

ĐỖ THỊ HỒNG ANH

BỒ DƯỠNG
HỌC SINH GIỎI
TRUNG HỌC CƠ SỞ
môn

TOÁN

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ, GIỎI THI VÀO CÁC LỚP CHUYÊN TOÁN THPT



www.toankho.com



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

ĐỖ THỊ HỒNG ANH

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TRUNG HỌC CƠ SỞ[?] **MÔN TOÁN**

(Dành cho HS khá, giỏi thi vào các lớp chuyên toán THPT)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chương I

MỘT SỐ NỘI DUNG CƠ BẢN VỀ SỐ HỌC

I.1. TÍNH CHIA HẾT VÀ SỐ NGUYÊN TỐ

I.1.1. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I.1.1.1. Định nghĩa ước số và bội số

Cho a, b là các số nguyên, $b \neq 0$, có thể chứng minh được tồn tại duy nhất các số q, r sao cho

$$a = bq + r; 0 \leq r < |b|.$$

Ta nói rằng a chia cho b được q dư r .

Số dư r luôn là không âm.

- Nếu $r = 0$ ta nói : a chia hết cho b hoặc b chia hết a và q được gọi là thương số. Kí hiệu $a : b$.
- Nếu $r \neq 0$ ta nói a không chia hết cho b .
- Nếu a chia hết cho b ta còn nói a là bội số của b , b là ước số của a .

Như vậy $a : b \Leftrightarrow a = b.q$.

I.1.1.2. Định nghĩa ước số chung lớn nhất (UCLN)

Cho hai số nguyên a, b trong đó ít nhất có một số khác 0. Số dương d gọi là UCLN của a, b nếu d là ước số chung của a và b đồng thời là số lớn nhất trong các ước số chung của a và b .

Kí hiệu UCLN của a, b là (a, b) .

Nếu $(a, b) = 1$ thì ta nói a, b nguyên tố cùng nhau.

I.1.1.3. Định nghĩa bội số chung nhỏ nhất (BCNN)

Cho hai số nguyên a và b khác 0. Số dương k được gọi là BCNN của a và b nếu k là bội số chung của a và b đồng thời là số dương nhỏ nhất trong các bội số chung của a và b .

Kí hiệu BCNN của a, b là $[a, b]$.

1.1.1.4. Hợp số – số nguyên tố

Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 chỉ có hai ước là 1 và chính nó.

Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước.

Chú ý:

- Số 0 và số 1 không là số nguyên tố và cũng không là hợp số.
- Số 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất.

1.1.1.5. Đồng dư thức

1.1.1.5.1. Khái niệm đồng dư

Cho trước số tự nhiên $m > 1$. Ta nói các số nguyên a, b đồng dư với nhau theo môđun m nếu khi chia a và b cho m ta được cùng một dư. Kí hiệu $a \equiv b \pmod{m}$.

Nói cách khác, a đồng dư với b theo môđun m nếu a và b biểu diễn được dưới dạng

$$a = pm + r \text{ và } b = qm + r \quad (0 \leq r < m).$$

1.1.1.5.2. Tính chất của đồng dư thức

- $a \equiv a \pmod{m} \quad \forall a$.
- nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $b \equiv a \pmod{m}$.
- nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $b \equiv c \pmod{m}$ thì $a \equiv c \pmod{m}$.
- nếu $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ và $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$ thì $a_1 \pm a_2 \equiv (b_1 \pm b_2) \pmod{m}$,
hay nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a \pm x \equiv b \pm x \pmod{m}$ với x là số nguyên tùy ý.
- nếu $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ và $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$ thì $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$.

hay :

- Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a.x \equiv b.x \pmod{m}$ với x là số nguyên tùy ý.
- Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ với n là số nguyên dương bất kì.

1.1.1.6. Công thức biểu diễn số a trong hệ ghi số cơ số 10 (hay dùng để giải các bài toán về cấu tạo số)

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Các chữ số $a_0, a_1, \dots$ tương ứng được gọi là chữ số hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, ...

I. 1.2. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các số $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\underbrace{99\dots9}_{m \text{ chữ số}} \cdot \underbrace{aaa\dots a}_{n \text{ chữ số}} = \underbrace{aa\dots a}_{m \text{ chữ số}} \times \underbrace{99\dots9}_{n \text{ chữ số}}$$

(với a là chữ số bất kì, $a \neq 0$).

Giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x &= \underbrace{999\dots9}_{m \text{ chữ số}} \cdot \underbrace{aa\dots a}_{n \text{ chữ số}} \\ &= (10^m - 1) \cdot (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1) \cdot a \\ &= (10^{m+n-1} + 10^{m+n-2} + \dots + 10^m) \cdot a - (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1) \cdot a \\ y &= \underbrace{aa\dots a}_{m \text{ chữ số}} \cdot \underbrace{99\dots9}_{n \text{ chữ số}} = (10^{m-1} + 10^{m-2} + \dots + 10 + 1) \times a \times (10^n - 1) \\ &= (10^{m+n-1} + 10^{m+n-2} + \dots + 10 + 1) \times a - (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1) \cdot a. \end{aligned}$$

Vậy $x = y$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, với a là chữ số bất kì $0 < a \leq 9$.

Ví dụ 2. Viết ba số có hai chữ số $x = 23$; $y = 79$ và $z = \overline{ab}$, sau đó ghép các số x, y, z để được các số có 6 chữ số (ví dụ số có 6 chữ số $\overline{2379ab}$, $\overline{ab2379}$, ...).

a) Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số như trên ?

b) Lập tổng tất cả các số có 6 chữ số được tạo thành cho kết quả là 2 989 896. Hãy tìm $\overline{ab}$.

Giải.

a) Có thể lập được 6 số có 6 chữ số là

$$\begin{aligned} x_1 &= \overline{2379ab}; x_2 = \overline{23ab79}; x_3 = \overline{7923ab} \\ x_4 &= \overline{79ab23}; x_5 = \overline{ab2379}; x_6 = \overline{ab7923}. \end{aligned}$$

b) Có: $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_6 =$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot (23 + 79 + \overline{ab}) \times 10000 + 2 \cdot (23 + 79 + \overline{ab}) \times 100 + 2(\overline{ab} + 23 + 79) \\ &= 2 \cdot (\overline{ab} + 23 + 79) \times 10101 \\ &\Rightarrow 2 \times (\overline{ab} + 23 + 79) = 296 \quad \Rightarrow \overline{ab} = 46. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tìm các chữ số x, y sao cho $\overline{xyxy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2$.

Giải. Ta có

$$\overline{xyxy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 1100x + 11y = 11(99x + x + y) \quad (2)$$

$$\Rightarrow (x + y) : 11 \text{ mà } x, y \text{ là các chữ số}$$

$$\Rightarrow (x + y) = 11.$$

Thay $(x + y) = 11$ vào (1), ta có :

$$11(100x + y) = 11^2 \cdot (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow 11(99x + (x + y)) = 11^2(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9x + 1.$$

Ta có bảng sau

x	y	$x^2 + y^2$	$9x + 1$	
2	9	$2^2 + 9^2$	$9 \cdot 2 + 1$	(không thoả mãn)
3	8	$3^2 + 8^2$	$9 \cdot 3 + 1$	(không thoả mãn)
4	7	$4^2 + 7^2$	$9 \cdot 4 + 1$	(không thoả mãn)
5	6	$5^2 + 6^2$	$9 \cdot 5 + 1$	(không thoả mãn)
6	5	$6^2 + 5^2$	$9 \cdot 6 + 1$	(không thoả mãn)
7	4	$7^2 + 4^2$	$9 \cdot 7 + 1$	(không thoả mãn)
8	3	$8^2 + 3^2$	$9 \cdot 8 + 1$	thoả mãn
9	2	$9^2 + 2^2$	$9 \cdot 9 + 1$	(không thoả mãn)

Vậy có duy nhất một cặp giá trị thoả mãn là $x = 8$ và $y = 2$.

Ví dụ 4. Cho x, y, z nguyên thoả mãn điều kiện

$$(x + y + z) = (x - y) \cdot (y - z) \cdot (z - x).$$

Chứng minh rằng :

$$M = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 \text{ chia hết cho } 81.$$

Giải. Vì $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$ nên

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x).$$

Xét 3 số dư của phép chia x, y, z cho 3.

Trường hợp 1 : Nếu cả ba số dư là 0, 1, 2 thì $(x + y + z) \div 3$, khi đó

$(x - y) \cdot (y - z) \cdot (z - x) \not\div 3$ trái với giả thiết.

Trường hợp 2 : Nếu hai số dư bằng nhau thì $(x + y + z) \not\div 3$, trong khi đó một trong ba hiệu $(x - y) \div (y - z) \div (z - x)$ lại $\div 3$, trái với giả thiết.

Trường hợp 3 : Nếu ba số chia 3 cùng dư, khi đó

$$M = 3(x - y) \cdot (y - z) \cdot (z - x) \div 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

Ví dụ 5.

a) Tìm tất cả các số nguyên dương M có 2 chữ số sao cho cộng các chữ số của M với M và với số được viết bởi các chữ số của M theo thứ tự ngược lại, ta được một số chính phương.

b) Hãy giải bài toán nếu M là số nguyên dương có 3 chữ số.

Giải.

a) Đặt $M = \overline{ab}$ với $(0 < b \leq 9; 0 < a \leq 9)$.

Theo giả thiết ta có : $\overline{ab} + (a + b) + \overline{ba} = k^2 \Rightarrow 12 \cdot (a + b) = k^2 \Rightarrow k$ chẵn.

Đặt $k = 2h$, ta có $12 \cdot (a + b) = (2h)^2 = 4h^2 \Rightarrow 3(a + b) = h^2$ (*)

$$\Rightarrow h^2 \div 3 \Rightarrow h \div 3, \text{ đặt } h = 3t \text{ và } t > 0.$$

Thay $h = 3t$ vào (*), ta có

$$9t^2 = 3(a + b) \Rightarrow a + b = 3t^2 \leq 18 \Rightarrow t^2 \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2. \end{cases}$$

$$\text{Nếu } t = 1 \text{ thì } a + b = 3 \Rightarrow \begin{cases} \overline{ab} = 12 \\ \overline{ab} = 21. \end{cases}$$

Nếu $t = 2$ thì $a + b = 12$ và ta có bảng sau :

a	b	$\overline{ab}$
6	6	66
5	7	57
7	5	75
8	4	84

a	b	$\overline{ab}$
9	3	93
3	9	39
4	8	48

Vậy có 9 số phải tìm là 12 ; 21; 66 ; 57 ; 75 ; 48 ; 84 ; 93 ; 39.

b) Đặt $M = \overline{xyz}$ với $(0 \leq y \leq 9 ; 1 \leq x, z \leq 9)$.

Theo giả thiết ta có $\overline{xyz} + \overline{zxy} + x + y + z = m^2$

$$\Rightarrow 102(x + y + z) - 81y = m^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow m \vdots 3 \text{ và } m^2 \vdots 9$$

$$\Rightarrow (x + y + z) \vdots 3.$$

Đặt $m = 3k$ và $x + y + z = 3h$ ($1 \leq h \leq 9$) và thay vào (1), ta được

$$34h - 9y = k^2. \quad (2)$$

Đặt $k = 9p + r$ thì $k^2 = 9t + s$, trong đó có sự tương ứng

$$r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

với $s = 0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1$, vì $k^2 = 9.(3h - y) + 7h$ chia cho 9 có dư bằng 1, 4, 7, 0 nên h chỉ có thể là 1, 4, 7, 9 tương ứng với s bằng 7, 1, 4, 0.

Xét 4 trường hợp sau :

$$1) h = 1 \Rightarrow (x + y + z) = 3 \text{ mà } (x + z) \geq 2 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow M = 111 \text{ thoả mãn đề bài.}$$

$$2) h = 4 \Rightarrow x + y + z = 12 \text{ và } k^2 = 9t + 1$$

$$\Rightarrow k = 9p + r \text{ với } r = 1 ; 8. \quad (3)$$

Từ (2) có $k^2 = 136 - 9y \Rightarrow 8 \leq k \leq 11$. Từ đó và từ (3) ; (2) suy ra

$$\begin{cases} k = 8 \text{ và } y = 8 ; x + z = 4 \\ k = 10 \text{ và } y = 4 ; x + z = 8. \end{cases}$$

Ta có M bằng 183 ; 381 ; 282 ; 147 ; 741 ; 246 ; 642 ; 345 ; 543 ; 444 thoả mãn đề bài.

$$3) h = 7 \Rightarrow x + y + z = 21 \text{ và } k^2 = 9t + 4 \Rightarrow k = 9p + r, \text{ với } r = 2 ; 7 \quad (4)$$

Từ (2) có $k^2 = 238 - 9y \Rightarrow 13 \leq k \leq 15$ vậy không có k thoả mãn (4).

$$4) h = 9 \Rightarrow x + y + z = 27$$

$$\Rightarrow x = y = z = 9 ; k = 15 \text{ có } M = 999 \text{ thoả mãn đề bài.}$$

Vậy có 12 số phải tìm là : 111 ; 183 ; 381 ; 147 ; 741 ; 246 ; 642 ; 345 ; 543 ; 444 ; 999.

Ví dụ 6. Với bất kì số nguyên dương m nào không chia hết cho 10 thì cũng luôn tồn tại một số nguyên dương n sao cho trong dạng thập phân của nó không chứa số 0 và tổng các chữ số của nó bằng tổng các chữ số của số $m.n$.

Giải.

Trường hợp trong biểu diễn dạng thập phân, chữ số cuối cùng của chữ số m không có chữ số 0 ở tận cùng thì số m có k chữ số $m = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ ($a_k \neq 0$).

$$\begin{aligned} \text{Xét } n = \underbrace{9 \dots 9}_{k \text{ chữ số}}, \text{ ta có } mn &= \overline{a_1 a_2 \dots a_k} \cdot (10^k - 1) = \overline{a_1 a_2 \dots a_k \underbrace{00 \dots 0}_k} - \overline{a_1 a_2 \dots a_k} \\ &= \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-1} (a_k - 1) (9 - a_1) \dots (10 - a_k)} \end{aligned}$$

ta có tổng các chữ số của mn là

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + (a_k - 1) + (9 - a_1) + \dots + (10 - a_k) = \underbrace{9 + \dots + 9}_{k \text{ chữ số}} = 9k,$$

bằng tổng các chữ số của n .

Vậy tổng các chữ số của $m.n$ là $9k$, bằng tổng các chữ số của n .

Ví dụ 7. Tìm tất cả các chữ số a, b, c, d , biết

$$\sqrt{abcd} = \overline{ab} + \sqrt{cd}. \quad (1)$$

Giải. Đặt $x = \overline{ab}$ và $y = \overline{cd}$ thì

$$(1) \Rightarrow 100x + y = (x + \sqrt{y})^2$$

$$\Rightarrow x + 2\sqrt{y} = 100$$

$\Rightarrow y$ phải là số chính phương

$$\Rightarrow y = 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81.$$

Ta có bảng sau :

$y = \overline{cd}$	$x + 2\sqrt{y} = 100$	$x = \overline{ab}$
16	$x + 2\sqrt{16} = 100$	92
25	$x + 2\sqrt{25} = 100$	90
36	$x + 2\sqrt{36} = 100$	88
49	$x + 2\sqrt{49} = 100$	86
64	$x + 2\sqrt{64} = 100$	84
81	$x + 2\sqrt{81} = 100$	82

Vậy có 6 bộ các chữ số a, b, c, d tương ứng sau :

9, 2, 1, 6; 9, 0, 2, 5; 8, 8, 3, 6; 8, 6, 4, 9; 8, 4, 6, 4; 8, 2, 8, 1.

Ví dụ 8. Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ n sao cho tích

$X = n(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ có đúng 3 ước nguyên tố.

Giải.

– Nếu $n = 1$ thì $X = 1.2.3.4 = 2^3.3$ chỉ có 2 ước nguyên tố, vậy không thỏa mãn.

– Nếu $n \geq 2$ do $X = n(n+1)(n+2)(n+3)$ là tích 4 số tự nhiên liên tiếp, suy ra $X \vdots 2$ và $X \vdots 3$, mà X có đúng 3 ước nguyên tố nên $X = 2.3.p$ ($p \geq 5$).

n lẻ, $n \geq 3$ có n, $n+2$ là hai số lẻ liên tiếp nguyên tố cùng nhau, suy ra n, $(n+2)$ là hai lũy thừa 3^a và p^b . Vì $(n+1)$ chẵn, nguyên tố với n và $(n+2)$ nên $n+1 = 2^k$ ($k \geq 2$), khi đó

$$X = (2^k - 1) \cdot (2^k) \cdot (2^k + 1) \cdot (2^k + 2) = 2^{k+1} \cdot (2^k - 1) \cdot (2^k + 1) \cdot (2^{k-1} + 1). \quad (1)$$

Vì $k \geq 2$ nên $2^k - 1$; $2^k + 1$ và $2^{k-1} + 1$ đều là lẻ. Mặt khác

$$(2^k + 1; 2^k - 1) = (2^k + 1; 2^k + 1 - 2) = (2^k + 1; -2) = 1$$

$$(2^k + 1; 2^{k-1} + 1) = (2(2^{k-1} + 1) - 1; 2^{k-1} + 1) = (-1; 2^{k-1} + 1) = 1.$$

Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2^k - 1 = 3^\alpha \\ 2^k + 1 = p^\beta \\ 2^{k-1} + 1 = 3^\gamma \end{array} \right. \quad \text{với } \alpha, \beta, \gamma \geq 1 \Rightarrow 3^{\alpha-1} = 2.3^{\gamma-1} - 1 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \Rightarrow \alpha - 1 = \gamma - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma = 1 \Rightarrow n = 3 \\ \left\{ \begin{array}{l} 2^k - 1 = p^\alpha \\ 2^k + 1 = 3^\beta \\ 2^{k-1} + 1 = p^\gamma \end{array} \right. \quad \text{với } \alpha, \beta, \gamma \geq 1 \Rightarrow p^\alpha = 2^k - 1 = 2.(2^{k-1} + 1) - 3 = 2.p^\gamma - 3 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \Rightarrow \text{vô lí vì } \alpha, \gamma \geq 1 \text{ thì } 3 \text{ không thể chia hết cho } p. \end{array} \right.$$

Đáp số $n = 3$.

Ví dụ 9.

a) Tìm $n \in \mathbf{N}$ để $a = n^4 + n^2 + 1$ là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng : nếu một trong hai số $2^n - 1$ và $2^n + 1$ ($n \in \mathbf{N}$, $n > 2$) là số nguyên tố thì số thứ hai là hợp số.

Giải.

a) Ta có $a = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1) \cdot (n^2 - n + 1)$.

Do a là số nguyên tố nên $n^2 - n + 1 = 1 \Rightarrow n = 1$. Vậy $n = 1$ và $a = 3$.

Đáp số $n = 1$.

b) Xét ba số $2^n - 1$, 2^n , $2^n + 1$. Trong ba số trên luôn tồn tại một số chia hết cho 3 mà 2^n không chia hết cho 3, nên nếu một trong hai số $(2^n - 1)$ và $(2^n + 1)$ là số nguyên tố thì số thứ hai sẽ phải là hợp số.

Ví dụ 10.

a) Chứng minh rằng các số $A = 6^{2012} - 1$ và $B = 6^{2013} + 1$ đều là bội số của 7.

b) Tìm số dư trong phép chia $(2011)^{2012}$ cho 3.

Giải.

Ta có $6 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{2012} \equiv (-1)^{2012} \pmod{7} \Rightarrow A = 6^{2012} - 1$ là bội số của 7.

Từ $6^{2012} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{2013} \equiv 6 \pmod{7}$ mà $6 \equiv -1 \pmod{7}$

$\Rightarrow 6^{2013} \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow B = 6^{2013} + 1$ là bội số của 7.

b) Ta có $2011 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow (2011)^{2012} \equiv 1 \pmod{3}$, hay số dư cần tìm là 1.

I.1.3. MỘT SỐ BÀI TẬP

A. Để bài

Bài 1. a) Cho a, b, c là ba số tự nhiên và $(a + b + c)$ chia hết cho 6. Chứng minh rằng : $(a^3 + b^3 + c^3)$ chia hết cho 6.

b) Tổng của năm số nguyên bằng 0. Chứng minh rằng : Tổng lũy thừa bậc 5 của chúng chia hết cho 15.

Bài 2. a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 có tất cả các tính chất sau : Một nửa của nó là bình phương của một số nguyên, một phần ba của nó là lập phương của một số nguyên, một phần năm của nó lại là lũy thừa bậc năm của một số nguyên.

b) Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ chia hết cho 2000.

Bài 3. Chứng minh rằng : với n lẻ $n \in \mathbb{N}^*$ tùy ý thì $(1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n)$ luôn chia hết cho $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$.

