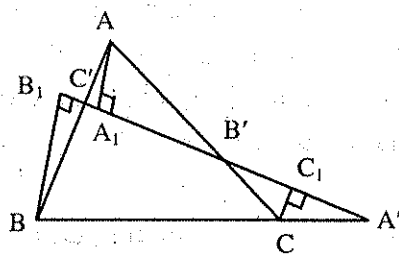
Cách 2: Vẽ $AA_1 \perp A'B'$, $BB_1 \perp A'B'$, $CC_1 \perp CC' \Rightarrow AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$

$$\text{Xét } \triangle A'BB_1 \text{ có } CC_1 \parallel BB_1 \Rightarrow \frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1}$$

$$\text{Xét } \triangle AB'A_1 \text{ có } CC_1 \parallel AA_1 \Rightarrow \frac{B'C}{B'A} = \frac{CC_1}{AA_1}$$

$$\text{Xét } \triangle BB_1C' \text{ có } BB_1 \parallel AA_1 \Rightarrow \frac{C'A}{C'B} = \frac{AA_1}{BB_1}$$

$$\text{Do đó } \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{BB_1}{CC_1} \cdot \frac{CC_1}{AA_1} \cdot \frac{AA_1}{BB_1} = 1.$$



Phần đảo

Cho tam giác ABC và ba điểm A', B', C'. Giả sử ba điểm A', B', C' nằm trên các đường thẳng BC, AC và AB sao cho hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm nằm trên phần kéo dài của một cạnh còn hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của tam giác thỏa mãn $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

Chúng ta cần chứng minh A', B', C' thẳng hàng.

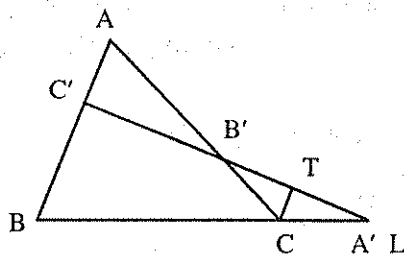
Gọi L là giao điểm của B'C' và BC.

Xét tam giác ABC có $C' \in AB$, $B' \in AC$, $L \in BC$

và C', B', L thẳng hàng

$$\text{Từ chứng minh trên ta có: } \frac{LB}{LC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

$$\text{Mà } \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$



$$\text{Nên } \frac{LB}{LC} = \frac{A'B}{A'C} \Rightarrow \frac{LB}{BC} = \frac{A'B}{BC}$$

$\Rightarrow LB = A'B \Rightarrow L, A'$ trùng nhau. Vậy A', B', C' thẳng hàng.

• BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: (Lớp 8) Cho hai tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của cạnh BC, BE là đường phân giác, đường phân giác ngoài tại C của tam giác cắt đường thẳng AB ở F. Chứng minh ba điểm E, M, F thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có BE là đường phân giác (gt)

$$\Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{AB}{BC} \quad (1)$$

Xét $\triangle ABC$ có CF là đường phân giác ngoài (gt)

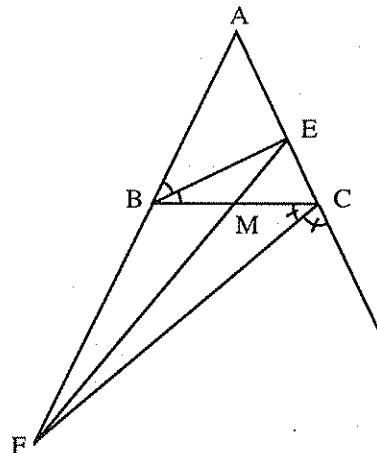
$$\Rightarrow \frac{FA}{FB} = \frac{AB}{BC} \quad (2)$$

Từ (1), (2) có: $\frac{EA}{EC} = \frac{FA}{FB}$

Xét $\triangle ABC$ có $F \in AB, M \in BC, E \in AC$

và có $\frac{EA}{EC} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{FB}{FA} = \frac{FA}{FB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{FB}{FA} = 1$

Do vậy E, M, F thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt).



Bài 2: (Lớp 8) Cho tam giác ABC có các đường phân giác BE, CF. Đường phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại D. Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có AD là đường phân giác ngoài, BE và CF là các đường phân giác.

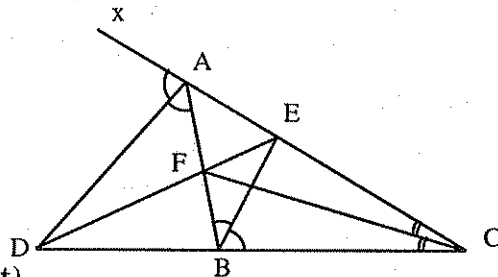
Ta có:

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}; \frac{FB}{FA} = \frac{EC}{AC}; \frac{EA}{EC} = \frac{AB}{BC}$$

Xét $\triangle ABC$ có $D \in BC, F \in AB, E \in AC$

Và có $\frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$

Vậy có D, E, F thẳng hàng (Định lí Mê-nê-la-uyt)



Bài 3: (Lớp 8) Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Sao cho AA', BB', CC' đồng quy tại M. Gọi A_1 là giao điểm của BC và $B'C'$, B_1 là giao điểm của AC và $C'A'$, C_1 là giao điểm của AB và $A'B'$. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle MBC$ có $A_1 \in BC, C' \in MC, B' \in MB$ và B', A_1, C' thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{C'C}{C'M} \cdot \frac{B'M}{BB'} = 1 \quad (1) \text{ (định lí Mê-nê-la-uyt)}$$

Xét $\triangle MAC$ có $B_1 \in AC$, $A' \in MA$, $C' \in MC$ và B_1, A', C' thẳng hàng.

$$\Rightarrow \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A'A}{A'M} \cdot \frac{C'M}{C'C} = 1 \quad (2)$$

Xét $\triangle MAB$ có $C_1 \in AB$, $B' \in MB$, $A' \in MA$ và C_1, B', A' thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B'B}{B'M} \cdot \frac{A'M}{A'A} = 1 \quad (3)$$

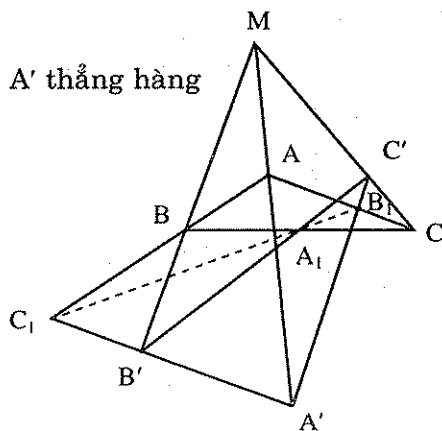
Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

Xét $\triangle ABC$ có $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$

$$\text{và } \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

Vậy A_1, B_1, C_1 thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt)



Bài 4: (Lớp 8) Cho tứ giác ABCD, hai đường thẳng song song với AC lần lượt cắt các cạnh AB, BC, DA, CD lần lượt ở G, H, E, F (các giao điểm này không trùng với trung điểm của các cạnh của tứ giác). Gọi M là giao điểm của EG và FH.

Chứng minh rằng ba điểm M, H, F thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có $GH \parallel AC \Rightarrow \frac{GA}{GB} = \frac{HC}{HB}$ (định lí Ta-lét)

Xét $\triangle DAC$ có $EF \parallel AC \Rightarrow \frac{ED}{EA} = \frac{FD}{FC}$ (định lí Ta-lét)

Xét $\triangle ABD$ có:

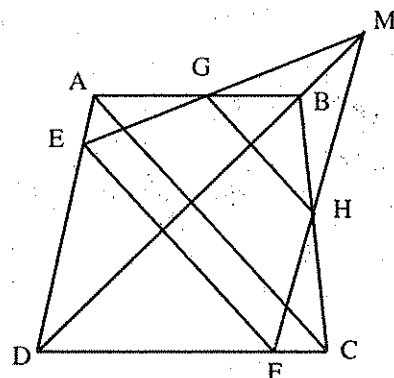
$G \in AB$, $M \in BD$, $E \in AD$ và E, G, M thẳng hàng.

$$\Rightarrow \frac{GA}{GB} \cdot \frac{MB}{MD} \cdot \frac{ED}{EA} = 1 \quad (\text{định lí Mê-nê-la-uyt})$$

Xét $\triangle BDC$ có $F \in CD$, $H \in BC$, $M \in BD$

$$\Rightarrow \frac{FD}{FC} \cdot \frac{HC}{HB} \cdot \frac{MB}{MD} = \frac{ED}{EA} \cdot \frac{GA}{GB} \cdot \frac{MB}{MD} = 1$$

Do đó M, H, F thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt).



Bài 5: (Lớp 8) Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, D sao cho $\frac{BE}{AE} = \frac{1}{2}$; $\frac{AD}{CD} = \frac{1}{2}$. Các đường thẳng BD và CE cắt nhau tại M. Đường trung trực của đoạn thẳng CM cắt BC ở K. Gọi N là điểm đối xứng của C qua K.

Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi F là điểm trên cạnh BC sao cho $\frac{CF}{BF} = \frac{1}{2}$. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AF với BD, CE.

$$\triangle ABD = \triangle BCE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BCE}$$

Ta có $\widehat{MBC} + \widehat{BCE} = \widehat{MBC} + \widehat{ABD} = \widehat{ABC} = 60^\circ$

Mà $\widehat{PMQ} = \widehat{MBC} + \widehat{BCE}$ ($\widehat{PMQ}$ là góc ngoài của $\triangle MBC$), nên $\widehat{PMQ} = 60^\circ$

Chứng minh tương tự có $\widehat{MPQ} = 60^\circ$. Do đó $\triangle MPQ$ đều

Xét $\triangle ACQ$ có: $D \in AC$, $P \in AC$, $P \in AQ$, $M \in CQ$ và D, P, M thẳng hàng.

$$\Rightarrow \frac{PA}{PQ} \cdot \frac{MQ}{MC} \cdot \frac{DC}{DA} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{PA}{PQ} \cdot \frac{PQ}{MC} = \frac{2}{1} = 1 \Rightarrow PA = \frac{MK}{2}$$

Mặt khác $\triangle MBC = \triangle KCA$ (g.c.g) $\Rightarrow MC = AQ$

$$\text{Ta có } PA = \frac{AQ}{2} \Rightarrow PA = PQ$$

$\triangle MAQ$ có MP là đường trung tuyến

Và $MP = \frac{AQ}{2}$ nên tam giác MAQ vuông tại M

$$\Rightarrow AM \perp CE \quad (1)$$

Xét $\triangle MCN$ có Q, K lần lượt là trung điểm của MC, NC

$\Rightarrow QK$ là đường trung bình của tam giác $MCN \Rightarrow MN \parallel KQ$

Mà $KQ \perp CE$. Do đó $MN \perp CE$ (2)

Từ (1), (2) có AM, MN trùng nhau

Vậy A, M, N thẳng hàng.

Bài 6: (Lớp 8) Cho tam giác ABC , một đường thẳng d cắt đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua các điểm D, E, F của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có $B_1 \in AC, C_1 \in AB$,

$A_1 \in BC$ và A_1, B_1, C_1 thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1 \quad (1)$$

Từ giả thiết, ta có

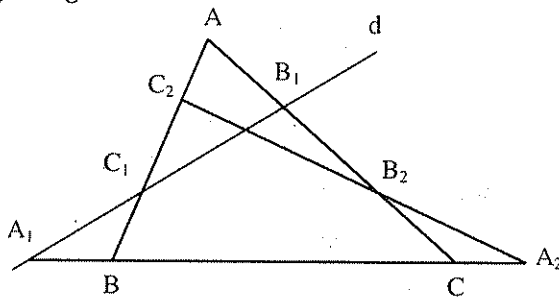
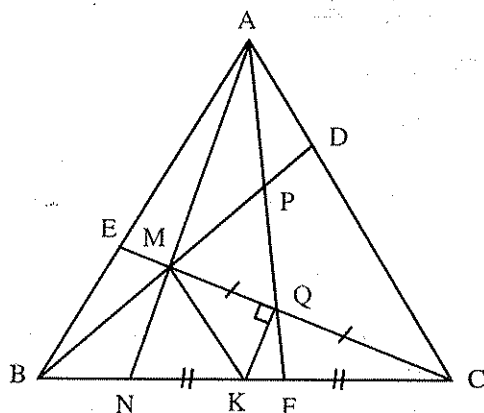
$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_2C}{A_2B} \quad (2)$$

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{B_2A}{B_2C} \quad (3)$$

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C_2B}{C_2A} \quad (4)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) và (4) ta có } \frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} = 1 \Rightarrow \frac{B_2A}{B_2C} \cdot \frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} = 1$$

Vậy A_2, B_2, C_2 thẳng hàng (định lý Mê-nê-la-uyt)



Bài 7: (Lớp 8) Trên các cạnh AB, AC của tam giác ABC vuông tại A, dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABEF, ACGI. BG cắt đường cao AH của tam giác ABC tại O. Chứng minh rằng ba điểm C, O, E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi a, b lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông ABEF, ACGI

Gọi M là giao điểm của EB và CG.

Ta có ABMC là hình chữ nhật.

Gọi N là giao điểm của AH và BM, K là giao điểm của AC và BG

$$\triangle ABC \sim \triangle BNA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{BN} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{Nên } BN = \frac{a^2}{b}$$

$$\triangle KCG \text{ có } AB \parallel CG \Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{AB}{CG} \Rightarrow \frac{AK}{AK+CK} = \frac{AB}{AB+CG} \Rightarrow AK = \frac{ab}{a+b}$$

$$\triangle OAK \text{ có } BN \parallel AK \Rightarrow \frac{BO}{KA} = \frac{BN}{AK}$$

$$\text{Nên } \frac{BO}{KO} = \frac{a(a+b)}{b^2} \Rightarrow \frac{BO}{BK} = \frac{a(a+b)}{a^2+ab+b^2}$$

$\triangle KCG \text{ có } AB \parallel CG$

$$\Rightarrow \frac{BK}{GK} = \frac{AB}{CG}$$

$$\Rightarrow \frac{BK}{BK+GK} = \frac{AB}{AB+CG}$$

$$\Rightarrow \frac{BK}{BG} = \frac{a}{a+b}$$

$$\text{Nên } \frac{BO}{BG} = \frac{BO}{BK} \cdot \frac{BK}{BG} = \frac{a^2}{a^2+ab+b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{BG-BO}{BO} = \frac{a^2+ab+b^2-a^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{GO}{BO} = \frac{b(a+b)}{a^2}$$

$$\text{Xét } \triangle MBG \text{ có } E \in BM, O \in BG, C \in MG \text{ và } \frac{EB}{EM} \cdot \frac{CM}{CG} \cdot \frac{GO}{BO} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b(a+b)}{a^2} = 1$$

Vậy C, O, E thẳng hàng (định lý Mê-nê-la-uyt).

Bài 8: (Lớp 8) Cho tứ giác ABCD có AB cắt CD tại M, BC cắt AD ở N. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AC, BD, MN. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

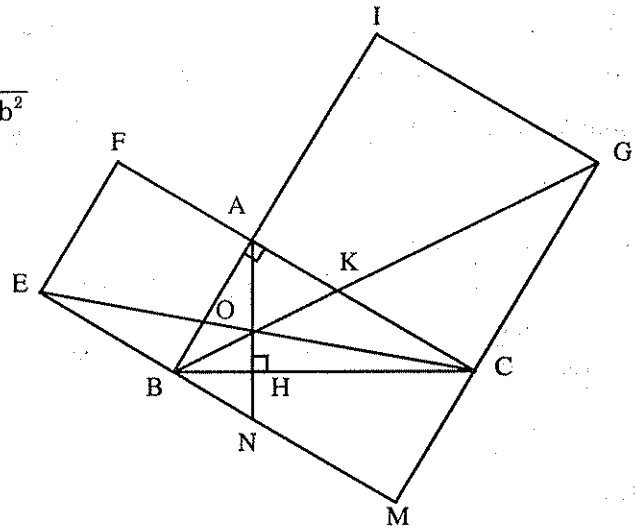
Lời giải

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của NB, NA, AB

Ta có A_1K là đường trung bình của tam giác NBM $\Rightarrow A_1K \parallel BM$.

B_1K là đường trung bình của tam giác NAM $\Rightarrow B_1K \parallel BM$

Do đó A_1K, B_1K trùng nhau (tiên đề Ơ-clít) $\Rightarrow A_1, B_1, K$ thẳng hàng.



Ta có $K \in A_1B_1$. Tương tự $J \in A_1C_1$, $I \in B_1C_1$

$$\text{Ta có } IC_1 = \frac{BC}{2}; IB_1 = \frac{CN}{2}; KB_1 = \frac{AM}{2}; KA_1 = \frac{BM}{2};$$

$$JA_1 = \frac{DN}{2}; JC_1 = \frac{AD}{2}$$

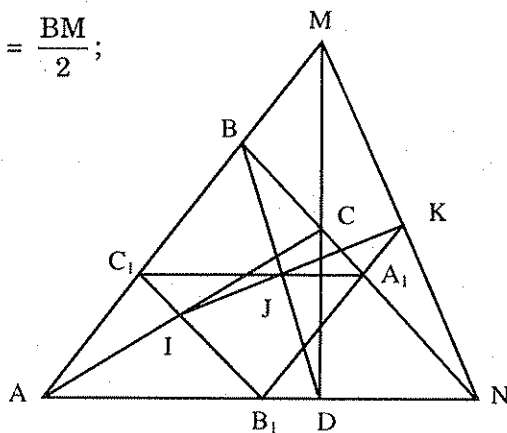
Xét $\triangle NAB$ có $M \in AB$, $C \in NB$, $D \in AN$

Và D, C, M thẳng hàng.

$$\Rightarrow \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BC}{CN} \cdot \frac{DN}{AD} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CN} \cdot \frac{AM}{BM} \cdot \frac{DN}{AD} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{IC_1}{IB_1} \cdot \frac{KB_1}{KA_1} \cdot \frac{JA_1}{JC_1} = 1$$



Xét $\triangle A_1B_1C_1$ có $I \in B_1$, $C_1, K \in A_1B_1$, $J \in A_1C_1$ và $\frac{IC_1}{IB_1} \cdot \frac{KB_1}{KA_1} \cdot \frac{JA_1}{JC_1} = 1$

Vậy I, J, K thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt)

Bài 9: (Lớp 8) Cho tứ giác ABCD có AC cắt BD ở M, AB cắt CD ở E, AD cắt BC ở F. Gọi N là điểm trên đoạn thẳng EF sao cho $\frac{NA}{NC} = \frac{MA}{MC}$. Chứng minh rằng M, C, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N' là giao điểm của AC với EF

Xét $\triangle AEC$ có $M \in AC$, $B \in AE$, $D \in EC$ và B, M, D thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} \cdot \frac{DC}{DE} \cdot \frac{BE}{BA} = 1 \text{ (định lí Mê-nê-la-uyt)}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{DE \cdot BA}{DC \cdot BE} \quad (1)$$

Xét $\triangle ABC$ có $E \in AB$, $N' \in AC$, $F \in BC$

và E, N', F thẳng hàng.

$$\Rightarrow \frac{EA}{EB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{N'C}{N'A} = 1 \text{ (định lí Mê-nê-la-uyt)}$$

$$\Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{EA \cdot FB}{EB \cdot FC} \quad (2)$$

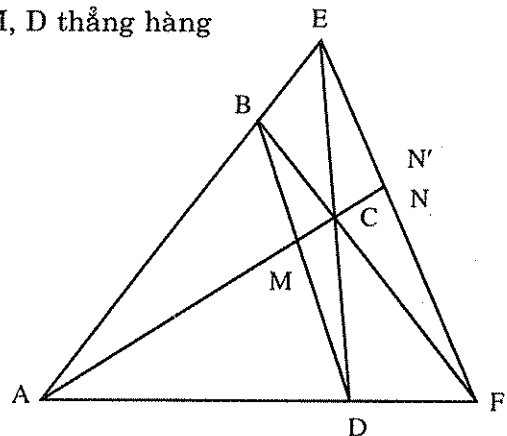
Xét $\triangle BEC$ có $A \in BE$, $D \in CE$, $F \in BC$ và A, D, F thẳng hàng.

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{DC}{DE} = 1 \Rightarrow \frac{DE \cdot BA}{DC \cdot BE} = \frac{EA \cdot FB}{EB \cdot FC} \quad (3)$$

$$\text{Vì } \frac{NA}{NC} = \frac{MA}{MC} \text{ (gt)} \quad (4)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) và (4) có } \frac{N'A}{N'C} = \frac{NA}{NC} \Rightarrow N' = N$$

Vậy ba điểm M, C, N thẳng hàng.



Bài 10: (Lớp 8) Trên một đường thẳng lấy các điểm A_1, B_1, C_1 trên một đường thẳng khác lấy các điểm A_2, B_2, C_2 . Các đường thẳng A_1B_2 và A_2B_1 cắt nhau ở C , các đường thẳng B_1C_2 và B_2C_1 cắt nhau ở A , các đường thẳng A_1C_2 và A_2C_1 cắt nhau ở B .

Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Gọi A_3 là giao điểm của A_1B_2 và A_2C_1 , B_3 là giao điểm của A_1B_2 và B_1C_2 , C_3 là giao điểm của B_1C_2 và C_1A_2 .

Xét $\Delta A_3B_3C_3$ có $A \in B_3C_3$, $B_2 \in A_3B_3$,

$C_1 \in C_3A_3$ và A, B_2, C_1 thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{AB_3}{AC_3} \cdot \frac{C_1C_3}{C_1A_3} \cdot \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = 1 \text{ (định lí Mê-nê-la-uyt)} \quad (1)$$

Xét $\Delta A_3B_3C_3$ có $B \in A_3C_3$, $C_2 \in B_3C_3$,

$A_1 \in A_3B_3$ và B, C_2, A_1 thẳng hàng.

$$\Rightarrow \frac{BC_3}{BA_3} \cdot \frac{A_1A_3}{A_1B_3} \cdot \frac{C_2B_3}{C_2C_3} = 1 \text{ (định lí Mê-nê-la-uyt)} \quad (2)$$

Xét $\Delta A_3B_3C_3$ có $A_1 \in A_3B_3$, $B_1 \in B_3C_3$; $C_1 \in A_3C_3$ và A_1, B_1, C_1 thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{A_1B_3}{A_1A_3} \cdot \frac{C_1A_3}{C_1C_1} \cdot \frac{B_1C_3}{B_1B_3} = 1 \text{ (định lí Mê-nê-la-uyt)} \quad (3)$$

Xét $\Delta A_3B_3C_3$ có $A_2 \in A_3B_3$, $B_2 \in B_3C_3$; $C_2 \in A_3C_3$ và A_2, B_2, C_2 thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{A_2A_3}{A_2C_3} \cdot \frac{C_2C_3}{C_2B_3} \cdot \frac{B_2B_3}{B_2A_3} = 1 \text{ (định lí Mê-nê-la-uyt)} \quad (4)$$

Xét $\Delta A_3B_3C_3$ có $C \in A_3B_3$, $A_2 \in B_3C_3$; $B_1 \in A_3C_3$ và C, A_2, B_1 thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{CA_3}{CB_3} \cdot \frac{B_1B_3}{B_1C_3} \cdot \frac{A_2C_3}{A_2A_3} = 1 \quad (5)$$

Từ (1), (2), (3), (4) và (5) ta có $\frac{AB_3}{AC_3} \cdot \frac{BC_3}{BA_3} \cdot \frac{CA_3}{CB_3} = 1$

Xét $\Delta A_3B_3C_3$ có $A \in B_3C_3$; $B \in A_3C_3$, $C \in A_3B_3$ và $\frac{AB_3}{AC_3} \cdot \frac{BC_3}{BA_3} \cdot \frac{CA_3}{CB_3}$

Do đó A, B, C thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt)

Bài 11: (Lớp 9) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) điểm M thuộc đường tròn (O) . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M xuống BC, AB, CA .

Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

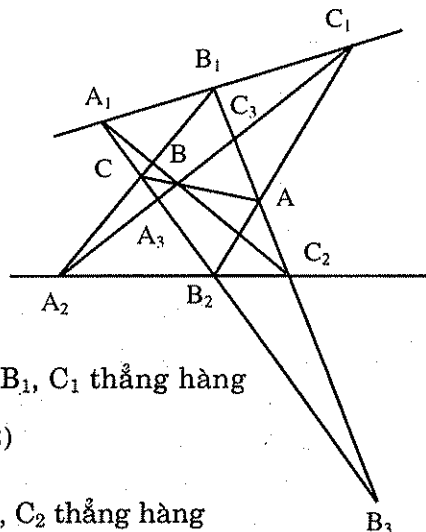
Lời giải

Không mất tính tổng quát ta xét M thuộc cung BC không chứa A .

Xét ΔMAE và ΔMCD có $\widehat{MEA} = \widehat{MDC} (= 90^\circ)$

$\widehat{MAE} = \widehat{MCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MB)

Do đó $\Delta MAE \sim \Delta MCD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EA}{DC} = \frac{MA}{MC}$



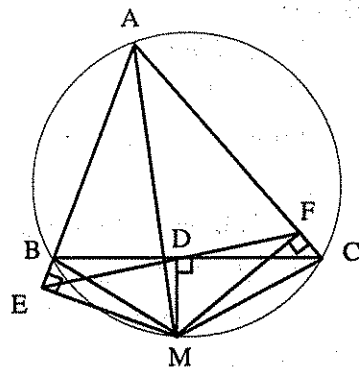
$$\text{Tương tự } \triangle MBD \sim \triangle MAF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DB}{FA} = \frac{MB}{MA}$$

$$\triangle MFC \sim \triangle MEB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{FC}{EB} = \frac{MC}{MB}$$

$$\text{Do đó } \frac{EA}{DC} \cdot \frac{DB}{FA} \cdot \frac{FC}{EB} = \frac{MA}{MC} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{MC}{MB} \Rightarrow \frac{EA}{EB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có } E \in AB, D \in BC, F \in AC \text{ và } \frac{EA}{EB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1$$

Vậy B, E, F thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt)



Bài 12: (lớp 9)

Cho ba đường tròn có bán kính đôi một khác nhau và ở ngoài nhau.

Chứng minh rằng giao điểm của các tiếp tuyến chung ngoài của từng cặp đường tròn cùng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

Gọi ba đường tròn là $(O_1; r_1)$; $(O_2; r_2)$; $(O_3; r_3)$

giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1; r_1)$ và $(O_2; r_2)$ là C; của $(O_1; r_1)$ và

$(O_3; r_3)$ là B; của $(O_3; r_3)$ và $(O_2; r_2)$ là A.

Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài của

(O_1) , (O_2) ($M \in (O_1)$, $N \in (O_2)$)

Dễ thấy O_1, O_2, C thẳng hàng.

Ta có $O_1N \perp CN$, $O_2M \perp CN \Rightarrow O_1N \parallel O_2M$

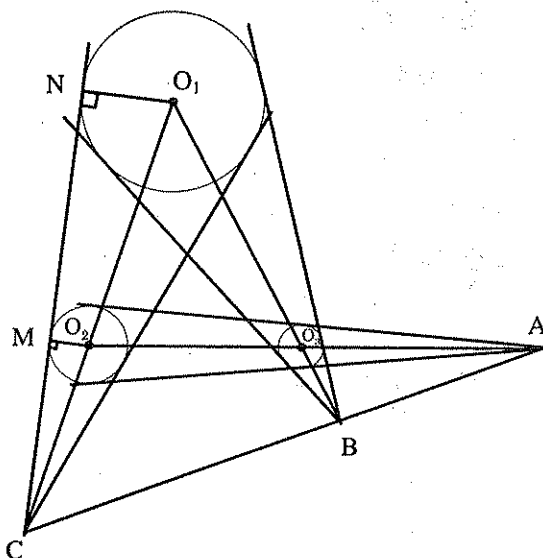
$$\triangle CNO_1 \text{ có } O_1N \parallel O_2M \Rightarrow \frac{CO_1}{CO_2} = \frac{O_1N}{O_2M} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{AO_2}{AO_3} = \frac{r_2}{r_3}; \frac{BO_3}{BO_1} = \frac{r_3}{r_1}$$

$$\frac{CO_1}{CO_2} \cdot \frac{AO_2}{AO_3} \cdot \frac{BO_3}{BO_1} = \frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} = 1$$

$$\text{Xét } \triangle O_1O_2O_3 \text{ có } A \in O_2O_3, B \in O_1O_3, C \in O_1O_2 \text{ và } \frac{AO_2}{AO_3} \cdot \frac{BO_3}{BO_1} \cdot \frac{CO_1}{CO_2} = 1$$

Vậy A, B, C thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt).



Bài 13: (lớp 9) Cho hai đường tròn (O_1) , (O_2) cắt nhau ở hai điểm A, B. Các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O_1) cắt nhau ở K. M là điểm nằm trên đường tròn (O_1) (M khác A, B). AM cắt đường tròn (O_2) ở P ($P \neq A$); KM cắt đường tròn (O_1) ở C ($C \neq M$); AC cắt đường tròn (O_2) ở Q ($Q \neq A$). Gọi L là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Chứng minh rằng L, M, C thẳng hàng.

Lời giải

Gọi T là giao điểm của MC với PQ

Xét $\triangle KAC$ và $\triangle KMA$ có: $\widehat{AKC}$ (chung), $\widehat{KAC} = \widehat{KMA}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$$\text{Do đó } \triangle KAC \sim \triangle KMA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{KC}{KA} = \frac{AC}{MA}$$

$$\text{Tương tự } \triangle KBC \sim \triangle KBM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{BC}{MB}$$

$$\text{Mà } KB = KA. \text{ Nên } \frac{AC}{MA} = \frac{BC}{MB} \quad (1)$$

Xét $\triangle BCQ$ và $\triangle BMP$ có $\widehat{BQC} = \widehat{BPM}$

(hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$\widehat{BCQ} = \widehat{BMP}$ (tứ giác ACBM nội tiếp)

$$\text{Do đó } \triangle BCQ \sim \triangle BMP \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BC}{BM} = \frac{CQ}{MP} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có } \frac{AC \cdot MP}{MA \cdot CQ} = 1 \quad (3)$$

Xét $\triangle APQ$ có $C \in AQ$, $M \in AP$, $T \in PQ$ và C, M, T thẳng hàng

$$\text{Do đó } \frac{AC}{CQ} \cdot \frac{TQ}{TP} \cdot \frac{MP}{MA} = 1 \text{ (định lí Mê-nê-la-uyt)} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) có } \frac{TQ}{TP} \Rightarrow TQ = TP. \text{ Do vậy } T \equiv L.$$

Vậy ba điểm L, M, C thẳng hàng.

Bài 14: (lớp 9) Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O) . Các điểm A', B', C' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB và DE , BC và EF , CD và AF .

Chứng minh rằng ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Lời giải

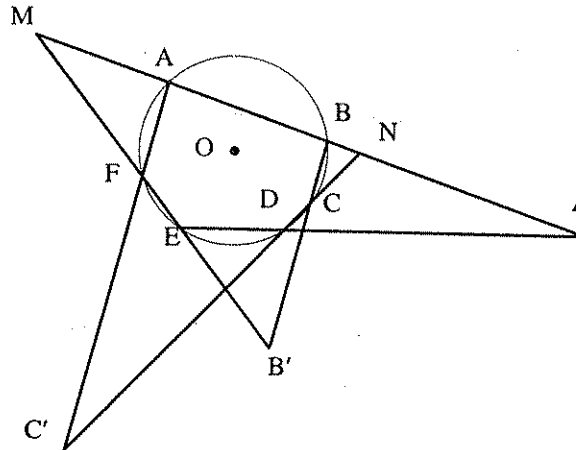
Giải M, N, K lần lượt là giao điểm của AB và EF , AB và CD , CD và EF

Xét $\triangle MNK$ có $B \in MN$, $C \in NK$, $B' \in MK$ và B, C, B' thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{BM}{BN} \cdot \frac{CN}{CK} \cdot \frac{B'K}{B'M} = 1 \text{ (định lí Mê-nê-la-uyt)} \quad (1)$$

Xét $\triangle MNK$ có $D \in NK$, $A' \in MN$, $E \in MK$ và D, A', E thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{DN}{DK} \cdot \frac{EK}{EM} \cdot \frac{A'M}{A'N} = 1 \text{ (định lí Mê-nê-la-uyt)} \quad (2)$$



Xét $\triangle MNK$ có $A \in MN$, $F \in MK$, $C' \in NK$ và A, F, C' thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{AM}{AN} \cdot \frac{CN}{C'K} \cdot \frac{FK}{FM} = 1 \quad (3)$$

Xét $\triangle MAF$ và $\triangle MEB$ có $\widehat{AMF}$ (chung), $\widehat{MAF} = \widehat{BEB}$ (tứ giác $ABEF$ nội tiếp)

$$\text{Do đó } \triangle MAF \sim \triangle MEB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AM}{EM} = \frac{FM}{BM} \Rightarrow AM \cdot BM = EM \cdot FM \quad (4)$$

$$\text{Tương tự có } AN \cdot BN = CN \cdot DN \quad (5)$$

$$FK \cdot EK = CK \cdot DK \quad (6)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3), (4), (5) và (6) ta có } \frac{B'K}{B'M} \cdot \frac{A'M}{A'N} \cdot \frac{C'N}{C'K} = 1$$

$$\text{Xét } \triangle MNK \text{ có } B' \in KM, A' \in MN, C' \in NK \text{ và } \frac{B'K}{B'M} \cdot \frac{A'M}{A'N} \cdot \frac{C'N}{C'K} = 1$$

Vậy A', B', C' thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt).

Bài 15: (lớp 9) Cho hai tam giác ABC và SBC có các đường tròn nội tiếp (I) và (K) cùng tiếp xúc với BC tại D . (I) tiếp xúc với AB, AC tại E, F , (K) tiếp xúc với SB, SC tại M, N . Gọi T là giao điểm của EF và BC . Chứng minh rằng T, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Qua B vẽ đường thẳng song song với AC cắt TE ở K

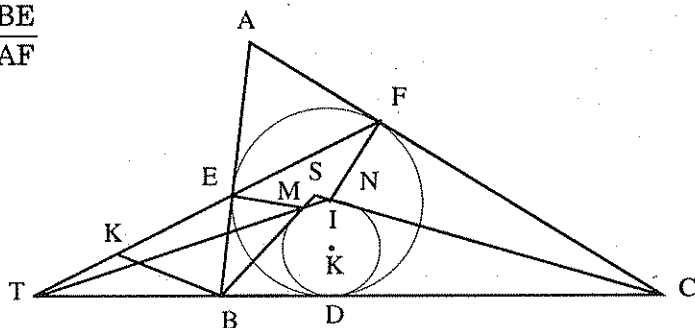
$$\text{Xét } \triangle AEF \text{ có } BK \parallel AF \Rightarrow \frac{BK}{AF} = \frac{BE}{AF}$$

Mà $AF = AE$ (AF, AE là tiếp tuyến của đường tròn (I))

$$\text{Nên } BK = BE$$

Xét $\triangle TFC$ có $BK \parallel CF$

$$\Rightarrow \frac{TB}{TC} = \frac{BK}{CF}$$



Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có

$$MS = NS; BD = BE = BM; CD = CN = CF$$

$$\text{Do đó } \frac{TB}{TC} \cdot \frac{NC}{NS} \cdot \frac{MS}{MB} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CD}{MS} \cdot \frac{MS}{BD} = 1$$

$$\text{Xét } \triangle SBC \text{ có } T \in BC, M \in SB, N \in SC \text{ và } \frac{TB}{TC} \cdot \frac{NC}{NS} \cdot \frac{MS}{MB} = 1$$

Vậy T, M, N thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt).

LỜI KHUYÊN HỌC MÔN TOÁN

VỀ MỘT TIẾT NGOẠI KHÓA TOÁN

Chúng tôi xin được kể lại cùng với các bạn đọc về một tiết ngoại khóa toán: THỰC HÀNH ĐO ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG cho các em học sinh lớp 6:

Bắt đầu tiết học, tôi vẽ lên bảng đoạn thẳng AB (độ dài đoạn thẳng AB là 4dm)

Tôi gọi em Nam là học sinh của lớp lên bảng và trao cho em một cây thước thẳng dài 1m có chia khoảng dm và yêu cầu hãy cho biết độ dài của đoạn thẳng AB. Điều này quá dễ với em Nam và em đã trả lời "Đoạn thẳng AB dài 4dm"

Tôi khen em và nhắc lại cho cả lớp nghe về cách thực hành đo độ dài đoạn thẳng

Tiếp tục tôi vẽ lên bảng vẽ đoạn thẳng CD (độ dài đoạn thẳng CD là 13dm)

Tôi đặt thước lên bảng để cả lớp đều nhận ra rằng đoạn thẳng CD dài hơn chiều dài cây thước của tôi có và tôi đặt câu hỏi: Em nào có thể giúp thầy xác định độ dài đoạn thẳng CD, bằng cây thước này?

Cả lớp im lặng suy nghĩ!

Và... và em Mai đã xung phong lên bảng.

Em Mai đã biết độ dài đoạn thẳng CD là 13dm, nhờ sự xuất hiện của điểm E trên đoạn thẳng CD, $CE = 4dm$

Thực hành đo độ dài $CE = 4dm$, $ED = 9dm$

Do vậy $CD = 4 + 9 = 13 (dm)$

Tôi khen em Mai và nhắc lại rằng để đo được độ dài đoạn thẳng dài hơn chiều dài cây thước chúng ta cần đặt thêm các điểm thích hợp trên đoạn thẳng đó!

Tiếp tục tôi lại vẽ lên bảng đoạn thẳng MN (độ dài đoạn thẳng MN là 1,6dm) (Tất nhiên để vẽ được đoạn thẳng MN tôi phải dùng đến thước đo độ dài có chia khoảng cách cm)

Sau đó tôi đặt câu hỏi: "Với cây thước này, hãy giúp thầy xác định độ dài đoạn thẳng MN đã vẽ trên bảng?"

Cả lớp suy nghĩ...

Và... và các em vẫn chưa có câu trả lời. Tôi gợi ý: Hãy đặt liên tiếp, các đoạn thẳng có độ dài bằng độ dài đoạn thẳng MN lên một tia Mx, cho đến khi nào đo được "đoạn thẳng lớn" bằng cây thước mà ta có từ đó sẽ biết được độ dài đoạn thẳng MN.

Thế là ... em Hoàng đã lên bảng. Tiến hành như gợi ý, em có đoạn thẳng MK, $MK = MN \times 5$, $MK = 8dm$

Độ dài đoạn thẳng MN là $8:5 = 1,6 (dm)$

Tôi khen Hoàng và nhắc lại cách đo độ dài đoạn thẳng MN

Kết thúc tiết học tôi nhắn nhủ với các em rằng: Như vậy, thoát đầu ta cứ ngỡ bằng cây thước mà ta có không thể xác định được độ dài các đoạn thẳng xác định CD, MN nhưng nếu linh hoạt xoay xở chúng ta đã xác định được độ dài các đoạn thẳng đó. Trong giải toán cũng vậy, nếu bắt gặp bài toán khó hãy suy nghĩ tìm cách chuyển về bài toán quen thuộc đã biết cách giải. Thầy tin rằng các em sẽ ngày một học giỏi toán hơn!

CHỨNG MINH MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC BẰNG KIẾN THỨC LỚP 9

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

a) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$

b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$

Lời giải

a) Xét tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại M.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACF$ có $\widehat{BAE}$ (chung), $\widehat{AEB} = \widehat{AFC}$ ($= 90^\circ$)

Do đó $\triangle ABE \sim \triangle ACF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ có $\widehat{EAF}$ (chung), $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ (vì $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$)

Do đó $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2$

Mà $\cos A = \frac{AE}{AB}$, nên $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$

Tương tự: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 B$, $\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \cos^2 C$

Do đó: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$

Mà: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \geq 0$. Do vậy: $1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C > 0$

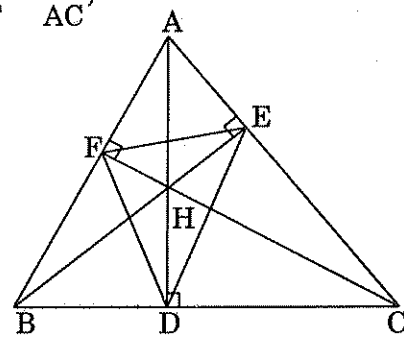
Vậy $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$

b) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$

$\cos^2 C + \sin^2 C = 1$ và $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$

Nên: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 3$

Vậy $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$



Bài 2. Cho tam nhọn ABC, chứng minh rằng: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

Lời giải

Xét tam giác nhọn ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

Ta có: $\cos A = \frac{AE}{AB}$, $\cos A = \frac{AF}{AC}$

Do đó $\cos A = \sqrt{\frac{AE}{AB} \cdot \frac{AF}{AC}} = \sqrt{\frac{AE}{AC} \cdot \frac{AF}{AB}}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta có

$$\cos A \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AE}{AC} + \frac{AF}{AB} \right) \quad (1)$$

$$\cos B \leq \frac{1}{2} \left(\frac{BF}{AB} + \frac{BD}{BC} \right) \quad (2)$$

$$\cos C \leq \frac{1}{2} \left(\frac{CD}{BC} + \frac{CF}{AC} \right) \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có: } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AE + CF}{AC} + \frac{AF + BF}{AB} + \frac{BD + CD}{BC} \right)$$

$$\text{Vậy } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng: $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh hai bài toán phụ sau:

Bài toán phụ 1:

Nếu $a, b, c > 0$ chứng minh rằng $a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)}$

Chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

Bài toán phụ 2

Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng: $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

Chứng minh:

Vẽ AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của AD, BE, CF

Ta có: $\widehat{AHF} = \widehat{ABD}$ (cùng phụ với $\widehat{HAF}$)

$$\cot A \cdot \cot B = \cot A \cdot \cot AHF$$

$$= \frac{AF}{CF} \cdot \frac{HF}{AF} = \frac{HF}{CF} = \frac{\frac{HF \cdot AB}{2}}{\frac{CF \cdot AB}{2}} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$$

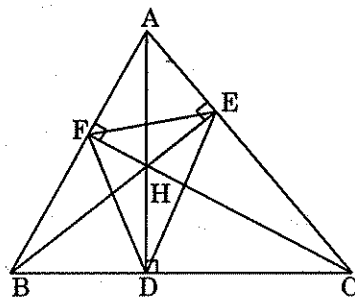
$$\text{Tương tự có: } \cot B \times \cot C = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}, \cot C \times \cot A = \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Vậy } \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$$

* Chúng ta giải bài toán 3

Áp dụng bài toán phụ 1, ta có: $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3(\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A)}$

Áp dụng bài toán phụ 2, ta có: $3(\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A) = 3 \cdot 1 = 3$



Vậy: $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

Ta còn có: $\cot B + \cot C = \frac{BD}{AD} + \frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AD} = \frac{BC^2}{AD \cdot BC} = \frac{BC^2}{2S_{ABC}}$

Tương tự có: $\cot C + \cot A = \frac{AC^2}{2S_{ABC}}$, $\cot A + \cot B = \frac{AB^2}{2S_{ABC}}$

Do vậy: $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{4S_{ABC}}$

Nên $\frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{4S_{ABC}} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow S_{ABC} \leq \frac{\sqrt{3}}{12} (AB^2 + BC^2 + AC^2)$

Chúng ta có thêm một bài toán khó về bất đẳng thức.

Bài 4: Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng: $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

Lời giải

Xét tam giác ABC nhọn $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

Gọi AD là tia phân giác góc BAC

Vẽ $BH \perp AD$ tại H. Ta có $BH \leq BD$

$\triangle ABC$ có AD đường phân giác

$$\Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{BD + CD}{AB + AC} = \frac{a}{c + b}$$

$$\triangle ABH \text{ vuông tại H} \Rightarrow \sin BAH = \frac{BH}{AB}$$

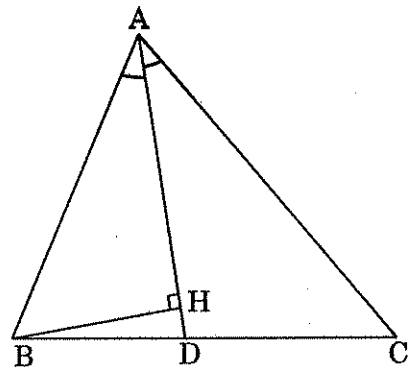
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương, ta có $b+c \geq 2\sqrt{bc}$

$$\text{Do đó } \sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự có: } \sin \frac{B}{2} \leq \frac{b}{2\sqrt{ca}} \quad (2)$$

$$\sin \frac{C}{2} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1),(2), và (3) có: } \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$



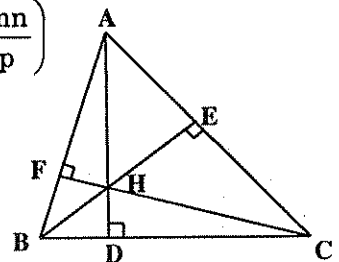
Bài 5: Cho tam giác nhọn ABC và m, n, p là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$m \cdot \cos A + n \cdot \cos B + p \cdot \cos C \leq \frac{1}{2} \left(\frac{np}{m} + \frac{mp}{n} + \frac{mn}{p} \right)$$

Lời giải

Chứng minh rằng: $\cos C = \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B$

Thật vậy: Xét tam giác ABC nhọn có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Ta có $\widehat{ACF} = \widehat{FBH}$ (cùng phụ với góc BAC)



$$\Rightarrow \tan ACF = \tan FBH$$

$$\Rightarrow FA.FB = FC.FH.$$

$$\text{Mà } \frac{CE}{CH} = \frac{CF}{CA} (= \cos C) \Rightarrow CE.CA = FC.CH$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \sin A . \sin B - \cos A . \cos B &= \frac{FC}{AC} \cdot \frac{FC}{BC} - \frac{FA}{AC} \cdot \frac{FB}{BC} = \frac{FC^2 - FA.FB}{AC.BC} \\ &= \frac{FC^2 - FC.FH}{AC.BC} = \frac{FC(FC - FH)}{AC.BC} \\ &= \frac{CF.CA}{AC.BC} = \frac{CE}{BC} = \cos C \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \left(\frac{\cos A}{n} + \frac{\cos B}{m} + \frac{1}{p} \right)^2 + \left(\frac{\sin A}{n} - \frac{\sin B}{m} \right)^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\cos^2 A}{n^2} + \frac{\cos^2 B}{m^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{2 \cos A . \cos B}{m.n} + \frac{2 \cos A}{n.p} \\ + \frac{2 \cos B}{m.p} + \frac{\sin^2 A}{n^2} - \frac{2 \sin A . \sin B}{m.n} + \frac{\sin^2 B}{m^2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \geq \frac{2 \cos A}{np} + \frac{2 \cos B}{mp} + \frac{2(\sin A . \sin B - \cos A . \cos B)}{mn}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{m.n.p} (m \cos A + n \cos B + p \cos C) \leq \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow m . \cos A + n . \cos B + p . \cos C \leq \frac{1}{2} \left(\frac{np}{m} + \frac{mp}{n} + \frac{mn}{p} \right)$$

* **Nhận xét:** Ở bài toán 5 nếu thay $m = n = p = 1$ ta có bài toán 2. Bài toán 5 là bài toán tổng quát của bài toán 2. Cách giải trên cho ta một cách giải khác của bài toán 2.

B. CÁC BÀI TOÁN

1. CÁC BÀI TOÁN LỚP 7

CHƯƠNG 1

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC, ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, TAM GIÁC.

Bài 1: Cho ba điểm A, B, C sao cho $AB = 2 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$, $AC = x \text{ cm}$; $AB < AC < BC$ và x là số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Vì $AB < AC < BC$

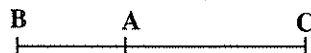
Ta có $2 < x < 5$. Mà $x \in \mathbb{N}$ và x lẻ $\Rightarrow x = 3$

Do đó $AB + AC = 2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$

Ta có $AB + AC = BC (= 5 \text{ cm})$

$\Rightarrow$ A nằm giữa B và C

Vậy A, B, C thẳng hàng.



Bài 2: Cho ba điểm M, N, K sao cho $MN = 12 \text{ cm}$, $MK = 5 \text{ cm}$, $KN = p \text{ cm}$; trong đó p là số nguyên tố và $5 < p < 11$.

Lời giải

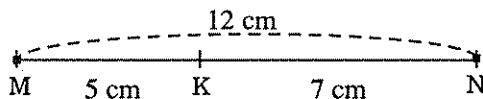
Ta có p là số nguyên tố và $5 < p < 11$ (gt)

Suy ra $p = 7$. Vậy $KN = 7 \text{ cm}$

Ta có $MK + KN = 5 \text{ cm} + 7 \text{ cm} \Rightarrow MK + KN = 12 \text{ cm}$

Do đó $MK + KN = MN (= 12 \text{ cm}) \Rightarrow K$ nằm giữa M và N

Vậy ba điểm M, N, K thẳng hàng.



Bài 3. Cho bốn điểm A, B, C, D sao cho $AB = 9 \text{ cm}$, $AC = 2 \text{ cm}$, $AD = 5 \text{ cm}$, $CD = 3 \text{ cm}$, $BD = 4 \text{ cm}$. Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $AC + CD = 2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$

Do đó $AC + CD = AD = 5 \text{ cm}$

$\Rightarrow$ C nằm giữa A và D

$\Rightarrow$ A, C, D thẳng hàng (1)

Mặt khác, ta có $AD + DB = 5 \text{ cm} + 4 \text{ cm} \Rightarrow AD + DB = 9$

Do đó $AD + DB = AB = 9 \text{ cm}$

$\Rightarrow$ D nằm giữa A và B

$\Rightarrow$ A, B, D thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) có A, B, C, D thẳng hàng.

Vậy ba điểm C, D, B thẳng hàng.



Bài 4. Cho tam giác ABC có góc $\hat{A} = 60^\circ$. Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác đều ABD và ACE. Chứng minh rằng D, A, E thẳng hàng.

Lời giải

Ta có tam giác ABD đều (gt)

$\Rightarrow \widehat{DAB} = 60^\circ$ và tam giác ACE đều

$\Rightarrow \widehat{CAE} = 60^\circ$

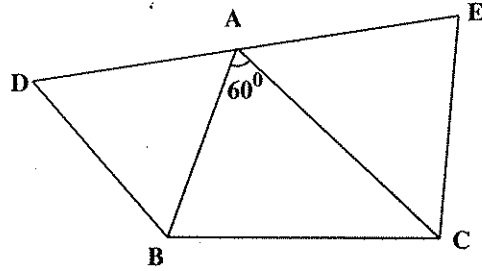
Mà $\widehat{BAC} = 60^\circ$ (gt)

Do đó: $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE}$

$$\widehat{DAE} = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ$$

$$\widehat{DAE} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm D,A,E thẳng hàng.



Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác BAD vuông cân tại B, tam giác CAE vuông cân tại C. Chứng minh rằng ba điểm D, A, E thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\triangle BAD$ vuông cân tại B (gt) $\Rightarrow \widehat{BAD} = 45^\circ$

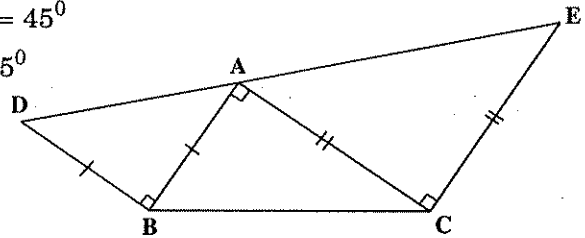
Và $\triangle CAE$ vuông cân tại E (gt) $\Rightarrow \widehat{CAE} = 45^\circ$

Do đó $\widehat{DAE} = \widehat{BAD} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE}$

$$\widehat{DAE} = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ$$

$$\widehat{DAE} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm D,A,E thẳng hàng.



Bài 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. D là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{BAD} = 15^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B vẽ tam giác ACE đều. Chứng minh rằng B, D, E thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABC$ vuông cân tại A (gt) $\Rightarrow AB = AC, \widehat{BAC} = 90^\circ$

$\triangle ACE$ đều (gt) $\Rightarrow AC = AE = CE,$

Do đó $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{EAC} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

Ta có $AB = AE (= AC) \Rightarrow \triangle ABE$ cân tại A

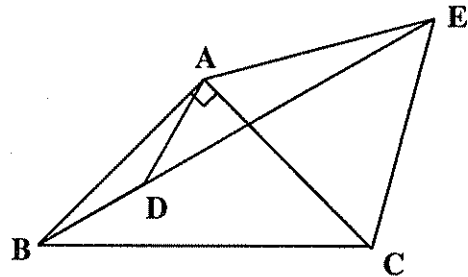
Mà $\widehat{BAE} = 150^\circ$

Do đó $\widehat{ABE} = (180^\circ - \widehat{BAE}) : 2 = 15^\circ$

Ta có $\widehat{ABE} = 15^\circ, \widehat{ABD} = 15^\circ$

Nên hai tia BD, BE trùng nhau

Vậy ba điểm B,D,E thẳng hàng.



Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D (D khác A). Vẽ đường thẳng m qua D và song song với AC. Điểm E trên đường thẳng m, E và C nằm cùng phía với BD sao cho $DE = DB$. Chứng minh rằng B,C,E thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BDE}$ (so le trong và $AC \parallel m$) (1)

$\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

Do đó $\widehat{ABC} = (180^\circ - \widehat{BAC}) : 2$ (2)

$\triangle DBE$ có $DE = DB$ (gt)

$\Rightarrow \triangle DBE$ cân tại D

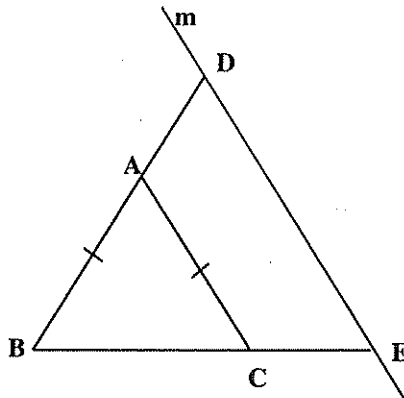
$\Rightarrow \widehat{DBE} = \widehat{DEB}$

Do đó $\widehat{DBE} = (180^\circ - \widehat{BDE}) : 2$ (3)

Từ (1), (2) và (3) có $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$

$\Rightarrow$ Hai tia BE, BC trùng nhau

Vậy ba điểm B, C, E thẳng hàng.



Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Trên tia BA, BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho tam giác MBN cân tại M và $\widehat{BMN} = 2\widehat{BDA}$. Chứng minh rằng ba điểm B, C, N thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $AD = AB (=AC) \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{ABD}$

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{BDA} + \widehat{ABD} = 2\widehat{BDA}$. Mà $\widehat{BMN} = 2\widehat{BDA}$ (gt)

Nên $\widehat{BAC} = \widehat{BMN}$ (1)

$\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

Do đó $\widehat{ABC} = (180^\circ - \widehat{BAC}) : 2$ (2)

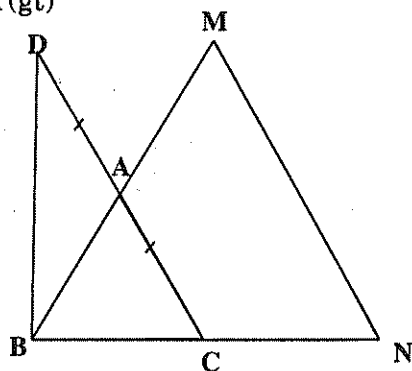
$\triangle MBN$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{MNB}$

Do đó $\widehat{MBN} = (180^\circ - \widehat{BMN}) : 2$ (3)

Từ (1), (2) và (3) có $\widehat{ABC} = \widehat{MBN}$

$\Rightarrow$ Hai tia BC, BN trùng nhau

Vậy ba điểm B, C, N thẳng hàng.



Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A. Tia phân giác của góc BAC cắt BC ở D. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy E, F sao cho $AE = AF$. Gọi M là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng ba điểm A, M, D thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle AFB$ và $\triangle AEC$ có:

$AF = AE$, $\widehat{FAB}$ (chung), $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

Do đó $\triangle AFB = \triangle AEC \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{ACE}$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

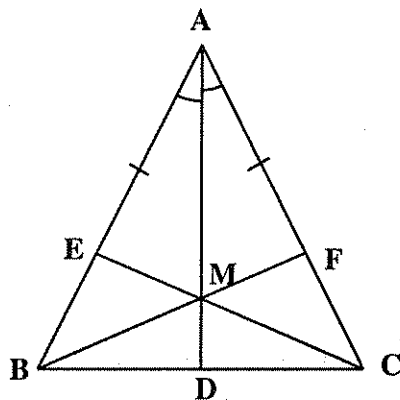
$\Rightarrow \widehat{ABF} + \widehat{MBC} = \widehat{ACE} + \widehat{MCB}$

Nên $\widehat{MBC} = \widehat{MCB} \Rightarrow \triangle MBC$ cân tại M $\Rightarrow MB = MC$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A), AM (cạnh chung), $BM = CM$ (chứng minh trên)

Do đó $\triangle ABM = \triangle ACM$



$$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$$

$\Rightarrow AM$ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

Ta có hai tia AM, AD trùng nhau.

Vậy ba điểm A, M, D thẳng hàng.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A vẽ AH vuông góc với BC tại H . Gọi D là điểm trên tia đối của tia AB . Vẽ DK vuông góc với AH tại K . Trên tia đối của tia KD lấy điểm E sao cho KE bằng KD . Chứng minh rằng C, A, E thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle HAB$ ($\widehat{AHB} = 90^\circ$), và $\triangle HAC$ ($\widehat{AHC} = 90^\circ$) có:

$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A), AH (cạnh chung)

Do đó $\triangle HAB = \triangle HAC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{HAC}$

Xét $\triangle AKD$ và $\triangle AKE$ có:

$KD = KE$ (gt), AK (cạnh chung),

$\widehat{AKD} = \widehat{AKE} = (90^\circ)$

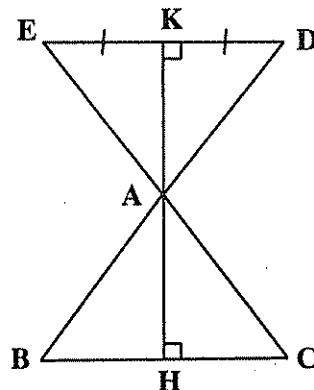
Do đó $\triangle AKD = \triangle AKE \Rightarrow \widehat{KAD} = \widehat{KAE}$

Mà $\widehat{BAH} = \widehat{KAD}$ (đối đỉnh)

Ta có $\widehat{KAE} = \widehat{KAD} = \widehat{BAH} = \widehat{HAC}$

Do đó $\widehat{CAE} = \widehat{CAK} + \widehat{KAE} = \widehat{CAK} + \widehat{AHC} = 180^\circ$

Vậy ba điểm C, A, E thẳng hàng.



Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A . D, E là các điểm khác A sao cho $DB = DC$, $EB = EC$. Chứng minh rằng ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M là trung điểm cạnh BC .

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A),

$MB = MC$ (M là trung điểm của cạnh BC), AM (cạnh chung).

Do đó $\triangle ABM = \triangle ACM \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$

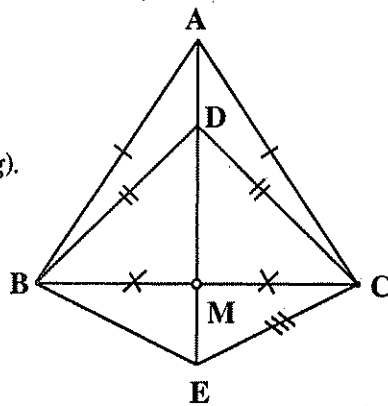
Mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Do đó $2\widehat{AMB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$

Vậy $AM \perp BC$ tại M

Tương tự có $DM \perp BC$ tại M , $EM \perp BC$ tại M .

Vậy ba điểm A, D, E thẳng hàng.



Bài 12. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của đoạn thẳng AB . Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB vẽ tia Ax, By sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{ABy}$. Trên tia Ax lấy điểm C , trên tia By lấy điểm D sao cho $BD = AC$. Chứng minh rằng ba điểm C, O, D thẳng hàng.

Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBD$ có:

$OA = OB$ (O là trung điểm của đoạn thẳng AB),

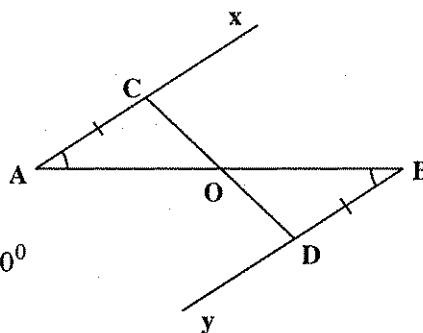
$\widehat{OAC} = \widehat{OBD}$ (gt)

$AC = BD$ (gt)

Do đó $\triangle OAC = \triangle OBD \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD}$

Ta có: $\widehat{COD} = \widehat{AOC} + \widehat{AOD} = \widehat{BOD} + \widehat{AOD} = \widehat{AOB} = 180^\circ$

Vậy ba điểm C, O, D thẳng hàng.



Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) D là điểm cạnh AC sao cho $\widehat{DBC} = 45^\circ$. Vẽ $DE \perp BC$ tại E. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C vẽ tam giác KAB vuông tại K. Chứng minh rằng A, E, K thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle EBD$ vuông cân tại E $\Rightarrow EB = ED$

Trên cạnh DC lấy điểm M sao cho $DM = AB$, $\widehat{EDM} = \widehat{ABE}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)

$\triangle EDM = \triangle EAB$ (c.g.c) $\Rightarrow EM = EA$, $\widehat{DEM} = \widehat{BEA}$

$\widehat{AEM} = \widehat{ADE} + \widehat{DEM} = \widehat{ADE} + \widehat{BEA} = 90^\circ$

$\triangle EAM$ vuông cân tại E $\Rightarrow \widehat{EAM} = 45^\circ$

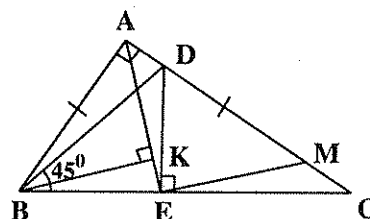
Do đó $\widehat{BAE} = 45^\circ$

Mặt khác $\widehat{BAK} = 45^\circ$ ($\triangle KAB$ vuông cân tại K)

Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{BAK} = (45^\circ)$

$\Rightarrow$ Hai tia AE, AK trùng nhau.

Vậy ba điểm A, E, K thẳng hàng.



Bài 14. Cho tam giác ABC. D, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Trên tia đối của tia DC lấy điểm M sao cho $DM = DC$. Trên tia đối của tia EB lấy điểm N sao cho $EN = EB$. Chứng minh rằng ba điểm M, A, N thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle DAM$ và $\triangle DBC$ có:

$DA = DB$ (D là trung điểm của AB)

$DM = DC$ (gt)

$\widehat{ADM} = \widehat{BDC}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle DAM = \triangle DBC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{DBC}$

Mà $\widehat{DAM}$ và $\widehat{DBC}$ là hai góc so le trong

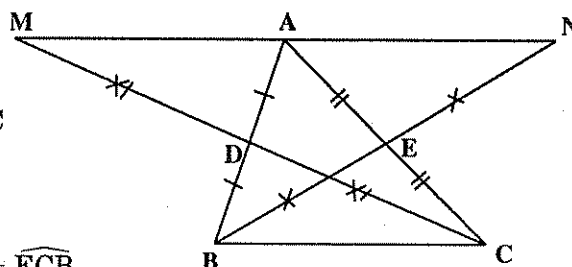
Do đó $AM \parallel BC$

Tương tự có $\triangle EAM = \triangle ECB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{EAM} = \widehat{ECB}$

Mà $\widehat{EAM}$ và $\widehat{ECB}$ so le trong.

Do đó $AN \parallel BC \Rightarrow AM, AN$ trùng nhau (tiên đề O-clit)

Vậy ba điểm M, A, N thẳng hàng.



Bài 15. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$, trên tia đối của tia AC lấy E sao cho $AE = AC$. Qua C vẽ đường thẳng m song song với AB. Trên đường thẳng m lấy điểm F sao cho $FC = BD$ và F ở trên cùng nửa mặt phẳng bờ BC có chứa D. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có:

$$AB = AD \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{DAE} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$AC = AE \text{ (gt)}$$

$$\text{Do đó } \triangle ABC = \triangle ADE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADE}$$

Mà $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADE}$ so le trong. Do đó $DE \parallel BC$

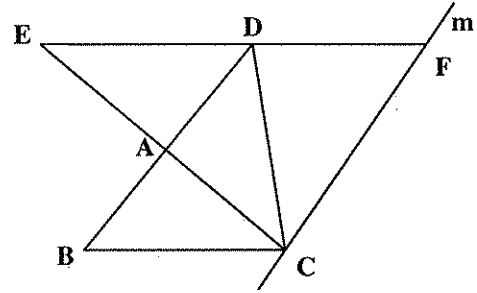
Xét $\triangle DBC$ và $\triangle CDF$ có: $DB = CF$ (gt), $\widehat{BDC} = \widehat{FCD}$ (so le trong và $DB \parallel m$)

$$\text{Do đó } \triangle DBC = \triangle CDF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{CDF}$$

Mà $\widehat{DCB}$ và $\widehat{CDF}$ so le trong. Do đó $DF \parallel BC$

Ta có $DE \parallel BC$, $DF \parallel BC$.

Theo tiên đề Ô-clit có D, E, F thẳng hàng.



Bài 16. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, DE. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có: $AB = AD$ (gt), $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$ (đối đỉnh), $AC = AE$ (gt)

$$\text{Do đó } \triangle ABC = \triangle ADE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BC = DE \text{ (cặp cạnh tương ứng)} \text{ và } \widehat{ABC} = \widehat{ADE} \text{ (cặp góc tương ứng)}$$

Ta có $BM = \frac{1}{2} BC$ (M là trung điểm của BC)

$$DN = \frac{1}{2} DE \text{ (N là trung điểm của DE)}$$

$$\text{Do vậy } BM = DN$$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ADN$ có:

$$AB = AD \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AMB} = \widehat{AND}$$

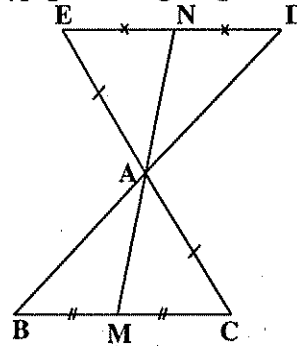
$$BM = DN$$

$$\text{Do đó } \triangle ABM = \triangle ADN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{DAN} \text{ (cặp góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAN} + \widehat{DAN} = 180^\circ \text{ (kề bù)}$$

$$\text{Nên } \widehat{MAN} = \widehat{BAN} + \widehat{BAM} = \widehat{BAN} + \widehat{DAN} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.



Bài 17. Cho tam giác ABC. M là trung điểm của cạnh AC. Trên tia đối của tia MB lấy điểm D sao cho $MD = MB$. Qua B vẽ đường thẳng d vuông góc với BC. Vẽ AE vuông góc với d tại E. Chứng minh rằng ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Xét $\triangle MBC$ và $\triangle MDA$ có:

$$MC = MA \text{ (M là trung điểm cạnh AC)}$$

$$\widehat{BMC} = \widehat{AMD} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$MB = MD \text{ (gt)}$$

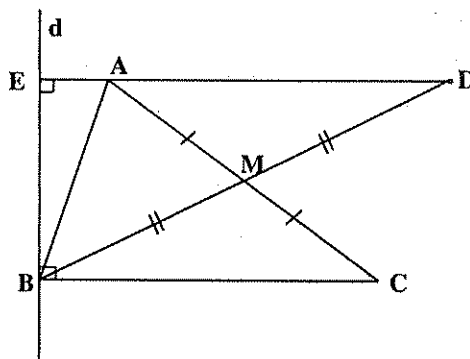
$$\text{Do đó } \triangle MBC = \triangle MDA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{MDA}$$

Mà hai góc $\widehat{MBC}$ và $\widehat{MDA}$ so le trong

Do đó $AD \parallel BC$

Mặt khác $AE \perp d$ (gt), $BC \perp d$ (gt) $\Rightarrow AE \parallel BC$

Ta có $AD \parallel BC$ và $AE \parallel BC$. Theo tiên đề Ô-clit có A, D, E thẳng hàng.



Bài 18. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm cạnh BC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Vẽ BH vuông góc với AD tại H, CK vuông góc với AE tại K. Gọi N là giao điểm của BH và CK. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

$$\triangle ABC \text{ cân tại A} \Rightarrow AB = AC, \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^\circ$$

$$\widehat{ACB} + \widehat{ACE} = 180^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$$AB = AC \text{ (gt)}, BD = CE \text{ (gt)}, \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$$

$$\text{Do đó } \triangle ABD = \triangle ACE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAE}$$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$$AB = AC, BM = CM \text{ (M là trung điểm BC, AM (cạnh chung))}$$

$$\text{Do đó } \triangle ABM = \triangle ACM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$$

$$\text{Ta có } \widehat{DAM} = \widehat{BAD} + \widehat{BAM} = \widehat{CAE} + \widehat{CAM} = \widehat{EAM}$$

$$\Rightarrow AM \text{ là tia phân giác của góc DAE} \quad (1)$$

$$\text{Xét } \triangle HAB \text{ (} \widehat{AHB} = 90^\circ \text{)} \text{ và } \triangle KAC \text{ (} \widehat{AKC} = 90^\circ \text{)} \text{ có: } AB = AC, \widehat{BAH} = \widehat{CAK}$$

$$\text{Do đó } \triangle HAB = \triangle KAC \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow AH = AK$$

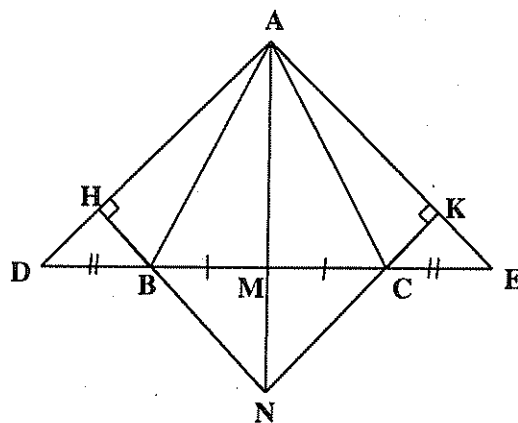
$$\text{Xét } \triangle HAN \text{ (} \widehat{AHN} = 90^\circ \text{)} \text{ và } \triangle KAN \text{ (} \widehat{AKN} = 90^\circ \text{)} \text{ có: AN (cạnh chung), AH = AK.}$$

$$\text{Do đó } \triangle HAN = \triangle KAN \text{ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)}$$

$$\text{Do đó } \widehat{HAN} = \widehat{KAN} \Rightarrow AN \text{ là tia phân giác của góc DAE} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có hai tia AM, AN trùng nhau.

Vậy A, M, N thẳng hàng.



Bài 19. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = AB$. Tia phân giác của góc ABC cắt AC ở E. Vẽ CH vuông góc với BE tại H, CH cắt AB tại F. chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle DBE$ có

$AB = DB$ (gt), BE (cạnh chung), $\widehat{ABE} = \widehat{DBE}$ (BE là tia phân giác của góc ABC)

Do đó $\triangle ABE = \triangle DBE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BAE}$

Nên $\widehat{BDE} = 90^\circ \Rightarrow ED \perp BC$ (1)

Xét $\triangle HBC$ và $\triangle HBF$ có:

$\widehat{HBC} = \widehat{HBF}$ ($= 90^\circ$), BH (cạnh chung)

$\widehat{HBC} = \widehat{HBF}$ (BE là tia phân giác của góc ABC)

Do đó $\triangle HBC = \triangle HBF$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = BF$

Xét $\triangle BAC$ và $\triangle BDF$ có:

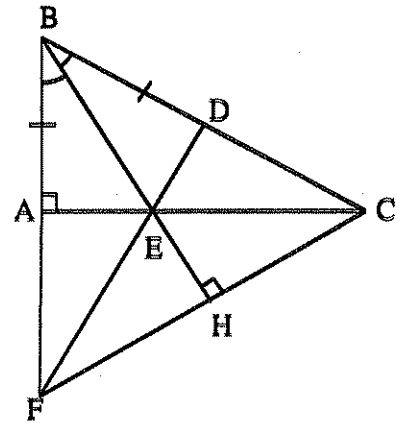
$BA = BD$ (gt), $\widehat{ABC}$ (chung), $BC = BF$

Do đó $\triangle BAC = \triangle BDF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDF}$. Nên $\widehat{BDF} = 90^\circ \Rightarrow FD \perp BC$ (2)

Từ (1), (2) có ED, FD trùng nhau.

Vậy D, E, F thẳng hàng.



Bài 20. Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy ba điểm A, B, C ($OA < OB < OC$). Trên tia Oy lấy ba điểm D, E, F sao cho $OD = OA, OE = OB, OF = OC$. Đường thẳng vuông góc với Ox tại A cắt đường thẳng vuông góc với Oy tại D ở I . Đường thẳng vuông góc với Ox tại B cắt đường thẳng vuông góc với Oy tại E ở K . Đường thẳng vuông góc với Ox tại C cắt đường thẳng vuông góc với Oy tại F ở L . Chứng minh rằng ba điểm I, K, L thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle OAI$ ($\widehat{OAI} = 90^\circ$) và $\triangle ODI$ ($\widehat{ODI} = 90^\circ$) có :

OI (chung), $OA = OD$ (gt)

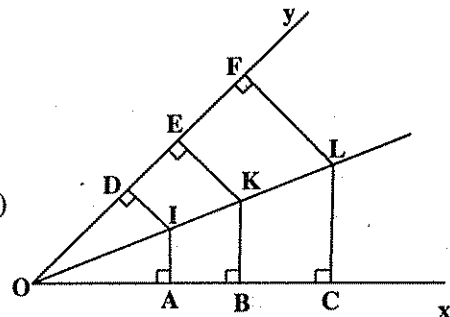
Do đó $\triangle OAI = \triangle ODI$ (cạnh huyền–cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{IOA} = \widehat{IOD}$

$\Rightarrow I$ thuộc tia phân giác của góc xOy .

Chứng minh tương tự ta cũng có K, L là thuộc phân giác của góc xOy .

Vậy ba điểm I, K, L thẳng hàng.



Bài 21. Cho tam giác ABC , D và E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Gọi M là trung điểm đoạn thẳng BD . Trên tia đối của tia MC lấy F sao cho $MF = MC$. Chứng minh rằng ba điểm E, D, F thẳng hàng.

Lời giải

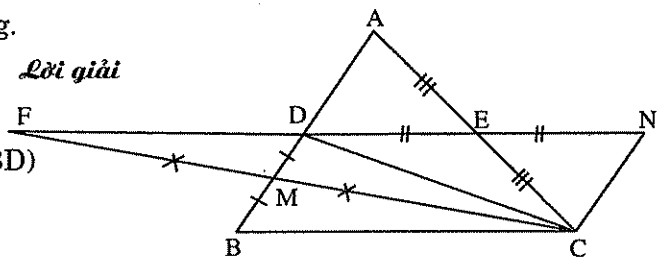
Xét $\triangle MDF$ và $\triangle MBC$ có:

$MD = MD$ (M là trung điểm của BD)

$MF = MC$ (gt)

$\widehat{DMF} = \widehat{BMC}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle MDF = \triangle MBC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MDF} = \widehat{MBC}$



Mà $\widehat{MDF}$ và $\widehat{MBC}$ so le trong. Do đó $DF \parallel BC$ (1)

Goi N là điểm trên tia đối của tia ED sao cho $EN = ED$.

Xét $\triangle EAD$ và $\triangle ECN$ có:

$$EA = EC \text{ (E là trung điểm cạnh AC)}$$

$$ED = EN$$

$$\widehat{AED} = \widehat{CEN} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow BD \parallel CN$$

Xét $\triangle BCD$ và $\triangle NCD$ có: $BD = CN$ ($= AD$), CD (cạnh chung), $\widehat{BDC} = \widehat{NCD}$ (so le trong và $BD \parallel CN$)

$$\text{Do đó } \triangle BDC = \triangle NCD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{NDC}$$

Mà $\widehat{BCD}$ và $\widehat{NDC}$ so le trong. Do đó $DN \parallel BC$ (2)

Từ (1) và (2) DN, DF trùng nhau (tiên đề Ơ-clit)

Vậy ba điểm E, D, F thẳng hàng.

Bài 22. Cho tam giác ABC. D, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Qua C vẽ đường thẳng d song song với AB. Trên đường thẳng d lấy điểm F sao cho D và F cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC và $CF = BD$. Chứng minh rằng ba điểm D, F, E thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $CF = BD$ (gt)

$$BD = AD \text{ (D là trung điểm của AB)}$$

$$\Rightarrow AD = CF$$

Xét $\triangle EAD$ và $\triangle ECF$ có:

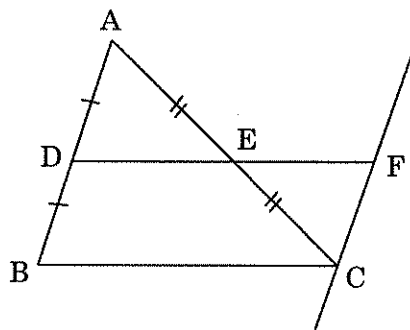
$$AE = CE \text{ (E là trung điểm của AC),}$$

$$\widehat{EAD} = \widehat{ECF} \text{ (so le trong và } d \parallel AB)$$

$$AD = CF$$

$$\text{Ta có } \widehat{DEF} = \widehat{DEC} + \widehat{CEF} = \widehat{DEC} + \widehat{AED} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.



Bài 23. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Gọi I là trung điểm của đoạn DE. Chứng minh rằng ba điểm B, I, C thẳng hàng.

Lời giải

Qua D vẽ đường thẳng song song với AC cắt BC ở M.

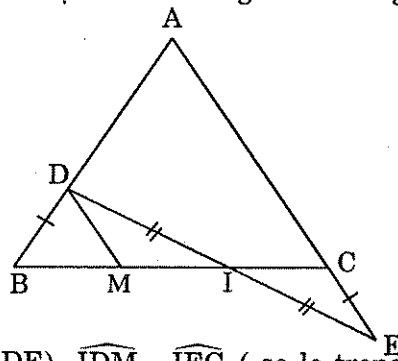
$$\text{Ta có } \widehat{DMB} = \widehat{ACB} \text{ (đồng vị và } DM \parallel AC)$$

$$\widehat{DBM} = \widehat{ACB} \text{ (}\triangle ABC \text{ cân tại A)}$$

$$\text{Nên } \widehat{DMB} = \widehat{DBM} \Rightarrow \triangle DBM \text{ cân tại D} \Rightarrow BD = MD$$

$$\text{Mà } BD = CE \text{ (gt). Do đó } MD = CE$$

Xét $\triangle IDM$ và $\triangle IEC$ có: $ID = IE$ (I là trung điểm của DE), $\widehat{IDM} = \widehat{IEC}$ (so le trong và $DM \parallel CE$), $MD = CE$



Do đó $\triangle IDM = \triangle IEC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{EIC}$

Ta có $\widehat{BIC} = \widehat{DIM} + \widehat{DIC} = \widehat{EIC} + \widehat{DIC} = 180^\circ$

Vậy ba điểm B, I, C thẳng hàng.

Bài 24. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác ABD vuông cân tại A. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng ba điểm M, A, H thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $EK \perp AH$ tại K, $DN \perp AH$ tại N, AH cắt DE tại M

Xét $\triangle HAB$ ($\widehat{AHB} = 90^\circ$) và $\triangle NDA$ ($\widehat{DNA} = 90^\circ$) có:

$AB = AD$ ($\triangle ABC$ vuông cân tại A)

$\widehat{BAH} = \widehat{NDA}$ (cùng với góc DAN)

Do đó $\triangle HAB = \triangle NDA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Tương tự $\triangle KAE = \triangle HCA$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow KE = AH$

Ta có $DN = KE = AH$

$KE \perp AH, DN \perp AH \Rightarrow KE \parallel DN$

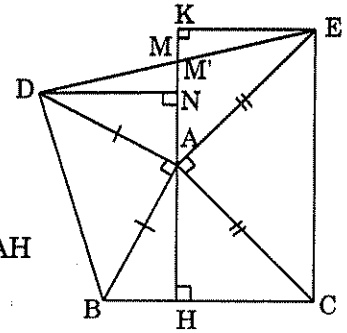
$\Rightarrow \widehat{NDM} = \widehat{KEM}$

Xét $\triangle M'DN$ và $\triangle M'EK$ có: $\widehat{NDM}' = \widehat{KEM}'$, $DN = KE$, $\widehat{DNM}' = \widehat{EKM}'$

Do đó $\triangle M'DN = \triangle M'EK$ (g.c.g) $\Rightarrow M'D = M'E$

M là trung điểm của DE. Nên $M' \equiv M$

Vậy ba điểm M, A, H thẳng hàng.



Bài 25. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 20^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B vẽ tia Ax, Cy sao cho $\widehat{CAx} = 20^\circ$, $\widehat{ACy} = 130^\circ$. Gọi D là giao điểm của hai tia Ax, Cy. Trên nửa mặt phẳng bờ BD không chứa điểm A vẽ tam giác BDK cân tại B có $\widehat{BDK} = 50^\circ$. Chứng minh ba điểm A, B, K thẳng hàng.

Lời giải

Trên nửa mặt phẳng bờ AD có chứa B vẽ tam giác ADE đều

Từ đó có $\widehat{EAB} = \widehat{BAC} = \widehat{CAD} = 20^\circ$

$\triangle ABE = \triangle ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ADC} = 30^\circ$

Nên $\widehat{AEB} = \widehat{DEB} = 30^\circ$

$\triangle ABE = \triangle DBE$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = DB$

$\Rightarrow \triangle BAD$ cân tại B

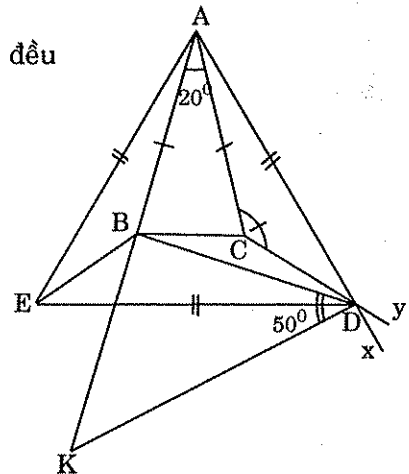
Do đó $\widehat{ABD} = 180^\circ - 2\widehat{BAD}$

$= 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

Mặt khác $\triangle BDK$ cân tại B (gt). Nên $\widehat{BKD} = \widehat{BDK} = 50^\circ$

Do đó $\widehat{DBK} = 180^\circ - (\widehat{BKD} + \widehat{BDK}) = 80^\circ$. Ta có $\widehat{ABK} = \widehat{ABD} + \widehat{DKB} = 100^\circ + 80^\circ = 180^\circ$

Vậy ba điểm A, B, K thẳng hàng.



CHƯƠNG II

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC, CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC.

Bài 26. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là điểm trên cạnh AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AC có chứa B vẽ tam giác đều ACD, trên nửa mặt phẳng bờ CM có chứa B vẽ tam giác đều CME, trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A vẽ tam giác đều BCF. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

Lời giải

$$\triangle ACD \text{ đều} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{ADC} = \widehat{DCA} = 60^\circ$$

$$AC = AD = CD$$

$$\triangle CME \text{ đều} \Rightarrow \widehat{CME} = \widehat{MEC} = \widehat{MCE} = 60^\circ$$

$$MC = CE = ME$$

$$\text{Do đó } \widehat{ACM} = \widehat{DCE}$$

$$\text{Xét } \triangle ACM \text{ và } \triangle DCE \text{ có: } AC = CD, \widehat{ACM} = \widehat{DCE}, CM = CE$$

$$\text{Do đó } \triangle ACM = \triangle DCE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{CDE}$$

$$\widehat{CAM} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\text{Nên } \widehat{CDE} = 90^\circ \Rightarrow ED \perp CD$$

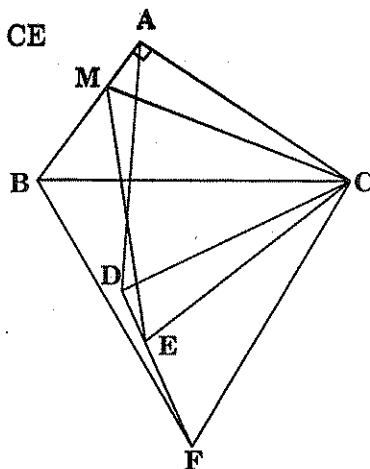
$$\text{Chứng minh tương tự có } \triangle ABC = \triangle DFC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{FDC}$$

$$\widehat{FDC} = 90^\circ \Rightarrow FD \perp CD$$

$$\text{Ta có } ED \perp CD \text{ và } FD \perp CD$$

$$\text{Vậy D, E, F thẳng hàng.}$$



Bài 27. Cho tam giác ABC có $AB = 2AC$, AD là đường phân giác. Điểm E trên tia đối của tia CD và $CE = CD$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = \widehat{CEA}$. Gọi F là giao điểm của tia Bx và đường thẳng AE. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A vẽ tam giác đều BEK. Chứng minh rằng ba điểm K, D, F thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{Gọi M là trung điểm đoạn thẳng AB, N là giao điểm của MD và AC. Ta có } AM = \frac{AB}{2}$$

$$\text{Xét } \triangle AMD \text{ và } \triangle ACD \text{ có: } AM = AC \left(= \frac{AB}{2} \right), \widehat{MAD} = \widehat{CAD} \text{ (gt), AD (chung)}$$

$$\text{Do đó } \triangle AMD = \triangle ACD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ACD}$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ và } \triangle ANM \text{ có: } \widehat{BAC} \text{ (chung), } AC = AM, \widehat{ACM} = \widehat{AMN} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{Do đó } \triangle ABC = \triangle ANM \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AB = AN$$

$$\text{Nên } AC = \frac{1}{2} AN. \text{ Do vậy C là trung điểm AN}$$

$$\triangle ABN \text{ có BC và MN là hai đường trung tuyến cắt nhau tại D}$$

$\Rightarrow D$ là trọng tâm của tam giác ABN

$$\Rightarrow BD = 2CD$$

Mà $CE = CD$ (gt)

$$\text{Vậy có } BD = ED \quad (1)$$

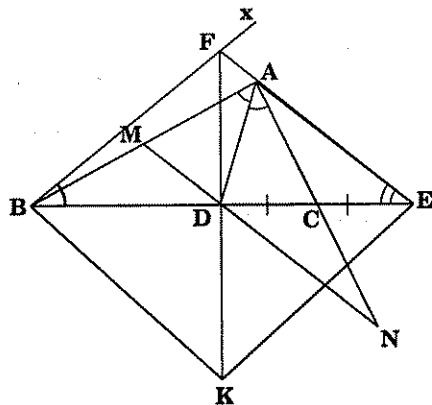
$\triangle FBE$ có $\widehat{FBE} = \widehat{BEF}$ (gt)

$$\Rightarrow \triangle FBE \text{ cân tại } F \Rightarrow BF = EF \quad (2)$$

$\triangle BEK$ đều $\Rightarrow BK = EK$ (3)

Từ (1), (2), và (3) có K, D, F cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BE .

Vậy ba điểm K, D, F thẳng hàng.



Bài 28. Cho góc xOy khác góc bẹt. Các điểm I, K, L nằm trong góc xOy . Vẽ $IA \perp Ox$ tại A , $KB \perp Ox$ tại B , $LC \perp Ox$ tại C , $ID \perp Oy$ tại D , $KE \perp Oy$ tại E , $LF \perp Oy$ tại F . Biết rằng $IA = ID$, $KB = KE$, $LC = LF$. Chứng minh rằng ba điểm I, K, L thẳng hàng.

Lời giải

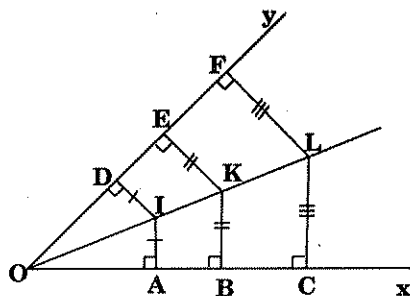
I nằm trong góc xOy , $IA = ID$ (gt)

$IA \perp Ox$, $ID \perp Oy$

Do đó I thuộc tia phân giác của góc xOy

Tương tự cũng có K, L thuộc tia phân giác của góc xOy

Vậy ba điểm I, K, L thẳng hàng.



Bài 29. Cho tam giác ABC vuông tại A . D là điểm bất kì trên cạnh BC . Gọi E, F là các điểm sao cho AB là đường trung trực của đoạn thẳng DE , AC là đường trung trực của đoạn DF . Chứng minh rằng ba điểm E, A, F thẳng hàng.

Lời giải

AB là đường trung trực của đoạn thẳng DE

$$\Rightarrow AD = AE$$

$\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A

Nên AB là tia phân giác của góc DAE

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \widehat{DAE}$$

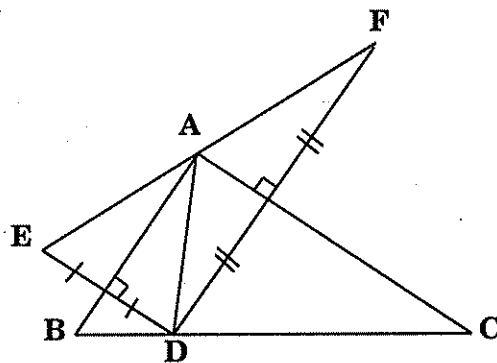
$$\Rightarrow \widehat{DAE} = 2\widehat{BAD}$$

Tương tự có $\widehat{DAF} = 2\widehat{DAC}$

$$\text{Do đó } \widehat{EAF} = \widehat{DAE} + \widehat{DAF} = 2(\widehat{BAD} + \widehat{DAC})$$

$$= 2.90^\circ = 180^\circ$$

Vậy ba điểm E, A, F thẳng hàng.



Bài 30. Cho tam giác ABC cân tại A , các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại I . Tia phân giác của góc BAC cắt BC ở K . Chứng minh rằng ba điểm A, I, K thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có BD, CE là hai đường trung tuyến cắt nhau tại I (gt)

⇒ I là trọng tâm của $\triangle ABC$

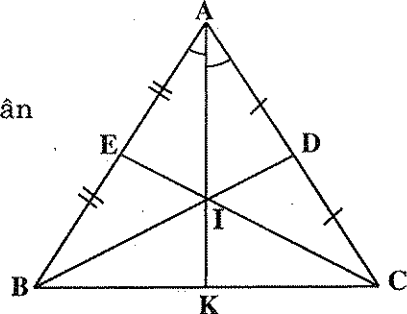
⇒ AI là đường trung tuyến của tam giác ABC (1)

Mặt khác $\triangle ABC$ cân tại A (gt), AK là đường phân giác (tia phân giác góc BAC cắt BC tại K)

⇒ AK là đường trung tuyến của $\triangle ABC$ (2)

Từ (1) và (2) có AI, AK trùng nhau.

Vậy ba điểm A, I, K thẳng hàng.



Bài 31. Cho tam giác ABC cân tại A, AM là đường trung tuyến. Các đường phân giác BD và CE của tam giác ABC cắt nhau ở I. Chứng minh rằng ba điểm A, M, I thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABC$ có BD, CE là hai đường phân giác cắt nhau tại I

⇒ I là điểm cách đều ba cạnh của tam giác ABC

⇒ AI là tia phân giác của góc BAC (1)

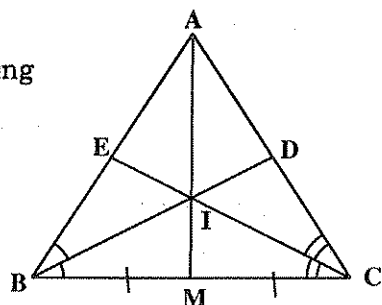
Mặt khác, $\triangle ABC$ cân tại A (gt), AM là đường trung tuyến (gt)

⇒ AM là đường phân giác

Nên AM là tia phân giác góc BAC (2)

Từ (1), và (2) có hai tia AI, AM trùng nhau.

Vậy ba điểm A, I, M thẳng hàng.



Bài 32. Cho tam giác ABC cân tại A, AH là đường cao. Các đường phân giác BD và CE của tam giác ABC cắt nhau ở I. Chứng minh rằng ba điểm A, H, I thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABC$ có BD, CE là hai đường phân giác cắt nhau tại I.

⇒ I là điểm cách đều ba cạnh của tam giác ABC.

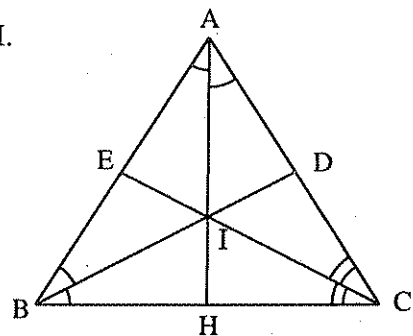
⇒ AI là tia phân giác của góc BAC (1)

Mặt khác, tam giác ABC cân tại A (gt), AH là đường cao (gt) nên cũng là đường phân giác

⇒ AH là tia phân giác của góc BAC (2)

Từ (1), (2) có hai tia AI, AH trùng nhau.

Vậy ba điểm A, H, I thẳng hàng.



Bài 33. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường cao BD và CE cắt nhau tại M. Gọi N là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

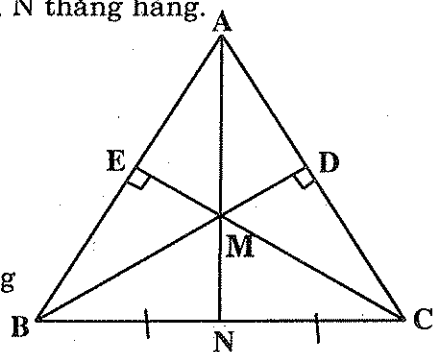
$\triangle ABC$ có BD, CE là hai đường cao cắt nhau tại M (gt)

⇒ M là trực tâm của tam giác ABC.

⇒ AM là đường cao của tam giác ABC

⇒ $AM \perp BC$ (1)

Mặt khác: $\triangle ABC$ cân tại A (gt), AN là đường trung tuyến (N là trung điểm cạnh BC)



$\Rightarrow AN$ là đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow AN \perp BC$ (2)

Từ (1), (2) có AM, AN trùng nhau

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Bài 34. Cho tam giác ABC cân tại A , các đường cao BD và CE cắt nhau tại M . Tia phân giác góc BAC cắt BC ở K . Chứng minh rằng A, M, K thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABC$ có BD, CE là hai đường cao cắt nhau tại M (gt)

$\Rightarrow M$ là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow AM \perp BC$ (1)

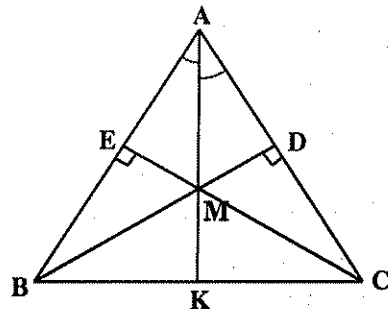
Mặt khác tam giác ABC cân tại A (gt) có AK là đường phân giác (AK là tia phân giác góc BAC)

$\Rightarrow AK$ là đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow AK \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) có AM, AK trùng nhau

Vậy ba điểm A, M, K thẳng hàng.



Bài 35. Cho tam giác ABC cân tại A . Đường cao AH cắt đường phân giác BD của tam giác ABC ở E . Trên tia BA lấy điểm K sao cho $BK = CD$. Chứng minh rằng ba điểm C, E, K thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABC$ cân tại A , AH là đường cao (gt)

$\Rightarrow AH$ là đường phân giác, đường trung trực của tam giác ABC .

$\Rightarrow EB = EC$ và $HB = HC$.

$\triangle ABC$ có AH, BD là hai đường cao cắt nhau tại E .

$\Rightarrow CE$ là đường phân giác của tam giác ABC .

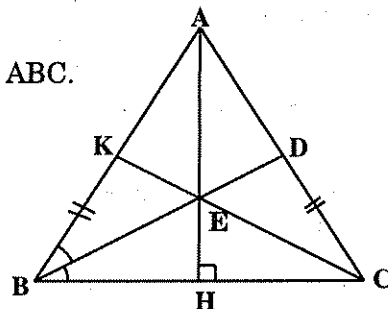
Do đó, $\widehat{KBE} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} = \widehat{DCE}$

Xét $\triangle KBE$ và $\triangle DCE$ có: $KB = CD$ (gt), $EB = EC$, $\widehat{KBE} = \widehat{DCE}$

Do đó $\triangle KBE = \triangle DCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{KEB} = \widehat{DEC}$

Ta có: $\widehat{CEK} = \widehat{KEB} + \widehat{BEC} = \widehat{DEC} + \widehat{BEC} = 180^\circ$

Vậy ba điểm C, E, K thẳng hàng.



Bài 36. Cho tam giác ABC vuông tại A , AD là đường phân giác. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = AB$. Đường thẳng qua C vuông góc với BD cắt AB ở K . Chứng minh rằng ba điểm K, D, E thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có: $AB = BE$ (gt), $\widehat{ABD} = \widehat{EBD}$ (BD là tia phân giác góc ABC),
 BD (cạnh chung)

Do đó $\triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BED}$

Mà $\widehat{BAD} = 90^\circ$ nên $\widehat{BED} = 90^\circ \Rightarrow DE \perp BC$ (1)

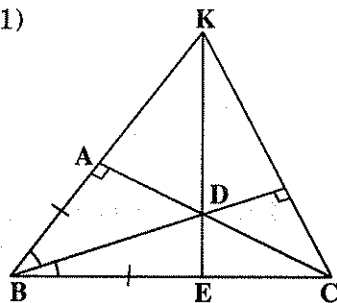
ΔKBC có CA, BD là hai đường cao cắt nhau tại D ($CA \perp KB, BD \perp CK$)

$\Rightarrow D$ là trực tâm của tam giác KBC

$\Rightarrow KD \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2), ta có DE, KD trùng nhau.

Vậy ba điểm K, D, E thẳng hàng.



Bài 37. Cho đường thẳng d , hai điểm A, B cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ chứa đường thẳng d . Gọi C là điểm sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng AC . M là điểm trên d sao cho $MA + MB = BC$. Chứng minh rằng ba điểm B, M, C thẳng hàng.

Lời giải

d là đường trung trực của đoạn thẳng AC (gt)

$M \in d$ (gt) $\Rightarrow MA = MC$.

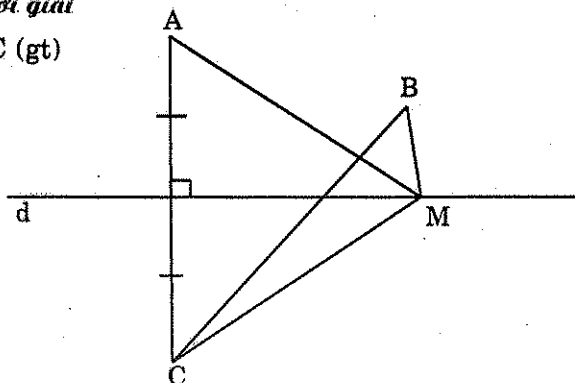
Xét ba điểm M, B, C có $MC + MB \geq BC$.

Do đó $MA + MB \geq BC$

Mà $MA + MB = BC$ (gt)

Dấu "=" xảy ra, do đó B, M, C thẳng hàng theo thứ tự đó.

Vậy ba điểm B, M, C thẳng hàng.



Bài 38. Cho điểm A nằm trong góc nhọn xOy . M, N là các điểm sao cho Ox là đường trung trực của AM , Oy là đường trung trực của AN . Các điểm B, C lần lượt trên các tia Ox, Oy sao cho $CV(ABC) = MN$ ($CV(ABC)$ là chu vi tam giác ABC).

Chứng minh rằng M, N, B thẳng hàng.

Lời giải

Ox là đường trung trực của AM , $B \in Ox$ (gt)

$\Rightarrow AB = MB$

Oy là đường trung trực của AN , $C \in Oy$ (gt)

$\Rightarrow AC = CN$

Xét bốn điểm M, B, C, N ta có:

$$MB + BC + CN \geq MN$$

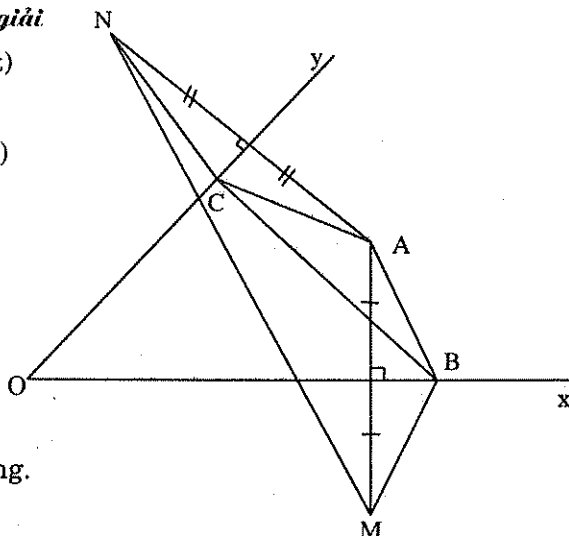
Do đó: $AB + BC + AC \geq MN$

$$CV(ABC) \geq MN$$

Mà $CV(ABC) = MN$ (gt)

Dấu "=" xảy ra, do đó M, B, C, N thẳng hàng.

Vậy ba điểm M, N, B thẳng hàng.



Bài 39. Cho tam giác nhọn ABC , BD và CE là hai đường cao. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B lấy điểm F sao cho $\widehat{CDF} = \widehat{ABC}$. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng BE và BC

$$\Rightarrow EB = EM$$

$\Rightarrow \triangle MBE$ cân tại M.

$$\Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MEB}$$

$$\text{Mà } \widehat{MBE} + \widehat{MCE} = \widehat{MEB} + \widehat{MEC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MCE} = \widehat{MEC}$$

$\Rightarrow \triangle MEC$ cân tại M

$$\Rightarrow ME = MC$$

$$\text{Nên có } ME = MB = MC = \frac{BC}{2}. \text{ Tương tự có } MD = MB = MC = \frac{BC}{2}$$

$$\text{Do vậy } \widehat{ADE} = 180^\circ - \widehat{MDE} - \widehat{MDC}$$

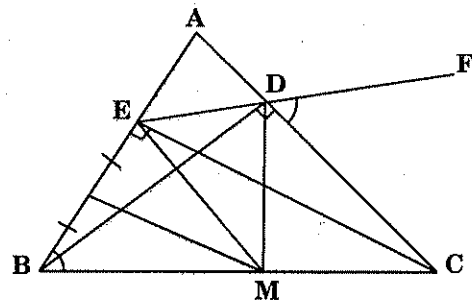
$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{DME}}{2} - \frac{180^\circ - \widehat{DMC}}{2}$$

$$= \frac{\widehat{DME} + \widehat{DMC}}{2} = \frac{\widehat{CME}}{2} = \frac{2\widehat{MBE}}{2} = \widehat{ABC}$$

$$\text{Nên } \widehat{CDF} = \widehat{ADE} (= \widehat{ABC})$$

$$\text{Ta có } \widehat{DEF} = \widehat{ADF} + \widehat{CDF} = \widehat{ADF} + \widehat{ADE} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.



Bài 40. Cho tam giác ABC vuông A có $AB < AC$. Gọi I là trung điểm của AC. Qua I vẽ đường thẳng vuông góc với BG. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC, hai đường thẳng này cắt nhau tại E. Qua I vẽ đường thẳng vuông góc với BE cắt BC ở T. Chứng minh rằng ba điểm A, T, E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi D là giao điểm của AB và IE

Ta có I là trực tâm tam giác BDE $\Rightarrow BI \perp CD$

$$\triangle IAD = \triangle ICE \text{ (g.c.g)} \Rightarrow ID = IE$$

$$\triangle IEA = \triangle IDC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{IEA} = \widehat{IDC}$$

$$\Rightarrow AE \parallel CD$$

Ta có $AE \parallel CD$ và $BI \perp CD$

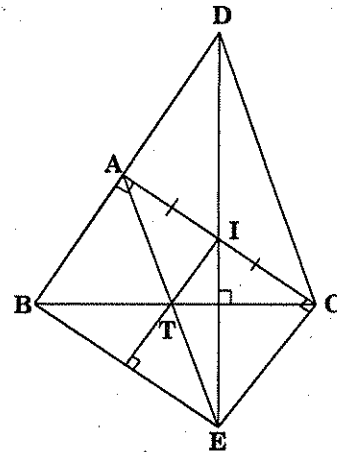
$$\text{Vậy } AE \perp BI \quad (1)$$

Xét $\triangle BIE$ có BC, IT là hai đường cao ($BC \perp IE$, $IT \perp BE$) cắt nhau tại T $\Rightarrow T$ là trực tâm của tam giác BIE $\Rightarrow ET$ là đường cao của tam giác BIE.

$$\text{Vậy } ET \perp BI \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có AE, ET trùng nhau

Vậy ba điểm A, T, E thẳng hàng.



Bài 41. Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến và có $AB^2 + 4AM^2 = AC^2$. Đường thẳng AM cắt đường thẳng vuông góc với BC tại B ở D, đường thẳng vuông góc với BC tại C ở E. Gọi F là giao điểm của AB và CE. Vẽ FI vuông góc với CD tại I.

Chứng minh rằng ba điểm F, I, M thẳng hàng.

Lời giải

Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho $MK = MA$

$$\triangle MAB = \triangle MKC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AB = CK, \widehat{MAB} = \widehat{MKC}$$

$$AC^2 = AB^2 + 4AM^2$$

$$= CK^2 + (2AM)^2 = CK^2 + AK^2$$

$$\Rightarrow \widehat{MKC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MAB} = 90^\circ$$

M là trực tâm của tam giác BEF $\Rightarrow FM \perp BE$

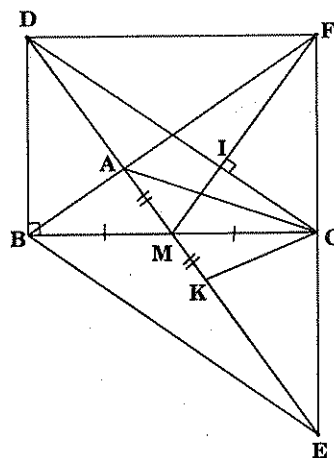
$$\triangle MBE = \triangle MCD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MCD}$$

$$\Rightarrow BE \parallel CD$$

Từ $FM \perp BE$, $BE \parallel CD \Rightarrow FM \perp CD$. Ta có $FI \perp CD$. Do đó FM, FI trùng nhau

Vậy ba điểm F, I, M thẳng hàng.



Bài 42. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh AC lấy D sao cho $\widehat{ABD} = \frac{1}{3} \widehat{ABC}$.

Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $\widehat{ACE} = \frac{1}{3} \widehat{ACB}$. Gọi F là giao điểm của BD và CE. Gọi

I, K lần lượt là chân đường vuông góc vẽ từ F xuống BC, AC. G, H là hai điểm lần lượt trên các tia FI và FK sao cho I là trung điểm của FG, K là trung điểm của FH.

Chứng minh rằng H, D, G thẳng hàng.

Lời giải

$$\triangle ABC \text{ vuông tại A (gt)} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{B} = 60^\circ \text{ nên } \widehat{C} = 30^\circ.$$

$$\widehat{ABD} = \frac{1}{3} \widehat{ABC} \text{ (gt)}, \widehat{ACE} = \frac{1}{3} \widehat{ACB} \text{ (gt)}$$

$$\text{Do đó } \widehat{ABD} = 20^\circ, \widehat{DBC} = 40^\circ,$$

$$\widehat{ACE} = 10^\circ, \widehat{ECB} = 20^\circ.$$

Ta có: $\widehat{DFC} = \widehat{FBC} + \widehat{FCB}$ ($\widehat{DFC}$ là góc ngoài của tam giác BCF)

$$\text{Nên } \widehat{DFC} = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$$

$$CK \perp FH \text{ (gt)}, KF = KH \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow CK \text{ là đường trung trực của FH}$$

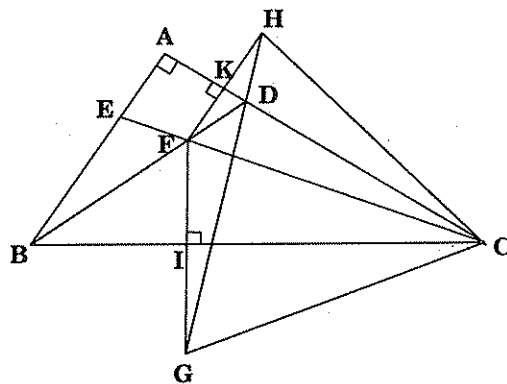
$$\Rightarrow CH = CF \Rightarrow \triangle CHF \text{ cân tại C}$$

$\triangle CHF$ cân tại C, CK là đường trung trực nên CK cũng là đường phân giác

$$\text{nên } \widehat{DCH} = \widehat{DCF} = 10^\circ$$

Xét $\triangle CHD$ và $\triangle CFD$ có: $CH = CF$, CD (cạnh chung), $\widehat{HCD} = \widehat{FCD}$

$$\text{Do đó } \triangle CHD = \triangle CFD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{CHD} = \widehat{CFD}$$



Vậy $\widehat{CHD} = 60^\circ$. Tương tự ta có tam giác CFG cân tại C, có CI là đường phân giác.

Nên $CF = CG$, $\widehat{ICG} = \widehat{ICF} = 20^\circ$.

Ta có $CG = CH (= CF) \Rightarrow \triangle CGH$ cân tại C.

Mặt khác: $\widehat{GCH} = \widehat{ICG} + \widehat{ICF} + \widehat{DCH} + \widehat{DCF}$
 $= 20^\circ + 20^\circ + 10^\circ + 10^\circ = 60^\circ$

Ta có $\widehat{CHG} = \widehat{CHD} (= 60^\circ) \Rightarrow$ Hai tia HD, HG trùng nhau

Vậy ba điểm H, D, G thẳng hàng.

Bài 43. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ MF vuông góc với BC tại F. Gọi K là điểm trên tia đối của tia AB và $AK = AE$. Vẽ đường thẳng m vuông góc với KA tại K. Trên đường thẳng m lấy điểm G sao cho $KG = HE$ (G và H nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ KE). Chứng minh rằng G, H, F thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle AEH$ và $\triangle AKG$ có: $AE = AK$ (gt), $\widehat{AEH} = \widehat{AKG} (= 90^\circ)$, $HE = KG$ (gt)

Do đó $\triangle AEH = \triangle AKG$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{KAG}$.

Ta có $\widehat{GAH} = \widehat{HAK} + \widehat{KAG}$
 $= \widehat{HAK} + \widehat{EAH} = 180^\circ$

$\Rightarrow G, A, H$ thẳng hàng (1)

$\triangle ABC$ có BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H (gt)

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC

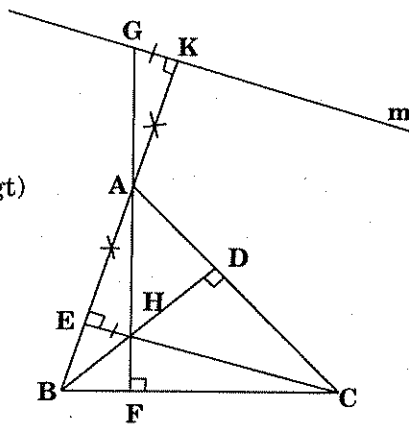
$\Rightarrow AH$ là đường cao của tam giác ABC $\Rightarrow AH \perp BC$.

$AH \perp BC$, $HF \perp BC \Rightarrow AH, HF$ trùng nhau

$\Rightarrow A, H, F$ thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) có G, A, H, F thẳng hàng

Vậy ba điểm G, H, F thẳng hàng.



Bài 44. Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến. Đường thẳng d đi qua M (d không trùng với BC). Trên đường thẳng d lấy hai điểm D, E sao cho M là trung điểm đoạn thẳng DE. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, N là trung điểm của đoạn thẳng AE. Chứng minh rằng ba điểm D, G, N thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến (gt)

Xét $\triangle ADE$ có:

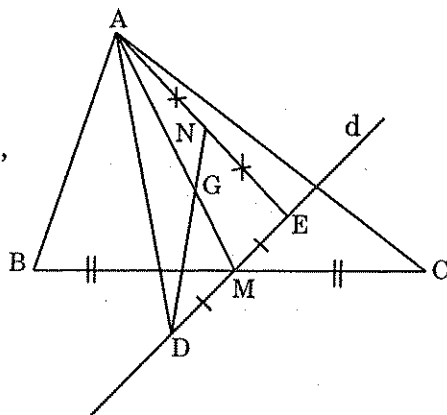
AM là đường trung tuyến (M là trung điểm của DE),

G thuộc đoạn thẳng AM và $AG = \frac{2}{3}AM$.

Do đó G là trọng tâm của tam giác ADE.

Mà DN là đường trung tuyến của tam giác ADE (N là trung điểm của AE), nên DN đi qua G.

Vậy ba điểm D, G, N thẳng hàng.



Bài 45. Cho hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại O. Trên xx' lấy ba điểm A, B, C sao cho $OA = AB = BC$, trên yy' lấy ba điểm D, E, F sao cho $OD = OE = EF$. Gọi M là giao điểm của DA và EC. Chứng minh rằng ba điểm B, M, F thẳng hàng.

Lời giải

CO là đường trung tuyến của $\triangle DCE$.

Ta lại có $AC = \frac{2}{3}OC$, nên suy ra A là trọng tâm của $\triangle DCE$.

DM là đường trung tuyến của $\triangle DEC \Rightarrow EM = MC$

$\triangle OBE$ có $OA = AB$ và $EO = EF$.

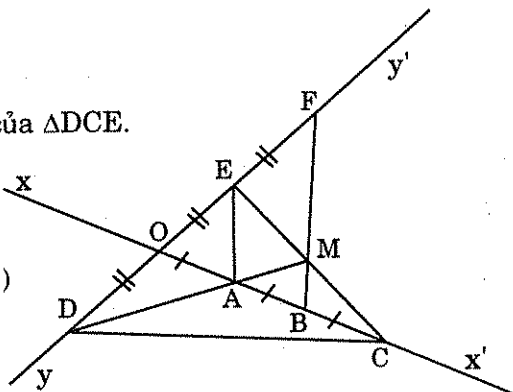
Chứng minh được $AE \parallel BF$ (1) (Xem bài 21)

Tương tự: Xét $\triangle ACE$ có $ME = MC$ và $BA = BC$

Nên có $MB \parallel AE$ (2)

Từ (1), (2) có BF, MB trùng nhau

Vậy ba điểm B, M, F thẳng hàng.



Bài 46. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), AD là đường phân giác. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = AB$. Các đường trung trực của BE và AC cắt nhau ở K. Chứng minh rằng ba điểm A, K, D thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle CEK$ có:

$KA = KC$ (K thuộc đường trung trực của AC),

$KB = KE$ (K thuộc đường trung trực của BE)

$AB = CE$ (gt)

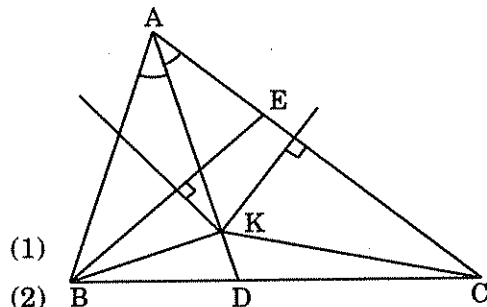
Do đó $\triangle ABK = \triangle CEK$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{KAB} = \widehat{KCE}$

$KA = KC \Rightarrow \triangle KAC$ cân tại K $\Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{KCE}$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KAB} = \widehat{KAC} \Rightarrow AK$ là tia phân giác góc BAC

Do vậy hai tia AK, AD trùng nhau

Vậy ba điểm A, K, D thẳng hàng.



Bài 47. Cho tam giác ABC, AD là đường phân giác. M, N lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $AM = CN$. Các đường trung trực của MN và AC cắt nhau ở K. Chứng minh rằng A, K, D thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle KAM$ và $\triangle KCN$ có:

$KA = KC$ (K thuộc đường trung trực của AC),

$KM = KN$ (K thuộc đường trung trực của MN)

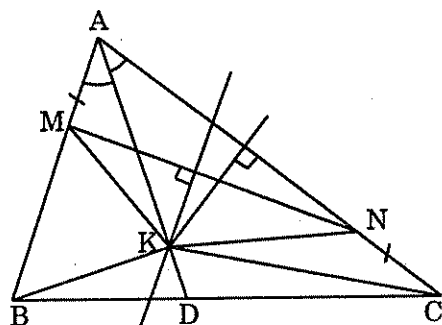
$AM = CN$ (gt)

Do đó $\triangle KAM = \triangle KCN$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{KAM} = \widehat{KCN}$

Mặt khác $KA = KC$

$\Rightarrow \triangle KAC$ cân tại K.

$\Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{KCN}$



Nên $\widehat{KAM} = \widehat{KAC} = (\widehat{KCN}) \Rightarrow AK$ là tia phân giác của góc BAC

Mà AD là tia phân giác của góc BAC (gt)

Do đó hai tia AK, AD trùng nhau

Vậy ba điểm A, K, D thẳng hàng.

* **Nhận xét:** Bài toán 47 là bài toán tổng quát của bài toán 46.

Bài 48. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A vẽ các điểm D, E sao cho BD vuông góc và bằng BA, BE vuông góc và bằng BC. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE. Chứng minh ba điểm A, D, M thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DBE$ có: $AB = BD$ (gt), $BC = BE$ (gt), $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$ (cùng phụ với góc CBD)

Do đó $\triangle ABC = \triangle DBE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDE}$, nên $\widehat{BDE} = 90^\circ$.

Gọi F là giao điểm của ED và AC.

Ta có $AB \perp BD$, $DF \perp BD \Rightarrow AB \parallel DF$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle DFA$ có:

$\widehat{BDA} = \widehat{FAD}$, AD (cạnh chung), $\widehat{BAD} = \widehat{FDA}$

Do đó $\triangle ABD = \triangle DFA$ (g.c.g)

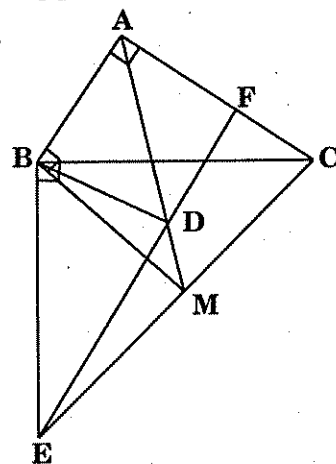
Mà $AB = BD$. Do đó $AB = BD = AF = DF$

Chứng minh được $BM = FM \left(= \frac{BC}{2} \right)$

Ta có: $AB = AF$, $BD = DF$, $BM = FM$

$\Rightarrow A, D, M$ cùng nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BF

Vậy ba điểm A, D, M thẳng hàng.



Bài 49. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Đường trung trực của cạnh BC cắt BC ở I, cắt AC ở D. Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = DC$. Gọi M là giao điểm của AC và EI. N là trung điểm của đoạn thẳng CE. Chứng minh rằng ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Lời giải

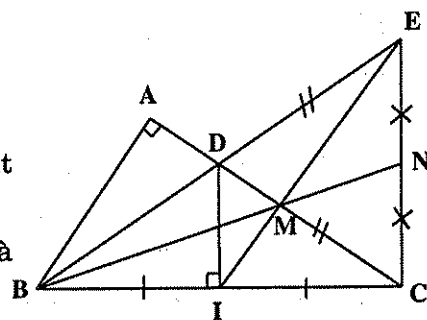
DI là đường trung trực của cạnh BC (gt) $\Rightarrow DB = DC$

Mà $DC = DE$ (gt) nên $DB = DE$.

Xét $\triangle EBC$ có EI, CD là hai đường trung tuyến cắt nhau tại M $\Rightarrow M$ là trọng tâm của tam giác EBC

Mà BN là đường trung tuyến của tam giác EBC (N là trung điểm của CE). Do đó BN đi qua M.

Vậy ba điểm B, M, N thẳng hàng.



Bài 50. Cho hai tam giác vuông ABC, DBC có chung cạnh huyền BC (A, D cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC). Vẽ tia Ax sao cho AC là tia phân giác của góc DAx, vẽ tia Dy sao cho DB là tia phân giác của góc ADy. Gọi E là giao điểm của hai tia Ax và Dy. Chứng minh rằng B, E, C thẳng hàng.

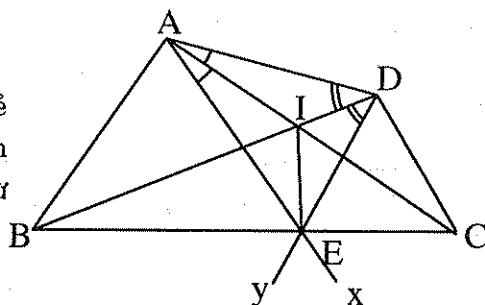
Gọi I là giao điểm của AC và DB

EI là tia phân giác của $\widehat{AED}$

$\triangle ADE$ có B là giao điểm của đường phân giác kẻ từ đỉnh D và đường phân giác ngoài kẻ từ đỉnh A. Do vậy EB là đường phân giác ngoài kẻ từ đỉnh E. Nên có $EI \perp EB$

Chứng minh tương tự có $EI \perp EC$

Vậy B, E, C thẳng hàng.



Bài 51. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ AB, không chứa C vẽ tia Bx vuông góc với AB tại B, trên nửa mặt phẳng bờ AC có chứa B vẽ tia Cy vuông góc với AC tại C. Trên các tia Bx, Cy lấy các điểm D, E sao cho $BD = CE$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng ba điểm M, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là giao điểm của BD và CE.

Qua E vẽ đường thẳng song song với BC cắt BD tại F.

Xét $\triangle ABN$ ($\widehat{ABN} = 90^\circ$) và $\triangle CAN$ ($\widehat{ACN} = 90^\circ$) có AN (cạnh chung), $AB = AC$.

Do đó $\triangle ABN = \triangle CAN$ (Cạnh huyền–cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BN = CN$

$\Rightarrow \triangle NBC$ cân tại N.

$\Rightarrow \widehat{NBC} = \widehat{BCN}$

Mà $\widehat{NEF} = \widehat{NCB}$ ($BC \parallel EF$),

$\widehat{NFE} = \widehat{NBC}$ ($BC \parallel EF$).

Nên $\widehat{NEF} = \widehat{NFE} \Rightarrow \triangle NEF$ cân tại N $\Rightarrow NE = NF$

Ta có $BF = BN + NF = CN + NE = CE$

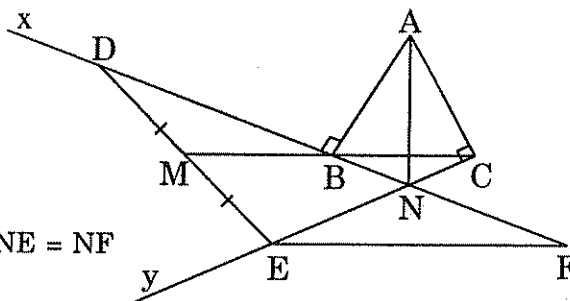
Do đó $BF = BD (=CE)$

$\triangle DEF$ có B, M lần lượt là trung điểm của DF, DE

Chứng minh được $BM \parallel EF$ (Xem bài 21)

Ta có $BM \parallel EF$, $BC \parallel EF \Rightarrow BM, BC$ trùng nhau (Tiên đề O-clit)

Vậy ba điểm M, B, C thẳng hàng.



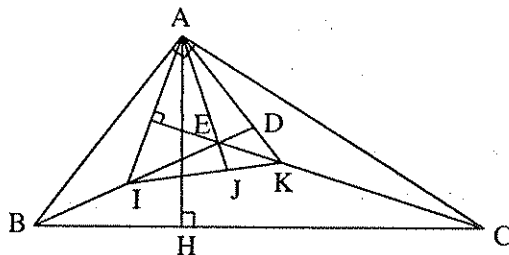
Bài 52. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E, I, K lần lượt là giao điểm các đường phân giác của các tam giác ABC, ABH, ACH. Vẽ EJ vuông góc với IK tại J. Chứng minh rằng ba điểm A, E, J thẳng hàng.

Lời giải

Gọi D là giao điểm của BE và AK

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{CAH}$ (cùng phụ với góc BAH)

Mà $\widehat{ABI} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$, $\widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{CAH}$



Nên $\widehat{ABI} = \widehat{DAC}$

Ta có $\widehat{DAC} + \widehat{BAD} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{ABI} + \widehat{BAD} = \widehat{DAC} + \widehat{BAD} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại D $\Rightarrow BD \perp AK$

Tương tự $KE \perp AI$

$\triangle AIK$ có IE, KE là hai đường cao cắt nhau tại E $\Rightarrow E$ là trực tâm của tam giác AIK

$\Rightarrow AE \perp IK$

Mà $EJ \perp IK$ (gt). Do đó AE, EJ trùng nhau

Vậy A, E, J thẳng hàng.

Bài 53. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của HB, HA. Vẽ EF vuông góc với AD tại F. Chứng minh rằng ba điểm C, E, F thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABH$ có D, E lần lượt là trung điểm của HB, HA

Chứng minh được $DE \parallel AB$ (Xem bài 21)

Ta có $AB \perp AC$ ($\triangle ABC$ vuông tại A) và $DE \parallel AB \Rightarrow DE \perp AC$

$\triangle ADC$ có AH, DE là hai đường cao ($AH \perp DC$, $DE \perp AC$) cắt nhau tại E

$\Rightarrow E$ là trực tâm của tam giác ADC

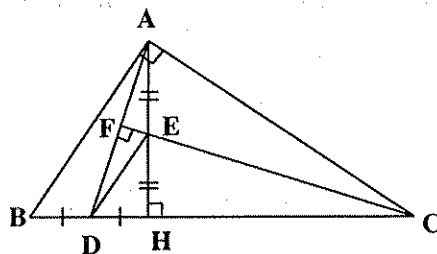
$\Rightarrow CE$ là đường cao của tam giác ADC

$\Rightarrow CE \perp AD$ (1)

Mà $EF \perp AD$ (gt) (2)

Từ (1) và (2) có CE, EF trùng nhau

Vậy ba điểm C, E, F thẳng hàng.



Bài 54. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A bờ là đường thẳng BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD \perp BA$, $BD = BA$, $CE \perp CA$, $CE = CA$.

Gọi T là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng A, T, H thẳng hàng.

Lời giải

Trên tia đối tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$.

Gọi M là giao điểm của IB và DC.

Ta có $\triangle ABI = \triangle BDC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IBA} = \widehat{BDC}$.

Ta lại có $\widehat{DBM} + \widehat{IBA} = \widehat{DBA} = 90^\circ$

Xét $\triangle BDM$ có $\widehat{DBM} + \widehat{BDM} = 90^\circ$

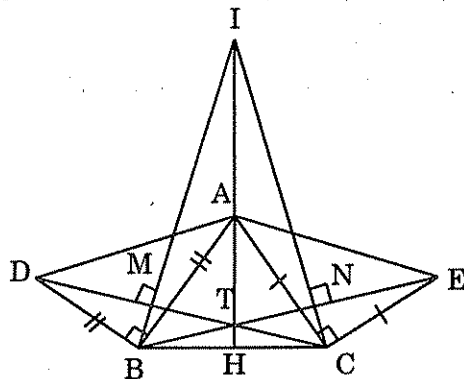
Nên $\widehat{DMB} = 90^\circ \Rightarrow IB \perp DC$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $BE \perp IC$

$\triangle BIC$ có IH, BE, CD là ba đường cao nên AH, BE, CD cũng đi qua một điểm

Do vậy T nằm trên AH

Vậy A, T, H thẳng hàng.



Bài 55. Chứng minh rằng trực tâm, trọng tâm và giao điểm các đường trung trực của một tam giác nằm trên cùng một đường thẳng.

Xét $\triangle ABC$ có H là trực tâm, G là trọng tâm, O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC.

Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

Trên tia đối của tia OA lấy điểm D sao cho $OD = OA$.

Ta có $OA = OC$

$\Rightarrow \triangle OAC$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA}$

Và $OC = OD \Rightarrow \triangle OCD$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODC}$

Ta có: $\widehat{OAC} + \widehat{ODC} = \widehat{OCA} + \widehat{OCD} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ$

Ta có $BH \perp AC$ (H là trực tâm của tam giác ABC), $DC \perp AC$ ($\widehat{ACD} = 90^\circ$). Do đó $BH \parallel DC$

Tương tự $DB \parallel CH$

$\triangle BHC = \triangle CDB$ (c.g.c) $\Rightarrow BH = CD$

$\triangle MBH = \triangle MCD$ (c.g.c) $\Rightarrow MH = MD, \widehat{BMH} = \widehat{CMD}$

$\widehat{HMD} = \widehat{BMH} + \widehat{BMD} = \widehat{CMD} + \widehat{BMD} = 180^\circ$

$\Rightarrow H, M, D$ thẳng hàng.

Xét $\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến, G là trọng tâm (gt)

$\Rightarrow G$ thuộc đoạn thẳng AM và $AG = \frac{2}{3}AM$.

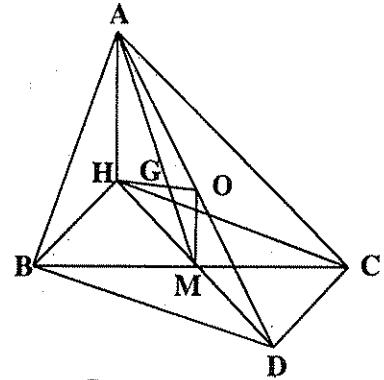
Xét $\triangle AHD$ có AM là đường trung tuyến, G thuộc đoạn thẳng AM và $AG = \frac{2}{3}AM$.

$\Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác AHD.

Mà HO là đường trung tuyến của tam giác AHD

Do vậy HO đi qua G

Vậy ba điểm H, G, O thẳng hàng.



CÓ THỂ BẠN ĐÃ BIẾT?

MA PHƯƠNG – MA VIÊN – MA LĂNG

I. MA PHƯƠNG

Ma phương là những hình vuông số trong đó số ô của hình vuông là $n \times n$ (n là số tự nhiên) chẳng hạn 9, 16, 25, 36,... trong đó người ta sắp xếp các số không lặp lại. Những số này là các số tự nhiên liên tiếp hoặc các số lẻ liên tiếp hoặc các số chẵn liên tiếp hoặc là các số cách đều nào đó sao cho tổng số các số trong ô ở mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo bằng nhau, gọi là “MA TỔNG”.

Hình sau là Ma phương 3 x 3, có thể lập ma phương này như sau:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

- Vẽ thêm 4 ô giữa của bốn cạnh rồi viết theo thứ tự ba số một lần như bên.
- Chuyển số ở các ô vẽ thêm về các ô phía đối diện thuộc hình vuông.

		3		
	2		6	
1		5		9
	4		8	
		7		

Hình bên là Ma phương 5 x 5

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Có thể lập Ma phương này như sau:

			5					
			4		10			
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
			16		22			
				21				

Ma phương $(2 \times m + 1) \times (2 \times m + 1)$ với $m \in \mathbb{N}^*$ cũng lập được như trên.

Hình sau là Ma phương 4 x 4

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Có thể lập Ma phương này như sau:

– Vẽ hình vuông 4 x 4 ô vuông, kẻ hai đường chéo.

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

Điền các số như sau.

– Điền các số từ 1 đến 16 từ trái sang phải, từ trên xuống dưới, chú ý các số nào nằm trên đường chéo thì loại ra không ghi.

– Điền các số vừa bị loại vào các ô còn lại cũng theo thứ tự từ trái sang phải, từ trên xuống dưới nhưng bắt đầu từ số 16 ngược xuống đến 1.

Hình bên là Ma phương 6 x 6

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

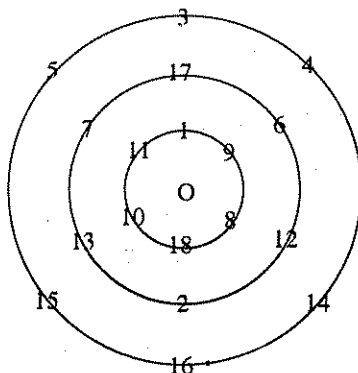
Hình sau là Ma phương 8 x 8

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	59
57	7	6	60	61	3	2	64

II. MA VIÊN

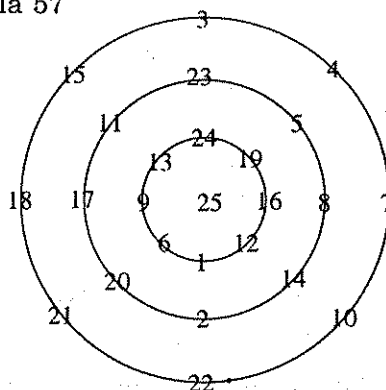
Ma viên là hai hay nhiều đường tròn cùng tâm và nhiều đường kính chia mỗi đường tròn thành nhiều cung tròn bằng nhau, trên mỗi đường tròn được ghi các số không lặp lại. Những số này là các số tự nhiên liên tiếp hoặc các số lẻ liên tiếp hoặc các số chẵn liên tiếp hoặc... sao cho tổng các số trên mỗi đường tròn bằng tổng các số trên mỗi đường kính.

Hình sau là Ma viên:



- Tổng các số trên mỗi đường tròn là 57
- Tổng các số trên mỗi đường kính là 57

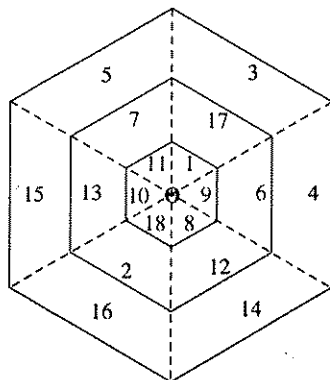
Thêm một Ma viên khác:



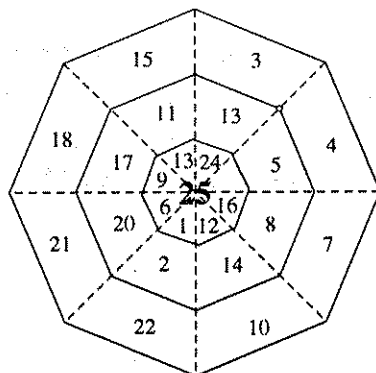
- Tổng các số trên mỗi đường tròn là 100
- Tổng các số trên mỗi đường kính là 100

Có thể chuyển “Ma viên” thành “Ma lăng”.

III. MA LỤC LĂNG



IV. MA BÁT LĂNG



V. MỘT CÂU ĐỐ HAY VÀ MỘT LỜI GIẢI BẤT NGỜ!

Câu đố:

Hãy điền vào các ô vuông của bảng vuông 4×4 các số khác 0; 1; -1 sao cho tích các số trong ô ở mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo bằng nhau.

Câu đố này chúng tôi đã “HẠ GỤC” rất nhiều người. Các bạn sẽ rất bất ngờ với lời giải sau:

a^{16}	a^2	a^3	a^{13}
a^5	a^{11}	a^{10}	a^8
a^9	a^7	a^6	a^{12}
a^4	a^{14}	a^{15}	a^1

Với a là số khác 0; 1; -1.

Như vậy chúng ta có vô vàn cách giải cho câu đố trên.

Lời giải thật bất ngờ vì chúng ta đã vận dụng Ma phương 4×4 đã biết.

Hơn thế nữa: từ Ma phương, Ma viên, Ma lăng ở trên chúng ta sẽ đề xuất được các câu đố rất hay và rất khó!

CHƯƠNG I

TỨ GIÁC, ĐA GIÁC DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$, AB, AD, AC là tia phân giác của góc BAD. Trên nửa mặt phẳng bờ BD không chứa C vẽ tam giác BDE đều. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BD. Chứng minh rằng ba điểm C, K, E thẳng hàng.

Lời giải

Trên cạnh AB lấy M sao cho $AM = AD$.

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ADC$ có:

$AM = AD$, $\widehat{MAC} = \widehat{DAC}$ (AC là tia phân giác của góc BAD), AC (cạnh chung).

Do đó $\triangle AMC = \triangle ADC$ (c.g.c) $\Rightarrow CM = CD$, $\widehat{AMC} = \widehat{ADC}$

Tứ giác ABCD có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$

Mà $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$, nên $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

$\widehat{AMC} + \widehat{BMC} = 180^\circ$ (Kề bù)

Do vậy $\widehat{CBM} = \widehat{BMC}$

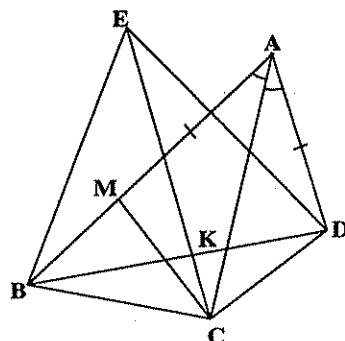
$\Rightarrow \triangle BCM$ cân tại C

$\Rightarrow BC = CM$

Ta có: $BC = CD$ ($= CM$), $KB = KD$ (K là trung điểm của BD), $EB = ED$ ($\triangle BDE$ đều)

Do đó C, K, E cùng thuộc đường trung trực của BD.

Vậy ba điểm C, K, E thẳng hàng.



Bài 2. Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} = \hat{C} = 120^\circ$, $AB = AD$. Vẽ hình bình hành DACE. Đường thẳng vuông góc với DE tại D cắt đường thẳng vuông góc với CE tại C ở F. Chứng minh ba điểm A, F, E thẳng hàng.

Lời giải

Giả sử $AB \neq AC$. Xét $AB > AC$

Ta có $AD > AC$ vì $AB = AD$ (gt)

Tứ giác ABCD có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$, $\hat{A} = \hat{C} = 120^\circ$

Nên $\hat{B} + \hat{D} = 120^\circ$

$\triangle ABC$ có $AB > AC \Rightarrow \widehat{ACB} > \widehat{ABC}$

$\triangle ACD$ có $AD > AC \Rightarrow \widehat{ACD} > \widehat{ADC}$

Do đó: $\widehat{ACB} + \widehat{ACD} = \widehat{ABC} + \widehat{ADC} \Rightarrow 120^\circ > 120^\circ$ (Vô lý)

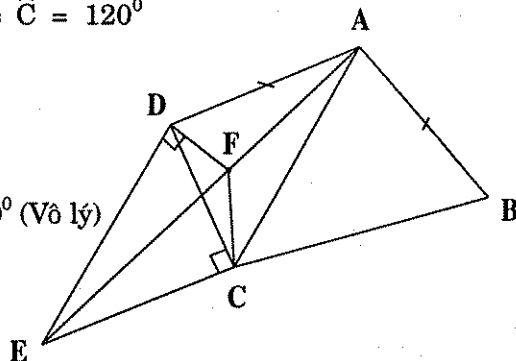
Vậy $AB > AC$ là sai.

Tương tự $AB < AC$ là sai

Do vậy $AB = AC$.

Hình bình hành DACE có $AD = AC$ ($= AB$) nên là hình thoi

$\Rightarrow EA$ là tia phân giác góc DEC (1)



Xét $\triangle DEF$ ($\widehat{EDF} = 90^\circ$) và $\triangle CEF$ ($\widehat{ECF} = 90^\circ$) có:

EF (cạnh chung), ED = EC (tứ giác DACE là hình thoi)

Do đó $\triangle DEF = \triangle CEF$ (cạnh huyền–cạnh góc vuông).

$\Rightarrow \widehat{DEF} = \widehat{CEF}$

$\Rightarrow$ EF là tia phân giác của góc DEC (2)

Từ (1) và (2) có EA, EF trùng nhau

Vậy ba điểm A, F, E thẳng hàng.

Bài 3. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AD + BC = CD$. Tia phân giác của góc BAD cắt tia phân giác góc ABC ở E. Chứng minh rằng ba điểm C, E, D thẳng hàng.

Lời giải

Gọi E' là giao điểm của tia phân giác góc BAD và CD.

Ta có $\widehat{BAE'} = \widehat{DAE'}$, $\widehat{AE'D} = \widehat{BAE'}$ (so le trong và $AB \parallel CD$)

$\Rightarrow \triangle DAE'$ cân tại D.

Do đó $\widehat{DAE'} = \widehat{AE'D} \Rightarrow AD = DE'$

$AD + BC = DC$, $DC = DE' + E'C$,

$AD = DE' \Rightarrow BC = E'C$

$\Rightarrow \triangle CBE'$ cân tại C

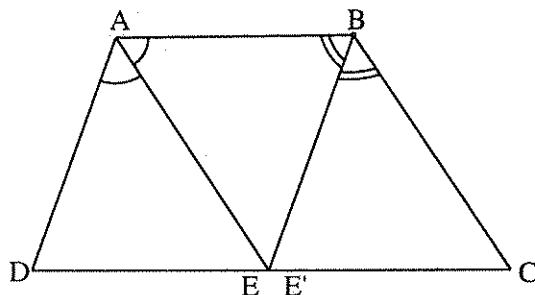
$\Rightarrow \widehat{CBE'} = \widehat{CE'B}$

Mà $\widehat{CE'B} = \widehat{ABE'}$ (so le trong và $AB \parallel CD$)

Nên $\widehat{CBE'} = \widehat{ABE'} \Rightarrow BE'$ là tia phân giác của góc ABC

Nên $E' \in E$.

Vậy ba điểm C, E, D thẳng hàng.



Bài 4. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, AC, BC. Chứng minh rằng ba điểm E, F, K thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ACD$ có E, F lần lượt là trung điểm của AD, AC (gt)

$\Rightarrow$ EF là đường trung bình của tam giác ACD

$\Rightarrow EF \parallel CD$ (1)

Mặt khác hình thang ABCD ($AB \parallel CD$)

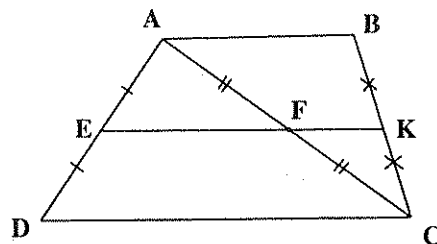
Có E, K lần lượt là trung điểm của AD, BC

$\Rightarrow$ EK là đường trung bình của hình thang ABCD

$\Rightarrow EK \parallel CD$ (2)

Từ (1) và (2) có EF, EK trùng nhau.

Vậy ba điểm E, F, K thẳng hàng.



Bài 5. Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến. Gọi D là trung điểm của AM, E là điểm trên cạnh AC sao cho $AE = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh rằng ba điểm B, D, E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là trung điểm của EC. Ta có $EN = NC$

Mà $AE = \frac{1}{3}AC$ (gt). Do đó $AE = EN = NC$

Xét $\triangle BEC$ có M, N lần lượt là trung điểm của BC, EC.

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác EBC

$\Rightarrow BE \parallel MN$ (1)

Xét $\triangle AMN$ có D, E lần lượt là trung điểm của AM, AN.

$\Rightarrow DE$ là đường trung bình của tam giác DMN

$\Rightarrow DE \parallel MN$ (2)

Từ (1) và (2) có BE, DE trùng nhau. Vậy ba điểm B, D, E thẳng hàng.

Bài 6. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi K là giao điểm của AD và BC, I là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm cạnh CD. Chứng minh rằng ba điểm K, I, M thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle KCD$ có $\widehat{KCD} = \widehat{KDC}$ (tứ giác ABCD là hình thang cân)

$\Rightarrow \triangle KCD$ cân tại K

$\Rightarrow KC = KD$ (1)

Xét $\triangle ACD$ và $\triangle BDC$ có: $AC = BD$ (tứ giác ABCD là hình thang cân)

Do đó $\triangle ACD = \triangle BDC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BDC}$

$\Rightarrow \triangle ICD$ cân tại I

$\Rightarrow IC = ID$ (2)

Mà $MC = MD$ (M là trung điểm của cạnh CD)

Từ (1), (2) và (3) có K, I, M cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng CD.

Vậy ba điểm K, I, M thẳng hàng.

Bài 7. Cho tứ giác ABCD có $AC \perp BD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Đường thẳng qua E vuông góc với CD cắt đường thẳng qua F vuông góc với AD ở M. Chứng minh rằng ba điểm B, M, D thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là trung điểm của BD

Xét $\triangle ABD$ có E, N lần lượt là trung điểm của AB, BD.

$\Rightarrow EN$ là đường trung bình của tam giác ABD

$\Rightarrow EN \parallel AD$

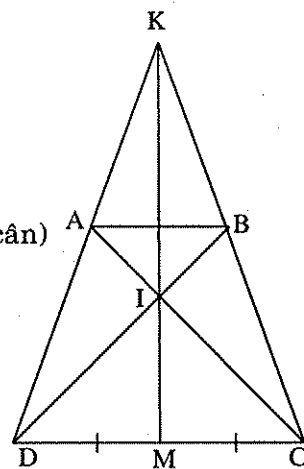
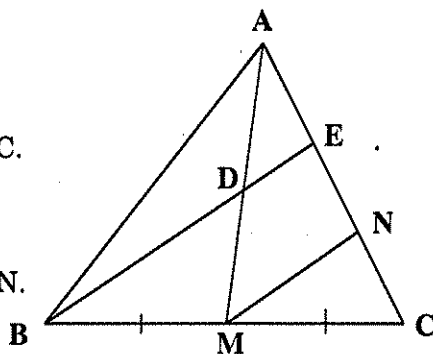
Mà $FM \perp AD$ (gt), nên $FM \perp EN$

Chứng minh tương tự có $EM \perp NF$

$\triangle ENF$ có EM, FM là hai đường cao cắt nhau tại M

$\Rightarrow M$ là trực tâm của tam giác ENF

$\Rightarrow NM$ là đường cao của tam giác ENF



$\Rightarrow NM \perp EF$

$\triangle ABC$ có E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow EF \parallel AC$

$EF \parallel AC, BD \perp AC \Rightarrow BD \perp EF$

Ta có $BD \perp EF, NM \perp EF, N \in BD$. Do đó BD, MN trùng nhau

Vậy ba điểm B, M, D thẳng hàng.

Bài 8. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), E là trung điểm của cạnh AD. Các đường phân giác góc ngoài đỉnh A và D cắt nhau tại M, các đường phân giác của các góc ngoài đỉnh B và C cắt nhau tại N. Chứng minh rằng ba điểm M, N, E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi K là giao điểm của AM và CD, L là giao điểm của BN và CD.

Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt)

$\widehat{A_1} = \widehat{K_1}$ (so le trong và $AB \parallel CD$)

$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{K_1}$

$\Rightarrow \triangle ADK$ cân tại D

Mà DM là đường

phân giác góc ADK (gt)

$\Rightarrow DM$ là đường trung tuyến của tam giác ADK

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AK

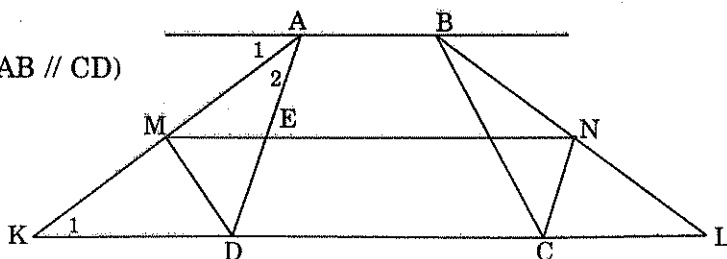
Tương tự N là trung điểm của BL

Ta có MN là đường trung bình của hình thang ABLK $\Rightarrow MN \parallel KL$ (1)

Tương tự EN $\parallel$ KL (2)

Từ (1) và (2) có MN, EN trùng nhau (Tiên đề Ôclit)

Vậy ba điểm M, N, E thẳng hàng.



Bài 9. Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến. D là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3AD$. Gọi N là giao điểm của AM và BD. Gọi E là điểm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AE$. Chứng minh rằng ba điểm C, N, E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CD, BE.

Mà $AC = 3AD$ (gt), $AB = 3AE$ (gt)

Do đó $AE = EK = KB, AD = DI = IC$

Xét $\triangle BDC$ có $BM = MC, DI = IC$

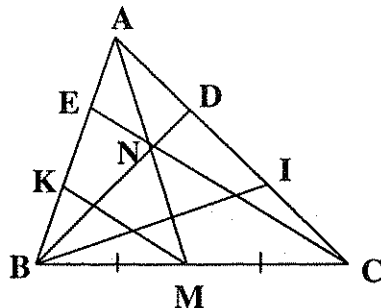
$\Rightarrow MI$ là đường trung bình của tam giác BDC

$\Rightarrow MI \parallel BD$

Xét $\triangle AMI$ có $ND \parallel MI, AD = DI \Rightarrow AN = NM$

Xét $\triangle AKM$ có $AE = EK, AN = NM$

$\Rightarrow EN$ là đường trung bình của tam giác AKM



$$\Rightarrow EN \parallel KM \quad (1)$$

Xét $\triangle BEC$ có $KB = KE$, $BM = MC$

$\Rightarrow KM$ là đường trung bình của tam giác BEC

$$\Rightarrow EC \parallel KM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có EN , EC trùng nhau

Vậy ba điểm C , N , E thẳng hàng.

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AC , BD . Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi I là trung điểm của MN . Chứng minh rằng ba điểm A , G , I thẳng hàng.

Lời giải

Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng CG .

$\triangle BCD$ có G là trọng tâm (gt), CN là đường trung tuyến (N là trung điểm của BD)

$$\Rightarrow G \text{ thuộc đoạn thẳng } CN \text{ và } CG = \frac{2}{3} CN.$$

Do đó $CK = KG = GN$.

Xét $\triangle MNK$ có $IM = IN$, $GN = KG$

$\Rightarrow IG$ là đường trung bình của tam giác MNK .

$$\Rightarrow IG \parallel MK \quad (1)$$

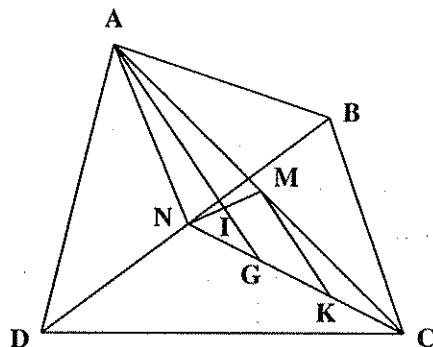
Xét $\triangle AGC$ có $MA = MC$ (gt), $CK = KG$

$\Rightarrow MK$ là đường trung bình của tam giác AGC

$$\Rightarrow AG \parallel MK \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có IG , AG trùng nhau

Vậy ba điểm A , G , I thẳng hàng.



Bài 11. Cho tam giác ABC . M là điểm nằm trong tam giác ABC . Vẽ các hình bình hành $MBDC$, $MAED$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng M , G , E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là giao điểm của BC và DM . Tứ giác $MBDC$ là hình bình hành nên N là trung điểm của BC và DM .

$\triangle ABC$ có AN là đường trung tuyến, G là trọng tâm của tam giác ABC (gt)

$$\Rightarrow G \text{ thuộc đoạn thẳng } AN \text{ và } AG = \frac{2}{3} AN.$$

$\triangle AMD$ có:

AN là đường trung tuyến (N là trung điểm của DM),

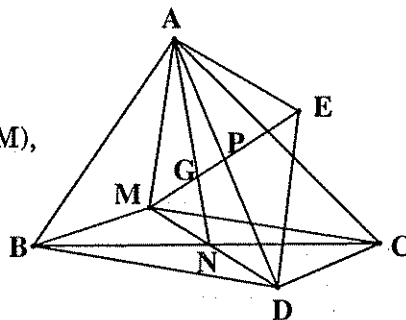
$$G \text{ thuộc đoạn thẳng } AN \text{ và } AG = \frac{2}{3} AN.$$

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác AMD .

Gọi P là giao điểm của AD và EM .

Tứ giác $MAED$ là hình bình hành nên P là trung điểm của AD .

Do vậy MP đi qua G . Vậy ba điểm M , G , E thẳng hàng.



Bài 12. Cho tam giác ABC có $\hat{C} < \hat{B} < 90^\circ$, AH là đường cao. Vẽ điểm D sao cho tứ giác ABDC có $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. Chứng minh rằng A, H, D thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M là trung điểm đoạn thẳng BC.

ΔHAB vuông tại H $\Rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2$ (định lý Pitago)

ΔHAC vuông tại H $\Rightarrow AC^2 = AH^2 + CH^2$ (định lý Pitago)

Do đó $AC^2 - AB^2 = CH^2 - BH^2$

$$= (CH + BH)(CH - BH) = BC \cdot 2HM$$

$$= 2HM \cdot BC$$

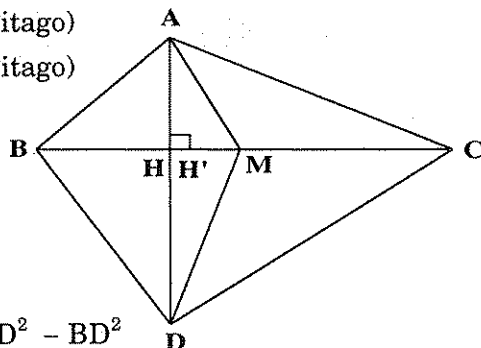
Vẽ $DH' \perp BC$ tại H' .

Chứng minh tương tự có: $CD^2 - BD^2 = 2H'M \cdot BC$

Mà $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ (gt) $\Rightarrow AC^2 - AB^2 = CD^2 - BD^2$

Do đó, ta có: $H'M = HM \Rightarrow H \equiv H'$

Vậy ba điểm A, H, D thẳng hàng.



* **Nhận xét:**

Dễ chứng minh được nếu tứ giác ABDC có $AD \perp BC$ thì có $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

Như vậy chúng ta đã có được lời giải của bài toán HAY và KHÓ sau:

Bài toán: Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai đường chéo của một tứ giác vuông góc với nhau là tổng các bình phương của các cạnh đối diện của tứ giác bằng nhau.

Bài 13. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC. Gọi O là giao điểm của CM và PN. I là giao điểm của AO và BC. D là giao điểm của MI và AC. Gọi E là giao điểm của MP và BD. Chứng minh rằng ba điểm A, I, E thẳng hàng.

Lời giải

ΔABC có P, N lần lượt là trung điểm của BC, AC

$\Rightarrow PN$ là đường trung bình của tam giác ABC

Từ đó có $PO = ON$. Gọi K là trung điểm của IC.

Chứng minh được $PI = IK = KC$.

Gọi H là trung điểm của ID. Ta có $KH \parallel MP \parallel CD$

$\Delta IPM = \Delta IKH$ (g.c.g)

$\Rightarrow MP = KH$

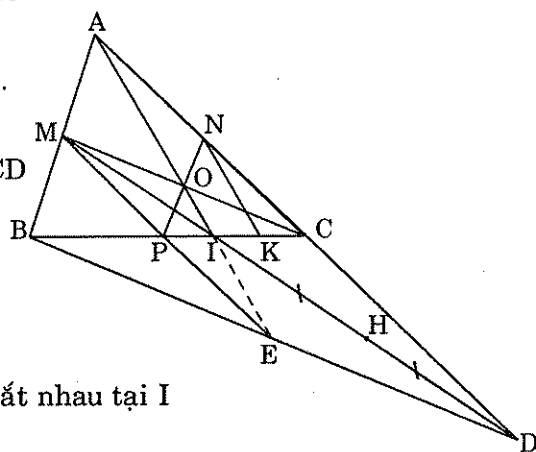
$\Rightarrow AC = CD$

Ta có E là trung điểm của BD

ΔABD có DM và BC là hai đường trung tuyến cắt nhau tại I

$\Rightarrow I$ là trọng tâm của tam giác ABD.

Do đó A, I, E thẳng hàng.



Bài 14. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là điểm đối xứng của A qua B, F là điểm đối xứng của A qua D. Chứng minh rằng ba điểm E, C, F thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $BE = AB$ (E đối xứng với A qua B)

$AB = CD$ (tứ giác ABCD là hình bình hành)

Do đó $BE = CD$ mà $BE \parallel CD$. Nên tứ giác BECD là hình bình hành

$\Rightarrow CE \parallel BD$ (1)

Chứng minh tương tự có: $CF \parallel BD$ (2)

Từ (1) và (2) có CE, CF trùng nhau

Vậy ba điểm E, C, F thẳng hàng.

Bài 15. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ $AH \perp BD$ tại H, $CK \perp BD$ tại K. Gọi E là giao điểm của AH và CD, F là giao điểm của CK và AB. O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng E, O, F thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $AH \perp BD$ (gt)

$CK \perp BD$ (gt)

$\Rightarrow AH \parallel CK$

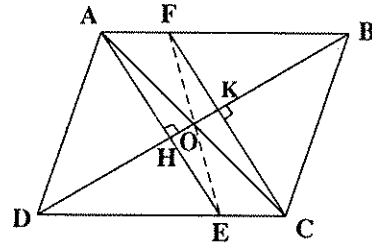
Tứ giác AFCE có $AF \parallel EC$ và $AE \parallel FC$

nên là hình bình hành.

Mà O là trung điểm AC (Vì O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD)

$\Rightarrow O$ là trung điểm của EF

Vậy E, O, F thẳng hàng.



Bài 16. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi I là trung điểm của MP. Chứng minh rằng N, I, Q thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC (gt)

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow MN \parallel AC$ và $MN = \frac{AC}{2}$

Tương tự PQ là đường trung bình của tam giác ACD $\Rightarrow PQ \parallel AC$, $PQ = \frac{AC}{2}$

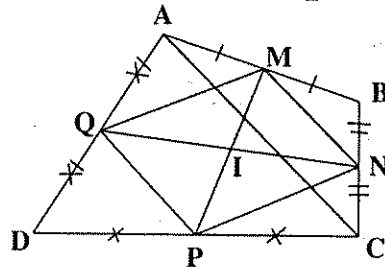
Ta có $PQ \parallel MN \parallel AC$, $PQ = MN \left(= \frac{AC}{2} \right)$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của MP (gt)

Do đó I là trung điểm của NQ.

Vậy N, I, Q thẳng hàng.



Bài 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. M là điểm tùy ý. Gọi I, K lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm D, E của các cạnh AB, AC. Gọi O là giao điểm của CI và BK. Chứng minh rằng M, O, G thẳng hàng.

Lời giải

Ta có D là trung điểm của AB (gt), MI (I và M đối xứng qua D)

Nên tứ giác BIAM là hình bình hành $\Rightarrow BI \parallel AM, BI = AM$

Tương tự có tứ giác AKCM là hình bình hành

$\Rightarrow CK \parallel AM, CK = AM$

Do đó $BI \parallel CK, BI = CK$

$\Rightarrow$ Tứ giác BIKC là hình bình hành

$\Rightarrow O$ là trung điểm của CI, BK

$\triangle ABC$ có CD là đường trung tuyến, G là trọng tâm

$\Rightarrow G$ thuộc đoạn thẳng CD và $CG = \frac{2}{3}CD$

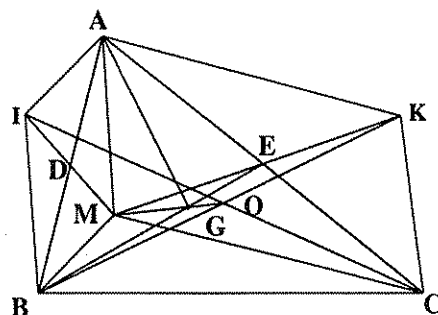
$\triangle CMI$ có CD là đường trung tuyến

G thuộc đoạn thẳng CD và $CG = \frac{2}{3}CD$

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác CMI

Mà MO là đường trung tuyến của tam giác CMI. Do đó MO đi qua G

Vậy M, O, G thẳng hàng.



Bài 18. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. M là điểm trên cạnh BC (BM > MC). Đường thẳng vuông góc với BC tại M cắt AB, AC lần lượt ở D, E. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của EC, BD. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, AC, KI. Chứng minh ba điểm M, N, O thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle MBD$ vuông tại M có $\widehat{BDM} = 45^\circ$

Nên tam giác MBD vuông cân tại M.

Mà MK là đường trung tuyến của tam giác MBD (K là trung điểm của BD)

Do đó MK là đường cao của $\triangle MBD \Rightarrow MK \perp BD$

Tương tự: $MI \perp EC$

Tứ giác AIMK có: $\widehat{KAI} = \widehat{AIM} = \widehat{MKA} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

Mà O là trung điểm của KI (gt)

Nên O là trung điểm của AM.

Xét $\triangle ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác ABC.

$\Rightarrow MN \parallel BC$

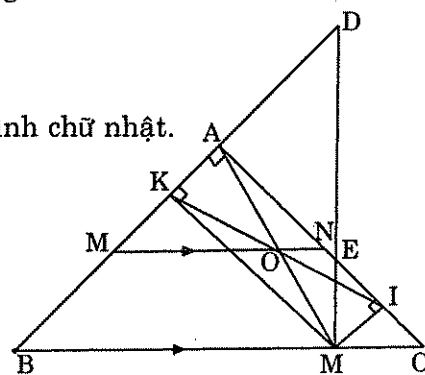
Xét $\triangle ABM$ có M, O lần lượt là trung điểm của AB, AM.

$\Rightarrow MO$ là đường trung bình của tam giác ABM

$\Rightarrow MO \parallel BC$

Ta có $MN \parallel BC, MO \parallel BC \Rightarrow MN$ và MO trùng nhau.

Vậy ba điểm M, N, O thẳng hàng.



Bài 19. Cho hình vuông ABCD, vẽ tam giác đều CDE bên trong hình vuông và tam giác đều BCF bên ngoài hình vuông. Chứng minh rằng ba điểm A, E, F thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle CDE$ đều (gt) $\Rightarrow CD = DE = CE$

$\triangle BCF$ đều (gt) $\Rightarrow BC = CF = BF$

Nên $CE = CF$

Mặt khác có:

$$\begin{aligned}\widehat{ECF} &= \widehat{ECB} + \widehat{BCF} \\ &= \widehat{ECB} + \widehat{ECD} = 90^\circ\end{aligned}$$

$\triangle CEF$ vuông cân tại C $\Rightarrow \widehat{CEF} = 45^\circ$

Mà $\widehat{ADE} + \widehat{EDC} = \widehat{ADC}$, $\widehat{ADC} = 90^\circ$,

$$\widehat{EDC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = 30^\circ$$

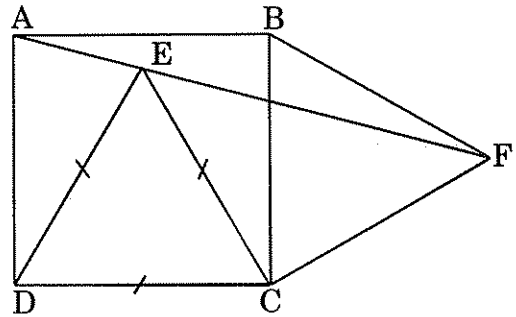
$\triangle ADE$ có $AD = DE (= CD)$

$\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại D

$$\Rightarrow \widehat{AED} = (180^\circ - \widehat{ADE}) : 2 = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$$

$$\text{Ta có } \widehat{AEF} = \widehat{AED} + \widehat{DEC} + \widehat{CEF} = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

Vậy ba điểm A, E, F thẳng hàng.



Bài 20. Cho tam giác ABC đều, H là trực tâm, đường cao AD. M là điểm nằm giữa B và D. Vẽ $ME \perp AB$ tại E, $MF \perp AC$ tại F. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AM, K là giao điểm của ID và EF. Chứng minh rằng ba điểm M, H, K thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle EMA$ vuông tại E, EI là đường trung tuyến nên:

$$EI = IM = IA = \frac{1}{2} AM$$

Từ $EI = IA$ suy ra $\triangle IAE$ cân đỉnh I, từ đó có: $\widehat{EIM} = 2\widehat{EAI}$

Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{MID} = 2\widehat{IAD}$, $DI = \frac{1}{2} AM$

Do đó: $EI = DI \left(= \frac{1}{2} AM \right)$;

$$\begin{aligned}\widehat{EID} &= \widehat{EIM} + \widehat{MID} \\ &= 2(\widehat{EAI} + \widehat{IAD}) = 2\widehat{EAD} = 60^\circ\end{aligned}$$

Tam giác IED cân ($EI = DI$) có $\widehat{EID} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, từ đó có: $EI = ED = ID$

Tương tự $\triangle IDF$ đều $\Rightarrow ID = DF = IF$

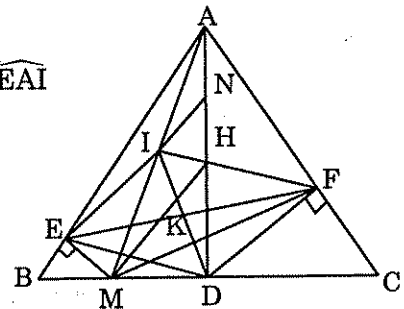
Do đó $EI = ED = DF = IF \Rightarrow$ Tứ giác EIFD là hình thoi

$\Rightarrow K$ là trung điểm chung của EF và ID

Gọi N là trung điểm của AH

$\triangle ABC$ đều nên H là trực tâm tam giác ABC.

Do đó $AN = NH = HD$



Ta có $MH \parallel IN$ (vì IN là đường trung bình của $\triangle AMH$) và $KH \parallel IN$

(Vì KH là đường trung bình của $\triangle DIN$).

Từ H chỉ vẽ được một đường thẳng song song với IN (tiên đề Ôclit) nên M, H, K thẳng hàng.

Bài 21. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . E là điểm nằm giữa O và B . Gọi F là điểm đối với điểm A qua E . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng BC, CD . Chứng minh rằng ba điểm E, H, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi I là giao điểm của CF và HK .

Tứ giác $CHFK$ có:

$\widehat{CHF} = \widehat{HCK} = \widehat{CKF} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow HK = CF$

I là trung điểm của HK và CF

$\Rightarrow IC = IK$

$\Rightarrow \triangle ICK$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{ICK} = \widehat{IKC}$

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên có $OC = OD$

$\Rightarrow \triangle OCD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODC}$

EO, EI là đường trung bình của tam giác $ACF \Rightarrow EI \parallel OC, OE \parallel CF$

Ta có $\widehat{ODC} = \widehat{ICK}$ (đồng vị và $OE \parallel CF$)

$\Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{IKC}$

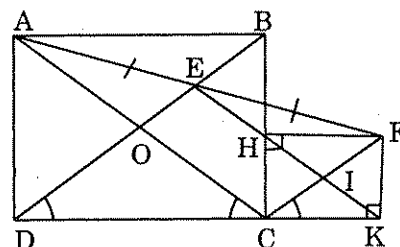
$\Rightarrow IK \parallel OC$

Mà $EI \parallel OC$. Ta có IK, EI trùng nhau (tiên đề Ôclit)

$\Rightarrow I, E, K$ thẳng hàng.

Mà I, H, K thẳng hàng. Do vậy I, E, K, H thẳng hàng

Vậy ba điểm E, H, K thẳng hàng.



Bài 22. Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia CB lấy E , trên tia đối của tia DA lấy F sao cho $AF = BE$. Vẽ $EH \perp BF$ tại H . Trên tia đối của tia EH lấy điểm K sao cho $EK = BF$. Chứng minh rằng ba điểm A, C, K thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $KM \perp AB$ tại M .

Gọi N là giao điểm của EF và KM .

Tứ giác $ABEF$ có:

$BE \parallel AF, BE = AF$ nên là hình bình hành.

Mà $\widehat{BAF} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật

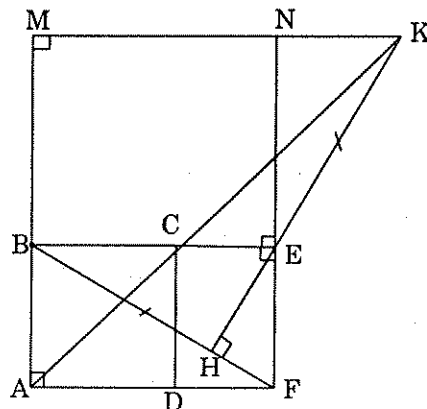
$\widehat{BEF} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BEN} = 90^\circ$

Tứ giác $BMNE$ có $\widehat{BMN} = \widehat{MBE} = \widehat{BEN} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMNE$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{MNE} = 90^\circ$



$$\Rightarrow \widehat{ENK} = 90^\circ$$

Xét $\triangle EBF$ ($\widehat{BEF} = 90^\circ$) và $\triangle NEK$ ($\widehat{ENK} = 90^\circ$), $BF = EK$ (gt),

$$\widehat{EBF} = \widehat{NEK} \text{ (cùng phụ với góc } \widehat{BEH} \text{)}$$

Do đó $\triangle EBF = \triangle NEK$ (cạnh huyền–góc nhọn) $\Rightarrow BE = EN, EF = NK$

Hình chữ nhật $BMNE$ có $BE = EN$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMNE$ là hình vuông

$$\Rightarrow MB = MN$$

Mặt khác $AB = NK (= EF)$. Ta có $MA = MB + AB = MN + NK = MK$

$\triangle MAK$ vuông tại M có $MA = MK$

$\Rightarrow \triangle MAK$ vuông cân tại M

$$\Rightarrow \widehat{MAK} = 45^\circ \quad (1)$$

Mặt khác $\widehat{BAC} = 45^\circ$ (tứ giác $ABCD$ là hình vuông) (2)

Từ (1) và (2) có hai tia AC, AK trùng nhau.

Vậy ba điểm A, C, K thẳng hàng.

Bài 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Vẽ BH vuông với AC tại H . Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AH, CD . Đường thẳng vuông góc với BM tại M cắt AB ở N . Chứng minh rằng ba điểm K, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BH

$\triangle HAB$ có M, O lần lượt là trung điểm của AH, BH nên MO là đường trung bình của tam giác HAB .

$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2} AB \text{ và } MO \parallel AB$$

$$\text{Mà } AB = CD, AB \parallel CD, CK = \frac{1}{2} CD$$

Do đó $MO = KC$ và $MO \parallel KC$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MOCK$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow CO \parallel MK$$

Ta có $MO \parallel KC, KC \perp CB \Rightarrow MO \perp CB$

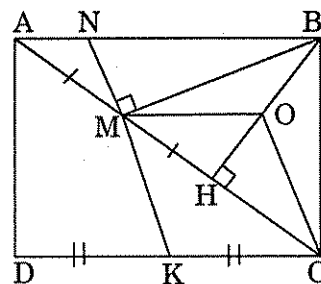
$\triangle MBC$ có MO, BH là hai đường cao ($MO \perp CB, BH \perp MC$) cắt nhau tại O nên O là trực tâm của tam giác $MBC \Rightarrow CO \perp MB$

Ta có $CO \perp MB, CO \parallel MK$ (tứ giác $MOCK$ là hình bình hành)

$$\Rightarrow MK \perp MB.$$

Ta có $MK \perp MB, MN \perp MB$ (gt) $\Rightarrow MK, MN$ trùng nhau.

Vậy ba điểm K, M, N thẳng hàng.



Bài 24. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{A} = 45^\circ$, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm của DE , G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng ba điểm H, I, G thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của BC, AH, AG. H là trực tâm tam giác ABC

$\Rightarrow AH \perp BC$ và ta có $AK = KG = GM$

$\triangle DBA$ vuông tại D có $\widehat{BAD} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân

$\Rightarrow AD = BD$

Xét $\triangle DAH$ và $\triangle DBC$ có $\widehat{ADH} = \widehat{BDC} (=90^\circ)$, $AD = BD$, $\widehat{HAD} = \widehat{DBC}$

Do đó $\triangle DAH = \triangle DBC$ (g.c.g) $\Rightarrow AH = BC$

$\triangle EAH$ vuông tại E, EN là đường trung tuyến $\Rightarrow EN = \frac{AH}{2}$

Tương tự: $ND = \frac{AH}{2}$, $DM = \frac{BC}{2}$; $ME = \frac{BC}{2}$

Do vậy $EN = ND = DM = ME$

$\Rightarrow$ Tứ giác ENDM là hình thoi

Mà I là trung điểm của DE (gt). Nên I là trung điểm của MN

$\triangle AHG$ có N, K lần lượt là trung điểm của AH, AG

$\Rightarrow NK$ là đường trung bình của tam giác AHG

$\Rightarrow HG \parallel NK$

$\triangle NKM$ có I, G lần lượt là trung điểm của MN, KM

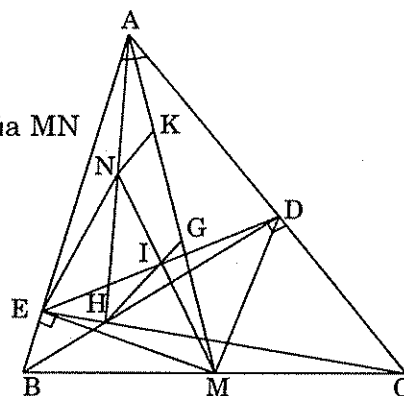
$\Rightarrow IG$ là đường trung bình của tam giác NKM

$\Rightarrow IG \parallel NK$

Ta có $IG \parallel NK$, $HG \parallel NK$

$\Rightarrow IG, HG$ trùng nhau (tiên đề Ôclit)

Vậy ba điểm H, I, G thẳng hàng.



Bài 25. Cho điểm M nằm trong tam giác nhọn ABC sao cho $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$. Vẽ $MK \perp AB$ tại K, $ML \perp AC$ tại L. Trên nửa mặt phẳng bờ KL có chứa A vẽ tam giác đều KLT. Gọi D, N lần lượt là trung điểm của BC, KL. Chứng minh rằng D, N, T thẳng hàng.

Lời giải

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của MB, MC.

$\triangle KBM$ vuông tại K, KP là đường trung tuyến

$\Rightarrow KP = BP = MP$

$\triangle KPB$ cân tại P. Do đó $\widehat{KPM} = 2\widehat{MBK}$

$\triangle BMC$ có D, Q lần lượt là trung điểm của BC, MC

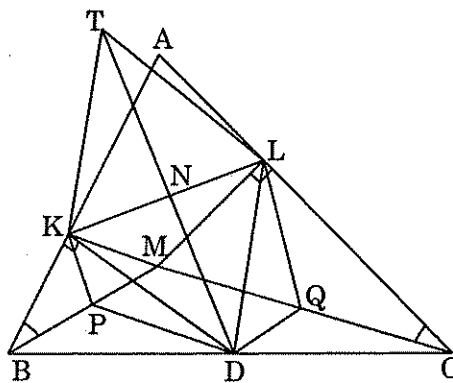
$\Rightarrow DQ$ là đường trung bình của tam giác BMC

$\Rightarrow DQ \parallel BM$, $DQ = \frac{1}{2}BM = PM$

Do đó tứ giác PMQD là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{MPD} = \widehat{MQD}$, $MP = DQ$, $MQ = PD$

Tương tự có $LQ = MQ = CQ$, $\widehat{LQM} = 2\widehat{MCA}$



$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \widehat{DPK} &= \widehat{MPD} + \widehat{KPM} \\
&= 2\widehat{MBK} + \widehat{MQD} \\
&= 2\widehat{MCA} + \widehat{MQD} \\
&= \widehat{LQM} + \widehat{MQD} = \widehat{DQL}
\end{aligned}$$

Xét $\triangle DPK$ và $\triangle DQL$ có: $DP = LQ (= MQ)$, $\widehat{DPK} = \widehat{DQL}$, $KP = DQ (= MP)$

Do đó $\triangle DPK = \triangle DQL$ (c.g.c) $\Rightarrow DK = DL$

Mà $TK = TL$ ($\triangle KLT$ đều), $NK = NL$ (N là trung điểm của KL)

Do vậy D, N, T cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng KL .

Vậy ba điểm D, N, T thẳng hàng.

Bài 26. Cho tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$. Vẽ $AM \perp BC$ tại M , $AN \perp BD$ tại N , $AK \perp CD$ tại K . Chứng minh rằng ba điểm M, N, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi S là trung điểm của AD . Gọi Sx là tia đối của tia SK .

$\triangle NAD$ vuông tại N , NS là đường trung tuyến (gt) $\Rightarrow SN = SA = SD$.

Tương tự $SA = SK = SD$

$\triangle SAK$ cân tại $S \Rightarrow \widehat{KSD} = 2\widehat{KAD}$

$\triangle SNK$ cân tại $S \Rightarrow \widehat{NSx} = 2\widehat{SNK}$

$\triangle SND$ cân tại $S \Rightarrow \widehat{ASN} = 2\widehat{SND}$

Nên $\widehat{ASx} = \widehat{NSx} - \widehat{ASN} = 2(\widehat{SNK} - \widehat{SND}) = 2\widehat{DNK}$

Mà $\widehat{ASx} = \widehat{KSD}$ (đối đỉnh)

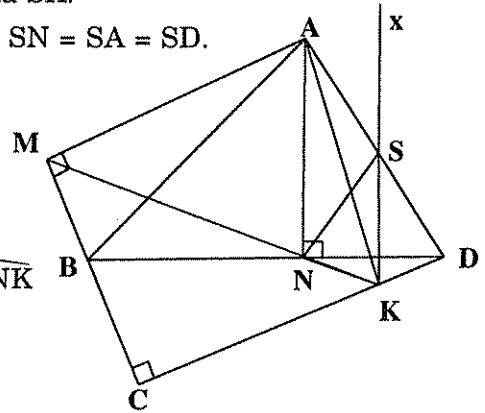
Do đó $\widehat{DNK} = \widehat{KAD}$

Chứng minh tương tự $\widehat{MAB} = \widehat{MNB}$

Mà $\widehat{MAB} = \widehat{KAD} \Rightarrow \widehat{MNB} = \widehat{DNK}$

Ta có $\widehat{MNK} = \widehat{DNK} + \widehat{MND} = \widehat{MNB} + \widehat{MND} = 180^\circ$

Vậy ba điểm M, N, K thẳng hàng.



Bài 27. Cho hình vuông $ABCD$. M là điểm nằm trong hình vuông $ABCD$ sao cho $\widehat{CDM} = \widehat{DCM} = 15^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AM không chứa điểm B vẽ tam giác AME đều. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng AM . Chứng minh rằng ba điểm B, N, E thẳng hàng.

Lời giải

Trên nửa mặt phẳng bờ CM có chứa B vẽ tam giác đều CMK .

Ta có $\widehat{DCM} + \widehat{MCK} + \widehat{KCB} = 90^\circ$, $\widehat{DCM} = 15^\circ$, $\widehat{MCK} = 60^\circ$

Nên $\widehat{KCB} = 15^\circ$.

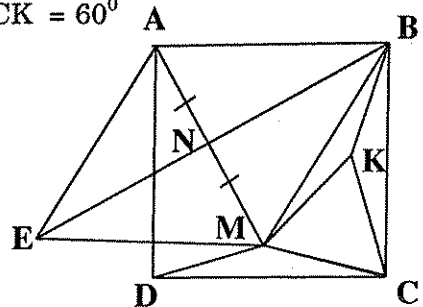
Xét $\triangle MCD$ và $\triangle KCB$ có:

$CD = BC$ (tứ giác $ABCD$ là hình vuông),

$MC = KC$ ($\triangle MCK$ đều),

$\widehat{DCM} = \widehat{KCB}$

Do đó $\triangle MCD = \triangle KCB$ (c.g.c)



$$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{KBC} \text{ Nên } \widehat{KBC} = 15^\circ$$

$$\text{Ta có } \widehat{CKB} = 150^\circ. \text{ Do vậy } \widehat{MKB} = 150^\circ (=360^\circ - 60^\circ - 150^\circ)$$

$$\text{Xét } \triangle BMK \text{ và } \triangle BCK \text{ có: } MK = CK, BK \text{ (cạnh chung), } \widehat{BKM} = \widehat{BKC} (=150^\circ)$$

$$\text{Do đó } \triangle BMK = \triangle BCK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BM = BC$$

$$\text{Nên } BA = BM (= BC)$$

$$\text{Ta có } BA = BM, NA = NM, EA = EM (\triangle AME \text{ đều})$$

$$\Rightarrow B, N, E \text{ cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng } AM$$

Vậy ba điểm B, N, E thẳng hàng.

* Nhận xét:

Mấu chốt của bài toán là chứng minh $AB = BM$, tức là $\triangle MAB$ đều. Đây là bài toán hay, cổ điển và có rất nhiều cách giải (Quyển sách “CẨM NANG VỀ THÊM HÌNH PHỤ” trong “GIẢI TÓÁN HÌNH HỌC PHẪNG” của tác giả Nguyễn Đức Tấn có trình bày 20 cách giải). Chúng tôi “dịch chuyển” để có được bài toán về ba điểm thẳng hàng để giới thiệu cùng bạn đọc.

Bài 28. Cho hình chữ nhật ABCD. Các điểm E, F, G, H lần lượt trên các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $CV(EFGH) = 2AC$ ($CV(EFGH)$ là chu vi tứ giác EFGH). Gọi I, M lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EH, GF. Chứng minh rằng ba điểm A, I, M thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng HF

$$\text{Ta có } AI \text{ là đường trung tuyến của tam giác } AEH \text{ vuông tại } A \Rightarrow AI = \frac{EH}{2}$$

Tương tự $MC = \frac{GF}{2}$. Mặt khác IN, NM lần lượt là các đường trung bình của các tam

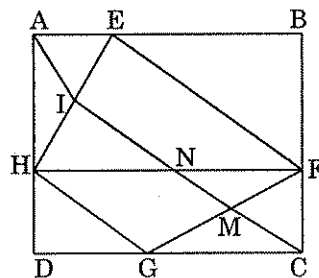
$$\text{giác } HEF, HFG, \text{ nên } IN = \frac{EF}{2}, NM = \frac{HG}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Do vậy } CV(EFGH) &= EH + EF + HG + GF \\ &= 2(AI + IN + NM + MC) \end{aligned}$$

$$\text{Xét các điểm } A, I, N, M, C \text{ có: } AI + IN + NM + MC \geq AC$$

$$\text{Do vậy } CV(EFGH) \geq 2AC$$

Theo đầu bài, ta có dấu “=” xảy ra, do đó A, I, N, M, C thẳng hàng theo thứ tự đó
Vậy ba điểm A, I, M thẳng hàng.



Bài 29. Cho hình thoi ABCD có cạnh bằng 1. Giả sử tồn tại M thuộc cạnh BC và N thuộc cạnh CD sao cho chu vi tam giác CMN bằng 2 và $\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN}$. Trên nửa mặt phẳng bờ AD không chứa B vẽ tia Ax sao cho $\widehat{DAX} = \widehat{BAM}$. Trên tia Ax lấy điểm E sao cho $AE = AM$. Chứng minh rằng D, E, N thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{Xét } \triangle ABM \text{ và } \triangle ADE \text{ có: } AB = AD \text{ (tứ giác } ABCD \text{ là hình thoi), } AM = AE, \widehat{BAM} = \widehat{DAE}$$

$$\text{Do đó } \triangle ABM = \triangle ADE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BM = DE, \widehat{ABM} = \widehat{ADE}$$

Ta có $\widehat{MAN} = \frac{1}{2} \widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{BAM} + \widehat{DAN}$

Do đó $\widehat{MAN} = \widehat{DAE} + \widehat{DAN}$. Suy ra $\widehat{MAN} = \widehat{EAN}$

Xét $\triangle AMN$ và $\triangle AEN$ có:

$AM = AE$, AN (cạnh chung), $\widehat{MAN} = \widehat{EAN}$

Do đó $\triangle AMN = \triangle AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow MN = NE$

Mà $CM + CN + MN = 2$ (gt)

Và có $CM + CN + MB + DN = 2$ (vì $BC = CD = 1$)

$\Rightarrow MN = MB + DN$

Ta có $NE = DE + DN \Rightarrow D$ nằm giữa E, N

Vậy D, E, N thẳng hàng.

*** Nhận xét:**

Từ lời giải của bài toán giúp chúng ta có được lời giải của bài toán sau:

Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 1. Giả sử tồn tại điểm M thuộc cạnh BC và N thuộc cạnh CD sao cho tam giác CMN có chu vi bằng 2 và $\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN}$. Tính các góc của hình thoi $ABCD$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh, năm học 2009 - 2010)

Bài 30. Cho góc nhọn xOy ; A, B thuộc tia Ox , C, D thuộc tia Oy . M là điểm nằm trong góc xOy sao cho $S_{MAB} = S_{MCD}$. Gọi E, F lần lượt trên các tia Ox, Oy sao cho $OE = AB, OF = CD$. Gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh rằng ba điểm O, I, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $OE = AB$ (gt)

$\Rightarrow S_{MOE} = S_{MAB}$ mà $OF = CD$ (gt)

$\Rightarrow S_{MOF} = S_{MCD}$

Ta có $S_{MAB} = S_{MCD}$ (gt) nên $S_{MOE} = S_{MOF}$

Gọi I' là giao điểm của OM và EF .

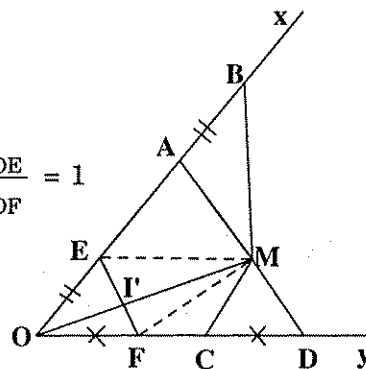
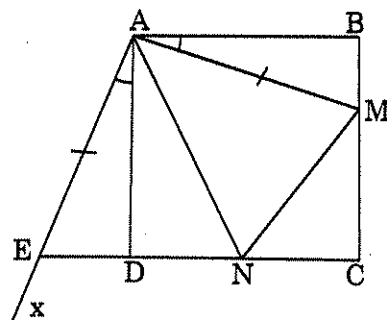
Ta có: $\frac{S_{EMI'}}{S_{FMI'}} = \frac{I'E}{I'F} = \frac{S_{OEI'}}{S_{OFI'}} \Rightarrow \frac{I'E}{I'F} = \frac{S_{EMI'} + S_{OEI'}}{S_{FMI'} + S_{OFI'}} = \frac{S_{MOE}}{S_{MOF}} = 1$

$\Rightarrow I'E = I'F$ Nên $I = I'$

Vậy ba điểm O, I, M thẳng hàng.

*** Nhận xét:**

Bài toán vẫn đúng khi góc xOy là góc vuông hoặc góc tù.



Bài 31. Cho tam giác ABC, các tia phân giác của các góc B, C cắt nhau ở M. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy D, E sao cho $BD \cdot BC = BM^2$, $CE \cdot CB = CM^2$.

Chứng minh rằng ba điểm D, M, E thẳng hàng

Lời giải

Xét $\triangle DBM$ và $\triangle MBC$ có: $\frac{BD}{BM} = \frac{BM}{BC}$ (vì $BD \cdot BC = BM^2$)

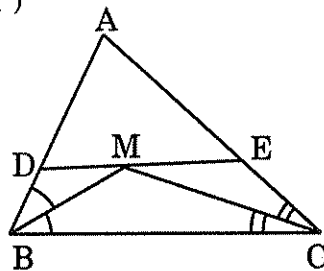
Và $\widehat{DBM} = \widehat{MBC}$ (BM là tia phân giác $\widehat{ABC}$)

Do đó $\triangle DBM \sim \triangle MBC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DMB} = \widehat{MCB}$

Tương tự $\triangle EMC \sim \triangle MBC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{MBC}$

Ta có: $\widehat{DME} = \widehat{DMB} + \widehat{BMC} + \widehat{EMC}$
 $= \widehat{MCB} + \widehat{BMC} + \widehat{MBC} = 180^\circ$

Vậy ba điểm D, M, E thẳng hàng.



Bài 32. Cho tam giác ABC. Đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt ở D, E. Trên các đoạn thẳng BC, DE lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $BC = 3 BM$, $DE = 3 DN$. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N' là giao điểm của AM và DE

Xét $\triangle ABC$ có $DE \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$.

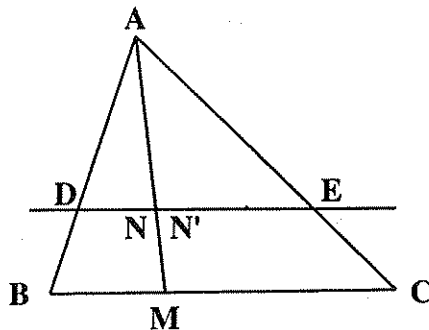
Xét $\triangle ABM$ có $DN' \parallel BC \Rightarrow \frac{DN'}{BM} = \frac{AD}{AB}$.

Do đó: $\frac{DE}{BC} = \frac{DN'}{BM}$. Mà $BC = 3 BM$ (gt),

$DE = 3 DN$ (gt) $\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{DN}{BM}$.

Nên có $\frac{DN'}{BM} = \frac{DN}{BM} \Rightarrow N \equiv N'$

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.



Bài 33. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là điểm đối xứng của điểm E qua BC. Chứng minh rằng ba điểm F, D, K thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle CFB$ có: $\widehat{DAB}$ (chung), $\widehat{ADB} = \widehat{CFB}$ ($= 90^\circ$)

Do đó $\triangle ADB \sim \triangle CFB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BF}$

Xét $\triangle BDF$ và $\triangle BAC$ có:

$\widehat{DBF}$ (chung), $\frac{BD}{BA} = \frac{BF}{BC}$ (vì $\frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BF}$)

Do đó $\triangle BDF \sim \triangle BAC$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{BAC}$

Chứng minh tương tự, ta có: $\widehat{CDE} = \widehat{BAC}$

Nên $\widehat{BDF} = \widehat{CDE}$. Mà $\widehat{BDF} + \widehat{ADF} = \widehat{CDE} + \widehat{ADE} (= 90^\circ)$.

Nên $\widehat{ADF} = \widehat{ADE}$

DC là đường trung trực của đoạn thẳng EK (E, K đối xứng qua BC)

$\Rightarrow \triangle DEK$ cân tại D.

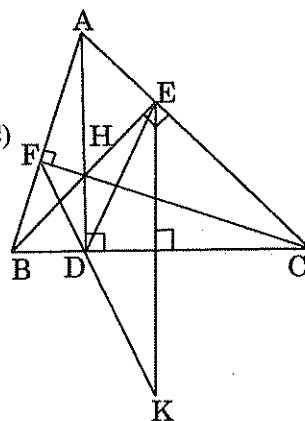
Mà DC là đường trung trực nên là đường phân giác.

Ta có: $\widehat{FDK} = \widehat{EDF} + \widehat{EDK}$

$$= 2\widehat{ADE} + 2\widehat{EDC}$$

$$= 2(\widehat{ADE} + \widehat{EDC}) = 2\widehat{ADC} = 180^\circ.$$

Vậy ba điểm F, D, K thẳng hàng.



Bài 34. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Vẽ $DM \perp AB$ tại M, $DN \perp AC$ tại N, $DK \perp CF$ tại K. Chứng minh rằng M, K, N thẳng hàng.

Lời giải

$DM \perp AB$ (g.t), $CF \perp AB$ (g.t) $\Rightarrow DM \parallel CF$

$\triangle AMD$ có $DM \parallel CF \Rightarrow \frac{AF}{AM} = \frac{AH}{AD}$. Tương tự có $\frac{AE}{AN} = \frac{AH}{AD}$

$\triangle AMN$ có $\frac{AF}{AM} = \frac{AE}{AN} (= \frac{AH}{AD})$

$\Rightarrow EF \parallel MN$ (định lý Ta-let đảo) (1)

$BE \perp AC$, $DN \perp AC \Rightarrow BE \parallel DN$.

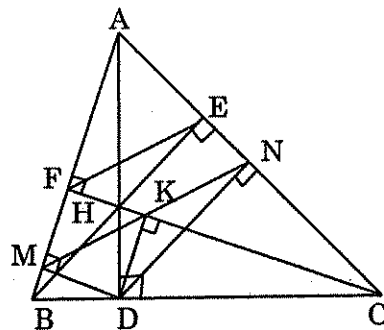
$\triangle BEC$ có $BE \parallel DN \Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{CN}{CE}$.

Tương tự: $\frac{CD}{CB} = \frac{CK}{CF}$. Do đó: $\frac{CN}{CE} = \frac{CK}{CF}$

$\triangle CEF$ có $\frac{CN}{CE} = \frac{CK}{CF} \Rightarrow KN \parallel EF$ (2)

Từ (1) và (2) có KN, MN trùng nhau (tiên đề O'- Clit).

Vậy ba điểm M, K, N thẳng hàng.



Bài 35. Cho tam giác ABC, AD là đường phân giác. Trên cạnh AB lấy E sao cho $BE = BD$, trên cạnh AC lấy F sao cho $CF = CD$. Vẽ hình bình hành CDFK. Chứng minh rằng ba điểm E, F, K thẳng hàng.

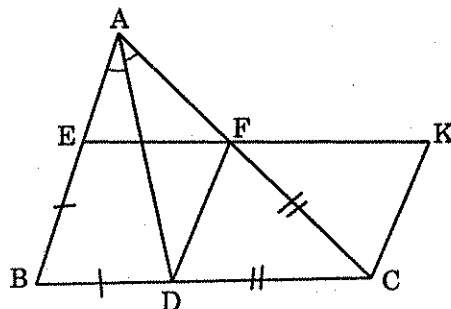
Lời giải

$\triangle ABC$ có AD là đường phân giác (gt) $\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Mà $BD = BE$ (gt), $CD = CF$ (gt). Nên $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}$

$\triangle ABC$ có $\frac{BE}{AB} = \frac{CF}{AC}$ (vì $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}$)

$\Rightarrow EF \parallel BC$ (định lý Talet đảo) (1)



Mà $FK \parallel BC$ (CDFK là hình bình hành) (2)

Từ (1) và (2) có EF, FK trùng nhau (Tiên đề Ơ-Clit)

Vậy ba điểm E, F, K thẳng hàng.

Bài 36. Cho hình bình hành $ABCD$, tia phân giác góc DAB cắt DB tại E , tia phân giác góc ABC cắt AC tại F . Trên cạnh AD lấy điểm K sao cho $\frac{AK}{DK} = \frac{BE}{DE}$. Chứng minh rằng E, F, K thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABD$ có AE là đường phân giác (gt) $\Rightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{AB}{AD}$

$\triangle ABC$ có BF là đường phân giác (gt) $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AF}{CF}$

Mà $AD = BC$. Do đó: $\frac{BE}{DE} = \frac{AF}{CF}$. Mặt khác $\frac{AK}{DK} = \frac{BE}{DE}$

Nên: $\frac{AF}{CF} = \frac{AK}{DK}$

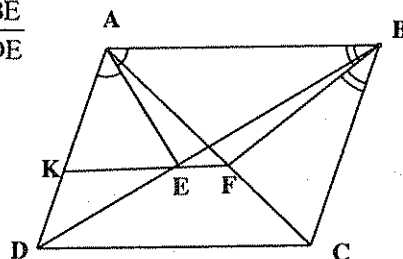
$\triangle ADC$ có $\frac{AF}{CF} = \frac{AK}{DK} \Rightarrow KF \parallel CD$.

$\triangle ABD$ có $\frac{AK}{DK} = \frac{BE}{DE} \Rightarrow KE \parallel AB$

Mà $AB \parallel CD$. Nên $KE \parallel CD, KF \parallel CD$.

$\Rightarrow KF, KE$ trùng nhau.

Vậy ba điểm E, F, K thẳng hàng.



Bài 37. Cho hai tam giác đều ABC và DEF (A nằm trên cạnh DF , E nằm trên cạnh BC). Gọi I là giao điểm của BF và CD . M, N lần lượt là trung điểm của BD, FC . Chứng minh rằng ba điểm M, I, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi K là giao điểm của AB và DE .

Xét $\triangle KDA$ và $\triangle KBE$ có: $\widehat{DKA} = \widehat{BKE}$ (đối đỉnh), $\widehat{KDA} = \widehat{KBE} (= 60^\circ)$

Do đó $\triangle KDA \sim \triangle KBE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{KD}{KB} = \frac{KA}{KE}$

Xét $\triangle KDB$ và $\triangle KAE$ có: $\widehat{DKB} = \widehat{AKE}$ (đối đỉnh),

$$\frac{KD}{KA} = \frac{KB}{KE} \quad (\text{vì } \frac{KD}{KB} = \frac{KA}{KE})$$

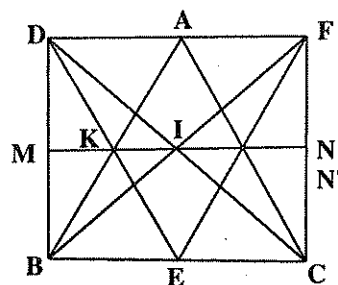
Do đó $\triangle KDB \sim \triangle KAE$ (c.g.c)

Chứng minh tương tự có $\widehat{EFC} = \widehat{EAC}$.

Do đó $\widehat{BDF} + \widehat{CFD} = \widehat{EDF} + \widehat{BAC} + \widehat{EFA} = 180^\circ \Rightarrow BD \parallel CF$.

Gọi N' là giao điểm của MI và CF .

$\triangle IDM$ có $N'C \parallel DM \Rightarrow \frac{N'C}{MD} = \frac{N'I}{MI}$



$$\triangle IBM \text{ có } N'F \parallel BM \Rightarrow \frac{N'F}{MB} = \frac{N'I}{MI}$$

$MB = MD$. Nên có $N'C = N'F$. Do đó $N' \equiv N$

Vậy ba điểm M, I, N thẳng hàng.

Bài 38. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$, E trên đường chéo BD sao cho $AB^2 = BE \cdot BD$, $CD^2 = DE \cdot BD$. Chứng minh rằng ba điểm A, E, C thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EBA$ có: $\widehat{ABD}$ (chung), $\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{AB}$ (vì $AB^2 = BE \cdot BD$)

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle EBA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BEA}$. Mà $\widehat{BAD} = 90^\circ$ (gt)

Nên $\widehat{BEA} = 90^\circ \Rightarrow AE \perp BD$

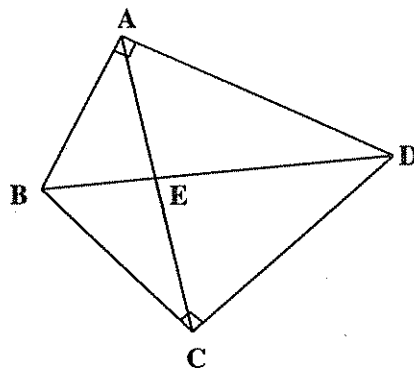
Chứng minh tương tự cũng có:

$\triangle CBD \sim \triangle ECD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{CED}$

Mà $\widehat{BCD} = 90^\circ$. Nên $\widehat{CED} = 90^\circ \Rightarrow CE \perp BD$

Ta có $AE \perp BD, CE \perp BD$.

Vậy A, E, C thẳng hàng.



Bài 39. Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$) có AD, BE, CF là các đường phân giác. Gọi G, I, K, H lần lượt là các điểm đối xứng với các điểm B, A, C, A qua AD, BE, AD, CF . Gọi M là điểm trên đoạn thẳng CK sao cho $\frac{BI}{CI} = \frac{BG}{CM}$. Chứng minh rằng ba điểm G, I, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có AD, BE, CF là các đường phân giác của tam giác ABC (gt). Các điểm G, I, K, H lần lượt đối xứng với các điểm B, A, C, A qua AD, BE, AD, CF (gt)

Do đó $AG = AB, G \in AC, AB = BI, I \in BC, AK = AC, K \in AB, CH = AC$ ($H \in BC$)

$\triangle ACK$ có $\frac{AB}{AK} = \frac{AG}{AC} \Rightarrow BG \parallel CK$. Do đó: $\frac{BG}{CK} = \frac{AG}{AC}$ và $\widehat{GBC} = \widehat{KCN}$.

Nên có: $\frac{BG}{CK} = \frac{BI}{CH}$ ($AG = AB = BI, AC = CH$)

Xét $\triangle BGI$ và $\triangle CKH$ có:

$$\widehat{GBI} = \widehat{KCH}, \frac{BG}{CK} = \frac{BI}{CH}$$

Do đó $\triangle BGI \sim \triangle CKH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BIG} = \widehat{CHK}$

$\widehat{BIG} = \widehat{CHK}$, $\widehat{BIG}$ và $\widehat{CHK}$ so le trong. Nên $GI \parallel HK$

Ta có: $\frac{CM}{CI} = \frac{BG}{BI}$ (vì $\frac{BI}{CI} = \frac{BG}{CM}$), $\frac{BG}{BI} = \frac{CK}{CH}$ (vì $\frac{BG}{CK} = \frac{BI}{CH}$)

$$\Rightarrow \frac{CM}{CI} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow \frac{CM}{CK} = \frac{CI}{CH}$$

$$\Delta CHK \text{ có } \frac{CM}{CK} = \frac{CI}{CH} \Rightarrow MI \parallel HK \text{ (định lí Ta-lét đảo)}$$

Ta có: $GI \parallel HK, MI \parallel HK$

Do đó GI, MI trùng nhau (tiên đề O-clít)

Vậy ba điểm G, I, M thẳng hàng.

Bài 40. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua một điểm S trong hình bình hành $ABCD$ kẻ đường thẳng song song với AB lần lượt cắt AD, BC tại M, P và cũng qus S kẻ đường thẳng song song với AD lần lượt cắt AB, CD tại N, Q . Gọi I là giao điểm của AS và DP . Chứng minh rằng ba điểm B, I, Q thẳng hàng.

Lời giải

Gọi E là giao điểm của AS và BC , K là giao điểm của DP và NQ , I' là giao điểm của BQ và DP .

$$\Delta EAB \text{ có } SP \parallel AB \Rightarrow \frac{ES}{AS} = \frac{EP}{BP}$$

$BP = AM$ (tứ giác $ABPM$ là hình bình hành)

$$\Delta SAM \text{ có } AM \parallel PE \Rightarrow \frac{ES}{AS} = \frac{SP}{SM}$$

$SM = DQ$ (tứ giác $DMSQ$ là hình bình hành)

$$\Delta SKP \text{ có } SP \parallel DQ \Rightarrow \frac{SP}{DQ} = \frac{SK}{KQ}$$

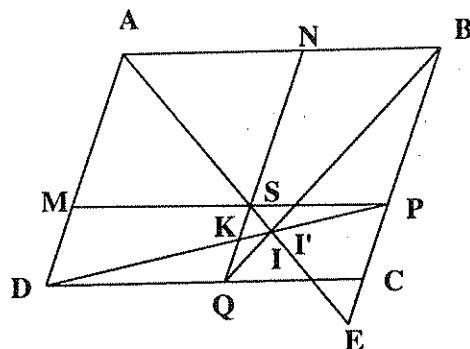
$$\text{Do đó } \frac{EP}{SK} = \frac{BP}{KQ} \Rightarrow \frac{EP}{SK} = \frac{BP}{KQ}$$

$$\Delta ISK \text{ có } SK \parallel PE \Rightarrow \frac{IP}{IK} = \frac{EP}{SK}, \text{ nên } \frac{IP}{IK} = \frac{BP}{KQ}$$

$$\text{Ta còn có } \frac{I'P}{I'K} = \frac{BP}{KQ}$$

$$\text{Nên } \frac{IP}{IK} = \frac{I'P}{I'K} \Rightarrow \frac{IP}{IP + IK} = \frac{I'P}{I'P + I'K} \Rightarrow \frac{IP}{KP} = \frac{I'P}{KP} \Rightarrow I = I'$$

Vậy ba điểm B, I, Q thẳng hàng.



Bài 41. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , đường trung tuyến BM . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 2DC$. Đường thẳng qua M vuông góc với BD cắt đường thẳng qua B vuông góc với MD ở E .

Chứng minh rằng ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Lời giải

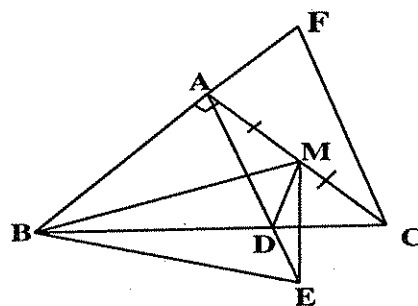
Qua C vẽ đường thẳng song song với AD cắt AB ở F

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{AFC}$$

$$\text{Xét } \Delta BCF \text{ có } CF \parallel AD \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BD}{CD} = 2$$

Ta có $AB = AC$ (ΔABC vuông cân),

$$AM = MC = \frac{AC}{2} \text{ (M là trung điểm của cạnh AC)}$$



Do đó $AM = AF$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACF$ có: $AB = AC$, $\widehat{BAM} = \widehat{CAF} (= 90^\circ)$, $AM = AF$

Do đó $\triangle ABM = \triangle ACF$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ACF} \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ACF}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{BAD} = \widehat{ACF} + \widehat{AFC} = 90^\circ$$

Do đó $BM \perp AD$

$\triangle BME$ có BD, MD là hai đường cao cắt nhau tại D

$(BD \perp ME, MD \perp BE) \Rightarrow D$ là trực tâm của tam giác $\triangle BME$.

$\Rightarrow BM \perp DE$

Ta có $AD \perp BM, DE \perp BM$

$\Rightarrow AD, DE$ trùng nhau.

Vậy ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Bài 42. Cho hình bình hành $ABCD$. M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . K là điểm trên cạnh CD . Gọi P là giao điểm của KM và AB , Q là giao điểm của KN và AB . Gọi E là giao điểm của QM và PN . I là trung điểm của đoạn thẳng MN . Chứng minh rằng ba điểm K, E, I thẳng hàng.

Lời giải

Gọi I', T lần lượt là giao điểm của KE với MN, PQ .

Xét $\triangle NAQ$ và $\triangle DKC$ có: $\widehat{NAQ} = \widehat{DKC}$ (so le trong và $AB \parallel CD$),

$NA = ND$ (N là trung điểm của AD),

$\widehat{ANQ} = \widehat{DNK}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle NAQ = \triangle DKC$ (c.g.c) $\Rightarrow NQ = NK$. Tương tự có $MP = MK$

$\triangle KPM$ có PN, QM là hai đường trung tuyến ($NQ = NK, MP = MK$) cắt nhau tại E

$\Rightarrow E$ là trọng tâm của tam giác KPM

$\Rightarrow KE$ là đường trung tuyến của tam giác KPM .

$\Rightarrow T$ là trung điểm của PM

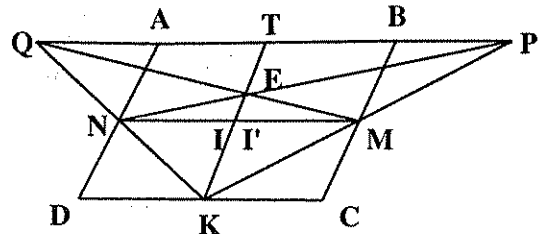
$$\text{Xét } \triangle KPM \text{ có } NI' \parallel TM \Rightarrow \frac{NI'}{QT} = \frac{KI'}{KT}$$

$$\text{Xét } \triangle KPM \text{ có } I'M \parallel TP \Rightarrow \frac{I'M}{TP} = \frac{KI'}{KT}$$

$$\text{Do đó } \frac{NI'}{QT} = \frac{I'M}{TP} (= \frac{KI'}{KT})$$

Mà $QT = TP$ (T là trung điểm của PM). Nên $NI' = I'M$. Do đó $I' = I$

Vậy ba điểm K, E, I thẳng hàng.



Bài 43. Cho tam giác nhọn ABC , hình chữ nhật $MNPQ$ tâm O , có M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC , P và Q thuộc cạnh BC . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH, BC . Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Lời giải

Gọi I là giao điểm của MQ và BE , K là giao điểm của NP và CE

Ta có $MQ \perp BC$, $AH \perp BC$ (gt) $\Rightarrow MQ \parallel AH$

$$\triangle ABE \text{ có } MI \parallel AE \Rightarrow \frac{MI}{AE} = \frac{BI}{BE}$$

$$\triangle BEH \text{ có } IQ \parallel EH \Rightarrow \frac{IQ}{EH} = \frac{BI}{BE}$$

$$\text{Do đó } \frac{MI}{AE} = \frac{IQ}{EH} (= \frac{BI}{BE})$$

Mà $AE = EH$ (E là trung điểm của AH)

$\Rightarrow MI = IQ \Rightarrow I$ là trung điểm của MQ.

Tương tự có K là trung điểm của NP.

Do đó IK là điểm trung bình của hình chữ nhật MNPQ.

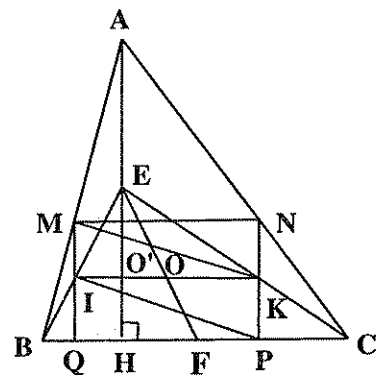
$IK \parallel BC$

Gọi O' là giao điểm của EF và IK. Chứng minh tương tự trên có O' là trung điểm IK.

Mặt khác, ta có $MI = KP$, $MI \parallel KP$ nên tứ giác MKPI là hình bình hành. Mà O là trung điểm MP nên O là trung điểm của IK.

Do vậy: $O' \equiv O$

Vậy ba điểm E, O, F thẳng hàng.



Bài 44. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Trên các cạnh AD, BC lần lượt lấy M, N sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{CN}{BC}$. Đường thẳng qua M song song với AC cắt BD ở P, cắt CD ở K.

Gọi I là trung điểm của MN, O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm O, I, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi Q là giao điểm của KN và AC.

Gọi S là giao điểm của OK và PQ.

$$\triangle ADC \text{ có } MK \parallel AC \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{CK}{CD}$$

$$\text{Mà } \frac{AM}{AD} = \frac{CN}{BC} \text{ (gt), nên } \frac{CK}{CD} = \frac{CN}{BC}$$

$$\triangle BCD \text{ có } \frac{CK}{CD} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow KN \parallel BD \text{ (định lý Ta-lét đảo)}$$

Do đó tứ giác POQK là hình bình hành.

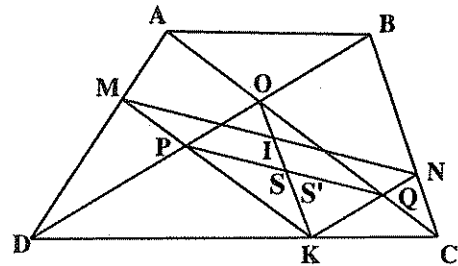
$\Rightarrow S$ là trung điểm của PQ.

$$\triangle DAO \text{ có } MP \parallel OA \Rightarrow \frac{MP}{OA} = \frac{DP}{OD}$$

$$\triangle DOC \text{ có } PK \parallel OC \Rightarrow \frac{PK}{OC} = \frac{DP}{OD}$$

$$\text{Do đó } \frac{MP}{OA} = \frac{PK}{OC} (= \frac{DP}{OD}) \Rightarrow \frac{MP}{PK} = \frac{NQ}{QK}$$

$$\triangle KMN \text{ có } \frac{MP}{PK} = \frac{NQ}{QK} \Rightarrow PQ \parallel MN \text{ (định lý Ta-lét đảo)}$$



Gọi S' là giao điểm của KI và MN . Tương tự trên, có: $\frac{PS'}{MI} = \frac{S'Q}{IN} (= \frac{KS'}{KI})$

Mà $MI = IN$ nên $PS' = S'Q$. Do vậy: $S' = S$. Ta có K, S, I thẳng hàng

Mà K, S, O thẳng hàng (tứ giác $POQK$ là hình bình hành)

Như vậy K, S, I, O thẳng hàng

Vậy O, I, K thẳng hàng.

Bài 45. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , có $AC = AB$. Gọi N là giao điểm của AM và CD . Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy E, F sao cho $CE \parallel NF$. Trên nửa mặt phẳng bờ OF có chứa D . Vẽ tam giác OKF cân tại O có $\widehat{OKF} = 15^\circ$. Chứng minh rằng E, O, K thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{DNF} = \widehat{DCE}$ (đồng vị và $CE \parallel NF$)

$\widehat{DCE} = \widehat{BEC}$ (so le trong và $AB \parallel CD$), nên $\widehat{DNF} = \widehat{BEC}$

Xét $\triangle DNF$ và $\triangle BEC$ có $\widehat{DNF} = \widehat{BEC} (= 60^\circ)$, $\widehat{DNF} = \widehat{BEC}$

Do đó $\triangle DNF \sim \triangle BEC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DN}{BE} = \frac{DF}{BC} \Rightarrow BE \cdot DF = BC \cdot DN \quad (1)$$

$$\triangle NMC \text{ có } DA \parallel CM \Rightarrow \frac{DN}{CN} = \frac{DA}{CM}$$

$$\text{Mà } \frac{DA}{CM} = \frac{AB}{CM} = 3 \text{ (Vì } BM = \frac{4}{3} BC \Rightarrow MC = \frac{1}{3} BC)$$

$$\text{Do vậy } \frac{DN}{CN} = 3 \Rightarrow \frac{DN}{DN + CN} = \frac{3}{3 + 1} \Rightarrow \frac{DN}{DC} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow BC \cdot DN = \frac{3}{4} BC^2 \quad (2)$$

Tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD$

$$\triangle OBC \text{ vuông tại } O \Rightarrow OB^2 + OC^2 = BC^2$$

$$\text{Nên } OB^2 = BC^2 - OC^2 = BC^2 - \frac{1}{4} BC^2 = \frac{3}{4} BC^2 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) có } BE \cdot DF = OB^2 \Rightarrow \frac{BE}{OB} = \frac{OB}{DF} = \frac{OD}{DF}$$

$$\text{Xét } \triangle BEO \text{ và } \triangle DOF \text{ có: } \widehat{EBO} = \widehat{ODF}, \frac{BE}{OD} = \frac{OB}{DF}$$

$$\text{Do đó } \triangle BEO \sim \triangle DOF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BEO} = \widehat{DOF}, \widehat{BOE} = \widehat{DFO}$$

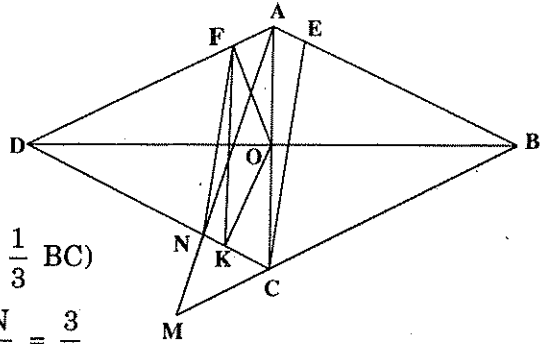
$$\text{Nên } \widehat{EOF} = 30^\circ$$

$$\triangle OKF \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{OKF} = \widehat{OFK}$$

$$\text{Nên } \widehat{KOF} = 180^\circ - (\widehat{OKF} + \widehat{OFK}) = 180^\circ - (15^\circ + 15^\circ) = 150^\circ$$

$$\text{Ta có } \widehat{EOK} = \widehat{KOF} + \widehat{EOF} = 150^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

Vậy ba điểm E, O, K thẳng hàng.



Bài 46. Cho tam giác nhọn ABC. M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$. Vẽ $MD \perp AB$ tại D, $ME \perp AC$ tại E. Gọi I là trực tâm của tam giác ADE. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh M, I, H thẳng hàng.

Lời giải

Gọi V là giao điểm của ME và CH, J là giao điểm của MD và BH, K là giao điểm của MH và VJ, N là giao điểm của MH và DE.

Các tứ giác DIEM, VMJH là các hình bình hành

$$\triangle DBM \sim \triangle ECM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DM}{EM} = \frac{DB}{EC}$$

$$\triangle DBJ \sim \triangle ECV \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DJ}{EV} = \frac{DB}{EC}$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } \frac{DM}{EM} &= \frac{DJ}{EV} \Rightarrow \frac{DM}{EM} = \frac{DJ - DM}{EV - EM} = \frac{JM}{VM} \\ &\Rightarrow \frac{DM}{JM} = \frac{EM}{VM} \end{aligned}$$

$$\triangle MDE \sim \triangle MJV \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{MJV} \Rightarrow DE \parallel VJ$$

$$\triangle MVK \text{ có } NE \parallel VK \Rightarrow \frac{NE}{VK} = \frac{MN}{MK}$$

$$\triangle MKJ \text{ có } DN \parallel KJ \Rightarrow \frac{DN}{KJ} = \frac{MN}{MK}$$

$$\text{Nên } \frac{NE}{VK} = \frac{DN}{KJ}. \text{ Mà } VK = KJ \Rightarrow NE = DN$$

Ta có I, N, M, K, H thẳng hàng. Vậy ba điểm M, I, H thẳng hàng.

Bài 47. Cho hình chữ nhật ABCD. M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. E là điểm trên tia đối của tia DC. Trên nửa mặt phẳng bờ MN có chứa A vẽ tia Nx sao cho $\widehat{MNx} = \widehat{MNE}$. Gọi K là giao điểm của tia Nx và EM. Chứng minh rằng A, K, C thẳng hàng.

Lời giải

Gọi S là giao điểm của tia đối tia Nx với CD.

Ta có $\widehat{NES} = \widehat{MNE}$ (so le trong và $MN \parallel CD$)

$\widehat{NSE} = \widehat{MNE}$ (so le trong và $MN \parallel CD$)

$\widehat{MNE} = \widehat{MNE}$ (gt)

Suy ra $\widehat{NES} = \widehat{NSE} \Rightarrow \triangle NES$ cân tại N.

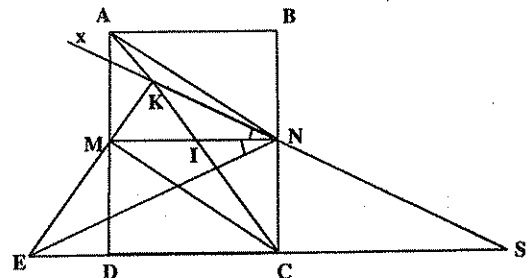
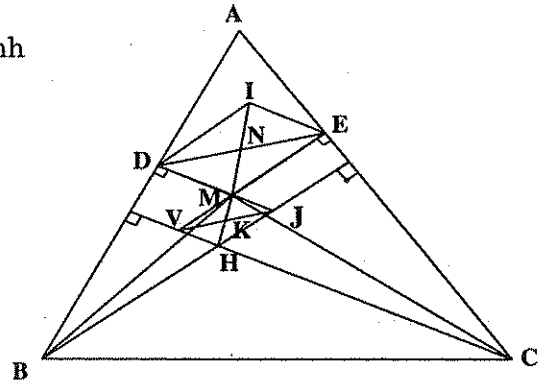
Mà NC là đường cao nên NC là đường trung tuyến $\Rightarrow CE = CS$.

Gọi I là giao điểm của KC và MN.

$$\text{Xét } \triangle KES \text{ có } MI \parallel CE \Rightarrow \frac{MI}{CE} = \frac{KI}{KC}$$

$$\text{Xét } \triangle KCS \text{ có } IN \parallel CS \Rightarrow \frac{NI}{CS} = \frac{KI}{KC}$$

$$\text{Do đó } \frac{MI}{CE} = \frac{NI}{CS}. \text{ Mà } CE = CS, \text{ nên } MI = NI$$



Ta có $AM = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC = CN$

Tứ giác MANC có $AM \parallel CN$, $AM = CN$ nên là hình bình hành.

Mà I là trung điểm MN, nên I là trung điểm AC

$\Rightarrow A, I, C$ thẳng hàng.

Mà K, I, C thẳng hàng. Do đó A, I, C, K thẳng hàng

Vậy A, K, C thẳng hàng.

Bài 48. Cho tam giác ABC có $\widehat{C}$ tù, $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. M là trung điểm cạnh AB. Đường thẳng vuông góc với BC tại B cắt AC ở D. E là điểm đối xứng với C qua AB. Chứng minh rằng D, M, E thẳng hàng.

Lời giải

Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt DM, DB lần lượt tại N, K.

$$\triangle DBM \text{ có } NK \parallel BM \Rightarrow \frac{NK}{BM} = \frac{AO}{AI} = \frac{OM}{IN}$$

$$\triangle DMA \text{ có } NC \parallel AM \Rightarrow \frac{NC}{AM} = \frac{DN}{DM}$$

$$\frac{NK}{BM} = \frac{NC}{AM}, BM = AM \Rightarrow NK = NC.$$

$\triangle BKC$ vuông, BN là đường trung tuyến

$$\Rightarrow BN = NC \Rightarrow \widehat{NBC} = \widehat{NCB}$$

Mà $\widehat{ABO} = \widehat{NCB}$ ($CN \parallel AB$). Do vậy $\widehat{NBA} = 2\widehat{ABC} = \widehat{BAC}$

Hình thang ABNC có $\widehat{NBA} = \widehat{BAC}$ nên là hình thang cân

$$\Rightarrow BC = AN, BN = AC$$

Mà $BE = BC$, $AE = AC$ (tính chất đối xứng trục)

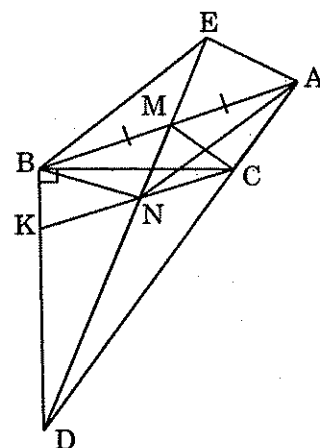
$$\Rightarrow BE = AN, BN = AE$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BEAN là hình bình hành.

$$\Rightarrow N, M, E \text{ thẳng hàng}$$

Do đó D, N, M, E thẳng hàng.

Vậy D, M, E thẳng hàng.



Bài 49. Trên các cạnh AB, CD của hình vuông ABCD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = CN = \frac{AB}{3}$. Gọi K là giao điểm của AN và DM. Gọi S là trực tâm của tam giác ADK. Chứng minh rằng B, C, S thẳng hàng.

Lời giải

Gọi H là giao điểm của BC với đường cao KE của tam giác ADK.

$$DN = CD - CN = AB - \frac{AB}{3} = \frac{2AB}{3}$$

$$\triangle KDN \text{ có } AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AK}{NK} = \frac{AM}{DN} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta AND \text{ có } EK \parallel DN \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AK}{NK} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{1}{2} DE$$

$$\text{Nên } AE = \frac{1}{3} AD = \frac{1}{3} AB$$

Tứ giác ABHE là hình chữ nhật

$$\Rightarrow AB = EH$$

$$\Delta ADM = \Delta EAH \text{ (c.g.c)}$$

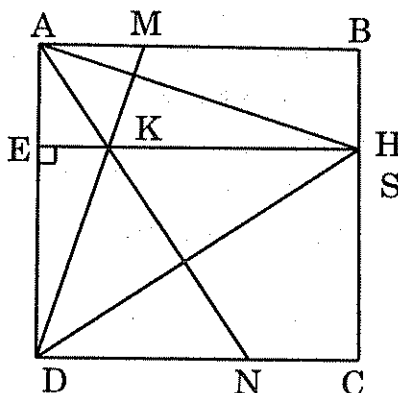
$$\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{EHA}$$

$$\widehat{ADM} + \widehat{EAH} = \widehat{EHA} + \widehat{EAH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DM \perp AH$$

Do vậy: H là trực tâm của tam giác ADK. Ta có H = S

Vậy: B, C, S thẳng hàng.



Bài 50. Cho tam giác ABC có $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$. G là trọng tâm, BD và CE là các đường phân giác của tam giác ABC. Chứng minh rằng D, E, G thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có A, G, M thẳng hàng.

Vẽ BN // EG (N ∈ AG), CP // GD (P ∈ AG)

$$\Delta ABN \text{ có } EG \parallel BN \Rightarrow \frac{GN}{GA} = \frac{BE}{AE} \text{ (định lý Ta-lét)}$$

$$\Delta ABC \text{ có } CE \text{ là đường phân giác} \Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{Do đó } \frac{GN}{GA} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{Chứng minh tương tự có: } \frac{GP}{GA} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{Ta có } \frac{GN}{GA} + \frac{GP}{GA} = \frac{BC}{AC} + \frac{BC}{AB} = BC \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right) = 1$$

$$\Rightarrow GN + GP = GA$$

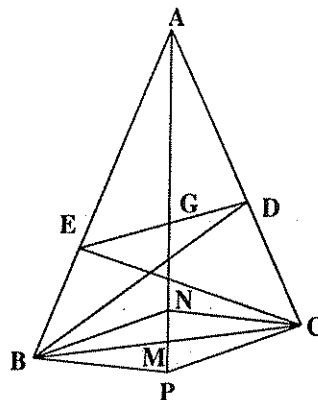
$$\text{Nên } GM + GP = 2GM \Rightarrow GM - MN + GM + MP = 2GM \Rightarrow MN = MP$$

M là trung điểm của BC và NP nên tứ giác BNCP là hình bình hành

$$\Rightarrow BN \parallel CP. \text{ Do đó } EG \parallel CP$$

Ta có EG // CP, GD // CP $\Rightarrow$ EG, GD trùng nhau (tiên đềƠ-clít)

Vậy ba điểm D, E, G thẳng hàng.



Bài 51. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến và phân giác vẽ từ A theo thứ tự cắt BC tại M và N. Từ N vẽ đường thẳng vuông góc với NA, đường này cắt MA và BA tương ứng tại Q và P. Từ P vẽ đường vuông góc với BA cắt NA tại O. Vẽ QS ⊥ BC tại J. Chứng minh rằng ba điểm O, Q, J thẳng hàng.

Lời giải

Qua P vẽ đường thẳng song song với BC cắt AM, AN, AC lần lượt ở I, K, E.

Gọi H là giao điểm của PN và AC. Chứng minh được I là trung điểm PE.

$\triangle APH$ cân tại A.

IN là đường trung bình của tam giác PEH.

Tứ giác IECN là hình bình hành,

Vì vậy $NC = IE = PI$

Ta có $\frac{NQ}{PQ} = \frac{MN}{PI} = \frac{MN}{NC} = \frac{MI}{AI} = \frac{NK}{AK} \Rightarrow QK \parallel AP$

Nên $KQ \perp OP$

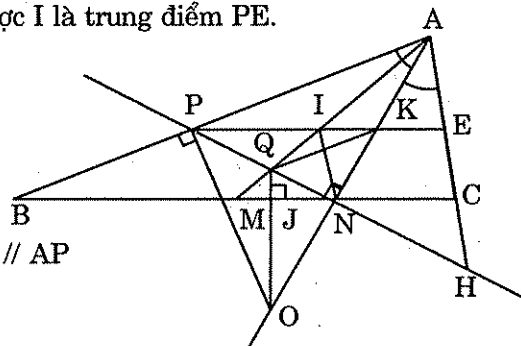
$\triangle OPK$ có PN, KQ là hai đường cắt nhau tại Q.

$\Rightarrow Q$ là trực tâm của tam giác OPK

$\Rightarrow OQ \perp PK$

Ta có $OQ \perp BC$ và $OJ \perp BC$ (gt). Nên OQ, QJ trùng nhau.

Vậy ba điểm O, Q, J thẳng hàng.



Bài 52. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến CM. Tia phân giác của góc AMC cắt AC tại D, tia phân giác của góc BMC cắt BC tại E. Các đường thẳng vuông góc với MD tại D, ME tại E, cắt nhau ở F. Chứng minh rằng ba điểm C, M, F thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle MAC$ có MD là đường phân giác (gt) $\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{AM}{MC}$

$\triangle MBC$ có ME là đường phân giác (gt) $\Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{BM}{MC}$

Gọi O là giao điểm của DE và CM.

Ta có $\frac{AD}{CD} = \frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MC} = \frac{BE}{EC}$

$\triangle ABC$ có $\frac{AD}{CD} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow DE \parallel AB$

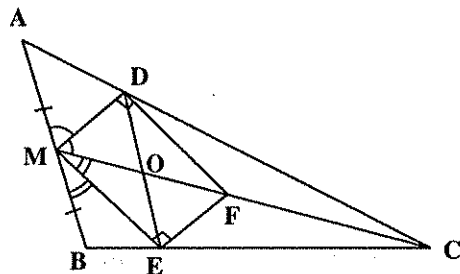
Nên $\frac{OD}{AM} = \frac{OE}{BM} (= \frac{CO}{CM}) \Rightarrow OD = OE$

Ta có $\widehat{DME} = 90^\circ$, $\widehat{MDF} = 90^\circ$, $\widehat{MEF} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác MD FE là hình chữ nhật $\Rightarrow O \in MF$

Do đó C, F, O, M thẳng hàng.

Vậy C, M, F thẳng hàng.



Bài 53. Từ điểm M nằm trong tam giác ABC vẽ $MD \perp BC$ tại D, $ME \perp AC$ tại E, $MF \perp AB$ tại F. Trên các tia MD, ME, MF lần lượt lấy các điểm I, K, L sao cho $\frac{MI}{BC} = \frac{MK}{AC} = \frac{ML}{AB}$. Gọi T là trung điểm của LK. Chứng minh rằng ba điểm I, M, T thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là điểm đối xứng của điểm I qua M. Ta có $MN = MI$

Xét $\triangle KNM$ và $\triangle ABC$ có: $\frac{MN}{BC} = \frac{MK}{AC}$, $\widehat{KMN} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với góc KMD)

$$\text{Do đó } \triangle KNM \sim \triangle ABC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{NK}{AB} = \frac{MK}{AC} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \frac{ML}{AB} = \frac{MK}{AC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), và (2) có } \frac{ML}{AB} = \frac{NK}{AB} \Rightarrow ML = NK$$

Tương tự $\triangle LMN \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{LN}{AC} = \frac{ML}{AB} \text{ Mà } \frac{MK}{AC} = \frac{ML}{AB} \text{ (gt)} \Rightarrow LN = MK$$

Tứ giác LNKM có $ML = NK$, $LN = MK$ nên là hình bình hành.

Mà T là trung điểm của LK

Do vậy T là trung điểm của MN

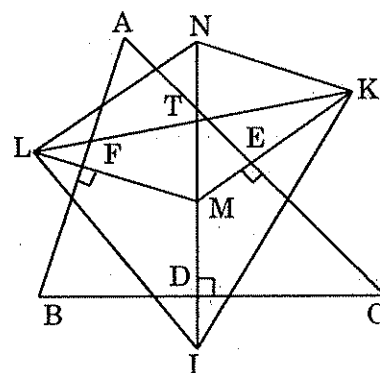
Ta có I, M, T, N thẳng hàng

Vậy ba điểm I, M, T thẳng hàng.

*** Nhận xét:**

Chứng minh tương tự trên ta cũng có LM đi qua trung điểm của IK.

Như vậy M là trọng tâm của tam giác IKL.



Bài 54. Cho tứ giác ABCD, E và F lần lượt trên các cạnh AB và CD sao cho $\frac{EB}{AB} = \frac{FC}{DC}$.

Gọi I là trung điểm của EF, H là trung điểm của AD, K là trung điểm của BC. Chứng minh rằng H, I, K thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $EP \parallel AD$, $FQ \parallel AD$ ($P \in BH$, $Q \in CH$)

$$\triangle ABH \text{ có } EP \parallel AH, \text{ nên } \frac{EP}{AH} = \frac{EB}{AB} \text{ (hệ quả của định lý Talet)}$$

$$\triangle DCH \text{ có } FQ \parallel HD, \text{ nên } \frac{FQ}{HD} = \frac{FC}{DC} \text{ (hệ quả của định lý Talet)}$$

$$\text{Ta có } \frac{EB}{AB} = \frac{FC}{DC} \text{ (gt)}$$

$$\text{Suy ra } \frac{EP}{AH} = \frac{FQ}{HD}. \text{ Mà } AH = HD \text{ nên } EP = FQ.$$

Mặt khác: $EP \parallel FQ$ (vì cùng song song với AD), nên PEQF là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của EF, do đó I là trung điểm của PQ.

Gọi K' là giao điểm của HI và BC

$$\triangle ABH \text{ có } EP \parallel AH \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{BP}{BH}$$

$$\triangle HCD \text{ có } FQ \parallel HD \Rightarrow \frac{FC}{DC} = \frac{CQ}{CH}$$

$$\text{Mà } \frac{EB}{AB} = \frac{FC}{DC} \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{BP}{BH} = \frac{CQ}{CH}$$

$$\Delta HCB \text{ có } \frac{BP}{BH} = \frac{CQ}{CH} \Rightarrow PQ \parallel BC \text{ (định lý Talet đảo)}$$

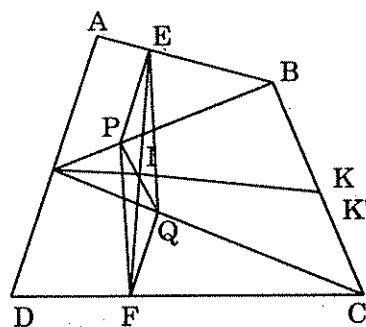
$$\Delta HBK' \text{ có } IP \parallel K'B \Rightarrow \frac{IP}{K'B} = \frac{HI}{HK'}$$

$$\Delta HCK' \text{ có } IQ \parallel K'C \Rightarrow \frac{IQ}{K'C} = \frac{HI}{HK'}$$

$$\text{Nên } \frac{IP}{K'B} = \frac{IQ}{K'C}. \text{ Mà } IP = IQ. \text{ Do vậy } K'B = K'C$$

Ta có $K' \equiv K$

Vậy ba điểm H, I, K thẳng hàng.



Bài 55. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. M là điểm nằm trong tam giác ABC. I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB và có $MI^2 + MJ^2 + MK^2 = \frac{1}{2}AH^2$. Chứng minh rằng A, M, H thẳng hàng.

Lời giải

Bài toán phụ: Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

$$\text{Thật vậy, ta có } a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Xét M, I, A có $MI + MA \geq AI$ và $AM \perp IM \Rightarrow AI \geq AM$

Ta có $\widehat{KMA} = \widehat{KAJ} = \widehat{MJA} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác MKAJ là hình chữ nhật $\Rightarrow MA = KJ$

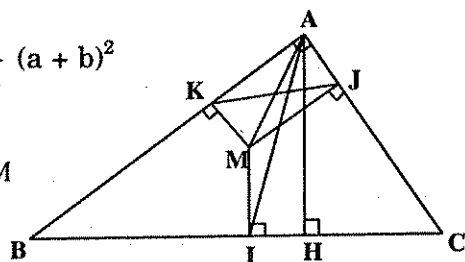
ΔMKJ vuông tại M $\Rightarrow MK^2 + MJ^2 = KJ^2$

$$\text{Do đó } MI^2 + MK^2 + MJ^2 = MI^2 - MA^2 \geq \frac{1}{2}(MI + MA)^2 \geq \frac{1}{2}AI^2 \geq \frac{1}{2}AH^2$$

$$\text{Theo đầu bài ta có } MI^2 + MK^2 + MJ^2 = \frac{1}{2}AH^2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \text{M nằm giữa A và I} \\ I \equiv H \\ MI = MA \end{cases} \Leftrightarrow \text{M là trung điểm của AH}$$

Vậy ba điểm A, M, H thẳng hàng.



Bài 56. Cho góc nhọn xOy, M là điểm cố định nằm trong góc xOy. A và B lần lượt di động trên các tia Cx và Oy, sao cho $2OA = 3OB$. Vẽ tia Oz sao cho $\widehat{MOz} = \widehat{xOy}$. Trên tia Oz lấy điểm C sao cho $\frac{OC}{OM} = \frac{3}{2}$. Biết rằng $2MA + 3MB = 2MC$.

Chứng minh rằng ba điểm M, C, A thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBM$ có $\frac{OC}{OM} = \frac{OA}{OB} = \left(\frac{3}{2}\right)$; $\widehat{AOC} = \widehat{BOM}$

Do đó $\triangle OAC \sim \triangle OBM$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{AC}{MB} = \frac{3}{2} \Rightarrow MB = \frac{2}{3}AC$

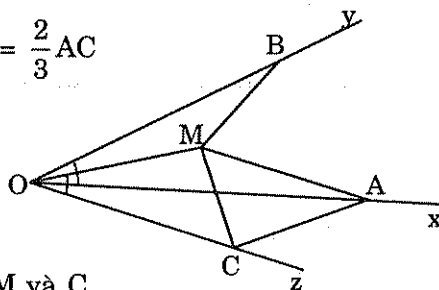
Xét ba điểm M, A, C có $MA + AC \geq MC$

Do đó $2MA + 3MB = 2MA + 3 \cdot \frac{2}{3}AC$

$$= 2(MA + AC) \geq 2MC$$

Mà $2MA + 3MB = 2MC$ (gt). Do vậy A nằm giữa M và C

Vậy ba điểm M, C, A thẳng hàng.



Bài 57. Cho xAy nhọn, B và C lần lượt nằm trên các tia Ax và Ay sao cho $AB < AC$, M là điểm trong góc xOy sao cho $\frac{MA}{AB} = \frac{1}{2}$. Gọi D là điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $AD = \frac{1}{4}AB$. Biết rằng $MB + 2MC = 2DC$. Chứng minh rằng C, D, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\frac{MA}{AB} = \frac{1}{2}$ (gt), do đó $\frac{AD}{MA} = \frac{1}{2}$.

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle ADM$ có $\widehat{MAB}$ (chung); $\frac{MA}{AB} = \frac{AD}{MA} \left(= \frac{1}{2}\right)$

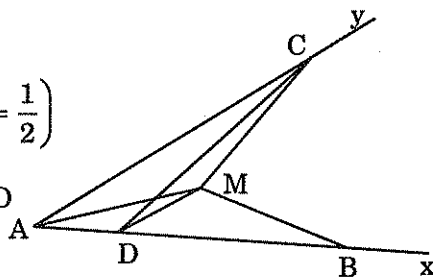
Do đó $\triangle AMB \sim \triangle ADM \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MA}{AD} = 2 \Rightarrow MB = 2MD$

Xét ba điểm M, D, C có: $MD + MC \geq DC$

Do đó $MB + 2MC = 2(MD + MC) \geq 2DC$. Mà $MB + 2MC = 2DC$ (GT)

Dấu "=" xảy ra, do đó M nằm giữa C và D

Vậy ba điểm C, D, M thẳng hàng.



Bài 58. Cho hình chữ nhật ABCD ($AD < AB$). Vẽ $AH \perp BD$ tại H. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho $AE < AD$. Vẽ $EM \perp BD$ tại M, EM cắt AB tại O. Vẽ $AK \perp BE$ tại K. Vẽ $AF \perp OD$ tại F. Chứng minh rằng ba điểm H, F, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là giao điểm của DO và BE.

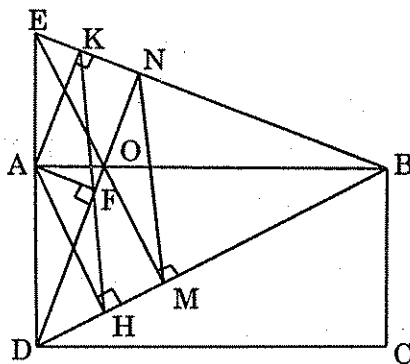
$\triangle DEM$ có $AH \parallel EM \Rightarrow \frac{DH}{DM} = \frac{DA}{DE}$

$\triangle DEN$ có $AF \parallel EN \Rightarrow \frac{DF}{DN} = \frac{DA}{DE}$

$\triangle DMN$ có $\frac{DH}{DM} = \frac{DF}{DN} \left(= \frac{DA}{DE}\right) \Rightarrow HF \parallel MN$

$\triangle ABH$ có $CM \parallel AH \Rightarrow \frac{BM}{BH} = \frac{BO}{BA}$

$\triangle ABK$ có $ON \parallel AK \Rightarrow \frac{BO}{BA} = \frac{AN}{AK}$



$$\Delta AKH \text{ có } \frac{BM}{BH} = \frac{AN}{AK} \left(= \frac{BO}{BA} \right) \Rightarrow HK \parallel MN$$

Từ $HF \parallel MN$, $HK \parallel MN$. Ta có HF , HK trùng nhau (tiên đề O-clit)

Vậy ba điểm H , F , K thẳng hàng.

Bài 59. Cho tam giác đều ABC . Các cặp điểm A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2 theo thứ tự thuộc các cạnh BC , CA , AB sao cho lục giác $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ lồi và có các cạnh bằng nhau. Gọi M là giao điểm của A_1B_2 và B_1C_2 . Chứng minh rằng ba điểm A_2 , M , C_1 thẳng hàng.

Lời giải

Lấy K trong tam giác ABC sao cho tam giác KA_1A_2 là tam giác đều.

Ta có $\widehat{KA_2A_1} = \widehat{B_2CB} = (60^\circ)$

$\Rightarrow KA_2 \parallel B_1B_2$

$KA_2 = B_1B_2 (= A_1A_2)$

Do đó tứ giác $KB_2B_1A_2$ là hình bình hành. Mà $A_2B_1 = B_1B_2$ (gt)

Do vậy tứ giác $KB_2B_1A_2$ là hình thoi $\Rightarrow KB_2 = B_2B_1$

Ta có $KB_2 = B_2C_1 (= B_2B_1)$. Tương tự $KC_1 = C_1B_2$

ΔKB_2C_1 đều

Do vậy $\widehat{A_1A_2B_1} = \widehat{A_1A_2K} + \widehat{KA_2B_1} = \widehat{C_1B_2K} + \widehat{KB_2B_1} = \widehat{C_1B_2B_1}$

$\Delta A_1A_2B_1 = \Delta C_1B_2C_1$ (c.g.c) $\Rightarrow A_1B_1 = C_1B_1$

Mà $A_1C_2 = C_1C_2$

Do đó B_1C_2 cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng A_1C_1

$\Rightarrow B_1C_2$ là đường trung trực của A_1C_1

Tương tự A_1B_2 là đường trung trực của B_1C_1 và C_1A_2 là đường trung trực của A_1B_1 .

M là giao điểm các đường trung trực các cạnh A_1C_1 , B_1C_1 của tam giác $A_1B_1C_1 \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của cạnh A_2C_1

Vậy ba điểm A_2 , M , C_1 thẳng hàng.

Bài 60. Cho tam giác ABC , M là điểm nằm trong tam giác ABC . Gọi I , J , L lần lượt là trọng tâm các tam giác MBC , MAC , MAB . Gọi G , K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC , IJL . Chứng minh ba điểm G , K , M thẳng hàng.

Lời giải

Gọi D , E , F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , AC , AB

AD cắt EF tại V . Ta có D , E lần lượt là trung điểm của BC , AC

$\Rightarrow DE$ là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow DE \parallel AB$ và $DE = \frac{1}{2}AB$

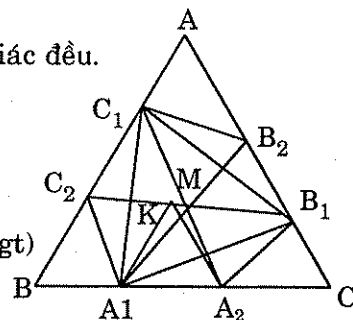
Ta có $DE = AF = \left(\frac{1}{2}AB \right)$ và $DE \parallel AF$

Nên tứ giác $AEDF$ là hình bình hành. $\Rightarrow V$ là trung điểm của EF .

Do vậy AD đi qua trung điểm của EF

Tương tự, BE đi qua trung điểm O của DF

Vậy trọng tâm G của tam giác ABC cũng là trọng tâm của tam giác DEF .



ΔMAB có MF là đường trung tuyến, L là trọng tâm $\Rightarrow \frac{ML}{MF} = \frac{2}{3}$

Tương tự có: $\frac{MI}{MD} = \frac{2}{3}$

ΔMDF có $\frac{ML}{MF} = \frac{MI}{MD} \left(= \frac{2}{3} \right) \Rightarrow LI \parallel DF$ (định lý talét đảo)

Gọi S là giao điểm của MO và DF

ΔMFO có $LS \parallel FO \Rightarrow \frac{LS}{FO} = \frac{MS}{MO} = \frac{ML}{MF} = \frac{2}{3}$

ΔMOD có $SI \parallel OD \Rightarrow \frac{SI}{OD} = \frac{MS}{MO}$

Mà $OD = OF$. Do vậy $LS = SI$

Gọi T là giao điểm của JS và MG

ΔMOE có $\frac{MS}{MO} = \frac{MJ}{ME} \left(= \frac{2}{3} \right) \Rightarrow SJ \parallel OE$ (định lý Talét đảo)

ΔMGE có $TJ \parallel EG \Rightarrow \frac{JT}{GE} = \frac{MJ}{ME}$

ΔMOE có $SJ \parallel OE \Rightarrow \frac{JS}{EO} = \frac{MJ}{ME}$

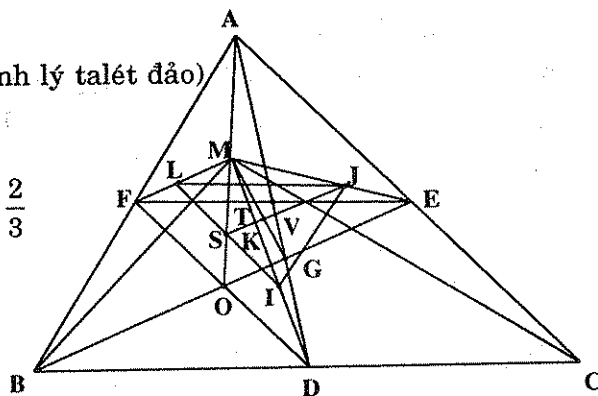
Ta có $\frac{JT}{GE} = \frac{JS}{EO} \left(= \frac{MJ}{ME} \right) \Rightarrow \frac{JT}{JS} = \frac{GE}{EO} = \frac{2}{3}$

ΔIJL có JS là đường trung tuyến, T thuộc đoạn thẳng JS và $JT = \frac{2}{3}JS$ (vì $\frac{JT}{JS} = \frac{2}{3}$)

$\Rightarrow T$ là trọng tâm của tam giác IJL

Nên $T \equiv K$

Vậy ba điểm G, K, M thẳng hàng.



HAI ĐƯỜNG CONG KỲ LẠ

Hình học Euclid được giới thiệu ở trường trung học với việc khảo sát các hình đa giác, hình tròn, hình đa diện, hình cầu, hình nón, v.v... Hơn hai nghìn năm qua, hình học Euclid đã có tác dụng to lớn đối với nền văn minh nhân loại, từ việc đo đạc ruộng đất đến vẽ đồ án xây dựng nhà cửa, chế tạo vật dụng và máy móc, từ việc mô tả quỹ đạo của các hành tinh trong hệ Mặt Trời đến mô tả cấu trúc của nguyên tử. Tuy nhiên, qua hình học Euclid ta nhìn mọi vật dưới dạng “đều đặn”, “trơn nhẵn”. Với những hình dạng trong Hình học Euclid ta không thể hình dung và mô tả được nhiều vật thể rất quen thuộc chung quanh như quả núi, bờ biển, đám mây, nhiều bộ phận trong cơ thể người (phổi, mạch máu...) v.v... là những vật cụ thể cực kỳ không đều đặn, không trơn nhẵn mà rất xù xì, gồ ghề. Một ví dụ đơn giản: bờ biển đảo Phú Quốc dài bao nhiêu? Ta không thể có được câu trả lời. Nếu dùng cách đo hình học quen thuộc, dù thước đo có nhỏ bao nhiêu đi nữa ta cũng đã bỏ qua những lỗ lổm giữa hai đầu của thước đo ấy, nhất là chỗ bờ đá nhấp nhô. Và với thước đo càng nhỏ ta có chiều dài càng lớn và có thể là... vô cùng lớn!

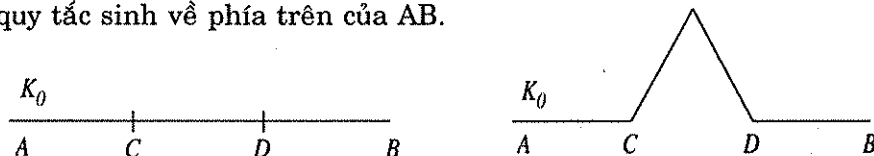
Những đường cong tương tự các đường cong sau đây có thể phản ánh những đối tượng như đường bờ biển, hình dáng các đám mây, các dãy núi nhấp nhô,...

1. Đường cong von Kock

Lấy một đoạn thẳng AB bất kỳ, gọi là hình ban đầu K_0 (Hình 1)

Bước 1. Chia AB ra ba phần bằng nhau ($AC = CD = DB$), rồi dựng tam giác đều CED trên đoạn thẳng ở giữa (CD), sau đó xoá cạnh CD đi. Ta được hình K_1 (Hình 1). Quy tắc biến đổi từ hình ban đầu K_0 thành hình K_1 gọi là quy tắc sinh; hình K_1 cũng được gọi là tập sinh.

Trên hình K_1 điểm E nằm phía trên đoạn thẳng nằm ngang AB. Ta nói đã áp dụng quy tắc sinh về phía trên của AB.



Bước 2. Lặp lại quy tắc sinh này cho bốn đoạn của K_1 , ta được K_2 . Chú ý rằng đối với AC và BD thì áp dụng quy tắc sinh về phía điểm E, còn đối với hai đoạn CE và ED thì áp dụng quy tắc sinh về phía ngoài của tam giác CED đã dựng trước đó.

Bước 3. Lặp lại quy tắc sinh như đã mô tả ở các Bước 1 và 2, với 16 đoạn thẳng của K_2 ta được K_3 .

Lặp lại quy tắc vô hạn lần, ta được đường cong K mà K_n là một hình ảnh gần đúng. Đường cong này được gọi là Đường cong von Kock, theo tên nhà toán học Thụy Điển Helge von Kock (1870 – 1920) đã nghĩ ra nó năm 1905.

2. Đường cong Minkowski

Hình ban đầu M_0 : đoạn thẳng nằm ngang AB (Hình 2)

Bước 1. (Quy tắc sinh). Chia đoạn thẳng AB thành bốn đoạn nhỏ bằng nhau, với các điểm M, N, P. Trên đoạn thẳng MN dựng lên phía trên một hình vuông MNQR và trên đoạn thẳng NP dựng xuống phía dưới một hình vuông NPST, sau đó xoá hai cạnh MN và NP, ta được hình M_1 (Hình 2). M_1 là tập sinh, gồm tám đoạn thẳng trong đó bốn đoạn thẳng song song với AB (đoạn thẳng AB coi như song song với AB) và bốn đoạn thẳng vuông góc với AB.

Bước 2. Lập lại quy tắc sinh cho mỗi đoạn thẳng của M_1 , ta có M_2 . Ở đây, đối với mỗi đoạn thẳng song song với AB, áp dụng quy tắc sinh như đối với đoạn thẳng AB. Đối với mỗi đoạn thẳng vuông góc với AB, thì quay M_0 quanh A một góc 90° ngược chiều kim đồng hồ rồi áp dụng quy tắc sinh như với đoạn AB.

Bước 3. Lập lại quy tắc sinh như đã mô tả ở các Bước 1 và 2 đối với mọi đoạn thẳng thuộc M_2 ta được M_3 .

Sau n bước lập ta được hình M_n . Khi $n \rightarrow +\infty$ ta được một đường cong gọi là Đường cong Minkowski (Herman Minkowski, 1864 – 1909, nhà toán học Litواني).

Dễ thấy rằng Đường cong von Kock cũng như Đường cong Minkowski là những đường cong có hai đầu mút, nhưng có chiều dài vô hạn.

Thực vậy, tập sinh của Đường cong Minkowski gồm tám đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng bằng $\frac{1}{4}$ đoạn thẳng ban đầu, tức là tập sinh dài gấp đôi ($8 \times \frac{1}{4} = 2$) đoạn thẳng ban đầu. Sau bước 1, hình có chiều dài bằng 2 (giả sử $AB = 1$ đơn vị chiều dài), sau bước 2 hình có chiều dài $2 \times 2 = 2^2$, sau bước n thì hình có chiều dài 2^n . Khi $n \rightarrow +\infty$ thì $2^n \rightarrow +\infty$, nghĩa là Đường cong Minkowski có chiều dài vô hạn.

Tập sinh của đường cong von Kock gồm bốn đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng bằng $\frac{1}{3}$ đoạn thẳng ban đầu, tức là tập sinh dài bằng $\frac{4}{3}$ đoạn thẳng ban đầu. Như vậy, sau mỗi bước xây dựng Đường cong von Kock thì hình có chiều dài tăng lên theo tỉ số $\frac{4}{3}$, sau n bước hình có chiều dài $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ (Giả sử $AB = 1$ đơn vị dài). Mà $\frac{4}{3} > 1$ nên $\left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow +\infty$, nghĩa là Đường cong von Kock dài vô hạn.

(Trích từ TÌM HIỂU FRACTAL môn hình học mới lạ của Hoàng Chúng – Hoàng Quý – Hoàng Tuy).

CHƯƠNG I

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC, H là trực tâm. M, N lần lượt trên các đoạn thẳng HB, HC sao cho $\widehat{AMC} = 90^\circ$, $AM = AN$. Trên nửa mặt phẳng bờ AN vẽ tia Ax sao cho AN là tia phân giác của góc BAx. Trên tia Ax lấy điểm K sao cho $AK = AB$. Chứng minh rằng ba điểm B, N, K thẳng hàng.

Lời giải

BH cắt AC ở D, CH cắt AB ở E.

Ta có: $BD \perp AC$, $CE \perp AB$ (vì H là trực tâm của $\triangle ABC$)

$\triangle AMC$ vuông tại M có MD là đường cao $\Rightarrow AM^2 = AD.AC$

Do đó, $AN^2 = AD.AC$ ($AM = AN$)

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle AEC$ có: $\widehat{DAB}$ (chung), $\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$ ($=90^\circ$)

Do đó $\triangle ADB \sim \triangle AEC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD.AC = AE.AB$.

Nên $AN^2 = AE.AB$ ($= AD.AC$)

Xét $\triangle NAB$ và $\triangle EAN$ có:

$\widehat{NAB}$ (chung), $\frac{AN}{AE} = \frac{AB}{AM}$ (vì $AN^2 = AE.AB$)

Do đó $\triangle NAB \sim \triangle EAN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{AEN}$. Mà $\widehat{AEN} = 90^\circ$ nên $\widehat{ANB} = 90^\circ$.

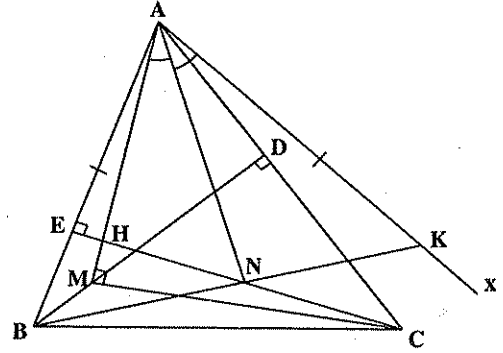
$\Rightarrow BN \perp AN$

Mặt khác $\triangle ABK$ có $AB = AK \Rightarrow \triangle ABK$ cân tại A.

AN là đường phân giác của $\triangle ABK$ (gt) $\Rightarrow BK \perp AN$

$BN \perp AN$, $BK \perp AN \Rightarrow BN, BK$ trùng nhau

Vậy B, N, K thẳng hàng.



Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao và có $BH = AC$. Đường trung tuyến BM của tam giác ABC cắt AH ở K. D là điểm trên cạnh AB sao cho $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$. Chứng minh rằng ba điểm C, K, D thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1:

Trên tia đối của tia MB lấy điểm E sao cho $ME = MK$.

Ta có M là trung điểm của AC (gt), M là trung điểm của EK

Do đó tứ giác AKCE là hình bình hành $\Rightarrow AK \parallel EC$, $AE \parallel KC$

$\triangle BCE$ có $KH \parallel EC \Rightarrow \frac{KE}{BK} = \frac{CH}{BH}$

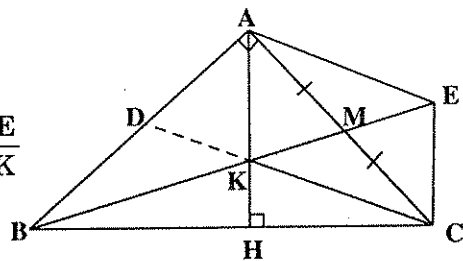
$\triangle ABC$ vuông tại A, AH là đường cao

$$\Rightarrow AC^2 = CH.BC$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

Mà $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$ (gt), $AC = BH$. Do đó, ta có $\frac{AD}{BD} = \frac{KE}{BK}$

$$\triangle ABE \text{ có } \frac{AD}{BK} = \frac{KE}{BK} \Rightarrow DK \parallel AE$$



Ta có $DK \parallel AE$, $KC \parallel AE \Rightarrow DK, KC$ trùng nhau (tiên đề O-clit)

Vậy ba điểm C, K, D thẳng hàng.

Cách 2:

Gọi I là giao điểm của BM và DH.

$\triangle ABC$ vuông tại A, AH là đường cao

$$\Rightarrow AC^2 = CH.BC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}$$

Do đó $\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{BH}$

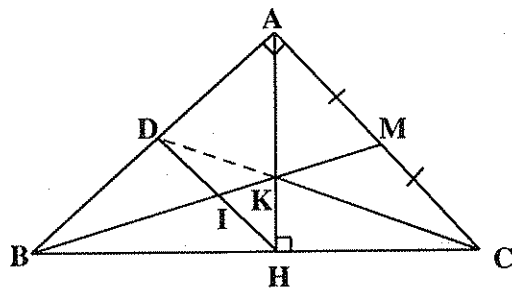
$$\triangle ABC \text{ có } \frac{AD}{BD} = \frac{CH}{BH} \left(= \frac{AC}{BC} \right) \Rightarrow DH \parallel AC$$

$$\triangle AKM \text{ có } IH \parallel AM \Rightarrow \frac{IH}{AM} = \frac{IK}{MK}$$

$$\triangle ABM \text{ có } DI \parallel AM \Rightarrow \frac{DI}{AM} = \frac{BI}{BM}$$

$$\triangle BCM \text{ có } IH \parallel CM \Rightarrow \frac{IH}{CM} = \frac{BI}{BM}$$

Ta có $\frac{DI}{AM} = \frac{IH}{CM}$. Mà $AM = CM \Rightarrow DI = IH$



Xét $\triangle IDK$ và $\triangle MCK$ có: $\widehat{DIK} = \widehat{CMK}$ (so le trong và $IH \parallel AM$), $\frac{DI}{CM} = \frac{IK}{MK} \left(= \frac{IH}{CM} \right)$

Do đó $\triangle IDK \sim \triangle MCK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IKD} = \widehat{MKC}$

Ta có $\widehat{DKC} = \widehat{DKM} + \widehat{MKC} = \widehat{DKM} + \widehat{IKD} = 180^\circ$.

Vậy C, K, D thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB \cos B = BC \cos C$, đường cao AH cắt đường trung tuyến BM của tam giác ABC ở K. Điểm D trên cạnh AB sao cho $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$. Chứng minh rằng ba điểm C, K, D thẳng hàng.

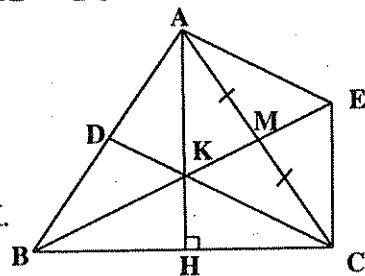
Lời giải

Cách 1:

Trên tia đối của tia MB lấy điểm E sao cho $ME = MK$.

Ta có M là trung điểm của AC (gt), M là trung điểm của EK.

Do đó tứ giác AKCE là hình bình hành.



$\Rightarrow AK \parallel EC, AE \parallel KC.$

$$\Delta BCE \text{ có } KH \parallel EC \Rightarrow \frac{KE}{BK} = \frac{CH}{BH} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } AB \cos B = BC \cos C \text{ (gt)} \Rightarrow AB \cdot \frac{BH}{AB} = BC \cdot \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{AC}{BC} \quad (2)$$

$$\text{Mà } \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \text{ (gt)} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) có: } \frac{KE}{BK} = \frac{AD}{BD}$$

$$\Delta ABE \text{ có: } \frac{AD}{BD} = \frac{KE}{BK} \Rightarrow DK \parallel AE$$

Ta có $DK \parallel AE, KC \parallel AE$

$\Rightarrow DK, KC$ trùng nhau (tiên đề Ơclit)

Vậy ba điểm C, K, D thẳng hàng.

Cách 2

Gọi I là giao điểm của BM và DH .

Ta có $AB \cos B = BC \cos C$ (gt)

$$\Rightarrow AB \cdot \frac{BH}{AB} = BC \cdot \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \text{ (gt)}$$

$$\Delta ABC \text{ có } \frac{AD}{BD} = \frac{CH}{BH} \left(= \frac{AC}{BC} \right) \Rightarrow DH \parallel AC$$

$$\Delta AKM \text{ có } IH \parallel AM \Rightarrow \frac{IH}{AM} = \frac{IK}{MK}$$

$$\Delta ABM \text{ có } DI \parallel AM \Rightarrow \frac{DI}{AM} = \frac{BI}{BM}$$

$$\Delta BCM \text{ có } IH \parallel CM \Rightarrow \frac{IH}{CM} = \frac{BI}{BM}$$

$$\text{Ta có } \frac{DI}{AM} = \frac{IH}{CM} \left(= \frac{BI}{BM} \right) \text{ Mà } AM = CM \Rightarrow DI = IH$$

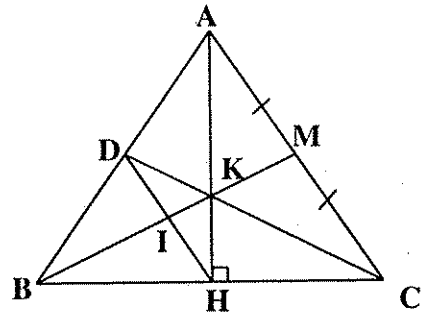
Xét ΔDIK và ΔMCK có: $\widehat{DIK} = \widehat{CMK}$ (so le trong và $DH \parallel AM$)

$$\frac{DI}{CM} = \frac{IK}{MK} \left(= \frac{IH}{CM} \right)$$

Do đó $\Delta DIK \sim \Delta MCK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IKD} = \widehat{MKC}$

$$\text{Ta có } \widehat{DKC} = \widehat{DKM} + \widehat{MKC} = \widehat{DKM} + \widehat{IKD} = 180^\circ$$

Vậy C, K, D thẳng hàng.



Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn có $\sin A = \cos B \cdot \tan C$. Đường trung tuyến BM cắt đường cao

AH của tam giác ABC ở K . D là điểm trên cạnh AB sao cho $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$. Chứng minh rằng

ba điểm C, K, D thẳng hàng.

Bài toán phụ:

Cho tam giác ABC có $\hat{A}$ nhọn. Chứng minh rằng: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

Giải:

Vẽ $BT \perp AC$ tại T.

Ta có $BT = AB \sin A$ (ΔTAB vuông tại T)

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} BT \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

Trở lại bài toán: Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

Nên $\sin A = \frac{AH \cdot BC}{AB \cdot AC}$. Mà $\cos B \cdot \tan C = \frac{BH}{AB} \cdot \frac{AH}{CH}$, $\sin A = \cos B \cdot \tan C$

$$\text{Do đó } \frac{BH}{AB} \cdot \frac{AH}{CH} = \frac{AH \cdot BC}{AB \cdot AC} \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{AC}{BC}$$

Làm tiếp như bài 3, ta có C, K, D thẳng hàng.

* **Nhận xét:**

Các bài toán 2, 3 và 4 là "HỌ HÀNG" của nhau.

Các bạn hãy giải các bài toán này bằng các cách khác.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R) đường kính BC. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính OA cắt AB, AC lần lượt ở D, E. Chứng minh rằng ba điểm D, I, E thẳng hàng.

Lời giải

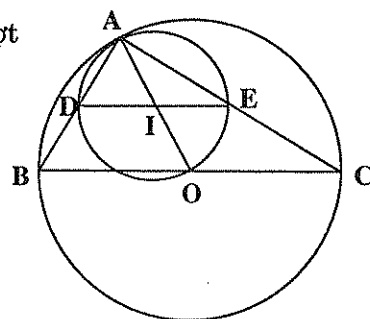
ΔABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC (gt)

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

ΔADE vuông tại A nội tiếp đường tròn (I)

$\Rightarrow DE$ là đường kính của đường tròn (I).

Vậy ba điểm D, I, E thẳng hàng.



Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường tròn (B, BA) và đường tròn (C, CA). Gọi D là giao điểm của hai đường tròn (B), (C) (D khác A). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (B) cắt đường tròn (C) tại E, tiếp tuyến tại A của đường tròn (C) cắt đường tròn (B) tại F. Chứng minh rằng E, D, F thẳng hàng.

Lời giải

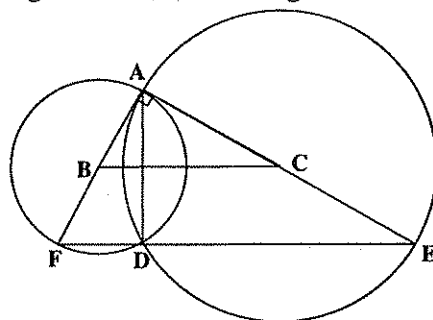
Ta có $AB \perp AC$ ($\widehat{BAC} = 90^\circ$)

$AF \perp AC$ (AF là tiếp tuyến của đường tròn (C))

$\Rightarrow A, B, F$ thẳng hàng.

ΔDAF nội tiếp đường tròn (B) đường kính AF

$\Rightarrow \widehat{ADF} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp DF$



Chứng minh tương tự, ta có: $AD \perp DE$

Ta có $DF \perp AD, DE \perp AD$

$\Rightarrow DF, DE$ trùng nhau

Vậy ba điểm E, D, F thẳng hàng.

Bài 7. Cho hai đường tròn (O, R) ($R > R'$) tiếp xúc trong tại A . Đường thẳng qua A cắt các đường tròn $(O), (O')$ lần lượt ở B, C (B, C khác A). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Gọi D là điểm đối xứng của O qua M . Chứng minh rằng ba điểm O', C, D thẳng hàng.

Lời giải

$(O), (O')$ tiếp xúc trong tại $A \Rightarrow O, O', A$ thẳng hàng.

Ta có $O'A = O'C (= R') \Rightarrow \triangle O'AC$ cân tại O'

$\Rightarrow \widehat{O'CA} = \widehat{O'AC}$

Mặt khác $OB = OA (= R) \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OAB}$

Ta có $\widehat{OBA} = \widehat{O'CA} (= \widehat{OAB}) \Rightarrow OC' \parallel OB$

Mặt khác: M là trung điểm của BC (gt),

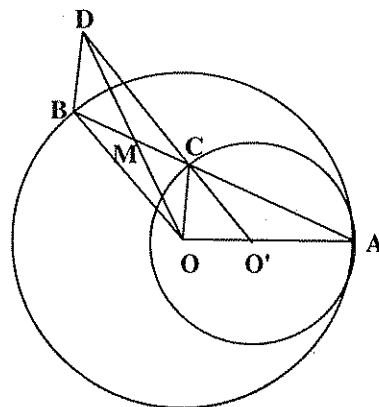
M là trung điểm của OD (O, D đối xứng qua M)

$\Rightarrow$ Tứ giác $OBDC$ là hình bình hành

$\Rightarrow CD \parallel OB$

Ta có: $O'C \parallel OB, CD \parallel OB \Rightarrow O'C, CD$ trùng nhau (tiên đề Ôclit)

Vậy ba điểm O', C, D thẳng hàng.



Bài 8. Cho hai đường tròn $(O), (O')$ cắt AB, C là điểm trên tia đối của AB, D là điểm trên tia đối của tia BA . Đường thẳng qua C vuông góc với OD cắt đường thẳng qua D vuông góc với OC ở E . Chứng minh rằng ba điểm E, O, O' thẳng hàng.

Lời giải

Hai đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau tại A, B

$\Rightarrow OO'$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow OO' \perp AB$

Xét $\triangle OCD$ có CE, DE là hai đường cao

($CE \perp OD, DE \perp OC$, cắt nhau tại E)

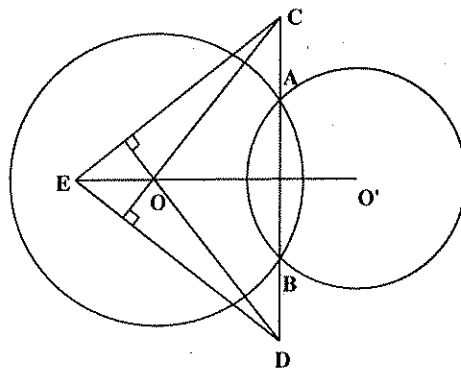
$\Rightarrow E$ là trực tâm của tam giác OCD

$\Rightarrow OE$ là đường cao của tam giác OCD

$\Rightarrow OE \perp CD$

Ta có $OO' \perp AB, OE \perp AB \Rightarrow OO'$ và OE trùng nhau

Vậy ba điểm E, O, O' thẳng hàng.



Bài 9. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ dây BD cắt cạnh AC ở I và $BD = AC$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chứng minh rằng ba điểm O, I, M thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $OK \perp BD$ tại $K, OL \perp AC$ tại L .

Ta có $AC = BD$ (gt) $\Rightarrow OK = OL$, $BK = CL$ ($BK = \frac{BD}{2} = \frac{AC}{2} = CL$)

Xét $\triangle OKI$ ($\widehat{OKI} = 90^\circ$) và $\triangle OLI$ ($\widehat{OLI} = 90^\circ$)

OI (cạnh chung), $OK = OL$

Do đó $\triangle OKI = \triangle OLI$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông)

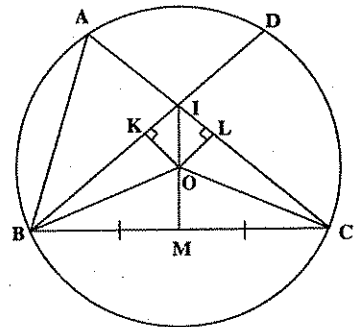
$\Rightarrow KI = LI$

Ta có $IB = BK + KI = CL + LI = IC$

Vì $IB = IC$, $OB = OC$, $MB = MC$

$\Rightarrow I, O, M$ cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC .

Vậy ba điểm O, I, M thẳng hàng.



Bài 10. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A . BC, DE là các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $(O), (O')$ ($B, D \in (O); C, E \in (O')$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, DE . Chứng minh rằng ba điểm M, A, N thẳng hàng.

Lời giải

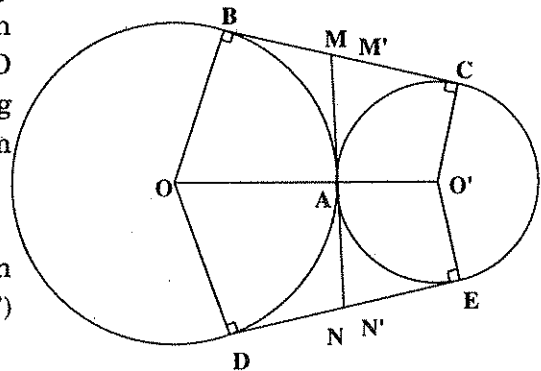
Gọi M', N' lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến chung trong tại A của hai đường tròn $(O), (O')$ với BC, DE .

Ta có $M'C = M'A, M'A = M'B$ (Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow M'C = M'B$

Do đó $M' \equiv M$. Tương tự $N' \equiv N$

Vậy ba điểm M, A, N thẳng hàng.



Bài 11. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , M là trung điểm của cạnh AC , H là hình chiếu của M trên AB . Đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác OMC cắt đường thẳng vuông góc với BC vẽ từ C ở K . Chứng minh rằng H, M, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi D là giao điểm của BC với đường tròn (I) .

Ta có M là trung điểm của cạnh AC (gt) $\Rightarrow OM \perp AC$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của OC

Mà $\widehat{DCK} = 90^\circ \Rightarrow DK$ là đường kính của đường tròn (I)

$\Rightarrow \widehat{DMK} = 90^\circ$

Mặt khác $\widehat{ODC} = 90^\circ$

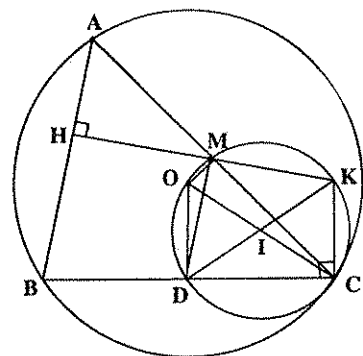
Ta có $OD \perp BC \Rightarrow D$ là trung điểm của cạnh BC

DM là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow DM \parallel AB$.

Mà $MH \perp AB$. Do đó $MH \perp MD \Rightarrow \widehat{DMH} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{DMH} + \widehat{DMK} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Vậy ba điểm H, M, K thẳng hàng.



Bài 12. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt đường tròn (O) ở S, A (S

khác A). Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm S, H, I thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ đường kính AM của đường tròn (O)

Ta có $\widehat{ASM} = 90^\circ$, $\widehat{ABM} = 90^\circ$, $\widehat{ACM} = 90^\circ$

$BH \perp AC$, $MC \perp AC$

$\Rightarrow BH \parallel MC$

Tương tự $CH \parallel MB$

Do đó tứ giác BHCM là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của BC

Do đó I là trung điểm của HM $\Rightarrow H, I, M$ thẳng hàng (1)

$\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$.

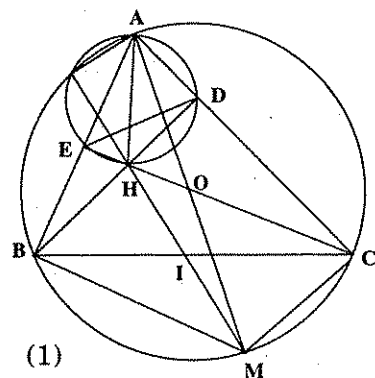
Do đó tam giác ADE nội tiếp đường tròn đường kính AH $\Rightarrow \widehat{ASH} = 90^\circ$.

$HS \perp AS$, $MS \perp AS$ ($\widehat{ASM} = 90^\circ$)

$\Rightarrow M, H, S$ thẳng hàng (2)

Từ (1), (2) có M, I, H, S thẳng hàng.

Vậy S, H, I thẳng hàng.



Bài 13. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Vẽ đường kính BD của đường tròn (O). M, N lần lượt trên AC, CD sao cho $AC = 3AM$, $CD = 3DN$. Đường tròn đường kính AM cắt AB ở K (K khác A)

Chứng minh rằng ba điểm M, N, K thẳng hàng.

Lời giải

ΔKAM nội tiếp đường tròn đường kính AM

$\Rightarrow \Delta KAM$ vuông tại K

$\Rightarrow MK \perp AB$

ΔABD nội tiếp đường tròn đường kính BD

$\Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại A

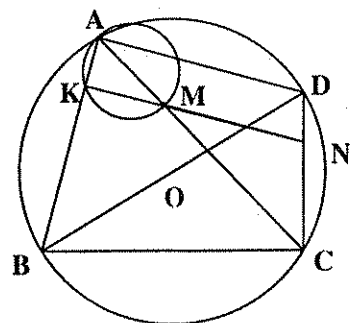
$\Rightarrow AD \perp AB$

Ta có $MK \perp AB$, $AD \perp AB \Rightarrow MK \parallel AD$ (1)

Mặt khác ΔCAD có: $\frac{AM}{AC} = \frac{DN}{CD} \left(= \frac{1}{3} \right) \Rightarrow MN \parallel AD$ (2)

Từ (1), (2) có MK, MN trùng nhau (Tiên đềƠ-clit)

Vậy ba điểm M, N, K thẳng hàng.



Bài 14. Cho hình vuông ABCD. Vẽ đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (D; DC). Gọi E là giao điểm của hai đường tròn (E khác A). Tia BE cắt DC tại M. Gọi I là giao điểm trên AB sao cho $AI = \frac{1}{4}AB$, N là điểm đối xứng của D qua I. Chứng minh rằng ba điểm M, N, O thẳng hàng.

Lời giải

Nối với E.

ΔEAB nội tiếp đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow \Delta EAB$ vuông tại E (O) và (D) cắt nhau tại A, E.

$\Rightarrow ON$ là đường trung trực của BK

$\Rightarrow NK = NB$.

Chứng minh tương tự có $\triangle OKN = \triangle OBN$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{OKN} = \widehat{OBN} = 90^\circ \Rightarrow NK \perp OK$ (2)

Từ (1), (2) có MK, NK trùng nhau

Vậy M, K, N thẳng hàng.

Bài 16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC . Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = 3AB$. Đường thẳng Dy vuông góc với CD tại D cắt tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) tại E . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CD . Vẽ hình bình hành $CABN$. Chứng minh rằng ba điểm M, N, E thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $EI \perp AD$ ($I \in AD$) (1)

B thuộc đường tròn đường kính AC

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DBC} = 90^\circ$

Xét $\triangle IDE$ và $\triangle BCD$ có $\widehat{DIE} = \widehat{CBD} (=90^\circ)$; $\widehat{EDI} = \widehat{BCD}$ (Cùng phụ với góc BDC)

Do đó: $\triangle IDE \sim \triangle BCD \Rightarrow \frac{ID}{BC} = \frac{IE}{BD}$ (1)

Xét $\triangle IAE$ và $\triangle BCA$ có:

$\widehat{AIE} = \widehat{CBA} = (90^\circ)$, $\widehat{IAE} = \widehat{BCA}$ (cùng phụ với góc BAC)

Do đó $\triangle IAE \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{IA}{BC} = \frac{IE}{AB}$ (2)

Lại có $AD = 3AB \Rightarrow BD = 2AB$ (3)

Từ (1), (2), (3) có $\frac{ID}{BC} = \frac{IA}{2BC} \Rightarrow 2ID = IA \Rightarrow AD = 3ID$

Vậy $AB = BI = ID$

Tứ giác $BINC$ có $CN \parallel BI$, $CN = BI (=AB)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BINC$ là hình bình hành.

Mà $\widehat{IBC} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $BINC$ là hình chữ nhật $\Rightarrow NI \perp AD$

$\triangle BCD$ vuông tại B , BM là đường trung tuyến

$\Rightarrow BM = MD$

$\Rightarrow \triangle MBD$ cân tại M

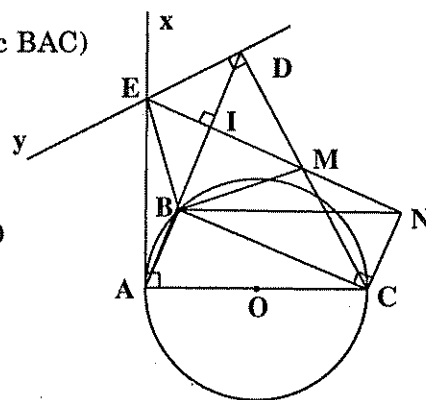
$\triangle MBD$ cân tại M có MI là đường trung tuyến

$\Rightarrow MI$ cũng là đường cao của tam giác MBD

$\Rightarrow MI \perp AD$ (3)

Từ (1), (2), (3) có EI, NI, MI trùng nhau. Do đó E, I, M, N thẳng hàng.

Vậy ba điểm M, N, E thẳng hàng.



(2)

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) . M là trung điểm cạnh AB , G là trọng tâm của tam giác AMC . Đường thẳng qua M vuông góc với OC cắt đường

thẳng qua C vuông góc với OM ở N. Chứng minh rằng ba điểm O, G, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi I là giao điểm của OA và MC, CG cắt AM ở T.

Ta có MA = MB; AB = AC; OB = OC (=R)

$\Rightarrow$ AO là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Ta có I là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow CI = \frac{2}{3}CM$

G là trọng tâm của tam giác AMC $\Rightarrow CG = \frac{2}{3}CT$

Ta có $\frac{CI}{CM} = \frac{CG}{CT} \left(= \frac{2}{3} \right)$

ΔCMT có $\frac{CI}{CM} = \frac{CG}{CT} \Rightarrow IG \parallel MT$ (định lý Ta-lét đảo)

M là trung điểm của AB $\Rightarrow OM \perp AB$. Nên $IG \perp OM$

Ta cũng có: ΔTBC có $\frac{TM}{TB} = \frac{TG}{TC} \left(= \frac{1}{3} \right) \Rightarrow MG \parallel BC$

Mà $OA \perp BC$ nên $OA \perp MG$.

ΔOMG có OI, IG là hai đường cao cắt nhau tại I.

$\Rightarrow$ I là trực tâm của tam giác OMG

$\Rightarrow MI$ là đường cao của tam giác OMG

$\Rightarrow MI \perp OG$

Xét ΔMNC có MO, CO là hai đường cao (vì $CO \perp MN$, $MO \perp CN$) cắt nhau tại O

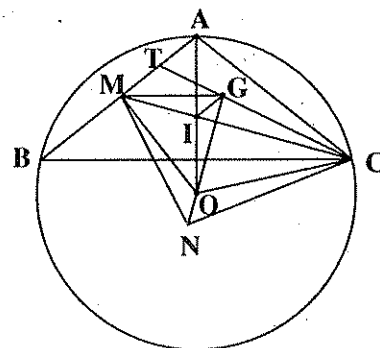
$\Rightarrow$ O là trực tâm của tam giác MNC

$\Rightarrow NO \perp MC$

Ta có $NO \perp MC$, $OG \perp MC$

$\Rightarrow NO, OG$ trùng nhau

Vậy ba điểm O, G, N thẳng hàng.



Bài 18. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Đường tròn tâm I đường kính AH. Tiếp tuyến của đường tròn (I) tại A cắt đường thẳng qua I và vuông góc với AC ở M. Gọi N là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng ba điểm M, E, N thẳng hàng.

Lời giải

ΔAEM vuông tại E

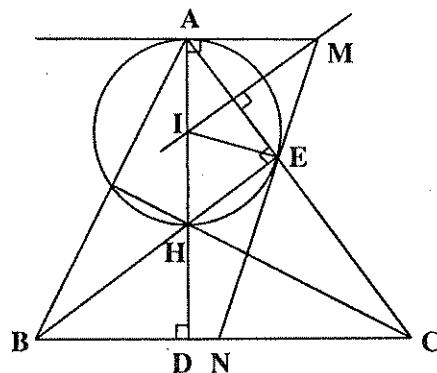
$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn (I), $\widehat{EAC} = 60^\circ$, $\frac{FA}{FC} = \frac{FH}{FB}$

$\Rightarrow IA = IE$.

Ta có $IM \perp AE$ (gt) $\Rightarrow IM$ đi qua trung điểm của AE

Do đó IM là đường trung trực của AE $\Rightarrow MA = ME$

Xét ΔIAM và ΔIEM có:



IA = IE, IM (cạnh chung), MA = ME

Do đó $\triangle IAM = \triangle IEM$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{IEM}$. Mà $\widehat{IAM} = 90^\circ$ nên $\widehat{IEM} = 90^\circ$

$\triangle IAE$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IEA} = \widehat{IAE}$

$\triangle EBC$ vuông cân tại E, EN là đường trung tuyến

$\Rightarrow EN = CN \Rightarrow \triangle NEC$ cân tại N

$\Rightarrow \widehat{NEC} = \widehat{NCE}$

Mà $\widehat{NCE} + \widehat{IAE} = 90^\circ$ ($\triangle DAC$ vuông tại D). Do đó $\widehat{NEC} + \widehat{IEA} = \widehat{NCE} + \widehat{IAE} = 90^\circ$

Nên $\widehat{NEI} = 90^\circ$. Ta có $\widehat{MEN} = \widehat{IEM} + \widehat{NEI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Vậy ba điểm M, E, N thẳng hàng.

Bài 19. Cho đường tròn (O, r) nội tiếp tứ giác ABCD. M, N lần lượt trên các cạnh AD; BC sao cho hai tứ giác ABNM và MNCD có chu vi bằng nhau và diện tích bằng nhau.

Chứng minh rằng M, O, N thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{OAD}$

$$= \frac{1}{2}r(AB + BC + CD + DA)$$

Mà $AB + AM + BN + MN = CD + MD + NC + MN$

(CV (ABNM) = CV (MNCD))

$\Rightarrow AB + AM + BN = CD + MD + NC$

$$S_{ABNM} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \text{ (gt)}$$

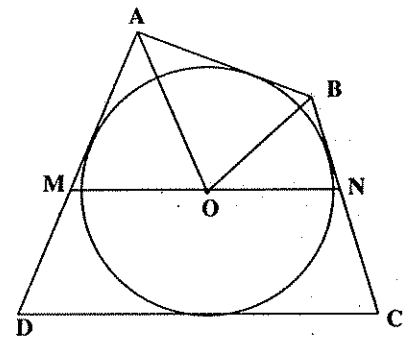
$$S_{ABNM} = S_{OAB} + S_{OAM} + S_{OBN} \pm S_{OMN}$$

$$= \frac{1}{2}r(AB + AM + BN) \pm S_{OMN}$$

$$= \frac{1}{2}S_{ABCD} \pm S_{OMN}$$

Nên $S_{OMN} = 0$

Vậy ba điểm M, N, O thẳng hàng.



Bài 20. Cho tam giác OAB vuông tại A (OA > AB). Trên tia đối của tia BO lấy C sao cho $BC > 2AB$. Vẽ CD vuông góc với OA tại D. Vẽ hai đường tròn (B; BA) và (C; CD). Vẽ MN là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn ($M \in (B)$, $N \in (C)$). Vẽ đường kính NE của đường tròn (C). Chứng minh rằng ba điểm O, M, E thẳng hàng.

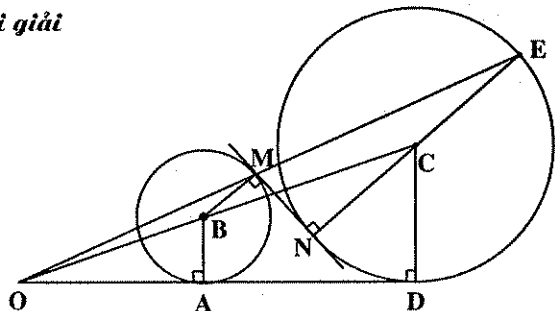
Lời giải

Ta có $AB \perp OD$, $CD \perp OD \Rightarrow AB \parallel CD$

Xét $\triangle OCD$ có $AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD}$

Mà $AB = BM (= R)$, $CD = CE (= R)$.

Nên $\frac{OB}{OC} = \frac{BM}{CE}$



Mặt khác: $BM \perp MN, CN \perp MN \Rightarrow BM \parallel CN \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OCE}$

Xét $\triangle OBM$ và $\triangle OCE$ có: $\widehat{OBM} = \widehat{OCE}, \frac{OB}{OC} = \frac{BM}{CE}$

Do đó $\triangle OBM \sim \triangle OCE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{COE}$

$\Rightarrow$ Hai tia OM và OE trùng nhau.

Vậy ba điểm O, M, E thẳng hàng.

Bài 21. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$) có đường tròn đường kính CD cắt cạnh AB ở M, N (M nằm giữa B và N). Đường thẳng qua A song song với MD cắt đường thẳng qua B song song với MC tại E. Chứng minh rằng C, E, D thẳng hàng.

Lời giải

Gọi L là giao điểm của AE và MC, F là giao điểm của MD và BE.

Ta có: $\widehat{CMD} = 90^\circ$ ($\triangle MCD$ nội tiếp đường tròn đường kính CD)

$AE \parallel MD$ (gt), $CM \perp MD$ ($\widehat{CMD} = 90^\circ$)

$\Rightarrow AE \perp CM$

$\Rightarrow \widehat{ALM} = \widehat{MLE} = 90^\circ$

$BE \parallel MC$ (gt), $MD \perp CM$ ($\widehat{CMD} = 90^\circ$)

$\Rightarrow BE \perp MD$

$\widehat{BFD} = \widehat{EFM} = 90^\circ$

Xét $\triangle BMD$ và $\triangle ACM$ có:

$\widehat{MBD} = \widehat{CAM} (= 90^\circ),$

$\widehat{BMD} = \widehat{ACM}$ (cùng phụ với góc AMC)

Do đó $\triangle BMD \sim \triangle ACM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MD}{MC} = \frac{BD}{MA}$

Xét $\triangle BDF$ và $\triangle AML$ có: $\widehat{BFD} = \widehat{ALM} (= 90^\circ), \widehat{BDF} = \widehat{AML}$ ($\triangle BMD \sim \triangle ACM$)

Do đó: $\triangle BDF \sim \triangle AML$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BD}{MA} = \frac{FD}{ML}$

Tứ giác: MLEF có $\widehat{LMF} = 90^\circ, \widehat{EFM} = 90^\circ, \widehat{MLE} = 90^\circ$

Nên là hình chữ nhật $\Rightarrow EF = ML$

Do vậy: $\frac{FD}{EF} = \frac{FD}{ML} = \frac{BD}{MA} = \frac{MD}{MC}$

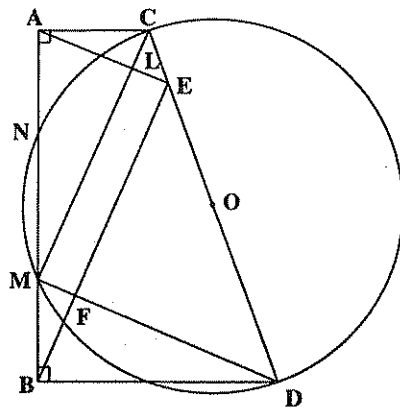
Xét $\triangle FDE$ và $\triangle MDC$ có: $\widehat{EFD} = \widehat{CMD} (= 90^\circ), \frac{FD}{MD} = \frac{EF}{MC}$ (vì $\frac{FD}{EF} = \frac{MD}{MC}$)

Do đó $\triangle FDE \sim \triangle MDC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{FDE} = \widehat{MDC}$

$\Rightarrow$ Hai tia DE, DC trùng nhau

Vậy ba điểm C, E, D thẳng hàng.



*** Nhận xét:**

Lời giải trên giúp chúng ta chinh phục được một bài toán khó trong bài thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2012 – 2013 môn Toán (chuyên) của trường Phổ thông năng khiếu – Đại học Quốc gia, TPHCM sau:

Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên đường thẳng vuông góc với AB tại B ta lấy điểm D di động cùng phía với C đối với đường thẳng AB.

- a) Chứng minh rằng nếu $AC + BD < CD$ thì trên cạnh AB tồn tại hai điểm M và N sao cho $\widehat{CMD} = \widehat{CND} = 90^\circ$.
- b) Giả sử điều kiện trên được thỏa mãn. Đường thẳng qua A song song với MD cắt đường thẳng qua B song song với MC tại E. Chứng minh rằng đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 22. Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với BC tại D. Đường tròn (I) bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC và tiếp xúc với BC tại F. Vẽ đường kính DE của đường tròn (O). Chứng minh rằng A, E, F thẳng hàng.

Lời giải

Ta có A, O, I thẳng hàng (vì O, I cùng nằm trên tia phân giác góc A).

Gọi M, N là tiếp điểm của (O); (I) với AB.

$\triangle AIN$ có $OM \parallel IN$, nên $\frac{AO}{AI} = \frac{OM}{IN}$ (hệ quả của định lý Talét)

Mà $OM = OE$, $IN = IF$ nên có $\frac{AO}{AI} = \frac{OE}{IF}$

Mặt khác $OD \perp BC$, $IF \perp BC$

$\Rightarrow OD \parallel IF \Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{AIF}$

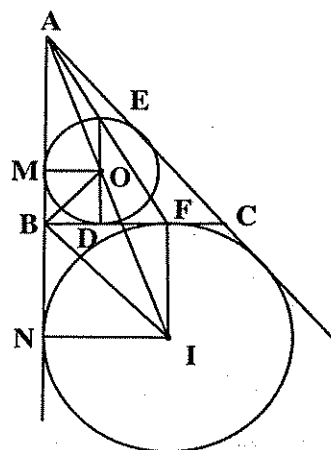
Xét $\triangle OAE$ và $\triangle IAF$ có: $\frac{AO}{AI} = \frac{OE}{IF}$, $\widehat{AOE} = \widehat{AIF}$

Do đó $\triangle OAE \sim \triangle IAF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{IAF}$

$\Rightarrow$ Hai tia AE, AF trùng nhau

Vậy ba điểm A, E, F thẳng hàng.



Bài 23. Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với BC tại D, đường tròn (I) là đường tròn bàng tiếp trong góc A và tiếp xúc với BC tại F. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AD, DF. Chứng minh rằng ba điểm K, O, L thẳng hàng.

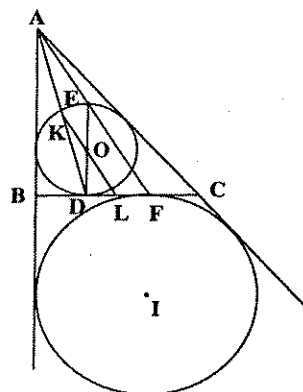
Lời giải

Vẽ đường kính DE của đường tròn (O).

Ta chứng minh được ba điểm

A, E, F thẳng hàng (xem bài 22)

KL là đường trung bình của $\triangle ADF \Rightarrow KL \parallel AF$ mà KO là đường trung bình của tam giác AED. Do vậy K, O, L thẳng hàng.



Bài 24. Cho tam giác ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) nội tiếp đường tròn (O) có H là trực tâm. M là điểm di động trên cung AC. Đường thẳng qua B song song với AM cắt đường tròn (O) ở N. Gọi K, I lần lượt là trực tâm của các tam giác MBC, NAC. Chứng minh rằng H, K, I thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ đường kính AD của đường tròn (O).

Gọi E là giao điểm của BC và DH.

Tứ giác BHCD là hình bình hành.

Từ đó có OE là đường trung bình của tam giác AHD

$$\Rightarrow OE = \frac{1}{2} HA$$

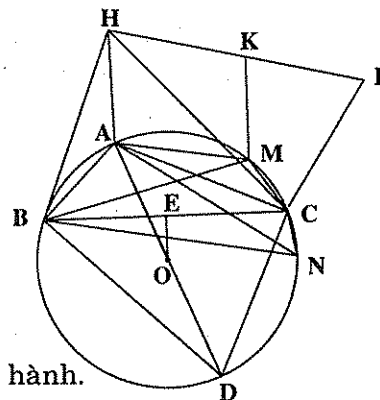
$$\text{Tương tự } OE = \frac{1}{2} KM$$

Ta có $HA = KM$, $HA \parallel KM \Rightarrow$ Tứ giác AHKM là hình bình hành.

$$\Rightarrow KH \parallel AM$$

Chứng minh tương tự có $IH \parallel BN$, mà $AM \parallel BN$ (gt)

Do đó H, K, I thẳng hàng.



Bài 25. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng ba điểm M, I, N thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } BN = ND \text{ (gt)} \Rightarrow S_{NAB} = \frac{1}{2} S_{ABD}$$

$$\text{Tương tự: } S_{NCD} = \frac{1}{2} S_{BCD}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } S_{NAB} + S_{NCD} &= \frac{1}{2} (S_{ABD} + S_{BCD}) \\ &= \frac{1}{2} S_{ABCD} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } S_{MAB} + S_{MCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \quad (2)$$

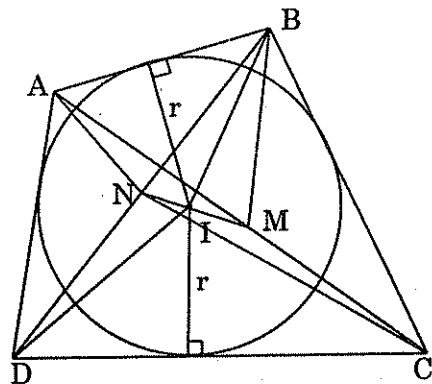
$$\text{Mặt khác: } S_{IAB} + S_{ICD} = \frac{1}{2} r_{ab} + \frac{1}{2} r_{cd} = \frac{1}{2} r (AB + CD).$$

$$\text{Tương tự } S_{IAD} + S_{IBC} = \frac{1}{2} r (AD + BC)$$

Tứ giác ABCD ngoại tiếp nên có $AB + CD = AD + BC$

$$\text{Do đó: } S_{IAD} + S_{IBC} = S_{IAB} + S_{ICD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) có M, I, N thẳng hàng.



CHƯƠNG II

GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 26. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H. Vẽ HI vuông góc với EF tại I, HK vuông góc với DE tại K. IK cắt AD ở M, FM cắt DE ở N. S là điểm đối xứng của B qua D. Chứng minh rằng ba điểm A, N, S thẳng hàng.

Lời giải

Tứ giác FAEH có $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác FAEH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HEF} = \widehat{FAH}$

Tứ giác ABDE có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABDE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BED}$

Vậy $\widehat{HEF} = \widehat{BED}$

Xét $\triangle HIE$ ($\widehat{HIE} = 90^\circ$) và $\triangle HKE$ ($\widehat{HKE} = 90^\circ$)

Có: EH (chung), $\widehat{HEI} = \widehat{HEK}$

Do đó $\triangle HIE = \triangle HKE$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow EI = EK, HI = HK$

$\Rightarrow \triangle EIK$ cân tại E, $\triangle HIK$ cân tại H.

$\Rightarrow \widehat{KIE} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{IEK}) = 90^\circ - \widehat{IEH} \Rightarrow \widehat{KIE} + \widehat{FAH} = 90^\circ$. Mà $\widehat{MHF} + \widehat{FAH} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{KIE} = \widehat{MHF} \Rightarrow$ Tứ giác FIMH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMF} = \widehat{HIF} = 90^\circ$

Tứ giác HMNK có $\widehat{HMN} = \widehat{HKN} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác HMNK nội tiếp

Ta có $\widehat{HFN} = \widehat{HIK}$, $\widehat{HNM} = \widehat{HKI}$, $\widehat{HIK} = \widehat{HKI} \Rightarrow \widehat{HFN} = \widehat{HNM}$

$\Rightarrow \triangle HFN$ cân tại H $\Rightarrow HF = HN$

$\triangle HFN$ cân tại H, $HM \perp FN$

$\Rightarrow HM$ là đường trung tuyến của tam giác HFN

$FM \perp AD, BD \perp AD \Rightarrow FM \parallel BD$

$\triangle ABD$ có $FM \parallel BD \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{MF}{DB}$

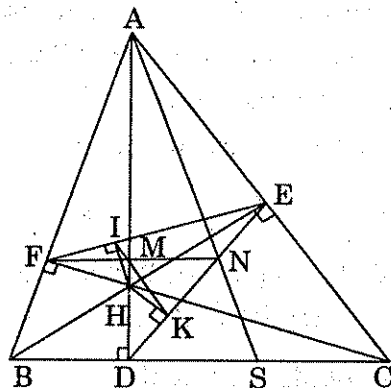
$MF = MN, DB = DS$. Nên $\frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DS}$

Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ADS$ có: $\widehat{AMN} = \widehat{ADS}$ ($MN \parallel BS$), $\frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DS}$

Do đó $\triangle AMN \sim \triangle ADS$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{DAS}$

$\Rightarrow$ Hai tia AN, AS trùng nhau

Vậy ba điểm A, N, S thẳng hàng.



Bài 27. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R). Vẽ các tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) ($B, C \in (O)$), vẽ cát tuyến ADE của đường tròn (O) ($D, E \in (O)$) và D nằm giữa A và E, tia AD nằm giữa hai tia AO, AB). Gọi F là điểm đối xứng của D qua AO, H là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng A, O, H thẳng hàng.

Cách 1:

Gọi H' là giao điểm của AO và BC .

D, F đối xứng qua $OA \Rightarrow OF = OD = R$

$\Rightarrow F$ thuộc đường tròn (O) và có $\widehat{AH'D} = \widehat{AH'F}$

AB, AC là các tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow AB = AC, AO$ là tia phân giác của góc BAC

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A , nên $AO \perp BC$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có:

$\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung), $\widehat{BAD}$ chung

$$\text{Do đó } \triangle ABD \sim \triangle AEB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE$$

$\triangle ABO$ vuông tại B, BH' là đường cao $\Rightarrow AB^2 = AH' \cdot AO$

Do đó $AD \cdot AE = AH' \cdot AO (= AB^2)$

Xét $\triangle ADH'$ và $\triangle AOE$ có: $\widehat{DAH'}$ (chung), $\frac{AD}{AO} = \frac{AH'}{AE}$ (vì $AD \cdot AE = AH' \cdot AO$)

Do đó $\triangle ADH' \sim \triangle AOE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ADH'} = \widehat{AOE}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DH'OE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AH'D} = \widehat{OED}, \widehat{OH'E} = \widehat{ODE}$

Mà $OD = OE = R \Rightarrow \triangle ODE$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OED} = \widehat{ODE}$

Do đó $\widehat{AH'D} = \widehat{OH'E}$. Vì vậy $\widehat{AH'F} = \widehat{OH'E}$

Ta có $\widehat{EH'F} = \widehat{AH'F} + \widehat{AH'E} = \widehat{OH'E} + \widehat{AH'E} = 180^\circ$

$\Rightarrow E, H', F$ thẳng hàng. Vậy $H' = H$

Do đó A, H, O thẳng hàng.

Cách 2:

AB, AC là các tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow AB = AC, AO$ là tia phân giác của góc BAC

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A

D, F đối xứng qua $AO \Rightarrow OF = OD = R$

$DF \perp OA$

Ta có: $DF \parallel BC \Rightarrow$ Tứ giác $DBCF$ là hình thang

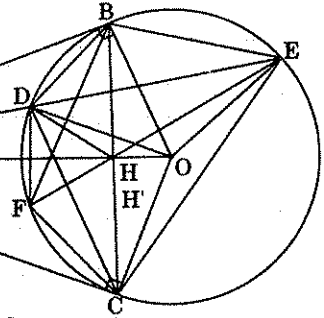
Hình thang $DBCF$ nội tiếp đường tròn (O)

$\Rightarrow$ Tứ giác $DBCF$ là hình thang cân $\Rightarrow DB = CF, BF = CD$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có: $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}, \widehat{BAD}$ (chung)

$$\text{Do đó } \triangle ABD \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{AB}{AE}$$

$$\text{Tương tự: } \triangle ACD \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{CE}$$



Xét $\triangle HBF$ và $\triangle HEC$ có $\widehat{BHF} = \widehat{EHC}$, $\widehat{BFH} = \widehat{HCE}$

Do đó $\triangle HBF \sim \triangle HEC \Rightarrow \frac{HB}{HE} = \frac{BF}{CE}$. Tương tự $\triangle HFC \sim \triangle HBE \Rightarrow \frac{CF}{BE} = \frac{HC}{HE}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{HB}{HE} &= \frac{BF}{CE} = \frac{CD}{CE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE} \\ &= \frac{CF}{BE} = \frac{HC}{HE} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow HB = HC$$

$$HB = HC, AB = AC, OB = OC$$

$\Rightarrow H, A, O$ cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC

Vậy A, O, H thẳng hàng.

Bài 28. Từ A ở ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến AB , vẽ BH vuông góc với OA tại H , vẽ cát tuyến ADE . Đường thẳng qua B vuông góc với OE cắt đường tròn (O) ở I . Đường thẳng qua D song song với BE cắt BH ở G , đường thẳng qua D song song với EI cắt AI ở K . Vẽ hình thoi $KMGN$ ($\widehat{DKG} < \widehat{MKG}$). Chứng minh rằng ba điểm M, N, D thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có $\widehat{BAD}$ (chung), $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE$

$\triangle ABO$ vuông tại B , BH là đường cao $\Rightarrow AB^2 = AH \cdot AO$

Xét $\triangle ADH$ và $\triangle AOE$ có: $\widehat{DAH}$ (chung),

$$\frac{AD}{AO} = \frac{AH}{AE} \quad (\text{vì } AD \cdot AE = AH \cdot AO = R^2)$$

Do đó $\triangle ADH \sim \triangle AOE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AOE}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DHOE$ nội tiếp

Do đó $\widehat{ODE} = \widehat{OHE}$. Mà $\widehat{ODE} = \widehat{OED}$ (vì $OD = OE$) nên $\widehat{AHD} = \widehat{OHE}$

Gọi S là giao điểm của BH và AE

HS, HA là các đường phân giác trong và ngoài của tam giác $HDE \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{SD}{SE}$

$$\triangle SBE \text{ có } DG \parallel BE \Rightarrow \frac{SD}{SE} = \frac{DG}{BE}$$

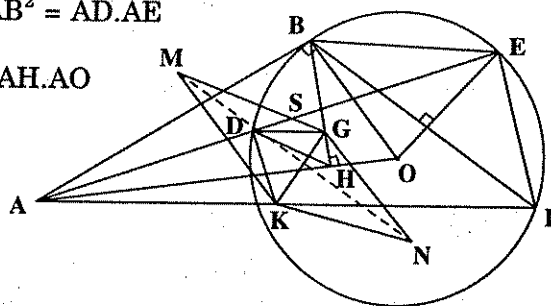
$$\triangle AEI \text{ có } DK \parallel IE \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{DK}{IE}$$

$OE \perp BI \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{IE} \Rightarrow BE = IE$. Do đó $DK = DG$

Mà $MK = MG, NK = NG$ (tứ giác $KMGN$ là hình thoi)

Ta có D, M, N cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng KG

Vậy M, N, D thẳng hàng.



Bài 29. Cho điểm A ở ngoài đường tròn (O) , vẽ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AEF (E nằm giữa A và F , $\widehat{BAF} < \widehat{FAC}$). Vẽ đường thẳng qua E vuông góc với OB cắt BC tại M , BF tại N . Gọi I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng ba điểm F, M, I thẳng hàng.

Vẽ $OK \perp EF$ tại K

$\Rightarrow K$ là trung điểm của EF

$$\widehat{ABO} = \widehat{AKO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$$

$\Rightarrow A, B, K, O, C$ cùng thuộc một đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{MCK}$$

Mà $AB \perp OB, EN \perp OB \Rightarrow AB \parallel EN \Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{MEK}$

Ta có $\widehat{MCK} = \widehat{MEK} (= \widehat{BAK})$

$\Rightarrow$ Tứ giác $EMKC$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{ECM} = \widehat{EKM}$$

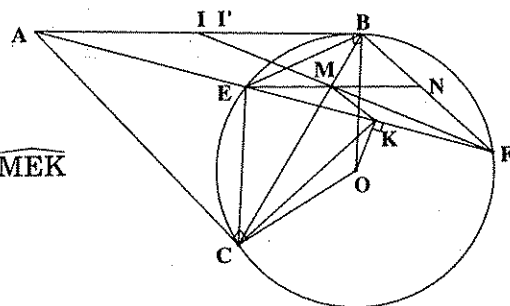
Mà $\widehat{ECM} = \widehat{EFB}$, nên $\widehat{EKM} = \widehat{EFB} \Rightarrow MK \parallel BN$

$\triangle EFN$ có $KM \parallel NF, EK = KF \Rightarrow EM = MN$

Gọi I' là giao điểm của FM và AB

$$\frac{EM}{AI'} = \frac{MN}{I'B} (= \frac{FM}{FI'}) \Rightarrow AI' = I'B. \text{ Vậy } I = I'$$

Do đó: F, M, I thẳng hàng.



Bài 30. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) lấy điểm C . Vẽ cát tuyến CDE (tia CD nằm giữa hai tia CA, CO ; D, E thuộc đường tròn (O) , D nằm giữa C và E). Gọi M là giao điểm của CO và BD . Gọi F là giao điểm của AM và đường tròn (O) (F khác A). Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1: Vẽ $AH \perp OC$ tại H .

Xét $\triangle CAD$ và $\triangle CEA$ có: $\widehat{ACD}$ (chung), $\widehat{CAD} = \widehat{CEA}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung). Do đó $\triangle CAD \sim \triangle CEA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow CA^2 = CD \cdot CE$$

$\triangle ACO$ vuông tại A , AH là đường cao $\Rightarrow CA^2 = CH \cdot CO$

$$\text{Do đó } CD \cdot CE = CH \cdot CO (= CA^2)$$

Xét $\triangle CDH$ và $\triangle COE$ có: $\widehat{DCH}$ (chung), $\frac{CD}{CO} = \frac{DH}{CE}$ (vì $CD \cdot CE = CH \cdot CO$)

Do đó $\triangle CDH \sim \triangle COE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CHD} = \widehat{CEO}$

Mặt khác: $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\text{Ta có: } \widehat{ADM} + \widehat{AHM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

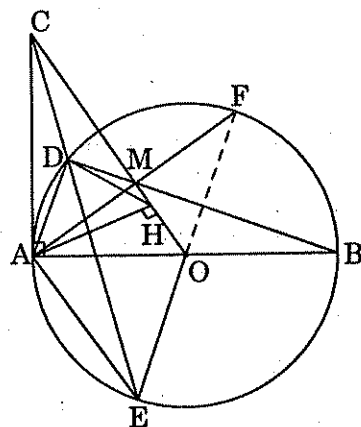
$\Rightarrow$ Tứ giác $ADMH$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{CHD}$$

Mà $\widehat{CEF} = \widehat{DAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DF)

Do đó $\widehat{CEF} = \widehat{CEO} \Rightarrow$ Hai tia EF, EO trùng nhau

Vậy E, O, F thẳng hàng.



Cách 2: Vẽ CN là tiếp tuyến của đường tròn (O) (N khác A)

Ta có: CA = CN là tia phân giác góc CAN (CA, CN là tiếp tuyến của (O))

$\triangle CAN$ cân tại C, CO là đường trung trực của AN

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MNC}$ (tính chất đối xứng trục)

Mà $\widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có: CO $\perp$ AN, BN $\perp$ AN

$\Rightarrow CO \parallel BN \Rightarrow \widehat{CMD} = \widehat{NBD}$

Mà $\widehat{NBD} = \widehat{CND}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Do đó $\widehat{CMD} = \widehat{CND} (= \widehat{NBD})$

$\Rightarrow$ Tứ giác CNMD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{MNC}$

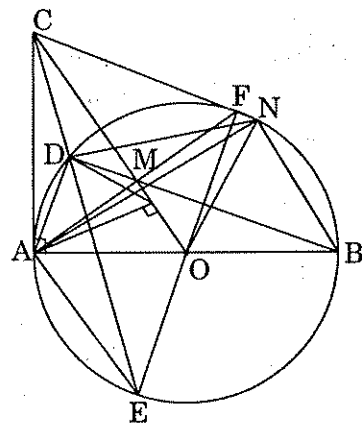
Ta có: $\widehat{BDE} = \widehat{MAC} (= \widehat{MNC})$, $\widehat{BDE} = \widehat{BAE}$

Nên $\widehat{MAC} = \widehat{BAE}$

Ta có: $\widehat{FAE} = \widehat{BAF} + \widehat{BAE} = \widehat{BAF} + \widehat{MAC} = 90^\circ$

$\Rightarrow EF$ là đường kính của đường tròn (O)

Vậy ba điểm E, O, F thẳng hàng.



Bài 31. Cho đường tròn (O; R), điểm A ở ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm) và cát tuyến AMN (AM < AN). Vẽ dây BD của đường tròn (O) và BD song song với MN. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng C, I, D thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1

I là trung điểm của MN $\Rightarrow OI \perp MN$. Ta có $\widehat{ABO} = \widehat{AIO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$

$\Rightarrow B, I, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính OA

$\Rightarrow A, B, I, O, C$ cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{ACB}$

Ta có BD $\parallel$ MN (gt) $\Rightarrow \widehat{IBD} = \widehat{BIA}$

Và OI $\perp$ MN, BD $\parallel$ MN

$\Rightarrow OI \perp BD$

$\Rightarrow OI$ đi qua trung điểm của BD

Do đó OI là đường trung trực của đoạn thẳng BD

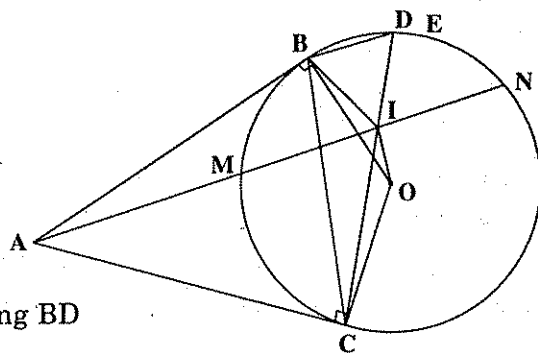
$\Rightarrow \triangle IBD$ cân tại I

$\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{IBD}$

Mà $\widehat{BDC} = \widehat{BCA}$. Do vậy: $\widehat{BDI} = \widehat{BDC}$

$\Rightarrow$ Hai tia DI, DC trùng nhau

Vậy C, I, D thẳng hàng.



Cách 2:

Gọi E là giao điểm của CI và đường tròn (O). Ta có A, B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn (xem chứng minh ở cách 1)

$$\Rightarrow \widehat{CIA} = \widehat{CBA}$$

Mà $\widehat{CEB} = \widehat{CBA}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó: $\widehat{CIA} = \widehat{CEB} \Rightarrow BE \parallel MN$. Nên $E = D$

Vậy C, I, D thẳng hàng.

Bài 32. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R). Vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). K là điểm bất kỳ trên cung BC. Tiếp tuyến tại K cắt AB, AC lần lượt tại M, N. BC cắt OM, ON lần lượt ở P, Q. Gọi I là giao điểm của MQ và NP.

Chứng minh rằng O, I, K thẳng hàng

Lời giải

MB, MK là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (gt)

$\Rightarrow OM$ là tia phân giác của góc KOB

$$\Rightarrow \widehat{MOK} = \frac{1}{2} \widehat{BOK}$$

$$\text{Tương tự } \widehat{KON} = \frac{1}{2} \widehat{KOC}$$

$$\text{Do đó } \widehat{MON} = \widehat{MOK} + \widehat{KON} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}, \widehat{MBQ} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} \left(= \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{BC} \right)$$

$$\Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{MBQ}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác MBOQ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{MQN} = \widehat{MBO} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow MQ \perp ON$$

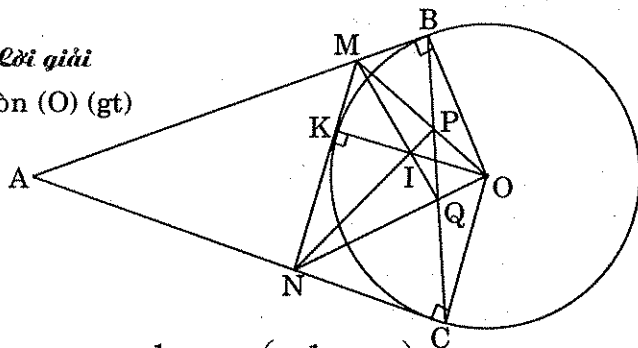
Tương tự: $NP \perp OM$. Do đó I là trực tâm của tam giác OMN

$\Rightarrow OI$ là đường cao của tam giác OMN

$$\Rightarrow OI \perp MN$$

Mà $OK \perp MN$ (MN là tiếp tuyến của (O))

Vậy O, I, K thẳng hàng.



Bài 33. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm) và một cát tuyến ADE đến (O) sao cho ADE nằm giữa hai tia AO và tia AB. Đường thẳng qua D song song với BE cắt BC, AB lần lượt ở P, Q. Gọi K là điểm đối xứng của B qua E. Chứng minh rằng ba điểm A, P, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi H, I lần lượt là giao điểm của BC với OA, DE.

Ta có AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow AB = AC$, AO là tia phân giác của góc BAC.

ΔABC cân tại A, AO là đường phân giác

$\Rightarrow AO$ là đường cao của tam giác ABC

Xét ΔABD và ΔAEB có: $\widehat{BAD}$ (chung), $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó: $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$$

$\triangle ABO$ vuông tại B, BH là đường cao

$$\Rightarrow AB^2 = AH.AO$$

Do đó $AD.AE = AH.AO (= AB^2)$

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle AEO$ có:

$$\widehat{HAD} \text{ (chung)}, \frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AO} \text{ (vì } AD.AE = AH.AO)$$

Do đó: $\triangle AHD \sim \triangle AEO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO}$

$\Rightarrow$ Tứ giác OEDH nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{OHE} = \widehat{ODE}$$

$\triangle ODE$ có $OD = OE (= R)$

$\Rightarrow \triangle ODE$ cân tại O

$$\Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{OED}$$

Do đó: $\widehat{OHE} = \widehat{AHD}$. Ta có: $\widehat{OHE} + \widehat{EHI} = \widehat{AHD} + \widehat{IHD} (= 90^\circ)$

Nên $\widehat{EHI} = \widehat{IHD}$

$\Rightarrow HI$ là tia phân giác góc DHE

Gọi Hx là tia đối của tia HE

$$\widehat{xHA} = \widehat{AHD} (= \widehat{OHE})$$

$\Rightarrow HA$ là đường phân giác ngoài của tam giác HED.

$$\text{Nên } \frac{ID}{DE} = \frac{AD}{AE}$$

$$\triangle ABE \text{ có } DQ \parallel BE \Rightarrow \frac{DQ}{BE} = \frac{AD}{AE}$$

$$\triangle IBE \text{ có } BE \parallel PD \Rightarrow \frac{DP}{BE} = \frac{ID}{IE}$$

$$\text{Do đó: } \frac{DQ}{BE} = \frac{DP}{BE} \Rightarrow DQ = DP$$

$$\triangle ABE \text{ có } QD \parallel BE \Rightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{QD}{BE}. \text{ Do đó } \frac{AQ}{AB} = \frac{2QD}{2BE} = \frac{PQ}{BK}$$

$$\text{Xét } \triangle APQ \text{ và } \triangle AKB \text{ có: } \widehat{AQP} = \widehat{ABK} \text{ (đồng vị và } QP \parallel BE), \frac{AQ}{AB} = \frac{PQ}{BK}$$

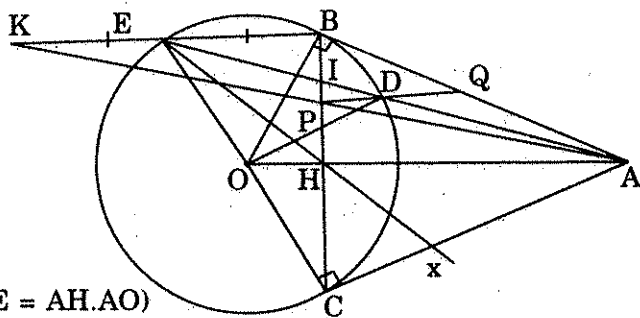
Do đó $\triangle APQ \sim \triangle AKB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{QAP} = \widehat{BAK}$$

$\Rightarrow$ Hai tia AP, AK trùng nhau

Vậy ba điểm A, P, K thẳng hàng.

Bài 34. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O; R), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Vẽ CI vuông góc với OA tại I. Gọi M là trung điểm BC.



Chứng minh rằng ba điểm M, I, F thẳng hàng.

Lời giải

$OB = OC (= R) \Rightarrow \triangle OBC$ cân tại O.

$\triangle OBC$ cân tại O, OM là đường trung tuyến

$\Rightarrow OM$ là đường cao, đường phân giác.

Nên $\widehat{BAC} = \widehat{MOC} \left(= \frac{1}{2} \widehat{BOC} \right)$

Ta có: $\widehat{BAC} + \widehat{ACF} = \widehat{MOC} + \widehat{OCM} = 90^\circ$

Nên $\widehat{ACF} = \widehat{OCM}$

Tứ giác OMIC có: $\widehat{OMC} = \widehat{OIC} = 90^\circ$ nên nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{OIM}$

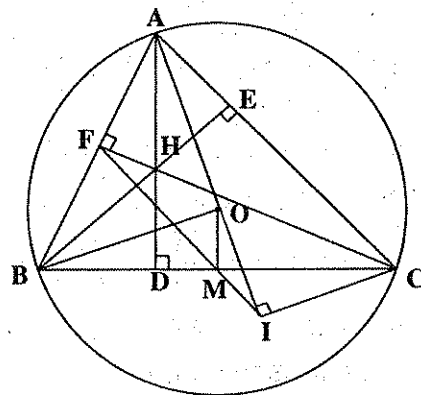
Tứ giác AFIC có: $\widehat{AFC} = \widehat{AIC} = 90^\circ$ nên nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AIF} = \widehat{ACF}$

Do vậy $\widehat{AIF} = \widehat{OIM}$

$\Rightarrow$ Hai tia IM, IF trùng nhau.

Vậy ba điểm M, I, F thẳng hàng.



Bài 35. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường tròn (O; R) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E. BE cắt CF tại H. Vẽ HD vuông góc với BC tại D. Gọi K là giao điểm của EF và AH. I là trung điểm của AH. IC cắt đường tròn (O) ở M (M khác C). Chứng minh rằng:

a) A, H, D thẳng hàng.

b) B, K, M thẳng hàng.

Lời giải

a) $\widehat{BFC} = 90^\circ$, $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BE \perp AC$, $CF \perp AB$

$\triangle ABC$ có BE, CF là hai đường cao cắt nhau tại H

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC.

$\Rightarrow AH$ là đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow AH \perp BC$

Mà $HD \perp BC$ (gt)

Vậy A, H, D thẳng hàng.

b) $\triangle EAH$ vuông tại E, EI là đường trung tuyến

$\Rightarrow IE = IA \Rightarrow \triangle IAE$ cân tại I

$\Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{IEA}$

Mà $OE = OC (= R) \Rightarrow \triangle OEC$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OEC} = \widehat{OCE}$

Và có $\widehat{IAE} + \widehat{OCE} = 90^\circ$ ($\triangle DAC$ vuông tại D)

Do đó $\widehat{IEA} + \widehat{OEC} = \widehat{IAE} + \widehat{OCE} = 90^\circ$. Nên $\widehat{IEO} = 90^\circ$

IE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Ta có: $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABDE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ADE}$

Mà $\widehat{IEK} = \widehat{ABE}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tuyến tuyến và dây cung)

Do đó $\widehat{IEK} = \widehat{ADE}$

Xét $\triangle IEK$ và $\triangle IDE$ có: $\widehat{EIK}$ (chung), $\widehat{IEK} = \widehat{IDE}$

Do đó: $\triangle IEK \sim \triangle IDE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{IK}{IE} \Rightarrow IE^2 = IK.ID$

Xét $\triangle IEM$ và $\triangle ICE$ có: $\widehat{EIM}$ (chung), $\widehat{IEM} = \widehat{ICE}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó: $\triangle IEM \sim \triangle ICE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IE}{IC} = \frac{IM}{IE} \Rightarrow IE^2 = IM.IC$

Ta có: $IK.ID = IM.IC (= IE^2)$

Xét $\triangle IKM$ và $\triangle ICD$ có:

$\widehat{KIM}$ (chung), $\frac{IK}{IC} = \frac{IM}{ID}$ (vì $IK.ID = IM.IC$)

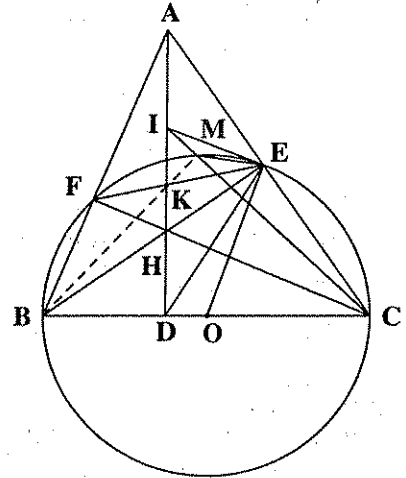
Do đó: $\triangle IKM \sim \triangle ICD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{IDC} = 90^\circ$

Nên $KM \perp MC$

Mà $\widehat{BMC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có: $KM \perp MC$, $BM \perp MC$

Vậy B, K, M thẳng hàng.



Bài 36. Cho đường tròn (O), AB và CD là các đường kính. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt AC ở E. DE cắt đường tròn (O) ở F (F khác D). Gọi M là giao điểm của AF và BE, N là giao điểm của AM và BC. Chứng minh rằng ba điểm E, N, O thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\widehat{CFD} = 90^\circ$, $\widehat{AFB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{CFE} = 90^\circ$, $\widehat{BMF} = \widehat{ABF}$

Mà $\widehat{ECF} = \widehat{ABF}$ (tứ giác ABFC nội tiếp)

Nên $\widehat{BMF} = \widehat{ECF} (= \widehat{ABF})$

$\Rightarrow$ Tứ giác CEMF nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CME} = \widehat{CFE} = 90^\circ$

Ta có: $\widehat{CME} = \widehat{ABE} = 90^\circ \Rightarrow CM \parallel AB$

Gọi I là giao điểm của ON và CM,

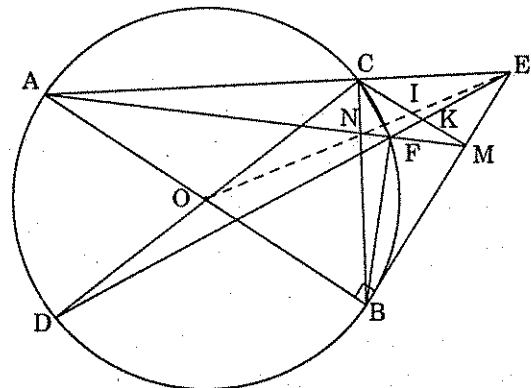
K là giao điểm của OE và CM.

Do $CM \parallel AB$. Áp dụng hệ quả của định lý Talét. Ta có: $\frac{CI}{OB} = \frac{NI}{NO} = \frac{IM}{OA}$

$\Rightarrow CI = CM$ và $\frac{CK}{OA} = \frac{EK}{EO} = \frac{KM}{OB} \Rightarrow CK = KM$

Do vậy $I = K$.

Vậy ba điểm E, N, O thẳng hàng.



Bài 37. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BD và CE cắt nhau ở H . Gọi M là trung điểm cạnh BC , N là giao điểm của AH và DE , K là giao điểm của AO và BC . Vẽ hình bình hành $HKNS$.

Chứng minh rằng M, H, S thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ đường kính AF của đường tròn (O) .

$$\widehat{ABF} = \widehat{ACF} = 90^\circ$$

Ta có: $CH \perp AB$ (gt), $FB \perp AB$

$$\Rightarrow CH \parallel FB$$

Tương tự có $BH \parallel FC$

Do đó tứ giác $BHCF$ là hình bình hành.

Mà M là trung điểm của BC

Nên M là trung điểm của $HF \Rightarrow H, M, F$ thẳng hàng.

$$\text{Ta có } \widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEDC$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AEN} = \widehat{ACK}$$

Ta có: $\widehat{EAN} = \widehat{CBF}$ (cùng phụ với góc ABC)

Mà $\widehat{CAK} = \widehat{CBF}$, nên $\widehat{EAN} = \widehat{CAK}$

$$\Delta AEN \sim \Delta ACK \text{ (vì } \widehat{AEN} = \widehat{ACK} \text{ và } \widehat{EAN} = \widehat{CAK}) \Rightarrow \frac{AN}{AK} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Delta AEH \sim \Delta ACF \text{ (vì } \widehat{AEH} = \widehat{ACF} (= 90^\circ), \widehat{EAH} = \widehat{CAF}) \Rightarrow \frac{AH}{AF} = \frac{AE}{AC}$$

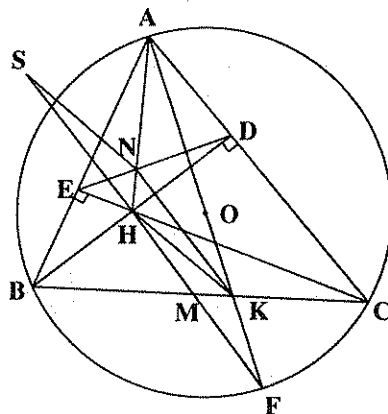
$$\text{Ta có: } \frac{AN}{AK} = \frac{AH}{AF} \left(= \frac{AE}{AC} \right) \Rightarrow \frac{AH}{AN} = \frac{AK}{AF}$$

$$\text{Xét } \Delta AHF \text{ có } \frac{AH}{AN} = \frac{AK}{AF} \Rightarrow HF \parallel NK \text{ (định lý Ta-lét đảo)}$$

Vậy $HM \parallel NK$. Mà $HS \parallel NK$ (tứ giác $HKNS$ là hình bình hành)

Do đó: HM, HS trùng nhau (tiên đề O-clit)

Vậy ba điểm M, H, S thẳng hàng.



Bài 38. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$, AH là đường cao của tam giác ABC . Vẽ đường kính AI của đường tròn (O) . Vẽ đường kính MN vuông góc với BC (M thuộc cung nhỏ BC). Đường thẳng qua E song song với BC cắt AC ở F .

Chứng minh rằng N, F, I thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\widehat{NEF} = \widehat{NBC}$ ($EF \parallel BC$) và $\widehat{NAC} = \widehat{NBC}$

Suy ra $\widehat{NEF} = \widehat{NAC}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ANFE$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{ENF} = \widehat{EAF}$$

Mặt khác $\widehat{ABI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\triangle BAI$ và $\triangle HAC$ có:

$$\widehat{ABI} = \widehat{AHC} (= 90^\circ), \widehat{BIA} = \widehat{ACB}$$

Do đó $\triangle BAI \sim \triangle HAC$ (g.g)

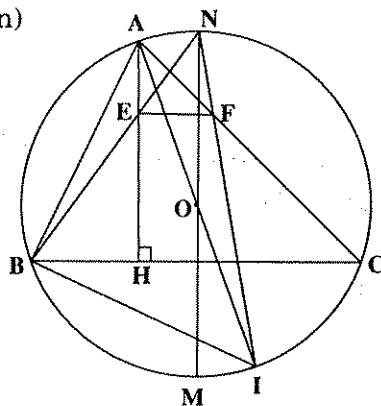
$$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{HAC}$$

Mà $\widehat{BAI} = \widehat{BNI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BI)

Do vậy $\widehat{ENF} = \widehat{BNI}$

$\Rightarrow$ Hai tia NF, NI trùng nhau

Vậy N, F, I thẳng hàng.



Bài 39. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD, CE. Gọi M là giao điểm của các tiếp tuyến vẽ từ B, từ C của đường tròn (O), N là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Qua M vẽ đường thẳng song song với DE cắt AB, AC lần lượt ở K, S.

Gọi Cx là tia đối của tia CM. Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác BEDC nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}, \widehat{AED} = \widehat{ACB}$$

Mà $\widehat{ADE} = \widehat{MSC}$, $\widehat{AED} = \widehat{BKM}$ (đồng vị và $DE \parallel KS$)

Ta có $\widehat{ACx} = \widehat{ABC}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$$\widehat{ACx} = \widehat{MCS} \text{ (đối đỉnh)}$$

Do đó $\widehat{MCS} = \widehat{MSC}$

$\Rightarrow \triangle MCS$ cân tại M

$$\Rightarrow MC = MS$$

Tương tự $MB = MK$

Mà $MB = MC$ (MB, MC là tiếp tuyến của đường tròn (O))

Do đó $MK = MS$

Gọi M' là giao điểm của AN và KS

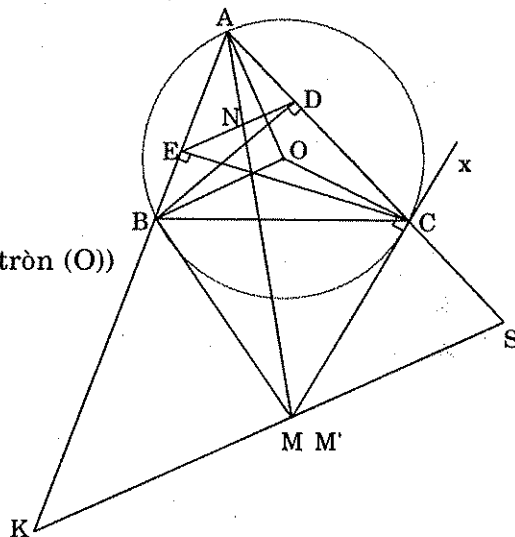
$$\triangle AKM' \text{ có } EN \parallel KM' \Rightarrow \frac{EN}{KM'} = \frac{AN}{AM'}$$

$$\triangle AM'S \text{ có } ND \parallel M'S \Rightarrow \frac{ND}{SM'} = \frac{AN}{AM'}$$

$$\text{Nên } \frac{EN}{KM'} = \frac{ND}{SM'} \left(= \frac{AN}{AM'} \right)$$

Mà $EN = ND$. Do đó $KM' = SM'$. Ta có $M' = M$

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.



Bài 40. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. AO, AI cắt đường tròn (O) lần lượt tại D, E. DI cắt đường tròn (O) ở M. Vẽ IK vuông góc với BC tại K. Chứng minh rằng M, K, E thẳng hàng.

ED cắt BC ở N, ME cắt BC ở T.

$$\begin{aligned}\widehat{EIB} &= \widehat{BAI} + \widehat{ABI} \\ &= \widehat{CBE} + \widehat{IBC} = \widehat{EBI}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \triangle EBI$ cân tại E

$\Rightarrow EB = EI$

$\triangle EBT \sim \triangle EMB$ ($\widehat{BET}$ chung, $\widehat{EBT} = \widehat{EMB}$)

$$\Rightarrow \frac{EB}{EM} = \frac{ET}{EB}$$

$$\Rightarrow \frac{EI}{EM} = \frac{ET}{EI}$$

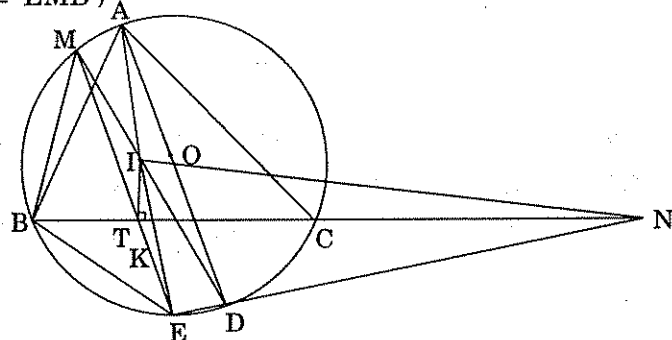
$\triangle EIT \sim \triangle EMI \Rightarrow \widehat{EIT} = \widehat{EMI}$

$$\begin{aligned}\widehat{ENT} &= \frac{sđ \widehat{EB} - sđ \widehat{CD}}{2} \\ &= \frac{sđ \widehat{EC} - sđ \widehat{CD}}{2} = \frac{sđ \widehat{ED}}{2} = \widehat{EMI} = \widehat{EIT}\end{aligned}$$

$\Rightarrow ETIN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ITN} = \widehat{IEN} = 90^\circ$

$IT \perp BC$, do đó $T = K$

Vậy M, K, E thẳng hàng.



Bài 41. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), AD là đường phân giác của tam giác ABC. E là điểm chính giữa cung lớn BC. Gọi M là giao điểm của ED và đường tròn (O). K, I lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC. Đường thẳng qua B song song với KI cắt AC ở F. Gọi T là trung điểm của đoạn thẳng BF. Chứng minh rằng ba điểm A, T, I thẳng hàng.

Lời giải

Gọi L là giao điểm của AD với đường tròn (O), H là giao điểm của EL và BC.

Vẽ $MS \perp AC$ tại S.

Chứng minh được tứ giác MDHL nội tiếp; K, I, S thẳng hàng

$$\begin{aligned}\Rightarrow \widehat{BMH} &= \widehat{BME} + \widehat{DMH} = \widehat{BCE} + \widehat{DLH} \\ &= \widehat{CBE} + \widehat{ABE} = \widehat{ABC} = \widehat{KMI}\end{aligned}$$

Mà $\widehat{MBH} = \widehat{MKI}$. Do đó $\triangle MBH \sim \triangle MKI$ (g.g)

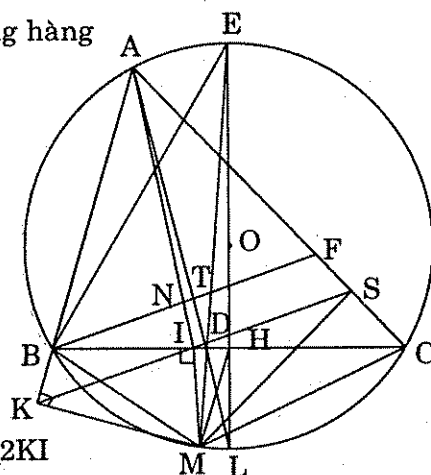
$$\Rightarrow \frac{BH}{KI} = \frac{MB}{MK}$$

Mặt khác $\triangle MBC \sim \triangle MKS$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BC}{KS} = \frac{MB}{MK}$$

Ta có $\frac{BH}{KI} = \frac{BC}{KS} (= \frac{MB}{MK})$. Mà $BC = 2BH$, nên $KS = 2KI$

$\Rightarrow IK = IS$



$$\Delta AKI \text{ có } BN \parallel KI \Rightarrow \frac{BN}{IK} = \frac{AN}{AI}$$

$$\Delta ASI \text{ có } NF \parallel SI \Rightarrow \frac{NF}{IS} = \frac{AN}{AI}$$

$$\text{Do vậy } \frac{BN}{IK} = \frac{NF}{IS}. \text{ Mà } IK = IS$$

Vậy $BN = NF \Rightarrow N$ là trung điểm của đoạn thẳng BF

Do đó $N \equiv T$

Vậy A, T, I thẳng hàng.

Bài 42. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. AD, BE là các đường cao của tam giác ABC . Các tiếp tuyến tại A, B của (O) cắt nhau ở M . N là trung điểm của DE . Chứng minh rằng ba điểm M, N, C thẳng hàng.

Lời giải

Qua M vẽ đường thẳng song song với DE cắt BC, AC lần lượt ở K, I .

Gọi Bx là tia đối của tia BM

$$\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABDE$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{BAE}$$

$$\widehat{CDE} = \widehat{BKM} \text{ (KI // AB)}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{CBx}, \widehat{CBx} = \widehat{MBK}$$

$$\text{Do đó } \widehat{BKM} = \widehat{MBK}$$

$$\Rightarrow \Delta MKB \text{ cân tại } M$$

$$\Rightarrow MB = MK$$

$$\text{Tương tự } MA = MI \text{ Mà } MA = MB.$$

$$\text{Do vậy } MI = MK \quad (1)$$

Gọi N' là giao điểm của CM và DE

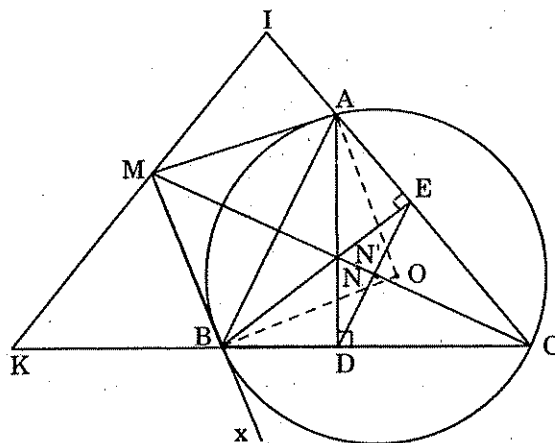
$$\Delta CMI \text{ có } N'E \parallel MI \Rightarrow \frac{N'E}{MI} = \frac{CN'}{CM} \quad (2)$$

$$\Delta CKM \text{ có } N'D \parallel KM \Rightarrow \frac{N'D}{MK} = \frac{CN'}{CM} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) có } N'E = N'D.$$

$$\text{Do đó } N' \equiv N$$

Vậy M, N, C thẳng hàng.