- Bài 4.** Tìm tất cả các số tự nhiên n khác 0 sao cho $(3^n + 5^n) : (3^{n-1} + 5^{n-1})$.
- Bài 5.** Tìm số tự nhiên n có ba chữ số khác nhau, biết rằng nếu xoá bất kì chữ số nào của nó ta cũng được một số là ước của n .
- Bài 6.** a) Cho p ; $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ là các số nguyên tố. Tìm p .
 b) Cho p , $p + 10$; $p + 14$ là các số nguyên tố. Tìm p .
 c) Cho p và $p^2 + 2$ là số nguyên tố. Chứng minh: $p^3 + 2$ là số nguyên tố.
 d) Tổng của ba số nguyên tố bằng 2010. Tìm số nhỏ nhất trong ba số nguyên tố đó.
 e) Tìm 4 số nguyên tố liên tiếp mà tổng lại là số nguyên tố.
- Bài 7.** Tìm $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sao cho $a = 1! + 2! + \dots + n!$ là hợp số.
- Bài 8.** Hai số tự nhiên x và $2x$ đều có tổng các chữ số của chúng bằng nhau. Chứng minh rằng x là hợp số.
- Bài 9.** Chứng minh rằng $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ luôn là hợp số với mọi n là số lẻ.
- Bài 10.** Chứng minh rằng
 a) Số $19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số với mọi $n \in \mathbb{N}$;
 b) Số $222^{555} + 555^{222}$ là hợp số;
 c) Số $a = n^4 + 4m^4$ là hợp số với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và $m, n > 1$.
- Bài 11.** Tìm số tự nhiên $n > 1$, nhỏ nhất sao cho $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ là số chính phương.
- Bài 12.** Tìm số nguyên tố $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab} + \overline{ba}$ là số chính phương.
- Bài 13.** Chứng tỏ rằng
 a) Tích 8 số tự nhiên liên tiếp khác 0 không bao giờ là số chính phương;
 b) $\overline{ababab}$ không là số chính phương;
 c) $10^{400} + 10^{300} + 10^{200} + 10^{10} + 10^5 + 1$ không là số chính phương;
 d) Tích của 4 số nguyên dương liên tiếp không thể là số chính phương (để thi vào lớp 10 chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm 2000 – 2001).
- Bài 14.** Tìm hai số, biết rằng BCNN của chúng và UCLN của chúng có tổng bằng 19.
- Bài 15.** Cho $a_1 = 14$; $a_2 = 144$, ..., $a_n = \underbrace{14\dots44}_{n \text{ chữ số } 4}$. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho a_n là số chính phương.

Bài 16. Tìm p nguyên tố sao cho $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Bài 17. Cho $A = 71.72 \dots 139.140$. Tìm số tự nhiên k lớn nhất sao cho $A : 2^k$.

Bài 18. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất thoả mãn :

i) a chia cho 11 dư 7, chia 9 dư 5 ;

ii) a chia 7 dư 4, chia 13 dư 4 ;

iii) a chia 10 dư 3.

Bài 19. Tìm tất cả các số p nguyên tố sao cho $p^2 + 11$ chỉ có đúng 6 ước nguyên dương đôi một khác nhau (kể cả ước là 1 và chính nó).

B. Lời giải

Bài 1.

a) Chứng minh $(a^3 - a) : 6$.

Từ đó có : $(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) : 6$.

Mà $(a + b + c) : 6$, suy ra $(a^3 + b^3 + c^3) : 6$.

b) Chứng minh : $(a^5 - a) : 15$.

Từ đó có : $(a^5 + b^5 + c^5) - (a + b + c) = (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c) : 15$.

Mà $(a + b + c) : 15$, suy ra $(a^5 + b^5 + c^5) : 15$.

Bài 2.

a) Theo đầu bài số tự nhiên a phải tìm ($a \neq 0$) đó phải là bội số của 2 ; 3 và 5.

Do a là số tự nhiên nhỏ nhất nên a phải có dạng $a = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ (α, β, γ là số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 thoả mãn đề bài). Ta có :

$\frac{a}{2} = 2^{\alpha-1} \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ là số chính phương ;

$\frac{a}{3} = 2^\alpha \cdot 3^{\beta-1} \cdot 5^\gamma$ là lũy thừa bậc ba của một số nguyên ;

$\frac{a}{5} = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^{\gamma-1}$ là lũy thừa bậc năm của một số nguyên.

Do đó phải có

α	lẻ	bội của 3	bội của 5	lẻ và là BCNN (3 ; 5)	$\alpha = 15$
β	bội của 2	bội của 3 + 1	bội của 5	BCNN (2 ; 5) có dạng bội của 3 + 1	$\beta = 10$
γ	bội của 2	bội của 3	bội của 5 + 1	BCNN (2 ; 3) có dạng bội của 5 + 1	$\gamma = 6$

Vậy $a = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

b) $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Ta có : Trong 4 số tự nhiên liên tiếp có không quá một số chia hết cho 5. Vì vậy, một trong bốn số n ; $n + 1$; $n + 2$; $n + 3$ phải có một số chia hết cho 5, tức là số đó còn phải chia hết cho 125. Do đó $(n + 3) \geq 125$ và n nhỏ nhất.

Thử thấy $n = 125$ thoả mãn điều kiện của đầu bài.

Vậy $n = 125$.

Bài 3. Đặt $a = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n$ và $b = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Ta có $2a = 2 \cdot [(1^n + n^n) + (2^n + (n-1)^n) + (3^n + (n-2)^n) + \dots]$,

dễ thấy $2a \vdots (n+1)$. (1)

Tương tự, $2a = 2 \cdot [(1^n + (n-1)^n) + (2^n + (n-2)^n) + \dots + n^n]$,

dễ thấy $2a$ chia hết cho n . (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a \vdots b$.

Bài 4. Nếu $n = 1$ thì $(3^n + 5^n)$ chia hết cho $3^{n-1} + 5^{n-1}$

Nếu $n \geq 2$, do $3^n + 5^n \vdots (3^{n-1} + 5^{n-1})$ và $3(5^{n-1} + 3^{n-1}) \vdots 3^{n-1} + 5^{n-1}$,

nên $3^n + 5^n - 3(3^{n-1} + 5^{n-1}) = 2 \cdot 5^{n-1}$ cũng chia hết cho $(3^{n-1} + 5^{n-1})$.

Ta có $2 \cdot 5^{n-1} \vdots 3^{n-1} + 5^{n-1}$, tức là tồn tại $q \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$2 \cdot 5^{n-1} = q \cdot (3^{n-1} + 5^{n-1})$$

$$2 \cdot 5^{n-1} = q \cdot 3^{n-1} + q \cdot 5^{n-1}$$

$$(2 - q) \cdot 5^{n-1} = q \cdot 3^{n-1}. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $q < 2$ mà $q \in \mathbb{N}^*$, nên $q = 1$.

Thay $q = 1$ vào (1), suy ra $3^{n-1} = 5^{n-1}$ vô lí.

Vậy với $n = 1$ thì $(3^n + 5^n) \vdots (3^{n-1} + 5^{n-1})$.

Bài 5. Gọi số phải tìm $n = \overline{abc}$ ($a \neq 0$).

Số $\overline{abc}$ xoá c được $\overline{ab}$. Ta có : $\overline{abc} : \overline{ab} \Rightarrow c = 0$.

Số $\overline{ab0}$ xoá b được $\overline{a0}$. Ta có : $\overline{ab0} : \overline{a0} \Rightarrow \overline{ab} : a \Rightarrow b : a$. (1)

Số $\overline{ab0}$ xoá a được $\overline{b0}$. Ta có : $\overline{ab0} : \overline{b0} \Rightarrow \overline{ab} : b \Rightarrow 10a + b : b$. (2)

Từ (1), đặt $b = ka$ ($k \in \mathbb{N}$). Thay $b = ka$ vào (2), $10a : ka \Rightarrow 10 : k$ và $b \neq a$ nên k bằng 2 hoặc $k = 5$.

Với $k = 2$ ta có $\overline{abc}$ bằng 120 ; 240 ; 360 ; 480.

Với $k = 5$ ta có $\overline{abc}$ bằng 150.

Bài 6.

a) Nếu $p = 3$ thì $6p^2 + 1 = 6.3^2 + 1 = 55 \notin P$ (loại).

Nếu $p = 5$ thì $4p^2 + 1 = 4.5^2 + 1 = 101 \in P$, và $6p^2 + 1 = 6.5^2 + 1 = 151 \in P$ (thoả mãn).

Nếu $p > 5$ và $p \in P$ thì $p \not\equiv 5$, do đó p có dạng $p = 5k \pm 1$, hoặc $p = 5k \pm 2$.

Nếu $p = (5k \pm 1)$ thì $4p^2 + 1 : 5$ (loại).

Nếu $p = (5k \pm 2)$ thì $6p^2 + 1 = 6(5k \pm 2)^2 + 1 : 5$ (loại).

Vậy $p = 5$ thoả mãn đầu bài.

b) c) tương tự a). Đáp số : $p = 3$.

d) Gọi a, b, c là ba số phải tìm. Giả sử $a < b < c$.

Ta có : $(a + b + c) = 2010$, do đó một trong ba số a, b, c phải là số chẵn (vì nếu a, b, c là ba số cùng lẻ thì $(a + b + c)$ sẽ là một số lẻ). Ta có : a, b, c phải có một số chẵn và a là số nhỏ nhất nên $a = 2$.

e) Gọi bốn số phải tìm là a, b, c, d . Giả sử $a < b < c < d$.

Ta có : $(a + b + c + d)$ là số nguyên tố, nên trong bốn số đó phải có một số chẵn, do đó $a = 2$. Vậy bốn số phải tìm là 2 ; 3 ; 5 ; 7.

Bài 7. Với $n = 2$ thì $a = 1! + 2! = 3$ là số nguyên tố (loại).

$n \geq 3$ thì a luôn chia hết cho 3 và $a > 3$, do đó a là hợp số.

Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$ thì a là hợp số.

Bài 8. Giả sử $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ ($a \neq 0$). Dễ thấy

$$\begin{aligned} x - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) &= a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= a_1 \cdot (10^n - 1) + a_2(10^{n-1} - 1) + \dots + a_{n-1}(10 - 1) \text{ chia hết cho } 9. \end{aligned}$$

Đặt $S(x) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Vậy luôn có $(x - S(x)) \vdots 9$.

Gọi $S(x) = S(2x) = k$. Dễ thấy $2x - k \vdots 9$ và $x - k \vdots 9$.

Mặt khác, ta có: $(2x - k) - (x - k) = x$. Vậy $x \vdots 9$.

Bài 9. Dùng hằng đẳng thức

$$a^n + b^n = (a + b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 - \dots + b^{n-1}) \text{ với } n \text{ lẻ.}$$

Bài 10.

a) Đặt $a = 19 \cdot 8^n + 17$.

Nếu $n = 4k$ hoặc $n = 4k + 2$ thì a chia hết cho 3.

Nếu $n = 4k + 1$ thì $a = 19 \cdot 8^{4k+1} + 17$ và a chia hết cho 13.

Nếu $n = 4k + 3$ thì $a = 19 \cdot 8^{4k+3} + 17$ và a chia hết cho 5.

Vậy a là hợp số với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) $b = 222^{555} + 555^{222}$, dễ thấy $b > 1$ và b chia hết cho 111. Vậy b là hợp số.

$$c) a = (n^2 + 2m^2)^2 - 4m^2n^2 = (n^2 + 2m^2 + 2mn) \cdot (n^2 + 2m^2 - 2mn).$$

Bài 11. Ta có $a^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $n \in \mathbb{N}, n > 1$

$$\Rightarrow 6a^2 = n(n+1)(2n+1) \Rightarrow 6n(n+1)(2n+1) = 36a^2 \Rightarrow (6n^2 + 6n) \cdot (2n+1) = 36a^2.$$

Gọi $d = \text{UCLN}(6n^2 + 6n, 2n+1) \Rightarrow (6n^2 + 6n) \vdots d$ và $(2n+1) \vdots d$

$$\Rightarrow (6n^2 + 6n) - 3(2n+1) \vdots d \Rightarrow (6n^2 - 3) \vdots d \Rightarrow (12n^2 - 6) \vdots d. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } (2n+1) \vdots d \Rightarrow (2n+1)(2n-1) \vdots d \Rightarrow (4n^2 - 1) \vdots d \Rightarrow (12n^2 - 3) \vdots d \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 3 \vdots d \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

- Nếu $d = 1$ thì $(2n+1)$ phải là số chính phương, mà $(2n+1)$ lẻ suy ra $(2n+1) = 9$; $(2n+1) = 25$, $(2n+1) = 49, \dots$, dễ thấy $n = 24$ thoả mãn.

- Nếu $d = 3$ thì $\begin{cases} (2n+1) = 3u \\ 6n^2 + 6n = 3v \end{cases}$. Mặt khác $6n(n+1)(2n+1) = 36a^2$, nên $u.v = 4a^2$.

Do $d = 3 = \text{ƯCLN}(6n^2 + 6n; 2n + 1)$, nên $\text{ƯCLN}\left(\frac{6n^2 + 6n}{d}; \frac{2n+1}{d}\right) = 1$.

hay $\text{ƯCLN}(u; v) = 1$, suy ra $\begin{cases} u = x^2 \\ v = y^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2n+1}{3} = x^2$ và x lẻ.

Nếu $x = 3$ thì $n = 13$ (không thoả mãn).

Nếu $x \geq 5$ thì $n > 30 > 24$.

Vậy n nhỏ nhất là $n = 24$.

Bài 12. Ta có $k^2 = \overline{ab} + \overline{ba} = 11.(a+b) \Rightarrow (a+b) : 11 \Rightarrow (a+b) = 11$.

Xét các số $\overline{ab}$ lẻ và $(a+b) = 11$, ta có các số thoả mãn là 29 ; 47 ; 65 ; 83, có ba số nguyên tố là : 29 ; 47 ; 83.

Bài 13.

a) Gọi a là tích của 8 số tự nhiên liên tiếp. Nếu $n \geq 3$

$$a = n(n+1) \dots (n+7)$$

$$= [n(n+7)] [(n+1).(n+6)] . [(n+2) (n+5)] . [(n+3).(n+4)]$$

$$= (n^2 + 7n) . (n^2 + 7n + 6) . (n^2 + 7n + 10) (n^2 + 7n + 12).$$

Đặt $t = n^2 + 7n + 6$, dễ thấy t là số chẵn và $(t^2 + 2t - 22)^2 < a < (t^2 + 2t - 20)^2$ (1)

$$\text{vì (1) tương đương với hệ } \begin{cases} 4t^2 - 56t - 484 > 0 & (2) \\ 64t + 400 > 0. & (3) \end{cases}$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow t^2 - 14t - 121 > 0$ hiển nhiên với $t \geq 3^2 + 7.3 + 6$,

$$(3) \Leftrightarrow 64t + 400 > 0 \text{ hiển nhiên.}$$

Do đó, a không thể là số chính phương.

Nếu $n = 1$ thì $a = 1.2.3 \dots 8 = 8!$ không là số chính phương,

$n = 2$ thì $a = 2.3.4 \dots 8.9 = 9!$ cũng không là số chính phương.

Vậy tích 8 số tự nhiên liên tiếp khác 0 không bao giờ là số chính phương.

b) $k^2 = \overline{ababab} = \overline{ab.10101} = \overline{ab.3.7.13.37} \Rightarrow \overline{ab} : 10101$ vô lí.

Vậy $\overline{ababab}$ không là số chính phương.

c) $x = 10^{400} + 10^{300} + 10^{200} + 10^{10} + 10^5 + 1$ có $x : 3$ và $x \not\vdots 9$.

Vậy x không là số chính phương.

d) Giả sử ta có 4 số nguyên dương liên tiếp là $n, (n+1), (n+2), (n+3)$. Ta có

$$x = n(n+3) \cdot (n+1)(n+2) = (n^2 + 3n)^2 + 2 \cdot (n^2 + 3n).$$

Dễ thấy $(n^2 + 3n)^2 < x < (n^2 + 3n + 1)^2$, suy ra x không thể là số chính phương.

Bài 14. Gọi a, b là hai số phải tìm, d là ƯCLN (a, b).

$$\text{ƯCLN}(a, b) = d \Leftrightarrow \begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ (a', b') = 1 \end{cases}; \text{BCNN}(a, b) = \frac{ab}{\text{ƯCLN}(a, b)} = \frac{da' \cdot db'}{d} = da'b'.$$

Theo đề bài $\text{BCNN}(a, b) + \text{ƯCLN}(a, b) = 19$, nên $d(a'b' + 1) = 19$.

Do đó, $a'b' + 1$ là ước của 19 và $a'b' + 1 \geq 2$.

Giả sử $a \geq b$ thì $a' \geq b'$. Ta được

d	$a'b' + 1$	$a' \cdot b'$	a'	b'	a	b
1	19	$18 = 2 \cdot 3^2$	18	1	18	1
			9	2	9	2

Đáp số : 18 và 1 ; 9 và 2.

Bài 15.

Ta có $a_2 = 144 = 12^2$; $a_3 = 1444 = 38^2$, a_1 không là số chính phương. Vậy ta xét với $n \geq 4$. Giả sử a_n là số chính phương $a_n = b^2$ với $b \in \mathbb{Z}$. Do $n \geq 4$ nên số a_n có tận cùng là 4444. Mặt khác, do $10000 : 16$, số dư khi chia a_n cho 16 bằng số dư khi chia 4444 cho 16, tức là 12. Suy ra b phải là số chẵn và không chia hết cho 4. Vậy $b = 2 \cdot (2t + 1)$ với $t \in \mathbb{Z}$, từ đó $b^2 = 16(t^2 + t) + 4$ số này chia cho 16 còn dư là 4, điều này mâu thuẫn.

Vậy chỉ có $n = 2$ và $n = 3$ thì a_n là số chính phương.

Bài 16. Đặt $a = 2^p + p^2$.

Nếu $p = 2$ thì $a = 2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \notin P$ (loại).

Nếu $p = 3$ thì $a = 2^3 + 3^2 = 17 \in P$ (thoả mãn).

Nếu $p > 3 \Rightarrow p$ lẻ và $p \not\equiv 3$.

Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow k$ chẵn. Có $2^3 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{3k+1} \equiv 2 \pmod{3}$.

$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a \not\equiv 3$ (loại).

Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow k$ lẻ $\Rightarrow 2^{3k+2} \equiv -4 \pmod{3}; (3k + 2)^2 \equiv 1 \pmod{3}$
 $\Rightarrow a \not\equiv 3$ (loại). Vậy chỉ có $p = 3$ thì a là số nguyên tố.

Bài 17. Ta có

$$\begin{aligned} A &= 71.72 \dots 139.140 = (71.73.75 \dots 139) \cdot (72.74 \dots 140) \\ &= (71.73 \dots 139) \cdot 2^{35} \cdot (36.37 \dots 70) (37.39 \dots 69) \\ &= B_1 \cdot 2^{35} \cdot (36.38 \dots 70) (37.39 \dots 69) & (B_1 = 71.73 \dots 139) \\ &= B_1 \cdot 2^{35} \cdot 2^{18} (18.19 \dots 34.35) \cdot B_2 & (B_2 = 37.39 \dots 69) \\ &= B_1 \cdot B_2 \cdot 2^{35} \cdot 2^{18} \cdot (18.20 \dots 34) (19.21 \dots 35) \\ &= B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot 2^{53} \cdot 2^9 \cdot (9.10 \dots 17) & (B_3 = 19.21 \dots 35) \\ &= B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot 2^{62} \cdot (10.12.14.16) \cdot (9.11 \dots 17) \\ &= B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot 2^{62} \cdot 2^4 \cdot (5.6.7.8) \cdot B_4 & (B_4 = 9.11 \dots 17) \\ &= B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4 \cdot 2^{66} \cdot 2^4 \cdot 5.7.3 \\ &= B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4 \cdot B_5 \cdot 2^{70} & (B_5 = 5.7.3) \end{aligned}$$

Ta có B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 là các số lẻ $\Rightarrow k_{\max} = 70$.

Bài 18.

a chia 11 dư 7, a chia 9 dư 5 $\Rightarrow (a + 4) : 99 \Rightarrow a = 99k - 4$ ($k \in \mathbb{N}$).

a chia 7 dư 4, a chia 13 dư 4 $\Rightarrow (a - 4) : 91$

$\Rightarrow 99k - 8 : 91 \Rightarrow 99(k - 1) : 91 \Rightarrow (k - 1) : 91 \Rightarrow (k - 1) = 91m$

$\Rightarrow a = 9009m + 95 \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow (5 - m) \equiv 3 \pmod{10}$

$\Rightarrow m \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow a_{\min} \Leftrightarrow m_{\min} \text{ và } m_{\min} = 2 \Rightarrow a = 18113$.

Bài 19. Ta có

$$p^2 + 11 \equiv p^2 - 1 \equiv (p - 1) \cdot (p + 1) \pmod{12}.$$

Nếu $p > 3$ thì $(p - 1)$ và $(p + 1)$ đều là chẵn và $(p - 1)$ hoặc $(p + 1)$ chia hết cho 3, do đó $(p^2 + 11) \equiv 0 \pmod{12}$, nên $p^2 + 11$ có nhiều hơn 6 ước nguyên dương đôi một khác nhau (vì 12 có đúng 6 ước nguyên dương là: 1, 2, 3, 4, 6, 12).

Vậy $p \leq 3$. Dễ thấy $p = 3$ thoả mãn điều kiện của đề bài.

Đáp số: $p = 3$.

I.2. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

I.2.1. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Một số phương pháp giải phương trình tìm nghiệm nguyên

Phương trình nghiệm nguyên là một đề tài rất hấp dẫn của số học và đại số, đồng thời cũng là một trong những chuyên mục hay được đề cập đến ở các kì thi chuyển cấp và thi học sinh giỏi.