Bài 43. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi D là giao điểm của AI với đường tròn (O) (D khác A), E là giao điểm của BI với đường tròn (O) (E khác B). Đường thẳng qua I song song với AC cắt BC ở F . Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \widehat{DIF} = \widehat{DAC} \text{ (IF // AC)}$$

$$\text{Mà } \widehat{DBF} = \widehat{DAC}$$

$$\Rightarrow \widehat{DIF} = \widehat{DBF}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BIFD nội tiếp

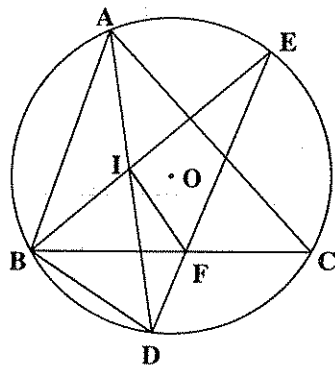
$$\Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{EBC}$$

$$\text{Mà } \widehat{ADE} = \widehat{EBC} = (\widehat{ABE})$$

$$\Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{ADE}$$

Do đó hai tia DE, DF trùng nhau.

Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.



Bài 44. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, (I) tiếp xúc với BC, AB, AC lần lượt tại D, E, F. Vẽ AM là đường trung tuyến của tam giác ABC. Gọi K là giao điểm của EF và DI. Chứng minh A, K, M thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1: Gọi N là giao điểm của AK và BC.

AE, AF là tiếp tuyến $\Rightarrow \widehat{EAI} = \widehat{IAF}$

Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt DI ở L, cắt EF ở S.

Qua K vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt ở X, Y.

$$DI \perp BC, AS \parallel BC \Rightarrow AL \perp LI.$$

$$\widehat{ALI} = \widehat{AEI} = \widehat{AFI} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ A, E, I, F, L cùng thuộc một đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{ELI} = \widehat{EAI} = \widehat{IAF} = \widehat{ILF}$$

$\Rightarrow$ LK là đường phân giác của tam giác LEF

LK, LS là đường phân giác trong và ngoài của tam giác LEF

$$\Rightarrow \frac{KE}{KF} = \frac{SE}{SF} \Rightarrow \frac{KE}{SE} = \frac{KF}{SF} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } XK \parallel AS \Rightarrow \frac{XK}{AS} = \frac{KE}{SE} \quad (2)$$

$$KY \parallel AS \Rightarrow \frac{KY}{AS} = \frac{KF}{SF} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow XK = KY$

$$\triangle ABN, XK \parallel BN \Rightarrow \frac{XK}{BN} = \frac{AK}{AN}$$

$$\triangle ACN, KY \parallel NC \Rightarrow \frac{KY}{CN} = \frac{AK}{AN}$$

$$\Rightarrow BN = NC$$

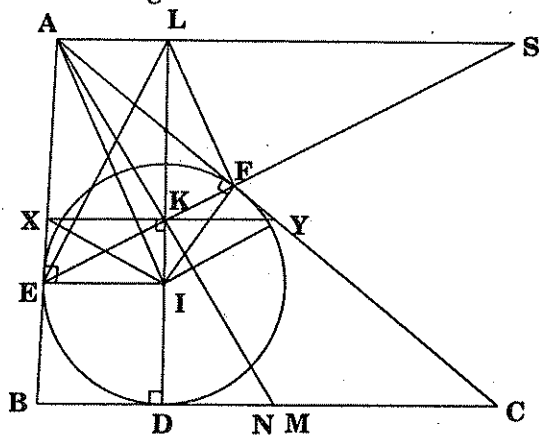
$\Rightarrow$ N là trung điểm của BC

Ta có N $\equiv$ M

Vậy ba điểm A, K, N thẳng hàng.

Cách 2: Qua K vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt ở X, Y

$$DI \perp BC, XY \parallel BC \Rightarrow DI \perp XY$$



Ta có: $\widehat{XEI} = \widehat{XKI} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác EXKI nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IEK} = \widehat{IXK}$

Tương tự tứ giác IKFY nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IFK} = \widehat{IYK}$

Mà $IE = IF (= r) \Rightarrow \triangle IEF$ cân tại I

$\Rightarrow \widehat{IEK} = \widehat{IFK}$

Nên $\widehat{IXK} = \widehat{IYK}$

$\triangle IXY$ cân tại I. Mà IK là đường cao ($ID \perp XY$).

Do đó IK là đường trung tuyến

$\Rightarrow XK = KY = \frac{XY}{2}$

Do đó: $\frac{XK}{BM} = \frac{2XK}{2BM} = \frac{XY}{BC}$

$\triangle ABC$ có $XY \parallel BC \Rightarrow \frac{AX}{AB} = \frac{XY}{BC}$

Xét $\triangle AXK$ và $\triangle ABM$ có: $\widehat{AXK} = \widehat{ABM}$ (đồng vị và $XY \parallel BC$)

$$\frac{AX}{AB} = \frac{XK}{BM} \left(= \frac{XY}{BC} \right)$$

Do đó $\triangle AXK \sim \triangle ABM$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{XAK} = \widehat{BAM}$

$\Rightarrow$ Hai tia AK, AM trùng nhau.

Vậy ba điểm A, K, M thẳng hàng.

Bài 45. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau ở G. GD cắt EF tại S. M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng M, H, S thẳng hàng.

Lời giải

EF cắt BC tại T, AT cắt (O) tại K, GD cắt OT tại I, AO cắt (O) tại N, AN cắt EF tại J.

$OA \perp EF$

$ME = MB \Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MBE}$

$\Rightarrow \widehat{MED} + \widehat{DEB} = \widehat{MTE} + \widehat{TEB}$

$\Rightarrow \widehat{MED} = \widehat{MTE} \Rightarrow \triangle MED \sim \triangle MTE$

$\Rightarrow ME^2 = MD.MT \Rightarrow MO.MG = MD.MT$

$\triangle MOT \sim \triangle MDG$ (c.g.c)

$GI \perp OT$

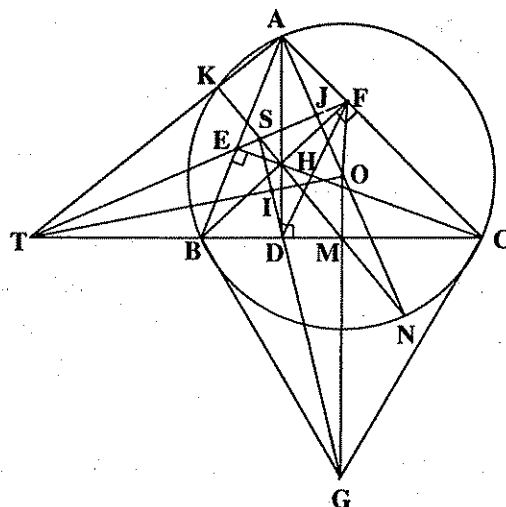
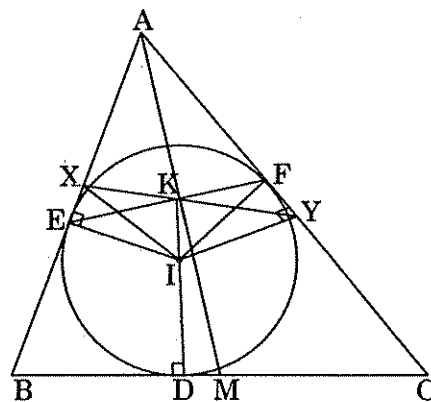
$TS.TJ = TI.TO = TD.TM = TF.TE = TK.TA$

$TS.TJ = TK.TA$

$\Rightarrow \widehat{SKA} = 90^\circ$

$\Rightarrow SK \perp TA$ (1)

A, K, F, E, H cùng thuộc một đường tròn



$$\Rightarrow \widehat{HKA} = \widehat{HFA} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow HK \perp TA \quad (2)$$

$$TK.TA = TD.TM$$

$$\Rightarrow \widehat{TKM} = \widehat{TDA} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow MK \perp TA \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) cho ta M, H, S thẳng hàng.

Bài 46. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), BH và CK là hai đường cao, BE và CF là hai đường phân giác cắt nhau tại I. Chứng minh rằng H, I, K thẳng hàng khi và chỉ khi E, O, F thẳng hàng.

Lời giải

Trước hết phát biểu không chứng minh hai bổ đề sau:

Bổ đề 1: Cho tam giác ABC có BE, CF là hai đường phân giác. O là điểm nằm trong tam giác ABC. M, N, S lần lượt là hình chiếu của O trên BC, AC, AB.

Ta có E, O, F thẳng hàng khi và chỉ khi $OM = ON + OS$

Bổ đề 2: Cho tứ giác nội tiếp BKHC. Hai tia phân giác của hai góc KBC, HCB cắt nhau ở I. Ta có $BK + CH = KH$ khi và chỉ khi K, I, H thẳng hàng.

* Trở lại bài toán:

Các tứ giác BSOM, BKHC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{SOM} = \widehat{CHK}$,

$$\widehat{OSM} = \widehat{OBM} = 90^\circ - \widehat{BOM} = 90^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{HCK}.$$

$$\Delta OSM \sim \Delta HCK \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OS}{CH} = \frac{OM}{KH} \Rightarrow \frac{OS}{OM} = \frac{CH}{KH}$$

$$\Delta ONM \sim \Delta KBH \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{ON}{BK} = \frac{OM}{KH} \Rightarrow \frac{ON}{OM} = \frac{BK}{KH}$$

$$\text{Nên } \frac{ON + OS}{OM} = \frac{BK + CH}{KH}$$

Ta có:

$$E, O, F \text{ thẳng hàng} \xleftarrow{\text{bổ đề 1}} OM = ON + OS$$

$$\Leftrightarrow \frac{ON + OS}{OM} = 1 \Leftrightarrow \frac{BK + CH}{KH} = 1$$

$$\Leftrightarrow BK + CH = KH \xleftarrow{\text{bổ đề 2}} K, I, H \text{ thẳng hàng.}$$

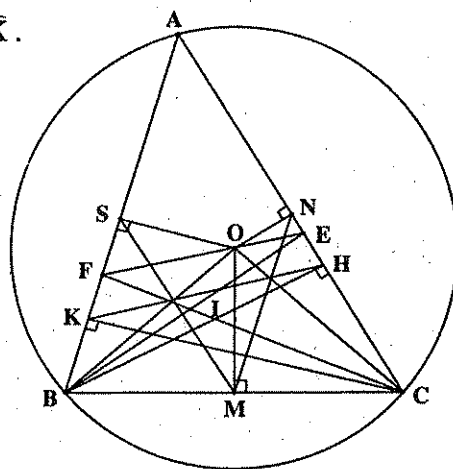
Bài 47. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không giao nhau. Vẽ $OH \perp d$ tại H. A, B thuộc d sao cho $HA = HB$. M là điểm thuộc đường tròn (O). Gọi C, D, E lần lượt là giao điểm của HM, AM, BM với đường tròn (O). DE cắt d ở S. Đường thẳng qua O vuông góc với CE cắt tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) ở K.

Chứng minh rằng ba điểm S, C, K thẳng hàng.

Lời giải

Qua D vẽ đường thẳng song song với d cắt HC, BM lần lượt ở I, F. Vẽ $ON \perp DE$ tại N

Ta có N là trung điểm của DE.



$$\Delta MAH \text{ có } DI \parallel AH \Rightarrow \frac{ID}{AH} = \frac{MI}{MH}$$

$$\Delta MBH \text{ có } FI \parallel BH \Rightarrow \frac{IF}{BH} = \frac{MI}{MH}$$

$$\text{Nên } \frac{ID}{AH} = \frac{IF}{BH}, AH = BH \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow ID = DF$$

IN là đường trung bình của tam giác DEF

$$\Rightarrow NI \parallel EF$$

$$\Rightarrow \widehat{IND} = \widehat{FED}$$

Mà $\widehat{FED} = \widehat{ICD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MD)

$$\Rightarrow \widehat{IND} = \widehat{ICD}$$

Do đó tứ giác IDCN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IDN} = \widehat{ICN}$

Mà $\widehat{IDN} = \widehat{HSN}$ (DF // d). Do vậy $\widehat{ICN} = \widehat{HSN}$

$\Rightarrow$ Tứ giác HNCS nội tiếp (1)

$$\text{Mà } \widehat{ONS} = \widehat{OHS} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ONHS nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) có O, N, H, S, C cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{OCS} = 90^\circ$

Mặt khác: $OK \perp EC \Rightarrow OK$ đi qua trung điểm của CE.

Nên OK là đường trung trực của đoạn thẳng CE $\Rightarrow KE = KC$

$$\Delta KEO = \Delta KCO \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{KEO} = \widehat{KCO}$$

$$\text{Nên } \widehat{KCO} = 90^\circ. \text{ Ta có: } \widehat{KCS} = \widehat{OCS} + \widehat{KCO} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm S, C, K thẳng hàng.

Bài 48. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) ($AB < BC < CA$), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác HCD cắt đường tròn (O) ở M (M khác C). BM cắt đường tròn (K) ở N (N khác M).

Chứng minh rằng ba điểm N, D, F thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{Ta có } \widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Tứ giác HECD nội tiếp $\Rightarrow E$ thuộc đường tròn (K)

$$\text{Ta có } \widehat{BAC} + \widehat{BMC} = 180^\circ \text{ (tứ giác ABMC nội tiếp)}$$

$$\widehat{NEC} + \widehat{BMC} = 180^\circ \text{ (tứ giác NMCE nội tiếp)}$$

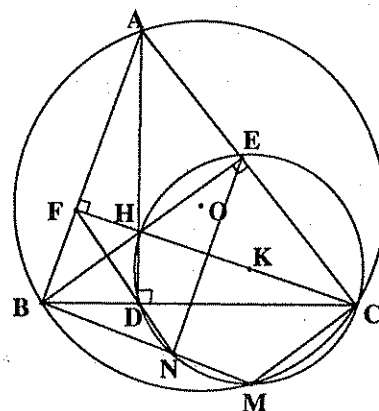
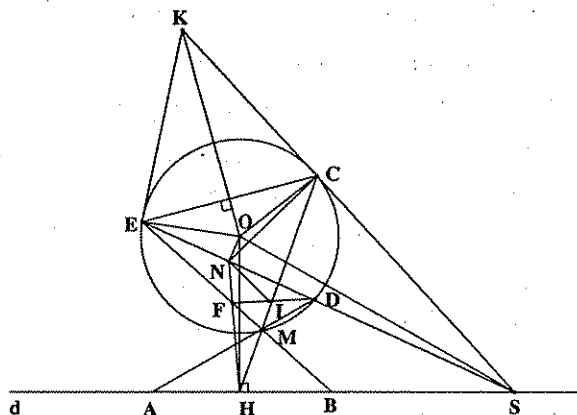
$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{NEC} \Rightarrow AB \parallel NE$$

$$\Rightarrow \widehat{HEN} = \widehat{FBH}$$

$$\text{Mà } \widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Nên tứ giác BFHD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{FDH}$

$$\text{Do đó } \widehat{FDH} = \widehat{HEN} (= \widehat{FBH})$$



Mà $\widehat{HEN} + \widehat{HDN} = 180^\circ$ (tứ giác HDNE nội tiếp)

Do đó $\widehat{NDF} = \widehat{FDH} + \widehat{HDN} = \widehat{HEN} + \widehat{HDN} = 180^\circ$

Vậy ba điểm N, D, F thẳng hàng.

Bài 49. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác AD của tam giác ABC cắt cung BC ở E. Đường tròn (I) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại S và tiếp xúc với BC tại T. Đường tròn (I) cắt AD ở M, N (N nằm giữa A và M). CM cắt đường tròn (O) ở K. Vẽ dây KL song song với AB.

Chứng minh rằng C, N, L thẳng hàng.

Lời giải

Chứng minh được S, T, E thẳng hàng

Xét $\triangle ECT$ và $\triangle ESC$ có: $\widehat{CET}$ (chung), $\widehat{ECT} = \widehat{ESC}$

Do đó $\triangle ECT \sim \triangle ESC$ (g.g)

$$\frac{EC}{ES} = \frac{ET}{EC}$$

$$\Rightarrow ET \cdot ES = EC^2$$

Xét $\triangle EMT$ và $\triangle ESA$ có: $\widehat{MET}$ chung, $\widehat{EMT} = \widehat{ESA}$

Do đó $\triangle EMT \sim \triangle ESN$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EM}{ES} = \frac{ET}{EN} \Rightarrow ET \cdot ES = EM \cdot EN$$

$$\text{Nên } EC^2 = EM \cdot EN (= ET \cdot ES) \Rightarrow \frac{EC}{EN} = \frac{EM}{EC}$$

$\triangle ECM \sim \triangle ENC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ECM} = \widehat{ENC}$

$\Rightarrow \widehat{ECD} + \widehat{DCM} = \widehat{NAC} + \widehat{NCA}$. Mà $\widehat{ECD} = \widehat{NAC}$

Nên $\widehat{DCM} = \widehat{NCA}$

$KL \parallel AB \Rightarrow \widehat{BK} = \widehat{AL} \Rightarrow \widehat{DCM} = \widehat{LCA}$

Ta có: $\widehat{NCA} = \widehat{LCA} (= \widehat{DCM})$

$\Rightarrow$ Hai tia CN, CL trùng nhau

Vậy C, N, L thẳng hàng.

Bài 50. Cho tứ giác ABCD (AD < BC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là giao điểm của AC và BD. Vẽ đường kính CM, đường kính DN. Gọi K là giao điểm của AN và BM.

Chứng minh rằng I, K, O thẳng hàng.

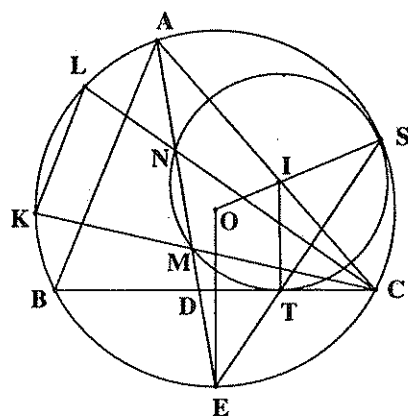
Lời giải

Cách 1

Gọi J là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC và đường tròn ngoại tiếp tam giác NOC (J khác)

Ta có: $\widehat{NJC} = \widehat{NOC}$ (tứ giác OJNC nội tiếp)

$\widehat{BJC} = \widehat{BIC}$ (tứ giác IBCJ nội tiếp)



Xét đường tròn (O) có:

$$\widehat{NOC} = \frac{sđ \widehat{DM} + sđ \widehat{CN}}{2}$$

$$\widehat{BIC} = \frac{sđ \widehat{AD} + sđ \widehat{BC}}{2}$$

$$\widehat{BKN} = \frac{sđ \widehat{DM} + sđ \widehat{AD} + sđ \widehat{CN} + sđ \widehat{BC}}{2}$$

Vậy $\widehat{BJN} = \widehat{BKN}$. Tứ giác KBNJ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{KJB} = \widehat{KNB}$$

Mà $\widehat{KNB} = \widehat{ACB}$, $\widehat{ACB} = \widehat{IJB}$. Nên $\widehat{KJB} = \widehat{IJB}$

$\Rightarrow$ Hai tia JK, JI trùng nhau

$\Rightarrow$ J, K, I thẳng hàng (1)

Mặt khác $\widehat{KJN} + \widehat{KBN} = 180^\circ$ (tứ giác KBNJ nội tiếp)

$$\widehat{OJN} + \widehat{OCN} = 180^\circ \text{ (tứ giác BCNM nội tiếp)}$$

Do đó $\widehat{KJN} = \widehat{OJN}$

$\Rightarrow$ Hai tia JO, JK trùng nhau.

$\Rightarrow$ J, O, K thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) có J, O, K, I thẳng hàng

Vậy I, K, O thẳng hàng.

Cách 2

Gọi E là điểm đối xứng của B qua IK. O là trung điểm của CM và DN

$\Rightarrow$ Tứ giác DCNM là hình bình hành

$\Rightarrow DC \parallel MN$

$$\Rightarrow \widehat{DM} = \widehat{CN}$$

$$\Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{IBK}$$

$$\widehat{IBK} = \widehat{IEK} \text{ (tính chất đối xứng trục)}$$

$$\text{Do đó } \widehat{IAK} = \widehat{IEK}$$

Tứ giác AEKI nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{EIK}$

Mà $\widehat{EIK} = \widehat{BIK}$ (tính chất đối xứng trục),

$$\widehat{BIK} = \widehat{IHB} + \widehat{IBH} = 90^\circ + \widehat{IBH} = \widehat{DBN} + \widehat{IBH}$$

$$\text{Do đó } \widehat{EAN} = \widehat{EBN}$$

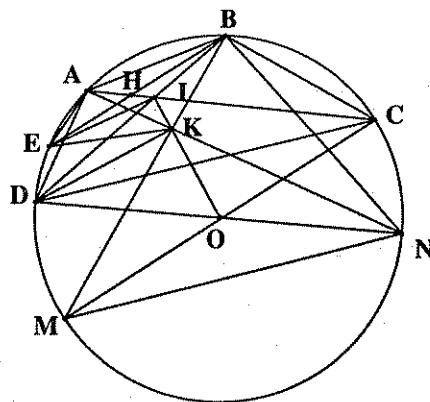
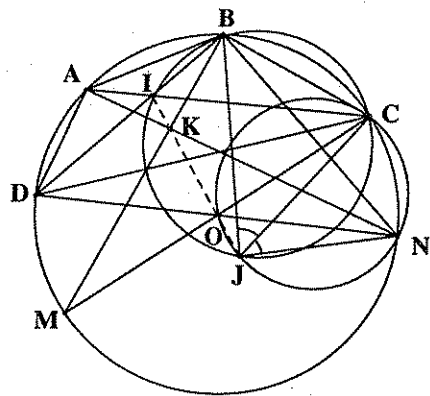
$\Rightarrow$ Tứ giác ABNE nội tiếp

$\Rightarrow$ E thuộc đường tròn (O)

$\Rightarrow$ KI đi qua O

Vậy I, K, O thẳng hàng.

Chú ý: Các bạn hãy tìm xem trong quyển sách này còn có bài toán nào giống bài toán này và bạn sẽ nói gì thêm về bài toán này!



Bài 51. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB . M là điểm trên nửa đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt Ax, By lần lượt ở C, D . Đường tròn ngoại tiếp tam giác OCD cắt nửa đường tròn (O) ở E, F . Gọi N là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng ba điểm E, F, N thẳng hàng.

Lời giải

Để thấy $AC \parallel BD, AC = CM, BD = MD, \widehat{COD} = 90^\circ$.

Gọi I là trung điểm của CD , H là giao điểm của MN và AB , K và S lần lượt là giao điểm của EF với OM và OI .

ΔNBO có $AC \parallel BD$

$$\Rightarrow \frac{CN}{MB} = \frac{AC}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{CN}{MB} = \frac{CM}{MD}$$

$\Rightarrow MN \parallel BD$. Nên $MN \parallel AC \parallel BD$

$$\text{Ta có: } \frac{MN}{AC} = \frac{DM}{DC} = \frac{BN}{BC} = \frac{NH}{AC} \Rightarrow MN = NH$$

Vẽ đường kính OJ của đường tròn (I) đường kính CD . (O) và (I) cắt nhau ở E, F

$\Rightarrow OI$ là trung trực của EF .

$\Rightarrow OI \perp EF \Rightarrow EF \parallel AB$

ΔEOJ vuông tại E , ES là đường cao

$$\Rightarrow OS.OJ = OE^2$$

$$\Rightarrow 2OS.OI = OM^2 \Rightarrow OS.OI = \frac{1}{2} OM^2$$

Mà $\Delta OSK \sim \Delta OMI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OS}{OM} = \frac{OK}{OI} \Rightarrow OS.OI = OM.OK$$

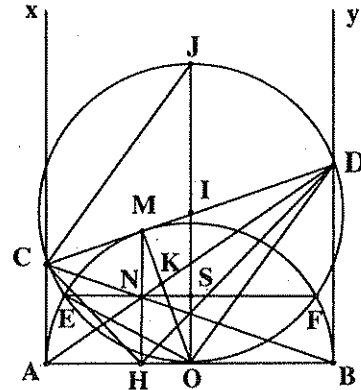
$$\text{Ta có: } \frac{1}{2} OM^2 = OM.OK$$

$$\Rightarrow OK = \frac{1}{2} OM$$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của OM .

Mà $EF \parallel AB$. Do đó EF đi qua N .

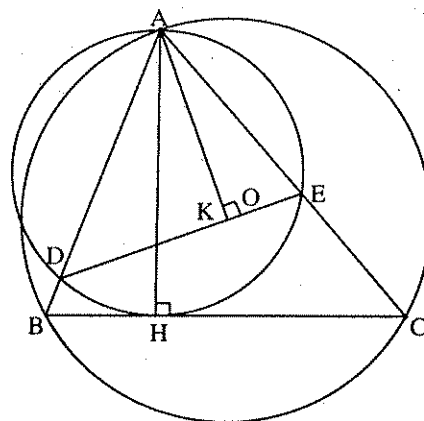
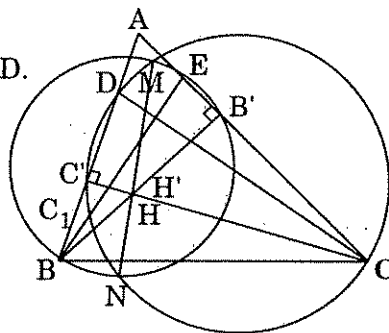
Vậy ba điểm E, F, N thẳng hàng.



Bài 52. Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. D, E là các điểm trên các cạnh AB, AC . Giả sử các đường tròn đường kính BE, CD cắt nhau tại M, N . Chứng minh rằng H, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC



chứa C). Ta có $\widehat{EMx} = \widehat{CEM} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{EM} \right)$

Mà $\widehat{EMx} = \widehat{EMC} + \widehat{CMx}$, $\widehat{CEM} = \widehat{AME} + \widehat{MAE}$

Mà $\widehat{CMx} = \widehat{MAE}$. Nên $\widehat{EMC} = \widehat{AME}$

$\Rightarrow$ ME là tia phân giác của góc AMC.

Mặt khác $ON \perp AC$

$\Rightarrow \widehat{AN} = \widehat{CN}$

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{CMN}$

$\Rightarrow$ MN là tia phân giác của góc AMC

Nên hai tia ME, MN trùng nhau.

Vậy ba điểm M, N, E thẳng hàng.

Cách 2

(O), (O') tiếp xúc nhau tại M $\Rightarrow$ O, M, O' thẳng hàng.

ME cắt đường tròn (O) ở N'

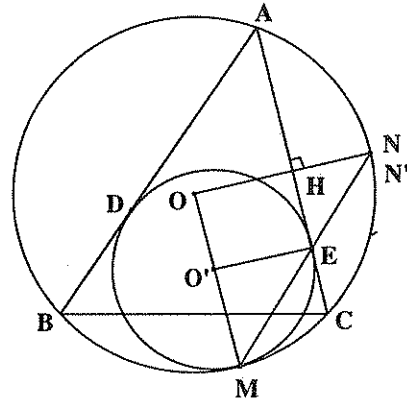
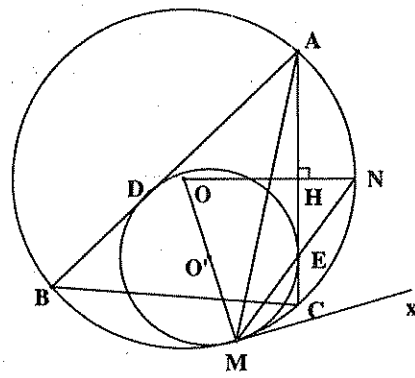
$\triangle OMN$ có $OM = ON' (= R) \Rightarrow \triangle OMN$ cân tại O

$\triangle O'ME$ có $O'M = O'E (= r) \Rightarrow \triangle O'ME$ cân tại O'

Do vậy $\widehat{EO'M} = \widehat{N'OM} \Rightarrow O'E \parallel ON'$

Mà $O'E \perp AC$ nên $ON' \perp AC$. Do vậy $N = N'$

Vậy M, N, E thẳng hàng.



Bài 55. Cho tam giác nhọn ABC ($\widehat{A} = 60^\circ$) nội tiếp đường tròn (O; R). Đường tròn (I) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt ở D, E. F là điểm chính giữa cung BC. Vẽ $OM \perp AF$ tại M, OM cắt CD tại H. Chứng minh rằng ba điểm B, H, E thẳng hàng.

Lời giải

BH cắt AC ở E. Tứ giác ADHM có $\widehat{ADH} = \widehat{AMH} = 90^\circ$ nên tứ giác ADHM nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{OHC} = \widehat{DAF} = \frac{\widehat{DAC}}{2} = 30^\circ$$

$$\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$$

$$\text{Nên: } \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 30^\circ$$

$$\widehat{OHC} = \widehat{OBC} = 30^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHOC nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BOC} = 120^\circ$$

$$\widehat{DHE'} = \widehat{BHC} = 120^\circ$$

Tứ giác ADHE' có: $\widehat{DAE'} + \widehat{DHE'} = 180^\circ$

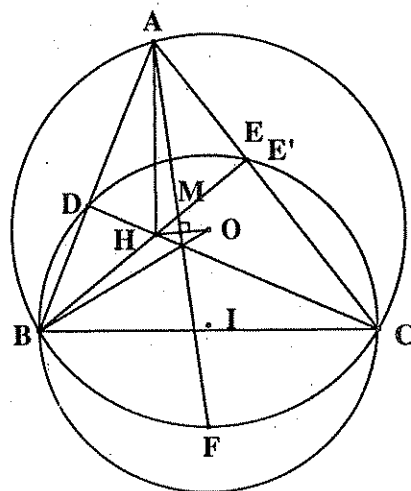
$\Rightarrow$ Tứ giác ADHE' nội tiếp

$$\widehat{HE'A} = 90^\circ$$

$$HE' \perp AC, HE \perp AC$$

$\Rightarrow$ HE, HE' trùng nhau.

Vậy B, H, E thẳng hàng.



Bài 56. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. K là một điểm nằm trong tam giác ADE. DE cắt BK, CK lần lượt ở M, N. Các đường tròn (O), (O') lần lượt ngoại tiếp các tam giác KDN, KEM cắt nhau tại L (L khác K). Chứng minh rằng A, K, L thẳng hàng.

Lời giải

Gọi I, S lần lượt là giao điểm của AK với DE, BC

$$\Delta KBS \text{ có } MI \parallel BS \Rightarrow \frac{IM}{BS} = \frac{IK}{KS}$$

$$\Delta KSC \text{ có } IN \parallel SC \Rightarrow \frac{IN}{CS} = \frac{IK}{KS}$$

$$\text{Do đó: } \frac{IM}{BS} = \frac{IN}{CS}$$

$$\frac{IM}{IN} = \frac{BS}{CS}$$

$$\text{Tương tự có: } \frac{ID}{IE} = \frac{BS}{CS}$$

$$\text{Do đó } \frac{IM}{IN} = \frac{ID}{IE} \Rightarrow ID \cdot IN = IM \cdot IE$$

IK cắt (O) ở L_1 , IK cắt (O') ở L_2

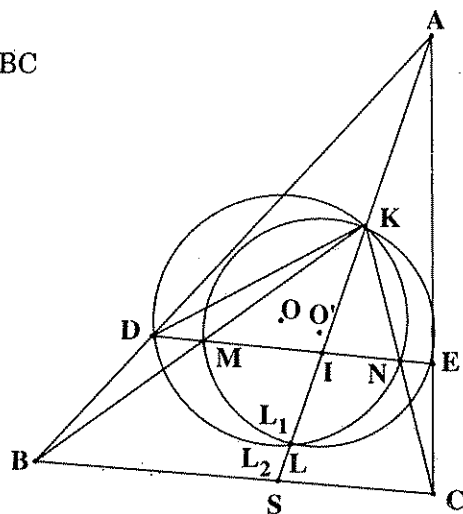
Xét ΔIDK và ΔIL_1N có: $\widehat{KID} = \widehat{NIL_1}$ (đối đỉnh), $\widehat{IKD} = \widehat{INL_1}$

$$\text{Do đó } \Delta IDK \sim \Delta IL_1N \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{ID}{IL_1} = \frac{IK}{IN} \Rightarrow ID \cdot IN = IK \cdot IL_1$$

Chứng minh tương tự cũng có: $IM \cdot IE = IK \cdot IL_2$

Do đó $IL_1 = IL_2 \Rightarrow L_1, L_2, L$ trùng nhau. Ta có A, K, I, L thẳng hàng

Vậy A, K, L thẳng hàng.



Bài 57. Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB lần lượt ở D, E, F. Trên đoạn thẳng OD lấy điểm I, vẽ đường tròn (I), tâm I, bán kính ID. Vẽ BG, CH là các tiếp tuyến của đường tròn (I) ($G \in (I), H \in (I)$). Gọi M là giao điểm của BG và CH, N là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng ba điểm N, G, H thẳng hàng.

Lời giải

Từ tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$$AE = AF, BG = BD = BF, CE = CH = CD, MG = MH$$

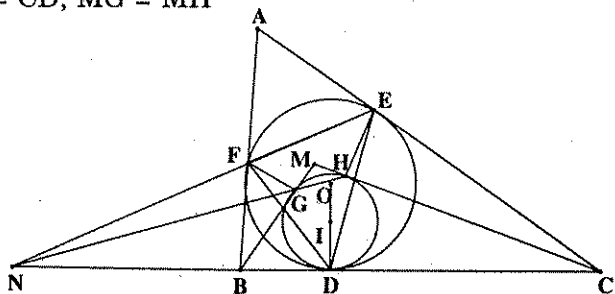
ΔAEF cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AFE}$$

$$\Rightarrow 2\widehat{AEF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$$

$$\Delta ABC \text{ có } \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{AEF} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2}$$



$$\Delta CEH \text{ cân tại } C \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ + \frac{\widehat{ECH}}{2}$$

$$\text{Do đó } \widehat{HEF} = \widehat{AEH} - \widehat{AEF} = 90^\circ + \frac{\widehat{ECH} - \widehat{ABC} - \widehat{ACB}}{2}$$

$$\text{Tương tự có: } \widehat{MGH} = \frac{\widehat{MBC} + \widehat{MCB}}{2}, \widehat{MGF} = 90^\circ + \frac{\widehat{GBF}}{2}$$

$$\text{Do đó } \widehat{HGF} = 90^\circ + \frac{\widehat{MBC} + \widehat{MCB} + \widehat{GBF}}{2}$$

Ta có $\widehat{HEF} + \widehat{HGF} = 180^\circ$. Tứ giác EHGF nội tiếp.

NG cắt đường tròn (I) ở H_1 , cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác EHGF ở H_2

Ta có $\Delta NGD \sim \Delta NDH_1$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{NG}{ND} = \frac{ND}{NH_1}$$

$$\Rightarrow NG \cdot NH_1 = ND^2$$

Ta cũng có: $\Delta NFG \sim \Delta NH_2E$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{NF}{NH_2} = \frac{NG}{NE} \Rightarrow NG \cdot NH_2 = NE \cdot NF$$

$\Delta NDF \sim \Delta NED$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{ND}{NE} = \frac{NF}{ND} \Rightarrow NE \cdot NF = ND^2$$

Do vậy $NH_1 = NH_2 \Rightarrow H_1 = H_2$.

Nên H_1, H_2, H trùng nhau.

Vậy ba điểm N, G, H thẳng hàng.

Bài 58. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. C nằm giữa O và A. Vẽ đường tròn (I) đường kính BC. Vẽ AD là tiếp tuyến, ACF là cát tuyến của đường tròn (I) ($AE < AF$) sao cho tia AO nằm giữa hai tia AD, AE. Đường thẳng vuông góc với AB vẽ từ C cắt đường tròn (O) ở N, P (D, P cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). DI cắt NB ở S. Gọi J là trung điểm của SD; L, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác SBC, SEF. Chứng minh rằng ba điểm J, L, T thẳng hàng.

Lời giải

Xét ΔADC và ΔABD có $\widehat{DAC}$ (chung), $\widehat{ADC} = \widehat{ABD}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó $\Delta ADC \sim \Delta ABD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AC$$

$\widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

ΔNAB vuông tại N, NC là đường cao $\Rightarrow AN^2 = AB \cdot AC$

Do đó $AD^2 = AN^2 (= AB \cdot AC) \Rightarrow AD = AN$

Gọi R là giao điểm của DN và AS

Xét $\triangle DAS$ ($\widehat{ADS} = 90^\circ$) và $\triangle NAS$ ($\widehat{ANS} = 90^\circ$) có: AS (chung), $AD = AN$

Do đó $\triangle DAS = \triangle NAS$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{DAS} = \widehat{NAS}$

$\triangle AND$ cân tại A ($AD = AN$)

AR là đường phân giác ($\widehat{DAS} = \widehat{NAS}$) nên cũng là đường cao

$\triangle ADS$ vuông tại D , DR là đường cao $\Rightarrow AD^2 = AR \cdot AS$

Nên $AR \cdot AS = AB \cdot AC$ ($= AD^2$)

Xét $\triangle ACR$ và $\triangle ASB$ có: $\widehat{CAR}$ (chung), $\frac{AC}{AS} = \frac{AR}{AB}$ (vì $AR \cdot AS = AB \cdot AC$)

Do đó: $\triangle ACR \sim \triangle ASB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ACR} = \widehat{ASB}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CBSR$ nội tiếp

$\Rightarrow L$ thuộc đường trung trực của RS (1)

Chứng minh tương tự có tứ giác $RSFE$ nội tiếp

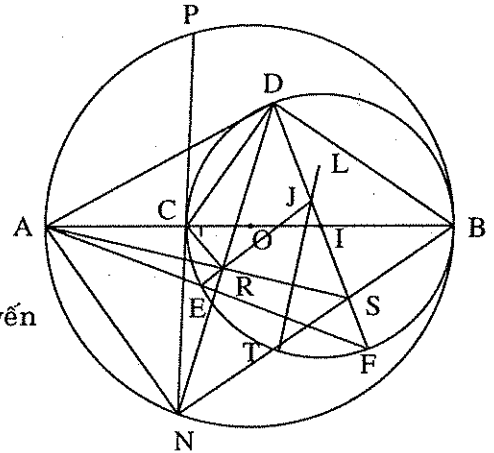
$\Rightarrow T$ thuộc đường trung trực của RS (2)

Mặt khác $\triangle RDS$ vuông tại R , RJ là đường trung tuyến

$\Rightarrow RJ = SJ = DJ$

$\Rightarrow J$ thuộc đường trung trực của RS (3)

Từ (1), (2) và (3) có J, L, T thẳng hàng.



Bài 59. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) ($AB < BC < AC$), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác HDC cắt đường tròn (O) ở M (M khác C) cắt FD ở N (N khác D). Chứng minh rằng B, M, N thẳng hàng.

Lời giải

$\widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $HDCE$ nội tiếp

$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn (I)

Tứ giác $BFHD$ có: $\widehat{HDC} = \widehat{BFH}$ ($= 90^\circ$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFHD$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{BHD}$

Mà $\widehat{BHD} = \widehat{DNE}$ (tứ giác $DHEN$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{DNE} \Rightarrow AB \parallel EN$

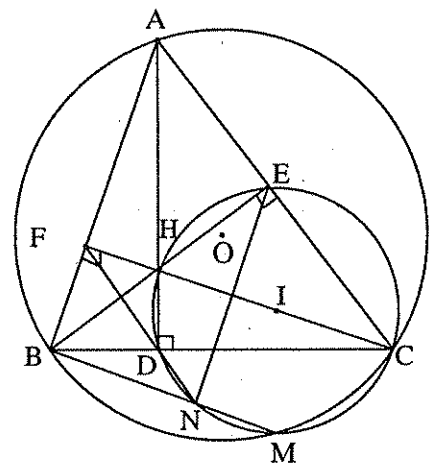
$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{NEC}$

Mà $\widehat{BAC} + \widehat{BMC} = 180^\circ$ (tứ giác $ABMC$ nội tiếp)

Do đó $\widehat{BMC} = \widehat{NMC}$

$\Rightarrow$ Hai tia MB, MN trùng nhau

Vậy ba điểm B, M, N thẳng hàng.



Bài 60. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tia phân giác góc BAC cắt BC ở D , cắt đường tròn (O) ở E . EO cắt đường tròn (O) ở F . I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC . Chứng minh rằng ba điểm C, I, F thẳng hàng.

Cách 1:

Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (AD là tia phân giác của góc BAC)

$$\Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CE} \Rightarrow FE \perp BC$$

$\triangle FBC$ cân tại F $\Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{BAC}$

Mặt khác $ID = IC (= r) \Rightarrow \triangle IDC$ cân tại I

$$\text{Mà } \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{DIC}. \text{ Nên } \widehat{BAC} = \widehat{DIC}$$

Do vậy $\triangle FBC \sim \triangle IDC \Rightarrow \widehat{BCI} = \widehat{DCI}$

Nên hai tia CI, CF trùng nhau

Vậy ba điểm C, I, F thẳng hàng

Cách 2:

Ta có: $\widehat{BCE} = \widehat{BAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

$\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (AE là tia phân giác của góc BAE)

$$\widehat{CAE} = \frac{1}{2} \widehat{DIC} (= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{CD} \text{ của } (I))$$

$$\Rightarrow \widehat{BCE} = \frac{1}{2} \widehat{DIC}$$

$\triangle IDC$ có $ID = IC (= r)$ nên $\triangle IDC$ cân tại I

$$\Rightarrow \widehat{IDC} = \widehat{ICD}. \text{ Do đó } \frac{1}{2} \widehat{DIC} + \widehat{DCI} = 90^\circ$$

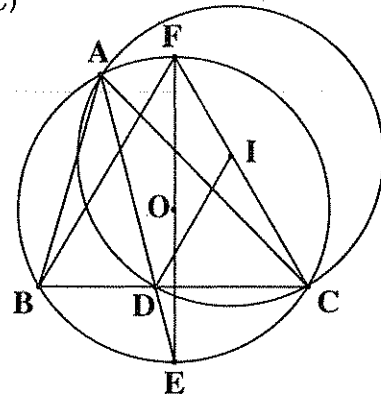
$$\text{Nên } \widehat{BCE} + \widehat{DCI} = 90^\circ \Rightarrow EC \perp CI \quad (1)$$

Mà $\widehat{ECF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow EC \perp CF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có CI, CF trùng nhau

Vậy ba điểm C, I, F thẳng hàng.



Bài 61. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc BAC cắt BC ở D, cắt đường tròn (O) ở E. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC. CI cắt đường tròn (O) ở F. Chứng minh rằng E, O, F thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BFC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC)

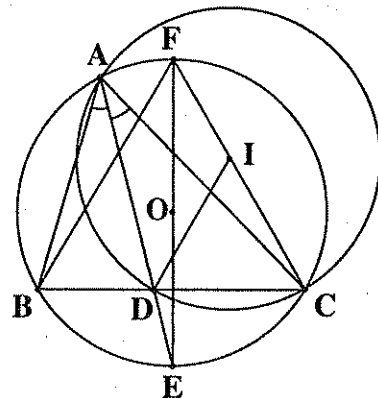
$$\text{Mà } \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$$

$$\text{Nên } \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{BFC}$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{DIC} (= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{CD} \text{ của } (I))$$

$$\text{Do vậy } \widehat{BFC} = \widehat{DIC} \Rightarrow BF \parallel DI$$

$$\triangle IDC \text{ có } ID = IC (= r) \text{ nên cân tại I} \Rightarrow \widehat{IDC} = \widehat{ICD}$$



Nên $\widehat{FBC} = \widehat{IDC} = \widehat{ICD} \Rightarrow \Delta FBC$ cân tại F

Ta có $FB = FC$, $OB = OC$, $EB = EC$ (vì $\widehat{BAE} = \widehat{CAE} \Rightarrow \widehat{EB} = \widehat{EC} \Rightarrow EB = EC$)

Nên F, O, E cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Vậy ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Bài 62. Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$). Đường tròn (I) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt ở F, E. BE cắt CF ở H. AH cắt BC ở D, EF cắt BC ở K. Đường thẳng qua D song song với EF cắt AB ở M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IMK cắt AC ở N. Chứng minh rằng ba điểm M, D, N thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

ΔABC có BE, CF là hai đường cao cắt nhau tại H

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow AD \perp BC$

Tứ giác BFHD có: $\widehat{BFH} = 90^\circ$, $\widehat{BDH} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác BFHD nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{DFH}$

Mà $\widehat{DBH} = \widehat{CFE}$ nên $\widehat{DBH} = \frac{1}{2} \widehat{DFE}$

Mà $\widehat{DBH} = \frac{1}{2} \widehat{CIE}$. Do đó $\widehat{CIE} = \widehat{DFE}$

$\Rightarrow$ Tứ giác IFED nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{IEF}$, $\widehat{IEF} = \widehat{IFE}$ ($IF = IE$)

$\Delta IDF \sim \Delta IFK$ ($\widehat{DIF}$ (chung), $\widehat{IDF} = \widehat{IFK}$)

$\Rightarrow \frac{ID}{IF} = \frac{IF}{IK} \Rightarrow ID \cdot IK = IF^2$

Do đó $ID \cdot IK = IC^2$

Gọi N' là giao điểm của MD và AC.

Ta có: $\widehat{DN'C} = \widehat{AEF}$ ($EF \parallel MN'$)

$\widehat{AEF} = \widehat{MBD}$

Nên $\widehat{DN'C} = \widehat{MBD}$

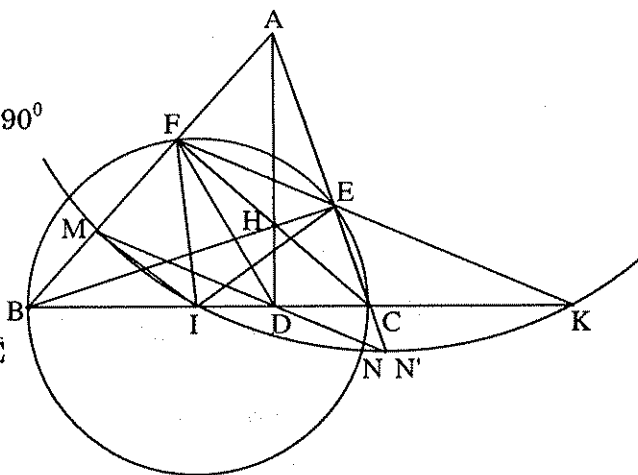
$\Delta DN'C \sim \Delta DBM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DN'}{DB} = \frac{DC}{DM} \Rightarrow DB \cdot DC = DM \cdot DN'$

Ta có: $DM \cdot DN' = DB \cdot DC = (IB + ID)(IC - ID)$
 $= (IC + ID)(IC - ID) = IC^2 - ID^2 = ID \cdot IK - ID^2$
 $= ID(IK - ID) = ID \cdot KD$

Xét ΔDMI và $\Delta DKN'$ có:

$\widehat{MDI} = \widehat{KDN'}$ (đối đỉnh), $\frac{DM}{DK} = \frac{DI}{DN'}$ (vì $DM \cdot DN' = ID \cdot KD$)

Do đó $\Delta DMI \sim \Delta DKN'$ (c.g.c)



$$\Rightarrow \widehat{DMI} = \widehat{DKN'}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác IMKN' nội tiếp

Nên $N' \equiv N$

Vậy M, D, N thẳng hàng.

Bài 63. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc với các cạnh BC, AC, đường tròn (O) lần lượt ở D, E, M. MD cắt (O) ở N. NE cắt (O') ở I, cắt (O) ở K. Vẽ dây AF của đường tròn (O) và AF song song với BK.

Chứng minh rằng C, I, F thẳng hàng.

Lời giải

$$O'M = O'D (= R') \Rightarrow \Delta O'MD \text{ cân tại } O'$$

$$OM = ON (= R)$$

$$\Rightarrow \Delta OMN \text{ cân tại } O$$

$$\widehat{OMN} \text{ (chung)}$$

$$\text{Do đó } \Delta OMN \sim \Delta O'MD$$

$$\Rightarrow \widehat{MO'D} = \widehat{MON}$$

$$\Rightarrow ON \parallel O'D.$$

$$\text{Do vậy } ON \perp BC \Rightarrow \widehat{BN} = \widehat{CN}$$

$$\Delta NBD \sim \Delta NMB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{NB}{NM} = \frac{ND}{NB} \Rightarrow ND.NM = NB^2$$

$$\Delta NDI \sim \Delta NEM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{ND}{NE} = \frac{NI}{NM} \Rightarrow ND.NM = NE.NI$$

$$\text{Mà } NB = NC \text{ (} \widehat{BN} = \widehat{CN} \text{). Nên có } NE.NI = NC^2$$

$$\Delta NCI \sim \Delta NEC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{NCI} = \widehat{NEC}.$$

$$\text{Mà } \widehat{NEC} = \widehat{EAN} + \widehat{ANE}$$

$$\widehat{NCI} = \widehat{NCB} + \widehat{BCI}, \widehat{NCB} = \widehat{EAN}$$

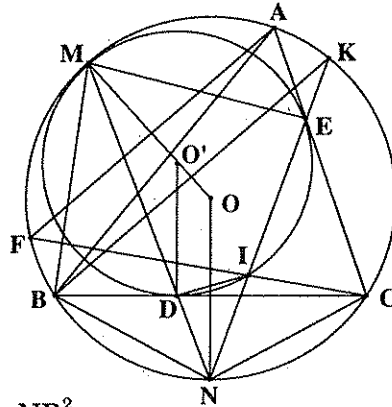
$$\widehat{BCI} = \widehat{ANE}$$

$$\text{Ta có } AF \parallel KB \Rightarrow \widehat{AK} = \widehat{BF} \Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{ACK}$$

$$\text{Vậy } \widehat{BCI} = \widehat{BCF}$$

$$\Rightarrow \text{Hai tia CI, CF trùng nhau}$$

$$\text{Vậy C, I, F thẳng hàng.}$$



Bài 64. Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. EF cắt BC tại M. I là trung điểm cạnh BC. Các đường tròn (O), (O') ngoại tiếp các tam giác DHI, AHE cắt nhau ở N (N khác H). Chứng minh rằng:

a) A, N, I thẳng hàng.

b) M, H, N thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{a) } \widehat{ANH} + \widehat{AEH} = 180^\circ \text{ (tứ giác ANHE nội tiếp)}$$

$$\widehat{AEH} = 90^\circ \text{ (BE } \perp \text{ AC)}$$

Nên $\widehat{ANH} = 90^\circ$. Tương tự $\widehat{HNI} = 90^\circ$

Ta có: $\widehat{ANI} = \widehat{ANH} + \widehat{HNI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow A, N, I$ thẳng hàng.

b) Gọi N_1 là giao điểm của MH và (O) ,

N_2 là giao điểm của MH và (O') (N_2, N_1 khác H)

Dễ thấy các tứ giác $BFEC, BFHD$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{EFC}, \widehat{EBC} = \widehat{DFH}$

$\Rightarrow \widehat{EBC} = \frac{1}{2} \widehat{EFD}$

Mà $\widehat{EBC} = \frac{1}{2} \widehat{EIC}$ nên $\widehat{EFD} = \widehat{EIC}$

$\triangle MEI \sim \triangle MDF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{ME}{MD} = \frac{MI}{MF} \Rightarrow ME.MF = MD.MI$

$\triangle MHD \sim \triangle MIN_1 \Rightarrow \frac{MH}{MI} = \frac{MD}{MN_1} \Rightarrow MD.MI = MH.MN_1$

Tương tự $ME.MF = MH.MN_2$

Ta có $MN_1 = MN_2 \Rightarrow N_1 = N_2 = N$

Vậy M, H, N thẳng hàng.

Bài 65. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ tiếp tuyến tại B cắt các tiếp tuyến tại A, C của đường tròn (O) lần lượt ở M, N . K là trung điểm của MN . Đường thẳng qua K song song với AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBN ở P (P và C nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BN).

Chứng minh rằng ba điểm A, B, P thẳng hàng.

Lời giải

Gọi I là giao điểm của PK và MO

$\widehat{KIM} = \widehat{AMI}$ ($AM \parallel PI$)

$\widehat{AMI} = \widehat{KMI}$ (MA, MB là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{KIM} = \widehat{KMI}$

$\Rightarrow \triangle KMI$ cân tại K

$\Rightarrow IK = MK$

$\triangle IMN$ có IK là đường trung tuyến và $IK = \frac{MN}{2}$

$\Rightarrow \triangle IMN$ vuông tại I

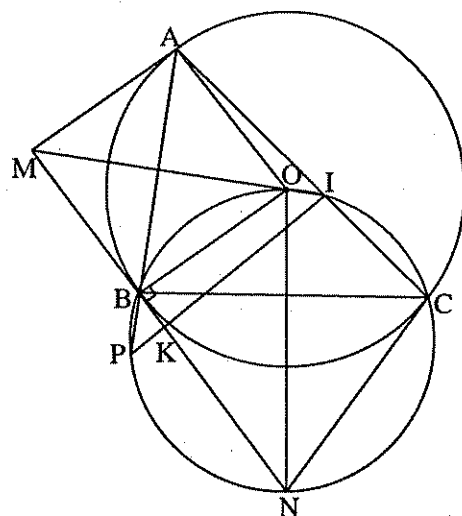
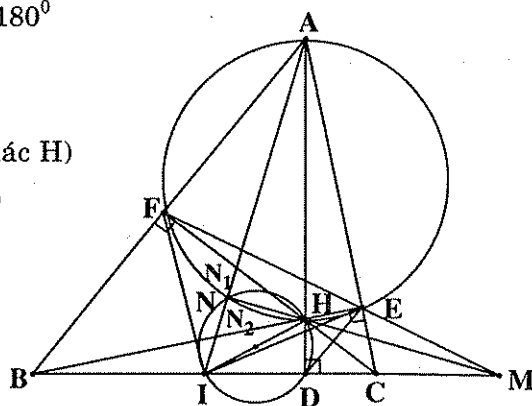
Ta có P, B, O, I, C, N cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{OBP} + \widehat{OIP} = 180^\circ$

Mà $\widehat{OIP} = \widehat{OMA}, \widehat{OMA} = \widehat{OBA}$ (tứ giác $OAMB$ nội tiếp)

Do đó $\widehat{ABP} = \widehat{OBP} + \widehat{OBA} = 180^\circ$

Vậy A, B, P thẳng hàng.



Bài 66. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $\widehat{AMB} \leq 90^\circ$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM, K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM. BI cắt đường tròn (O) ở D. Chứng minh rằng ba điểm C, K, D thẳng hàng.

Lời giải

Hai đường tròn (I), (K) cắt nhau tại A, M

$\Rightarrow$ IK là đường trung trực của đoạn thẳng AM

$\Rightarrow$ IK đi qua điểm chính giữa của các cung AM của (I), (K)

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{AIK}, \widehat{ACM} = \widehat{AKI}$

Do đó $\triangle AIK \sim \triangle ABC$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{BAI}$

$\triangle IAB$ có $IA = IB (= R) \Rightarrow \triangle IAB$ cân tại I

$\triangle KAC$ có $KA = KC (= R') \Rightarrow \triangle KAC$ cân tại K

Do đó $\triangle IAB \sim \triangle KAC \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{ACK}$

Mặt khác $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD của đường tròn (O))

Ta có: $\widehat{ACK} = \widehat{ACD} (= \widehat{ABD})$

$\Rightarrow$ Hai tia CK, CD trùng nhau

Vậy ba điểm C, K, D thẳng hàng.

*** Nhận xét**

Chắc hẳn sẽ có bạn đọc thắc mắc rằng trong đề toán có giả thiết $\widehat{AMB} \leq 90^\circ$ mà trong lời giải không nhắc đến, như vậy có phải chăng là thừa!

Chúng ta nhận ra rằng $\widehat{AMB} \leq 90^\circ \leq \widehat{AMC}$ để trên hình vẽ M, I nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, M và K nằm trên hai nửa bờ AC. Như vậy, đề toán cho trước $\widehat{AMB} \leq 90^\circ$ để “dễ dàng” hơn cho người giải toán!

Bài 67. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Điểm C thuộc đường tròn (O) ($AC > BC$).

Vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) ở E. Vẽ đường tròn (O') qua C và tiếp xúc với Ax tại E. OC cắt đường tròn (O') tại F (F khác C). BE cắt đường tròn (O) ở I. Gọi L là trung điểm của đoạn thẳng OA.

Chứng minh rằng L, I, F thẳng hàng.

Lời giải

Gọi K là giao điểm của OE và đường tròn (O').

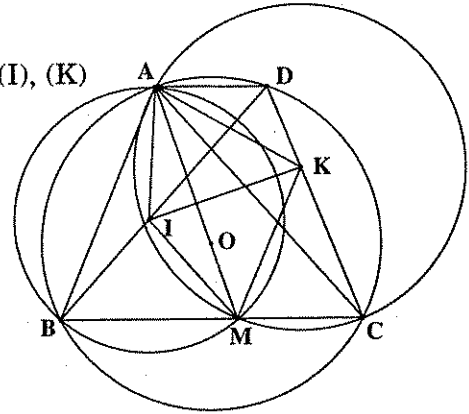
EA, EC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{COE}$

Ta có $EF \perp AE, AB \perp AE$

$\Rightarrow EF \parallel AB \Rightarrow \widehat{OEF} = \widehat{AOE}$

Do đó: $\widehat{OEF} = \widehat{COE} \Rightarrow \triangle FEO$ cân tại F.

$\widehat{EKF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)



ΔFEO cân tại F, FK là đường cao

$\Rightarrow FK$ là đường trung tuyến.

Ta có K, L lần lượt là trung điểm của OE, OA.

$\Rightarrow KL$ là đường trung bình của tam giác OAE.

$\Rightarrow KL \parallel EA$ và $KL = \frac{EA}{2}$

Xét ΔLKO và ΔKFO có:

$$\widehat{KLO} = \widehat{FKO} (= 90^\circ), \widehat{LOK} = \widehat{KOF}$$

Do đó $\Delta LKO \sim \Delta KFO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{LK}{KF} = \frac{OL}{OK}$$

ΔAEO có $KL \parallel AE$

$$\Rightarrow \frac{OK}{OE} = \frac{OL}{OA} \Rightarrow \frac{OL}{OK} = \frac{OA}{OE} \Rightarrow \frac{OL}{OK} = \frac{OB}{OE}$$

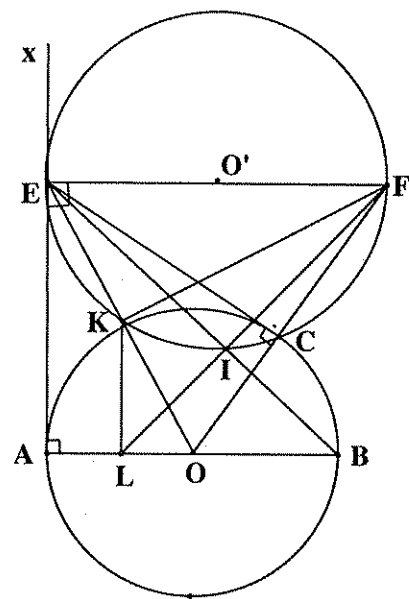
Xét ΔKFL và ΔOEB có: $\widehat{FKL} = \widehat{EOB}$, $\frac{LK}{OB} = \frac{KF}{OE}$ ($\forall \frac{LK}{KF} = \frac{OB}{OE} = \frac{OL}{OK}$)

Do đó $\Delta KFL \sim \Delta OEB$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{KFL} = \widehat{OEB}$

Mà $\widehat{KFI} = \widehat{OEB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KI của (O'))

Do đó $\widehat{KFL} = \widehat{KFI} \Rightarrow$ Hai tia FI, FL trùng nhau

Vậy L, I, F thẳng hàng.



Bài 68. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Vẽ AH là đường cao của tam giác ABC, vẽ đường tròn tâm I đường kính AH cắt AB, AC, cung AC của đường tròn (O) lần lượt tại E, F, Q. Gọi giao điểm của EF và BC là L.

Chứng minh rằng A, Q, L thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1

Gọi Q' là giao điểm của AL và (I) , ($Q' \neq A$)

Tứ giác AEFQ nội tiếp đường tròn (I)

$\widehat{AFE} = \widehat{EBC} (= \widehat{HAF}) \Rightarrow$ Tứ giác BEFC nội tiếp

Do đó $\widehat{FQ'L} = \widehat{AEL} = \widehat{BCF}$

$\Rightarrow$ Tứ giác FQ'LC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CQ'L} = \widehat{CFL} = \widehat{EFA}$

Mà $\widehat{EFA} = \widehat{B}$. Ta có $\widehat{CQ'L} = \widehat{B}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BAQ'C nội tiếp

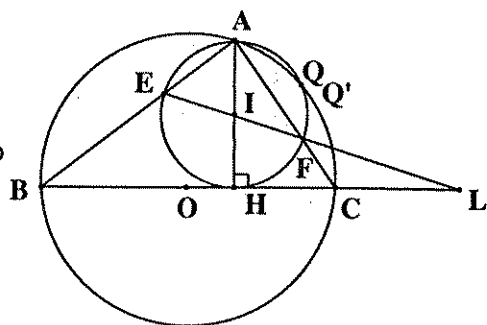
Mà A, B, C $\in (O)$ nên $Q' \in (O)$

Q và Q' là giao điểm thứ hai của (O) và $(I) \Rightarrow Q' = Q$

Vậy ba điểm A, Q, L thẳng hàng.

Cách 2

Tứ giác BEFC nội tiếp (xem ở cách 1)



$$\Rightarrow \widehat{EFC} + \widehat{EBC} = 180^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{AQC} + \widehat{EBC} = 180^\circ. \text{ Nên } \widehat{EFC} = \widehat{AQC}$$

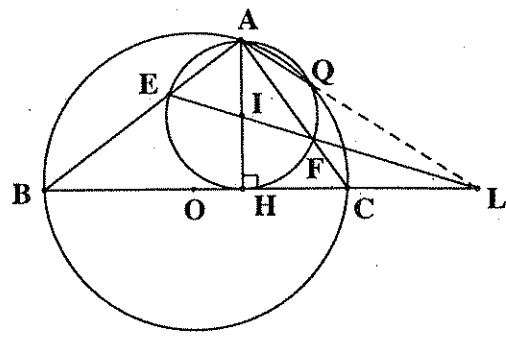
$$\text{Mặt khác có: } \widehat{QFL} = \widehat{QCL} (= \widehat{EAQ})$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác } QFCL \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{CFL} = \widehat{CQL}$$

$$\text{Do đó } \widehat{AQC} + \widehat{CQL} = \widehat{EFC} + \widehat{CFL} = 180^\circ$$

Vậy A, Q, L thẳng hàng.



Bài 69. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Cho P là điểm bất kỳ trên đoạn BC sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác OBP cắt đoạn AB tại N khác B và đường tròn ngoại tiếp tam giác OCP cắt đoạn AC tại M khác C. Vẽ $OK \perp PM$ tại K. Chứng minh rằng N, O, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi K' là giao điểm của NO và PM.

Ta có $\widehat{OBP} = \widehat{ONP}$ (hai góc nội tiếp chắn cung OP)

$\widehat{OBN} = \widehat{OPN}$ (hai góc nội tiếp chắn cung ON)

$\widehat{OPM} = \widehat{OCM}$ (hai góc nội tiếp chắn cung OM)

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}, \widehat{OAC} = \widehat{OCA} \text{ (OA = OC = R)}$$

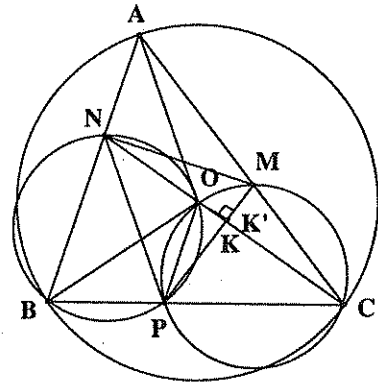
$$\text{Do đó } \widehat{ABC} + \widehat{OCA} = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \widehat{ONP} + \widehat{NPK} &= \widehat{ONP} + \widehat{OPN} + \widehat{OPM} \\ &= \widehat{ABC} + \widehat{OCA} = 90^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{NK'M} = 90^\circ$$

Do đó $NK' \perp MP$ nên $K' \equiv K$

Vậy N, O, K thẳng hàng.



Bài 70. Cho ba đường tròn (O), (K), (I), trong hai đường tròn (O), (I) cắt nhau tại A và B, hai đường tròn (O), (K) cắt nhau tại C và D, hai đường tròn (I), (K) cắt nhau tại E và F. Gọi M là giao điểm của CD và EF. Chứng minh rằng ba điểm A, M, B thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle MCE$ và $\triangle MFD$ có:

$$\widehat{EMC} = \widehat{DMF} \text{ (đối đỉnh),}$$

$$\widehat{MCE} = \widehat{MFD} \text{ (hệ quả góc nội tiếp)}$$

Do đó $\triangle MCE \sim \triangle MFD$ (g.g)

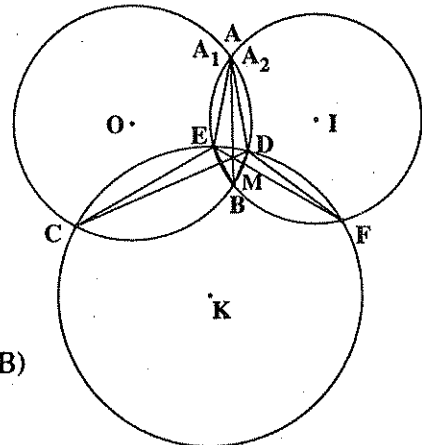
$$\Rightarrow \frac{MC}{MF} = \frac{ME}{MD}$$

$$\Rightarrow MC \cdot MD = ME \cdot MF \quad (1)$$

Gọi A_1, A_2 là giao điểm của MB với (O), (I) (A_1, A_2 khác B)

Chứng minh tương tự trên có:

$$MA_1 \cdot MB = MC \cdot MD \quad (2)$$



$$MA_2.MB = ME.MF \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) có $MA_1 = MA_2 \Rightarrow A_1 \equiv A_2$

Do vậy A_1, A_2, A trùng nhau

Vậy ba điểm A, M, B thẳng hàng.

Bài 71. Cho tam giác ABC cân tại A , $\widehat{A} < 90^\circ$. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB, AC tại B, C . Từ điểm M thuộc cung nhỏ $\widehat{BC}$ của (O) lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, CA, AB tại I, H, K . MB cắt IK tại P ; MC cắt IH tại Q . Gọi (O_1) là đường tròn qua ba điểm K, M, P . (O_2) là đường tròn qua ba điểm M, Q, H . (O_1) cắt (O_2) tại M, N . Gọi D là trung điểm của BC . Chứng minh rằng M, N, D thẳng hàng.

Lời giải

Cội giao điểm của MN và PQ, BC , đường tròn (O) lần lượt là S, D', E (E khác M).

Các tứ giác $MBCE, MKBI, MHCI$ nội tiếp đường tròn.

Suy ra: $\widehat{MIK} = \widehat{MBK} = \widehat{MEB}$; $\widehat{MIH} = \widehat{MCH} = \widehat{MEC}$

$$\Rightarrow \widehat{KIH} = \widehat{MIK} + \widehat{MIH}$$

$$= \widehat{MEB} + \widehat{MEC} = \widehat{BEC}$$

$$\Rightarrow \widehat{KIH} + \widehat{BMC} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MPIQ$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{MQP} = \widehat{MIP} = \widehat{MEB} = \widehat{MCB}$$

$$\Rightarrow PQ \parallel BC \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \widehat{MQP} = \widehat{MCI} = \widehat{MHI}$$

$\Rightarrow PQ$ là tiếp tuyến của đường tròn (O_2) .

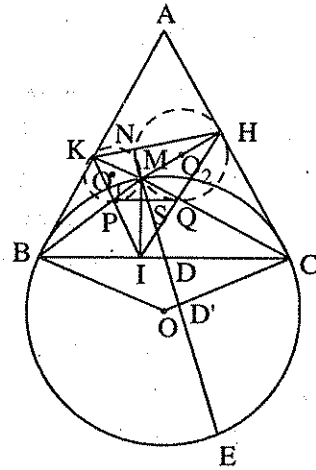
Tương tự PQ cũng là tiếp tuyến của (O_1) .

$$\text{Suy ra: } SP^2 = SM.SN = SQ^2 \Rightarrow SP = SQ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra D' là trung điểm của BC

$\Rightarrow D'$ trùng với D

Vậy D, M, N thẳng hàng.



Bài 72. Cho tam giác ABC , đường tròn bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với tia AB tại N , kẻ đường kính MN . Trên tia đối của tia AB , lấy điểm K sao cho $AK = BN$.

Chứng minh rằng K, C, M thẳng hàng.

Lời giải

Gọi I, J lần lượt là tâm của các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B của tam giác ABC ; đường tròn tâm I tiếp xúc với các tia BC, AC lần lượt tại P, H ; đường tròn tâm J tiếp xúc với các tia BC, BA lần lượt tại Q, K' .

Ta có: I, C, J thẳng hàng

$$\begin{aligned} \text{Và } CA + CB - AB &= CA + CP + PB - AB \\ &= CA + CH + NB - AB \\ &= AH + NB - AB \\ &= AN + NB - AB \\ &= AB + NB + NB - AB \\ &= 2NB \end{aligned}$$

Như vậy $CA + CB - AB = 2NB$; tương tự ta có:

$$CA + CB - AB = 2AK'$$

$$\Rightarrow NB = AK'$$

$$\Rightarrow AK = AK'$$

$$\Rightarrow K' \equiv K$$

Hai tam giác ICP và JCQ đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IC}{JC} = \frac{IP}{JQ} = \frac{IM}{JK}$$

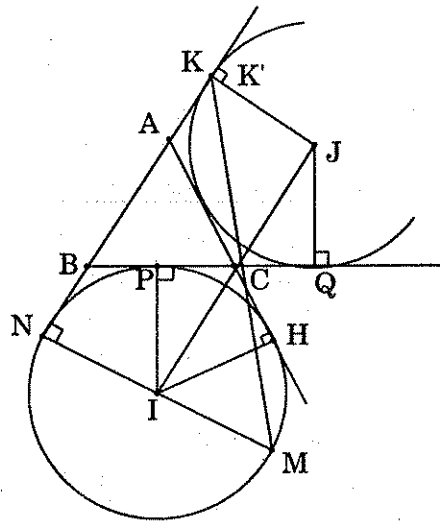
Mặt khác hai góc so le trong $\widehat{CIM} = \widehat{CJK}$
(JK và IM cùng vuông góc với AB)

Nên hai tam giác CIM và CJK đồng dạng

$$\Rightarrow \widehat{ICM} = \widehat{JCK}$$

$$\text{Do đó } \widehat{KCM} = \widehat{ICM} + \widehat{ICK} = \widehat{JCK} + \widehat{ICK} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm K, C, M thẳng hàng.



Bài 73. Cho đường tròn (O) và dây AB . Các đường tròn $(I), (K)$ nằm về cùng một phía của AB , tiếp xúc với AB và tiếp xúc trong với đường tròn (O) lần lượt tại C, D . Hai đường tròn $(I), (K)$ cắt nhau tại M, N . Gọi T là điểm chính giữa của cung AB (Cung AB không chứa các điểm C, D). Chứng minh rằng ba điểm M, N, T thẳng hàng.

Lời giải

Giả sử $(I), (K)$ tiếp xúc với AB lần lượt tại E, F .

$(O), (I)$ tiếp xúc nhau tại $C \Rightarrow O, I, C$ thẳng hàng.

Ta có $IC = IE (= r_1), OC = OT (= R)$

Tam giác ICE cân tại I , tam giác OCT cân tại T .

$IE \perp AB, OT \perp AB$ (T là điểm chính giữa $\widehat{AB}$)

$$\Rightarrow IE \parallel OT \Rightarrow \widehat{CIE} = \widehat{COT}$$

$$\Delta ICE \sim \Delta OCT \Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{OCT}$$

$\Rightarrow$ Hai tia CE, CT trùng nhau

$\Rightarrow C, E, T$ thẳng hàng.

Tương tự T, F, D thẳng hàng.

Xét ΔTAE và ΔTCA có: $\widehat{ATE}$ (chung), $\widehat{TAE} = \widehat{TCA}$

Do đó $\Delta TAE \sim \Delta TCA$ (g.g)

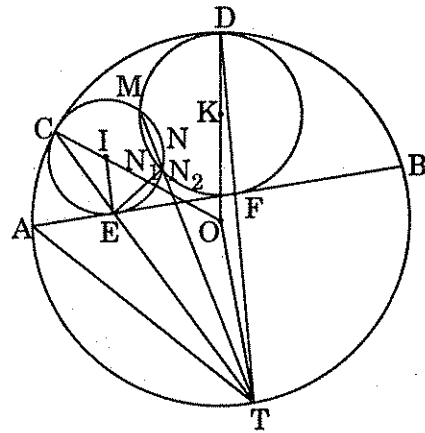
$$\Rightarrow \frac{TA}{TC} = \frac{TE}{TA} \Rightarrow TA^2 = TE \cdot TC$$

$$\widehat{TA} = \widehat{TB} \Rightarrow TA = TB$$

Nên $TE \cdot TC = TF \cdot TD$

Gọi N_1 là giao điểm của TM và (O_1) , N_2 là giao điểm của TM và (K) .

Xét ΔTEN_1 và ΔTMC có: $\widehat{ETN_1}$ (chung), $\widehat{TEN_1} = \widehat{TMC}$ (Tứ giác EN_1MC nội tiếp)



$$\text{Do đó } \Delta TEN_1 \sim \Delta TMC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{TE}{TM} = \frac{TN_1}{TC} \Rightarrow TE.TC = TM.TN_1$$

Chứng minh tương tự cũng có $TF.TD = TM.TN_2$

$$\text{Ta có: } TM.TN_1 = TM.TN_2 \Rightarrow TN_1 = TN_2$$

$$\Rightarrow N_1 = N_2 = N$$

Vậy ba điểm M, N, T thẳng hàng.

Bài 74. Cho đường tròn (O) và dây AB. Các đường tròn (O_1), (O_2) nằm về một phía của AB. Tiếp xúc ngoài nhau ở C và tiếp xúc trong với đường tròn (O) lần lượt ở M, N. Tiếp tuyến chung của (O_1), (O_2) cắt (O) tại D (D thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa (O_1), (O_2)). Gọi E là điểm chính giữa cung AB (E, D ở trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Chứng minh rằng C, D, E thẳng hàng.

Lời giải

Đường tròn (O_1) tiếp xúc với AB tại K.

Chứng minh được M, K, E thẳng hàng.

Đường tròn (O_2) tiếp xúc với AB tại L.

Chứng minh được N, L, E thẳng hàng.

$$EK.EM = EL.EN \text{ (bài toán 73)}$$

EC cắt đường tròn (O_1) ở C_1 , cắt đường tròn (O_2) ở C_2 .

$$\Delta EKC_1 \sim \Delta EC_1M \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{EK}{EC_1} = \frac{EC_1}{EM}$$

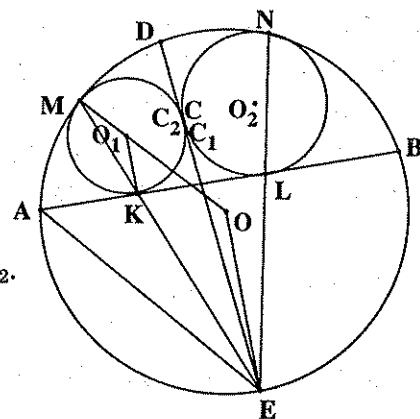
$$\Rightarrow EK.EM = EC_1^2$$

$$\text{Tương tự: } EL.EN = EC_2^2. \text{ Do đó } EC_1 = EC_2 \Rightarrow C_1 = C_2$$

Nên C_1, C_2, C trùng nhau

EC là tiếp tuyến của hai đường tròn (O_1), (O_2)

Vậy C, D, E thẳng hàng.



Bài 75. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), AC cắt BD ở E, AB cắt CD ở F. Các đường cao AA', DD' của tam giác EAD cắt nhau tại H, các đường cao BB', CC' của tam giác EBC tại K. Chứng minh rằng F, H, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M, N là giao điểm của hai đường tròn (O_1), (O_2) có đường kính lần lượt là AB, CD.

$$\Delta FAD \sim \Delta FCB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{FA}{FC} = \frac{FD}{FB} \Rightarrow FA.FB = FC.FD$$

FN cắt (O_1) ở M_1 , cắt (O_2) ở M_2 (M_1, M_2 khác N)

$$\text{Chứng minh tương tự có: } FA.FB = FM_1.FN, FC.FD = FM_2.FN$$

$$\text{Do đó } FM_1 = FM_2 \Rightarrow M_1 = M_2$$

Vậy M_1, M_2, M trùng nhau

Do đó F, M, K thẳng hàng (1)

Gọi N_1, N_2 lần lượt là giao điểm của MK với $(O_1), (O_2)$.

$$\Delta KC'B \sim \Delta K'B'C \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{KC'}{KB'} = \frac{KB}{KC} \Rightarrow KB \cdot KB' = KC \cdot KC'$$

$$\Delta KBN_1 \sim \Delta KMB' \Rightarrow \frac{KB}{KM} = \frac{KN_1}{KB'} \Rightarrow KN_1 \cdot KM = KB \cdot KB'$$

Tương tự: $KN_2 \cdot KM = KB \cdot KB'$

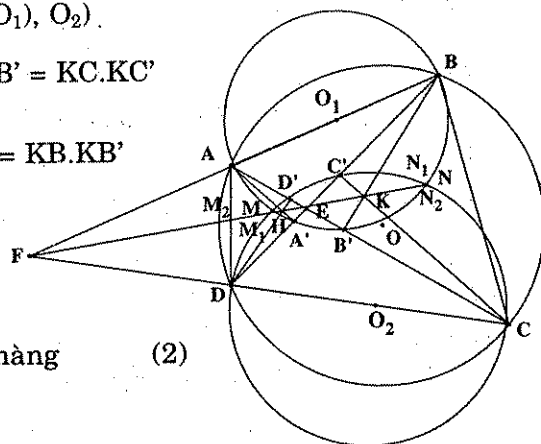
Ta có $KN_1 = KN_2 \Rightarrow N_1, N_2$ trùng nhau.

Vậy N, N_1, N_2 trùng nhau $\Rightarrow K \in MN$

Tương tự $H \in MN$. Do vậy H, K, M, N thẳng hàng

Từ (1) và (2) có K, F, M, N, H thẳng hàng

Vậy F, H, K thẳng hàng.



Bài 76. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Vẽ các cát tuyến AEB, ADC với đường tròn (O) (E, B, C, D thuộc (O) , E nằm giữa A và B, D nằm giữa A và C). Gọi H là giao điểm của BD và CE. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N thuộc (O)) (B và M cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AH). Gọi K là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng ba điểm A, H, S thẳng hàng.

Lời giải

Gọi H' là giao điểm của MN và BD, E' là giao điểm của CH' và đường tròn (O) .

$$\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMON nội tiếp đường tròn (I) đường kính OA.

Gọi S là giao điểm của AH' và (I)

Dễ dàng chứng minh được: $H'E' \cdot H'C = H'M \cdot H'N = H'A \cdot H'S$

$\Rightarrow$ Tứ giác AE'SC nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AE'C} = \widehat{ASC} \quad (1)$$

Gọi F là giao điểm của OA và MN. Dễ dàng có $AH' \cdot AS = AF \cdot AO = AN^2 = AC \cdot AD$

$\Rightarrow$ Tứ giác H'SCD nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{H'SC} + \widehat{H'DC} = 180^\circ \quad (2)$$

$$\text{Mà } \widehat{BE'C} = \widehat{HD'C} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) có $\widehat{AE'C} + \widehat{BE'C} = 180^\circ$

Nên A, E', B thẳng hàng. Nên $E' = E$ và $H = H'$

Vậy M, H, N thẳng hàng.

Gọi K' là giao điểm của AH với CM

Xét đường tròn (I) có $\widehat{ASN} = \widehat{MNA}$

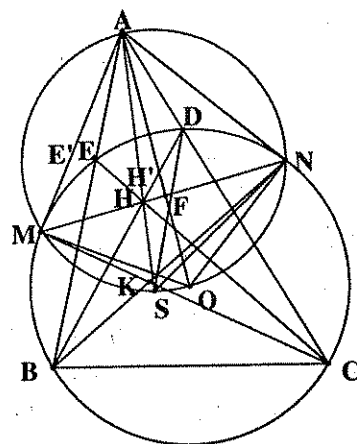
Xét đường tròn (O) có $\widehat{MCN} = \widehat{MNA}$

Do đó $\widehat{ASN} = \widehat{MCN}$

$\Rightarrow$ Tứ giác K'SCN nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{K'SC} + \widehat{K'NC} = 180^\circ \quad (1)$$

Ta cũng chứng minh được: $HB \cdot HD = HM \cdot HN = HA \cdot HS$



$\Rightarrow$ Tứ giác ABSD nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ASD}$$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{ABD} = \widehat{HCD}$. Nên $\widehat{ASD} = \widehat{HCD} \Rightarrow$ Tứ giác SHDC nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{HSC} + \widehat{HDC} = 180^\circ \quad (2)$$

$$\text{Mà } \widehat{HDC} = \widehat{BNC} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) có: $\widehat{K'NC} = \widehat{BNC}$

$\Rightarrow$ Hai tia NK', NB trùng nhau

$\Rightarrow$ B, K, N thẳng hàng

Ta có $K \equiv K'$. Nên A, K, S thẳng hàng.

Vậy ba điểm A, H, S thẳng hàng.

Bài 77. Cho lục giác ABCDEF nội tiếp đường tròn (O). AC cắt BF tại M, CE cắt DF tại N, AD cắt BE tại K. Chứng minh rằng M, K, N thẳng hàng.

Lời giải

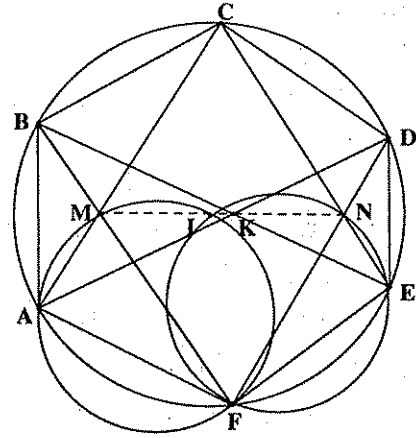
Gọi I (I khác F) là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AFM và đường tròn ngoại tiếp tam giác ENF.

Ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{AIE} &= \widehat{AIF} + \widehat{EIF} \\ &= \widehat{AMF} + \widehat{ENF} \\ &= \frac{\text{sđ } \widehat{AF} + \text{sđ } \widehat{BC}}{2} + \frac{\text{sđ } \widehat{EF} + \text{sđ } \widehat{CD}}{2} \\ &= \frac{\text{sđ } \widehat{AFE} + \text{sđ } \widehat{BCD}}{2} = \widehat{AKE} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AIKE nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AIK} + \widehat{AEK} = 180^\circ$$



Mặt khác: $\widehat{AIM} = \widehat{AFM}$, $\widehat{AFB} = \widehat{AEB}$

$$\Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{AEK}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{AIM} + \widehat{AIK} = \widehat{AEK} + \widehat{AEK} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ M, I, K thẳng hàng.

Chứng minh tương tự cũng có: N, I, K thẳng hàng.

Do đó M, I, K, N thẳng hàng.

Vậy M, K, N thẳng hàng.

Bài 78. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (O) ($M, N \in (O)$), vẽ cát tuyến ADC đến đường tròn (O) ($D, C \in (O)$). B là điểm trên cung CM (Không chứa D). Gọi H là giao điểm của MN và BD. E là giao điểm của CH và đường tròn (O). Chứng minh rằng A, E, B thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMON nội tiếp đường tròn (I) đường kính OA.

Gọi K là giao điểm của AH và đường tròn (I).

Dễ dàng chứng minh được: $HE.HC = HM.HN = HA.HK$

$\Rightarrow$ Tứ giác AEKC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{AKC}$ (1)

Gọi F là giao điểm của OA và MN

Dễ dàng có $AH.AK = AF.AO = AN^2 = AC.AD$

$\Rightarrow$ Tứ giác HKCD nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HKC} + \widehat{HDC} = 180^\circ$ (2)

Mà $\widehat{BEC} = \widehat{HDC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) có $\widehat{AEC} + \widehat{BEC} = 180^\circ$

Vậy A, E, B thẳng hàng.

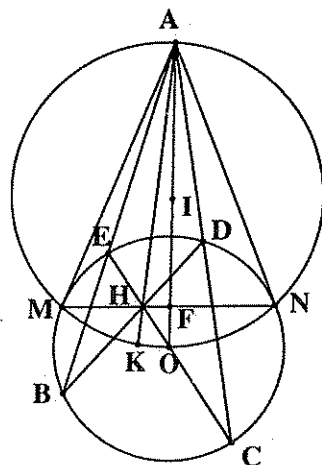
* **Nhận xét:**

Lời giải bài toán giúp giải được bài toán hay sau:

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ các cát tuyến AEB, ADC và các tiếp tuyến AM, AN đến (O) (M, E, D, N $\in$ (O)). Gọi H là giao điểm của BD và CE.

Chứng minh rằng M, H, N thẳng hàng.

Bài toán trên là bài toán tổng quát của bài toán quen thuộc sau:



Bài toán. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Gọi AM, AN là các tiếp tuyến với đường tròn (O) đường kính BC (M, N là các tiếp điểm).

Chứng minh rằng M, H, N thẳng hàng.

Bài 79. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). K là điểm nằm trong tam giác ABC (K không thuộc các cạnh của tam giác). Điểm D trên tia đối của tia AK sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt tia đối của tia CK ở F và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt tia đối của tia BK ở E. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Chứng minh rằng ba điểm O, K, I thẳng hàng.

Lời giải

Các tia AK, BK, CK cắt đường tròn (I) lần lượt tại M, N, P.

Ta có: $\widehat{KAB} = \widehat{DEN}$ (Tứ giác ABED nội tiếp), $\widehat{DEN} = \widehat{DMN}$ (tứ giác DEMN nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{KAB} = \widehat{DMN}$

Xét ΔKAB và ΔKMN có: $\widehat{AKB} = \widehat{MKN}$ (đối đỉnh), $\widehat{KAB} = \widehat{KMN}$

Do đó $\Delta KAB \sim \Delta KMN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{KA}{KM} = \frac{KB}{KN}$

Tương tự có: $\frac{AC}{MP} = \frac{KA}{KM} = \frac{KC}{KP}$

Mặt khác: $\Delta KAB \sim \Delta KED$

$$\Rightarrow \frac{KA}{KE} = \frac{KB}{KD} \Rightarrow KA.KD = KB.KE$$

Tương tự có: $KA.KD = KC.KF$

Nên $KB.KE = KC.KF$

$\Delta KBC \sim \Delta KEF$ (c.g.c)

Nên $\widehat{KBC} = \widehat{KFE}$. Mà $\widehat{KFE} = \widehat{KNP}$

$$\text{Do đó } \Delta KBC \sim \Delta KNP \Rightarrow \frac{BC}{NP} = \frac{KB}{KN} = \frac{KC}{KP}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}$$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP$ (g.g)

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{MPN}$$

Mà $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$, $\widehat{MPN} = \frac{1}{2} \widehat{MIN}$. Nên $\widehat{AOB} = \widehat{MIN}$, $OA = OB (= R)$, $IM = IN (= R')$

$$\text{Do vậy } \Delta OAB \sim \Delta IMN \Rightarrow \frac{OA}{IM} = \frac{AB}{MN}, \widehat{OAB} = \widehat{IMN}$$

$$\text{Nên } \widehat{KAO} = \widehat{KMI}$$

$$\text{Xét } \Delta KAO \text{ và } \Delta KMI \text{ có: } \frac{OA}{IM} = \frac{KA}{KM} \left(= \frac{AB}{MN} \right); \widehat{KAO} = \widehat{KMI}$$

Do đó: $\Delta KAO \sim \Delta KMI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AKO} = \widehat{MKI}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \widehat{OKI} &= \widehat{OKM} + \widehat{MKI} \\ &= \widehat{OKM} + \widehat{AKO} = 180^\circ \end{aligned}$$

Vậy O, K, I thẳng hàng.

Bài 80. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O_1) , ngoại tiếp đường tròn (O_2) . Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm O, O_1 , O_2 thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1

Gọi O' là giao điểm của BD và EG

Vẽ DL // AB (L $\in$ EG)

$$DL \parallel AB \Rightarrow \frac{BE}{DL} = \frac{O'B}{O'D}$$

$$\widehat{DLG} = \widehat{AEG} = \widehat{DGL}$$

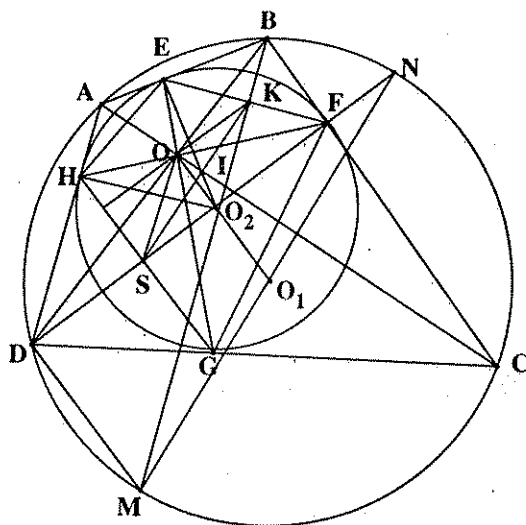
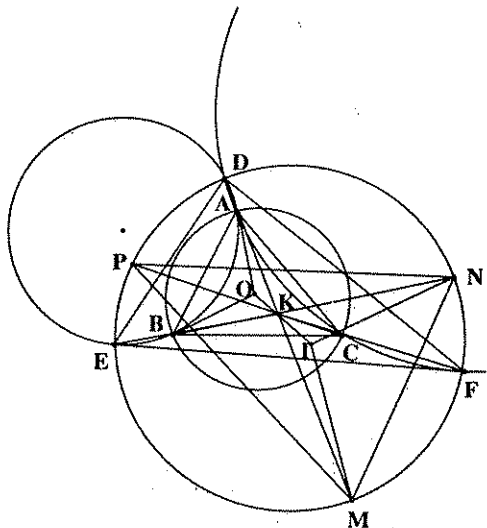
$$\Rightarrow DL = DG$$

$$\text{Nên } \frac{O'B}{O'D} = \frac{BE}{BG}$$

Gọi O'' là giao điểm của BD và HF

$$\frac{O''B}{O''D} = \frac{BF}{DH}$$

$$O' \equiv O''$$



Ta có: EG, HF, BD đồng quy tại O

AC, BD, EG, HF đồng quy

$$\widehat{BEF} + \widehat{BFE} + \widehat{DHG} + \widehat{DGH} + \widehat{EBF} + \widehat{HDG} = 360^\circ$$

$$\text{sd}\widehat{EF} + \text{sd}\widehat{HG} + 180^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{EO'F} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow EG \perp HF$$

Tứ giác OKO₂S là hình bình hành

$$\Rightarrow O, I, O_2 \text{ thẳng hàng} \quad (1)$$

I là trung điểm SK

BO₂ cắt (O₁) tại M, DO₂ cắt (O₁) tại N.

$$O_2S.O_2D = O_2K.O_2B \quad (O_2H^2 = O_2E^2)$$

$\Rightarrow$ Tứ giác DBKS nội tiếp

$$\widehat{SKO_2} = \widehat{BMN} (= \widehat{BDN})$$

$$\Rightarrow SK \parallel MN$$

$$\widehat{MDC} = \widehat{DGH} (= \widehat{MBC}) \Rightarrow DM \parallel SG$$

$$\Rightarrow \widehat{MDN} = 90^\circ$$

Từ (1) và (2) có O, I, O₂, O₁ thẳng hàng.

Vậy ba điểm O, O₁, O₂ thẳng hàng.

Cách 2 Xét hai trường hợp:

• Trường hợp AD không song song với BC

Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với O₁O, cắt BC, AD lần lượt tại H, V.

Ta có: OH = OV (bài toán con bướm)

Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với O₂O, cắt BC, AD lần lượt tại H', V'.

Chứng minh được M, N, O thẳng hàng (M, N là tiếp điểm của đường tròn (O₂) tiếp xúc với BC, AD) $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{N_1}$

Tứ giác O₂H'MO nội tiếp $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{H'_1}$

Tứ giác O₂NV'O nội tiếp $\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{V'_1}$

Nên $\widehat{H'_1} + \widehat{V'_1} \Rightarrow IH' = IV'$

I là trung điểm chung của HV và H'V'

$$\Rightarrow \begin{cases} HH' \parallel VV' \text{ (vô lí, do AD không song song với BC)} \\ HV = H'V' \end{cases}$$

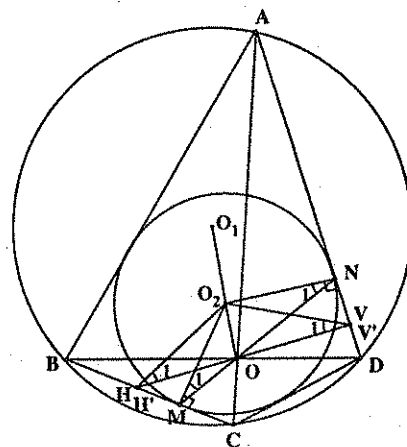
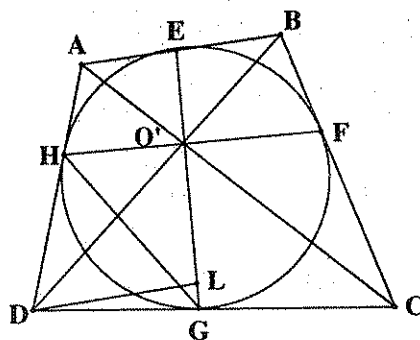
$$\Rightarrow HV = H'V'$$

Vậy O₁, O₂, I thẳng hàng.

• Trường hợp AD // BC

ABCD là hình thang cân

Gọi L, K lần lượt là trung điểm của AD, BC



Chứng minh được:

O_1, L, K thẳng hàng; O_2, L, K thẳng hàng, O, K, L thẳng hàng.

Nên O_1, L, K, O_2, O thẳng hàng.

Vậy ba điểm O, O_1, O_2 thẳng hàng.

Bài 81. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(I; r)$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > r$). Hai cát tuyến của (O, I) là BAC và DAE ($B, D \in (O), C, E \in (I)$, B khác D , BAC và DAE không đi qua O). Vẽ các đường kính BM, DN của đường tròn (O) . Gọi S là giao điểm của MC và NE . Chứng minh rằng ba điểm S, I, O thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: (O) và (I) tiếp xúc nhau tại A

$\Rightarrow O, I, A$ thẳng hàng và $OI = R + r$

Do đó: $\widehat{OAB} = \widehat{CAI}$ (đối đỉnh).

Mà $OA = OB (= R)$

$\Rightarrow \triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$

Tương tự: $\triangle IAC$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{CAI} = \widehat{ACI}$

Do đó: $\widehat{ACI} = \widehat{OBA}$.

Mà: $\widehat{ACI}$ và $\widehat{OBA}$ so le trong $\Rightarrow OB \parallel IC$

Gọi S_1 là giao điểm của MC và OI , S_2 là giao điểm của NE và OI .

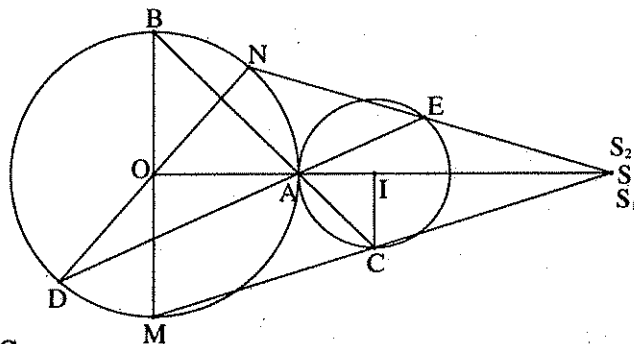
$$\triangle S_1OM \text{ có } IC \parallel OM \Rightarrow \frac{S_1I}{S_1O} = \frac{IC}{OM} \Rightarrow \frac{S_1I}{S_1O - S_1I} = \frac{IC}{OM - IC} \Rightarrow \frac{S_1I}{OI} = \frac{IC}{OM - IC}$$

$$\text{Nên: } \Rightarrow \frac{S_1I}{R + r} = \frac{r}{R - r} \Rightarrow S_1I = \frac{r(R + r)}{R - r}$$

$$\text{Lập luận tương tự cũng có: } S_2I = \frac{r(R + r)}{R - r}$$

Do đó: $S_1I = S_2I \Rightarrow S_1 = S_2$. Mà: MC cắt NE tại S . Nên S, S_1, S_2 trùng nhau.

Vậy: ba điểm S, I, O thẳng hàng.



Bài 82. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , nội tiếp đường tròn. Đường trung tuyến BM của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại D (D khác B). Tia AO cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Gọi F là trung điểm của đoạn thẳng OC . Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải

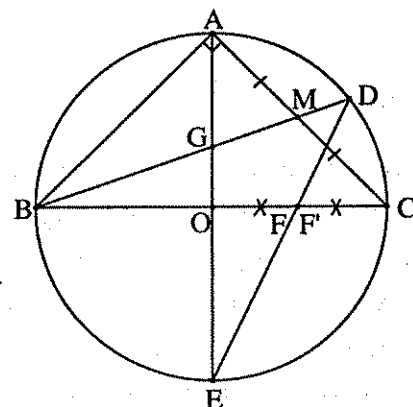
Gọi G là giao điểm của AO và BM .

Ta có G là trọng tâm của tam giác ABC

$$\Rightarrow OG = \frac{1}{3}OA \text{ nên } \frac{OG}{OB} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có: } \triangle OGB \sim \triangle DCB \Rightarrow \frac{OG}{DC} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \frac{DC}{BD} = \frac{OG}{OB} = \frac{1}{3}$$

Vẽ DF' là đường phân giác của tam giác DBC



Ta có: $\frac{F'C}{F'B} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{3}$. Mà $\frac{FC}{FB} = \frac{1}{3}$ nên $F' \equiv F$.

Do đó: DF là tia phân giác của góc BDC (1)

Mặt khác: $\widehat{BDE} = \widehat{BAE} = \widehat{CAE} = \widehat{CDE}$

$\Rightarrow$ DE là tia phân giác của góc BDE (2)

Từ (1) và (2), ta có: Hai tia DE, DF trùng nhau. Vậy: ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Bài 83. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD và BE cắt nhau tại H. M là điểm trên cung nhỏ BC. AH cắt BM tại N, BH cắt AM tại K. Đường thẳng qua K song song với AH cắt DE tại S. Gọi I là trung điểm của DS. Chứng minh rằng ba điểm N, K, I thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle HDE$ có: $KS \parallel HD$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{KS}{HD} = \frac{EK}{EH} \Rightarrow \frac{EH}{HD} = \frac{EK}{KS} \quad (1)$$

$$\triangle EAK \sim \triangle DBN \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{BD} = \frac{EK}{DN} \quad (2)$$

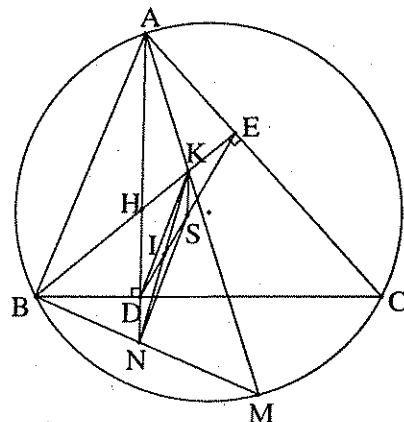
$$\triangle HAE \sim \triangle HBD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{BD} = \frac{EH}{HD} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) có $KS = DN$.

Tứ giác DKSN có $KS \parallel DN$ và $KS = DN$

$\Rightarrow$ Tứ giác DKSN là hình bình hành. Mà I là trung điểm của DS

Do đó: I là trung điểm của NK. Vậy: ba điểm N, K, I thẳng hàng.



Bài 84. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). M là điểm nằm giữa O và C. Vẽ MN vuông góc với AB tại N. Tia phân giác của góc ABC cắt MN tại I, cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), KM cắt đường tròn (O) tại S (S khác K). Chứng minh rằng ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{BSC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có: $\widehat{ABK} = \widehat{KBC} \Rightarrow \widehat{AK} = \widehat{CK} \Rightarrow \widehat{NBI} = \widehat{KSC}$

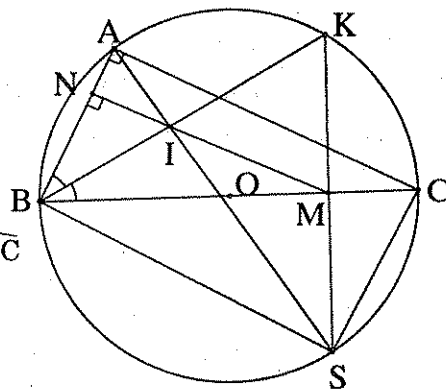
Mà: $\widehat{NBI} + \widehat{BIN} = 90^\circ$ và $\widehat{KSC} + \widehat{BSM} = 90^\circ$

Nên $\widehat{BIN} = \widehat{BSM}$. Tứ giác BIMS nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ISM} = \widehat{IBC}$

Mà $\widehat{IBC} = \widehat{ASK}$ ($\widehat{AK} = \widehat{CK}$).

Do đó: $\widehat{ISM} = \widehat{ASK}$. Nên hai tia SI, SA trùng nhau.

Vậy: Ba điểm A, I, S thẳng hàng.



Bài 85. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). M là điểm nằm trên cạnh BC ($MC < MB$). Tia phân giác của góc ABC cắt đường thẳng qua M và song song với AC tại I, cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), KM cắt đường tròn (O) tại S (S khác K). Chứng minh rằng ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Lời giải

MI cắt AB tại N. Ta có: $\widehat{ABK} = \widehat{KBC} \Rightarrow \widehat{AK} = \widehat{CK} \Rightarrow \widehat{NBI} = \widehat{KSC}$

Mà: $\widehat{BIM} = \widehat{NBI} + \widehat{BNI}$ và $\widehat{BNI} = \widehat{BAC}$ (đồng vị và $MN \parallel AC$)

$\widehat{BAC} + \widehat{BSC} = 180^\circ$ (tứ giác ABSC nội tiếp)

Do đó: $\widehat{BIM} + \widehat{BSM} = \widehat{BAC} + \widehat{NBI} + \widehat{BSM}$

$= \widehat{BAC} + \widehat{KSC} + \widehat{BSM} = \widehat{BAC} + \widehat{BSC} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác BIMS nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ISM} = \widehat{IBC}$.

Mà $\widehat{IBC} = \widehat{ASK}$ ($\widehat{AK} = \widehat{CK}$). Do đó: $\widehat{ISM} = \widehat{ASK}$,

nên hai tia SI, SA trùng nhau.

Vậy ba điểm A, I, S thẳng hàng.

* **Nhận xét:** Có thể xem bài 85 là bài toán tổng quát của bài 84.

Bài 86. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). M là điểm nằm giữa O và C. Vẽ MN vuông góc với AB tại N. Tia phân giác của góc ABC cắt MN tại I, cắt đường tròn (O) tại K (K khác B). AI cắt đường tròn (O) tại S (S khác A). Chứng minh rằng ba điểm K, M, S thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $MN \perp AB$ (gt); $AC \perp AB$ (gt) $\Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow \widehat{BNI} = \widehat{BCA}$.

Mà $\widehat{BSI} = \widehat{BCA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Do đó: $\widehat{BSI} = \widehat{BNI} \Rightarrow$ Tứ giác BIMS nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IBM} = \widehat{ISM}$

Mà: $\widehat{ABK} = \widehat{KBC}$ (gt), $\widehat{ABK} = \widehat{ASK}$

(hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK) Nên: $\widehat{KBC} = \widehat{ASK}$.

Ta có: $\widehat{ASK} = \widehat{ISM}$ ($= \widehat{IBM}$) $\Rightarrow$ Hai tia SK, SM trùng nhau.

Vậy: ba điểm S, M, K thẳng hàng.

Bài 87. Cho tam giác ABC ($AB < BC$) nội tiếp đường tròn (O). M là điểm nằm trên cạnh BC ($MC < MB$). Vẽ đường thẳng qua M song song với AC cắt AB tại N. Tia phân giác của góc ABC cắt MN tại I, cắt đường tròn (O) tại K (K khác B). AI cắt đường tròn (O) tại S (S khác A). Chứng minh rằng ba điểm K, M, S thẳng hàng.

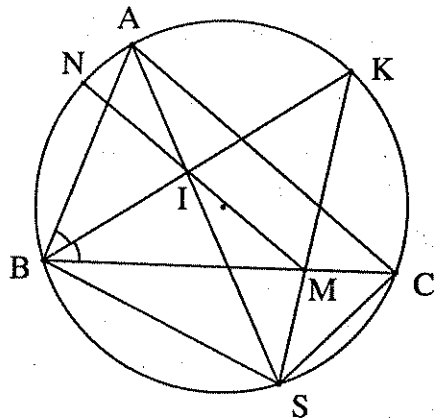
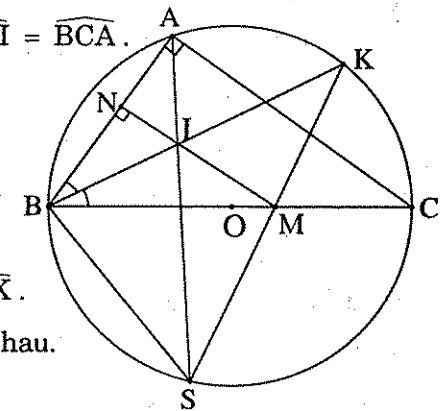
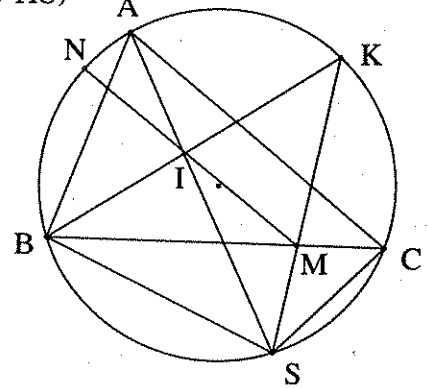
Lời giải

Ta có: $\widehat{BNI} = \widehat{BCA}$ (hai góc đồng vị và $MN \parallel AC$)

Mà: $\widehat{BSI} = \widehat{BCA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Do đó: $\widehat{BSI} = \widehat{BNI} \Rightarrow$ Tứ giác BIMS nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IBM} = \widehat{ISM}$.



Mà: $\widehat{ABK} = \widehat{KBC}$ (gt),

$\widehat{ABK} = \widehat{ASK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK)

Nên: $\widehat{KBC} = \widehat{ASK}$.

Ta có: $\widehat{ASK} = \widehat{ISM} (= \widehat{IBM})$

$\Rightarrow$ Hai tia SK, SM trùng nhau

Vậy: ba điểm S, M, K thẳng hàng.

* **Nhận xét:** Có thể xem bài 87 là bài toán tổng quát của bài 86.

Bài 88. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đường tròn (O) lấy điểm C (C khác A, B). D là điểm thuộc đường kính AB sao cho $BD = AC$. Vẽ DH vuông góc với AC tại H. Tia phân giác của góc BAC cắt đường tròn (O) tại E và cắt DH tại F (E khác A). Gọi M là trung điểm của AD. Tia CF cắt đường tròn (O) tại N. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm E, D, N thẳng hàng.

b) Ba điểm C, M, N thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$DH \perp AC$ (gt), $BC \perp AC \Rightarrow DH \parallel BC \Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{ABC}$.

Mà: $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Do đó: $\widehat{ADF} = \widehat{ANF} \Rightarrow$ Tứ giác AFDN nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FND} = \widehat{FAD}$

Mà: $\widehat{CAE} = \widehat{FAD}$ (AE là tia phân giác của góc BAC)

Và $\widehat{CAE} = \widehat{CNE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CE)

Do đó: $\widehat{FND} = \widehat{CNE} \Rightarrow$ Hai tia ND, NE trùng nhau

Vậy: Ba điểm E, D, N thẳng hàng.

b) Gọi K là giao điểm của CN và AB.

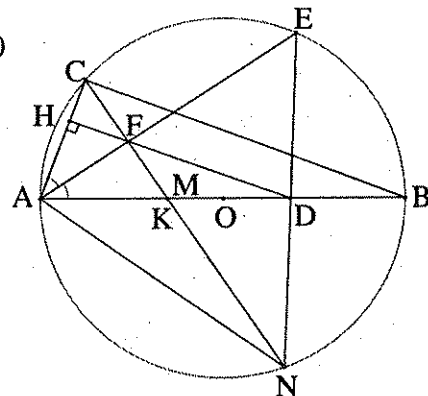
$\triangle ACK$ có AF là đường phân giác $\Rightarrow \frac{KF}{CF} = \frac{AK}{AC}$ (1)

$\triangle KBC$ có $DF \parallel BC \Rightarrow \frac{KF}{CF} = \frac{KD}{BD}$ (định lý Ta-lét) (2)

Mà: $AC = BD$ (gt) (3)

Từ (1), (2) và (3) có $AK = KD \Rightarrow K$ là trung điểm của AD nên $K \equiv M$

Vậy: Ba điểm C, M, N thẳng hàng.



Bài 89. Cho tam giác ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O). Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$. Đường thẳng qua D song song với BC cắt AC tại H. Tia phân giác góc BAC cắt đường tròn (O) tại E và cắt DH tại F (E khác A). Gọi M là trung điểm của AD. Tia CF cắt đường tròn (O) tại N. Chứng minh rằng:

a) E, D, N thẳng hàng.

b) C, M, N thẳng hàng.

$$\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{CE} \Rightarrow \widehat{NFD} = \widehat{NBD}$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác BNDF nội tiếp} \Rightarrow \widehat{BFN} = \widehat{BDN}$$

$$\text{Mà } \widehat{BFN} = \widehat{BCA} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{BDN} = \widehat{BCA} \Rightarrow DN \parallel AC$$

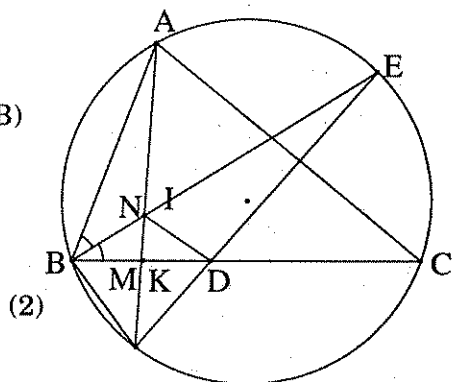
$$\Delta KAC \text{ có } DN \parallel AC \Rightarrow \frac{KD}{CD} = \frac{KN}{AN} \quad (1)$$

$$\Delta BAK \text{ có } BN \text{ là đường phân giác} \Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{KN}{AN} \quad (2)$$

$$\text{Mà: } CD = AB \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) có } KD = BK \text{ nên } K \equiv M$$

Vậy: ba điểm A, K, F thẳng hàng.



Bài 92. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các tia AB và DC cắt nhau tại M, các tia AC và BD cắt nhau tại T. Vẽ ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn (O). Chứng minh rằng E, F, T thẳng hàng.

Lời giải

Gọi H là giao điểm của OM và EF.

$$\text{Dễ chứng minh được: } MB.MA = MH.MO (= ME^2)$$

$$\text{Do đó } \Delta MBH \sim \Delta MOA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{MHB} = \widehat{MAO}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABHO nội tiếp.

Tương tự, tứ giác CDOH nội tiếp.

$$\widehat{BHC} = \widehat{BHM} + \widehat{MHC} = \widehat{BAO} + \widehat{ODC}. \text{ Nên } \widehat{BHC} = \widehat{BTC}$$

$\Rightarrow$ BHTC nội tiếp. Tương tự: tứ giác AHTD nội tiếp.

$$\text{Ta có: } \widehat{MHC} = \widehat{ODC} = \widehat{OCD} = \widehat{OHD},$$

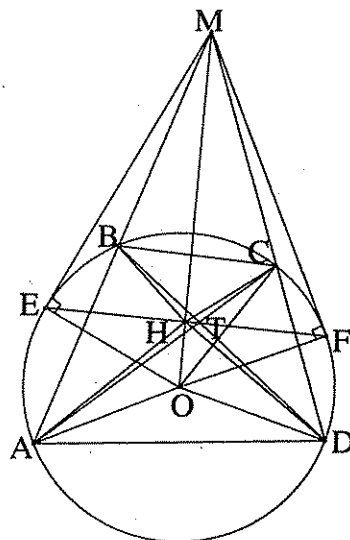
$$\widehat{THC} = \widehat{TBC} = \widehat{TAD} = \widehat{THD}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{MHT} = \frac{1}{2}(\widehat{MHC} + \widehat{THC} + \widehat{THD} + \widehat{OHD}) = 90^\circ$$

Ta có: $TH \perp OM$ tại H. Mà $EF \perp OM$ tại H

Nên các đường thẳng TH, EF trùng nhau

Vậy: Ba điểm E, F, T thẳng hàng.



Bài 93. Cho điểm A ở ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE (Tia AD nằm giữa hai tia AO và AB). Tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) cắt AB ở M. Đường thẳng qua B song song với AC cắt CE ở K. Gọi L là điểm đối xứng của A qua C. Chứng minh rằng ba điểm M, K, L thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là giao điểm của MC và BK. Qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt CE ở F.

$$\text{Do đó: } MF \parallel BK. \text{ Ta có: } \widehat{MFE} + \widehat{ACE} = 180^\circ.$$

$$\text{Mà } \widehat{MEF} + \widehat{MEC} = 180^\circ \text{ và } \widehat{ACE} = \widehat{MEC} \left(= \frac{1}{2} \text{ số } \widehat{CBE} \right)$$

Suy ra: $\widehat{MEF} = \widehat{MFE} \Rightarrow \Delta MEF$ cân tại M $\Rightarrow ME = MF$

MB, ME là các tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow MB = ME$.

Tương tự: $MB = MC$

$$\Delta MAC \text{ có } BN \parallel AC \Rightarrow \frac{BN}{AC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow \frac{BN}{MB} = \frac{AB}{AM}$$

$$\Delta CMF \text{ có } NK \parallel MF \Rightarrow \frac{NK}{MF} = \frac{CN}{CM}$$

$$\Delta MAC \text{ có } BN \parallel AC \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{CN}{CM}, \frac{MN}{MC} = \frac{BN}{AC}$$

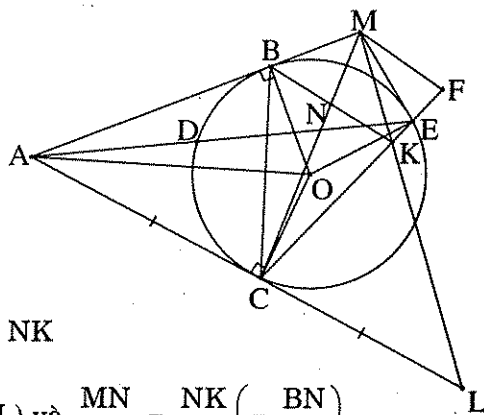
$$\text{Do đó: } \frac{BN}{MB} = \frac{NK}{MF} \text{ và } MB = MF (= ME) \Rightarrow BN = NK$$

$$\text{Xét } \Delta MKN \text{ và } \Delta MLC \text{ có: } \widehat{MNK} = \widehat{MCL} \text{ (NK } \parallel \text{ CL) và } \frac{MN}{MC} = \frac{NK}{CL} \left(= \frac{BN}{AC} \right)$$

$$\text{Do đó: } \Delta MKN \sim \Delta MLC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{NMK} = \widehat{CML}$$

$\Rightarrow$ Hai tia MK, ML trùng nhau

Vậy: M, K, L thẳng hàng.



Bài 94. Cho tam giác nhọn ABC, có đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường tròn (O) đường kính CH. M trên cung EC của đường tròn (O) ($ME < MC$). EF cắt MC tại N. HN cắt đường tròn (O) tại I. DM cắt AC tại K. IK cắt đường tròn (O) tại S. NK cắt BC tại T. Chứng minh rằng H, T, S thẳng hàng.

Lời giải

Tứ giác BCEF nội tiếp.

$$\widehat{DMC} = \widehat{DHC}, \widehat{DHC} = \widehat{FBC}, \widehat{FBC} = \widehat{NEK} \Rightarrow \widehat{DMC} = \widehat{NEK}$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác ENMK nội tiếp} \Rightarrow \widehat{ENK} = \widehat{EMK} = \widehat{KCT}$$

$$\Delta KEN \sim \Delta KTC \Rightarrow \frac{KE}{KT} = \frac{KN}{KC} \Rightarrow KN \cdot KT = KE \cdot KC$$

$$KE \cdot KC = KI \cdot KS \text{ nên } KN \cdot KT = KI \cdot KS$$

$$\Delta KNI \sim \Delta KST \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{KST}$$

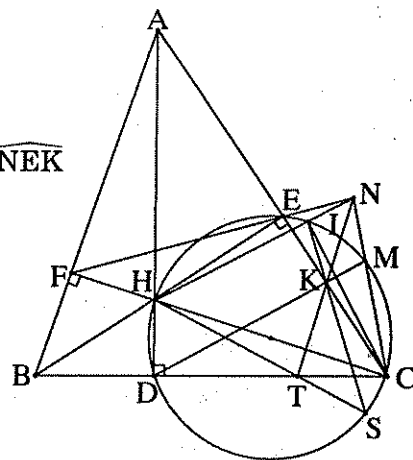
$$\text{Mặt khác: } \widehat{ENK} = \widehat{KCT}, \widehat{KCT} = \widehat{AFE} \Rightarrow \widehat{ENK} = \widehat{AFE}$$

$$\Rightarrow AB \parallel NK. \text{ Mà } CF \perp AB \text{ nên } NK \perp CF \Rightarrow \widehat{KNI} + \widehat{NHC} = 90^\circ. \text{ Mà } \widehat{ICH} + \widehat{NHC} = 90^\circ$$

$$\text{Do đó: } \widehat{ICH} = \widehat{KNI}.$$

$$\text{Ta có: } \widehat{KST} = \widehat{KNI} = \widehat{ICH} = \widehat{KSH} \text{ nên hai tia ST, SH trùng nhau.}$$

Vậy: Ba điểm H, T, S thẳng hàng.



Bài 95. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn (K) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại T và tiếp xúc với BC tại D. Vẽ đường kính AM của đường tròn (O). Chứng minh rằng ba điểm T, I, M thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn (K) và (O) tại T cắt BC tại N.

(hệ quả của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

$$\text{Do.đ6: } \Delta\text{NTB} \sim \Delta\text{NCT (g.g)} \Rightarrow \frac{\text{BT}}{\text{CT}} = \frac{\text{NB}}{\text{NT}} = \frac{\text{NT}}{\text{NC}}$$

$$\Rightarrow \frac{BT}{CT} = \frac{NT - NB}{NC - NT}$$

Mà theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau,
ta có: $NT = ND$, $CD = CE$, $BF = BD$

$$\text{Do đó: } \frac{BT}{CT} = \frac{ND - NB}{NC - ND} = \frac{BD}{CD} = \frac{BF}{CE}$$

Xét $\triangle BT'F$ và $\triangle CTE$ có: $\widehat{TB'F} = \widehat{TCE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AT của (O))

$$\frac{BT}{CT} = \frac{BE}{CE} \text{ (chứng minh trên). Do đó: } \Delta BTF \sim \Delta CTE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BFT} = \widehat{CET}.$$

Mà: $\widehat{BFT} + \widehat{AFT} = \widehat{CET} + \widehat{AET} = 180^\circ$ nên $\widehat{AFT} = \widehat{AET}$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác ATFE nội tiếp} \quad (1)$$

Mặt khác: $\widehat{AEI} + \widehat{AFI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác AEIF nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) có A, T, F, I, E cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{ATI} = \widehat{AFI} = 90^\circ$

Mặt khác: $\widehat{ATM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Ta có: $\widehat{ATI} = \widehat{ATM} (= 90^\circ) \Rightarrow$ Hai tia TI, TM trùng nhau.

Vậy: ba điểm T, I, M thẳng hàng.

Bài 96. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các tia AB, DC cắt nhau tại M; Các tia AD, BC cắt nhau tại N. Vẽ ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (E, F là các tiếp điểm). Chứng minh rằng N, E, F thẳng hàng.

Lời giải

Gọi T là giao điểm của AC và BD . NT cắt đường tròn (O) tại K, L (L nằm giữa T và N).

Đường tròn (TBC) cắt NK tại S.

$NA \cdot ND = NC \cdot NB = NT \cdot NS$. Do đó: Tứ giác STDA nội tiếp. $\square$

Ta có: $\widehat{BSA} = \widehat{BSK} + \widehat{KSA} = \widehat{BCA} + \widehat{BDA} = \widehat{BOA}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BSOA nội tiếp.

Tương tự: tứ giác SCDO nội tiếp

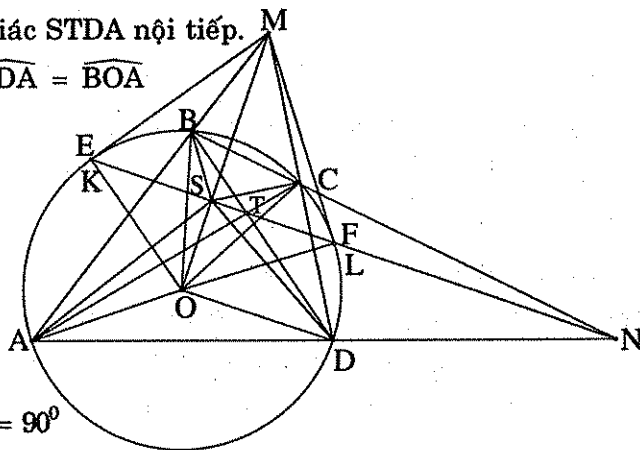
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$

Ta có M, S, O thẳng hàng.

$$\widehat{MSC} = \widehat{ODC} = \widehat{OCD} = \widehat{OSD},$$

$$\widehat{\text{CST}} = \widehat{\text{CBD}} = \widehat{\text{CAD}} = \widehat{\text{TSD}}.$$

$$\text{Nên: } \widehat{\text{MSL}} = \frac{1}{2}(\widehat{\text{MSC}} + \widehat{\text{CST}} + \widehat{\text{TSD}} + \widehat{\text{OSD}}) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow OM \perp KL$$


$$\widehat{OSC} = 180^\circ - \widehat{ODC}$$

$$= 180^\circ - \widehat{OCD} = \widehat{OCM}$$

$$\Delta OSC \sim \Delta OCM \Rightarrow \frac{OS}{OC} = \frac{OC}{OM} \Rightarrow OS \cdot OM = OC^2$$

$$OS \cdot OM = OL \cdot \Delta OLM \sim \Delta OSL \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{OLM} = \widehat{OSL} = 90^\circ$$

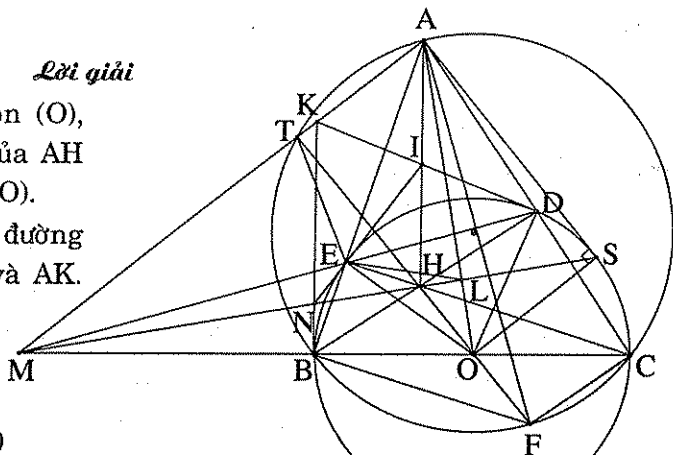
$L = F$. Tương tự: $K = E$. Vậy: N, E, F thẳng hàng.

Bài 97. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E, D . BD cắt CE tại H . Các tiếp tuyến tại B, D của đường tròn (O) cắt nhau tại K . AK cắt BC tại M . MH cắt BK tại N . Vẽ tiếp tuyến AS trên đường tròn (O) (S thuộc cung nhỏ CD). DB cắt AH tại I . Chứng minh rằng:

- N, E, I thẳng hàng.
- M, E, D thẳng hàng.
- M, H, S thẳng hàng.

Lời giải

- Từ ID là tiếp tuyến của đường tròn (O) , chứng minh được I là trung điểm của AH và IE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
Gọi T (T khác A) là giao điểm của đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ABC và AK .
Vẽ đường kính AF của (O') .
Chứng minh được tứ giác $BHCF$ là hình bình hành.



Do đó: H, O, F thẳng hàng (1)

$$\widehat{MTB} = \widehat{ACB} \text{ (tứ giác BTAC nội tiếp)}, \widehat{KDB} = \widehat{ACB} \left(= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{BD} \right)$$

Nên $\widehat{MTB} = \widehat{KDB}$. Do đó tứ giác $TKDB$ nội tiếp.

Mà $\widehat{KBO} = \widehat{KDO} = 90^\circ$ nên tứ giác $OBKD$ nội tiếp.

Ta có: B, T, K, D, O cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{OTK} = \widehat{OBK} = 90^\circ$.

Mà: $\widehat{FTA} = 90^\circ$. Do vậy: F, O, T thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) có T, H, O, F thẳng hàng.

ΔMAO có AH, OT là hai đường cao nên $MH \perp OA$ (tại L)

Do đó: L thuộc đường tròn $(AETHD)$ ($\widehat{ATH} = \widehat{AEH} = \widehat{ALH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$) *

$$\Rightarrow \widehat{ALE} = \widehat{ADE}. \text{ Mà } \widehat{ADE} = \widehat{EBO} \text{ nên } \widehat{ALE} = \widehat{EBO}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BELO$ nội tiếp.

Mặt khác: $\widehat{NBO} = \widehat{NLO} = 90^\circ$ nên tứ giác $BNLO$ nội tiếp

Ta có: B, N, E, L, O cùng thuộc một đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{NEO} = \widehat{NLO} = 90^\circ$$

$$\widehat{NEO} + \widehat{OEI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Vậy: N, E, I thẳng hàng.

b) Ta có: $\widehat{MTE} = \widehat{ADE}$ (tứ giác TADE nội tiếp), $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$.

Do đó: $\widehat{ABC} = \widehat{MTE} \Rightarrow$ Tứ giác MTEB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MTB}$.

Mà: $\widehat{BED} = \widehat{BTA}$ (Cùng bù với $\widehat{ACB}$). Do vậy: $\widehat{MEB} + \widehat{BED} = \widehat{MTB} + \widehat{BTA} = 180^\circ$

Vậy: M, E, D thẳng hàng.

c) $OE \perp IE$, nên OE là tiếp tuyến của đường tròn (AETHDL) tâm I $\Rightarrow \widehat{OEL} = \widehat{OAE}$

Xét $\triangle OEL$ và $\triangle OAE$ có $\widehat{OEL}$ (chung), $\widehat{OEL} = \widehat{OAE}$. Do đó $\triangle OEL \sim \triangle OAE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{OL}{OE} \Rightarrow OA \cdot OL = OE^2 \text{ nên } OA \cdot OL = OS^2$$

Xét $\triangle OLS$ và $\triangle OSA$ có $\widehat{LOS}$ (chung), $\frac{OL}{OS} = \frac{OS}{OA}$

Do đó: $\triangle OLS \sim \triangle OSA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OLS} = \widehat{OSA}$. Mà $\widehat{OSA} = 90^\circ$ nên $\widehat{OLS} = 90^\circ$

Ta có: $\widehat{MLO} + \widehat{OLS} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow M, L, S$ thẳng hàng

Mà: H, M, N, L thẳng hàng nên M, N, H, L, S.

Vậy: M, H, S thẳng hàng.

Bài 98. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các tia AB, DC cắt nhau tại M, các tia AD, BC cắt nhau tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC cắt MN tại K. Gọi T là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng: O, T, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi S là giao điểm của đường tròn (ACM) và MT.

Chứng minh được $MT \cdot ST = AT \cdot CT = R^2 - OT^2$

$$\widehat{MSA} = \widehat{MCA}, \widehat{MCA} = \widehat{MBD} \text{ nên } \widehat{MBD} = \widehat{MSA}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABTS nội tiếp nên có:

$$MT \cdot MS = OM^2 - R^2$$

$$\text{Do đó: } MT \cdot MS - MT \cdot ST = OM^2 + OT^2 - 2R^2$$

$$\Rightarrow MT^2 = OM^2 + OT^2 - 2R^2$$

$$\text{Tương tự: } NT^2 = ON^2 + OT^2 - 2R^2.$$

$$\text{Do đó } MT^2 - NT^2 = OM^2 - ON^2$$

Từ đó chứng minh được $OT \perp MN$ (1)

$$\text{Mặt khác: } \widehat{MBC} = \widehat{ADC}, \widehat{CKN} = \widehat{MBC} \text{ nên } \widehat{ADC} = \widehat{CKN}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác DCKN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DKN} = \widehat{DCN}$.

$$\text{Mà } \widehat{DCN} = \widehat{MAD} \text{ nên } \widehat{DKN} = \widehat{MAD}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMKD nội tiếp.

$$\text{Ta có: } \widehat{AKM} = \widehat{ADM} = \widehat{CKN}$$

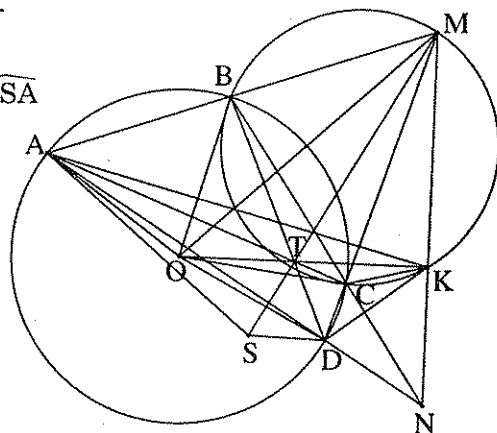
$$\text{nên } \widehat{AOC} + \widehat{AKC} = 2\widehat{ADM} + \widehat{AKC} = \widehat{AKM} + \widehat{CKN} + \widehat{AKC} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AOCK nội tiếp. Mà $OA = OC (= R) \Rightarrow \widehat{OA} = \widehat{OC} \Rightarrow \widehat{AKO} = \widehat{OKC}$

$$\text{Ta có: } \widehat{OKM} = \widehat{AKO} + \widehat{AKM} = 90^\circ \text{ nên } OK \perp MN \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có OT, OK trùng nhau.

Vậy: O, T, K thẳng hàng.



Bài 99. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). MN là đường kính của đường tròn (O) (M thuộc cung BC không chứa A, N thuộc cung AC không chứa B). D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, AC, AB. T, L, K lần lượt là hình chiếu của N trên BC, AC, AB. DE cắt TL tại I. H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng qua M song song với DF cắt đường thẳng qua N song song với TL tại V. Chứng minh rằng ba điểm H, I, V thẳng hàng.

Lời giải

Qua M vẽ đường thẳng song song với DF, qua N vẽ đường thẳng song song với TL. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng này.

Chứng minh được D, E, F thẳng hàng và T, L, K thẳng hàng (Đường thẳng Sim-son)

Gọi F_1 là điểm đối xứng của M qua AB, D_1 là điểm đối xứng của M qua BC, E_1 là điểm đối xứng của M qua AC. Chứng minh được D_1, E_1, F_1, H thẳng hàng (Đường thẳng S-tại-nơi đi qua trực tâm)

Do vậy: DF đi qua trung điểm X của HM.

Tương tự, có TL đi qua trung điểm J của HN.

ΔHMS có $XI \parallel MS, XH = XM \Rightarrow IH = IS$.

Do đó: JI là đường trung bình của $\Delta HNS \Rightarrow NS \parallel TL$ nên $V \equiv S$.

Vậy: ba điểm H, I, V thẳng hàng.

Chú ý: Chứng minh được $DF \perp TL$ tại I. Mà $MV \parallel DF, NV \parallel TL$ nên có $\widehat{MVN} = 90^\circ \Rightarrow V$ thuộc đường tròn (O). Gọi O' là trung điểm của OH.

Ta có $O'I$ là đường trung bình của tam giác HOS $\Rightarrow O'I = \frac{OS}{2}$.

Như vậy: I thuộc đường tròn $\mathcal{O}$ -le của tam giác ABC.

Bài 100. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) bàng tiếp của tam giác ABC trong góc BAC tiếp xúc với các đường thẳng BC, AC, AB lần lượt tại M, P, N. Gọi J là tâm đường tròn $\mathcal{O}$ -le của tam giác MNP. Chứng minh rằng ba điểm I, J, O thẳng hàng.

Lời giải

IA, IB, IC cắt NP, MN, MP lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . IA, IB,

IC cắt đường tròn (O) lần lượt tại A_2, B_2, C_2 . Ta có IA,

IB, IC lần lượt là đường trung trực của NP, MN, MP.

ΔNAI vuông tại N. NA_1 là đường cao

$$\Rightarrow IA_1 \cdot IA = IN^2$$

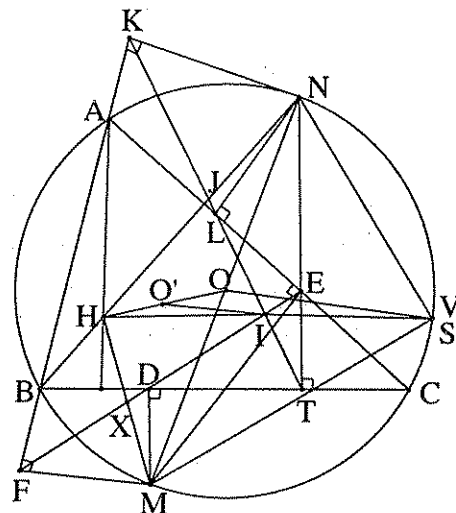
ΔNBI vuông tại N. NB_1 là đường cao

$$\Rightarrow IB_1 \cdot IB = IN^2.$$

Do vậy: $IA_1 \cdot IA = IB_1 \cdot IB$.

Chứng minh tương tự, ta có: $IA_1 \cdot IA = IC_1 \cdot IC$

$$\text{Vậy có: } IA_1 \cdot IA = IB_1 \cdot IB = IC_1 \cdot IC. \quad (1)$$



Mặt khác: Xét $\triangle IAB$ và $\triangle IB_2A_2$ có: $\widehat{AIB}$ (chung),

$\widehat{IAB} = \widehat{IB_2A_2}$ (tứ giác ABB_2A_2 nội tiếp)

$$\text{Do đó: } \triangle IAB \sim \triangle IB_2A_2 \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{IA}{IB_2} = \frac{IB}{IA_2}$$

$$\Rightarrow IA_2 \cdot IA = IB_2 \cdot IB$$

Chứng minh tương tự, ta có: $IA_2 \cdot IA = IC_2 \cdot IC$

$$\text{Vậy có: } IA_2 \cdot IA = IB_2 \cdot IB = IC_2 \cdot IC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } \frac{IA_1}{IA_2} = \frac{IB_1}{IB_2} = \frac{IC_1}{IC_2}$$

Do vậy: $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$

$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$. O là tâm đường tròn

ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$. J là tâm

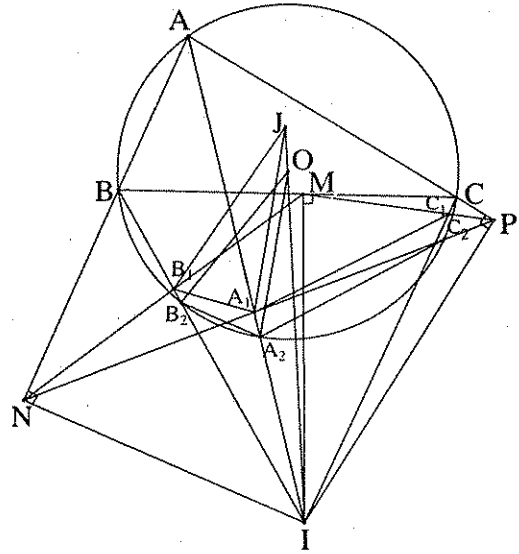
đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

$$\text{Nên có: } \frac{JA_1}{OA_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}$$

$$\triangle JA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2 \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{JA_1C_1} = \widehat{OA_2C_2} \text{ nên } \widehat{IA_1J} = \widehat{IA_2O}$$

$$\triangle IA_1J \sim \triangle IA_2O \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{JIA_1} = \widehat{OIA_2} \Rightarrow IJ, IO \text{ trùng nhau.}$$

Vậy: Ba điểm I, J, O thẳng hàng.



Bài 101. Cho hình vuông ABCD. Trên nửa mặt phẳng bờ CD có chứa A vẽ nửa đường tròn (C, R) cắt tia CD tại E và tia đối của tia CD tại F. M là điểm trên nửa đường tròn. K là hình chiếu của M trên CD và có $KM + KF$ lớn nhất. Chứng minh rằng ba điểm C, M, A thẳng hàng

Lời giải

$\triangle KMC$ vuông tại K

$$\Rightarrow KM^2 + KC^2 = CM^2 \text{ (định lý Py-ta-go)}$$

$$\text{Nên } KM^2 + KC^2 = R^2$$

$$\text{Ta có: } KM + KC \leq \sqrt{2(KM^2 + KC^2)}$$

$$\text{Nên: } KM + KC \leq \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}R$$

Mặt khác xét ba điểm K, C, F có:

$$KF \leq KC + CF = KC + R$$

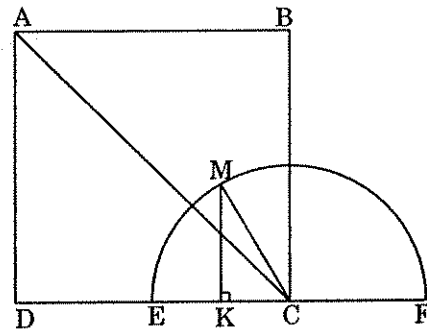
$$\text{Nên } KM + KF \leq KM + KC + R \leq \sqrt{2}R + R = (\sqrt{2} + 1)R$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} KM = KC \\ C \text{ nằm giữa K, F} \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{MCK} = 45^\circ$$

Mà: $\widehat{ACD} = 45^\circ$ (vì tứ giác ABCD là hình vuông).

Do đó hai tia CM, CA trùng nhau

Vậy ba điểm C, M, A thẳng hàng.



Bài 102. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') cắt nhau tại A, B (O và O' nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Từ điểm C thuộc tia đối của tia AB vẽ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn (O) (D, E thuộc đường tròn (O) , E nằm trong đường tròn (O')) AD, AE cắt đường tròn (O') lần lượt tại M, N . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN . Chứng minh rằng ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Lời giải

Gọi K là giao điểm của DE và MN

Xét $\triangle CDA$ và $\triangle CBD$ có: $\widehat{DCA}$ (chung), $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$$\text{Do đó } \triangle CDA \sim \triangle CBD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{AD}{BD}$$

$$\text{Tương tự } \triangle CEA \sim \triangle CBE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{AE}{BE}$$

Mà $CD = CE$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\text{Do đó } \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE} \quad (1)$$

Mặt khác $\widehat{BDE} = \widehat{BAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE của (O)) và $\widehat{BAE} = \widehat{BMN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BN của (O'))

$$\text{Do đó } \widehat{BDE} = \widehat{BMN}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BDMK$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BDM} + \widehat{BKM} = 180^\circ$$

Mà $\widehat{BDM} + \widehat{BEA} = 180^\circ$ (tứ giác $AEBD$ nội tiếp). Nên $\widehat{BKM} = \widehat{BEA}$

Xét $\triangle BKM$ và $\triangle BEA$ có: $\widehat{BMK} = \widehat{BAE}$ và $\widehat{BKM} = \widehat{BEA}$

Do đó $\triangle BKM \sim \triangle BEA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KM}{AE} = \frac{BK}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{KM}{BK} = \frac{AE}{BE} \quad (2)$$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle NBK$ có:

$$\widehat{BAD} = \widehat{BNK} \text{ (tứ giác } ABNM \text{ nội tiếp),}$$

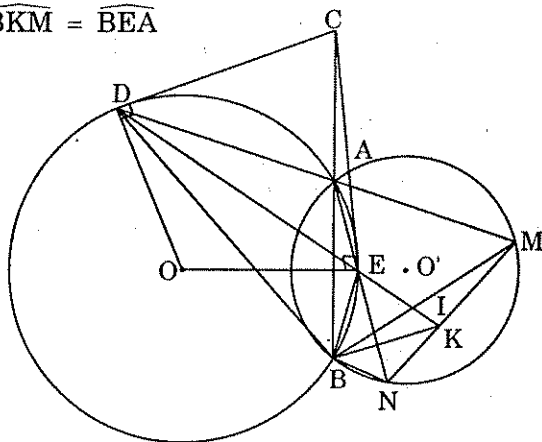
$$\widehat{ADB} = \widehat{NKB} \text{ (tứ giác } BDMK \text{ nội tiếp)}$$

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle NBK$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{KN} = \frac{BD}{BK} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{KN}{BK} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta có: } \frac{KM}{BK} = \frac{KN}{BK} \Rightarrow KM = KN. \text{ Do đó } K \equiv I$$

Vậy ba điểm: D, E, I thẳng hàng



Bài 103. Cho tứ giác $ABCD$ có: $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . I, K lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB, OCD . Chứng minh rằng ba điểm B, D, M thẳng hàng.

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$$

⇒ Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm S là trung điểm của BD

Ta có: IB = IO (= R)

⇒ ΔIBO cân tại I

$$\Rightarrow \widehat{IOB} = 90^\circ - \frac{\widehat{BIO}}{2}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAO} = \frac{\widehat{BIO}}{2}. \text{ Nên } \widehat{IOB} = 90^\circ - \widehat{BAO} = \widehat{CAD}$$

$$\text{Mà } \widehat{CAD} = \widehat{CBD}. \text{ Do đó } \widehat{IOB} = \widehat{CBD} \Rightarrow IO \parallel BC$$

Hai đường tròn (S), (K) cắt nhau tại C, D

⇒ SK là đường tròn trung trực của CD ⇒ SK ⊥ CD

Ta có SK ⊥ CD, BC ⊥ CD ($\widehat{BCD} = 90^\circ$) ⇒ SK // BC

Vì IO // BC và SK // BC ⇒ IO // SK

Chứng minh tương tự có OK // IS. Do vậy tứ giác OISK là hình bình hành.

Mà M là trung điểm của IK. Nên M là trung điểm của SO. Vậy B, D, M thẳng hàng.

Bài 104. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O; R). Các tia AB, DC cắt nhau tại M; các tia DA, CB cắt nhau tại N. Các tia phân giác của các góc AMC, ANB cắt nhau tại I. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng ba điểm K, I, L thẳng hàng.

Lời giải

Tia phân giác $\widehat{AMC}$ cắt KL tại I_1 , tia phân giác $\widehat{ANB}$ cắt KL tại I_2

$$\triangle MAC \sim \triangle MDB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AC}{BD}$$

$$\text{Nên } \frac{MA}{MD} = \frac{2AK}{2DL} = \frac{AK}{DL}$$

$$\triangle MAK \sim \triangle MDL \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AMK} = \widehat{DML}$$

Do đó MI_1 là đường phân giác của tam giác MLK

$$\Rightarrow \frac{I_1K}{I_1L} = \frac{MK}{ML}$$

$$\text{Mà } \frac{MK}{ML} = \frac{AK}{DL} = \frac{AC}{BD}$$

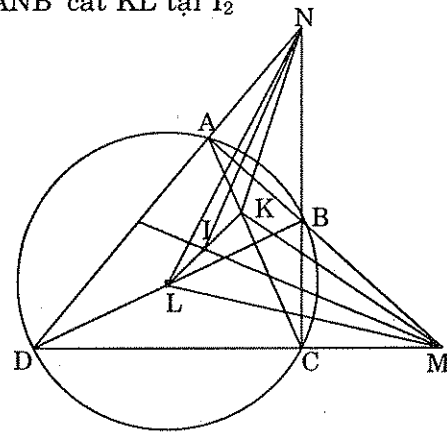
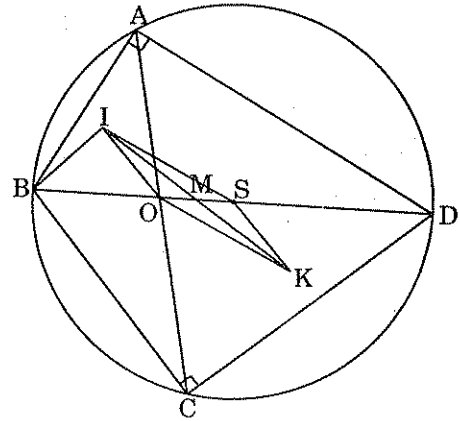
$$\text{Nên } \frac{I_1K}{I_1L} = \frac{AC}{BD}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{I_2K}{I_2L} = \frac{AC}{BD}$$

$$\text{Ta có: } \frac{I_1K}{I_1L} = \frac{I_2K}{I_2L} \left(= \frac{AC}{BD} \right) \Rightarrow I_1 = I_2$$

Nên I_1, I_2, I trùng nhau

Vậy ba điểm K, I, L thẳng hàng.



Bài 105. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường kính AD của đường tròn. Đường thẳng qua D song song với AC cắt AB tại M, đường thẳng qua D song song với AB cắt AC tại N. Gọi K là trung điểm của BC, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Vẽ hình bình hành AIKL. Chứng minh rằng ba điểm D, K, L thẳng hàng.

Lời giải

Hai đường tròn (O), (I) cắt nhau tại A, E

Ta có $\triangle IME$ cân tại I, $\triangle OBE$ cân tại O

$$\widehat{MIE} = \widehat{BOE} (= 2\widehat{MAE})$$

Nên $\triangle IME \sim \triangle OBE$

$$\Rightarrow \widehat{IEM} = \widehat{OEB}$$

$$\Rightarrow \widehat{IEO} = \widehat{MEB}$$

Mà $\widehat{IEO} = \widehat{IAO}$ (A, E đối xứng qua OI).

$$\text{Nên } \widehat{MEB} = \widehat{IAO}$$

Mặt khác: $\widehat{MAN} + \widehat{AND} = 180^\circ$, $\widehat{MAN} + \widehat{BDC} = 180^\circ$

$$\text{Nên: } \widehat{AND} = \widehat{BDC}$$

$\triangle NAD \sim \triangle DBC$ (g.g). Từ đó có $\triangle NAO \sim \triangle DBK$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{ANO} = \widehat{BDK}. \text{ Mà } \widehat{ANO} = \widehat{AEM}. \text{ Nên } \widehat{BDK} = \widehat{AEM}$$

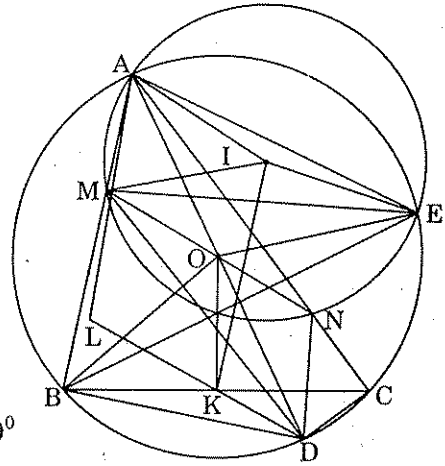
Ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{AEB}$. Do đó $\widehat{ADK} = \widehat{MEB}$

$$\text{Nên } \widehat{ADK} = \widehat{MEB} = \widehat{IEO} = \widehat{IAO}. \text{ Vì } \widehat{ADK} = \widehat{IAO}$$

Do vậy $AI \parallel DK$. Ta có: $DK \parallel AI$ và $LK \parallel AI$ (Tứ giác AIKL là hình bình hành)

Nên DK, LK trùng nhau

Vậy ba điểm D, K, L thẳng hàng.



NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

Bài toán. Cho nửa đường tròn (O), đường kính BC = 2R. Điểm A di động trên nửa đường tròn. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Xác định vị trí điểm A trên nửa đường tròn (O) để tổng AH + BH lớn nhất.

Lời giải

Định hướng 1

Đặt BH = x. Giúp có được $AH = \sqrt{x(2R - x)}$

Bài toán trở thành: Tìm x để biểu thức $x + \sqrt{x(2R - x)}$ có giá trị lớn nhất. Biểu thức đại số có chứa căn thức bậc hai vận dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương để có lời giải.

Cách giải 1:

Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Đặt BH = x, ta có HC = BC - BH = 2R - x

$\triangle ABC$ vuông tại A, AH là đường cao

$$\Rightarrow AH^2 = BH \cdot HC.$$

$$\text{Nên } AH = \sqrt{x(2R - x)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$\begin{aligned} AH + BH &= \sqrt{x(2R - x)} + x \\ &= \frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \sqrt{x[(3 + 2\sqrt{2})(2R - x)]} + x \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}} \frac{x + (3 + 2\sqrt{2})(2R - x)}{2} + x \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)} \cdot \left[\frac{x}{2} + (\sqrt{2} + 1)^2 R - \frac{(\sqrt{2} + 1)^2 \cdot x}{2} \right] + x \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \cdot x + (\sqrt{2} + 1)R - \frac{(\sqrt{2} + 1)}{2} \cdot x + x \\ &= (\sqrt{2} + 1)R \end{aligned}$$

Ta có $AH + BH \leq (\sqrt{2} + 1)R$, không đổi.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = (3 + 2\sqrt{2})(2R - x)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} R \Leftrightarrow \widehat{AOC} = 45^\circ$$

Vậy khi A trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{COA} = 45^\circ$ thì AH + BH lớn nhất.

Định hướng 2:

Trên tia đối của tia HB lấy điểm D sao cho $HD = AH$. Ta có $AH + BH$ lớn nhất $\Leftrightarrow BD$ lớn nhất.

Mà AD luôn luôn hợp với BC một góc 45° . Do vậy BD lớn nhất khi AD là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

Cách giải 2:

Gọi M là điểm trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{COM} = 45^\circ$ và gọi N là giao điểm của tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại M với BC.

Ta có M, N cố định; $\widehat{ONM} = 45^\circ$; BN không đổi.

Điểm A trên nửa đường tròn

Do đó tia NA nằm giữa hai tia NB, NM.

$$\Rightarrow \widehat{ANH} \leq \widehat{ONM} = 45^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{ANH} + \widehat{HAN} = 90^\circ. \text{ Nên } \widehat{HAN} \geq 45^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ANH} \leq \widehat{HAN}$$

$$\Delta AHN \text{ có } \widehat{ANH} \leq \widehat{HAN} \Rightarrow AH \leq HN$$

$$\text{Do đó: } AH + BH \leq HN + BH = BN, \text{ không đổi}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow A \equiv M$$

Vậy khi A trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{COA} = 45^\circ$ thì $AH + BH$ lớn nhất.

Định hướng 3:

Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa nửa đường tròn (O), vẽ tia Bx sao cho $Bx \perp BC$.

Gọi K là hình chiếu của A trên tia Bx. Ta có $BH = AK$.

Bài toán trở thành: Xác định vị trí điểm A trên nửa đường tròn (O), nằm trong góc NBx sao cho tổng các khoảng cách từ A đến hai cạnh BN, Bx lớn nhất.

Cách giải 3

Trên nửa mặt phẳng bờ BC, có chứa nửa đường tròn (O), vẽ tia Bx, sao cho $Bx \perp BC$, trên tia BC, Bx lần lượt lấy S, T sao cho $BS = BT$, $BT > BC$.

Vẽ $AK \perp BT$ tại K, $AJ \perp TS$ tại J, $OV \perp TS$ tại V

$$\text{Ta có: T, V, S cố định: } S_{BTS} = S_{ATB} + S_{ABS} + S_{ATS}$$

$$\text{Tứ giác BKAH là hình chữ nhật (Vì } \widehat{AKB} = \widehat{KBH} = \widehat{AHB} = 90^\circ)$$

$$\Rightarrow AK = BH$$

$$\text{Do đó } S_{BTS} = \frac{1}{2} BS(AH + BH) + \frac{1}{2} AJ.TS \quad (*)$$

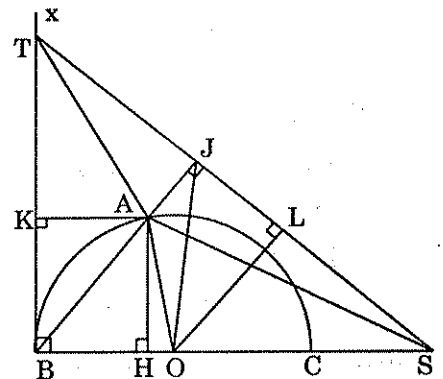
Mặt khác, xét ba điểm A, J, S có $AJ \geq OJ - OA$

$$\text{Mà } OV \perp VJ \Rightarrow OJ \geq OV$$

$$\text{Nên } AJ \geq OV - R, \text{ không đổi}$$

$$\text{Ta có } S_{BTS}, BS, TS \text{ không đổi}$$

$$\text{Từ (*) có } AH + BH \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow AJ \text{ nhỏ nhất}$$



$$\Leftrightarrow AJ = OV - R \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ nằm giữa } O \text{ và } J \\ J \equiv V \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{COA} = 45^\circ$$

Vậy khi A trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{COA} = 45^\circ$ thì AH + BH lớn nhất

Định hướng 4: Vận dụng định lí Py-tago trong tam giác HAO vuông tại H có:

$$OH^2 + AH^2 = OA^2 = R^2 \text{ nên có } AH + OH \leq \sqrt{2(AH^2 + OH^2)} = \sqrt{2}R$$

Mặt khác từ B, O, H có $BH \leq OH + OB = OH + R$. Do vậy, ta có được $AH + BH \leq (\sqrt{2} + 1)R$. Chúng ta có một lời giải đẹp từ sự kết hợp của Hình học và Đại số.

Cách giải 4:

$\triangle HOA$ vuông tại H

$$\Rightarrow AH^2 + OH^2 = OA^2 \text{ (định lí Py-ta-go)}$$

$$\text{Nên } AH^2 + OH^2 = R^2$$

$$\text{Ta có } AH + OH \leq \sqrt{2(AH^2 + OH^2)} = \sqrt{2}R$$

Mặt khác, xét ba điểm B, O, H có $BH \leq OH + OB = OH + R$

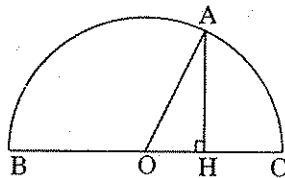
$$\text{Do đó: } AH + BH \leq AH + OH + R \leq \sqrt{2}R + R = (\sqrt{2} + 1)R$$

Nên $AH + BH \leq (\sqrt{2} + 1)R$, không đổi

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} AH = OH \\ O \text{ nằm giữa B và H} \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{COA} = 45^\circ$$

Vậy khi A trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{COA} = 45^\circ$ thì AH + BH lớn nhất

Các bạn hãy tìm thêm các cách giải khác của bài toán này nhé!



4. CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1. (Lớp 8)

Cho hình vuông ABCD, ở miền trong của hình vuông ta lấy một điểm E sao cho tam giác AEB đều. Từ B vẽ đường thẳng d vuông góc với BE. Trên đường thẳng d lấy điểm F sao cho F cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm E và BE = BF. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên ban C-D trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, T.p Đà Nẵng, năm học 2001 – 2002)

Lời giải

$$\triangle AEB \text{ đều} \Rightarrow AB = AE = BE, \widehat{EAB} = 60^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{DAE} = 90^\circ - \widehat{EAB} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\triangle ADE \text{ có } AD = AE (= AB)$$

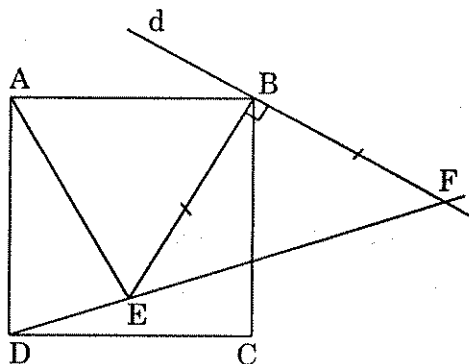
$$\Rightarrow \triangle ADE \text{ cân tại A.}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED}$$

$$\text{Nên } \widehat{AED} = (180^\circ - \widehat{DAE}) : 2 = 75^\circ$$

$$\triangle BEF \text{ vuông tại B (d} \perp \text{BE) có: BE = BF (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle BEF \text{ vuông cân tại B.}$$



$$\Rightarrow \widehat{BEF} = 45^\circ$$

$$\text{Ta có: } \widehat{DEF} = \widehat{AED} + \widehat{AEB} + \widehat{BEF} = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Bài 2. (Lớp 8) Cho tam giác ABC có góc A tù, $AB > AC$ và H là chân đường cao hạ từ A. Trong góc A dựng các đoạn $AD \perp AB$ và $AD = AB$, $AE \perp AC$ và $AE = AC$. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng A, H, M thẳng hàng.

(Trích đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, T.p Hà Nội, năm học 1999 – 2000)

Lời giải

Gọi N là điểm đối xứng của điểm A qua M.

Ta có M là trung điểm của DE và AN

Do đó tứ giác AEND là hình bình hành

$$\Rightarrow AD = EN, AE = DN, AD \parallel EN, \widehat{DAE} + \widehat{AEN} = 180^\circ, NE \perp AB,$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \widehat{DAE} + \widehat{BAC} &= \widehat{DAE} + \widehat{CAD} + \widehat{BAD} = \widehat{EAC} + \widehat{BAD} \\ &= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Do vậy } \widehat{AEN} = \widehat{BAC}$$

$$\text{Xét } \triangle ENA \text{ và } \triangle ABC \text{ có: } EN = AB (=AD), \widehat{AEN} = \widehat{BAC}, EA = AC \text{ (gt)}$$

$$\text{Do đó } \triangle ENA = \triangle ABC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ENA} = \widehat{ABC}$$

$$\text{Nên } NA \perp BC.$$

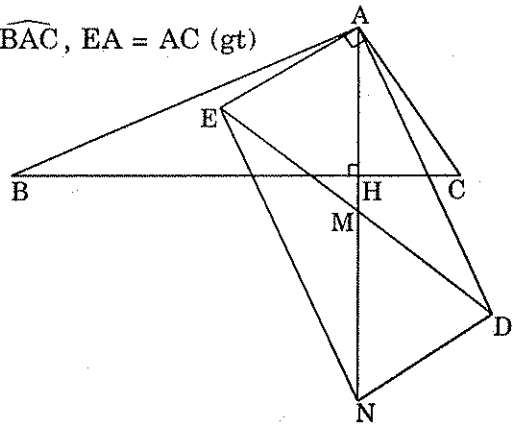
$$\text{Mà } AH \perp BC$$

$$\text{Do vậy } N, A, H \text{ thẳng hàng} \quad (1)$$

$$\text{Mà } A, M, N \text{ thẳng hàng} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có } N, A, H, M \text{ thẳng hàng.}$$

$$\text{Vậy } A, H, M \text{ thẳng hàng.}$$



Bài 3. (Lớp 8) Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến. Một đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại D và E. BE cắt CD tại O. Chứng minh rằng ba điểm A, O, M thẳng hàng.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Yên Bái, năm học 2007 – 2008)

Lời giải

Gọi K là giao điểm của AM và DE, N là giao điểm của OM và DE

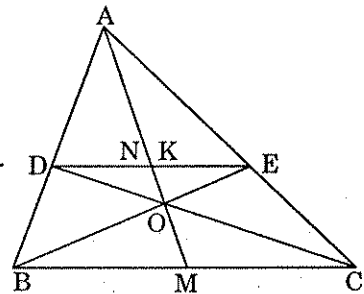
$$\triangle ABM \text{ có } DN \parallel BM \Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{DN}{BM}$$

$$\triangle ACM \text{ có } NE \parallel MC \Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{NE}{MC}$$

$$\text{Mà } BM = MC. \text{ Do đó } DN = NE \Rightarrow N \text{ là trung điểm của DE.}$$

$$\text{Mặt khác xét } \triangle OMC \text{ có } DK \parallel MC \Rightarrow \frac{DK}{MC} = \frac{OK}{OM}$$

$$\triangle OBM \text{ có } KE \parallel BM \Rightarrow \frac{KE}{BM} = \frac{OK}{OM}$$



Do đó $DK = KE \Rightarrow K$ là trung điểm của DE . Do vậy $N \equiv K$

Ta có A, N, O, M thẳng hàng.

Vậy A, O, M thẳng hàng.

Bài 4. (Lớp 8) Cho tam giác ABC thỏa mãn $AB \cdot AC = BC(AB + AC)$. Gọi BD, CE là hai đường phân giác, G là trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng D, G, E thẳng hàng.
(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Phú Yên năm học 2011 – 2012)

Lời giải

AG cắt BC tại $M \Rightarrow BM = MC$

Vẽ $BN \parallel EG$ ($K \in AG$)

$CK \parallel GD$ ($K \in AG$)

$\triangle ABC$ có CE là đường phân giác

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{AE + BE}{AC + BC} = \frac{AB}{AC + BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC + BC}{AC} = 1 + \frac{BC}{AC}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{AC}{AD} = 1 + \frac{BC}{AB}$$

G là trọng tâm của tam giác ABC

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3} AM$$

$$\text{Ta có: } \frac{AN}{AG} + \frac{AK}{AG} = \frac{AB}{AE} + \frac{AC}{AD} = 2 + \frac{BC}{AC} + \frac{BC}{AB} = 3$$

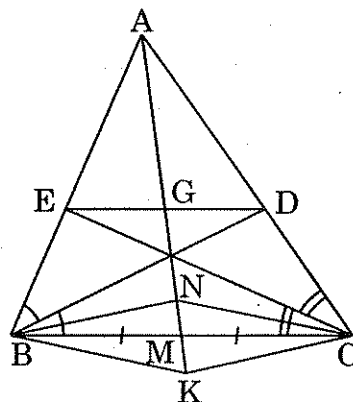
$$\Rightarrow AN + AK = 3AG$$

$$\Rightarrow AM - MN + AM + MK = 3AG$$

$$\Rightarrow MN = MK$$

$BNCK$ là hình bình hành $\Rightarrow BN \parallel CK$. Do đó EG, GD trùng nhau

Vậy D, G, E thẳng hàng.



Bài 5. (Lớp 8) Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM , đường phân giác AD . Đường thẳng qua M song song với AB cắt AD tại E . Đường thẳng qua D song song với AC cắt AM tại F . Chứng minh rằng ba điểm E, F, C thẳng hàng.

(Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 8, trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, T.p Hồ Chí Minh, năm học 2003 – 2004)

Lời giải

Gọi N là giao điểm của EM và AC , K là điểm đối xứng của M qua N , F' là giao điểm của AM và CE .

$\triangle ABC$ có $MN \parallel AB$ (gt), M là trung điểm của cạnh BC

(AM là đường trung tuyến)

$\Rightarrow N$ là trung điểm của cạnh AC .

Ta có N là trung điểm của các đoạn thẳng AC, MK

$\Rightarrow$ Tứ giác $AKCM$ là hình bình hành

$\Rightarrow AM \parallel KC$ và $AK \parallel MC$

$$\triangle AKE \text{ có } DM \parallel AK \Rightarrow \frac{ED}{EA} = \frac{EM}{EK}$$

$$\triangle CKE \text{ có } MF' \parallel KC \Rightarrow \frac{EF'}{EC} = \frac{EM}{EK}$$

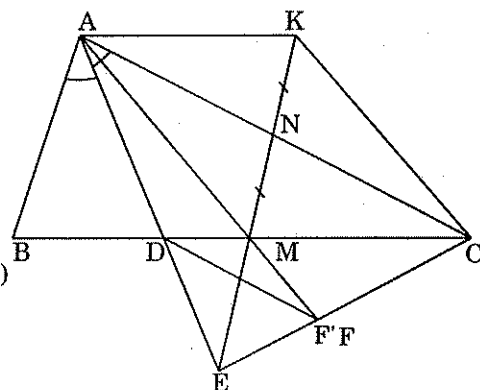
$$\text{Do vậy } \frac{ED}{EA} = \frac{EF'}{EC} \left(= \frac{EM}{EK} \right)$$

$$\triangle EAC \text{ có } \frac{ED}{EA} = \frac{EF'}{EC} \Rightarrow DF' \parallel AC \text{ (định lí Ta-lét đảo)}$$

Do đó $F' \equiv F$

Vậy ba điểm E, F, C thẳng hàng.

* **Nhận xét:** Lời giải trên không cần đến giả thiết AD là đường phân giác của tam giác ABC.



Bài 6. (Lớp 8) Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H. Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng BH ở D, đường thẳng vuông góc với BC tại B, cắt đường thẳng CH tại E. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của BE, CD. Chứng minh rằng H, M, N thẳng hàng. (Trích đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2010 – 2011)

Lời giải

Ta có $BE \perp BC$ (gt), $CD \perp BC$ (gt), $AH \perp BC$ (H là trực tâm của tam giác ABC)

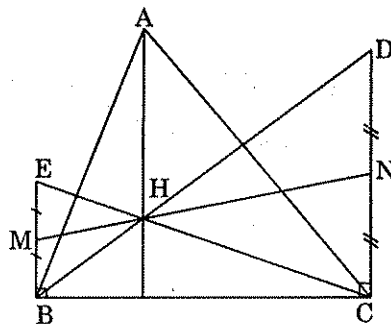
Do đó $BE \parallel CD \parallel AH$

$$\text{Xét } \triangle HCD \text{ có } BE \parallel CD \Rightarrow \frac{BE}{CD} = \frac{HE}{HC}$$

$$\text{Mà } ME = \frac{BE}{2} \text{ (M là trung điểm của BE),}$$

$$CN = \frac{CD}{2} \text{ (N là trung điểm của CD)}$$

$$\text{Do vậy: } \frac{ME}{CN} = \frac{HE}{HC}$$



$$\text{Xét } \triangle HEM \text{ và } \triangle HCN \text{ có: } \widehat{HEM} = \widehat{HCN} \text{ (sole trong và } BE \parallel CD), \frac{HE}{HC} = \frac{ME}{NC} \text{ (cmt)}$$

$$\text{Do đó } \triangle HEM \sim \triangle HCN \text{ (g.g)} \Rightarrow \widehat{EHM} = \widehat{CHN}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{MHN} = \widehat{MHC} + \widehat{CHN} = \widehat{MHC} + \widehat{EHM} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm H, M, N thẳng hàng.

Bài 7. (Lớp 8)

Cho hình chữ nhật ABCD ($AD < AB$). Vẽ $AH \perp BD$ tại H. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho $AE < AD$. Vẽ $EM \perp BD$ tại M, EM cắt AB tại O. Vẽ $AK \perp BE$ tại K. Vẽ $AF \perp OD$ tại F. Chứng minh rằng ba điểm H, F, K thẳng hàng.

(Đề kiểm tra học kỳ II, Toán lớp 8, quận Tân Bình, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2009 – 2010)

Lời giải

Gọi N là giao điểm của DO và BE

$$\triangle DEM \text{ có } AH \parallel EM \Rightarrow \frac{DH}{DM} = \frac{DA}{DE}$$

$$\triangle DEN \text{ có } AF \parallel EN \Rightarrow \frac{DF}{DN} = \frac{DA}{DE}$$

$$\triangle DMN \text{ có: } \frac{DH}{DM} = \frac{DF}{DN} \left(= \frac{DA}{DE} \right) \Rightarrow HF \parallel MN$$

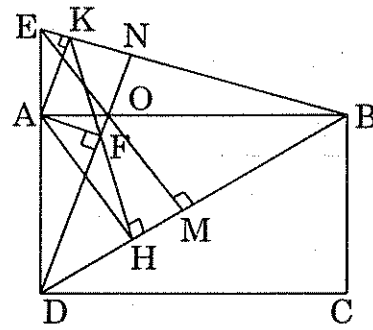
$$\triangle ABH \text{ có } CM \parallel AH \Rightarrow \frac{BM}{BH} = \frac{BO}{BA}$$

$$\triangle ABK \text{ có } ON \parallel AH \Rightarrow \frac{BO}{BA} = \frac{AN}{AK}$$

$$\triangle AKH \text{ có: } \frac{BM}{BH} = \frac{AN}{AK} \left(= \frac{BO}{BA} \right) \Rightarrow HK \parallel MN$$

Từ $HF \parallel MN$, $HK \parallel MN$

H, F, K thẳng hàng.



Bài 8. (Lớp 9) Cho H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng hai trung điểm của AB, CH và giao điểm các tia phân giác của các góc $\widehat{CAH}$ và $\widehat{CBH}$ thẳng hàng.
(Đề thi vô địch Toán mùa đông tại Bungari, năm 1997)

Lời giải

D là giao điểm của AH và BC, E là giao điểm của BH và AC.

Gọi M, I lần lượt là trung điểm của AB, CH. Gọi J là giao

điểm các tia phân giác của các góc $\widehat{CAH}$, $\widehat{CBH}$

Ta có: $\widehat{CAH} = \widehat{CBH}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)

$$\text{Mà: } \widehat{CAJ} = \widehat{HAJ} = \frac{1}{2} \widehat{CAH}$$

$$\widehat{CBJ} = \widehat{HBJ} = \frac{1}{2} \widehat{CBH}$$

$$\text{Do đó } \widehat{CAJ} = \widehat{HAJ} = \widehat{CBJ} = \widehat{HBJ}$$

Ta có: $\widehat{HBJ} = \widehat{CAJ} \Rightarrow$ Tứ giác AEJB nội tiếp

$$\text{Mà: } \widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AEDB nội tiếp đường tròn (M)

Do đó: A, E, J, D, B cùng thuộc một đường tròn.

$$\text{Mà } \widehat{AEJ} = \widehat{DAJ} \Rightarrow \widehat{JE} = \widehat{JD} \Rightarrow JF = JD \Rightarrow J \text{ thuộc đường trung trực của DE.}$$

$$\text{Mặt khác, ta có: } \widehat{HDC} = \widehat{HEC} = 90^\circ$$

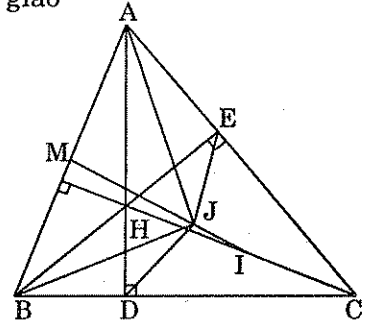
$\Rightarrow$ Tứ giác DHEC nội tiếp đường tròn (I)

Hai đường tròn (M) và (I) cắt nhau tại D, E.

$\Rightarrow$ MI là đường trung trực của DE

Do đó J thuộc MI.

Vậy ba điểm M, J, I thẳng hàng.



Bài 9. (Lớp 9) Cho hình vuông ABCD. M là điểm di động trên tia đối với tia CD ($M \neq C$). Đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt đường thẳng BC tại N. Gọi E là trung điểm của MN. Chứng minh rằng D, B, E thẳng hàng.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên Lương Văn Tụy, Tỉnh Ninh Bình, năm học 2008 – 2009)

Lời giải

Ta có $\widehat{MAN} = \widehat{MCN} = 90^0$

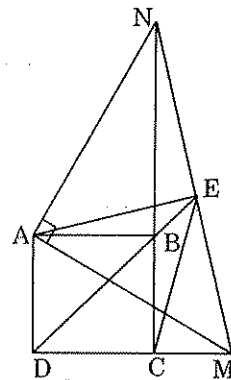
$\Rightarrow$ Tứ giác ACMN nội tiếp đường tròn (E)

$$\Rightarrow EA = EC$$

Mà $BA = BC$, $DA = DC$ (tứ giác $ABCD$ là hình vuông)

Do đó E, B, D cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC.

Vậy ba điểm D, B, E thẳng hàng.



Bài 10. (Lớp 9) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), kẻ đường phân giác AD của góc BAC, đường trung tuyến AM ($D; M \in BC$). Vẽ hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và tam giác ADM, hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt hai cạnh AB và AC theo thứ tự tại E và F. Tia AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại J. Chứng minh ba điểm I, M, J thẳng hàng.
(Trích đề thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2006 – 2007)

Lời giải

Xét $\triangle BME$ và $\triangle BAD$ có: $\widehat{MBE}$ (chung); $\widehat{BME} = \widehat{BAD}$ (tứ giác AEDM nội tiếp)

Do đó $\triangle BME \sim \triangle BAD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow BE = \frac{BM \cdot BD}{BA}$$

$$\text{Tương tự có: } CF = \frac{CM \cdot CD}{CA}$$

ΔABC có AD là đường phân giác

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$$

Do vậy $BE = CF$

Mà $\widehat{AEI} = \widehat{AFI}$ (tứ giác AEFI nội tiếp)

Ta có: $\widehat{AEI} + \widehat{BEI} = \widehat{AFI} + \widehat{CFI} = 180^0$

Nên $\widehat{BEI} = \widehat{CFI}$

Xét $\triangle BEI$ và $\triangle CFI$ có:

$\widehat{BEI} = \widehat{CFI}$ (chứng minh trên), $BE = CF$ (chứng minh trên), $\widehat{EBI} = \widehat{FCI}$ (tứ giác ABCI nội tiếp)

Do đó $\triangle BEI = \triangle CFI$ (g.c.g) $\Rightarrow IB = IC$.

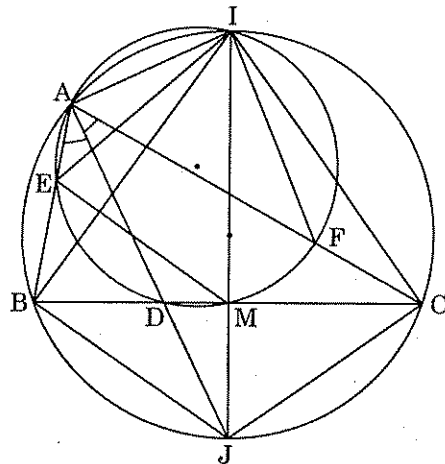
Mặt khác $\widehat{BAJ} = \widehat{JAC}$ (AD là tia phân giác góc BAC)

$$\Rightarrow \widehat{JB} = \widehat{JC} \Rightarrow JB = JC$$

Và $MB = MC$ (M là trung điểm của BC)

Do vậy I, M, J cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Vậy ba điểm I, M, J thẳng hàng.



Bài 11. (Lớp 9) Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đường thẳng d qua điểm C cắt các tia AB, AD lần lượt tại các điểm M, N khác điểm A. Đường thẳng d' qua điểm A và song song với BD, d' cắt các đường thẳng BN, DM lần lượt tại các điểm E, F. P là giao điểm của BN.

DM. Chứng minh rằng các trọng tâm của các tam giác ABD, AME, ANF thẳng hàng.
(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên, tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu, năm học 2009 – 2010)

Lời giải

$\triangle ABD$ cân tại A (vì $AB = AD$) có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, nên tam giác ABD đều.

$$\triangle MAF \text{ có } BD \parallel AF \Rightarrow \frac{BD}{AF} = \frac{MB}{MA}$$

$$\triangle MAN \text{ có } BC \parallel AN \Rightarrow \frac{BC}{AN} = \frac{MB}{MA}$$

$$\text{Do đó: } \frac{BD}{AF} = \frac{BC}{AN}$$

Mà $BD = BC$ (tứ giác ABCD là hình thoi). Nên $AF = AN$

Mặt khác $\widehat{FAN} = \widehat{ADB} = 60^\circ$ ($AF \parallel BD$, $\triangle ABD$ đều)

$\triangle AFN$ cân tại A có $\widehat{AFN} = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle AFN$ đều

$\Rightarrow AF = AN = FN$, $\widehat{AFN} = \widehat{FNA} = 60^\circ$

$\triangle ABN = \triangle ADF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{AFD} \Rightarrow$ Tứ giác ADNF nội tiếp.

$\triangle AFN$ đều, J là trọng tâm.

$\Rightarrow J$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABNF $\Rightarrow JA = JP$

Ta có: $\widehat{NPF} = \widehat{NAF} = 60^\circ$ (tứ giác ADNF nội tiếp, $\triangle AFN$ đều)

$\Rightarrow \widehat{EPM} = \widehat{NPF} = 60^\circ$

Mà $\widehat{EAM} = \widehat{ABD} = 60^\circ$ ($EF \parallel BD$, $\triangle ABD$ đều)

Ta có: $\widehat{EAM} = \widehat{EPM} = 60^\circ \Rightarrow$ Tứ giác EAPM nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{APN} = \widehat{ANF} = 60^\circ$

$\triangle MAE$ có $\widehat{MAE} = \widehat{AEM} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, I là trọng tâm của tam giác MAE.

Do đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác EAPM $\Rightarrow IA = IP$ (2)

$$\widehat{NPD} = \widehat{BAD} = 60^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABCD nội tiếp

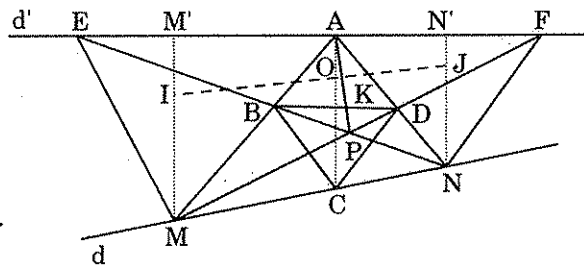
Gọi O là trọng tâm tam giác đều ABD

Ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABPD $\Rightarrow OA = OP$ (3)

Từ (1), (2) và (3) có J, I, A cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AP.

$\Rightarrow J, I, A$ thẳng hàng.

Vậy trọng tâm của các tam giác ABD, AME, ANF thẳng hàng.



Bài 12. (Lớp 9) Cho đường tròn (O), bán kính R. Từ điểm A bên ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến BA, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt đường tròn tại D (D khác B). Cho biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Chứng minh ba điểm A, O, D thẳng hàng.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, tỉnh Ninh Bình, năm học 2011 – 2012)

Lời giải

AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A.

Mà $\widehat{BAC} = 60^\circ$

Do đó $\triangle ABC$ đều

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$ (so le trong và $AC \parallel BD$),

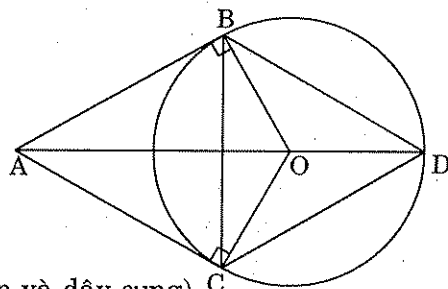
$\widehat{BDC} = \widehat{DBC} = 60^\circ$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó $\triangle BDC$ đều $\Rightarrow DB = DC$

Ta có: $AB = AC$, $OB = OC$, $DB = DC$

$\Rightarrow A, O, D$ cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC

Vậy ba điểm A, O, D thẳng hàng.



Bài 13. (Lớp 9) Cho hai điểm A, B thuộc đường tròn (O) (AB không đi qua O) và có hai điểm C, D di động cùng lớn AB sao cho AD song song với BC (C, D khác A và B và $AD > BC$). Gọi M là giao điểm của BD và AC. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại điểm I. Chứng minh rằng ba điểm I, O, M thẳng hàng.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2003 – 2004)

Lời giải

Ta có $AD \parallel BC$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác ABCD là hình thang mà tứ giác ABCD nội tiếp

Do đó tứ giác ABCD là hình thang cân

$\Rightarrow AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$

$\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{MAD}$

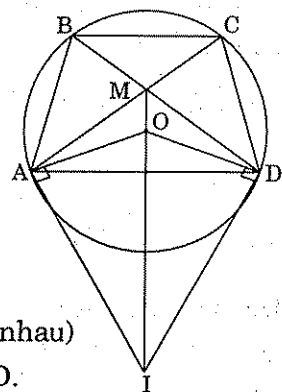
$\Rightarrow \triangle MAD$ cân tại M

$\Rightarrow MA = MD$

Mà $OA = OD$ ($= R$), $IA = ID$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó I, O, M cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AD.

Vậy I, O, M thẳng hàng.



Bài 14. (Lớp 9) Cho đường tròn (O; R) và một điểm P thuộc (O). Từ P vẽ hai tia Px, Py lần lượt cắt đường tròn (O) tại A và B cho góc xPy là góc nhọn. Vẽ hình bình hành APBM. Gọi K là trực tâm của tam giác ABM.

Gọi H là trực tâm của tam giác APB và I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh rằng: H, I, K thẳng hàng

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2001 – 2002)

Lời giải

Ta có $BH \perp PA$ (H là trực tâm của tam giác APB)

Mà $BM \parallel PA$ (tứ giác APBM là hình bình hành)

$\Rightarrow BH \perp BM$

Ta có: $AK \perp BM$ (K là trực tâm của tam giác ABM)

Do đó $AK \parallel PA$ (1)

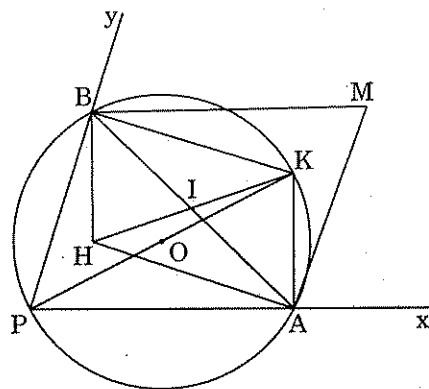
Chúng minh tương tự cũng có $BK \parallel HA$ (2)

Từ (1), (2) có tứ giác BHAK là hình bình hành

Mà I là trung điểm của AB (gt).

Nên I là trung điểm của HK

Vậy H, I, K thẳng hàng.



Bài 15. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm C thuộc đường tròn (O) (C không trùng với A, B). M là điểm chính giữa cung nhỏ AC. Các đường thẳng AM và BC cắt nhau tại I, các đường thẳng AC và BM cắt nhau tại K. BM cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK cắt đường tròn (B, BA) tại D (D không trùng với I). Chứng minh ba điểm A, C, D thẳng hàng.

(Trích đề thi vào lớp 10, THPT, tỉnh Hà Nam, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

Ta có: $\widehat{AM} = \widehat{MC} \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{MBC}$

Mà $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

ΔBAI cân tại B $\Rightarrow BI = BA \Rightarrow I \in$ đường tròn (B, BA).

Ta có: $\widehat{ADI} = \frac{1}{2} \widehat{ABI}$

Xét đường tròn (BIK) qua D $\Rightarrow \widehat{KDI} = \widehat{KBI}$

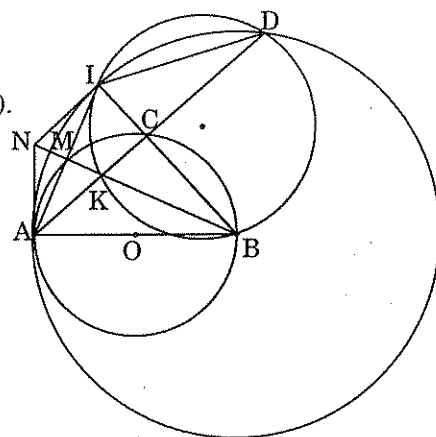
Do đó $\widehat{KDI} = \frac{1}{2} \widehat{ABI}$. Ta có $\widehat{ADI} = \widehat{KDI} \left(= \frac{1}{2} \widehat{ABI} \right)$

$\Rightarrow$ Hai tia DK, DA trùng nhau.

$\Rightarrow D, K, A$ thẳng hàng

Mà A, C, K thẳng hàng. Do đó D, K, A, C thẳng hàng

Vậy ba điểm A, C, D thẳng hàng.



Bài 16. (Lớp 9) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là H. Giả sử M là một điểm trên cung BC không chứa A (M khác B, C) Gọi N, P lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC.

Chứng minh rằng ba điểm N, H, P thẳng hàng

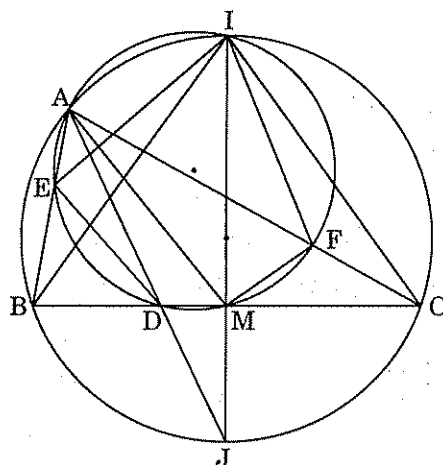
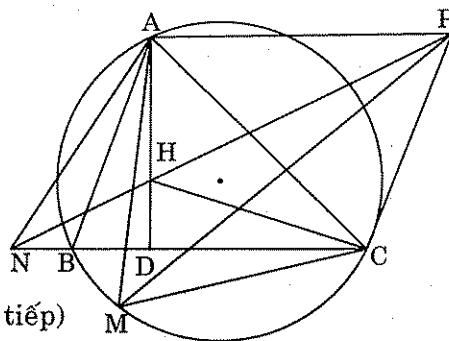
(Trích đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2007 – 2008)

Lời giải

Gọi D là giao điểm của AH và BC

$\widehat{BHD} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{HBD}$)

$\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$, $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$



thẳng MD cắt (O) tại điểm thứ hai P. Chứng minh A, N, P thẳng hàng.

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4, năm 2001)

Lời giải

Vẽ $BE \perp OM$ tại E

Chứng minh được: $MB^2 = MP.MD$

$$MB^2 = ME.MO$$

Do đó: $MP.MD = MEMO$

$\triangle MEP \sim \triangle MDO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MEP} = \widehat{MDO}$

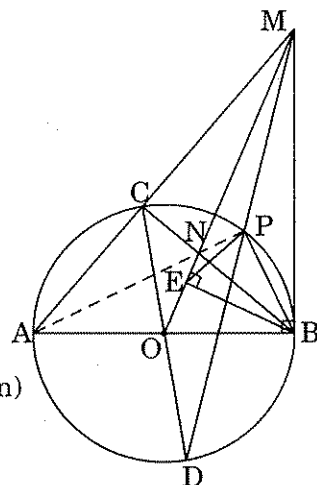
$\Rightarrow$ Tứ giác NPBE nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NPB} + \widehat{NEB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{NPB} = 90^\circ$

Mặt khác $\widehat{APB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Hai tia PN, PA trùng nhau.

Vậy A, N, P thẳng hàng.



Bài 19. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm M trên đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

(Trích đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận Tân Bình, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2004 – 2005)

Lời giải

Gọi D là giao điểm của MC_1 và AB, E là giao điểm của MA_1 và BC, F là giao điểm của MB_1 và AC.

Ta có D, E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng MC_1, MA_1, MB_1 , và có $MC_1 \perp AB, MA_1 \perp BC, MB_1 \perp AC$.

Tứ giác MDBE có: $\widehat{MDB} + \widehat{MEB} = 180^\circ$ nên nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{DBM}$

Mà $\widehat{DBM} = \widehat{MCF}$ (tứ giác ABMC nội tiếp)

Nên $\widehat{DEM} = \widehat{MCF}$

Tứ giác MEFC có $\widehat{MEC} = \widehat{MFC} = 90^\circ$ nên nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MEF} + \widehat{MCF} = 180^\circ$

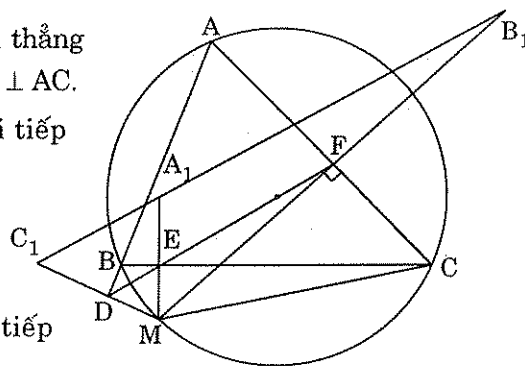
Do vậy $\widehat{DEF} = \widehat{DEM} + \widehat{MEF} = \widehat{MCF} + \widehat{MEF} = 180^\circ \Rightarrow D, E, F$ thẳng hàng

Ta có DE là đường trung bình của tam giác $MC_1A_1 \Rightarrow DE \parallel C_1A_1$

Ta có: $C_1A_1 \parallel DE, B_1C_1 \parallel DE$

$\Rightarrow C_1A_1, B_1C_1$ trùng nhau (tiên đề Ơ-clit)

Vậy ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.



Bài 20. (Lớp 9) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A (M không trùng với B và C). Gọi N và P lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB và AC. Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

Lời giải

CH cắt đường tròn (O) ở D

Ta có $HD \perp AB$, $MN \perp AD \Rightarrow$ Tứ giác MHDN là hình thang

Mà $\widehat{DBA} = \widehat{DCA} = \widehat{ABH}$

$\triangle BDH$ cân tại B

Do đó H, D đối xứng qua AB.

Ta có tứ giác MHDN là hình thang cân

$\Rightarrow \widehat{NHB} = \widehat{MDB}$. Mà $\widehat{MDB} = \widehat{BAM}$

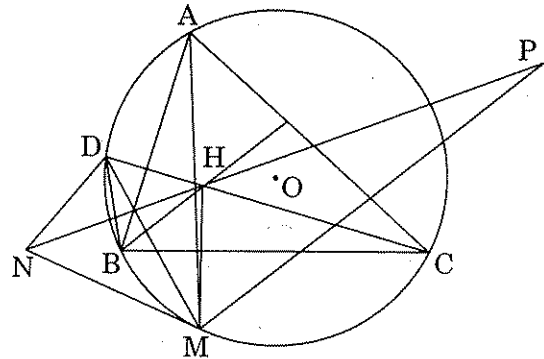
Do vậy $\widehat{NHB} = \widehat{BAM}$

Tương tự: $\widehat{CHP} = \widehat{MAC}$

Ta có: $\widehat{NHP} = \widehat{NHB} + \widehat{BHC} + \widehat{CHP}$

$$= \widehat{BAM} + \widehat{BHC} + \widehat{MAC} = \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm M, H, P thẳng hàng.



Bài 21. (Lớp 9) Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB, điểm I nằm giữa hai điểm A và O. Kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại I, đường thẳng này cắt đường tròn (O; R) tại M và N. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng, BM và AN. Qua S kẻ đường thẳng song song với MN, đường thẳng này cắt các đường AB và AM lần lượt ở K và H. Chứng minh rằng ba điểm H, N, B thẳng hàng.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT tỉnh Nam Định, năm học 2008 – 2009)

Lời giải

Ta có: $SH \parallel MN$ (gt), $MN \perp AB$ (gt) $\Rightarrow SH \perp AB$

Mặt khác $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\triangle SBH$ có HM, BK là hai đường cao ($HM \perp SB$, $BK \perp SH$) cắt nhau tại A

$\Rightarrow A$ trực tâm của tam giác SBH

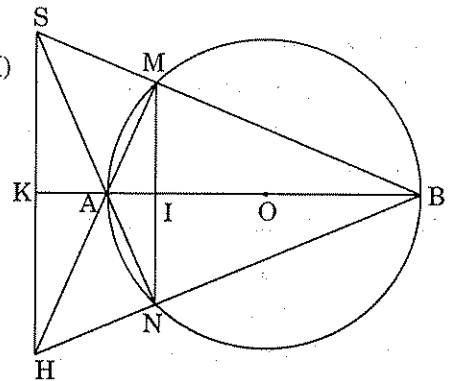
$\Rightarrow SA$ là đường cao của tam giác SBH

$\Rightarrow SA \perp BH$

Ta có: $BH \perp SA$, $BN \perp SA$ ($\widehat{ANB} = 90^\circ$)

$\Rightarrow BH, BN$ trùng nhau.

Vậy ba điểm H, N, B thẳng hàng.



Bài 22. (Lớp 9) Cho tam giác ABC. Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Trên các cạnh AC và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AB \cdot AM = AO^2$ và $BN \cdot AB = BO^2$. Chứng minh rằng M, O, N thẳng hàng.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, trường THPT Quốc học Huế, tỉnh Thừa Thiên – Huế, năm học 2003 – 2004)

Lời giải

Ta có O là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC.

Xét $\triangle AMO$ và $\triangle AOB$ có:

$$\widehat{MAO} = \widehat{OAB} \text{ (AO là tia phân giác góc BAC)}$$

$$\frac{AM}{AO} = \frac{AO}{AB} \text{ (vì } AB \cdot AM = AO^2 \text{)}$$

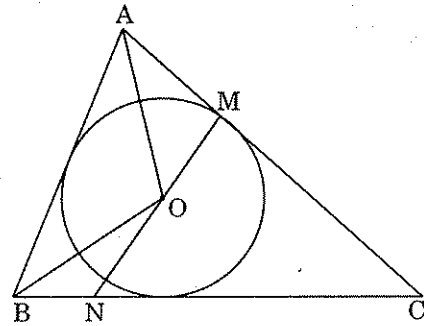
$$\text{Do đó } \triangle AMO \sim \triangle AOB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{ABO}$$

$$\text{Tương tự có: } \triangle BON \sim \triangle BAO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BON} = \widehat{BAO}$$

$$\triangle OAB \text{ có } \widehat{ABO} + \widehat{BAO} + \widehat{AOB} = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \widehat{MON} &= \widehat{AOM} + \widehat{BON} + \widehat{AOB} \\ &= \widehat{ABO} + \widehat{BAO} + \widehat{AOB} = 180^\circ \end{aligned}$$

Vậy ba điểm M, O, N thẳng hàng.



Bài 23. (Lớp 9) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Lấy điểm C thuộc đường tròn (O) sao cho $CA > CB$. Các tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) cắt nhau tại D. Vẽ hình bình hành BODE. Chứng minh rằng ba điểm B, C, E thẳng hàng.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Đại học Vinh, năm học 2012 – 2013)

Lời giải

DA, DC là các tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow OD$ là tia phân giác của góc AOC

$$\Rightarrow \widehat{AOD} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}$$

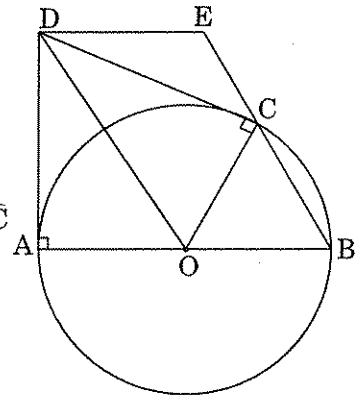
$$\text{Mà } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} \text{ (hệ quả góc nội tiếp). Do đó } \widehat{AOD} = \widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow BC \parallel OD$$

Mà $BE \parallel OD$ (tứ giác BODE là hình bình hành)

Do đó BC, BE trùng nhau (tiên đềƠ-clit)

Vậy ba điểm B, C, E thẳng hàng.



Bài 24. (Lớp 9) Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 15^\circ$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M, I lần lượt là trung điểm của BC, OC. Chứng minh rằng A, M, I thẳng hàng.

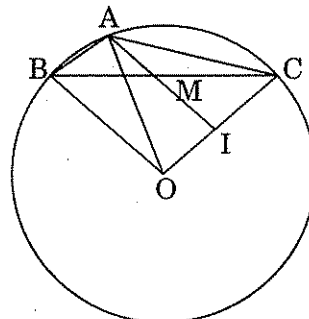
(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán trường THPT Năng Khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2002 – 2003)

Lời giải

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{AC}$$

$$\Rightarrow \text{sd}\widehat{AC} = 2\widehat{ABC} = 60^\circ$$

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{AB}$$



$$\Rightarrow \widehat{sđAB} = 2\widehat{ACB} = 30^\circ$$

$$\widehat{sđBC} = \widehat{sđAC} + \widehat{sđAB} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

ΔOAC cân tại O (vì $OA = OC = R$) có $\widehat{AOC} = 60^\circ (= \widehat{sđAC})$.

Nên là tam giác đều. Mà AI là đường trung tuyến nên AI cũng là đường cao $\Rightarrow AI \perp OC$

Mà $BO \perp OC$ ($\widehat{BOC} = 90^\circ$), $AI \perp OC \Rightarrow AI \parallel BO$

Mặt khác $MI \parallel BO$ (MI là đường trung bình của ΔOBC)

Do đó MI, AI trùng nhau (Tiên đề O-clit)

Vậy ba điểm A, M, I thẳng hàng.

Bài 25. (Lớp 9) Cho tam giác ABC vuông tại A ; $\widehat{B} = 60^\circ$, AM là đường phân giác. Vẽ đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng BC cắt đoạn thẳng AC tại N , cắt đường thẳng AB tại P , O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC . I là trung điểm của đoạn thẳng PC . Chứng minh rằng M, O, I thẳng hàng.

(Trích đề thi vào lớp 10, THPT Tp. Hà Nội, năm học 2008 – 2009)

Lời giải

Ta có: $\widehat{PMC} = 90^\circ$ ($PM \perp BC$)

$$\widehat{CAP} = 90^\circ \text{ (} AB \perp AC \text{)}$$

Do đó tứ giác $APCM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPC} = \widehat{MAC}$

$$\text{Mà } \widehat{MAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 45^\circ. \text{ Nên } \widehat{MPC} = 45^\circ$$

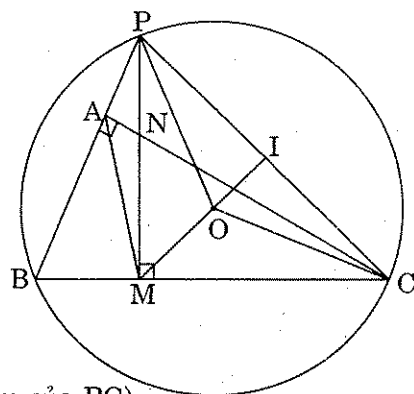
ΔMPC vuông tại M , $\widehat{MPC} = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta MPC$ vuông cân tại $M \Rightarrow MP = MC$

Ta có: $MP = MC, OP = OC (= R), IP = IC$ (I là trung điểm của PC)

$\Rightarrow M, O, I$ cùng thuộc đường trung trực của PC

Vậy ba điểm M, O, I thẳng hàng.



Bài 26. (Lớp 9) Trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm N sao cho $AN = R$ và M là một điểm bất kì trên cung nhỏ BN (M không trùng với B, N). Gọi I là giao điểm của AM và BN . Đường thẳng đi qua I vuông góc với AB tại H , cắt tia AN tại điểm C . Chứng minh rằng B, M, C thẳng hàng.

(Trích đề thi vào lớp 10, THPT khối chuyên Toán – Tin, Tp. Hà Nội, năm học 2011 – 2012)

Lời giải

Ta có: $\widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

ΔABC có $CI \perp AB$ (gt), $EN \perp AC$ ($\widehat{ANB} = 90^\circ$)

CI cắt BN tại I . Do đó I là trực tâm của tam giác ABC

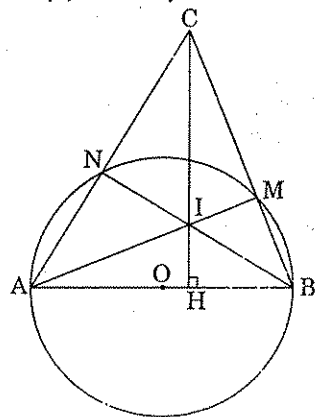
$\Rightarrow AI \perp BC$

Mặt khác $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AI \perp BM$

Ta có: $BC \perp AI, MB \perp AI \Rightarrow BC, MB$ trùng nhau

Vậy ba điểm B, M, C thẳng hàng.



Bài 27. (Lớp 9) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt đường tròn (O) tại điểm M. Đường phân giác của góc A cắt đường tròn (O) tại N.

a) Chứng minh rằng M, O, N thẳng hàng

b) Trên cạnh AC lấy điểm D tùy ý (khác A và C). Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Đường thẳng qua A vuông góc với AB và đường thẳng qua F vuông góc với FC cắt nhau tại P. Chứng minh rằng P, D, O thẳng hàng.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh Phú Thọ, năm học 2002 – 2003)

Lời giải

a) AM, AN là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAx}$

$$\Rightarrow \widehat{MAN} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ MN là đường kính của đường tròn (O)

Vậy M, O, N thẳng hàng.

b) Gọi S là giao điểm của AP và đường tròn (O)

Ta có: $\widehat{BAS} = 90^\circ$.

Nên BS là đường kính của đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{BFS} = 90^\circ$

Gọi K là điểm đối xứng của F qua PD

Xét P nằm trong đường tròn (O) (trường hợp P nằm ngoài đường tròn (O), chứng minh tương tự). Gọi Fy là tia đối của tia F

Ta có: $\widehat{PFD} = \widehat{SFC}$ (cùng phụ với $\widehat{BFC}$)

Mà $\widehat{SFC} = \widehat{SAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung SC) và $\widehat{PFD} = \widehat{PKD}$ (K, F đối xứng qua PD)

Do đó $\widehat{PKD} = \widehat{CAS}$

$\Rightarrow$ Tứ giác AKPD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KAP} = \widehat{KDP}$

Mà $\widehat{KDP} = \widehat{FDP}$ (K, F đối xứng qua PD)

Nên $\widehat{KAP} = \widehat{FDP}$

Ta có: $\widehat{FDP} = 90^\circ - \widehat{DFK} = \widehat{KFy}$

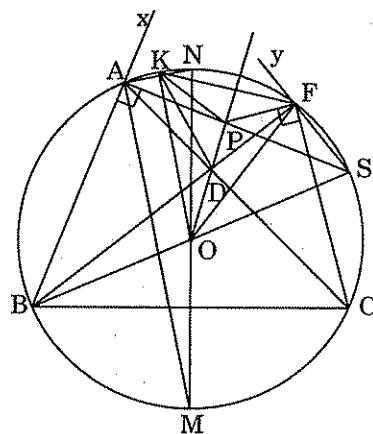
Nên $\widehat{KAP} = \widehat{KFy}$

$\Rightarrow$ Tứ giác AKSF nội tiếp

$\Rightarrow$ K thuộc đường tròn (O) $\Rightarrow OK = OF (= R)$

Do đó O thuộc đường thẳng PD

Vậy ba điểm P, D, O thẳng hàng.



Bài 28. (Lớp 9) Cho đường tròn (O; R) và đường tròn (O'; R') tiếp xúc ngoài tại A ($R > R'$).

Vẽ các đường kính AOB của đường tròn (O), AO'C của đường tròn (O'). Dây DE của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC. Gọi I là giao điểm của EC với đường tròn (O'). Chứng minh rằng D, A, I thẳng hàng.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, tỉnh Vĩnh Long, năm học 2007 – 2008)

Lời giải

Ta có $OO' \perp DE$ tại K (gt)

$\Rightarrow K$ là trung điểm của DE .

Mà K là trung điểm của BC .

Do đó tứ giác $BDCE$ là hình bình hành

$\Rightarrow BD \parallel EC$

Ta có:

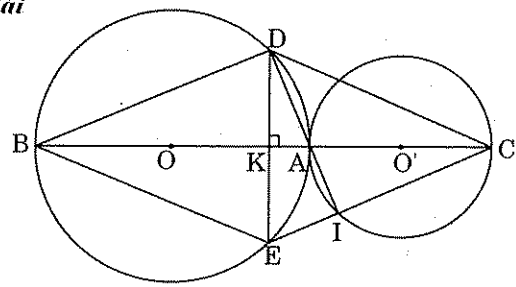
$\widehat{BDA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn và $\widehat{AIC} = 90^\circ$)

$\Rightarrow AI \perp EC$

Mà $BD \parallel EC$. Ta có: $AI \perp BD$, $AD \perp BD$ ($\widehat{BDA} = 90^\circ$)

Nên AI , AD trùng nhau

Vậy D, A, I thẳng hàng.



Bài 29. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D trên cạnh AC , E trên cạnh AB). Gọi I là trung điểm BC , đường tròn đi qua B, E, I và đường tròn đi qua C, D, I cắt nhau tại K (K khác I). Đường thẳng DE cắt BC tại M . Chứng minh ba điểm M, H, K thẳng hàng.

(Trích đề thi vào lớp 10, THPT chuyên Nguyễn Trãi, tỉnh Hải Dương, năm học 2007 – 2008)

Lời giải

Ta có: $\widehat{AEK} = \widehat{BIK}$ (tứ giác $BEKI$ nội tiếp)

$\widehat{BIK} = \widehat{CDK}$ (tứ giác $ICDK$ nội tiếp)

Do đó $\widehat{CDK} = \widehat{AEK}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEKD$ nội tiếp

Mà $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHD$ nội tiếp

Do đó A, E, H, K, D cùng thuộc một đường tròn, đường kính AH

$\Rightarrow \widehat{HKA} = 90^\circ$, $\widehat{ADE} = \widehat{AKE}$

Tứ giác $BEDC$ có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BEDC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

Mà $\widehat{EBI} + \widehat{EKI} = 180^\circ$ (tứ giác $BEKI$ nội tiếp). Nên $\widehat{AKE} + \widehat{EKI} = 180^\circ$

$\Rightarrow A, K, I$ thẳng hàng và có $\widehat{IKC} = \widehat{IDC} = \widehat{ICD}$, $\widehat{ICD} = \widehat{ICK} + \widehat{KCD}$

Nên $\widehat{KAC} = \widehat{ICK}$, $\widehat{KAD} = \widehat{DEK}$

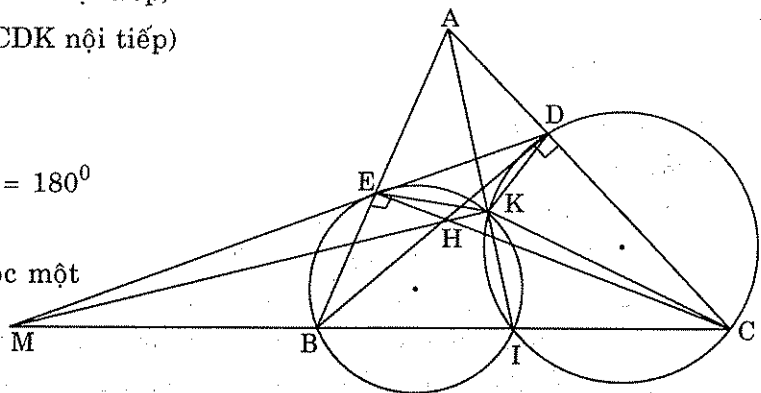
$\Rightarrow \widehat{EDK} = \widehat{ICK} \Rightarrow$ Tứ giác $MEKC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MKC}$

Mà $\widehat{IKC} = \widehat{AED} = \widehat{MED}$, $\widehat{MEC} = \widehat{MEB} + 90^\circ$, $\widehat{MKC} = \widehat{MKI} + \widehat{IKC}$

Do đó $\widehat{MKI} = 90^\circ$. Ta có $HK \perp AI$, $MK \perp AI$

Vậy M, H, K thẳng hàng.



Bài 30. (Lớp 9) Cho đường tròn nội tiếp tam giác ABC, đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB lần lượt ở D, E, F. Đường tròn (J) tiếp xúc với BC ở D và tiếp xúc trong với đường tròn (I) ở D ($JD < ID$). Vẽ BM, CN là các tiếp tuyến của đường tròn (J) (M, N khác D). Gọi S là giao điểm của MN và EF. Chứng minh rằng ba điểm S, B, C thẳng hàng.

(Đề kiểm tra đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 9, quận 1, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2011 – 2012)

Lời giải

Vẽ SD_1 là tiếp tuyến của đường tròn (I), SD là tiếp tuyến của đường tròn (J) (xem hình vẽ)

Gọi K là giao điểm của BM, CN

$$\begin{aligned}\widehat{MFE} + \widehat{MNE} &= \left[90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} - \left(\frac{180^\circ - \widehat{MBF}}{2} \right) \right] + \left(90^\circ + \frac{\widehat{NCE}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{BKC}}{2} \right) \\ &= 180^\circ + \frac{\widehat{BAC} + \widehat{MBF} + \widehat{NCE} - \widehat{BKC}}{2} \\ &= 180^\circ + \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC} - \widehat{KBC} + \widehat{ACB} - \widehat{KCB} - \widehat{BKC}}{2} = 180^\circ\end{aligned}$$

Nên tứ giác MNEF nội tiếp. Do đó có: $SE.SF = SM.SN$

$\Delta SD_1F \sim \Delta SED_1$ (g.g)

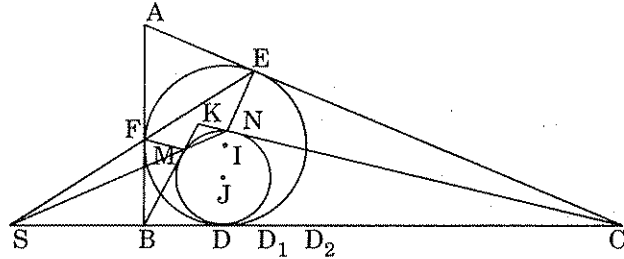
$$\Rightarrow \frac{SD_1}{SE} = \frac{SF}{SD_1} \Rightarrow SD_1^2 = SE.SF$$

Tương tự: $SD_2^2 = SM.SN$.

Do đó $SD_1 = SD_2 \Rightarrow D_1 \equiv D_2$

Do vậy D_1, D, D_2 trùng nhau.

Vậy S, B, C thẳng hàng.



Bài 31. (Lớp 9) Cho đoạn thẳng $AB = 2a$ có trung điểm là O. trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn (O) đường kính AB và nửa đường tròn (O'), đường kính AO. Trên (O') lấy một điểm M (khác A và O), tia OM cắt (O) tại C, gọi D là giao điểm thứ hai của CA và (O'). Đường thẳng AM cắt OD tại H, đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt (O) tại điểm thứ hai N. Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng.

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên, THPT Chu Văn An và THPT Hà Nội – Amsterdam, năm học 2003 – 2004)

Lời giải

Ta có: $\widehat{ADO} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

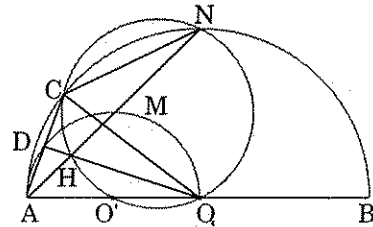
$OA = OC (= a) \Rightarrow \Delta OAC$ cân tại O

$\Rightarrow OD$ là tia phân giác góc AOC

Ta có $\widehat{CNA} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \widehat{COD}$

Mặt khác $\widehat{CNH} = \widehat{COH}$ (tứ giác CHON nội tiếp)

Ta có $\widehat{CNH} = \widehat{CNA} \Rightarrow$ Hai tia NH và NA trùng nhau



$\Rightarrow N, H, A$ thẳng hàng

Mà A, H, M thẳng hàng. Do đó A, H, M, N thẳng hàng.

Vậy A, M, N thẳng hàng.

Bài 32. (Lớp 9) Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB . Đường tròn (O_1) đường kính AH cắt CA tại E , đường tròn (O_2) đường kính BH cắt CB tại F . Gọi (O_3) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB , D là điểm đối xứng của C qua O . Chứng minh rằng ba điểm H, O_3, D thẳng hàng.

(Trích đề thi vào lớp 10 khối THPT chuyên Đại học sư phạm Hà Nội, năm 2009 – 2010).

Lời giải

Ta có $\widehat{AEH} = 90^\circ, \widehat{BFH} = 90^\circ$

$\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó $\widehat{ECF} = \widehat{CEH} = \widehat{HFC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CFHE$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ Tứ giác $ECFH$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CHE} = \widehat{CFE}$

Mà $\widehat{CHE} = \widehat{EAB}$ (cùng phụ với góc AHE)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEFB$ nội tiếp

Gọi I là giao điểm của EF và CH

Ta có I là giao điểm của CH và EF

Gọi K là giao điểm của CD và EF ta có $\widehat{CEK} = \widehat{ABC} = \widehat{ADK}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $EKDA$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EKC} = \widehat{EAD} = 90^\circ$

Ta có $CO \perp EF; O_3I \perp EF$

$\Rightarrow CO \parallel O_3I$ và $OO_3 \perp AB, CI \perp AB \Rightarrow OO_3 \parallel CI$

Do đó tứ giác O_3OCI là hình bình hành

$\Rightarrow OO_3 = CI = IH$

Ta có tứ giác $OIH O_3$ là hình bình hành

$\Rightarrow O_3H \parallel OI$

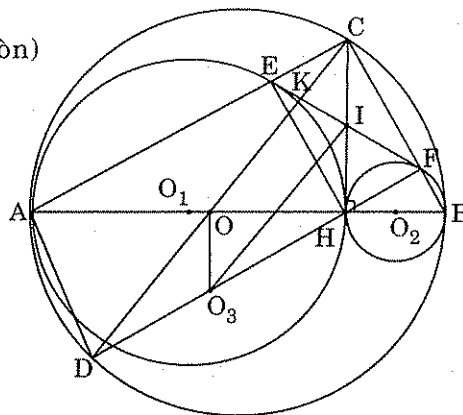
Mặt khác OI là đường trung bình của tam giác CDH

$\Rightarrow DH \parallel OI$

Ta có $O_3H \parallel OI$ và $DH \parallel OI$

$\Rightarrow O_3H$ và DH trùng nhau (Tiên đềƠ-clít)

Vậy ba điểm H, O_3, D thẳng hàng.



Bài 33. (Lớp 9) Cho ngũ giác $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) sao cho tia BA và tia DE cắt nhau tại M . Tia AE và tia CD cắt nhau tại N . Gọi K là giao điểm của BC và tiếp tuyến đường tròn (O) tại M . Gọi P là giao điểm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM, CEK . Chứng minh rằng ba điểm M, P, K thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{MPE} = \widehat{MAE}$ (tứ giác MPAE nội tiếp) và

$\widehat{EAB} + \widehat{ECB} = 180^\circ$ (tứ giác ABCE nội tiếp)

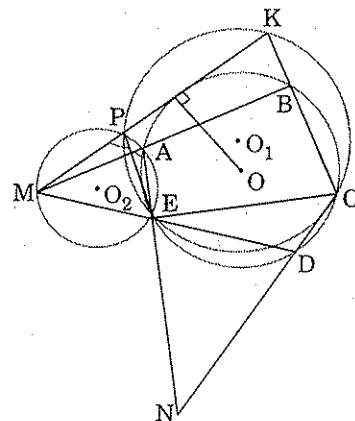
$\widehat{EAB} + \widehat{MAE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Do đó $\widehat{MAE} = \widehat{ECB} = \widehat{MPE}$

Mặt khác $\widehat{EPK} + \widehat{ECK} = 180^\circ$ (vì tứ giác EPKC nội tiếp)

Ta có: $\widehat{MPK} = \widehat{MPE} + \widehat{EPK} = \widehat{ECB} + \widehat{EPK} = 180^\circ$

Vậy M, P, K thẳng hàng.



Bài 34. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (C) và M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BC, N là điểm đối xứng của M qua trung điểm I của AB. K là trực tâm của tam giác NAB. Giả sử MC cắt AB tại D, hạ KE vuông góc với BC. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, J là trung điểm của HK. Chứng minh rằng D, E, J thẳng hàng. (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán – Tin trường THPT năng khiếu, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2004 – 2005)

Lời giải

Tứ giác BNAM là hình bình hành suy ra $BN \parallel AM$ và $AN \parallel BM$. Mặt khác $BK \perp NA$, $AK \perp NB$ (K là trực tâm tam giác NAB).

Do đó $BK \perp BM$, và $AK \perp AM$. Tứ giác BKAM nội tiếp đường tròn đường kính BM. Vậy K thuộc đường tròn (C)

Gọi S là điểm đối xứng của K qua E; R là điểm đối xứng của K qua D. Ta có $\widehat{BKC} = \widehat{BSC}$ (tính đối xứng); $\widehat{BKC} = \widehat{BAC}$ nên $\widehat{BSC} = \widehat{BAC}$

Mà $\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ nên $\widehat{BHC} + \widehat{BSC} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCS nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BHS} = \widehat{BSC} = \widehat{BCK}$ (1)

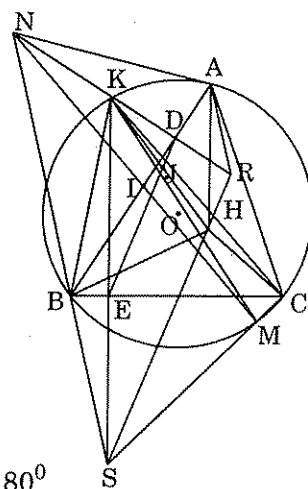
Tương tự ta cũng có tứ giác ABHR nội tiếp suy ra:

$\widehat{AHR} = \widehat{ABR} = \widehat{ABK}$ (2)

Từ (1), (2) có $\widehat{AHB} + \widehat{BHS} + \widehat{AHR} = \widehat{AHB} + \widehat{BCK} + \widehat{ABK}$
 $= \widehat{AHB} + \widehat{BCK} + \widehat{ACK} = 180^\circ$

Suy ra S, H, R thẳng hàng. Vì DE là đường trung bình của tam giác KRS, nên DE đi qua trung điểm J của HK.

Vậy D, E, J thẳng hàng.



Bài 35. (Lớp 9) Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, H là trực tâm tam giác. Dựng đường tròn tâm O, đường kính BC, qua A vẽ các tiếp tuyến AP, AQ với đường tròn (P, Q là các tiếp điểm). Chứng minh rằng P, H, Q thẳng hàng.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Quảng Ninh, năm học 2006 – 2007)

Lời giải

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường tròn (O) với AC, AB (E khác C, F khác B), AH cắt BC ở D.

Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó B, H, E thẳng hàng, C, H, F thẳng hàng.

Ta có $\widehat{APO} = \widehat{AQO} = \widehat{ADO} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ A, P, D, O, Q cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{APD} + \widehat{AQD} = 180^\circ$

Xét $\triangle AHF$ và $\triangle ABD$ có: $\widehat{HAF}$ (chung), $\widehat{AFH} = \widehat{ADB} (= 90^\circ)$

Do đó $\triangle AHF \sim \triangle ABD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AH \cdot AD = AF \cdot AB$

Xét $\triangle APF$ và $\triangle ABP$ có: $\widehat{PAF}$ (chung), $\widehat{APF} = \widehat{ABP}$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Do đó $\triangle APF \sim \triangle ABP$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AP^2 = AF \cdot AB$

Ta có: $AP^2 = AH \cdot AD (= AF \cdot AB)$

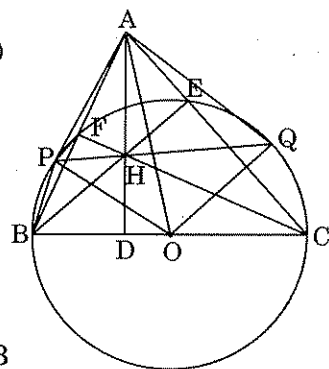
Xét $\triangle APH$ và $\triangle ADP$ có: $\widehat{PAH}$ (chung), $\frac{AP}{AD} = \frac{AH}{AP}$ (vì $AP^2 = AH \cdot AD$)

Do đó $\triangle APH \sim \triangle ADP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHP} = \widehat{APD}$

Chứng minh tương tự có $\widehat{AHQ} = \widehat{AQD}$

Ta có: $\widehat{PHQ} = \widehat{AHP} + \widehat{AHQ} = \widehat{APD} + \widehat{AQD} = 180^\circ$

Vậy ba điểm P, H, Q thẳng hàng.



Bài 36. (Lớp 9) Cho tứ giác PQRS nội tiếp, $\widehat{PSR} = 90^\circ$. H, K lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ Q xuống PR, RS. Chứng minh rằng H, K và trung điểm T của QS thẳng hàng.

(Đề thi vô địch Toán, Hồng Kông, năm 1998)

Lời giải

Vẽ $QI \perp SP$. Tứ giác SIQK có $\widehat{ISK} = 90^\circ$ (gt), $\widehat{QIS} = 90^\circ$ ($QI \perp SP$), $\widehat{SKQ} = 90^\circ$ ($QK \perp SR$)

$\Rightarrow$ Tứ giác SIQK là hình chữ nhật

Mà T là trung điểm của QS (gt). Do đó T là trung điểm của IK

$\Rightarrow$ I, K, T thẳng hàng (1)

Mặt khác, tứ giác IQHP có $\widehat{QIP} + \widehat{QHP} = 180^\circ$ nên nội tiếp

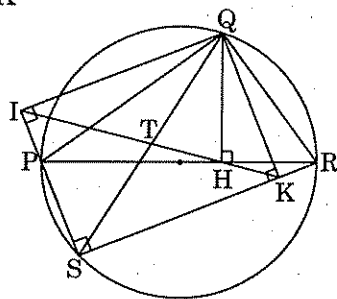
$\Rightarrow \widehat{QHI} = \widehat{QPI}$

Tứ giác QHQR có $\widehat{QHR} = \widehat{QKR} = 90^\circ$ nên nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{QHK} + \widehat{QRK} = 180^\circ$

Ta có $\widehat{QPI} = \widehat{QRK}$ (tứ giác PQRS nội tiếp)

Nên $\widehat{QHI} = \widehat{QRK}$. Do đó: $\widehat{IHK} = \widehat{QHK} + \widehat{QHI} = \widehat{QHK} + \widehat{QRK} = 180^\circ$



$\Rightarrow I, H, K$ thẳng hàng (2)

Từ (1), (2) có I, H, T, K thẳng hàng

Vậy H, K, T thẳng hàng.

Bài 37. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH , nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ đường tròn $(A; AH)$ cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt M và N . Từ B và C vẽ hai tiếp tuyến BD và CE đến đường tròn (A) (D và E là hai tiếp điểm, $D \neq H, E \neq H$). Gọi P là giao điểm của AB và HD , Q là giao điểm của AC và HE . Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

(Đề kiểm tra đội tuyển học sinh quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2009 – 2010)

Lời giải

Vẽ đường kính AK của đường tròn (O) , AK cắt MN ở I , AK cắt PQ ở I' .

Hai đường tròn (A) và (O) cắt nhau tại M, N

$\Rightarrow AK$ là trung trực của đoạn thẳng MN

$\Rightarrow AK \perp MN$

$\widehat{AMK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

ΔMAK vuông tại M , MI là đường cao $\Rightarrow AI \cdot AK = AM^2$

$$\Rightarrow AI = \frac{AM^2}{AK} = \frac{AM^2}{2R}$$

Chứng minh được $AP \cdot AB = AH^2 \cdot AQ \cdot AC = AH^2$.

Nên $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$

$\Delta APQ \sim \Delta ACB \Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BPQC$ nội tiếp

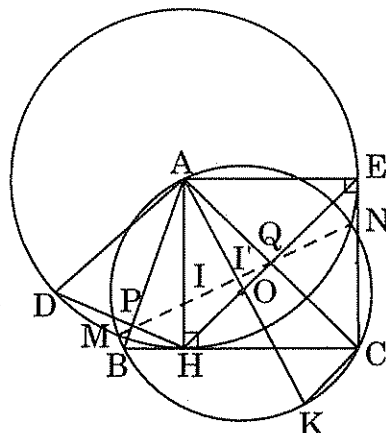
Do đó $AI \perp PQ$

$$AI' \cdot AK = AQ \cdot AC = AH^2$$

$$AI' = \frac{AH^2}{AK} = \frac{AM^2}{2R}$$

Ta có: $AI = AI' \Rightarrow I = I'$. Hai đường thẳng PQ và MN trùng nhau.

Vậy bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.



Bài 38. (Lớp 9) Cho đường tròn (O) có tâm O và điểm M nằm ngoài đường tròn (O) . Đường thẳng MO cắt (O) tại E và F ($ME < MF$). Vẽ cát tuyến MAB và tiếp tuyến MC của (O) (C là tiếp điểm, A nằm giữa hai điểm M và B , A và C nằm khác phía đối với đường thẳng MO). Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm C lên đường thẳng MO . Trên nửa mặt phẳng bờ OM có chứa điểm A , vẽ nửa đường tròn đường kính MF ; nửa đường tròn này cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở K . Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng CO và KF . Gọi P và Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác EFS và ABS và T là trung điểm của KS . Chứng minh ba điểm P, Q, T thẳng hàng.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013)

Lời giải

Gọi I là giao điểm của MS và KC

$$\triangle MBD \text{ có } PT' \parallel BD \Rightarrow \frac{PT'}{BD} = \frac{MT'}{MD}$$

$$\triangle MCD \text{ có } QT' \parallel CD \Rightarrow \frac{QT'}{CD} = \frac{MT'}{MD}$$

$$\text{Ta có: } \frac{PT'}{BD} = \frac{QT'}{CD} \left(= \frac{MT'}{MD} \right), BD = CD \Rightarrow PT' = QT'$$

$\Rightarrow T'$ là trung điểm của PQ

Về Pt là tiếp tuyến của đường tròn (O_1) (tia Pt nằm trên nửa mặt phẳng bờ MP có chứa Q)

Ta có: $\widehat{MPt} = \widehat{MKP}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung),

$$\widehat{MKP} = \widehat{MPQ} (= \widehat{MBI})$$

$\Rightarrow \widehat{MPt} = \widehat{MKP} \Rightarrow$ Hai tia Pt, PQ trùng nhau

$\Rightarrow PQ$ là tiếp tuyến của đường tròn (O_1)

Tương tự PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O_2)

Xét $\triangle TPM$ và $\triangle TNP$ có $\widehat{PTM}$ (chung), $\widehat{TPM} = \widehat{TNP}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung). Do đó $\triangle TPM \sim \triangle TNP$ (g.g) $\Rightarrow \frac{TP}{TN} = \frac{TM}{TP} \Rightarrow TP^2 = TM.TN$

Chứng minh tương tự có: $TQ^2 = TM.TN$

Ta có: $TP^2 = TQ^2 (= TM.TN) \Rightarrow TP = TQ$

$\Rightarrow T$ là trung điểm của PQ. Như vậy $T \equiv T'$. Do đó M, N, D, T thẳng hàng

Vậy ba điểm M, N, D thẳng hàng.

Bài 40. (Lớp 9) Cho tam giác ABC, O nằm trong tam giác (O không thuộc các cạnh tam giác). Điểm M trên tia OA (M khác O và A) sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM còn cắt tia OB tại điểm N khác B và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM còn cắt tia OC tại điểm P khác C. Gọi I, J lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác MNP. Chứng minh rằng O, I, J thẳng hàng.

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu, năm học 2011 – 2012)

Lời giải

Các tia AO, BO, CO cắt đường tròn (J) lần lượt ở D, E, F

Ta có: $\widehat{OAB} = \widehat{MNE}$ (tứ giác ABNM nội tiếp)

$\widehat{MNE} = \widehat{ODE}$ (tứ giác MNDE nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{ODE}$ (g.g)

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle ODE$ có: $\widehat{OAB} = \widehat{ODE}$, $\widehat{AOB} = \widehat{DOE}$ (đối đỉnh)

$$\text{Do đó: } \triangle OAB \sim \triangle ODE \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OE}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{AC}{DF} = \frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OF}$$

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle ONM$ có $\widehat{AOB}$ chung, $\widehat{OAB} = \widehat{MNO}$ (tứ giác ABNM nội tiếp)

$$\text{Do đó } \triangle OAB \sim \triangle ONM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OA}{ON} = \frac{OB}{OM} \Rightarrow OA.OM = OB.ON$$

Tương tự có $OA.OM = OC.OP$. Do đó $OB.ON = OC.OP \Rightarrow \frac{OB}{OP} = \frac{OC}{ON}$

$\triangle OBC \sim \triangle OPN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OPN}$

Mà $\widehat{OPN} = \widehat{OEF}$. Nên $\widehat{OBC} = \widehat{OEF}$

Xét $\triangle OBC$ và $\triangle OEF$ có $\widehat{BOC} = \widehat{EOF}$ (đối đỉnh) và $\widehat{OBC} = \widehat{OEF}$

Do đó $\triangle OBC \sim \triangle OEF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OF}$.

Ta có: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{DFE}$

$\Rightarrow$ Mà $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AIB}$, $\widehat{DFE} = \frac{1}{2}\widehat{DJE}$

$\Rightarrow$ Nên $\widehat{AIB} = \widehat{DJE}$

$IA = IB (= R)$, $JD = JE (= R')$

Do vậy $\triangle IAB$ cân tại I, $\triangle JDE$ cân tại J. Mà $\widehat{AIB} = \widehat{DJE}$.

Nên $\triangle IAB \sim \triangle JDE$

$\Rightarrow \frac{IA}{JD} = \frac{AB}{DE}$, $\widehat{IAB} = \widehat{JDE}$

Ta có $\widehat{OAB} = \widehat{ODE}$, $\widehat{IAB} = \widehat{JDE} \Rightarrow \widehat{IAO} = \widehat{JDO}$

Xét $\triangle OAI$ và $\triangle ODJ$ có: $\frac{IA}{JD} = \frac{OA}{OD} (= \frac{AB}{DE})$, $\widehat{IAO} = \widehat{JDO}$

Do đó $\triangle OAI \sim \triangle ODJ$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AOI} = \widehat{DOJ}$. Do đó $\widehat{IOJ} = \widehat{DOJ} + \widehat{IOD} = \widehat{AOI} + \widehat{IOD} = 180^\circ$

Vậy ba điểm O, I, J thẳng hàng.

Bài 41. (Lớp 9) Cho đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. C là điểm bất kỳ trên đường tròn (C không trùng A, B). Tiếp tuyến tại A của đường tròn cắt đường thẳng BC tại I. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ dây cung AK vuông góc với OI tại E, vẽ dây cung AD song song với BC. Chứng minh rằng D, M, K thẳng hàng.

(Trích đề kiểm tra học kì II, quận 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013)

Lời giải

IK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

M là trung điểm của BC $\Rightarrow OM \perp BC$.

$\widehat{OAI} = \widehat{OMI} = \widehat{OKI} = 90^\circ$

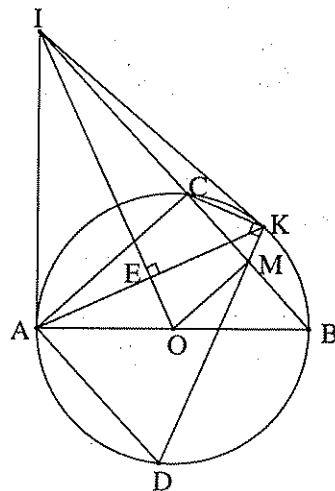
$\Rightarrow A, I, K, M, O$ cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{IAK}$. Mà $\widehat{IAK} = \widehat{ABK}$ nên $\widehat{IMK} = \widehat{ABK}$.

$\widehat{IMK} + \widehat{BMK} = \widehat{ABK} + \widehat{ACK} = 180^\circ$.

Do đó: $\widehat{BMK} = \widehat{ACK}$

$\triangle MBK \sim \triangle CAK$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{AKC}$.



Mặt khác: $AD \parallel BC$

$$\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{BKD}$$

Ta có: $\widehat{BKD} = \widehat{BKM} (= \widehat{AKC})$

$\Rightarrow$ Hai tia KD, KM trùng nhau.

Vậy: ba điểm D, M, K thẳng hàng.

Bài 42. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$), đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E. BE cắt CF tại H, AH cắt BC tại D. Vẽ AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) ($N \in (O)$). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NHD. Chứng minh rằng ba điểm N, I, O thẳng hàng.

(Đề thi thử vào lớp 10 THPT của trường THCS Trần Văn Ôn, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 - 2014)

Lời giải

$$\triangle AEH \sim \triangle ADC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AH \cdot AD$$

$$\triangle ANE \sim \triangle ACN \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AE}{AN} \Rightarrow AE \cdot AC = AN^2$$

$$\text{Do đó: } AH \cdot AD = AN^2 (= AE \cdot AC)$$

$$\triangle ANH \sim \triangle AND \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{ADN}$$

Vẽ tia Nx là tia tiếp tuyến của đường tròn (NHD).

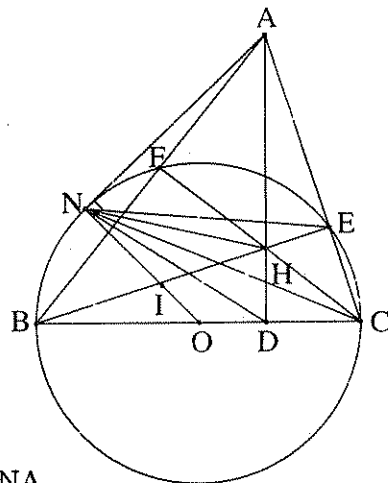
$$\text{Ta có: } \widehat{xNI} = \widehat{ADN}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{xNI} = \widehat{ANH} \Rightarrow \text{Hai tia } Nx, NA \text{ trùng nhau.}$$

$$\text{Do đó: } NA \text{ là tiếp tuyến của đường tròn (NHD)} \Rightarrow IN \perp NA.$$

$$\text{Mà: } ON \perp NA \text{ (AN là tiếp tuyến của (O)) nên } IN, ON \text{ trùng nhau.}$$

Vậy: ba điểm N, I, O thẳng hàng.



Bài 43. (Lớp 9) Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn sao cho $\widehat{BAC}$ nhọn (B, C là hai tiếp điểm). Trên đoạn thẳng OB lấy điểm D sao cho $BC = CD\sqrt{2}$. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với OB. Đường thẳng này cắt CO tại E. Gọi T là trung điểm của đoạn thẳng EB. Chứng minh rằng ba điểm C, T, D thẳng hàng.

(Trích đề tham khảo kiểm tra học kì I, trường THCS Bàn Cờ, quận 3, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 - 2014).

Lời giải

Vẽ đường kính CN của đường tròn (O). Vẽ $BS \perp CN$ tại S.

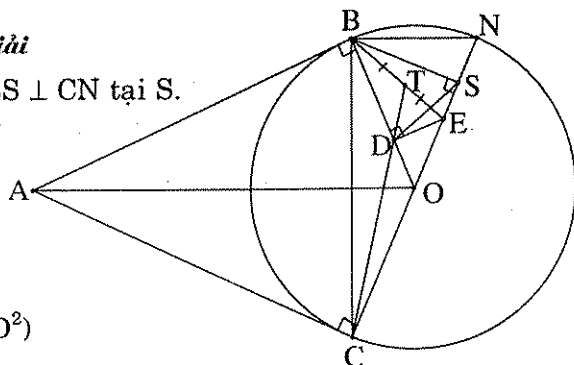
$\triangle BNC$ vuông tại B, BS là đường cao

$$\Rightarrow BC^2 = CS \cdot CN = 2CS \cdot CO$$

$$\text{Mà: } BC^2 = 2CD^2 \text{ (gt) nên } CS \cdot CO = CD^2.$$

Xét $\triangle CDO$ và $\triangle CSD$ có:

$$\widehat{DCO} \text{ (chung)}, \frac{CO}{CD} = \frac{CD}{CS} \text{ (vì } CS \cdot CO = CD^2)$$



Do đó: $\triangle CDO \sim \triangle CSD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CDO} = \widehat{CSD}$

Ta có: $\frac{OD}{OE} = \frac{OS}{OB}$ ($\cos DOE = \cos SOB$)

Xét $\triangle ODS$ và $\triangle OEB$ có $\widehat{DOS}$ (chung), $\frac{OD}{OE} = \frac{OS}{OB}$

Do đó $\triangle ODS \sim \triangle OEB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OSD} = \widehat{OBE}$

$\triangle DBE$ vuông tại D, DT là đường trung tuyến $\Rightarrow TD = TB$

$\Rightarrow \triangle TDB$ cân tại D $\Rightarrow \widehat{TBD} = \widehat{TDB}$

Ta có: $\widehat{CDO} = \widehat{CSD} = \widehat{OBE} = \widehat{TDB}$ nên $\widehat{TDB} + \widehat{BDC} = \widehat{CDO} + \widehat{BDC} = 180^\circ$

(Vì B, D, O thẳng hàng)

Vậy: ba điểm C, T, D thẳng hàng.

Bài 44. (Lớp 9) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AH cắt đường tròn tâm O, đường kính BC tại M và N. Gọi I là trung điểm của AH. Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng.

(Trích đề tham khảo kiểm tra học kì I, trường THCS Bạch Đằng, Quận 3, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014).

Lời giải

Gọi D là giao điểm của MN với OA. $OE \perp AM$ tại E.

Ta có: E là trung điểm của AM. (O), (A) cắt nhau tại M, N

$\Rightarrow MN$ là đường trung trực của OA $\Rightarrow MN \perp OA$.

Ta có: $\frac{AE}{OA} = \frac{AD}{AM}$ ($\cos OAE = \cos MAD$).

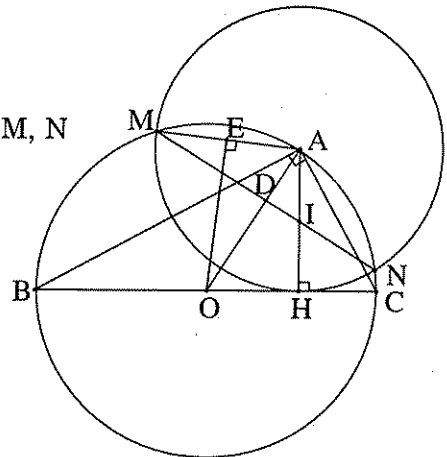
$AE = \frac{AM}{2} = \frac{AH}{2} = AI$. Do đó: $\frac{OI}{OA} = \frac{AD}{AH}$

Xét $\triangle ADI$ và $\triangle AHO$ có: $\widehat{DAI}$ (chung), $\frac{AI}{OA} = \frac{AD}{AH}$.

Do đó $\triangle ADI \sim \triangle AHO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{AHO} = 90^\circ$

Ta có: $DI \perp OA$ tại D, $MN \perp OA$ tại D. Do đó: DI, MN trùng nhau.

Vậy: Ba điểm M, I, N thẳng hàng.



Bài 45. (Lớp 9) Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn (O) đường kính AB và các tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Gọi H là hình chiếu của M trên AB. Gọi E là trung điểm của MH. Chứng minh ba điểm B, E, C thẳng hàng.

(Trích đề tham khảo kiểm tra học kì I, trường THCS Hai Bà Trưng, Quận 3, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

Gọi K là giao điểm của MH và BC.

CA, CM là các tiếp tuyến của nửa đường tròn (O)

$\Rightarrow CA = CM$, CO là tia phân giác góc ACM.

ΔCAM cân tại C, CO là đường phân giác nên cũng là đường cao $\Rightarrow CO \perp AM$.

ΔMAB nội tiếp đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow \Delta MAB$ vuông tại M.

Ta có: $CO \perp AM$, $BM \perp AM \Rightarrow CO \parallel BM$.

Xét ΔHBM và ΔAOC có:

$$\widehat{BHM} = \widehat{OAC} = (90^\circ), \widehat{MBH} = \widehat{COA} \quad (OC \parallel BM).$$

$$\text{Do đó: } \Delta HBM \sim \Delta AOC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MH}{AC} = \frac{BH}{OA}$$

$$\Delta ABC \text{ có } AC \parallel KH \text{ (} AC \perp AB, KH \perp AB \text{)} \Rightarrow \frac{KH}{AC} = \frac{BH}{AB}.$$

$$AB = 2OA \text{ nên } \frac{KH}{AC} = \frac{BH}{2OA} = \frac{MH}{2AC} \Rightarrow KH = \frac{MH}{2} \text{ nên K là trung điểm của MH.}$$

Ta có: $K \equiv E$. Vậy: ba điểm B, E, C thẳng hàng.

Bài 46. (Lớp 9) Cho đường tròn (O; R). Từ điểm A ở ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$, kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm). OA cắt BC tại H. Đường phân giác của góc OCB cắt OB tại E. Kẻ đường phân giác ngoài tại đỉnh B của tam giác OBC, cắt tia CO tại F. Chứng minh rằng ba điểm H, E, F thẳng hàng.

(Trích Đề kiểm tra học kì II, quận Bình Tân, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013)

Lời giải

$$\cos AOB = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ.$$

AB, AC là các tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AOC}$

Do đó: $\widehat{BOF} = \widehat{FOy} = 60^\circ$. Ta có: F là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc H của tam giác OBH $\Rightarrow HF$ là tia phân giác của góc OHB.

Ta còn có: $\frac{EO}{EB} = \frac{OC}{BC}$ (CE là tia phân giác của góc OCB).

$$\text{Mà: } OH = \frac{OC}{2}, HB = \frac{BC}{2} \text{ nên } \frac{EO}{EB} = \frac{OH}{HB}.$$

Từ đó cho ta HE là đường phân giác của tam giác OBH.

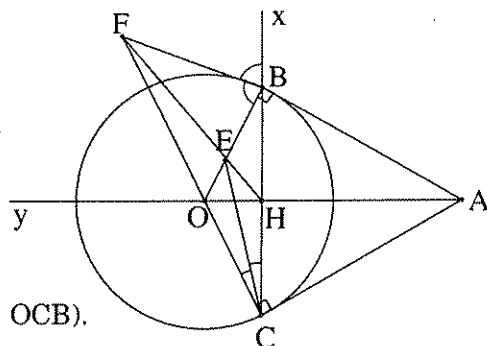
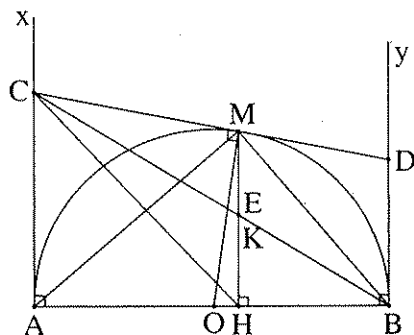
Vậy: H, E, F thẳng hàng.

Bài 47. (Lớp 9) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) tâm O, đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Gọi H là hình chiếu của I lên AD và M là trung điểm của ID. Đường tròn (HMD) cắt (O) tại N (N khác D). Gọi P là giao điểm của BC và HM.

a) Chứng minh rằng tứ giác BCMH nội tiếp.

b) Chứng minh rằng ba điểm P, D, N thẳng hàng.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, chuyên Toán, Trường THPT, Đại học sư phạm TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)



Do đó: $\Delta KCE \sim \Delta KAC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KC}{KA} = \frac{KE}{KC}$$

$$\Rightarrow KC^2 = KE.KA$$

$$KC^2 = KD^2 (= KE.KA) \Rightarrow KC = KD$$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của CD . Do đó $K \equiv I$.

Vậy: Ba điểm A, E, I thẳng hàng.

Bài 49. (Lớp 9) Cho tam giác ABC không phải là tam giác cân. Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P . Đường thẳng NP cắt các đường thẳng BO, CO lần lượt tại E, F . Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF . Chứng minh rằng ba điểm O, M, K thẳng hàng.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, trường THPT chuyên TP. Hà Nội, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

Ta có: $AP = AN \Rightarrow \Delta APN$ cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{ANP} = \widehat{APN} = (180^\circ - \widehat{BAC}) : 2 = (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) : 2$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{EOC} = \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) : 2$$

Do đó: $\widehat{ANP} = \widehat{EOC} \Rightarrow$ Tứ giác $OENC$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{OEC} = \widehat{ONC} = 90^\circ. \text{ Tương tự: } \widehat{OFB} = \widehat{OPB} = 90^\circ.$$

Gọi S là giao điểm của BF và CE .

ΔSBC có BE, CF là hai đường cao cắt nhau tại O

$\Rightarrow O$ là trực tâm của ΔSBC

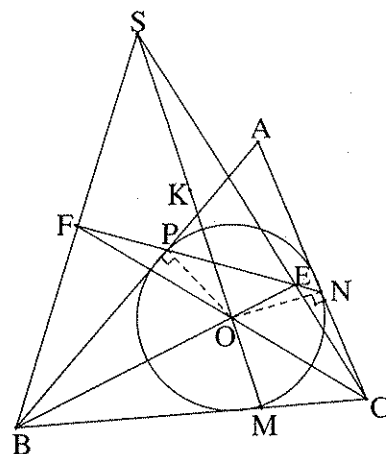
$\Rightarrow SO$ là đường cao của tam giác $SBC \Rightarrow S, O, M$ thẳng hàng (1)

Mặt khác: $\widehat{SFO} = \widehat{SEO} = 90^\circ \Rightarrow S, E, O, F$ nằm trên đường tròn đường kính OS

$\Rightarrow S, K, O$ thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) có: S, O, M, K thẳng hàng.

Vậy: O, M, K thẳng hàng.



Bài 50. (Lớp 9) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Đường tròn (O) đường kính BC cắt AC, AB lần lượt tại D, E . BD cắt CE tại H . AH cắt BC tại I . DE cắt BC tại F . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt AF tại N . Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FID . Chứng minh ba điểm J, N, D thẳng hàng.

(Đề thi thử vào lớp 10, trường THCS Bạch Đằng, Quận 3, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

H là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow AI \perp BC$.

$$\text{Tứ giác } BEHI \text{ nội tiếp nên } \widehat{HEI} = \widehat{HBI}. \text{ Mà } \widehat{HBI} = \widehat{DEC} = \frac{1}{2} \widehat{COD}$$

Do đó: $\widehat{COD} = \widehat{DEI} \Rightarrow$ Tứ giác $OIED$ nội tiếp

$$\Delta FQC \sim \Delta FBT \Rightarrow \frac{FQ}{FB} = \frac{FC}{FT} \Rightarrow FQ \cdot FT = FB \cdot FC$$

$$\text{Do đó: } FI \cdot FM = FQ \cdot FT (= FB \cdot FC)$$

$$\Delta FTM \sim \Delta FIQ \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{FTM} = \widehat{FIQ} = 90^\circ$$

Mặt khác: $\widehat{PTQ} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có: $PT \perp PQ$, $MT \perp TQ \Rightarrow$ Hai đường thẳng PT , MT trùng nhau.

Vậy: P , T , M thẳng hàng.

Bài 52. (Lớp 9) Qua điểm H nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến HAB và HFC sao cho AC cắt BF tại một điểm D nằm trong đường tròn. Đường thẳng qua A vuông góc với AB và đường thẳng qua F vuông góc với FC cắt nhau tại P . Chứng minh rằng O , D , P thẳng hàng.

(Đề tham khảo thi tuyển sinh vào lớp 10, trường THCS Bạch Đằng, quận 3, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

Cách 1: Gọi K là giao điểm của (MPF) và (OMC) .

$$\widehat{FDC} = \frac{sđ \widehat{AB} + sđ \widehat{CD}}{2} = \widehat{FDM} + \widehat{MOC} = \widehat{FKM} + \widehat{MKC} = \widehat{MOC}$$

$\Rightarrow$ $FDKC$ nội tiếp.

$$\widehat{PKF} = \widehat{PMF} = \widehat{ACF} = \widehat{DKF} \Rightarrow PK, PD \text{ trùng nhau}$$

$$\widehat{OKC} = 180^\circ - \widehat{OMC} = 180^\circ - \widehat{DFC} = \widehat{DKC}$$

$\Rightarrow KO, KD$ trùng nhau.

Vậy: O, D, P thẳng hàng.

Cách 2: Gọi T là điểm đối xứng với F qua FD .

Ta có: $\widehat{MFC} = \widehat{PFD}$ (cùng phụ $\widehat{BFC}$),

$$\widehat{PFD} = \widehat{PTD} \text{ (đối xứng trục)} \text{ và } \widehat{MFC} = \widehat{PAD}$$

Có: $\widehat{PAD} = \widehat{PTD} \Rightarrow ATDP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{TAC} = \widehat{TPD}$.

$$\widehat{TPD} = \widehat{FPD} \text{ (đối xứng trục);}$$

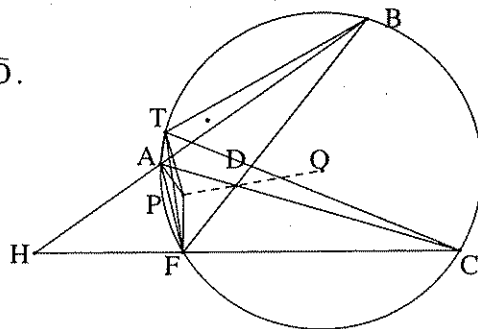
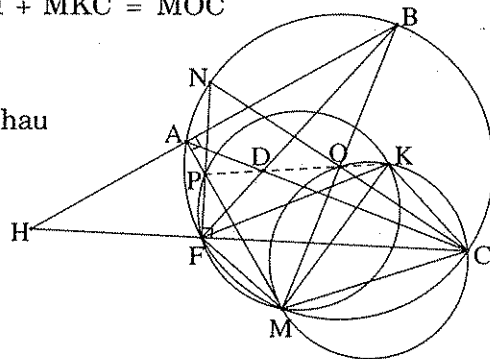
$$\widehat{FPD} = 90^\circ + \widehat{TFD} = \widehat{TFC}$$

Ta có: $\widehat{TAC} = \widehat{TFC} \Rightarrow$ Tứ giác $TAFC$ nội tiếp

$\Rightarrow T \in (O)$

$OT = OF \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của TF

Vậy: O, D, P thẳng hàng.



Bài 53. (Lớp 9) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE , CF cắt nhau tại H . M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF . EF cắt BC tại S . SA cắt đường tròn (O) tại N . Chứng minh rằng: M, H, N thẳng hàng.

(Trích Đề kiểm tra học kì II, quận 10, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013)

Vẽ đường kính AK của đường tròn (O).

$$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow B, F, E, C$ cùng thuộc đường tròn tâm M đường kính BC.

$$\widehat{ACK} = \widehat{ABK} = 90^\circ.$$

Ta có: $BH \parallel KC, BK \parallel HC$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCK là hình bình hành.

Do đó: H, M, K thẳng hàng (1)

Chứng minh được $SB.SC = SF.SE, SN.SA = SB.SC$

$$\Rightarrow SN.SA = SF.SE$$

$$\Delta SNE \sim \Delta SFA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{SEN} = \widehat{SAF}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ANFE nội tiếp

$$\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$$

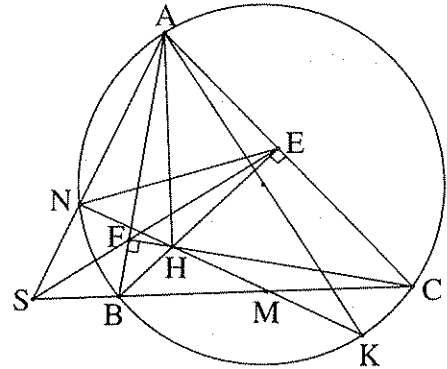
$\Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp

Ta có: A, N, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH

$$\Rightarrow \widehat{ANH} = 90^\circ. \widehat{ANH} = \widehat{ANK} = 90^\circ \Rightarrow N, H, K \text{ thẳng hàng} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có H, M, K, N thẳng hàng.

Vậy: ba điểm M, H, N thẳng hàng.



Bài 54. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm của tam giác ABC. D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Chứng minh rằng H, O, T, G thẳng hàng. (Đề ôn luyện thi vào lớp 10, trường THPT của BDVH 123 Nguyễn Cửu Đàm, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

Vẽ đường kính AM của đường tròn (O).

Tứ giác BHCM là hình bình hành.

D là trung điểm của BC và HM.

ΔABC có AD là đường trung tuyến, G là trọng tâm

$$\Rightarrow G \text{ thuộc đoạn thẳng AD và } AG = \frac{2}{3}AD$$

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác AHM.

Mà HO là đường trung tuyến của ΔAHM nên HO đi qua G.

$\Rightarrow H, G, O$ thẳng hàng.

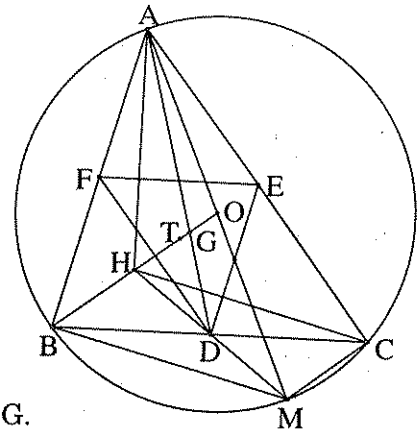
Ta cũng có: Tứ giác AEDF là hình bình hành $\Rightarrow AD$ đi qua trung điểm I của EF.

Do vậy: G là trọng tâm của tam giác DEF.

Mà: $EF \parallel BC, OD \perp BC \Rightarrow OD \perp EF$. Nên có O là trực tâm của tam giác DEF.

Chứng minh tương tự trên, ta có: G, O, T thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) ta có: H, O, T, G thẳng hàng.



Bài 55. (Lớp 8) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), các đường cao BD và CE. DE cắt BC tại K. Các tia phân giác của các góc BAC, DKB cắt nhau tại S. M, N lần lượt là trung điểm của BD, CE. Chứng minh rằng M, S, N thẳng hàng.
(Đề thi dự bị, thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 8, quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013).

Lời giải

Gọi I là giao điểm của tia phân giác góc BAC với MN,
T là giao điểm của tia phân giác góc DKB với MN.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có: $\widehat{BAD}$ (chung), $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} (= 90^\circ)$

Do đó: $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$, $\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$

Nên: $\frac{BM}{CN} = \frac{2BM}{2CN} = \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$ có: $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$, $\frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AC}$.

Do đó: $\triangle ABM \sim \triangle ACN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{CN}$, $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.

Ta có: $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}$, $\widehat{BAM} = \widehat{CAN} \Rightarrow \widehat{MAI} = \widehat{NAI}$

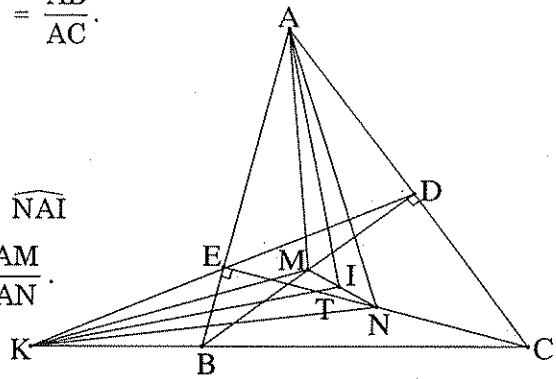
$\triangle AMN$ có AI là đường phân giác $\Rightarrow \frac{IM}{IN} = \frac{AM}{AN}$.

Do đó: $\frac{IM}{IN} = \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{CN} = \frac{BD}{CE}$

Chứng minh tương tự, ta có: $\frac{TM}{TN} = \frac{BD}{CE}$

Do vậy: $\frac{IM}{IN} = \frac{TM}{TN}$ nên I, T trùng nhau. Mà S là giao điểm của các tia phân giác các góc BAC, DKB nên S, I, T trùng nhau.

Vậy: ba điểm M, S, N thẳng hàng.



Bài 56. (Lớp 8) Cho tam giác ABC, hai điểm D, E lần lượt nằm trên các cạnh BC, AB; F nằm trên cạnh AC sao cho EF song song với BC, G nằm trên cạnh BC sao cho EG song song với AD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng trung điểm T của FG nằm trên đường thẳng MN.

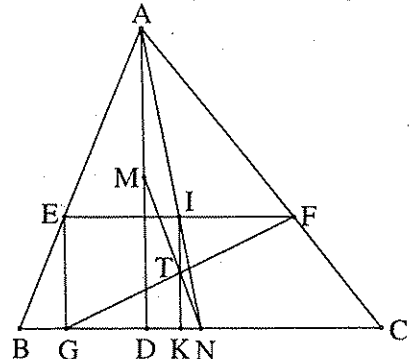
(Đề thi vô địch Toán quốc gia Ru – ma – ni, năm 1999)

Lời giải

AN cắt EF tại I, IT cắt BC tại K. $\triangle ABN$ có $EI \parallel BN$

$\Rightarrow \frac{EI}{BN} = \frac{AI}{AN}$ (1)

$\triangle ACN$ có $IF \parallel NC \Rightarrow \frac{IF}{NC} = \frac{AI}{AN}$ (2)



Mà: $BN = NC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) có $EI = IF$.

IT là đường trung bình của tam giác $EFG \Rightarrow IT \parallel EG$

Tứ giác $EIKG$ là hình bình hành (Vì $EI \parallel GK$ và $EG \parallel IK$) $\Rightarrow EI = GK$

Do đó: $IF = GK (= EI)$. Tứ giác $IFGK$ có $IF \parallel GK$, $IF = GK$.

Do vậy: Tứ giác $IFGK$ là hình bình hành.

Mà T là trung điểm của FG nên T là trung điểm của IK .

Do vậy: $\triangle NIT \sim \triangle NAM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{INT} = \widehat{INM}$. Ta có hai tia NT , NM trùng nhau.

Vậy: ba điểm M , N , T thẳng hàng.

Bài 57. (Lớp 9) Cho điểm A nằm bên trong tam giác KMN . Các điểm B , C lần lượt nằm trên hai cạnh KM , MN . Giả sử $\widehat{CBM} = \widehat{ABK}$, $\widehat{BCM} = \widehat{ACN}$. Chứng minh rằng tâm I đường tròn nội tiếp tam giác BCM và các điểm M , A thẳng hàng.

(Đề thi Toán học quốc tế của các tỉnh thành Mát-xcơ-va, Lê-nin-grát, Ri-ga ở Liên Xô, năm 2001).

Lời giải

Nếu $MB = MC$. Dễ thấy M , A , I thẳng hàng.

Nếu $MB \neq MC$. Không mất tính tổng quát giả sử $MB < MC$.

Gọi D là giao điểm của AC và đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC .

Ta có D thuộc cung nhỏ MC .

$\widehat{MCD} = \widehat{ACN}$ (đối đỉnh), $\widehat{BCM} = \widehat{ACN}$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{BCM} \Rightarrow \widehat{MD} = \widehat{MB} \Rightarrow MD = MB$.

Mặt khác: $\widehat{KBC} = \widehat{MDA}$ (tứ giác $MBCD$ nội tiếp).

$\widehat{KBC} = \widehat{ABC} + \widehat{ABK} = \widehat{ABC} + \widehat{CBM} = \widehat{MBA}$.

Ta có: $\widehat{MDA} = \widehat{MBA} (= \widehat{KBC})$

Vẽ $MH \perp AB$ tại H , $MS \perp AC$ tại S .

Ta có: $\widehat{MDS} = \widehat{MBC} = \widehat{ABK} = \widehat{MBH}$

Xét $\triangle HBM$ ($\widehat{H} = 90^\circ$) và $\triangle SDM$ ($\widehat{S} = 90^\circ$) có:

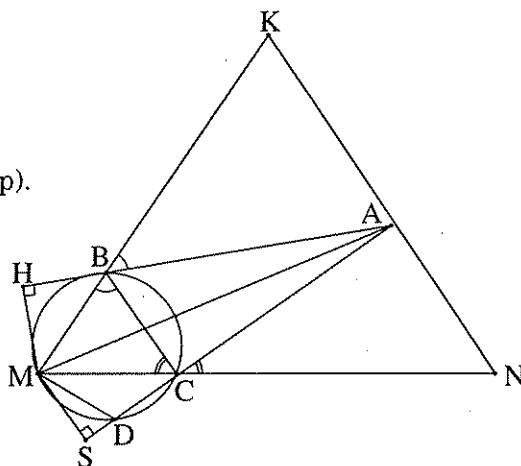
$MB = MD$, $\widehat{MBH} = \widehat{MDS}$

Do đó: $\triangle HBM = \triangle SDM$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow HM = SM$

$\triangle HAM = \triangle SAM$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MAC}$

Do đó: $\widehat{AMB} = \widehat{AMD} \Rightarrow MA$ là tia phân giác của góc BMC . Ta có: $I \in MA$

Vậy: M , A , I thẳng hàng.



Bài 58. (Lớp 9) Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB , BC , CA tại các điểm D , E , F tương ứng. Đường thẳng qua D song song với BC cắt EF tại G . Chứng minh rằng trung điểm của DG nằm trên AE .

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, quận Gò Vấp, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013)

Gọi I là giao điểm của DG và AE.

Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này cắt các tia DE, EF lần lượt ở M, N.

$$\triangle DBE \text{ có } AM \parallel BE \Rightarrow \frac{MA}{BE} = \frac{AD}{BD}.$$

Mà $BE = BD$ nên $MA = AD$.

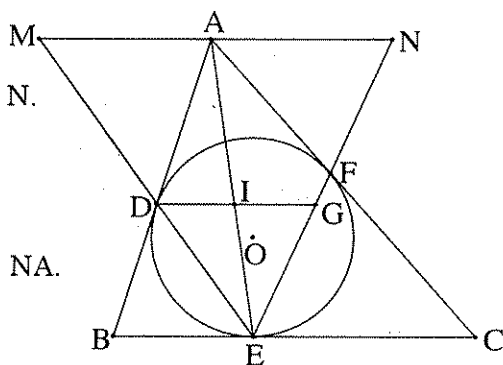
Tương tự có: $NA = AF$. Mà $AD = AF$. Do đó: $MA = NA$.

$$\triangle EAM \text{ có } DI \parallel MA \Rightarrow \frac{DI}{MA} = \frac{EI}{EA};$$

$$\triangle EAN \text{ có } GI \parallel NA \Rightarrow \frac{GI}{NA} = \frac{EI}{EA}$$

$$\text{Do đó: } \frac{DI}{MA} = \frac{GI}{NA} \left(= \frac{EI}{EA} \right). \text{ Mà } MA = NA \text{ (Chứng minh trên) nên } DI = GI.$$

Vậy: Trung điểm của đoạn thẳng DG nằm trên AE.



Bài 59. (Lớp 9) Đường tròn nội tiếp tam giác ABC ($BC > AB$) tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại các điểm D, E tương ứng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, và F là giao điểm của DE và MN. Chứng minh rằng O, B, F thẳng hàng. (Trích đề thi học sinh giỏi quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013).

Lời giải

Cách 1: Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Ta có: $AD = AE$, $BD = BT$, $CT = CE$ (T là tiếp điểm của (O) và BC)

$$\text{Do đó: } AE = \frac{b + c - a}{2}; \quad EN = AN - AC = \frac{b}{2} - \frac{b + c - a}{2} = \frac{a - c}{2}$$

MN là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow MN \parallel AB$

$$\Rightarrow \widehat{NFE} = \widehat{ADE}, \quad \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \widehat{NEF} \text{ nên } \widehat{NFE} = \widehat{NEF}$$

$$\Rightarrow \triangle NEF \text{ cân tại N. Do đó: } NF = NE = \frac{a - c}{2}.$$

$$MF = MN + NF = \frac{c}{2} + \frac{a - c}{2} = \frac{a}{2};$$

$$MF = BM = \left(\frac{a}{2} \right) \Rightarrow \triangle BMF \text{ cân tại M}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBF} = \widehat{MFB}. \text{ Mà } \widehat{ABF} = \widehat{MFB} \text{ (so le trong và } MF \parallel AB).$$

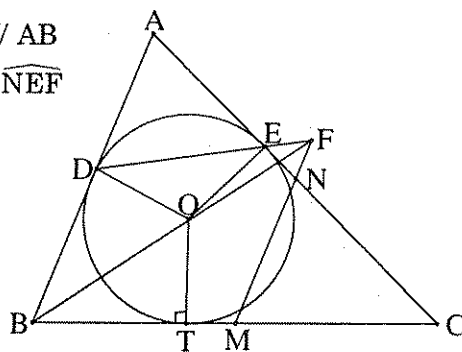
Do vậy: $\widehat{MBF} = \widehat{ABF} \Rightarrow BF$ là tia phân giác của góc ABC.

Vậy: O, B, F thẳng hàng.

Cách 2: Gọi S là giao điểm của BF và CE.

Ta có: $\widehat{SEF} = \widehat{AED}$; $AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ADE}$

$$\text{Nên: } \widehat{AED} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2}.$$



$$\text{Mặt khác: } \widehat{SOC} = \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{SEF} = \widehat{SOC}.$$

$$\triangle SEF \sim \triangle SOC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{SE}{SO} = \frac{SF}{SC} \Rightarrow \frac{SE}{SF} = \frac{SO}{SC}$$

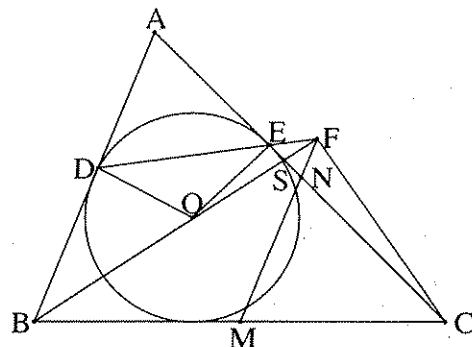
$$\triangle SEO \sim \triangle SFC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{SEO} = \widehat{SFC}; \widehat{SFC} = 90^\circ$$

$\triangle FBC$ vuông tại F, FM là đường trung tuyến

$$\Rightarrow FM = BF \Rightarrow \triangle MBF \text{ cân tại M}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBF} = \widehat{MFB}. \text{ Ta có: } \widehat{MBF} = \widehat{ABF} (= \widehat{MFB}) \Rightarrow BF \text{ là tia phân giác của góc } \angle ABC$$

Vậy: O, B, F thẳng hàng.



Bài 60. (Lớp 9) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có tia AB cắt tia DC tại E và tia AD cắt tia BC tại F. Gọi M là giao điểm thứ hai (khác C) của hai đường tròn (BCE) và (CDF). Chứng minh rằng:

a) Ba điểm E, M, F thẳng hàng.

b) M thuộc đường tròn (ADE)

c) OM vuông góc với EF.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013).

d) Đường thẳng OM đi qua giao điểm T của hai đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD.

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{CME}$ (tứ giác BEMC nội tiếp), $\widehat{CDF} = \widehat{ABC}$ (tứ giác ABCD nội tiếp)

$$\text{Do đó: } \widehat{CME} = \widehat{CDF}.$$

$$\text{Mà } \widehat{CDF} + \widehat{CMF} = 180^\circ \text{ (tứ giác CMFD nội tiếp). Nên } \widehat{CME} + \widehat{CMF} = 180^\circ.$$

Suy ra hai tia ME, MF đối nhau

Vậy: ba điểm E, M, F thẳng hàng.

b) Ta có: $\widehat{DMF} = \widehat{DCF} \left(= \frac{1}{2} \text{ số } \widehat{DF} \right),$

$$\widehat{DCF} = \widehat{EAD} \text{ (tứ giác ABCD nội tiếp)}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{DMF} = \widehat{EAD} \Rightarrow \text{Tứ giác AEMD nội tiếp}$$

Vậy: M thuộc đường tròn (ADE)

c) Ta có: $\widehat{AME} = \widehat{ADE}$ (tứ giác AEMD nội tiếp), A

$$\widehat{ADE} = \widehat{CMF} \text{ (tứ giác CMFD nội tiếp)}$$

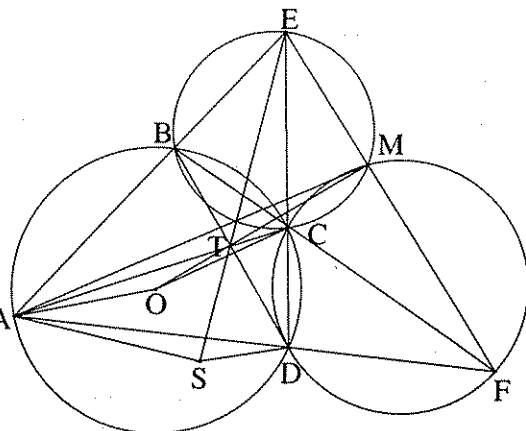
$$\text{Do đó: } \widehat{AME} = \widehat{ADE} = \widehat{CMF}.$$

$$\text{Xét đường tròn (O) có } \widehat{ADC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}.$$

$$\text{Ta có: } \widehat{AOC} + \widehat{AMC} = 2\widehat{ADC} + \widehat{AMC} = \widehat{AME} + \widehat{CMF} + \widehat{AMC} = 180^\circ$$

Do đó: Tứ giác AMCO nội tiếp.

$$\text{Mà: } OA = OC (= R). \text{ Nên } \widehat{OA} = \widehat{OC} \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{OMC}.$$



$$\text{Do đó: } \widehat{AMO} + \widehat{AME} = \frac{1}{2}(\widehat{AMO} + \widehat{OMC} + \widehat{AME} + \widehat{CMF}) = \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ.$$

Nên $\widehat{OME} = 90^\circ$. Vậy: $OM \perp EF$.

d) Gọi S là giao điểm của đường tròn (EAC) và ET. Chứng minh được:

$$ET^2 = ET \cdot ES - ET \cdot ST = (OE^2 - R^2) - (R^2 - OT^2) = OE^2 + OT^2 - 2R^2$$

$$\text{Tương tự: } FT^2 = OF^2 + OT^2 - 2R^2. \text{ Do đó: } ET^2 - FT^2 = OE^2 - OF^2$$

Từ đó chứng minh được $OT \perp EF$. Ta có: $OT \perp EF$ và $OM \perp EF$. Do đó: OT, OM trùng nhau.

Vậy: ba điểm O, T, M thẳng hàng hay đường thẳng OM đi qua giao điểm T của hai đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD.

Bài 61. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, AH, BC. Gọi I là giao điểm của AQ và MN. Chứng minh rằng ba điểm O, P, I thẳng hàng.

(Dựa theo bài 2, kì 7 năm 2013, đề Toán lớp 9, giải thưởng Lê Quý Đôn, trên báo Khăn Quàng Đỏ)

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có N, Q lần lượt là trung điểm của AC, BC (gt)

$\Rightarrow NQ$ là đường trung bình của tam giác ABC

$$\Rightarrow NQ \parallel AB, NQ = \frac{AB}{2}$$

Ta có: $NQ \parallel AM, NQ = AM$

$\Rightarrow$ Tứ giác MANQ là hình bình hành.

Do đó: I là trung điểm của MN và AQ.

Xét $\triangle AHC$ có P, N lần lượt là trung điểm của AH, AC

$\Rightarrow PN$ là đường trung bình của tam giác AHC

$\Rightarrow PN \parallel CH$

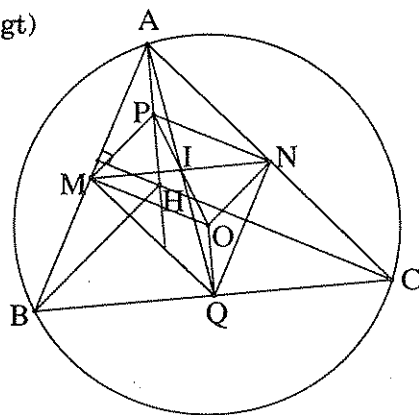
Mà: $CH \perp AB$ nên $PN \perp AB$. Mặt khác:

M là trung điểm của AB (gt) nên $OM \perp AB$. Ta có: $PN \parallel OM$. Tương tự: $MP \parallel ON$

Tứ giác MPNO có $MP \parallel ON$ và $PN \parallel OM \Rightarrow$ Tứ giác MPNO là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của MN, do đó: I là trung điểm của OP.

Vậy: Ba điểm O, P, I thẳng hàng.



Bài 62. (Lớp 8) Trên các cạnh bên AC và BD của tam giác cân ABC, lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $CM + CN = AC$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AC, BC. Chứng minh rằng ba điểm D, I, E thẳng hàng.

(Dựa theo bài 2, kì 7 năm 2013 Đề Toán lớp 8, giải thưởng Lê Quý Đôn, trên báo Khăn Quàng Đỏ)

Lời giải

Qua M vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại K.

Ta có: $\widehat{MKA} = \widehat{CBA}$ (đồng vị và $MK \parallel BC$),

$$\widehat{MAK} = \widehat{CBA} \text{ (tam giác ABC cân tại C)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MKA} = \widehat{MAK}$$

$$\Rightarrow \Delta MAK \text{ cân tại } M \Rightarrow AM = KM.$$

$$\text{Mà: } CM + CN = AC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow CM + CN = CM + AM$$

$$\Rightarrow CN = AM$$

Tứ giác MCNK có $MK \parallel CN$, $MK = CN (= AM)$

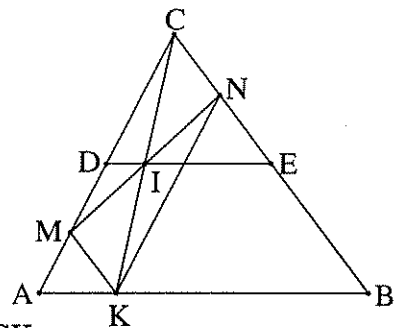
$\Rightarrow$ Tứ giác MCNK là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của MN nên I là trung điểm của CK.

Do đó: DI, DE lần lượt là đường trung bình của các tam giác CAK, CAB.

$$\Rightarrow DI \parallel AB, DE \parallel AB \Rightarrow DI, DE \text{ trùng nhau.}$$

Vậy: ba điểm D, I, E thẳng hàng.



Bài 63. (Lớp 9) Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD bằng nhau và vuông góc nhau, $AB = \sqrt{3}$, $BC = \sqrt{6}$, $CD = 3$. Vẽ hình vuông ACEF nằm trong nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC không chứa B. Trên đường thẳng vuông góc với ED tại E, lấy điểm K sao cho $EK = ED$ (K và F lần lượt nằm trong hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng ED). Chứng minh ba điểm C, D, F thẳng hàng.

(Trích Đề thi chọn học sinh giỏi Toán Lớp 9, quận 5, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

Cách 1: Ta có: $AF \perp AC$, $BD \perp AC \Rightarrow AF \parallel BD$. Mà $AF = BD (= AC)$

Do đó: Tứ giác ABDF là hình bình hành $\Rightarrow AB \parallel FD$, $FD = AB = \sqrt{3}$.

Tương tự: Tứ giác BCED là hình bình hành $\Rightarrow DE = BC = \sqrt{6}$

$\Delta EDF = \Delta EKC$ (c.g.c). Do đó: $CK = FD = \sqrt{3}$.

ΔEDK vuông tại E $\Rightarrow DK^2 = DE^2 + EK^2 = 6 + 6 = 12$

ΔDCK có $CD^2 + CK^2 = DK^2 (= 12)$

$\Rightarrow \Delta DCK$ vuông tại C (định lý Py-ta-go đảo)

Tứ giác DCKE có: $\widehat{DEK} + \widehat{DCK} = 180^\circ$ nên $\widehat{EKC} + \widehat{EDC} = 180^\circ$

Ta có: $\widehat{EDF} + \widehat{EDC} = \widehat{EKC} + \widehat{EDC} = 180^\circ$.

Vậy: C, D, F thẳng hàng.

Cách 2: Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $AC \perp BD$ (gt), $AC = BD$ (gt)

Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông OCD, OBC, OAB, ta có:

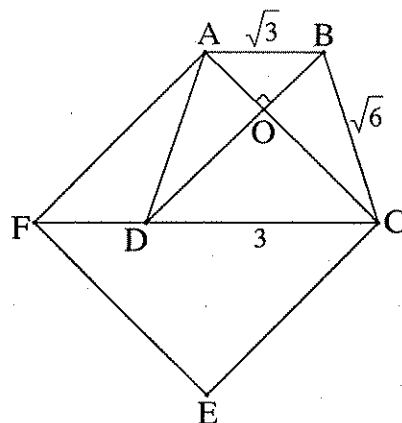
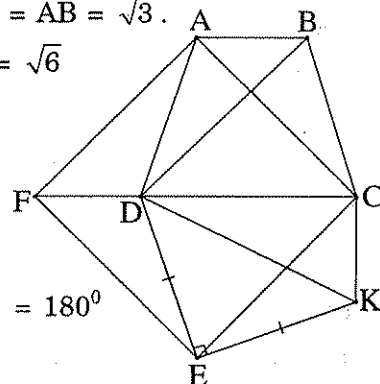
$$OC^2 + OD^2 = CD^2 = 9 \quad (1)$$

$$OC^2 + OB^2 = BC^2 = 6 \quad (2)$$

$$OB^2 + OA^2 = AB^2 = 3 \quad (3)$$

Từ (1) và (2) có: $OD^2 - OB^2 = 3$;

Từ (2) và (3) có: $OC^2 - OA^2 = 3$



$$\text{Do đó: } OD^2 - OB^2 = OC^2 - OA^2 \\ \Rightarrow (OD + OB)(OD - OB) = (OC + OA)(OC - OA)$$

$$\Rightarrow BD(OD - OB) = AC(OC - OA).$$

$$\text{Mà: } BD = AC \text{ nên } OD - OB = OC - OA$$

$$\text{Mà: } OD + OB = OC + OA \text{ (AC = BD). Nên } OD = OC$$

$$\Rightarrow \triangle OCD \text{ vuông cân tại O}$$

$$\Rightarrow \widehat{OCD} = 45^\circ. \text{ Mà } \widehat{ACF} = 45^\circ \text{ (tứ giác ACEF là hình vuông).}$$

Ta có: CD, CF là hai tia trùng nhau.

Vậy: ba điểm C, D, F thẳng hàng.

Bài 64. (Lớp 9) Cho tam giác ABC và P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BPC} = 90^\circ, \widehat{BAP} = \widehat{BCP}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC. Giả sử $BP = 2PN$. Chứng minh rằng A, P, M thẳng hàng.

(Đề thi Olympic truyền thống 30/4 khối 11, lần XVII, năm học 2011, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng, đề nghị)

Lời giải

Gọi D, E lần lượt là trung điểm của PB, PC.

Ta có: ME là đường trung bình của tam giác PBC.

$$\text{Do đó: } ME \parallel BP, ME = \frac{BP}{2}$$

Tứ giác DPME có $ME \parallel DP$

và $ME = DP$ nên là hình bình hành. Mà: $\widehat{BPC} = 90^\circ$ (gt).

Do đó: Tứ giác DPME là hình chữ nhật.

$\Rightarrow$ Tứ giác DPME nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPE} = \widehat{MDE}$.

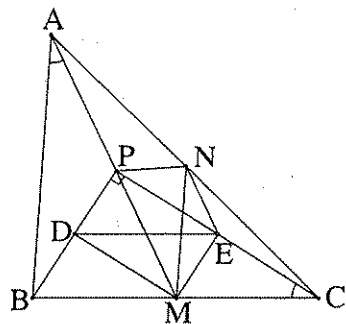
$MP = MC \Rightarrow \triangle MPC$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MPE} = \widehat{BCP}$; $NE \parallel AP, MN \parallel AB \Rightarrow \widehat{MNE} = \widehat{BAP}$
 $\widehat{BAP} = \widehat{BCP}$ (gt).

Do đó: $\widehat{MDE} = \widehat{MPE} = \widehat{MNE} \Rightarrow M, D, P, N, E$ cùng thuộc một đường tròn

Mà: $PN = ME \left(= \frac{1}{2}BP \right) \Rightarrow \widehat{PN} = \widehat{ME} \Rightarrow \widehat{PMN} = \widehat{MNE} \Rightarrow PM \parallel NE$

Ta có: $PM \parallel NE, AP \parallel NE$. Theo tiên đề Ô-clit có PM, AP trùng nhau.

Vậy: Ba điểm A, P, M thẳng hàng.



Bài 65. (Lớp 9) Cho tam giác ABC có đường tròn tâm I nội tiếp, tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. AI cắt đường tròn (I) tại M và N (M nằm giữa A và N). DM cắt cạnh EF tại K. NK cắt đường tròn (I) tại điểm P khác N. Chứng minh rằng các điểm A, P, D thẳng hàng.

(Đề thi Olympic truyền thống 30/4 khối 11, Lần XVII, năm 2011, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu, đề nghị)

Lời giải

Gọi H là giao điểm của AI và EF, P' là giao điểm của AD và đường tròn (I) ($P' \neq D$)

Xét $\triangle AEP'$ và $\triangle ADE$ có:

$\widehat{EAP'}$ (chung), $\widehat{AEP'} = \widehat{ADE}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó: $\triangle AEP' \sim \triangle ADE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AP'}{AE} \Rightarrow AD \cdot AP' = AE^2$

Mặt khác: AE, AF là hai tiếp tuyến của đường tròn (I)

$\Rightarrow AE = AF$, AI là phân giác EAF

$\triangle AEF$ cân tại A nên $AI \perp EF$.

$\triangle EAI$ vuông tại E, EH là đường cao $\Rightarrow AH \cdot AI = AE^2$.

Ta có: $AD \cdot AP' = AH \cdot AI$

Xét $\triangle AP'H$ và $\triangle AID$ có:

$\widehat{P'AH}$ (chung), $\frac{AP'}{AI} = \frac{AH}{AD}$ (Vì $AD \cdot AP' = AH \cdot AI$)

Do đó: $\triangle AP'H \sim \triangle AID$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHP'} = \widehat{ADI} \Rightarrow$ Tứ giác DP'HI nội tiếp (1)

Mặt khác: $\widehat{MPN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có: $\widehat{MPN} = 90^\circ$, $\widehat{MHK} = 90^\circ$. Nên tứ giác MPKH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HPK} = \widehat{HMK}$

Mà: $\widehat{NMD} = \widehat{NPD}$, $\widehat{NMD} = \frac{1}{2} \widehat{NID}$. Do vậy: $\widehat{NID} = \widehat{HPD}$

$\Rightarrow$ Tứ giác DPHI nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) cho ta $P \equiv P'$.

Vậy: ba điểm A, P, D thẳng hàng.

Bài 66. (Lớp 9) Cho đường tròn tâm O, đường kính AB, trên tia AB về phía ngoài của đường tròn lấy điểm H, qua H dựng đường thẳng (d) vuông góc với đường kính AB. Gọi C là một điểm tùy ý trên đường tròn khác A, B. Đường thẳng AC cắt (d) tại điểm D, kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn (O) trong đó E là tiếp điểm và E, B nằm về cùng phía đối với đường thẳng AC. Đường thẳng BE cắt (d) tại điểm F, đường thẳng AF cắt đường tròn tại điểm G. Gọi G' là điểm đối xứng của G qua AB. Chứng minh rằng ba điểm F, C, G' thẳng hàng.

(Đề thi Olympic truyền thống 30/4 khối 10, lần XVIII, năm 2012, trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước, đề nghị)

Lời giải

Ta có: $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\widehat{AEB} = \widehat{AHF} = 90^\circ$

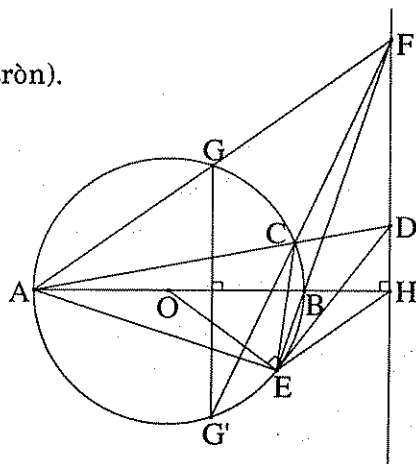
$\Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DFE} = \widehat{HAE}$.

Mà: $\widehat{HAE} = \widehat{DEF}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó: $\widehat{DFE} = \widehat{DEF} \Rightarrow \triangle DEF$ cân tại D

$\Rightarrow DE = DF$.



Xét $\triangle DEC$ và $\triangle DAE$ có:

$\widehat{EDC}$ (chung),

$\widehat{DEC} = \widehat{DAE}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Do đó: $\triangle DEC \sim \triangle DAE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DC}{DE}$. Ta có: $\frac{DF}{DA} = \frac{DC}{DF}$ (Vì $DE = DF$)

Xét $\triangle DFC$ và $\triangle DAF$ có: $\widehat{FDC}$ (chung), $\frac{DF}{DA} = \frac{DC}{DF}$.

Do đó: $\triangle DFC \sim \triangle DAF$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{DCF} = \widehat{DFA}$

$GG' \perp AH, FH \perp AH \Rightarrow GG' \parallel FH \Rightarrow \widehat{DFA} = \widehat{G'GA}$. Mà $\widehat{G'GA} = \widehat{G'CA}$

Nên có $\widehat{G'CA} = \widehat{DCF}$. Ta có: $\widehat{DCG'} + \widehat{DCF} = \widehat{DCG'} + \widehat{G'CA} = 180^\circ$

Do đó: F, C, G thẳng hàng.

Bài 67. (Lớp 9) Cho tam giác ABC nhọn không cân có D, E lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh AB, AC sao cho DE song song với BC. Đường tròn k ngoại tiếp tam giác ADE cắt các đoạn thẳng BE, CD lần lượt tại M, N. Giả sử AM, AN cắt BC lần lượt tại P và Q sao cho $BC = 2PQ$. Chứng minh rằng trung điểm cung DE không chứa A của đường tròn k nằm trên BC.

(Đề thi Olympic truyền thống 30/4 khối 11, lần XVIII năm 2012, Trường THPT chuyên Bến Tre, tỉnh Bến Tre, đề nghị)

Lời giải

Ta có: $\widehat{PBM} = \widehat{MED}$ (so le trong và $DE \parallel BC$), $\widehat{MED} = \widehat{PAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DM). Nên $\widehat{PBM} = \widehat{PAB}$.

Xét $\triangle PBM$ và $\triangle PAB$ có: $\widehat{BPM}$ (chung), $\widehat{PBM} = \widehat{PAB}$.

Do đó: $\triangle PBM \sim \triangle PAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{PM}{PB}$

Trên tia PC lấy K sao cho $PK = PB$.

Mà $BC = 2PQ$ (gt) nên $QK = QC$.

Ta có: $\frac{PK}{PA} = \frac{PM}{PK}$.

Xét $\triangle PKM$ và $\triangle PAK$ có: $\widehat{KPM}$ (chung), $\frac{PK}{PA} = \frac{PM}{PK}$

Do đó: $\triangle PKM \sim \triangle PAK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{PKM} = \widehat{PAK}$.

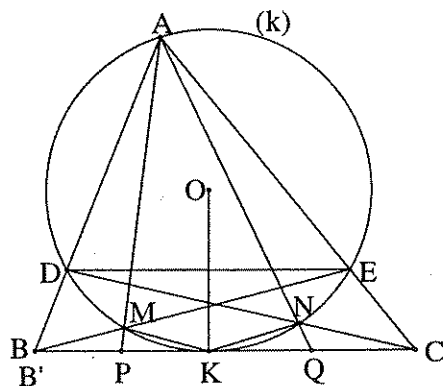
Chứng minh tương tự cũng có: $\widehat{QKN} = \widehat{QAK}$

Tứ giác AMKN có: $\widehat{MKN} + \widehat{PAQ} = \widehat{MKN} + \widehat{PAK} + \widehat{QAK} = \widehat{MKN} + \widehat{PKM} + \widehat{QKN} = 180^\circ$
 $\Rightarrow$ Tứ giác AMKN nội tiếp.

Do đó: K thuộc đường tròn k.

Gọi KB' là tia tiếp tuyến của đường tròn k (tia KB' nằm trên nửa mặt phẳng bờ MK có chứa B).

Ta có: $\widehat{B'KM} = \widehat{PAK}$. Mà: $\widehat{BKM} = \widehat{PAK}$.



Do đó: $\widehat{B'KM} = \widehat{BKM} \Rightarrow$ Hai tia KB, KB' trùng nhau.

Do đó: KB là tiếp tuyến của đường tròn k $\Rightarrow OK \perp BC$.

Mà: $BC \parallel DE$. Do đó: $OK \perp DE \Rightarrow K$ là điểm chính giữa của cung DE không chứa A.

Vậy: Trung điểm cung DE không chứa A của đường tròn k nằm trên BC.

Bài 68. Cho hình vuông ABCD. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{1}{3}BC$. Đường

chéo BD cắt AM tại E. S là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh ba điểm S, E, C thẳng hàng.

(Trích đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, quận Tân Phú, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

Ta có: O là tâm đường tròn đi qua các điểm A, B, C, D, $AC \perp BD$ tại O.

Xét $\triangle AED$ có $BM \parallel AD$ (tứ giác ABCD là hình vuông)

$$\Rightarrow \frac{BM}{AD} = \frac{BE}{DE}$$

Mà: $BM = \frac{1}{3}BC$ (gt); $BC = AD$ (tứ giác ABCD là hình vuông)

Do đó: $\frac{BE}{DE} = \frac{1}{3}$; $BO = \frac{1}{2}BD$ nên có E là trung điểm của OB.

Tứ giác ASBO có $\widehat{OAS} = 90^\circ$,

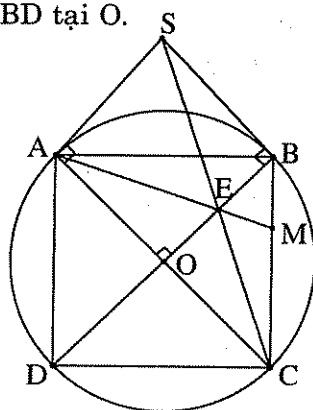
$\widehat{OBS} = 90^\circ$, $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow SB = OA$, $SB \parallel OA$. Do đó: $SB = OC$ và $SB \parallel OC$ ($OA = OC$ và A, O, C thẳng hàng)

Nên tứ giác SBCO là hình bình hành.

Vì E là trung điểm của OB nên E là trung điểm của SC.

Vậy: Ba điểm S, E, C thẳng hàng.



Bài 69. (Lớp 9) Cho tam giác ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC. Vẽ tia phân giác góc ACB cắt đường tròn (O) ở M. Vẽ đường tròn (I) đường kính MC cắt BC tại H. Gọi D là giao điểm của BM và CA. Đường tròn (I) cắt CD ở E. Cạnh BE cắt đường tròn (O) ở K. N là giao điểm của BA và CM. Gọi F là trung điểm của NA. Chứng minh rằng K, F, C thẳng hàng.

(Trích đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, quận Tân Bình, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

Cách 1: M, K, A cùng thuộc đường tròn đường kính BC

$$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BKC} = \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

E thuộc đường tròn đường kính MC

$$\Rightarrow \widehat{MEC} = 90^\circ$$

$\triangle CBD$ có CM là đường cao ($CM \perp BD$), là đường phân giác (gt)

$\Rightarrow \triangle CBD$ cân tại C và có CM là đường trung tuyến.

Ta có: $ME \perp CD$, $BA \perp CD \Rightarrow ME \parallel BA \Rightarrow ED = EA$.

ΔDBC có BA, CM là hai đường cao cắt nhau tại N

$\Rightarrow N$ là trực tâm của ΔDBC

$\Rightarrow DN$ là đường cao của $\Delta DBC \Rightarrow DN \perp BC$.

ΔDNA có E, F lần lượt là trung điểm của AD, AN

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của $\Delta ADN \Rightarrow EF \parallel DN$.

Ta có: $EF \parallel DN, DN \perp BC \Rightarrow EF \perp BC$

ΔEBC có BA, EF là hai đường cao cắt nhau tại F

$\Rightarrow F$ là trực tâm của ΔEBC

$\Rightarrow CF \perp EB$. Mà $CK \perp EB$. Do đó: CF, CK trùng nhau.

Vậy: Ba điểm K, F, C thẳng hàng.

Cách 2: (Dựa vào đáp án của kỳ thi)

Gọi L là giao điểm của CF và BE .

ΔEMC nội tiếp đường tròn đường kính MC

$\Rightarrow \Delta EMC$ vuông tại E .

ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

Ta có: $AB \perp AC, ME \perp AC$

$\Rightarrow AB \parallel ME$.

ΔCLE có $AF \parallel EL \Rightarrow \frac{AF}{EL} = \frac{CF}{CL}$

ΔCLM có $NF \parallel ML \Rightarrow \frac{NF}{ML} = \frac{CE}{CL}$. Do vậy: $EL = ML$

Gọi Q là trung điểm của DE ; QL là đường trung bình của ΔMED

$\Rightarrow LQ \parallel MD$

Mà: $MD \perp MC$. Do đó: $LQ \perp MC$

ΔMQC có ME, QL là hai đường cao cắt nhau tại $L \Rightarrow L$ là trực tâm của ΔMQC

$\Rightarrow CL$ là đường cao của $\Delta MQC \Rightarrow CL \perp MQ$ (1)

MQ là đường trung bình của $\Delta DBE \Rightarrow MQ \parallel BE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CL \perp BE$.

Ta có: ΔBKC nội tiếp đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \Delta BKC$ vuông tại $K \Rightarrow LK \perp BE$

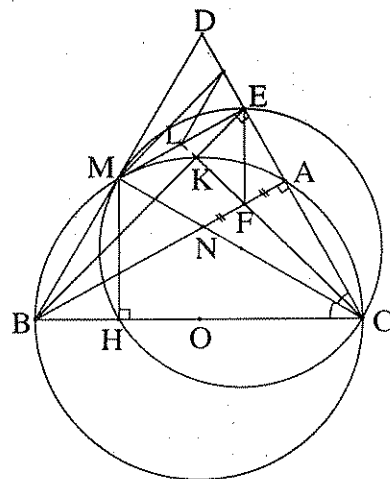
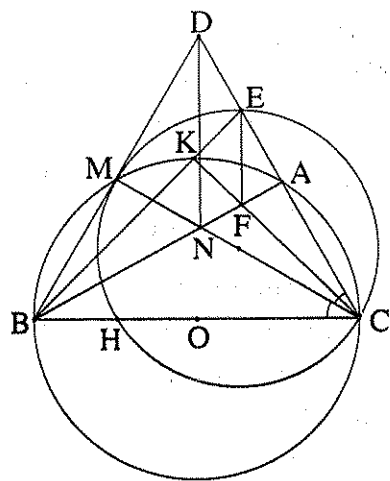
Mà $CL \perp BE \Rightarrow C, K, L$ thẳng hàng. Mà: C, F, L thẳng hàng nên C, K, L, F thẳng hàng

Vậy: ba điểm K, F, C thẳng hàng.

Bài 70. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H . Gọi M, N lần lượt là chân đường cao vẽ từ B, C của tam giác ABC . Gọi D là điểm trên cạnh BC . Gọi ω_1 là đường tròn đi qua các điểm C, D, M và ω_2 là đường tròn đi qua các điểm B, D, N . DQ là đường kính đường tròn ω_1 , DP là đường kính đường tròn ω_2 . Chứng minh rằng P, Q, H thẳng hàng. (Đề thi Olympic Toán học quốc tế, năm 2013)

Lời giải

AH cắt BC tại K . Ta có: $AK \perp BC$.



Gọi S (khác D) là giao điểm của hai đường tròn (ω_1) và (ω_2) .

Xét đường tròn (ω_1) có $\widehat{SDB} = \widehat{SMC}$.

Xét đường tròn (ω_2) có $\widehat{SNA} = \widehat{SDB}$.

Do đó: $\widehat{SMC} = \widehat{SNA} \Rightarrow$ Tứ giác AMSN nội tiếp.

Mà: $\widehat{AMH} = \widehat{ANH} (= 90^\circ)$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMHN nội tiếp.

Do đó: A, M, S, N, H cùng nằm trên một đường tròn P.

$\Rightarrow \widehat{ASN} = \widehat{AHN}$.

Mà: $\widehat{AHN} = \widehat{NBD}$ nên $\widehat{ASN} = \widehat{NBD}$.

Do đó: $\widehat{ASN} + \widehat{NSD} = \widehat{NBD} + \widehat{NSD} = 180^\circ \Rightarrow$ A, S, D thẳng hàng.

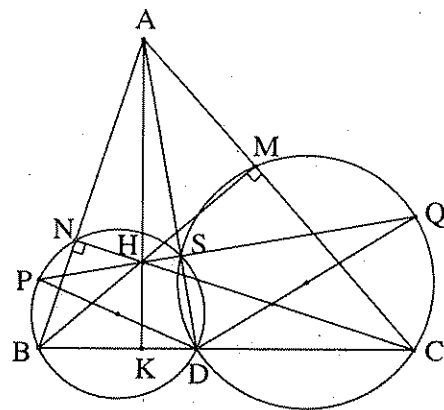
Mà: $\widehat{ASH} = \widehat{AMH} = 90^\circ \Rightarrow HS \perp AD$;

$\widehat{PSD} = 90^\circ$ (DP là đường kính của đường tròn (ω_2)) $\Rightarrow PS \perp AD$

$\widehat{QSD} = 90^\circ$ (DQ là đường kính của đường tròn (ω_1)) $\Rightarrow QS \perp AD$

Do đó: HS, PS, QS trùng nhau. P, H, S, Q thẳng hàng.

Vậy: ba điểm P, H, Q thẳng hàng.



Chỉ dùng Compa

Xin được giới thiệu cùng bạn đọc hai bài toán “Chỉ dùng compa” rất hay

Bài 1. Chỉ dùng compa, hãy xác định lại tâm của một đường tròn cho trước

Lời giải

• Cách dựng:

- Lấy A là điểm bất kì thuộc (O). Dựng đường tròn (A) cắt (O) tại B, C
- Dựng D là điểm đối xứng của B qua A.
- Dựng (D, CD), (A, CD) cắt nhau ở E.
- Dựng (E, CD) cắt (A) ở F
- Dựng (B, BF) và (A, BF) cắt nhau tại O.

O là tâm đường tròn cần dựng

• Chứng minh

Từ cách dựng có:

$$OA = OB = BF, AD = AF, AE = DE = EF = CD$$

$$\triangle AEF = \triangle AED \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{EAD}$$

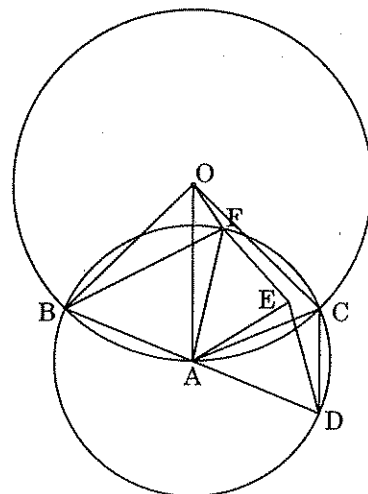
$$\triangle ABF \text{ cân tại A} \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{AFB}$$

$$\text{Nên } \widehat{ABF} = \widehat{EAD} \Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle EAD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BF}{AD} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{OA}{AD}$$

$$\triangle OAB \sim \triangle ADC \text{ (c.c.c)}$$

$$\triangle OAB = \triangle OAC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OB = OC$$



Bài 2. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Chỉ dùng compa chia đường tròn này thành 4 phần bằng nhau.

Lời giải

• Cách dựng:

- Lấy A thuộc (O) dựng B, C, D thuộc (O), $AB = BC = CD = R$
- Dựng (A, AC), (D, AC) cắt nhau tại E.
- Dựng (A, OE) cắt (O) tại M, N.

A, M, D, N chia (O) thành 4 phần bằng nhau.

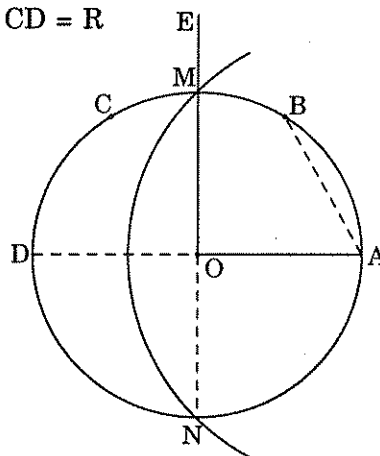
• Chứng minh:

$$AE = AC = \sqrt{3}R$$

$$\triangle OAE \text{ vuông tại O} \Rightarrow AE^2 = OA^2 + OE^2$$

$$OE = \sqrt{2}R$$

$$AM = AN = \sqrt{2}R$$



CÁC BÀI TOÁN NỔI TIẾNG

Bài toán 1.

ĐƯỜNG THẲNG MENELAUS

Định lý Menelaus

Cho tam giác ABC và ba điểm A', B' và C' nằm trên các đường thẳng BC, AC và AB sao cho: hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm trên nằm trên phần kéo dài của một cạnh còn hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của tam giác. Điều kiện cần và đủ để A', B', C' thẳng hàng là: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$

Lời giải

Phần thuận:

Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt A'C' tại T.

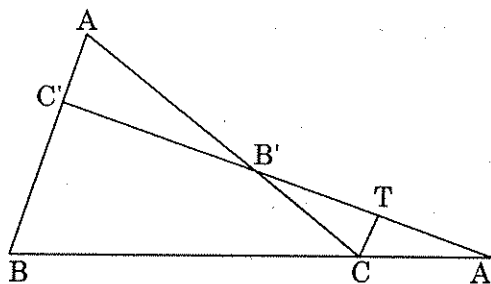
Xét $\triangle A'B'C'$ có $CT \parallel B'C'$

$$\Rightarrow \frac{A'B}{A'C} = \frac{C'B}{CT} \quad (\text{Hệ quả của định lý Ta-lét})$$

Xét $\triangle A'B'C'$ có $CT \parallel AC'$

$$\Rightarrow \frac{B'C}{B'A} = \frac{CT}{C'A} \quad (\text{Hệ quả của định lý Ta-lét})$$

$$\text{Do đó: } \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{C'B}{CT} \cdot \frac{CT}{C'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$



Phần đảo:

Cho tam giác, ABC và ba điểm A', B', C' nằm trên các đường thẳng BC, AC và AB sao cho hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm nằm trên phần kéo dài của một cạnh còn hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của tam giác thỏa mãn: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$. Chúng ta cần chứng minh A', B', C' thẳng hàng.

Gọi L là giao điểm của B'C' và BC

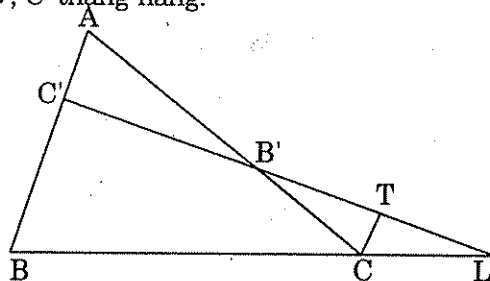
Xét tam giác ABC có $C' \in AB$, $B' \in AC$, $L \in BC$

$$\text{Từ chứng minh trên ta có: } \frac{LB}{LC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

$$\text{Mà } \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

$$\text{Nên } \frac{LB}{LC} = \frac{A'B}{A'C} \Rightarrow \frac{LB}{BC} = \frac{A'B}{BC} \Rightarrow LB = A'B \Rightarrow L, A' \text{ trùng nhau}$$

Vậy A', B', C' thẳng hàng.



MENELAUS (Mê-nê-la-uyt)

Menelaus sinh khoảng năm 70 và mất khoảng năm 130

Trong thần thoại Hy Lạp, Menelaus là vị vua của Sparta trong thời kỳ Mycenae. Ông là con trai của Atreus và Aerope, người anh em của vua Agamemnon của Mycenae và là thủ lĩnh của quân đội Hy Lạp trong cuộc chiến. Là một nhân vật nổi bật trong cả hai sử thi Iliad và Odyssey, Menelaus cũng rất nổi tiếng trong các bức hoa trang trí trên các bình cổ và trong các vở kịch của Hy Lạp. Ông là nhà Toán học và Thiên văn học nổi tiếng thời ấy.



Bài toán 2.

ĐƯỜNG THẲNG DESARGUES

Định lý Desargues

Cho hai tam giác ABC và A'B'C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy tại M. Gọi A₁ là giao điểm của BC và B'C', B₁ là giao điểm của CA và C'A', C₁ là giao điểm của AB và A'B'. Khi đó ba điểm A₁, B₁, C₁ thẳng hàng.

Lời giải

Xét ΔMBC có A₁ ∈ BC, C' ∈ MC, B' ∈ MB và B', A₁, C' thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{C'C}{C'M} \cdot \frac{B'M}{B'B} = 1 \quad (\text{định lý Menelaus})$$

Xét ΔMAC có B₁ ∈ AC, A' ∈ MA, C' ∈ MC và B₁, A', C' thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A'A}{A'M} \cdot \frac{C'M}{C'C} = 1 \quad (2)$$

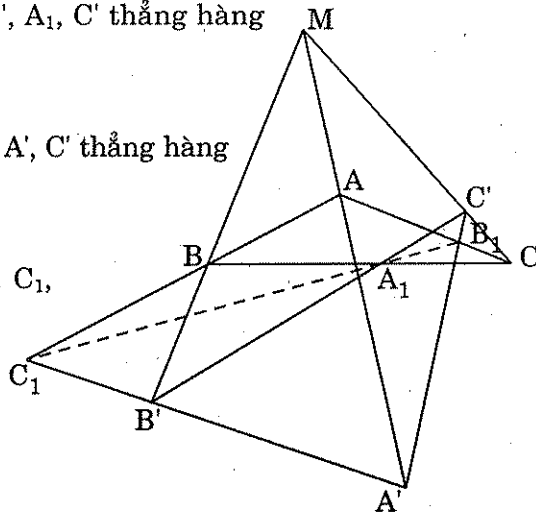
Xét ΔMAB có C₁ ∈ AB, B' ∈ AB, A' ∈ MA và C₁, B', A' thẳng hàng.

$$\Rightarrow \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B'B}{B'M} \cdot \frac{A'M}{A'A} = 1 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$

Xét ΔABC có A₁ ∈ BC, B₁ ∈ AC, C₁ ∈ AB và $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$

Vậy A₁, B₁, C₁ thẳng hàng.



(Định lí Menelaus)

DESARGUES (Đề–za–gơ)

Girard Desargues, người Pháp, sinh ngày 21 tháng 2 năm 1591 tại Lyon, mất khoảng tháng 9 năm 1661. Ông là nhà toán học Pháp, kỹ sư quân giới, đặt nền cơ sở cho môn hình học. Ông là ông tổ của Hình học xạ ảnh. Nói về Desargues chúng ta không thể không nhắc đến định lí nổi tiếng khi đường thẳng nối ba đỉnh tương ứng của hai tam giác đồng quy thì giao điểm của các cặp cạnh tương ứng thẳng hàng.



Bài toán 3.

ĐƯỜNG THẲNG GAUSS

Cho tứ giác ABCD. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau ở M, các đường thẳng AD và BC cắt nhau ở N. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AC, BD, MN. Khi đó ba điểm I, J, K thẳng hàng. (Đường thẳng đi qua I, J, K gọi là đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần ABCD)

Lời giải

Cách 1: (Sử dụng diện tích)

$$\begin{aligned}
 S_{NIJ} &= S_{NAB} - S_{NAI} - S_{NBJ} - S_{BIJ} - S_{ABI} \\
 &= S_{NAB} - \frac{1}{2}S_{NAC} - \frac{1}{2}S_{NBD} - \frac{1}{2}S_{BDI} - \frac{1}{2}S_{ABC} \\
 &= S_{NAB} - \frac{1}{2}(S_{NCD} + S_{ADC}) - \frac{1}{2}(S_{NCD} + S_{BCD}) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(S_{ABD} - S_{ABID}) - \frac{1}{2}S_{ABC} \\
 &= (S_{NAB} - S_{NCD}) - \frac{1}{2}(S_{ADC} + S_{ABC}) - \frac{1}{2}(S_{BCD} + S_{ABD}) + \frac{1}{2}S_{ABID} \\
 &= S_{ABCD} - \frac{1}{2}S_{ABCD} - \frac{1}{2}S_{ABCD} + \frac{1}{4}S_{ABCD} \\
 &= \frac{1}{4}S_{ABCD}
 \end{aligned}$$

Chúng minh tương tự cũng có: $S_{MIJ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

Ta có: $S_{MIJ} = S_{NIJ} \left(= \frac{1}{4}S_{ABCD} \right)$

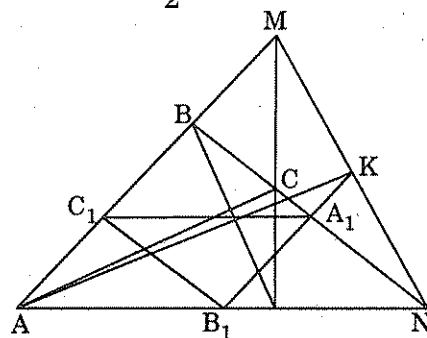
Gọi K' là giao điểm của IJ và MN

Gọi khoảng cách từ M, N đến IJ lần lượt là h_1, h_2 . Ta có:

$$\begin{aligned}
 S_{MIJ} &= S_{NIJ} \Rightarrow \frac{1}{2}h_1 \cdot IJ = \frac{1}{2}h_2 \cdot IJ \\
 \Rightarrow h_1 &= h_2 \Rightarrow \frac{1}{2}h_1 \cdot JK' = \frac{1}{2}h_2 \cdot JK' \\
 \Rightarrow S_{JMK'} &= S_{JNK'} \Rightarrow K'M = K'N
 \end{aligned}$$

Nên $K' \equiv K$

Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.



Cách 2. (Sử dụng định lý Menelaus)

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của NB, NA, AB .

Ta có A_1K là đường trung bình của tam giác NBM

$$\Rightarrow A_1K \parallel BM$$

B_1K là đường trung bình của tam giác NAM

$$\Rightarrow B_1K \parallel BM$$

Do đó A_1K, B_1K trùng nhau (Tiên đề Ô-clít)

$$\Rightarrow A_1, B_1, K \text{ thẳng hàng.}$$

Ta có: $K \in A_1B_1$

Tương tự $J \in A_1B_1$

$$\text{Ta có: } IC_1 = \frac{BC}{2}, IB_1 = \frac{CN}{2}$$

$$KB_1 = \frac{AM}{2}, KA_1 = \frac{BM}{2}, JA_1 = \frac{DN}{2}$$

$$JC_1 = \frac{AD}{2}$$

Xét $\triangle NAB$ có $M \in AB, C \in NB, D \in AN$ và D, C, M thẳng hàng.

$$\Rightarrow \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BC}{CN} \cdot \frac{DN}{AD} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CN} \cdot \frac{AM}{BM} \cdot \frac{DN}{AD} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{IC_1}{IB_1} \cdot \frac{KB_1}{KA_1} \cdot \frac{JA_1}{JC_1} = 1$$

Xét $\triangle A_1B_1C_1$ có $I \in B_1C_1$

$$K \in A_1B_1, J \in A_1C_1 \text{ và } \frac{IC_1}{IB_1} \cdot \frac{KB_1}{KA_1} \cdot \frac{JA_1}{JC_1} = 1$$

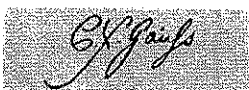
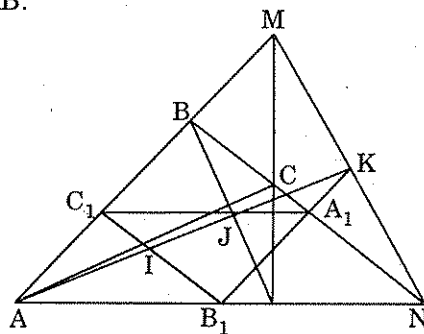
Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng

* **Nhận xét:** Trong một tứ giác toàn phần thì đường thẳng Steiner vuông góc với đường thẳng Gauss.

GAUSS

Carl Friedrich Gauss là người Đức sinh năm 1777 và mất năm 1855

Ông là một nhà Toán học và nhà khoa học rất tài năng. Ông được mệnh danh là “hoàng tử của các nhà toán học” với ảnh hưởng sâu sắc cho sự phát triển của toán học và khoa học Gauss đã được xếp ngang hàng cùng Euler, Newton, Archimeder như là những nhà toán học vĩ đại nhất của lịch sử.



links: Porträt des jungen Gauss
rechts: Gauss im Alter

Bài toán 4.**ĐƯỜNG THẲNG ZASLAVSKY**

Cho tam giác ABC và điểm O. A_1 là điểm đối xứng của A qua O, B_1 là điểm đối xứng của B qua O, C_1 là điểm đối xứng của C qua O. Từ A_1, B_1, C_1 vẽ các đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt BC, CA, AB ở A_2, B_2, C_2 . Khi đó ba điểm A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

Lời giải

Từ B vẽ đường thẳng song song với đường thẳng C_1C_1 cắt AC_1 ,

CA_1, A_1C_1 lần lượt tại H, K, S.

Ta có $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2 \parallel BK$

O là trung điểm của AA_1, BB_1

nên ABA_1B_1 là hình bình hành

$\Rightarrow A_1B = AB_1$ và $A_1B \parallel AB_1$

Ta có: $\triangle A_1BS = \triangle AB_1B_2$ (g.c.g) $\Rightarrow BS = B_1B_2$

Do vậy BB_2B_1S là hình bình hành

$\Rightarrow S$ và B_2 đối xứng qua O. Do vậy $C_1S = B_2C$; $B_2A = A_1S$

$$\triangle SA_1K \text{ có } C_1H \parallel A_1K \Rightarrow \frac{C_1K}{A_1K} = \frac{C_1S}{A_1S}$$

$$\triangle AC_1C_2 \text{ có } BH \parallel C_1C_2 \Rightarrow \frac{C_2B}{C_2A} = \frac{C_1H}{C_1A}$$

$$\triangle A_1A_2C \text{ có } BK \parallel A_1A_2 \Rightarrow \frac{A_1C}{A_1K} = \frac{A_2C}{A_2B}$$

$$\text{Nên } \frac{C_2B}{C_2A} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} \cdot \frac{A_2C}{A_2B} = \frac{C_1H}{C_1A} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} \cdot \frac{A_1C}{A_1K} = \frac{C_1H \cdot B_2A}{A_1K \cdot B_2C} = \frac{C_1S}{A_1S} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} = \frac{C_1S}{A_1S} \cdot \frac{A_1S}{C_1S} = 1$$

$$\triangle ABC \text{ có } C_2 \in AB, B_2 \in CA, A_2 \in BC \text{ và } \frac{C_2B}{C_2A} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} \cdot \frac{A_2C}{A_2B} = 1$$

Vậy A_2, B_2, C_2 thẳng hàng (định lý Menelaus)

Bài toán 5.**ĐƯỜNG THẲNG PAPPUS**

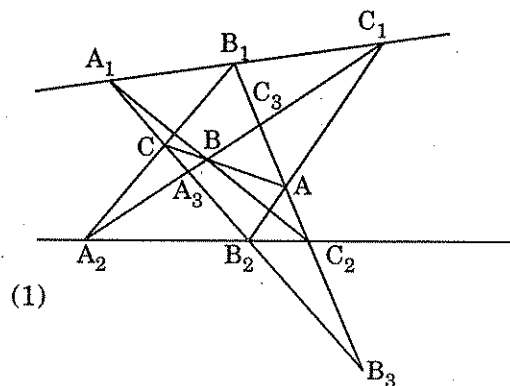
Trên một đường thẳng lấy các điểm A_1, B_1, C_1 , trên một đường thẳng khác lấy các điểm A_2, B_2, C_2 . Các đường thẳng A_1B_2 và A_2B_1 cắt nhau ở C, các đường thẳng B_1C_2 và B_2C_1 cắt nhau ở A, các đường thẳng A_1C_2 và A_2C_1 cắt nhau ở B. Khi đó ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Gọi A_3 là giao điểm của A_1B_2 và A_2C_1 , B_3 là giao điểm của A_1B_2 và B_1C_2 , C_3 là giao điểm của B_1C_2 và C_1A_2

Xét $\triangle A_3B_3C_3$ có $A \in B_3C_3, B_2 \in A_3B_3, C_1 \in C_3A_3$ và A, B_2, C_1 thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{AB_3}{AC_3} \cdot \frac{C_1C_3}{C_1A_3} \cdot \frac{B_2A_3}{B_2B_3} = 1 \text{ (định lý Menelaus)}$$



(1)

Xét $\Delta A_3B_3C_3$ có $B \in A_3C_3$, $C_2 \in B_3C_3$, $A_1 \in A_3B_3$ và B , C_2 , A_1 thẳng hàng.

$$\Rightarrow \frac{BC_3}{BA_3} \cdot \frac{A_1A_3}{A_1B_3} \cdot \frac{C_2B_3}{C_2C_3} = 1 \text{ (định lí Menelaus)} \quad (2)$$

Xét $\Delta A_3B_3C_3$ có $A_1 \in A_3B_3$; $B_1 \in B_3C_3$; $C_1 \in A_3C_3$ và A_1 , B_1 , C thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{A_1B_3}{A_1A_3} \cdot \frac{C_1A_3}{C_1C_3} \cdot \frac{B_1C_3}{B_1B_3} = 1 \text{ (định lí Menelaus)} \quad (3)$$

Xét $\Delta A_3B_3C_3$ có $A_2 \in A_3C_3$; $B_2 \in A_3B_3$; $C_2 \in B_3C_3$ và A_2 , B_2 , C_2 thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{A_2A_3}{A_2C_3} \cdot \frac{C_2C_3}{C_2B_3} \cdot \frac{B_2B_3}{B_2A_3} = 1 \text{ (định lí Menelaus)} \quad (4)$$

Xét $\Delta A_3B_3C_3$ có $C \in A_3B_3$; $A_2 \in A_3C_3$, $B_1 \in B_3C_3$ và C , A_2 , B_1 thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{CA_3}{CB_3} \cdot \frac{B_1B_3}{B_1C_3} \cdot \frac{A_2C_3}{A_2A_3} = 1 \quad (5)$$

Từ (1), (2), (3), (4), và (5) ta có: $\frac{AB_3}{AC_3} \cdot \frac{BC_3}{BA_3} \cdot \frac{CA_3}{CB_3} = 1$

Xét $\Delta A_3B_3C_3$ có $A \in B_3C_3$, $B \in C_3A_3$, $C \in A_3B_3$ và $\frac{AB_3}{AC_3} \cdot \frac{BC_3}{BA_3} \cdot \frac{CA_3}{CB_3} = 1$

Do đó A , B , C thẳng hàng

(Định lí Menelaus)

PAPPUS (Páp-pus)

Pappus sinh khoảng năm 290 và mất khoảng năm 350. Ông là nhà Toán học Ai cập là một trong những nhà Hình học lớn sau cùng của Hi Lạp cổ đại.

Pappus được nhiều người biết đến vào thế kỷ thứ IV.

Ông được xem là người thấp lại ngọn lửa cho Euclid



Bài toán 6.

ĐƯỜNG THẲNG EULER

Định lí Euler

Gọi H , G , O lần lượt là trực tâm, trọng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó H , G , O thẳng hàng (đường thẳng đi qua H , G , O gọi là đường thẳng O-le)

Lời giải

Vẽ đường kính AD của đường tròn (O) . Gọi M là giao điểm của BC và HD .

Ta có: $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$BH \perp AC$ (H là trực tâm của tam giác ABC), $DC \perp AC$ ($\widehat{ACD} = 90^\circ$)

$\Rightarrow BH \parallel DC$

Tương tự $CH \parallel DB$. Tứ giác $BHCD$ có $BH \parallel DC$ và $CH \parallel DB$

Do đó tứ giác $BHCD$ là hình bình. Nên M là trung điểm của BC và HD

Xét $\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến (M là trung điểm của BC), G là trọng tâm (gt)

$\Rightarrow G$ thuộc đoạn thẳng AM và $AG = \frac{2}{3} AM$

Xét $\triangle AHD$ có AM là đường trung tuyến (M là trung điểm của HD), G thuộc đoạn thẳng AM và $AG = \frac{2}{3} AM$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác AHD.

Mà HO là đường trung tuyến của tam giác AHD

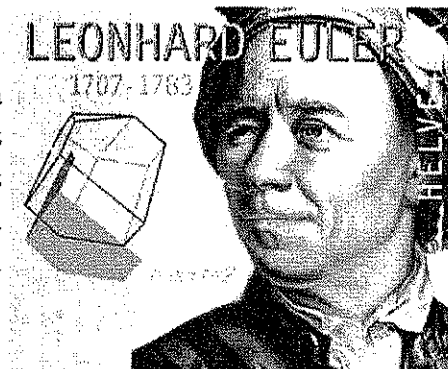
Do đó HO đi qua G.

Vậy H, G, O thẳng hàng

Chúng ta còn có $HG = 2GO$

LEONHARD EULER (Le-on-ha O-le)

Euler là người Thụy Sĩ, sinh ngày 15 tháng 4 năm 1707 và mất ngày 18 tháng 9 năm 1783. Ông là một thiên tài kiệt xuất về toán học, ông đã phát triển rất nhiều ngành của toán học, từ toán học sơ cấp đến toán học cao cấp nhiều kết quả của ông đã trở thành kinh điển.



Vài dòng trao đổi

Bài toán thách đấu của trận đấu thứ hai mươi lăm của Tạp chí Toán Tuổi thơ đã giúp chúng tôi tìm đến một kết quả "Tương tự" như đường thẳng O-le, đó là:

Cho tam giác ABC có I, G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, trọng tâm của tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC, AB. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng I, G, J thẳng hàng và $GI = 2GJ$.

Lời giải

Gọi G' là giao điểm của IJ và AA_1

Xét $\triangle ABC$ có B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AC, AB.

$\Rightarrow B_1C_1$ là đường trung bình của tam giác ABC

$$\Rightarrow B_1C_1 = \frac{BC}{2}$$

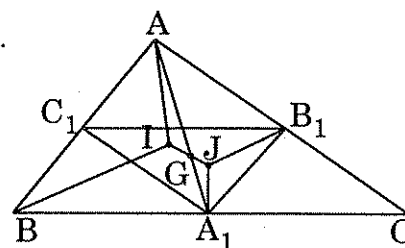
$$\text{Tương tự: } A_1B_1 = \frac{AB}{2}, C_1A_1 = \frac{CA}{2}$$

$$\text{Xét } \triangle A_1B_1C_1 \text{ và } \triangle ABC \text{ có: } \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} \left(= \frac{1}{2} \right)$$

Do đó $\triangle A_1B_1C_1$ và $\triangle ABC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{B_1A_1C_1} = \widehat{BAC}, \widehat{A_1B_1C_1} = \widehat{ABC}$$

$$\text{Mà } \widehat{JA_1B_1} = \frac{\widehat{B_1A_1C_1}}{2}, \widehat{IAB} = \frac{\widehat{BAC}}{2}, \widehat{JB_1A_1} = \frac{\widehat{A_1B_1C_1}}{2}, \widehat{IBA} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$$



Nên: $\widehat{JA_1B_1} = \widehat{IAB}$; $\widehat{JB_1A_1} = \widehat{IBA}$

Do đó $\triangle JA_1B_1 \sim \triangle IAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{JA_1}{IA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}$

Mà $\widehat{BAA_1} = \widehat{AA_1B_1}$ (so le trong và $AB \parallel A_1B_1$). Nên $\widehat{IAA_1} = \widehat{IA_1A} \Rightarrow AI \parallel A_1J$

Xét $\triangle G'AI$ có $A_1J \parallel AI$

$\Rightarrow \frac{G'A_1}{G'A} = \frac{G'J}{G'I} = \frac{JA_1}{IA} = \frac{1}{2}$ (hệ quả của định lí Ta-lét)

$\Rightarrow AG' = \frac{2}{3}AA_1$

$\triangle ABC$ có AA_1 là đường trung tuyến. G' thuộc đoạn thẳng AA_1 và $AG' = \frac{2}{3}AA_1$ nên $G' = G$

Vậy I, G, J thẳng hàng và $GI = 2GJ$

Kết quả trên chúng tôi không thấy được đề cập đến các tài liệu mà chúng tôi đã đọc, liệu nó có nhiều ứng dụng không? Rất mong chờ các bạn đọc cùng trao đổi.

Bài toán 7.

ĐƯỜNG THẲNG SIMSON

Cho tam giác ABC và điểm M nằm trên đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng BC, CA, AB . Khi đó các điểm N, P, Q thẳng hàng (đường thẳng Sim-son của điểm M đối với tam giác ABC).

Lời giải

Tứ giác $QBNM$ có: $\widehat{BQM} + \widehat{QNM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Nên tứ giác $QBNM$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{QBM} = \widehat{QNM}$

Mà $\widehat{QBM} = \widehat{PCM}$

Tứ giác $MNPC$ có: $\widehat{MNC} = \widehat{MPC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MNPC$ nội tiếp

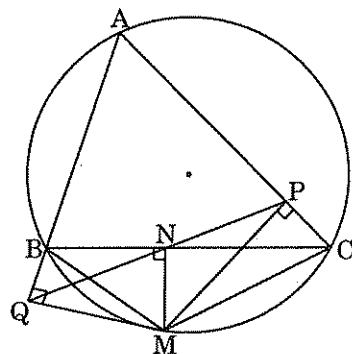
$\Rightarrow \widehat{MNP} + \widehat{PCM} = 180^\circ$

Ta có: $\widehat{QNP} = \widehat{QNM} + \widehat{MNP} = \widehat{PCM} + \widehat{MNP} = 180^\circ$

Vậy ba điểm N, P, Q thẳng hàng.

ROBERT SIMSON (Ro-be-Sim-son)

Robert Simson sinh ngày 14 tháng 10 năm 1687 mất ngày 1 tháng 10 năm 1768. Ông là một nhà toán học người Anh và giáo sư toán học của đại học Glasgow. Cống hiến của ông cho toán học phần lớn là hình học.



Bài toán 8.

ĐƯỜNG THẲNG STEINER

Cho tam giác ABC, điểm M nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng với M qua các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó ba điểm A_2, B_2, C_2 thẳng hàng. (đường thẳng $A_2B_2C_2$ gọi là đường thẳng Steiner ứng với điểm M của tam giác ABC). Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm H của tam giác ABC. Điểm M được gọi là điểm anti-Steiner)

Lời giải

Gọi A_1 là giao điểm của MA_2 và BC, B_1 là giao điểm của MB_2 và AC, C_1 là giao điểm của MC_2 và AB.

Ta có: $MA_1 \perp BC$, A_1 là trung điểm của MA_2 , $MB_1 \perp AC$,

B_1 là trung điểm của MB_2 .

$MC_1 \perp AB$, C_1 là trung điểm của MC_2

Ta có M thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng BC, AC, AB

Do đó A_1, B_1, C_1 thẳng hàng (Đường thẳng Simson)

Mặt khác, ta có A_1B_1 là đường trung bình của tam giác $MA_2B_2 \Rightarrow A_1B_1 \parallel A_2B_2$ và A_1C_1 là đường trung bình của tam giác $MA_2C_2 \Rightarrow A_1C_1 \parallel A_2C_2$

Ta có $A_2C_2 \parallel A_1B_1, A_2B_2 \parallel A_1C_1$

$\Rightarrow A_2B_2$ và A_2C_2 trùng nhau (Tiên đề Ô-clít)

Vậy ba điểm A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

Ta chứng minh đường thẳng Steiner $A_2B_2C_2$ đi qua H.

Cách 1: Gọi D là giao điểm của AH và BC.

Ta có: $\widehat{BHD} = \widehat{ACD}$ (cùng phụ với góc BHD)

$\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$\widehat{AMB} = \widehat{AC_2B}$ (C_2 và M đối xứng qua AB)

Do đó $\widehat{BHD} = \widehat{AC_2B} \Rightarrow$ Tứ giác AHBC₂ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHC_2} = \widehat{ABC_2}$

Mà $\widehat{ABC_2} = \widehat{ABM}$ (C_2 và M đối xứng qua AB)

Nên $\widehat{AHC_2} = \widehat{ABM}$

Tương tự có tứ giác AHCB₂ nội tiếp

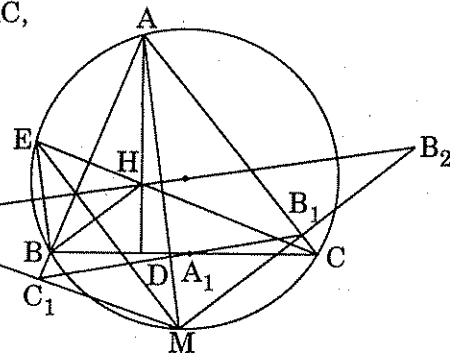
$\Rightarrow \widehat{AHB_2} = \widehat{ACB_2}$. Mà $\widehat{ACB_2} = \widehat{ACM}$

T cũng có $\widehat{ABM} + \widehat{ACM} = 180^\circ$

Do đó $\widehat{B_2HC_2} = \widehat{AHC_2} + \widehat{AHB_2} = \widehat{ABM} + \widehat{ACM} = 180^\circ$

Do vậy C_2, H, B_2 thẳng hàng.

Như vậy đường thẳng $A_2B_2C_2$ đi qua H.



Cách 2: Gọi E là giao điểm của CH và đường tròn (O)

Ta có: $\widehat{ABE} = \widehat{ACE} = \widehat{ABH}$

$\triangle BEH$ cân tại B. Do đó H và E đối xứng qua BC.

Ta có: $\widehat{BHC}_2 = \widehat{BEM}$ (tính chất đối xứng trục)

$\widehat{BEM} = \widehat{BAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

Do đó $\widehat{BHC}_2 = \widehat{BAM}$. Tương tự có: $\widehat{CHB}_2 = \widehat{CAM}$

Ta có: $\widehat{BHC}_2 + \widehat{CHB}_2 + \widehat{BHC} = \widehat{BAM} + \widehat{CAM} + \widehat{BHC} = 180^\circ$

Do vậy C_2, H, B_2 thẳng hàng.

• ĐƯỜNG THẲNG STEINER CỦA TỨ GIÁC TOÀN PHẦN

Cho tứ giác ABCD, I là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của BC và AD. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm của các tam giác IBC, IAD, KAB, KCD. Khi đó bốn điểm H_1, H_2, H_3, H_4 thẳng hàng

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được các đường tròn ngoại tiếp IAD, KAB, KCD đồng quy tại M, $M \in IK$

Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua AB, M_2 là điểm đối xứng của M qua CD, M_3 là điểm đối xứng của M qua BC, M_4 là điểm đối xứng của M qua AD.

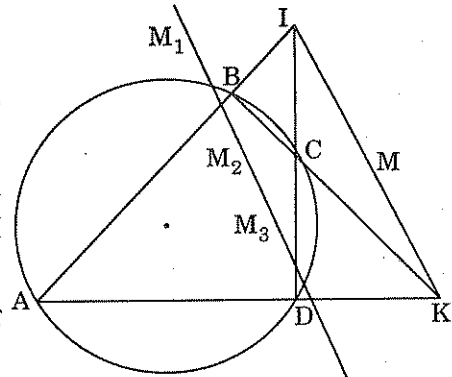
Các điểm $M_1, M_2, M_3, M_4, H_1, H_2, H_3, H_4$ thẳng hàng (Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác)

* **Nhận xét:** Trong một tứ giác toàn phần thì đường thẳng Steiner vuông góc với đường thẳng Gauss

STEINER (Stai-nơ)

Rudolf Steiner Joseph Lotenz sinh ngày 25 hoặc 27 tháng 2 năm 1861 và mất ngày 30 tháng 3 năm 1925. Ông là một nhà triết học, nhà tư tưởng xã hội, kiến trúc sư và thần bí học người Áo. Ban đầu ông được ghi nhận là một nhà phê bình văn học và văn hóa triết học. Vào đầu thế kỉ XX, ông thành lập một phong trào tâm linh mới, thuyết nhân trí, như là một triết học thần bí ngày càng tăng trong số các siêu luận châu Âu và với các mối liên hệ với thuyết thần trí.

Sau thế chiến thứ nhất, Steiner đã làm việc với các nhà giáo dục, nông dân, bác sĩ, và các chuyên gia khác để phát triển giáo dục Waldorf, sinh vật động lực học nông nghiệp, y học nhân trí cũng như các định hướng mới trong các lĩnh vực khác.



Định lý Newton

Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đường chéo, AC, BD. Khi đó ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi r là bán kính đường tròn (O) nội tiếp tứ giác ABCD.

Ta có: $AB = CD = BC + AD$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r$$

$$\Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OBC} + S_{OAD}$$

$$\text{Vậy } S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

• Nếu $AB \parallel CD$

Dễ dàng chứng minh được M, O, N thẳng hàng (Các điểm M, O, N cùng nằm trên đường trung bình của hình thang ABCD)

Gọi S là giao điểm của AB và CD.

Trên tia SA lấy E sao cho $SE = AB$, trên tia SD lấy F sao cho $SF = CD$.

$$S_{OES} + S_{OFS} = S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow S_{OEF} = \frac{1}{2} S_{ABCD} - S_{SEF} \quad (1)$$

$$\text{Và } S_{MES} + S_{MFS} = S_{MAB} + S_{MCD} = \frac{1}{2} S_{ABC} + \frac{1}{2} S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow S_{MEF} = \frac{1}{2} S_{ABCD} - S_{SEF} \quad (2)$$

$$\text{Tương tự } S_{NEF} = \frac{1}{2} S_{ABCD} - S_{SEF} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) có $S_{OEF} = S_{MEF} = S_{NEF}$

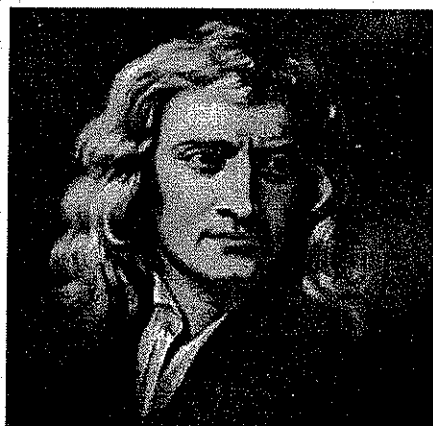
Do vậy O, M, N cùng thuộc một đường thẳng song song với EF.

Vậy M, O, N thẳng hàng.

NEWTON (Niu--ton)

Isaac Newton là người Anh, sinh ngày 25 tháng 12 năm 1642 và mất ngày 20 tháng 3 năm 1727 theo lịch Gregory ông sinh ngày 4 tháng 1 năm 1643 và mất ngày 31 tháng 3 năm 1727.

Ông là một nhà Vật Lý, nhà thiên văn học, nhà triết học, nhà Toán học, nhà Thần học và nhà giả kim.



Năm 2005 trong một cuộc thăm đo ý kiến của Hội Hoàng Gia về nhân vật có ảnh hưởng lớn nhất trong lịch sử khoa học, Newton là người được cho rằng có nhiều ảnh hưởng hơn Albert Einstein.

Định lý Pascal

Cho 6 điểm bất kỳ A, B, C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn. Gọi G, H, K lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB và DE, BC và EF, CD và AF. Khi đó ba điểm G, H, K thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1. (Phương pháp thêm điểm)

Gọi I là giao điểm của hai đường tròn (GBD) và (KDF) (I khác D)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \widehat{BIF} &= \widehat{BID} + \widehat{DIF} = \widehat{BGB} + \widehat{DKF} \\ &= \frac{\text{sđAFE} - \text{sđBCD}}{2} + \frac{\text{sđABC} - \text{sđCDF}}{2} \\ &= \frac{\text{sđCAE} - \text{sđBCF}}{2} = \frac{\text{sđBAF} - \text{sđCDE}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \widehat{BHF} = \frac{\text{sđBAF} - \text{sđCDE}}{2}$$

$$\text{Nên } \widehat{BIF} = \widehat{BHF}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BIHF nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BIH} + \widehat{BFH} = 180^\circ$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{BIG} = \widehat{BDG} \left(= \frac{1}{2} \text{sđBG} \right)$$

Mà $\widehat{BDG} = \widehat{BFE}$ (Tứ giác BFED nội tiếp)

$$\text{Vậy có } \widehat{BIH} + \widehat{BIG} = \widehat{BIH} + \widehat{BFH} = 180^\circ$$

$$\text{Ta có: } \widehat{HIG} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ H, I, G thẳng hàng

Chứng minh tương tự cũng có I, H, K thẳng hàng.

Như vậy bốn điểm H, I, G, K thẳng hàng

Vậy ba điểm G, H, K thẳng hàng

Cách 2. (Sử dụng định lý Menelaus)

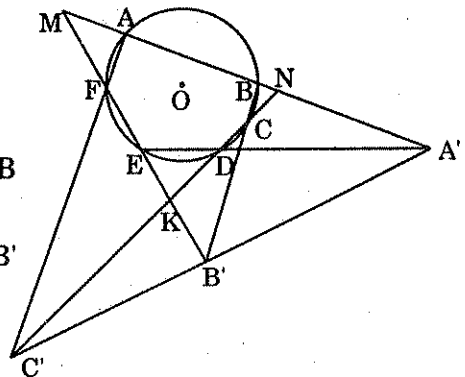
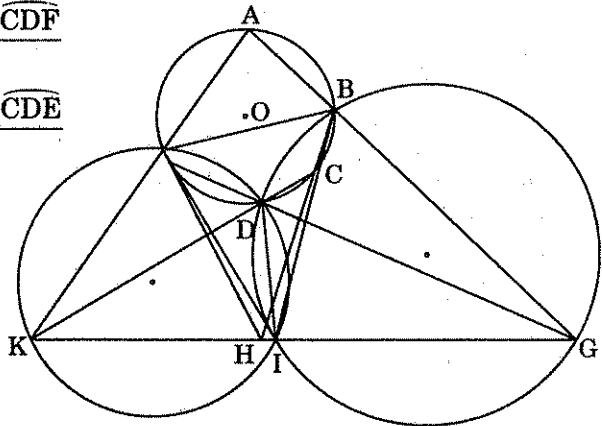
Gọi M, N, K lần lượt là giao điểm của AB và EF, AB và CD, CD và EF

Xét $\triangle MNK$ có $B \in MN$, $C \in NK$, $B' \in MK$ và B, C, B' thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{BM}{BN} \cdot \frac{CN}{CK} \cdot \frac{B'K}{B'M} = 1 \quad (\text{định lý Menelaus}) \quad (1)$$

Xét $\triangle MNK$ có $D \in NK$, $A' \in MN$, $E \in MK$ và D, A', E thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{DN}{DK} \cdot \frac{EK}{EM} \cdot \frac{A'M}{A'N} = 1 \quad (\text{định lý Menelaus}) \quad (2)$$



Xét $\triangle MNK$ có $A \in MN$, $F \in MK$, $C' \in NK$ và A, F, C' thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{AM}{AN} \cdot \frac{C'N}{C'K} \cdot \frac{FK}{FM} = 1 \quad (3)$$

Xét $\triangle MAF$ và $\triangle MEB$ có: $\widehat{AMF}$ (chung), $\widehat{MAF} = \widehat{BEB}$ (Tứ giác ABEF nội tiếp)

Do đó $\triangle MAF \sim \triangle MEB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AM}{EM} = \frac{FM}{BM} \Rightarrow AM \cdot BM = EM \cdot FM \quad (4)$$

Tương tự có $AN \cdot BN = CN \cdot DN$ (5)

$$FK \cdot EK = CK \cdot DK \quad (6)$$

Từ (1), (2), (3), (4), (5), (6) ta có: $\frac{B'K}{B'M} \cdot \frac{A'M}{AN} \cdot \frac{C'N}{C'K} = 1$

Xét $\triangle MNK$ có $B' \in KM$, $A' \in MN$, $C' \in NK$ và $\frac{B'K}{B'M} \cdot \frac{A'M}{AN} \cdot \frac{C'N}{C'K} = 1$

Vậy A', B', C' thẳng hàng (định lí Menelaus)

BLAISE PASCAL (Ble-dơ Pax-can)

Ông sinh ngày 19 tháng 6 năm 1623, mất ngày 19 tháng 8 năm 1662. Ông là một nhà Toán học, nhà Vật Lý học, nhà tư tưởng và là nhà văn.

Pascal đã phải chịu đựng các ốm đau trong suốt cuộc đời và đã mất ở tuổi 39, chỉ hai tháng sau lần sinh nhật lần thứ 39 của ông.