Phương trình nghiệm nguyên thường không có quy tắc giải tổng quát. Mỗi bài toán với các điều kiện đã cho của nó đòi hỏi phải có những phương pháp giải thích hợp. Vì vậy, để giải các bài toán về phương trình nghiệm nguyên thì yêu cầu người giải phải có kiến thức cơ bản chắc chắn và tư duy linh hoạt, mềm dẻo là điều không thể tránh khỏi.

Cho đến nay, các nhà toán học đã tìm được rất nhiều phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên, tuy nhiên chúng tôi chỉ đề cập đến một số phương pháp hay sử dụng sau :

1. Phương pháp phân tích đa thức ra thừa số và đưa phương trình đã cho về phương trình dạng tích.
2. Biến đổi một vế của phương trình về tổng của các biểu thức (hoặc tổng của các hàm) không âm.
3. Sử dụng tính chất chia hết và so sánh các số dư ở hai vế của phương trình.
4. Dùng các hằng đẳng thức đáng nhớ.
5. Phương pháp đánh giá và loại trừ các khoảng nghiệm.
6. Phương pháp sử dụng điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm.
7. Phương pháp sử dụng điều kiện biệt thức Δ phải là một số chính phương.
8. Phương pháp sử dụng điều kiện kẹp giữa hai số chính phương (hoặc hai số lập phương) liên tiếp.

I.2.2. MỘT SỐ BÀI TẬP

(Các phương pháp nói trên cũng chính là các phương pháp hay được sử dụng trong các bài thi *chuyển cấp và thi học sinh giỏi*).

Sau đây là một số bài tập mà có cách giải tương ứng với các phương pháp nói trên.

A. Đề bài

Tìm nghiệm nguyên của phương trình

Bài 1. $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$.

Bài 2. a) $5x^4 + 10x^2 + 2y^6 + 4y^3 = 6$; (2)

b) $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

Bài 3. a) $x^2 + y^2 = 2011$;

b) $x^3 + 784y^5 + 5 = 0$;

c) $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 2015$;

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 8t^2 - 1$;

e) $15x^2 - y^2 = 9$.

Bài 4. a) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$;

b) $x^3 + y^3 + 3xyz = z^3$ và $4(x + y)^2 = z^3$.

Bài 5. a) $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x - 6 = 0$;

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Bài 6. a) $3x^2 + 3xy + 3y^2 = x + 8y$;

b) $2x^2 + 2y^2 - 2xy + x + y = 0$.

Bài 7. $x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 3y = -4$.

Bài 8. $x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 = -1$.

Bài 9. Giải phương trình tìm nghiệm tự nhiên :

a) $x^{20} + x^{12} = 2x^{20+12}$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 = 2^{2011}$;

c) $x^2 + y^3 = 3y^2 - 3y + 65$;

d) $1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \dots - 2010! \cdot 2012 + 2011! + x! = 2$

e) $a! + b! + c! = d!$ (với a, b, c là các số nguyên dương).

Bài 10. Giải phương trình tìm nghiệm nguyên :

a) $3x^2 + 3xy + 3y^2 = x + 8y$;

b) $2x^2 + 3y^2 - 5xy + 3x - 2y - 3 = 0$;

c) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$;

d) $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$.

Bài 11. Giải hệ phương trình tìm nghiệm nguyên

a) $\begin{cases} xy + z = 94 & (1) \\ x + yz = 95 & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} |x-1|^{2011} + |x-2|^{2012} = 1 & (1) \\ x^4 + y^2 + y^3 = 81 & (2) \end{cases}$

Bài 12. Tìm các số tự nhiên m, n, p thỏa mãn phương trình

$$\sqrt{m + \sqrt{m + \dots + \sqrt{m}}} = p \text{ (trong đó có } n \text{ lần lấy căn).}$$

Bài 13. Chứng minh rằng nếu p nguyên tố thì phương trình

$$x(x+1) = p^{2012} \cdot y(y+1) \text{ không có nghiệm nguyên dương.}$$

Một số bài tập dành cho bạn đọc tự giải

Bài 14. Chứng minh rằng ngoài nghiệm $x = y = 0$ thì phương trình

$$x^{1964} \cdot (x^{1964} + y^{18}) = y^{1982} \text{ không còn nghiệm nguyên } (x, y) \text{ nào khác.}$$

Bài 15. Tìm a, b, c ($a \neq 0$) sao cho các phương trình sau : $ax^2 + bx + c = 0$; $bx^2 + cx + a = 26$ và $cx^2 + ax + b = 0$ đều có nghiệm nguyên.

Bài 16. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên tố p sao cho phương trình

$$x^2 + x + 1 = py \text{ có nghiệm nguyên.}$$

Bài 17. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$.

Bài 18. Có hay không bộ bốn số tự nhiên khác không x, y, z, t thỏa mãn

$$x^{19} + y^9 + z^3 = t^{1994}.$$

B. Lời giải

Bài 1. Ta có

$$x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(y-1)x - (3y^2 + 10y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)^2 - (2y + 2)^2 = -7$$

$$\Leftrightarrow (3y + x + 1)(y - x + 3) = 7$$

$\Rightarrow (3y + x + 1)$ và $(y - x + 3)$ là ước của 7

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3y + x + 1 = 1 \\ y - x + 3 = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} 3y + x + 1 = 7 \\ y - x + 3 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3y + x + 1 = -1 \\ y - x + 3 = -7 \end{cases} \\ \begin{cases} 3y + x + 1 = -7 \\ y - x + 3 = -1. \end{cases} \end{cases}$$

Giải các hệ trên và thử lại, ta có các nghiệm của phương trình (1) là
 $(x = -3, y = 1); (x = 3, y = 1); (x = 1, y = -3); (x = 7, y = -3).$

Bài 2. Ta có

$$(2) \Leftrightarrow 5(x^2 + 1)^2 + 2(y^3 + 1)^2 = 13$$

$$\Rightarrow 5(x^2 + 1)^2 \leq 13 \text{ và } (x^2 + 1)^2 \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \text{ hoặc } x^2 + 1 = 1.$$

$$+ \text{ Nếu } x^2 + 1 = 1 \text{ thì } x = 0 \text{ và } y = 1.$$

$$+ \text{ Nếu } x^2 + 1 = 0 \text{ (loại).}$$

Thử lại, ta thấy $x = 0$ và $y = 1$ là nghiệm của phương trình (2).

$$b) x^2 - xy + y^2 = x + y \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = 2.$$

$$\text{Đáp số } (x, y) = (0, 0); (1, 0); (0, 1); (2, 1); (1, 2); (2, 2).$$

Bài 3. a) Ta có x^2 chia cho 4 cho các số dư là 0 hoặc 1, do đó $(x^2 + y^2)$ chia cho 4 cho các số dư là 0, 1, 2, mà 2011 chia 4 dư 3. Vậy phương trình $x^2 + y^2 = 2011$ vô nghiệm.

$$b) \text{ Ta có } x^3 + 784y^5 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 5 = -784y^5.$$

Do $(x^3 + 5)$ chia 7 cho các số dư là 4 hoặc 6 mà $784y^4$ chia 7 dư 0. Vậy phương trình $x^3 + 784y^5 + 5 = 0$ vô nghiệm.

c) Ta có : n^4 chia cho 16 cho các dư là 1 hoặc 0, do đó $(x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4)$ chia cho 16 cho các dư không vượt quá 14, mà 2015 chia cho 16 lại cho dư là 15. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d, e) giải tương tự trên.

Bài 4. Ta có hằng đẳng thức quen thuộc sau :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \quad (*)$$

$$\text{Hệ quả. Nếu } a + b + c = 0, \text{ thì } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc. \quad (**)$$

Sử dụng hệ quả (**) dễ thấy $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$

$$\Leftrightarrow 3(x - y)(y - z)(z - x) = 30 \Leftrightarrow (x - y)(y - z)(z - x) = 10.$$

Đặt $x - y = u$; $y - z = v$ và $z - x = t$, ta có $u + v + t = 0$ và $u.v.t = 10$.

$u.v.t = 10 \Rightarrow u, v, t$ chỉ có thể nhận các giá trị tương ứng là $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ hoặc $\pm 1, \pm 1, \pm 10$.

Ta thấy ngay không có bộ giá trị nào thoả mãn $u.v.t = 10$ và $u + v + t = 0$.

Vậy phương trình $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$ vô nghiệm.

b) giải tương tự a).

$$\text{Bài 5. a) } 3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x - 6 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 6x + 9) + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 3)^2 + (3y^2 + 2) \cdot (z^2 + 2) = 37$$

$$\Rightarrow 3(x - 3)^2 \leq 33 \Rightarrow (x - 3)^2 \leq 11 \Rightarrow (x - 3)^2 \text{ nhận các giá trị } 0; 1; 4; 9.$$

$$\text{Với } (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow (3y^2 + 2) \cdot (z^2 + 2) = 37. \quad (*)$$

$$\text{Ta có } 3y^2 + 2 \geq 2 \text{ và } z^2 + 2 \geq 2. \quad (**)$$

Từ (*) và (**) dễ thấy phương trình (1) vô nghiệm.

$$\text{Với } (x - 3)^2 = 1 \Rightarrow (3y^2 + 2) \cdot (z^2 + 2) = 34$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y^2 + 2 = 17 \\ z^2 + 2 = 2 \\ 3y^2 + 2 = 2 \\ z^2 + 2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình (1) vô nghiệm.}$$

$$\text{Với } (x-3)^2 = 4 \Rightarrow (3y^2+2).(z^2+2) = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y^2+2=5 \\ z^2+2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=1 \\ z^2=3 \Rightarrow z=\pm\sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

$$\text{Với } (x-3)^2 = 9 \Rightarrow (3y^2+2).(z^2+2) = 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y^2+2=2 \\ z^2+2=5 \end{cases} \text{ (loại)} \Rightarrow \begin{cases} 3y^2+2=5 \\ z^2+2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=0 \\ y=-1 \\ z=0. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$\begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} ; \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} ; \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} ; \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0. \end{cases}$$

b) Do $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ (*) nên một trong ba số x, y, z phải có một số dương.

Giả sử $x > 0$, (*)

Trường hợp I :

$x > 0$, $y < 0$ và $z < 0$. Đặt $y = -k$ ($k > 0$) và $z = -t$ ($t > 0$),

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{k} > 1 \Rightarrow x < 1, \text{ mâu thuẫn với (*)} \Rightarrow \text{loại.}$$

Trường hợp II:

$x > 0$, $y > 0$ và $z < 0$. Đặt $z = -t$ ($t > 0$).

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{t} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{t} \quad (2)$$

Nếu $x \geq 2$ và $y \geq 2$ thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, mà $1 + \frac{1}{t} > 1$, suy ra mâu thuẫn với (2) nên loại.

Vậy trong hai số x, y phải có một số nhỏ hơn 2.

Giả sử $x \leq 1$ mà $x > 0 \Rightarrow x = 1$.

$$(2) \Rightarrow 1 + \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow y = t \quad (t \in \mathbb{N}, t > 0).$$

Do đó, (1) có vô số nghiệm có dạng $(1, t, -t)$ với $t \in \mathbb{N}^*$.

Trường hợp III

Nếu x, y, z đều dương.

$$\text{Giả sử } x \leq y \leq z, \text{ ta có } 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x} \Rightarrow x \leq 3.$$

$$+ \text{ Nếu } x = 1 \text{ thì } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \text{ (loại).}$$

$$+ \text{ Nếu } x = 2 \text{ thì } \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y} \Rightarrow y \leq 4, \text{ mà } y \geq x = 2 \Rightarrow y = 2; 3; 4.$$

$$\bullet y = 2 \text{ (loại).}$$

$$\bullet y = 3 \text{ thì } z = 6. \text{ Vậy } x = 2; y = 3; z = 6.$$

$$\bullet y = 4 \text{ thì } z = 4. \text{ Vậy } x = 2; y = 4; z = 4.$$

$$+ \text{ Nếu } x = 3 \text{ thì } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \leq \frac{2}{y} \Rightarrow y \leq 3, \text{ mà } y \geq x = 3 \Rightarrow y = 3 \text{ và } z = 3, \text{ tức là } x = 3; y = 3; z = 3 \text{ là nghiệm của (1).}$$

$$\text{Vậy phương trình } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \text{ có các nghiệm } (x, y, z) \text{ sau : } (3, 3, 3);$$

$$(2, 3, 6); (2, 4, 4) \text{ và } (1, t, -t) \text{ với } t \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 6.

$$b) 2x^2 + 2y^2 - 2xy + x + y = 0. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } x + y = S; xy = P.$$

$$(1) \Leftrightarrow 2(x+y)^2 + (x+y) - 6xy = 0 \Leftrightarrow P = \frac{2S^2 + S}{6}. \quad (*)$$

Ta có $P = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{S^2}{4}$ (**). Từ (*) và (**) suy ra

$$\frac{2S^2 + S}{6} \leq \frac{S^2}{4} \Leftrightarrow -2 \leq S \leq 0 \Rightarrow S = -2; -1; 0.$$

Nếu $S = -2$ thì $P = 1$;

Nếu $S = -1$ thì $P = \frac{1}{6}$ (loại).

Nếu $S = 0$ thì $P = 0$.

Vậy phương trình (1) có các nghiệm là $(0; 0); (-1; -1)$.

Bài 7. Ta có

$$x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (3y + 2)x + (2y^2 + 3y + 4) = 0 \quad (1)$$

$$\Delta_{(1)} = (3y + 2)^2 - 4(2y^2 + 3y + 4) = y^2 - 12.$$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \Delta_{(1)}$ phải là số chính phương.

$$\text{Đặt: } y^2 - 12 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (y - k) \cdot (y + k) = 12.$$

Ta có $(y + k)$ và $(y - k)$ đều là ước của 12 đồng thời $y + k \geq y - k$,
 $(y + k)$ và $(y - k)$ cùng tính chẵn, lẻ.

$$\text{Do đó } \begin{cases} y + k = 6 \\ y - k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -4. \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 4, \text{ thay vào (1) ta được } x^2 + 14x + 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = -8. \end{cases}$$

$$\text{Với } y = -4, \text{ thay vào (1) ta được } x^2 - 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 6. \end{cases}$$

Vậy nghiệm (x, y) của phương trình đã cho là $(-6, 4); (-8, 4); (4, -4); (6, -4)$.

Bài 8. Ta có

$$x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 = (x^2 + z^2 + 1)^2 + x^2 + 2z^2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow y^4 = (x^2 + z^2 + 2)^2 - (x^2 + 3). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $(x^2 + z^2 + 1)^2 = y^4 < (x^2 + z^2 + 2)^2$, suy ra: $(x^2 + z^2 + 1)^2 = y^4$.

Từ $(x^2 + z^2 + 1)^2 = y^4$ và (1), ta có $x^2 + 2z^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ và $z = 0 \Rightarrow y = \pm 1$.

Thử lại: Với $x = 0, y = 1, z = 0$ và $x = 0, y = -1, z = 0$ đều thoả mãn (1).

Vậy nghiệm nguyên (x, y, z) của phương trình đã cho là $(0, 1, 0); (0, -1, 0)$.

Bài 9.

a) Dễ thấy $x = 0$ và $x = 1$ là nghiệm của phương trình $x^{20} + x^{12} = 2x^{32}$

Nếu $x > 1$, thì $x^{20} < x^{32}$ và $x^{12} < x^{32}$, suy ra $x^{20} + x^{12} < 2x^{32}$ (loại).

Vậy phương trình có các nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

b) Trường hợp 1: a, b, c đều khác 0.

$a^2 + b^2 + c^2 = 2^{2011} \Rightarrow a, b, c$ cùng chẵn hoặc a, b, c có 2 số là lẻ và một số là chẵn. Giả sử a chẵn và b, c cùng lẻ $\Rightarrow a^2 : 4$ và $b^2 + c^2$ chia 4 dư 2.

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2$ chia 4 dư 2 (vô lí) $\Rightarrow a, b, c$ cùng chẵn.

Đặt $a = 2a_1; b = 2b_1; c = 2c_1 \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2^{2009}$.

Tương tự, cũng có $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 2^{2007}$.

...

$$a_{1005}^2 + b_{1005}^2 + c_{1005}^2 = 2. \quad (*)$$

Dễ thấy phương trình (*) không có nghiệm trong tập hợp các số nguyên dương.

Do đó, phương trình $a^2 + b^2 + c^2 = 2^{2011}$ cũng không có nghiệm nguyên dương.

Trường hợp 2: Một trong ba số a, b, c bằng 0.

Giả sử $a = 0$, ta có $b^2 + c^2 = 2^{2011} \Rightarrow b, c$ chẵn. Lí luận tương tự trên, ta có phương trình $b_{1005}^2 + c_{1005}^2 = 2 \Rightarrow b_{1005} = c_{1005} = 1$, hay phương trình $b^2 + c^2 = 2^{2011}$ có nghiệm là $b = 2^{1005}, c = 2^{1005}$.

Vậy phương trình $a^2 + b^2 + c^2 = 2^{2011}$ có nghiệm là $(0, 2^{1005}, 2^{1005})$.

Trường hợp 3: Hai trong ba số a, b, c , bằng 0.

Giả sử $a = 0, b = 0$, ta có $c^2 = 2^{2011} \Rightarrow$ loại.

Vậy phương trình $a^2 + b^2 + c^2 = 2^{2011}$ có các nghiệm là $(0, 2^{1005}, 2^{1005})$;

$(2^{1005}, 0, 2^{1005}); (2^{1005}, 2^{1005}, 0)$.

$$c) x^2 + y^3 = 3y^2 - 3y + 65 \Leftrightarrow x^2 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^3 = 64 \Leftrightarrow (y - 1)^3 \leq 64 \Rightarrow y - 1 \leq 4.$$

$$\text{Vì } y \in \mathbb{N} \Rightarrow y - 1 \geq -1 \Rightarrow y - 1 \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

$$\text{Vậy phương trình có các nghiệm } \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 0 \\ y = 5. \end{cases}$$

d) Trước hết, ta tính giá trị biểu thức

$$A = 1!.3 - 2!.4 + 3!.5 + \dots - 2010!.2012 + 2011!$$

$$\text{Do } n! \cdot (n + 2) = n! [(n + 1) + 1] = (n + 1)! + n!$$

$$\text{Nên } A = 2! + 1! - (3! + 2!) + 4! + 3! - (5! + 4!) + \dots - (2011! + 2012!) + 2011! = 1.$$

$$\text{Do vậy, phương trình trở thành } 1 + x! = 2 \Rightarrow x! = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

e) Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c \leq d$.

$$\text{Do } a, b, c \text{ nguyên dương và } a! + b! + c! = d! \Rightarrow d > c \Rightarrow d \geq c + 1 \Rightarrow d! \geq (c + 1)!$$

$$\text{Ta có } (c + 1)! = (c + 1) \cdot c! > 3c! \geq a! + b! + c! \text{ nếu } (c + 1) > 3.$$

$$\text{Như vậy, nếu } (c + 1) > 3, \text{ hay } c \geq 3 \text{ thì phương trình vô nghiệm } \Rightarrow c \leq 2.$$

$$\text{Do đó, ta có các bộ số của } a, b, c \text{ tương ứng là } (1, 1, 1); (1, 1, 2); (1, 2, 2); (2, 2, 2).$$

$$\text{Nếu } a = 1, b = 1, c = 1 \text{ thì } d! = 3 \text{ (loại).}$$

$$\text{Nếu } a = 1, b = 1, c = 2 \text{ thì } d! = 1! + 1! + 2! = 4 \text{ (loại).}$$

$$\text{Nếu } a = 1, b = 2, c = 2 \text{ thì } d! = 1! + 2! + 2! = 5 \text{ (loại).}$$

$$\text{Nếu } a = 2, b = 2, c = 2 \text{ thì } d! = 2! + 2! + 2! = 6 = 3!.$$

Vậy phương trình có nghiệm $(2, 2, 2, 3)$.

$$\text{Bài 10. a) } 3x^2 + 3xy + 3y^2 = x + 8y \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + (3y - 1)x + 3y^2 - 8y = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm

$$\Rightarrow \Delta = (3y - 1)^2 - 12(3y^2 - 8y) \geq 0 \Leftrightarrow 27y^2 - 90y - 1 \leq 0, \text{ mà } y \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y = 0; 1; 2; 3.$$

$$\text{Với } y = 0 \text{ ta có } 3x^2 = x \Leftrightarrow 3x^2 - x = 0 \text{ và } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0.$$

$$y = 1 \text{ ta có } 3x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ và } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1.$$

$y = 2$ ta có $3x^2 + 5x - 4 = 0$ và $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ không có giá trị x nào thoả mãn.

$y = 3$ ta có $3x^2 + 8x + 3 = 0$ và $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ không có giá trị x nào thoả mãn.