Bài toán 11.

ĐƯỜNG THẲNG MONGE VÀ D'ALEMBERT

Cho ba đường tròn có bán kính khác nhau và ở ngoài nhau. Khi đó giao điểm của các tiếp tuyến chung ngoài của từng cặp đường tròn cùng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

Gọi ba đường tròn là $(O_1; r_1)$, $(O_2; r_2)$, $(O_3; r_3)$; giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1; r_1)$ và $(O_2; r_2)$ là C ; của $(O_1; r_1)$ và $(O_3; r_3)$ là B ; của $(O_3; r_3)$ và $(O_2; r_2)$ là A .

Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài

của (O_1) , (O_2) ($M \in (O_1)$, $N \in (O_2)$)

Dễ thấy O_1, O_2, C thẳng hàng. Ta có: $O_1N \perp CN$, $O_2M \perp CN$

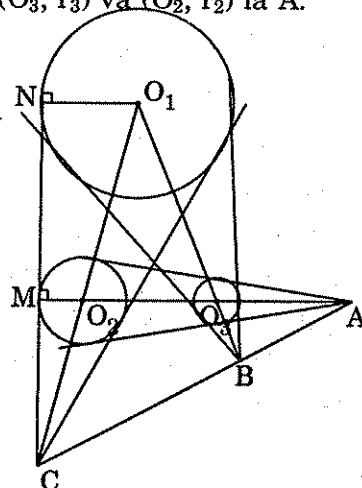
$\Rightarrow O_1N \parallel O_2M$

$$\triangle CNO_1 \text{ có } O_1N \parallel O_2M \Rightarrow \frac{CO_1}{CO_2} = \frac{O_1N}{O_2M} = \frac{r_1}{r_2}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{AO_2}{AO_3} = \frac{r_2}{r_3}; \frac{BO_3}{BO_1} = \frac{r_3}{r_1}$$

$$\frac{CO_1}{CO_2} \cdot \frac{AO_2}{AO_3} \cdot \frac{BO_3}{BO_1} = \frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} = 1$$



Xét $\Delta O_1O_2O_3$ có $A \in O_2O_3$, $B \in O_1O_3$, $C \in O_1O_2$

$$\text{và: } \frac{AO_2}{AO_3} \cdot \frac{BO_3}{BO_1} \cdot \frac{CO_1}{CO_2} = 1$$

Vậy A, B, C thẳng hàng (định lý Menelaus)

Gaspard Monge (Gas-par-mon-ge)

Monge sinh năm 1746 tại Beaune – Pháp và mất năm 1818 tại Paris – Pháp. Ông là nhà toán học nhưng đồng thời cũng là một chính khách. Môn hình học của ông vừa nhiều vừa đa dạng và vừa có chiều sâu. Ngoài công lao sáng tạo môn Hình học họa hình do ông sáng lập. Tác phẩm hình học của ông rất cần cho ngành xây dựng, ông được xem như là người đặt nền móng cho môn Hình học vi phân. Ông là người đầu tiên đã sử dụng phương trình đạo hàm riêng để nghiên cứu các mặt. Ông đã để lại cho đời sau nhiều định lý, trong đó có hai định lý mang tên ông.



Bài toán 12.

ĐƯỜNG THẲNG DROZ-FARNY

Cho hai đường thẳng bất kỳ vuông góc với nhau tại trực tâm H của tam giác ABC, chúng lần lượt cắt các cạnh BC, AC, AB tại X, X', Y, Y', Z, Z'. Gọi M_a , M_b , M_c lần lượt là trung điểm của XX' , YY' , ZZ' . Khi đó M_a , M_b , M_c thẳng hàng.

Lời giải

Bài toán phụ 1. Cho tam giác ABC, ba điểm M, N, P lần lượt nằm trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác APN, BPM, CMN đồng quy. (Định lý Miquel)

Chứng minh

Gọi E là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BPM, CMN (E khác M)

Ta có: $\widehat{APE} = \widehat{EMB}$ (Tứ giác BPEM nội tiếp)

và $\widehat{EMB} = \widehat{ENC}$ (Tứ giác MENC nội tiếp)

Do đó $\widehat{EMC} = \widehat{APE} (= \widehat{EMB})$

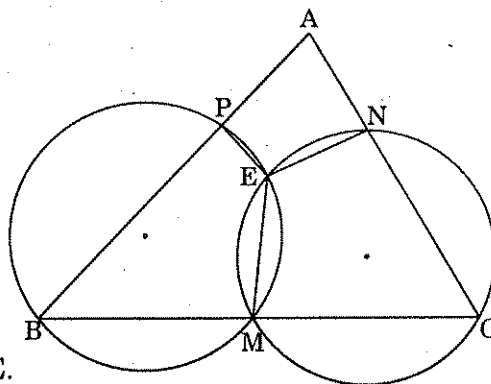
$\Rightarrow$ Tứ giác APEN nội tiếp.

$\Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác APN đi qua E.

Vậy các đường tròn ngoại tiếp các tam giác APN, BPM, CMN đồng quy tại E.

Bài toán phụ 2

Cho tam giác ABC, đường thẳng d đi qua trực tâm H của tam giác. Gọi d_a , d_b , d_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với đường thẳng d qua BC, CA, AB. Các đường thẳng này đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (Điểm anti-Steiner của d) và d là đường thẳng Steiner của điểm đó



Chứng minh.

Giả sử tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O)

Giả sử đường thẳng d cắt đường tròn (O) lần lượt ở D, E (xem hình vẽ bên). Gọi K là giao điểm của d_b và d_c .

A_1 là điểm đối xứng của H qua BC, B_1 là điểm đối xứng của H qua AC, C_1 là điểm đối xứng của H qua AB

Ta có: $\widehat{BAC_1} = \widehat{BAH}$, $\widehat{BAH} = \widehat{BCH}$

$\Rightarrow \widehat{BAC_1} = \widehat{BCC_1} \Rightarrow$ Tứ giác ACBC₁ nội tiếp

$\Rightarrow C_1$ thuộc đường tròn (O).

Chứng minh tương tự B_1, A_1 cũng thuộc đường tròn (O)

Ta có: $\widehat{B_1KC_1} = \widehat{B_1HC_1} - \widehat{KC_1K} - \widehat{KB_1H}$

$$= \widehat{B_1HC_1} - \widehat{C_1HD} - \widehat{B_1HE}$$

$$= \widehat{B_1HC_1} - (180^\circ - \widehat{B_1HC_1}) = 2\widehat{B_1HC_1} - 180^\circ$$

$$= 2(180^\circ - \widehat{BAC}) - 180^\circ = 180^\circ - \widehat{B_1AC_1}$$

$$\Rightarrow \widehat{B_1KC_1} + \widehat{B_1AC_1} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AB₁KC₁ nội tiếp

$\Rightarrow K$ thuộc đường tròn (O)

Chứng minh tương tự có d_c cắt d_a, d_b và d_a và d_b cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O)

Ta có: d_a, d_b, d_c lần lượt đi qua A_1, B_1, C_1 thuộc đường tròn (O) và các đường thẳng này không chứa các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$

Vậy d_a, d_b, d_c đồng quy tại một điểm thuộc đường tròn (O)

Dễ thấy d là đường thẳng Steiner của K

* Trở lại bài toán

Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác

ABC (C_a) là đường tròn ngoại tiếp tam giác

HXX', (C_b) là đường tròn ngoại tiếp tam

giác HYY', (C_c) là đường tròn ngoại tiếp

tam giác HZZ'. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là

điểm đối xứng của H qua BC, AB, AC. Ta

có $H_a \in (C_a), H_b \in (C_b), H_c \in (C_c)$

Dễ thấy các đường tròn (C_a), (C_b), (C_c) có tâm lần lượt là M_a, M_b, M_c

Ta có H_a và giao điểm của (C) và (C_a), $HH_a \perp BC$

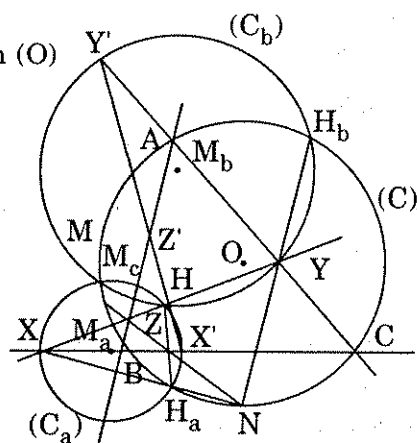
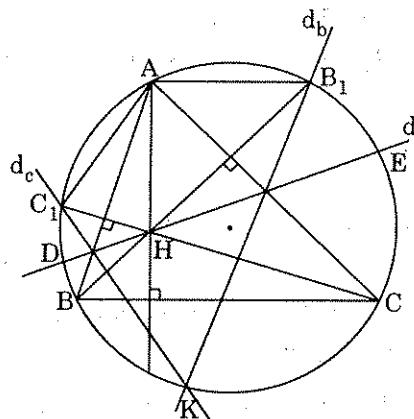
Áp dụng bài toán phụ 2 (định lý Collings) với đường thẳng XYZ qua H, ta có: H_aX, H_bY, H_cZ đồng quy tại N thuộc đường tròn (C).

Áp dụng bài toán phụ 1 (định lý Miquel) cho tam giác XNY với các điểm H_a, H_b, H . Ta có, các đường tròn (C), (C_a), (C_b) cùng đi qua M.

Chứng minh tương tự có (C_c) cũng đi qua M. Các đường tròn (C_a), (C_b), (C_c) cùng đi qua H, M.

$\Rightarrow M_a, M_b, M_c$ cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng MH.

Vậy M_a, M_b, M_c thẳng hàng.



Tên khai sinh của ông là Arnold Droz. Sau khi kết hôn với vợ là bà Lina Farny, cả hai người đều đổi tên thành Droz-Farny. Ông từng học tập tại Munich, cũng chính thời gian này đã làm cháy lên ngọn lửa đam mê Hình học trong ông. Năm 1880, ông trở thành giáo sư vật lý toán học, giảng dạy tại Porrentruy gần Basel (Thụy Sĩ) cho đến năm 1908. Droz-Farny mất sau một thời gian dài chống chọi với bạo bệnh.

Bài toán 13.**ĐƯỜNG THẲNG THE'BAULT**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm trên cạnh BC. Đường tròn tâm P tiếp xúc với các đoạn thẳng AD, DC và tiếp xúc trong với đường tròn (O). Đường tròn tâm Q tiếp xúc với các đoạn thẳng AD, DB và tiếp xúc trong với đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó ba điểm P, I, Q thẳng hàng (Định lý The'bault)

Lời giải

Bài toán phụ 1. Cho đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C. AB là dây cung bất kì của đường tròn (O) và tiếp xúc với đường tròn (I) tại T. Khi đó CT đi qua điểm chính giữa của cung AB không chứa C.

Chứng minh

Gọi M là giao điểm của CT và (O) ta có: (I) và (O) tiếp xúc nhau tại C

$\Rightarrow C, I, O$ thẳng hàng

ΔICT có $IC = IT (= r) \Rightarrow \Delta ICT$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{ICT} = \widehat{ITC}$

ΔOCM có $OC = OM (= R)$

$\Rightarrow \Delta OCM$ cân tại O

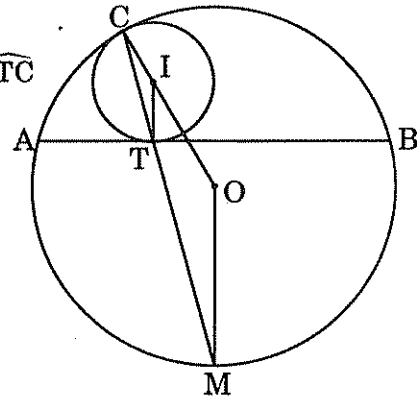
$\Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{OMC}$

Ta có: $\widehat{ITC} = \widehat{OMC} (= \widehat{OCM}) \Rightarrow IT \parallel OM$

Mà $IT \perp AB$ (AB tiếp xúc với đường tròn (I))

Suy ra $OM \perp AB$

$\Rightarrow M$ là điểm chính giữa của cung AB



Bài toán phụ 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc BC. Một đường tròn (O') tiếp xúc với hai đoạn thẳng MA, MC tại E, F và đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O) tại K. Khi đó tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF (Định lý Lyness)

Chứng minh

Vẽ Kx là tia tiếp tuyến của đường tròn (O) (Tia Kx nằm trên nửa mặt phẳng bờ KN có chứa) Gọi N là giao điểm của KF và đường tròn (O)

Ta có N là điểm chính giữa của cung BC (bài toán phụ 1)

Gọi I' là giao điểm của AN và EF. Ta có: $\widehat{BN} = \widehat{NC}$

$\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{CAN}, NB = NC$

$\Rightarrow AN$ là tia phân giác của góc BAC

Ta có: $\widehat{I'EK} = \widehat{FKx}, \widehat{IAK} = \widehat{NHx}$

$\Rightarrow \widehat{IEK} = \widehat{IAK} \Rightarrow$ Tứ giác AKIE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AI'K} = \widehat{AEK}$

Mà $\widehat{AEK} = \widehat{EFK}$. Nên $\widehat{AI'K} = \widehat{EFK}$

Ta có $\widehat{N'IK} = \widehat{NFI'}$

Xét $\triangle NI'K$ và $\triangle NFI'$ có: $\widehat{INK}$ (chung), $\widehat{N'IK} = \widehat{NFI'}$

Do đó $\triangle NI'K \sim \triangle NFI'$

$$\Rightarrow \frac{NI'}{NF} = \frac{NK}{NI'} \Rightarrow NI'^2 = NK.NF$$

Xét $\triangle NCF$ và $\triangle NKC$ có: $\widehat{CNF}$ (chung), $\widehat{NCF} = \widehat{NKC}$

$$\text{Do đó: } \triangle NCF \sim \triangle NKC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{NC}{NK} = \frac{NF}{NC} \Rightarrow NC^2 = NK.NF$$

Ta có: $NI'^2 = NC^2 (= NK.NF)$

$\Rightarrow NI' = NC \Rightarrow \triangle NI'C$ cân tại N

$\Rightarrow \widehat{NI'C} = \widehat{NCI'}$

$\Rightarrow \widehat{I'AC} + \widehat{I'CA} = \widehat{BCN} + \widehat{BCI'}$

$\Rightarrow \widehat{I'CA} = \widehat{BCI'}$

$\Rightarrow CI'$ là tia phân giác $\widehat{ACB}$

Do vậy I' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có $I' = I$

Vậy I nằm trên đường thẳng EF

* Trở lại bài toán

Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn (P) với BC, AD. G, H là tiếp điểm của đường tròn (Q) với BC, AD. Gọi I là giao điểm của EF và GH

Từ bài toán 2, ta có I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Gọi M là giao điểm của GH và QD, N là giao điểm của EF và PD.

Dễ thấy tứ giác MDNI là hình chữ nhật.

Xét $\triangle QDG$ và $\triangle DPE$ có: $\widehat{QGD} = \widehat{PEF} (= 90^\circ)$, $\widehat{QDG} = \widehat{DPE}$ (cùng phụ $\widehat{PDE}$)

$$\text{Do đó } \triangle QDG \sim \triangle DPE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{QD}{DP} = \frac{QG}{DE}$$

Xét $\triangle QMG$ và $\triangle DNE$: $\widehat{QMG} = \widehat{DNE} (= 90^\circ)$, $\widehat{MQG} = \widehat{NDE}$

$$\text{Do đó } \triangle QMG \sim \triangle DNE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{QG}{DE} = \frac{QM}{DN}$$

$$\text{Mà } DN = MI \text{ nên } \frac{QM}{MI} = \frac{QG}{DE}$$

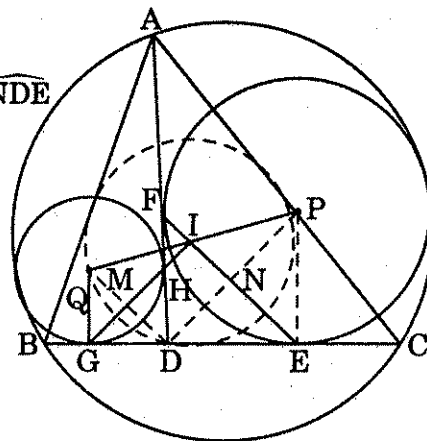
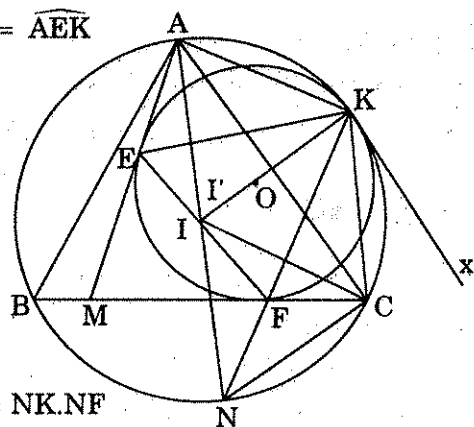
$$\text{Ta có: } \frac{QM}{MI} = \frac{QD}{DP} \left(= \frac{QG}{DE} \right)$$

Xét $\triangle QMI$ và $\triangle QDP$ có:

$$\widehat{QMI} = \widehat{QDP} (= 90^\circ), \frac{QM}{QD} = \frac{MI}{DP} \text{ (vì } \frac{QM}{MI} = \frac{QD}{DP} \text{)}$$

Do đó $\triangle QMI \sim \triangle QDP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IQM} = \widehat{PQD} \Rightarrow$ Hai tia QI, QP trùng nhau

Vậy ba điểm P, I, Q thẳng hàng.



CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

CHƯƠNG I

123 BÀI TOÁN CHỌN LỌC CỦA NHÀ GIÁO NGUYỄN ĐỨC HÒA

Bài 1. (Lớp 7) Cho tam giác ABC. Trên nửa mặt phẳng có bờ AC không chứa B vẽ điểm D sao cho $\triangle ADC = \triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BD. Chứng minh rằng ba điểm A, M, C thẳng hàng.

Chứng minh rằng ba điểm A, M, C thẳng hàng.

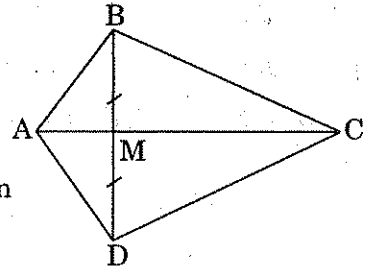
Lời giải

Ta có $\triangle ADC = \triangle ABC$ (gt)

$\Rightarrow AD = AB, CD = CB$

Mà MD = MB (M là trung điểm của đoạn thẳng BD) nên A, C, M cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BD.

Vậy ba điểm A, M, C thẳng hàng.



Bài 2. (Lớp 7) Cho tam giác ABC cân tại B. Lấy M nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\triangle MAB = \triangle MBC$. Gọi N là trung điểm của AC. Chứng minh rằng ba điểm B, M, N thẳng hàng.

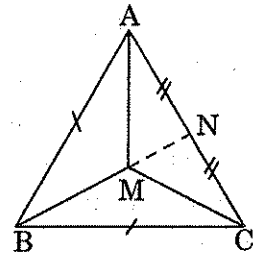
Lời giải

Ta có $\triangle MAB = \triangle MBC$ (gt)

$\Rightarrow MA = MB$ và $MB = MC$

$\Rightarrow MA = MC$, mà BA = BC ($\triangle ABC$ cân tại B) và NA = NC (N là trung điểm của AC) nên B, M, N cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC.

Vậy ba điểm B, M, N thẳng hàng.



Bài 3. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Lấy M và N nằm ngoài tam giác sao cho các tam giác MAB và NBC là các tam giác đều. Chứng minh rằng: M, B, N thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{MBA} = 60^\circ$ ($\triangle MAB$ đều)

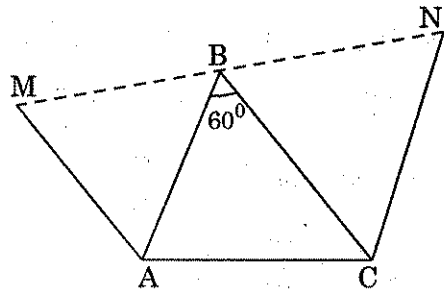
$\widehat{ABC} = 60^\circ$ (gt)

$\widehat{CBN} = 60^\circ$ ($\triangle NBC$ đều)

Do đó: $\widehat{MBA} + \widehat{ABC} + \widehat{CBN} = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MBN} = 180^\circ$

Vậy M, B, N thẳng hàng.



Bài 4. (Lớp 7) Cho tam giác đều ABC. Lấy các điểm D, E nằm ngoài tam giác sao cho các tam giác DAB và EAC là các tam giác đều. Chứng minh rằng ba điểm D, A, E thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{DAB} = 60^\circ$ ($\triangle DAB$ đều)

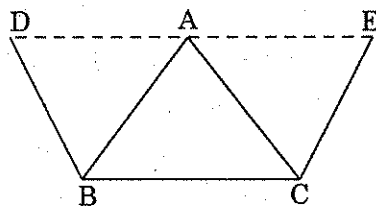
$$\widehat{BAC} = 60^\circ (\triangle ABC \text{ đều})$$

$$\widehat{CAE} = 60^\circ (\triangle EAC \text{ đều})$$

$$\text{Do đó: } \widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DAE} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm D, A, E thẳng hàng.



Bài 5. (Lớp 7) Cho điểm M nằm giữa hai điểm A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tam giác đều ABC và AMD. Chứng minh rằng ba điểm A, D, C thẳng hàng.

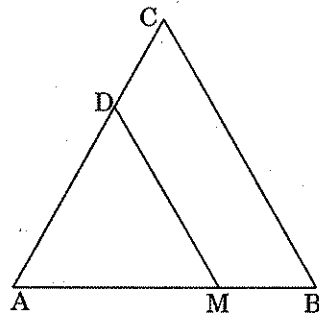
Lời giải

$$\text{Ta có: } \widehat{MAD} = 60^\circ (\triangle AMD \text{ đều}) \text{ và } \widehat{BAC} = 60^\circ (\triangle ABC \text{ đều})$$

$$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{BAC} (= 60^\circ)$$

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BAC}$ (M thuộc AB) mà hai tia AD và AC cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB nên hai tia AD và AC trùng nhau.

Vậy ba điểm A, D, C thẳng hàng.



Bài 6. (Lớp 7) Về phía ngoài tam giác ABC vẽ các điểm D và E sao cho $\triangle BAD = \triangle ABC$ và $\triangle CEA = \triangle ABC$. Chứng minh rằng ba điểm D, A, E thẳng hàng.

Lời giải

$$\triangle BAD = \triangle ABC \text{ (gt)}$$

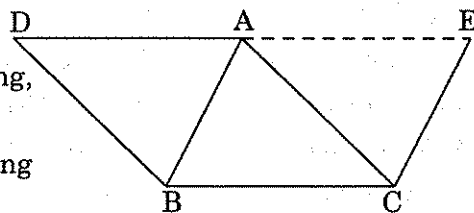
$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ABC} \text{ mà hai góc này ở vị trí so le trong, nên } AD \parallel BC$$

$$\triangle CEA = \triangle ABC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{ACB} \text{ mà hai góc này ở vị trí so le trong, nên } AE \parallel BC$$

Ta có: $AD \parallel BC$, $AE \parallel BC$ và A nằm ngoài đường thẳng BC nên AD trùng với AE (tiên đề O-clít)

Vậy ba điểm D, A, E thẳng hàng.



Bài 7. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Vẽ các tam giác đều ABD và BCE (D và E cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A). Chứng minh rằng A, D, E thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \widehat{ABC} + \widehat{CBD} = \widehat{ABD} = 60^\circ (\triangle ABD \text{ đều}) \\ \widehat{DBE} + \widehat{CBD} = \widehat{CBE} = 60^\circ (\triangle BCE \text{ đều}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DBE}$$

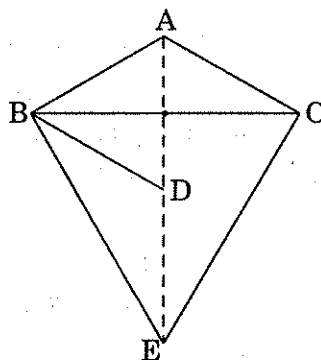
$\triangle ABC$ và $\triangle DBE$ có:

$$AB = DB (\triangle ABD \text{ đều})$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$$

$$BC = BE (\triangle BCE \text{ đều})$$

$$\text{Do đó } \triangle ABC = \triangle DBE \text{ (c.g.c)}$$



$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDE}$, mà $\widehat{BAC} = 120^\circ$ nên $\widehat{BDE} = 120^\circ$

Ta có $\widehat{ADE} = \widehat{ADB} + \widehat{BDE} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$

Vậy A, D, E thẳng hàng.

Bài 8. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có M nằm giữa B và C. Trên các tia đối của các tia AB, AM và AC lần lượt lấy các điểm D, N và E sao cho A là trung điểm chung của các đoạn thẳng BD, MN và CE. Chứng minh rằng D, N, E thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle AND$ và $\triangle ABM$ có: $AD = AB$ (A là trung điểm của BD)

$\widehat{DAN} = \widehat{BAM}$ (hai góc đối đỉnh)

$AN = AM$ (A là trung điểm của MN)

Do đó $\triangle ADN = \triangle ABM$ (c.g.c)

$\triangle ADE$ và $\triangle ABC$ có: $AD = AB$ (A là trung điểm của BD)

$\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$ (hai góc đối đỉnh)

$AE = AC$ (A là trung điểm của CE)

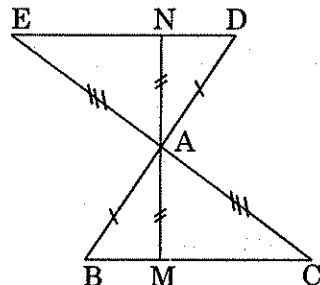
Do đó $\triangle ADE = \triangle ABC$ (c.g.c)

Ta có: $\widehat{ADN} = \widehat{ABM}$ ($\triangle AND = \triangle ABM$), $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ ($\triangle ADE = \triangle ABC$) và B, M, C thẳng hàng.

Do đó $\widehat{ADN} = \widehat{ADE}$

Mặt khác hai tia DN, DE cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ AD, nên hai tia DN, DE trùng nhau

Vậy D, N, E thẳng hàng.



Bài 9. (Lớp 7) Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D ($D \neq B$). Qua D vẽ tia Dx song song với BA (tia Dx và điểm A cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ BC). Vẽ tam giác CDE cân tại E (E thuộc tia Dx). Chứng minh rằng ba điểm E, A, C thẳng hàng.

Lời giải

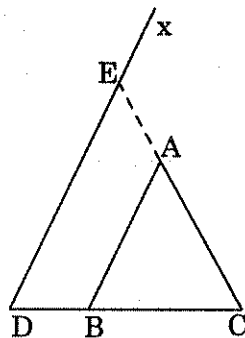
Ta có: $\widehat{DCA} = \widehat{ABC}$ ($\triangle ABC$ cân tại A và D thuộc DC)

$\widehat{ABC} = \widehat{EDC}$ (hai góc đồng vị và $DE \parallel BA$)

Và $\widehat{EDC} = \widehat{DCE}$ ($\triangle CDE$ cân tại E) nên $\widehat{DCA} = \widehat{DCE}$

Mặt khác hai tia CA, CE cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ DC. Do đó tia CA trùng với tia CE

Vậy ba điểm E, A, C thẳng hàng.



Bài 10. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$. Vẽ điểm M nằm ngoài tam giác sao cho $MA = 4\text{cm}$ và $MB = 5\text{cm}$. Chứng minh rằng ba điểm M, A, C thẳng hàng.

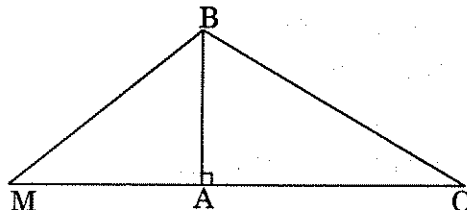
Lời giải

$\triangle ABM$ có: $MB^2 = 5^2 = 25$

$MA^2 + AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

Do đó $MB^2 = MA^2 + AB^2$

$\Rightarrow \triangle ABM$ vuông tại A (Định lý Py-ta-go đảo)



$\Rightarrow \widehat{MAB} = 90^\circ$ mà $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ($\triangle ABC$ vuông tại A)

nên $\widehat{MAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ + 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAC} = 180^\circ$

Vậy ba điểm M, A, C thẳng hàng.

Bài 11. (Lớp 7) Cho hai điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng xy. Gọi C là điểm đối xứng với A qua xy và M là điểm nằm trên xy sao cho MA + MB có giá trị nhỏ nhất. Chứng minh rằng: B, M, C thẳng hàng.

Lời giải

Vì C đối xứng với A qua xy, nên xy là đường trung trực của AC, mà M thuộc xy (gt) nên MA = MC

$\Rightarrow MA + MB = MC + MB$

Xét ba điểm C, M, B ta có:

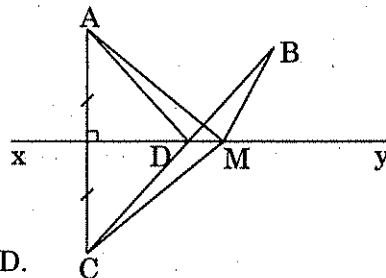
$CM + MB \geq CB$ (Quy tắc ba điểm)

Do đó $MA + MB \geq CB$ (Không đổi, vì C, B cố định)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M nằm giữa C và B khi và chỉ khi M nằm giữa của CB và xy)

Do đó khi MA + MB có giá trị nhỏ nhất thì M trùng D.

Vậy B, M, C thẳng hàng.



Bài 12. (Lớp 7) Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho CE = AD. Đường thẳng qua E và song song với AB cắt BC tại F. Gọi O là trung điểm của DE. Chứng minh rằng ba điểm A, O, F thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{EFC} = \widehat{B}$ (hai góc đồng vị và $EF \parallel AB$) và $\widehat{B} = \widehat{C}$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{C}$

$\Rightarrow \triangle CEF$ cân tại E

$\Rightarrow FE = CE$, mà $CE = AD$ (gt) nên $FE = AD$.

$\triangle OEF$ và $\triangle ODA$ có:

$FE = AD$

$\widehat{OEF} = \widehat{ODA}$ (hai góc so le trong và $EF \parallel AB$, $D \in AB$)

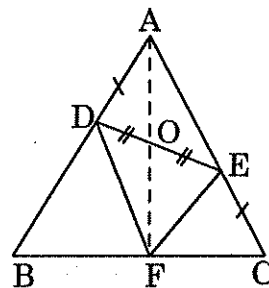
$OE = OD$ (O là trung điểm của DE)

Do đó $\triangle OEF = \triangle ODA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{EOF} = \widehat{DOA}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{EOF} + \widehat{FOD} = 180^\circ$ (hai góc kề bù). Nên $\widehat{DOA} + \widehat{FOD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOF} = 180^\circ$

Vậy ba điểm A, O, D thẳng hàng.



Bài 13. (Lớp 7) Cho điểm nằm M giữa hai điểm A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tam giác đều AMD và MBE. Gọi I là trung điểm của DE và C là giao điểm của hai đường thẳng AD và BE. Chứng minh rằng ba điểm M, I, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{EMB} = 60^\circ$ ($\triangle MBE$ đều)

Và $\widehat{DAM} = 60^\circ$ ($\triangle AMD$ đều)

$\Rightarrow \widehat{EMB} = \widehat{DAE}$, mà $\widehat{EMB}$ và $\widehat{DAE}$ ở vị trí đồng vị nên $EM \parallel CD$.

Tương tự: $DM \parallel CE$

$\triangle CDE$ và $\triangle MED$ có: $\widehat{CDE} = \widehat{MED}$ (hai góc so le trong và $EM \parallel CD$)

$$DE = ED$$

$\widehat{CED} = \widehat{MDE}$ (hai góc so le trong và $DM \parallel CE$)

Do đó $\triangle CDE = \triangle MED$ (g.c.g)

$\triangle IDC$ và $\triangle IEM$ có: $CD = ME$ ($\triangle CDE = \triangle MED$)

$\widehat{IDC} = \widehat{IEM}$ (hai góc so le trong và $EM \parallel CD$)

$ID = IE$ (I là trung điểm của DE)

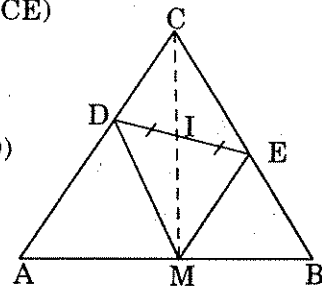
Do đó $\triangle IDC = \triangle IEM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DIC} = \widehat{EIM}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{DIC} + \widehat{CIE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù). Nên $\widehat{EIM} + \widehat{CIE} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CIM} = 180^\circ$

Vậy ba điểm M, I, C thẳng hàng.



Bài 14. (Lớp 7) Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Trên các tia AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $AD = AC$ và $AE = AB$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CD, N là giao điểm của BC và DE. Chứng minh rằng ba điểm M, N, A thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ADE$ và $\triangle ACB$ có: $AD = AC$ (gt), $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$ (góc chung), $AE = AB$ (gt)

Do đó $\triangle ADE = \triangle ACB$ (c.g.c) có $AD = AC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ADC$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACD}$ mà $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ ($\triangle ADE = \triangle ACB$)

nên $\widehat{ADC} - \widehat{ADE} = \widehat{ACD} - \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{BCD}$ hay $\widehat{NDC} = \widehat{NCD}$ (N thuộc BC và DE)

$\Rightarrow \triangle NDC$ cân tại N

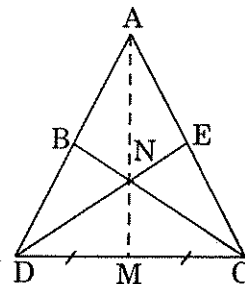
Ta có: $MD = MC$ (M là trung điểm của CD)

$ND = NC$ ($\triangle NDC$ cân tại N)

và $AD = AC$ (gt)

Nên ba điểm M, N, A cùng nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng DC.

Vậy ba điểm M, N, A thẳng hàng.



Bài 15. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12$, $AC = 5$. Vẽ điểm M (M khác B và C) sao cho $BM + MC = 13$. Chứng minh rằng ba điểm B, M, C thẳng hàng.

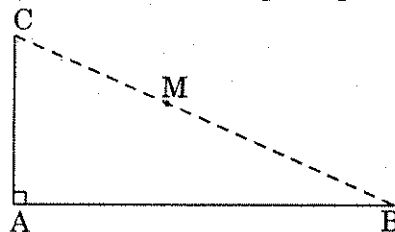
Lời giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (Định lí Py-ta-go)}$$

$$BC^2 = 12^2 + 5^2$$

$$BC^2 = 169 \Rightarrow BC = 13 \text{ (Vì } BC > 0 \text{)}$$



Mà $BM + MC = 13$ (gt), nên $BM + MC = BC$

$\Rightarrow M$ nằm giữa B và C .

Vậy B, M, C thẳng hàng.

Bài 16. (Lớp 7) Cho tam giác DEF vuông tại D có $DE = 6$, $DF = 8$. Vẽ điểm G sao cho $EG = 7$, $GF = 3$. Chứng minh rằng ba điểm E, G, F thẳng hàng.

Lời giải

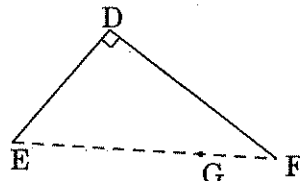
Xét $\triangle DEF$ vuông tại D , ta có:

$$\begin{aligned} EF^2 &= DE^2 + DF^2 \text{ (định lí Py-ta-go)} \\ &= 6^2 + 8^2 = 100 \end{aligned}$$

$\Rightarrow EF = 10$ (Vì $EF > 0$)

Mà $EG + GF = 7 + 3$. Nên $EG + GF = EF (= 10) \Rightarrow G$ nằm giữa E và F .

Vậy E, G, F thẳng hàng.



Bài 17. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có M nằm giữa B, C và D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC . Trên các tia MD, ME theo thứ tự lấy các điểm I, K sao cho D là trung điểm của MI và E là trung điểm của MK . Chứng minh rằng ba điểm I, A, K thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ADI$ và $\triangle BDM$ có:

$DA = DB$ (D là trung điểm của AB)

$\widehat{ADI} = \widehat{BDM}$ (hai góc đối đỉnh)

$DI = DM$ (D là trung điểm của MI)

Do đó $\triangle ADI = \triangle BDM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DAI} = \widehat{DBM}$ mà hai góc DAI và DBM ở vị trí so le trong, nên $AI \parallel BM$

$\Rightarrow AI \parallel MC$ (vì M thuộc BC)

$\triangle AEK$ và $\triangle CEM$ có: $EA = EC$ (E là trung điểm của AC)

$\widehat{AEK} = \widehat{CEM}$ (hai góc đối đỉnh)

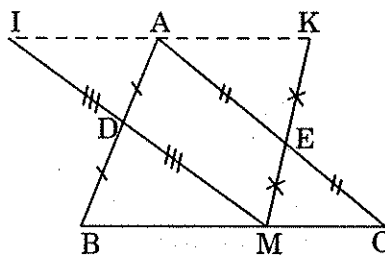
$EK = EM$ (E là trung điểm của MK)

Do đó $\triangle AEK = \triangle CEM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AKE} = \widehat{CME}$ mà hai góc AKE và CME ở vị trí so le trong, nên $AK \parallel MC$

Ta có $AI \parallel MC$, $AK \parallel MC$ và điểm A nằm ngoài đường thẳng MC , nên hai đường thẳng AI và AK trùng nhau (tiên đề Ô-clít)

Vậy ba điểm I, A, K thẳng hàng.



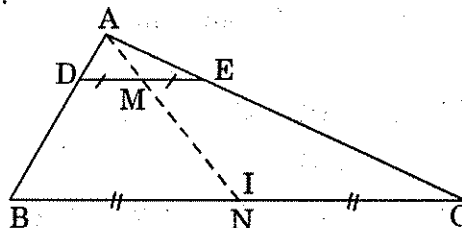
Bài 18. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A có điểm D nằm giữa A và B . Qua D vẽ đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC tại E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE và BC . Chứng minh rằng: A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Lấy điểm I trên cạnh BC sao cho $\widehat{IAB} = \widehat{IBA}$

Mà: $\widehat{IAC} + \widehat{IAB} = 90^\circ$

và $\widehat{ICA} + \widehat{IBA} = 90^\circ$ ($\triangle ABC$ vuông tại A)



Nên $\widehat{IAC} = \widehat{ICA} \Rightarrow \Delta IAC$ cân tại I

ΔIAB có $\widehat{IAB} = \widehat{IBA}$ (theo cách vẽ)

$\Rightarrow \Delta IAB$ cân tại I $\Rightarrow IB = IA$

Mà $IA = IC$ (ΔIAC cân tại I). Nên $IB = IC$. Do đó I là trung điểm của BC

$\Rightarrow I$ trùng N (Vì N là trung điểm của BC)

Khi đó $\widehat{NAB} = \widehat{NBA}$ (1)

Chứng minh tương tự: $\widehat{MAD} = \widehat{MDA}$ hay $\widehat{MAB} = \widehat{MDA}$ (2) (D thuộc AB)

Từ (1), (2) và $\widehat{NBA} = \widehat{MDA}$ (hai góc đồng vị và $DE \parallel BC$) nên $\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$

Mặt khác hai tia AN và AM cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ AB, nên hai tia AN và AM trùng nhau.

Vậy A, M, N thẳng hàng.

Bài 19. (Lớp 7) Cho ba điểm A, B, C thuộc đường thẳng m. Qua A và B lần lượt vẽ các đường thẳng a và b song song với nhau (a không vuông góc với m). Từ C vẽ CD vuông góc với a tại D, CD cắt b tại E. Lấy M thuộc a và N thuộc b sao cho D là trung điểm của AM và E là trung điểm của BN. Chứng minh rằng C, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $CD \perp AM$ ($CD \perp a$) và $AM \parallel BN$ ($a \parallel b$)

$\Rightarrow CD \perp BN$ tại E

ΔBCN có:

CE là đường cao ($CD \perp BN$ ở E) vừa là đường trung tuyến (E là trung điểm của BN)

Nên ΔBCN cân tại C $\Rightarrow \widehat{CNB} = \widehat{CBN}$

Mà $\widehat{BCN} + \widehat{CBN} + \widehat{CNB} = 180^\circ$ (tổng ba góc của một tam giác)

Nên $\widehat{BCN} + \widehat{CBN} + \widehat{CBN} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BCN} = 180^\circ - 2\widehat{CBN}$

Chứng minh tương tự: $\widehat{ACM} = 180^\circ - 2\widehat{CAM}$

Mà $\widehat{CBN} = \widehat{CAM}$ (hai góc đồng vị và $a \parallel b$). Nên $\widehat{BCN} = \widehat{ACM}$ hay $\widehat{BCN} = \widehat{BCM}$ (vì A thuộc BC)

Mặt khác hai tia CN và CM cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ BC, nên hai tia CN và CM trùng nhau.

Vậy C, M, N thẳng hàng.

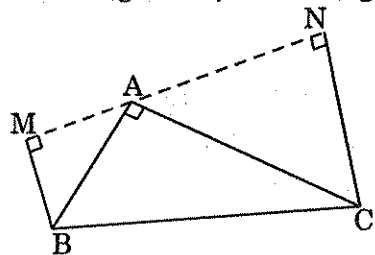
Bài 20. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ các điểm M và N nằm ngoài tam giác sao cho tam giác MAB vuông cân tại M và tam giác NAC vuông cân tại N. Chứng minh rằng: M, A, N thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{MAB} = 45^\circ$ (ΔMAB vuông cân tại M)

$\widehat{BAC} = 90^\circ$ (ΔABC vuông tại A)

$\widehat{CAN} = 45^\circ$ (ΔNAC vuông cân tại N)



$$\text{Do đó: } \widehat{MAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAN} = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MAN} = 180^\circ$$

Vậy M, A, N thẳng hàng.

Bài 21. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$. Vẽ điểm D nằm ngoài tam giác sao cho tam giác DAC cân tại D và $\widehat{ADC} = 40^\circ$. Chứng minh rằng B, C, D thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABC$ có:

$$\widehat{BCA} + \widehat{CAB} + \widehat{ABC} = 180^\circ \text{ (tổng ba góc của một tam giác)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCA} + 30^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BCA} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ)$$

$$\Rightarrow \widehat{BCA} = 110^\circ$$

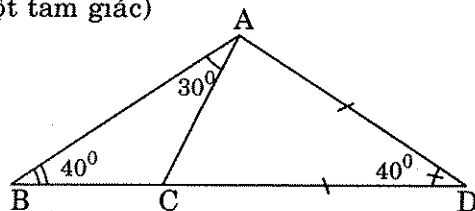
Có $\triangle DAC$ cân tại D (gt)

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{ACD} \text{ mà } \widehat{ACD} + \widehat{CAD} + \widehat{ADC} = 180^\circ \text{ (tổng ba góc của một tam giác) và } \widehat{ADC} = 40^\circ, \text{ nên } \widehat{ACD} + \widehat{ACD} + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{ACD} = 180^\circ - 40^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ACD} = 140^\circ : 2 \Rightarrow \widehat{ACD} = 70^\circ. \text{ Khi đó } \widehat{BCD} = \widehat{BCA} + \widehat{ACD} = 110^\circ + 70^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BCD} = 180^\circ$$

Vậy B, C, D thẳng hàng.



Bài 22. (Lớp 7) Cho $\angle xOy = 90^\circ$. Trên các tia Ox, Oy lần lượt lấy các điểm A, B (A và B khác O). Đường trung trực của đoạn thẳng OA và đường trung trực của đoạn thẳng OB giao nhau tại M. Chứng minh rằng ba điểm A, M, B thẳng hàng.

Lời giải

Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng OA, OB.

$\Rightarrow MH \perp OA$ tại H (vì M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OA)

$\Rightarrow MH \parallel OB$ (vì cùng vuông góc với OA)

Chứng minh tương tự: $MK \parallel OA$ mà $MH \perp OA$, nên $MH \perp MK \Rightarrow \widehat{HMK} = 90^\circ$

Có $MO = MA$ (vì M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OA)

$\Rightarrow \triangle MOA$ cân tại M mà MH là đường cao ($MH \perp OA$) nên MH cũng là đường phân giác của $\triangle MOA$.

Chứng minh tương tự:

$\triangle MOB$ cân tại M có MK là đường cao.

Ta có:

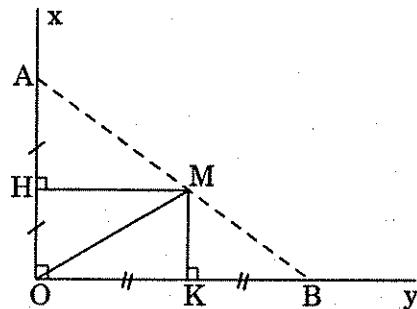
$$\widehat{MBK} = \widehat{MOK} \text{ (} \triangle MOB \text{ cân tại M, M thuộc OB)}$$

$$\widehat{MOK} = \widehat{OMH} \text{ (hai góc so le trong và } MH \parallel OB)$$

$$\widehat{OMH} = \widehat{AMH} \text{ (MH là tia phân giác của góc OMA)}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{MBK} = \widehat{AMH}$$

$$\text{Mà } \widehat{MBK} + \widehat{KMB} = 90^\circ \text{ (} \triangle MKB \text{ vuông tại K), nên } \widehat{AMH} + \widehat{KMB} = 90^\circ$$



$$\Rightarrow \widehat{AMH} + \widehat{HMK} + \widehat{KMB} = 90^\circ + 90^\circ \text{ (vì } \widehat{HMK} = 90^\circ \text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = 180^\circ$$

Do đó ba điểm A, M, B thẳng hàng.

Bài 23. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có AB = 9, BC = 12 và CA = 15. Vẽ điểm M sao cho MB = 16 và MC = 20. Chứng minh rằng: A, B, M thẳng hàng.

Lời giải

Trường hợp M và A nằm khác phía với BC

$$\triangle ABC \text{ có: } AC^2 = 15^2 = 225$$

$$AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$$

$$\text{Do đó } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại B (định lý Py-ta-go đảo)

$$\triangle MBC \text{ có: } MC^2 = 20^2 = 400$$

$$MB^2 + BC^2 = 16^2 + 12^2 = 400$$

Do đó $MC^2 = MB^2 + BC^2 \Rightarrow \triangle MBC$ vuông tại B (định lý Py-ta-go đảo)

Ta có $AB \perp BC$ tại B ($\triangle ABC$ vuông tại B) và $MB \perp BC$ tại B ($\triangle MBC$ vuông tại B)

$\Rightarrow AB$ trùng với MB

Vậy A, B, M thẳng hàng.

Trường hợp M và A nằm cùng phía với BC, chúng ta chứng minh tương tự như trên.

* **Nhận xét:** Chúng ta có thể dùng phương pháp “góc bù” để chứng minh: A, B, M thẳng hàng.

Bài toán cho biết độ dài ba cạnh của cùng một tam giác. Điều này gợi ý cho chúng ta nghĩ đến định lý Py-ta-go đảo, có thể chứng minh sự vuông góc.

Bài 24. (Lớp 7) Cho ba điểm A, B, C thuộc đường thẳng m. Qua A và B lần lượt vẽ các đường thẳng a và b song song với nhau (a không vuông góc với m). Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt a tại M; đường trung trực của đoạn thẳng BC cắt b tại N. Chứng minh rằng ba điểm M, N, C cùng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

Ta có: NB = NC (vì N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC)

$\Rightarrow \triangle NBC$ cân tại N

$\Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{NBC}$ (B thuộc AC)

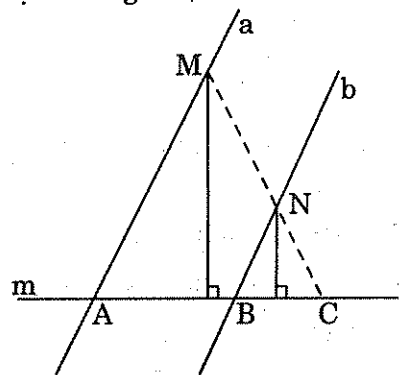
Chứng minh tương tự: $\widehat{ACM} = \widehat{MAC}$

Mà $\widehat{NBC} = \widehat{MAC}$ (hai góc đồng vị và $AM \parallel NB$)

Nên $\widehat{ACN} = \widehat{ACM}$

Mặt khác hai tia CN, CM cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ AC. Do đó tia CN trùng với tia CM.

Vậy ba điểm M, N, C cùng nằm trên một đường thẳng.



Bài 25. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường thẳng đi qua B song song với AC và đường thẳng đi qua C song song với AB cắt nhau tại D. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt cạnh BC tại O. Chứng minh rằng ba điểm A, O, D thẳng hàng.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DCB$, ta có:

$$\widehat{ABC} = \widehat{DCB} \text{ (hai góc so le trong và } CD \parallel AB)$$

BC (cạnh chung)

$$\widehat{ACB} = \widehat{DBC} \text{ (hai góc so le trong và } BD \parallel AC)$$

Do đó $\triangle ABC = \triangle DCB$ (g.c.g)

Ta có: $AB \perp AC$ ($\triangle ABC$ vuông tại A)

và $BD \parallel AC$ (gt) $\Rightarrow AB \perp BD$ mà $CD \parallel AB$ (gt), nên $BD \perp CD$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CDB$, ta có:

$$AB = CD \text{ (} \triangle ABC = \triangle DCB \text{), } \widehat{ABD} = \widehat{CDB} (= 90^\circ), BD \text{ (cạnh chung)}$$

Do đó $\triangle ABD = \triangle CDB$ (c.g.c)

Ta có: $OA = OB$ (Vì O nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB)

$\Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{ABC}$ ($O \in BC$)

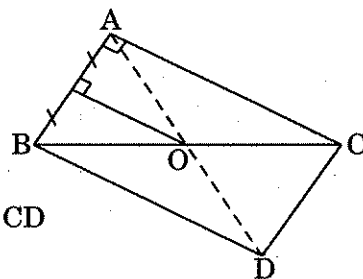
Mà $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$ (hai góc so le trong và $CD \parallel AB$) và $\widehat{DCB} = \widehat{BAD}$ ($\triangle CDB = \triangle ABD$)

Nên $\widehat{BAO} = \widehat{BAD}$

Mặt khác hai tia AO và AD cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ AB .

Do đó hai tia AO và AD trùng nhau.

Vậy ba điểm A, O, D thẳng hàng.



Bài 26. (Lớp 7) Cho điểm A nằm bên trong góc xOy ($\widehat{xOy} < 180^\circ$). Điểm B thuộc tia Ox , điểm C thuộc tia Oy sao cho $AB + BC + CA$ có giá trị nhỏ nhất. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Oy . Chứng minh rằng: B, C, D thẳng hàng.

Lời giải

Gọi E là điểm đối xứng của A qua Ox .

$\Rightarrow$ Đường thẳng chứa tia Ox là đường trung trực của AE

Mà B thuộc Ox (gt). Nên $AB = EB$

Chứng minh tương tự: $CA = CD$

Lúc đó $AB + BC + CA = EB + BC + CD$

Xét ba điểm E, B, C ta có:

$$EB + BC \geq EC \text{ (quy tắc ba điểm)}$$

$$\Leftrightarrow EB + BC + CD \geq EC + CD$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B$ nằm giữa E và C .

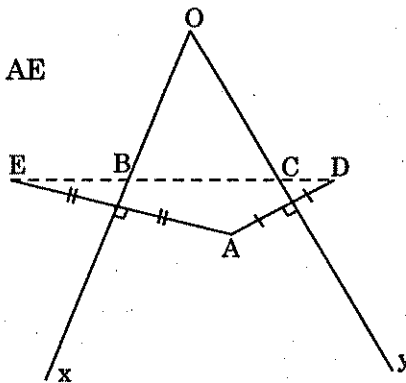
Xét ba điểm E, C, D ta có: $EC + CD \geq ED$ (quy tắc ba điểm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow C$ nằm giữa E và D

Do đó $AB + BC + CA \geq ED$ (không đổi, vì E và D cố định)

Dấu "=" xảy ra, nghĩa là $AB + BC + CA$ có giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow B$ nằm giữa E và C đồng thời C nằm giữa E và D .



$\Leftrightarrow E, B, C$ thẳng hàng và E, C, D thẳng hàng

$\Leftrightarrow E, B, C, D$ thẳng hàng (vì các điểm này cùng thuộc đường thẳng EC)

Vậy B, C, D thẳng hàng.

Bài 27. (Lớp 7) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có M là trung điểm của BC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A lấy các điểm D, E sao cho BC là đường trung trực của AD và $\triangle BCD = \triangle CBE$. Chứng minh: A, M, E thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $AB = DB$ (B thuộc đường trung trực của AD) và $DB = EC$ ($\triangle BCD = \triangle CBE$)

$\Rightarrow AB = EC$

Chứng minh tương tự: $AC = EB$

$\triangle ABC$ và $\triangle ECB$ có: $AB = EC, AC = EB, BC$ (cạnh chung)

Do đó $\triangle ABC = \triangle ECB$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ECB}$

$\triangle AMB$ và $\triangle EMC$ có:

$MB = MC$ (M là trung điểm của BC)

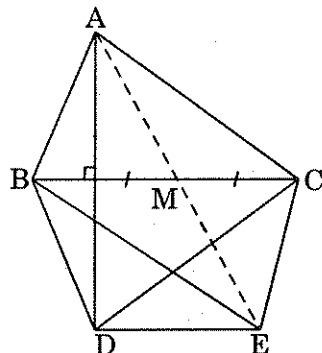
$\widehat{ABM} = \widehat{ECM}$ ($\widehat{ABC} = \widehat{ECB}, M \in BC$)

$AB = EC$

Do đó $\triangle AMB = \triangle EMC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{EMC} \Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{BME} = \widehat{EMC} + \widehat{BME}$

Hay $\widehat{AME} = 180^\circ$ (vì $\widehat{EMC}$ và $\widehat{BME}$ kề bù)

Vậy A, M, E thẳng hàng.



Bài 28. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH ($H \in BC$). Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = AH$. Gọi I là điểm cách đều ba cạnh của tam giác AHB và K là điểm cách đều ba cạnh của tam giác AHC . Chứng minh rằng ba điểm M, I, K thẳng hàng.

Lời giải

Ta có I là điểm cách đều ba cạnh của $\triangle AHB$ (gt)

$\Rightarrow I$ là giao điểm ba đường phân giác của $\triangle AHB$

$\Rightarrow \widehat{AHI} = \frac{1}{2} \widehat{AHB}$, mà $\widehat{AHB} = 90^\circ$ (AH là đường cao của $\triangle ABC$) nên $\widehat{AHI} = 45^\circ$

$\triangle AMI$ và $\triangle AHI$ có: $AM = AH$ (gt), $\widehat{IAM} = \widehat{IAH}$ (AI là tia phân giác của góc BAH , M thuộc AB)

Do đó $\triangle AMI = \triangle AHI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{AHI}$, mà $\widehat{AHI} = 45^\circ$ nên $\widehat{AMI} = 45^\circ$

Lấy điểm N trên cạnh AC sao cho $AN = AH$

$\Rightarrow AM = AN (= AH) \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A

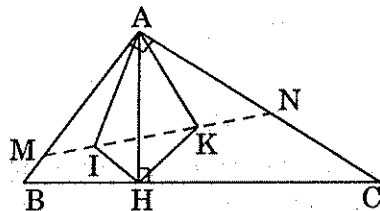
Mà $\widehat{MAN} = 90^\circ$ ($\widehat{BAC} = 90^\circ, M \in AB, N \in AC$)

Nên $\triangle AMN$ vuông cân tại A

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = 45^\circ$

Do đó $\widehat{AMI} = \widehat{AMN} (= 45^\circ) \Rightarrow$ Tia MI trùng với tia MN

$\Rightarrow M, I, N$ thẳng hàng (1)



Chứng minh tương tự: M, K, N thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm M, I, K, N thẳng hàng.

Vậy ba điểm M, I, K thẳng hàng.

Bài 29. (Lớp 7) Cho góc xOy khác góc bẹt có Oz là tia phân giác và M thuộc tia Oz (M khác O). Đường thẳng qua M song song với Oy cắt Ox tại A . Đường thẳng qua M song song với Ox cắt Oy tại B . Đường thẳng qua O vuông góc với Ox và đường thẳng qua M vuông góc với Oy ở H cắt nhau tại C . Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{AMO} = \widehat{MOB}$ (so le trong, $MA \parallel OB$)

và $\widehat{MOB} = \widehat{MOA}$ (Oz là tia phân giác của góc xOy , $M \in Oz$, $A \in Ox$, $B \in Oy$)

$\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{MOA}$

$\Rightarrow \Delta AOM$ cân tại A

$\Rightarrow AO = AM$ (1)

Chứng minh tương tự: $BO = BM$ (2)

Vẽ $MK \perp Ox$ tại $K \Rightarrow MK \parallel OC$ (cùng $\perp Ox$)

ΔOHM vuông tại H và ΔOKM vuông tại K có:

OM là cạnh huyền chung và $\widehat{MOH} = \widehat{MOK}$

(Oz là tia phân giác của góc xOy)

$M \in Oz$, $K \in Ox$, $H \in Oy$)

Do đó $\Delta OHM = \Delta OKM$ (cạnh huyền - góc nhọn)

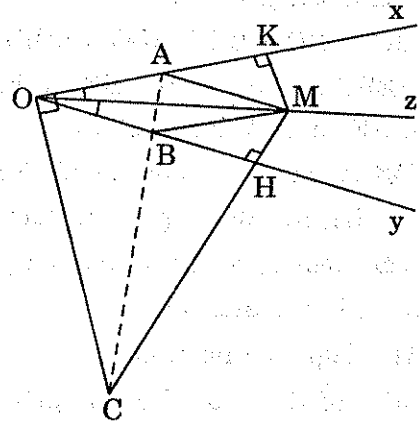
$\Rightarrow \widehat{OMH} = \widehat{OMK}$ hay $\widehat{OMC} = \widehat{OMK}$ ($H \in MC$)

Mà $\widehat{OMK} = \widehat{MOC}$ (so le trong và $MK \parallel OC$)

Nên $\widehat{OMC} = \widehat{MOC} \Rightarrow \Delta OMC$ cân tại $C \Rightarrow CO = CM$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: A, B, C cùng thuộc đường trung trực của OM

Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.



Bài 30. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh BC lấy D sao cho $BD = BA$. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt đường thẳng BA tại E , AC cắt DE tại I . Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AD và CE . Chứng minh rằng ba điểm: H, I, K thẳng hàng.

Lời giải

ΔABC và ΔDBE có: $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$ (góc chung), $BA = BD$ (gt), $\widehat{BAC} = \widehat{BDE} (= 90^\circ)$

Do đó $\Delta ABC = \Delta DBE$ (g.c.g)

$\Rightarrow BC = BE$ (hai cạnh tương ứng)

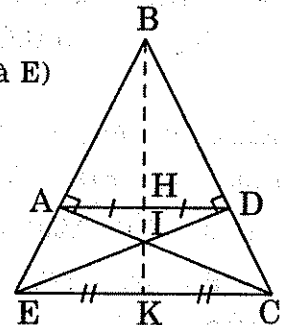
$\Rightarrow BD + DC = BA + AE$ (D nằm giữa B và C ; A nằm giữa B và E)

Mà $BD = BA$ (gt) nên $DC = AE$

ΔDCI và ΔAEI có: $\widehat{CDI} = \widehat{EAI} (= 90^\circ)$

$DC = AE$ (chứng minh trên)

$\widehat{DCI} = \widehat{AEI}$ ($\Delta ABC = \Delta DBE$)



Do đó $\triangle DCI = \triangle AEI$ (g.c.g)

$\triangle IDB$ vuông tại D và $\triangle IAB$ vuông tại A, có:

IB là cạnh huyền chung

DI = AI ($\triangle DCI = \triangle AEI$)

Do đó $\triangle IDB = \triangle IAB$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{IBD} = \widehat{IBA}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow BI$ là tia phân giác của góc ABD

$\triangle ABD$ có $BD = BA$ (gt) $\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại B

Mà BH là đường trung tuyến của $\triangle ABD$ (H là trung điểm của AD) nên BH cũng là đường phân giác của $\triangle ABD$

$\Rightarrow BH$ là tia phân giác của góc ABD

$\triangle EBC$ có $BC = BE$ ($\triangle ABC = \triangle EBC$)

$\Rightarrow \triangle EBC$ cân tại B, mà BK là đường trung tuyến của $\triangle EBC$ (K là trung điểm của CE) nên BK cũng là đường phân giác của $\triangle EBC$

$\Rightarrow BK$ là tia phân giác của góc EBC hay của góc ABD ($A \in BE, D \in BC$)

Ta có BH, BI, BK cùng là tia phân giác của góc ABD

$\Rightarrow$ Các điểm B, H, I, K thẳng hàng.

Vậy H, I, K thẳng hàng.

Bài 31. (Lớp 7) Cho tam giác nhọn ABC có điểm D nằm bên trong tam giác sao cho $\widehat{ADC} = \widehat{BDC} = 120^\circ$. Vẽ tam giác đều BDE (A và E nằm khác phía đối với BD). Chứng minh rằng: A, D, E thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{ADB} + \widehat{BDC} + \widehat{CDA} = 360^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ADB} + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ($\widehat{BDC} = \widehat{CDA} = 120^\circ$)

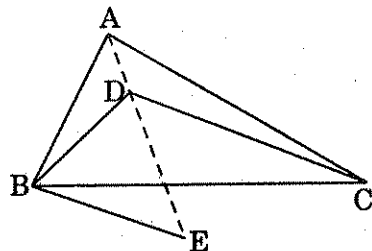
$\Rightarrow \widehat{ADB} = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ADB} = 120^\circ$

Mà $\widehat{BDE} = 60^\circ$ ($\triangle BDE$ đều).

Nên $\widehat{ADB} + \widehat{BDE} = 120^\circ + 60^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = 180^\circ$

Vậy A, D, E thẳng hàng.



Bài 32. (Lớp 7) Cho tam giác nhọn ABC có điểm D nằm bên trong tam giác sao cho $\widehat{BDC} = \widehat{CDA} = 120^\circ$. Vẽ tam giác đều BCM (M và A nằm khác phía với BC). Chứng minh rằng A, D, M thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1: Vẽ tam giác đều BDE (A và E nằm khác phía với BD)

Ta có: $\widehat{ADB} + \widehat{BDC} + \widehat{CDA} = 360^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ADB} + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ($\widehat{BDC} = \widehat{CDA} = 120^\circ$)

$\Rightarrow \widehat{ADB} = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ADB} = 120^\circ$, mà $\widehat{BDE} = 60^\circ$ ($\triangle BDE$ đều)

$$\text{Nên } \widehat{ADB} + \widehat{BDE} = 120^\circ + 60^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow A, D, E \text{ thẳng hàng} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{MBE} + \widehat{EBC} = \widehat{MBC} = 60^\circ (\triangle BCM \text{ đều})$$

$$\text{và } \widehat{CBD} + \widehat{EBC} = \widehat{DBE} = 60^\circ (\triangle BDE \text{ đều})$$

$$\Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{CBD}$$

$\triangle MBE$ và $\triangle CBD$ có:

$$MB = CB (\triangle BCM \text{ đều}),$$

$$\widehat{MBE} = \widehat{CBD},$$

$$BE = BD (\triangle BDE \text{ đều})$$

Do đó $\triangle MBE = \triangle CBD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{BDC} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{mà } \widehat{BDC} = 120^\circ \text{ (gt) nên } \widehat{BEM} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DEB} + \widehat{BEM} = 60^\circ + 120^\circ (\widehat{DEB} = 60^\circ, \triangle BDE \text{ đều})$$

$$\Rightarrow \widehat{DEM} = 180^\circ \Rightarrow D, E, M \text{ thẳng hàng} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra các điểm A, D, E, M thẳng hàng (Vì các điểm A, D, E, M cùng thuộc đường thẳng DE)

Vậy A, D, M thẳng hàng.

Cách 2: Vẽ $MH \perp DB$ tại H, $MK \perp DC$ tại K

Chứng minh được: $\widehat{DCM} + \widehat{DBM} + \widehat{BDC} + \widehat{BMC} = 360^\circ$

$$\text{Mà } \widehat{BDC} = 120^\circ \text{ (gt), } \widehat{BMC} = 60^\circ (\triangle BCM \text{ đều})$$

$$\text{Nên } \widehat{DCM} + \widehat{DBM} = 120^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DCM} + \widehat{DBM} = 360^\circ - 120^\circ - 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DCM} + \widehat{DBM} = 180^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{HBM} + \widehat{DBM} = 180^\circ \text{ (kề bù). Nên } \widehat{DCM} = \widehat{HBM}$$

$\triangle KCM$ vuông tại K và $\triangle HBM$ vuông tại H có:

$$MC = MB (\triangle BCM \text{ đều})$$

$$\widehat{KCM} = \widehat{HBM} (\widehat{DCM} = \widehat{HBM}, K \in DC)$$

Do đó $\triangle KCM = \triangle HBM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow MK = MH \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Mà M nằm bên trong góc BDC, $MK \perp DC$ ở K và $MH \perp DB$ ở H nên M thuộc tia phân giác của góc BDC.

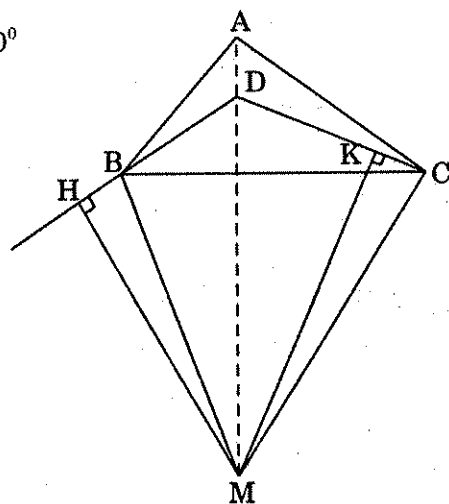
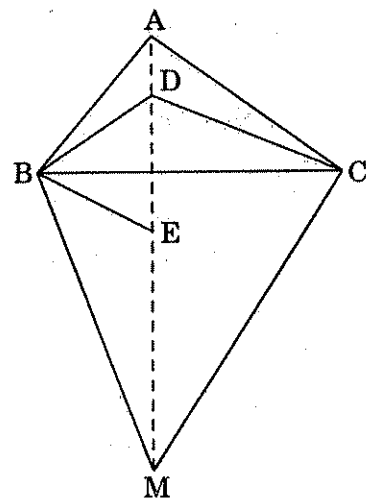
$$\Rightarrow \widehat{MDC} = \frac{1}{2} \widehat{BDC}$$

$$\Rightarrow \widehat{MDC} = 60^\circ (\widehat{BDC} = 120^\circ)$$

$$\Rightarrow \widehat{MDC} + \widehat{CDA} = 60^\circ + 120^\circ (\widehat{CDA} = 120^\circ)$$

$$\Rightarrow \widehat{MDA} = 180^\circ$$

Vậy A, D, M thẳng hàng.



Bài 33. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH. Trên các tia AH, BC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho AD = AC và BE = BA. Gọi F là trung điểm của CD. Chứng minh A, E, F thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle BAE$ có BE = BA (gt)

$\Rightarrow \triangle BAE$ cân tại B

$\Rightarrow \widehat{HEA} = \widehat{BAE}$, mà $\widehat{HAE} + \widehat{HEA} = 90^\circ$ ($\triangle AHE$ vuông ở H)

và $\widehat{EAC} + \widehat{BAE} = 90^\circ$ ($\triangle ABC$ vuông ở A)

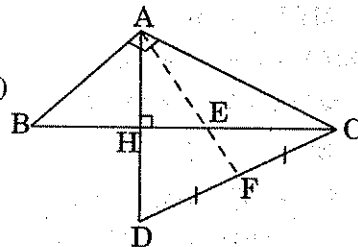
Nên $\widehat{HAE} = \widehat{EAC} \Rightarrow AE$ là đường phân giác của $\widehat{CAD}$

$\triangle ACD$ có AD = AC (gt) $\Rightarrow \triangle ACD$ cân tại A

Mà AF là đường trung tuyến (F là trung điểm của CD)

Nên AF cũng là đường phân giác của $\widehat{CAD}$. Do đó AE trùng với AF.

Vậy A, E, F thẳng hàng.



Bài 34. (Lớp 7) Cho tam giác nhọn ABC có điểm M nằm bên trong tam giác sao cho MA + MB + MC có giá trị nhỏ nhất. Vẽ tam giác đều BMN (tia BM nằm giữa hai tia BA và BN). Chứng minh rằng: A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Trên nửa mặt phẳng bờ BC không điểm A vẽ điểm D sao cho $\triangle BCD$ đều

$\Rightarrow D$ cố định

Ta có: $\widehat{MBC} + \widehat{CBN} = 60^\circ$ ($= \widehat{MBN}$, $\triangle BMN$ đều)

Và $\widehat{NBD} + \widehat{CBN} = 60^\circ$ ($= \widehat{CBD}$, $\triangle BCD$ đều) $\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{NBD}$

$\triangle MBC$ và $\triangle NBD$ có: BM = BN ($\triangle BMN$ đều)

$$\widehat{MBC} = \widehat{NBD}$$

$$BC = BD \text{ (}\triangle BCD \text{ đều)}$$

Do đó $\triangle MBC = \triangle NBD$ (c.g.c) $\Rightarrow MC = ND$

Ta có: MA + MB + MC = AM + MN + ND (MB = MN, MC = ND)

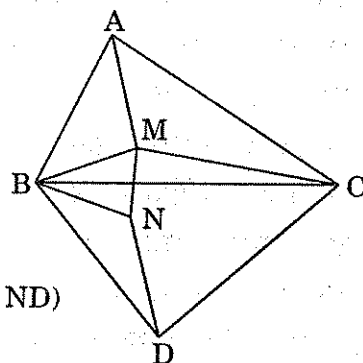
Mà AM + MN + ND $\geq$ AD

Nên MA + MB + MC $\geq$ AD (không đổi)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A, M, N, D thẳng hàng theo thứ tự đó.

Lúc đó MA + MB + MC có giá trị nhỏ nhất (thỏa mãn đề bài)

Vậy A, M, N thẳng hàng khi MA + MB + MC có giá trị nhỏ nhất.



Bài 35. (Lớp 7) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Về phía ngoài tam giác ABC vẽ các tam giác ABD và ACE lần lượt vuông cân tại B và tại C. Đường thẳng qua B vuông góc với CD và đường thẳng qua C vuông góc với BE cắt nhau tại F. BE cắt CD tại H. Chứng minh F, A, H thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $AP \perp BC$ tại P

Trên tia đối của tia AP lấy điểm S sao cho AS = BC; SB cắt CD tại M, SC cắt BC tại N.

Ta có: $\widehat{SAB} = \widehat{APB} + \widehat{ABC}$ (góc ngoài của $\triangle ABP$)

và $\widehat{CBD} = \widehat{ABD} + \widehat{ABC}$ và $\widehat{APB} = \widehat{ABD} (= 90^\circ) \Rightarrow \widehat{SAB} = \widehat{CBD}$

$\triangle SAB$ và $\triangle CBD$ có:

$AS = BC$ (cách vẽ)

$\widehat{SAB} = \widehat{CBD}$

$AB = BD$ ($\triangle ABD$ cân tại B)

Do đó $\triangle SAB = \triangle CBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ABS} = \widehat{BCD}$

mà $\widehat{ABS} + \widehat{SBD} = \widehat{ABD} = 90^\circ$ ($\triangle ABD$ vuông tại B)

nên $\widehat{BCD} + \widehat{SBD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{SMD} = 90^\circ$ ($\widehat{SMD}$ là góc ngoài của $\triangle MDB$) $\Rightarrow BS \perp CD$

Chứng minh tương tự: $CS \perp BE$

Do đó đường thẳng qua B vuông góc với CD và đường thẳng qua C vuông góc BE cắt nhau tại S.

Mà F cũng có đặc điểm này (gt) nên $S = F \Rightarrow F, A, P$ thẳng hàng.

Xét $\triangle SBC$, ta có: BE là đường cao ($BE \perp SC$), CD là đường cao ($CD \perp SB$)

BE cắt CD tại H. Do đó H là trực tâm của $\triangle SBC$

$\Rightarrow AH \perp BC$, mà $AP \perp BC$ nên $AH = AP$

$\Rightarrow A, H, P$ thẳng hàng mà F, A, P thẳng hàng.

Do đó F, A, H, P thẳng hàng

Vậy F, A, H thẳng hàng

* **Nhận xét:** Vẽ thêm các điểm S, P và chứng minh được $S = F$ là bước then chốt của lời giải.

Bài 36. (Lớp 7) Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Lấy M nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MCB} = 10^\circ$. Trên cạnh AC lấy N với $AN = BM$. Chứng minh: B, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra:

$\widehat{ACB} = 50^\circ$, $\widehat{MCA} = 40^\circ$, $\widehat{MAC} = 70^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AMC} = 70^\circ$

$\Rightarrow \triangle ACM$ cân tại C

Vẽ D nằm bên trong $\triangle ACM$ sao cho $\triangle AMD$ đều.

Chứng minh được:

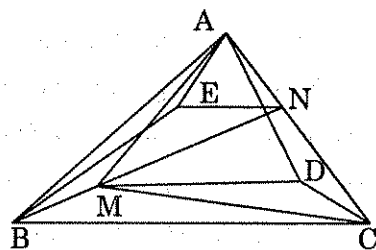
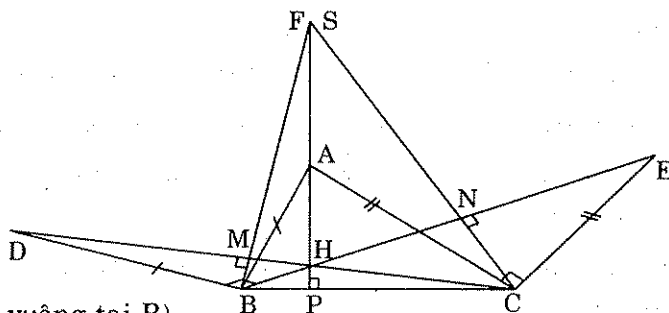
$\triangle DCA = \triangle DCM$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ACD} = 20^\circ$

$\triangle ABM = \triangle ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = 20^\circ$

$\triangle MAB$ có $\widehat{MAB} = 10^\circ$ và $\widehat{ABM} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 150^\circ$

Vẽ điểm E nằm bên trong $\triangle ABN$ sao cho $\triangle AEN$ đều $\Rightarrow \widehat{BAE} = 20^\circ$ và $AE = BM (= AN)$



Chứng minh được: $\triangle AEB = \triangle BMA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{AEB} = 150^\circ$, mà $\widehat{AEN} = 60^\circ$ nên $\widehat{NEB} = 150^\circ$

Lúc đó $\triangle AEB = \triangle NEB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{NBE} \Rightarrow BE$ là tia phân giác của góc $\widehat{ABN} \Rightarrow \widehat{ABN} = 2\widehat{EBA}$

Mà $\widehat{EBA} = \widehat{MAB}$ ($\triangle AEB = \triangle BMA$). Nên $\widehat{ABN} = 2\widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{ABN} = 20^\circ$

Do đó $\widehat{ABM} = \widehat{ABN} (= 20^\circ) \Rightarrow$ tia $BM \equiv$ tia BN

Vậy B, M, N thẳng hàng.

Bài 37. (Lớp 7) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có hai đường cao AD và CF cắt nhau tại H. Lấy K nằm giữa A và C. Gọi I là trực tâm của tam giác CKH. Chứng minh: B, H, I thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABC$ có: AD là đường cao (gt)

CF là đường cao (gt)

AD cắt CF tại H

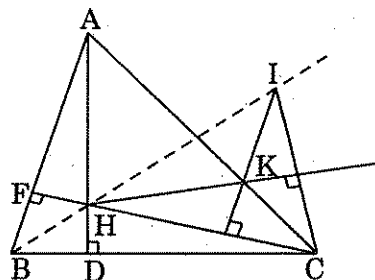
Do đó H là trực tâm của $\triangle ABC \Rightarrow BH \perp AC$

Xét $\triangle CKH$, ta có: I là trực tâm của $\triangle CKH$ (gt)

$\Rightarrow HI \perp KC$ hay $HI \perp AC$ ($K \in AC$),

mà $BH \perp AC$ nên $BH \equiv HI$

Vậy B, H, I thẳng hàng.



Bài 38. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) và H là trực tâm. Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác AMB vuông cân tại A và tam giác ANC cũng vuông cân tại A. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh: I, A, H thẳng hàng.

Lời giải

Gọi D là giao điểm của đường thẳng IA và cạnh BC. Lấy E trên tia đối của tia IA sao cho I là trung điểm của AE.

Xét $\triangle IEM$ và $\triangle IAN$, ta có:

$IE = IA$ (I là trung điểm của AE)

$\widehat{EIM} = \widehat{AIN}$ (hai góc đối đỉnh)

$IM = IN$ (I là trung điểm của MN)

Do đó $\triangle IEM = \triangle IAN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IME} = \widehat{INA}$,

mà $\widehat{IME}$ và $\widehat{INA}$ ở vị trí so le trong nên $ME \parallel AN$

$\Rightarrow \widehat{EMA} + \widehat{MAN} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía) (1)

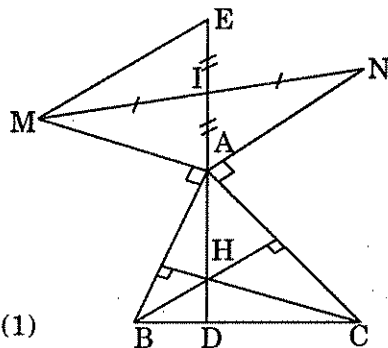
Ta có: $\widehat{CAB} + \widehat{BAM} + \widehat{MAN} + \widehat{NAC} = 360^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CAB} + 90^\circ + \widehat{MAN} + 90^\circ = 360^\circ$ ($\triangle AMB$ vuông tại A, $\triangle ANC$ vuông tại A)

$\Rightarrow \widehat{CAB} + \widehat{MAN} = 180^\circ$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{EMA} = \widehat{CAB}$

Ta có: $\begin{cases} ME = AN (\triangle IEM = \triangle IAN) \\ AN = AC (\triangle ANC \text{ cân tại A}) \end{cases} \Rightarrow ME = AC$



$\triangle AME$ và $\triangle ABC$ có:

$$MA = AB \text{ (}\triangle AMB \text{ cân tại A)}, \widehat{EMA} = \widehat{CAB}, ME = AC$$

Do đó $\triangle AME = \triangle ABC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{MAE} + \widehat{MAB} + \widehat{BAD} = \widehat{ABC} + \widehat{MAB} + \widehat{BAD}$$

Do đó $\widehat{ABC} + \widehat{MAB} + \widehat{BAD} = 180^\circ$ (E, A, D thẳng hàng)

Mà $\widehat{ABC} + \widehat{ADB} + \widehat{BAD} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong tam giác)

nên $\widehat{ADB} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ$ ($\triangle AMB$ vuông tại M)

$\Rightarrow AD \perp BC$, mà $AH \perp BC$ (H là trực tâm của $\triangle ABC$)

nên $AD \equiv AH \Rightarrow A, H, D$ thẳng hàng. Mặt khác I, A, D thẳng hàng (theo cách vẽ)

$\Rightarrow I, A, H, D$ thẳng hàng.

Vậy I, A, H thẳng hàng.

Bài 39. (Lớp 8) Cho tứ giác lồi ABCD. M là điểm nằm bên trong tứ giác thỏa mãn $MA + MB + MC + MD = AC + BD$. Chứng minh rằng: A, M, C thẳng hàng.

Lời giải

Xét ba điểm A, M, C ta có: $AM + MC \geq AC$ (Quy tắc ba điểm)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M nằm giữa A và C

Xét ba điểm B, M, D ta có: $BM + MD \geq BD$ (Quy tắc ba điểm)

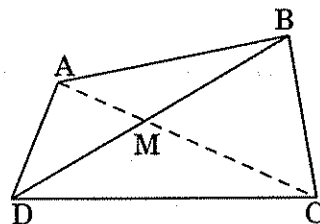
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M nằm giữa B và D

Do đó $MA + MB + MC + MD \geq AC + BD$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $MA + MB + MC + MD = AC + BD$ (cũng chính là gt)

Khi và chỉ khi M nằm giữa A và C đồng thời M nằm giữa B và D khi và chỉ khi M là giao điểm của AC và BD.

Vậy A, M, C thẳng hàng.



Bài 40. (Lớp 8) Cho hình bình hành ABCD. M là điểm nằm bên trong hình bình hành đó sao cho $MB^2 + MD^2 = \frac{1}{2}BD^2$. Chứng minh rằng: A, M, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $(MB - MD)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow MB^2 + MD^2 \geq 2MB.MD$$

$$\Leftrightarrow 2(MB^2 + MD^2) \geq MB^2 + 2MB.MD + MD^2$$

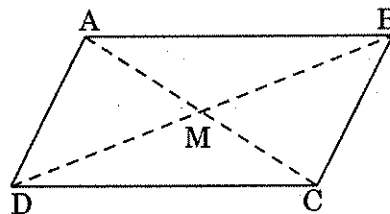
$$\Leftrightarrow MB^2 + MD^2 \geq \frac{1}{2}(MB + MD)^2 \quad (1)$$

Xét ba điểm B, M, D ta có:

$MB + MD \geq BD$ (quy tắc ba điểm)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(MB + MD)^2 \geq \frac{1}{2}BD^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $MB^2 + MD^2 \geq \frac{1}{2}BD^2$



Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MB^2 + MD^2 = \frac{1}{2}BD^2$ (cũng chính là giả thiết)

Do đó $\begin{cases} MB = MD \\ M \text{ nằm giữa B và D} \end{cases} \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của BD}$

Xét hình bình hành ABCD, ta có:

Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (tính chất hình bình hành)

Mà M là trung điểm của BD, nên M cũng là trung điểm của AC.

Vậy A, M, C thẳng hàng.

Bài 41. (Lớp 8) Cho tam giác ABC vuông tại A có M là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $ME + MF = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng: A, I, M thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $MH \perp AB$ tại H, $MK \perp AC$ tại K

Theo quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc, ta có:

$$ME \geq MH \text{ và } MF \geq MK \Rightarrow ME + MF \geq MH + MK \quad (1)$$

ΔABC có: $\begin{cases} M \text{ là trung điểm của BC (gt)} \\ MH \parallel AC (\perp AB) \\ H \in AB \end{cases}$

$\Rightarrow H$ là trung điểm của AB

Do đó MH là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow MH = \frac{1}{2}AC$

Chứng minh tương tự: $MK = \frac{1}{2}AB$. Do đó $MH + MK = \frac{1}{2}(AB + AC)$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $ME + MF \geq \frac{1}{2}(AB + AC)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ME + MF = \frac{1}{2}(AB + AC)$ (cũng chính là gt)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E \equiv H \\ F \equiv K \end{cases}$$

Lúc đó tứ giác AEMF có $\widehat{HAK} = \widehat{AHM} = \widehat{AKM} = 90^\circ$

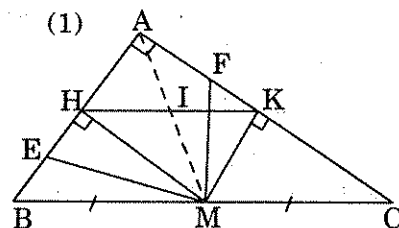
$\Rightarrow$ Tứ giác AEMF là hình chữ nhật (tứ giác có ba góc vuông)

$\Rightarrow$ Hai đường chéo AM và EF có chung một trung điểm, mà I là trung điểm của EF (gt) nên I là cũng là trung điểm của AM. Vậy A, I, M thẳng hàng.

Bài 42. (Lớp 8) Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $ME + MF = \frac{2S_{ABC}}{AB}$. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng: A, I, M thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $MH \perp AB$ tại H, $MK \perp AC$ tại K



Theo quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc, ta có:

$$ME \geq MH \text{ và } MF \geq MK$$

$$\Rightarrow ME + MF \geq MH + MK \quad (1)$$

Ta có: $MH = \frac{2S_{MAB}}{AB}$, $MK = \frac{2S_{MAC}}{AC}$ và $AC = AB$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$$\Rightarrow MH + MK = \frac{2S_{MBA}}{AB} + \frac{2S_{MAC}}{AB}$$

$$\Rightarrow MH + MK = \frac{2S_{ABC}}{AB} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có: $ME + MF \geq \frac{2S_{ABC}}{AB}$

Dấu "=" xảy ra. Do đó $\begin{cases} E \equiv H \\ F \equiv K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ME \perp AB \text{ tại } E \\ MF \perp AC \text{ tại } F \end{cases}$

$\triangle ABC$ cân tại A có AM là đường trung tuyến (M là trung điểm của BC)

$\Rightarrow AM$ cũng là đường phân giác

$\triangle AEM$ vuông tại E và $\triangle AFM$ vuông tại F, có:

AM là cạnh huyền chung

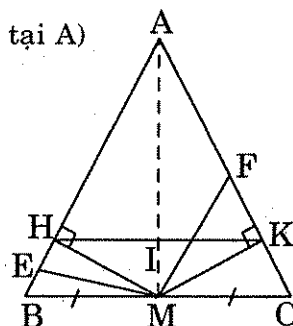
$$\widehat{MAE} = \widehat{MAF} \text{ (AM là đường phân giác của } \widehat{BAC})$$

Do đó $\triangle AEM = \triangle AFM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow AE = AF, ME = MF; \text{ mà } IE = IF \text{ (I là trung điểm EF)}$$

Nên A, I, M cùng nằm trên đường trung trực của EF.

Vậy A, I, M thẳng hàng.



Bài 43. (Lớp 8) Cho tam giác ABC vuông tại A có M là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $ME.MF = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Gọi D là trung điểm của EF. Chứng minh rằng: A, D, M thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $MH \perp AB$ tại H

$MK \perp AC$ tại K

Ta có: $ME \geq MH$, $MF \geq MK$ (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

$$\Rightarrow ME.MF \geq MH.MK \quad (1)$$

$\triangle ABC$ có: M là trung điểm của BC (gt), và $MH \parallel AC$ (cùng vuông góc với AB)

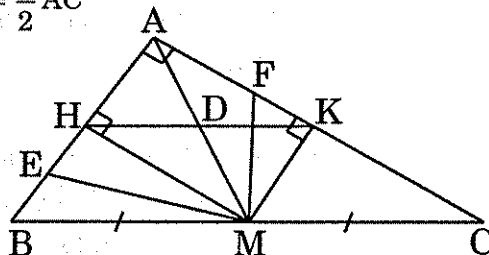
$\Rightarrow H$ là trung điểm của AB

$$\text{Do đó } MH \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC \Rightarrow MH = \frac{1}{2}AC$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } MK = \frac{1}{2}AB$$

$$\text{Do đó } MH.MK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC.AB$$

Mà $\triangle ABC$ vuông tại A (gt)



$$\text{nên } MH.MK = \frac{1}{2}S_{ABC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $ME.MF \geq \frac{1}{2}S_{ABC}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ME.MF = \frac{1}{2}S_{ABC}$ (cũng chính là gt)

$\Leftrightarrow E$ trùng H và F trùng K

Xét tứ giác $AEMF$, ta có:

$$\widehat{EAF} = 90^\circ \quad (\widehat{BAC} = 90^\circ, E \in AB, F \in AC)$$

$$\widehat{MEA} = 90^\circ \quad (E \equiv H, MH \perp AB \text{ tại } H)$$

$$\widehat{MFA} = 90^\circ \quad (F \equiv K, MK \perp AC \text{ tại } K)$$

Do đó tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow$ Hai đường chéo AM và EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Mà D là trung điểm của EF (gt), nên D cũng là trung điểm của AM

Vậy A, D, M thẳng hàng.

Bài 44. (Lớp 8) Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAC} = 2\widehat{ACD}$, $\widehat{DAC} = 2\widehat{ACB}$ và $AB = AD$. Gọi O là trung điểm của BD . Chứng minh: A, O, C thẳng hàng.

Lời giải

Trên tia đối của AC lấy điểm S sao cho $AS = AB$.

$\Rightarrow \triangle ABS$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABS} = \widehat{ASB}$,

Mà $\widehat{BAC} = \widehat{ABS} + \widehat{ASB}$ (góc ngoài đỉnh A của $\triangle ABS$)

Nên $\widehat{BAC} = 2\widehat{ASB}$

$\Rightarrow \widehat{ASB} = \widehat{ACD}$ (vì $\widehat{BAC} = 2\widehat{ACD}$).

Mà $\widehat{ASB}$ và $\widehat{ACD}$ ở vị trí so le trong nên $BS \parallel CD$

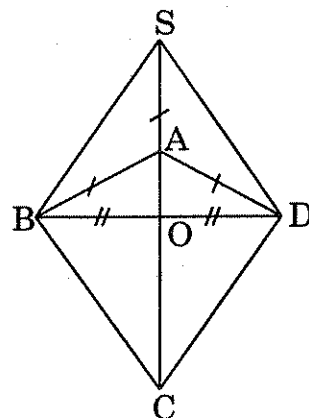
Ta có $AS = AB$ (cách vẽ), $AB = AD$ (gt)

$\Rightarrow AS = AD \Rightarrow \triangle ADS$ cân tại A

Chứng minh tương tự: $DS \parallel CB$

Tứ giác $BSDC$ có $BS \parallel CD$ và $DS \parallel CB$ nên tứ giác $BSDC$ là hình bình hành (Dấu hiệu nhận biết) $\Rightarrow SC$ và BD có chung một trung điểm, mà O là trung điểm của BD (gt) nên O cũng là trung điểm của SC .

$\Rightarrow S, O, C$ thẳng hàng. Mà S, A, C thẳng hàng nên A, O, C thẳng hàng.



Bài 45. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AC . Trên tia BM lấy điểm D sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng BD . Vẽ điểm E thỏa mãn AE song song với BD và $AE = BD$ (với C và E cũng thuộc nửa mặt phẳng có bờ AB). Chứng minh rằng ba điểm C, D, E thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ADE$ và $\triangle DAB$ có: AD (cạnh chung)

$$\widehat{DAE} = \widehat{ADB} \quad (\text{hai góc so le trong và } AE \parallel BD)$$

$$AE = DB \quad (\text{gt})$$

Do đó $\triangle ADE = \triangle DAB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{DAB}$

Mà $\widehat{ADE}$ và $\widehat{DAB}$ ở vị trí so le trong, nên $DE \parallel AB$

$\triangle MCD$ và $\triangle MAB$ có:

$MC = MA$ (Vì M là trung điểm của AC)

$\widehat{CMD} = \widehat{AMB}$ (hai góc đối đỉnh)

$MD = MB$ (Vì M là trung điểm của BD)

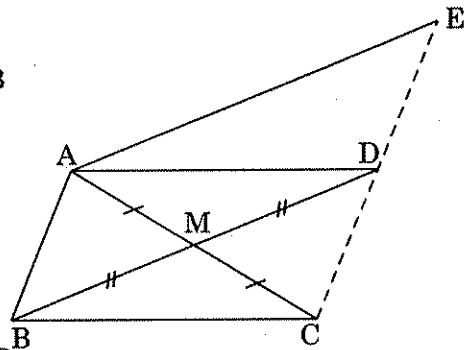
Do đó $\triangle MCD = \triangle MAB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{MAB}$

Mà $\widehat{MCD}$ và $\widehat{MAB}$ ở vị trí so le trong nên $DC \parallel AB$

Ta có: $DE \parallel AB$, $DC \parallel AB$ và D nằm ngoài AB.

Nên hai đường thẳng DE và DC trùng nhau (Tiên đềƠ-clit)

Do đó C, D, E thẳng hàng.



Bài 46. (Lớp 8) Cho hình chữ nhật ABCD có M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, CD, DA sao cho MQ song song với NP. Gọi E là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng khi chu vi tứ giác MNPQ đạt giá trị nhỏ nhất thì ba điểm D, E, B thẳng hàng.

Lời giải

Gọi F là trung điểm của MN.

Xét $\triangle MBN$ vuông tại B, ta có: BF là đường trung tuyến (F là trung điểm của MN)

$$\Rightarrow FB = \frac{1}{2} MN \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự } DE = \frac{1}{2} PQ \quad (2)$$

Xét hình thang MNPQ ($MQ \parallel NP$), ta có:

E, F lần lượt là trung điểm của PQ và MN

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của hình thang MNPQ

$$\Rightarrow EF = \frac{1}{2} (NP + QM) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $MN + NP + PQ + QM = 2(DE + EF + FB)$

Hay $P_{MNPQ} = 2(DE + EF + FB)$ (với P_{MNPQ} là chu vi tứ giác MNPQ)

Ta có: $DE + EF \geq DF$ (quy tắc ba điểm D, E, F)

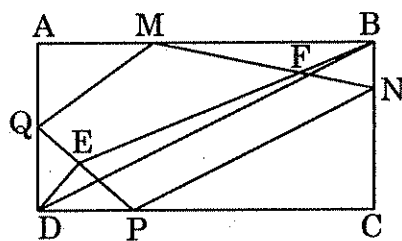
$$\Rightarrow DE + EF + FB \geq DF + FB$$

Mà $DE + FB \geq DB$ (quy tắc ba điểm D, F, B). Nên $DE + EF + FB \geq DB$

Do đó $P_{MNPQ} \geq 2DB$ (không đổi)

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} E \text{ nằm giữa D và F} \\ F \text{ nằm giữa D và B} \end{cases} \Leftrightarrow D, E, F, B \text{ thẳng hàng}$$

Vậy khi P_{MNPQ} có giá trị nhỏ nhất thì D, E, B thẳng hàng.



Bài 47. (Lớp 8) Cho tam giác ABC vuông tại A, $\hat{C} = 30^\circ$ và AH là đường cao. Gọi D là điểm đối xứng của C qua H. Vẽ DK vuông góc với AB tại K và vẽ hình chữ nhật AHCI. Chứng minh I, H, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo HI và AC của hình chữ nhật AHCI

$\Rightarrow$ O là trung điểm chung của HI và AC

$\Rightarrow HO = \frac{HI}{2}$ và $CO = \frac{AC}{2}$, mà $HI = AC$ (tính chất hình chữ nhật AHCI) nên $HO = CO$

$\Rightarrow \triangle OHC$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OHC} = \widehat{ACB}$,

Mà $\widehat{ACB} = 30^\circ$ (gt) nên $\widehat{OHC} = 30^\circ$

Gọi G là giao điểm của DK và AH

Ta có: $DK \parallel AC$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \widehat{GDH} = \widehat{ACB}$ (so le trong)

Mà $\widehat{ADH} = \widehat{ACB}$ (tính chất đối xứng trục)

Nên $\widehat{GDH} = \widehat{ADH} = 30^\circ$ ($\widehat{ACB} = 30^\circ$)

$\Rightarrow DH$ là đường phân giác của góc ADG và $\widehat{ADG} = \widehat{GDH} + \widehat{ADH} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

$\triangle ADG$ có DH vừa là đường phân giác vừa là đường cao

$\Rightarrow \triangle ADG$ cân tại D, mà $\widehat{ADG} = 60^\circ$ nên $\triangle ADG$ đều

Do đó đường cao AK của $\triangle ADG$ đều cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của DG.

$\triangle DHG$ vuông tại H có HK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền DG (K là trung điểm của DG)

$\Rightarrow HK = DK \left(= \frac{DG}{2} \right) \Rightarrow \triangle DKH$ cân ở K $\Rightarrow \widehat{KHD} = \widehat{GDH}$

$\Rightarrow \widehat{KHD} = 30^\circ$ ($\widehat{GDH} = 30^\circ$)

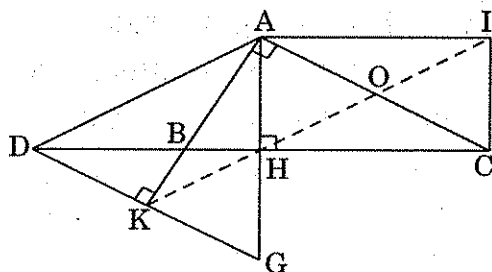
Do đó $\widehat{OHC} = \widehat{KHD} (= 30^\circ) \Rightarrow \widehat{OHC} + \widehat{CHK} = \widehat{KHD} + \widehat{CHK}$

Mà $\widehat{OHC} + \widehat{CHK} = \widehat{OHK}$, $\widehat{KHD} + \widehat{CHK} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Nên $\widehat{OHK} = 180^\circ \Rightarrow O, H, K$ thẳng hàng

Do đó: I, O, H, K thẳng hàng (vì các điểm này cùng thuộc đường thẳng OH)

Vậy I, H, K thẳng hàng.



Bài 48. (Lớp 8) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Về phía ngoài tam giác ABC. Vẽ các tam giác ABD, ACE và BCF lần lượt vuông cân tại B, C và F. Gọi O là điểm đối xứng F qua BC. Chứng minh D, O, E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của DE. Trên tia CI lấy điểm K sao cho I là trung điểm của CK, tia CA cắt tia DK ở H.

Xét tứ giác CDKE, ta có:

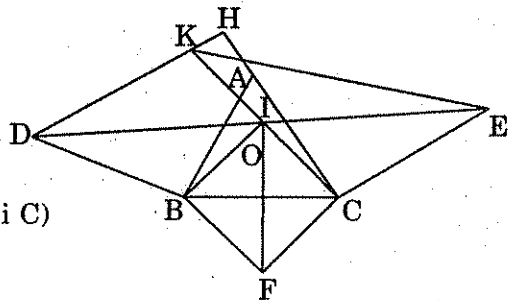
I là trung điểm của DE và CK (cách vẽ)

$\Rightarrow$ Tứ giác CDKE là hình bình hành

(dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow DK \parallel CE$, mà $AC \perp CE$ ($\triangle ACE$ vuông cân tại C)

nên $AC \perp DK$ tại H



Xét tứ giác ABHD, ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{BDH} + \widehat{DHA} + \widehat{HAB} + \widehat{ABD} &= 360^\circ \text{ (tổng số đo các góc trong tứ giác)} \\ \Rightarrow \widehat{BDH} + 90^\circ + \widehat{HAB} + 90^\circ &= 360^\circ \text{ (AC} \perp \text{DK tại H và } \triangle ABD \text{ vuông tại B)} \\ \Rightarrow \widehat{BDH} + \widehat{HAB} &= 180^\circ. \text{ Mà } \widehat{BAC} + \widehat{HAB} = 180^\circ \text{ (kề bù)} \\ \text{nên } \widehat{BDH} &= \widehat{BAC} \end{aligned}$$

Ta có: $\begin{cases} DH = CE \text{ (hình bình hành CDKE)} \\ CE = AC \text{ (}\triangle ACE \text{ cân tại C)} \end{cases}$

$$\Rightarrow DK = AC$$

$\triangle BDK$ và $\triangle BAC$ có: $BD = BA$ ($\triangle ABD$ cân tại B)

$$\widehat{BDK} = \widehat{BAC} \text{ (}\widehat{BDH} = \widehat{BAC}, K \in DH\text{)}$$

$$DK = AC$$

Do đó $\triangle BDK = \triangle BAC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow BK = BC \text{ và } \widehat{DBK} = \widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow \triangle BCK \text{ cân tại B và } \widehat{KBC} = \widehat{ABC} + \widehat{KBA} = \widehat{DBK} + \widehat{KBA} = \widehat{DBA} = 90^\circ \text{ (}\triangle ABD \text{ vuông tại B)}$$

$\Rightarrow \triangle BCK$ vuông cân tại B, mà BI là đường trung tuyến (I là trung điểm của CK),

nên BI đồng thời là đường cao

$$\Rightarrow BI \perp CK \text{ tại I} \Rightarrow \triangle BIC \text{ vuông tại I}$$

$$\text{Mà } \widehat{BCI} = 45^\circ \text{ (}\triangle BCK \text{ vuông cân tại B, I} \in CK\text{)}$$

Nên $\triangle BIC$ vuông cân tại I (1)

Ta có O đối xứng với F qua BC (gt)

$$\Rightarrow \triangle BOC = \triangle BFC \text{ (tính chất đối xứng trục)}$$

Mà $\triangle BFC$ vuông cân tại F (gt). Nên $\triangle BOC$ vuông cân tại O (2)

Từ (1), (2) và hai điểm I, O cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ là BC $\Rightarrow I \equiv O$

Vậy D, O, E thẳng hàng.

Bài 49. (Lớp 8) Cho hình bình hành ABCD tâm O. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng MO và DC, E là trung điểm của OC. Chứng minh rằng: B, E, N thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle CON$ và $\triangle AOM$ có:

$$\widehat{CON} = \widehat{AOM} \text{ (đối đỉnh)}$$

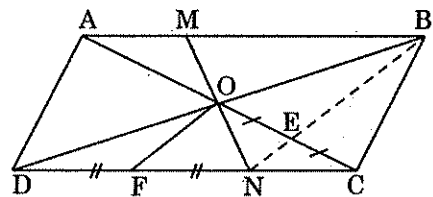
$$OC = OA \text{ (vì O là tâm của hình bình hành ABCD)}$$

$$\widehat{OCN} = \widehat{OAM} \text{ (so le trong và } CD \parallel AB\text{)}$$

Do đó $\triangle CON = \triangle AOM$ (g.c.g)

$$\Rightarrow CN = AM, \text{ mà } AM = \frac{1}{3}AB \text{ (gt) và } AB = CD \text{ (tính chất hình bình hành), nên}$$

$$CN = \frac{1}{3}CD \Rightarrow ND = \frac{2}{3}CD$$



Gọi F là trung điểm của ND $\Rightarrow NF = FD = \frac{1}{2}ND$

$$\Rightarrow NF = FD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}CD = \frac{1}{3}CD \text{ (vì } ND = \frac{2}{3}CD \text{)}$$

$$\text{Do đó } CN = NF = FD \left(= \frac{1}{3}CD \right)$$

$\triangle DBN$ có: E là trung điểm của OC (gt)

N là trung điểm của CF (CN = CF, N $\in$ CF)

Do đó EN là đường trung bình của $\triangle OFC \Rightarrow EN \parallel OF$ (1)

$\triangle DBN$ có: O là trung điểm của DB (O là tâm của hình bình hành ABCD)

F là trung điểm của NF (NF = FD, F $\in$ ND)

Do đó OF là đường trung bình của $\triangle DBN$

$$\Rightarrow OF \parallel BN \text{ hay } BN \parallel OF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $EN \parallel BN$ (tiên đề Ô-clit)

Vậy B, E, N thẳng hàng.

* **Nhận xét:** Dễ nhận ra $CN = \frac{1}{3}CD$. Nhờ đó gợi ý cho chúng ta ý tưởng lấy F là trung điểm của ND để có N là trung điểm của CF. Đây chính là điều cốt lõi của lời giải.

Bài 50. (Lớp 8) Cho hình bình hành ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$. Gọi E là trung điểm của OD, N là giao điểm của AE và CD. Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Lời giải

Hình bình hành ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O (gt)

$\Rightarrow$ O là trung điểm của AC và BD (tính chất hình bình hành)

Ta có: $DE = \frac{1}{2}DO$ (E là trung điểm của OD) và $DO = \frac{1}{2}DB$ (O là trung điểm của DB)

$$\Rightarrow DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}DB \Rightarrow \frac{DE}{DB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{DE}{DB - DE} = \frac{1}{4 - 1} \Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{1}{3}$$

$\triangle DEN$ và $\triangle BEA$ có: $\widehat{DEN} = \widehat{BEA}$ (hai góc đối đỉnh),

$$\widehat{EDN} = \widehat{EBA} \text{ (so le trong và } DC \parallel AB, N \in DC \text{)}$$

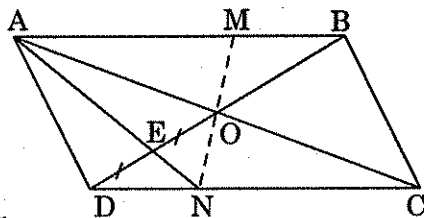
$$\text{Do đó } \triangle DEN \sim \triangle BEA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DN}{BA} = \frac{DE}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{DN}{BA} = \frac{1}{3} \text{ (vì } \frac{DE}{BE} = \frac{1}{3} \text{)} \Rightarrow DN = \frac{1}{3}AB$$

$$\text{Ta có } AM = \frac{2}{3}AB \text{ (gt) và } AM + MB = AB \Rightarrow MB = \frac{1}{3}AB$$

$$\text{Tứ giác MBND có: } MB \parallel DN \text{ (} AB \parallel DC, M \in AB, N \in DC \text{), } MB = DN \left(= \frac{1}{3}AB \right)$$

Do đó tứ giác MBND là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)



⇒ Hai đường chéo MN và BD có cùng một trung điểm

Mà O là trung điểm của BD (chứng minh trên). Nên O là trung điểm của MN

Vậy ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Bài 51. (Lớp 8) Cho hình bình hành ABCD có các đường cao AM và AN. Đường trung trực của MN cắt đường chéo AC tại O. Chứng minh D, O, B thẳng hàng.

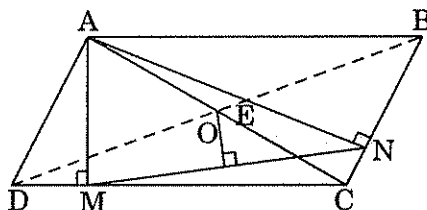
Lời giải

Gọi E là trung điểm của AC

$\triangle AMC$ vuông tại M (AM là đường cao của hình bình hành ABCD) có ME là đường trung tuyến (E là trung điểm của AC)

$$\Rightarrow EM = \frac{1}{2} AC$$

$$\text{Tương tự } EN = \frac{1}{2} AC \Rightarrow EM = EN \left(= \frac{1}{2} AC \right)$$



Do đó E là giao điểm của AC với đường trung trực của MN

⇒ E trùng O (Vì O là giao điểm của AC với đường trung trực của MN)

⇒ O là trung điểm của AC (E là trung điểm của AC)

Xét hình bình hành ABCD, ta có hai đường chéo DB và AC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, mà O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của DB.

Vậy D, O, B thẳng hàng.

* **Nhận xét:** Để D, O, B thẳng hàng thì O phải là trung điểm của AC, từ đó gợi ý cho chúng ta chứng minh trung điểm E của AC trùng với O. Đây chính là điểm mấu chốt của lời giải.

Bài 52. (Lớp 8) Cho hình bình hành ABCD có các đường cao AE, AF. ($E \in DC$, $F \in BC$).

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của EF và AF. Đường thẳng qua A và vuông góc với EF cắt đường thẳng CM tại H. Đường trung trực của EF cắt AC tại O. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng HN và AB. Chứng minh ba điểm K, O, E thẳng hàng.

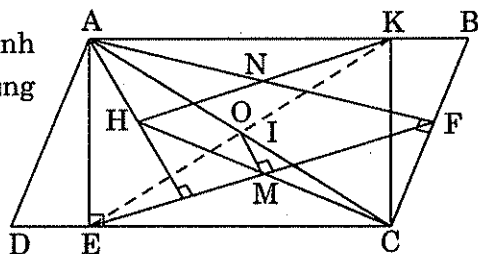
Lời giải

Gọi I là trung điểm của AC

$\triangle AEC$ vuông tại E (AE là đường cao của hình bình hành ABCD) có EI là đường trung tuyến (I là trung

$$\text{điểm của AC)} \Rightarrow IE = \frac{AC}{2}$$

$$\text{Tương tự: } IF = \frac{AC}{2}$$



Do đó $IE = IF \Rightarrow I$ là giao điểm đường trung trực của EF và AC, nên I trùng O (O là giao điểm đường trung trực của EF và AC)

⇒ O là trung điểm của AC (vì I là trung điểm của AC)

$\triangle AHC$ có: O là trung điểm AC (chứng minh trên) và $OM \parallel AH$ (cùng $\perp EF$)

⇒ M là trung điểm của HC.

Tứ giác EHFC có: M là trung điểm của HC và M là trung điểm của EF (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác EHFC là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow HF \parallel EC \Rightarrow HF \parallel DC$ ($E \in DC$)

Mà $DC \parallel AB$ (vì ABCD là hình bình hành). Nên $HF \parallel AK$ ($K \in AB$)

$\triangle ANK$ và $\triangle FNH$ có: $\widehat{NAK} = \widehat{NFH}$ (so le trong và $HF \parallel AK$)

$NA = NF$ (N là trung điểm của AF)

$\widehat{ANK} = \widehat{FNH}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle ANK = \triangle FNH$ (g.c.g) $\Rightarrow AK = FH$

Mà $FH = EC$ (tính chất hình bình hành EHFC) nên $AK = EC$

Tứ giác AECK có: $AK \parallel EC$ ($AB \parallel DC$, $K \in AB$, $E \in DC$) và $AK = EC$ (cmt)

$\Rightarrow$ Tứ giác AECK là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow$ Hai đường chéo KE và AC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, mà O là trung điểm của AC nên O cũng là trung điểm của KE.

Vậy ba điểm K, O, E thẳng hàng.

Bài 53. (Lớp 8) Cho hình bình hành ABCD có các đường cao AE, AF và CG ($E \in DC$, $F \in CB$, $G \in BA$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, FA. Đường thẳng qua A và vuông góc với EF cắt đường thẳng CM tại H. Chứng minh rằng ba điểm H, N, G thẳng hàng.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và EG.

Ta có $CG \perp AB$ (CG là đường cao của hình bình hành ABCD) và $AB \parallel DC$ (ABCD là hình bình hành) $\Rightarrow CG \perp DC$

Tứ giác AEFG có:

$\widehat{AEC} = 90^\circ$ (AE là đường cao của hình bình hành ABCD, $E \in DC$)

$\widehat{ECG} = 90^\circ$ ($CG \perp DC$, $E \in DC$)

$\widehat{CGA} = 90^\circ$ (CG là đường cao của hình bình hành ABCD, $G \in BA$)

Do đó tứ giác AEFG là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow$ Hai đường chéo AC và EG có chung một trung điểm O.

$\triangle AFC$ vuông tại F ($AF \perp CB$ tại F) có:

FO là đường trung tuyến (O là trung điểm của AC)

$\Rightarrow FO = \frac{1}{2} AC$, mà $AC = EG$ (tính chất hình chữ nhật AEFG) nên $FO = \frac{1}{2} EG$

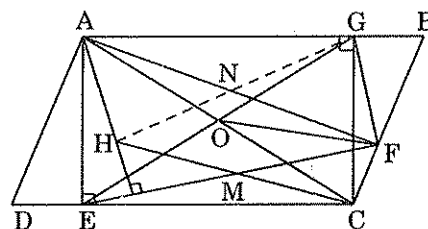
$\triangle EFG$ có FO là đường trung tuyến (O là trung điểm của EG) và $FO = \frac{1}{2} EG$

$\Rightarrow \triangle EFG$ vuông tại F, mà O là trung điểm của EG (chứng minh trên) và M là trung điểm của EF (gt)

Nên OM là đường trung bình của $\triangle EFG$

$\Rightarrow OM \parallel GF$, mà $GF \perp EF$ ($\triangle EFG$ vuông tại F)

Nên $OM \perp EF$. Do đó $OM \parallel AH$ ($\perp EF$)



ΔAHC có: O là trung điểm của AC và $OM \parallel AH$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của HC

Tứ giác $EHFC$ có: M là trung điểm của EF (gt) và M là trung điểm của HC (chứng minh trên)

$\Rightarrow$ Tứ giác $EHFC$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow HF \parallel EC$ và $HF = EC$, mà $EC \parallel AG$ và $EC = AG$ (tính chất hình chữ nhật $AECG$)

Nên $HF \parallel AG$ và $HF = AG$. Do đó tứ giác $AGFH$ là hình bình hành (Dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow$ Hai đường chéo HG và FA có chung một trung điểm, mà N là trung điểm của FA (gt), nên N cũng là trung điểm của HG .

Vậy ba điểm H, N, G thẳng hàng.

Bài 54. (Lớp 8) Cho hình bình hành $ABCD$ có các đường cao AE, AF và CK ($E \in DC, F \in CB$ và $K \in BA$). Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AF và EF . Đường thẳng qua A và vuông góc với EF cắt đường thẳng KM tại H . Chứng minh rằng ba điểm C, N, H thẳng hàng.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và EK .

Ta có: $AE \perp CD$ (AE là đường cao của hình bình hành $ABCD$) và $CD \parallel AB$ (Vì $ABCD$ là hình bình hành) $\Rightarrow AE \perp AB$

Tứ giác $AECK$ có:

$$\widehat{EAK} = 90^\circ \quad (AE \perp AB, K \in AB)$$

$$\widehat{AEC} = 90^\circ \quad (AE \text{ là đường cao của hình bình hành } ABCD, E \in DC)$$

$$\widehat{AKC} = 90^\circ \quad (CK \text{ là đường cao của hình bình hành } ABCD, K \in BA)$$

Do đó tứ giác $AECK$ là hình chữ nhật (Dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow$ Hai đường chéo AC và EK cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường

ΔAFC vuông tại F có FO là đường trung tuyến (O là trung điểm của AC)

$$\Rightarrow FO = \frac{1}{2} AC, \text{ mà } AC = EK \text{ (tính chất hình chữ nhật } AECK)$$

$$\text{Nên } FO = \frac{1}{2} EK$$

$$\Delta EFK \text{ có } FO \text{ là đường trung tuyến (O là trung điểm của } EK) \text{ và } FO = \frac{1}{2} EK$$

$$\Rightarrow \Delta EFK \text{ vuông tại } F \Rightarrow KF \perp EF$$

$$\text{Do đó } AH \parallel KF (\perp EF)$$

$$\Delta AMH \text{ và } \Delta FMK \text{ có: } \widehat{AMH} = \widehat{FMK} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

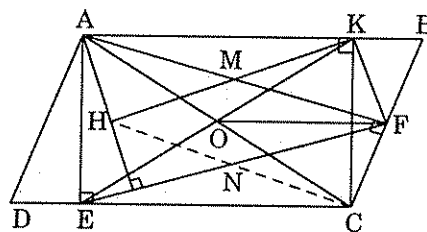
$$MA = MF \text{ (M là trung điểm của AF)}$$

$$\widehat{MAH} = \widehat{MFK} \text{ (hai góc so le trong và } AH \parallel KF)$$

$$\text{Do đó } \Delta AMH = \Delta FMK \text{ (g.c.g)}$$

$$\text{Tứ giác } AHFK \text{ có: } AH \parallel KF (\perp EF), \text{ và } AH = FK (\Delta AMH = \Delta FMK)$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác } AHFK \text{ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)}$$



$\Rightarrow HF \parallel AK$ và $HF = AK$, mà $AK \parallel EC$ và $AK = EC$ (vì $AECK$ là hình chữ nhật)
nên $HF \parallel EC$ và $HF = EC$.

Do đó tứ giác $HFCE$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow$ Hai đường chéo CH và EF có cùng một trung điểm, mà N là trung điểm của EF (gt)
nên N cũng là trung điểm của CH .

Vậy ba điểm C, H, N thẳng hàng.

Bài 55. (Lớp 8) Cho tam giác nhọn ABC . Về phía ngoài tam giác ABC vẽ các tam giác BCD, CAE, ABF lần lượt cân tại D, E, F sao cho $\widehat{BDC} = \widehat{CEA} = \widehat{AFB} = 120^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ DF không chứa E lấy điểm G sao cho tam giác DEG cân tại D , và $\widehat{EDG} = 120^\circ$. Gọi O là trung điểm của DF . Chứng minh: G, O, E thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{GDE} = \widehat{BDC} (= 120^\circ)$

$\Rightarrow \widehat{GDB} = \widehat{EDC}$

• $\triangle GDB = \triangle EDC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{GBD} = \widehat{ECD}$

• $\widehat{FBG} + \widehat{FBD} + \widehat{GBD} = 360^\circ$ và $\widehat{FAE} + \widehat{FBD} + \widehat{ECD} = 360^\circ$

$\Rightarrow \widehat{FBG} = \widehat{FAE}$

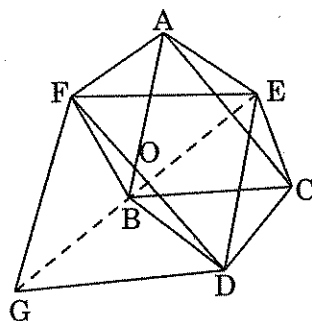
• $\triangle FBG = \triangle FAE$ (c.g.c) và $\widehat{EFG} = 120^\circ$

• $\triangle DGF = \triangle DEF$ (c.c.c) DF là đường phân giác của các góc EDG và EFG

• $\triangle DGF$ đều và $\triangle DEF$ đều

• Tứ giác $DEFG$ là hình thoi có O là trung điểm DF

$\Rightarrow G, O, E$ thẳng hàng.



Bài 56. (Lớp 8) Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = \frac{1}{3}CD$. Kéo dài AD lấy điểm E sao cho $DE = 3AD$. Gọi F là điểm đối xứng của A qua CD . Chứng minh: E, F, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có:

$\begin{cases} DF = AD \text{ (tính chất đối xứng trục)} \\ AD = BC \text{ (tính chất hình thang cân } ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow DF = BC$

$\Rightarrow DF = BC$

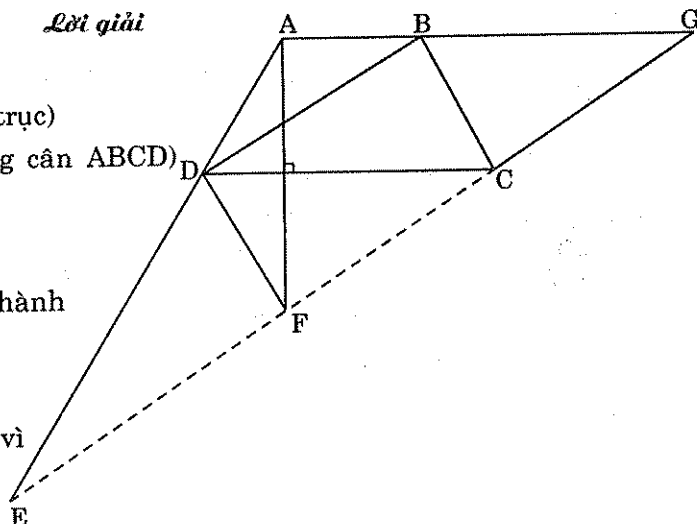
Chứng minh tương tự: $CF = BD$

Lúc đó tứ giác $BCFD$ là hình bình hành

$\Rightarrow FC \parallel DB$

Vẽ hình bình hành $DBGC$.

Ta có $AB \parallel CD$ (gt) và $BG \parallel CD$ (vì tứ giác $DBGC$ là hình bình hành)



$\Rightarrow AE = EC$ (tính chất trung tuyến) $\Rightarrow A, B, G$ thẳng hàng. Chứng minh tương tự: F, C, G thẳng hàng (1)

Có $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{3}$ (vì $AB = \frac{1}{3}CD$), $CD = BG$ (tính chất hình bình hành $DBGC$) $\Rightarrow \frac{AB}{BG} = \frac{1}{3}$

Có $DE = 3AD$ (gt) $\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{1}{3}$

$\triangle AEG$ có $\frac{AB}{BG} = \frac{AD}{DE} \left(= \frac{1}{3} \right)$

$\Rightarrow DB \parallel EG$ (định lý Ta-lét đảo) hay $EG \parallel DB$, mà $CG \parallel DB$ (vì $DBGC$ là hình bình hành) nên $EG \equiv CG$ (tiên đề Ơ-clít)

$\Rightarrow E, C, G$ thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) ta có bốn điểm E, F, C, G thẳng hàng.

Vậy E, F, C thẳng hàng.

Bài 57. (Lớp 8) Cho hình bình hành $ABCD$ có E, F , lần lượt là trung điểm của AD, BC . Lấy M thuộc tia đối của tia D (M khác D). Gọi N là điểm đối xứng của M qua C , S là giao điểm của hai đường thẳng ME và NF . Chứng minh: A, S, C thẳng hàng.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Xét hình bình hành $ABCD$

Ta có: hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O

$\Rightarrow O$ là trung điểm của AC và BD

$\triangle ADC$ có O là trung điểm của AC và E là trung điểm của AD (gt)

$\Rightarrow OE$ là đường trung bình của $\triangle ADC$

$\Rightarrow OE \parallel DC$ và $OE = \frac{DC}{2}$

Chứng minh tương tự: $OF \parallel DC$ và $OF = \frac{DC}{2}$

Ta có: $OE \parallel DC$ và $OF \parallel DC \Rightarrow OE \equiv OF$ (tiên đề Ơ-clít)

$\Rightarrow E, O, F$ thẳng hàng; $OE = OF \left(= \frac{DC}{2} \right)$

$\Rightarrow O$ là trung điểm của EF

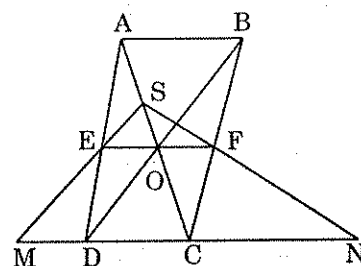
$\triangle SMN$ có $EF \parallel MN$ ($EF \parallel DC$)

$\Rightarrow \frac{SE}{SM} = \frac{EF}{MN}$ (hệ quả của định lý Ta-lét)

Mà $EF = 2EO$ (O là trung điểm của EF) và $MN = 2MC$ (C là trung điểm của MN)

Nên $\frac{SE}{SM} = \frac{EO}{MC}$

$\triangle SEO$ và $\triangle SMC$ có: $\begin{cases} \widehat{SEO} = \widehat{SMC} \text{ (đồng vị, } EO \parallel MC) \\ \frac{SE}{SM} = \frac{EO}{MC} \end{cases}$



$\Rightarrow \widehat{ASEO} = \widehat{ASMC}$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ESO} = \widehat{MSC}$ hay $\widehat{MSO} = \widehat{MSC}$ ($E \in MS$)

$\Rightarrow$ tia $SO \equiv$ tia SC

$\Rightarrow S, O, C$ thẳng hàng

Mà A, O, C thẳng hàng (cách vẽ) nên A, S, O, C thẳng hàng.

Vậy A, S, C thẳng hàng.

Bài 58. (Lớp 8) Cho tam giác nhọn ABC có điểm O thuộc miền trong của tam giác. AO cắt cạnh BC ở D , BO cắt cạnh AC ở E , CO cắt cạnh AB ở F . Lấy M, N, P lần lượt thuộc các đoạn AB, BE, CF sao cho $DM \parallel CF$, $DN \parallel AC$ và $DP \parallel AB$. Chứng minh: M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle BCF$ có $DM \parallel CF$ (gt) $\Rightarrow \frac{BM}{BF} = \frac{BD}{BC}$ (định lí Tha-les)

$\triangle BCE$ có $DN \parallel EC$ ($DN \parallel AC, E \in AC$) $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BN}{BE}$ (định lí Ta-lét)

Do đó $\frac{BM}{BF} = \frac{BN}{BE} \Rightarrow MN \parallel EF$ (định lí Ta-lét đảo trong $\triangle BEF$) (1)

Lấy điểm Q trên cạnh AC sao cho $DQ \parallel BE$

$\triangle ADQ$ có $OE \parallel DQ$ ($BE \parallel DQ, O \in BE$)

$\Rightarrow \frac{AE}{AQ} = \frac{AO}{AD}$ (định lí Ta-lét)

$\triangle ADM$ có $OF \parallel DM$ ($CF \parallel DM, O \in CF$)

$\Rightarrow \frac{AO}{AD} = \frac{AF}{AM}$ (định lí Ta-lét)

$\triangle AQM$ có: $\frac{AE}{AQ} = \frac{AF}{AM} \left(= \frac{AO}{AD} \right)$

$\Rightarrow EF \parallel MQ$ (định lí Ta-lét đảo) hay $MQ \parallel EF$ (2)

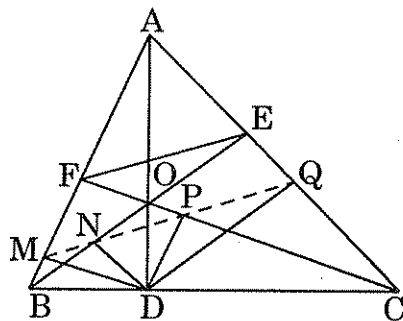
Từ (1) và (2), ta có $MN \equiv MQ$ (tiên đề Ô-clít)

$\Rightarrow M, N, Q$ thẳng hàng

Chứng minh tương tự: M, P, Q thẳng hàng.

Do đó bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng (vì các điểm này cùng thuộc đường thẳng MQ)

Vậy M, N, P thẳng hàng.



Bài 59. (Lớp 8) Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Đường thẳng qua D và vuông góc với đường thẳng MO , cắt AC tại E . Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng MO và DC . Chứng minh: B, E, F thẳng hàng.

Lời giải

Gọi H là giao điểm của MO và $DE \Rightarrow OH \perp DE$ tại H

$\Rightarrow \triangle OHE$ vuông tại H

$\Rightarrow \widehat{HOE} + \widehat{OEH} = 90^\circ$, mà $\widehat{MOA} + \widehat{BOM} = 90^\circ$ ($AC \perp BD$ tại O, tính chất hình vuông ABCD) và $\widehat{HOE} = \widehat{MOA}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{OEH} = \widehat{BOM}$

Ta có: BD, AC theo thứ tự là đường phân giác của các góc ABC, DAB

$$\Rightarrow \widehat{MBO} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}, \widehat{DAE} = \frac{1}{2} \widehat{DAB}$$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{DAB} (= 90^\circ)$ nên $\widehat{MBO} = \widehat{DAE}$

$\triangle MBO$ và $\triangle DAE$ có:

$$\widehat{MBO} = \widehat{DAE}$$

$$\widehat{BOM} = \widehat{AED} \quad (\widehat{BOM} = \widehat{OEH}; O \in AE, H \in ED)$$

$$\text{Do đó } \triangle MBO \sim \triangle DAE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BO}{AE} = \frac{MB}{DA}$$

$$\text{Ta có: } AM + MB = AB \text{ và } AM = \frac{1}{3} AB \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow MB = \frac{2}{3} AB$$

$$\Rightarrow MB = \frac{2}{3} DA \text{ (vì } MB = DA) \Rightarrow \frac{MB}{DA} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Do đó } \frac{BO}{AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow BO = \frac{2}{3} AE$$

Mà $AE = AO + OE$ (O nằm giữa A và E) và $AO = BO$ (O là tâm của hình vuông ABCD)

$$\text{Nên } BO = \frac{2}{3} (BO + OE) \Rightarrow 3BO = 2BO + 2OE$$

$$\Rightarrow BO = 2OE \Rightarrow OE = \frac{1}{2} BO \Rightarrow OE = \frac{1}{2} OC \text{ (vì } BO = OC, O \text{ là tâm của hình vuông}$$

ABCD), mà E nằm giữa O, C $\Rightarrow E$ là trung điểm của OC.

$\triangle COF$ và $\triangle AOM$ có: $\widehat{FOC} = \widehat{MOA}$ (đối đỉnh)

$$OC = OA \text{ (O là tâm của hình vuông ABCD)}$$

$$\widehat{OCF} = \widehat{OAM} \text{ (so le trong và } CD \parallel AB)$$

Do đó $\triangle COF = \triangle AOM$ (g.c.g)

$$\Rightarrow CF = AM, \text{ mà } AM = \frac{1}{3} AB \text{ (gt) và } AB = CD \text{ (vì ABCD là hình vuông)}$$

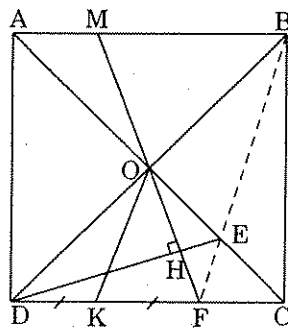
$$\text{Nên } CF = \frac{1}{3} CD \Rightarrow FD = \frac{2}{3} CD \text{ (vì } CF + FD = CD)$$

Gọi K là trung điểm của FD

$$\Rightarrow FK = KD = \frac{1}{2} FD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} CD = \frac{1}{3} CD$$

$$\Rightarrow FK = KD = \frac{1}{3} CD$$

$\triangle DBF$ có: O là trung điểm của DB (vì O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của hình vuông ABCD) và K là trung điểm của FD (cách gọi)



Do đó OK là đường trung bình của $\triangle DBF$

$\Rightarrow OK \parallel BF$ hay $BF \parallel OK$

Chứng minh tương tự: $EF \parallel OK$. Do đó $BF = EF$ (Tiên đề Ơ-clit)

Vậy B, E, F thẳng hàng.

Bài 60. (Lớp 8) Cho hình vuông ABCD tâm O. Gọi M là trung điểm của OC. Trên tia DM lấy điểm H, trên cạnh AB lấy điểm N sao cho $DO^2 = DH \cdot DM$ và $AN = \frac{1}{3}AB$. Chứng minh ba điểm N, O, H thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: O là tâm của hình vuông ABCD (gt)

$\Rightarrow AC \perp BD$ tại O và O là trung điểm của AC và BD

$\triangle DHO$ và $\triangle DOM$ có:

$$\widehat{HDO} = \widehat{ODM} \text{ (góc chung)}$$

$$\frac{DH}{DO} = \frac{DO}{DM} \text{ (vì } DO^2 = DH \cdot DM)$$

Do đó $\triangle DHO \sim \triangle DOM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DHO} = \widehat{DOM}$,

Mà $\widehat{DOM} = 90^\circ$ ($AC \perp BD$ tại O, $M \in AC$)

Nên $\widehat{DHO} = 90^\circ \Rightarrow OH \perp DM$ tại H $\Rightarrow \triangle OHM$ vuông ở H

Ta có: $AM = AO + OM$ (O nằm giữa A và M)

$$= AO + \frac{1}{2}OC \text{ (M là trung điểm của OC)}$$

$$= BO + \frac{1}{2}BO \text{ (OA = OC = OB; O là tâm của hình vuông ABCD)}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{3}{2}BO \Rightarrow \frac{BO}{AM} = \frac{2}{3}$$

Ta có: $AN = \frac{1}{3}AB$ (gt) và $AN + BN = AB$

$$\Rightarrow BN = \frac{2}{3}AB \Rightarrow \frac{BN}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BN}{AD} = \frac{2}{3} \text{ (vì } AB = AD)$$

Ta có: BD, AC lần lượt là các đường phân giác của các góc ABC, DAB

$$\Rightarrow \widehat{NBO} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} \text{ và } \widehat{DAM} = \frac{1}{2}\widehat{DAB}$$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{DAB} (= 90^\circ)$ nên $\widehat{NBO} = \widehat{DAM}$

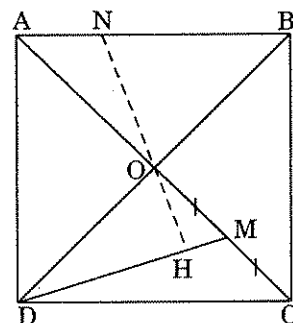
$$\triangle NBO \text{ và } \triangle DAM \text{ có: } \widehat{NBO} = \widehat{DAM} \text{ (chứng minh trên), } \frac{BN}{AD} = \frac{BO}{AM} \left(= \frac{2}{3} \right)$$

Do đó $\triangle NBO \sim \triangle DAM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BON} = \widehat{AMD}$ hay $\widehat{BON} = \widehat{OMH}$

Ta có: $\widehat{BON} + \widehat{NOA} = 90^\circ$ ($AC \perp BD$ tại O)

$$\widehat{OMH} + \widehat{HOM} = 90^\circ \text{ (}\triangle OMH \text{ vuông ở H)}$$

$$\widehat{BON} = \widehat{OMH} \text{ (chứng minh trên)}$$



Do đó $\widehat{NOA} = \widehat{HOM}$

$$\Rightarrow \widehat{NOA} + \widehat{AOH} = \widehat{HOM} + \widehat{AOH}$$

$$\Rightarrow \widehat{NOH} = 180^\circ \text{ (vì } \widehat{HOM} \text{ và } \widehat{AOH} \text{ kề bù)}$$

Vậy ba điểm N, O, H thẳng hàng.

* **Nhận xét:** Chúng ta không khó khăn lắm để nhận ra $AO \perp OB$ và $\widehat{OHM} = 90^\circ$. Bài toán sẽ giải quyết xong nếu có $\widehat{BON} = \widehat{OMH}$. Điều này giúp ta nghĩ đến việc chứng minh $\triangle NBO \sim \triangle DAM$.

Bài 61. (Lớp 8) Cho hình vuông ABCD. Trên các đoạn thẳng AB và CA lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$ và $CN = \frac{1}{4}CA$. Đường thẳng qua M và vuông góc với DN cắt AC tại O. Chứng minh ba điểm B, O, D thẳng hàng.

Lời giải

Gọi O' là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình vuông ABCD.

$\Rightarrow$ O' là trung điểm của AC và BD. $AC \perp BD$

$$\Rightarrow CA = 2CO', \text{ mà } CN = \frac{1}{4}CA \text{ (gt) nên } CN = \frac{1}{2}CO'$$

$\Rightarrow$ N là trung điểm của O'C

Ta có: $AN = AO' + O'N$

$$= AO' + \frac{1}{2}O'C \text{ (N là trung điểm của O'C)}$$

$$= BO' + \frac{1}{2}BO' \text{ (} AO' = O'C = BO')$$

$$\Rightarrow AN = \frac{3}{2}BO' \Rightarrow \frac{BO'}{AN} = \frac{2}{3}$$

Ta có: $AM = \frac{1}{3}AB$ (gt) và $AM + MB = AB$

$$\Rightarrow MB = \frac{2}{3}AB \Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MB}{DA} = \frac{2}{3} \text{ (vì } AB = DA)$$

Ta có tứ giác ABCD là hình vuông (gt)

$\Rightarrow$ BD và AC lần lượt là tia phân giác của các góc ABC và DAB.

$$\Rightarrow \widehat{MBO'} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} \text{ và } \widehat{DAN} = \frac{1}{2}\widehat{DAB}, \text{ mà } \widehat{ABC} = \widehat{DAB} (= 90^\circ)$$

$$\text{Nên } \widehat{MBO'} = \widehat{DAN}$$

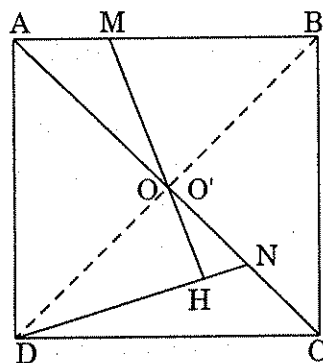
$$\triangle BO'M \text{ và } \triangle AND \text{ có: } \widehat{MBO'} = \widehat{DAN}, \frac{BO'}{AN} = \frac{MB}{DA} \left(= \frac{2}{3} \right)$$

Do đó $\triangle BO'M \sim \triangle AND$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BO'M} = \widehat{AND}$$

Gọi H là giao điểm của MO' và DN

$$\Rightarrow \widehat{BO'M} = \widehat{ONH} \text{ (} \widehat{BO'M} = \widehat{AND}; O' \in AN, H \in ND)$$



Ta có: $\widehat{ONH} = \widehat{BO'M}$

$$\widehat{NO'H} = \widehat{AO'M} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\widehat{BO'M} + \widehat{AO'M} = 90^\circ \text{ (AC} \perp \text{BD tại O')}$$

Do đó $\widehat{ONH} + \widehat{NO'H} = 90^\circ$. Mà $\widehat{O'HD} = \widehat{ONH} + \widehat{NO'H}$ (góc ngoài của $\triangle O'HN$)

$$\text{nên } \widehat{O'HD} = 90^\circ \Rightarrow O'H \perp DN \text{ hay } MO' \perp DN$$

$\Rightarrow O'$ là giao điểm của AC và đường thẳng qua M vuông góc với DN.

Do đó $O' \equiv O$.

Vậy ba điểm B, O, D thẳng hàng.

Bài 62. (Lớp 8) Cho tam giác ABC có $\widehat{C}$ nhỏ nhất. Lấy điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{DCA}$ và $\widehat{DBA} = \widehat{DCB}$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng ba điểm C, D, M thẳng hàng.

Lời giải

Kéo dài CD cắt cạnh AB tại N

$\triangle NAD$ và $\triangle NCA$ có: $\widehat{AND} = \widehat{ANC}$ (góc chung), $\widehat{NAD} = \widehat{NCA}$ (suy từ gt)

$$\text{Do đó } \triangle NAD \sim \triangle NCA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{ND}{NA} \Rightarrow NA^2 = NC \cdot ND$$

$\triangle NBD$ và $\triangle NCB$ có: $\widehat{BND} = \widehat{BNC}$ (góc chung), $\widehat{NBD} = \widehat{NCB}$ (suy từ gt)

Do đó $\triangle NBD \sim \triangle NCB$ (g-g)

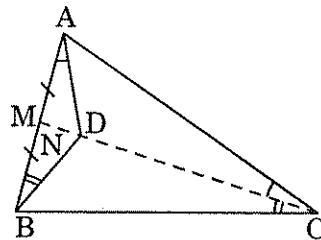
$$\Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{ND}{NB} \Rightarrow NB^2 = NC \cdot ND$$

$$\text{Do đó } NA^2 = NB^2 (= NC \cdot ND)$$

$\Rightarrow NA = NB$, mà $N \in AB$ nên N là trung điểm của AB

Do đó $N \equiv M$ (vì M cũng là trung điểm của AB)

Vậy ba điểm C, D, M thẳng hàng.



Bài 63. (Lớp 8) Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB} < 90^\circ$. Lấy điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho: $\widehat{ADB} + \widehat{ACB} = \widehat{BDC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh C, D, M thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1: Vẽ hình bình hành ACBE

$\Rightarrow$ Hai đường chéo CE và AB cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (tính chất hình bình hành) mà M là trung điểm của AB (gt) nên M cũng là trung điểm của CE $\Rightarrow C, M, E$ thẳng hàng (1)

Vẽ điểm F nằm trong $\triangle ABE$ sao cho $\triangle DBF \sim \triangle ABE$

$\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{BEA}$, mà $\widehat{BEA} = \widehat{ACB}$ (tính chất hình bình hành ACBE) nên $\widehat{BFD} = \widehat{ACB}$

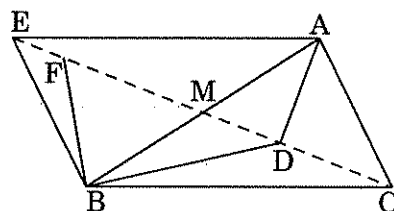
$$\text{Có: } \begin{cases} \widehat{BDF} = \widehat{BAE} \text{ (} \triangle DBF \sim \triangle ABE \text{)} \\ \widehat{BAE} = \widehat{ABC} \text{ (sole trong và AE // BC)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{BDC} + \widehat{BDF} = \widehat{BDC} + \widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BDC} + \widehat{BDF} = 180^\circ \text{ (vì } \widehat{BDC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \text{)}$$

$$\Rightarrow F, D, C \text{ thẳng hàng} \quad (2)$$

$$\text{C6: } \begin{cases} \widehat{EBF} + \widehat{FBA} = \widehat{EBA} \\ \widehat{ABD} + \widehat{FBA} = \widehat{FBD} \\ \widehat{EBA} = \widehat{FBD} \text{ (}\triangle ABE \sim \triangle DBF\text{)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{EBF} = \widehat{ABD}$$



Có $\triangle DBF \sim \triangle ABE$ (cách vẽ)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BF}{BE} \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BD}, \text{ mà } \widehat{EBF} = \widehat{ABD} \text{ nên } \triangle EBF \sim \triangle ABD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EFB} = \widehat{ADB}, \text{ mà } \widehat{BFD} = \widehat{ACB} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{và } \widehat{ADB} + \widehat{ACB} = 180^\circ \text{ (gt) nên } \widehat{EFB} + \widehat{BFD} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow E, F, D \text{ thẳng hàng} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có năm điểm C, D, M, F, E thẳng hàng.

Vậy C, D, M thẳng hàng.

Cách 2

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \widehat{ADB} + \widehat{DBA} + \widehat{DAB} = 180^\circ \text{ (tổng ba góc trong tam giác)} \\ \widehat{ADB} + \widehat{ACB} = 180^\circ \text{ (gt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{DBA} + \widehat{DAB} = \widehat{ACB}$$

$$\text{Hay } \widehat{DBA} + \widehat{DAB} = \widehat{DCB} + \widehat{DCA}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \widehat{BDC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \text{ (gt)} \\ \widehat{BDC} + \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 180^\circ \text{ (tổng ba góc trong tam giác)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DBC} + \widehat{DCB} \text{ hay } \widehat{DBC} + \widehat{DBA} = \widehat{DBC} + \widehat{DCB}$$

$$\Rightarrow \widehat{DBA} = \widehat{DCB}, \text{ mà } \widehat{DBA} + \widehat{DAB} = \widehat{DCB} + \widehat{DCA} \text{ nên } \widehat{DAB} = \widehat{DCA}$$

Gọi E là giao của tia CD và cạnh AB

$\triangle EAD$ và $\triangle ECA$ có: $\widehat{AED} = \widehat{CEA}$ (góc chung), $\widehat{DAE} = \widehat{ECA}$ ($\widehat{DAB} = \widehat{DCA}$, CD cắt AB ở E)

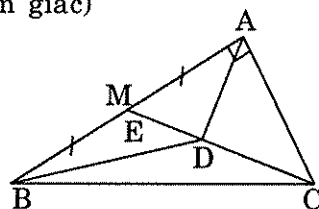
$$\text{Do đó } \triangle EAD \sim \triangle ECA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EA} \Rightarrow EA^2 = EC \cdot ED$$

Chứng minh tương tự: $EB^2 = EC \cdot ED$

Do đó $EA^2 = EB^2 \Rightarrow EA = EB$, mà $E \in AB$ nên E là trung điểm của AB.

$$\Rightarrow E = M$$

Vậy C, D, M thẳng hàng.



Bài 64. (Lớp 8) Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Trên các cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ và $\frac{ND}{CD} = \frac{2}{3}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng: M, O, N thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1: Kéo dài MO cắt cạnh CD tại E.

$\triangle EOC$ có $CE \parallel AM$ ($CD \parallel AB$, $E \in CD$, $M \in AB$)

$$\Rightarrow \frac{AM}{CE} = \frac{OA}{OC} \text{ (hệ quả của định lí Ta-lét)}$$

$\triangle OCD$ có $CD \parallel AB$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \text{ (hệ quả của định lí Ta-lét)}$$

$$\text{Do đó } \frac{AM}{CE} = \frac{AB}{CD} \left(= \frac{OA}{OC} \right) \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{CE}{CD}, \text{ mà } \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{CE}{CD} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{3} = \frac{CE}{1} = \frac{CD - CE}{3 - 1} = \frac{ED}{2} \Rightarrow \frac{CD}{3} = \frac{ED}{2} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Do đó } \frac{ED}{CD} = \frac{ND}{CD} \left(= \frac{2}{3} \right) \Rightarrow ED = ND, \text{ mà } E \text{ và } N \text{ cùng thuộc đoạn } CD \text{ nên } E \equiv N.$$

Vậy M, O, N thẳng hàng.

Cách 2

$$\text{Ta có: } \frac{ND}{CD} = \frac{2}{3} \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{CD}{3} = \frac{ND}{2} = \frac{CD - ND}{3 - 2} = \frac{CN}{1} \Rightarrow \frac{CN}{CD} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó } \frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD} \left(= \frac{1}{3} \right) \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{CN}$$

$\triangle OCD$ có $CD \parallel AB$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \text{ (hệ quả của định lí Ta-lét), mà } \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{CN}, \text{ nên } \frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CN}$$

$\triangle OAM$ và $\triangle OCN$ có: $\widehat{OAM} = \widehat{OCN}$ (hai góc sole trong và $AB \parallel CD$)

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CN}$$

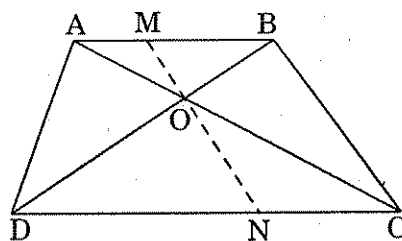
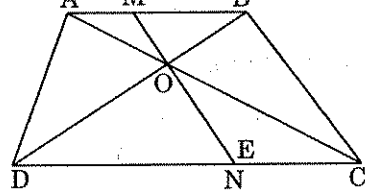
Do đó $\triangle OAM \sim \triangle OCN$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{CON}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOM} + \widehat{AON} = \widehat{CON} + \widehat{AON}$$

$$\Rightarrow \widehat{MON} = 180^\circ \text{ (}\widehat{CON} \text{ và } \widehat{AON} \text{ kề bù)}$$

Vậy M, O, N thẳng hàng.



Bài 65. (Lớp 8) Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Trên các cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho: $\frac{AM}{AB} = k$ và $\frac{ND}{NC} = \frac{1-k}{k}$ ($0 < k < 1$). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh M, O, N thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{ND}{NC} = \frac{1-k}{k} \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{NC}{k} = \frac{ND}{1-k} = \frac{NC + ND}{k + 1 - k} = \frac{CD}{1} \Rightarrow \frac{NC}{CD} = k$$

$$\text{Do đó } \frac{AM}{AB} = \frac{NC}{CD} (= k) \Rightarrow \frac{AM}{CN} = \frac{AB}{CD}$$

$$\triangle COD \text{ có } AB \parallel CD \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \text{ (hệ quả của định lí Ta-lét)}$$

$$\text{Mà } \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{CN} \text{ nên } \frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CN}$$

$\triangle OAM$ và $\triangle OCN$ có: $\widehat{OAM} = \widehat{OCN}$ (so le trong và $AB \parallel CD$), $\frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CN}$

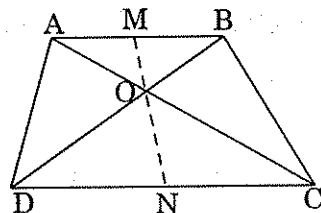
Do đó $\triangle OAM \sim \triangle OCN$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{CON}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOM} + \widehat{AON} = \widehat{CON} + \widehat{AON}$$

Hay $\widehat{MON} = 180^\circ$ ($\widehat{CON}$ và $\widehat{AON}$ kề bù)

Vậy M, O, N thẳng hàng.



* **Nhận xét:**

- Với $k = \frac{1}{3}$ thì bài 63 là trường hợp riêng của bài 64.
- Bài này có thể dùng kĩ thuật chứng minh “hình duy nhất” hoặc kĩ thuật góc bù để chứng minh M, O, N thẳng hàng.
- Mấu chốt của lời giải là thấy được $\frac{CN}{CD} = \frac{AM}{AB}$

Bài 66. (Lớp 8) Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Trên các đoạn AD, AC, BC lần lượt lấy các điểm M, N, E sao cho $\frac{AM}{AD} = k$, $\frac{NC}{AC} = 1 - k$ và $\frac{BE}{EC} = \frac{k}{1 - k}$ ($0 < k < 1$). Chứng minh: M, N, E thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\frac{CN}{AC} = 1 - k$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{AC}{1} = \frac{CN}{1 - k} = \frac{AC - CN}{1 - 1 + k} = \frac{AN}{k} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = k$$

Ta có: $\frac{BE}{EC} = \frac{k}{1 - k}$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{BE}{k} = \frac{EC}{1 - k} = \frac{BE + EC}{k + 1 - k} = \frac{BC}{1} \Rightarrow \frac{BE}{BC} = k$$

$\triangle ACD$ có $\frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AC}$ ($= k$)

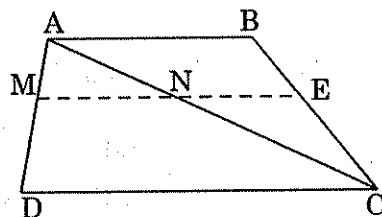
$$\Rightarrow MN \parallel CD \text{ (định lí Ta-lét đảo)} \quad (1)$$

$\triangle ABC$ có: $\frac{AN}{AC} = \frac{BE}{BC}$ ($= k$)

$$\Rightarrow NE \parallel AB \text{ (định lí Ta-lét đảo), mà } AB \parallel CD \text{ nên } NE \parallel CD \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $MN \equiv NE$ (tiên đề Ô-clít)

Vậy M, N, E thẳng hàng.



Bài 67. (Lớp 8) Cho hình vuông ABCD có O là giao điểm của AC và BD. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = \frac{1}{2}CB$. Vẽ $DM \perp BE$ tại M. Gọi O là trung điểm của OB. Chứng minh A, I, M thẳng hàng.

Cách 1

Hình vuông ABCD có O là giao điểm của AC và BD (gt) suy ra:

O là trung điểm của AC và BD, $AC = BD$, $AC \perp BD$ tại O

Do đó $OA = OB$, mà $\frac{OI}{OB} = \frac{1}{2}$ (vì I là trung điểm của OB)

Nên $\frac{OI}{OA} = \frac{1}{2}$, mặt khác $\frac{CE}{CB} = \frac{1}{2}$ (vì $CE = \frac{1}{2} CB$)

$$\Rightarrow \frac{OI}{OA} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{OI}{CE} = \frac{OA}{CB}$$

$$\Delta AOI \text{ và } \Delta BCE \text{ có: } \begin{cases} \widehat{AOI} = \widehat{BCE} (= 90^\circ) \\ \frac{OI}{CE} = \frac{OA}{CB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta AOI \sim \Delta BCE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{BEC}$$

Gọi H là giao điểm của BC và DM; đặt $BC = 2a$ ($a > 0$)

$$\Delta DCH \text{ và } \Delta BCE \text{ có: } \begin{cases} \widehat{DCH} = \widehat{BCE} (= 90^\circ) \\ \widehat{CDH} = \widehat{CBE} \text{ (cùng phụ với } \widehat{E}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta DCH \sim \Delta BCE \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{CH}{CE} \Rightarrow DC \cdot CE = BC \cdot CH$$

$$\text{Mà } DC = BC \text{ (tứ giác ABCD hình vuông) nên } CH = CE \Rightarrow CH = \frac{1}{2} CB \left(CE = \frac{1}{2} CB \right)$$

$$\text{Do đó H là trung điểm của CB} \Rightarrow BH = \frac{1}{2} CB \Rightarrow BH \cdot BC = 2a^2$$

$$\Delta BMH \text{ và } \Delta BCE \text{ có: } \begin{cases} \widehat{BMH} = \widehat{BCE} (= 90^\circ) \\ \widehat{MBH} = \widehat{CBE} \text{ (góc chung)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta BMH \sim \Delta BCE \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BH}{BE} \Rightarrow BM \cdot BE = BH \cdot BC$$

$$\text{Do đó } BM \cdot BE = 2a^2$$

ΔBCD vuông tại C có:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 \text{ (định lý Py-ta-go)}$$

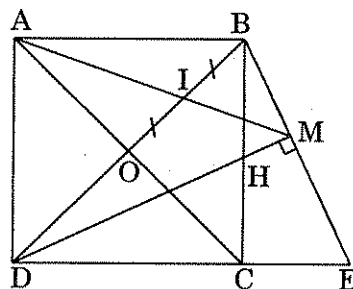
$$\Rightarrow BD^2 = BC^2 + BC^2 \text{ (vì } CD = BC \text{; tứ giác ABCD là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow BD^2 = 8a^2$$

$$\text{Ta có: } BI = \frac{1}{2} OB \text{ (I là trung điểm của OB) và } OB = \frac{1}{2} BD \text{ (O là trung điểm của BD)}$$

$$\Rightarrow BI = \frac{1}{4} BD \Rightarrow BI \cdot BD = \frac{1}{4} BD^2, \text{ mà } BD^2 = 8a^2 \text{ nên } BI \cdot BD = 2a^2$$

$$\text{Do đó } BM \cdot BE = BI \cdot BD (= 2a^2)$$



$\triangle BIM$ và $\triangle BED$ có: $\begin{cases} \widehat{IBM} = \widehat{EBD} \text{ (góc chung)} \\ \frac{BI}{BE} = \frac{BM}{BD} \text{ (BM.BE = BI.BD)} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle BIM \sim \triangle BED$ (c.g.c)

Ta có: $\begin{cases} \widehat{AID} = \widehat{BED} \text{ (}\widehat{AIO} = \widehat{BEC}, O \in BD, C \in DE, \\ \widehat{BIM} = \widehat{BED} \text{ (}\triangle BIM \sim \triangle BED\text{))} \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{BIM} \Rightarrow \widehat{AID} + \widehat{DIM} = \widehat{BIM} + \widehat{DIM}$

Hay $\widehat{AIM} = 180^\circ$ ($\widehat{BIM}$ và $\widehat{DIM}$ kề bù)

Vậy A, I, M thẳng hàng.

Cách 2

Vẽ $AP \perp MD$ tại P, $AQ \perp MB$ tại Q

Tứ giác APMQ có: $\widehat{APM} = 90^\circ$ ($AP \perp MD$ tại P)

$\widehat{AQM} = 90^\circ$ ($AQ \perp MB$ tại Q)

$\widehat{PMQ} = 90^\circ$ ($DM \perp BE$ tại M)

Do đó tứ giác APMQ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{PAQ} = 90^\circ$, mà $\widehat{DAB} = 90^\circ$ (vì tứ giác ABCD là hình vuông)

Nên $\widehat{DAP} = \widehat{BAQ}$ (cùng kề phụ với $\widehat{PAB}$)

$\triangle DAP$ vuông tại P và $\triangle BAQ$ vuông tại Q có:

$AD = AB$ (vì tứ giác ABCD là hình vuông), $\widehat{DAP} = \widehat{BAQ}$

Do đó $\triangle DAP = \triangle BAQ$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AP = AQ$

Do đó tứ giác APMQ là hình vuông (hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau)

$\Rightarrow MA$ là tia phân giác của $\widehat{BMD}$ (1)

Gọi H là giao điểm của BC và DM; $2a$ là độ dài cạnh hình vuông ABCD $\Rightarrow CE = a$ (vì $CE = \frac{1}{2}CB$) và $DC = 2a$. Do đó $DE = 3a$

$\triangle BCE$ và $\triangle DCH$ có: $\widehat{BCE} = \widehat{DCH}$ ($= 90^\circ$), $\widehat{CBE} = \widehat{CDH}$ (cùng phụ với $\widehat{E}$)

Do đó $\triangle BCE \sim \triangle DCH$ (g-g)

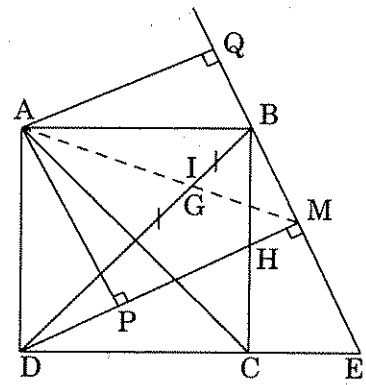
$\Rightarrow \frac{CE}{CH} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{CE}{CH} = 1$ (vì $BC = DC$)

$\Rightarrow CE = CH$, mà $CE = \frac{1}{2}CB$ nên $CH = \frac{1}{2}CB$

Do đó H là trung điểm của CB $\Rightarrow BH = \frac{1}{2}CB \Rightarrow BH = a$

$\triangle BMH$ và $\triangle DME$ có: $\widehat{BMH} = \widehat{DME}$ ($= 90^\circ$), $\widehat{MBH} = \widehat{MDE}$ (cùng phụ với $\widehat{E}$)

Do đó $\triangle BMH \sim \triangle DME$ (g-g) $\Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{BH}{DE} \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{1}{3}$ (vì $BH = a$, $DE = 3a$)



Ta có: $\frac{IB}{ID} = \frac{IB}{IO + OD} = \frac{IB}{IB + OB} = \frac{IB}{IB + 2IB} = \frac{IB}{3IB} = \frac{1}{3}$ (vì I là trung điểm của OB, O là trung điểm của BD)

$$\text{Do đó } \frac{IB}{ID} = \frac{MB}{MD} \left(= \frac{1}{3} \right)$$

Vẽ MG là đường phân giác của $\triangle BMD$ (G thuộc cạnh BD)

$$\Rightarrow \frac{GB}{GD} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{GB}{GD} \left(= \frac{MB}{MD} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{IB}{GB} = \frac{ID}{GD} = \frac{IB + ID}{GB + GD} = \frac{BD}{BD} = 1 \Rightarrow IB = GB, \text{ mà I, G cùng thuộc đoạn BD nên } G \equiv I.$$

$$\Rightarrow MI \text{ là tia phân giác của góc BMD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có tia MA trùng với tia MI

Vậy A, I, M thẳng hàng.

Bài 68. (Lớp 8) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là điểm đối của H qua D và I, K lần lượt là hình chiếu của M trên các đường thẳng AB và AC. Chứng minh: I, D, K thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle AEB$ và $\triangle AFC$ có: $\widehat{EAB} = \widehat{FAC}$ (góc chung), $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} (= 90^\circ)$

$$\text{Do đó } \triangle AEB \sim \triangle AFC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$$

$\triangle AEF$ và $\triangle ABC$:

$$\widehat{EAF} = \widehat{BAC} \text{ (góc chung)}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \text{ (vì } \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \text{)}$$

$$\text{Do đó } \triangle AEF \sim \triangle ABC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } \widehat{CED} = \widehat{CBA}$$

$$\text{Do đó } \widehat{AEF} = \widehat{CED}$$

$$\text{Mà } \widehat{BEF} + \widehat{AEF} = \widehat{BED} + \widehat{CED} (= 90^\circ, BE \perp AC \text{ tại E}) \text{ nên } \widehat{BEF} = \widehat{BED}$$

$$\Rightarrow EB \text{ là tia phân giác của góc DEF.}$$

Gọi Ex là tia đối của tia ED và N là giao điểm của AD và EF.

$$\text{Ta có: } \widehat{AEF} = \widehat{CED} (= \widehat{ABC}) \text{ và } \widehat{CED} = \widehat{AEx} \text{ (đối đỉnh)}$$

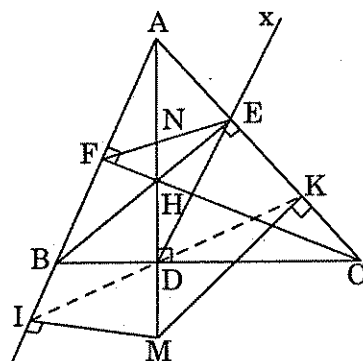
$$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AEx} \Rightarrow EA \text{ là đường phân giác ngoài đỉnh E của } \triangle DEN$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{EN}{ED} \text{ (tính chất đường phân giác ngoài)}$$

$\triangle DEN$ có EH là đường phân giác trong (EB là tia phân giác của góc DEF, $H \in EB$, $N \in EF$)

$$\Rightarrow \frac{HN}{HD} = \frac{EN}{ED}$$

$$\text{Do đó: } \frac{AN}{AD} = \frac{HN}{HD} \left(= \frac{EN}{ED} \right), \text{ mà } HD = DM \text{ (M là điểm đối xứng của H qua D)}$$



Nên: $\frac{AN}{AD} = \frac{HN}{DM} = \frac{AN + HN}{AD + DM} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{AN}{AD}$

ΔAMI có $HF \parallel MI$ ($\perp AB$)

$\Rightarrow \frac{AF}{AI} = \frac{AH}{AM}$ (định lý Ta-lét), mà $\frac{AH}{AM} = \frac{AN}{AD}$ nên $\frac{AF}{AI} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow FN \parallel ID$ (định lý Ta-lét

đảo trong ΔAID) hay $ID \parallel FE$ ($N \in FE$) (1)

ΔAMK có $HE \parallel ME$ (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{AE}{AK}$ (định lý Ta-lét)

ΔAIK có $\frac{AF}{AI} = \frac{AE}{AK} \left(= \frac{AH}{AM} \right)$

$\Rightarrow IK \parallel FE$ (định lý Ta-lét đảo) (2)

Từ (1) và (2), ta có $ID \equiv IK$ (tiên đề Ơ-clit)

Vậy I, D, K thẳng hàng.

Bài 69. (Lớp 8) Cho hình vuông $ABCD$ có M nằm giữa B và C . Tia AM cắt tia DC tại N . Vẽ CK vuông góc với BN tại K , tia CK cắt tia AB tại E . Chứng minh: D, M, E thẳng hàng.

Lời giải

ΔMCN có $AB \parallel CN$ ($AB \parallel CD, N \in CD$)

$\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{BA}{CN}$ (hệ quả của định lý Ta-lét) (1)

ΔBCN và ΔEBC có: $\widehat{BCN} = \widehat{EBC} (= 90^\circ)$, $\widehat{CBN} = \widehat{BEC}$ (vì cùng phụ với $\widehat{NBE}$)

Do đó $\Delta BCN \sim \Delta EBC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BC}{EB} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow \frac{BC}{CN} = \frac{EB}{BC}$,

mà $BC = BA, BC = CD$ (vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông)

Nên $\frac{BA}{CN} = \frac{BE}{CD}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\frac{MB}{MC} = \frac{BE}{CD}$

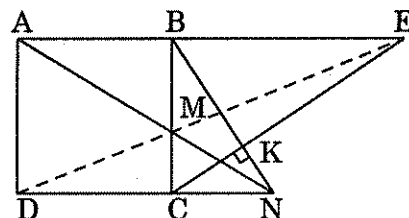
ΔMBE và ΔMCD có: $\widehat{MBE} = \widehat{MCD} (= 90^\circ)$, $\frac{MB}{MC} = \frac{BE}{CD}$

Do đó $\Delta MBE \sim \Delta MCD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{CMD} \Rightarrow \widehat{BME} + \widehat{BMD} = \widehat{CMD} + \widehat{BMD}$

Hay $\widehat{DME} = 180^\circ$ (vì $\widehat{CMD}$ và $\widehat{BMD}$ kề bù)

Vậy D, M, E thẳng hàng.



Bài 70. (Lớp 8) Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E . Đường thẳng qua A cắt cạnh BC và đường thẳng CD lần lượt tại M và N . EM cắt BN tại K , CK cắt AB tại F . Chứng minh D, M, F thẳng hàng.

Hình vuông ABCD có AC cắt BD tại E, suy ra:

$$\left\{ \begin{array}{l} E \text{ là trung điểm của } AC \text{ và } BD \\ AC = BD \\ AC \perp BD \text{ tại } E \\ BD, CA \text{ lần lượt là tia phân giác của } \widehat{ABC}, \widehat{BCD} \end{array} \right.$$

Do đó $EB = EC$, $\widehat{EBA} = \widehat{ECB}$

Trên cạnh AB vẽ điểm S sao cho $BS = CM$

$\triangle BES$ và $\triangle CEM$ có: $BS = CM$, $\widehat{EBS} = \widehat{ECM}$ ($\widehat{EBA} = \widehat{ECB}$), $EB = EC$

Do đó $\triangle BES = \triangle CEM$ (c.g.c)

$\Rightarrow ES = EM$ và $\widehat{SEM} = \widehat{MEC}$

$\Rightarrow \triangle SEM$ cân tại E và $\widehat{SEM} = \widehat{SEB} + \widehat{BEM} = \widehat{MEC} + \widehat{BEM} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle SEM$ vuông cân tại E $\Rightarrow \widehat{SME} = 45^\circ$

$\triangle AND$ có $MC \parallel AD$ ($BC \parallel AD$, $M \in BC$)

$\Rightarrow \frac{AN}{MN} = \frac{AD}{MC}$ (hệ quả của định lý Ta-lét)

$\Rightarrow \frac{AN}{MN} = \frac{AB}{SB}$ ($AD = AB$, $MC = SB$)

$\Rightarrow SM \parallel BN$ (định lý Ta-lét đảo trong $\triangle ABN$)

$\Rightarrow \widehat{BKE} = \widehat{SME}$ (đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{BKE} = 45^\circ$ ($\widehat{SME} = 45^\circ$)

$\triangle BKE$ và $\triangle BDN$ có:

$\widehat{KBE} = \widehat{DBN}$ (góc chung), $\widehat{BKE} = \widehat{BDN}$ ($= 45^\circ$)

Do đó $\triangle BKE \sim \triangle BDN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BK}{BD} = \frac{BE}{BN} \Rightarrow BK \cdot BN = BE \cdot BD$

$\triangle BEC$ và $\triangle BCD$ có: $\widehat{EBC} = \widehat{CBD}$ (góc chung), $\widehat{BEC} = \widehat{BCD}$ ($= 90^\circ$)

Do đó $\triangle BEC \sim \triangle BCD$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BE \cdot BD = BC^2$

Do đó $BK \cdot BN = BC^2$ ($= BE \cdot BD$)

$\triangle BKC$ và $\triangle BCN$ có:

$\widehat{KBC} = \widehat{CBN}$ (góc chung), $\frac{BK}{BC} = \frac{BC}{BN}$ (vì $BK \cdot BN = BC^2$)

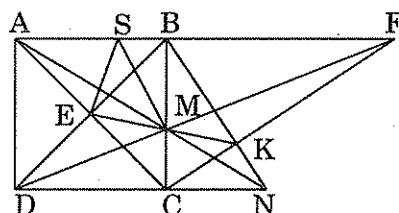
Do đó $\triangle BKC \sim \triangle BCN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{BCN} \Rightarrow \widehat{BKC} = 90^\circ$ ($\widehat{BCN} = 90^\circ$)

$\triangle BCN$ và $\triangle FBC$ có:

$\widehat{CBN} = \widehat{FBC}$ (vì cùng phụ với $\widehat{NBF}$), $\widehat{BCN} = \widehat{FBC}$ ($= 90^\circ$)

Do đó $\triangle BCN \sim \triangle FBC$ (c.g.c)



$$\Rightarrow \frac{BC}{BF} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow \frac{BC}{CN} = \frac{BF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{BA}{CN} = \frac{BF}{CD} \text{ (vì } BC = BA = CD, \text{ ABCD là hình vuông)}$$

$\triangle MCN$ có $AB \parallel CN$ ($AB \parallel CD, N \in CD$)

$$\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{BA}{CN} \text{ (hệ quả của định lí Ta-lét)}$$

$$\text{Do đó } \frac{MB}{MC} = \frac{BF}{CD}$$

$$\triangle MBF \text{ và } \triangle MCD \text{ có: } \widehat{MBF} = \widehat{MCD} (= 90^\circ), \frac{MB}{MC} = \frac{BF}{CD}$$

Do đó $\triangle MBF \sim \triangle MCD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BMF} = \widehat{CMD} \Rightarrow \widehat{BMF} + \widehat{BMD} = \widehat{CMD} + \widehat{BMD}$$

hay $\widehat{DMF} = 180^\circ$ ($\widehat{CMD}$ và $\widehat{BMD}$ kề bù)

Vậy D, M, F thẳng hàng.

Bài 71. (Lớp 8) Cho tam giác ABC ($AB > AC$) có M thuộc tia phân giác của góc A (M khác A). Vẽ $MD \perp BC$ tại D, $ME \perp CA$ tại E, $MF \perp AB$ tại F. Gọi I là giao điểm của đường thẳng DM và đoạn EF; K là trung điểm của BC. Chứng minh: A, I, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi J là giao điểm của AK và EF. Qua J vẽ đường thẳng song song với BC cắt các tia AB, AC lần lượt tại H, G.

Xét $\triangle ABK$ có $HJ \parallel BK$ ($HG \parallel BC, J \in HG, K \in BC$)

$$\Rightarrow \frac{HJ}{BK} = \frac{AJ}{AK} \text{ (hệ quả của định lí Ta-lét)}$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } \frac{JG}{KC} = \frac{AJ}{AK}$$

$$\text{Do đó } \frac{HJ}{BK} = \frac{JG}{KC} \text{ mà } BK = KC \text{ (K là trung điểm của BC) nên } HJ = JG$$

$\Rightarrow J$ là trung điểm của HG

$\triangle AME$ vuông tại E và $\triangle AMF$ vuông tại F có:

AM là cạnh huyền chung

$$\widehat{MAE} = \widehat{MAF} \text{ (M thuộc tia phân giác của góc BAC)}$$

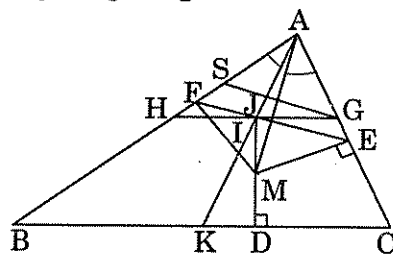
Do đó $\triangle AME = \triangle AMF$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow AE = AF \Rightarrow \triangle AEF \text{ cân tại A}$$

$$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AFE}$$

Qua G vẽ đường thẳng song song với EF cắt cạnh AB tại S. Lúc đó tứ giác GEFS là hình thang cân (hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau)

$$\Rightarrow EG = FS \text{ (tính chất hình thang cân)}$$



$$\Delta SGH \text{ có: } \begin{cases} J \text{ là trung điểm của HG} \\ JF \parallel GS \text{ (EF} \parallel GS, J \in \text{EF)} \\ F \in HS \end{cases}$$

$\Rightarrow F$ là trung điểm của SH $\Rightarrow FS = FH$

$\Rightarrow EG = FH (= FS)$

ΔMEG vuông tại E và ΔMFH vuông tại F có:

$$\begin{cases} ME = MF \text{ (}\Delta AME = \Delta AMF\text{)} \\ EG = FH \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta MEG = \Delta MFH$ (c.g.c) $\Rightarrow MG = MH$

$\Rightarrow \Delta MGH$ cân tại M, mà MJ là đường trung tuyến (J là trung điểm của HG) nên MJ cũng là đường cao của ΔMGH

$\Rightarrow MJ \perp HG$, mà $HG \parallel BC$ nên $MJ \perp BC$.