Vậy phương trình có các nghiệm là $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

$$b) 2x^2 + 3y^2 - 5xy + 3x - 2y - 3 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (3 - 5y)x + 3y^2 - 2y - 3 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \Delta_{(2)}$ phải là số chính phương.

$$\text{Ta có } \Delta_{(2)} = y^2 - 14y + 33.$$

$$\text{Đặt } \Delta_{(2)} = k^2, \text{ ta có } y^2 - 14y + 33 = k^2$$

$$\Leftrightarrow (y - 7)^2 - k^2 = 16 \Leftrightarrow (y - 7 + k) \cdot (y - 7 - k) = 16.$$

Mặt khác $(y - 7 + k)$ và $(y - 7 - k)$ là hai số có cùng tính chẵn, lẻ và

$y - 7 + k \geq y - 7 - k$ nên suy ra

$$\begin{cases} y - 7 + k = 8 \\ y - 7 - k = 2 \\ y - 7 + k = 4 \\ y - 7 - k = 4 \\ y - 7 + k = -2 \\ y - 7 - k = -8 \\ y - 7 + k = -4 \\ y - 7 - k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = 13,5 \Rightarrow \text{loại} \end{cases} \\ y = 7 \Rightarrow \text{không tồn tại giá trị } x \text{ thoả mãn} \\ y = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2,5 \Rightarrow \text{loại} \end{cases} \\ y = 3 \Rightarrow x = 3. \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm $(x; y)$ là $(15; 12); (1; 2); (3; 3)$.

$$c) x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) + 3 = y^2, \text{ dễ thấy } x^2 + x + 3 > 0 \Rightarrow (x^2 + x)^2 < y^2 \quad (*)$$

Mặt khác

$$(x^2 + x + 2)^2 - y^2 = x^4 + x^2 + 4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x - 3$$

$$= 3x^2 + 3x + 1 = 3\left(x^2 + x + \frac{1}{3}\right) = 3\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\right] > 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 2)^2 > y^2 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $(x^2 + x + 1)^2 = y^2$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x + 2x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Với $x = 1$ thì $y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$.

Với $x = -2$ thì $y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$.

Vậy phương trình (1) có các nghiệm là

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} ; \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} ; \begin{cases} x = -2 \\ y = -3. \end{cases}$$

$$d) 2x^2 + 4x = 19 - 3y^2 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) = 21 - 3y^2 = 3(7 - y^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(7 - y^2) : 2 \\ 3(7 - y^2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 - y^2 : 2 \\ y^2 \leq 7 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1. \end{cases}$$

$$\text{Nếu } y = 1 \text{ thì } x^2 + 2x = 8 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 3 \\ x + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4. \end{cases}$$

Nếu $y = -1$ thì $x = 2$ hoặc $x = -4$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} ; \begin{cases} x = -4 \\ y = -1. \end{cases}$$

Bài 11. a)
$$\begin{cases} xy + z = 94 & (1) \\ x + yz = 95 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1), ta có $(x - z) \cdot (1 - y) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - z = 1 \\ 1 - y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - z = -1 \\ 1 - y = -1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 95 \\ y = 0 \\ z = 94 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 31 \\ y = 2 \\ z = 32. \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ có các nghiệm là $\begin{cases} x = 95 \\ y = 0 \\ z = 94 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 31 \\ y = 2 \\ z = 32. \end{cases}$

b) Giải (1)

Nếu $x < 1$ thì $|x-1|^{2011} + |x-2|^{2012} > 1$ (loại)

Nếu $x > 2$ thì $|x-1|^{2011} + |x-2|^{2012} > 1$ (loại)

Nếu $x = 0$ thì $|0-1|^{2011} + |0-2|^{2012} > 1$ (loại)

Để thấy $x = 1$ hoặc $x = 2$ là nghiệm của (1).

Với $x = 1$, thay vào (2), ta có $y^2 + y^3 = 80 \Rightarrow y = 4$.

Với $x = 2$, thay vào (2) ta có $y^2 + y^3 = 65 \Rightarrow$ không có giá trị y nào thoả mãn do $y^2 + y^3$ luôn là số chẵn mà 65 là số lẻ.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4. \end{cases}$

Bài 12. Ta xét 2 trường hợp :

1. Nếu $n = 1$, ta có $\sqrt{m} = p \Leftrightarrow m = p^2$ và $p \in \mathbb{N}$, p tùy ý.

2. Nếu $n > 1$, ta đặt $H_n(m) = \sqrt{m + \sqrt{m + \dots + \sqrt{m}}}$ (n lần lấy căn)

phương trình trở thành $\sqrt{m + H_{n-1}(m)} = p \Leftrightarrow m + H_{n-1}(m) = p^2$

$\Leftrightarrow H_{n-1}(m) = p^2 - m$. Để $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, ta cần có $H_{n-1}(m) \in \mathbb{N}$ do đó

$H_{n-2}(m) = (H_{n-1}(m))^2 - m$, $H_{n-3}(m) = (H_{n-2}(m))^2 - m \dots$ và $H_1(m) = k$.

$H_2(m) = \sqrt{k^2 + k} = \sqrt{k \cdot (k+1)}$ đều là số tự nhiên $\Rightarrow k(k+1)$ phải là số chính phương. Mặt khác k và $(k+1)$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên $k = u^2$ và $(k+1) = v^2$ với $u, v \in \mathbb{N}$ và $v > u > 0$.

Do đó $v^2 - u^2 = 1$, từ đó $v = 1$, $u = 0$, $k = 0$, mà $k = 0 \Rightarrow m = 0$ và $p = 0$.

Vậy nếu $n = 1$ thì $m = p^2$ và $p \in \mathbb{N}$, p tùy ý.

Nếu $n > 1$ thì $m = 0$ và $p = 0$.

Bài 13. Giả sử phương trình $x(x+1) = p^{2012}y(y+1)$ (1) có nghiệm nguyên dương.

Từ (1) suy ra $x(x+1) \vdots p^{2012}$. Mặt khác, ƯCLN $(x, x+1) = 1$ nên $x \vdots p^{2012}$ hoặc $(x+1) \vdots p^{2012} \Rightarrow (x+1) \geq p^{2012}$. (2)

$$\text{Ta có } \left[p^{1006}(2y+1) + (2x+1) \right] \left[p^{1006}(2y+1) - (2x+1) \right]$$

$$= p^{2012}(2y+1)^2 - (2x+1)^2$$

$$= 4p^{2012}y(y+1) - 4x(x+1) + p^{2012} - 1 = p^{2012} - 1 \quad (\text{do (1)})$$

$$\Rightarrow p^{2012} - 1 \geq p^{1006}(2y+1) + (2x+1) \Rightarrow p^{2012} - 1 > 2x+1$$

$$\Rightarrow p^{2012} > 2x+2 \Rightarrow \text{mâu thuẫn vì theo (2) ta có } 2.p^{2012} \leq 2(x+1) = 2x+2.$$

Mâu thuẫn trên chứng tỏ phương trình (1) không thể có nghiệm nguyên dương.

Chương II

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ VÀ CĂN THỨC

II.1. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

II.1.1. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Phân thức đại số là biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là các đa thức và $B \neq 0$.
- Phân thức đại số có các tính chất cơ bản sau :
$$\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}$$
 với M là một đa thức khác không ;
$$\frac{A}{B} = \frac{A : K}{B : K}$$
 với K là một đa thức khác không.
- Có thể thực hiện các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, rút gọn trên tập hợp các phân thức.

II.1.2. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ I. Cho a, b, c thoả mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Chứng minh rằng $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.

Giải

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b)^3 - 3ab \cdot (a + b) + c^3 - 3abc \\ &= [(a + b) + c]^3 - 3(a + b) \cdot c(a + b + c) - 3ab \cdot (a + b + c) \\ &= (a + b + c) [(a + b + c)^2 - 3c(a + b) - 3ab] \\ &= (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a = b = c. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Cho x, y, z thoả mãn : $(x + y + z) = (x - y) \cdot (y - z) \cdot (z - x)$.

Hãy tính : $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ qua $a = x + y + z$.

Giải. Từ ví dụ 1 ta có ngay kết quả sau :

Nếu $(a + b + c) = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Do $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$, nên

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x) = 3(x + y + z) = 3a.$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức

$$X = \frac{\frac{1}{1 \cdot (2n-1)} + \frac{1}{3(2n-3)} + \frac{1}{5(2n-5)} + \dots + \frac{1}{(2n-3)3} + \frac{1}{(2n-1)1}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}}.$$

Giải. Gọi tử thức là A và mẫu thức là B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n-3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2n} \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} \right) \right] = \frac{1}{2n} \cdot 2B = \frac{B}{n}. \\ \text{Do đó } X &= \frac{\frac{B}{n}}{B} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

II.1.3. MỘT SỐ BÀI TẬP

A. Đề bài

Bài 1. Cho các số $a_1, a_2, \dots$ được xác định bởi công thức $a_k = \frac{4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{(k^2 + k)^4}$

với $k \geq 1$. Hãy tính $X = a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}$.

Bài 2. Cho bốn số a, b, c, d có tích bằng 1 và thoả mãn đẳng thức $(a + b + c + d) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$. Chứng minh rằng : bốn số a, b, c, d được phân tích làm hai cặp, giả sử là cặp (a, b) và (c, d) sao cho $ab = cd = 1$.

Bài 3. Tìm công thức tính nhanh tổng sau theo số tự nhiên n :

$$A = 1.2.3 + 3.4.7 + 7.8.15 + \dots + (2^n - 1) 2^n (2^{n+1} - 1).$$

Bài 4.

a) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Hãy tính $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$.

b) Cho a, b, c khác nhau đôi một và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Hãy tính $B = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$.

Bài 5. Cho $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$ và $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^{4020}}{a^{2010}} + \frac{y^{4020}}{b^{2010}} = \frac{2}{(a+b)^{2010}}.$$

Bài 6. Cho x, y, z thoả mãn đồng thời ba đẳng thức

$$x^4 - 2y^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$y^4 - 2z^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

$$z^4 - 2x^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x^{2010} + y^{2008} + z^{2006}$.

Bài 7. Chứng minh rằng : Nếu $a \neq b$; $b \neq c$; $c \neq a$ và

$$\frac{x(1+bc)-b-c}{b-c} = \frac{x(1+ca)-c-a}{c-a} = \frac{x(1+ab)-a-b}{a-b} = y \text{ thì } 3y^2 - x^2 + 1 = 0$$

Bài 8. Nếu a là tổng bình phương của n số nguyên thì $n.a$ là tổng bình phương của $\frac{(n-1).n}{2} + 1$ số nguyên.

B. Lời giải

Bài 1. Với $k \geq 1$, ta có

$$a_k = \frac{4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{(k(k+1))^4} = \frac{(k+1)^4 - k^4}{(k.(k+1))^4} = \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}.$$

$$X = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2010}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) + \left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2010^4} - \frac{1}{2011^4}\right) = 1 - \frac{1}{2011^4}.$$

Bài 2. Từ giả thiết $a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ta có

$$a + b + c + d = bcd + cda + dab + abc$$

$$\Leftrightarrow a(1 - bc) + d(1 - bc) = b(ad - 1) + c(ad - 1)$$

$$\Leftrightarrow (1 - bc) \cdot (a + d) = (ad - 1) \cdot (b + c)$$

$$\Rightarrow (1 - bc) \cdot \frac{(a + d)}{ad} = \left(1 - \frac{1}{ad}\right) \cdot (b + c) = (1 - bc) \cdot (b + c).$$

Nếu $bc = 1$ thì $ad = 1$ (dpcm).

$$\text{Nếu } bc \neq 1 \text{ thì } \frac{a+d}{ad} = b+c = \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{bd}\right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{ac} - 1\right) = \frac{1}{d} (bd - 1) \Leftrightarrow \frac{bd - 1}{abd} = \frac{1}{d} (bd - 1).$$

Nếu $bd = 1$ thì $ac = 1$ (dpcm).

Nếu $bd \neq 1$ thì $ab = 1$. Từ $ab = 1$ suy ra $cd = 1$ (dpcm).

Ghi chú: Bài toán trên có thể mở rộng cho nhiều số và có thể giải bằng nhiều cách.

Bài 3. Vì $(2^n - 1) + 2^n + (1 - 2^{n+1}) = 0$ nên ta có

$$(2^n - 1)^3 + (2^n)^3 - (2^{n+1} - 1)^3 = -3(2^n - 1) \cdot 2^n \cdot (2^{n+1} - 1).$$

Từ đó

$$-3A = -3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 + (-3) \cdot 7 \cdot 8 \cdot 15 + \dots + (-3) \cdot (2^n - 1) \cdot 2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$$

$$\Rightarrow -3A = (1 + 2^3 - 3^3) + (3^3 + 4^3 - 7^3) + (7^3 + 8^3 - 15^3) + \dots + (2^n - 1)^3 + 2^{3n} - (2^{n+1} - 1)^3.$$

$$\Rightarrow -3A = 1 + 2^3 + 4^3 + 8^3 + \dots + 2^{3n} - (2^{n+1} - 1)^3 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 24A = -2^3 - 4^3 - 8^3 - \dots - 2^{3n} - 2^{3n+3} + 8(2^{n+1} - 1)^3. \quad (2)$$

Cộng từng vế của (1) và (2), ta lại có

$$21A = 1 - 2^{3n+3} + 7(2^{n+1} - 1)^3 \Rightarrow A = \frac{2 \cdot (8^{n+1} - 1)}{7} - 2^{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1).$$

Bài 4. a) Ta có kết quả quen thuộc sau :

$$\text{Nếu } (a + b + c) = 0 \text{ thì } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc. \quad (1)$$

$$\text{Từ giả thiết } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 0.$$

Sử dụng kết quả ở (1), suy ra

$$(xy)^3 + (yz)^3 + (zx)^3 = 3xy.yz.zx = 3x^2y^2z^2, \text{ hay}$$

$$A = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{(yz)^3 + (zx)^3 + (xy)^3}{x^2y^2z^2} = \frac{3x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2} = 3.$$

b) Từ giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0.$

Ta có $a^2 + 2bc = a^2 + bc + (-ab - ac) = (a - c)(a - b).$

Tương tự: $b^2 + 2ac = (b - a)(b - c)$

$$c^2 + 2ab = (c - a)(c - b).$$

Vậy $B = \frac{-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1.$

Bài 5. Ta có: $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b} = \frac{(x^2+y^2)^2}{a+b}$

$$\Rightarrow (a+b)(bx^4 + ay^4) = ab(x^2 + y^2)^2$$

$$\Rightarrow (ay^2 - bx^2)^2 = 0 \Rightarrow bx^2 = ay^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$$

$$\frac{x^2}{a} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{x^{4020}}{a^{2010}} = \frac{1}{(a+b)^{2010}}; \quad \frac{y^2}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{y^{4020}}{b^{2010}} = \frac{1}{(a+b)^{2010}}$$

do đó $\frac{x^{4020}}{a^{2010}} + \frac{y^{4020}}{b^{2010}} = \frac{2}{(a+b)^{2010}}.$

Bài 6. Cộng các vế của (1); (2); (3), ta có

$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + (z^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 = 1.$$

Do đó $A = (x^2)^{1005} + (y^2)^{1004} + (z^2)^{1003} = 1 + 1 + 1 = 3.$

Bài 7. Từ giả thiết ta có

$$x(1 + bc) - b - c = y.(b - c) \Rightarrow (xc - 1 - y).b = c(1 - y) - x \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } x(y + 1) - x = (xa - 1 + y).b \quad (2)$$

$$x(1 + ac) - (a + c) = (c - a)y \quad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $[x(y+1)-x](ac-1-y)b = [c(1-y)-x](xa-1+y)b$ (4)

Nếu $b = 0$, khi đó $a \neq 0$ và $c \neq 0$. Mặt khác, từ (1) và (2) ta có

$x = c(1-y) = x(1+y)$, suy ra $x \neq 0$ và $y \neq \pm 1$.

Do đó $x = \frac{x}{1+y}$ (5) và $c = \frac{x}{1-y}$ (6). Thay (5) và (6) vào (3), ta được

$$x \left(1 + \frac{x^2}{1-y^2} \right) - \left(\frac{x}{1+y} + \frac{x}{1-y} \right) = \left(\frac{x}{1-y} - \frac{x}{1+y} \right) y$$

$$\Leftrightarrow 1 - y^2 + x^2 - 2 = 2y^2 \Leftrightarrow 3y^2 - x^2 + 1 = 0 \text{ (dpcm).}$$

Nếu $b \neq 0$, từ (4) ta có: $[x(1+y)-x] \cdot (ac-1-y) = [c(1-y)-x] [xa-1+y]$

$$\Leftrightarrow 2y \cdot [x(1+ac) - (a+c)] + (a-c)(x^2 - y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2(c-a) + (a-c)(x^2 - y^2 - 1) = 0 \text{ (do (3))}$$

$$\Leftrightarrow (c-a)(3y^2 - x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - x^2 + 1 = 0 \text{ (dpcm).}$$

Bài 8. Đặt $a = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ ($a_i \in \mathbb{Z}$; $i = 1, 2, \dots, n$)

$$\Rightarrow n.a = na_1^2 + na_2^2 + \dots + na_n^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_{n-1}a_n)$$

$$+ \left[(a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2) + \dots + (a_1^2 - 2a_1a_n + a_n^2) \right] +$$

$$+ \left[(a_2^2 - 2a_2a_3 + a_3^2) + \dots + (a_2^2 - 2a_2a_n + a_n^2) \right] + \dots +$$

$$\left[(a_{n-1}^2 - 2a_{n-1}a_n + a_n^2) \right]$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + \left[(a_1 - a_2)^2 + \dots + (a_1 - a_n)^2 \right] +$$

$$+ \left[(a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_2 - a_n)^2 \right] + (a_{n-1} - a_n)^2.$$

Vậy $n.a$ là tổng bình phương của

$$1 + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = 1 + \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} = \frac{(n-1).n}{2} + 1 \text{ số nguyên.}$$

II.2. SỐ THỰC – CĂN THỨC

II.2.1. CĂN THỨC

II.2.1.1. Những kiến thức cần nhớ

Cho $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$; $a \in \mathbb{R}$.

* Căn bậc n của số a là một số mà lũy thừa n bằng a .

- Căn bậc lẻ ($n = 2k + 1$)
Mọi số đều có một và chỉ một căn bậc lẻ.
- Căn bậc chẵn ($n = 2k$)
 - + Số âm không có căn bậc chẵn.
 - + Căn bậc chẵn của số 0 là số 0.
 - + Số dương có hai căn bậc chẵn là hai số đối nhau.Kí hiệu là: $\sqrt[n]{a}$ và $-\sqrt[n]{a}$.

Với số $a > 0$, số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a .

* Các phép biến đổi căn thức

- $\sqrt[n]{A^{2k+1}} = A, \forall A$; $\sqrt[n]{A^{2k}} = |A|, \forall A$.
- $\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}, \forall A, B$.
- $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}, \forall A, B$ và $B \neq 0$.
- $\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$, nếu $A \geq 0$ và $B \geq 0$.
- $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ nếu $A \geq 0$ và $B > 0$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[n]{A^{2k+1}} \cdot B} = A \cdot \sqrt[n]{B}, \forall A, B$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[n]{A^{2k}} \cdot B} = |A| \cdot \sqrt[n]{B}, \forall A, B$ và $B \geq 0$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[nm]{A}$, nếu $A \geq 0$.

II.2.1.2. Một số bài tập

A. ĐỀ BÀI

Bài 1. a) Tìm x để mỗi căn sau có nghĩa :

$$\begin{array}{lll} \text{a1)} \sqrt{2x^2+1} ; & \text{a2)} \sqrt{-3x+10} ; & \text{a3)} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^4+1}} ; \\ \text{a4)} \sqrt{\frac{-3x+10}{2x-1}} ; & \text{a5)} \sqrt{x+\frac{1}{2}} ; & \text{a6)} \sqrt{\frac{1+6x}{x^2-4}} . \end{array}$$

b) Tìm tất cả các giá trị x để đẳng thức sau được nghiệm đúng :

$$\begin{array}{ll} \text{b1)} \sqrt{(x+3)^2} = x+3 ; & \text{b2)} \sqrt{(x+3)^2} = -(x+3) \\ \text{b3)} \sqrt{(x+3)^2} = |x+3| ; & \text{b4)} \sqrt{(x+1)^2 \cdot (x+2)} = (x+1)\sqrt{x+2} \\ \text{b5)} \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1} . \\ \text{b6)} \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)x^3} = \sqrt[3]{2x} . \end{array}$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau :

$$\text{a)} A = \frac{x^3 - 3x + (x^2 - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 4} - 2}{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} + 2} , \text{ với } x > 2 .$$

$$\text{b)} B = \frac{1-ax}{1+ax} \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} , \text{ nếu } x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a-b}{b}} \quad (2a < b < 0) .$$

$$\text{c)} C = \left[\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} \quad \text{nếu } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq y . \end{cases}$$

$$\text{d)} D = \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}} .$$

Rút gọn rồi tìm các giá trị nguyên của x để D có giá trị nguyên.

Bài 3. a) Cho ba số thực x, y, z đôi một khác nhau thoả mãn điều kiện

$$(y-z) \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + (z-x) \cdot \sqrt[3]{1-y^3} + (x-y) \cdot \sqrt[3]{1-z^3} = 0. \quad (1)$$

Chứng minh rằng : $(1-x^3) \cdot (1-y^3) \cdot (1-z^3) = (1-xyz)^3$.

b) Cho các số x, y, z dương thoả mãn $xy + yz + zx = 1$.

Chứng minh rằng :

$$A = x \sqrt{\frac{(1+y^2) \cdot (1+z^2)}{1+x^2}} + y \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = 2.$$

c) Cho 3 số dương x, y, z thoả mãn $xyz = x + y + z$. Chứng minh rằng :

$$\frac{\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)} - \sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+z^2)} - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+z^2}}{zx} + \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}}{xy} = 0. \quad (1)$$

Bài 4. a) Cho $x, y, z > 0, x \neq y, y \neq z, z \neq x$ và

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{z}} + \frac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{z} - \sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt[4]{z}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}} = 0.$$

Tính giá trị biểu thức : $Q = \frac{\sqrt[4]{x}}{(\sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{z})^2} + \frac{\sqrt[4]{y}}{(\sqrt[4]{z} - \sqrt[4]{x})^2} + \frac{\sqrt[4]{z}}{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})^2}.$

b) Cho
$$\begin{cases} \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{z} = 1 & (1) \\ (\sqrt[5]{x})^2 + (\sqrt[5]{y})^2 + (\sqrt[5]{z})^2 = 1 & (2) \\ (\sqrt[5]{x})^3 + (\sqrt[5]{y})^3 + (\sqrt[5]{z})^3 = 1 & (3) \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức : $T = (\sqrt[5]{x})^{2010} + (\sqrt[5]{y})^{2011} + (\sqrt[5]{z})^{2012}.$

c) Cho $a = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \frac{1}{8} \sqrt{2}$. Tính giá trị biểu thức $X = a^2 + \sqrt{a^4 + a + 1}$.

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau :

$$a) \frac{a+2\sqrt{ab}+9b}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}-2\sqrt[3]{ab}} - 2\sqrt{b} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$b) \text{ Cho } x = \left(3 \frac{(\sqrt{5}+2) \cdot \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}} \right)^2 + 2011 \quad \text{và} \quad t = a \cdot \sqrt{\frac{x^2+1}{2x}} \quad (a > 0).$$

$$\text{Rút gọn } M = \left(\frac{\sqrt{t^2-a^2} + \sqrt{t^2+a^2}}{\sqrt{t^2-a^2} - \sqrt{t^2+a^2}} \right)^4.$$

Bài 6. Với số thực a , người ta định nghĩa phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và kí hiệu là $[a]$.

a) Cho dãy số $x_0, x_1, x_2 \dots x_n \dots$ được xác định bởi công thức

$$x_n = \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}} \right] - \left[\frac{n}{\sqrt{2}} \right], \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}. \quad \text{Hỏi trong 200 số } x_0, x_1, x_2, \dots, x_{199} \text{ có bao nhiêu số khác không ?}$$

$$b) \text{ Tính } [a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}], \quad \text{ở đó } a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Bài 7. a) Tính $\sqrt[100]{5,444\dots44}$ chính xác đến 10^{-100} .

$$b) \text{ Tính } A = \sqrt[5]{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{128}}} \quad \text{chính xác đến } 10^{-5}.$$

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương luôn tồn tại m nguyên dương

$$\text{sao cho } (\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}.$$

Bài 9. a) Chứng minh rằng : Nếu $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}} + \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{a}} + \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = 1$ thì

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}} + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{a}} + \frac{\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = 0.$$

$$b) \text{ Cho } x = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}} + 1 \right). \quad \text{Tính } A = 3x^3 - 3x^2 + 2012.$$

Bài 10. a) Cho $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b+c}$. Chứng minh rằng

$\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b} + \sqrt[k]{c} = \sqrt[k]{a+b+c}$ với mọi k nguyên dương và k là số lẻ.

b) Tính

$$A = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2012} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2012} - 3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2011} - 3\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2011} \\ + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2010} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2010}.$$

B. LỜI GIẢI

Bài 1. a)

a1) $\sqrt{2x^2+1}$ có nghĩa với mọi x ($x \in \mathbf{R}$).

a2) $\sqrt{-3x+10}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \leq \frac{10}{3}$.

a3) $\sqrt{\frac{x^2-1}{x^4+1}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1. \end{cases}$

a4) $\sqrt{\frac{-3x+10}{2x-1}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{-3x+10}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq \frac{10}{3}$.

a5) $\sqrt{|x| + \frac{1}{2}}$ có nghĩa với mọi x ($x \in \mathbf{R}$).

a6) $\sqrt{\frac{1+6x}{x^2-4}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{1+6x}{x^2-4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 < x \leq -\frac{1}{6}. \end{cases}$

b) b1) $\sqrt{(x+3)^2} = |x+3| = x+3 \Leftrightarrow x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$.

b2) $\sqrt{(x+3)^2} = |x+3| = -(x+3) \Leftrightarrow (x+3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$.

b3) $\sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$ đúng với mọi giá trị x ($x \in \mathbf{R}$).

$$\text{b4)} \sqrt{(x+1)^2 \cdot (x+2)} = |x+1| \sqrt{x+2} = (x+1) \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ (x+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x \geq -1. \end{cases}$$

$$\text{b5)} \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = 2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = 2\sqrt{x-1}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & \text{nếu } \sqrt{x-1} \geq 1 \\ 2 & \text{nếu } \sqrt{x-1} < 1. \end{cases}$$

Vậy (1) chỉ được nghiệm đúng khi và chỉ khi $\sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$.

$$\text{b6)} \text{Đặt } a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

$$\Leftrightarrow a^3 = (5\sqrt{2}+7) - (5\sqrt{2}-7) - 3a\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 14 - 3a \Leftrightarrow a^3 + 3a - 14 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a^2+2a+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow a-2=0 \text{ (do } a^2+2a+7 > 0) \Leftrightarrow a=2.$$

Vậy $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})} x^3 = \sqrt[3]{2 \cdot x^3} = \sqrt[3]{2} \cdot x$ luôn đúng với mọi giá trị x .

Bài 2. a) Ta có

$$A = \frac{(x^3-3x-2) + (x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{x^3-3x+2 + (x^2-1)\sqrt{x^2-4}} = \frac{(x+1)^2(x-2) + (x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{(x-1)^2(x+2) + (x^2-1)\sqrt{x^2-4}}.$$

$$\text{Do } x > 2 \text{ nên } A = \frac{(x+1)\sqrt{x-2} \left[(x+1)\sqrt{x-2} + (x-1)\sqrt{x+2} \right]}{(x-1)\sqrt{x+2} \left[(x-1)\sqrt{x+2} + (x+1)\sqrt{x-2} \right]}$$

$$= \frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}} = \frac{(x+1)\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}}{(x-1) \cdot (x+2)}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } B_1 &= \frac{1-ax}{1+ax} = \frac{1-\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1+\sqrt{\frac{2a-b}{b}}} = \frac{\sqrt{-b}-\sqrt{b-2a}}{\sqrt{-b}+\sqrt{b-2a}} \\
 &= \frac{(\sqrt{-b}-\sqrt{b-2a})^2}{-b-(b-2a)} = \frac{-a-\sqrt{b(2a-b)}}{a-b} = \frac{a+\sqrt{b(2a-b)}}{b-a}. \\
 B_2 &= \frac{1+bx}{1-bx} = \frac{1+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}} = \frac{a+\sqrt{b(2a-b)}}{a-\sqrt{b(2a-b)}} = \frac{(\sqrt{b(2a-b)}-a)^2}{(a-b)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = \frac{|\sqrt{b(2a-b)}-a|}{|a-b|}$$

$$B = \frac{a+\sqrt{b(2a-b)}}{b-a} \cdot \frac{|\sqrt{b(2a-b)}-a|}{|a-b|} = \frac{b(2a-b)-a^2}{(b-a)|a-b|} = \frac{-(b-a)^2}{|a-b|(b-a)}.$$

$$\text{Vậy } B = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 2a < b < a < 0 \\ -1 & \text{nếu } a < b < 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) Ta có } C &= \left[\frac{4\sqrt{xy} + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2(x-y)} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x-y} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 1.
 \end{aligned}$$

Vậy $C = 1$ nếu $x > 0$, $y > 0$ và $x \neq y$.

d) Bạn đọc tự giải giống câu b).

Bài 3. Ta có kết quả quen thuộc sau :

$$\text{Nếu } a + b + c = 0, \text{ thì } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc. \quad (*)$$

$$\text{Đặt } (y-z) \cdot \sqrt[3]{1-x^3} = a \quad ; \quad (z-x) \cdot \sqrt[3]{1-y^3} = b \quad ; \quad (x-y) \cdot \sqrt[3]{1-z^3} = c.$$

Từ điều kiện (1) và sử dụng kết quả (*), ta có ngay

$$\begin{aligned} & (y-z)^3(1-x^3) + (z-x)^3(1-y^3) + (x-y)^3(1-z^3) = \\ & = 3(x-y)(y-z)(z-x) \cdot \sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)} \\ & \Rightarrow (y-z)^3 + (z-x)^3 + (x-y)^3 - [(y-z)x]^3 - [y(z-x)]^3 - [z(x-y)]^3 \\ & = 3(x-y)(y-z)(z-x) \cdot \sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}. \quad (2) \end{aligned}$$

Do $(x-y) + (y-z) + (z-x) = 0$, nên

$$\begin{aligned} & (y-z)^3 + (z-x)^3 + (x-y)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x) \\ & \text{và } (y-z)x + y(z-x) + z(x-y) = 0, \text{ nên } ((y-z)x)^3 + (y(z-x))^3 + (z(x-y))^3 = \\ & = 3x(y-z)y(z-x) \cdot z(x-y) = 3xyz(x-y)(y-z)(z-x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Vì vậy } (2) \Leftrightarrow 3(x-y)(y-z)(z-x) - 3xyz(x-y)(y-z)(z-x) = \\ & = 3(x-y)(y-z)(z-x) \cdot \sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)} \\ & \Leftrightarrow 3(1-xyz)(x-y)(y-z)(z-x) = 3(x-y)(y-z)(z-x) \sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)} \\ & \Leftrightarrow 1-xyz = \sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)} \end{aligned}$$

(do x, y, z khác nhau đôi một)

$$\Leftrightarrow (1-xyz)^3 = (1-x^3)(1-y^3)(1-z^3). \text{ Ta có điều phải chứng minh.}$$

$$\text{b) Ta có } 1+x^2 = xy + yz + zx + x^2 = (x+y)(x+z);$$

$$1+y^2 = xy + yz + zx + y^2 = (y+z)(x+y);$$

$$1+z^2 = xy + yz + zx + z^2 = (y+z)(z+x).$$

$$\begin{aligned} A &= x \sqrt{\frac{(y+z)^2(z+x)(x+y)}{(x+y)(x+z)}} + y \sqrt{\frac{(y+z)(x+y)(z+x)^2}{(y+z)(x+y)}} + z \sqrt{\frac{(x+y)^2(x+z)(y+z)}{(y+z)(x+z)}} \\ &= x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có (1)} & \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{y^2z^2}} - \sqrt{\frac{1+y^2}{y^2z^2}} - \sqrt{\frac{1+z^2}{y^2z^2}} + \\ & + \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{z^2x^2}} - \sqrt{\frac{1+z^2}{z^2x^2}} - \sqrt{\frac{1+x^2}{z^2x^2}} + \\ & + \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{x^2y^2}} - \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2y^2}} - \sqrt{\frac{1+y^2}{x^2y^2}} = 0. \end{aligned}$$

Đặt $\frac{1}{x} = x_0$ và $\frac{1}{y} = y_0 : \frac{1}{z} = z_0$, ta có

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \sqrt{(1+x_0^2)(1+y_0^2)} + \sqrt{(1+y_0^2)(1+z_0^2)} + \sqrt{(1+z_0^2)(1+x_0^2)} = \\
 &= \sqrt{y_0^2 z_0^2 + z_0^2} + \sqrt{y_0^2 z_0^2 + y_0^2} + \sqrt{z_0^2 x_0^2 + x_0^2} + \sqrt{x_0^2 z_0^2 + z_0^2} \\
 &+ \sqrt{x_0^2 y_0^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 y_0^2 + y_0^2} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(1+x_0^2)(1+y_0^2)} + \sqrt{(1+y_0^2)(1+z_0^2)} + \sqrt{(1+z_0^2)(1+x_0^2)} \\
 &= (x_0 + y_0)\sqrt{1+z_0^2} + (x_0 + z_0)\sqrt{1+y_0^2} + (y_0 + z_0)\sqrt{1+x_0^2} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Do $x + y + z = xyz \Leftrightarrow x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 = 1$.

Tương tự b) có $1 + x_0^2 = (x_0 + y_0) \cdot (x_0 + z_0) : 1 + y_0^2 = (y_0 + z_0) \cdot (x_0 + y_0) :$

$$1 + z_0^2 = (y_0 + z_0) \cdot (x_0 + z_0).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 \text{Vế phải (2)} &= (x_0 + y_0) \cdot \sqrt{(y_0 + z_0)(x_0 + z_0)} + (z_0 + x_0) \cdot \sqrt{(y_0 + z_0)(x_0 + y_0)} + \\
 &+ (y_0 + z_0) \cdot \sqrt{(x_0 + y_0)(x_0 + z_0)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vế trái (2)} &= \sqrt{(x_0 + y_0)^2 (x_0 + z_0)(y_0 + z_0)} + \\
 &+ \sqrt{(y_0 + z_0)^2 (x_0 + y_0)(x_0 + z_0)} + \sqrt{(z_0 + x_0)^2 (x_0 + y_0)(y_0 + z_0)}.
 \end{aligned}$$

Vậy vế trái (2) bằng vế phải (2). Ta có điều phải chứng minh.

Bài 4. a) Đặt $\sqrt[3]{x} = a; \sqrt[3]{y} = b; \sqrt[3]{z} = c$.

Ta có giả thiết $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$ và

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = \frac{1}{b-c} \times \frac{a}{b-c} + \frac{1}{c-a} \times \frac{b}{c-a} + \frac{1}{a-b} \times \frac{c}{a-b} \\
 &= \frac{1}{b-c} \times \left(\frac{-b}{c-a} - \frac{c}{a-b} \right) + \frac{1}{c-a} \times \left(\frac{-a}{b-c} - \frac{c}{a-b} \right) + \frac{1}{a-b} \times \left(\frac{-a}{b-c} - \frac{b}{c-a} \right) \\
 &= \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{c^2 - bc + ba - a^2}{(b-c)(c-a)(a-b)} + \frac{a^2 - ca + cb - b^2}{(c-a)(a-b)(b-c)} = 0.
 \end{aligned}$$

b) Đặt $\sqrt[3]{x} = a$; $\sqrt[3]{y} = b$; $\sqrt[3]{z} = c$.

Từ (1) và (2) suy ra $ab + bc + ca = 0$. (4)

Mặt khác: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$,

do đó $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1 \cdot (1 - 0)$, hay $1 - 3abc = 1 \Leftrightarrow abc = 0$.

$$1) \text{ Nếu } a = 0 \Rightarrow \begin{cases} b + c = 1 \\ b^2 + c^2 = 1 \\ b^3 + c^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 + 2bc = 1 \Rightarrow 2bc = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ và } c = 1 \\ c = 0 \text{ và } b = 1. \end{cases} \end{cases}$$

2) Nếu $b = 0$, làm tương tự ta có $a = 0$; $b = 0$; $c = 1$, hoặc $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$.

3) Nếu $c = 0$, tương tự có $a = 0$; $b = 1$, $c = 0$, hoặc $a = 1$; $b = 0$, $c = 0$.

Vậy luôn có: $T = 1$ với mọi trường hợp.

$$c) \text{ Ta có } a = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \frac{1}{8} \sqrt{2} \Leftrightarrow (8a + \sqrt{2})^2 = 16 \left(\sqrt{2} + \frac{1}{8} \right)$$

$$\Leftrightarrow 64a^2 + 16a\sqrt{2} + 2 = 16\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow 4a^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{\sqrt{2}(1-a)}{4} \Leftrightarrow a^4 = \frac{2(a^2 - 2a + 1)}{16} = \frac{a^2 - 2a + 1}{8}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } X &= \frac{\sqrt{2}(1-a)}{4} + \sqrt{\frac{a^2 - 2a + 1}{8}} + a + 1 = \frac{\sqrt{2}(1-a)}{4} + \sqrt{\frac{(a+3)^2}{8}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(1-a)}{4} + \frac{a+3}{2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Bài 5.

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{a + 2\sqrt{ab} + 9b}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ba}}{a + 3\sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2 - (2\sqrt[4]{ab})^2}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \sqrt{a} + 3\sqrt{b} + 2\sqrt[4]{ab} - 2\sqrt{b} = (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } x &= \left[3 \cdot \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3} \cdot (\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}} \right]^2 + 2011 \\ &= \left[3 \cdot \frac{(\sqrt{5}-2) \cdot (\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}} \right]^2 + 2011 = 2012. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } \sqrt{t^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \frac{x^2 + 1}{2x} + a^2} = \sqrt{a^2 \left(\frac{x^2 + 1}{2x} + 1 \right)} = \frac{a(x+1)}{\sqrt{2x}}$$

$$\text{và } \sqrt{t^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \frac{x^2 + 1}{2x} - a^2} = \frac{a|x-1|}{\sqrt{2x}} = \frac{a(x-1)}{\sqrt{2x}}, \text{ do } x > 1.$$

$$\text{Vậy } M = \left(\frac{\frac{a(x-1)}{\sqrt{2x}} + \frac{a(x+1)}{\sqrt{2x}}}{\frac{a(x-1)}{\sqrt{2x}} - \frac{a(x+1)}{\sqrt{2x}}} \right)^4 = \left(\frac{2ax}{-2a} \right)^4 = x^4 = 2012^4.$$

Bài 6. a) Ta có $x_n = \left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor \geq 0$ hiển nhiên

$$\text{và } \left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + 1 \Rightarrow x_n \leq 1.$$

Do đó $0 \leq x_n \leq 1$ với mọi n ($n = 0, 1, 2, \dots, 199$). Mặt khác, $x_n \in \mathbb{Z}$ nên x_n chỉ có thể nhận giá trị bằng 0 hoặc bằng 1.

Số các số $x_n \neq 0$ chính là tổng tất cả các số x_n ($n = 0, 1, 2, \dots, 199$).

Ta tính tổng sau :

$$\begin{aligned} A = x_0 + x_1 + \dots + x_{199} &= \left\lfloor \frac{0+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{0}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2}{\sqrt{2}} \right\rfloor \\ &+ \dots + \left\lfloor \frac{198+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{198}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{199+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{199}{\sqrt{2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{200}{\sqrt{2}} \right\rfloor = 141. \end{aligned}$$

Vậy số các số x_n mà $x_n \neq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots, 199$) là 141.

b) Xét $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Ta có

$$a_n = \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt{n} + n \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 \cdot n - n^2(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Cho $n = 1, 2, 3, \dots, 2010$, ta có

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

...

$$\frac{1}{2011 \cdot \sqrt{2010} + 2010 \sqrt{2011}} = \frac{1}{\sqrt{2010}} - \frac{1}{\sqrt{2011}}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{2010} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2011}} \Rightarrow [a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}] = 0.$$

Bài 7. Đặt $\alpha = 5, \underbrace{44\dots4}_{100 \text{ chữ số}}$.

$$\text{Ta có } 0, 11\dots1\dots = \frac{1}{9} \Rightarrow 0, \underbrace{44\dots4}_{100 \text{ chữ số}} = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \cdot 10^{-100}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha} = \sqrt{5 + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \cdot 10^{-100}} = \sqrt{\frac{49}{9} - \frac{4}{9} \cdot 10^{-100}} \approx \frac{7}{3}.$$

Xét hiệu: $\frac{7}{3} - \sqrt{\alpha}$, ta có

$$\frac{7}{3} - \sqrt{\alpha} = \frac{\left(\frac{7}{3} + \sqrt{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{7}{3} - \sqrt{\alpha}\right)}{\frac{7}{3} + \sqrt{\alpha}} = \frac{\frac{4}{9} \cdot 10^{-100}}{\frac{7}{3} + \sqrt{\alpha}} < 10^{-100}.$$

Vậy $\alpha = \sqrt{5, \underbrace{44\dots4}_{100 \text{ chữ số}}}$ chính xác đến 10^{-100} là $\frac{7}{3}$.

$$\text{b) } A = \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{16 - 8\sqrt{2}} + 2}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + 4 - \sqrt{2}}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}} \\
&= \sqrt{6 - 2(\sqrt{3} + 1)} = \sqrt{3} - 1 \approx 1,73205 - 1 = 0,73205.
\end{aligned}$$

Vậy A tính chính xác đến 10^{-5} là 0,73205.

Bài 8. Trước hết, ta chứng minh

$$\begin{cases} (1 - \sqrt{2})^n = \sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2} \\ a^2 - 2b^2 = (-1)^n \end{cases} \quad (*) \quad \text{với } a > 0 \text{ và } b > 0.$$

Thật vậy, (*) đúng với $n = 1$ (lấy $a = b = 1$).

Giả sử (*) đúng với $n = k$ thì

$$\begin{aligned}
(1 - \sqrt{2})^{k+1} &= (1 - \sqrt{2})^k \cdot (1 - \sqrt{2}) = (\sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2})(1 - \sqrt{2}) \\
&= (a - \sqrt{2}b)(1 - \sqrt{2}) = (a + 2b) - (a + b)\sqrt{2} = \sqrt{(a + 2b)^2} - \sqrt{2(a + b)^2}.
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } (a + 2b)^2 = a_1^2 \text{ và } 2(a + b)^2 = 2b_1^2.$$

$$\text{Ta có } (1 - \sqrt{2})^{k+1} = \sqrt{a_1^2} - \sqrt{2b_1^2},$$

$$\text{với } a_1^2 - 2b_1^2 = (a + 2b)^2 - 2(a + b)^2 = -(a^2 - 2b^2) = -(-1)^k = (-1)^{k+1},$$

tức là (*) đúng với $n = k + 1$.

Vậy (*) được chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Xét (*) với n chẵn và n lẻ, ta có điều phải chứng minh.