Do đó $MJ \equiv MD$ ($\perp BC$) $\Rightarrow MD$ cắt đoạn EF tại J $\Rightarrow J \equiv I$

Vậy A, I, K thẳng hàng.

Bài 72. (Lớp 9) Cho đường tròn (O; R) và hai dây AB, AC (với điểm O nằm bên trong góc BAC) thỏa mãn $AB^2 + AC^2 = 4R^2$. Chứng minh rằng B, O, C thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ đường kính AK của (O; R)

$\Rightarrow AK = 2R$

Xét (O), ta có: ΔACK nội tiếp (A, C, K $\in$ (O)) và AK là đường kính (cách vẽ)

Do đó ΔACK vuông tại C

$\Rightarrow AK^2 = CK^2 + AC^2$ (định lý Py-ta-go)

$\Rightarrow (2R)^2 = CK^2 + AC^2$ hay $CK^2 + AC^2 = 4R^2$

Mà $AB^2 + AC^2 = 4R^2$ (gt), nên $CK^2 = AB^2 \Rightarrow CK = AB$

Chứng minh tương tự: $BK = AC$

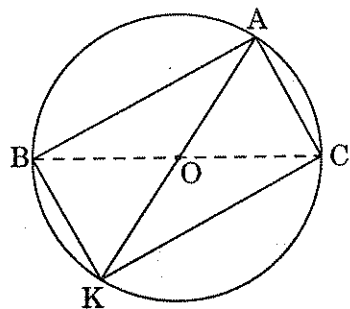
Tứ giác ABKC có:

$CK = AB$ và $BK = AC$.

$\Rightarrow$ Tứ giác ABKC là hình bình hành (tứ giác có hai cặp cạnh đối bằng nhau)

$\Rightarrow$ Hai đường chéo BC và AK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (tính chất hình bình hành) mà O là trung điểm của AK (vì AK là đường kính của (O)), nên O cũng là trung điểm của BC.

Vậy B, O, C thẳng hàng.



Bài 73. (Lớp 9) Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và nội tiếp đường tròn (O; R) thỏa mãn $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$. Chứng minh rằng: B, O, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} b+c \geq 2\sqrt{bc} \text{ (BĐT AM - GM cho hai số dương b và c)} \\ 2R \geq a \text{ (quan hệ giữa đường kính và dây cung của (O; R))} \end{cases}$

Mà $2\sqrt{bc} > 0$ và $a > 0$ nên $2R(b+c) \geq 2a\sqrt{bc} \Leftrightarrow R \geq \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$

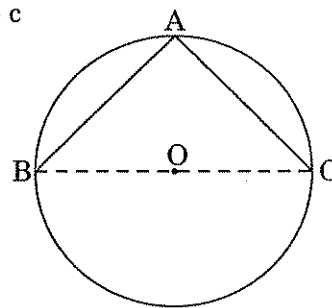
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$ (cũng chính là gt)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=2R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC=AB \\ BC=2R \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại A

$\Rightarrow BC$ là đường kính của $(O; R)$

Vậy B, O, C thẳng hàng.



* **Nhận xét:** Trong đẳng thức $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$ có chứa $b+c$ và $\sqrt{bc}$. Điều này giúp ta nghĩ đến bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương b, c . Mặt khác để có ba điểm B, O, C thẳng hàng thì $\triangle ABC$ phải vuông tại A. Điều này giúp ta nghĩ đến bất đẳng thức mối liên hệ giữa đường kính và dây cung. Sự kết hợp hai bất đẳng thức này giúp chúng ta có được lời giải đẹp.

Bài 74. (Lớp 9) Cho đường tròn (O) và điểm A ở ngoài đường tròn. Từ A vẽ cát tuyến ABC với (O) (B nằm giữa A và C). Chứng minh rằng nếu $AB + AC$ có giá trị lớn nhất thì ba điểm B, O, C thẳng hàng.

Lời giải

Gọi B' và C' là giao điểm của AO với (O) (B' nằm giữa A và C')

Vẽ $OH \perp BC$ tại H, BC là dây cung của (O)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của BC $\Rightarrow HC = BH$

Lúc đó: $AB + AC = AB + HC + AH$

$$= AB + BH + AH = AH + AH = 2AH$$

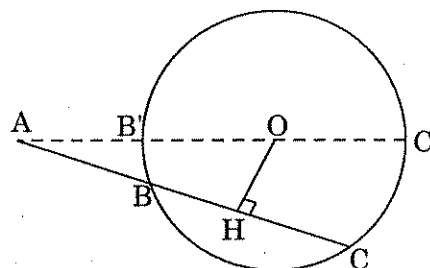
$\Rightarrow AB + AC = 2AH$, mà $AH \leq AO$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên) nên

$AB + AC \leq 2AO$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AH = AO \Leftrightarrow H \equiv O$

$\Leftrightarrow B \equiv B'$ và $C \equiv C'$ khi đó B, O, C thẳng hàng

Vậy nếu $(O \notin AB)$ $AB + AC$ có giá trị lớn nhất thì B, O, C thẳng hàng.



Bài 75. (Lớp 9) Cho đường tròn (O) và dây AB. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên cung lớn và cung nhỏ AB của (O) sao cho $MA + MB + NA + NB$ đạt giá trị lớn nhất. Chứng minh rằng: M, O, N thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1

Gọi N' là điểm chính giữa của cung nhỏ AB $\Rightarrow \widehat{N'A} = \widehat{N'B}$

Về đường tròn (N') ; $N'A$) cắt tia AN tại điểm thứ nhất là E và cắt tia AN' tại điểm thứ hai là $H \Rightarrow AH$ không đổi

Ta có: $\widehat{ANB} = \widehat{AN'B}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB của (O))

$\widehat{ANB} = 2\widehat{NEB}$ (quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AB của (N'))

Do đó: $\widehat{ANB} = 2\widehat{NEB}$, mà $\widehat{ANB} = \widehat{NEB} + \widehat{NBE}$ (góc ngoài đỉnh N của $\triangle NEB$) nên $\widehat{NEB} + \widehat{NBE} = 2\widehat{NEB} \Rightarrow \widehat{NBE} = \widehat{NEB}$

$\Rightarrow \triangle NEB$ cân tại N

$\Rightarrow NB = NE \Rightarrow NA + NB = NA + NE$

$\Rightarrow NA + NB = AE$, mà $AE \leq AH$ (quan hệ giữa dây cung và đường kính của (N'))

nên $NA + NB \leq AH$ (1)

Gọi M' là điểm chính giữa của cung lớn AB

Vẽ đường tròn $(M'; M'A)$ cắt tia BM tại điểm thứ hai là F và cắt tia BM' tại điểm thứ hai là K

$\Rightarrow BK$ không đổi

Chứng minh tương tự: $MA + MB = BF$ và $MA + MB \leq BK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AM + MB + NA + NB \leq AH + BK$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra, nghĩa là $MA + MB + NA + NB$ đạt giá trị lớn nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MA + MB = BK \\ NA + NB = AH \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BF = BK \\ AE = AH \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F = K \\ E = H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = M' \\ N = N' \end{cases}$$

Xét (O) , ta có:

$OM' \perp AB$ (vì M' là điểm chính giữa của cung lớn $\widehat{AB}$)

$ON' \perp AB$ (vì N' là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB}$)

Do đó $OM' = ON' \Rightarrow M', O, N'$ thẳng hàng

Vậy M, O, N thẳng hàng (vì $M = M'; N = N'$)

Cách 2

Vẽ MH là đường phân giác của $\triangle MAB$ ($H \in AB$), $AP \perp MH$ tại P , $BQ \perp MH$ tại Q .

Ta có: $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$, mà $\widehat{AOB}$ không đổi (A, B cố định), nên $\widehat{AMB}$ không đổi

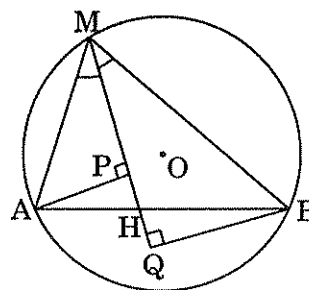
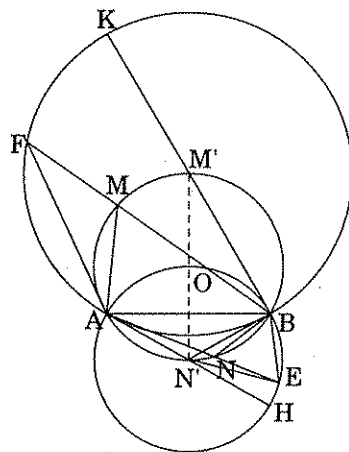
Đặt $\widehat{AMB} = 2\alpha$

$\Rightarrow \widehat{AMP} = \widehat{BMQ} = \alpha$ (vì MH là đường phân giác của $\triangle MAB$)

$\triangle AMP$ vuông tại P có: $\sin \alpha = \sin \widehat{AMP} = \frac{AP}{MA}$

Chứng minh tương tự: $\sin \alpha = \frac{BQ}{MB}$

Do đó $\sin \alpha = \frac{AP}{MA} = \frac{BQ}{MB} = \frac{AP + BQ}{MA + MB}$, mà $AP \leq AH$



$BQ \leq BH$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$$\text{nên } \sin \alpha \leq \frac{AH + BH}{MA + MB} = \frac{AB}{MA + MB}$$

$$\Rightarrow MA + MB \leq \frac{AB}{\sin \alpha} \text{ (không đổi).}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow P \equiv Q \equiv H$

$\Leftrightarrow MA = MB$. Do đó $MA + MB$ lớn nhất khi $MA = MB$

Chứng minh tương tự: $NA + NB$ lớn nhất khi $NA = NB$, mà $OA = OB$ (bán kính (O)) nên M, O, N thuộc đường trung trực của AB.

Vậy M, O, N thẳng hàng.

Bài 76. (Lớp 9) Cho đường tròn (O) và dây AB không qua O. Gọi I là trung điểm của AB và M là điểm thuộc cung lớn AB sao cho $MA + MB$ lớn nhất. Chứng minh rằng: O, I, M thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M' là trung điểm của cung lớn AB của (O)

$\Rightarrow \widehat{M'A} = \widehat{M'B} \Rightarrow M'A = M'B$, mà $OA = OB$ (bán kính (O)) và $IA = IB$ (I là trung điểm của AB) nên M', O, I cùng thuộc đường trung trực của AB $\Rightarrow O, I, M'$ thẳng hàng.

Vẽ đường tròn (M' ; $M'A$) cắt tia BM tại điểm thứ hai là F là E và cắt tia BM' tại điểm thứ hai là F $\Rightarrow BF$ là đường kính (M') $\Rightarrow BF$ không đổi

Ta có: $\widehat{AMB} = \widehat{AM'B}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ $\widehat{AB}$ của (O))

$$\widehat{AM'B} = 2\widehat{MEA} \text{ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung AB của (M'))}$$

Do đó $\widehat{AMB} = 2\widehat{MEA}$ mà $\widehat{AMB} = \widehat{MEA} + \widehat{MAE}$ (góc ngoài đỉnh M của $\triangle MEA$)

$$\text{Nên } \widehat{MEA} + \widehat{MAE} = 2\widehat{MEA} \Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MEA}$$

$$\Rightarrow \triangle MEA \text{ cân tại M} \Rightarrow MA = ME$$

$$\Rightarrow MA + MB = ME + MB \text{ hay } MA + MB = BE$$

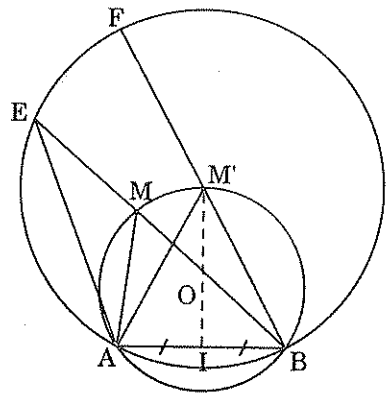
Mà $BE \leq BF$ (quan hệ giữa dây cung và đường kính của (M'))

Nên $MA + MB \leq BF$ (không đổi).

Dấu “=” xảy ra khi $E \equiv F \Leftrightarrow M \equiv M'$

Do đó, $MA + MB$ có giá trị lớn nhất khi $M \equiv M'$,

mà O, I, M' thẳng hàng nên O, I, M thẳng hàng.



Bài 77. (Lớp 9) Cho CA, CB là hai dây cung ($CA \perp CB$) của một đường tròn bán kính R. M là điểm nằm bên trong đường kính đó sao cho $MA^2 + MB^2 = 2R^2$. Chứng minh rằng: A, M, B thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $CA \perp CB$ (gt) và CA, CB là hai dây cung của một đường tròn bán kính R .

$\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$ và A, C, B thuộc đường tròn bán kính R .

$\Rightarrow AB$ là đường kính của đường tròn này.

$\Rightarrow AB = 2R$

Xét ba điểm A, M, B ta có: $AM + MB \geq AB$ (quy tắc ba điểm)

Do đó $AM + MB \geq 2R \Leftrightarrow \frac{1}{2}(MA + MB)^2 \geq 2R^2$ (1)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa A và B

Ta có: $\frac{(MA + MB)^2 + (MA - MB)^2}{2} \geq \frac{1}{2}(MA + MB)^2$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 \geq \frac{1}{2}(MA + MB)^2 \quad (2)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA = MB$

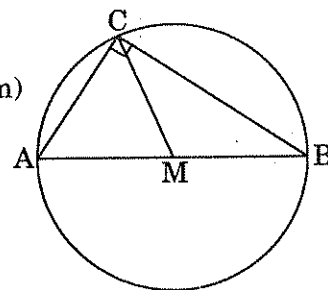
Từ (1) và (2), suy ra: $MA^2 + MB^2 \geq 2R^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2R^2$ (cũng chính là gt)

$\Leftrightarrow M$ nằm giữa A và B đồng thời $MA = MB$

$\Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB

Vậy A, M, B thẳng hàng.



Bài 78. (Lớp 9) Cho hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau ở A và B (O và O' nằm khác phía đối với AB và góc OBO' là góc tù). Tia $O'B$ cắt (O) tại điểm thứ hai là E . Lấy F thuộc (O') sao cho AB là tia phân giác của góc EAF . Chứng minh ba điểm O, B, F thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle OAO'$ và $\triangle OBO'$ có:

$OA = OB$ (bán kính (O))

$O'A = O'B$ (bán kính (O'))

OO' (cạnh chung)

Do đó $\triangle OAO' = \triangle OBO'$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AOO'} = \widehat{BOO'}$

$\Rightarrow OO'$ là tia phân giác của góc AOB

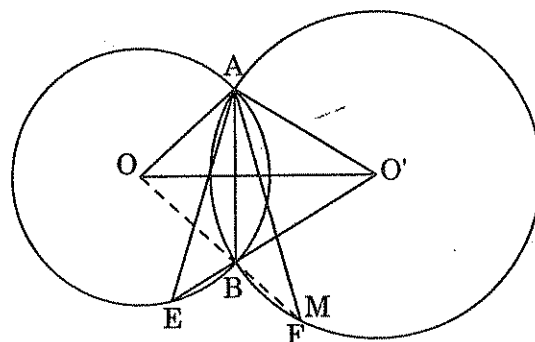
$\Rightarrow \widehat{AOO'} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$,

mà $\widehat{AEO'} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ (hệ quả góc nội tiếp trong (O)),

nên $\widehat{AOO'} = \widehat{AEO'} \Rightarrow$ Tứ giác $AOEO'$ nội tiếp

Gọi M là giao điểm thứ hai của OB với (O')

Chứng minh tương tự: Tứ giác $AOMO'$ nội tiếp



Do đó năm điểm A, O, E, M, O' cùng thuộc (AOO')

$\Rightarrow \widehat{AEO'} = \widehat{AOO'}$ và $\widehat{MEO'} = \widehat{BOO'}$ (hệ quả góc nội tiếp trong đường tròn (AOO')),

mà $\widehat{AOO'} = \widehat{BOO'}$ ($\triangle OAO' = \triangle OBO'$)

nên $\widehat{AEO'} = \widehat{MEO'} \Rightarrow EO'$ là tia phân giác của góc AEM

Tương tự: MO là tia phân giác của góc AME

$\triangle AEM$ có hai đường phân giác EO' và MO cắt nhau tại B $\Rightarrow AB$ là tia phân giác của góc EAM

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BAE}$, mà $\widehat{BAF} = \widehat{BAE}$ (AB là tia phân giác của góc EAF) nên $\widehat{BAM} = \widehat{BAF}$

$\Rightarrow \text{sđBM} = \text{sđBF}$ (hai góc nội tiếp bằng nhau của (O'), mà M và F cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB (suy từ gt và cách vẽ) nên $M = F$.

Vậy ba điểm O, B, F thẳng hàng.

Bài 79. (Lớp 9) Cho hai đường tròn tâm O và tâm I cắt nhau ở A và B (O và I nằm khác phía đối với AB và góc OBI là góc tù). Tia OB cắt (I) tại điểm thứ hai là F, tia IB cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Đường thẳng OI cắt AE và AF lần lượt tại M và N. Gọi H là trung điểm của MN. Chứng minh rằng ba điểm A, H, B thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle OAI$ và $\triangle OBI$ có:

OI (cạnh chung)

OA = OB (bán kính (O))

IA = IB (bán kính (I))

Do đó $\triangle OAI = \triangle OBI$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{IOA} = \widehat{IOB}$

$\Rightarrow OI$ là tia phân giác của góc AOB.

$\Rightarrow \widehat{AOI} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$, mà $\widehat{AEI} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ (hệ quả góc nội tiếp) nên $\widehat{AOI} = \widehat{AEI}$

$\Rightarrow$ Tứ giác AOEI nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau) $\Rightarrow E \in$ đường tròn (AOI)

Tương tự: $F \in$ (AOI)

Do đó năm điểm A, O, E, F, I cùng thuộc (AOI) $\Rightarrow$ Tứ giác AEFI nội tiếp

Mà đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEFI có $\widehat{IA} = \widehat{IF}$ (IA = IF, bán kính đường tròn (I))

Nên $\widehat{IEA} = \widehat{IEF} \Rightarrow EI$ là tia phân giác của $\widehat{AEF}$

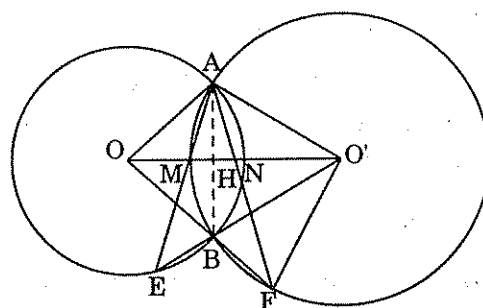
Tương tự: FO là tia phân giác của $\widehat{AFE}$

$\triangle AEF$ có hai đường phân giác EI và FO cắt nhau tại B $\Rightarrow AB$ là đường phân giác của $\triangle AEF$

Ta có (O) và (I) cắt nhau tại A và B (gt)

$\Rightarrow OI$ là đường trung trực của AB

$\Rightarrow AB \perp OI$ hay $AB \perp MN$ (M, N thuộc OI)



Xét $\triangle AMN$, ta có:

AB là đường phân giác (AB là đường phân giác của $\triangle AEF$ và M thuộc AE , N thuộc AF)
và AB là đường cao ($AB \perp MN$)

$\Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A , mà AH là đường trung tuyến của $\triangle AMN$ (H là trung điểm của MN)
nên AH cũng là đường phân giác.

$\Rightarrow AH$ là tia phân giác của $\widehat{EAF}$ ($M \in AE$, $N \in AF$)

Do đó tia AB trùng tia AH (vì cùng là tia phân giác của $\widehat{EAF}$)

Vậy ba điểm A , H , B thẳng hàng.

Bài 80. (Lớp 9) Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Các điểm P và Q di động trên các cạnh BC và CD tương ứng sao cho $\widehat{PAQ} = 30^\circ$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PAQ . Chứng minh rằng ba điểm A , O , C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{PAQ} = \frac{1}{2} \widehat{POQ}$ (hệ quả góc nội tiếp) và $OP = OQ$

Do đó $\widehat{POQ} = 2 \cdot \widehat{PAQ} = 60^\circ$ và $\triangle POQ$ cân tại O

$\Rightarrow \triangle OPQ$ đều

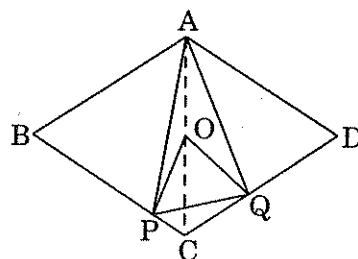
$\Rightarrow \widehat{OPQ} = \widehat{OQP} = \widehat{POQ} = 60^\circ$

Tứ giác $OPCQ$ có: $\widehat{POQ} + \widehat{PCQ} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ ($\widehat{PCQ} = \widehat{BAD} = 120^\circ$, tính chất hình thoi $ABCD$) nên tứ giác $OPCQ$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OCP} = \widehat{OQP} = 60^\circ$ và $\widehat{OCQ} = \widehat{OPQ} = 60^\circ$

Do đó $\widehat{OCP} = \widehat{OCQ} \Rightarrow CO$ là tia phân giác của góc BCD , mà CA cũng là tia phân giác của góc BCD (tính chất hình thoi $ABCD$) nên hai tia CO và CA trùng nhau

Vậy ba điểm A , O , C thẳng hàng.



Bài 81. (Lớp 9) Cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi M là một điểm trên cung nhỏ AB (M khác A và B). Tia phân giác của góc BMC cắt AD và (O) lần lượt tại D và E ($E \neq M$). Đường thẳng D qua song song với BC cắt MC tại F . Chứng minh ba điểm E , F , A thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{BME} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BE}$ (góc nội tiếp chắn $\widehat{BE}$)

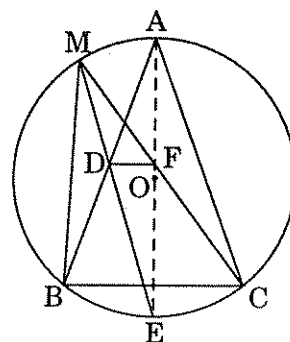
$\widehat{EMC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{EC}$ (góc nội tiếp chắn $\widehat{EC}$)

và $\widehat{BME} = \widehat{EMC}$ (ME là tia phân giác của góc BMC)

$\Rightarrow \text{sđ} \widehat{BE} = \text{sđ} \widehat{EC} \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{EC} \Rightarrow BE = EC$

Ta có $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A) và $EB = EC$

$\Rightarrow AE$ là đường trung trực của BC



$\Rightarrow AE \perp BC$ và $O \in AE$ ($OA = OB =$ bán kính (O))

$\Rightarrow AE$ là đường kính của (O) .

Ta có: $\widehat{MFD} = \widehat{MCB}$ (hai góc đồng vị và $DF \parallel BC$)

và $\widehat{MCB} = \widehat{MAD}$ ($= \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{MB}$ của (O))

$\Rightarrow \widehat{MFD} = \widehat{MAD} \Rightarrow$ Tứ giác $MAFD$ nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

$\Rightarrow \widehat{DFA} + \widehat{EMA} = 180^\circ$ (tính chất của tứ giác nội tiếp), mà $\widehat{EMA} = 90^\circ$ (hệ quả góc nội tiếp)

nên $\widehat{DFA} = 90^\circ \Rightarrow AF \perp DF$, mà $DF \parallel BC$ (gt)

nên $AF \perp BC$. Do đó AE trùng với AF (vì cùng vuông góc với BC)

Vậy ba điểm E, F, A thẳng hàng.

Bài 82. (Lớp 9) Cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AD . Gọi M là một điểm trên cung nhỏ AB (M khác A và B), I là giao điểm của AD và MC . Đường thẳng qua I và song song với BC cắt cạnh AB tại K . Chứng minh ba điểm M, K, D thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A) và $OB = OC$ (bán kính (O))

$\Rightarrow AO$ là đường trung trực của BC

$\triangle ABC$ cân tại A có AO là đường trung trực nên

AO cũng là đường phân giác

$\Rightarrow AD$ là đường phân giác của góc BAC .

Ta có: $\widehat{MIK} = \widehat{MCB}$ (hai góc đồng vị và $IK \parallel BC$)

và $\widehat{MCB} = \widehat{MAK}$ ($= \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{MB}$ của (O))

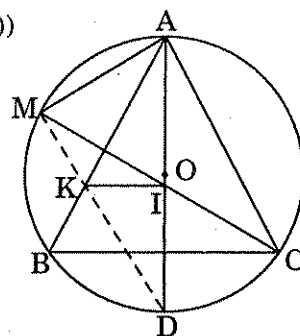
$\Rightarrow \widehat{MIK} = \widehat{MAK} \Rightarrow$ Tứ giác $AIKM$ nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

$\Rightarrow \widehat{CMK} = \widehat{IAB}$, mà $\widehat{IAB} = \widehat{DAC}$ (AD là đường phân giác của góc BAC và I thuộc AD)

và $\widehat{DAC} = \widehat{CMD}$ (hệ quả góc nội tiếp)

nên $\widehat{CMK} = \widehat{CMD} \Rightarrow$ Hai tia MK và MD trùng nhau

Do đó ba điểm M, K, D thẳng hàng.



Bài 83. (Lớp 9) Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn tâm O , đường kính AD . Gọi M mà một điểm trên cung nhỏ AB (M không trùng với A và B), E là giao điểm của AB và MD , F là hình chiếu của E lên AD . Chứng minh ba điểm M, F, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A) và $OB = OC$ (bán kính (O))

$\Rightarrow AO$ là đường trung trực của BC , mà $\triangle ABC$ cân tại A (gt) nên

đường trung trực của BC cũng là đường phân giác của $\triangle ABC$

Bài 85. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH và nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB và AC. Chứng minh rằng: Nếu $AH = R\sqrt{2}$ thì D, O, E thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ đường kính AF của (O; R)

$\Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{ACF} = 90^\circ$ (các góc nội tiếp chắn nửa (O))

$\triangle AHB$ vuông tại H có HD là đường cao (suy từ gt)

$\Rightarrow AH^2 = AD \cdot AB$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow AD \cdot AB = 2R^2$ (vì $AH = R\sqrt{2}$)

mà $AO \cdot AF = R \cdot 2R = 2R^2$ nên $AD \cdot AB = AO \cdot AF$

$\triangle AOD$ và $\triangle ABF$ có:

$$\widehat{OAD} = \widehat{BAF} \text{ (góc chung), } \frac{AO}{AB} = \frac{AD}{AF} \text{ (vì } AO \cdot AF = AD \cdot AB)$$

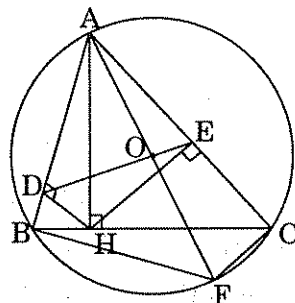
Do đó $\triangle AOD \sim \triangle ABF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{ABF} \Rightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ$ ($\widehat{ABF} = 90^\circ$)

Chứng minh tương tự: $\widehat{AOE} = 90^\circ$

Khi đó $\widehat{DOE} = \widehat{AOD} + \widehat{AOE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Vậy D, O, E thẳng hàng.



Bài 86. (Lớp 9) Cho điểm A thuộc đường tròn tâm O đường kính BC (A khác B và C). Vẽ đường tròn tâm A tiếp xúc với BC tại H, cắt (O) đường kính BC tại E và F. Gọi I là trung điểm của HC, D là hình chiếu của I lên EF. Chứng minh A, D, C thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ đường kính AK của đường tròn tâm O đường kính BC, EF cắt AH ở N và cắt AK ở S.

Ta có: $AE = AF$ ($= AH$) và $OE = OF$ (bán kính (O))

$\Rightarrow AO$ là đường trung trực của EF $\Rightarrow AO \perp EF$ tại S

$\triangle ASN$ và $\triangle AHO$ có: $\widehat{ASN} = \widehat{AHO}$ ($= 90^\circ$)

$$\widehat{SAN} = \widehat{HAO} \text{ (góc chung)}$$

Do đó $\triangle ASN \sim \triangle AHO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AN}{AO} = \frac{AS}{AH} \text{ (tỉ số đồng dạng)}$$

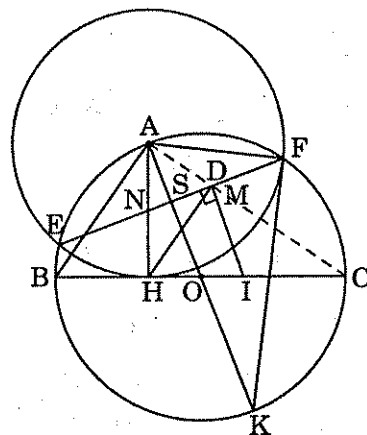
$$\Rightarrow AN \cdot AH = AO \cdot AS$$

$$\Rightarrow 2AN \cdot AH = 2AO \cdot AS$$

$$\Rightarrow 2AN \cdot AH = AS \cdot AK \text{ (AK là đường kính của (O))}$$

(O) có: $\triangle AFK$ nội tiếp (A, F, K $\in$ (O)) và AK là đường kính (cách vẽ)

$\Rightarrow \triangle AFK$ vuông tại F, mà FS là đường cao ($AO \perp EF$ tại S và $O \in AK$)



nên $AS.AK = AF^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Do đó $2AN.AH = AF^2$

$\Rightarrow 2AN = AH$ (vì $AH = AF$)

$$\Rightarrow AN = \frac{1}{2}AH$$

mà N nằm giữa A và H nên N là trung điểm của AH $\Rightarrow NH = \frac{1}{2}AH$

Gọi M là giao điểm của AC và EF

(A) có: $AE = AF$ (bán kính (A)) $\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{AF}$

$\Rightarrow \widehat{AFM} = \widehat{ACF}$ (hệ quả số đo góc nội tiếp)

$\triangle AFM$ và $\triangle ACF$ có: $\widehat{FAM} = \widehat{CAF}$ (góc chung), $\widehat{AFM} = \widehat{ACF}$

Do đó $\triangle AFM \sim \triangle ACF$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AM}{AF} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AM.AC = AF^2$$

mà $AF = AH$, nên $AM.AC = AH^2$

$\triangle AMH$ và $\triangle AHC$ có: $\widehat{MAH} = \widehat{HAC}$ (góc chung), $\frac{AM}{AH} = \frac{AH}{AC}$ ($AM.AC = AH^2$)

Do đó $\triangle AMH \sim \triangle AHC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{AHC}$, mà $\widehat{AHC} = 90^\circ$ ((A) tiếp xúc với BC tại H) nên $\widehat{AMH} = 90^\circ$

$\Rightarrow HM \perp AC$ ở M

$\triangle AMH$ vuông tại M ($HM \perp AC$ ở M) có MN là đường trung tuyến (N là trung điểm của AH)

$$\Rightarrow NM = \frac{1}{2}AH$$

$$\text{Do đó } NM = NH \left(= \frac{1}{2}AH \right)$$

$\triangle HMC$ vuông tại M ($HM \perp AC$ tại M) có MI là đường trung tuyến (I là trung điểm của HC)

$$\Rightarrow MI = HI = \frac{HC}{2}$$

$\triangle NMI$ và $\triangle NHI$ có: $NM = NH \left(= \frac{1}{2}AH \right)$, $MI = HI \left(= \frac{HC}{2} \right)$, NI (cạnh chung)

Do đó $\triangle NMI = \triangle NHI$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{NMI} = \widehat{NHI}$, mà $\widehat{NHI} = 90^\circ$ ($AH \perp BC$ tại H, $N \in AH$) nên $\widehat{NMI} = 90^\circ$

$\Rightarrow IM \perp EF$ tại M ($M, N \in EF$)

Mà $ID \perp EF$ tại D (D là hình chiếu của I lên EF), nên M trùng D.

Vậy A, D, C thẳng hàng.

Bài 87. (Lớp 9) Cho đường tròn tâm O và tâm O' cắt nhau ở A và B (O và O' nằm khác phía đối với AB và góc OBO' là góc tù). Vẽ dây AM của (O) song song với O'B và dây AN của (O') song song với OB (M và N khác A). Chứng minh ba điểm M, B, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi E là giao điểm của tia OB với (O'), F là giao điểm của tia O'B với (O) (E và F khác B)
 $\triangle OAO'$ và $\triangle OBO'$ có:

$$OA = OB \text{ (bán kính (O))}$$

$$O'A = O'B \text{ (bán kính (O'))}$$

$$OO' \text{ (cạnh chung)}$$

Do đó $\triangle OAO' = \triangle OBO'$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{AOO'} = \widehat{BOO'}$$

$\Rightarrow OO'$ là tia phân giác của $\widehat{AOB}$

$$\Rightarrow \widehat{AOO'} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}, \text{ mà } \widehat{AFO'} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \text{ (hệ quả số đo góc nội tiếp)}$$

$$\text{nên } \widehat{AOO'} = \widehat{AFO'}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AOFO' nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

Tương tự tứ giác AOEO' nội tiếp

Do đó năm điểm A, O', E, F, O cùng thuộc đường tròn (OAO')

$\Rightarrow$ Tứ giác EFOO' nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{EFO'} = \widehat{EOO'}, \text{ mà } \widehat{EOO'} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \text{ (OO' là tia phân giác của } \widehat{AOB})$$

$$\text{và } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \text{ (hệ quả số đo góc nội tiếp), nên } \widehat{EFO'} = \widehat{AMB} \quad (1)$$

Xét (O), ta có: Dây AM // dây BF (AM // O'B, B $\in$ O'F)

$$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{MF}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{MBF} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EFO'} = \widehat{MBF}$, mà hai góc EFO' và MBF ở vị trí so le trong nên BM // EF

Tương tự: BN // EF. Do đó BM trùng với BN (tiên đề Ô-clít)

Vậy M, B, N thẳng hàng.

Bài 88. (Lớp 9) Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ và M là trung điểm của BC. Đường tròn tâm O là đường kính AB cắt AC tại điểm thứ hai là D. Gọi E là điểm đối xứng của O qua AC, CE cắt (O) tại F (F $\neq$ E). Chứng minh rằng: M, D, F thẳng hàng.

Lời giải

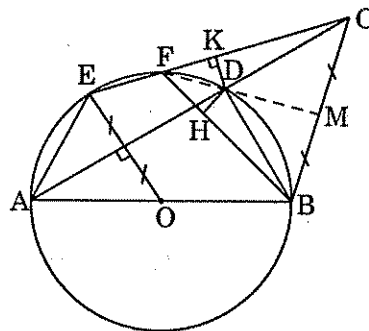
Ta có: E đối xứng với O qua AC (gt)

$$\Rightarrow EA = OA \text{ và } \widehat{EAC} = \widehat{OAC} \text{ (tính chất đối xứng trục)}$$

$$\Rightarrow \triangle AOE \text{ cân và } \widehat{EAC} = 30^\circ \text{ (vì } \widehat{OAC} = 30^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle AOE \text{ đều (}\triangle AOE \text{ cân và } \widehat{OAE} = \widehat{OAC} + \widehat{EAC} = 60^\circ)$$

$$\Rightarrow OE = OA \Rightarrow E \text{ thuộc (O) đường kính AB}$$



Do đó tứ giác AEFD nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AB.

$\Rightarrow \widehat{DFC} = \widehat{EAC}$ (góc ngoài bằng góc trong đối diện)

$\Rightarrow \widehat{DFC} = 30^\circ$ (vì $\widehat{EAC} = 30^\circ$)

Ta có: $\widehat{DFB} = \widehat{DAB}$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn cung DB) và $\widehat{DAB} = 30^\circ$ ($\widehat{CAB} = 30^\circ$)

$\Rightarrow \widehat{DFB} = 30^\circ$

Có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O) đường kính AB)

$\Rightarrow BD \perp AC$ tại D $\Rightarrow \triangle BDC$ vuông tại D mà $\widehat{BCD} = 45^\circ$ (gt), nên $\triangle BDC$ vuông cân tại D

Vẽ $DH \perp FB$ ở H, $DK \perp FC$ ở K

$\triangle DHF$ vuông tại H và $\triangle DKF$ vuông tại K, có:

DF là cạnh huyền chung (gt) và $\widehat{DFH} = \widehat{DFK}$ ($= 30^\circ$)

Do đó $\triangle DHF = \triangle DKF$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow DH = DK$

$\triangle DHB$ vuông tại H và $\triangle DKC$ vuông tại K, có: $DB = DC$ ($\triangle BDC$ vuông cân tại D), $DH = DK$

Do đó $\triangle DHB = \triangle DKC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

Dễ chứng minh D nằm bên trong $\triangle FBC$. Do đó H nằm giữa F và B; K nằm giữa F và C

Ta có: $FH = FK$ ($\triangle DHF = \triangle DKF$) và $HB = KC$ ($\triangle DHB = \triangle DKC$)

$\Rightarrow FH + HB = FK + KC \Rightarrow FB = FC$

Mà $DB = DC$ ($\triangle BDC$ vuông cân tại D) và $MB = MC$ (M là trung điểm của BC) nên F, D, M cùng thuộc đường trung trực của BC

Vậy ba điểm M, D, F thẳng hàng.

Bài 89. (Lớp 9) Cho tứ giác ABCD có $\widehat{ABD} = 30^\circ$, $\widehat{BCD} = 150^\circ$ và $AB = AC$. Gọi E là điểm đối xứng của A qua BD. Chứng minh ba điểm E, C, D thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: E là điểm đối xứng của A qua BD (gt)

$\Rightarrow EB = AB$ và $\widehat{EBD} = \widehat{ABD}$ (tính chất đối xứng trục)

$\Rightarrow \triangle ABE$ cân và $\widehat{EBD} = 30^\circ$ (vì $\widehat{ABD} = 30^\circ$)

Nên $\triangle ABE$ đều ($\triangle ABE$ cân có $\widehat{ABE} = \widehat{ABD} + \widehat{EBD} = 60^\circ$)

$\Rightarrow AE = AB$, mà $AB = AC$ (gt) nên $AE = AB = AC$

$\Rightarrow A$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$

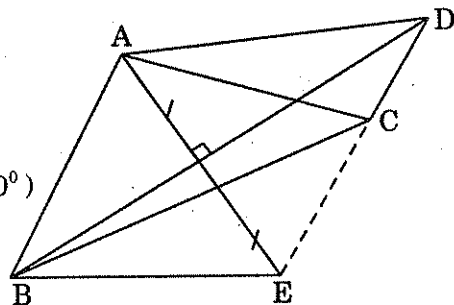
$\Rightarrow \widehat{BCE} = \frac{1}{2} \widehat{BAE}$ (quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BE của (EBC))

$\Rightarrow \widehat{BCE} = 30^\circ$ ($\widehat{BAE} = 60^\circ$, $\triangle ABE$ đều)

Ta có: $\widehat{ECD} = \widehat{BCE} + \widehat{BCD} = 30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ECD} = 180^\circ$

Vậy ba điểm E, C, D thẳng hàng.



Bài 90. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O sao cho $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$. Gọi S là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc BAC của tam giác ABC. Chứng minh rằng: A, O, S thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ ba đường cao AM, BN, CP của $\triangle ABC$ đồng quy tại H

$$\triangle ANB \text{ vuông tại } N \Rightarrow \cos A = \frac{AN}{AB}$$

$$\triangle APC \text{ vuông tại } P \Rightarrow \cos A = \frac{AP}{AC}$$

$$\text{Do đó } \cos^2 A = \frac{AN}{AB} \cdot \frac{AP}{AC} \Rightarrow \cos A = \sqrt{\frac{AP}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương, ta có:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{AP}{AB} + \frac{AN}{AC} \right) \geq \sqrt{\frac{AP}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}}$$

$$\text{Do đó } \cos A \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AP}{AB} + \frac{AN}{AC} \right)$$

$$\text{Tương tự: } \cos B \leq \frac{1}{2} \left(\frac{PB}{AB} + \frac{BM}{BC} \right)$$

$$\cos C \leq \frac{1}{2} \left(\frac{MC}{BC} + \frac{NC}{AC} \right)$$

$$\text{Nên } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AP}{AB} + \frac{PB}{AB} + \frac{AN}{AC} + \frac{NC}{AC} + \frac{BM}{BC} + \frac{MC}{BC} \right)$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AN}{AC}, \frac{PB}{AB} = \frac{BM}{BC} \text{ và } \frac{MC}{BC} = \frac{NC}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AP}{AN} = \frac{AB}{AC}, \frac{PB}{BM} = \frac{AB}{BC} \text{ và } \frac{MC}{NC} = \frac{BC}{AC}$$

Tứ giác BCPN có $\widehat{BNC} = \widehat{BPC} (= 90^\circ)$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCPN nội tiếp

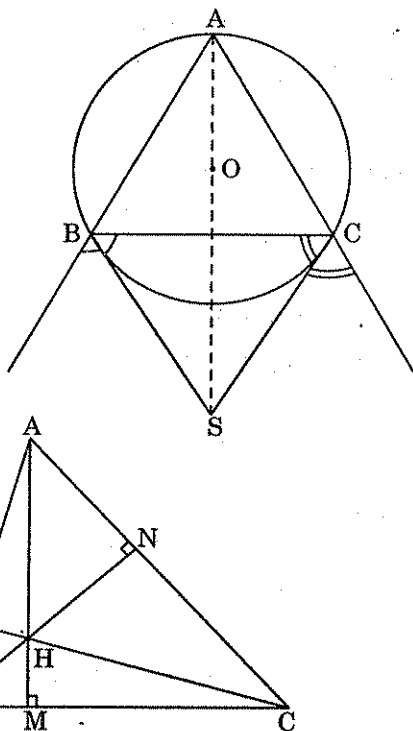
$$\Rightarrow \widehat{ANP} = \widehat{ABC}$$

$\Rightarrow \triangle ANP \sim \triangle ABC$ ($\widehat{BAC}$ chung và $\widehat{ANP} = \widehat{ABC}$)

$$\Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{AN}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AN} = \frac{AC}{AB} \text{ mà } \frac{AP}{AN} = \frac{AB}{AC}, \text{ nên } \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 \Rightarrow AB = AC$$



Tương tự: $AC = BC$

Do đó $AB = AC = BC \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AB = AC$ mà $OB = OC$ (bán kính (O))

Nên AO là đường trung trực của BC

ΔABC đều có AO là đường trung trực

$\Rightarrow$ AO cũng là đường phân giác của $\widehat{BAC}$ mà AS là đường phân giác của $\widehat{BAC}$ (vì S là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc BAC của ΔABC), nên AO trùng với AS

Vậy A, O, S thẳng hàng.

Bài 91. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O sao cho $\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = 3\sqrt{3}$. Gọi I là điểm chính giữa của cung AB không chứa C. Chứng minh C, O, I thẳng hàng.

Lời giải

Chứng minh được:

$$\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$$

$$\cot A = \frac{1}{\operatorname{tg}A}, \cot B = \frac{1}{\operatorname{tg}B} \text{ và } \cot C = \frac{1}{\operatorname{tg}C}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B} + \frac{1}{\operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C} + \frac{1}{\operatorname{tg}C \cdot \operatorname{tg}A} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}C + \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C$$

Áp dụng BĐT Cau-chy cho ba số dương $\operatorname{tg}A, \operatorname{tg}B, \operatorname{tg}C$:

$$\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C}$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C)^3 \geq 27(\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C)$$

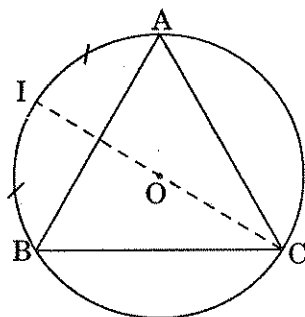
$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C \geq 3\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra. Do đó $\operatorname{tg}A = \operatorname{tg}B = \operatorname{tg}C$

$$\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow CA = CB$$

Mà $OA = OB$ (bán kính (O)) và $IA = IB$ ($\widehat{IA} = \widehat{IB}$) nên C, O, I nằm trên đường trung trực của AB.

Vậy C, O, I thẳng hàng.



Bài 92. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A. Chứng minh rằng nếu: $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$ thì A, O, M thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ ba đường cao AD, BE, CF của ΔABC đồng quy tại H.

Xét tứ giác AEHF, ta có: $\widehat{AEH} = 90^\circ$ (BE và CF là đường cao của ΔABC), $\widehat{AFH} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{EHC}$ (góc trong bằng góc ngoài đối diện)

Tương tự: $\widehat{ABC} = \widehat{DHC}$ và $\widehat{ACB} = \widehat{DHB}$

$\triangle CDH$ và $\triangle ADB$ có:

$$\widehat{CDH} = \widehat{ADB} (= 90^\circ), \widehat{DCH} = \widehat{DAB} \text{ (vì cùng phụ với } \widehat{ABC} \text{)}$$

$$\text{Do đó } \triangle CDH \sim \triangle ADB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{HD}{BD} \Rightarrow CD \cdot BD = AD \cdot HD$$

$$\text{Tương tự: } \triangle AEH \sim \triangle BEC \Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{HE}{CE} \Rightarrow HE \cdot BC = AH \cdot CE$$

$$\triangle EHC \text{ vuông tại } E \Rightarrow \cot \widehat{EHC} = \frac{HE}{CE}.$$

$$\text{Do đó } \cot A = \frac{HE}{CE}, \text{ Tương tự: } \cot B = \frac{HD}{CD} \text{ và } \cot C = \frac{HD}{BD}$$

$$\text{Do đó: } \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A$$

$$= \frac{HE}{CE} \cdot \frac{HD}{CD} + \frac{HD}{CD} \cdot \frac{HD}{BD} + \frac{HD}{BD} \cdot \frac{HE}{CE}$$

$$= \frac{HD \cdot (HE \cdot BD + HD \cdot CE + HE \cdot CD)}{CE \cdot CD \cdot BD}$$

$$= \frac{HD(HE \cdot BD + HE \cdot CD + HD \cdot CE)}{CE \cdot AD \cdot HD} \text{ (vì } CD \cdot BD = AD \cdot HD \text{)}$$

$$= \frac{HE \cdot (BD + CD) + HD \cdot CE}{CE \cdot AD}$$

$$= \frac{HE \cdot BC + HD \cdot CE}{CE \cdot AD} = \frac{AH \cdot CE + HD \cdot CE}{AD \cdot CE} \text{ (vì } HE \cdot BC = AH \cdot CE \text{)}$$

$$= \frac{(AH + HD) \cdot CE}{AD \cdot CE} = \frac{AD \cdot CE}{AD \cdot CE} = 1$$

$$\Rightarrow \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$$

$$\text{Ta có: } (\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A$$

$$\Leftrightarrow (\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 3(\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A)$$

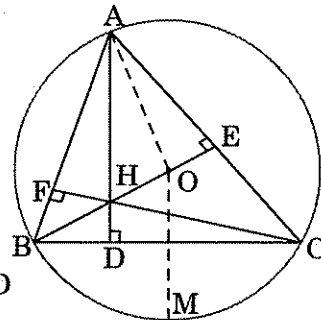
$$\Leftrightarrow \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra. Do đó $\cot A = \cot B = \cot C$

$$\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ đều}$$

$\Rightarrow AB = AC$ mà $OB = OC$ (bán kính (O)) và $MB = MC$ (vì $\widehat{MB} = \widehat{MC}$) nên A, O, M cùng thuộc đường trung trực của BC.

Vậy A, O, M thẳng hàng.



Bài 93. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi K là điểm chính giữa của cung AC không chứa B. Chứng minh rằng nếu $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C = 1$ thì K, O, B thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ ba đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ đồng quy tại H

$$\Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp (tứ giác có hai góc đối bù nhau)

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{EHC} \text{ (góc trong bằng góc ngoài đối diện)}$$

Tương tự: $\widehat{ABC} = \widehat{DHC}$ và $\widehat{ACB} = \widehat{DHB}$

$\triangle CDH$ và $\triangle ADB$ có: $\widehat{CDH} = \widehat{ADB} (= 90^\circ)$,

$$\widehat{DCH} = \widehat{DAB} \text{ (vì cùng phụ với } \widehat{ABC} \text{)}$$

$$\text{Do đó } \triangle CDH \sim \triangle ADB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{HD}{BD} \Rightarrow CD \cdot BD = HD \cdot AD$$

$$\text{Tương tự } \triangle AEH \sim \triangle BEC \Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{HE}{CE} \Rightarrow HE \cdot BC = AH \cdot CE$$

$$\triangle EHC \text{ vuông tại E} \Rightarrow \cot \widehat{EHC} = \frac{HE}{CE}$$

$$\text{Do đó } \cot A = \frac{HE}{CE}. \text{ Tương tự } \cot B = \frac{HD}{CD} \text{ và } \cot C = \frac{HD}{BD}$$

Khi đó: $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A$

$$= \frac{HE}{CE} \cdot \frac{HD}{CD} + \frac{HD}{CD} \cdot \frac{HD}{BD} + \frac{HD}{BD} \cdot \frac{HE}{CE}$$

$$= \frac{HD \cdot (HE \cdot BD + HD \cdot CE + HE \cdot CD)}{CE \cdot CD \cdot BD}$$

$$= \frac{HD \cdot (HE \cdot BD + HE \cdot CD + HD \cdot CE)}{CE \cdot HD \cdot AD}$$

$$= \frac{HE \cdot (BD + CD) + HD \cdot CE}{CE \cdot AD}$$

$$= \frac{HE \cdot BC + HD \cdot CE}{CE \cdot AD} = \frac{AH \cdot CE + HD \cdot CE}{CE \cdot AD} = \frac{(AH + HD) \cdot CE}{CE \cdot AD} = 1$$

$$\Rightarrow \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$$

$$\text{mà } (\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2 \geq 0$$

$$\text{nên } \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A$$

$$\text{Hay } \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq 1$$

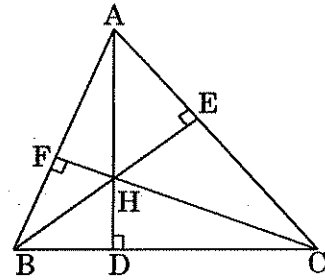
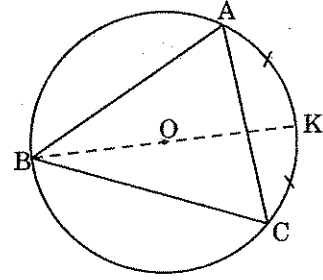
Dấu "=" xảy ra. Do đó $\cot A = \cot B = \cot C$

$$\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow BA = BC,$$

Mà $KA = KC$ ($\widehat{KA} = \widehat{KC}$) và $OA = OC$ (bán kính (O))

Nên K, O, B cùng thuộc đường trung trực của AC.

Vậy K, O, B thẳng hàng.



Bài 94. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Các tia AO, BO, CO lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F (với các góc BOC, COA, AOB là góc tù). Gọi M là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A và B của (O; R). Chứng minh rằng: nếu $AD + BE + CF = \frac{9}{2}R$ thì C, F, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{AD}{AO} = \frac{S_{ADB}}{S_{AOB}} \quad (\triangle ADB \text{ và } \triangle AOB \text{ có chung đường}$$

cao vẽ từ B đến AD)

$$\text{Tương tự: } \frac{AD}{AO} = \frac{S_{ADC}}{S_{AOC}}$$

$$\text{Do đó: } \frac{AD}{AO} = \frac{S_{ADB}}{S_{AOB}} = \frac{S_{ADC}}{S_{AOC}} = \frac{S_{ADB} + S_{ADC}}{S_{AOB} + S_{AOC}} = \frac{S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}}{S_{AOB} + S_{AOC}} = 1 + \frac{S_{BOC}}{S_{AOB} + S_{AOC}}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{R} = 1 + \frac{S_{BOC}}{S_{AOB} + S_{AOC}}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{BE}{R} = 1 + \frac{S_{AOC}}{S_{BOC} + S_{AOB}}; \quad \frac{CF}{R} = 1 + \frac{S_{AOB}}{S_{AOC} + S_{BOC}}$$

$$\text{Do đó: } \frac{AD + BE + CF}{R} = 3 + \frac{S_{BOC}}{S_{AOB} + S_{AOC}} + \frac{S_{AOB}}{S_{AOC} + S_{BOC}} + \frac{S_{AOC}}{S_{BOC} + S_{AOB}}$$

$$\text{Chứng minh được: } \frac{S_{BOC}}{S_{AOB} + S_{AOC}} + \frac{S_{AOB}}{S_{AOC} + S_{BOC}} + \frac{S_{AOC}}{S_{BOC} + S_{AOB}} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Do đó: } \frac{AD + BE + CF}{R} \geq 3 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow AD + BE + CF \geq \frac{9}{2}R$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow AD + BE + CF = \frac{9}{2}R \text{ (cũng chính là gt)}$$

$$\Leftrightarrow S_{AOB} = S_{BOC} = S_{AOC}$$

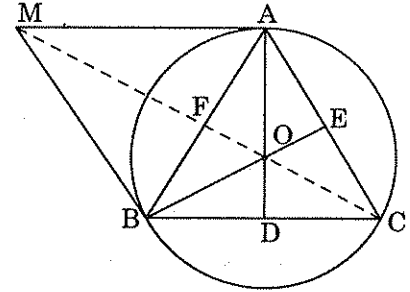
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin(180^\circ - \widehat{AOB}) &= \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin(180^\circ - \widehat{BOC}) = \frac{1}{2}OC \cdot OA \cdot \sin(180^\circ - \widehat{COA}) \\ &= \frac{1}{2}OA \cdot OC \cdot \sin(180^\circ - \widehat{COA}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} \text{ (vì } OA = OB = OC = R)$$

$$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COA \Rightarrow AB = BC = CA$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow CA = CB$$

Mà $OA = OB (= R)$ và $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại M của (O; R))



Nên C, O, M cùng thuộc đường trung trực của AB.

$\Rightarrow$ C, O, M thẳng hàng mà C, O, F thẳng hàng (gt) nên C, O, F, M thẳng hàng.

Vậy C, F, M thẳng hàng.

Bài 95. (Lớp 9) Cho đường tròn tâm O có hai dây AC và BD vuông góc với nhau tại H (H khác O). Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua D và song song với HM cắt (O) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh ba điểm A, O, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi K là giao điểm MH và AD

Ta có $AC \perp BD$ tại H (gt)

$\Rightarrow \triangle BHC$ vuông tại H,

mà HM là đường trung tuyến (M là trung điểm của BC)

Nên $MH = MB \left(= \frac{1}{2} BC \right)$

$\Rightarrow \triangle MBH$ cân tại M

$\Rightarrow \widehat{CBH} = \widehat{MHB}$, mà $\widehat{MHB} = \widehat{KHD}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{CBH} = \widehat{KHD}$

Ta có: $\widehat{KHD} = \widehat{CBH}$; $\widehat{KDH} = \widehat{HCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB của (O))

$\Rightarrow \widehat{KHD} + \widehat{KDH} = \widehat{CBH} + \widehat{HCB}$

Mà $\widehat{AKH} = \widehat{KHD} + \widehat{KDH}$ (góc ngoài đỉnh K của $\triangle DKH$) và

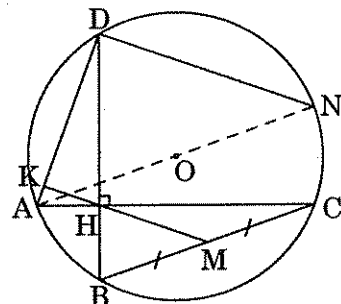
$\widehat{CBH} + \widehat{HCB} = 90^\circ$ ($\triangle BHC$ vuông tại H)

Nên $\widehat{AKH} = 90^\circ \Rightarrow HK \perp AD$ hay $HM \perp AD$

Mà $DN \parallel HM$ (gt), nên $DN \perp AD \Rightarrow \widehat{ADN} = 90^\circ$

Mặt khác A, D, N thuộc (O) (gt). Do đó AN là đường kính của (O)

Vậy ba điểm A, O, N thẳng hàng.



Bài 96. (Lớp 9) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O có AC vuông góc với BD tại H (H khác O). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của điểm O lên AD, BC và I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng: O, I, H thẳng hàng.

Lời giải

Gọi E là giao điểm của MH và BC, F là giao điểm của NH và AD. (O) có:

OM là một phần đường kính

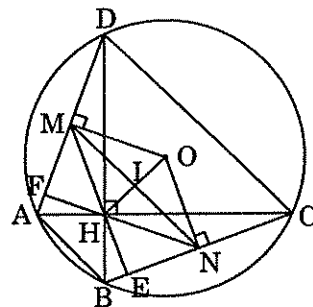
AD là dây cung

$OM \perp AD$ tại M (M là hình chiếu của O lên AD)

Do đó M là trung điểm của AD

$\triangle AHD$ vuông tại H có HM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AD (M là trung điểm của AD)

$\Rightarrow HM = AM \left(= \frac{1}{2} AD \right) \Rightarrow \triangle AMH$ cân tại M



$\Rightarrow \widehat{DAH} = \widehat{AHM}$, mà $\widehat{AHM} = \widehat{CHE}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{DAH} = \widehat{CHE}$

$\Rightarrow \widehat{DAH} + \widehat{ADH} = \widehat{CHE} + \widehat{HCE}$, ($\widehat{ADH} = \widehat{HCE}$, hệ quả góc nội tiếp), mà $\widehat{DAH} + \widehat{ADH} = 90^\circ$ ($\triangle AHD$ vuông tại H) và $\widehat{BEH} = \widehat{CHE} + \widehat{HCE}$ (góc ngoài đỉnh E của $\triangle HEC$) nên $\widehat{BEH} = 90^\circ \Rightarrow HE \perp BC$ hay $MH \perp BC$, mà $ON \perp BC$ (N là hình chiếu của O lên BC) nên $MH \parallel ON$

Chứng minh tương tự: $NH \parallel OM$

Do đó tứ giác OMHN là hình bình hành (tứ giác có hai cặp cạnh đối song song)

$\Rightarrow$ Hai đường chéo OH và MN có chung một trung điểm, mà I là trung điểm của MN (gt), nên I là trung điểm của OH.

Vậy O, I, H thẳng hàng.

Bài 97. (Lớp 9) Cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn (O; R). Trên cung BC không chứa A vẽ điểm D sao cho $\frac{DA + DB + DC}{2} = R \left(1 + \frac{BC}{AB}\right)$. Chứng minh rằng: A, O, D thẳng hàng.

Lời giải

(O) có: AB, AC là hai dây cung và $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$

Gọi E là giao điểm của AD và BC

$\triangle ADB$ và $\triangle ABE$ có:

$\widehat{DAB} = \widehat{BAE}$ (góc chung)

$\widehat{ADB} = \widehat{ABE}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Do đó $\triangle ADB \sim \triangle ABE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DB}{BE} = \frac{AD}{AB}$ (1)

$\triangle ADC$ và $\triangle ACE$ có:

$\widehat{DAC} = \widehat{CAE}$ (góc chung)

$\widehat{ADC} = \widehat{ACE}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Do đó $\triangle ADC \sim \triangle ACE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DC}{CE} = \frac{AD}{AC}$ (2)

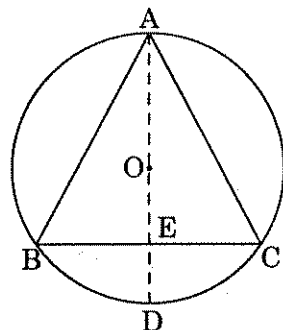
Từ (1) và (2) và $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DB}{BE} = \frac{DC}{CE} = \frac{DB + DC}{BE + CE} = \frac{DB + DC}{BC}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DB + DC}{BC} \Rightarrow DB + DC = AD \cdot \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow \frac{DA + DB + DC}{2} = \frac{DA}{2} \left(1 + \frac{BC}{AB}\right)$

Mà $\frac{DA + DB + DC}{2} = R \left(1 + \frac{BC}{AB}\right)$ (gt)



Nên $\frac{DA}{2} = R$ hay $DA = 2R$. Mặt khác DA là dây cung của $(O; R)$

Do đó DA là đường kính của (O)

Vậy A, O, D thẳng hàng.

Bài 98. (Lớp 9) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Lấy M trên cung BC không chứa A sao cho $MA + MB + MC = 4R$. Chứng minh rằng ba điểm A, O, M thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1

Trên đoạn MA lấy điểm D sao cho $MD = MB$

$\Rightarrow \triangle MDB$ cân tại M

Ta có: $\widehat{DMB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB của (O))

và $\widehat{ACB} = 60^\circ$ ($\triangle ABC$ đều) $\Rightarrow \widehat{DMB} = 60^\circ$

Do đó $\triangle MDB$ đều ($\triangle MDB$ cân tại M có $\widehat{DMB} = 60^\circ$)

Ta có: $\widehat{MBC} + \widehat{CBD} = 60^\circ$ ($= \widehat{MBD}$, $\triangle MDB$ đều)

và $\widehat{DBA} + \widehat{CBD} = 60^\circ$ ($= \widehat{ABC}$, $\triangle ABC$ đều)

$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{DBA}$

$\triangle MBC$ và $\triangle DBA$ có: $BM = BD$ ($\triangle MDB$ đều),

$\widehat{MBC} = \widehat{DBA}$ (chứng minh trên)

$BC = BA$ ($\triangle ABC$ đều)

Do đó $\triangle MBC = \triangle DBA$ (c.g.c)

$\Rightarrow MC = DA$

$\Rightarrow MB + MC = MD + DA$ ($MB = MD$, $\triangle MDB$ đều)

$\Rightarrow MB + MC = MA$

$\Rightarrow MA + MB + MC = 2MA$

Mà $MA + MB + MC = 4R$ (gt)

Nên $MA = 2R$. Do đó MA là đường kính của $(O; R)$

Vậy ba điểm A, O, M thẳng hàng.

Cách 2

Xét $(O; R)$, ta có: AB, AC là hai dây cung và $AB = AC$ ($\triangle ABC$ đều)

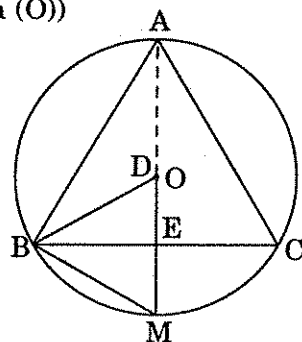
$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$

Gọi E là giao điểm của AM và BC

$\triangle AMB$ và $\triangle ABE$ có: $\widehat{MAB} = \widehat{BAE}$ (góc chung)

$\widehat{AMB} = \widehat{ABE}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Do đó $\triangle AMB \sim \triangle ABE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MB}{BE} = \frac{AM}{AB}$ (1)



$\triangle AMC$ và $\triangle ACE$ có: $\widehat{MAC} = \widehat{CAE}$ (góc chung),

$\widehat{AMC} = \widehat{ACE}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$$\text{Do đó } \triangle AMC \sim \triangle ACE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MC}{CE} = \frac{AM}{AC} \quad (2)$$

Từ (1), (2) và $AB = AC$ ($\triangle ABC$ đều), ta có:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MB}{BE} = \frac{MC}{CE} = \frac{MB + MC}{BE + CE} = \frac{MB + MC}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{MB + MC}{BC}$$

Mà $AC = BC$ ($\triangle ABC$ đều) nên $AM = MB + MC \Rightarrow 2AM = MA + MB + MC$

Mà $MA + MB + MC = 4R$ (gt), nên $2AM = 4R \Rightarrow AM = 2R$

Mặt khác AM là dây cung của $(O; R)$. Do đó AM là đường kính của (O)

Vậy ba điểm A, O, M thẳng hàng.

Bài 99. (Lớp 9) Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . Gọi A là điểm chính giữa của cung BC và D là điểm trên cung BC không chứa A . Vẽ DH vuông góc với BC tại H . Chứng minh rằng: nếu $DH = \frac{BC}{2}$ thì A, O, D thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $DH \leq DO$ (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$$\text{Và } DO = \frac{BC}{2} (= R) \Rightarrow DH \leq \frac{BC}{2}$$

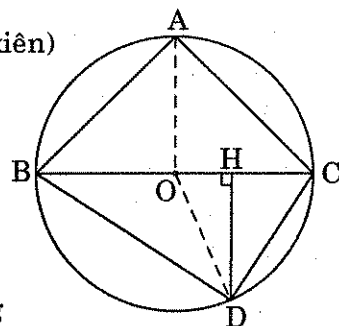
$$\text{Dấu "=" xảy ra (vì } DH = \frac{BC}{2})$$

Do đó $H \equiv O \Rightarrow H$ là trung điểm của BC

$\triangle BDC$ có DH vừa đường cao ($DH \perp BC$ tại H), vừa là đường trung tuyến (H là trung điểm của BC)

$\triangle BDC$ cân tại $D \Rightarrow DB = DC$ mà $AB = AC$ ($\widehat{AB} = \widehat{AC}$; $\widehat{AB}$ và $\widehat{AC}$ là hai cung của (O)) và $OB = OC$ (BC là đường kính của (O) nên D, O, A cùng thuộc đường trung trực của BC).

Vậy A, O, D thẳng hàng.



Bài 100. (Lớp 9) Cho đường tròn $(O; R)$ và các dây AB, BC sao cho $AB = R\sqrt{3}$, $BC = R$ (với tia BO nằm giữa hai tia BA và BC). Chứng minh rằng A, O, C thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ đường kính BS của $(O; R) \Rightarrow BS = 2R$

Xét (O) , ta có: $\triangle BCS$ nội tiếp ($B, C, S \in (O)$), BS là đường kính (cách vẽ)

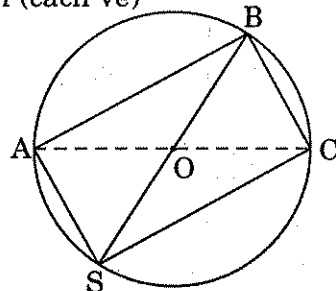
Do đó $\triangle BCS$ vuông tại C

$$\Rightarrow BS^2 = SC^2 + BC^2 \text{ (định lý Py-ta-go)}$$

$$\Rightarrow (2R)^2 = SC^2 + R^2$$

$$\Rightarrow SC = R\sqrt{3} \text{ mà } AB = R\sqrt{3}, \text{ nên } SC = AB$$

Chứng minh tương tự: $AS = BC$



Tứ giác ABCS có SC = AB và AS = BC

⇒ Tứ giác ABCS là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

⇒ BS và AC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Mà O là trung điểm của BS (vì BS là đường kính của (O))

Nên O cũng là trung điểm của AC.

Vậy A, O, C thẳng hàng.

Bài 101. (Lớp 9) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AH có đường cao. Vẽ đường tròn tâm I đường kính BH và tiếp tuyến CM của (I) (M là tiếp điểm). Tia IM cắt AB tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHN cắt AM tại K. Chứng minh rằng ba điểm N, K, C thẳng hàng.

Lời giải

Gọi E là giao điểm của AM và CN.

$\triangle CMH$ và $\triangle CMB$ có:

$$\widehat{MCH} = \widehat{BCM} \text{ (góc chung)}$$

$$\widehat{CMH} = \widehat{CBM} \text{ (hệ quả góc nội tiếp)}$$

Do đó $\triangle CMH \sim \triangle CMB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CH}{CM} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow CH.CB = CM^2$$

$\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao (gt)

$$\Rightarrow CA^2 = CH.CB \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$$

$$\text{Do đó } CM^2 = CA^2 (= CH.CB) \Rightarrow CM = CA$$

$\triangle CMN$ vuông tại M (CM là tiếp tuyến tại M của (I)) và $\triangle CAN$ vuông tại A ($\triangle ABC$ vuông tại A, $N \in AB$) có: CN là cạnh huyền chung, $CM = CA$

Do đó $\triangle CMN = \triangle CAN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow NM = NA, \text{ mà } CM = CA \text{ nên CN là đường trung trực của AM} \Rightarrow CN \perp AM \text{ tại E}$$

$\triangle CAN$ vuông tại A có AE là đường cao

$$\Rightarrow CA^2 = CE.CN \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$$

$$\text{Do đó } CH.CB = CE.CN (= CA^2)$$

$$\triangle CEH \text{ và } \triangle CBN \text{ có: } \widehat{ECH} = \widehat{BCN} \text{ (góc chung), } \frac{CE}{CB} = \frac{CH}{CN} \text{ (CH.CB = CE.CN)}$$

Do đó $\triangle CEH \sim \triangle CBN$ (c.g.c)

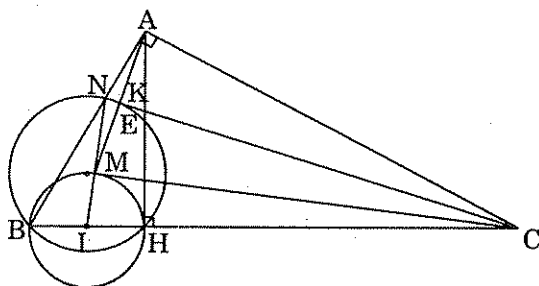
$$\Rightarrow \widehat{CEH} = \widehat{CBN}$$

⇒ Tứ giác BHEN nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện)

⇒ E thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHN$, mà E là giao điểm của AM và CN nên (BHN) cắt AM tại E.

Do đó E = K (vì (BHN) cắt AM tại K)

Vậy N, K, C thẳng hàng.



$\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{NDB}$ (tính chất đối xứng trục)

Vì E là điểm đối xứng của O qua AC, nên $AE = AO$ và $\widehat{EAC} = \widehat{BAC} \Rightarrow \triangle AOE$ cân tại A và $\widehat{EAC} = 30^\circ$ (vì $\widehat{BAC} = 30^\circ$). $\triangle AOE$ cân tại A có $\widehat{EAO} = \widehat{EAC} + \widehat{BAC} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle AOE$ đều $\Rightarrow OE = OA \Rightarrow E \in (O)$

Ta có $\widehat{NDC} = \widehat{NDB}$, $\widehat{NDB} = \widehat{NAB}$ ($= \frac{1}{2} \text{sđNB}$ của (O)) và $\widehat{NAB} = \widehat{NAE}$ (tính chất đối xứng trục)

$\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{NAE}$, mà $\widehat{EDN} + \widehat{NAE} = 180^\circ$ (vì tứ giác AEDN nội tiếp)

nên $\widehat{EDN} + \widehat{NDC} = 180^\circ$

Vậy C, D, E thẳng hàng.

Bài 104. (Lớp 9) Trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ lấy điểm C, trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CB = CD = R$. Đường trung trực của BD cắt nửa đường tròn tâm O tại điểm thứ hai E. Gọi F là điểm đối xứng của O qua AC. Chứng minh rằng: D, E, F thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) đường kính AB)

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C

$$\Rightarrow \sin \widehat{CAB} = \frac{CB}{AB}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{CAB} = \frac{1}{2} \quad (CB = R, AB = 2R)$$

$\Rightarrow \widehat{CAB} = 30^\circ$, mà $\widehat{CAF} = \widehat{CAB}$ (tính chất đối xứng trục) nên $\widehat{CAF} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{OAF} = \widehat{CAB} + \widehat{CAF} = 60^\circ$$

Ta có: $AF = AO$ (tính chất đối xứng trục) $\Rightarrow \triangle AOF$ cân tại A, mà $\widehat{OAF} = 60^\circ$ nên $\triangle AOF$ đều $\Rightarrow OF = OA \Rightarrow F \in (O; R)$

Ta có: $\begin{cases} ED = EB \text{ (E thuộc đường trung trực của BD)} \\ CD = CB (= R) \end{cases}$

$\Rightarrow EC$ là đường trung trực của DB

$\Rightarrow D$ và B đối xứng với nhau qua EC

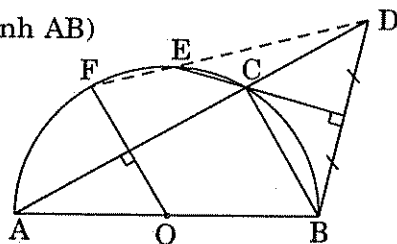
$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{BEC}$ (tính chất đối xứng trục)

Mà $\begin{cases} \widehat{BEC} = \widehat{CAB} \text{ (hệ quả về số đo góc nội tiếp)} \\ \widehat{CAB} = \widehat{CAF} \text{ (tính chất đối xứng trục)} \end{cases}$

Nên $\widehat{DEC} = \widehat{CAF} \Rightarrow \widehat{DEC} + \widehat{CEF} = \widehat{CAF} + \widehat{CEF}$

$\Rightarrow \widehat{DEF} = 180^\circ$ (tứ giác ACEF nội tiếp)

Vậy D, E, F thẳng hàng.



Bài 105. (Lớp 9) Trên đường tròn $(O; R)$ lần lượt lấy các điểm A, B, C (theo chiều quay kim đồng hồ) sao cho $AB = AC = R$. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB, N là giao điểm của hai đường thẳng BM và CA, D là điểm đối xứng của N qua MA. Chứng minh C, O, D thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $OA = OB = AB (= R)$

$\Rightarrow \triangle OAB$ đều

$\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow s\widehat{AB} = 60^\circ$,

mà: $s\widehat{MA} = s\widehat{MB} = \frac{1}{2}s\widehat{AB}$ (M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB)

Nên $s\widehat{MA} = s\widehat{MB} = 30^\circ$

Tương tự: $s\widehat{BC} = 60^\circ \Rightarrow s\widehat{MC} = s\widehat{MB} + s\widehat{BC} = 30^\circ + 60^\circ$
 $\Rightarrow s\widehat{MC} = 90^\circ$

Mà $\widehat{MAC} = \frac{1}{2}s\widehat{MC}$ (góc nội tiếp chắn cung MC)

nên $\widehat{MAC} = 45^\circ$. Do đó $\widehat{MAN} = 135^\circ$ (vì $\widehat{MAC}$ và $\widehat{MAN}$ kề bù)

Ta có: $\begin{cases} \widehat{AMN} = \widehat{ACB} \text{ (tứ giác AMBC nội tiếp (O))} \\ \widehat{ACB} = \frac{1}{2}s\widehat{AB} \text{ (góc nội tiếp chắn cung AB)} \\ s\widehat{AB} = 60^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{AMN} = 30^\circ$, mà $\widehat{MAN} + \widehat{AMN} + \widehat{MNA} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong tam giác)

nên $135^\circ + 30^\circ + \widehat{MNA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MNA} = 15^\circ$

Ta có: $\widehat{MCA} = \frac{1}{2}s\widehat{MA}$ (góc nội tiếp chắn cung MA), $s\widehat{MA} = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MCA} = 15^\circ$, mà $\widehat{MDA} = \widehat{MNA}$ (tính chất đối xứng trục) và $\widehat{MNA} = 15^\circ$ nên $\widehat{MCA} = \widehat{MDA} (= 15^\circ) \Rightarrow$ Tứ giác MCDA nội tiếp

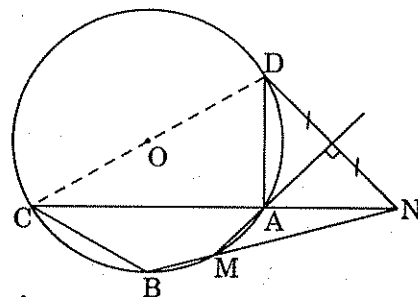
$\Rightarrow D \in (O)$ (vì M, C, A $\in (O)$).

Tương tự: $\widehat{MAD} = \widehat{MAN} = 135^\circ$.

Ta có $\widehat{CAD} = \widehat{MAD} - \widehat{MAC} = 135^\circ - 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CAD} = 90^\circ$, mà C, A, D $\in (O)$ nên CD là đường kính của (O)

Vậy C, O, D thẳng hàng.



Bài 106. (Lớp 9) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$ và nội tiếp đường tròn tâm O. Trên tia đối của các tia BA, CA lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $BD = CA$ và $CE = BA$. Chứng minh: D, O, E thẳng hàng.

$\Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A

Ta có: $\widehat{BKC} = \widehat{BIC}$ (tính chất đối xứng trục)

và $\widehat{BIC} = \widehat{BAC}$ (hệ quả về số đo góc nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{BAC}$

Ta có:

$\widehat{IB} = \widehat{IC}$ (I là điểm chính giữa của cung BC của (O))

$\Rightarrow IB = IC \Rightarrow \triangle BIC$ cân tại I

Mà $\triangle BKC = \triangle BIC$ (tính chất đối xứng trục).

Nên $\triangle BKC$ cân tại K

Trên đoạn MN lấy H sao cho $CH \parallel AB$

$\Rightarrow \widehat{CHN} = \widehat{AMN}$ (đồng vị), mà $\widehat{AMN} = \widehat{CNH}$ ($\triangle AMN$ cân tại A) nên $\widehat{CHN} = \widehat{CNH}$

$\Rightarrow \triangle CHN$ cân tại C $\Rightarrow CH = CN$, mà $CN = AB$ (gt) nên $CH = AB$

Tứ giác ABHC có $CH \parallel AB$ và $CH = AB$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABHC là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BAC}$ (tính chất hình bình hành)

Do đó $\widehat{BKC} = \widehat{BHC} (= \widehat{BAC})$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCHK nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

Ta có: $\widehat{HCN} = \widehat{BAC}$ (so le trong, $CH \parallel AB$) và $\widehat{BKC} = \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{HCN} = \widehat{BKC}$, mà $\triangle HCN$ cân tại C và $\triangle BKC$ cân tại K nên $\triangle HCN \sim \triangle BKC$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{CHN} = \widehat{KBC}$

$\Rightarrow \widehat{CHN} + \widehat{CHK} = \widehat{KBC} + \widehat{CHK}$ mà $\widehat{CHN} + \widehat{CHK} = \widehat{NHK}$; $\widehat{KBC} + \widehat{CHK} = 180^\circ$ (tính chất của tứ giác BCHK nội tiếp)

Nên $\widehat{NHK} = 180^\circ \Rightarrow K, H, N$ thẳng hàng, mà M, H, N thẳng hàng (cách vẽ)

nên M, K, H, N thẳng hàng

Vậy M, K, N thẳng hàng.

Bài 108. (Lớp 9) Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Đường thẳng qua O vuông góc với BC cắt đoạn DE tại M. Gọi N là trung điểm của BC. Chứng minh: A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

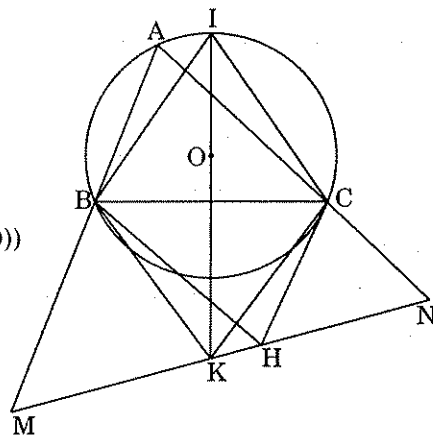
Qua M vẽ đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại H, K.

$\Rightarrow OM \perp HK$ tại M ($OM \perp BC$)

Xét tứ giác ODHM, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{ODH} = 90^\circ & (AD \text{ là tiếp tuyến tại D của (O), } H \in AD) \\ \widehat{OMH} = 90^\circ & (OM \perp HK \text{ tại M}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{ODH} + \widehat{OMH} = 180^\circ$



⇒ Tứ giác ODHM nội tiếp (tứ giác có hai góc đối bù nhau)

Chứng minh tương tự: tứ giác OMEK nội tiếp

Ta có: $\widehat{OHK} = \widehat{ODM}$ (tứ giác ODHM nội tiếp)

$$\widehat{ODM} = \widehat{OEM} \quad (\triangle ODE \text{ cân tại } O, \text{ vì có } OD = OE = \text{bán kính } (O))$$

$$\widehat{OEM} = \widehat{OKH} \quad (\text{tứ giác OMEK nội tiếp})$$

Do đó $\widehat{OHK} = \widehat{OKH} \Rightarrow \triangle OHK$ cân tại O, mà OM là đường cao của $\triangle OHK$ ($OM \perp HK$ ở M) nên OM cũng là đường trung tuyến của $\triangle OHK \Rightarrow M$ là trung điểm của HK

Xét $\triangle ABC$, ta có:

$HK \parallel BC$ (cách vẽ)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HK}{BC} \quad (\text{hệ quả của định lý Ta-lét})$$

Mà $HK = 2HM$ (M là trung điểm của HK)

và $BC = 2BN$ (N là trung điểm của BC)

$$\text{nên } \frac{AH}{AB} = \frac{HM}{BN}$$

Xét $\triangle AHM$ và $\triangle ABN$, ta có:

$\widehat{AHM} = \widehat{ABN}$ (đồng vị, $HK \parallel BC$, $M \in HK$, $N \in BC$)

$$\frac{AH}{AB} = \frac{HM}{BN}$$

Do đó $\triangle AHM \sim \triangle ABN$ (c.g.c)

⇒ $\widehat{HAM} = \widehat{BAN}$ hay $\widehat{BAM} = \widehat{BAN}$ ($H \in AB$) mà tia AM và tia AN cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB, nên tia AM trùng với tia AN

Vậy A, M, N thẳng hàng.

Bài 109. (Lớp 9) Cho hình bình hành ABCD ($BD < AC$). Đường tròn (O) đường kính AC cắt các tia AB, AD lần lượt tại H, I. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng BD tại V. Chứng minh H, I, V thẳng hàng.

Lời giải

Lấy K thuộc đoạn HI sao cho $\widehat{HCK} = \widehat{ADO}$

$\triangle HCK$ và $\triangle ADO$ có:

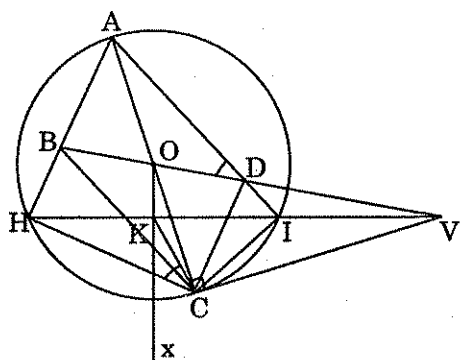
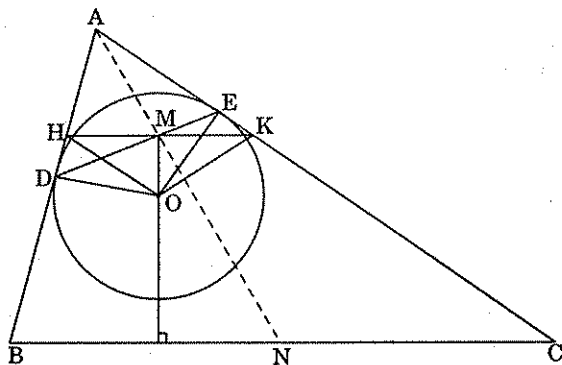
$$\widehat{HCK} = \widehat{ADO}$$

$$\widehat{CHK} = \widehat{DAO} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{CI} \text{ của } (O) \right)$$

Do đó $\triangle HCK \sim \triangle ADO$ (g.g)

Xét hình bình hành ABCD, ta có :

Hai đường chéo BD và AC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (tính chất hình bình hành), mà O là trung điểm của AC (AC là đường kính của (O)) nên O cũng là trung điểm của BD



$\Rightarrow B, O, D$ thẳng hàng

$\Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{AOD} = 180^\circ$ (hai góc kề bù), mà $\widehat{IKC} + \widehat{HKC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

và $\widehat{AOD} = \widehat{HKC}$ ($\triangle ADO \sim \triangle HCK$), nên $\widehat{AOB} = \widehat{IKC}$

$\triangle AOB$ và $\triangle IKC$ có: $\widehat{AOB} = \widehat{IKC}$, $\widehat{OAB} = \widehat{KIC}$ $\left(= \frac{1}{2} \text{sđCH của } (O) \right)$

$$\text{Do đó } \triangle AOB \sim \triangle IKC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AO}{IK} = \frac{OB}{KC} \Rightarrow IK = \frac{AO \cdot KC}{OB} \quad (1)$$

Ta có: $\triangle HCK \sim \triangle ADO$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \frac{HK}{AO} = \frac{KC}{OD} \Rightarrow HK = \frac{AO \cdot KC}{OD} \quad (2)$$

Từ (1), (2) và $OB = OD$ (O là trung điểm của BD)

$\Rightarrow IK = HK \Rightarrow K$ là trung điểm của dây HI không qua tâm của (O)

$\Rightarrow OK \perp HI$ tại K

Ta có: $\widehat{IKC} = \widehat{AOB}$ ($\triangle IKC \sim \triangle AOB$) và $\widehat{AOB} = \widehat{COV}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{COV}$

Vẽ Kx là tia đối của tia KO

Ta có: $\widehat{IKC} + \widehat{CKx} = 90^\circ$ ($OK \perp HI$ tại K)

$\widehat{COV} + \widehat{CVO} = 90^\circ$ ($CV \perp OC$, tính chất tiếp tuyến)

$\widehat{IKC} = \widehat{COV}$

nên $\widehat{CKx} = \widehat{CVO} \Rightarrow$ Tứ giác $OVCK$ nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện)

$\Rightarrow \widehat{OKV} = \widehat{OCV}$, mà $\widehat{OCV} = 90^\circ$ ($CV \perp OC$)

nên $\widehat{OKV} = 90^\circ \Rightarrow KV \perp OK$ tại K , mà $HI \perp OK$ tại K , nên $HI \equiv KV$

Vậy H, I, V thẳng hàng

* **Nhận xét:** Kỹ thuật vẽ điểm K để có $\triangle HCK \sim \triangle ADO$ và $\triangle IKC \sim \triangle AOB$, giúp ta chứng minh được tứ giác $OVCK$ nội tiếp. Đây chính là điểm cốt lõi của lời giải.

Bài 110. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AK . Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại M ; OM cắt BC tại I . Các tia AH và KI cắt (O) tại điểm thứ hai lần lượt tại D và N . Chứng minh: M, D, N thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $OB = OC$ (bán kính (O)) và $MB = MC$ (tính chất hai tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại M ,

$\Rightarrow OM$ là trung trực của BC

$\Rightarrow OM \perp BC$ tại I

ΔOCM vuông tại C (MC là tiếp tuyến tại C của (O))

có CI là đường cao

$$\Rightarrow OC^2 = OI \cdot OM \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$$
$$\Rightarrow OD^2 = OL \cdot OM \text{ (} OC = OD, \text{ bán kính (O))}$$

$\triangle ODM$ và $\triangle OID$ có: $\widehat{DOM} = \widehat{IOD}$ (góc chung)

$$\frac{OD}{OI} = \frac{OM}{OD} \quad (OD^2 = OI \cdot OM)$$

Do đó $\Delta ODM \simeq \Delta OID$ (c.g.c)

Ta có: $OI \parallel AD$ (cùng vuông góc với BC)

$$\Rightarrow \widehat{IOD} = \widehat{ODA} \text{ (hai góc so le trong)}$$

mà $\widehat{ODA} = \widehat{DAO}$ ($\triangle OAD$ cân tại O, vì $OD = OA$)

và $\widehat{DAO} = \widehat{DNI} \left(= \frac{1}{2} \widehat{DK} \text{ của } (O) \right)$

nên $\widehat{IOD} = \widehat{DNI}$

⇒ Tứ giác DNOI nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

$$\Rightarrow \widehat{OID} + \widehat{OND} = 180^\circ \text{ (tính chất của tứ giác nội tiếp)}$$

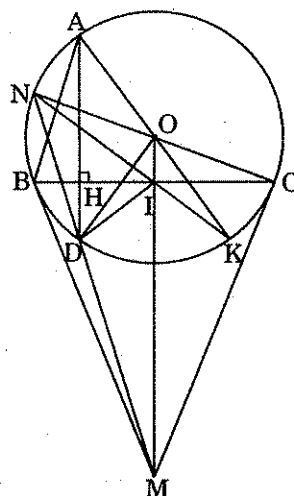
Mà $\widehat{OID} = \widehat{ODM}$ ($\triangle OID \simeq \triangle ODM$)

và $\widehat{OND} = \widehat{ODN}$ (ΔOND cân tại O, vì $ON = OD$)

nên $\widehat{ODM} + \widehat{ODN} = 180^\circ$ hay $\widehat{MDN} = 180^\circ$

Vây M, D, N thẳng hàng.

* **Nhận xét:** Ý tưởng của lời giải bài toán là chúng ta thấy được $\triangle ODM \sim \triangle OID$ và tứ giác DNOI nội tiếp.



Bài 111. (Lớp 9) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, M thuộc cung AB (M khác A và B), C nằm giữa O và A. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa M kẻ các tiếp tuyến Ax, By với (O). Đường thẳng qua M và vuông góc với MC cắt Ax, By lần lượt tại P, Q. AM cắt CP tại E, BM cắt CQ tại F. Gọi N là giao điểm thứ hai của các đường tròn (MEP) và (MFQ). Chứng minh: M, N, O thẳng hàng.

Lời giải

Tứ giác APMC có:

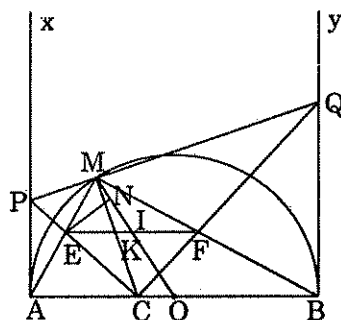
$$\begin{cases} \widehat{CAP} = 90^\circ \text{ (PA là tiếp tuyến tại A của (O))} \\ \widehat{CMP} = 90^\circ \text{ (PQ} \perp \text{CM tại M).} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{\text{CAP}} + \widehat{\text{CMP}} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác APMC nội tiếp

Chứng minh tương tự: tứ giác MQBC nội tiếp

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O))

$$\Rightarrow \Delta AMB \text{ vuông tại } M \Rightarrow \widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 90^\circ$$


Mà $\widehat{MAP} + \widehat{MAB} + \widehat{MBQ} + \widehat{MBA} = \widehat{PAB} + \widehat{QBA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$,

nên $\widehat{MAP} + \widehat{MBQ} = 90^\circ$

Ta có: $\begin{cases} \widehat{MCE} = \widehat{MAP} \text{ (tứ giác APMC nội tiếp)} \\ \widehat{MCF} = \widehat{MBQ} \text{ (tứ giác MQBC nội tiếp)} \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{MCE} + \widehat{MCF} = \widehat{MAP} + \widehat{MBQ}$

$\Rightarrow \widehat{ECF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ECF} + \widehat{EMF} = 180^\circ$ ($\widehat{AMB} = 90^\circ$, $E \in MA$, $F \in MB$)

$\Rightarrow$ Tứ giác EMFC nội tiếp

Ta có: $\begin{cases} \widehat{MEF} = \widehat{MCF} \text{ (tứ giác EMFC nội tiếp)} \\ \widehat{MCF} = \widehat{MBQ} \text{ (tứ giác MQBC nội tiếp)} \\ \widehat{MBQ} = \widehat{MAB} \left(= \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{MB} \text{ của } (O) \right) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{MAB}$, mà $\widehat{MEF}$ và $\widehat{MAB}$ ở vị trí đồng vị nên $EF \parallel AB$

Gọi I là giao điểm của MO và EF

ΔMAO có $EI \parallel AO$ ($EF \parallel AB$, $I \in EF$, $O \in AB$)

$\Rightarrow \frac{IE}{OA} = \frac{MI}{MO}$ (1) (hệ quả của định lý Ta-lét)

Chứng minh tương tự: $\frac{IF}{OB} = \frac{MI}{MO}$ (2)

Từ (1), (2) và $OA = OB$ (bán kính (O)), ta có: $IE = IF$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của EF

Gọi K là giao điểm của MN và EF

Ta có: $\begin{cases} \widehat{MEF} = \widehat{MAB} \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{MAB} = \widehat{MPE} \text{ (tứ giác APMC nội tiếp)} \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{MPE}$, mà $\widehat{MPE} = \widehat{KNE}$ (góc ngoài của tứ giác MNEP nội tiếp)

nên $\widehat{MEF} = \widehat{KNE}$

ΔKEM và ΔKNE có: $\widehat{EKM} = \widehat{NKE}$ (góc chung), $\widehat{MEK} = \widehat{ENK}$ ($\widehat{MEF} = \widehat{KNE}$)

Do đó $\Delta KEM \sim \Delta KNE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{KE}{KN} = \frac{KM}{KE} \Rightarrow KE^2 = KM.KN$

Chứng minh tương tự: $KF^2 = KM.KN$

Do đó $KE^2 = KF^2 \Rightarrow KE = KF \Rightarrow K$ là trung điểm của EF

Thế thì $I = K$ (vì I cũng là trung điểm của EF). Do đó M, N, I, O thẳng hàng (vì các điểm này cùng thuộc đường thẳng MI)

Vậy M, N, O thẳng hàng.

Bài 112. (Lớp 9) Trên đường tròn $(O; R)$ lần lượt lấy các điểm A, B, C, D (theo chiều quay kim đồng hồ) sao cho $AB = AC = CD = R$. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Đường thẳng qua A và vuông góc với MB cắt đường thẳng CM tại E. Chứng minh rằng: D, B, E thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle AOB$ có $OA = OB = AB (= R) \Rightarrow \triangle AOB$ đều

Chứng minh tương tự: $\triangle BOC$ đều và $\triangle COD$ đều

Khi đó $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = 60^\circ$

mà $\widehat{AOD} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD}$

nên $\widehat{AOD} = 180^\circ$

$\Rightarrow A, O, D$ thẳng hàng

$\Rightarrow AD$ là đường kính của $(O; R)$

Ta có: $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AB), mà $\widehat{AOB} = 60^\circ$

($\triangle AOB$ đều) nên $\widehat{AMB} = 30^\circ$

Ta có: $\widehat{EMB} = \widehat{BDC}$ (góc ngoài đỉnh M của tứ giác BDCM nội tiếp (O))

và $\widehat{BDC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$ (hệ quả về số đo góc nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{EMB} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$, mà $\widehat{BOC} = 60^\circ$ ($\triangle BOC$ đều), nên $\widehat{EMB} = 30^\circ$

Do đó $\widehat{AMB} = \widehat{EMB} (= 30^\circ) \Rightarrow MB$ là đường phân giác của góc AME.

$\triangle AME$ có MB vừa là đường phân giác, vừa là đường cao ($MB \perp AE$)

$\Rightarrow \triangle AME$ cân tại M

Do đó đường cao MB của $\triangle AME$ cân tại M cũng là đường trung trực của AE.

$\Rightarrow A$ và E đối xứng nhau qua MB

$\Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MBA}$ (tính chất đối xứng trục)

Xét (O) , ta có: $\begin{cases} AB \text{ và } CD \text{ là hai dây cung} \\ AB = CD \text{ (gt)} \end{cases}$

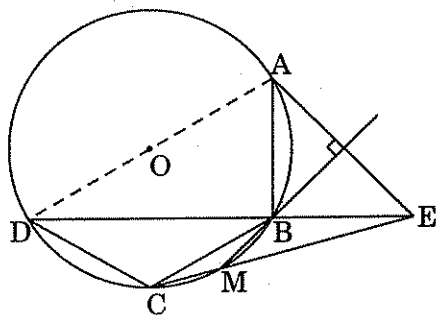
$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow s\widehat{AB} = s\widehat{CD}$, mà $s\widehat{BM} = s\widehat{MC}$ (M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của (O)) nên $s\widehat{AB} + s\widehat{BM} = s\widehat{CD} + s\widehat{MC}$ hay $s\widehat{AM} = s\widehat{MD}$

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{MBD}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau của (O))

Do đó $\widehat{MBE} + \widehat{MBD} = \widehat{MBA} + \widehat{ACM}$ ($\widehat{MBE} = \widehat{MBA}$)

$\Rightarrow \widehat{DBE} = 180^\circ$ (tứ giác ABMC nội tiếp (O))

Vậy D, B, E thẳng hàng.



Bài 113. (Lớp 9) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AH là đường cao. Lấy điểm M nằm giữa hai điểm A và H. Trên các đoạn MC, MB lần lượt lấy các điểm E, F sao

cho $BE = BA$, $CF = CA$. Gọi I là giao điểm của BE và CF . K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (BHF) và (CHE) . Chứng minh rằng: I, H, K thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $BP \perp CM$ tại P ; BP cắt HA tại S ; BM cắt SC tại Q . Gọi O là tâm của đường tròn (BHF) , IH cắt đường tròn (BHF) tại điểm thứ hai là G .

$\triangle SBC$ có:

SH là đường cao ($AH \perp BC$, $A \in SH$)

CP là đường cao ($CP \perp SB$)

SH cắt CP tại M

Do đó M là trực tâm của $\triangle SBC \Rightarrow BM \perp SC$ tại Q

$\triangle BHS$ và $\triangle BPC$ có: $\widehat{HBS} = \widehat{PBC}$ (góc chung)

$$\widehat{BHS} = \widehat{BPC} (= 90^\circ)$$

Do đó $\triangle BHS \sim \triangle BPC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{BP} = \frac{BS}{BC} \Rightarrow BH \cdot BC = BP \cdot BS$$

$\triangle BAC$ vuông tại A có AH là đường cao

$$\Rightarrow BA^2 = BH \cdot BC \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$$

$$\Rightarrow BE^2 = BH \cdot BC \text{ (BA = BE), mà BH} \cdot BC = BP \cdot BS$$

$$\text{nên } BE^2 = BP \cdot BS$$

$$\triangle BES \text{ và } \triangle BPE \text{ có: } \widehat{EBS} = \widehat{PBE} \text{ (góc chung), } \frac{BE}{BP} = \frac{BS}{BE} \text{ (BE}^2 = BP \cdot BS)$$

Do đó $\triangle BES \sim \triangle BPE$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BES} = \widehat{BPE}, \text{ mà } \widehat{BPE} = 90^\circ \text{ (CP} \perp \text{SB, E} \in \text{CP)} \text{ nên } \widehat{BES} = 90^\circ \Rightarrow \triangle BES \text{ vuông tại E}$$

$\triangle BES$ vuông tại E có EP là đường cao

$$\Rightarrow SE^2 = SP \cdot SB \quad (1) \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } SF^2 = SQ \cdot SC \quad (2)$$

$$\triangle SPC \text{ và } \triangle SQB \text{ có: } \widehat{PSC} = \widehat{QSB} \text{ (góc chung), } \widehat{SPC} = \widehat{SQB} (= 90^\circ)$$

$$\text{Do đó } \triangle SPC \sim \triangle SQB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{SP}{SQ} = \frac{SC}{SB} \Rightarrow SP \cdot SB = SQ \cdot SC \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3), ta có } SE^2 = SF^2 \Rightarrow SE = SF$$

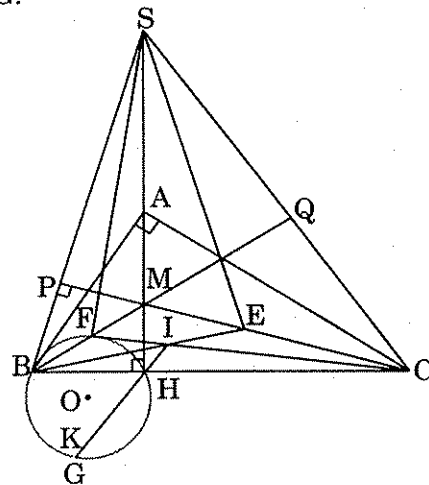
$\triangle IES$ vuông tại E và $\triangle IFS$ vuông tại F có: IS là cạnh huyền chung, $SE = SF$

$$\text{Do đó } \triangle IES = \triangle IFS \text{ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)} \Rightarrow IE = IF$$

$$\triangle BEH \text{ và } \triangle BCE \text{ có: } \widehat{EBH} = \widehat{CBE} \text{ (góc chung), } \frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BE} \text{ (BE}^2 = BH \cdot BC)$$

$$\text{Do đó } \triangle BEH \sim \triangle BCE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{BCE}$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } \widehat{CFH} = \widehat{CBF}$$



Mà $\widehat{CBF} = \widehat{IGF}$ ($= \frac{1}{2} \text{sđHF}$ của (O)) nên $\widehat{CFH} = \widehat{IGF}$

$\triangle IFH$ và $\triangle IGF$ có: $\widehat{FIH} = \widehat{GIF}$ (góc chung), $\widehat{IFH} = \widehat{IGF}$ ($\widehat{CFH} = \widehat{IGF}$, $I \in CF$)

$\triangle IFH \sim \triangle IGF$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IF}{IG} = \frac{IH}{IF} \Rightarrow IF^2 = IG.IH$$

$$\Rightarrow IE^2 = IG.IH \quad (IF = IE)$$

$\triangle IEH$ và $\triangle IGE$ có: $\widehat{EIH} = \widehat{GIE}$ (góc chung), $\frac{IE}{IG} = \frac{IH}{IE}$ ($IE^2 = IG.IH$)

Do đó $\triangle IEH \sim \triangle IGE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IGE}$, mà $\widehat{IEH} = \widehat{HCE}$ ($\widehat{BEH} = \widehat{BCE}$, $I \in BE$, $H \in BC$) nên $\widehat{IGE} = \widehat{HCE}$

Hay $\widehat{HGE} = \widehat{HCE}$ ($H \in IG$)

$\Rightarrow$ Tứ giác ECGH nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow$ (CHE) đi qua G, mà $G \in (BHF)$ (cách vẽ) nên G là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (BHF) và (CHE)

Do đó $G = K$

Vậy I, H, K thẳng hàng

* **Nhận xét:** Kỹ thuật vẽ điểm S là quan trọng, giúp chúng ta chứng minh được $IE = IF$. Mặt khác việc nhìn ra được $\widehat{BEH} = \widehat{BCE}$ và $\widehat{CFH} = \widehat{CBF}$ đã giúp chúng ta có $G = K$. Đây chính là chìa khóa của lời giải.

Bài 114. (Lớp 9) Từ T ở ngoài đường tròn tâm O vẽ hai tiếp tuyến TA, SB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Lấy C thuộc cung lớn AB của (O) (C khác A và B). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên các đường thẳng AB, TA, TB. OT cắt AB tại M, AC cắt IH tại E, BC cắt KH tại F. Gọi N là giao điểm thứ hai của các đường tròn (ICE) và (KCF). Chứng minh M, N, C thẳng hàng.

Lời giải

Chứng minh được: các tứ giác AHCI, CHBH và CEHF nội tiếp:

- $EF \parallel AB$ và CM đi qua trung điểm của EF
- Gọi S là giao điểm của CN và EF
- Chứng minh được:

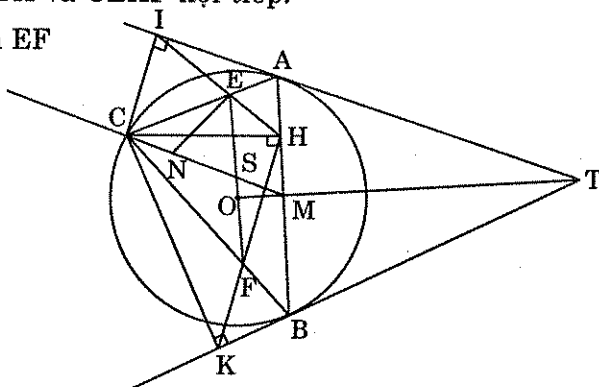
$$SE^2 = SN.SC \text{ và } SF^2 = SN.SC$$

$\Rightarrow$ S là trung điểm của EF

Do đó CN cũng đi qua trung điểm của EF

Nên: M, S, N, C thẳng hàng

Vậy M, N, C thẳng hàng.



Bài 115. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$) có AH là đường cao. Đường tròn (O; R) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Gọi E là trung điểm của AH, tia DE cắt (O) tại F. L là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc F của tam giác BFC. Chứng minh rằng: F, D, L thẳng hàng.

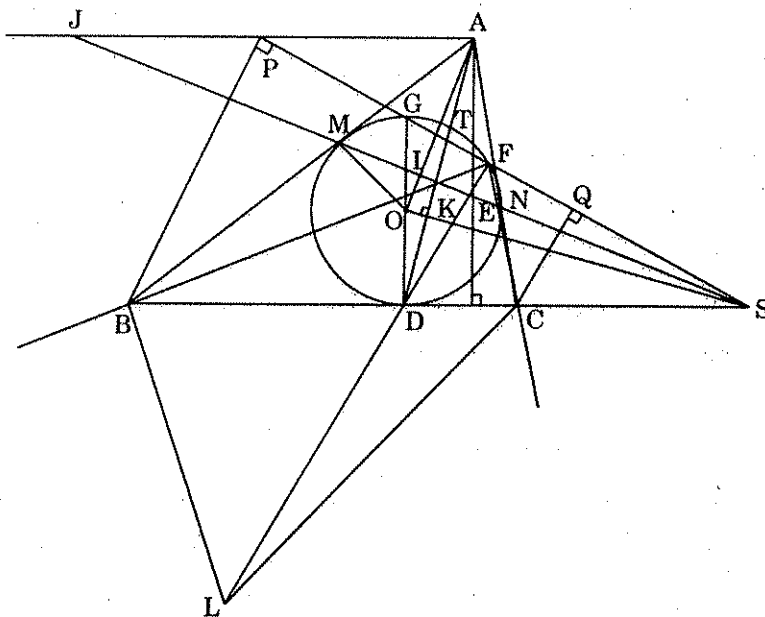
Lời giải

Gọi M, N lần lượt là các tiếp điểm của (O) trên các cạnh AB, AC; AD cắt đường tròn (O) tại T ($T \neq D$); DO cắt đường tròn (O) tại G ($G \neq D$). Vẽ $OK \perp DT$ tại K, OK cắt BC tại S.

Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt MN tại J, $BP \perp GF$ tại P, $CQ \perp GF$ tại Q và I là giao điểm của OA với MN.

Dễ dàng chứng minh được OA là đường trung trực của MN

$\Rightarrow MN \perp OA$ tại I.



Ta có: $OK \perp DT$ tại K $\Rightarrow$ K là trung điểm của DT

$\triangle ODS$ vuông tại D có DK là đường cao $\Rightarrow OD^2 = OK.OS$

$\triangle OMA$ vuông tại M có MI là đường cao $\Rightarrow OM^2 = OI.OA$

Mà $OD^2 = OM^2 (= R^2)$ nên $OK.OS = OI.OA$

$\triangle OIS \sim \triangle OKA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OIS} = \widehat{OKA} = 90^\circ$

Do đó IS và MN cùng vuông góc với OA tại I nên IS $\equiv$ MN $\Rightarrow$ M, N, S thẳng hàng

Có $DG \parallel AH$ ($\perp BC$), $\widehat{DGT} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O))

$\triangle DTG$ và $\triangle AHD$ có: $\widehat{DTG} = \widehat{AHD} (= 90^\circ)$

và $\widehat{GDT} = \widehat{DAH}$ (so le trong và $DG \parallel AH$) nên $\triangle DTG \sim \triangle AHD$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{TG}{HD} = \frac{TD}{HA} = \frac{2TK}{2HE} = \frac{TK}{HE} \Rightarrow \triangle GKT \sim \triangle DEH$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{GKT} = \widehat{DEH}$, mà $\widehat{GKT} + \widehat{OKG} = 90^\circ$ ($OK \perp DT$ tại K)

và $\widehat{DEH} + \widehat{EDH} = 90^\circ$ ($AH \perp BC$ tại H)

nên $\widehat{OKG} = \widehat{EDH}$

Mặt khác $\widehat{EDH} = \widehat{OGF}$ (hệ quả về số đo góc nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{OKG} = \widehat{OGF}$

Có $OK \cdot OS = OD^2$ và $OD = OG (= R)$ nên $\triangle OKG \sim \triangle OGS$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{OKG} = \widehat{OGS}$

Do đó $\widehat{OGF} = \widehat{OGS} \Rightarrow GF = GS$

$\Rightarrow G, F, S$ thẳng hàng $\Rightarrow BP \parallel DF \parallel CQ (\perp GF)$

Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét và định lí Ta-lét và tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$$\frac{BP}{CQ} = \frac{BS}{CS} = \frac{BS}{AJ} \cdot \frac{AJ}{CS} = \frac{BM}{AM} \cdot \frac{AN}{CN} = \frac{BM}{CN} = \frac{BD}{CD} = \frac{PF}{QF}$$

Có $\frac{BP}{CQ} = \frac{PF}{QF}$ và $\widehat{BPF} = \widehat{CQF} (= 90^\circ)$

$\Rightarrow \triangle BPF \sim \triangle CQF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BFP} = \widehat{CFQ}$

Mà $\widehat{BFP} + \widehat{BFD} = \widehat{CFQ} + \widehat{CFD} (= 90^\circ)$

nên $\widehat{BFD} = \widehat{CFD} \Rightarrow FD$ là tia phân giác của góc BFC.

Mặt khác FL cũng là tia phân giác của góc BFC (vì L là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc F của $\triangle BFC$) nên tia FD trùng với tia FL.

Vậy F, D, L thẳng hàng.

Bài 116. (Lớp 9) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). M bất kỳ trên cung AB không chứa điểm C. Đường thẳng AM cắt tiếp tuyến tại B; tiếp tuyến tại C của (O) và đường thẳng BC lần lượt ở E; F; H. Chứng minh rằng giao điểm của các đường tròn (MAO); (MBF); (MCF) và O, H là ba điểm thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1

Gọi N là giao điểm của BF và CE

Kéo dài MN cắt BC tại S

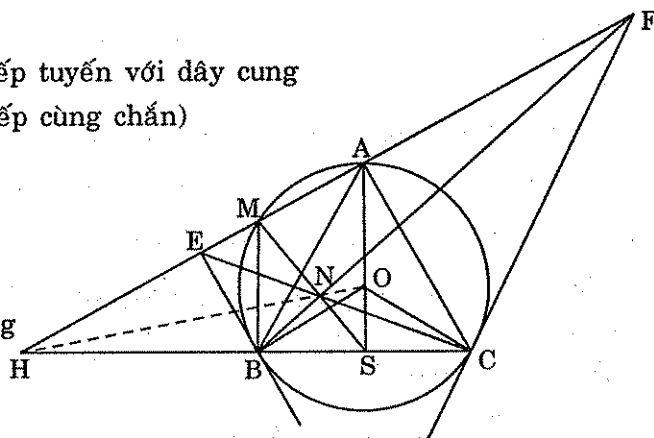
Ta có: $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{ABE} = \widehat{ACB} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến với dây cung} \\ \text{với góc nội tiếp cùng chắn)} \\ \widehat{AB} \text{ của đường tròn (O))} \\ \widehat{ACB} = \widehat{BAC} \text{ (}\triangle ABC \text{ đều)} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{BAC}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong

nên $BE \parallel AC$

Mặt khác:



$$\widehat{EBC} = \widehat{ABE} + \widehat{ABC} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 120^\circ \text{ (}\triangle ABC \text{ đều)}$$

$$\text{Lập luận tương tự, ta cũng có: } \begin{cases} CF \parallel AB \\ \widehat{BCF} = 120^\circ \end{cases}$$

$$\text{Xét } \triangle ABE \text{ và } \triangle FCA, \text{ ta có: } \begin{cases} \widehat{BAE} = \widehat{CFA} \text{ (hai góc đồng vị và } AB \parallel CF) \\ \widehat{BEA} = \widehat{CAF} \text{ (hai góc đồng vị và } BE \parallel AC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle FCA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CF} = \frac{BE}{AC} \Rightarrow AB.AC = BE.CF \Rightarrow BC^2 = BE.CF \text{ (vì } AB = AC = BC) \Rightarrow \frac{BC}{CF} = \frac{BE}{BC}$$

$$\text{Xét } \triangle EBC \text{ và } \triangle BCF, \text{ ta có: } \begin{cases} \widehat{EBC} = \widehat{BCF} (= 120^\circ) \\ \frac{BC}{CF} = \frac{BE}{BC} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle EBC \sim \triangle BCF \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{FBC} \text{ hay } \widehat{NBC} = \widehat{CEB}$$

$$\text{Xét } \triangle CBN \text{ và } \triangle CEB, \text{ ta có: } \begin{cases} \widehat{BCN} = \widehat{ECB} \text{ (góc chung)} \\ \widehat{CBN} = \widehat{CEB} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle CBN \sim \triangle CEB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{EBC} \Rightarrow \widehat{BNC} = 120^\circ \text{ (vì } \widehat{EBC} = 120^\circ)$$

$$\text{Mà } \widehat{BNE} + \widehat{BNC} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù) nên } \widehat{BNE} = 180^\circ - \widehat{BNC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{BME} = \widehat{ACB} = 60^\circ \text{ (tứ giác AMBC nội tiếp). Do đó } \widehat{BNE} = \widehat{BME} (= 60^\circ)$$

Suy ra tứ giác BEMN nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau)

Chứng minh tương tự, ta có: tứ giác CFMN nội tiếp

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \widehat{NBS} = \widehat{NEB} \text{ (vì } \widehat{NBC} = \widehat{CEB}) \\ \widehat{NEB} = \widehat{NMB} \text{ (tứ giác BEMN nội tiếp)} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{NBS} = \widehat{NMB} \text{ hay } \widehat{SBN} = \widehat{SMB}$$

$$\text{Xét } \triangle SBN \text{ và } \triangle SMB, \text{ ta có: } \begin{cases} \widehat{BSN} = \widehat{MSB} \text{ (góc chung)} \\ \widehat{SBN} = \widehat{SMB} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle SBN \sim \triangle SMB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{SB}{SM} = \frac{SN}{SB} \Rightarrow SB^2 = SM.SN$$

$$\text{Tương tự, ta cũng có: } SC^2 = SM.SN$$

$$\text{Do vậy } SB^2 = SC^2 \Rightarrow SB = SC \Rightarrow S \text{ là trung điểm của BC}$$

$$\text{Dễ dàng chứng minh được: với } \triangle ABC \text{ đều nội tiếp (O; R) thì } AB = BC = AC = R\sqrt{3}$$

ΔOBC cân ở O (vì $OB = OC$) có OS là đường trung tuyến (S là trung điểm của BC) nên OS cũng là tia phân giác của $\widehat{BOC}$ và cũng là đường cao của ΔOBC

$$\Rightarrow \widehat{SOB} = \widehat{SOC} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = \widehat{BAC} = 60^\circ \text{ (quan hệ ở tâm; góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{BC} \text{ của } (O))$$

$$\Delta SOB \text{ vuông ở } S \Rightarrow SO = OB \cdot \cos \widehat{SOB} = R \cdot \cos 60^\circ = \frac{R}{2}$$

$$\Delta SAB \text{ vuông ở } S \Rightarrow SA = AB \cdot \sin \widehat{ABS} = R\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = R\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$\text{Lúc đó } \begin{cases} SB^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4} \\ SO \cdot SA = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} \end{cases} \Rightarrow SB^2 = SO \cdot SA$$

$$\text{Mà } SB^2 = SM \cdot SN \text{ nên } SM \cdot SN = SO \cdot SA \Rightarrow \frac{SN}{SA} = \frac{SO}{SM}$$

$$\text{Xét } \Delta SON \sim \Delta SMA; \text{ có } \begin{cases} \widehat{OSN} = \widehat{MSA} \text{ (góc chung)} \\ \frac{SN}{SA} = \frac{SO}{SM} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta SON \sim \Delta SMA \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{SON} = \widehat{SMA}$$

Suy ra tứ giác $AONM$ nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong đối diện)

Mặt khác tứ giác $BNOC$ có $\widehat{BNC} = \widehat{BOC} (= 120^\circ)$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau)

Gọi N_1 là giao điểm của OH và đường tròn (OBC)

N_2 là giao điểm của DH và đường tròn (OAM)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} HN_1 \cdot HO = HB \cdot HC \text{ (vì tứ giác } BN_1OC \text{ nội tiếp)} \\ HN_2 \cdot HO = HM \cdot HA \text{ (vì tứ giác } AON_2M \text{ nội tiếp)} \end{cases}$$

Mà $HB \cdot HC = HM \cdot HA$ (vì tứ giác AON_2M nội tiếp)

$$\text{nên } HN_1 \cdot HO = HN_2 \cdot HO \Rightarrow HN_1 = HN_2 \Rightarrow N_1 = N_2$$

Lúc đó $N_1 = N_2$ là giao điểm của đường tròn (OAM) và (OBC)

Mà N cũng là giao điểm của đường tròn (OAM) và (OBC) (vì các tứ giác $AONM$; $BNOC$ nội tiếp). Do vậy $N = N_1 = N_2$

Mà N_1 nằm trên OH nên N cũng nằm trên OH

$$\text{Ta có: } \begin{cases} N \in (MAO) \text{ (vì tứ giác } AONM \text{ nội tiếp)} \\ N \in (MBE) \text{ (vì tứ giác } BEMN \text{ nội tiếp)} \\ N \in (MCF) \text{ (vì tứ giác } CFMN \text{ nội tiếp)} \end{cases}$$

Vậy giao điểm N của các đường tròn (MAO) ; (MBE) ; (MCF) và O, H là ba điểm thẳng hàng.

Cách 2

Gọi N là giao điểm của BF và CE

Kéo dài MN cắt BC tại S

Hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại P.

Từ P; kẻ đường thẳng song song BC cắt FB tại Q.

Giải tương tự cách 1; các cặp tam giác đồng dạng

$$\begin{cases} \triangle ABE \sim \triangle FCA \\ \triangle EBC \sim \triangle BCF \\ \triangle CBN \sim \triangle CEB \\ \triangle SBN \sim \triangle SMB \end{cases}$$

Để có S là trung điểm BC

Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BCP} = \widehat{BAC} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến} \\ \text{dây cung và góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{BC} \text{ của } (O)) \\ \widehat{BAC} = \widehat{ABC} \text{ (}\triangle ABC \text{ đều)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCP} = \widehat{ABC}$$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AB \parallel CP$

Lập luận tương tự ta có $AC \parallel BP$

Tứ giác ABPC có: $\begin{cases} AB \parallel CP \text{ nên là hình bình hành} \\ AC \parallel BP \end{cases}$

(tứ giác có hai cặp cạnh đối song song)

Mà $AB = AC$ ($\triangle ABC$ đều) nên ABPC là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề nhau)

Mặt khác S là trung điểm của BC

Do đó S cũng là trung điểm của AP $\Rightarrow A, O, S, P$ thẳng hàng

Ta có: $\begin{cases} \widehat{OBP} = 90^\circ \text{ (PB là tiếp tuyến tại B của } (O)) \\ \widehat{OCP} = 90^\circ \text{ (PC là tiếp tuyến tại C của } (O)) \end{cases}$

$\Rightarrow B, C$ cùng nằm trên đường tròn đường kính OP

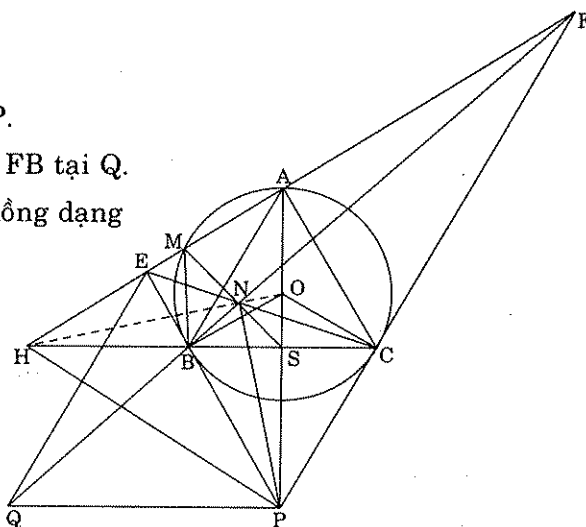
$\Rightarrow B, C, O, P$ cùng thuộc đường tròn đường kính OP

Ta có: $\begin{cases} \widehat{EPQ} = \widehat{PBC} \text{ (hai góc so le trong và } BC \parallel PQ) \\ \widehat{PBC} = \widehat{ACB} \text{ (hai góc so le trong và } AC \parallel PB) \end{cases}$

$$\Rightarrow \widehat{EPQ} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{EPQ} = 60^\circ \text{ (}\triangle ABC \text{ đều)}$$

$$\triangle FPQ \text{ có: } \begin{cases} BC \parallel PQ \\ B \in FQ; C \in FP \end{cases} \cdot \text{ Suy ra } \frac{BC}{PQ} = \frac{FC}{FP} \text{ (hệ quả định lý Ta-lét)} \quad (1)$$

$$\triangle FPE \text{ có: } \begin{cases} AC \parallel PE \\ A \in FE; C \in FP \end{cases} \cdot \text{ Suy ra } \frac{AC}{PE} = \frac{FC}{FP} \text{ (hệ quả định lý Ta-lét)} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) ta suy ra: $\frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{PE}$. Mà $BC = AC$ ($\triangle ABC$ đều) nên $PQ = PE$

Mặt khác $\widehat{EPQ} = 60^\circ$. Do vậy $\triangle EPQ$ đều (tam giác cân có một góc bằng 60°)

Ta có: $\begin{cases} \widehat{NBC} = \widehat{NQP} \text{ (cặp góc đồng vị và } BC \parallel PQ) \\ \widehat{NBC} = \widehat{NEP} \text{ (}\triangle EBC \sim \triangle BCF\text{)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \widehat{NQP} = \widehat{NEP}$$

Suy ra tứ giác $ENPQ$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau)

$$\widehat{BNP} = \widehat{QEP} \Rightarrow \widehat{BNP} = 60^\circ \text{ (vì } \widehat{EPQ} = 60^\circ \text{), mà } \widehat{BCP} = 60^\circ \text{, nên } \widehat{BNP} = \widehat{BCP}$$

Suy ra tứ giác $BNCP$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow N \in$ đường tròn (BCP)

Mà $O \in$ đường tròn (BCP) (vì tứ giác $OBPC$ nội tiếp)

Nên năm điểm $O; N; B; P; C$ cùng thuộc đường tròn đường kính OP

$$\Rightarrow \widehat{ONP} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{SNP} + \widehat{SNO} = 90^\circ$$

$\triangle HAP$ có HS là đường cao (vì $AP \perp BC$) cũng là đường trung tuyến (S là trung điểm của AP) nên $\triangle HAP$ cân ở H

$$\Rightarrow \widehat{HPS} = \widehat{HAS}, \text{ mà } \widehat{HAS} = \widehat{SNO} \text{ (tứ giác } AONM \text{ nội tiếp) nên } \widehat{HPS} = \widehat{SNO}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \widehat{SHP} + \widehat{HPS} = 90^\circ \text{ (}\triangle HSP \text{ vuông ở } S \text{ vì } AP \perp BC \text{ ở } S) \\ \widehat{SNP} + \widehat{SNO} = 90^\circ \text{ (cmt)} \\ \widehat{HPS} = \widehat{SNO} \text{ (cmt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{SHP} = \widehat{SNP}$$

Suy ra tứ giác $BNSP$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau)

$$\Rightarrow \widehat{HNP} = \widehat{HSP} \Rightarrow \widehat{HNP} = 90^\circ \text{ (vì } \widehat{HSP} = 90^\circ \text{)}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{ONH} = \widehat{ONP} + \widehat{HNP} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ONH} \text{ là góc bẹt}$$

$\Rightarrow O; N; H$ thẳng hàng

Ta có: tứ giác $BNOC$ nội tiếp (vì $B; N; O; C$ cùng thuộc đường tròn đường kính OP)

$$\Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{BOC}$$

Mà $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2.60^\circ = 120^\circ$ (quan hệ giữa góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BC}$ của (O)) nên $\widehat{BNC} = 120^\circ$

Mặt khác $\widehat{BNE} + \widehat{BNC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\text{Do đó } \widehat{BNE} = 180^\circ - \widehat{BNC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Mà $\widehat{BME} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ (tứ giác $AMBC$ nội tiếp) nên $\widehat{BNE} = \widehat{BME}$

Suy ra: tứ giác BEMN nội tiếp. Tương tự: tứ giác CFMN nội tiếp

Ta có:
$$\begin{cases} N \in (MAO) \text{ (vì tứ giác AONM nội tiếp)} \\ N \in (MBE) \text{ (vì tứ giác BEMN nội tiếp)} \\ N \in (MCF) \text{ (vì tứ giác CFMN nội tiếp)} \\ N \in OH \text{ (vì O, N, H thẳng hàng)} \end{cases}$$

Vậy giao điểm N của các đường tròn (MAO); (MBE); (MCF) và O, H là ba điểm thẳng hàng.

Bài 117. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có AD là đường cao. MN là đường kính của đường tròn (O) và vuông góc với BC (N thuộc cung nhỏ BC). MD và ND cắt đường tròn (O) lần lượt tại P và Q. Gọi H, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác PDQ và MDN, I là trung điểm của OD. Chứng minh rằng: H, I, K thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1:

Gọi L là giao điểm của MQ và BC.

Ta có: $\widehat{MQN} = \widehat{MPN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó D là trực tâm của tam giác LMN và L, P, N thẳng hàng

Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp đường tròn ngoại tiếp tam giác LMN.

Để chứng minh được O là trung điểm O'K, $O'O = \frac{1}{2}LD$

Ta có: $\widehat{PLD} = \widehat{PMN}$ (cùng phụ với góc PNM),

$$\widehat{PMN} = \widehat{PQD}$$

Nên: $\widehat{PLD} = \widehat{PQD} \Rightarrow$ Tứ giác LQDP nội tiếp

Ta có: L, Q, D, P cùng thuộc một đường tròn.

Mà: $\widehat{LPD} = 90^\circ$. Do đó H là trung điểm của LD

Ta có HI là đường trung bình của tam giác DLO

$$\Rightarrow HI \parallel LO \quad (1)$$

Ta có: $OK = O'O$, $O'O = \frac{1}{2}LD$, $LH = \frac{1}{2}LD$. Nên $OK = LH$

Mặt khác $OK \perp MN$, $LH \perp MN \Rightarrow OK \parallel LH$

$OK \parallel LH$, $OK = LH \Rightarrow$ Tứ giác LOKH là hình bình hành

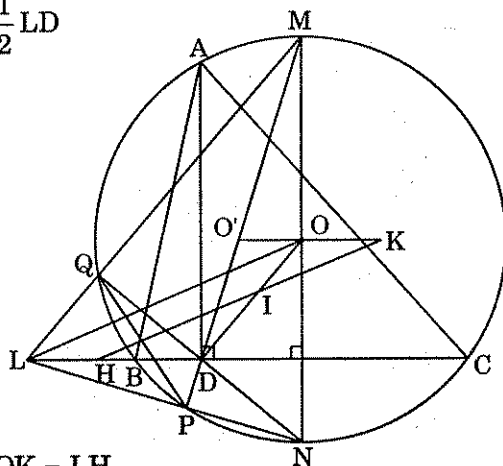
$$\Rightarrow HK \parallel LO \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có HI, HK trùng nhau.

Vậy ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Cách 2:

Gọi L là giao điểm của MQ và BC. Vẽ đường kính QS của đường tròn (O). Đường thẳng vuông góc với MP tại M cắt NS tại T. Ta có: $\widehat{QNS} = 90^\circ$ và có $\widehat{MQN} = \widehat{MPN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)



Do đó D là trực tâm của tam giác LMN và L, P, N thẳng hàng

Ta có: $LM \parallel NT$, $MT \parallel LN$

$\Rightarrow$ Tứ giác LMTN là hình bình

Mà O là trung điểm của MN

nên O là trung điểm của LT

Ta có: $\widehat{LQD} = \widehat{LPD} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác LQDP nội tiếp

$\Rightarrow$ H là trung điểm của LD.

Và: $\widehat{DMT} = \widehat{DNT} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác DMTN nội tiếp

$\Rightarrow$ K là trung điểm của TD.

Do đó HI là đường trung bình của tam giác DLO

$\Rightarrow HI \parallel LO$

Và HK là đường trung bình của tam giác DLT.

$\Rightarrow HK \parallel LO$. Do đó HI, HK trùng nhau.

Vậy ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Cách 3:

Có $AD \parallel MN$ (cùng $\perp BC$)

$\Rightarrow \widehat{ADQ} = \widehat{MND}$ (đồng vị)

$$\text{Mà: } \begin{cases} \widehat{MND} = \widehat{MPQ} \left(= \frac{1}{2} \widehat{MQM} \text{ của } (O) \right) \\ \widehat{MPQ} = \frac{1}{2} \widehat{DHQ} \left(= \frac{1}{2} \widehat{MDQ} \text{ của } (H) \right) \end{cases} \quad \text{nên } \widehat{ADQ} = \frac{1}{2} \widehat{DHQ}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADQ} + \widehat{QDH} = \frac{1}{2} \widehat{DHQ} + \widehat{QDH}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADH} = 90^\circ \text{ (}\triangle QDH \text{ cân tại H)}$$

$$\Rightarrow HD \perp AD \text{ tại D}$$

Mà $BC \perp AD$ tại D (gt) nên $HD \equiv BC \Rightarrow HD \perp AD$

Có MN là dây chung của hai đường tròn (O) và (K)

$\Rightarrow OK \perp MN$, mà $AD \parallel MN$ nên $OK \perp AD$

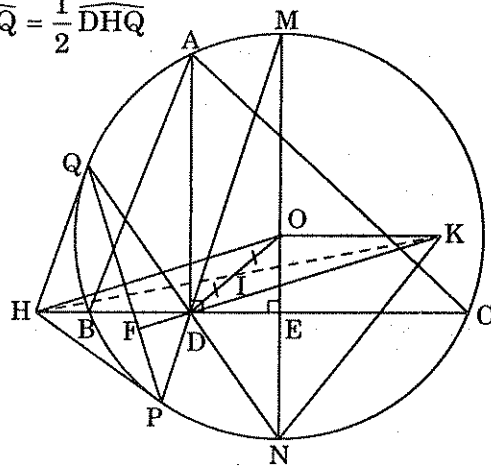
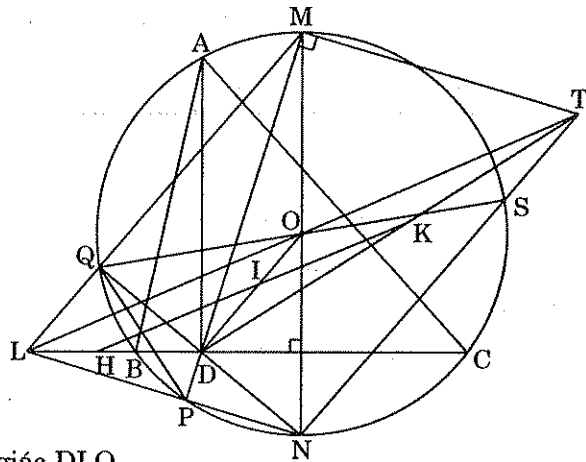
Do đó: $HD \parallel OK$ (cùng $\perp AD$) (1)

Gọi E là giao điểm của MN và BC, F là giao điểm của DK và PQ

Để chứng minh $\triangle PDH$ cân tại H, $\triangle NDK$ cân tại K, $\widehat{PHD} = 2\widehat{PQD}$, $\widehat{NKD} = 2\widehat{NMD}$

Mà: $\widehat{PQD} = \widehat{NMD}$ ($= \frac{1}{2} \widehat{PNP}$ của (O)), nên $\widehat{PHD} = \widehat{NKD}$

Do đó: $\triangle PDH \sim \triangle NDK \Rightarrow \widehat{PDH} = \widehat{NDK}$



Mà: $\widehat{PDQ} = \widehat{NDM}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{PDQ} - \widehat{PDH} = \widehat{NDM} - \widehat{NDK}$

$\Rightarrow \widehat{HDQ} = \widehat{KDM}$, mà $\widehat{HDQ} = \widehat{EDN}$, $\widehat{KDM} = \widehat{FDP}$ (đối đỉnh)

Nên: $\widehat{EDN} = \widehat{FDP}$. Do đó $\triangle EDN \sim \triangle FDP$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{DEN} = \widehat{DFP} \Rightarrow \widehat{DFP} = 90^\circ \Rightarrow KD \perp PQ$ tại F

Mà $OH \perp PQ$ (PQ là dây chung của hai đường tròn (O) và (H)), nên $KD \parallel OH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác OHDK là hình bình hành.

Mà, I là trung điểm của OD (gt) nên I cũng là trung điểm của HK.

Vậy H, I, K thẳng hàng.

Áp dụng lời giải của cách 3, chúng ta có thể giải được bài toán tổng quát sau đây

Cho đường tròn (O) có hai dây cung MP và NQ cắt nhau tại D (D khác O). Gọi H, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác PDQ và MDN, I là trung điểm của OD.

Chứng minh rằng H, I, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi E là giao điểm của MN và HD, F là giao điểm của KD và PQ.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \widehat{END} = \widehat{DPQ} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{QM} \text{ của (O)} \right) \\ \widehat{DPQ} = \frac{1}{2} \widehat{DHQ} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{DQ} \text{ của (H)} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{END} = \frac{1}{2} \widehat{DHQ}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} \widehat{EDN} = \widehat{HDQ} \text{ (đối đỉnh)} \\ \frac{1}{2} \widehat{DHQ} + \widehat{HDQ} = 90^\circ \text{ (}\triangle HDQ \text{ cân ở H)} \end{cases}$$

Nên: $\widehat{END} + \widehat{EDN} = 90^\circ \Rightarrow \triangle NDE$ vuông tại E

$\Rightarrow HD \perp MN$

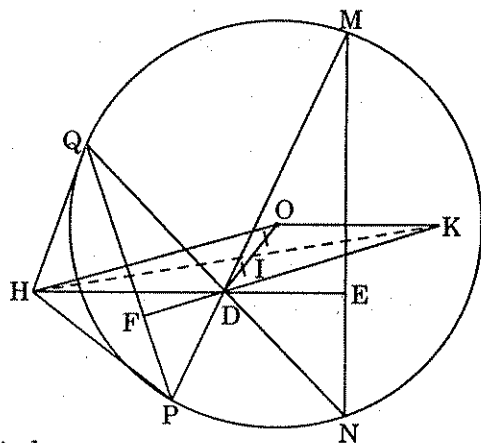
Chứng minh tương tự như cách 3, ta có:

$OK \perp MN, OH \perp PQ, KD \perp PQ$

$\Rightarrow \begin{cases} HD \parallel OK \\ OH \parallel KD \end{cases}$. Do đó tứ giác OHDK là hình bình hành

Mà I là trung điểm của OD, nên I cũng là trung điểm của HK.

Vậy H, I, K thẳng hàng.



Bài 118. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. C là điểm trên (O) sao cho $BC > AC$. Vẽ CH vuông góc với AB tại H, HM vuông góc với AC tại M. Đường thẳng qua O song song với BC cắt tia tiếp tuyến tại A của (O) tại E. Đường thẳng qua O vuông góc với AB cắt BC tại D. BE cắt AC tại I. Các tiếp tuyến tại O, D của đường tròn ngoại tiếp tam giác OBD cắt nhau tại G. Đường thẳng qua B vuông góc với IH cắt CH tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt CH tại K (K khác N). Chứng minh rằng: B, G, K thẳng hàng.

Cách 1: Gọi F là giao điểm của OE và AC, S là giao điểm của AE và BC.

Dễ chứng minh E, F lần lượt là trung điểm AS, AC.

ΔAHI và ΔCNB , có:

$\widehat{HAI} = \widehat{NCB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$), $\widehat{AHI} = \widehat{CNB}$ (vì phụ với hai góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \Delta \text{AHI} \sim \Delta \text{CNB (g.g)} \Rightarrow \frac{\text{AI}}{\text{CB}} = \frac{\text{AH}}{\text{CN}} \quad (1)$$

Ta có:
$$\begin{cases} CK.CN = CM.CA \text{ (tứ giác AMKN nội tiếp)} \\ CM.CA = CH^2 \text{ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)} \\ CH^2 = AH.BH \end{cases}$$

$$\Rightarrow CK.CN = AH.BH \Rightarrow \frac{AH}{CN} = \frac{CK}{BH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AI}{CB} = \frac{CK}{BH} \Rightarrow \frac{BH}{CB} = \frac{CK}{AI}$

Có $CB^2 = BH \cdot AB$ ($\triangle ABC$ vuông tại C có CH là đường cao)

$$\Rightarrow \frac{BH}{CB} = \frac{CB}{AB}. \text{ Do đó: } \frac{CK}{AI} = \frac{CB}{AB} \left(= \frac{BH}{CB} \right), \text{ mà}$$

$$\widehat{KCB} = \widehat{IAB} \text{ (cùng phụ với } \widehat{ABC} \text{)}$$

nên $\Delta CBK \sim \Delta ABI$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{ABI} \Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{ABE} \quad (3)$$

Ta có: $\triangle BCA \simeq \triangle BAS$ (g.g)

Mà E, F lần lượt là trung điểm của AS, AC

$$\text{nên } \triangle BCF \simeq \triangle BAE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{CBF} = \widehat{ABE} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{CBK} = \widehat{CBF}$

$\Rightarrow$ Tia BK trùng với tia BF

$$\Rightarrow B, K, E \text{ thẳng hàng} \quad (5)$$

$$\text{Ta có: } \Delta ODG \sim \Delta HCF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DG}{CF} = \frac{OD}{HC}$$

$$\Delta BOD \approx \Delta BHC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OD}{HC} = \frac{BD}{BC}$$

Do đó $\left(\frac{OD}{HC} = \right) \frac{DG}{CF} = \frac{BD}{BC}$, mà $\widehat{GDB} = \widehat{FCB}$ ($= 90^\circ$). Nên: $\triangle DGB \sim \triangle CFB$ (c.g.c)

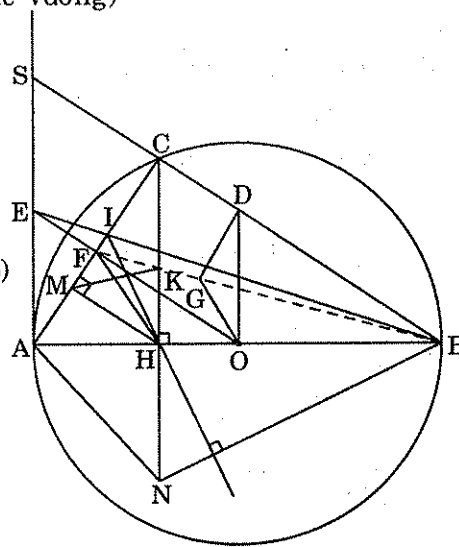
$$\Rightarrow \widehat{DBG} = \widehat{CBF} \Rightarrow \widehat{CBG} = \widehat{CBF}$$

$\Rightarrow$ Tia BG trùng với tia BF

$$\Rightarrow B, G, F \text{ thẳng hàng} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra, B, G, K, F thẳng hàng.

Vây B, G, K thẳng hàng.



Cách 2:

Gọi F là giao điểm của OE và AC, S, là giao điểm của AE và BC, V là giao điểm của DG và AB. Hx là tia đối của tia HI

Ta có: OE // BC, O là trung điểm của AB nên E, F lần lượt là trung điểm của A, AC.

Dễ chứng minh được G là trung điểm của DV.

B, G, F thẳng hàng (1)

Xét $\triangle AHI$ và $\triangle CNB$ có:

$$\widehat{HAI} = \widehat{NCB} \text{ (cùng phụ với góc } \angle ABC),$$

$$\widehat{AHI} = \widehat{CNB} \text{ (cùng phụ với góc } \angle NHx)$$

$$\text{Do đó } \triangle AHI \sim \triangle CNB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AI}{BC} = \frac{AH}{CN}$$

$$\triangle CMK \sim \triangle CAN \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{CN} = \frac{CK}{CA} \Rightarrow CK \cdot CN = CM \cdot CA$$

$\triangle ABC$ vuông tại C, CH là đường cao

$$\Rightarrow AH \cdot BH = CH^2 \text{ và } BC^2 = BH \cdot AB$$

$\triangle HAC$ vuông tại H, HM là đường cao $\Rightarrow CM \cdot CA = CH^2$

$$\text{Ta có: } CK \cdot CN = AH \cdot BH \Rightarrow \frac{AH}{CN} = \frac{CK}{BH}$$

$$\text{Do đó: } \frac{AI}{BC} = \frac{CK}{BH} \left(= \frac{AH}{CN} \right) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{CK}{AI}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BH}{BC} \text{ (vì } BC^2 = BH \cdot AB). \text{ Nên: } \frac{CK}{AI} = \frac{BC}{AB}$$

$$\triangle CBK \sim \triangle ABI \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{ABI} \Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{ABE}$$

$$\text{Mà } \triangle BCA \sim \triangle BAS \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{AS} \Rightarrow \frac{BC}{BA} = \frac{CF}{AE} \text{ (vì } CF = \frac{AC}{2}; AE = \frac{AS}{2})$$

$$\text{Do đó } \triangle BCF \sim \triangle BAE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{CBF} = \widehat{ABE}. \text{ Ta có: } \widehat{CBF} = \widehat{CBK} \text{ (} \widehat{ABE} \text{)}$$

$$\Rightarrow \text{Hai tia BK, BF trùng nhau} \Rightarrow B, K, F \text{ thẳng hàng} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có B, G, F, K thẳng hàng

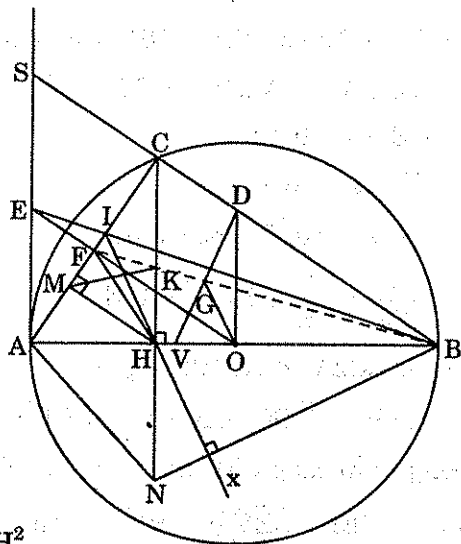
Vậy ba điểm B, G, K thẳng hàng.

Bài 119. Cho tam giác ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính BC. Gọi E là điểm đối xứng của B qua A. Từ E, vẽ tiếp tuyến EM với (O) (M là tiếp điểm thuộc cung nhỏ AB). Tiếp tuyến tại B của (O) cắt tia CM tại V, tia CA cắt tia BM tại I. Chứng minh rằng ba điểm V, I, E thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} = 90^\circ$ (các góc nội tiếp chắn nửa (O), đường kính BC)

$\Rightarrow BM \perp VC$ tại M và $IC \perp BE$ tại A.



ΔVBC vuông tại B (và VB là tiếp tuyến tại B của (O)) có BM là đường cao

$\Rightarrow CB^2 = CM.CV$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Ta có: $IC \perp BE$ tại A và A là trung điểm của BE (E đối xứng với B qua A)

$\Rightarrow IC$ là đường trung trực của BE

$\Rightarrow$ Hai điểm E và B đối xứng nhau qua IC

$\Rightarrow CE = CB$ và $\widehat{CEI} = \widehat{CBI}$ (tính chất đối xứng trục)

Ta có: $CB^2 = CM.CV$ và $CB = CE$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow CE^2 = CM.CV$

ΔCEV và ΔCME có:

$\widehat{ECV} = \widehat{MCE}$ (góc chung)

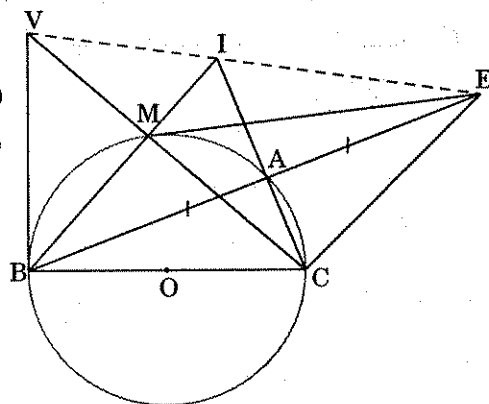
$$\frac{CE}{CM} = \frac{CV}{CE} \quad (\text{vì } CE^2 = CM.CV)$$

Do đó $\Delta CEV \sim \Delta CME$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{CEV} = \widehat{CME}$, mà $\widehat{CME} = \widehat{CBE}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn cung CM của (O)) nên $\widehat{CEV} = \widehat{CBM}$ hay $\widehat{CEV} = \widehat{CBI}$ ($M \in BI$)

Do đó $\widehat{CEI} = \widehat{CEV} (= \widehat{CBI}) \Rightarrow$ Tia EI = tia EV

Vậy ba điểm V, I, E thẳng hàng.



Bài 120. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên đường tròn (O) lấy điểm M (M khác A và B). J là điểm nằm giữa A và B. Kẻ JH vuông góc với AM tại H. Phân giác trong của góc MAB cắt đường tròn (O) tại S và cắt JH tại N. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C. Chứng minh rằng S, J, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O), đường kính AB)

$\Rightarrow BM \perp AM$, mà $JH \perp AM$ (gt) nên $BM \parallel JH$

$\Rightarrow \widehat{AJH} = \widehat{ABM}$ (hai góc đồng vị),

mà $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM của (O)), nên $\widehat{AJH} = \widehat{ACM}$ hay

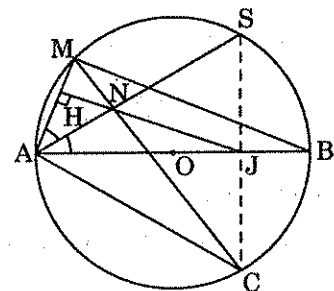
$\widehat{AJN} = \widehat{ACN}$ (N là giao điểm của JH và MC).

$\Rightarrow$ Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{MCJ} = \widehat{NAB}$, mà $\widehat{NAB} = \widehat{MAN}$ (AS là phân giác trong của góc MAB) và $\widehat{MAN} = \widehat{MCS}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MS của (O)) nên $\widehat{MCJ} = \widehat{MCS}$

$\Rightarrow$ Tia CJ = tia CS.

Vậy ba điểm S, J, C thẳng hàng.



Bài 121. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên đường tròn (O) lấy điểm K (K khác A và B). E là điểm nằm giữa A và B. Kẻ EH vuông góc với AK tại H. Phân giác trong của góc KAB cắt EH tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I. Đường thẳng IE cắt đường

$\Rightarrow \widehat{BM\dot{Y}} = \widehat{HAY}$, mà $\widehat{HAY} = \widehat{BAS}$ (AS là phân giác trong của góc BAC) và $\widehat{BAS} = \widehat{BMS}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BS của (O)), nên $\widehat{BM\dot{Y}} = \widehat{BMS} \Rightarrow$ Tia MY = tia MS
 Vậy ba điểm S, Y, M thẳng hàng.

* **Nhận xét:** giải pháp vẽ thêm tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn (O), và (K) là tối ưu, thao tác này giúp chúng ta chứng minh được: $\widehat{ATX} = \widehat{ACB}$ và tứ giác AHYM nội tiếp. Đây phải chăng là điểm then chốt của lời giải bài toán!

Bài 123. Cho hai đường tròn (O; R) và (I; r) tiếp xúc trong tại A. Qua A, vẽ hai cát tuyến chung ADB và AEC không qua điểm (o) ($B, C \in (O)$; $D, E \in (I)$). Phân giác trong của góc BAC cắt đường tròn tâm O tại S (S khác A) và cắt DE tại U. Đường thẳng SE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M. Chứng minh rằng ba điểm B, U, M thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ Ax là tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn (O) và (I)
 Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng SB và ED

Ta có:
$$\begin{cases} \widehat{xAB} = \widehat{AED} \left(\frac{1}{2} \text{sđAD của (I)} \right) \\ \widehat{xAB} = \widehat{ACB} \left(= \frac{1}{2} \text{sđAB của (O)} \right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ACB}$, mà $\widehat{ACB} = \widehat{ASB} \left(= \frac{1}{2} \text{sđAB của (O)} \right)$,

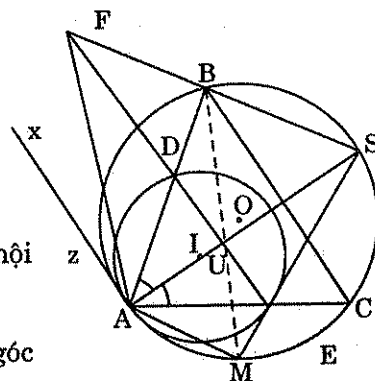
nên $\widehat{AED} = \widehat{ASB}$ hay $\widehat{AEF} = \widehat{ASF}$, suy ra tứ giác AFSE nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

$\Rightarrow \widehat{EFS} = \widehat{EAS}$, mà $\widehat{EAS} = \widehat{SAB}$ (AS là phân giác của góc BAC), nên $\widehat{EFS} = \widehat{SAB}$ hay $\widehat{USB} = \widehat{UAB}$ suy ra tứ giác AFBU nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

Ta có:
$$\begin{cases} \widehat{ABU} = \widehat{AFE} \text{ (tứ giác AFBU nội tiếp)} \\ \widehat{AFE} = \widehat{ASM} \text{ (tứ giác AFSE nội tiếp)} \\ \widehat{ASM} = \widehat{ABM} \left(= \frac{1}{2} \text{sđAM của (O)} \right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{ABU} = \widehat{ABM} \Rightarrow$ Tia BU = tia BM

Vậy ba điểm B, U, M thẳng hàng.



36 BÀI TOÁN CHỌN LỌC CỦA NHÀ GIÁO NGUYỄN ANH HOÀNG
VÀ NHÀ GIÁO NGUYỄN ĐOÀN VŨ

Bài 1. (Lớp 7) Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 36^\circ$. Đường trung trực của cạnh AB cắt BC ở D. Vẽ tia Bx song song với AD (Tia Bx nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa D). Trên tia Bx lấy điểm E sao cho $BE = CD$. Chứng minh rằng ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABC$ cân tại A (gt), $\widehat{A} = 36^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72^\circ$.

D thuộc đường trung trực của AB (gt) $\Rightarrow \triangle DAB$ cân tại D

Nên $\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 72^\circ$. Do đó $\widehat{ADB} = 36^\circ$

Ta có $\widehat{CDA} = \widehat{CAD} (= 36^\circ) \Rightarrow \triangle CAD$ cân tại C $\Rightarrow CD = AC$

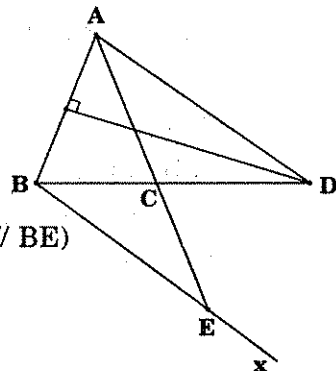
Ta có: $\widehat{ABE} + \widehat{BAD} = 180^\circ$ (Hai góc trong cùng phía và $AD \parallel BE$)

$\widehat{ABE} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

Mặt khác: $AB = BE (= CD) \Rightarrow \triangle ABE$ cân tại B.

Do đó $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} (= 36^\circ) \Rightarrow$ Hai tia AC, AE trùng nhau.

Vậy ba điểm A, C, E thẳng hàng.



Bài 2. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Các điểm D, E lần lượt trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABD} = 20^\circ$, $\widehat{ACE} = 10^\circ$. Gọi I là giao điểm của BD và CE. Vẽ điểm M sao cho BC là đường trung trực của đoạn thẳng IM. Gọi N là điểm sao cho AC là đường trung trực của đoạn thẳng NI. Chứng minh rằng ba điểm M, N, D thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\widehat{IDC} = \widehat{ABD} + \widehat{BAD} = 110^\circ$

$\triangle DIC$ có $\widehat{DIC} + \widehat{IDC} + \widehat{DCI} = 180^\circ$, nên $\widehat{DIC} = 60^\circ$

$\triangle CDI = \triangle CDN$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{DNC} = \widehat{DIC} = 60^\circ$

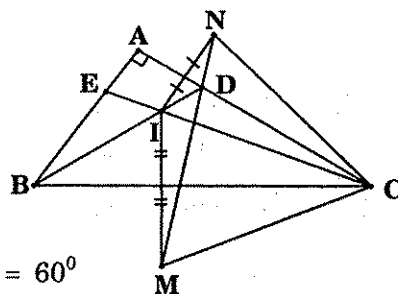
Mặt khác $CN = CM (= CI)$,

và $\widehat{MCN} = \widehat{MCI} + \widehat{ICN} = 2\widehat{KIC} + 2\widehat{ICA} = 60^\circ$

Do đó $\triangle CMN$ đều $\Rightarrow \widehat{MNC} = 60^\circ$. Ta có $\widehat{DNC} = \widehat{MNC} = 60^\circ$

$\Rightarrow$ Hai tia ND, NM trùng nhau

Vậy ba điểm M, N, D thẳng hàng.



Bài 3. (Lớp 8) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), vẽ đường cao AH của tam giác ABC. M là điểm trên đoạn thẳng CH. Vẽ $MD \perp AB$ tại D, $ME \perp AC$ tại E. Gọi N là giao điểm của HE và DM, K là giao điểm của ME và DH. Vẽ $NS \perp DE$ tại S. Chứng minh rằng ba điểm K, N, S thẳng hàng.

Lời giải

Tứ giác ADME có $\widehat{ADM} = 90^\circ$ ($MD \perp AB$), $\widehat{AEM} = 90^\circ$ ($ME \perp AC$), $\widehat{DAE} = 90^\circ$ (gt)

Do đó ADME là hình chữ nhật. Gọi O là giao điểm của AM và DE

Ta có O là trung điểm của AM, DE và AM = DE
 ΔHAM vuông tại H, HO là đường trung tuyến

$$\Rightarrow HO = \frac{AM}{2}$$

$$\Delta HDE \text{ có HO là đường trung tuyến, } HO = \frac{DE}{2} \left(= \frac{AM}{2} \right)$$

$\Rightarrow \Delta HDE$ vuông tại H

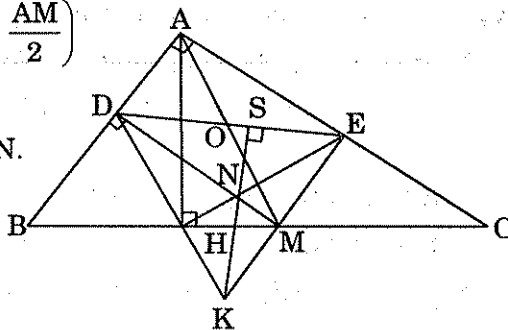
ΔKDE có EH, DM là hai đường cao cắt nhau tại N.

$\Rightarrow N$ là trực tâm của tam giác KDE $\Rightarrow KN \perp DE$

Mà $NS \perp DE$.

Do đó KN, NS trùng nhau

Vậy K, N, S thẳng hàng.



Bài 4. (Lớp 8) Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AD và BE cắt nhau tại G. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng C, M, G thẳng hàng.

Lời giải

Cách 1:

Gọi N là giao điểm của CG và AB, K là giao điểm của CM và AB.

ΔABC có AD, BE là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G (gt)

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác ABC.

$\Rightarrow CN$ là đường trung tuyến của tam giác ABC

$\Rightarrow N$ là trung điểm của cạnh AB

Mặt khác, tam giác ABC có D, E lần lượt trung điểm của BC, AC.

$\Rightarrow DE$ là đường trung bình của tam giác ABC.

$$\Rightarrow DE \parallel AB, DE = \frac{AB}{2}$$

ΔACK có EM $\parallel$ AK, E là trung điểm của AC

$\Rightarrow M$ là trung điểm CK

Nên EM là đường trung bình của tam giác ACK

$$\Rightarrow EM = \frac{AK}{2}$$

$$DE = \frac{AB}{2}, EM = \frac{DE}{2}; EM = \frac{AK}{2}$$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của AB nên $K \equiv N$.

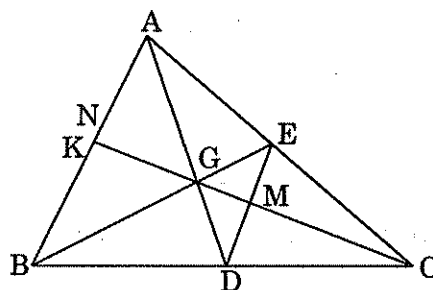
Vậy C, M, G thẳng hàng.

Cách 2:

Gọi S là trung điểm của BG.

ΔABC có AD, BE là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G (gt)

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác ABC



Do đó $BS = SG = GE$.

Xét $\triangle BGC$ có S, D lần lượt là trung điểm của BG, BC .

$\Rightarrow SD$ là đường trung bình của tam giác BGC

$\Rightarrow GC \parallel SD$

Xét $\triangle ESD$ có: G, M lần lượt là trung điểm của SE, DE .

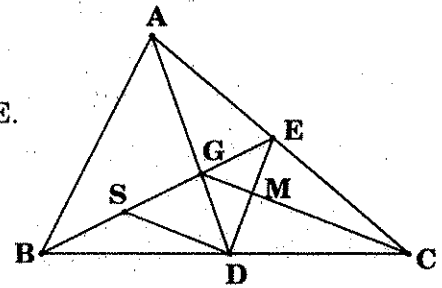
$\Rightarrow GM$ là đường trung bình của tam giác ESD

$\Rightarrow GM \parallel SD$

Ta có $GC \parallel SD, GM \parallel SD$

$\Rightarrow GC, GM$ trùng nhau (Tiên đề Ô-clit)

Vậy ba điểm C, M, G thẳng hàng.



Bài 5. (Lớp 8) Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4, BC = 3$. Trên tia AB lấy E , trên tia AD lấy F sao cho $\frac{4}{AE} + \frac{3}{AF} = 1$. Chứng minh rằng ba điểm E, C, F thẳng hàng.

Lời giải

Gọi F' là giao điểm của EC và AD .

$\triangle EAF'$ có $BC \parallel AF'$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành)

$$\Rightarrow \frac{EB}{AE} = \frac{BC}{AF'}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AE} - \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{AF'}$$

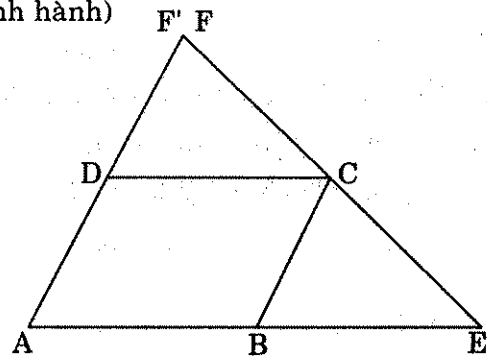
$$\Rightarrow \frac{4}{AE} + \frac{3}{AF'} = 1$$

$$\text{Mà } \frac{4}{AE} + \frac{3}{AF} = 1 \text{ (gt). Do đó } \frac{3}{AF} = \frac{3}{AF'}$$

$$\Rightarrow AF = AF'$$

$$\Rightarrow F = F'$$

Vậy ba điểm E, C, F thẳng hàng.



Bài toán tổng quát.

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = m, BC = n$ ($m, n > 0$). Trên tia AB lấy E , trên tia AD lấy F sao cho $\frac{m}{AE} + \frac{n}{AF} = 1$.

Chứng minh rằng ba điểm E, C, F thẳng hàng.

Bài 6. (Lớp 8) Cho tam giác ABC , D là điểm trên cạnh AC . Trên các đoạn thẳng AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, MN . Chứng minh rằng ba điểm E, F, K thẳng hàng.

Lời giải

Qua M vẽ đường thẳng song song với BD cắt AF ở S .

Qua N vẽ đường thẳng song song với BD cắt CF ở T .

Ta có $MS \parallel BD \parallel NT$

$$\triangle ABF \text{ có } MS \parallel BF \Rightarrow \frac{MS}{BF} = \frac{AM}{AB} = \frac{AS}{AF}$$

$$\triangle CDF \text{ có } NT \parallel DF \Rightarrow \frac{NT}{DF} = \frac{CN}{CD} = \frac{CT}{CF}$$

$$\text{Mà } \frac{CN}{CD} = \frac{AM}{AB} \text{ (gt), } BF = DF \text{ (F là trung điểm của BD).}$$

$$\text{Do vậy: } MS = NT, \frac{AS}{AF} = \frac{CT}{CF}$$

Tứ giác $MSNT$ có $MS \parallel NT$, $MS = NT$ nên là hình bình hành.

Mà K là trung điểm của MN (gt). Do đó K là trung điểm của ST .

$$\text{Xét } \triangle FAC \text{ có } \frac{AS}{AF} = \frac{CT}{CF} \Rightarrow ST \parallel AC \text{ (định lý Ta-lét đảo)}$$

Gọi E' là giao điểm của FK và AC

$$\triangle FAE' \text{ có } SK \parallel AE' \Rightarrow \frac{SK}{AE'} = \frac{FK}{FE'}$$

$$\triangle FCE' \text{ có } KT \parallel CE' \Rightarrow \frac{KT}{CE'} = \frac{FK}{FE'}$$

Mà $SK = KT$. Do vậy $AE' = CE' \Rightarrow E'$ là trung điểm của AC . Nên $E' = E$

Vậy ba điểm E, F, K thẳng hàng.

Bài 7. (Lớp 8) Cho tam giác ABC , G là trọng tâm. M trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = \frac{4}{7}AB$. N trên tia BC sao cho $BN = \frac{3}{2}BC$. Chứng minh rằng ba điểm M, G, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi E là điểm trên tia BA sao cho $BE = \frac{1}{3}BM$.

D là giao điểm của AG và BC .

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC

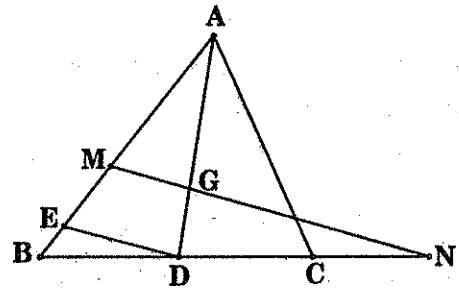
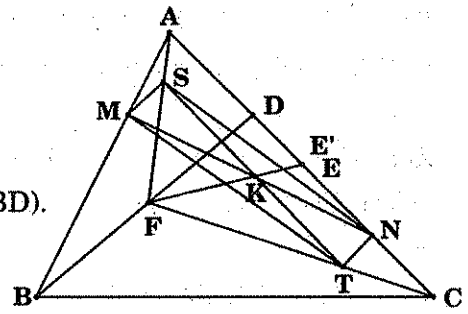
$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AD \text{ và } D \text{ là trung điểm của } BC.$$

$$\triangle BMN \text{ có } \frac{BE}{BM} = \frac{BD}{BN} \left(= \frac{1}{3} \right) \Rightarrow DE \parallel MN$$

$$\text{Ta có: } BE = \frac{1}{3}BM = \frac{1}{3}(AB - AM)$$

$$= \frac{1}{7}AB \Rightarrow AE = \frac{6}{7}AB$$

$$\text{Nên } \frac{AM}{AE} = \left(\frac{4}{7}AB \right) : \left(\frac{6}{7}AB \right) = \frac{2}{3}$$



Xét $\triangle AED$ có $\frac{AM}{AE} = \frac{AG}{AD} \left(= \frac{2}{3} \right) \Rightarrow DE \parallel MG$

Ta có $MN \parallel DE$ và $MG \parallel DE$. Do vậy MN, MG trùng nhau

Vậy ba điểm M, G, N thẳng hàng.

Bài 8. (Lớp 8) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), AH là đường cao. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của BH, AC, MN và G là trọng tâm của tam giác ACH .

Chứng minh rằng ba điểm B, K, G thẳng hàng.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của HG .

Vì G là trọng tâm của tam giác ACH ,

HN là đường trung tuyến của tam giác ACH .

Do đó $HI = IG = GN$

Xét $\triangle HBG$ có M, I lần lượt là trung điểm của BH, GH .

$\Rightarrow MI$ là đường trung bình của tam giác HBG

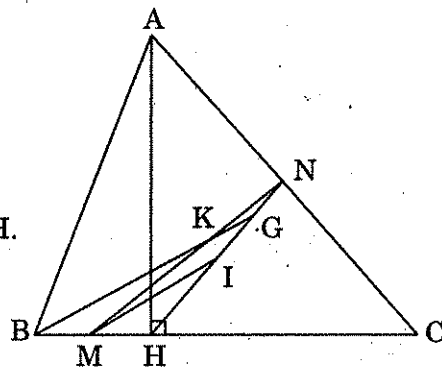
$\Rightarrow BG \parallel MI$

Tương tự KG là đường trung bình của tam giác IMN

$\Rightarrow KG \parallel MI$

Ta có: $BG \parallel MI, KG \parallel MI$. Do đó BG, KG trùng nhau (Tiên đề Ôclit)

Vậy ba điểm B, K, G thẳng hàng.



Bài 9. (Lớp 8) Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} < 60^\circ$; đường cao AH , đường trung trực của AB cắt BC ở D , cắt AH ở O , cắt AB ở K . Đường thẳng vuông góc với OB tại B cắt AC ở E . Gọi F là giao điểm của EO và AD . Chứng minh rằng ba điểm H, K, F thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABD$ có AH, DK là hai đường cao cắt nhau tại O

$\Rightarrow O$ là trực tâm của tam giác $ABD \Rightarrow BO \perp AD$

Do đó $AD \parallel BE$. Gọi L là giao điểm của AO và AD

Ta có: $OA = OB, OL = OH$. Mà $AD \parallel BE$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét, ta có: $\frac{OA}{OH} = \frac{OB}{OL} = \frac{OE}{OF}$

Xét $\triangle OAE$ và $\triangle OHF$ có: $\frac{OA}{OH} = \frac{OE}{OF}$

$\widehat{AOE} = \widehat{HOF}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle OAE \sim \triangle OHF$

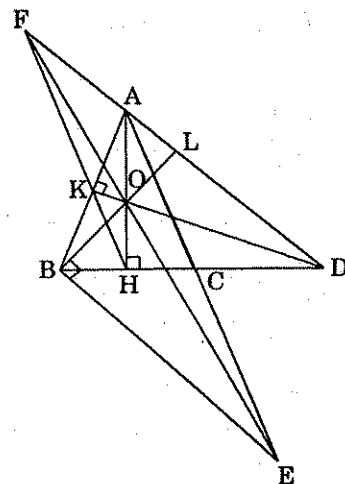
$\Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{OHF}$

$\Rightarrow HF \parallel AE$

Mà $HK \parallel AC$ (HK là đường trung bình của tam giác ABC)

Do đó HF, HK trùng nhau.

Vậy ba điểm H, K, F thẳng hàng.



Bài 10. (Lớp 8) Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. M là điểm trên cạnh BC. Đường thẳng qua M song song với BD cắt AC ở N, đường thẳng qua M song song với CE cắt AB ở P. Gọi I là trung điểm của PN.

Chứng minh rằng ba điểm G, T, M thẳng hàng.

Lời giải

Gọi J là giao điểm của PM và BD, L là giao điểm của MN và CE, O là giao điểm của MG và JL. Tứ giác JGLM có $JG \parallel ML$ (gt), $MJ \parallel LG$ (gt)

Nên JGLM là hình bình hành. Do đó O là trung điểm của JL.

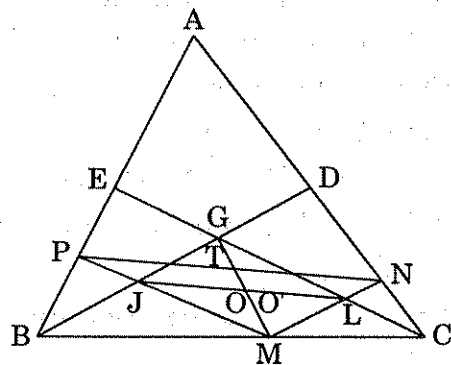
$$\text{Xét } \triangle BGE \text{ có } JP \parallel EG \Rightarrow \frac{PJ}{EG} = \frac{BJ}{BG}$$

$$\text{Xét } \triangle BGC \text{ có } JM \parallel GC \Rightarrow \frac{JM}{CG} = \frac{BJ}{BG}$$

$$\text{Ta có: } \frac{PJ}{EG} = \frac{JM}{CG} \left(= \frac{BJ}{BG} \right) \Rightarrow \frac{PJ}{JM} = \frac{EG}{CG} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{NL}{LM} = \frac{DG}{BG} = \frac{1}{2}$$

$$\triangle MPN \text{ có } \frac{PJ}{JM} = \frac{NL}{LM} \left(= \frac{1}{2} \right) \Rightarrow JL \parallel PN \text{ (định lý Talét đảo)}$$



Gọi O' là giao điểm của MT và JL. Dễ thấy O' là trung điểm của JL. Nên O' = O

Do vậy M, O, T thẳng hàng. Mà M, O, G thẳng hàng (tứ giác JGLM là hình bình hành)

Ta có M, O, T, G thẳng hàng.

Vậy G, T, M thẳng hàng.

Bài 11. (Lớp 9) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 135^\circ$; AH và BM lần lượt là đường cao và đường trung tuyến của tam giác ABC. Trên đường trung trực của đoạn thẳng AC lấy điểm D sao cho MD = MA; D và B nằm cùng phía đối với AC. Vẽ BE vuông góc với AC tại E.

Chứng minh rằng ba điểm D, E, H thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: DA = DC (D thuộc đường trung trực của AC)

$\Rightarrow \triangle DAC$ cân tại D

Mà $\triangle DAC$ có DM là đường trung tuyến và $DM = \frac{AC}{2}$ ($= AM$)

$\Rightarrow \triangle DAC$ vuông tại D

Do vậy $\triangle DAC$ vuông cân tại D

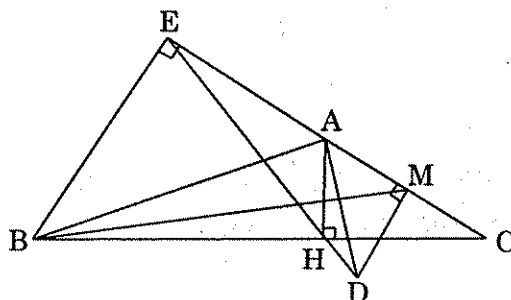
Tứ giác AHDC có $\widehat{AHC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác AHDC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DHC} = \widehat{DAC} = 45^\circ$

Ta có $\widehat{BAC} = 135^\circ$ (gt) nên $\widehat{BAE} = 45^\circ$

Tứ giác BEAH có $\widehat{BEA} = \widehat{BHA} = 90^\circ$



$\Rightarrow$ Tứ giác BEAH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BAE} = 45^\circ$

Do đó: $\widehat{DHE} = \widehat{DHC} + \widehat{EHC}$

$$= \widehat{BHE} + \widehat{EHC} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm D, E, H thẳng hàng.