Bài 9. a) Đặt $\sqrt[3]{a} = x$; $\sqrt[3]{b} = y$; $\sqrt[3]{c} = z$.

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) (x+y+z) = x+y+z$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{xy}{z+x} + \frac{xz}{x+y} + \frac{xy}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{yz}{x+y} + \frac{xz}{y+z} + \frac{yz}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} = x+y+z$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{y(x+z)}{x+z} + \frac{x(y+z)}{y+z} + \frac{z(x+y)}{x+y} = x+y+z$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} = 0, \text{ hay } \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}} + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{a}} + \frac{\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = 0.$$

$$\text{b) Ta có } 3x-1 = \sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^3 = \frac{23+\sqrt{513}}{4} + \frac{23-\sqrt{513}}{4} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{23+\sqrt{513}}{4}\right) \cdot \left(\frac{23-\sqrt{513}}{4}\right)} \cdot (3x-1)$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^3 = \frac{23}{4} \times 2 + 3\sqrt[3]{\frac{23^2-513}{16}} \cdot (3x-1)$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^3 = \frac{23}{2} + 3 \cdot (3x-1)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 3(3x)^2 + 3 \cdot 3x - 1 = \frac{23}{2} + 3(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = \frac{23}{2} + 9x - 3$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 = \frac{23}{2} + 1 - 3 = \frac{23}{2} - 2 = \frac{23-4}{2} = \frac{19}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 = \frac{19}{18}.$$

$$\text{Vậy } 3x^3 - 3x^2 + 2012 = \frac{19}{18} + 2012 = 2013 \frac{1}{18}.$$

Bài 10.

$$\text{a) } \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right) = \left(\sqrt[3]{a+b+c}\right)^3 = a+b+c$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = -c \\ c = -a. \end{cases}$$

Nếu $a = -b$, thì $\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b} + \sqrt[k]{c} = \sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{-a} + \sqrt[k]{c} = \sqrt[k]{c} = \sqrt[k]{a+b+c}$.

Tương tự với $b = -c$ hoặc $c = -a$.

Vậy luôn có : $\sqrt[k]{a+b+c} = \sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b} + \sqrt[k]{c}$ với mọi k lẻ, k nguyên dương.

$$\text{b) Đặt } x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1. \end{cases}$$

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$

$$x_1 S_n = x_1^{n+1} + x_1 x_2^n = x_1^{n+1} + x_1 x_2 \cdot x_2^{n-1}. \quad (*)$$

$$x_2 S_n = x_2^{n+1} + x_2 x_1^n = x_2^{n+1} + x_1 x_2 \cdot x_1^{n-1}. \quad (**)$$

Cộng các vế của (*) và (**), ta có $(x_1 + x_2) S_n = S_{n+1} + x_1 x_2 S_{n-1}$, hay

$$3.S_n = S_{n+1} + S_{n-1} \Leftrightarrow S_{n+1} - 3S_n + S_{n-1} = 0.$$

Với $n = 2011$ ta có $S_{2012} - 3S_{2011} + S_{2010} = 0$, hay $A = 0$.

II.2.2. SỐ HỮU TỈ – SỐ VÔ TỈ – SỐ THỰC

II.2.2.1. Những kiến thức cần nhớ

A. SỐ HỮU TỈ

- x là số hữu tỉ khi và chỉ khi x biểu diễn được dưới dạng một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn, hoặc x biểu diễn bằng $\frac{a}{b}$, ở đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b > 0$.

Tập hợp các số hữu tỉ kí hiệu là $\mathbb{Q}$.

B. SỐ VÔ TỈ

- x là số vô tỉ khi và chỉ khi x biểu diễn được dưới dạng một số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
- Tập hợp các số vô tỉ kí hiệu là $\mathbb{I}$.

C. SỐ THỰC

- x là số thực khi và chỉ khi x là số hữu tỉ hoặc vô tỉ.
- Tập hợp các số thực kí hiệu là $\mathbb{R}$.

Ta có $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R} ; \mathbf{I} \subset \mathbf{R} ; \mathbf{I} \cap \mathbf{Q} = \emptyset$ và $\mathbf{I} \cup \mathbf{Q} = \mathbf{R}$.

Ta có thể chứng minh được định lí sau : Cho $2 \leq n$ và $n \in \mathbf{N}$.

Giả sử a là số tự nhiên, $a \geq 1$, sao cho a không là lũy thừa bậc n của bất kì số tự nhiên nào thì $\sqrt[n]{a}$ là số vô tỉ. Như vậy, $\sqrt[n]{a}$ là số nguyên hoặc $\sqrt[n]{a}$ là số vô tỉ.

II.2.2.2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ là số vô tỉ ;

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})(5 + \sqrt{2})$ là số vô tỉ.

Giải.

Giả sử $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7} = q \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{5} = q - \sqrt{7}$

$$\Rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = (q - \sqrt{7})^2 \Rightarrow 7 + 2\sqrt{10} = q^2 - 2q\sqrt{7} + 7$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{10} + 2q\sqrt{7} = q^2 \Rightarrow \sqrt{10} + q\sqrt{7} = \frac{q^2}{2} \Rightarrow 10 + 2q\sqrt{70} = \frac{q^4}{4} - 7q^2.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{70} = \left(\frac{q^4}{4} - 7q^2 - 10 \right) : 2q. \text{ Điều này vô lí. Vậy } \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7} \notin \mathbf{Q}.$$

b) Tương tự a).

Ví dụ 2. Cho $\alpha = 0,123 \dots 91011 \dots$ Chứng minh rằng α là số vô tỉ.

Giải. Giả sử $\alpha \in \mathbf{Q}$. Thế thì α là số thập phân vô hạn tuần hoàn. Giả sử chu kì của α gồm k chữ số. Xét số 10^{3t} với $t > k$. Khi đó, với t đủ lớn thì toàn bộ k chữ số trong chu kì của α sẽ rơi vào trong $3t$ chữ số 0 của 10^{3t} , nghĩa là k chữ số của chu kì của α đều là 0. Do đó, α là số thập phân hữu hạn, điều này vô lí. Vậy α là số vô tỉ.

Ví dụ 3. Cho $ab \neq 0, a + b \neq 0, a, b \in \mathbf{Q}$. Hỏi các số sau là số hữu tỉ hay số vô tỉ ?

$$\text{a) } x = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} + \frac{\sqrt{2}}{a^4 + b^4}.$$

$$\text{b) } y = \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2}} - \frac{2010}{a+b} \cdot (a^3 - b^3).$$

Giải

a) Ta có : $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|$. (*)

Thật vậy

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{2}{ab} - \frac{2}{a(a+b)} - \frac{2}{b(a+b)} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{ab} - \frac{2}{a(a+b)} - \frac{2}{b(a+b)} = 0 \Leftrightarrow 2(a+b) - 2b - 2a = 0 \text{ (hiển nhiên).} \end{aligned}$$

Vậy x là số vô tỉ.

b) Ta có $\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2}} = \left| a + b - \frac{ab}{a+b} \right|$. (**)

$$\begin{aligned} (**) &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2} = a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2} + 2ab - 2(a+b) \frac{ab}{a+b} \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (hiển nhiên). Vậy y là số hữu tỉ.} \end{aligned}$$

II.2.2.3. Một số bài tập

A. ĐỂ BÀI

Bài 1. Tìm tất cả các số hữu tỉ x để $q = \sqrt{x^2 + 19x + 93}$ là số hữu tỉ.

Bài 2.

a) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $\frac{x}{\sqrt{x+2}}$ là số hữu tỉ.

b) Tìm a, b, c là các số hữu tỉ, đôi một khác nhau sao cho

$$x = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \text{ là số vô tỉ.}$$

Bài 3.

a) Cho $a = \frac{1}{2} \sqrt[3]{72\sqrt{3} + 88\sqrt{2}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

Hỏi $b = 2010a^4 + 2012a^2 + 2014a$ là số hữu tỉ hay vô tỉ ?

Bài 4.

a) Cho $a, b \in \mathbf{Q}$ sao cho $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ đều là số vô tỉ.

Chứng minh rằng : nếu $r, s \in \mathbf{Q}$ thoả mãn $r\sqrt{a} + s\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$ thì $r\sqrt{a} + s\sqrt{b} = 0$.

b) Cho $a = x\sqrt{x} + \sqrt{yx}$ và $b = y\sqrt{y} + \sqrt{xy}$, trong đó $x > 0, y > 0$ và $x, y \in \mathbf{R}$.

Chứng minh rằng : nếu $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbf{Q}$ và $\sqrt{xy} \in \mathbf{Q}$ thì $a + b \in \mathbf{Q}$ và $ab \in \mathbf{Q}$.

Bài 5.

a) Chứng minh rằng : không tồn tại $a, b \in \mathbf{Z}$ sao cho

$$(a + b\sqrt{2010})^2 = 2009 + 2010\sqrt{2010}.$$

b) Cho a, b là hai số hữu tỉ. Biết rằng đa thức

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 2 \text{ có nghiệm là } 1 + \sqrt{3}.$$

Hãy tìm a và b .

Bài 6. Chứng minh rằng :

$$A = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2010^2} + \frac{1}{2011^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2011^2} + \frac{1}{2012^2}} \text{ là một số hữu tỉ.}$$

Bài 7. Tìm $x \in \mathbf{R}$ sao cho $a = x + \sqrt{2}$ và $b = x^3 + \sqrt{2}$ đồng thời là hai số hữu tỉ.

Bài 8.

a) Cho a, b, c là các số nguyên lẻ. Chứng minh rằng không tồn tại số α hữu tỉ nào thoả mãn $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

b) Cho a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng không tồn tại số α hữu tỉ nào thoả mãn $\alpha^2 + 3a\alpha - 3(b^2 + 1) = 0$.

Bài 9. Cho $X = a\sqrt{a} + \sqrt{ab}$ và $Y = b\sqrt{b} + \sqrt{ab}$, ở đó a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng : Nếu $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$ và $\sqrt{ab} \in \mathbf{Q}$ thì $X.Y$ và $X + Y$ cũng thuộc $\mathbf{Q}$.

Bài 10. Chứng minh rằng luôn tìm được vô số bộ ba các số x, y, z hữu tỉ thoả mãn $x^4 + y^4 + z^4 = 2$. (1)

Bài 11. Trên một bảng, người ta viết liên tiếp các số 1, 2, 4 xoá đi hai số a, b bất kì và thay vào đó là các số $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Làm như vậy sau một số lần để trên bảng còn lại ba số vô tỉ $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{3}$ được hay không ?

B. LỜI GIẢI

Bài 1. Giả sử x và q $\in \mathbb{Q}$ suy ra q - x $\in \mathbb{Q}$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 19x + 93} - x = t \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow x^2 + 19x + 93 = (x + t)^2 = x^2 + 2xt + t^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x(19 - 2t) = t^2 - 93 \quad (*)$$

Nếu $19 - 2t = 0$, thì $t^2 = 93$, $t \in \mathbb{Q}$ suy ra vô lí.

$$\text{Vậy có } x = \frac{t^2 - 93}{19 - 2t}, \quad t \in \mathbb{Q}. \quad (2)$$

Ngược lại : Nếu x thoả mãn (2) với $t \neq \frac{19}{2}$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 19x + 93} &= \sqrt{\left(\frac{t^2 - 93}{19 - 2t}\right)^2 + 19\left(\frac{t^2 - 93}{19 - 2t}\right) + 93} \\ &= \sqrt{\frac{(t^2 - 19t + 93)^2}{(19 - 2t)^2}} = \frac{t^2 - 19t + 93}{|19 - 2t|} \end{aligned}$$

thuộc $\mathbb{Q}$ với mọi $t \in \mathbb{Q}$ và $t \neq \frac{19}{2}$.

Vậy tất cả các số hữu tỉ x cần tìm là các số có dạng $x = \frac{t^2 - 93}{19 - 2t}$ với $t \in \mathbb{Q}$

và $t \neq \frac{19}{2}$ và chỉ các số có dạng ấy mà thôi.

Bài 2.

a) Đặt $a = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$, điều kiện : $x > 0$ và $x \in \mathbb{Z}$. Ta có $a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$.

$\sqrt{x} \in \mathbf{Q}$ do đó $\sqrt{x} = \frac{h}{l}$ với $l > 0, h, l \in \mathbf{Z}, \text{ƯCLN}(h, l) = 1$.

$$\sqrt{x} = \frac{h}{l} \Leftrightarrow \frac{h^2}{l^2} \Leftrightarrow h^2 = x.l^2 \Leftrightarrow h^2 : l^2 \text{ mà } \text{ƯCLN}(h, l) = 1$$

$\Rightarrow l = 1$. Từ $l = 1$ ta có $\sqrt{x} = h$, hay $x = h^2, h \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } & \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \\ & + \frac{2}{(a-b)(b-c)} + \frac{2}{(b-c)(c-a)} + \frac{2}{(c-a)(a-b)} \\ & = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{2[(c-a) + (a-b) + (b-c)]}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ & = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} = \left| \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right| \in \mathbf{Q}.$$

Do đó không thể tìm được các số $a, b, c \in \mathbf{Q}$, a, b, c đôi một khác nhau nào để x là số vô tỉ.

Bài 3.

$$\text{a) } a = \frac{1}{2} \sqrt[3]{8(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3} - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra } b = 2010(2\sqrt{2})^4 + 2012(2\sqrt{2})^2 + 2014.2\sqrt{2} \in \mathbf{I}.$$

$$\text{b) Ta sẽ chứng minh } \sqrt[3]{\sqrt{\frac{32}{5}}} - \sqrt{\frac{27}{5}} = \sqrt{\frac{1}{25}} + \sqrt{\frac{3}{25}} - \sqrt{\frac{9}{25}} \quad (*)$$

Thật vậy : Đặt $x = \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$ và $y = \sqrt[5]{3}$. Đẳng thức (*) cần chứng minh tương

$$\text{dương với: } 2x - xy^3 = (x^2 + x^2y - x^2y^2)^3 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x(2 - y^3) = x^6(1 + y - y^2)^3$$

$$\Leftrightarrow (1 + y - y^2)^3 = \frac{2 - y^3}{x^5} = 10 - 5y^3. \quad (2)$$

Ta có (2) hiển nhiên do dùng hằng đẳng thức

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x).$$

Do (*) nên $a = \sqrt[5]{\frac{1}{25}} + \sqrt[5]{\frac{3}{25}}$ và $b = 0 \in \mathbf{Q}$. Vậy b là số hữu tỉ.

Bài 4. Giả sử $r\sqrt{a} + s\sqrt{b} \neq 0$ (*)

$$\text{Ta có: } (r\sqrt{a} + s\sqrt{b})(r\sqrt{a} - s\sqrt{b}) = ar^2 - bs^2$$

$$\Rightarrow r\sqrt{a} - s\sqrt{b} = \frac{ar^2 - bs^2}{r\sqrt{a} + s\sqrt{b}} \in \mathbf{Q}.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} r\sqrt{a} + s\sqrt{b} \in \mathbf{Q} \\ r\sqrt{a} - s\sqrt{b} \in \mathbf{Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\sqrt{a} \in \mathbf{Q} \\ s\sqrt{b} \in \mathbf{Q} \end{cases}.$$

Do $\sqrt{a}, \sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$ nên $r = s = 0$, suy ra $r\sqrt{a} + s\sqrt{b} = 0$ vô lí (trái với (*)).

Vậy $r\sqrt{a} + s\sqrt{b} = 0$.

b) Ta có: $a + b = x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + 2\sqrt{xy}$.

$$a.b = xy\sqrt{xy} + x^2\sqrt{y} + y^2\sqrt{x} + xy = x^2\sqrt{y} + y^2\sqrt{x} + xy + xy\sqrt{xy}.$$

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} \sqrt{xy} \in \mathbf{Q} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbf{Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy \in \mathbf{Q} \\ \sqrt{xy} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \end{cases}.$$

$$\text{Mặt khác: } (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} \in \mathbf{Q} \text{ nên } (x + y) \in \mathbf{Q}$$

$$\text{Suy ra: } (x + y)(x\sqrt{y} + y\sqrt{x}) = x^2\sqrt{y} + y^2\sqrt{x} + xy(\sqrt{x} + \sqrt{y}), \quad (1)$$

theo giả thiết $\sqrt{xy} \in \mathbf{Q}$ và $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbf{Q}$, nên $xy(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \in \mathbf{Q}$.

Từ (1) có ngay $x^2\sqrt{y} + y^2\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow a.b \in \mathbf{Q}$.

Do $(x + y), \sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbf{Q}$,

$$\text{nên } (x + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \in \mathbf{Q}$$

$\Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \in \mathbf{Q}$, tức là $(a + b) \in \mathbf{Q}$.

Vậy $a.b \in \mathbf{Q}$ và $(a + b) \in \mathbf{Q}$.

Bài 5.

$$a) \left(a + b\sqrt{2010}\right)^2 = 2009 + 2010\sqrt{2010}$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab\sqrt{2010} + 2010b^2 = 2009 + 2010\sqrt{2010}$$

$$\Rightarrow a^2 + 2010b^2 - 2009 = (2010 - 2ab)\sqrt{2010}. \quad (1)$$

Nếu $2ab - 2010 = 0 \Rightarrow 2ab = 2010$ vô lí, do đó $(2ab - 2010) \neq 0$ và từ (1),

$$\text{ta có } \frac{a^2 + 2010b^2 - 2009}{2010 - 2ab} = \sqrt{2010}. \quad (*)$$

Mặt khác $\frac{a^2 + 2010b^2 - 2009}{2010 - 2ab} \in \mathbf{Q}$ và $\sqrt{2010} \in \mathbf{I}$, điều này là vô lí.

Vậy không có $a, b \in \mathbf{Z}$ sao cho $a + b\sqrt{2010} = 2009 + 2010\sqrt{2010}$.

b) $x = 1 + \sqrt{3}$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{3})^4 + a(1 + \sqrt{3})^3 + b(1 + \sqrt{3})^2 + 6(1 + \sqrt{3}) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3a + b + 11)\sqrt{3} + (5a + 2b + 18) = 0.$$

Nếu $(3a + b + 11) \neq 0$, thì $\sqrt{3} = -\left(\frac{5a + 2b + 18}{3a + b + 11}\right) \in \mathbf{Q}$. Điều này là vô lí.

$$\text{Do đó } 3a + b + 11 = 0 \text{ và } 5a + 2b + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 1. \end{cases}$$

Bài 6. Bạn đọc tự chứng minh.

Bài 7. Ta có $a = x + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = a - \sqrt{2}$ do $x^3 + \sqrt{2} = (a - \sqrt{2})^3 + \sqrt{2}$

$$\Rightarrow b = a^3 - 3\sqrt{2}a^2 + 6a - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = a^3 + 6a - (3a^2 + 1)\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (3a^2 + 1)\sqrt{2} = a^3 + 6a - b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a^3 - b + 6a}{3a^2 + 1} \quad (*)$$

Từ (*) suy ra vô lí do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ mà $\frac{a^3 - b + 6a}{3a^2 + 1}$ là số hữu tỉ.

Vậy không tìm được giá trị x nào để a và b đều là hai số hữu tỉ.

Bài 8. Giả sử tồn tại $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ sao cho $a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\frac{p}{q} + c = 0$

$$\Leftrightarrow ap^2 = -q(bp + cq) \Rightarrow ap^2 : q \text{ mà } (p, q) = 1 \text{ nên } a : q.$$

$$\text{Tương tự: } cq^2 = -p(ap + bq) \Rightarrow c : p.$$

Do a, c là hai số lẻ nên p và q cũng là hai số lẻ. Vậy $ap^2; bpq; cq^2$ cũng là những số lẻ, và $ap^2 + qbp + q^2c \neq 0$ (mâu thuẫn). Vậy $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$ với mọi $\alpha \in \mathbb{Q}$.

$$b) \text{ Giả sử tồn tại } \alpha \in \mathbb{Q} \text{ sao cho } \alpha^2 + 3a\alpha - 3(b^2 + 1) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = -3a\alpha + 3(b^2 + 1) \Rightarrow \alpha : 3, \text{ hay } \alpha = 3t.$$

$$\text{Thế vào (1), ta có: } 9t^2 + 3a \cdot 3t - 3(b^2 + 1) = 0 \Rightarrow (b^2 + 1) : 3.$$

Nhưng $(b^2 + 1) \not\vdots 3$ với mọi $b \in \mathbb{Z}$ (mâu thuẫn).

Vậy $\alpha^2 + 3a\alpha - 3(b^2 + 1) \neq 0$ với mọi $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Bài 9. Ta có $X + Y = a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + 2\sqrt{ab}$, $X \cdot Y = a^2\sqrt{b} + b^2\sqrt{a} + ab + ab\sqrt{ab}$.

Theo giả thiết

$$\begin{cases} \sqrt{ab} \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{ab} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \in \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \in \mathbb{Q} \\ a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \in \mathbb{Q} \text{ nên } (a + b) \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow (a + b)(a\sqrt{b} + b\sqrt{a}) = a^2\sqrt{b} + b^2\sqrt{a} + ab(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \in \mathbb{Q}.$$

$$\Rightarrow a^2\sqrt{b} + b^2\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \text{ hay } X \cdot Y \in \mathbb{Q}.$$

$$\text{Do } (a + b) : \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \text{ nên } (a + b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \in \mathbb{Q}.$$

$$\text{Mà } (a + b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (a\sqrt{a} + b\sqrt{b}) + (a\sqrt{b} + b\sqrt{a}) \in \mathbb{Q} \text{ và } a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \in \mathbb{Q},$$

$$\text{nên } a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow X + Y = a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + 2\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}.$$

Vậy $X \cdot Y$ và $X + Y$ đều thuộc $\mathbb{Q}$.