Bài 12. (Lớp 9) Cho tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Vẽ D là giao điểm của AI với đường tròn (O) (D $\neq$ A). E là giao điểm của BI với đường tròn (O) (E $\neq$ B). Vẽ $IK \perp AB$ tại K, IK cắt BC ở F. Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải

$\widehat{BAC} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $KF \perp AB$, $AC \perp AB \Rightarrow KF \parallel AC$

Ta có: $\widehat{DIF} = \widehat{DAC}$ ($KF \parallel AC$)

Mà $\widehat{DBF} = \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{DIF} = \widehat{DBF}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BIFD nội tiếp

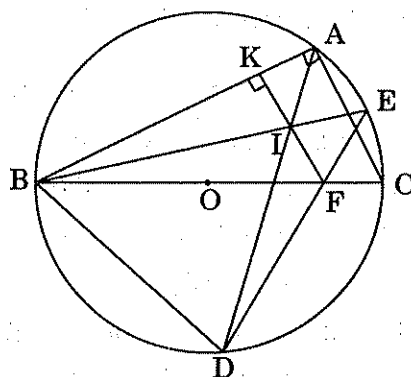
$\Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{IBC}$

Ta có: $\widehat{ADE} = \widehat{IBC} (= \widehat{ABE})$

$\Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{ADE}$

Do đó hai tia DE, DF trùng nhau.

Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.



Bài 13. (Lớp 9) Cho tam giác vuông ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), AH là đường cao. D là điểm trên đoạn thẳng AH. BD cắt đường tròn (O) ở E. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EAD. Chứng minh rằng ba điểm A, I, C thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của AC với đường tròn (I) (M khác A)

Xét đường tròn (O) có $\widehat{ACB} = \widehat{AEB}$

Xét đường tròn (I) có $\widehat{AMD} = \widehat{AED}$

Do đó $\widehat{ACB} = \widehat{AMD} \Rightarrow DM \parallel BC$

Mà $AH \perp BC$. Nên $AH \perp DM$

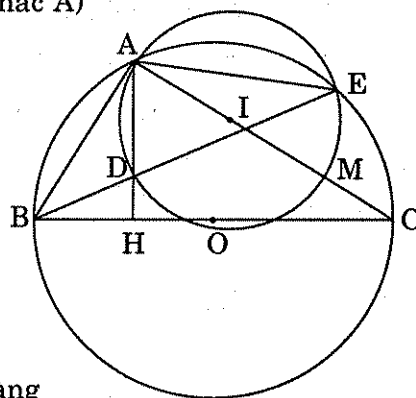
$\widehat{ADM} = 90^\circ$

$\Rightarrow AM$ là đường kính của đường tròn (I)

$\Rightarrow A, I, M$ thẳng hàng.

Mà A, C, M thẳng hàng. Do đó A, I, M, C thẳng hàng

Vậy ba điểm A, I, C thẳng hàng.



Bài 14. (Lớp 9) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ cát tuyến ABC. Các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau ở M. Vẽ MH vuông góc với OA tại H, MH cắt đường tròn (O) ở D, E ($AD < AE$). Đường thẳng qua O vuông góc với CD cắt MC ở F. Chứng minh rằng A, D, F thẳng hàng.

Gọi K là giao điểm của BC và OM. MB, MC là các tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow MB = MC$ và MO là tia phân giác góc BMC.

$\Rightarrow \triangle MBC$ cân tại M, MO là đường phân giác

$\Rightarrow MO \perp BC$

$\triangle OKA \sim \triangle OHM$ ($\widehat{KOA}$ (chung), $\widehat{OKA} = \widehat{OHM} = 90^\circ$)

$\Rightarrow \frac{OK}{OH} = \frac{OA}{OM} \Rightarrow OA.OH = OM.OK$

$\triangle MOB$ vuông tại B, BK là đường cao $\Rightarrow OM.OK = OB^2$

Mà $OB = OD = R$. Nên $OA.OH = OM.OK = OD^2$

Xét $\triangle ODA$ và $\triangle OHD$ có: $\widehat{DOA}$ (chung), $\frac{OD}{OH} = \frac{OA}{OD}$ (Vì $OA.OH = OD^2$)

Do đó $\triangle ODA \sim \triangle OHD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{OHD}$

Mà $\widehat{OHD} = 90^\circ$. Nên $\widehat{ODA} = 90^\circ \Rightarrow OD \perp AD$ (1)

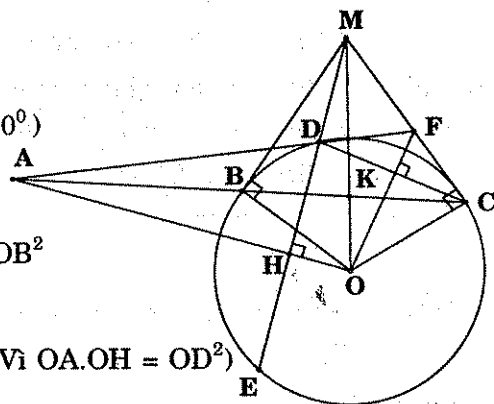
Mặt khác $OF \perp CD$ (gt) $\Rightarrow OF$ đi qua trung điểm của CD

Do vậy OF là đường trung trực của CD $\Rightarrow FC = FD$

$\triangle OFC = \triangle OFD$ ($FC = FD$, OF chung, $OC = OD (= R)$) $\Rightarrow \widehat{OCF} = \widehat{ODF}$

Mà $\widehat{OCF} = 90^\circ$, nên $\widehat{ODF} = 90^\circ \Rightarrow OD \perp DF$ (2)

Từ (1) và (2) có A, D, F thẳng hàng.



Bài 15. (Lớp 9) Cho hình bình hành ABCD tâm O ($\widehat{A} < 90^\circ$, $AB < BC$). Tia phân giác của góc BAD cắt BC, CD lần lượt ở M, N. Gọi I, K lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BCD, CMN. Chứng minh rằng ba điểm O, I, K thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\widehat{CMN} = \widehat{DAM}$ (hai góc đồng vị và $BC \parallel AD$),

$\widehat{CNM} = \widehat{BAM}$ (hai góc so le trong và $AB \parallel CD$)

$\widehat{DAM} = \widehat{BAM}$ (AM là tia phân giác góc BAD)

Do đó $\widehat{CMN} = \widehat{CNM}$

$\Rightarrow \triangle CMN$ cân tại C

$\Rightarrow CM = CN$

Tương tự $AB = BM$

$\triangle KMC = \triangle KNC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{KCM} = \widehat{KCN}$

Mà $KM = KC (= r) \Rightarrow \triangle KMC$ cân tại K $\Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{KCN}$

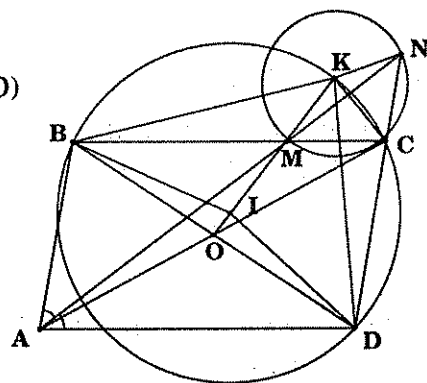
Xét $\triangle MKB$ và $\triangle CKD$ có: $KM = KC (= r)$, $\widehat{KMB} = \widehat{KCD}$, $BM = CD (= AB)$

Do đó $\triangle MKB = \triangle CKD$ (c.g.c) $\Rightarrow KB = KD$

Ta có $KB = KD$, $IB = ID (= R)$, $OB = OD$ (O là tâm của hình bình hành ABCD)

Do vậy K, I, O cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BD

Vậy ba điểm O, I, K thẳng hàng.



Bài 16. (Lớp 9) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) ($AB > AC$), (I) tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt ở D, E, F. EF cắt BC ở K, IK cắt AD ở S, cắt đường thẳng vuông góc với AB vẽ từ B ở N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SBN cắt AB ở L ($L \neq B$). Chứng minh rằng ba điểm L, S, K thẳng hàng.

Lời giải

Gọi T là giao điểm của AI và EF, $IT \cdot IA = IF^2 = ID^2$

Do đó $IT \cdot IA = ID^2$, $\triangle IDT \sim \triangle IAD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IDT} = \widehat{IAD}$

Mà $\widehat{IDT} = \widehat{IKT}$ (tứ giác IDKT nội tiếp)

Ta có $\widehat{SKT} = \widehat{SAT} \Rightarrow$ Tứ giác STAK nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KSA} = \widehat{KTA} = 90^\circ$

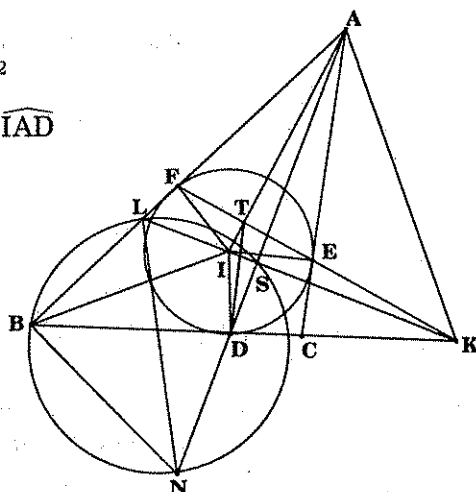
$\Rightarrow KS \perp AD$ (1)

Mà $\widehat{LSN} + \widehat{LBN} = 180^\circ$ (tứ giác BLSN nội tiếp),

$\widehat{LBN} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{LSN} = 90^\circ \Rightarrow LS \perp AD$ (2)

Từ (1) và (2) có L, S, K thẳng hàng.



Bài 17. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). M, N, K lần lượt trên các cạnh AB, AC, BC sao cho $\frac{BM}{CN} = \frac{BK}{CK} = \sqrt{2}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường tròn (O) ở D ($D \neq A$). Gọi E là điểm chính giữa cung BC. Chứng minh rằng D, E, K thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\widehat{AMD} = \widehat{AND}$ (tứ giác AMND nội tiếp)

$\widehat{AMD} + \widehat{BMD} = 180^\circ$

$\widehat{AND} + \widehat{CND} = 180^\circ$

Nên $\widehat{BMD} = \widehat{CND}$

Xét $\triangle BMD$ và $\triangle CND$ có: $\widehat{MBD} = \widehat{NCD}$, $\widehat{BMD} = \widehat{CND}$

Do đó $\triangle BMD \sim \triangle CND$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{BM}{CN}$

Mà $\frac{BM}{CN} = \frac{BK}{CK} = \sqrt{2}$. Do vậy $\frac{DB}{DC} = \sqrt{2}$

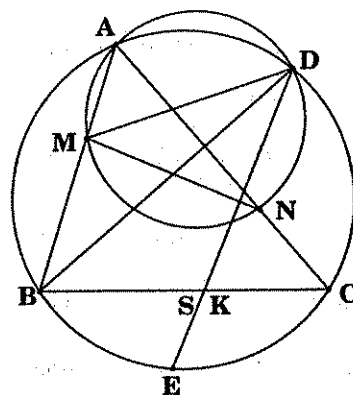
Gọi S là giao điểm của BC và DE

$\widehat{BDE} = \widehat{CDE}$ ($\widehat{BE} = \widehat{CE}$)

$\triangle DBC$ có DS là đường phân giác $\Rightarrow \frac{SB}{SC} = \frac{DB}{DC} = \sqrt{2}$

Ta có $\frac{SB}{SC} = \frac{BK}{CK} = \sqrt{2} \Rightarrow S = K$

Vậy D, E, K thẳng hàng.



Bài 18. (Lớp 9) Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Các tia Ax, By và nửa đường tròn $(O; R)$ nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, nó cắt Ax và By lần lượt ở C và D . I, K lần lượt trên các tia Ax, By sao cho $AI = \frac{1}{3}AC, BK = \frac{2}{3}BD$. Đường thẳng qua M song song với AC cắt AD ở N .

Chứng minh rằng ba điểm I, N, K thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $AC = MC, BD = MD, AC \parallel BD$

$$\triangle ACD \text{ có } MN \parallel AC \Rightarrow \frac{AN}{DN} = \frac{MC}{MD}$$

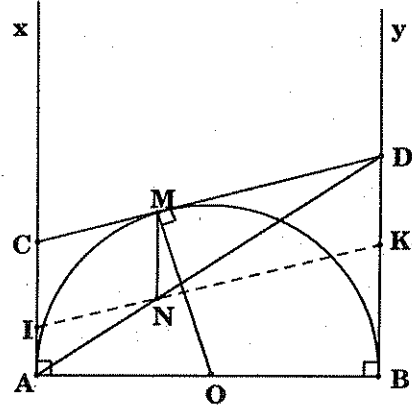
$$\text{Mà } BK = \frac{2}{3}BD \text{ nên } DK = \frac{1}{3}BD$$

$$\text{Do đó } \frac{AC}{BD} = \frac{AI}{DK}. \text{ Vậy } \frac{AI}{DK} = \frac{AN}{DN}$$

$$\triangle NAI \sim \triangle NDK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ANI} = \widehat{DNK}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \widehat{INK} &= \widehat{IND} + \widehat{DNK} \\ &= \widehat{IND} + \widehat{ANI} = 180^\circ \end{aligned}$$

Vậy ba điểm I, N, K thẳng hàng.



Bài 19. (Lớp 9) Chứng minh rằng trong một tứ giác ngoại tiếp đường tròn, các trung điểm của hai đường chéo thẳng hàng với tâm của đường tròn nội tiếp.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu, năm học 2006 – 2007)

Lời giải

Gọi r là bán kính đường tròn (O) .

Đặt $S_{ABCD} = S$

$$S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{r}{2} (AB + CD);$$

$$S_{OAD} + S_{OBC} = \frac{r}{2} (AD + BC).$$

Do $AB + CD = AD + BC$

$$S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OAD} + S_{OBC} = \frac{1}{2} S.$$

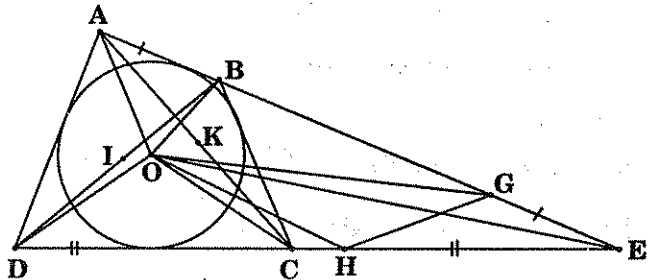
Giả sử tia AB cắt tia DC tại E (trường hợp $AB \parallel CD$ hiển nhiên vì đó là kết quả của định lý Talét).

Trên AB lấy điểm G sao cho $AB = GE$, trên DC lấy H sao cho $DC = HE$.

$$\text{Ta có: } S_{OEG} + S_{OHE} = S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S \Rightarrow S_{OHG} = \frac{1}{2} S - S_{HGE} \quad (1)$$

Gọi I, K là trung điểm của BD và AC .

$$\text{Ta có: } S_{IAB} + S_{ICD} = \frac{1}{2} S; S_{KAB} + S_{KCD} = \frac{1}{2} S$$



$$\text{Nên tương tự ta cũng có: } S_{IHG} = \frac{1}{2}S - S_{HGE} \quad (2)$$

$$S_{KHG} = \frac{1}{2}S - S_{HGE} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra I, O, K đều cách đều đường thẳng HG

Do đó ba điểm I, O, K thẳng hàng.

Bài 20. (Lớp 9) Cho tứ giác ABCD có AB = BD và nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt BC ở M. Đường thẳng qua M và song song với AD cắt AB ở N. Chứng minh rằng ba điểm N, C, D thẳng hàng.

Lời giải

Ta có AB = BD $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{BAD}$

Mà $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$, $\widehat{BAD} = \widehat{ANM}$ (so le trong và MN // AD)

Do đó $\widehat{BCA} = \widehat{ANM}$

$\Rightarrow$ Tứ giác ACNM nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{MAN}$

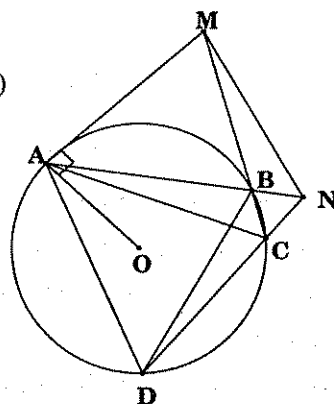
Mà $\widehat{MAN} = \widehat{ADB} = \widehat{BAD}$

Do đó $\widehat{MCN} = \widehat{BAD}$

Mặt khác $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ (tứ giác ABCD nội tiếp)

Nên $\widehat{MCN} + \widehat{BCD} = 180^\circ \Rightarrow$ Hai tia CD, CN đối nhau

Vậy ba điểm N, C, D thẳng hàng.



Bài 21. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC (AB > AC). Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt ở F, E. Gọi H là giao điểm của BE và CF. AH cắt đường tròn (O) ở M (M nằm giữa A và H) cắt BC ở I. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC ở S. Vẽ SN là tiếp tuyến của đường tròn (O) (N, M nằm khác phía đối với BC)

Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BE \perp AC, CF \perp AB$

Do đó H là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow AI$ là đường cao của tam giác ABC.

$\Rightarrow AH \perp BC$

Tứ giác BFHI có $\widehat{BFH} + \widehat{BIH} = 180^\circ$ nên tứ giác BFHI nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IBH} = \widehat{IFH}$

Mà $\widehat{IBH} = \widehat{CFE}$. Do đó $\widehat{IBH} = \widehat{IFH} = \widehat{CFE}$, nên $\widehat{IBE} = \frac{1}{2}\widehat{EFI}$

Mà $\widehat{IBE} = \frac{1}{2}\widehat{COE} \left(= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{CE} \right)$

Do đó $\widehat{EFI} = \widehat{COE}$

$\Rightarrow$ Tứ giác OIEF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CIE} = \widehat{OFE}$

Mà $\widehat{OFE} = \widehat{OEF}$ ($OE = OF$), nên $\widehat{CIE} = \widehat{OEF}$

Mà $\widehat{CIE} + \widehat{OIE} = \widehat{OEF} + \widehat{OES} (= 180^\circ)$

Nên $\widehat{OIE} = \widehat{OES}$

Xét $\triangle OIE$ và $\triangle OES$ có: $\widehat{OIE} = \widehat{OES}$, $\widehat{IOE}$ (chung)

Do đó $\triangle OIE \sim \triangle OES$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OI}{OE} = \frac{OE}{OS} \Rightarrow OI \cdot OS = OE^2$$

Mà $OE^2 = OM^2$ ($OE = OM$) nên $OI \cdot OS = OM^2$

Xét $\triangle OIM$ và $\triangle OMS$ có: $\widehat{IOM}$ (chung), $\frac{OI}{OM} = \frac{OM}{OS}$ (vì $OI \cdot OS = OM^2$)

Do đó $\triangle OIM \sim \triangle OMS$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OIM} = \widehat{OMS}$

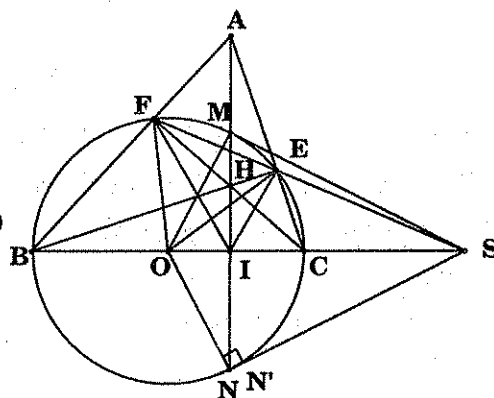
Mà $\widehat{OIM} = 90^\circ$ nên $\widehat{OMS} = 90^\circ \Rightarrow SM$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

AI cắt (O) tại N' (N' khác M)

Chứng minh tương tự có: SN' là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Do đó $N' \equiv N$

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.



Bài 22. (Lớp 9) Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD đến đường tròn (O) ($A, B, C, D \in (O)$, $MC < MD$, tia MC nằm giữa hai tia MO và MA). Vẽ dây DE của đường tròn (O), $DE \parallel AB$. Gọi N là giao điểm của CE và AB. Chứng minh rằng ba điểm M, N, O thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDA$ có $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)
 $\widehat{AMC}$ (chung)

$$\text{Do đó } \triangle MAC \sim \triangle MDA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AC}{AD}$$

$$\text{Tương tự } \triangle MBC \sim \triangle MDB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{BC}{BD}$$

$MA = MB$ (Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

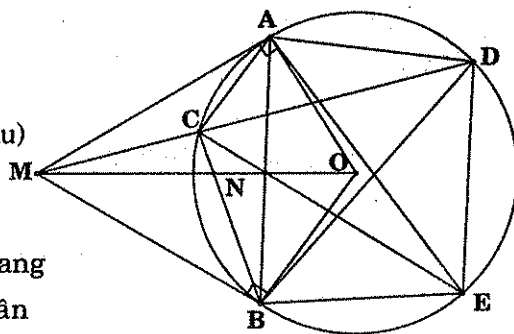
$$\text{Do đó } \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

Ta có $AB \parallel DE$ (gt) $\Rightarrow$ Tứ giác ABED là hình thang

Hình thang ABED nội tiếp nên là hình thang cân

$$\Rightarrow AD = BE, BD = EA$$

Xét $\triangle NBC$ và $\triangle NEA$ có: $\widehat{BNC} = \widehat{ENA}$ (đối đỉnh), $\widehat{NBC} = \widehat{NEA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)



Do đó $\triangle NBC \sim \triangle NEA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{NC}{NA} = \frac{BC}{AE}$

Tương tự $\triangle NAC \sim \triangle NEB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{NC}{NB} = \frac{AC}{BE}$

Ta có $\frac{NC}{NA} = \frac{BC}{AE} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} = \frac{AC}{BE} = \frac{NC}{NB} \Rightarrow NA = NB$

Mà $MA = MB$, $OA = OB$ ($= R$)

Do đó M, N, O cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Vậy M, N, O thẳng hàng.

Bài 23. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có trực tâm H , nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD , AT là phân giác trong góc BAC (I nằm trên BC). Lấy E đối xứng với H qua đường thẳng AI . Chứng minh rằng ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của AH và BC .

Ta có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\triangle MBA$ và $\triangle CDA$ có:

$\widehat{BMA} = \widehat{ACD} (= 90^\circ)$

$\widehat{ABM} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Do đó $\triangle MBA \sim \triangle CDA$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAD}$

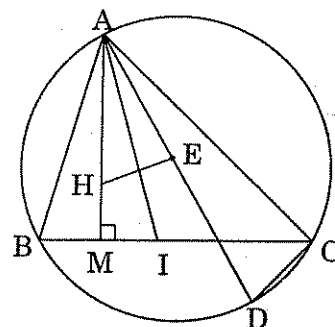
Mặt khác $\widehat{MAI} = \widehat{IAE}$ (H, E đối xứng qua AI)

Và $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$ (AI là phân giác góc BAC)

Do đó $\widehat{CAE} = \widehat{IAC} - \widehat{IAE} = \widehat{BAI} - \widehat{MAI} = \widehat{BAM}$

Ta có $\widehat{CAD} = \widehat{CAE} (= \widehat{BAM}) \Rightarrow$ Hai tia AE, AD trùng nhau

Vậy ba điểm A, D, E thẳng hàng.



Bài 24. (Lớp 9) Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Vẽ đường tròn tâm A , bán kính R với R nhỏ hơn AH . Từ B vẽ tiếp tuyến BM với đường tròn $(A; R)$, M là tiếp điểm. Từ C vẽ tiếp tuyến CN với đường tròn $(A; R)$, N là tiếp điểm (M và N nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC). Chứng minh rằng M, N, H thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\widehat{CHA} = \widehat{CNA} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ANHC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ANH} + \widehat{ACH} = 180^\circ$

Mặt khác $\widehat{BMA} = \widehat{BHA} = 90^\circ$

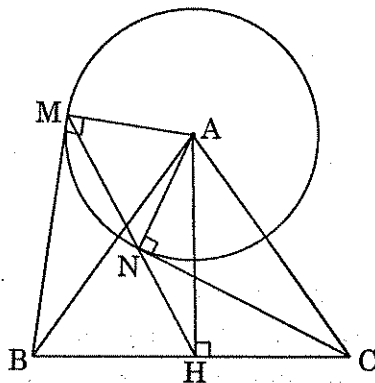
$\Rightarrow$ Tứ giác $BMAH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{AMN}$

Mà $AM = AN$ ($= R$) $\Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM}$

Do đó $\widehat{ANM} = \widehat{ACH}$. Vậy có $\widehat{ANH} + \widehat{ANM} = 180^\circ$

Nên ba điểm M, N, H thẳng hàng.



Bài 25. (Lớp 9) Cho hình thoi ABCD có AB = AC. Các điểm M, N lần lượt trên các cạnh AB, CD sao cho $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN. Chứng minh rằng ba điểm A, C, O thẳng hàng.

Lời giải

$\triangle ABC$ có AB = BC = AC $\Rightarrow \triangle ABC$ đều

Nên $\widehat{MCN} = 120^\circ$

Mà $\widehat{MAN} = \frac{1}{2} \widehat{MON} \Rightarrow \widehat{MON} = 60^\circ$.

Do vậy tam giác OMN đều.

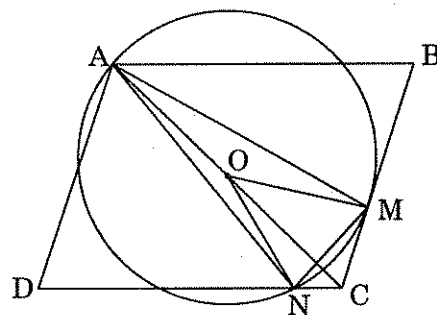
Tứ giác OMCN có: $\widehat{MCN} + \widehat{MON} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

Do đó tứ giác OMCN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{ONM} = 60^\circ$

Ta có: $\widehat{OCM} = \widehat{ACB} = 60^\circ$

$\Rightarrow$ Hai tia CO, CA trùng nhau

Vậy ba điểm A, C, O thẳng hàng.



Bài 26. (Lớp 9) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. C là điểm thuộc nửa đường tròn. Vẽ CH vuông góc với AB tại H. Vẽ đường tròn tâm C, bán kính CH. Gọi D, E là giao điểm của đường tròn (C) và nửa đường tròn (O). M là trung điểm của CH. Chứng minh rằng ba điểm D, M, E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là giao điểm của DE và CH, I là giao điểm của DE và OC.

Vẽ $OK \perp CD$ tại K. Ta có K là trung điểm của CD.

OC là đường trung trực của DE.

$$\triangle CKO \sim \triangle CID \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CK}{CI} = \frac{CO}{CD} \Rightarrow CK \cdot CD = CI \cdot CO$$

$$\triangle CIN \sim \triangle CHO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CI}{CH} = \frac{CN}{CO} \Rightarrow CN \cdot CH = CI \cdot CO$$

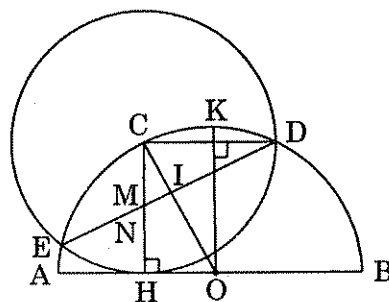
Do đó $CK \cdot CD = CN \cdot CH (= CI \cdot CO)$

Mà $CD = CH (= R')$, nên $CK = CN$. Mà $CK = \frac{1}{2} CD$

Do vậy $CN = \frac{1}{2} CH$. Ta có N là trung điểm của CH

Vì vậy $N \equiv M$

Vậy ba điểm D, M, E thẳng hàng.



Bài 27. (Lớp 9) Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy B làm tâm, vẽ đường tròn tâm B bán kính AB. Lấy C làm tâm, vẽ đường tròn tâm C bán kính AC, hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Vẽ AM, AN lần lượt là các dây cung của đường tròn (B) và (C) sao cho AM vuông góc với AN và tia AD nằm giữa hai tia AM, AN.

Chứng minh rằng ba điểm M, D, N thẳng hàng.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT tỉnh Phú Thọ, năm học 2012 – 2013)

Lời giải

Gọi Ax là tia đối của tia AC, Ay là tia đối của tia AB.

$AB \perp AC$ (gt)

Nên Ax là tia tiếp tuyến của đường tròn (B),

Ay là tiếp tuyến của đường tròn (C)

$$\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{MAX}, \widehat{ADN} = \widehat{YAN}$$

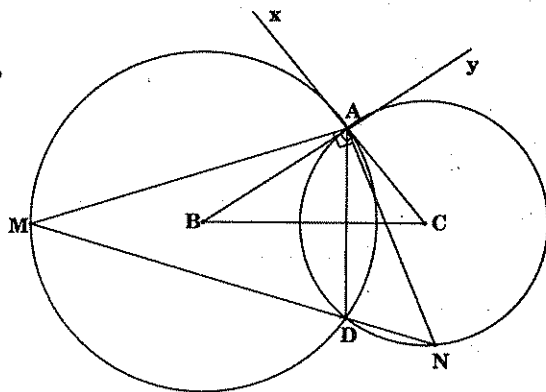
$$\text{Ta có } \widehat{ADM} + \widehat{ADN} = \widehat{MAX} + \widehat{YAN}$$

$$= \widehat{MAX} + \widehat{CAN} + \widehat{CAY}$$

$$= (180^\circ - \widehat{MAN} + 90^\circ)$$

$$= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Vậy ba điểm M, D, N thẳng hàng.



Bài 28. (Lớp 9) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn, tiếp xúc với đường tròn (O) ở C, tiếp xúc với đường tròn (O') ở D (A ở gần CD hơn B). Vẽ hình bình hành CBDE.

Chứng minh rằng A, B, E thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của AB và CD.

Xét $\triangle MCA$ và $\triangle MBC$ có:

$\widehat{CMA}$ (chung),

$\widehat{MCA} = \widehat{MBC}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$$\text{Do đó } \triangle MCA \sim \triangle MBC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC}$$

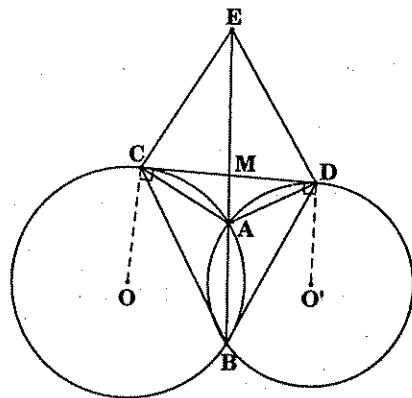
$$\Rightarrow MC^2 = MA.MB$$

Chứng minh tương tự có: $MD^2 = MA.MB$

Nên $MC^2 = MD^2 \Rightarrow MC = MD$. Tứ giác CBDE là hình bình hành (gt)

Do đó M là trung điểm của BE. Ta có B, E, M thẳng hàng. Mà B, A, M thẳng hàng.

Nên B, E, M, A thẳng hàng. Do đó A, B, E thẳng hàng.



Bài 29. (Lớp 9) Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm I tiếp xúc với BC tại D. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC có tâm J, tiếp xúc với BC tại E. DI cắt đường tròn (I) ở K (K khác D). Chứng minh rằng ba điểm A, K, E thẳng hàng.

Lời giải

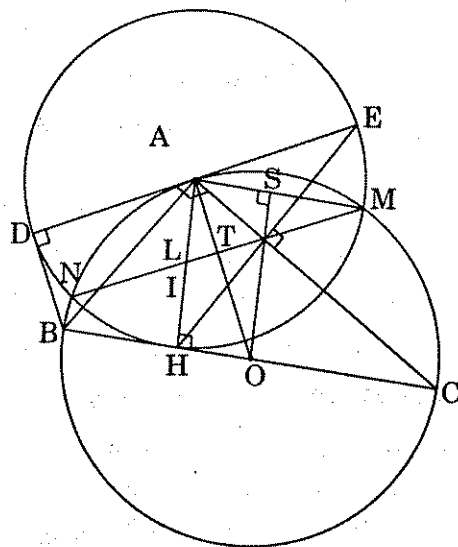
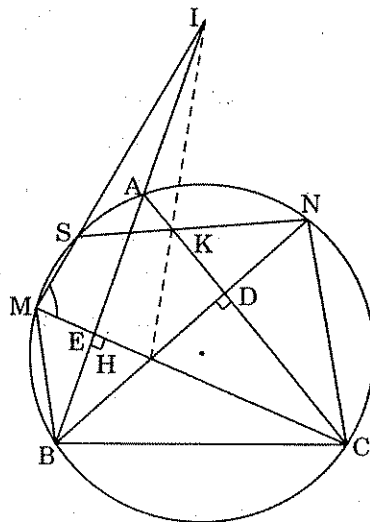
Dễ thấy A, I, J thẳng hàng.

Gọi K' là giao điểm của ID và AE.

(I) tiếp xúc với AC ở M, (J) tiếp xúc với AC ở N.

Ta có $IM \perp AC, JN \perp AC \Rightarrow IM \parallel JN$

Vậy ba điểm I, H, K thẳng hàng.



$$\text{Do đó } AL = AS. \text{ Nên } AL = \frac{AM}{2} = \frac{AH}{2}$$

$\Rightarrow L$ là trung điểm của AH . Ta có $L \equiv I$

Vậy ba điểm M, I, N thẳng hàng.

Bài 33. (Lớp 9) Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên đường tròn (O) lấy điểm C sao cho $AC < BC$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia BC tại D . Vẽ OH vuông góc với AC tại H . OD cắt AC tại I . DH cắt AB tại K . IK cắt OH tại M . Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại N . Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

(Trích đề tham khảo kiểm tra học kì I, trường THCS Võ Trường Toản, Quận 1, TP.Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

$$\triangle ADB \sim \triangle CDA \text{ (g.g)} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CAD}, \frac{BD}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Mà } AC = 2AH, AB = 2OB, \text{ nên } \frac{BD}{AD} = \frac{OB}{AH}$$

$$\triangle HAD \sim \triangle OBD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{BDO}$$

$$\Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{DIC}$$

$$\Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{AIO}$$

$$\triangle AKH \sim \triangle AIO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AK}{AI} = \frac{AH}{AO}$$

$$\triangle AKI \sim \triangle AHO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{AHO} = 90^\circ$$

M là trực tâm của tam giác $AIO \Rightarrow AM \perp OD$ (1)

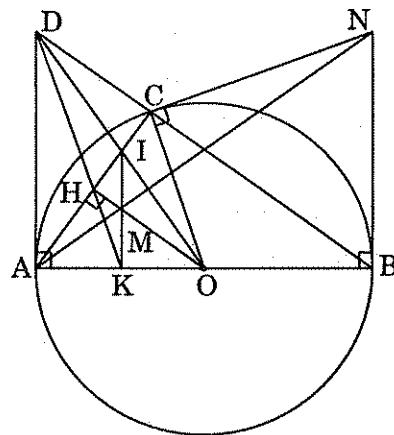
$$\triangle ABD \sim \triangle BNO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{OB} = \frac{AB}{BN}$$

$$\triangle AOD \sim \triangle BNA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{BNA}$$

Ta có: $AN \perp OD$ (2)

Từ (1) và (2) có AM, AN trùng nhau

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.



Bài 34. (Lớp 9) Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O) . Trên đường tròn (O) lấy E (E khác A, B). Tiếp tuyến tại E cắt Ax, By lần lượt tại C, D . Vẽ EF vuông góc với AB tại F . BC cắt EF tại I . EA cắt CF tại M , EB cắt DF tại N . Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng.

(Trích đề tham khảo học kì I, trường THCS Huỳnh Khương Ninh, Quận 1, TP.Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

BE cắt AC tại S

Ta có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$,

$CA = CE$, CO là tia phân giác góc ACE .

Chứng minh tương tự có: $TE \cdot TD = TC^2$. Nên $TB^2 = TC^2 \Rightarrow TB = TC$. Do đó $T \equiv K$

Vậy ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Bài 36. (Lớp 9) Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính BC, A là điểm di động trên nửa đường tròn. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC và nửa đường tròn (O) lần lượt tại D, E, M. AM cắt BC tại N. Chứng minh rằng D, E, N thẳng hàng.

(Trích đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

DE cắt AH tại I, cắt OA tại K

$\widehat{IAE} = \widehat{IEA}$ ($\triangle IAE$ cân tại I). $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ ($\triangle OAC$ cân tại O)

Do đó: $\widehat{KAE} + \widehat{KEA} = \widehat{OCA} + \widehat{IAE} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AKE} = 90^\circ$

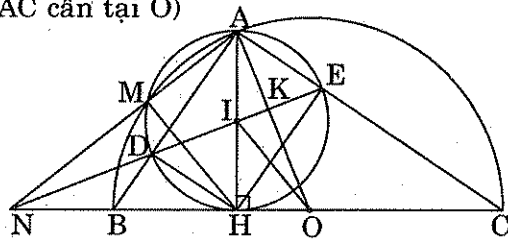
$\Rightarrow OA \perp DE$. Ta có: $DI \perp OA$ (1)

(O), (I) cắt nhau tại A và M

$\Rightarrow OI$ là đường trung trực của AM $\Rightarrow OI \perp AM$

Do đó I là trực tâm của $\triangle ANO \Rightarrow NI \perp OA$ (2)

Từ (1) và (2) cho DI, NI trùng nhau. Vậy D, E, N thẳng hàng.



CHƯƠNG III

36 BÀI TOÁN CHỌN LỌC CỦA NHÀ GIÁO ĐỖ QUANG THANH VÀ NHÀ GIÁO NGUYỄN TẤN SIÊNG

Bài 1. (Lớp 8) Cho tam giác ABC ($AC > AB$), các đường cao AD, BF, CE cắt nhau tại H, K là điểm đối xứng của D qua AC. Chứng minh rằng ba điểm E, F, K thẳng hàng.

Lời giải

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \triangle AFE \sim \triangle ABC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ABC} \\ \cdot \triangle CFD \sim \triangle CBA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CBA} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{CFD} \quad (1)$$

Mà:

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \widehat{AFE} + \widehat{EFB} = 90^\circ \text{ (BF} \perp \text{AC)} \\ \cdot \widehat{CFD} + \widehat{DFB} = 90^\circ \text{ (BF} \perp \text{AC)} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{DFB} = \widehat{EFB} \quad (2)$$

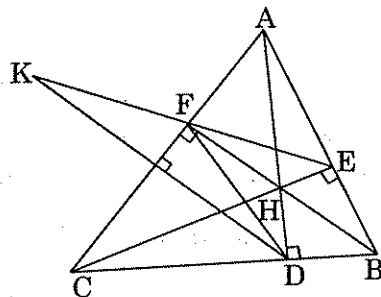
$$\cdot \widehat{KFC} = \widehat{DFC} \text{ (tính chất đối xứng)} \quad (3)$$

$$\cdot \widehat{DFC} + \widehat{DFB} = 90^\circ \text{ (BF đường cao)} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra: $\widehat{KFC} = \widehat{AFE}$. Nên: $\widehat{DFC} + \widehat{DFE} + \widehat{AFC} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{DFC} + \widehat{DFE} + \widehat{KFC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{KFE} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm K, F, E thẳng hàng.



Bài 2. (Lớp 8) Cho tam giác ABC vuông ở A ($AB < AC$) có AH là đường cao. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho BD = BA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Đường thẳng NH cắt DB ở I. Lấy điểm K trên tia DC sao cho IK = DH. Chứng minh rằng ba điểm K, H, M thẳng hàng.

Lời giải

C thuộc đường trung trực của AD $\Rightarrow CA = CD$

$\triangle ABC$ và $\triangle DBC$ có: $AB = BD$ (gt), BC cạnh chung, $CA = CD$ (cmt)

Do đó $\triangle ABC = \triangle DBC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC} \text{ mà } \widehat{BAC} = 90^\circ \text{ (do } \triangle ABC \text{ vuông ở A (gt))}$$

$$\Rightarrow \widehat{BDC} = 90^\circ \text{ (gttư)}$$

Xét $\triangle ADC$ có: H là trung điểm của AD (gt)

N là trung điểm của AC (gt)

$\Rightarrow NH$ là đường trung bình của $\triangle ADC$

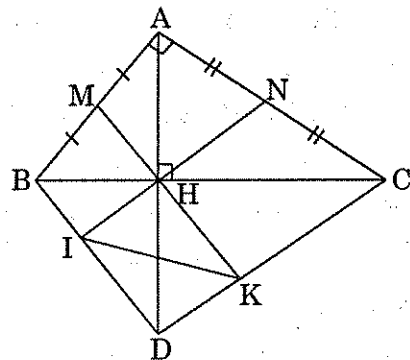
$\Rightarrow HN \parallel DC$ (hay NI) song song CD.

Mà $K \in CD \Rightarrow HI \parallel DK$

Ta lại có: $IK = DH$ (gt) $\Rightarrow IHKD$ là hình thang cân

(Vì hình thang có hai đường chéo bằng nhau)

$$\Rightarrow \widehat{HKD} = \widehat{IDK} \text{ (hay } \widehat{BDC}) = 90^\circ \Rightarrow HK \perp DC \quad (a)$$



Xét $\triangle ABD$ có M: trung điểm của AB (gt)

H: trung điểm của AD (gt)

$\Rightarrow$ MH là đường trung bình của $\triangle ABD$

$\Rightarrow MH \parallel BD$ mà $BD \perp DC$ ($\widehat{BDC} = 90^\circ$ (cmt))

$\Rightarrow MH \perp DC$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra: M, H, K thẳng hàng.

Bài 3. (Lớp 8) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Đường trung trực của BC cắt AB ở D và cắt đường thẳng AC tại F. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt tia CD tại K. Chứng minh ba điểm B, K, F thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle BFC$ có FD là đường trung tuyến đồng thời là đường cao

$\Rightarrow \triangle BFC$ cân tại F $\Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{BCA}$ (1)

Xét $\triangle DBC$ có $AK \parallel BC$ (gt). Theo hệ quả định lý Ta-lét:

$\Rightarrow \frac{DK}{DC} = \frac{DA}{DB}$ mà $DB = DC$ (vì D thuộc trung trực BC)

$\Rightarrow DK = DA \Rightarrow DA + DB = DK + DC$

$\Rightarrow AB = KC$

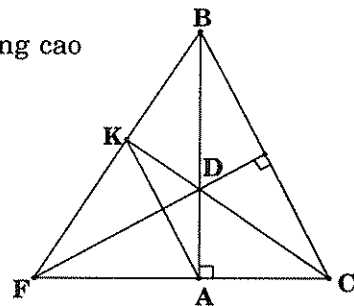
Mà $AK \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow$ Tứ giác BACK là hình thang cân (vì hình thang có hai đường chéo bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{BCA}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{KBC}$ ($= \widehat{BCA}$)

$\Rightarrow$ Tia BF trùng tia BK

$\Rightarrow B, K, F$ thẳng hàng.



Bài 4. (Lớp 8) Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các hình vuông: ABDE, ACFG và hình bình hành EAKG, BF cắt CD tại M. Chứng minh rằng ba điểm K, A, M thẳng hàng.

Lời giải

Gọi H là giao điểm của KA và BC.

Tứ giác AEKG là hình bình hành nên $\widehat{AEK} + \widehat{EAG} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{BAC}$

Ta có: $EK = AG$ (tứ giác AEKG là hình bình hành)

$AG = AC$ (tứ giác ACFG là hình vuông)

$EA = AB$ (tứ giác ABDE là hình vuông)

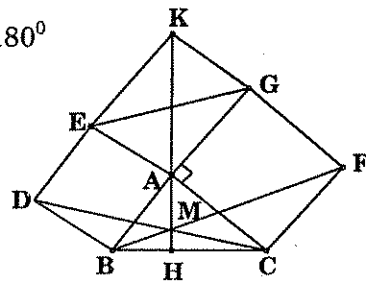
Do đó: $\triangle ABC = \triangle AEK$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = AK$

Ta lại có: $\widehat{ABC} = \widehat{EAK}$ mà $\widehat{EAK} + \widehat{BAH} = 90^\circ$

Nên $\widehat{ABC} + \widehat{BAH} = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$ hay $AK \perp BC$

Ta có: $\widehat{KAG} = \widehat{ACH}$ (cùng phụ $\widehat{HAC}$). Nên $\widehat{KAC} = \widehat{BCF}$

Lại có: $AK = BC, AC = CF$. Nên $\triangle KAC = \triangle BCF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{CBF}$



Mà $\widehat{AKC} + \widehat{BCK} = 90^\circ$ nên $\widehat{CBF} + \widehat{BCK} = 90^\circ \Rightarrow KC \perp BF$

Chứng minh tương tự, ta có: $CD \perp BK$.

Suy ra: BF, CD là các đường cao của tam giác KBC

Suy ra: $KM \perp BC$. Mà $KA \perp BC$, nên ba điểm K, A, M thẳng hàng.

Bài 5. (Lớp 8) Cho tam giác ABC cân tại A , $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 10^\circ$, $\widehat{MCB} = 20^\circ$. Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BM . Dựng điểm O sao cho tam giác OBM đều. Chứng minh ba điểm C, A, O thẳng hàng.

Lời giải

Tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 100^\circ$ nên:

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 40^\circ$$

$$\begin{aligned}\widehat{BMC} &= 180^\circ - \widehat{MBC} - \widehat{MCB} \\ &= 180^\circ - 10^\circ - 20^\circ = 150^\circ\end{aligned}$$

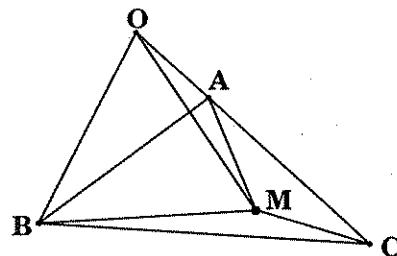
Lại có: $\widehat{BMC} + \widehat{BMO} + \widehat{CMO} = 360^\circ$

$$\begin{aligned}\widehat{CMO} &= 360^\circ - \widehat{BMC} - \widehat{BMO} \\ &= 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ\end{aligned}$$

Do đó: $\triangle MBC = \triangle MOC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MCB} = 20^\circ$

Mà $\widehat{MCA} = 20^\circ$ nên $\widehat{MCO} = \widehat{MCA} (= 20^\circ)$

Vậy hai tia CO và CA trùng nhau nên C, A, O thẳng hàng.



Bài 6. (Lớp 8) Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Trên đoạn thẳng OB lấy điểm E . Gọi F là điểm đối xứng của A qua E . Từ F kẻ $FH \perp BC$ ($H \in BC$). FK vuông góc với đường thẳng CD ($K \in CD$). Gọi I là trung điểm của CF . Chứng minh E, H, K thẳng hàng.

Lời giải

Xét $\triangle AFC$ có:

$\left. \begin{array}{l} O \text{ là trung điểm } AC \text{ (tính chất đường chéo hình chữ nhật)} \\ E \text{ là trung điểm } AF \text{ (tính chất đối xứng)} \end{array} \right\}$

$\Rightarrow OE$ là đường trung bình của $\triangle AFC$

$\Rightarrow OE \parallel CF$ và $OE = \frac{CF}{2}$, $CI = IF$ (gt)

$\Rightarrow OE \parallel CI$ và $OE = CI$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OEIC$ là hình bình hành

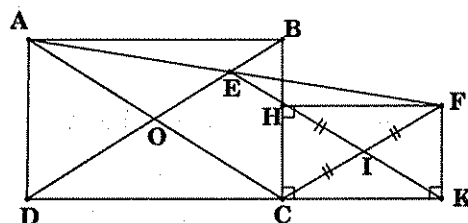
$\Rightarrow EI \parallel OC$

$IH = IC$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow \triangle IHC$ cân tại I

$\Rightarrow \widehat{IHC} = \widehat{ICH}$

$OB = OC \Rightarrow \triangle OEC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC}$



Mà $\widehat{ICB} = \widehat{OBC}$ do $OE \parallel CF$

$\Rightarrow \widehat{IHC} = \widehat{OCB}$ mà hai góc này ở vị trí so le trong

$\Rightarrow HK \parallel OC$

Mà $OE \parallel OC$ (cmt) $\Rightarrow H, E, K$ thẳng hàng (Theo tiên đề Ôclit)

Bài 7. (Lớp 8) Cho tam giác nhọn ABC , AD là đường cao. E, F lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{ADF}$. Gọi M là giao điểm của BF và CE .

Chứng minh rằng ba điểm A, M, D thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là giao điểm của AD và BF , L là giao điểm của CN và AB .

Qua N vẽ đường thẳng song song với BC cắt DL, DF lần lượt ở I, K .

Chứng minh được $DN \perp IK, NI = NK$

Do đó $\triangle DIK$ cân tại D .

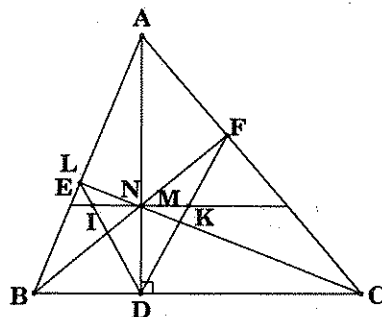
Ta có $\widehat{ADF} = \widehat{ADL}$ mà $\widehat{ADF} = \widehat{ADE}$

Nên $\widehat{ADL} = \widehat{ADE}$

$\Rightarrow$ Hai tia DE, DL trùng nhau

$\Rightarrow L \equiv E$. Do vậy $N \equiv M$

Vậy ba điểm A, M, D thẳng hàng.



Bài 8. (Lớp 9) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ đường tròn tâm A , bán kính AH . Từ B và C kẻ các tiếp tuyến BE, CF với đường tròn (E, F là các tiếp điểm không nằm trên BC). Chứng minh rằng E, A, F thẳng hàng.

Lời giải

BE, CF là các tiếp tuyến của đường tròn A (gt)

$\Rightarrow AB$ là tia phân giác của góc EAH .

$$\Rightarrow \widehat{BAH} = \frac{1}{2} \widehat{EAH}$$

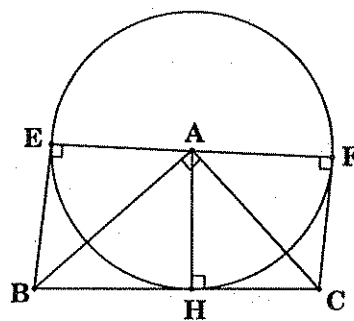
$$\Rightarrow \widehat{EAH} = 2\widehat{BAH}$$

Chứng minh tương tự có: $\widehat{HAF} = 2\widehat{HAC}$

$$\text{Do đó } \widehat{EAF} = \widehat{EAH} + \widehat{HAF} = 2(\widehat{BAH} + \widehat{HAC})$$

$$= 2\widehat{BAC} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm E, A, F thẳng hàng.



Bài 9. (Lớp 9) Cho đường tròn (O) đường kính AB , tia tiếp tuyến Ax . Từ M thuộc tia Ax vẽ tiếp tuyến thứ hai MC . Vẽ hình chữ nhật $MAOD$. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $MD = OA$ và $MD \parallel AO$ (tứ giác $MAOD$ là hình chữ nhật)

Do đó $OB = MD (= OA), OB \parallel MD$

Nên tứ giác $OMDB$ là hình bình hành $\Rightarrow OM \parallel BD$

Mặt khác có: MA, MC là các tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow OM$ là tia phân giác của góc AOC

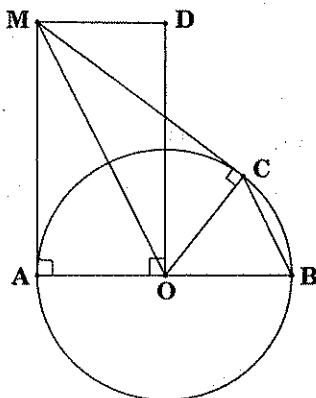
$$\Rightarrow \widehat{AOM} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}$$

Ta có: $\widehat{AOM} = \widehat{ABC} \Rightarrow OM \parallel BC$

Vì $BC \parallel OM$, $BD \parallel OM$. Nên BC, BD trùng nhau

Vậy B, C, D thẳng hàng.



Bài 10. (Lớp 9) Cho điểm A ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O), (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ dây BE của (O) song song với AC cắt (O) tại E, tia EA cắt cung BC tại F, đoạn thẳng OA cắt (O) tại I, tiếp tuyến tại I của (O) cắt AC tại K.

a) Trên tia CK lấy điểm L sao cho $CK = KL$, IL cắt (O) tại P.

Chứng minh ba điểm C, O, P thẳng hàng.

b) Gọi H là giao điểm của OA và BC, lấy $T \in EH$ sao cho $\widehat{EBT} = \widehat{CEA}$, kẻ OS vuông góc với dây EC, BT cắt dây EF tại V.

Chứng minh O, T, C thẳng hàng. Từ đó suy ra B, V, S thẳng hàng.

Lời giải

a) Chứng minh ba điểm C, O, P thẳng hàng.

Ta có: $\left. \begin{array}{l} KC = KI \text{ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)} \\ \text{mà } KC = KL \text{ (gt)} \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow KI = KL$$

Nên $\triangle CIL$ vuông tại I (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông)

Mà $\triangle CIP$ nội tiếp đường tròn (O) có cạnh huyền CP nên CP là đường kính của (O) hay C, P, O thẳng hàng.

b) Chứng minh O, T, C thẳng hàng $\Rightarrow$ B, V, S thẳng hàng.

$$\triangle ACF \sim \triangle AEC \text{ (} \widehat{AEC} = \widehat{ACF}, \widehat{CAE} \text{ chung)}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AF}{AC} = \frac{CF}{CE} \quad (1)$$

$$\triangle ABF \sim \triangle AEB \text{ (} \widehat{ABF} = \widehat{AEB}, \widehat{EAB} \text{ chung)}$$

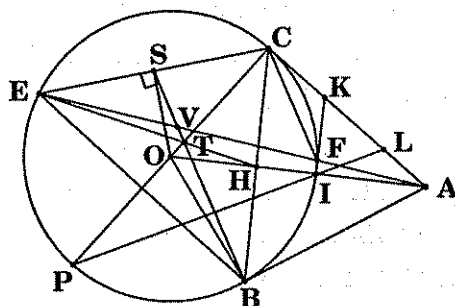
$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AB} = \frac{BF}{EB} \quad (2)$$

Mà $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\text{Nên } \frac{CF}{CE} = \frac{BF}{BE} \Rightarrow CF \cdot BE = CE \cdot BF \quad (a)$$

$$\triangle EBV \sim \triangle CBF \text{ vì: } \widehat{BEV} = \widehat{BCF} \text{ (cùng chắn } \widehat{BF}), \widehat{EBV} = \widehat{CBF} \text{ (cùng chắn } \widehat{CF})$$

$$\text{Nên: } \frac{BE}{BC} = \frac{EV}{CF} \Rightarrow BE \cdot CF = BC \cdot EV$$



Xét $\triangle CBE$ và $\triangle FBV$ có: $\widehat{ECB} = \widehat{VFB}$ (cùng chắn $\widehat{BE}$)

$$\left. \begin{aligned} \widehat{EBC} &= \widehat{EBV} + \widehat{VBC} \\ \widehat{VBF} &= \widehat{CBF} + \widehat{VBC} \\ \text{mà } \widehat{CBF} &= \widehat{EBV} (= \widehat{CEF}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{VBF}$$

$$\text{Do đó: } \triangle CBE \sim \triangle FBV \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CE}{FV} = \frac{BC}{BF} \Rightarrow CE.BF = FV.BC$$

$$BE.CF = EV.BC$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } CE.BF + BE.CF &= FV.BC + EV.BC \\ &= BC(FV + EV) \\ &= BC.EF \\ &= 2 BH.EF \text{ (HB = HC)} \end{aligned}$$

Ta lại có: $CF.BE = CE.BF$ (cmt)

$$\text{Nên } 2BE.CF = 2BH.EF$$

$$\Rightarrow BE.CF = BH.EF$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{CF} = \frac{BE}{EF} \text{ và } \widehat{EBH} = \widehat{EFC} \text{ (cùng chắn } \widehat{EC})$$

$$\Rightarrow \triangle EBH \sim \triangle EFC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{RET} = \widehat{TEB} \text{ (T } \in \text{EH)}$$

$$\Rightarrow TB = TE \Rightarrow T \text{ thuộc trung trực BE}$$

Mà $OC = OB$ (bằng bán kính (O)) $\Rightarrow O$ thuộc trung trực BE.

Do đó OT là trung trực của BE. $BE \parallel AC$ (gt) mà $OC \perp AC$ (AC là tiếp tuyến)

$$\Rightarrow OC \perp BE \Rightarrow C \text{ thuộc trung trực của BE}$$

Vậy ba điểm O, C, T thẳng hàng.

• Xét $\triangle CBE$ có hai đường trung tuyến EH và OC cắt nhau tại T.

Suy ra T là trọng tâm $\triangle CBE$ nên BT là đường trung tuyến của $\triangle CBE$

$$\Rightarrow BT \text{ đi qua trung điểm CE.}$$

$OS \perp EC \Rightarrow S$ là trung điểm của CE (sự liên hệ đường kính và dây cung).

Vậy B, V, S thẳng hàng.

Bài 11. (Lớp 9) Cho đường tròn (O; R) và điểm G ở ngoài (O) sao cho $OG > 3R$. Kẻ tiếp tuyến GE, GF (E, F là tiếp điểm). Trên cung lớn EF lấy điểm K. Tiếp tuyến tại K của (O) cắt tia GE tại A, GF tại D. Trên cung nhỏ EF kẻ tiếp tuyến cắt GE tại B, GF tại C. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh M, N, O thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}R(AB + CD)$$

$$S_{OBC} + S_{OBA} = \frac{1}{2}R(AD + BC)$$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AB + CD = AD + BC$

$$\text{Nên } S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Trên tia GA, GD lấy điểm H, I theo thứ tự sao cho $GH = AB$; $GI = CD$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \left. \begin{array}{l} S_{OAB} = S_{OHG} \\ S_{OCD} = S_{OIG} \end{array} \right\} &\Rightarrow S_{OHI} = S_{OHG} + S_{OIG} - S_{GHI} \\ &= S_{OAB} + S_{OCD} - S_{GHI} \\ &= \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{GHI} \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } S_{MAB} + S_{MED} = S_{NAB} + S_{NCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$S_{OHI} = S_{MHI} = S_{NHI}$$

Kẻ $MM' \perp HI$, $OO' \perp HI$, $NN' \perp HI$

$$\left. \begin{array}{l} S_{OHI} = \frac{1}{2} OO' \cdot HI \\ S_{MHI} = \frac{1}{2} MM' \cdot HI \\ S_{NHI} = \frac{1}{2} NN' \cdot HI \end{array} \right\} \Rightarrow OO' = MM' = NN'$$

$\Rightarrow OM \parallel HI$, $ON \parallel HI$, $MN \parallel HI$

Vậy M, O, N thẳng hàng.

Bài 12. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC. Đường trung trực của đoạn thẳng BH cắt AB ở K. Chứng minh rằng O, H, K thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{HDA} = \widehat{HEA} (= 90^\circ)$

$\Rightarrow$ Tứ giác AEHD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CHD} = \widehat{BAC} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BHC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Ta có: $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$

$\widehat{BHC} = \widehat{BOC} = 120^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHOC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BHO} + \widehat{OCB} = 180^\circ$

$\triangle OBC$ cân tại O (Vì $OB = OC$) $\Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC} = (180^\circ - \widehat{BOC}) : 2 = 30^\circ$

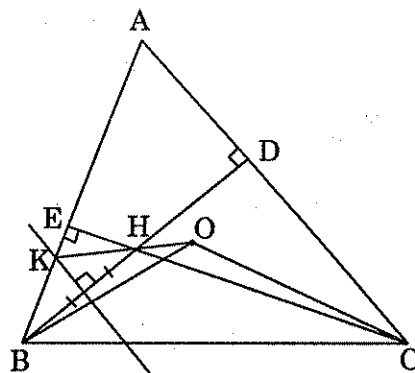
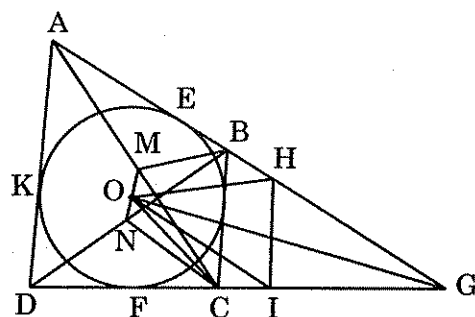
Nên $\widehat{BHO} = 180^\circ - \widehat{OCB} = 150^\circ$

K thuộc đường trung trực của BH $\Rightarrow KB = KH$

$\Rightarrow \triangle KBH$ cân $\Rightarrow \widehat{KHB} = \widehat{KBH} = 90^\circ - \widehat{BAD} = 30^\circ$

Ta có: $\widehat{KHO} = \widehat{KHB} + \widehat{BHO} = 30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$

Vậy K, H, O thẳng hàng.



Bài 13. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AD, BE, CF . Vẽ đường tròn (O) đường kính BC . Vẽ AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDM . Chứng minh rằng O, I, M thẳng hàng.

Lời giải

$$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$$

Do đó: B, C, M, F thuộc đường tròn (O) .

Xét $\triangle AME$ và $\triangle ACM$ có $\widehat{MAE}$ (chung), $\widehat{AME} = \widehat{ACM}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$$\text{Do đó } \triangle AME \sim \triangle ACM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$$

Xét $\triangle AEH$ và $\triangle ADC$ có: $\widehat{HAE}$ (chung), $\widehat{AEH} = \widehat{ADC} (= 90^\circ)$

$$\text{Do đó } \triangle AEH \sim \triangle ADC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AE.AC = AH.AD$$

Như vậy: $AH.AD = AM^2 (= AE.AC)$

Xét $\triangle AHM$ và $\triangle AMD$ có:

$$\widehat{HAM} \text{ (chung); } \frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AD} \text{ (Vì } AH.AD = AM^2)$$

$$\text{Do đó } \triangle AHM \sim \triangle AMD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{ADM}$$

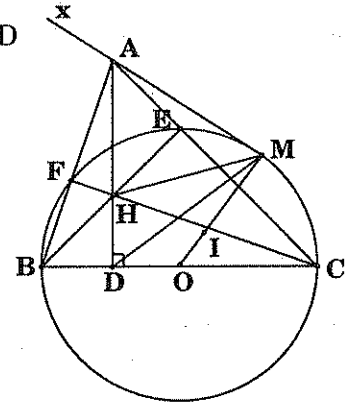
Trên nửa mặt phẳng bờ HM có chứa A vẽ tia Mx là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HDM .

Ta có: $\widehat{HMx} = \widehat{ADM}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Mà $\widehat{AMH} = \widehat{ADM}$. Do đó: $\widehat{AMH} = \widehat{HMx} \Rightarrow$ Hai tia MA, Mx trùng nhau

Vậy AM là tiếp tuyến của đường tròn $(I) \Rightarrow AM \perp IM$. Mà $AM \perp OM$

Do đó O, I, M thẳng hàng.



Bài 14. (Lớp 9) Cho tam giác ABC (không cân) nội tiếp đường tròn (O) . Cắt tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A, B, C lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F .

Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

Lời giải

Gọi E' là giao điểm của tiếp tuyến đường tròn (O) với DF .

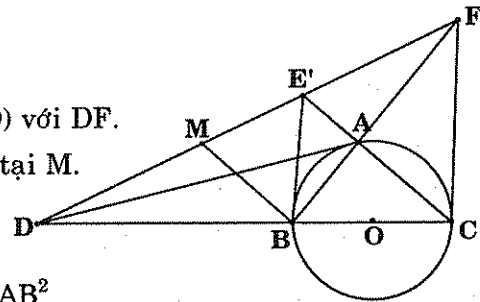
Qua B vẽ đường thẳng song song với AC cắt DF tại M .

$$\text{Ta có: } \frac{DB}{DC} = \frac{BM}{E'C'}, \frac{FA}{FB} = \frac{E'A}{BM}$$

$$\text{Nên } \frac{E'A}{E'C} = \frac{DB}{DC}, \frac{FA}{FB} = \frac{AC^2}{BC^2}. \text{ Do vậy } \frac{E'A}{E'C} = \frac{AB^2}{BC^2}$$

Từ đó có $E'B$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) . Do vậy $E' = E$

Vậy D, E, F thẳng hàng.



Bài 15. (Lớp 9) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). D là điểm trên cung BC. Tiếp tuyến tại D của đường tròn cắt đường trung trực của đoạn thẳng AD ở E. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Chứng minh rằng E, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Gọi H là giao điểm của OA và BC.

Chứng minh được $OA \perp BC$.

$\triangle BOA$ vuông tại B có BH là đường cao

$$\Rightarrow OH.OA = OB^2$$

$$OB = OD (= R)$$

$$\text{Nên } OH.OA = OD^2$$

$$\text{Xét } \triangle ODH \text{ và } \triangle OAD \text{ có } \widehat{DOH} \text{ (chung), } \frac{OD}{OA} = \frac{OH}{OD} \text{ (OH.OA = OD}^2\text{)}$$

$$\text{Do đó } \triangle ODH \sim \triangle OAD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OAD}$$

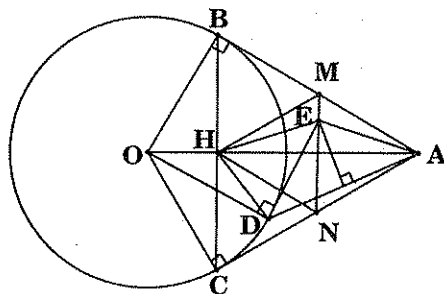
Từ đó chứng minh được OD là tiếp tuyến của đường tròn (ADH)

Tâm của đường tròn (ADH) nằm trên đường thẳng vuông góc với OD tại D và đường trung trực của AD, đó chính là điểm E.

Ta có $EH = EA$. Mặt khác: $MH = MA$, $NH = NA$

Nên E, M, N cùng thuộc đường trung trực của AH

Vậy ba điểm E, M, N thẳng hàng.



Bài 16. (Lớp 9) Cho điểm A ở ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C $\in$ (O)). M là điểm thuộc cung BC, tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M, cắt AB, AC lần lượt tại D, E. BC cắt OD, OE lần lượt ở N, K. H là giao điểm của DK và EN. Chứng minh rằng ba điểm O, H, M thẳng hàng.

Lời giải

DB, DM là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

$$\Rightarrow OD \text{ là tia phân giác góc } MOB \Rightarrow \widehat{DOM} = \frac{1}{2} \widehat{MOB}$$

$$\text{Tương tự: } \widehat{EOM} = \frac{1}{2} \widehat{MOC}$$

$$\text{Do đó } \widehat{DOE} = \widehat{DOM} + \widehat{EOM} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}. \text{ Mà } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{BC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{ABC} = \widehat{DOE} \left(= \frac{1}{2} \widehat{BOC} \right)$$

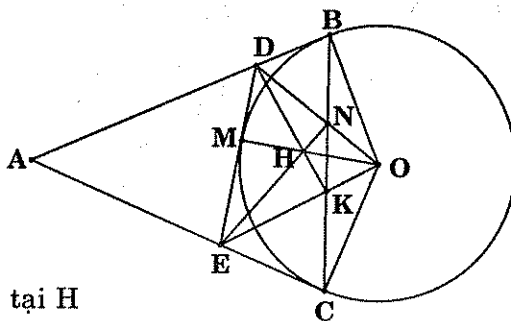
$\Rightarrow$ Tứ giác DBOK nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{DKE} = \widehat{OBD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DK \perp OE$$

Tương tự $EN \perp OD$

$\triangle ODE$ có DK, EN là hai đường cao cắt nhau tại H



$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ODE

Mà OM là đường cao của tam giác ODE (Vì $OM \perp DE$). Do đó OM đi qua H

Vậy ba điểm O, H, M thẳng hàng.

Bài 17. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Đường tròn tâm (O) đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại F và E, BE cắt CF tại H. Vẽ dây EK của đường tròn (O) vuông góc với BC, FK cắt BC tại D. Chứng minh rằng A, H, D thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BE \perp AC$

$\widehat{BFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CF \perp AB$

ΔABC có BE, CF là hai đường cao cắt nhau tại H

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow AH \perp BC$

Mặt khác: xét đường tròn (O) có $BC \perp EK$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{EC} = \widehat{KC} \Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{HFD}$

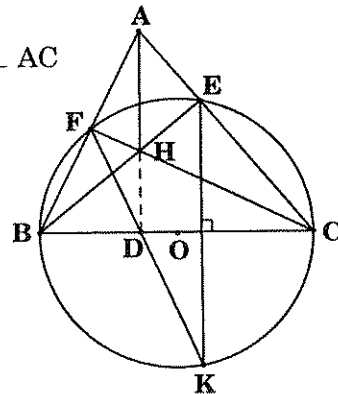
$\Rightarrow$ Tứ giác BFHD nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HDC} = \widehat{BFH} = 90^\circ \Rightarrow HD \perp BC$

Ta có: $AH \perp BC, HD \perp BC$

$\Rightarrow AH, HD$ trùng nhau

Vậy A, H, D thẳng hàng.



Bài 18. (Lớp 9) Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB. Vẽ DH vuông góc EF tại H. S là điểm trên tia HC sao cho $HS = HB$. Gọi K là trung điểm của BS. Chứng minh rằng H, D, K thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $BM \perp EF$ tại M, $CN \perp EF$ tại N.

Gọi T là giao điểm của BN và DH.

Mà $DH \perp EF \Rightarrow BM \parallel CN \parallel DH$

$\widehat{BFM} = \widehat{AFE}$ (đối đỉnh), $\widehat{CEN} = \widehat{AEF}$ (đối đỉnh),

$\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$ (AE = AF)

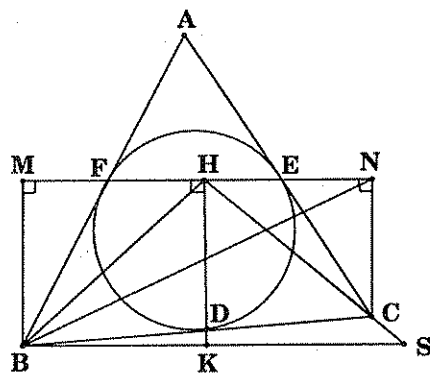
Suy ra: $\widehat{BFM} = \widehat{CEN}$

$\Delta MFB \sim \Delta NEC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BF}{CE} = \frac{BM}{CN}$

$BF = BD$ và $CD = CE$, nên $\frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD}$

ΔBMN có $TH \parallel BM \Rightarrow \frac{MH}{NH} = \frac{BT}{NT}$

ΔBNC có $TK \parallel CN \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{BT}{NT}$



$$\text{Do vậy: } \frac{MH}{NH} = \frac{BM}{CN}$$

$$\text{Xét } \triangle BHM \text{ và } \triangle CHN \text{ có: } \widehat{BMH} = \widehat{CNH} (= 90^\circ), \frac{BM}{CN} = \frac{MH}{NH}$$

$$\text{Do đó: } \triangle BHM \sim \triangle CHN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BMH} = \widehat{CNH}$$

$$\text{Mà } \widehat{BMH} + \widehat{BHT} = \widehat{CNH} + \widehat{CHT} (= 90^\circ) \text{ Nên } \widehat{BHT} = \widehat{CHT}$$

$$\triangle HBS \text{ có } HB = HS \Rightarrow \triangle HBS \text{ cân tại H}$$

Mà HK là đường trung tuyến nên HK cũng là đường phân giác

Ta có hai tia HK, HD trùng nhau

Vậy H, D, K thẳng hàng.

Bài 19. (Lớp 9) Cho đường tròn (O; R) và điểm A ở ngoài đường tròn sao cho $OA = 3R$. Vẽ đường tròn (I) đường kính OA cắt (O) tại hai điểm B và C, đường kính BE của (O), BF của (I). Gọi H, N, G lần lượt là trung điểm của BC, OI, AB. Qua O kẻ đường thẳng song song BF cắt IG tại M. Chứng minh E, C, M, F thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\widehat{OBA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow OB \perp AB$

G là trung điểm của AB $\Rightarrow IG \perp AB$ (liên hệ đường kính và dây cung) nên $OB \parallel IM$ (cùng vuông góc AB, $M \in OI$)

Mà $OM \parallel BI$ (gt). Do đó tứ giác OBMI là hình bình hành (tứ giác có hai cặp cạnh song song) $\Rightarrow N$ là trung điểm của BM (tính chất đường chéo hình bình hành)

Xét $\triangle BCE$ có: O, H lần lượt là trung điểm của BE và BC.

Nên HO là đường trung bình của $\triangle BCE$

$$\Rightarrow HO \parallel CE \quad (1)$$

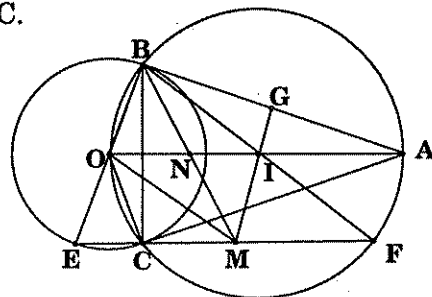
Xét $\triangle BCM$ có: O, N lần lượt là trung điểm của BE và BM.

Nên ON là đường trung bình của $\triangle BEM$.

$$\Rightarrow NO \parallel ME \quad (2)$$

Chứng minh tương tự: $OI \parallel EF \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) và $(H, N \in OI) \Rightarrow E, C, M, F$ thẳng hàng.



Bài 20. (Lớp 9) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$), đường cao AH. Gọi K là trung điểm của AB, đường tròn tâm I đường kính AC cắt KC tại F. Kẻ đường kính FD tiếp tuyến tại D cắt đường thẳng AB, KH tại N, M. Gọi T là tâm đường tròn bàng tiếp góc AKM của tam giác KMC, kẻ $TS \perp MN$ ($S \in MN$). Chứng minh K, F, C, S thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $KA = KH$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow K$ thuộc trung trực của AH.

$IA = IH$ (= bán kính đường tròn) $\Rightarrow I$ thuộc trung trực AH.

$\triangle AKH$ cân tại K nên KI là phân giác $\widehat{MKN}$ (tính chất tam giác cân)

T là tâm đường tròn bàng tiếp góc NKM của $\triangle KMN \Rightarrow T \in$ tia KI.

IF // TS (cùng vuông góc MN) $\Rightarrow$ KIF = KTS (a)

Kẻ TL $\perp$ tia KN, IA $\perp$ KN $\Rightarrow$ IA // TL

$$\Rightarrow \frac{IA}{TL} = \frac{KI}{KT} \text{ (hệ quả định lý Talét trong } \Delta KLT)$$

Mà TL = TS (tính chất đường phân giác)

$$\text{(bán kính đường tròn (T))} \Rightarrow \frac{IF}{TS} = \frac{KI}{KT} \quad (b)$$

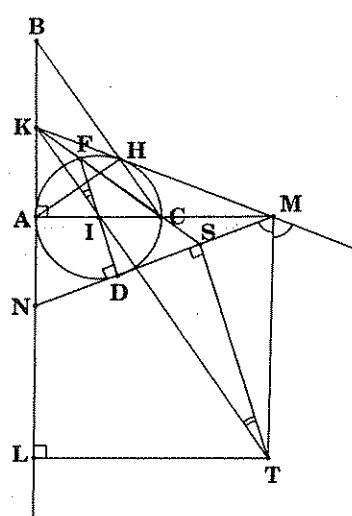
Từ (a) và (b) suy ra: $\Delta KIF \sim \Delta KTS$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IKF} = \widehat{TKS}$

$\Rightarrow$ Tia KF trùng tia KS (I $\in$ KT)

$\Rightarrow$ K, F, S thẳng hàng.

Mà F $\in$ KC

Vậy K, F, C, S thẳng hàng.



Bài 21. (Lớp 9) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi O_1, O_2 là tâm đường tròn đi qua bốn trọng tâm (đi qua bốn trực tâm) của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC.

Chứng minh rằng O, O_1, O_2 thẳng hàng.

Bài toán phụ:

Bài 1: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ nội tiếp.

Bài 2: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự là trực tâm của tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp.

Lời giải

Bài 1:

Gọi M là trung điểm cạnh BC.

$$\text{Ta có: } \frac{MA'}{MD} = \frac{MD'}{MA} = \frac{1}{3} \text{ nên } A'D' \parallel AD \text{ và } A'D' = \frac{1}{3} AD$$

Tương tự có: $B'C' \parallel BC, C'D' \parallel CD, A'B' \parallel AB$.

$$\Rightarrow \widehat{B'C'D'} = \widehat{BCD}, \widehat{B'A'D'} = \widehat{BAD}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{B'C'D'} + \widehat{B'A'D'} = 180^\circ$$

Do đó: tứ giác $A'B'C'D'$ nội tiếp đường tròn tâm O_1

Bài 2:

Gọi M là trung điểm cạnh BC.

Ta có: $OM \perp BC$. Chứng minh được $AD_1 = 2 OM = DA_1$;

$AD_1 \parallel OM \parallel DA_1$

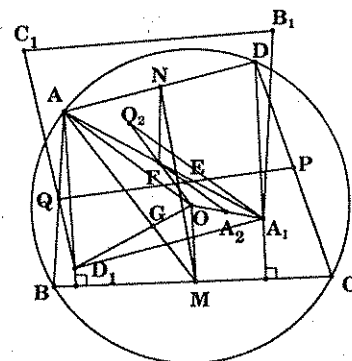
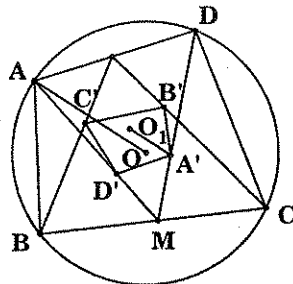
Như vậy: $AD \parallel A_1D_1; AD = A_1D_1$

Tương tự có: $A_1B_1 \parallel AB, B_1C_1 \parallel BC, C_1D_1 \parallel CD$

$$\text{Do đó: } \widehat{D_1A_1B_1} = \widehat{DAB}, \widehat{D_1C_1B_1} = \widehat{DCB}.$$

$$\text{Do đó: } \widehat{D_1A_1B_1} + \widehat{D_1C_1B_1} = 180^\circ$$

Vậy tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp đường tròn tâm O_2 .



Trở lại bài toán: Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm và A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC .

Chứng minh được O, A', A_1 thẳng hàng và $A'A_1 = 2 OA'$ (1)

Áp dụng bài toán phụ, ta có tứ giác $A'B'C'D'$ nội tiếp đường tròn tâm O_1 , tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp đường tròn tâm O_2 và

$$\frac{OA'}{OA_1} = \frac{O_1A'}{O_2A_1} = \frac{1}{3}$$

Mặt khác do $A'D' \parallel AD \parallel A_1D_1$ và $O_1A' \parallel OA \parallel O_2A_1$ nên $\widehat{OA'O_1} = \widehat{OA_1O_2}$

Do đó: hai tam giác $OA'O_1$ và OA_1O_2 đồng dạng. (2)

Từ (1) và (2) giúp có được O, O_1, O_2 thẳng hàng.

* **Nhận xét:** Từ bài toán trên giúp chúng ta có được điều rất thú vị sau:

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O thì các điểm O, E, O_1, F, O_3 thẳng hàng.

Trong đó:

- E là giao điểm hai đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác $ABCD$.
- O_1 là tâm đường tròn đi qua bốn trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC .
- O_2 là tâm đường tròn đi qua bốn trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC .

F là tâm đường tròn đi qua bốn tâm đường tròn O -le của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC .

Điều có ở trên được nhà giáo Vũ Hữu Chin (Giáo viên trường THCS Hồng Bàng, tỉnh Hải Phòng) viết trong bài “Đường thẳng Euler trong tam giác và bài toán tương tự trong tứ giác nội tiếp” trên tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

Bài 22. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BM, CN cắt nhau tại H . Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại K , Gọi I là trung điểm BC .

Chứng minh rằng K, H, I thẳng hàng.

Lời giải

Chứng minh K, H, I thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{AKH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow AK \perp HK \quad (1)$$

Kẻ đường kính AA' của (O) .

Khi đó $\widehat{AKN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AA')

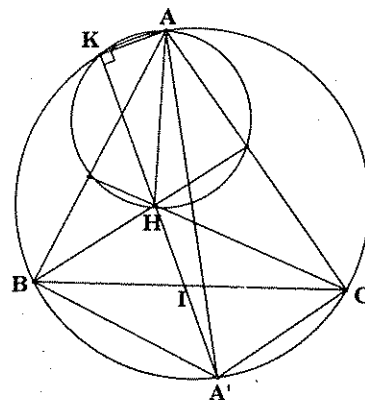
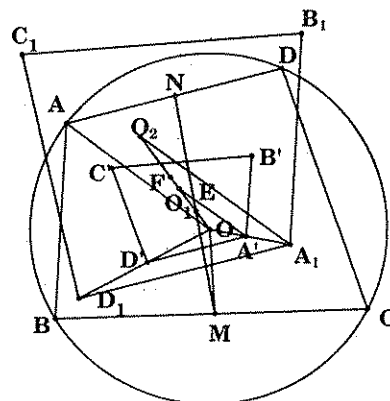
$$\text{Hay } A'K \perp AK \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: K, H, A' thẳng hàng.

Tương tự: $CA' \perp AC, BH \perp AC \Rightarrow BH \parallel CA'$

Mà $CH \parallel BA' \Rightarrow$ Tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành nên I thuộc HA'

Vậy I, K, H thẳng hàng.



Bài 23. (Lớp 9) Cho hai đường tròn (O) , (O') cắt nhau tại A, B. Vẽ cát tuyến CBD của (O) , (O') ($C \in (O)$, $D \in (O')$), B nằm giữa C và D). M là điểm trên tia đối của tia AB. Gọi E là giao điểm của MC và đường tròn (O) (E khác C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác EMA cắt đường tròn (O') ở N. Chứng minh rằng M, N, D thẳng hàng.

Lời giải

$$\widehat{AEC} = \widehat{MNA} \text{ (tứ giác EMNA nội tiếp)}$$

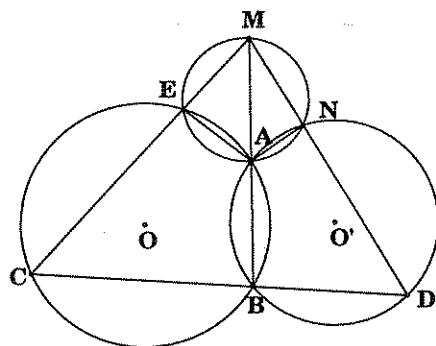
$$\widehat{ABD} = \widehat{AEC} \text{ (tứ giác EABC nội tiếp)}$$

$$\text{Nên } \widehat{MNA} = \widehat{ABD}$$

$$\text{Mà } \widehat{AND} + \widehat{ABD} = 180^\circ \text{ (tứ giác ANDB nội tiếp)}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \widehat{MND} &= \widehat{AND} + \widehat{MNA} \\ &= \widehat{AND} + \widehat{ABD} = 180^\circ \end{aligned}$$

Vậy M, N, D thẳng hàng.



Bài 24. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các tiếp tuyến tại B, C với (O) cắt nhau tại D. Đường thẳng qua D song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt AB ở E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE cắt AC ở F (F khác A). Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải

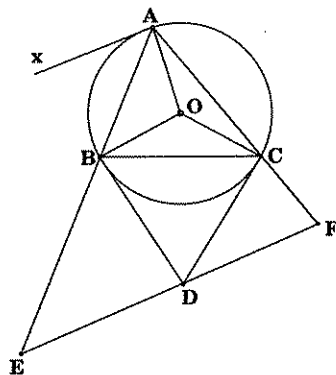
Ta có: $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$$\text{Và } \widehat{xAB} = \widehat{BED} \text{ (so le trong và Ax // DE)} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BED}$$

$$\text{Mặt khác: Tứ giác BCEF nội tiếp} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BEF}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{BED} = \widehat{BEF} (= \widehat{ACB}) \Rightarrow \text{Hai tia ED, EF trùng nhau}$$

Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.



Bài 25. (Lớp 9) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn $(O; R)$ ($\widehat{A} \neq 90^\circ$, $\widehat{B} \neq 90^\circ$), đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt đường thẳng vuông góc với BC tại B ở N. Đường thẳng vuông góc với AD tại D cắt đường thẳng vuông góc với BC tại C ở M. Gọi I là giao điểm của MN và AC. Chứng minh rằng ba điểm B, I, D thẳng hàng.

Lời giải

Gọi E là giao điểm của AC và DM, F là giao điểm của BD và CM, I' là giao điểm của MN và BD.

$$\triangle DAE \sim \triangle CBF \text{ (g.g)} \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{BFC} \Rightarrow \text{Tứ giác DCEF nội tiếp.}$$

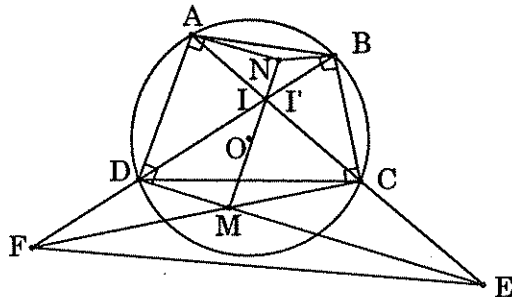
$$\triangle NAB \sim \triangle MEF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{NA}{ME} = \frac{NB}{MF}$$

$$\triangle IDE \text{ có } AN \parallel DE \Rightarrow \frac{NA}{ME} = \frac{IN}{IM}$$

$$\triangle I'FC \text{ có } NB \parallel MF \Rightarrow \frac{NB}{MF} = \frac{I'N}{I'M}$$

$$\text{Do đó: } \frac{IN}{IM} = \frac{I'N}{I'M} \Rightarrow I = I'$$

Vậy ba điểm B, I, D thẳng hàng.



Bài 26. (Lớp 9) Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Các điểm B, C nằm trên (O) , các điểm tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (O') . Gọi M là giao điểm thứ hai N . Chứng minh rằng C, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ tiếp tuyến chung trong của $(O), (O')$ cắt BD tại I .

$IA = IB, IA = ID \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại A .

Nên $\widehat{BCN} = 90^\circ$

BD và CE đối xứng qua OO'

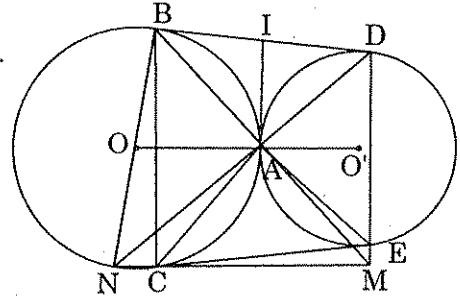
$\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{AE} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ADM}$

$\Rightarrow \triangle BDM$ cân tại D

Nên A là trung điểm của BM . Ta có: $AC = AB = AM \Rightarrow \triangle BCM$ vuông tại C

Vì $BC \perp CN, BC \perp CM$

Vậy C, M, N thẳng hàng.



Bài 27. (Lớp 9) Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn (O') vẽ nửa đường tròn (I) đường kính OA . C là điểm trên nửa đường tròn (I) . Tia OC cắt nửa đường tròn (I) ở D . Đường thẳng qua D vuông góc với AB cắt AC ở E . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ODE cắt nửa đường tròn (O) ở M (M khác D). Chứng minh rằng A, E, M thẳng hàng.

Lời giải

Gọi M' là giao điểm của AC và nửa đường tròn (O) .

Ta có: $\widehat{AM'D} = \frac{1}{2} \widehat{AOD}$,

$\widehat{ACO} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\triangle OAD$ có DE, AC là hai đường cao cắt nhau tại E .

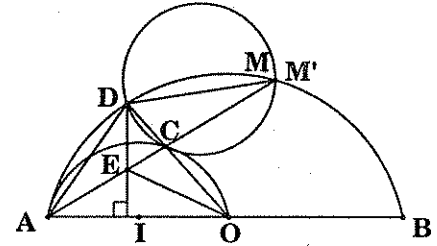
$\Rightarrow E$ là trực tâm tam giác $OAD \Rightarrow OE \perp AD$

Mà $OA = OD (= R) \Rightarrow \triangle OAD$ cân tại O

$\Rightarrow OE$ là tia phân giác $\widehat{AOD} \Rightarrow \widehat{EOD} = \frac{1}{2} \widehat{AOD}$

Ta có: $\widehat{EOD} = \widehat{EM'D} \Rightarrow$ Tứ giác $DEOM'$ nội tiếp, nên $M = M'$.

Vậy A, E, M thẳng hàng.



Bài 28. (Lớp 7) Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm M trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA}$. Gọi N là trung điểm cạnh AB . Chứng minh rằng ba điểm C, M, N thẳng hàng.

(Giải toán có thưởng, BDVH 123 Nguyễn Cửu Đàm, phường Tân Sơn Nhì, quận Tân Phú, TP.HCM, năm học 2012 – 2013)

Lời giải

Gọi K là giao điểm của CM và AB . Vẽ $AD \perp CM$ tại D , $BE \perp CM$ tại E , $BF \perp AM$ tại F .

$\triangle FAB = \triangle DCA$ (cạnh huyền-góc nhọn) $\Rightarrow BF = AD$

Ta có: $\widehat{MBC} = \widehat{MCA}$, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BCM}$$

Do đó: $\widehat{AMB} = \widehat{BMC}$. Mà $\widehat{AME} = \widehat{CMF}$ (đối đỉnh)

$$\text{Do đó: } \widehat{EMB} = \widehat{FMB}$$

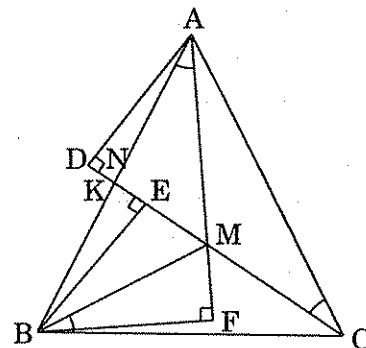
$\triangle BEM = \triangle BFM$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$$\Rightarrow BE = BF \text{ nên có } AD = BE$$

$$\triangle KAD = \triangle KBE \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AK = BK$$

$$\text{Do đó: } K \equiv N$$

Vậy ba điểm C, M, N thẳng hàng.



Bài 29. (Lớp 8) Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 40^\circ$. Lấy điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MBC} = 40^\circ$ và $\widehat{MCB} = 20^\circ$. Điểm N trên cạnh BC sao cho $CN = CM$. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

(Giải toán có thưởng, BDVH 123 Nguyễn Cửu Đàm, phường Tân Sơn Nhì, quận Tân Phú, TP.HCM, năm học 2012 – 2013)

Lời giải

Vẽ hình thang cân MBCD ($MD \parallel BC$)

Gọi E là giao điểm của CM và AB, K là trung điểm của MD.

$$\text{Ta có: } \widehat{BEC} = 180^\circ - (\widehat{EBC} + \widehat{ECB}) = 90^\circ$$

$$\triangle EBM \text{ vuông tại E có } \widehat{EBM} = 30^\circ \text{ nên chứng minh được } EM = \frac{MB}{2}$$

$$\widehat{DCB} = \widehat{MBC} = 40^\circ, \widehat{MCB} = 20^\circ$$

$$\text{Nên } \widehat{DMC} = \widehat{DCM} = 20^\circ \Rightarrow \triangle DMC \text{ cân tại D} \Rightarrow MD = CD$$

$$\text{Nên } MB = MD. \text{ Do đó: } EM = KM$$

$$\triangle ABM = \triangle ACD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AM = AD \Rightarrow \triangle AMD \text{ cân tại A.}$$

$$\text{Do đó: } AK \perp MD, \widehat{MAK} = \widehat{DAK}$$

$$\triangle AEM = \triangle AKM \text{ (cạnh huyền-cạnh góc vuông)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EAM} = \widehat{KAM}. \text{ Do vậy } \widehat{MAC} = 30^\circ$$

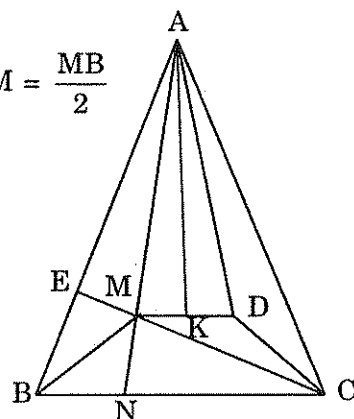
$$\widehat{AMC} = 180^\circ - (\widehat{MAC} + \widehat{ACM}) = 100^\circ$$

$$\triangle CMN \text{ cân tại C (Vì } CM = CN) \text{ có } \widehat{MCN} = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{CMN} = (180^\circ - \widehat{MCN}) : 2 = 80^\circ$$

$$\text{Do đó: } \widehat{AMC} + \widehat{CMN} = 100^\circ + 80^\circ = 180^\circ$$

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.



Bài 30. (Lớp 9) Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB.

Gọi M là giao điểm của BE và CF. Ký hiệu $S_{ABC} = S$, $S_{AEF} = S_1$, $S_{BDF} = S_2$, $S_{CDE} = S_3$

Chứng minh rằng nếu $S \leq \frac{4}{9}(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$ thì ba điểm A, M, D thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $BH \perp AC$ tại H, $FK \perp AC$ tại K $\Rightarrow BH \parallel FK$

$$\Delta ABH \text{ có } FK \parallel BH \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{FK}{BH}$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AE \cdot FK}{\frac{1}{2} AC \cdot BH} = \frac{AE \cdot AF}{AC \cdot AB}$$

$$\text{Do đó: } \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \sqrt{\frac{AE}{AC} \cdot \frac{AF}{AB}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AE}{AC} + \frac{AF}{AB} \right)$$

$$\text{Như vậy: } \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AE}{AC} + \frac{AF}{AB} \right) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự có: } \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{BF}{AB} + \frac{BD}{BC} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{CD}{BC} + \frac{CE}{AE} \right) \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) có: } \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow S \geq \frac{4}{9} (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$$

$$\text{Mà } S \leq \frac{4}{9} (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2 \text{ (gt). Do đó: } S = \frac{4}{9} (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra, do vậy ta có: } \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}, \frac{BF}{AB} = \frac{BD}{BC}, \frac{CD}{BC} = \frac{CE}{AE}$$

$$\Leftrightarrow EF \parallel BC, DF \parallel AC, DE \parallel AB$$

$$\Leftrightarrow D, E, F \text{ lần lượt là trung điểm của } BC, AC, AB.$$

Như vậy AD, BE, CF đồng quy

Vậy A, M, D thẳng hàng.

Bài 31. (Lớp 9) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Dựng đường tròn tâm O đường kính AH cắt AB tại E, cắt AC tại F. Chứng minh E, O, F thẳng hàng.

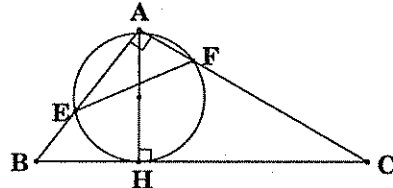
(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT thành phố Cần Thơ, năm học 2011 – 2012)

Lời giải

$$\text{Ta có: } \widehat{EAF} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow EF \text{ là đường kính của đường tròn (O)}$$

$$\Rightarrow E, O, F \text{ thẳng hàng.}$$



Bài 32. (Lớp 9) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ A và B vẽ hai dây cung AC và BD cắt nhau tại N. Hai tiếp tuyến Cx, Dy của đường tròn cắt nhau tại M. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC. Chứng minh rằng P, M, N thẳng hàng.

(Trích đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9, TP. Pleiku, tỉnh Gia Lai, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

Gọi K là trung điểm của PN.

$\triangle CNP$ vuông tại C, CK là đường trung tuyến $\Rightarrow CK = PK$

$\Rightarrow \triangle KPC$ cân tại K $\Rightarrow \widehat{KPC} = \widehat{KCP}$

$OB = OC (= R) \Rightarrow \triangle OBC$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC}$

Nên $\widehat{KCP} + \widehat{OCB} = \widehat{KPC} + \widehat{OBC} = 90^\circ$

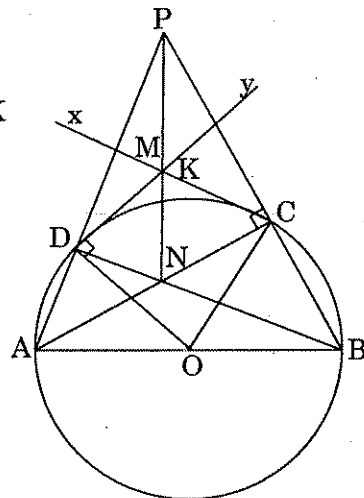
Do đó: $\widehat{KCO} = 90^\circ$

$\Rightarrow KC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Tương tự KP là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Do đó: K và M trùng nhau

Vậy P, M, N thẳng hàng.



Bài 33. (Lớp 9) Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính BC và một điểm A trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H $\in$ BC). Gọi I, K lần lượt là hai điểm đối xứng của H qua AB, AC. Chứng minh rằng ba điểm I, A, K thẳng hàng.
(Trích đề thi vào trường THPT Chu Văn An và Hà Nội – Amsterdam, năm học 2002 – 2003)

Lời giải

Ta có: H, I đối xứng qua AB (gt) $\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{BAI}$

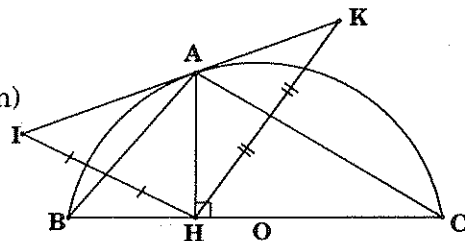
Và H, K đối xứng qua AC (gt) $\Rightarrow \widehat{HAC} = \widehat{KAC}$

Mặt khác: $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó: $\widehat{IAK} = \widehat{IAH} + \widehat{HAK}$

$$= 2\widehat{BAH} + 2\widehat{HAC} = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

Vậy ba điểm I, A, K thẳng hàng.



Bài 34. (Lớp 9) Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, các tiếp điểm của đường tròn (O) với các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Kẻ BB' vuông góc với AO, AA' vuông góc với BO. Chứng minh D, E, A', B' thẳng hàng.
(Trích đề thi vào lớp 10, THPT tỉnh Bắc Giang, năm học 2008 – 2009)

Lời giải

Ta có: $\widehat{OA'A} = \widehat{OEA} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác OAEA' nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OA'E} + \widehat{OAE} = 180^\circ$

Mặt khác: $\widehat{AA'B} = \widehat{AB'B} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác BAA'B' nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BA'B'} = \widehat{BAB'}$

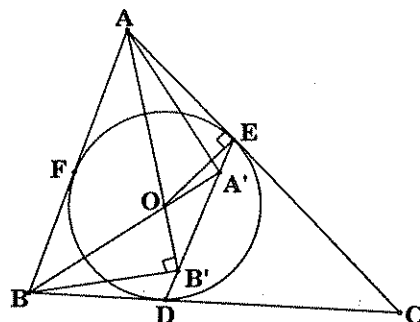
Mà $\widehat{BAB'} = \widehat{OAE}$

Do đó: $\widehat{OA'E} + \widehat{BA'B'} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ E, A', B' thẳng hàng.

Chứng minh tương tự cũng có: D, A', B' thẳng hàng.

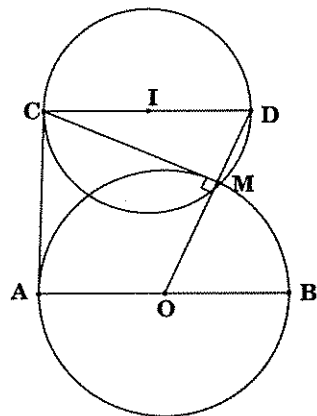
Vậy bốn điểm D, E, A', B' thẳng hàng.



Bài 35. (Lớp 9) Cho đường tròn (O) đường kính AB, M là điểm thuộc đường tròn (O) (M khác các điểm A, B). Các tiếp tuyến với (O) tại A và M cắt nhau ở C. Đường tròn (I) đi qua M tiếp xúc với đường thẳng AC tại C, CD là đường kính của đường tròn (I). Chứng minh rằng ba điểm O, M, D thẳng hàng.
(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Lam Sơn, tỉnh Thanh Hóa, năm học 2012 – 2013).

Lời giải

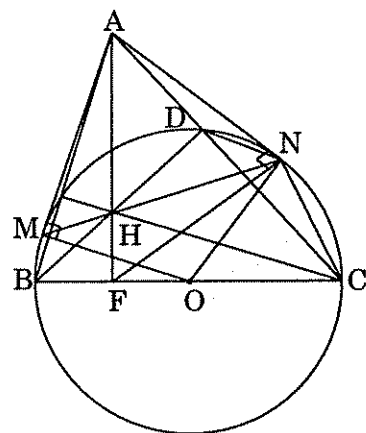
CM là tiếp tuyến của (O)
 $\Rightarrow CM \perp OM \Rightarrow \widehat{OMC} = 90^\circ$
 Mặt khác: $\widehat{CMD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 Ta có: $\widehat{OMD} = \widehat{OMC} + \widehat{CMD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
 Vậy ba điểm O, M, D thẳng hàng.



Bài 36. (Lớp 9) Cho đường tròn tâm O, đường kính BC = 2R, điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho tam giác ABC nhọn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là hai tiếp điểm). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. F là giao điểm của AH và BC. Chứng minh ba điểm M, N, H thẳng hàng.
(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp THPT chuyên tỉnh Bắc Ninh, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

BH cắt AC tại D
 Ta có: $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = \widehat{AFO} = 90^\circ$
 $\Rightarrow M, N, F$ cùng thuộc đường tròn đường kính OA.
 $\Rightarrow M, N, F, O, A$ cùng thuộc một đường tròn
 $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AFN}$ (1)
 Xét $\triangle ADH$ và $\triangle AFC$ có $\widehat{DAN}$ (chung), $\widehat{ADH} = \widehat{AFC} (= 90^\circ)$
 Do đó $\triangle ADH \sim \triangle AFC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AD \cdot AC = AH \cdot AF$
 Xét $\triangle AND$ và $\triangle CAN$ có:



$\widehat{NAD}$ (chung), $\widehat{AND} = \widehat{ACN}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)
 Do đó $\triangle AND \sim \triangle CAN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AD}{AN} \Rightarrow AD \cdot AC = AN^2$
 Ta có: $AH \cdot AF = AN^2 (= AD \cdot AC) \Rightarrow \frac{AH}{AN} = \frac{AN}{AF}$
 Xét $\triangle AHN$ và $\triangle ANF$ có: $\widehat{HAN}$ (chung), $\frac{AH}{AN} = \frac{AN}{AF}$
 Do đó $\triangle AHN \sim \triangle ANF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{AFN}$ (2)
 Từ (1) và (2) có $\widehat{ANM} = \widehat{ANH}$. Suy ra hai tia NH, NM trùng nhau
 Vậy ba điểm M, N, H thẳng hàng.

CÁC GIẢI PHÁP VÀ CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG CỦA NHÀ GIÁO HUỖNH DUY THỦY

Trong chương trình hình học, bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng là một trong những dạng bài trọng tâm, thường gặp và hàm chứa một mảng kiến thức khá phong phú. Với bài viết này, tác giả xin trao đổi ý tưởng theo hướng khai thác, phát hiện, từ đó hình thành và tường minh giải pháp xử lý có đường nét.

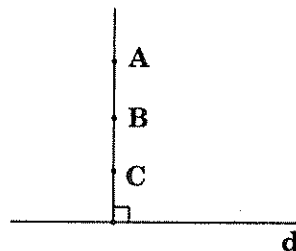
Ở những bài toán phức tạp, việc xây dựng giải pháp cần ở người làm toán có “độ rộng”, “chiều sâu” kiến thức, có nhãn quan và cảm nhận tinh tế. Điều này có được qua tích, “va chạm” và trải nghiệm với nhiều dạng bài phức tạp.

Để “nhìn” bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng, dưới góc “nhìn” có “ý tứ”, tác giả nêu các giải pháp sau:

Giải pháp 1: Hai đường thẳng vuông góc

- + Xét bài toán chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- + Giải pháp vận dụng tính chất hai đường thẳng vuông góc như sau:

- Xác định một đường thẳng d.
- Chứng minh $\begin{cases} AB \perp d \\ AC \perp d \end{cases}$
- Dựa theo tính chất “qua một điểm, kẻ được duy nhất một đường thẳng đã cho” (hình học phẳng)
- Như thế: ba điểm A, B, C cùng nằm trên 1 đường thẳng, tức là A, B, C thẳng hàng.



Bài 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A.

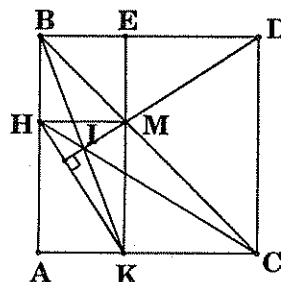
Với mỗi điểm M nằm trên đường thẳng BC (M khác với các đỉnh B và C). Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các đường thẳng AB và AC. I là giao điểm của các đường thẳng CH và BK.

Chứng minh rằng đường thẳng MI luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường thẳng BC.

Lời giải

- Dựng hình vuông ABDC.
- Ta được đỉnh D là điểm cố định.
- Ta có: $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại A.
- Suy ra: $\triangle MKC$ là tam giác vuông cân tại K
- Từ đó, ta được: $KC = MK = HA$
- Hai tam giác vuông HAC và KCD có: $\begin{cases} HA = KC \\ AC = CD \end{cases}$

Nên $\triangle HAC = \triangle KCD$. Suy ra $\widehat{HCA} = \widehat{KDC}$



Mặt khác: $\widehat{HCA} + \widehat{HCD} = 90^\circ$. Nên $\widehat{KDC} + \widehat{HCD} = 90^\circ$

Do đó: $HC \perp DK$ (1)

– Chứng minh tương tự, ta nhận được: $DH \perp BK$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $\triangle DHK$ có hai đường cao xuất phát từ các đỉnh H và K, cắt nhau tại I. Như vậy I là các trực tâm $\triangle DHK$.

Do đó: $DI \perp HK$ (3)

Gọi E là giao điểm của các đường thẳng MK và BD.

– Hai tam giác vuông HMK và MED có: $\begin{cases} MK = ED \text{ (vì cùng bằng KC)} \\ HM = ME \text{ (vì cùng bằng BE)} \end{cases}$

Nên $\triangle HMK = \triangle MED$. Suy ra: $\widehat{MHK} = \widehat{EMD}$

Do đó: $DM \perp HK$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: ba điểm D, M, I thẳng hàng.

Vậy khi điểm M di động trên đường thẳng BC thì đường thẳng MI luôn đi qua điểm cố định D.

Vài điều trao đổi:

– Vẽ một số hình, mỗi hình vẽ tương ứng với một vị trí của điểm M trên đường thẳng BC (M khác với B và C).

Ta phát hiện ra rằng: đường thẳng MI luôn đi qua điểm cố định D là đỉnh của hình vuông ABDC.

Từ đó, ta định hướng được cách giải bài toán.

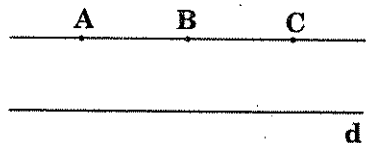
Giải pháp 2: Hai đường thẳng song song

+ Xét bài toán: Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

+ Giải pháp vận dụng tính chất hai đường thẳng song song như sau:

– Xác định một đường thẳng d

– Chứng minh $\begin{cases} AB \parallel d \\ AC \parallel d \end{cases}$



– Dựa theo tiên đềƠ-clít qua một điểm chỉ dựng được duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho, nên 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các điểm M, N, P lần lượt là các điểm chính giữa các cung nhỏ $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$, và $\widehat{AB}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. MP cắt AB tại D, MN cắt AC tại E. Chứng minh ba điểm D, I, E thẳng hàng.

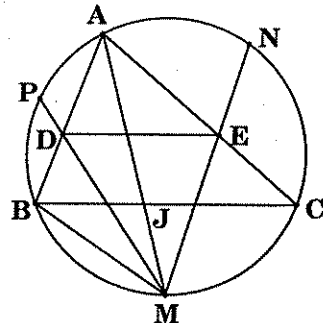
Lời giải

P là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB}$, nên:

MP là phân giác góc $\widehat{AMB} \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB}$ (1)

Lập luận tương tự, ta có: $\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}$ (2)

Mặt khác: $MB = MC$ (3)



Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$. Do đó: $DE \parallel BC$ (*)

Gọi J là giao điểm của AM với BC.

Hai tam giác $\triangle BJM$ và $\triangle ABM$ có: $\widehat{BMA}$ chung

$$\widehat{MBJ} = \widehat{MAB} \text{ (chấn hai cung } \widehat{BM} \text{ và } \widehat{MC} \text{ bằng nhau)}$$

Suy ra: $\triangle BJM \sim \triangle ABM$.

Từ đây, ta có: $\frac{AM}{BM} = \frac{AB}{BJ}$ (3)

$\triangle ABJ$ có BI là phân giác góc $\widehat{ABJ}$, nên $\frac{IA}{IJ} = \frac{AB}{BJ}$ (4)

Từ (1), (3), (4) suy ra: $\frac{DA}{DB} = \frac{IA}{IJ}$. Do đó: $DI \parallel BJ$, hay $DI \parallel BC$ (**)

Từ (*) và (**), ta suy ra: ba điểm D, I, E thẳng hàng.

Vài điều trao đổi:

Để chứng minh 3 điểm D, I, E thẳng hàng, ta nghĩ đến việc chứng minh: $\begin{cases} DE \parallel BC \\ DI \parallel BC \end{cases}$

Vì sao ta nghĩ đến việc chứng minh như thế?

Trả lời: Do P và N lần lượt là các điểm chính giữa của các cung nhỏ $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$

Từ đây ta phát hiện ra rằng: $\frac{BD}{DA} = \frac{BM}{MA}$ và $\frac{CE}{EA} = \frac{CM}{MA}$ mà $BM = CM$

Do đó: ta nhận được $DE \parallel BC$

Đến đây việc chứng minh $DI \parallel BC$ là đương nhiên ta phải nghĩ tới.

Giải pháp 3: Tổng các góc

– Giả sử cần chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng. Vận dụng giải pháp “Tổng các góc” để chứng minh góc $\widehat{ABC} = 180^\circ$

– Để “tưởng minh” việc chứng minh góc $\widehat{ABC} = 180^\circ$, thông thường ta qui về một trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1:

– “Xây dựng” điểm M như trong hình vẽ trên.

– Sau đó chứng minh $\widehat{MBA} + \widehat{MBC} = 180^\circ$

Trường hợp 2:

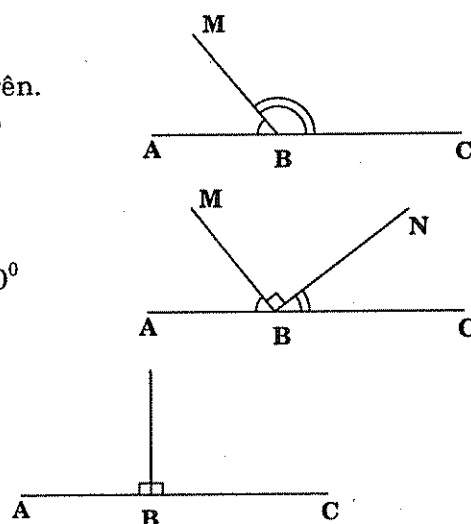
– “Hình thành” góc $\widehat{MBN} = 90^\circ$

– Sau đó ta chứng minh $\widehat{MBA} + \widehat{NBC} = 90^\circ$

Trường hợp 3:

– “Xác định” tia BM.

– Sau đó chứng minh $\widehat{MBA} = \widehat{MBC} = 90^\circ$



Trường hợp 4:

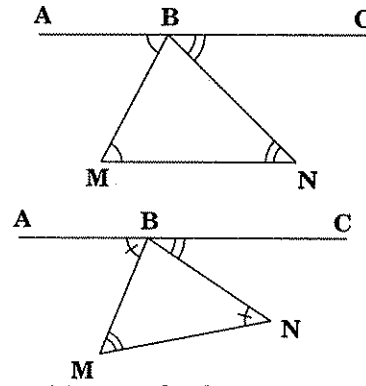
- “Thiết kế” $\triangle BMN$ như hình vẽ trên.

- Sau đó chứng minh $\begin{cases} \widehat{ABM} = \widehat{BMN} \\ \widehat{CBN} = \widehat{BNM} \end{cases}$

Trường hợp 5:

- “Tạo ra” $\triangle BMN$ như hình vẽ trên

- Sau đó chứng minh $\begin{cases} \widehat{ABM} = \widehat{BNM} \\ \widehat{CBN} = \widehat{BMN} \end{cases}$



Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (φ) tâm O. Gọi I là một điểm tùy ý nằm trên cung nhỏ BC. Kẻ $IM \perp BC$, $IN \perp AB$, $IJ \perp AC$.

1. Chứng minh rằng ba điểm M, N, J thẳng hàng.
2. Gọi D là điểm đối xứng của I qua đường thẳng AB, E là điểm đối xứng với I qua đường thẳng AC.

Chứng minh rằng ba điểm D, H, E thẳng hàng.

Lời giải

1. Chứng minh ba điểm M, N, J thẳng hàng.

Tứ giác BNIM là tứ giác nội tiếp

$$(\widehat{BNI} + \widehat{BMI} = 180^\circ) \Rightarrow \widehat{NMI} = \widehat{NBI} \quad (1)$$

Tứ giác IMJC là tứ giác nội tiếp

$$(\widehat{IMC} = \widehat{IJC} = 90^\circ) \Rightarrow \widehat{IMJ} = 180^\circ - \widehat{ICJ} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{NMI} + \widehat{IMJ} = \widehat{NBI} + 180^\circ - \widehat{ICJ}$

$$\Leftrightarrow \widehat{NMJ} = 180^\circ + \widehat{NBI} - \widehat{ICJ}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{NMJ} = 180^\circ \quad (\widehat{NBI} = \widehat{ICJ} \text{ vì tứ giác ABIC nội tiếp, } \widehat{NBI} \text{ và } \widehat{ICJ} \text{ cùng bù với } \widehat{ABI})$$

Do đó ba điểm M, N, J thẳng hàng.

2. Chứng minh ba điểm D, H, E thẳng hàng.

Gọi K là giao điểm thứ hai của đường thẳng CH với (φ) .

F là giao điểm thứ hai của đường thẳng BH với (φ) .

$$\text{Ta có: } \widehat{KAB} = \widehat{KCB} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{BAH}$$

Tương tự, ta có: $\widehat{KBA} = \widehat{HBA}$. Từ đó, suy ra: $\triangle KBA = \triangle HBA$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} KA = HA \\ KB = HB \end{cases}$$

Như vậy: AB là đường trung trực của đoạn thẳng HK

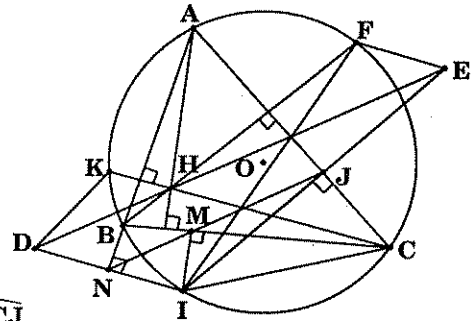
Hay hai điểm H và K đối xứng với nhau qua AB.

Mặt khác: I và D đối xứng với nhau qua AB nên HKDI là hình thang cân.

$$\text{Suy ra: } \widehat{IDH} = \widehat{IKH}. \text{ Mà } \widehat{IKH} = \widehat{IAC}, \text{ nên } \widehat{IDH} = \widehat{IAC} \quad (1)$$

Lập luận tương tự, ta được tứ giác HFEI là hình thang cân. Suy ra $\widehat{IEH} = \widehat{IFH}$

$$\text{Mà } \widehat{IFH} = \widehat{IAB}, \text{ nên } \widehat{IEH} = \widehat{IAB} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{IDH} + \widehat{IEH} = \widehat{IAC} + \widehat{IAB} = \widehat{BAC}$

Từ đó, ta có:

$$(\widehat{DHI} + \widehat{EHI}) + (\widehat{HID} + \widehat{HIE}) + (\widehat{IDH} + \widehat{IEH}) = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{DHE} + \widehat{DIE} + \widehat{BAC} = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{DHE} + 180^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{DHE} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm D, H, E thẳng hàng.

Vài điều trao đổi:

Đối với câu số 2 của bài toán, điểm then chốt nằm ở chỗ: dựng các điểm phụ K và F để tạo ra các tứ giác nội tiếp đặc biệt, từ đó biến đổi dẫn tới góc $\widehat{DHE} = 180^\circ$

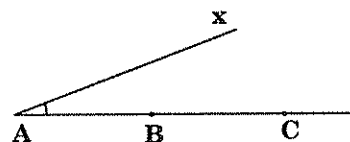
Giải pháp 4: Góc bằng nhau

+ Giả sử cần chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

+ Với một lớp khác nhiều các bài toán, ta vận dụng giải pháp “góc bằng nhau” bằng cách:

– “Xây dựng” tia Ax, sao cho hai điểm B và C nằm về cùng phía so với tia Ax.

– Sau đó chứng minh $\widehat{BAx} = \widehat{CAx}$



Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC, có trực tâm H. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM và AN tới đường tròn đường kính BC. Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Lời giải

– Gọi O là trung điểm BC, K là chân đường vuông góc hạ từ A lên cạnh BC.

Ta có: $\widehat{AMO} = \widehat{AKO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$

Suy ra 5 điểm A, M, K, O, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AO.

Do đó: $\widehat{AMN} = \widehat{AKN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AN}$)

Mặt khác: $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ (Do AM = AN). Suy ra: $\widehat{ANM} = \widehat{AKN}$ (*)

– Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ B lên cạnh AC.

Hai tam giác vuông $\triangle AHI$ và $\triangle AKC$ có góc nhọn $\widehat{KAC}$ chung nên là 2 tam giác đồng dạng.

$$\text{Suy ra: } \frac{AH}{AC} = \frac{AI}{AK} \Leftrightarrow AH \cdot AK = AI \cdot AC \quad (1)$$

Hai tam giác $\triangle ANI$ và $\triangle ACN$ có: $\widehat{CAN}$ (chung) và $\widehat{ANI} = \widehat{ACN}$

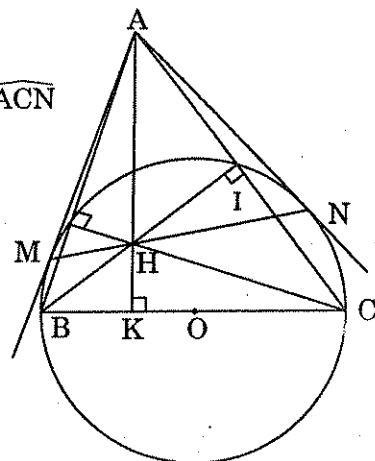
$$\text{Nên } \triangle ANI \sim \triangle ACN \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AI}{AN}$$

$$\Leftrightarrow AN^2 = AI \cdot AC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), cho ta: } AN^2 = AH \cdot AK \Leftrightarrow \frac{AN}{AK} = \frac{AH}{AN}$$

– Hai tam giác $\triangle AHN$ và $\triangle ANK$ có:

góc $\widehat{KAN}$ chung và $\frac{AN}{AK} = \frac{AH}{AN}$, nên $\triangle AHN \sim \triangle ANK$



Suy ra $\widehat{ANH} = \widehat{AKN}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $\widehat{ANH} = \widehat{ANM}$

Do đó 3 điểm M, H, N thẳng hàng.

Vài điều trao đổi:

• Với bài toán này, ta cần nhận ra rằng:

Từ giả thiết $\triangle ABC$ nhọn, ta nhận được hai kết quả sau:

1. Đỉnh A nằm phía ngoài đường tròn đường kính BC, khi đó tồn tại hai tiếp tuyến AM và AN.
 2. Trục tâm H nằm phía trong đường tròn đường kính BC và H sẽ nằm giữa hai điểm M, N.
- Từ đây, để chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng, ta nghĩ đến việc chứng minh các góc $\widehat{ANH}$ và $\widehat{ANM}$ bằng nhau.

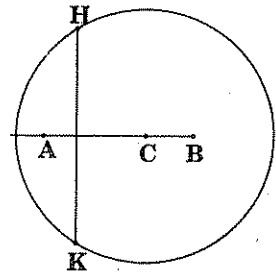
Giải pháp 5: Tính chất của dây cung

+ Giả sử cần chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

+ Dựa theo giả thiết của bài toán:

- Ta “hình thành” đường tròn (φ) có tâm C.
- Xác định một dây cung HK của đường tròn (φ) .
- Chứng minh AB là đường trung trực của dây cung HK.
- Suy ra đường thẳng AB đi qua tâm C của đường tròn (φ) ,

tức là ba điểm A, B, C thẳng hàng.



Bài 5. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (φ) tâm O, với góc $\widehat{BAD} > 90^\circ$.

Vẽ tia Ax vuông góc AD, cắt BC tại E. Vẽ tia Ay vuông góc AB, cắt CD tại F.

Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Lời giải

- Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua EF.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \widehat{BAD} + \widehat{EAF} &= \widehat{DAE} + \widehat{BAE} + \widehat{EAF} \\ &= 90^\circ + \widehat{BAF} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

- Mặt khác: $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$

$$\text{Do đó: } \widehat{EAF} = \widehat{BCD}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \widehat{EA'F} &= \widehat{OA'F} + \widehat{OA'E} \\ &= \widehat{OAF} + \widehat{OAE} = \widehat{EAF} \end{aligned}$$

Từ đó, ta nhận được: $\widehat{EA'F} = \widehat{BCD}$, hay: $\widehat{EA'F} = \widehat{ECF}$

Suy ra tứ giác ECA'F là tứ giác nội tiếp đường tròn. Do đó: $\widehat{FCA'} = \widehat{FEA'}$

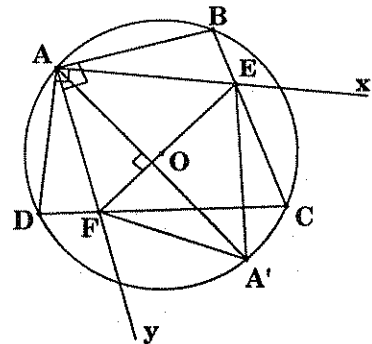
Suy ra $\widehat{FCA'} = \widehat{FEA'} = 90^\circ - \widehat{EAA'} = \widehat{DAA'}$, hay $\widehat{DCA'} = \widehat{DAA'}$

Suy ra tứ giác ADA'C nội tiếp đường tròn.

Mà các đỉnh A, C, D nằm trên đường tròn (φ) nên A' nằm trên đường tròn (φ) .

Ta có: $EF \perp AA'$ tại trung điểm của AA' . Do đó EF đi qua tâm O của đường tròn (φ) .

Kết luận: ba điểm E, O, F thẳng hàng.



Vài điều trao đổi:

– Từ giả thiết bài toán, ta chứng tỏ được $\widehat{EAF} = \widehat{BCD}$

– Ta thấy hai góc $\widehat{EAF}$ và $\widehat{ECF}$ (bằng góc $\widehat{BCD}$) được tạo bởi hai đỉnh A và C cùng nhìn đoạn EF, mà EF chính là đoạn thẳng ta cần chứng minh đi qua O. Từ đây, ta nghĩ đến việc vận dụng kết quả $\widehat{EAF} = \widehat{BCD}$ vào chứng minh bài toán.

Tuy nhiên, A và C nằm về hai phía đối với EF, do đó ta nghĩ đến việc dịch chuyển A về cùng phía với C, để tạo ra tứ giác nội tiếp, từ đây ta lấy điểm A' đối xứng với A qua EF.

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và BC. Các đường phân giác trong của các góc $\widehat{ABH}$ và $\widehat{ACH}$ cắt nhau tại P.

Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

– Gọi BB' và CC' là các đường cao trong $\triangle ABC$.

Ta có: $\widehat{ABB'} = \widehat{ACC'}$ (vì cùng phụ góc $\widehat{BAC}$)

Suy ra $\widehat{PBB'} = \widehat{B'CP}$. Do đó tứ giác BPB'C nội tiếp

Từ đó, ta có: $\widehat{BPC} = \widehat{BB'C} = 90^\circ$

Suy ra các điểm C', P, B' nằm trên đường tròn đường kính BC, tâm N.

Ta có: $\widehat{C'BP} = \widehat{PBB'}$, nên P là điểm chính giữa cung $\widehat{B'C'}$

Tứ giác AC'HB' nội tiếp trong đường tròn tâm M, nên $MC' = MB'$

Mặt khác: $NC' = NB'$. Do đó MN đi qua điểm chính giữa của cung $\widehat{B'C'}$

Vậy ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Vài điều trao đổi:

Do H là trực tâm $\triangle ABC$, nên việc dựng hai đường cao BB' và CC' là đương nhiên.

Từ đây việc phát hiện ra điểm P là điểm chính giữa cung $\widehat{B'C'}$ là không quá khó khăn.

Lúc này, để chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng, ta chỉ ra hai điểm M và N cách đều các điểm B', C'.

Giải pháp 6: Thêm điểm

+ Xét bài toán: Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

+ Giải pháp “thêm điểm” được tưởng minh như sau:

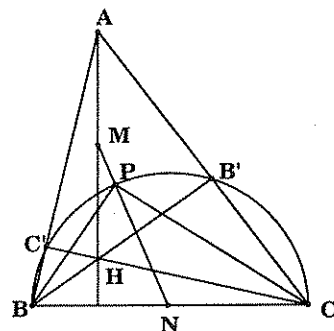
– Ta “hình thành thêm” điểm E.

– Chứng minh ba điểm A, B, E thẳng hàng.

– Chứng minh điểm C trùng với điểm E.

Dĩ nhiên rằng điểm E được “hình thành” sao cho việc chứng minh ba điểm A, B, E thẳng hàng, và kể cả chứng minh điểm $C \equiv E$ được thực hiện “nhẹ nhàng” hơn so với khi trực tiếp chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Có như vậy, giải pháp “thêm điểm” mới có “giá trị sử dụng”.



A B E = C

Bài 7. Cho đường tròn ($\odot$), tâm O. Từ I điểm P nằm ngoài ($\odot$), ta kẻ đến ($\odot$) hai tiếp tuyến PA và PB. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường kính BC. M là trung điểm AH. Chứng minh rằng ba điểm P, C, M thẳng hàng.

Lời giải

– Gọi I là giao điểm của của hai đường thẳng CA và BP.

P' là giao điểm của hai đường thẳng CM và BI.

Như vậy, để chứng minh ba điểm P, C, M thẳng hàng, ta chỉ việc chứng minh $P \equiv P'$.

– Thật vậy, ta có: $\widehat{BAC} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{BAI} = 90^\circ$

$\triangle BAI$ vuông tại A, nên: $\widehat{AIB} + \widehat{ABI} = \widehat{BAI} = 90^\circ$

$\Leftrightarrow \widehat{AIB} + \widehat{ABI} = \widehat{BAP} + \widehat{PAI}$

$\Leftrightarrow \widehat{AIB} = \widehat{PAI}$ (Vì $\triangle PAB$ cân tại P)

Suy ra $AP = PI$

Mặt khác: $AP = PB$, nên $PI = PB$

Như vậy: P là trung điểm BI (1)

– Lúc này, ta cần chứng minh P' cũng là trung điểm BI.

Thật vậy, ta có: $\frac{AM}{P'I} = \frac{CM}{CP}, \frac{MH}{P'B} = \frac{CM}{CP} \Rightarrow \frac{AM}{P'I} = \frac{MH}{P'B}$

Mặt khác: $AM = MH$. Do đó: $P'I = P'B$

Như vậy, P' là trung điểm BI (3)

Từ (1) và (2), ta nhận được $P \equiv P'$.

Kết luận: ba điểm P, C, M thẳng hàng.

Vài điều trao đổi:

Ta nhận thấy rằng: $AH \parallel PB$

Điểm M lại chia đoạn AH thành hai đoạn tỉ lệ 1:1.

Từ “dữ liệu” này gợi ý cho ta kéo dài CA và BP cắt nhau tại I. Lúc này ta chỉ cần chứng minh điểm P cũng chia đoạn BI theo tỉ lệ 1:1.

Giải pháp 7: Phản chứng

+ Xét bài toán chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

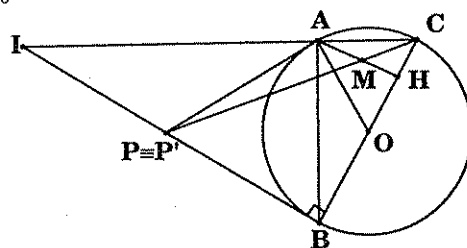
+ Ta vận dụng giải pháp “phản chứng” như sau:

– Giả sử ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

– Dựa theo giả thiết phản chứng “ba điểm A, B, C không thẳng hàng” kết hợp với “dữ liệu” đã cho của bài toán, ta diễn giải, lập luận chỉ ra một điều vô lý.

– Như vậy, giả sử ba điểm không thẳng hàng là sai.

– Kết luận: ba điểm A, B, C thẳng hàng.



Bài 8. Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn ($\odot$) tâm O đường kính AB, và nửa đường tròn ($\odot'$) đường kính AO. Trên ($\odot'$) lấy điểm M không trùng với A và O. Tia OM cắt ($\odot$) tại C, gọi D là giao điểm thứ hai của đường thẳng CA

với ($\mathcal{C}$). Đường thẳng AM cắt OD tại H, đường tròn ngoại tiếp $\triangle COH$ cắt ($\mathcal{C}$) tại N.
 Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Giả sử ba điểm A, M, N không thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{N_1} = \widehat{C_1} = \widehat{A_1}$

$\triangle OAN$ cân tại O, nên $\widehat{OAN} = \widehat{ONA} \Rightarrow \widehat{A_1} - \widehat{OAN} = \widehat{N_1} - \widehat{ONA} \Leftrightarrow \widehat{HAN} = \widehat{HNA}$

Do đó: $\triangle HAN$ cân tại H.

$\triangle OHA = \triangle OHN$ nên $\widehat{AOH} = \widehat{NOH} \Rightarrow OH \perp AN$

Mặt khác: $OH \perp AC$. Do đó: ba điểm A, N, C thẳng hàng.

Điều này là vô lý.

Như vậy, điều giả sử ở trên là sai.

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Vài điều trao đổi:

Với bài toán này, ta chứng minh được bằng cách khác, tuy nhiên sử dụng giải pháp phản chứng có thể ngắn gọn hơn.

Giải pháp 8: Diện tích

+ Xét bài toán chứng minh ba điểm A, N, M thẳng hàng

+ Chúng ta “tưởng minh” giải pháp “diện tích” dưới các dạng sau:

Dạng 1:

– Xác định đoạn thẳng BC, sao cho M là trung điểm BC.

– Ta chứng minh $S_{\triangle BAN} = S_{\triangle CAN}$

– Kết luận: ba điểm A, N, M thẳng hàng.

* **Nhận xét:** Dạng 1 có thể diễn đạt tổng quát như sau:

– Ta chứng minh $\frac{S_{\triangle BAN}}{S_{\triangle CAN}} = \frac{BM}{CM}$

– Kết luận: 3 điểm A, N, M thẳng hàng.

Dạng 2:

– Xác định hai nửa đường thẳng Ax, Ay như hình vẽ.

– Ta chứng minh $S_{\triangle MHK} = S_{\triangle MCD}$

Và $S_{\triangle NHK} = S_{\triangle NCD}$

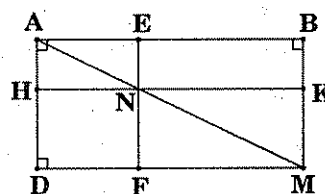
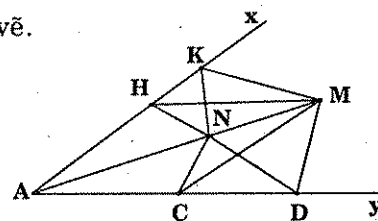
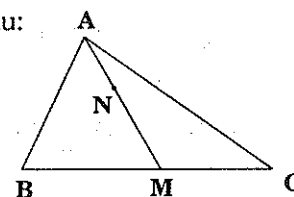
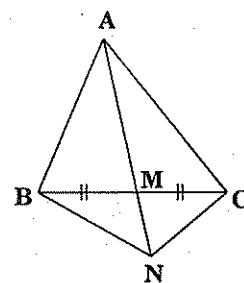
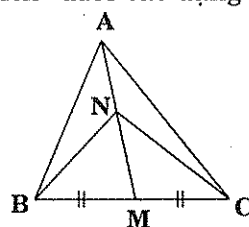
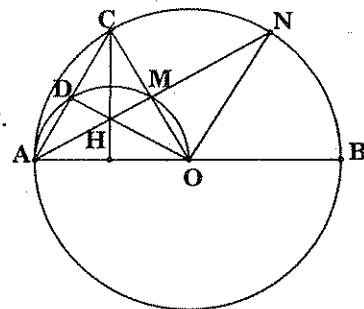
– Kết luận: ba điểm A, N, M thẳng hàng

Dạng 3:

– Xây dựng hình chữ nhật ABMD như hình vẽ.

– Ta chứng minh $S_{\triangle HNF} = S_{\triangle KNE}$

– Kết luận: ba điểm A, N, M thẳng hàng.



Bài 9. Cho hình bình hành ABCD. Điểm E thuộc cạnh AB, F thuộc cạnh BC. Các điểm M, N, K lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng DE, DF và EF. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và CN. Chứng minh rằng 3 điểm B, K, I thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{\triangle IAB} + S_{\triangle ICD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$S_{\triangle IAD} + S_{\triangle IBC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\text{Do đó: } S_{\triangle IAB} + S_{\triangle ICD} = S_{\triangle IAD} + S_{\triangle IBC}$$

$$\Leftrightarrow S_{\triangle IAE} + S_{\triangle IEB} + S_{\triangle ICD} = S_{\triangle IAD} + S_{\triangle IFC} + S_{\triangle IFB}$$

$$\Leftrightarrow S_{\triangle IEB} = S_{\triangle IFB}$$

Suy ra IB đi qua trung điểm K của đoạn EF.

Vậy ba điểm I, K, B thẳng hàng.

Vài điều trao đổi:

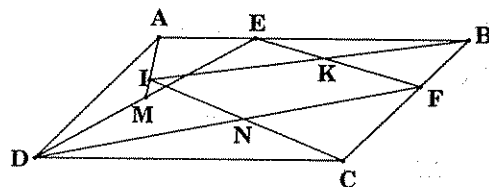
$$\text{Để chứng minh đẳng thức } S_{\triangle IAB} + S_{\triangle ICD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Ta tiến hành như sau: Qua điểm I, ta kẻ $MN \perp AB$, (Với $M \in AB$, $N \in CD$)

$$S_{\triangle IAB} = \frac{IM \cdot AB}{2}$$

$$S_{\triangle ICD} = \frac{IN \cdot CD}{2}$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle IAB} + S_{\triangle ICD} = \frac{IM \cdot AB + IN \cdot CD}{2} = \frac{IM \cdot AB + IN \cdot AB}{2} = \frac{(IM + IN) \cdot AB}{2} = \frac{HN \cdot AB}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2}$$



Bài 10. Cho tứ giác ABCD. M là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD. N là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC. I, J, K lần lượt là trung điểm của các đoạn BD, AC, MN. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{\triangle NIJ} = S_{\triangle NDC} - S_{\triangle NID} - S_{\triangle NJC} - S_{\triangle IJD} - S_{\triangle DJC}$$

$$= S_{\triangle NDC} - \frac{1}{2} S_{\triangle NBD} - \frac{1}{2} S_{\triangle NAC} - \frac{1}{2} S_{\triangle DJB} - \frac{1}{2} S_{\triangle ADC}$$

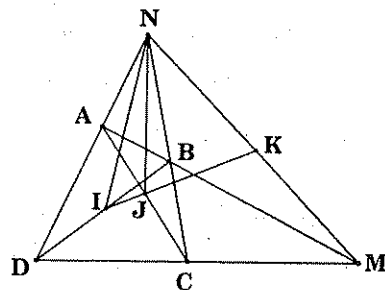
$$= \left(\frac{1}{2} S_{\triangle NDC} - \frac{1}{2} S_{\triangle NBD} - \frac{1}{2} S_{\triangle DJB} \right) + \left(\frac{1}{2} S_{\triangle NDC} - \frac{1}{2} S_{\triangle NAC} - \frac{1}{2} S_{\triangle ADC} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (S_{\triangle BJC} + S_{\triangle DJC}) + 0$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} S_{\triangle ABC} + \frac{1}{2} S_{\triangle DAC} \right)$$

$$= \frac{1}{4} S_{ABCD} \quad (1)$$

$$\text{Biến đổi tương tự, ta nhận được: } S_{\triangle MIJ} = \frac{1}{4} S_{ABCD} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra: $S_{NIJ} = S_{MIJ}$ (*)

Gọi NE là đường cao hạ từ N trong ΔNIJ , MH là đường cao hạ từ M trong ΔMIJ .

Từ (*) suy ra: $\frac{1}{2}NE.IJ = \frac{1}{2}MH.IJ \Leftrightarrow NE = MH$

- Gọi K' là giao điểm của hai đường thẳng IJ và MN.

Ta được: $\Delta MHK' = \Delta NEK'$ (g.c.g) $\Rightarrow K'$ là trung điểm của đoạn thẳng MN

Tức là $K' = K$

Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Vài điều trao đổi:

Nhằm giúp nhiều đối tượng học sinh hiểu bài toán một cách thấu đáo và bản chất, ta cần chứng tỏ kết quả sau:

"Cho tam giác ABC. M là trung điểm cạnh BC.

Ta có: $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$. Thật vậy: Gọi AH là đường cao hạ từ A của ΔABC .

Ta có: $\frac{1}{2}AH.BM = \frac{1}{2}AH.MC = \frac{1}{2}AH\left(\frac{1}{2}BC\right)$

Suy ra: $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. (Lớp 8) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), các đường cao BD, CE. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Đường thẳng vuông góc với AI tại A cắt đường thẳng BD tại M. Gọi N là điểm đối xứng của M qua A. Chứng minh rằng ba điểm C, E, N thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $BK \perp MN$ tại K, $CL \perp MN$ tại L

$\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$

$\Rightarrow AB.AE = AC.AD$

Tương tự: $\Delta AMD \sim \Delta ACL$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AD}{AL} \Rightarrow AC.AD = AM.AL$

Hình thang BKLC có: $IA \parallel BK \parallel CL$, $BI = IC \Rightarrow AK = AL$.

Mặt khác $AM = AN$ (M, N đối xứng qua A)

Do đó, ta có: $AB.AE = AC.AD = AM.AL = AN.AK$

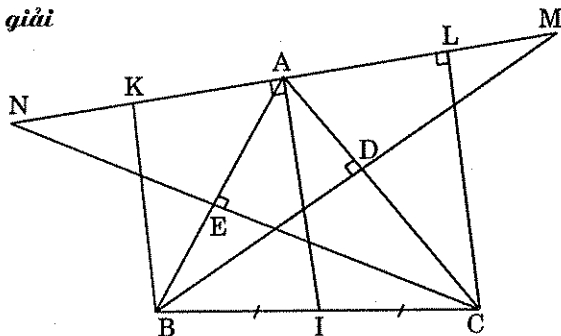
Xét ΔABK và ΔANE có: $\widehat{BAK}$ (chung), $\frac{AB}{AN} = \frac{AK}{AE}$ (vì $AB.AE = AN.AK$)

Do đó: $\Delta ABK \sim \Delta ANE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{AEN}$

Mà: $\widehat{AKB} = 90^\circ$, nên $\widehat{AEN} = 90^\circ$. Ta có: $EN \perp AB$ ($\widehat{AEN} = 90^\circ$), $CE \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow EN, CE$ trùng nhau

Vậy ba điểm C, E, N thẳng hàng.



Bài 2. (Lớp 9) Cho tam giác ABC không có góc nào tù, $\tan B = \cot C$. D là điểm nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B sao cho $\cos \angle ACD = \frac{AC}{CD}$. Chứng minh rằng ba điểm A, B, D thẳng hàng.

Lời giải

Vẽ $AH \perp BC$ tại H

$$\Delta HAB \text{ vuông tại H} \Rightarrow \tan B = \frac{AH}{BH}$$

$$\Delta HAC \text{ vuông tại H} \Rightarrow \frac{CH}{AH}$$

$$\text{Mà } \tan B = \cot C \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH}$$

$$\text{Xét } \Delta HAB \text{ và } \Delta HCA \text{ có: } \widehat{AHB} = \widehat{CHA} (= 90^\circ), \quad \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \text{ (vì } \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \text{)}$$

$$\text{Do đó } \Delta HAB \sim \Delta HCA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{CAH}. \text{ Ta có: } \widehat{BAC} = \widehat{BAH} + \widehat{CAH} = \widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AB \perp AC$$

Vẽ $DA' \perp AC$ tại A'

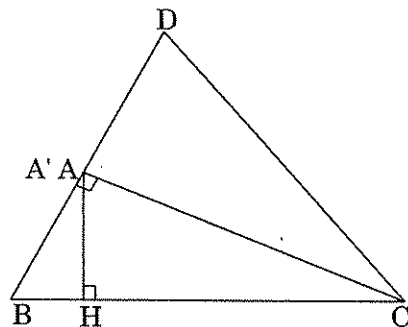
$$\Delta A'DC \text{ vuông tại A'} \Rightarrow \cos \angle ACD = \frac{A'C}{CD}$$

$$\text{Mà } \cos \angle ACD = \frac{AC}{CD} \text{ (gt). Do đó: } \frac{A'C}{CD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow A'C = AC \Rightarrow A' \equiv A$$

Nên $AD \perp AC$. Ta có: $AD \perp AC, AB \perp AC$

$\Rightarrow AD, AB$ trùng nhau

Vậy ba điểm A, B, D thẳng hàng.



Bài 3. (Lớp 9) Cho tam giác ABC đều cạnh a. D là điểm trên cạnh BC sao cho $BD = \frac{1}{3}BC$. E, F lần lượt trên các cạnh AC, AB sao cho $CV(DEF) = \frac{\sqrt{21}}{3}a$. M là điểm đối xứng của D qua AB. Chứng minh rằng ba điểm M, E, F thẳng hàng.

Lời giải

Gọi N là điểm đối xứng của D qua AC.

Theo tính chất đối xứng trục, ta có:

$$AD = AM, DF = MF, \widehat{DAF} = \widehat{MAF},$$

$$AD = AN, ED = NE, \widehat{DAE} = \widehat{NAE}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{MAN} = 120^\circ, AD = AM = AN$$

Gọi H là giao điểm của AB và DM

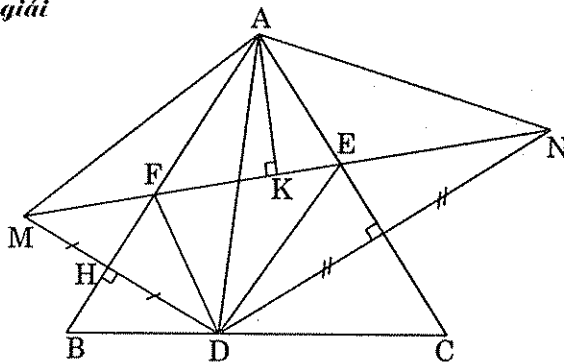
$$\text{Ta có: } BD = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}a$$

$$BH = BD \cos \angle DBH = \frac{1}{3}a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{6}a, \quad DH = BD \sin \angle DBH = \frac{1}{3}a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\text{Do đó: } AH = AB - BH = \frac{5}{6}a$$

$$\Delta AHD \text{ vuông tại H} \Rightarrow AD^2 = AH^2 + DH^2 \text{ (định lý Py-ta-go)}$$

$$AD^2 = \frac{25}{36}a^2 + \frac{3}{36}a^2 = \frac{7}{9}a^2, \quad AD > 0 \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{3}a. \text{ Nên } AM = \frac{\sqrt{7}}{3}a$$



Vẽ $AK \perp MN$ tại K. ΔAMN có $AM = AN \Rightarrow AMN$ cân tại A

Mà AK là đường cao ($AK \perp MN$) nên cũng là đường phân giác, đường trung tuyến

$$\Rightarrow \widehat{MAK} = \frac{1}{2} \widehat{MAN} = 60^\circ$$

$$MK = AM \sin MAK = \frac{\sqrt{7}}{3} a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{21}}{6} a$$

$$\text{Do đó } MN = 2MK = \frac{\sqrt{21}}{3} a. \text{ Ta có: } CV(DEF) = DF + FE + ED$$

$$\text{Do đó: } DF + FE + ED = \frac{\sqrt{21}}{3} a. \text{ Ta có: } MF + FE + EN = DF + FE + ED = \frac{\sqrt{21}}{3} a = MN$$

Do đó M, F, E, N thẳng hàng theo thứ tự đó.

Vậy M, E, F thẳng hàng.

Bài 4. (Lớp 9) Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B ($R > R'$). Tiếp tuyến chung EF của (O) và (O') cắt tia đối của tia AB tại C (E thuộc (O) ; F thuộc (O')). Gọi (I) và (J) lần lượt là hai đường tròn tâm I, J ngoại tiếp hai tam giác OEC, O'FC. Gọi D là giao điểm của (I) và (J) (D khác C). Chứng minh rằng A, B, D thẳng hàng. (Trích đề kiểm tra học kì I, lớp 9 trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013).

Lời giải

ΔOEC vuông tại E, nên I là trung điểm của OC. Tương tự J là trung điểm của O'C

Do đó IJ là đường trung bình của tam giác COO' $\Rightarrow IJ \parallel OO'$ và $IJ = \frac{OO'}{2}$

$(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A, B

$$\Rightarrow R - R' < OO' < R + R'$$

$$\text{Do đó: } \frac{R}{2} - \frac{R'}{2} < IJ < \frac{R}{2} + \frac{R'}{2}$$

Bán kính của (I), (J) lần lượt là: $\frac{R}{2}, \frac{R'}{2}$

Do đó (I) và (J) cắt nhau tại C, D

$\Rightarrow IJ$ là đường trung trực của CD

$\Rightarrow IJ \perp CD$. Mà $IJ \parallel OO'$

Do đó $OO' \perp CD$. $(O), (O')$ cắt nhau tại A, B

$\Rightarrow OO'$ là đường trung trực của AB

$\Rightarrow OO' \perp AB$

$\Rightarrow OO' \perp AC$

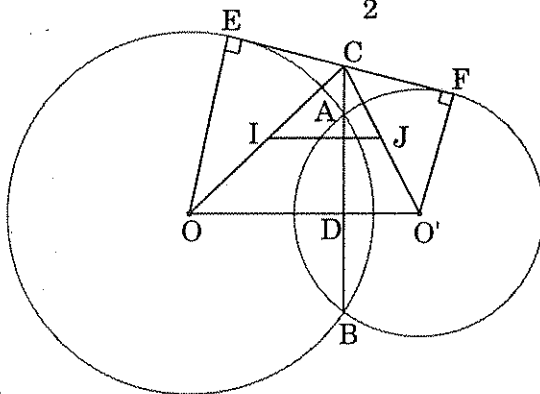
Ta có: $OO' \perp CD, OO' \perp AC$

$\Rightarrow CD, AC$ trùng nhau

$\Rightarrow C, A, D$ thẳng hàng

Mà A, B, C thẳng hàng (gt). Do đó A, B, C, D thẳng hàng.

Vậy ba điểm A, B, D thẳng hàng.



Bài 5. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ đường cao AD của tam giác ABC. Từ D vẽ DE, DF lần lượt vuông góc với AC, AB tại E, F. Vẽ đường tròn tâm I, đường kính AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K (K khác A). Tia AK cắt đường thẳng BC tại H. Chứng minh rằng ba điểm H, E, F thẳng hàng

Lời giải

$$\widehat{AFD} = \widehat{AED} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AEDF nội tiếp đường tròn (I)

$$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ADE}$$

Mà $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{EDC}$)

$$\text{Do đó } \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BFEC nội tiếp

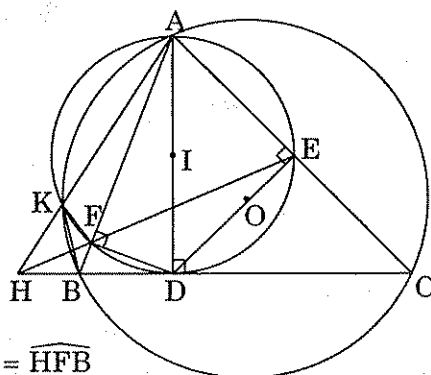
$$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$$

$$\widehat{HKF} = \widehat{ABC} \Rightarrow \text{Tứ giác HKFB nội tiếp} \Rightarrow \widehat{H'KB} = \widehat{HFB}$$

Mà $\widehat{HKB} = \widehat{ACB}$ (tứ giác AKBC nội tiếp) và $\widehat{ACB} + \widehat{BFE} = 180^\circ$ (tứ giác BFEC nội tiếp)

$$\text{Do đó } \widehat{HFB} + \widehat{BFE} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm H, E, F thẳng hàng.



Bài 6. (Lớp 9) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Vẽ đường tròn tâm O, đường kính AB; BC cắt đường tròn (O) tại H. Gọi K là trung điểm của AC. D là điểm đối xứng của A qua H. Vẽ DN vuông góc với AB tại N. Vẽ HI vuông góc với AB tại I. J là tâm đường tròn qua B, N, D. KB cắt đường tròn (J) tại T. Chứng minh D, T, I thẳng hàng
(Trích đề kiểm tra học kỳ I, quận Tân Phú, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Lời giải

$$H \text{ thuộc đường kính } AB \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BHD} = 90^\circ$$

Nên H thuộc đường tròn (J). Ta có $HI \perp AB$, $DN \perp AB$

$$\Rightarrow HI \parallel DN$$

$$\Delta AND \text{ có } HI \parallel DN, AH = HD \Rightarrow AI = IN$$

$$\text{Xét } \Delta NDA \text{ và } \Delta ABC \text{ có: } \widehat{DNA} = \widehat{BAC} (= 90^\circ)$$

$$\text{và } \widehat{NDA} = \widehat{ABC} \text{ (cùng phụ với góc BAH)}$$

$$\text{Do đó } \Delta NDA \sim \Delta ABC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DN}{AB} = \frac{NA}{AC}$$

$$\text{Nên } \frac{DN}{AB} = \frac{2NI}{2AK} = \frac{NI}{AK}$$

Gọi L là giao điểm của BK và DN

Xét $\Delta NDI \sim \Delta ABK$ có:

$$\widehat{DNI} = \widehat{BAK} (= 90^\circ), \frac{ND}{AB} = \frac{NI}{AK}$$

$$\text{Do đó } \Delta NDI \sim \Delta ABK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{NDI} = \widehat{ABK}$$

Mặt khác T thuộc đường tròn (J) đường kính BD

$$\Rightarrow \widehat{BTD} = 90^\circ$$

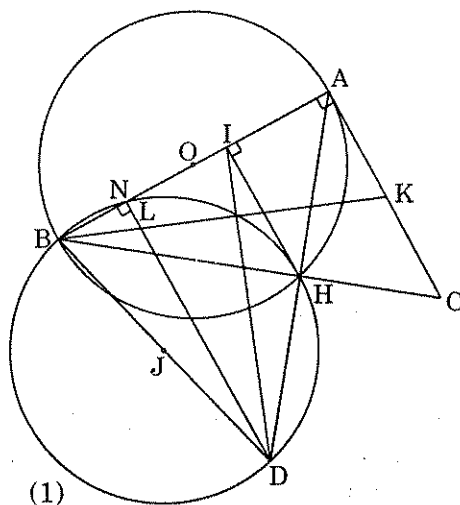
$$\widehat{BLN} = \widehat{DLT} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABK} + \widehat{BLN} = \widehat{NDT} + \widehat{DLT} (= 90^\circ).$$

$$\text{Nên } \widehat{ABK} = \widehat{NDT} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có: $\widehat{NDI} = \widehat{NDT} \Rightarrow$ Hai tia DI, DT trùng nhau

Vậy ba điểm D, T, I thẳng hàng.



TẢN MẠNG HÌNH HỌC

PHẦN PHỤ LỤC

BÀI VIẾT 1: PHÁT HIỆN LỜI GIẢI KHÁC CỦA MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC SÁNG TẠO BÀI TOÁN MỚI

(Trích bài giảng lớp tập huấn “Nâng cao năng lực giảng dạy toán THCS lần 2, năm 2013)

Bài toán 1. (Lớp 6) Theo hình vẽ thì ta có thể trồng được 12 cây thành 6 hàng mỗi hàng 4 cây. Hãy vẽ sơ đồ trồng 10 cây thành 5 hàng, mỗi hàng 4 cây

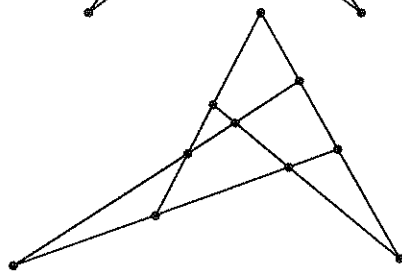
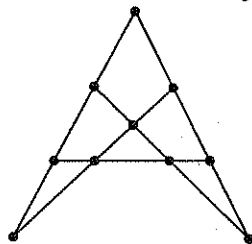
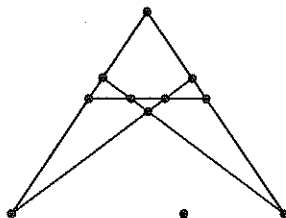
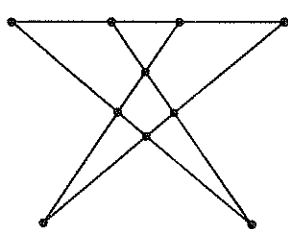
(Bài 14 trang 107 sách giáo khoa Toán 6, tập một)

Bài toán gợi ý là hình ngôi sao 6 cách do vậy chắc chắn lời giải của bài toán là hình ngôi sao 5 cánh!

Lời giải

Tìm cách giải khác

Từ lời giải trên giúp chúng ta tìm đến với các cách giải khác, bằng cách dịch chuyển một số đường thẳng chứa các cạnh của hình ngôi sao 5 cánh này đến các vị trí mới. Chúng ta sẽ cố định 4 đường thẳng và cho 1 đường thẳng đi chuyển giúp ta có thêm các cách giải khác sau



Nhưng! ... lời giải hình ngôi sao 5 cánh vẫn là đẹp nhất, lời giải có hình đẹp về thẩm mỹ, hình dễ nhớ và dễ nghĩ đến!

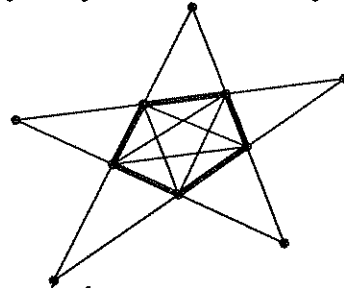
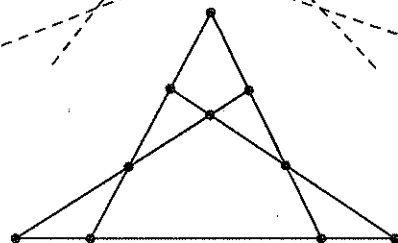
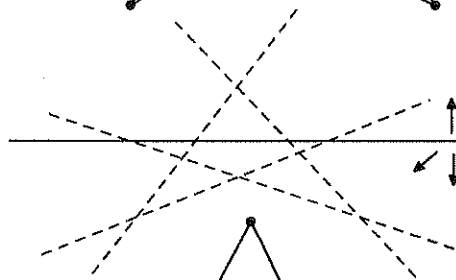
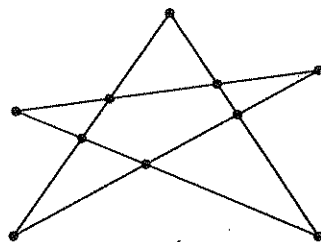
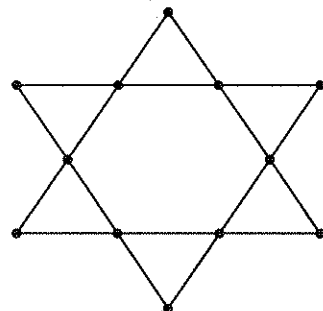
Chợt! Phát hiện trên hình vẽ có hình ngũ giác tức là có thêm hình sao 5 cạnh. Cho ta một bài toán mới!

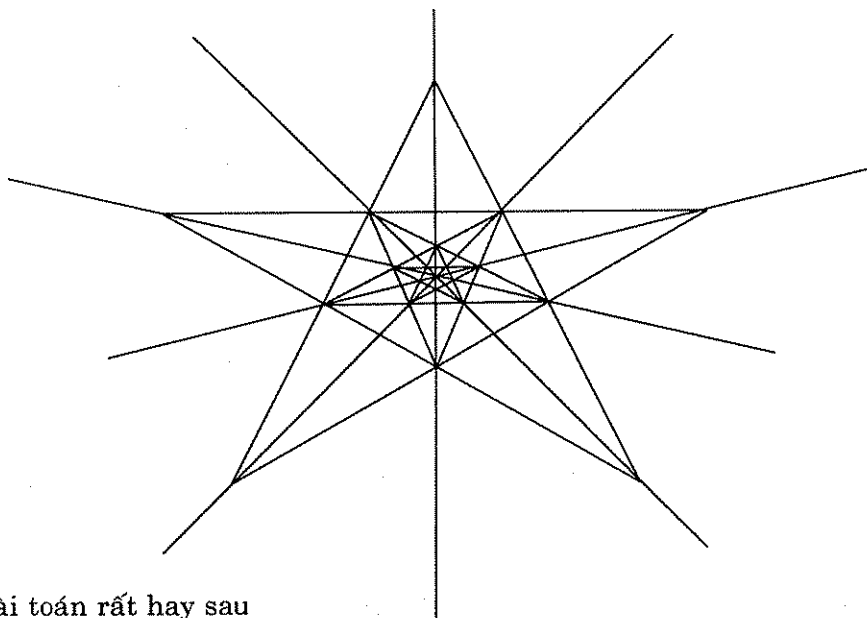
Bài 1.1. Hãy vẽ sơ đồ trồng 15 cây thành 10 hàng, mỗi hàng 4 cây

Lại xuất hiện ngôi sao 5 cánh nữa, tiếp tục có bài toán.

Bài 1.2. Hãy vẽ sơ đồ trồng 20 cây thành 20 hàng, mỗi hàng 4 cây.

Hình vẽ ở bài 1.2 chợt thấy các đường thẳng a, b, c, d, e đi qua tâm của hình ngôi sao 5 cánh.





Cho ta bài toán rất hay sau

Bài 1.3. Hãy vẽ sơ đồ trồng 16 cây thành 15 hàng mỗi hàng 4 cây.

Bài toán 2. (Lớp 7) Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến.

Chứng minh rằng: $AB + AC > 2AM$

Lời giải

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$

$\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CD$

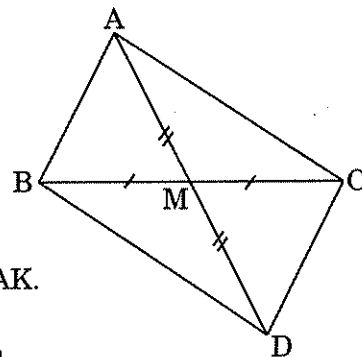
$\triangle ACD$ có: $CD + AC > AD$

Do vậy $AB + AC > 2AM$

Tìm cách giải khác tìm bài toán mới. Xét $AB < AC$

Vẽ $BH \perp AD$ tại H, $CK \perp AD$ tại K. Ta có $AB > AH$, $AC > AK$.

Mà $AH + AK = AM - MH + AM + MK = 2AM$



Bài 2.1. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm của tam giác ABC.

Chứng minh rằng $GB + GC > GA$

Bài 2.2. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng trong ba đoạn thẳng GA, GB, GC đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng hai đoạn kia.

Bài 2.3. Cho tam giác ABC; AD, BE, CF là ba đường trung tuyến. Chứng minh rằng trong ba đoạn thẳng AD, BE, CF đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng hai đoạn kia.

* **Nhận xét:** Độ dài ba đường trung tuyến là độ dài các cạnh của một tam giác là một tài sản vô giá mà toán học đã dành riêng cho ba đường trung tuyến mà ba đường cao, ba đường phân giác trong một tam giác không thể có được điều đó.

Bài 2.4. Cho tam giác ABC; AD, BE, CF là ba đường trung tuyến cắt nhau tại G. Biết $GA = x$, $GB = y$, $GC = z$, $AD = m$, $BE = n$, $CF = p$. Chứng minh rằng:

a) $x^2 + y^2 + z^2 < 2(xy + yz + zx)$

b) $m^2 + n^2 + p^2 < 2(mn + np + pm)$

c) $(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z) \leq xyz$

d) $(m + n - p)(m - n + p)(-m + n - p) \leq m.n.p$

Bài 2.5. Cho tam giác ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Gọi các đường trung tuyến vẽ từ A, B, C có độ dài lần lượt là m, n, p. Chứng minh rằng:

$$a) m + n + p > \frac{3}{4}(a + b + c)$$

$$b) m + n + p > \sqrt{2} p, \text{ biết } 2p = a + b + c$$

Bài 2.6. Chứng minh rằng không tồn tại hai đường trung tuyến nhỏ hơn nửa cạnh tương ứng

Bài 2.7. Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến. Chứng minh rằng:

$$a) \hat{A} \geq 90^\circ \Leftrightarrow AM \leq \frac{BC}{2}$$

$$b) \hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow AM > \frac{BC}{2}$$

Bài 2.8. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, AM là đường trung tuyến. Chứng minh rằng:

$$\widehat{BAM} > \widehat{MAC}$$

Bài toán 3. (Lớp 8) Cho tam giác đều ABC và điểm M bất kì nằm trong tam giác đó.

Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với BC tại H. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với AC tại K. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với AB tại T. Chứng minh rằng $MH + MK + MT$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

(Bài 3.2 trang 161, sách bài tập Toán 8, tập một)

Lời giải

Ta có: $AB = BC = AC$ ($\triangle ABC$ đều)

Do đó $S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}MH \cdot BC + \frac{1}{2}MK \cdot AC + \frac{1}{2}MT \cdot AB = \frac{1}{2}AD \cdot BC \quad (AD \text{ là đường cao của tam giác } ABC)$$

$$\Rightarrow MH + MK + MT = AD$$

Đặt: $MH = x, MK = y, MT = z, AD = h$

• **Tìm cách giải**

• **Tìm bài toán mới**

Bài toán dựng hình

Ta có: $x + y + z = h$ có các bài toán tính toán

Bài 3.1. Cho tam giác đều ABC, M là điểm nằm trong tam giác. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

a) Biết $S_{ABC} = 1$. Tính $x + y + z$

b) Biết $x = 1, y = 2, z = 3$. Tính diện tích tam giác ABC.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT Năng khiếu, ĐHQG, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2006 – 2007)

Tiếp tục chúng ta có các bài toán chứng minh, tập hợp điểm, bất đẳng thức – cực trị

Bài 3.2. Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác đều. Vẽ $MH \perp BC$ tại H, $MK \perp AC$ tại K, $MT \perp AB$ tại T. Trên tia đối của tia HM lấy điểm N sao cho $HN = MT + MK$. Chứng minh rằng đường thẳng qua N và song song với AM đi qua một điểm cố định.

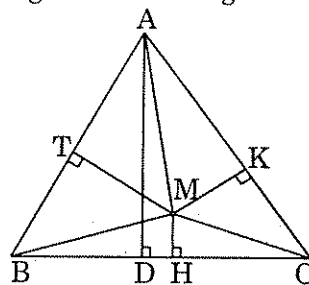
Bài 3.3. Cho tam giác đều ABC, M là điểm nằm trong tam giác. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

a) Tìm quỹ tích những điểm M trong tam giác sao cho $x + y = x$. Từ đó suy ra tập hợp những điểm M trong tam giác sao cho x, y, z lập thành 3 cạnh của một tam.

b) Xác định vị trí điểm M để:

1. $x^2 + y^2 + z^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

2. $xy + yz + zx$ đạt giá trị lớn nhất

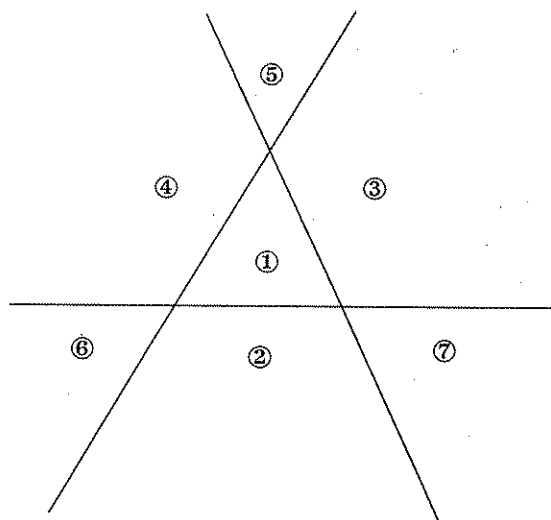


Quan tâm đến vị trí M trong và ngoài của tam giác ABC, giúp đến với các bài toán

Bài 3.4. Cho tam giác đều ABC. M là điểm. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

- Nếu M nằm trong góc BAC và nằm ngoài tam giác ABC thì $-x + y + z$ không đổi
- Nếu M nằm trong góc ABC và nằm ngoài tam giác ABC thì $x - y + z$ không đổi
- Nếu M nằm trong góc ACB và nằm ngoài tam giác ABC thì $x + y - z$ không đổi
- Nếu M nằm trong góc đối đỉnh với góc BAC thì $x - y - z$ không đổi
- Nếu M nằm trong góc đối đỉnh với góc BAC thì $-x + y - z$ không đổi
- Nếu M nằm trong góc đối đỉnh với góc ACB thì: $-x - y + z$ không đổi

Bài toán chỉ sử dụng đến cạnh, giúp có bài toán tổng quát.



Bài 3.5. Cho đa giác n cạnh bằng nhau: $A_1A_2...A_n$. M là điểm nằm trong đa giác. Gọi $x_1, x_2, ..., x_n$ lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$

Chứng minh rằng: $x_1 + x_2 + ... + x_n$ không phụ thuộc vào điểm M và ta còn có các bài toán.

Bài 3.6. Cho tam giác ABC cân tại A. M là điểm trên cạnh BC. Đường thẳng qua M vuông góc với AB tại T, đường thẳng qua M vuông góc với AC tại K. Chứng minh rằng: $MK + MT$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Bài 3.7. Cho tam giác đều ABC có AD, BE, CF là các đường cao. Điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC. Gọi I, K, L lần lượt là hình chiếu của M trên AD, BE, CF. Chứng minh rằng giá trị của tổng $AI + BK + CL$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M (Bài toán 2 Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 433 tháng 7 năm 2013)

Hãy tìm các bài toán mới, bài toán tương tự từ các bài toán 3.5, 3.6, 3.7.

Bài toán 4. (Lớp 9) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = c, AC = b$ và đường phân giác trong góc A là $AD = d$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh, năm học 2000 – 2001)

Lời giải

Vẽ $DM \perp AB$ tại M, $DN \perp AC$ tại N.

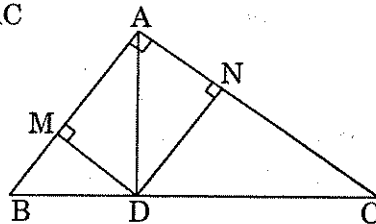
Tứ giác AMDN là hình vuông $AM = DM = DN = \frac{AD\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2}$

$$S_{DAB} + S_{DAC} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot c + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot b = c \cdot b \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

• **Tìm cách giải khác**

$$\frac{DM}{AC} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow \frac{DM}{AC} = \frac{AB - AM}{AB}$$



$$\Rightarrow \frac{DM}{AC} = 1 - \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{u}{\sqrt{2}.b} = 1 - \frac{u}{\sqrt{2}.c}$$

Vậy: $\frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

• **Tìm bài toán mới**

Bài 4.1. Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác. (AD = d, BA = c, AC = b). Chứng minh rằng: $\hat{A} = 120^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Bài 4.2. Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác. (AD = d, AB = c, AC = b). Chứng minh rằng: $\hat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Bài 4.3. Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác. (AD = d, AB = c, AC = b). Chứng minh rằng:

a) $\frac{2 \cos \frac{A}{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

b) $d \leq \frac{b+c}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$

c) $d \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$

Bài toán 5. (Lớp 9) Cho tam giác nhọn ABC (BC = a, AC = b, AB = c). Chứng minh rằng:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ca \cdot \sin B = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

Lời giải

Vẽ BH ⊥ AC tại H: BH = AB sin BAH = c sin A

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{1}{2} c \cdot \sin A \cdot b = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

Bài toán mới

Bài 5.1. Cho tam giác nhọn ABC (BC = a, AC = b, AB = c). Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Bài 5.2. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2(\sin A \cdot \sin B + \sin B \cdot \sin C + \sin C \cdot \sin A)$

b) $(\sin A + \sin B - \sin C)(\sin A - \sin B + \sin C)(-\sin A + \sin B + \sin C) \leq \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

c) $1 < \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin B}{\sin C + \sin A} + \frac{\sin C}{\sin A + \sin B} < 2$

Bài 5.3. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

Bài 5.4. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

a) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

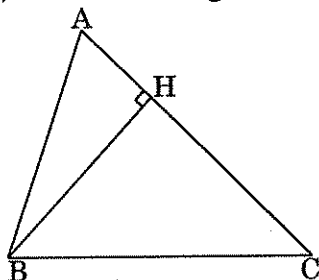
b) $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

Bài 5.5. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm phần nguyên của:

$$M = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin B}{\sin C + \sin A} + \frac{\sin C}{\sin A + \sin B}$$

(Bài toán 3 Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 406 tháng 4 năm 2011)

Bài 5.6. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng: $\sin A + \sin B + \sin C < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$



Bài 5.7. Cho tam giác nhọn ABC, AH là đường cao. Vẽ HD ⊥ AB tại D, HE ⊥ AC tại E.