Bài 10. Giả sử coi $z = x + y$

$$\begin{aligned} \text{Ta có (1)} &\Leftrightarrow x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2 \\ &\Leftrightarrow 2(x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3) = 2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + xy)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Đặt $y = 1 - tx$. Thay vào (2), ta có

$$x^2 + x(1 - tx) + (1 - tx)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1}. \end{cases}$$

$$\text{Dễ thấy } x = \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} ; y = \frac{1 - t^2}{t^2 - t + 1} ; z = \frac{2t - t^2}{t^2 - t + 1}$$

thoả mãn : $x^4 + y^4 + z^4 = 2$. Chọn $t \in \mathbf{Q}$, t tùy ý.

Vậy luôn tìm được vô số bộ ba các số x, y, z hữu tỉ thoả mãn (1).

Bài 11. Ta có : $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 + b^2$.

Như vậy khi thay hai số a và b bởi hai số $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ thì tổng bình phương của chúng không thay đổi.

Tổng các bình phương của ba số ban đầu $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$.

$$\text{Mà : } (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{3})^2 = 2 + 8 + 27 = 37 \neq 21.$$

Như vậy, không thể làm như trên được để trên bảng còn lại ba số là $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$ và $3\sqrt{3}$.

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

III.1. PHƯƠNG TRÌNH

III.1.1. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Ta gọi hệ thức dạng $A(x) = B(x)$ là phương trình ẩn x . Giải phương trình $A(x) = B(x)$ là tìm mọi giá trị của x để các giá trị tương ứng của hai biểu thức $A(x)$ và $B(x)$ bằng nhau.
- Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm.
- Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax + b = 0$, trong đó x là ẩn, a, b là các số đã cho và $a \neq 0$.
- Khi giải phương trình có hệ số bằng chữ (dạng bậc nhất $ax + b = 0$) thì hệ số a có thể bằng 0.
- Cách giải phương trình $ax + b = 0$. (1)

1) Nếu $a \neq 0$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{-b}{a}$.

2) Nếu $a = 0$ thì (1) có dạng $0x = -b$.

- Nếu $b \neq 0$ thì (1) vô nghiệm.
- Nếu $b = 0$ thì (1) có vô số nghiệm với mọi giá trị x .
- Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc 2) là phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$, (2) trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

Cách giải : Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) được tiến hành như sau :

– Xét $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm kép $x = \frac{-b}{2a}$.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \text{phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt} \begin{cases} x_1 = (-b - \sqrt{\Delta}) : 2a \\ x_2 = (-b + \sqrt{\Delta}) : 2a. \end{cases}$$

III. 1.2. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình :

a) $(x + 1)(2x - 1) - 2x^2 + mx + 2m = 0$;

b) $(m + 4)x + 7m = 1$;

c) $(m + 1)(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x + m)$.

Giải.

a) $(x + 1)(2x - 1) - 2x^2 + mx + 2m = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 - 2x^2 + mx + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + m)x = 1 - 2m \quad (2)$$

1) Nếu $(1 + m) \neq 0$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1 - 2m}{m + 1}$.

2) Nếu $(1 + m) = 0$ thì (2) có dạng $0x = 1 - 2$. $(-1) = 3$. Vậy (1) vô nghiệm.

Đáp số : (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow m = -1$.

$$(2) \text{ có nghiệm duy nhất } \alpha = \frac{1 - 2m}{m + 1} \Leftrightarrow m \neq -1.$$

b) Giải tương tự 2).

c) $(m + 1)(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x + m)$

$$\Leftrightarrow x + m = m + 1, \text{ do } (x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng : Với hai số a, b tùy ý, phương trình

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0 \text{ luôn có nghiệm.}$$

Giải.

1) Nếu $a^2 = b^2$ thì phương trình trên luôn có nghiệm $x = 0$.

2) Nếu $(a^2 - b^2) \neq 0$ thì phương trình trên luôn có nghiệm

$$\text{do } \Delta' = (a^3 - b^3)^2 - (a^2 - b^2)(a^4 - b^4)$$

$$= a^2b^4 - 2a^3b^3 + a^4b^2 = a^2b^2(a-b)^2 \geq 0.$$

Ví dụ 3. Tìm tất cả các cặp $(a; b)$ ($a, b \in \mathbf{R}$) sao cho phương trình $x^2 + ax + b^2 = 0$ và $x^2 + bx + a^2 = 0$ có ít nhất một nghiệm chung.

Giải.

1) Nếu $a \neq b$: giả sử phương trình $x^2 + ax + b^2 = 0$ (1) và $x^2 + bx + a^2 = 0$ (2) có nghiệm chung là x_0 . Ta có: $x_0^2 + ax_0 + b^2 = 0$ (1') và $x_0^2 + bx_0 + a^2 = 0$ (2')

Lấy (1') trừ (2'), ta có $(a-b)x_0 = a^2 - b^2 \Rightarrow x_0 = a+b$ (do $a \neq b$).

Mặt khác, x_0 lại là nghiệm của phương trình (1) nên

$$(a+b)^2 + a(a+b) + b^2 = 0, \text{ hay}$$

$$2a^2 + 3ab + 2b^2 = 2 \cdot \left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{8}b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0 \text{ (vô lí)}.$$

2) Nếu $a = b$ thì cả hai phương trình (1) và (2) đều có dạng $x^2 + ax + a^2 = 0$ (3)

Do (3) có nghiệm nên $\Delta_{(3)} \geq 0$ mà $\Delta_{(3)} = a^2 - 4a^2 = -3a^2 \geq 0 \Rightarrow a = 0$.

Vậy $a = b = 0$.

III.1.3. MỘT SỐ BÀI TẬP

A. Để bài

Bài 1. Giải các phương trình sau :

$$\text{a) } \frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-3}{x-1} = 1 ;$$

$$\text{b) } \frac{2x}{x+a} - \frac{ax-4}{x-a} = \frac{2a(x-2)}{a^2-x^2} ;$$

$$\text{c) } |x^2 - 3x + 7| = 7 ;$$

$$\text{d) } x^2 - 5|x| + 4 = 0.$$

Bài 2. Chứng minh rằng nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) có nghiệm thì phương trình $a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$ (2) cũng có nghiệm.

Bài 3. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba phương trình sau luôn có nghiệm :

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$$

$$bx^2 + 2cx + a = 0 \quad (2)$$

$$cx^2 + 2ax + b = 0 \quad (3)$$

ở đó a, b, c là ba số tùy ý, khác 0.

Bài 4. Cho các phương trình :

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1); \quad x^2 + qx + p = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + (p-2)x + 1 = 0 \quad (3); \quad x^2 + (q-2)x + 1 = 0 \quad (4)$$

Chứng minh rằng : Nếu phương trình (1) và (2) có nghiệm thì một trong các phương trình (3), (4) cũng có nghiệm.

Bài 5. Trên bảng viết đa thức bậc hai $p(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), thay thế đa thức $p(x)$ bằng đa thức $q(x) = \frac{p(x+1) + p(x-1)}{2}$. Chứng tỏ sau một số hữu hạn bước thay thế như trên, ta sẽ nhận được một đa thức bậc hai vô nghiệm.

Bài 6.

a) Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình :

$$a_1) \quad \frac{1}{4}x^2 + \sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}x + [a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c)] = 0 \quad (1)$$

luôn có nghiệm.

$a_2)$ phương trình $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ vô nghiệm.

b) Giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Chứng minh rằng với mọi p, q tùy ý phương trình $p(x-a)(x-c) + q(x-b)(x-d) = 0$ luôn có nghiệm.

Bài 7. Cho hai phương trình : $x^2 + mx + k = 0$ (1) và $x^2 + mx + (k+m) = 0$ (2). Tìm k sao cho với mọi $m \in \mathbb{R}$, ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

Bài 8. Tìm các giá trị của tham số m sao cho phương trình :

a) $|mx + 1| = |x - 2|$ có nghiệm duy nhất ;

b) $x^2 + 2m\sqrt{m+3}x + 4 = 0$ có nghiệm kép ;

c) $(x-1)^2 + (x-1)(x+m) = 0$ có đúng một nghiệm lớn hơn 1.

Bài 9. Giải và biện luận các phương trình sau :

a) $\left| \frac{ax-1}{x-1} \right| = a$, a là tham số cho trước ;

b) $\frac{2x}{x+a} - \frac{ax-4}{x-a} = \frac{2a(x-2)}{a^2-x^2}$.

Bài 10. Tôn tại hay không hai phương trình bậc hai với hệ số nguyên $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $(a + 1)x^2 + (b + 1)x + (c + 1) = 0$ (2) sao cho mỗi phương trình trên đều có nghiệm nguyên.

B. Lời giải

Bài 1. a) Điều kiện $x \neq -2$ và $x \neq 1$.

$$\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-3}{x-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x-1) - (x-3)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 3x + 1) - (x^2 - x - 6) = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 7 = x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3, \text{ thoả mãn điều kiện } x \neq -2 \text{ và } x \neq 1.$$

Đáp số : $x = 3$.

b) Tương tự a).

$$c) \left| x^2 - 3x + 7 \right| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 7 = 7 \\ x^2 - 3x + 7 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x^2 - 3x + 14 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

$$\text{Giải (1), ta có } x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

Giải (2), ta có $x^2 - 3x + 14 = 0$ vô nghiệm.

Đáp số : $x = 0$ hoặc $x = 3$.

$$d) x^2 - 5|x| + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 4 \\ |x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$; $x_4 = -4$.

Đáp số : $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$; $x_4 = -4$.

Bài 2. Nếu $a = 0$ thì (1) có dạng $bx + c = 0$ (*)

Nếu $b \neq 0$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{-c}{b}$ và (2) có nghiệm $x = \frac{-c^3}{b^3}$.

Nếu $a \neq 0$, do phương trình (1) có nghiệm nên $\Delta_{(1)} \geq 0$, tức là $b^2 - 4ac \geq 0$

$$\Leftrightarrow (b^2)^3 \geq 4^3 a^3 c^3 \Leftrightarrow (b^3)^2 \geq 4a^3 c^3 \Leftrightarrow \Delta_{(2)} \geq 0.$$

$\Delta_{(2)} \geq 0$, do vậy (2) luôn có nghiệm.

$$\text{Bài 3. Giả sử các phương trình (1), (2) và (3) đều vô nghiệm} \Rightarrow \begin{cases} b^2 < ac & (*) \\ c^2 < ab & (**) \\ a^2 < bc & (***) \end{cases}$$

Nhân các vế của (*): (**) và (***), ta có $a^2b^2c^2 < (abc)^2 \Rightarrow$ vô lí.

Vậy ít nhất một trong ba phương trình trên phải có nghiệm.

Bài 4. Giả sử phương trình (3) và phương trình (4) đều vô nghiệm. Ta có $\Delta_{(3)} < 0$

$$\text{và } \Delta_{(4)} < 0, \text{ tức là: } \begin{cases} (p-2)^2 - 4 = p^2 - 4p < 0 \\ (q-2)^2 - 4 = q^2 - 4q < 0 \end{cases} \Rightarrow p^2 + q^2 < 4(p+q) \quad (*)$$

Mặt khác: do (1) và (2) cùng có nghiệm nên $\Delta_{(1)} \geq 0$ và $\Delta_{(2)} \geq 0$, hay

$$\begin{cases} p^2 - 4q \geq 0 \\ q^2 - 4p \geq 0 \end{cases} \Rightarrow p^2 + q^2 \geq 4(p+q) \quad (**). \text{ Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra vô lí.}$$

Vậy một trong hai phương trình (3), (4) phải có nghiệm.

Bài 5. Ta có

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{p(x+1) + p(x-1)}{2} = \frac{a(x+1)^2 + b(x+1) + c + a(x-1)^2 + b(x-1) + c}{2} \\ &= ax^2 + bx + c + a. \end{aligned}$$

Như vậy, sau n bước biến đổi như trên, ta sẽ có đa thức $h(x) = ax^2 + bx + c + na$ với $\Delta = b^2 - 4a(c + na) = b^2 - 4ac - 4na^2$.

Ta hoàn toàn có thể chọn được số tự nhiên n đủ lớn sao cho $n > \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, khi đó $\Delta < 0$ và $h(x) = 0$ vô nghiệm.

Bài 6. a)

$a_1)$ Ta có

$$\Delta = \left(\sqrt{2.(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \right)^2 - 4. \frac{1}{4} [a^4 + b^4 + c^4 + abc.(a+b+c)]$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - \left[(a^4 + b^4 + c^4) + abc(a+b+c) \right].$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $a + b > c$

$$\Rightarrow (a-b)^2, (a+b)^2 \geq c^2, (a-b)^2 \Leftrightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq a^2c^2 - 2abc^2 + b^2c^2 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } b^4 - 2b^2c^2 + c^4 \geq a^2b^2 - 2bca^2 + c^2a^2 \quad (2)$$

$$\text{và } a^4 - 2a^2c^2 + c^4 \geq a^2b^2 - 2acb^2 + b^2c^2 \quad (3)$$

Cộng các vế của (1) ; (2) và (3), ta có $\Delta \geq 0$, suy ra phương trình (1) luôn có nghiệm.

$$\begin{aligned} a_2) \text{ Ta có : } \Delta &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 \\ &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - (2bc)^2 = \left[(b+c)^2 - a^2 \right] \left[(b-c)^2 - a^2 \right]. \end{aligned}$$

Do a, b, c là ba cạnh của tam giác nên $(b+c)^2 > a^2$ và $|b-c| < a$

$$\Rightarrow |b-c|^2 = (b-c)^2 < a^2.$$

Vì vậy, $\Delta < 0$, suy ra phương trình $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ vô nghiệm.

$$b) \quad p(x-a)(x-c) + q(x-b)(x-d) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (p+q)x^2 - [p(a+c) + q(b+d)] + (pac + qbd) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ Nếu } (p+q) \neq 0, \text{ ta có } \Delta_{(2)} &= [p(a+c) + q(b+d)]^2 - 4(p+q)(pac + qbd) \\ &= p^2(a+c)^2 + q^2(b+d)^2 + 2pq(a+c)(b+d) - 4pq(ac + bd) - 4p^2ac - 4q^2bd \\ &= p^2(a-c)^2 + q^2(b-d)^2 + 2pq(ab + ad + bc + cd - 2ac - 2bd) \\ &\geq 2|pq|(a-c)(b-d) + 2pq(ab + ad + bc + cd - 2ac - 2bd). \end{aligned}$$

$$1.1) \text{ Nếu } pq \geq 0 \text{ thì } \Delta_{(2)} \geq 2pq \cdot 2(d-a)(c-b) \geq 0$$

$$1.2) \text{ Nếu } pq < 0 \text{ thì } \Delta_{(2)} \geq -2pq \cdot 2(b-a)(d-c) \geq 0.$$

Vậy $\Delta_{(2)} \geq 0$. Do đó, (1) luôn có nghiệm.

2) Nếu $(p+q) = 0$, tương tự, phương trình (1) cũng luôn có nghiệm.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi p, q.

Bài 7. Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_{(1)} = m^2 - 4k \geq 0$.

$$\text{Phương trình (2) có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta_{(2)} = m^2 - 4(k+m) = m^2 - 4k - 4m \geq 0.$$

Xét hai trường hợp :

- Nếu $k \leq 0$ thì $\Delta_{(1)} \geq 0$, $\forall m$ vì vậy (1) luôn có nghiệm với mọi m .
- Nếu $k > 0$ ta có $\Delta_{(1)} < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{k} < m < 2\sqrt{k}$;

$$\Delta_{(2)} < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{4+4k} < m < 2 + \sqrt{4+4k}.$$

Do $2 - \sqrt{4+4k} < 0 < 2\sqrt{k} < 2 + \sqrt{4+4k}$ nên với $m \in (0, 2\sqrt{k})$ thì $\Delta_{(1)} < 0$ và $\Delta_{(2)} < 0$, tức là cả hai phương trình (1), (2) đều vô nghiệm (loại).

Vậy ít nhất một trong hai phương trình (1) và (2) có nghiệm với mọi m là $k \leq 0$.

Bài 8. a) $|mx + 1| = |x - 2| \Leftrightarrow (mx + 1)^2 = (x - 2)^2$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x^2 + 2(m + 2)x - 3 = 0 \quad (1)$$

Ta có phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 1) = 0 \\ \Delta'_{(1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq \pm 1 \\ (m + 2)^2 + 3(m^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Vậy với $m = 1$; $m = -1$; $m = -\frac{1}{2}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

$$\text{b) Phương trình có nghiệm kép} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ (m\sqrt{m+3})^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = 1$ thì phương trình có nghiệm kép $x = -2$.

$$\text{c) } (x - 1)^2 + (x - 1)(x + m) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)[(x - 1) + (x + m)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-m + 1}{2} \end{cases}.$$

Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm lớn hơn 1 $\Leftrightarrow \frac{-m + 1}{2} > 1 \Leftrightarrow m < -1$.

Bài 9.

a) Bạn đọc tự giải.

b) Điều kiện $x \neq \pm a$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x(x-a) - (ax-4)(x+a) + 2a(x-2) = 0 \Leftrightarrow (2-a)x[x+(2+a)] = 0$$

- $a = 0$: phương trình đã cho chỉ có 1 nghiệm $x = -2$.
- $a = 2$: phương trình đã cho có vô số nghiệm là $x \neq \pm 2$.
- $a = -1$: phương trình đã cho chỉ có 1 nghiệm là $x = 0$.

$$\bullet \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{cases} \text{ phương trình đã cho có 2 nghiệm là } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -a-2. \end{cases}$$

Bài 10. Không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn. Giả sử phương trình (1) có 2

nghiệm nguyên m, n , ta có theo viết
$$\begin{cases} m+n = -\frac{b}{a} \\ m.n = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Vậy b và c chia hết cho a . Do a chẵn nên b, c cùng chẵn.

Mặt khác, phương trình (2) có 2 nghiệm nguyên. Gọi 2 nghiệm đó là p, q .

ta có
$$\begin{cases} p+q = \frac{-(b+1)}{a+1} \\ pq = \frac{c+1}{a+1} \end{cases}$$

Do $(b+1); (c+1)$ và $(a+1)$ đều lẻ nên $(p+q)$ và $p.q$ đều lẻ.

$p.q$ lẻ $\Rightarrow p$ lẻ và q lẻ $\Rightarrow (p+q)$ chẵn (trái giả thiết là $(p+q)$ lẻ) $\Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy không thể tồn tại các phương trình thoả mãn các điều kiện của đề bài.

III.2. ĐỊNH LÝ VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

III.2.1. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Định lý Vi-ét thuận :

Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có 2 nghiệm x_1, x_2 thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

• **Định lí Vi-ét đảo :**

Giả sử u và v là hai số thực thoả mãn $\begin{cases} u+v=a \\ u.v=b \end{cases}$ thì u và v là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - ax + b = 0$ với điều kiện $a^2 - 4b \geq 0$.

• Lập phương trình bậc hai với hai nghiệm là hai số α, β cho trước.

Gọi $S = \alpha + \beta$ và $P = \alpha.\beta$ thì α, β là hai nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

III.2.2. MỘT SỐ BÀI TẬP

A. Đề bài

Bài 1. Cho phương trình $x^2 + 2bx + c = 0$ (1) và $x^2 + 2cx + b = 0$ (2) với b, c là các số dương và tích 4 số là các nghiệm của phương trình (1) và (2) bằng 1. Tìm b và c .

Bài 2. Cho phương trình $x^2 + (m^2 + 1)x + m = 2$, với m là tham số. Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho

$$\frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1 x_2 + \frac{55}{x_1 x_2}.$$

Bài 3. Cho phương trình $2x^2 - (m + 1)x - m^2 + m - 1 = 0$. (1)

a) Tìm m để phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu.

b) Gọi 2 nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2 . Tìm m để $(x_1^2 + x_2^2)$ là bé nhất.

Bài 4. Biết rằng phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có nghiệm nguyên x_1 và $|x_1| > 2$. Chứng minh rằng : $(a + b + 1)$ là hợp số.

Bài 5. Tìm m để hai phương trình sau tương đương $x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$ (1) và $x^2 + x + m - 1 = 0$ (2)

Bài 6. Giả sử phương trình $x^2 + px + q = 0$ (1) có các nghiệm đều dương. Chứng minh rằng với mọi $r \geq 0$ phương trình $qy^2 + (p - 2rq)y + 1 - pr = 0$ (2) cũng có các nghiệm đều dương.

Bài 7. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $cx^2 + bx + a = 0$ (2), trong đó $a > c > 0$.

a) Chứng minh rằng chúng cùng vô nghiệm hoặc cùng có nghiệm.

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) ; x_1', x_2' là 2 nghiệm của (2). Chứng minh rằng : $x_1x_2 + x_1'x_2' > 2$.

c) Với giả thiết như câu b) và $x_1 + x_2 > x_1' + x_2'$. Chứng minh rằng $b > 0$.

d) Giả sử (1) và (2) cùng vô nghiệm. Chứng minh rằng : $b < a + c$.

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - (2m + 1)x + 3m - 1 = 0$ (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x = 2$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $2x_1 - 3x_2 = 5$.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m.