Đường thẳng qua A vuông góc với DE cắt BC tại M. Chứng minh rằng: $\frac{BH \cdot BM}{CH \cdot CM} = \frac{AB^2}{AC^2}$

Bài toán 6. (Lớp 9) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O; R). M là điểm trên cung nhỏ BC. Chứng minh rằng: $MA = MB + MC$.

Lời giải

Trên tia MA lấy D sao cho $MD = MB$

Ta có $\triangle MBD$ cân tại M. Mà $\widehat{BMA} = \widehat{BCA} = 60^\circ$

Do đó $\triangle MBD$ đều $\Rightarrow \widehat{DBM} = 60^\circ$, $MB = DB$

$\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = \widehat{CBM} + \widehat{DBC} (= 60^\circ) \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CBM}$

$\triangle BAD = \triangle BCM$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = MC$

Do vậy $MA = MD + AD = MB + MC$

• **Tìm cách giải khác**

Gọi E là giao điểm của MA và MC

Xét $\triangle MBE$ và $\triangle MAC$ có: $\widehat{BME} = \widehat{AMC}$, $\widehat{MBE} = \widehat{MAC}$

Do đó $\triangle MBE \sim \triangle MAC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BE}{AC}$

Tương tự: $\triangle MCE \sim \triangle MAB \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{CE}{AB}$

Do đó: $\frac{MB}{MA} + \frac{MC}{MA} = \frac{BE}{AC} + \frac{CE}{AB}$
 $= \frac{MB + MC}{MA} = \frac{BE + CE}{AB}$ ($AB = AC$)
 $= \frac{MB + MC}{MA} = 1$ ($AB = BC$)

Vậy $MB + MC = MA$

Vì MA là dây cung của đường tròn (O; R), do đó $MA \leq 2R$. Hơn nữa, còn có $MB + MC \geq BC$. Cho chúng ta bài toán.

Bài 6.1. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O; R). M là điểm trên cung nhỏ BC.

Xác định vị trí điểm M để tổng $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Chúng ta nhận ra tam giác MBC có: $\widehat{BMC} = 120^\circ$ do vậy $BC^2 = MB^2 + MC^2 + MB \cdot MC$

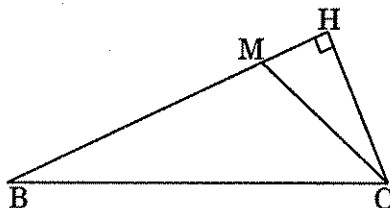
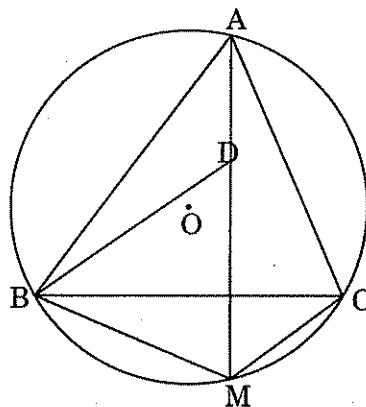
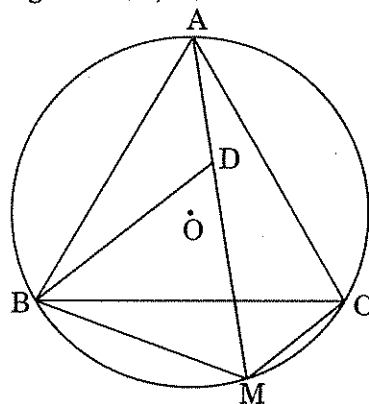
Thật vậy: Vẽ $CH \perp MB$ tại H

Ta có: $\widehat{CMH} = 60^\circ$, nên $CH = MC \sin CMH = \frac{\sqrt{3}}{2} MC$, $MH = MC \cos CMH = \frac{MC}{2}$

$\triangle HBC$ vuông tại H

$\Rightarrow BC^2 = HB^2 + CH^2$

$$\begin{aligned} &= \left(MB + \frac{MC}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} MC \right)^2 \\ &= MB^2 + MB \cdot MC + \frac{MC^2}{4} + \frac{3MC^2}{4} \\ &= MB^2 + MC^2 + MB \cdot MC \end{aligned}$$



Hơn nữa, ta dễ thấy $BC = \sqrt{3}R$

$$\begin{aligned} \text{Do vậy: } MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (MB + MC)^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= 2(MB^2 + MC^2 + MB \cdot MC) = 6R^2 \end{aligned}$$

Giúp có bài toán hay sau:

Bài 6.2. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O; R). M là điểm di động trên cung nhỏ BC. Chứng minh rằng tổng: $MA^2 + MB^2 + MC^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Trong đại số, ta có đẳng thức đẹp sau:

$$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = 2(a^2 + b^2 + ab)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy: } a^4 + b^4 + (a + b)^4 &= a^4 + b^4 + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ &= 2a^4 + 2b^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Và: } 2(a^2 + b^2 + ab)^2 &= 2(a^4 + b^4 + a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2a^3b + 2ab^2) \\ &= 2a^4 + 2b^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 \end{aligned}$$

$$\text{Do vậy: } a^4 + b^4 + (a + b)^4 = 2(a^2 + b^2 + ab)^2$$

$$\text{Như vậy: } MB^4 + MC^4 + (MB + MC)^4 = 2(MB^2 + MC^2 + MB \cdot MC)^2$$

$$MB^4 + MC^4 + MA^4 = 2(3R^2)^2$$

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4$$

Cho ta bài toán Hay và Khó sau:

Bài 6.3.

a) Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O; R). M là điểm trên nằm cung nhỏ BC. Chứng minh rằng: $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4$.

b) Cho lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nội tiếp đường tròn (O; R). M là điểm nằm trên cung nhỏ A_1A_6 . Chứng minh rằng: $MA_1^n + (-MA_3)^n + MA_5^n = MA_2^n + (-MA_4)^n + MA_6^n$ với $n \in \{1; 2; 4\}$.

Từ cách giải 2, nhận ra nếu tam giác ABC cân tại A, ta có: $\frac{MB + MC}{MA} = \frac{BC}{AB}$.

Do đó nếu tam giác ABC cân thì:

$$\widehat{A} \geq 60^\circ \Leftrightarrow BC \geq AB \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{MB + MC}{MA} \geq 1 \Leftrightarrow MB + MC \geq MA$$

$$\text{Và } \widehat{A} < 60^\circ \Leftrightarrow BC < AB \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} < 1 \Leftrightarrow \frac{MB + MC}{MA} < 1 \Leftrightarrow MB + MC < MA$$

Cho ta bài toán mới.

Bài 6.4. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O; R). Chứng minh rằng:

a) Nếu $\widehat{A} \geq 60^\circ$ thì $MB + MC \geq MA$

b) Nếu $\widehat{A} < 60^\circ$ thì $MB + MC < MA$

Ta còn có bài toán Hay và Khó sau:

Bài 6.5. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O; R). M là điểm trên cung BC không chứa điểm A. Xác định vị trí của điểm M để:

a) Tổng $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất

b) Biểu thức: $\frac{MA \cdot MB \cdot MC (MA + MB + MC)}{MA \cdot MB + MB \cdot MC + MC \cdot MA}$ đạt giá trị lớn nhất.

BÀI VIẾT 2:**TÔI CÓ NGỠ NGẦN KHÔNG?**

(Trích tài liệu tập huấn “Nâng cao năng lực giảng dạy toán THCS lần 2, năm 2013)

Vừa qua, tôi tham gia dạy một lớp 9, giúp các em ôn tập Hình học để làm tốt đề kiểm tra Toán học kì II. Rất nhiều em của lớp, giải được bài toán sau:

Bài toán: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R), H là trực tâm của tam giác ABC. BH, CH cắt đường tròn (O) lần lượt tại P, Q. S là điểm bất kì trên cung BC. SQ cắt AB tại M, SP cắt AC tại N. Chứng minh rằng: M, H, N thẳng hàng.

Lời giải vấn đề

Gọi E là giao điểm của BP và AC

F là giao điểm của CQ và AB.

Ta có: $\widehat{QAB} = \widehat{HAB} (= \widehat{QCB})$

ΔAQH cân tại A. Do đó AB là đường trung trực của HQ

Nên $\widehat{AQM} = \widehat{AHM}$. Tương tự $\widehat{APN} = \widehat{AHN}$

Mà $\widehat{AQM} + \widehat{APN} = 180^\circ$

Do đó $\widehat{AHM} + \widehat{AHN} = 180^\circ$

Vậy ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Và một học sinh cho tôi biết em vừa sưu tầm được 100 bài toán nâng cao Hình học lớp 9 ở trên mạng, bài toán 100 là thay trực tâm H ở bài toán trên bởi trọng tâm G. Em mong tôi giúp tìm lời giải vì em đã mất nhiều thời gian mà vẫn chưa tìm ra.

Tôi đã giúp em bằng Phương pháp thêm điểm như sau:

Gọi K là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác SBM, SCN ($K \neq S$)

Ta có: $\widehat{BKS} = \widehat{BMS} = \frac{sd\widehat{AQ} + sd\widehat{SB}}{2}$, $\widehat{SKC} = \widehat{SNC} = \frac{sd\widehat{AP} + sd\widehat{SC}}{2}$

Do đó: $\widehat{BKC} = \widehat{BKS} + \widehat{SKC} = \frac{sd\widehat{AQ} + sd\widehat{SB} + sd\widehat{AP} + sd\widehat{SC}}{2} = \widehat{BGC}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BGKC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BKG} = \widehat{BCQ}$

Mà $\widehat{BCQ} = \widehat{BSM}$, $\widehat{BSM} = \widehat{BKM}$

Nên $\widehat{BKG} = \widehat{BKM}$

$\Rightarrow$ Hai tia KG, KM trùng nhau

$\Rightarrow$ M, G, K thẳng hàng

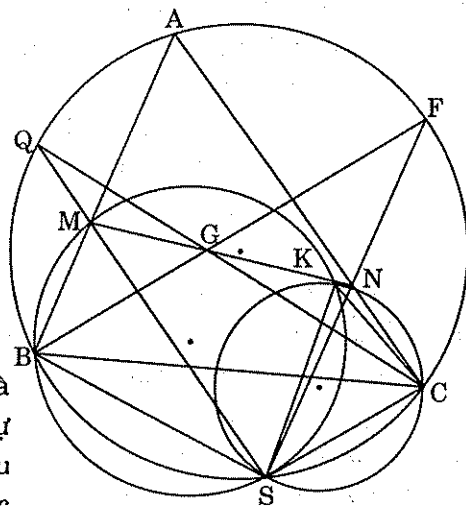
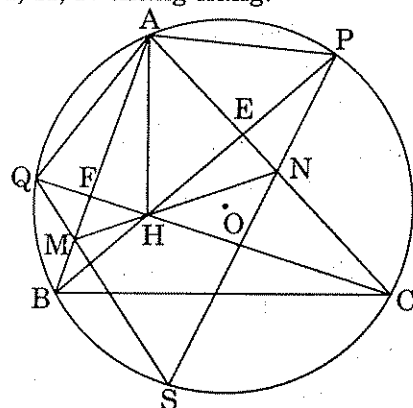
Tương tự N, G, K thẳng hàng.

Do đó M, G, K, N thẳng hàng

Vậy ba điểm M, G, N thẳng hàng.

Lời giải không cần đến “TRỌNG TÂM” nghĩa là chúng ta đã giải được bài toán tổng quát. Tôi thật sự hài lòng và nghĩ rằng có lẽ ta đã phát hiện ra điều mới nữa rồi... Nhưng! Nếu thấy rằng trên hình là lục giác SBQAPC nội tiếp đường tròn (O) thì giao điểm của các cặp đường thẳng sau đây thẳng hàng AB và SQ, CQ và BP, CA và SP.

Do vậy lời giải trên là một cách chứng minh định lí Pascal (Pascal nhà Toán học người Pháp, 1623 – 1662). Thế mà! tôi cứ tưởng ... Các bạn thấy tôi có ngớ ngẩn không?



(Trích bài giảng chương trình “Gặp gỡ Toán học” lần thứ 5, năm 2013)

A. CHỨNG MINH HÌNH HỌC**I. Kiến thức cần nhớ**

1. Tam giác
2. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác. Các đường đồng quy của tam giác
3. Tứ giác
4. Đa giác. Diện tích đa giác
5. Tam giác đồng dạng
6. Hệ thức lượng trong tam giác vuông
7. Đường tròn. Góc với đường tròn

II. Các bài toán chọn lọc**1. Đề bài**

Bài 1. Cho tam giác đều ABC có AD, BE, CF là các đường cao. Điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC. Gọi I, K, L lần lượt là hình chiếu của AM trên AD, BE, CF. chứng minh rằng giá trị của tổng AI + BK + CL không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

(Bài toán 2 Tạp chí TH & TT số 433 tháng 7 năm 2013)

Bài 2. Cho tam giác ABC với $\widehat{BCA} = 90^\circ$ và D là chân đường cao hạ từ C. Cho X là một điểm nằm trên đoạn thẳng BX sao cho AL = AC. M là giao điểm của AL và BK. Chứng minh rằng MK = ML

(Đề thi Olympic Toán học quốc tế lần thứ 53, năm 2012)

Bài 3. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi E, F, G, H lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng tứ giác EFGH là hình chữ nhật

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán, lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, 1997 – 1998)

Bài 4. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC (B nằm giữa M và C) MO, K là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác OHBC nội tiếp
- b) BK là tia phân giác của góc HBM

(Bài toán 5 Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 407 tháng 5 năm 2011)

Bài 5. Cho tam giác ABC có AB = AC, đường cao AH và đường phân giác BD. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHO, biết $\widehat{BDI} = 45^\circ$. Tìm số đo góc BAC, có thể có.

(Đề thi Olympic Toán học quốc tế lần thứ 50, năm 2009)

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), các đường cao AI, BD, CE cắt nhau tại H. DE cắt BC tại F. Đường thẳng vuông góc với BC tại B cắt AF tại N. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIF. Chứng minh rằng ba điểm J, D, N thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC ($AB < AC$). Gọi D là giao điểm của tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) với BC. Vẽ DE là tiếp tuyến của đường tròn (O). Vẽ AX vuông góc với BE tại X. Gọi M là trung điểm của AX. BM cắt đường tròn (O) tại Z. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADZ.

Bài 8. Cho tam giác nhọn ADC. D, E, F lần lượt trên các cạnh BC, AC, AB và AD, BE, CF đồng quy tại H. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Bài 9. Cho tam giác nhọn ABC, cắt đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K, L lần lượt là trực tâm của các tam giác AEFF, CDE. Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác IKL khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Hướng dẫn giải

Bài 1. Vẽ $MS \perp BC$ tại S, $MT \perp AC$ tại T, $MV \perp AB$ tại V.

Gọi độ dài đường cao của tam giác đều ABC là h.

Ta có: $MS = ID$, $MT = KE$, $MV = LF$.

$$\begin{aligned} S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} &= S_{ABC} \\ &= \frac{1}{2} MS \cdot BC + \frac{1}{2} MT \cdot AC + \frac{1}{2} MV \cdot AB = \frac{1}{2} AD \cdot BC \\ &= BC = AC = AB \end{aligned}$$

Nên $MS + MT + MV = AD = h$

Do đó $AI + BK + CL = AD - ID + BE - KE + CF - LF$

$$= (AD + BE + CF) - (ID + KE + LF) = 3h - h = 2h$$

Bài 2. Vẽ $AI \perp BX$ tại I. AI cắt CD tại T.

$\triangle TAB$ có TD, BI là hai đường cao cắt nhau tại X

$\Rightarrow X$ là trực tâm của tam giác TAB

Gọi S là giao điểm của AX và TB. Ta có: $AS \perp TB$

$\triangle ACB$ vuông tại C, CD là đường cao $\Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB$

Mà $AC = AL$ (gt). Nên $AL^2 = AD \cdot AB$

Ta có: $\frac{AD}{AT} = \frac{AI}{AB} (= \cos A) \Rightarrow AD \cdot AB = AI \cdot AT$

Nên $AI \cdot AT = AL^2$.

$\triangle AIL \sim \triangle ALT$ (c.g.c). Do đó $\widehat{ALT} = \widehat{AIL} = 90^\circ$

$\triangle TLA$ vuông tại L, LI là đường cao $\Rightarrow TL^2 = TI \cdot TA$. Tương tự $TK^2 = TS \cdot TB$.

Mà $\frac{TI}{TB} = \frac{TS}{TA} (= \cos T) \Rightarrow TI \cdot TA = TS \cdot TB$. Do đó $TK^2 = TL^2 \Rightarrow TK = TL$

$\triangle KMT = \triangle LMT$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Do đó $MK = ML$

Bài 3. $\triangle ADC$ có: $\widehat{DAC} + \widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 180^\circ$

Gọi tia đối của tia FC là tia Fx

$\widehat{GDC} = \frac{1}{2} \widehat{ADC}$, $\widehat{GCD} = \frac{1}{2} \widehat{ACD}$ (G là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CDA$)

Do đó: $\widehat{GDC} + \widehat{GCD} = \frac{1}{2} (\widehat{ADC} + \widehat{ACD}) = \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{DAC}) = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{DAC}$

$\triangle GDC$ có: $\widehat{DGC} = 180^\circ - (\widehat{GDC} + \widehat{GCD}) = 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{DAC}$

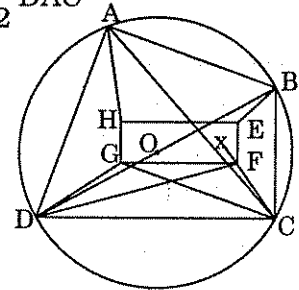
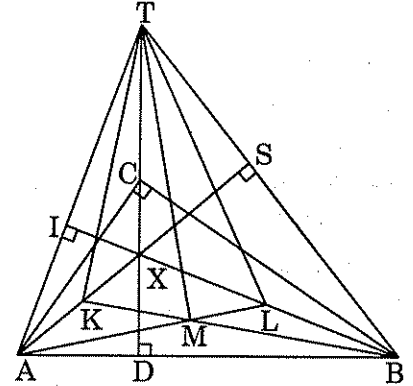
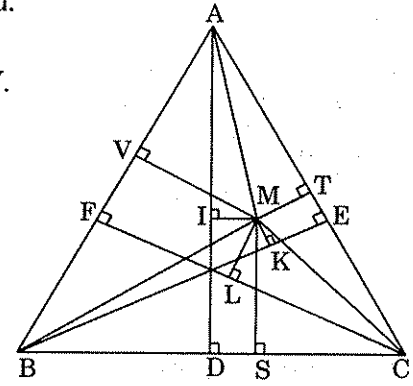
Tương tự: $\widehat{DFC} = 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{DBC}$

Mà: $\widehat{GDC} + \widehat{EBC} = \frac{1}{2} \widehat{ADC} + \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 90^\circ$.

Do đó: $\widehat{GFx} + \widehat{xFE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EFG} = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự: $\widehat{HEF} = 90^\circ$, $\widehat{FGH} = 90^\circ$

Vậy tứ giác EFGH là hình chữ nhật.



Do đó: $\frac{MH}{CD} = \frac{KH}{BC} \Rightarrow \frac{MH}{KH} = \frac{CD}{BC}$. Tương tự có: $\frac{KH}{KL} = \frac{BD}{BC}$

Do đó: $\frac{MH}{KL} = \frac{BD \cdot CD}{BC^2}$ (1)

Tương tự có: $\frac{NH}{KL} = \frac{BD \cdot CD}{BC^2}$ (2)

Từ (1) và (2) có: $MH = NH$. Do đó $AD \perp BC \Leftrightarrow AD \perp MN \Leftrightarrow \triangle DMN$ cân tại D

$\Leftrightarrow DA$ là tia phân giác $\widehat{EDF}$

Vì vậy H là trực tâm của tam giác DEF.

$\Leftrightarrow AD \perp BC, BE \perp AC, CF \perp AB$

$\Leftrightarrow DA$ là tia phân giác $\widehat{EDF}$, EB là tia phân giác $\widehat{DEF}$, FC là tia phân giác $\widehat{DFE}$

$\Leftrightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Bài 9. Để chứng minh được H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF

Ta có: $FI \perp AE, HE \perp AC \Rightarrow FI \parallel HE$.

Và $HF \perp AB, EI \perp AF \Rightarrow HF \parallel EI$

Nên HEIE là hình bình hành

$\Rightarrow FI \parallel HE$ và $FI = HE$.

Tương tự ta có: $DL \parallel HE$ và $DL = HE$.

Nên FILD là hình bình hành.

Tương tự FEIK là hình bình hành

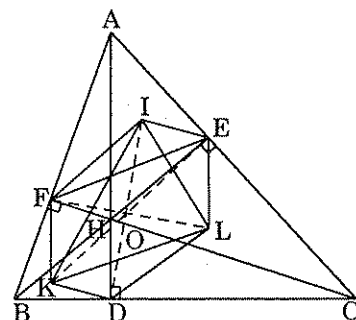
Gọi O là trung điểm ID. Ta có O là trung điểm của FI, EK

Hai tam giác DEF, IKL đối xứng qua O.

Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác IKL

$$\Leftrightarrow H = O \Leftrightarrow \begin{cases} A, I, H, D \text{ thẳng hàng} \\ B, K, H, E \text{ thẳng hàng} \\ C, L, H, F \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} EF \parallel BC \\ DF \parallel AC \\ ED \parallel AB \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \Leftrightarrow ABC \text{ đều.}$$



B. CỰC TRỊ HÌNH HỌC

I. Kiến thức cần nhớ

1. $A \notin d, B \in d, C \in d$

$AH \perp d$ tại H

a) $AB \geq AH$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B \equiv H$

b) $AB \geq AC \Leftrightarrow BH \geq CH$

2. a) $\triangle ABC: AB \geq AC \Leftrightarrow \widehat{C} \geq \widehat{B}$

b) Xét ba điểm A, B, C có $AB + AC \geq BC$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A$ nằm giữa B và C

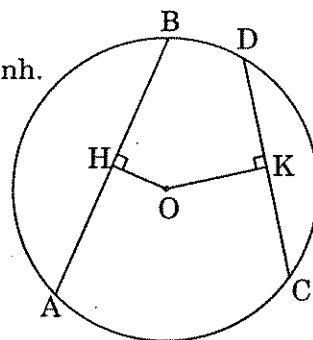
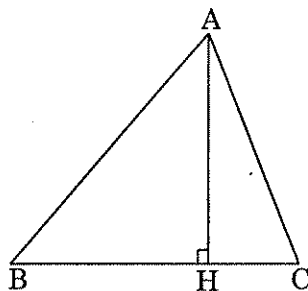
3. a) Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

b) $AB \geq CD \Leftrightarrow OH \leq OK$

4. Bất đẳng thức AM-GM với $a, b \geq 0$ ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$



II. Các bài toán chọn lọc

1. Đề bài

Bài 1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2(\sin A \cdot \sin B + \sin B \cdot \sin C + \sin A \cdot \sin C)$

b) $1 < \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin B}{\sin A + \sin C} + \frac{\sin C}{\sin A + \sin B} < 2$

c) $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

d) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

Bài 2. Cho tam giác ABC có AD, BE, CF là các đường trung tuyến. Đặt: AD = x, BE = y; CF = z. Chứng minh rằng:

a) $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \geq 6$

c) $\frac{1}{x+y-z} + \frac{1}{x-y+z} + \frac{1}{-x+y+z} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

d) $\frac{z}{x+y-z} + \frac{y}{x-y+z} + \frac{x}{-x+y+z} \geq 3$

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), AH là đường cao. Gọi D là giao điểm của AO với BC. Chứng minh rằng: $\frac{HB}{HC} + \frac{DB}{DC} \geq 2 \cdot \frac{AB}{AC}$

(Đề thi học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2011 – 2012)

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC. M là điểm trên cạnh BC. Vẽ MD vuông góc với AB tại D, ME vuông với AC tại E. Xác định vị trí của điểm M để độ dài đoạn thẳng DE nhỏ nhất.

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm trên các cạnh BC, AC, AB lần lượt các điểm D, E, F sao cho chu vi tam giác DEF nhỏ nhất.

Bài 6. Cho đường tròn (O; R) hai điểm A, B ở ngoài đường tròn sao cho OA = 2R. Tìm vị trí của điểm M trên đường tròn (O) để MA + 2MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 7. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại A, B (O, O' nằm khác phía đối với AB). Đường thẳng d di động qua A cắt (O), (O') lần lượt ở C, D (A nằm giữa C, D). Xác định vị trí d để:

a) Chu vi tam giác BCD lớn nhất

b) Diện tích tam giác BCD lớn nhất

c) Đường trung tuyến BM của tam giác của tam giác BCD lớn nhất

d) Đường phân giác BI của tam giác BCD lớn nhất

e) Bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD lớn nhất

f) Bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác BCD lớn nhất.

Bài 8. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O). A di động trên cung BC. Xác định vị trí của điểm A sao cho: 2AB + 3AC lớn nhất

Bài 9. Cho điểm A cố định thuộc đường tròn (O; R), AB, AC là hai dây cung di động sao cho tích AB.AC không đổi và khoảng cách từ O đến BC lớn hơn R. Xác định vị trí của dây BC để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài 10. Cho ba đường tròn có bán kính R_1, R_2, R tiếp xúc ngoài lẫn nhau đôi một và tiếp xúc với một đường thẳng, trong đó R là bán kính có độ dài nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất của $R_1.R_2$ theo độ dài R cho trước.

(Đề thi học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 1, TP.Hồ Chí Minh, năm học 1993 – 1994)

Bài 11. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . M là điểm thuộc đường tròn (O) . Vẽ MH vuông góc với AB tại H . Xác định vị trí của điểm M để:

- Diện tích tam giác HMO lớn nhất
- Diện tích tam giác MAH lớn nhất.

Bài 12. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính BC . A thuộc đường tròn (O) . Vẽ AH vuông góc với BC tại H . Vẽ HD vuông góc với AB tại D , HE vuông góc với AC tại E . Tìm vị trí điểm A để diện tích tứ giác $BDEC$ lớn nhất.

Bài 13. Cho đường tròn $(I; r)$ nội tiếp tam giác ABC ($\widehat{C} < 90^\circ$). Kẻ đường thẳng qua I cắt hai cạnh CA, CB của tam giác ABC theo thứ tự ở M, N . Xác định vị trí của đường thẳng MN sao cho diện tích tam giác CMN đạt giá trị nhỏ nhất.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Bài 14. Cho điểm M nằm trong tam giác nhọn ABC . Gọi R', R lần lượt là bán kính lớn nhất, nhỏ nhất của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MBC, MCA . Xác định vị trí của điểm M để $\frac{R'}{R}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Bài 1. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b+c}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C}$

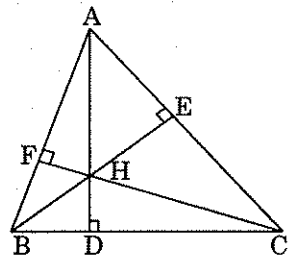
a) $a < b + c$. Nên $\sin A < \sin B + \sin C$

$$\sin^2 A < \sin A(\sin B + \sin C) \Rightarrow \sin^2 A < \sin A \cdot \sin B + \sin A \cdot \sin C$$

b) $\frac{\sin A}{\sin B + \sin C} = \frac{2 \sin A}{(\sin B + \sin C) + (\sin B + \sin C)} < \frac{2 \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}$

c) $\cot B \cdot \cot C = \cot CHD \cdot \cot C = \frac{HD}{CD} \cdot \frac{CD}{AD} = \frac{HD}{AD} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

d) $\cos A = \sqrt{\cos BAE \cos CAF} = \sqrt{\frac{AE}{AB} \cdot \frac{AF}{AC}} = \sqrt{\frac{AE}{AC} \cdot \frac{AF}{AB}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AE}{AC} + \frac{AF}{AB} \right)$



Bài 2

a) Vẽ AD là đường phân giác của tam giác ABC . Vẽ $BH \perp AD$ tại H

Ta có: $BH \leq BD$, $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{DB + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC}$

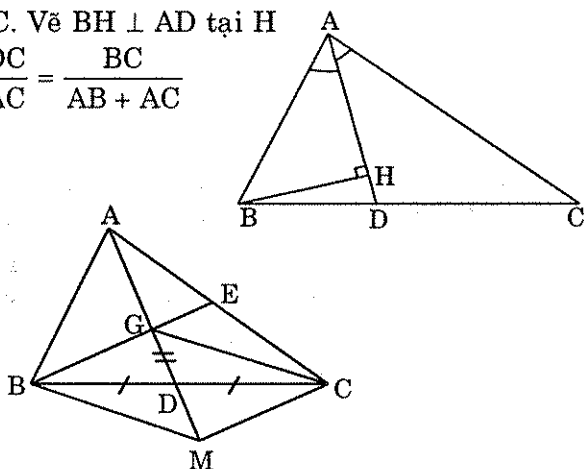
$$\sin \frac{A}{2} = \frac{BH}{AB} \leq \frac{DB}{AB} = \frac{a}{c+b}$$

$$\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{c+b} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

b) $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{c+b} \Rightarrow \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \geq \frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$

M là điểm đối xứng của G qua D

$BGCM$ là hình bình hành $\Rightarrow GB = CM$



Ta có: $x < y + z$, $z < x + y$, $y < x + z$

d) Dăt: $-x + y + z = a$, $x - y + z = b$, $x + y - z = c$

$$= \frac{x}{-x+y+z} + \frac{y}{x-y+z} + \frac{z}{x+y-z} = \frac{b+c}{2a} + \frac{a+c}{2b} + \frac{a+b}{2c}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \right] \geq \frac{1}{2} (2 + 2 + 2) = 3$$

$$\Delta\text{HBA} \sim \Delta\text{CEA (g.g)} \Rightarrow \frac{\text{BH}}{\text{CE}} = \frac{\text{AB}}{\text{AE}} \quad (1)$$

$$\Delta\text{HCA} \sim \Delta\text{BEA}(\text{g.g}) \Rightarrow \frac{\text{CH}}{\text{BE}} = \frac{\text{AC}}{\text{AE}} \quad (2)$$

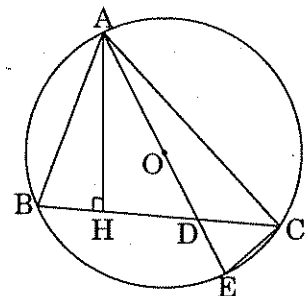
Từ (1), (2) có: $\frac{BH}{CH} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CE}{BE}$

$$\Delta DAB \sim \Delta DCE \text{ (g.g.)} \Rightarrow \frac{DB}{DE} = \frac{AB}{CE} \quad (3)$$

$$\Delta \text{DAC} \sim \Delta \text{DBE} \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{\text{DC}}{\text{DE}} = \frac{\text{AC}}{\text{BE}} \quad (4)$$

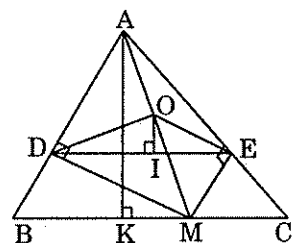
Từ (3), (4) có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BE}{CE}$

$$\text{Do đó: } \frac{HB}{HC} + \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \left(\frac{CE}{BE} + \frac{BE}{CE} \right) \geq \frac{AB}{AC} \cdot 2\sqrt{\frac{CE}{BE} \cdot \frac{BE}{CE}} = 2 \frac{AB}{AC}$$



Vẽ $OI \perp DE$ tại I

$$\begin{aligned} DE &= 2DI = 2OD\sin DOI \\ &= AM\sin BAC \geq AK\sin BAC \end{aligned}$$

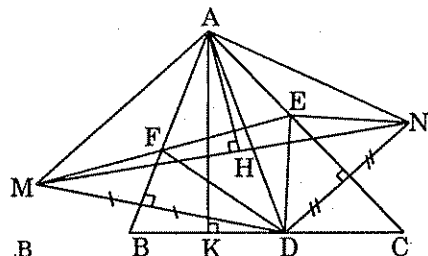


Vẽ $AH \perp MN$ tại H. Vẽ $AK \perp BC$ tại K

$$AM = AN = AD;$$

$$\widehat{MAN} = 2\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{MAH} = \widehat{BAC}$$

$$\begin{aligned}\text{CV(DEF)} &= \text{DF} + \text{EF} + \text{DE} = \text{MF} + \text{EF} + \text{EN} \geq \text{MN} \\ &= 2\text{MH} = 2\text{AM}.\sin\text{MAH} \\ &= 2\text{AM}.\sin\text{BAC} \geq 2\text{AK}.\sin\text{BAC}\end{aligned}$$



E là trung điểm của OC.

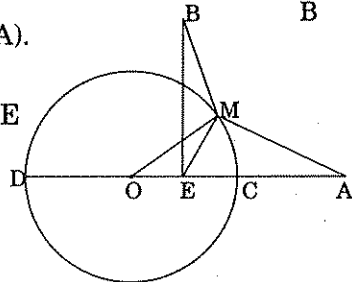
$M \equiv C, M \equiv D, M$ khác C, P có $MA = 2ME$

$$MA + 2MB$$

$$= 2ME + 2MB$$

$$= 2(\text{ME} + \text{MB}) \geq 2\text{BE}$$

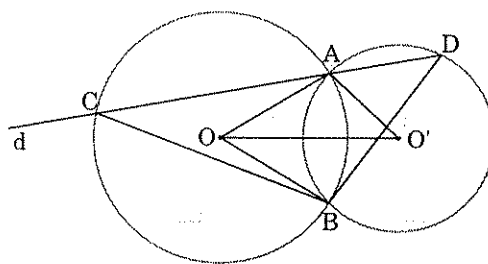
BE không đổi



Bài 7. $\widehat{ACB} = \widehat{AOO'} \left(= \frac{1}{2} \widehat{AOB} \right)$

$\widehat{ADB} = \widehat{AO'O} \left(= \frac{1}{2} \widehat{AO'B} \right)$

$\triangle BCD \sim \triangle AOO' \text{ (g.g)}$



Bài 8. M trên cạnh BC, $\frac{BM}{CM} = \frac{3}{2}$.

N là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$. NM cắt (O) tại D.

$\frac{BD}{CD} = \frac{MB}{CM} = \frac{3}{2} \Rightarrow BD = \frac{3}{2} CD$

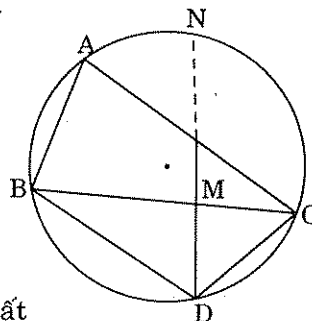
$AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC$

$AB \cdot CD + AC \cdot \frac{3}{2} CD = AD \cdot BC$

$\frac{1}{2} CD(2AB + 3AC) = AD \cdot BC$

Ta có: CD, BC không đổi. Do đó $2AB + 3AC$ lớn nhất

$\Leftrightarrow AD$ lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ là đường kính của đường tròn (O)



Bài 9. Vẽ đường kính AD của (O)

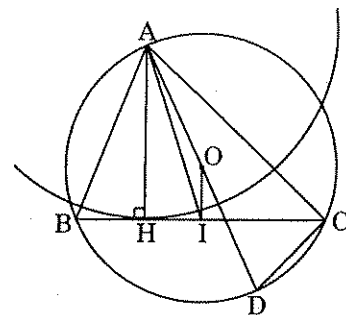
$\triangle HBA \sim \triangle CDA \text{ (g.g)}$

$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{2R}$

$OI \geq AI - OA \geq AH - OA = t - R$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$, AH không đổi BC lớn nhất

$\Leftrightarrow OI$ nhỏ nhất



Bài 10. (O_1, R_1) , (O_2, R_2) , (O, R) tiếp xúc ngoài lẫn nhau đôi một và tiếp xúc với đường thẳng d lần lượt tại A, B, C.

Vẽ đường thẳng qua B song song với O_1O_2 cắt O_1A tại N

$AB = \sqrt{BN^2 - AN^2} = \sqrt{O_1O_2^2 - AN^2} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2}$

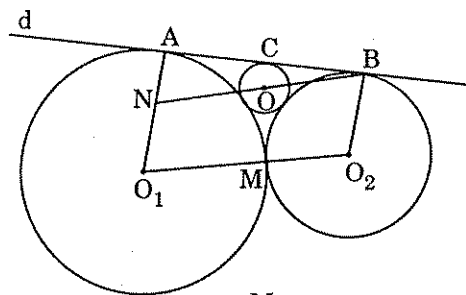
$AB = 2\sqrt{R_1 R_2}$.

Tương tự $AC = 2\sqrt{R_1 R}$, $BC = 2\sqrt{R_2 R}$

$AC + CB = AB$

$\Rightarrow 2\sqrt{R_1 R} + 2\sqrt{R_2 R} = 2\sqrt{R_1 R_2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} = \frac{1}{\sqrt{R}}$



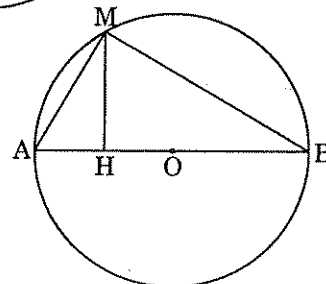
Bài 11.

a) $OH^2 + MH^2 + OM^2 = R^2$

$S_{HMO} = \frac{1}{2} OH \cdot MH \leq \frac{1}{2} \left(\frac{OH^2 + HM^2}{2} \right) = \frac{R^2}{4}$

b) Đặt $AH = x$, $BH = 2R - x$

$MH = \sqrt{x(2R - x)}$



$$S_{MAH} = \frac{1}{2} x \sqrt{x(2R-x)} = \frac{1}{2} \sqrt{x^3(2R-x)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{3} (2R-x) \cdot 3\sqrt{3}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + 2R-x \right) \right]^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$$

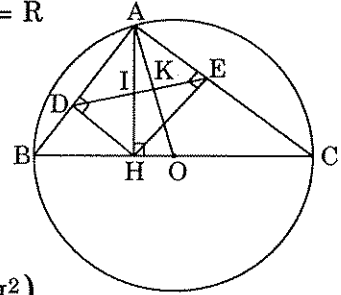
Bài 12. Gọi I, K lần lượt là giao điểm của DE với AH, AO

Ta có: $AI = IH = \frac{AH}{2} = \frac{DE}{2}$, $OA \perp DE$. Ta có: $AH \leq OA = R$

$\Delta AKI \sim \Delta AHO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{AI}{AO} \Rightarrow AK \cdot AO = AI \cdot AH$$

$$\Rightarrow AK = \frac{AH^2}{2R}$$



$$S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} = AH \cdot R - \frac{AH^3}{4R} = \frac{AH}{4R} (4R^2 - AH^2)$$

$$= \frac{AH}{4R} (2R - AH)(2R + AH) \leq \frac{1}{4R} \left(\frac{AH + 2R - AH}{2} \right)^2 (2R + R) = \frac{3R^2}{4}$$

Bài 13. (I) tiếp xúc với BC, AC lần lượt tại D, E

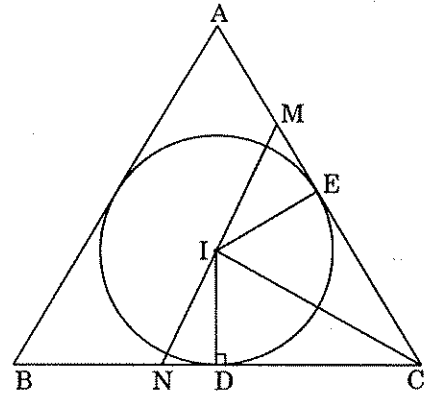
$$S_{CMN} = S_{ICM} + S_{ICN} = \frac{1}{2} r \cdot CM + \frac{1}{2} r \cdot CN$$

$$= \frac{1}{2} r (CM + CN) \geq r \sqrt{CM \cdot CN}$$

$$= r \sqrt{\frac{2S_{CMN}}{\sin C}}$$

$$\Rightarrow S_{CMN}^2 \leq r^2 \cdot \frac{2S_{CMN}}{\sin C}$$

$$S_{CMN} \leq \frac{2r^2}{\sin C}$$



Bài 14. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

Theo đầu bài, ta có: $R' \geq R$

$$\text{Do đó: } \frac{R'}{R} \geq 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$

Thật vậy. Gọi O' là điểm đối xứng của O qua BC

$$O'B = OB = R, O'C = OC = R$$

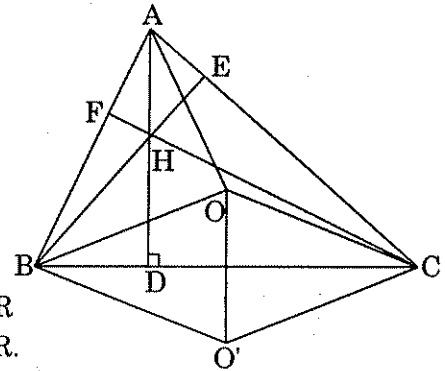
Tứ giác OAHO' là hình bình hành $\Rightarrow O'H = OA = R$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác HAB là R.

Tương tự các bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAC, HBC là R.

Dấu "=" xảy ra ở trên là đúng.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{R'}{R}$ là 1.



BÀI VIẾT 4: TÌM KIẾM ỨNG DỤNG CỦA MỘT TỨ GIÁC NỘI TIẾP

(Trích tài liệu chương trình “Gặp gỡ Toán học lần thứ 5, năm 2013)

Bài toán. Cho điểm M ở bên ngoài đường tròn (O; R). Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và một cát tuyến MCD (A, B, C, D thuộc đường tròn (O, R), C nằm giữa M và D, tia MC nằm giữa hai tia MA, MO, gọi H là giao điểm của AB và MO.

Chứng minh rằng tứ giác CDOH nội tiếp

Hướng dẫn giải

$$\triangle MAC \sim \triangle MDA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA}$$

$$\Rightarrow MA^2 = MC.MD$$

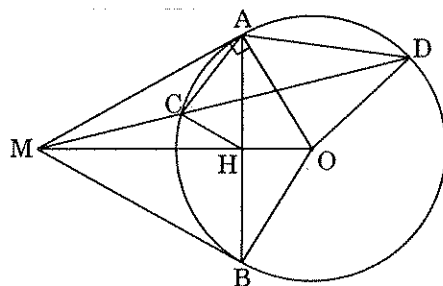
$\triangle MAO$ vuông tại A, AH là đường cao

$$\Rightarrow MA^2 = MH.MO$$

Ta có: $MC.MD = MH.MO$

$$\triangle MCH \sim \triangle MOC \text{ (g.g)} \Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{MOD}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác CDOH nội tiếp



Đây là một bài toán rất quen thuộc đối với mọi học sinh lớp 9, do vậy mà kì thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên tỉnh Đồng Nai, năm học 2012 – 2013 có một câu là bài toán trên. Tứ giác nội tiếp CDOH là “Bầu bối” giúp giải được nhiều bài toán.

Chúng ta hãy cùng tìm kiếm ứng dụng của tứ giác nội tiếp CDOH trong giải toán, qua việc giải các bài toán Hay và Khó sau:

Bài 1. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O và hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm và C nằm giữa M, D)

a) Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn. Suy ra AB là đường phân giác của $\widehat{CHD}$.

b) Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O). Chứng minh A, B, K thẳng hàng

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2008 – 2009 và đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường Đại học sư phạm Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2011 – 2012)

Bài 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đường thẳng AB lấy điểm C nằm ngoài đoạn AB. Từ C vẽ hai tiếp tuyến CE, CF với đường tròn (O), (E, F là hai tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của AB và EF. Qua C vẽ một cát tuyến bất kỳ cắt đường tròn (O) tại M, N (M nằm giữa C và N). Chứng minh:

a) Bốn điểm O, I, M, N cùng nằm trên một đường tròn

b) $\widehat{AIM} = \widehat{BIN}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận Phú Nhuận, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2004 – 2005)

Bài 3. Cho đường tròn (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M vẽ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm). D di động trên cung lớn AB (D không trùng với A, B và điểm chính giữa của cung) C là giao điểm thứ hai của MD với đường tròn. H là giao điểm của OM với AB. Chứng minh $MH.MO = MC.MD$, từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác HCD luôn đi qua một điểm cố định.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Phú Thọ, năm học 2011 – 2012)

Bài 4. Cho điểm M ở bên ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và một cát tuyến MCD. AB cắt MO, CD lần lượt tại H, J. Chứng minh rằng: $CJ.MD = MC.DJ$

Bài 5. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại D. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$
(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013)

Bài 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), BE và CF là các đường cao. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S, các đường thẳng BC và OS cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{ME}$

b) Chứng minh rằng: $\triangle AEM \sim \triangle ABS$

c) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của AS và BC. Chứng minh rằng $NP \perp BC$
(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, trường Đại học sư phạm Hà Nội, năm học 2011 – 2012)

Bài 7. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC (B nằm giữa M và C) với đường tròn. Gọi H là hình chiếu của A trên MO. K là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác OHBC nội tiếp

b) BK là tia phân giác của góc HBM

(Bài toán 5 Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 407 tháng 5 năm 2011)

Bài 8. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các tia AB, DC cắt nhau tại M, các tia AC, BD cắt nhau tại T. Vẽ ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm E, F, T thẳng hàng.

Bài 9. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các tia AB, DC cắt nhau tại M, các tia AD, BC cắt nhau tại N. Vẽ ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

Bài 10. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC. Tia phân giác góc OAD cắt đường tròn (O) tại E. F là giao điểm các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) tại K. Vẽ đường kính AN của đường tròn (O). DK cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Các bạn hãy tiếp tục tìm tòi suy nghĩ, tôi thực sự tin rằng chúng ta sẽ còn tìm ra được ứng dụng đặc sắc của tứ giác nội tiếp CDOH trong giải toán hình học.

Hướng dẫn giải

Bài 1.

a) MA, MB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (gt)

$\Rightarrow MA = MB$, MO là tia phân giác của góc AMB

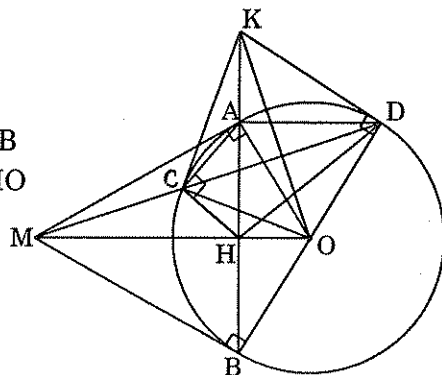
$\triangle MAB$ cân tại M, MO là đường phân giác $\Rightarrow MO \perp AB$

$\triangle MAO$ vuông tại A, AH là đường cao $\Rightarrow MA^2 = MH.MO$

$\triangle MAC \sim \triangle MDA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$$

Do đó $MH.MO = MC.MD$



Xét $\triangle MHC$ và $\triangle MDO$ có:

$$\widehat{HMC} \text{ (chung)}, \frac{MH}{MD} = \frac{MC}{MO} \text{ (vì } MH.MO = MC.MD)$$

Do đó $\triangle MHC \sim \triangle MDO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$

$\Rightarrow$ Tứ giác CHOD nội tiếp

$\triangle OCD$ có $OC = OD (= R) \Rightarrow \triangle OCD$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{DCO} = \widehat{CDO}$

Mà: $\widehat{MHC} = \widehat{MDO}$ (vì tứ giác CHOD nội tiếp). Do đó $\widehat{MHC} = \widehat{DHO}$

Ta có: $\widehat{MHC} + \widehat{CHA} = \widehat{DHO} + \widehat{DHA} (= 90^\circ)$

Vậy $\widehat{CHA} = \widehat{DHA}$. Nên AB là đường phân giác của góc CHD.

b) Ta có: $\widehat{KCO} = \widehat{KHO} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác KCOD nội tiếp

Mà tứ giác CHOD nội tiếp

Do đó 5 điểm C, K, D, O, H cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{KHO} = \widehat{KCO} = 90^\circ$

Ta có: $KH \perp OM$ tại H. Mà $AB \perp OM$ tại H.

Do vậy hai đường thẳng KH, AB trùng nhau

Suy ra ba điểm A, B, K thẳng hàng.

Bài 2.

a) $CM.CN = CI.CO (= CE^2)$

$\triangle CMI \sim \triangle CON \Rightarrow \widehat{CMI} = \widehat{CON} \Rightarrow$ Tứ giác MNOI nội tiếp

b) $OM = ON (= R)$

Xét đường tròn (MNCI) có: $OM = ON \Rightarrow \widehat{OM} = \widehat{ON}$

$\Rightarrow \widehat{BIN} = \widehat{ONM}$

Mà $\widehat{AIM} = \widehat{ONM}$ (tứ giác MNOI nội tiếp)

Vậy $\widehat{AIM} = \widehat{BIN}$

Bài 3. $MC.MD = MH.MO (= MA^2)$

$\triangle MCH \sim \triangle MOD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MCH} = \widehat{MOD}$

$\Rightarrow$ Tứ giác CHOD nội tiếp

Mà O cố định. Do vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác HCD luôn đi qua điểm cố định O.

Bài 4. $MC.MD = MH.MO (= MA^2)$

$\triangle MCH \sim \triangle MOD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MCH} = \widehat{MOD}$

$\Rightarrow$ Tứ giác CHOD nội tiếp

Mà $OC = OD (= R)$

Xét đường tròn (CHOD) có:

$\widehat{MHC} = \widehat{ODC}$ và $\widehat{OC} = \widehat{OD}$ nên $\widehat{ODC} = \widehat{OHD}$

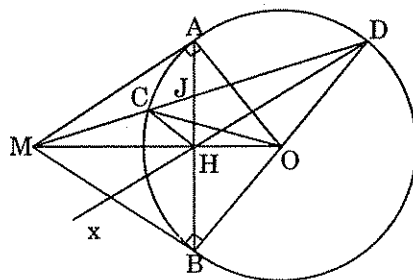
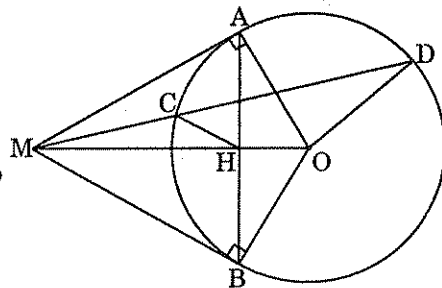
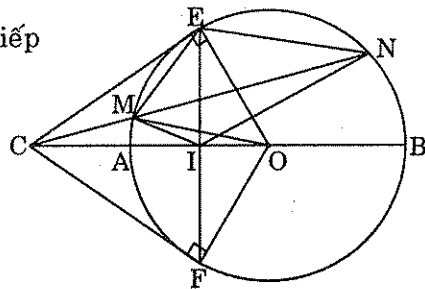
$\widehat{OHD} = \widehat{MHx}$ (Hx là tia đối của tia HD)

Do đó: $\widehat{MHC} = \widehat{MHx}$

Ta có: $\widehat{MHC} + \widehat{CHA} = \widehat{MHx} + \widehat{AHD}$

Nên $\widehat{CHA} = \widehat{AHD}$

Ta có: HJ, HM là các đường phân giác trong và ngoài của tam giác HCD.



$$\Rightarrow \frac{CJ}{DJ} = \frac{MC}{MD}$$

$$\text{Vậy } CJ \cdot MD = MC \cdot DJ$$

Bài 5. Gọi E là giao điểm của DA và đường tròn (O)

Tứ giác AOME nội tiếp:

$$\widehat{AMB} = \widehat{BME} = \frac{1}{2} \widehat{AME} = \frac{1}{2} \widehat{AOE} = \widehat{ACE}$$

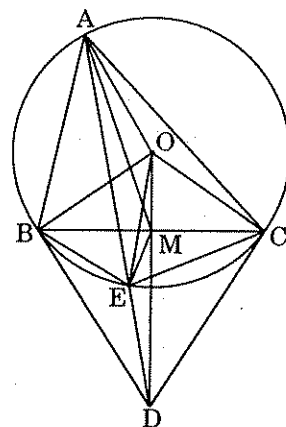
$$\widehat{ABE} + \widehat{ACE} = 180^\circ, \widehat{AMC} + \widehat{AMB} = 180^\circ$$

$$\text{Nên } \widehat{ABE} = \widehat{AMC}$$

$$\triangle ABE \sim \triangle AMC \text{ (g.g.)}. \text{ Vậy } \widehat{BAD} = \widehat{CAM}$$

Chú ý: Nếu gọi N là giao điểm của AM và đường tròn (O) thì $\widehat{BE} = \widehat{CN}$. Do đó tứ giác BENC là hình thang cân

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Bình Phước, năm học 2013 – 2014)



Bài 6.

$$\text{a) } \triangle EAB \sim \triangle MBS \text{ (g.g.)} \Rightarrow \frac{AB}{BS} = \frac{AE}{MB} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BS}{MB}$$

$$\text{Mà } MB = MC = ME$$

$$\text{Vậy } \frac{AB}{AE} = \frac{BS}{MB}$$

b) Gọi Bx là tia đối của tia BS

$$\widehat{ABx} = \widehat{ACB} = \widehat{CEM} \Rightarrow \widehat{ABS} = \widehat{AEM}$$

$$\triangle AEM \sim \triangle ABS \text{ (c.g.c.)}$$

$$\text{Cách khác: Chứng minh } \widehat{BAS} = \widehat{MAC}$$

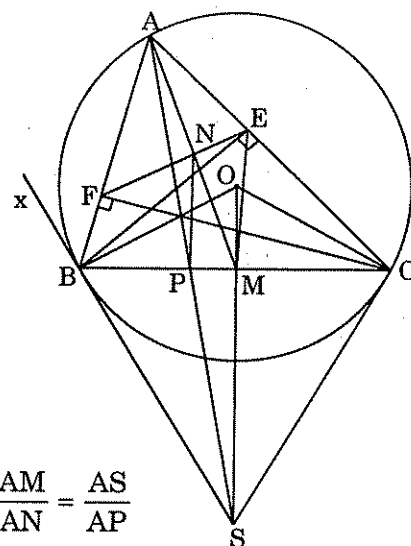
$$\triangle AEM \sim \triangle ABS \text{ (g.g.)}$$

$$\text{c) } \triangle AEM \sim \triangle AEN \text{ (g.g.)} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AP}{AN}$$

$$\text{Mà: } \frac{AB}{AE} = \frac{AS}{AM} \text{ (} \triangle ABS \sim \triangle AEM \text{)}. \text{ Nên } \frac{AP}{AN} = \frac{AS}{AM} \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AS}{AP}$$

$$\triangle AMS \text{ có: } \frac{AM}{AN} = \frac{AS}{AP} \Rightarrow NP \parallel SM. \text{ Ta có: } NP \parallel SM, SM \perp BC$$

$$\text{Vậy } NP \perp BC$$



Bài 7.

$$\text{a) } MB \cdot MC = MH \cdot MO (= MA^2)$$

$$\triangle MBH \sim \triangle MOC \text{ (c.g.c.)} \Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{MOC} \Rightarrow \text{Tứ giác OHBC nội tiếp.}$$

Gọi D là giao điểm của tia đối tia OM và đường tròn (O)

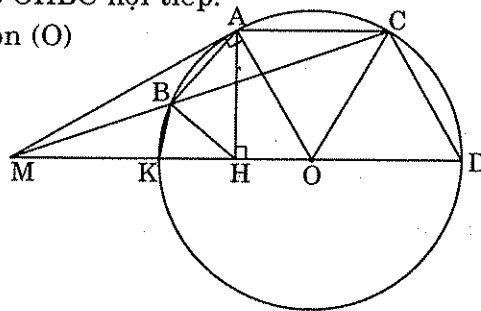
$$\widehat{MBK} = \widehat{CDK}$$

$$\widehat{MBH} = \widehat{COK}$$

$$\widehat{CDK} = \frac{1}{2} \widehat{COK}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{MBK} = \widehat{CDK} = \frac{1}{2} \widehat{COK} = \frac{1}{2} \widehat{MBH}$$

Nên BK là tia phân giác của góc HBM



Bài 8. Gọi H là giao điểm của OM và EF.

$$MB.MA = MH.MO (= ME^2)$$

$$\Delta MBH \sim \Delta MAO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{MAO}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABHO nội tiếp

Tương tự tứ giác CDOH nội tiếp

$$\widehat{BHC} = \widehat{BHM} + \widehat{MHC} = \widehat{BAO} + \widehat{ODC}$$

Nên $\widehat{BHC} = \widehat{BTC} \Rightarrow$ Tứ giác BHTC nội tiếp

Tương tự tứ giác AHTD nội tiếp

$$\text{Ta có: } \widehat{MHC} = \widehat{ODC} = \widehat{OCD} = \widehat{OHD}$$

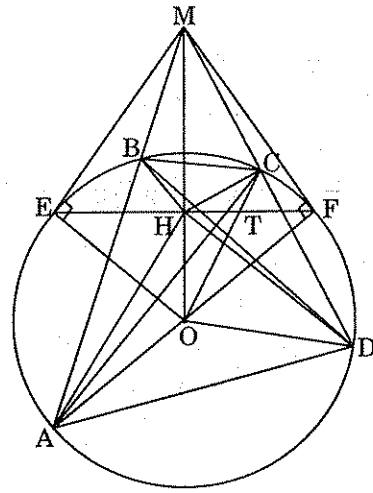
$$\widehat{THC} = \widehat{TBC} = \widehat{TAD} = \widehat{THD}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{MHT} = \frac{1}{2}(\widehat{MHC} + \widehat{THC} + \widehat{THD} + \widehat{OHD}) = 90^\circ$$

Ta có: $TH \perp OM$ tại H. Mà $EF \perp OM$ tại H

Nên hai đường thẳng TH, EF trùng nhau.

Vậy ba điểm E, F, T thẳng hàng.



Bài 9. Gọi T là giao điểm của AC và BD NT cắt đường tròn (O) tại K, L (L nằm giữa T, N)

Đường tròn (TBC) cắt NK tại S.

$NA.ND = NC.NB = NT.NS$. Ta có tứ giác STDA nội tiếp.

$$\text{Ta có: } \widehat{BSA} = \widehat{BSK} + \widehat{KSA} = \widehat{BCA} + \widehat{BDA} = \widehat{BOA}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BSOA nội tiếp. Tương tự tứ giác SCDO nội tiếp

$MA.MB = MC.MD$. Ta có: M, S, O thẳng hàng

$$\widehat{MSC} = \widehat{ODC} = \widehat{OCD} = \widehat{ODS}$$

$$\widehat{CST} = \widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \widehat{TSD}$$

$$\text{Nên: } \widehat{MSL} = \frac{1}{2}(\widehat{MSC} + \widehat{CST} + \widehat{TSD} + \widehat{OSD}) = 90^\circ$$

$\Rightarrow OM \perp KL$

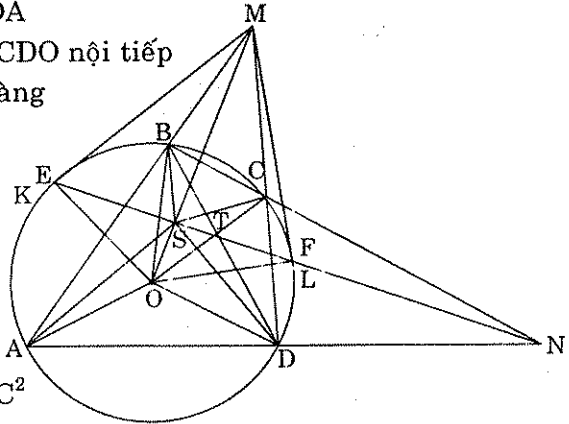
$$\widehat{OSC} = 180^\circ - \widehat{ODC} = 180^\circ - \widehat{OCD} = \widehat{OCM}$$

$$\Delta OSC \sim \Delta OCM \Rightarrow \frac{OS}{OC} = \frac{OC}{OM} \Rightarrow OS.OM = OC^2$$

$$\Delta OLM \sim \Delta OSL \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{OLM} = \widehat{OSL} = 90^\circ$$

$L = F$. Tương tự: $K = E$

Vậy N, E, F thẳng hàng.



Bài 10. Ta có: $FK.FA = FH.FO (= FB^2)$

$$\Delta FKH \sim \Delta FOA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{FKH} = \widehat{FOA}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AOHK nội tiếp

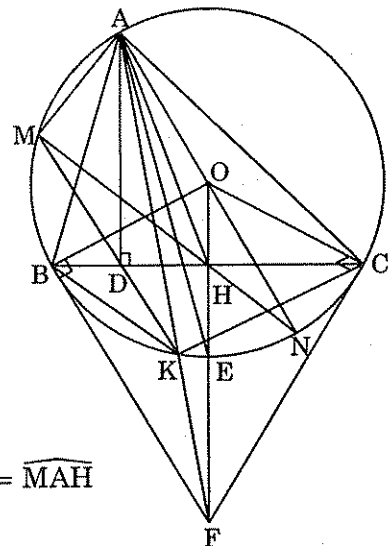
$$\Rightarrow \widehat{KHF} = \widehat{KAO} = \widehat{AHO}$$

$$\Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{BHA} \Rightarrow \widehat{BHA} = \frac{1}{2}\widehat{AHK} = \frac{1}{2}\widehat{AOK} = \widehat{ACK}$$

$$\text{Nên } \widehat{BHA} = \widehat{ACK} \Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{ABK}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{HAC} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{KAC}$$

$$\widehat{KDC} = \frac{\widehat{sdBM} + \widehat{sdCK}}{2} = \widehat{MAB} + \widehat{KAC} = \widehat{MAB} + \widehat{BAH} = \widehat{MAH}$$



$\Rightarrow$ Tứ giác AMDH nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{AHD} = 90^\circ$$

Mà $\widehat{AMN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Ta có: $\widehat{AMH} = \widehat{AMN} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Hai tia MH, MN trùng nhau

Vậy ba điểm M, H, N thẳng hàng.

BÀI VIẾT 5: HÃY BẮT ĐẦU TỪ BÀI TOÁN QUEN THUỘC

(trích tài liệu chương trình “Gặp gỡ Toán học” lần thứ 5, năm 2013)

Chúng ta hãy cùng bắt đầu từ bài toán quen thuộc sau:

Bài toán. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O, R). A di động trên đường tròn (O). Xác định vị trí A để AB + AC lớn nhất

Hướng dẫn giải

Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AC

$$\Delta ADC \text{ cân tại } A \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BDC}$$

$$\widehat{BDC} = \frac{1}{4} \text{ số đo } \widehat{BC}$$

$\widehat{BDC} = \alpha$, α không đổi, BC cố định.

Nên D thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng BC.

Ta có: AB + AC = AB + AD = BD.

Do đó: AB + AC lớn nhất $\Leftrightarrow$ BD lớn nhất $\Leftrightarrow$ BD là đường kính của cung chứa góc α

$$\Leftrightarrow \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = \widehat{BCD} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{DBC} = \widehat{ACB} \Leftrightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB}$$

Vậy khi A là điểm chính giữa của cung BC thì AB + AC lớn nhất.

Do đó BC không đổi, ta có bài toán.

Bài 1. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O).

A di động trên đường tròn (O). Xác định vị trí A để chu vi tam giác ABC lớn nhất

Thử xét tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O)

Gọi M, P, N, Q là điểm chính giữa các cung:

$$\widehat{BAD}, \widehat{BCD}, \widehat{MBCP}, \widehat{MADP}$$

$$\text{Ta có: } (AB + AD) + (BC + CD) \leq (MB + MD) + (PB + PD)$$

$$= (MB + PB) + (MD + PD)$$

$$\leq (MN + PN) + (MQ + PQ)$$

Do đó CV(ABCD) $\leq$ CV(MNPQ), tứ giác MNPQ là hình vuông.

Giúp ta có bài toán mới

Bài 2. Chứng minh rằng trong các tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hình vuông có chu vi lớn nhất.

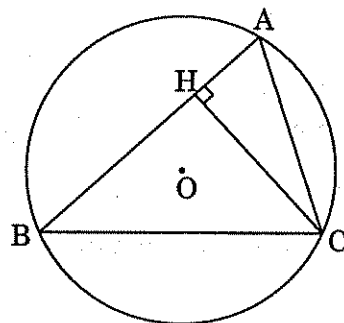
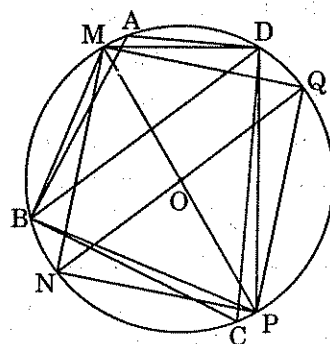
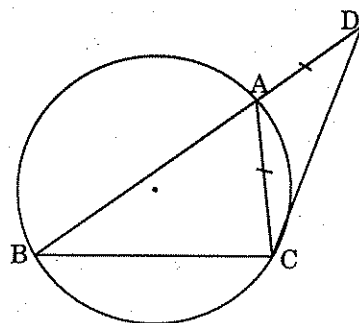
Từ bài toán nhận ra: AB + AC $\leq$ T, T không đổi

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$$

$$\text{Ta có: } AB \cdot AC \leq \left(\frac{AB + AC}{2} \right)^2 \leq \frac{T^2}{4},$$

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \geq \frac{4}{AB + AC} \geq \frac{4}{T}$$

Giúp có các bài toán.



Bài 3. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O, R). A di động trên đường tròn (O).

Xác định vị trí A để:

- Tích $AB \cdot AC$ lớn nhất
- Diện tích tam giác ABC lớn nhất
- Tổng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ nhỏ nhất

Từ bài toán xét A thuộc cung lớn BC, ta có: $\widehat{BAC} < 90^\circ$, $\widehat{BAC} = t$, không đổi

Vẽ $CH \perp AB$ tại H. Ta có $AH = AC \cos A$, $CH = AC \sin A$. Nên $BH = AB - AC \cos A$

ΔHBC vuông tại H

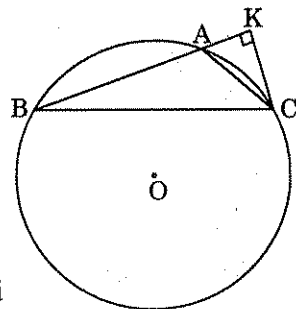
$$\Rightarrow BC^2 = BH^2 + CH^2$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= (AB - AC \cos A)^2 + (AC \sin A)^2 \\ &= AB^2 - 2AB \cdot AC \cos^2 A + AC^2 \cos^2 A + AC^2 \sin^2 A \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \end{aligned}$$

Do vậy $AB^2 + AC^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow AB \cdot AC$ lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$

Tiếp tục xét A thuộc cung nhỏ BC, ta có: $\widehat{BAC} > 90^\circ$

$$\widehat{BAC} = 1, 1 \text{ không đổi}$$



Vẽ $CK \perp AB$ tại K

$$CK = AC \sin \angle CAK = AC \sin(180^\circ - \widehat{BAC})$$

$$AK = AC \cos \angle CAK = AC \cos(180^\circ - \widehat{BAC})$$

$$\text{Tương tự trên có: } BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cos(180^\circ - \widehat{BAC})$$

$$AB^2 + AC^2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow AB \cdot AC \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$$

Đây có lẽ là một điều thú vị trong hình học

Nếu A thuộc cung lớn BC thì $AB^2 + AC^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$

Nếu A thuộc cung nhỏ BC thì $AB^2 + AC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$

Chúng ta có được bài toán.

Bài 4. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R). A di động trên cung lớn BC.

Xác định vị trí A để $AB^2 + AC^2$ lớn nhất

Bài 5. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R). A di động trên cung nhỏ BC.

Xác định vị trí A để: $AB^2 + AC^2$ nhỏ nhất.

Tìm thêm cách giải của bài toán. Chợt nhớ đến $AB \cdot MC + AC \cdot MB = AM \cdot BC$ (xét M nằm trên cung BC không chứa A) (định lý Ptolemy). Nếu M là điểm chính giữa cung BC.

Ta có: $MB = MC$, không đổi

$$\text{Ta có: } MB(AB + AC) = AM \cdot BC$$

$$AB + AC \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow AM \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow AM \text{ là đường kính của đường tròn (O)}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$$

Chúng ta đã cho được lời giải khác của bài toán và còn giúp giải được bài toán tổng quát.

Bài 6. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R). A di động trên đường tròn (O).

Xác định vị trí A để $mAB + nAC$ lớn nhất (m, n là các số dương cho trước)

Chỉ cần chọn điểm M trên cung BC không chứa A sao cho: $BM = \frac{n}{m} \cdot CM$ là đến với lời giải

Tiếp tục tìm tòi, suy nghĩ bài toán sẽ còn nhiều điều thú vị nữa!

BÀI VIẾT 6:

CỨ NGỠ LÀ CÓ !

(Tập chí Toán tuổi thơ 2 số 105 tháng 11 năm 2011)

Trong hình học, đôi khi ta ngộ nhận bằng hình vẽ để cứ ngỡ là có, là đúng. Ta lao tâm vào tìm kiếm lời giải, ... rồi bế tắc. Chuyển sang hướng tìm phản ví dụ để chứng tỏ rằng điều mà ta phán đoán là sai. Học toán theo kiểu này đôi khi cũng cho ta nhiều điều thú vị, dù rằng hơi vất vả và mất nhiều thời gian. Nhưng để tìm ra những kết quả hay thì cần thiết phải học theo cách này.

Chúng ta cùng xem bài toán sau

Bài toán. Cho lục giác $ABCDEF$ có $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$ và khoảng cách giữa hai cạnh của các cặp cạnh song song đó bằng nhau. Tính số đo của góc giữa hai đường chéo BE với CF . Bài toán này chúng tôi được một bạn đọc gửi qua e-mail với yêu cầu được trợ giúp.

Nhận xét: Giả sử đề bài trên là đúng. Nghĩa là tư duy toán học thì góc giữa hai đường thẳng BE và CF trong bài toán này là một hằng số, ta kí hiệu là x° .

Vì vai trò bình đẳng giữa ba đường chéo của hình lục giác là: AD , BE và CF nên ta thấy ngay góc giữa các cặp đường chéo AD với BE , AD với CF cũng là x° .

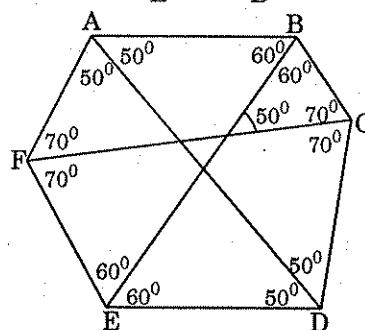
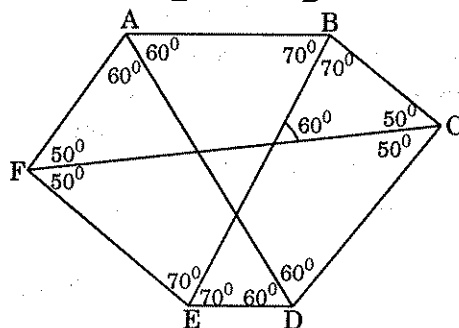
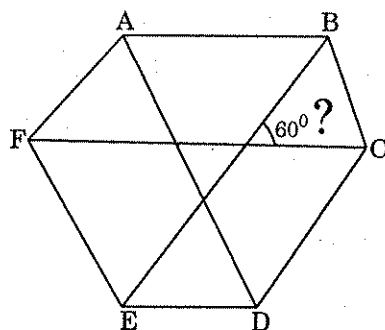
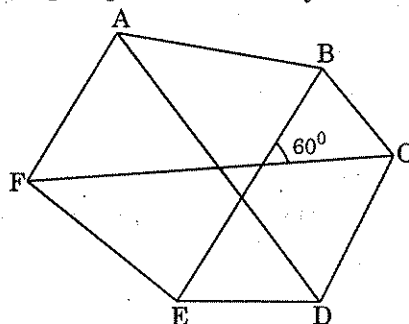
Hơn nữa, nếu đặc biệt hóa thành lục giác $ABCDEF$ đều thì các đường chéo AD , BE , CF đồng quy và góc giữa hai trong ba đường thẳng này là 60° . Đến đây, ta sẽ dự đoán đáp số của bài toán trên là góc 60° .

Tuy vậy, trong trường hợp tổng quát là lục giác $ABCDEF$ không đều thì nhất thời chúng tôi bế tắc trong việc tìm cách chứng minh đáp số là 60° .

Vẽ thêm một số hình để đo thử, chúng ta nhận được các kết quả khác nhau của số đo của góc giữa hai đường chéo BE và CF . Hoài nghi, chúng tôi thử đặt ngược lại vấn đề là chọn các số đo thích hợp của một số góc trong hình lục giác. Kết quả là chúng tôi tìm được hình vẽ sau:

Ở hai hình vẽ này, nhận thấy đáp số lần lượt là 60° và 50° (bạn đọc hãy tự chứng minh).

Đến đây tạm kết luận là không rõ đáp số. Nghĩa là với giả thiết của bài toán thì số đo của góc giữa hai đường chéo BE với CF không phải là hằng số.



Kết luận như vậy khiến chúng tôi hơi hoang mang! Phải chăng đề bài sai? Chắc không phải vì đề đòi hỏi tính toán, nghĩa là có thể có nhiều đáp số.

Vậy thử tìm một cách đặt vấn đề mới mà có thể đề bài dấu đi một yếu tố nào đó hoặc cần thêm một giả thiết nào đó. Chẳng hạn như tính số đo trên theo một hay một số yếu tố nào đó của hình lục giác trên. Đơn giản nhất là tính số đo của góc trên theo số đo các góc của hình lục giác (phức tạp hơn có thể là tính theo số đo của các góc giữa các đường chéo...) Và may mắn là theo cách suy nghĩ như vậy, chúng tôi đã tìm được lời giải sau.

Lời giải

Gọi giao điểm của các cặp đường thẳng AD với BE, AD với CF, BE với CF thứ tự là S, M, N.

Gọi h là khoảng cách giữa các cặp đường thẳng song song của hình lục giác.

Ta thấy khoảng cách từ D đến các đường thẳng AB, AF đều bằng h.

Suy ra D thuộc tia phân giác trong của góc BAF, trong hình lục giác theo giả thiết, ta suy ra: $\widehat{EDA} = \widehat{DAB} = \widehat{DAF} = \widehat{ADC}$

Bởi vậy: $\widehat{A} = \widehat{D}$

Tương tự: $\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{F}$

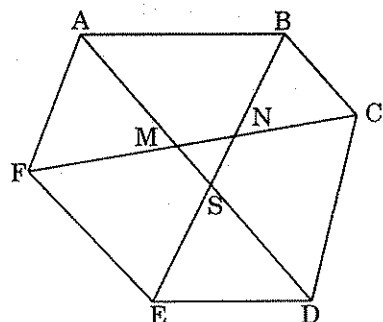
Vì ABCDEF là hình lục giác nên:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = (6 - 2)180^\circ = 720^\circ$$

Suy ra: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360^\circ$

Từ đó số đo của góc cần tìm là:

$$\begin{aligned}\widehat{BNC} &= 180^\circ - \widehat{NBC} - \widehat{NCB} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B} - \frac{1}{2}\widehat{C} \\ &= 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2}\end{aligned}$$



* **Nhận xét:** Theo chứng minh trên thì số đo góc cần tính BNC là: $\frac{\widehat{A}}{2}$, một kết quả

khá bất ngờ nhưng rất đẹp!

Đến đây, ta có thể thêm giả thiết của bài toán là cho trước số đo góc A một số nào đó, hãy tính số đo góc giữa hai đường chéo BE với CF.

Một kết luận khác là: tam giác SMN có số đo các góc tương ứng bằng nửa số đo các góc A, B, C.

Một cách khác để mở rộng bài toán là: chứng minh các điểm A, B, M, N nằm trên một đường tròn (dành cho các bạn lớp 9)

Các bạn hãy tìm thêm các kết quả mới từ những kết luận trên nhé.

BÀI VIẾT 7:

BÀI TOÁN THẬT SỰ RẤT KHÓ?

Vào một ngày của tháng 11 năm 2012 tôi và người bạn học cùng lớp – nhà giáo Cù Tấn Phúc, chúng tôi trao đổi với nhau về việc dạy và học toán THCS, Phúc cho tôi biết hiện nay trên mạng (Violet.vn) có “Bài toán thật sự rất khó!” đang mong tìm người giải giúp. Thật thú vị vì bài toán có ba câu mà cả ba câu đều là chứng minh ba điểm thẳng hàng, vấn đề chứng minh ba điểm thẳng hàng mà chúng tôi đang quan tâm đến. Và... và tôi đã tìm được lời giải của bài toán này. Bài viết này xin gửi đến bạn đọc để toán cùng lời giải và tin chắc rằng sẽ còn cách giải khác nữa! Các bạn xem “ Bài toán có thật sự rất khó!” hay không nhé!

Bài toán. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E, D. BD cắt CE tại H. Các tiếp tuyến tại B tại D của đường tròn (O) cắt nhau tại K. AK cắt BC tại M. MH cắt BK tại N. Vẽ tiếp tuyến AS đến đường tròn (O) (S thuộc cung nhỏ CD). DB cắt AH tại I. Chứng minh rằng:

- a) N, E, I thẳng hàng
- b) M, E, D thẳng hàng
- c) M, H, S thẳng hàng

(Violet.vn – Bài toán thật sự rất khó! Tháng 11 năm 2012)

Lời giải

- a) ID là tiếp tuyến của đường tròn (O), chứng minh được I là trung điểm của AH và IE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Gọi T (T khác A) là giao điểm của đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ABC và AK. Vẽ đường kính AF của (O'). Chứng minh được tứ giác BHCF là hình bình hành. Do đó H, O, F thẳng hàng (1)

$$\widehat{MTB} = \widehat{ACB} \text{ (Tứ giác BTAC nội tiếp),}$$

$$\widehat{KDB} = \widehat{ACB} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BD} \right)$$

Nên $\widehat{MTB} = \widehat{KDB}$. Do đó tứ giác TKDB nội tiếp

Mà: $\widehat{KBO} = \widehat{KDO} = 90^\circ$. Nên tứ giác OBKD nội tiếp

Ta có: B, T, K, D, O cùng thuộc một đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{OTK} = \widehat{OBK} = 90^\circ. \text{ Mà } \widehat{FTA} = 90^\circ$$

Do vậy, F, O, T thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) có: T, H, O, F thẳng hàng.

ΔMAO có AH, OT là hai đường cao nên $MH \perp OA$ (tại L)

Do đó L thuộc đường tròn (AETHD) ($\widehat{ATH} = \widehat{AEH} = \widehat{ALH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{ALE} = \widehat{ADE}. \text{ Mà } \widehat{ADE} = \widehat{EBO}. \text{ Nên } \widehat{ALE} = \widehat{EBO}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BELO nội tiếp.

Mặt khác $\widehat{NBO} = \widehat{NLO} = 90^\circ$ nên tứ giác BNLO nội tiếp

Ta có: B, N, E, L, O cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{NEO} = \widehat{NLO} = 90^\circ$

$$\widehat{NEO} + \widehat{OEI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Vậy N, E, I thẳng hàng

Ta có: $\widehat{MTE} = \widehat{ADE}$ (tứ giác TADE nội tiếp), $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

Do đó, $\widehat{ABC} = \widehat{MTE} \Rightarrow$ Tứ giác MTEB nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MTB}. \text{ Mà } \widehat{BED} = \widehat{BTA} \text{ (cùng bù với } \widehat{ACB})$$

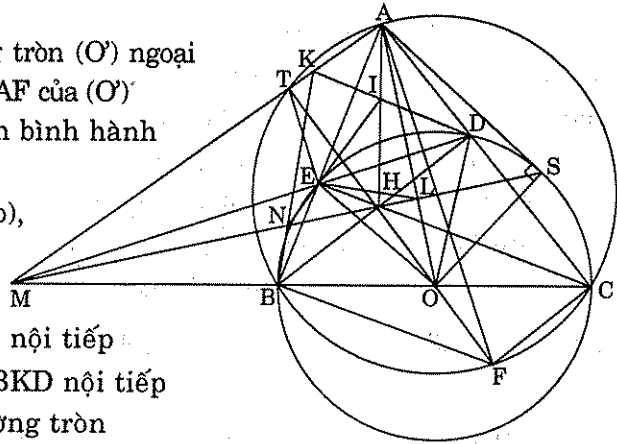
$$\text{Do vậy } \widehat{MEB} + \widehat{BED} = \widehat{MTB} + \widehat{BTA} = 180^\circ$$

Vậy M, E, D thẳng hàng.

- c) $OE \perp IE$. Nên OE là tiếp tuyến của đường tròn (AE THDL) tâm I $\Rightarrow \widehat{OEL} = \widehat{OAE}$

Xét ΔOEL và ΔOAE có $\widehat{EOL}$ (chung), $\widehat{OEL} = \widehat{OAE}$

$$\text{Do đó } \Delta OEL \sim \Delta OAE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{OL}{OE}$$



$$\Rightarrow OA \cdot OL = OE^2. \text{ Nên } OA \cdot OL = OS^2$$

$$\text{Xét } \triangle OLS \text{ và } \triangle OSA \text{ có: } \widehat{LOS} \text{ (chung), } \frac{OL}{OS} = \frac{OS}{OA}$$

$$\text{Do đó } \triangle OLS \sim \triangle OSA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{OLS} = \widehat{OSA}.$$

$$\text{Mà } \widehat{OSA} = 90^\circ, \text{ nên } \widehat{OLS} = 90^\circ$$

$$\text{Ta có: } \widehat{MLO} + \widehat{OLS} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow M, L, S$ thẳng hàng

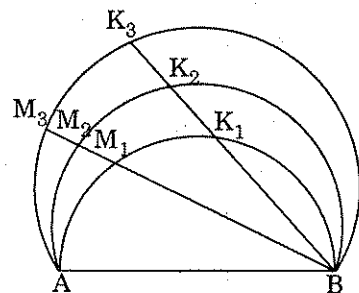
Mà H, M, N, L thẳng hàng, nên M, N, H, L, S thẳng hàng

Vậy M, H, S thẳng hàng.

BÀI VIẾT 8: THÚ VỊ TỪ MỘT BÀI TOÁN

Trong cuộc thi đồng đội Toán Baltic Way, năm 2004 có bài toán hình học sau:

Bài toán. Cho ba cung tròn (C_1) , (C_2) và (C_3) cùng có hai điểm chung A và B . Cả ba cung này ở cùng một phía với đường thẳng AB , trong đó (C_2) nằm giữa (C_1) và (C_3) . Tia Bx cắt (C_1) , (C_2) và (C_3) lần lượt tại các điểm M_1 , M_2 và M_3 . Tia By cắt (C_1) , (C_2) và (C_3) lần lượt tại các điểm K_1 , K_2 và K_3 . Chứng minh rằng: $\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}$



Bài toán thật thú vị, cho ta đẳng thức hình học: $\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}$ thật đẹp, trên tạp chí

Toán tuổi thơ 2 số 96 tháng 2 năm 2011 Th.s Nguyễn Văn Nho và nhà giáo Hoàng Trọng Hảo nhận xét có thể coi đây là định lý Ta-lét cho đường tròn.

Trước hết chúng ta cùng giải bài toán hình học này!

Ta có: $\widehat{AK_1B} = \widehat{AM_1B}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$$\text{Mà: } \widehat{AK_1B} + \widehat{AK_1K_2} = 180^\circ \text{ và } \widehat{AM_1B} + \widehat{AM_1M_2} = 180^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{AK_1K_2} = \widehat{AM_1M_2}$$

Xét $\triangle AK_1K_2$ và $\triangle AM_1M_2$ có:

$$\widehat{AK_1K_2} = \widehat{AM_1M_2},$$

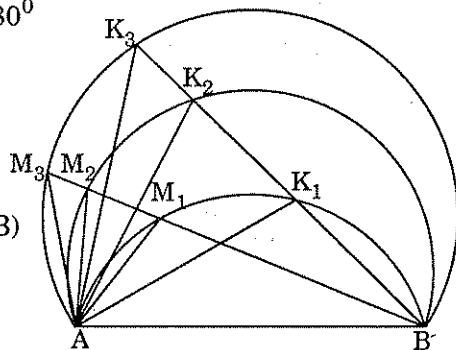
$$\widehat{AK_2K_1} = \widehat{AM_2M_1} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AB)$$

$$\Rightarrow \frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{AK_2}{AM_2}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{K_2K_3}{M_2M_3} = \frac{AK_2}{AM_2}$$

$$\text{Do đó: } \frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{K_2K_3}{M_2M_3}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}$$

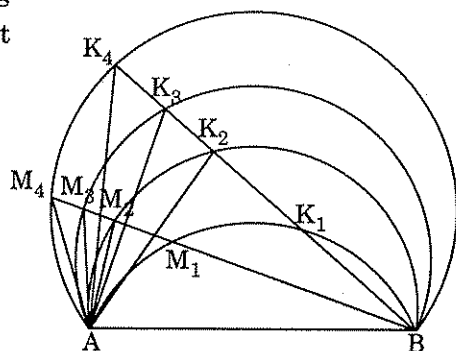


Không chịu dừng lại, với ý chí tiến công trong học toán chúng ta tiếp tục suy nghĩ, thử xét thêm một cung AB như thế nữa (xem hình vẽ)

Tương tự trên, ta có: $\frac{K_3K_4}{M_3M_4} = \frac{AK_3}{AM_3}$

Mà: $\frac{AK_2}{AM_2} = \frac{AK_3}{AM_3}$ ($\triangle AK_2K_3 \sim \triangle AM_2M_3$)

Do vậy, ta có: $\frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{K_2K_3}{M_2M_3} = \frac{K_3K_4}{M_3M_4}$



Dãy tỉ số bằng nhau trên cũng thật đẹp và chắc hẳn các bạn cũng thấy được bài toán tổng quát.

Bài toán 1. Cho n cung tròn $(C_1), (C_2), \dots, (C_n)$ cùng có hai điểm chung A và B. Cả n cung này ở cùng một phía với đường thẳng AB, trong đó (C_2) nằm giữa (C_1) và (C_3) , (C_3) nằm giữa (C_2) và (C_4) , (C_4) nằm giữa (C_3) và (C_5) , ... (C_{n-1}) nằm giữa (C_{n-2}) và (C_n)

Tia Cx cắt $(C_1), (C_2), (C_3), \dots, (C_n)$ lần lượt tại các điểm $M_1; M_2; \dots; M_n$. Tia By cắt $(C_1), (C_2), (C_3), \dots, (C_n)$ lần lượt tại các điểm $K_1; K_2; \dots; K_n$

Chứng minh rằng: $\frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{K_2K_3}{M_2M_3} = \frac{K_3K_4}{M_3M_4} = \dots = \frac{K_{n-1}K_n}{M_{n-1}M_n}$

Tiếp tục suy nghĩ ...! Chợt phát hiện ra rằng:

Nếu tia Ax cắt $(C_1), (C_2), (C_3)$ lần lượt tại M_1, M_2, M_3 và tia By cắt $(C_1), (C_2), (C_3)$ lần lượt tại K_1, K_2, K_3 ta cũng có:

$$\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}$$

Thật vậy, ta có:

$$\widehat{AK_1B} = \widehat{AM_1B} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)}$$

$$\text{Mà: } \widehat{AK_1B} = \widehat{AK_1K_2} = 180^\circ$$

$$\text{và } \widehat{AM_1B} + \widehat{BM_1M_2} = 180^\circ$$

$$\text{Do đó: } \widehat{AK_1K_2} = \widehat{BM_1M_2}$$

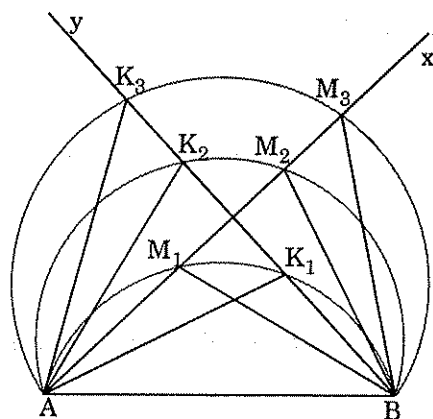
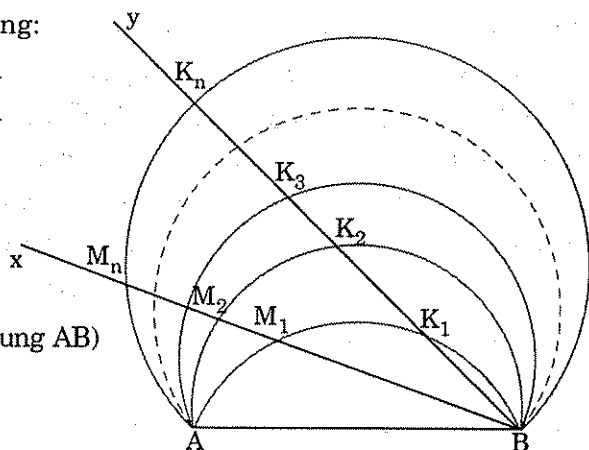
Xét $\triangle AK_1K_2$ và $\triangle BM_1M_2$ có:

$$\widehat{AK_1K_2} = \widehat{BM_1M_2}, \widehat{AK_2K_1} = \widehat{BM_2M_1}$$

$$\text{Do đó: } \triangle AK_1K_2 \sim \triangle BM_1M_2 \Rightarrow \frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{AK_2}{BM_2}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{K_2K_3}{M_2M_3} = \frac{AK_3}{BM_3}$$

$$\text{Do đó: } \frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{K_2K_3}{M_2M_3} \text{ . Suy ra: } \frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}$$



Như vậy, ta có được bài toán 2 sau:

Bài toán 2. Cho ba cung tròn (C_1) , (C_2) và (C_3) cùng có hai điểm chung A và B. Cả 3 cung này ở cùng một phía với đường thẳng AB, trong đó (C_2) nằm giữa (C_1) và (C_3) . Tia Ax cắt (C_1) , (C_2) , (C_3) lần lượt tại K_1 , K_2 , K_3 . Chứng minh rằng: $\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}$

Và ... và ta cũng có bài toán

Bài toán 3. Cho n cung tròn (C_1) , (C_2) , ..., (C_n) cùng có hai điểm chung A và B. Cả n cung này ở cùng một phía với đường thẳng AB, trong đó (C_2) nằm giữa (C_1) và (C_3) , (C_3) nằm giữa (C_2) và (C_4) , ..., (C_{n-1}) nằm giữa (C_{n-2}) và (C_n) . Tia Ax cắt (C_1) , (C_2) , ..., (C_n) lần lượt tại M_1 , M_2 , ..., M_n . Tia By cắt (C_1) , (C_2) , ..., (C_n) lần lượt tại K_1 , K_2 , ..., K_n .

Chứng minh rằng: $\frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{K_2K_3}{M_2M_3} = \frac{K_3K_4}{M_3M_4} = \dots = \frac{K_{n-1}K_n}{M_{n-1}M_n}$

Tiếp tục suy nghĩ, tìm tòi, tôi tin rằng chúng ta sẽ còn tìm đến nhiều điều thú vị nữa từ bài toán này!

BÀI VIẾT 9: TRAO ĐỔI VỀ HAI BÀI TOÁN HÌNH HỌC THI VÔ ĐỊCH TOÁN QUỐC TẾ NĂM 2012 VÀ NĂM 2013

Bài viết này tôi xin được trao đổi cùng bạn đọc về hai bài toán hình học thi vô địch toán quốc tế năm 2012 và năm 2013.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại C, D là chân đường cao vẽ từ C. Cho X là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng CD (X khác C và D). Cho K là điểm trên đoạn thẳng AX sao cho BK = BC. Tương tự L là điểm trên đoạn thẳng BX sao cho AL = AC. Cho M là giao điểm của AL và BK. Chứng minh rằng: MK = ML

(Đề thi Olympic Toán học quốc tế, năm 2012)

Lời giải

Trong một quyển sách ôn luyện toán thi vào lớp 10 chuyên – chọn đã đề xuất một cách giải sau:

Đặt $c = AE$; $a = BC = BK$, $b = CA = AL$, $\alpha = \widehat{DBX}$ và $\beta = \widehat{DAX}$

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle AKB$ ta có:

$$AK^2 = a^2 - c^2 + 2.AK.c.\cos\beta$$

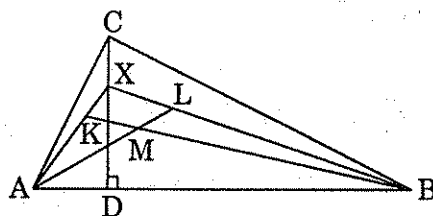
$$\Rightarrow AK^2 - 2KA.c.\cos\beta + b^2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' = c^2.\cos^2\beta - b^2$$

Ta có: $\cos\beta = \cos\widehat{DAX} > \cos\widehat{CAB}$ (do $\widehat{CAB} > \widehat{DAX}$)

$$\Rightarrow \cos\beta > \frac{b}{c} \Rightarrow c.\cos\beta > b \Rightarrow \Delta' > 0$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: } \begin{cases} AK = c.\cos\beta + \sqrt{c^2.\cos^2\beta - b^2} \\ AK = c.\cos\beta - \sqrt{c^2.\cos^2\beta - b^2} \end{cases}$$



$$\text{Đặt } x_1 = c \cdot \cos \beta + \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2}, \quad x_2 = c \cdot \cos \beta - \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2}$$

$$\text{Thì: } x_1 \cdot x_2 = a^2 \text{ và } 0 < x_2 < x_1 \Rightarrow x_1 > a \text{ và } x_2 < a$$

$$\Rightarrow AK = x_2 = c \cdot \cos \beta - \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2}$$

$$\text{Ta có: } \cos \beta = \frac{DA}{AX} = \frac{b^2}{c \cdot AX} \Rightarrow AX = \frac{b^2}{c \cdot \cos \beta}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow KX &= AX - AK = \frac{b^2}{c \cdot \cos \beta} - c \cdot \cos \beta + \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2} \\ &= \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2} - \frac{c^2 \cos^2 \beta - b^2}{c \cdot \cos \beta} = \frac{\sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2}}{c \cdot \cos \beta} \cdot (c \cdot \cos \beta - \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2}) \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } BL = c \cdot \cos \alpha - \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2}$$

$$BX = \frac{a^2}{c \cdot \cos \alpha}$$

$$LX = \frac{\sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2}}{c \cdot \cos \alpha} (c \cdot \cos \alpha - \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2})$$

Áp dụng định lí Menelaus cho ΔAXL với cát tuyến (KMB), ta có:

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KX}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{BL}} \cdot \frac{\overline{ML}}{\overline{MA}} = 1 \Rightarrow \frac{KA}{KX} \cdot \frac{BX}{BL} \cdot \frac{ML}{MA} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot \cos \beta - \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2}}{\frac{\sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2}}{c \cdot \cos \beta} (c \cdot \cos \beta - \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2})} \cdot \frac{\frac{a^2}{c \cdot \cos \alpha}}{c \cdot \cos \alpha - \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2}} \cdot \frac{ML}{MA} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c \cdot \cos \beta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2}} \cdot \frac{a^2}{c \cdot \cos \alpha (c \cdot \cos \alpha - \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2})} \cdot \frac{ML}{MA} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{ML}{MA} = \frac{\sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2} \cdot \cos \alpha (c \cdot \cos \alpha - \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2})}{\cos \beta \cdot a^2} = \frac{\cos \alpha (c \cdot \cos \alpha - \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2})}{\cos \beta (c \cdot \cos \alpha - \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2})}$$

$$\Rightarrow \frac{ML}{b} = \frac{\cos \alpha \cdot \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2}}{\cos \alpha \cdot \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2} + \cos \beta \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2} + c \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow ML = \frac{a \cdot \cos \beta \cdot \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2}}{\cos \alpha \cdot \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2} + \cos \beta \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2} + c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\text{Tương tự: } MK = \frac{a \cdot \cos \beta \cdot \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2}}{\cos \alpha \cdot \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2} + \cos \beta \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2} + c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$b \cdot \cos \alpha \sqrt{c^2 \cos^2 \beta - b^2} = a \cos \beta \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - a^2} \quad (2)$$

Thật vậy: từ (2)

$$\Leftrightarrow b^2 c^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - b \cos^2 \alpha = a^2 c^2 \cos^2 \beta - a^4 \cos^2 \beta$$

$$\Leftrightarrow b^2 (a^2 + b^2) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - b \cos^2 \alpha = a^2 (a^2 + b^2) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - a^4 \cos^2 \beta$$

$$\Leftrightarrow b^4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - b^4 \cos^2 \alpha = a^4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - a^4 \cos^2 \beta$$

$$\Leftrightarrow b^4 \cos^2 \alpha (\cos^2 \beta - 1) = a^4 \cos^2 \beta (\cos^2 \alpha - 1)$$

$$\Leftrightarrow b^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = a^4 \cos^2 \beta \sin^2 \alpha \Leftrightarrow b^2 \cos \alpha \sin \beta = a^2 \cos \beta \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cot \alpha}{\cot \beta} = \frac{a^2}{b^2}$$

Điều này hiển nhiên đúng vì: $\frac{\cot \alpha}{\cot \beta} = \frac{DB}{DA} = \frac{a^2}{b^2}$. Vậy: $MK = ML$.

Lời giải thật công phu, có phải chẳng đây là đáp án của kì thi?

Chợt tôi nghĩ đến một bài toán rất quen thuộc với học sinh lớp 8 và lớp 9 sau:

Bài toán. Cho tam giác nhọn TAB , X là trực tâm của tam giác TAB . K, L lần lượt trên các đoạn thẳng AX, BX sao cho $\widehat{BKT} = 90^\circ$, $\widehat{ALT} = 90^\circ$. Chứng minh rằng: $TK = TL$

Lời giải

Gọi S là giao điểm của AX và TB , I là giao điểm của BX và TA

Ta có: $AS \perp TB$, $BI \perp TA$

$$\frac{TS}{TA} = \frac{TI}{TB} (= \cos T)$$

$$\Rightarrow TS \cdot TB = TI \cdot TA \quad (1)$$

Mà: $TK^2 = TS \cdot TB \quad (2)$ (ΔKTB vuông tại K , KS là đường cao)

Và $TL^2 = TI \cdot TA \quad (3)$ (ΔLTA vuông tại L , LI là đường cao)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $TK^2 = TL^2$

Vậy $TK = TL$

Từ lời giải bài toán cho ta một lời giải đẹp cho bài toán 1 như sau:

Lời giải

Vẽ $AI \perp BX$ tại I . AI cắt CD tại T .

ΔTAB có TD, BI là hai đường cao cắt nhau tại X

$\Rightarrow X$ là trực tâm của tam giác TAB

Gọi S là giao điểm của AX và TB

Ta có: $AS \perp TB$

ΔACB vuông tại C , CD là đường cao

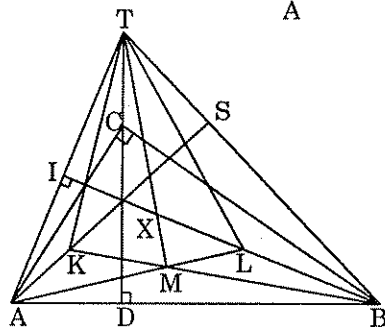
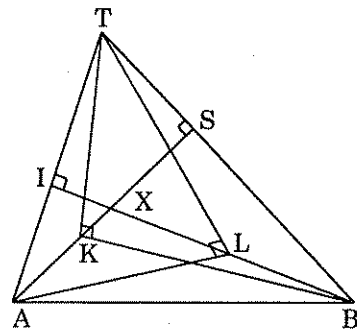
$$\Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB$$

Mà $AC = AL$ (gt). Nên $AL^2 = AD \cdot AB$

$$\text{Ta có: } \frac{AD}{AT} = \frac{AI}{AB} (= \cos A)$$

$$\Rightarrow AD \cdot AB = AI \cdot AT$$

$$\text{Nên: } AI \cdot AT = AL^2$$



$$\triangle AIL \sim \triangle ALT \text{ (c.g.c.)}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{ALT} = \widehat{AIL} = 90^\circ$$

$$\triangle TLA \text{ vuông tại } L, LT \text{ là đường cao} \Rightarrow TL^2 = TI.TA$$

$$\text{Tương tự } TK^2 = TS.TB.$$

$$\text{Mà: } \widehat{TITB} = \frac{TS}{TA} (= \cos T)$$

$$\Rightarrow TI.TA = TS.TB$$

$$\text{Do đó: } TK^2 = TL^2 \Rightarrow TK = TL$$

$$\triangle KMT = \triangle LMT \text{ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)}$$

$$\text{Do đó } MK = ML.$$

Bài toán 2. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Gọi M, N lần lượt là chân đường cao vẽ từ B, C của tam giác ABC. Gọi D là điểm trên cạnh BC, gọi ω_1 là đường tròn đi qua các điểm C, D, M và ω_2 là đường tròn đi qua các điểm B, D, N. DQ là đường kính đường tròn ω_1 , DP là đường kính đường tròn ω_2 . Chứng minh rằng P, Q, H thẳng hàng.

(Đề thi Olympic Toán học quốc tế, năm 2013)

Đọc xong đề bài toán 2, chợt tôi nghĩ đến một bài toán khá quen thuộc với học sinh lớp 9 và đây cũng là câu nâng cao trong đề kiểm tra học kì II, Quận 10, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013

Trước khi giải bài toán 2, chúng ta hãy tham khảo câu nâng cao trong đề kiểm tra toán học kì II, Quận 10, Tp. Hồ Chí Minh năm học 2012 – 2013 nhé!

Bài toán. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ngoại tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BEF. EF cắt BC tại S. SA cắt đường tròn (O) tại N. Chứng minh rằng: M, H, N thẳng hàng.

(Trích đề kiểm tra học kì II, Quận 10, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013)

Lời giải

Vẽ đường kính AK của đường tròn (O):

$$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow B, F, E, C$ cùng thuộc đường tròn tâm M đường kính BC

$$\widehat{ACK} = \widehat{ABK} = 90^\circ$$

Ta có: BH // KC, BK // HC

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCK là hình bình hành

Do đó: H, M, K thẳng hàng (1)

Chứng minh được: SB.SC = SF.SE, SN.SA = SB.SC

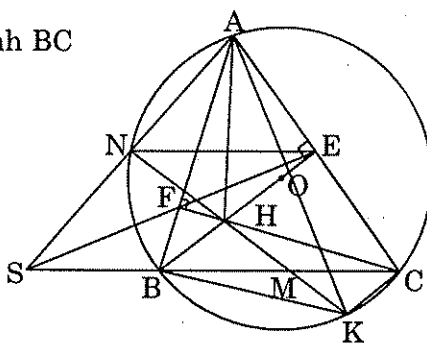
$$\Rightarrow SN.SA = SF.SE$$

$$\triangle SNE \sim \triangle SFA \text{ (c.g.c.)}$$

$$\Rightarrow \widehat{SEN} = \widehat{SAF}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ANFE nội tiếp

$$\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$$



$\Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp

Ta có: A, N, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH

$$\Rightarrow \widehat{ANH} = 90^\circ$$

$$\widehat{ANH} = \widehat{ANK} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ N, H, K thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) có H, M, K, N thẳng hàng.

Vậy ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Từ bài toán trên, giúp ta có được lời giải của bài toán 2 như sau:

Lời giải

AH cắt BC tại K

Ta có: $AK \perp BC$.

Gọi S (khác D) là giao điểm của hai đường tròn (w_1) có:

$$\widehat{SDB} = \widehat{SMC}$$

Xét đường tròn (w_2) có: $\widehat{SNA} = \widehat{SDB}$

$$\text{Do đó: } \widehat{SMC} = \widehat{SNA}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ASMN nội tiếp

$$\text{Mà, } \widehat{AMH} = \widehat{ANH} (= 90^\circ)$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMHN nội tiếp

Do đó A, M, S, N, H cùng nằm trên một đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{ASN} = \widehat{AHN}.$$

$$\text{Mà } \widehat{AHN} = \widehat{NBD}.$$

$$\text{Nên: } \widehat{ASN} = \widehat{NBD}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{ASN} + \widehat{NSD} = \widehat{NBD} + \widehat{NSD} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ A, S, D thẳng hàng.

$$\text{Mà } \widehat{ASH} = \widehat{AMH} = 90^\circ$$

$\Rightarrow HS \perp AD$

$$\widehat{PSD} = 90^\circ \text{ (DP là đường kính của đường tròn } (w_2))$$

$\Rightarrow PS \perp AD$

$$\widehat{QSD} = 90^\circ \text{ (DQ là đường kính của đường tròn } (w_1))$$

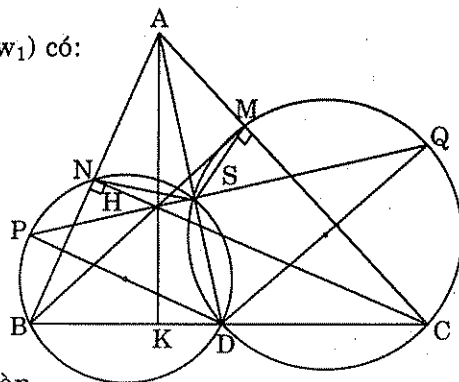
$\Rightarrow QS \perp AD$

Do đó HS, PS, QS trùng nhau.

Suy ra: P, H, S, Q thẳng hàng.

Vậy ba điểm P, H, Q thẳng hàng.

Các bạn đọc có còn ý kiến gì thêm nữa chăng?.



BÀI VIẾT 10: PHÁT HIỆN VÀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN TỪ VIỆC PHÁT TRIỂN CÁC BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

(Trích bài giảng “CHUYÊN ĐỀ DẠY VÀ HỌC TOÁN T.H.C.S”

Phòng giáo dục và đào tạo, Quận 12, TP. Hồ Chí Minh, ngày 05 tháng 11 năm 2013)

Từ các bài tập toán trong sách giáo khoa sau khi giúp học sinh tìm được lời giải, tiếp tục khai thác tìm tòi để đến với các bài toán mới, bài toán ngược, bài toán tổng quát, bài toán hay và khó... sẽ giúp khơi dậy tiềm năng, rèn luyện tư duy độc lập, linh hoạt, sáng tạo trong học Toán cho học sinh. Qua đó, giúp chúng ta phát hiện và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán. Chúng tôi xin được chia sẻ cùng các bạn ba bài toán trong sách giáo khoa cùng với các bài toán phát triển từ các bài toán này.

Bài toán 1. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn thẳng. Chứng minh rằng $AC \parallel BD$.

Đây là bài tập 41 trang 142 sách Bài tập Toán 7 tập một và cũng chính là bài tập 26 trang 118 sách giáo khoa Toán 7, tập một.

Lời giải

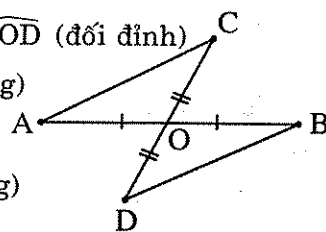
Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBD$ có: $OA = OB$ (gt), $OC = OD$ (gt), $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle OAC = \triangle OBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OBD}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{OAC}$ và $\widehat{OBD}$ là hai góc so le trong.

Do đó: $AC \parallel BD$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

Vẽ $OH \perp AC$ tại H. Ta có được $OH \perp BD$. Cho ta bài toán mới.



Bài 1.1. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn thẳng. Vẽ OH vuông góc với AC tại H. Chứng minh rằng $OH \perp BD$.

Nhận ra nếu $\widehat{ACB} = 90^\circ$ thì $\widehat{DBC} = 90^\circ$.

Ta có: $AB = CD \Rightarrow CO = \frac{1}{2} AB$.

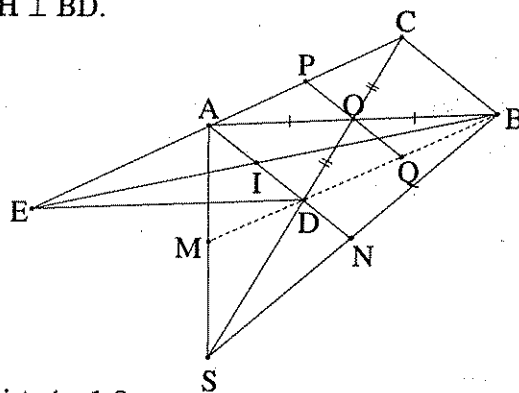
Cho ta bài toán khó.

Bài 1.2. Cho tam giác ABC vuông tại A.

M là trung điểm của cạnh BC.

Chứng minh rằng $AM = \frac{BC}{2}$.

Và như vậy, ta cũng có bài toán ngược của bài toán 1.2.



Bài 1.3. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC và có $AM = \frac{BC}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

Ở bài toán 1, nếu cho thêm điểm E sao cho hai đoạn thẳng AD và BE cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn thẳng ta lại có $AE = BD$, $AE \parallel BD$. Như vậy: A là trung điểm của đoạn thẳng CE. Ta có bài toán mới:

Bài 1.4. Cho tam giác ABC. M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Trên tia đối của tia MC lấy điểm D sao cho MD = MC. Trên tia đối của tia NB (lấy điểm E sao cho NE = NB). Chứng minh rằng A là trung điểm của đoạn thẳng DE.
Nếu P, Q lần lượt trên các đoạn thẳng AC, BD sao cho AP = BQ thì chúng ta cũng có O là trung điểm của PQ. Cho ta các bài toán mới.

Bài 1.5. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn thẳng. Gọi P, Q lần lượt trên các đoạn thẳng AC, BD sao cho AP = BQ. Chứng minh rằng O là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Bài 1.6. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn thẳng. P, Q lần lượt di động trên các đoạn thẳng AC, BD sao cho AP = BQ. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Ta còn có bài toán khó sau:

Bài 1.7. Cho tam giác ABC. D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng $DE = \frac{BC}{2}$ và $DE \parallel BC$.

Trên tia đối của tia DC lấy điểm S sao cho DS = DC. Nếu gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Chúng ta có được A, D, N thẳng hàng và B, D, M thẳng hàng.

Tiếp tục cho chúng ta các bài toán khó sau.

Bài 1.8. Cho tam giác ABC. D, E lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC. G là điểm nằm trên đoạn thẳng AD sao cho AG = 2DG. Chứng minh rằng B, G, E thẳng hàng.

Bài 1.9. Cho tam giác ABC. D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BE, CF cùng đi qua một điểm.

Bài 1.10. Hãy tìm cách chia một đoạn thẳng cho trước thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Tiếp tục suy nghĩ, tìm tòi chắc hẳn sẽ còn tìm thêm các bài toán thú vị nữa và nếu học sinh được học thêm trường hợp bằng nhau thứ ba của tam giác góc – cạnh – góc (g.c.g) chắc chắn sẽ có rất nhiều bài toán HAY VÀ KHÓ từ bài toán 1 này.

Bài toán 2. Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ AH vuông góc với BC (H ∈ BC). Cho biết AB = 13cm, AH = 12cm, HC = 16cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AC, BC. (Bài 60, trang 133, sách giáo khoa Toán 7, tập một)

Lời giải

ΔHAC vuông tại H $\Rightarrow AC^2 = AH^2 + HC^2$ (định lý Py-ta-go)

$AC^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$. Mà $AC > 0$ nên $AC = \sqrt{400} = 20$ (cm)

ΔHAB vuông tại H $\Rightarrow AH^2 + BH^2 = AB^2$ (định lý Py-ta-go)

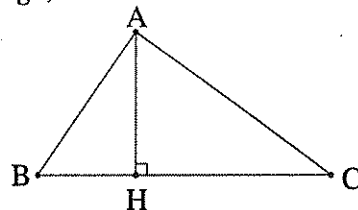
$\Leftrightarrow 12^2 + BH^2 = 13^2$

$BH^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$.

Mà $BH > 0$ nên $BH = \sqrt{25} = 5$ (cm).

Ta có: $BC = BH + HC = 5 + 16 = 21$ (cm)

Từ bài toán 2 cho ta các bài toán mới



Bài 2.1. Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Cho biết $AB = 13$ cm; $BH = 5$ cm, $BC = 21$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AC.

Bài 2.2. Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Cho biết $AB = 13$ cm; $AH = 12$ cm, $HC = 16$ cm. Tính chu vi, diện tích tam giác ABC.

Bài 2.3. Hãy tìm một tam giác ABC có AH vuông góc với BC tại H. Mà độ dài các đoạn thẳng AB, AC, BC, AH, BH, CH là các số nguyên xăng-ti-mét.

Bài 2.4. Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Cho biết $AB = 13$ cm, $BH = 5$ cm, $HC = 16$ cm. Vẽ HM vuông góc với AC tại M. Tính độ dài đoạn thẳng HM.

Bài 2.5. Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Chứng minh rằng $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$.

Và như vậy, nếu $D \in AH$, D khác A, H, ta cũng có $DB^2 - DC^2 = BH^2 - CH^2$. Giúp có bài toán:

Bài 2.6. Cho tam giác nhọn ABC, vẽ AH vuông góc với BC tại H. D là điểm trên AH (D khác A, H). Chứng minh rằng $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$.

$$\text{Mà } BH^2 - CH^2 = (BH + CH)(BH - CH) = BC(BH - CH).$$

Giúp có các bài toán khó sau:

Bài 2.7. Cho tam giác nhọn ABC. K là điểm trên cạnh BC sao cho:

$$AB^2 - AC^2 = BK^2 - CK^2. \text{ Chứng minh rằng: } AK \text{ vuông góc với } BC.$$

Bài 2.8. Cho các tam giác nhọn ABC, DBC, EBC sao cho:

$$AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2 = EB^2 - EC^2.$$

Chứng minh rằng ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Bài 2.9. Cho các tam giác nhọn ABC, DBC, EBC sao cho A, D, E thẳng hàng và

$$AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2. \text{ Chứng minh rằng: } AB^2 - AC^2 = EB^2 - EC^2$$

$$\text{Nếu } \widehat{BAC} = 90^\circ \text{ thì } AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } 2AB^2 &= BH^2 - CH^2 + BC^2 = BC(BH - CH) + BC^2 \\ &= BC(BH - CH + BC) = 2BH \cdot BC. \end{aligned}$$

Giúp có bài toán khó.

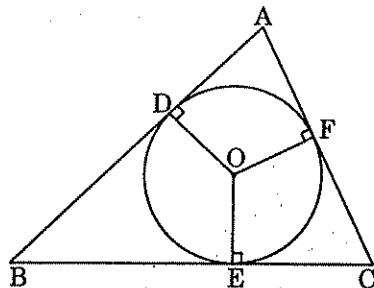
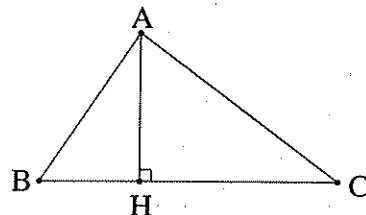
Bài 2.10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Chứng minh rằng:

a) $AB^2 = BH \cdot BC$

b) $AH^2 = BH \cdot CH$

Bài toán 3.

a) Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O), nó cắt các tiếp tuyến AB và AC theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng chu vi tam giác ADE bằng 2AB.



(Bài 27, trang 115, sách giáo khoa Toán 9, tập một)

b) Trên hình vẽ, tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O).

Chứng minh rằng: $2AD = AB + AC - BC$.

Tìm các hệ thức tương tự như trên.

(Bài 31, trang 116, sách giáo khoa Toán 9, tập một)

Lời giải

a) AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow AB = AC$.

DB, DM là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (gt) $\Rightarrow BD = DM$

EM, EC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (gt) $\Rightarrow EC = EM$.

Do đó: CV (ADE) = $AD + DE + AE = AD + DM + EM + AE$

$$= AD + BD + EC + AE = AB + AC = 2AB.$$

b) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AD = AE$, $BD = BE$, $CE = CF$

Do đó: $AB + AC - BC = (AD + BD) + (AE + CF) - (BE + CE)$

$$= AD + BD + AE + CF - BE - CE = AD + BD + AD + CF - BD - CE = 2AD$$

Các hệ thức tương tự: $2AF = AB + AC - BC$, $2BD = AB + BC - AC$,

$2BE = AB + BC - AC$, $2CE = AC + BC - AB$, $2CF = AC + BC - AB$

Từ bài toán (a) giúp đi đến các bài toán:

Bài 3.1. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). M là điểm di động trên cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O), nó cắt các tiếp tuyến AB và AC theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng góc DOE có số đo không đổi, chu vi tam giác ADE không đổi.

Bài 3.2. Cho góc vuông xAy, đường tròn (O) tiếp xúc với hai cạnh Ax, Ay tại B, C. Một tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M cắt Ax, Ay lần lượt tại D, E. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{3}AB < DE < AB.$$

Bài 3.3. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O), nó cắt các tiếp tuyến AB và AC theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng:

$$ME < AD, MD < AE.$$

Bài 3.4. Cho góc xAy khác góc bẹt, hai điểm D, E lần lượt di động trên các tia Ax, Ay sao cho chu vi tam giác ADE không đổi. Chứng minh rằng DE luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Ta nhận ra rằng tam giác ADE có $\widehat{DAE} = 90^\circ$ thì $DE^2 = AD^2 + AE^2$ và $S_{ADE} = \frac{AD \cdot AE}{2}$.

$$\text{Do đó: } t = AD + AE + DE = AD + AE + \sqrt{AD^2 + AE^2}$$

$$\geq 2\sqrt{AD \cdot AE} + \sqrt{2AD \cdot AE} = 2\sqrt{2S_{ADE}} + 2\sqrt{S_{ADE}}$$

Giúp có bài toán khó:

Bài 3.5. Cho đường tròn (O; R), điểm A sao cho $OA = R\sqrt{2}$. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Qua M là điểm di động trên cung nhỏ BC, kẻ tiếp

tuyến với đường tròn (O), nó cắt các tiếp tuyến AB, AC theo thứ tự ở D, E. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác ADE lớn nhất.

Từ bài toán (b) giúp đến các bài toán:

Bài 3.6. Cho tam giác ABC vuông tại A, nội tiếp đường tròn (O; R) và ngoại tiếp đường tròn (I; r). Chứng minh rằng $AB + AC = 2(R + r)$

Bài 3.7. Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến. Đường tròn (O_1) nội tiếp tam giác ABM tiếp xúc với AM tại I, đường tròn (O_2) nội tiếp tam giác ACM tiếp xúc với AM tại K. Chứng minh rằng $|AB - AC| = 2IK$

Bài 3.8. Cho tam giác ABC. M là điểm trên cạnh BC sao cho $AB - AC = BM - CM$. Chứng minh rằng hai đường tròn nội tiếp hai tam giác ABM, ACM tiếp xúc nhau.

Ta còn nhận ra: $BE \cdot CE = \frac{AB + BC - AC}{2} \cdot \frac{AC + BC - AB}{2}$
 $= \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{4} + \frac{AB \cdot AC}{2}$. Giúp đến với các bài toán.

Bài 3.9. Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), (O) tiếp xúc với BC tại E. Chứng minh rằng: $S_{ABC} = BE \cdot CE$.

Bài 3.10. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC tại E. Tính số đo góc A, biết $AB \cdot AC = 2BE \cdot CE$.

Ta còn có:

Bài 3.11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi (O; r); (O_1, r_1) ; (O_2, R_2) theo thứ tự là các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH. Chứng minh rằng: $r + r_1 + r_2 = AH$.

Bài 3.12. Cho tam giác ABC vuông tại A, ngoại tiếp đường tròn tâm I, G là trọng tâm của tam giác ABC. Biết $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm. Tính độ dài IG.

Bài 3.13. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC ($BC > AB$) tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CA và F là giao điểm của DE và MN. Chứng minh rằng F nằm trên đường phân giác của góc ABC.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013)

Bài 3.14.

a) Cho góc vuông xAy và đường tròn $\mathcal{C}$ tâm O tiếp xúc với Ax và Ay lần lượt tại P và Q. d là một tiếp tuyến thay đổi của $\mathcal{C}$. Gọi a, p, q lần lượt là khoảng cách từ A, P, Q đến đường thẳng d. Chứng minh rằng khi d thay đổi, tỉ số $\frac{a^2}{p \cdot q}$ không đổi.

b) Khẳng định trên còn đúng không nếu góc xAy không phải là góc vuông? Vì sao?

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, trường Phổ thông năng khiếu ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2000–2001)

Bài 3.15. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm I, tiếp xúc với BC tại D. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC có tâm J, tiếp xúc với BC tại E.

a) Gọi F là giao điểm của AE và DI. Chứng minh rằng F thuộc đường tròn (I).

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng đường thẳng MI luôn đi qua trung điểm của AD.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, trường Đại học sư phạm TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013).

LỜI GIẢI CÁC BÀI TẬP

Bài 1.1. Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBD$ có:

$OA = OB$ (O là trung điểm của AB), $OC = OD$ (O là trung điểm của CD)

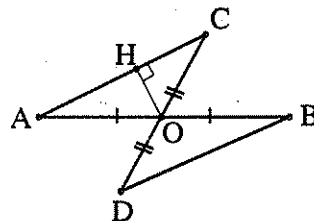
$\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (đối đỉnh). Do đó: $\triangle OAC = \triangle OBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OBD}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{OAC}$ và $\widehat{OBD}$ so le trong.

Ta có: $AC \parallel BD$. Mặt khác: $OH \perp AC$ (gt)

Vậy: $OH \perp BD$.



Bài 1.2. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MDC$ có: $MA = MD$, $MB = MC$ (M là trung điểm của BC),

$\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ (đối đỉnh).

Do đó: $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CD$ (hai cạnh tương ứng)

Và $\widehat{MAB} = \widehat{MDC}$ (Hai góc tương ứng)

Ta có: $\widehat{MAB}$ và $\widehat{MDC}$ so le trong và $\widehat{MAB} = \widehat{MDC} \Rightarrow AB \parallel CD$.

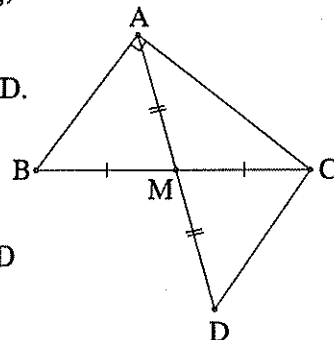
Mà: $AB \perp AC$ ($\widehat{BAC} = 90^\circ$). Nên $CD \perp AC \Rightarrow \widehat{DCA} = 90^\circ$.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có: $AB = CD$, AC (cạnh chung),

$\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ ($= 90^\circ$). Do đó: $\triangle ABC = \triangle CDA$ (g.c.g) $\Rightarrow BC = AD$

Mà: $AM = \frac{AD}{2}$ ($MD = MA$).

Vậy: $AM = \frac{BC}{2}$



Bài 1.3. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MDC$ có: $MA = MD$, $MB = MC$ (M là trung điểm của BC)

$\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh). Do đó: $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MDC}$.

Mà: $\widehat{MAB}$ và $\widehat{MDC}$ so le trong. Do đó: $AB \parallel CD$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song) $\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{DCA} = 180^\circ$.

Ta có: $AM = \frac{1}{2}BC$ (gt), $AM = \frac{1}{2}AD \Rightarrow BC = AD$.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có: $AB = CD$ ($\triangle ABC = \triangle CDA$), $BC = AD$, AC (cạnh chung).

Do đó: $\triangle ABC = \triangle CDA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DCA}$.

Ta có: $\widehat{BAC} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$

Vậy: Tam giác ABC vuông tại A.

Bài 1.4. Xét $\triangle MAD$ và $\triangle MBC$ có $MA = MB$ (M là trung điểm của AB), $MD = MC$ (gt)

$\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$ (đối đỉnh). Do đó: $\triangle MAD = \triangle MBC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MBC}$, $AD = BC$.

Ta có: $\widehat{MAD}$ và $\widehat{MBC}$ so le trong, $\widehat{MAD} = \widehat{MBC}$.

Do đó: $AD \parallel BC$

Chứng minh tương tự, cũng có $\triangle NAE = \triangle NCB$ (c.g.c)

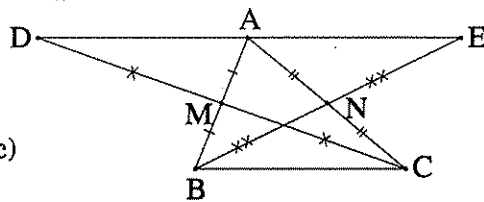
$\Rightarrow \widehat{NAE} = \widehat{NCB}$ và $AE = BC$.

Ta có: $\widehat{NAE}$ và $\widehat{NCB}$ so le trong và $\widehat{NAE} = \widehat{NCB} \Rightarrow AE \parallel BC$.

Ta có: $AD \parallel BC$; $AE \parallel BC$ nên theo tiên đề Ô-Clit: AD, AE trùng nhau.

Do đó: D, A, E thẳng hàng. Mà: $AD = AE (= BC)$

Vậy: A là trung điểm của đoạn thẳng DE .



Bài 1.5. Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBD$ có: $OA = OB$ (O là trung điểm của AB),

$OC = OD$ (O là trung điểm của CD), $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (đối đỉnh).

Do đó: $\triangle OAC = \triangle OBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OBD}$.

Xét $\triangle OAP$ và $\triangle OBQ$ có: $OA = OB$, $AP = BQ$,

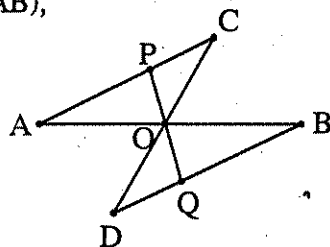
$\widehat{OAP} = \widehat{OBQ}$ (chứng minh trên)

Do đó: $\triangle OAP = \triangle OBQ$ (c.g.c) $\Rightarrow OP = OQ$, $\widehat{AOP} = \widehat{BOQ}$.

Ta có: $\widehat{AOQ} + \widehat{AOP} = \widehat{AOQ} + \widehat{BOQ} = 180^\circ$ (vì A, O, B thẳng hàng)

Do đó: P, O, Q thẳng hàng.

Ta có: $OP = OQ$; O, P, Q thẳng hàng. Vậy: O là trung điểm của đoạn thẳng PQ



Bài 1.6. Giải như bài 1.5. Ta có: P, O, Q thẳng hàng. Mà O cố định.

Vậy: đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.7. Trên tia đối của tia ED lấy S sao cho $ES = ED$.

Xét $\triangle EAD$ và $\triangle ECS$ có: $EA = EC$ (E là trung điểm của AC),

$ED = ES$, $\widehat{AED} = \widehat{CES}$ (đối đỉnh).

Do đó: $\triangle EAD = \triangle ECS$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = CS$, $\widehat{ADE} = \widehat{CSE}$.

Ta có: $\widehat{ADE} = \widehat{CSE}$, $\widehat{ADE}$ và $\widehat{CSE}$ so le trong,

Do đó: $AD \parallel CS \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{SCD}$

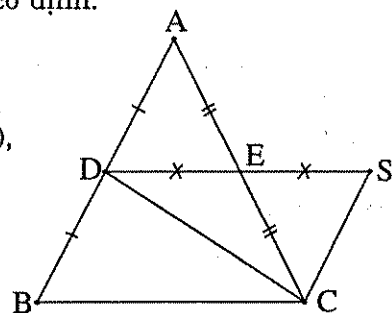
Xét $\triangle DCB$ và $\triangle CDS$ có: $BD = CS (= AD)$, CD (cạnh chung), $\widehat{BDC} = \widehat{SCD}$ (cmt)

Do đó: $\triangle DCB = \triangle CDS$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = DS$, $\widehat{DCB} = \widehat{CDS}$.

Ta có: $DE = \frac{DS}{2}$ ($ES = ED$), $BC = DS$. Do đó: $DE = \frac{BC}{2}$

Ta có: $\widehat{DCB} = \widehat{CDS}$, $\widehat{DCB}$ và $\widehat{CDS}$ so le trong.

Do đó: $DE \parallel BC$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)



Bài 1.8. Trên tia đối của tia DA lấy M sao cho $DM = DG$, trên tia đối của tia EG lấy điểm N sao cho $EN = EG$.

Xét $\triangle DGB$ và $\triangle DMC$ có:

$DG = DM$, $DB = DC$ (D là trung điểm của BC), $\widehat{GDB} = \widehat{MDC}$ (đối đỉnh).

Do đó: $\triangle DGB = \triangle DMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DBG} = \widehat{DCM}$ (hai góc tương ứng)

Ta có: $\widehat{DBG} = \widehat{DCM}$, $\widehat{DBG}$ và $\widehat{DCM}$ so le trong.

Do đó: $BG \parallel MC$ (1)

Tương tự: $\triangle EGA = \triangle ENC$ (c.g.c) $\Rightarrow AG = CN$, $\widehat{EGA} = \widehat{ENC}$

Ta có: $\widehat{EGA} = \widehat{ENC}$, $\widehat{EGA}$ và $\widehat{ENC}$ so le trong. Do đó: $AG \parallel CN$.

Ta có: $AG = 2DG$; $DG = DM$. Nên $AG = GM$

Xét $\triangle GCN$ và $\triangle GCM$ có: $GM = CN (= AG)$, CG (cạnh chung),

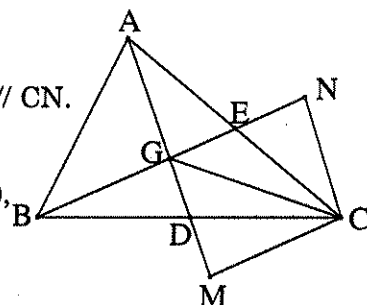
$\widehat{GCN} = \widehat{GCM}$ (so le trong và $AG \parallel CN$).

Do đó: $\triangle GCN = \triangle GCM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CGN} = \widehat{GCM}$.

Mà $\widehat{CGN}$ và $\widehat{GCM}$ so le trong nên $GN \parallel MC$ (2)

Từ (1) và (2), theo tiên đề Ô-clít, ta có: BG , GN trùng nhau

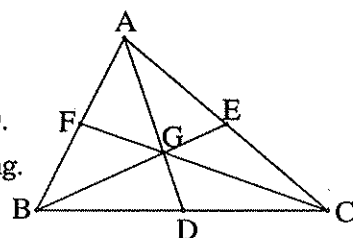
Vậy: Ba điểm B, G, E thẳng hàng.



Bài 1.9. Gọi G là điểm trên đoạn thẳng AD sao cho $AG = 2GD$.

Theo bài toán 1.8 ta có: B, G, E thẳng hàng và C, G, F thẳng hàng.

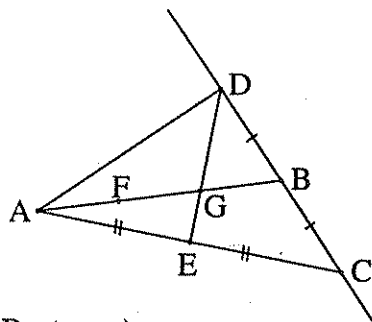
Vậy: các đường thẳng AD, BE, CF cùng đi qua điểm G.



Bài 1.10.

- Dựng đường thẳng d qua B, d không qua A.
- Dựng C, D trên d sao cho B là trung điểm của CD.
- Dựng trung điểm E của đoạn thẳng AC.
- Dựng G là giao điểm của DE và AC.
- Trên tia GA dựng điểm F sao cho $GF = GB$.

Từ các bài toán 1.8 và 1.9, ta có: $AF = GF = GB$



Bài 2.1. $\triangle HAB$ vuông tại H $\Rightarrow AH^2 + BH^2 = AB^2$ (định lý Py-ta-go)

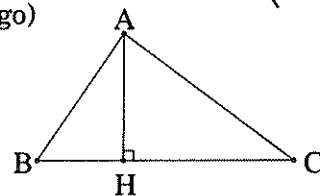
$$\Rightarrow AH^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow AH^2 = 13^2 - 5^2 = 144.$$

$$BH + HC = BC. \text{ Nên } HC = 21 - 5 = 16.$$

$\triangle HAC$ vuông tại H $\Rightarrow AC^2 = AH^2 + HC^2$ (định lý Py-ta-go)

$$\Leftrightarrow AC^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400, AC > 0.$$

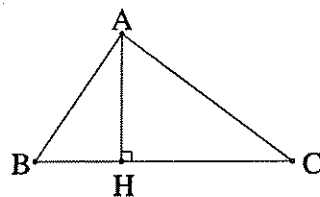
$$\text{Vậy: } AC = \sqrt{400} = 20 \text{ (cm)}$$



Bài 2.2. Từ bài toán 2, ta có: $AC = 20$ cm, $BC = 21$ cm.

$$\text{Do đó: } CV(ABC) = AB + AC + BC = 13 + 20 + 21 = 54 \text{ (cm)}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 21 = 126 \text{ (cm}^2\text{)}$$



Bài 2.3. Từ bài toán 2, ta có: $\triangle ABC$ nhọn, AH vuông góc với BC tại H, có: $BH = 5$ cm, $HC = 16$ cm, $AH = 12$ cm sẽ có $AB = 13$ cm, $AC = 20$ cm.

Bài 2.4. ΔHAB vuông tại $H \Rightarrow AH^2 + BH^2 = AB^2$ (định lý Py-ta-go)

$$\Leftrightarrow AH^2 + 5^2 = 13^2 \Leftrightarrow AH^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$

ΔHAC vuông tại $H \Rightarrow AC^2 = AH^2 + HC^2$ (định lý Py-ta-go)

$$\Rightarrow AC^2 = 144 + 16^2 = 144 + 256 = 400.$$

Mà $AC > 0$ nên $AC = \sqrt{400} = 20$

ΔHAC vuông tại H . Do đó: $S_{HAC} = \frac{1}{2}AH.HC$ và $S_{HAC} = \frac{1}{2}HM.AC$

Ta có: $HM.AC = AH.HC \Leftrightarrow HM.20 = 12.16 \Rightarrow HM = 9,6$ (cm)

Bài 2.5. ΔHAB vuông tại $H \Rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2$ (định lý Py-ta-go)

ΔHAC vuông tại $H \Rightarrow AC^2 = AH^2 + CH^2$ (định lý Py-ta-go)

$$\text{Do đó: } AB^2 - AC^2 = (AH^2 + BH^2) - (AH^2 + CH^2)$$

$$= AH^2 + BH^2 - AH^2 - CH^2 = BH^2 - CH^2$$

Bài 2.6. Từ bài toán 2.5, ta có:

$$AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2 \quad (1)$$

Tương tự, cũng có:

$$DB^2 - DC^2 = BH^2 - CH^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$

Bài 2.7. Vẽ $AH \perp BC$ tại H . Từ bài toán 2.5 có: $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$

Mà: $AB^2 - AC^2 = BK^2 - CK^2$ (gt). Do đó: $BH^2 - CH^2 = BK^2 - CK^2$

$$(BH + CH)(BH - CH) = (BK + CK)(BK - CK)$$

$$\Rightarrow BC(BH - CH) = BC(BK - CK) \Rightarrow BH - CH = BK - CK$$

Mà: $BH + CH = BK + CK (= BC)$ nên $BH = BK \Rightarrow H \equiv K$.

Vậy: AK vuông góc với BC .

Bài 2.8. Vẽ $AA' \perp BC$ tại A' . Theo bài toán 2.5, ta có:

$$AB^2 - AC^2 = A'B^2 - A'C^2. \text{ Mà } AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$$

$$\text{Nên: } DB^2 - DC^2 = A'B^2 - A'C^2.$$

Theo bài toán 2.7, ta có: $DA' \perp BC$ tại A' .

$$\text{Tương tự, } EB^2 - EC^2 = A'B^2 - A'C^2 (= AB^2 - AC^2)$$

nên $EA' \perp BC$ tại A' .

Do đó: các đường thẳng AA' , DA' , EA' trùng nhau.

Vậy: ba điểm A , D , E thẳng hàng.

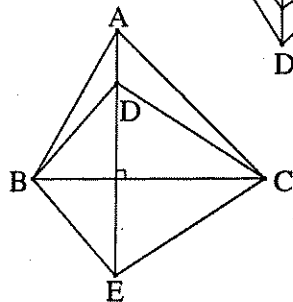
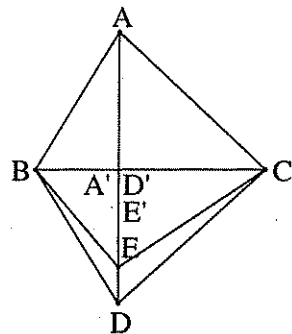
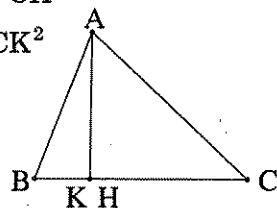
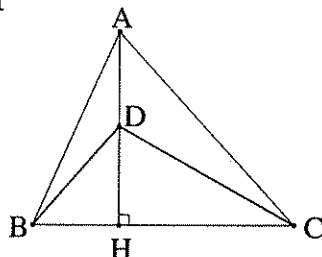
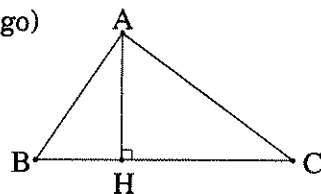
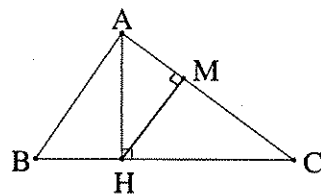
Bài 2.9. Ta có: $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$ (gt)

Theo bài toán 2.9 ta có: $AD \perp BC$. Mà $E \in AD$.

Theo bài toán 2.6, ta có: $AB^2 - AC^2 = EB^2 - EC^2$

Bài 2.10.

a) Vẽ $AH \perp BC$ tại H . Theo bài toán 2.5, ta có: $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$.



Mà: $\triangle ABC$ vuông tại A (gt) $\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$ (định lý Py-ta-go)

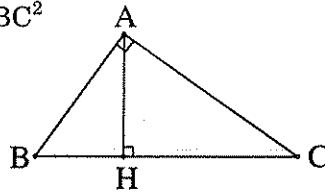
Do đó: $AB^2 - AC^2 + AB^2 + AC^2 = BH^2 - CH^2 + BC^2$

$\Rightarrow 2AB^2 = (BH + CH)(BH - CH) + BC^2$

$\Rightarrow 2AB^2 = BC(BH - CH) + BC^2$

$\Rightarrow 2AB^2 = BC(BH - CH + BC)$

$\Rightarrow 2AB^2 = 2BH \cdot BC \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC$



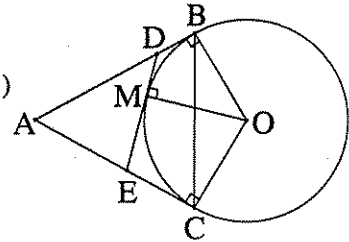
b) Theo (a), ta có: $AB^2 = BH \cdot BC$.

$\triangle HAB$ vuông tại H $\Rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2$ (định lý Py-ta-go)

Do đó: $AH^2 + BH^2 = BH \cdot BC \Rightarrow AH^2 = BH \cdot BC - BH^2$

$\Rightarrow AH^2 = BH(BC - BH)$

Vậy: $AH^2 = BH \cdot CH$



Bài 3.1. Theo bài toán (3a), ta có: $CV(ADE) = 2AB$ không đổi.

Bài 3.2.

$\triangle ADE$ vuông tại A (gt) $\Rightarrow DE > AD, DE > AE$

Xét $\triangle ADE$ có $DE < AD + AE$ (Bất đẳng thức tam giác)

Theo bài toán 3a, ta có: $CV(ADE) = 2AB$.

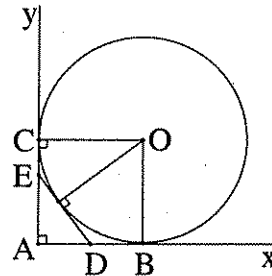
Do đó: $2AB = AD + AE + DE < DE + DE + DE = 3DE$

$\Rightarrow \frac{2}{3}AB < DE$ (1)

Và: $2AB = AD + AE + DE < DE + DE = 2DE$

$\Rightarrow AB > DE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{2}{3}AB < DE < AB$



Bài 3.3. Theo bài toán 3.2, ta có: $DE < AB$

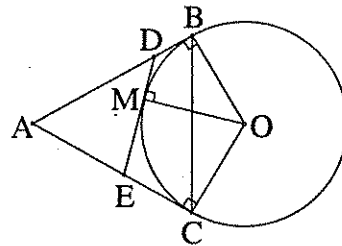
$\Rightarrow DM + ME < BD + AD$. Mà: $DM = BD$.

Vậy: $ME < AD$

Ta có: $AB = AC, DE < AB$

Do đó: $DE < AC \Rightarrow MD + EM < AE + CE$

Mà: $EM = CE$. Vậy: $MD < AE$



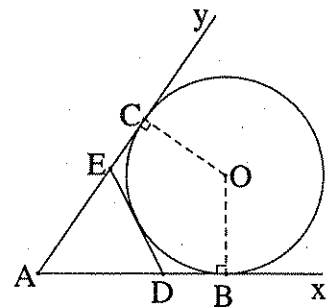
Bài 3.4. Dựng đường tròn (I) bàng tiếp trong góc A của tam giác ADE. Đường tròn (I) tiếp xúc với các tia Ax, Ay lần lượt tại B, C.

Theo bài toán 3a, ta có: $2AB = 2AC = CV(ADE)$, không đổi

$\Rightarrow AB, AC$ không đổi $\Rightarrow B, C$ cố định.

I là giao điểm của tia phân giác góc xAy và đường thẳng vuông góc với AB tại B. Nên đường tròn (I) cố định.

Vậy: DE tiếp xúc với đường tròn cố định (I, IB)



Bài 3.5. $\triangle ABO$ vuông tại B $\Rightarrow AB^2 + OB^2 = OA^2$ (định lý Py-ta-go)

Nên $AB^2 + R^2 = 2R^2$. $AB^2 = R^2$, $AB > 0$. Vậy: $AB = R$.

Theo bài toán 3, ta có: $AD + AE + DE = 2AB = 2R$.

Ta có: $\triangle ABO$ vuông cân tại B $\Rightarrow \widehat{BAO} = 45^\circ$.

Tương tự: $\widehat{CAO} = 45^\circ$ nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$

$\triangle ADE$ vuông tại A $\Rightarrow S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE$

và $AD^2 + AE^2 = DE^2$ (định lý Py-ta-go)

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho hai số dương, ta có:

$$\begin{aligned} 2R &= AD + AE + DE = AD + AE + \sqrt{AD^2 + AE^2} \geq 2\sqrt{AD \cdot AE} + \sqrt{2AD \cdot AE} \\ &= 2\sqrt{2S_{ADE}} + 2\sqrt{S_{ADE}} = 2(\sqrt{2} + 1)\sqrt{S_{ADE}} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } S_{ADE} \leq \left[\frac{2R}{2(\sqrt{2} + 1)} \right]^2 = (3 - 2\sqrt{2})R^2. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow AD = AE = (2 - \sqrt{2})R$$

$\Leftrightarrow M$ là giao điểm của tia OA và đường tròn (O) .

Vậy: khi M là giao điểm của tia OA và đường tròn (O) thì diện tích tam giác ADE lớn nhất.

Bài 3.6. Đường tròn (I) tiếp xúc với AB tại D . Ta có: $ID \perp AB$ và $ID = r$.

Mà: AI là tia phân giác $\widehat{BAC}$: $\widehat{DAI} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 45^\circ$

$\triangle DAI$ vuông tại D , $\widehat{DAI} = 45^\circ$.

Do đó: $AD = ID \cdot \cot DAI = r \cdot \tan 45^\circ = r$

Theo bài toán 3b, ta có: $2AD = AB + AC - BC$

Mặt khác: $BC = 2R$ ($\triangle ABC$ vuông tại A , nội tiếp đường tròn $(O; R)$)

Ta có: $2r = AB + AC - 2R \Rightarrow AB + AC = 2R + 2r$

Vậy: $AB + AC = 2(R + r)$

Bài 3.7. Ta có: $BM = MC$

Theo bài toán 3b, ta có: $2AI = AB + AM - BM$,

$2AK = AC + AM - CM$

Do đó: $2IK = 2|AI - AK| = |AB - AC|$

Bài 3.8. Gọi tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABM với AM là I , tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ACM với AM là K .

Theo bài 3b, ta có: $2AI = AB + AM - BM$,

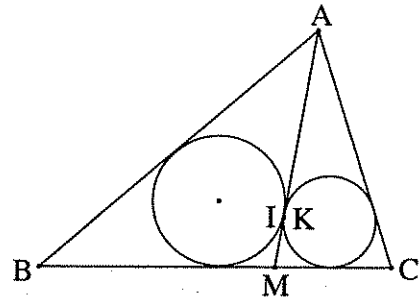
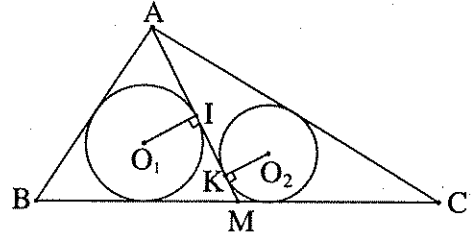
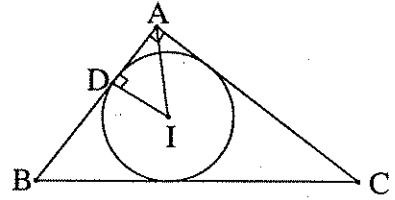
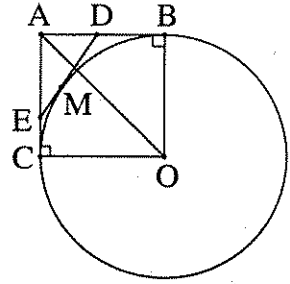
$2AK = AC + AM - CM$

Do đó: $2IK = 2|AI - AK| = 2|AB - BM - AC + CM|$

$$= 2|(AB - AC) - (BM - CM)| = 0$$

(vì $AB - AC = BM - CM$)

$\Rightarrow I \equiv K$. Do vậy: hai đường tròn nội tiếp hai tam giác ABM , ACM tiếp xúc nhau.



Bài 3.9. Theo bài toán 3b, ta có: $2BE = AB + BC - AC$, $2CE = AC + BC - AB$

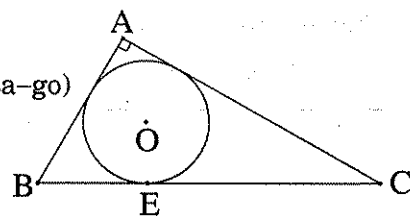
$$\text{Do đó: } 4BE \cdot CE = (AB + BC - AC)(AC + BC - AB)$$

$$= BC^2 - (AB - AC)^2 = BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB \cdot AC$$

$\triangle ABC$ vuông tại A nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (định lý Py-ta-go)

$$\text{Và } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

$$\text{Do đó: } 4BE \cdot CE = 4S_{ABC}. \text{ Vậy: } S_{ABC} = BE \cdot CE$$



Bài 3.10. Từ bài toán 3.9, ta có:

$$4BE \cdot CE = BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB \cdot AC. \text{ Mà: } AB \cdot AC = 2BE \cdot CE.$$

$$\text{Do đó: } 2AB \cdot AC = BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB \cdot AC \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A (định lý Py-ta-go đảo).

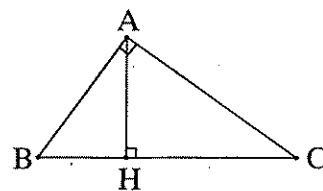
$$\text{Vậy: } \widehat{BAC} = 90^\circ$$

Bài 3.11. Theo bài toán 3.6, ta có: $AB + AC - BC = 2r$,

$$AH + BH - AB = 2r_1, AH + CH - AC = 2r_2.$$

$$\text{Mà: } BH + CH = BC. \text{ Do đó, ta có: } 2AH = 2r + 2r_1 + 2r_2$$

$$\text{Vậy: } r + r_1 + r_2 = AH.$$



Bài 3.12. $\triangle ABC$ vuông tại A $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Py-ta-go)

$$BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225, BC > 0$$

$$\text{Nên } BC = \sqrt{225} = 15 \text{ (cm).}$$

Theo bài toán 3b, ta có: $2BD = AB + BC - AC$.

$$\text{Do đó: } 2BD = 9 + 15 - 12 = 12 \Rightarrow BD = 6.$$

Gọi M là giao điểm của BG và AC,

N là giao điểm của BI và AC.

$$\triangle ABM \text{ có: } \frac{BD}{AB} = \frac{BG}{BM} \left(= \frac{2}{3} \right)$$

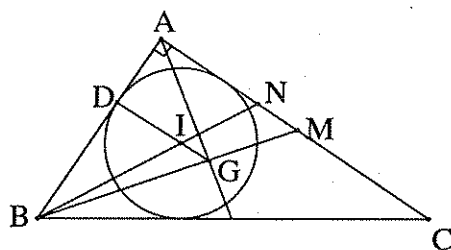
$$\Rightarrow DG \parallel AM \text{ (định lý Ta-lét đảo)}$$

Mà: $ID \perp AB$, $AC \perp AB \Rightarrow ID \parallel AC$. Do đó: I, D, G thẳng hàng.

$$ID = AD = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{9 + 12 - 15}{2} = 3; AM = \frac{1}{2} AC = 6$$

$$\frac{DG}{AM} = \frac{BG}{BM}. \text{ Do đó: } \frac{DG}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow DG = 4; ID + IG = DG. \text{ Do đó: } 3 + IG = 4.$$

$$\text{Vậy: } IG = 1 \text{ cm.}$$



Bài 3.13. Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Ta có: $AD = AE$, $BD = BT$, $CT = CE$ (T là tiếp điểm của (O) và BC).

$$\text{Do đó: } AE = \frac{b + c - a}{2}; EN = AN - AE = \frac{b}{2} - \frac{b + c - a}{2} = \frac{a - c}{2}.$$

MN là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow MN \parallel AB$

$$\Rightarrow \widehat{NFE} = \widehat{ADE}, \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \widehat{NEF}. \text{ Nên } \widehat{NFE} = \widehat{NEF}$$

$\Rightarrow \triangle NEF$ cân tại N. Do đó: $NF = NE = \frac{a-c}{2}$.

$$MF = MN + NF = \frac{c}{2} + \frac{a-c}{2} = \frac{a}{2}; MF = BM \left(= \frac{a}{2} \right)$$

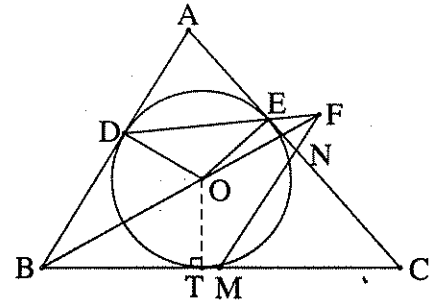
$\Rightarrow \triangle BMF$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MBF} = \widehat{MFB}$.

Mà $\widehat{ABF} = \widehat{MFB}$ (so le trong và $MF \parallel AB$)

Do vậy: $\widehat{MBF} = \widehat{ABF}$

$\Rightarrow BF$ là tia phân giác của góc ABC.

Vậy: F nằm trên đường phân giác của góc ABC.



Bài 3.14. a) Gọi M là tiếp điểm của d với (O).

Gọi A', P', Q' lần lượt là hình chiếu của A, P, Q trên đường thẳng d.

Ta có: các đường thẳng AA', PP', QQ' song song với nhau.

Theo bài toán 3b, ta có: $2BP = AB + BC - AC$

và $2CQ = AC + BC - AB$

$$\Rightarrow BP = \frac{AB + BC - AC}{2} \text{ và } CQ = \frac{AC + BC - AB}{2}$$

$$\text{Xét } \triangle AA'B \text{ có } PP' \parallel AA' \Rightarrow \frac{AA'}{PP'} = \frac{AB}{BP}$$

$$\text{Xét } \triangle AA'C \text{ có } QQ' \parallel AA' \Rightarrow \frac{AA'}{QQ'} = \frac{AC}{CQ}$$

$$\text{Do đó: } \frac{AA'}{PP'} = \frac{AA'}{QQ'} = \frac{AB}{BP} \cdot \frac{AC}{CQ} \Rightarrow \frac{a^2}{p \cdot q} = \frac{AB \cdot AC}{BP \cdot CQ} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Mà: } BP \cdot CQ &= \frac{AB + BC - AC}{2} \cdot \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{BC^2 - (AB - AC)^2}{4} \\ &= \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB \cdot AC}{4} = \frac{AB \cdot AC}{2} \quad (\text{vì } AB^2 + AC^2 = BC^2 \text{ (}\triangle ABC \text{ có } \widehat{A} = 90^\circ)) \end{aligned}$$

Từ (*), ta có: $\frac{a^2}{p \cdot q}$ không đổi.

b) • Xét $\widehat{xAy} < 90^\circ$. Đặt $\widehat{xAy} = \widehat{A}$, không đổi.

Vẽ $CH \perp AB$ tại H. Ta có: $AH = AC \cdot \cos A$, $CH = AC \cdot \sin A$

Do đó: $BH = AB - AH = AB - AC \cos A$.

$\triangle BCH$ vuông tại H $\Rightarrow BC^2 = BH^2 + CH^2$ (định lý Py-ta-go)

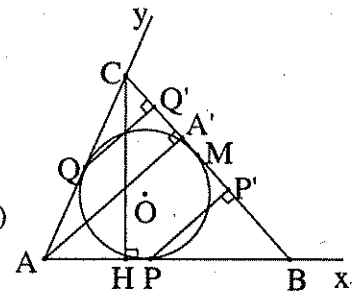
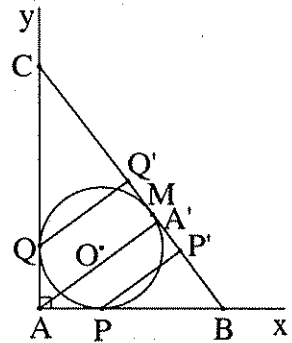
$$\text{Nên } BC^2 = (AB - AC \cos A)^2 + (AC \sin A)^2$$

$$BC^2 = AB^2 - 2AB \cdot AC \cos A + AC^2 \cdot \cos^2 A + AC^2 \sin^2 A$$

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) - 2AB \cdot AC \cos A$$

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \Rightarrow BC^2 - AB^2 - AC^2 = -2AB \cdot AC \cos A$$

$$\text{Vì vậy: Từ câu (a), cho ta } BP \cdot CQ = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB \cdot AC}{4} \text{ và } \frac{a^2}{p \cdot q} = \frac{AB \cdot AC}{BP \cdot CQ}$$



- b) Kí hiệu d_1 là đường thẳng đi qua M và vuông góc với BD, d_2 là đường thẳng đi qua N và vuông góc với DC. Chứng minh rằng giao điểm của d_1 và d_2 luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Lời giải

- a) Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABH, ACH

Ta có: $\widehat{AMH} = \widehat{ABH}$, $\widehat{ABH} = \widehat{ACH} = 90^\circ - \widehat{BAC}$, $\widehat{ACH} = \widehat{ANH}$

Do đó $\widehat{AMH} = \widehat{ANH}$ và $\widehat{MAN} = 2\widehat{BAC}$

ΔAMN cân tại A, $\widehat{MAN} = 2\widehat{BAC}$ không đổi

Do đó S_{AMN} lớn nhất

$\Leftrightarrow AM$ lớn nhất

$\Leftrightarrow AM$ là đường kính của đường tròn (O_1)

$\Leftrightarrow \widehat{AHM} = 90^\circ$

Vậy khi Δ vuông góc với AH tại H thì

tam giác AMN có diện tích lớn nhất

- b) Vì $d_1 \perp BD$, $d_2 \perp DC$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{MPN} + \widehat{BDC} = 180^\circ$

Do đó $\widehat{MPN} = \widehat{BAC} < 90^\circ$

Nên tâm của đường tròn (PMN) và P cùng

nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa MN

Mà A là giao điểm của đường trung trực của MN và cung chứa góc có số đo

$\alpha = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{MPN}$

Do vậy A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN $\Rightarrow AM = AN = AP$

Gọi t là đường thẳng qua A và song song với BD. Ta có t cố định. $BD \perp MP$ (gt)

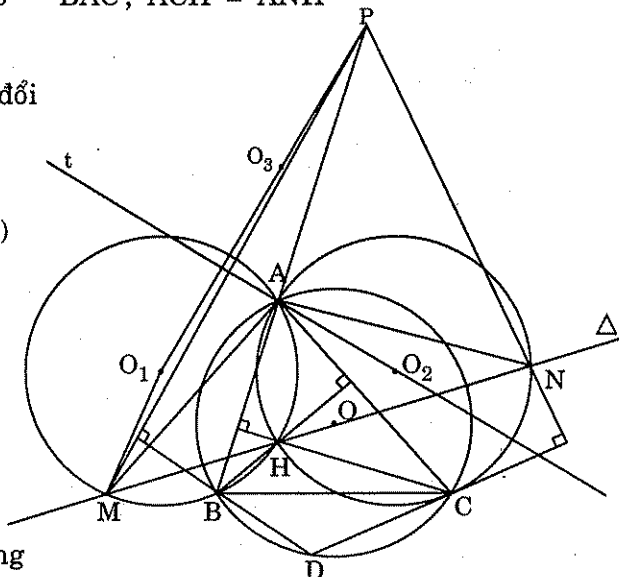
Nên $t \perp MP$. Ta có M và P đối xứng qua t

Gọi O_3 là điểm đối xứng của O_1 qua t.

Ta có O_3 cố định và $O_3P = O_1M = R_1$, không đổi

Do đó P chạy trên đường tròn cố định tâm O_3 , bán kính bằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH

Lời giải trên có cần bổ sung gì thêm nữa không?



BÀI VIẾT 12: BÀI TOÁN CHỨNG MINH BA SỐ LÀ SỐ ĐO CÁC CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

Các bài toán và đặc biệt là các bài toán bất đẳng thức về độ dài các cạnh của một tam giác rất đa dạng và phong phú. Tìm kiếm các bài toán chứng minh ba số a, b, c thỏa mãn các điều kiện cho trước trở thành số đo các cạnh của một tam giác nhằm bổ sung thêm các bài toán về tam giác thật sự bổ ích. Bài viết này chúng tôi xin được giới thiệu cùng các bạn đọc một số bài toán dạng này.

Bài toán 1: Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng các bộ ba sau là số đo các cạnh của một tam giác:

a) $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$

b) $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{c}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

Lời giải

a) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} = \frac{2}{(a+c)+b} > \frac{2}{a+c+a+c} = \frac{1}{a+c}$

b) Ta có: $b+c > a \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{a} > 1$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$

Nên $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b} \geq \sqrt[n]{c}$

Ta có: $0 < \frac{b}{a} \leq 1, 0 < \frac{c}{a} \leq 1$

Do đó: $\sqrt[n]{\frac{b}{a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a}} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} > \sqrt[n]{a}$

* **Nhận xét:** Từ trên ta còn có: $\frac{1}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}, \frac{1}{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}, \frac{1}{\sqrt[n]{c} + \sqrt[n]{a}}$ là số đo ba cạnh của một tam giác

Bài toán 2: Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến AA', BB', CC' cắt nhau tại G. Đặt GA = x, GB = y, GC = z, AA' = m, BB' = n, CC' = p

Chứng minh rằng các bộ ba sau là độ dài các cạnh của một tam giác

a) x, y, z

b) m, n, p

Lời giải

Gọi D là điểm đối xứng của G qua A'. Ta có: GA = GD

Tứ giác BGCD là hình bình hành $\Rightarrow GB = CD$

$\triangle GCD$ có: $CD + GC > GD$

Do đó: $GB + GC > GA$

$$y + z > x$$

Suy ra: $\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z > \frac{3}{2}x$

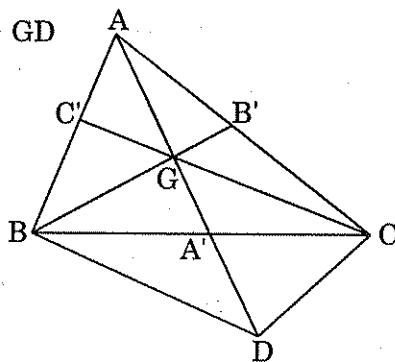
Nên $n + p > m$

* **Nhận xét:** Từ bài toán 1, ta còn có các bộ sau cũng là độ dài các cạnh của một tam giác

a) $\frac{1}{x+y}, \frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}$

b) $\sqrt[t]{x}, \sqrt[t]{y}, \sqrt[t]{z}$ ($t \geq 2, t \in \mathbb{N}$)

c) $\frac{1}{\sqrt[t]{x} + \sqrt[t]{y}}, \frac{1}{\sqrt[t]{y} + \sqrt[t]{z}}, \frac{1}{\sqrt[t]{z} + \sqrt[t]{x}}$ ($t \geq 2, t \in \mathbb{N}$)



d) m, n, p

e) $\sqrt[t]{m}, \sqrt[t]{n}, \sqrt[t]{p}$ ($t \in \mathbb{N}, t \geq 2$)

f) $\frac{1}{\sqrt[t]{m} + \sqrt[t]{n}}, \frac{1}{\sqrt[t]{n} + \sqrt[t]{p}}, \frac{1}{\sqrt[t]{p} + \sqrt[t]{m}}$ ($t \in \mathbb{N}, t \geq 2$)

Bài toán 3. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng các bộ ba sau là số đo các cạnh của một tam giác

a) $\sin A, \sin B, \sin C$

b) $a \sin A, b \sin B, c \sin C$

c) $a \cos A, b \cos B, c \cos C$

Lời giải

a) AD, BE, CF là các đường cao cắt nhau tại H của tam giác ABC

$$BE = AB \sin A, BE = BC \sin C$$

$$\text{Nên } AB \sin A = BC \sin C$$

$$\text{Tương tự } AB \sin B = AC \sin C$$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b + c}{\sin B + \sin C}$$

$$\Delta ABC \text{ có } a < b + c. \text{ Do đó } \sin A < \sin B + \sin C$$

b) Vẽ đường kính BK của đường tròn (O; R) ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có: $\widehat{BCK} = 90^\circ$, $\widehat{BKC} = \widehat{BAC}$

$$a = BC = BK \sin BKC = 2R \sin A \Rightarrow a \sin A = \frac{a^2}{2R}$$

$$\text{Tương tự } b \sin B = \frac{b^2}{2R}, c \sin C = \frac{c^2}{2R}$$

$$\text{Mà } BC^2 = BF^2 + CF^2 < AB^2 + AC^2.$$

$$\text{Nên } a^2 < b^2 + c^2$$

$$\text{Do đó } a \sin A < b \sin B + c \sin C$$

$$c) \Delta AEF \sim \Delta ABC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \cos A$$

$$\text{Nên } EF = a \cos A.$$

$$\text{Tương tự } DF = b \cos B, DE = c \cos C$$

Bài toán 4. Cho tam giác nhọn ABC. M là điểm nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng bộ ba sau là số đo ba cạnh của một tam giác:

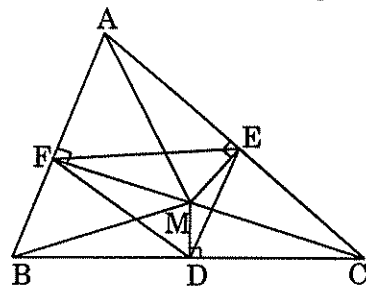
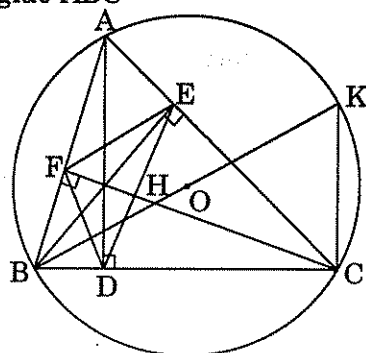
$$M \sin A, M \sin B, M \sin C$$

Lời giải

Vẽ $MD \perp BC$ tại D, $ME \perp AC$ tại E, $MF \perp AB$ tại F

Ta có: $EF = M \sin A, DF = M \sin B, DE = M \sin C$

EF, DF, DE là các cạnh của tam giác DEF.



Bài toán 5. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3$$

Chứng minh rằng: a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác.

Lời giải

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow a(b-c)^2 - a^3 + b(c-a)^2 - b^3 + c(a-b)^2 + 4abc - c^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow a[(b-c)^2 - a^2] + b[(c-a)^2 - b^2] + c[(a-b)^2 + 4ab - c^2] > 0$$

$$\Leftrightarrow a(b-c+a)(b-c-a) + b(c-a+b)(c-a-b) + c[(a+b)^2 - c^2] > 0$$

$$\Leftrightarrow a(b-c+a)(b-c-a) + b(c-a+b)(c-a-b) + c(a+b+c)(a+b-c) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)[a(b-c-a) - b(c-a+b) + c(a+b+c)] > 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)[a(b-c-a) - b(b-c-a+2) + c(a+b+c)] > 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)[a(b-c-a) - b(b-c-a) - 2bc + c(a+b+c)] > 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)[(b-c-a)(a-b) + c(-2b+a+b+c)] > 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)[(b-c-a)(a-b) + c(-b+a+c)] > 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)(-b+a+c)(-a+b+c) > 0$$

MỤC LỤC

PHẦN 1: CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG SỬ DỤNG VÀ CÁC BÀI TOÁN

A. CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG SỬ DỤNG

1. Phương pháp sử dụng góc “bù”	3
2. Phương pháp sử dụng tiên đề về đường thẳng song song.....	8
3. Phương pháp sử dụng tiên đề về đường thẳng vuông góc	13
4. Phương pháp sử dụng hai tia trùng nhau.....	19
5. Phương pháp sử dụng hình duy nhất	24
6. Phương pháp thêm điểm	29

Bài đọc thêm: Định lí mê-nê-la-uyt (menelaus) với ba điểm thẳng hàng..... 36

Có thể bạn đã biết ? Chứng minh một số bất đẳng thức lượng giác bằng kiến thức lớp 9 48 |

B. CÁC BÀI TOÁN (Nguyễn Đức Tấn)

1. Các bài toán lớp 7	52
------------------------------------	----

Chương I: Đường thẳng vuông góc, đường thẳng song song, tam giác..... 52

Chương II: Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác, các đường đồng quy trong tam giác..... 62

2. Các bài toán lớp 8	79
------------------------------------	----

Chương I: Tứ giác, đa giác diện tích đa giác 79 |

Chương II: Tam giác đồng dạng 94 |

3. Các bài toán lớp 9	113
------------------------------------	-----

Chương I: Hệ thức lượng trong tam giác vuông đường tròn..... 127

Có thể bạn đã biết? Nhiều cách giải cho một bài toán 182 |

Bài đọc thêm: Chỉ dùng compa 228 |

PHẦN 2: CÁC BÀI TOÁN NỔI TIẾNG

 229 |

(Nguyễn Đức Tấn – Huỳnh Duy Thủy)

PHẦN 3: CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC.....

 246 |

Chương I: 123 Bài toán chọn lọc của nhà giáo NGUYỄN ĐỨC HÒA

..... 246

Chương II: 36 Bài toán chọn lọc của nhà giáo NGUYỄN ANH HOÀNG và nhà giáo NGUYỄN ĐOÀN VŨ

..... 339

Chương III: 36 Bài toán chọn lọc của nhà giáo ĐỖ QUANG THANH và nhà giáo NGUYỄN TẤN SIÊNG

..... 359

Chương IV: Các giải pháp và các bài toán chọn lọc chứng minh ba điểm thẳng hàng của nhà giáo HUỖNH DUY THỦY

..... 378

PHẦN PHỤ LỤC: TẢN MẠN HÌNH HỌC (NGUYỄN ĐỨC TẤN)

Bài viết 1: Phát hiện lời giải khác của một bài toán hình học, sáng tạo bài toán mới

..... 392

Bài viết 2: Tôi có ngờ ngẩn không?..... 399

Bài viết 3: Chuyên đề hình học 400

Bài viết 4: Tìm kiếm ứng dụng của một tứ giác nội tiếp..... 410

Bài viết 5: Hãy bắt đầu từ bài toán quen thuộc. 415

Bài viết 6: Cứ ngỡ là có!..... 417

Bài viết 7: Bài toán thật sự rất khó!..... 418

Bài viết 8: Thú vị từ một bài toán. 420

Bài viết 9: Trao đổi về hai bài toán hình học thi Vô địch toán quốc tế năm 2012 và năm 2013 427

Bài viết 10: Phát hiện và bồi dưỡng học sinh giỏi toán từ việc phát triển các bài tập trong sách giáo khoa.

Bài viết 11: Giải toán 6 trong kì thi chọn học sinh giỏi Toán T.H.P.T Quốc gia, năm học 2012 – 2013 bằng kiến thức T.H.C.S..... 440

Bài viết 12: Bài toán chứng minh ba số là số đo các cạnh của một tam giác.

..... 441