Bài 9. Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$ (1), trong đó $p^2 + q^2 = 2010$.

Chứng minh rằng : Nếu phương trình (1) có nghiệm x_1 thì $x_1^2 < 2011$.

Bài 10. Cho hai số u và v thỏa mãn điều kiện
$$\begin{cases} u + v = 2(a + 1) \\ u.v = a^2 - a + 2. \end{cases}$$

Tìm giá trị của a để tổng $(u^2 + v^2)$ nhỏ nhất.

B. Lời giải

Bài 1. Do phương trình (1) và (2) có nghiệm nên $\Delta_{(1)} \geq 0$ và $\Delta_{(2)} \geq 0$, hay $b^2 - c \geq 0$ và $c^2 \geq b$. Mặt khác theo định lí Vi-ét ta có $x_1x_2 \cdot x_3x_4 = c.b = 1$ (ở đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1) và x_3, x_4 là 2 nghiệm của phương trình (2)).

$$\text{Từ } \begin{cases} b^2 \geq c \\ bc = 1 \end{cases} \Rightarrow b^2 \geq \frac{1}{b} \text{ và } \begin{cases} c^2 \geq b \\ bc = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b^2} \geq b.$$

Do đó $b = 1$ và $c = 1$.

Bài 2. Ta có $\Delta = m^4 + 2m^2 - 4m + 9 = m^4 + 2(m - 1)^2 + 7 > 0 \quad \forall m$.

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt. Theo định lí Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m^2 + 1) \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}, \text{ do đó } \frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2) = x_1^2x_2^2 + 55$$

$$\Leftrightarrow 2((m^2 + 1)^2 - 2(m - 2)) + (m^2 + 1) = (m - 2)^2 + 55 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Bài 3. a) Ta có $2.(-m^2 + m - 1) < 0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu với mọi giá trị m .

$$\begin{aligned} \text{b) } x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - 2.(-m^2 + m - 1) \\ &= \frac{m^2 + 2m + 1}{4} + 2m^2 - 2m + 2 = \frac{9m^2 - 6m + 9}{4} \\ &= \frac{(3m-1)^2}{4} + \frac{8}{4} = \frac{(3m-1)^2}{4} + 2 \geq 2. \end{aligned}$$

Vậy $(x_1^2 + x_2^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$.

Bài 4. Gọi 2 nghiệm của phương trình là x_1, x_2 , theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1x_2 = b. \end{cases}$

Do đó $a + b + 1 = x_1x_2 + 1 - x_1 - x_2 = (x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1)$ mà $|x_1| > 1$

$\Rightarrow (a + b + 1)$ là hợp số.

Bài 5. Trường hợp 1: Nếu phương trình là (1) và phương trình (2) đều vô nghiệm

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 4 < 0 \\ 1^2 - 4(m-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m-1 < 2 \\ m > \frac{5}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m > \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 3. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: Nếu phương trình (1) và (2) đều có nghiệm. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1) và x_3, x_4 là 2 nghiệm của phương trình (2) và $S_{(1)} = \{x_1, x_2\}; S_{(2)} = \{x_3, x_4\}$.

$$\text{Ta có } S_{(1)} = S_{(2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \geq 0 \\ \Delta_{(2)} \geq 0 \\ \frac{-(m-1)}{1} = -\frac{1}{1} \\ \frac{1}{1} = \frac{m-1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 4 \geq 0 \\ 1^2 - 4(m-1) \geq 0 \\ m-1 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ không có m nào thoả mãn hệ nên loại.

Vậy phương trình (1) và (2) tương đương $\Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 3$.

Đáp số : $\frac{5}{4} < m < 3$.

Bài 6. Phương trình (1) có 2 nghiệm dương nên

$$\begin{cases} \Delta_1 = p^2 - 4q \geq 0 & (3) \\ p < 0 & (4) \\ q > 0. & (5) \end{cases}$$

Ta có $\Delta_{(2)} = (p - 2rq)^2 - 4q(1 - pr) = p^2 - 4rpq + 4r^2q^2 - 4q + 4rpq$
 $= (p^2 - 4q) + 4r^2q^2 \geq 0$ (do (3)).

Vì $\Delta_{(2)} \geq 0$ nên phương trình (2) có 2 nghiệm là x_3, x_4 .

Theo định lí Vi-ét ta có $x_3x_4 = \frac{1-pr}{q} = \frac{1}{q} + (-p) \cdot \frac{r}{q} > 0$ (do (4), (5) và $r \geq 0$)

$\Rightarrow x_3, x_4$ cùng dấu. Mặt khác $x_3 + x_4 = \frac{-p+2rq}{q} = -p \cdot \frac{1}{q} + 2r > 0$

$\Rightarrow x_3, x_4$ đều dương.

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm đều dương với mọi $r \geq 0$.

Bài 7. a) Ta có $\Delta_{(1)} = \Delta_{(2)} = b^2 - 4ac$.

Do đó (1) và (2) cùng vô nghiệm hoặc cùng có nghiệm.

b) Theo định lí Vi-ét ta có : $x_1x_2 + x_1'x_2' = \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2$.

Do $a > c > 0$ nên dấu bằng không xảy ra. Vì vậy : $x_1x_2 + x_1'x_2' > 2$.

c) Ta có : $x_1 + x_2 > x_1' + x_2' \Leftrightarrow \frac{-b}{a} > \frac{-b}{c} \Leftrightarrow \frac{b}{a} < \frac{b}{c}$

$\Leftrightarrow b\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) > 0 \Leftrightarrow b > 0 \left(\text{do } \frac{1}{c} - \frac{1}{a} > 0 \right)$.

d) Do phương trình (1) và phương trình (2) cùng vô nghiệm nên

$\Delta_{(1)} = \Delta_{(2)} = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow b^2 < 4ac < (a+c)^2 \Rightarrow b < a+c$.

Bài 8.

a) Do $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1) nên

$$2^2 - (2m + 1) \cdot 2 + 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

b) Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 4(3m - 1) \geq 0, \forall m$, hiển nhiên.

Theo định lí Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = (2m + 1) & (*) \\ x_1 x_2 = 3m - 1 & (**) \end{cases}$$

Kết hợp (*) và giả thiết $2x_1 - 3x_2 = 5$, ta có hệ sau :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = (6m + 8) : 5 \\ x_2 = (4m - 3) : 5. \end{cases}$$

Mặt khác $x_1 x_2 = 3m - 1$, nên có : $\frac{6m + 8}{5} \times \frac{4m - 3}{5} = 3m - 1$

$$\Leftrightarrow (6m + 8)(4m - 3) = 25 \cdot (3m - 1)$$

$$\Leftrightarrow 24m^2 + 14m - 24 = 75m - 25$$

$$\Leftrightarrow 24m^2 - 61m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = (61 + \sqrt{3625}) : 48 \\ m_2 = (61 - \sqrt{3625}) : 48. \end{cases}$$

c) Theo định lí Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = 3m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_1 + x_2) = 6m + 3 \\ -2x_1 x_2 = -6m + 2. \end{cases}$$

Suy ra $3(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 = 5$. Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m là $3x_1 + 3x_2 - 2x_1 x_2 - 5 = 0$.

Bài 9. x_1 là nghiệm của phương trình (1) $\Rightarrow x_1^2 + px_1 + q = 0 \Rightarrow x_1^2 = -(px_1 + q)$

$$\Rightarrow (x_1^2)^2 = (-(px_1 + q))^2 = (px_1 + q)^2 \leq (p^2 + q^2)(x_1^2 + 1) = 2010(x_1^2 + 1)$$

$$\Rightarrow x_1^4 \leq 2010(x_1^2 + 1) \Rightarrow x_1^4 - 1 < 2010(x_1^2 + 1)$$

$$\Rightarrow x_1^4 - 2010x_1^2 - 2011 < 0 \Rightarrow (x_1^2 + 1)(x_1^2 - 2011) < 0 \Rightarrow x_1^2 < 2011.$$

Bài 10. Ta có :
$$\begin{cases} u+v=2(a+1) \\ u.v=a^2-a+2 \end{cases} \quad (*)$$

Hệ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow (2(a+1))^2 - 4(a^2 - a + 2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + 2a + 1) - 4a^2 + 4a - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 12a - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{3}.$$

Ta có : $X = u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv = 4(a+1)^2 - 2(a^2 - a + 2)$

$$= 4a^2 + 8a + 4 - 2a^2 + 2a - 4 = 2a^2 + 10a \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \frac{1}{3} \left(\text{do } a \geq \frac{1}{3}\right).$$

Vậy $X = u^2 + v^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{32}{9}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$.

III.3. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỤC

- Phương trình bậc cao.
- Phương trình có các biểu thức chứa căn thức.
- Phương trình có chứa ẩn ở mẫu số.

III.3.1. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Giải các phương trình bậc cao, phương trình có các biểu thức chứa căn thức, trong giới hạn của chương trình trung học cơ sở, người ta thường dùng các phương pháp chủ yếu sau :
 - Phân tích đa thức ra thừa số để đưa về giải các phương trình bậc nhất, bậc hai.
 - Đánh giá, so sánh, đặt ẩn phụ.
 - Chứng minh duy nhất nghiệm, hằng đẳng thức, bất đẳng thức, tam thức bậc hai.
 - Đưa về giải hệ phương trình.
- Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu :
 - Đặt điều kiện đối với ẩn số ở mẫu số để mẫu số khác 0.

- Phân tích, biến đổi đưa phương trình đã cho về phương trình đã biết cách giải.
- Giải các phương trình nhận được và loại đi các nghiệm làm mẫu số bằng 0.
- Kết luận nghiệm của phương trình đã cho.
- Giải các phương trình có chứa ẩn dưới dấu căn.
 - Trước hết, ta thực hiện các phép biến đổi đại số để đưa về các dạng sau :

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^{2n} \end{cases}$$

$$\sqrt[n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^{2n+1}$$

Chú ý. Khi giải phương trình cần cố gắng thực hiện các phép biến đổi tương đương. Nếu không biến đổi tương đương thì cuối bài giải, ta phải thử lại nghiệm.

III.3.2. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

a) $x^3 - 2x + 2 - x^2 = 0$;

b) $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2 = 0$

c) $x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = 0$;

d) $(x+2)^4 + (x+4)^4 = 706$.

Giải.

a) $x^3 - 2x + 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) - (x^2 - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm : $x_1 = 1$; $x_2 = \sqrt{2}$ và $x_3 = -\sqrt{2}$.

b) $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + \sqrt{2} = 0 \text{ vô nghiệm} \\ x^2 + x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2} \\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

c) Rõ ràng $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

$$\text{Xét } x \neq 0, \text{ ta có : } x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 24 = 0.$$

$$\text{Đặt } y = x + \frac{1}{x}, \text{ ta có (1) } \Leftrightarrow y^2 + 10y + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = -4 \\ x + \frac{1}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 1 = 0 \\ x^2 + 6x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} \\ x_{3,4} = -3 \pm 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm

$$x_1 = -2 + \sqrt{3}; \quad x_2 = -2 - \sqrt{3}; \quad x_3 = -3 + 2\sqrt{2}; \quad x_4 = -3 - 2\sqrt{2}.$$

Ghi chú.

Phương trình (1) ở trên có thể giải ở dạng tổng quát như sau :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0) \quad (*)$$

Cách giải.

- Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của (*), do đó $x \neq 0$.
- Chia 2 vế của (*) cho x^2 .
- Đặt $x + \frac{1}{x} = t$.
- Quy phương trình (*) về phương trình bậc 2 theo biến t .

$$\text{d) } (x + 2)^4 + (x + 4)^4 = 706 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } y = x + 3 \Rightarrow x + 2 = y - 1 \text{ và } x + 4 = y + 1.$$

$$(1) \Leftrightarrow (y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 706$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 + y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 706$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 + 2 - 706 = 0 \Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 - 704 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } y^2 = t \quad (t \geq 0)$$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 + 6t - 352 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -3 + \sqrt{361} = 16 \\ t_2 = -3 - \sqrt{361} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

$$t = 16 \Leftrightarrow y^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 4 \\ x + 3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -7. \end{cases}$$

Đáp số : Phương trình có 2 nghiệm $x = 1, x = -7$.

Ghi chú. Phương trình (1) trên có thể giải ở dạng tổng quát sau :

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = m \quad (*)$$

$$\text{Cách giải. Đặt } t = x + \frac{a+b}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + a = t + \frac{a-b}{2} \\ x + b = t + \frac{b-a}{2}. \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \left(t + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(t + \frac{b-a}{2}\right)^4 = m \quad (**)$$

Biến đổi đưa phương trình (**) về dạng $t^4 + qt^2 + p = 0$ đã biết cách giải.

Ví dụ 2. Giải phương trình :

$$a) 2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0 ;$$

$$b) \sqrt{x-2009} + \sqrt{2011-x} = x^2 - 4020x + 4040102 ; \quad (*)$$

$$c) (x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 8.$$

Giải.

$$a) \text{ Đặt } \sqrt[3]{4x-4} = t \Leftrightarrow t^3 = 4x-4 \Leftrightarrow t^3 + 4 = 4x.$$

Phương trình $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0$ trở thành $t^6 - 14t^3 - 24t + 96 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2(t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 18t + 24) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ (t^2 + 2t)^2 + 2\left(2t + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{111}{8} = 0 \text{ vô nghiệm.} \end{cases}$$

Với $t = 2 \Rightarrow x = 3$.

Đáp số : Phương trình có nghiệm $x = 3$.

b) TXĐ : $2009 \leq x \leq 2011$.

Ta có $VP_{(*)} = (x - 2010)^2 + 2 \geq 2$.

Mặt khác

$$\left[\left(\sqrt{x-2009} \right)^2 + \left(\sqrt{2011-x} \right)^2 \right] \left[1^2 + 1^2 \right] \geq \left(\sqrt{x-2009} + \sqrt{2011-x} \right)^2$$

$$= (VT(*))^2 \Rightarrow VT(*) \leq 2.$$

Ta có : $VT(*) \leq 2, VP(*) \geq 2 \Rightarrow VT(*) = VP(*) = 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2010$.

Đáp số : Phương trình có nghiệm $x = 2010$.

$$c) (x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 8 \Leftrightarrow (x^2+9x+18)(x^2+9x+20) = 8$$

Đặt $x^2+9x+18 = t$ ($t > 0$).

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow t.(t+2) = 8 \Leftrightarrow t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -4 \text{ (loại)} \\ t_2 = 2. \end{cases}$$

$$t = 2 \Leftrightarrow x^2+9x+16=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-9+\sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{-9-\sqrt{17}}{2}. \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x = \frac{-9+\sqrt{17}}{2}$ và $x = \frac{-9-\sqrt{17}}{2}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$a) \frac{x^2-1}{x^2-4} - \frac{(2x+1)}{2-x} = \frac{-(3x+1)}{2+x} \quad (1)$$

$$b) x-1 = \sqrt{x^2+x+2} \quad (2)$$

$$c) \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \right) x - x^3 = -4 \quad (3)$$

Giải.

a) Điều kiện : $x \neq \pm 2$.

$$(1) \Leftrightarrow (x^2-1) + (2x+1)(x+2) + (3x+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ x_2 = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \neq \pm 2).$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1 = \frac{-\sqrt{6}}{6}$ và $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

$$b) \sqrt{x^2 + x + 2} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + x + 2 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

$$c) \text{ Đặt } \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} \right) = u$$

$$\Leftrightarrow u^3 = 14 - 3\sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 49} \cdot u \Leftrightarrow u^3 = 14 - 3u$$

$$\Leftrightarrow u^3 + 3u - 14 = 0 \Leftrightarrow u = 2$$

$$(3) \Leftrightarrow 2x - x^3 = -4 \Leftrightarrow x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$.

III.3.3. MỘT SỐ BÀI TẬP

A. Để bài

Bài 1. Giải các phương trình sau :

$$a) -2x^4 + 5x^3 + 21x^2 + 19x + 5 = 0 \quad (1)$$

$$b) (x + 2)^2 + (x + 3)^3 + (x + 4)^4 = 2 \quad (2)$$

Bài 2.

a) Tìm m sao cho phương trình $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ mà $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$.

b) Cho phương trình : $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = m$ (1)

b1) Giải phương trình với $m = 24$.

b2) Tìm m để (1) có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 đều khác không. Tính tổng

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \text{ theo } m.$$

Bài 3.

a) Tìm m để phương trình $x^3 - (3+m)x^2 + (3m+2)x - 2m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

b) Giải và biện luận phương trình sau :

$$-2x^3 + (3-2m)x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

c) $|x^3 - 16\sqrt{2}| + x^2 - 8 = 0$ với $x > 3$.

Bài 4.

a) Với những giá trị nào của a phương trình :

$$x^3 - x = a(x^3 + x)$$

có đúng 3 nghiệm.

b) Với giá trị nào của a , tích các nghiệm của phương trình

$$(x+2a)(x^2 - a^2 - 2a - 1) = 0$$

nhỏ hơn nghiệm nhỏ nhất của phương trình này.

Bài 5. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$;

b) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$;

c) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$;

d) $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$;

e) $\sqrt{x^2-1} = 2(x-2)$;

f) $|x^2 - 2x - 3| = 2x + 2$;

g) $\sqrt{(2x+1)(x+1)+81} = -2x^2 - x + 7$;

h) $|x+1| + |x-1| = |x-2|$ với $-2 \leq x \leq 2$.

Bài 6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất.

a) $(m^2 - 1)x = 7x + m + 1$;

b) $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2m\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = m^3$. (*)

Bài 7. Giải phương trình : $|x^4 - 1| + |a(x^2 + 1)| = 0$ (*)

Bài 8. Giải phương trình : $(x - 30010) \cdot \sqrt{2x - a} = 0$ (*)

Bài 9.

a) Tìm các nghiệm hữu tỉ của phương trình : $x + \sqrt{2010} = \sqrt{2010} \cdot x + a^3$
với $a \in \mathbb{Q}$, a là tham số.

b) Tìm các nghiệm không phải là hữu tỉ của phương trình :

$$|x - 2010|^{2011} + |x - 2011|^{2010} = 1 \quad (*)$$

Bài 10. Biết rằng một trong các nghiệm của phương trình $x^{12} - abx + a^2 = 0$ lớn hơn 2. Tìm tất cả các giá trị a sao cho $|b| > 64$.

Bài 11. Giải phương trình : $2xy - \sqrt{x^2y - \frac{x^2}{4}} - 2\sqrt{y^2x - y^2} = 0. \quad (1)$

Bài 12. Giải các phương trình :

a) $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right] = 2 + \sqrt{1 - x^2} ;$

b) $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0.$

Bài 13. Giải phương trình

a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x+34} - \sqrt{x+7} ;$

b) $(a-x)^3 = a-x$, ở đó a là tham số cho trước ;

c) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3.$

Bài 14. Giải phương trình :

a) $\frac{\sqrt{3x-2}}{x} = \frac{x}{1-x} ;$

b) $\sqrt{11x^2 - 14x + 9} + \sqrt{11x^2 - 2x + 3} + \sqrt{17x^2 + 2x + 3} = \sqrt{2} \cdot (2x + 4).$

Bài 15. (Một số bài giải phương trình trích từ các đề thi vào trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam, Chu Văn An (Hà Nội) và khối chuyên ĐHQG, ĐHSP Hà Nội).

a) Giải phương trình : $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4.$

(Đề thi vào khối chuyên trường ĐHQG Hà Nội năm học 1998 – 1999)

b) Giải phương trình : $\frac{x^2}{(x+2)^2} = 3x^2 - 6x - 3. \quad (1)$

(Đề thi vào khối chuyên ĐHSP Hà Nội, vòng 1 năm học 2007 – 2008)

c) Giải phương trình : $10\sqrt{x^6+1} = 3(x^4+2). \quad (1)$

(Đề thi vào trường THPT Chu Văn An Hà Nội và THPT chuyên Hà Nội Amsterdam, năm học 2001 – 2002)

B. Lời giải

Bài 1. a) $-2x^4 + 5x^3 + 21x^2 + 19x + 5 = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (x+1)^2(x^2-9x-5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2-9x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{9+\sqrt{101}}{2} \\ x=\frac{9-\sqrt{101}}{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là : $x = -1$; $x = \frac{9+\sqrt{101}}{2}$; $x = \frac{9-\sqrt{101}}{2}$.

b) Đặt $t = x + 3$

$$(2) \Leftrightarrow (t-1)^2 + t^3 + (t+1)^4 = 2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 + t^3 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 5t^3 + 7t^2 + 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t^3+5t^2+7t+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ t=\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình (2) có các nghiệm là :

$$x = -3 ; x = -5 ; x = \frac{-9+\sqrt{5}}{2} ; x = \frac{-9-\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 2. Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$), ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - (3m+2)t + m^2 = 0 \end{cases}$ (2)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm

$$\text{duy nhất phân biệt : } \begin{cases} \Delta_{(2)} = 5m^2 + 12m + 4 > 0 \\ P = m^2 > 0 \\ S = 3m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > \frac{-2}{5} \\ m \neq 0. \end{cases} \quad (*)$$

Gọi 2 nghiệm của (2) là $0 < t_1 < t_2$ thế thì 4 nghiệm của (1) là

$$x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}.$$

$$\text{Ta có } x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 \Leftrightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1.$$

$$\text{Theo định lí Vi-ét } \begin{cases} t_1 + t_2 = 3m + 2 \\ t_1 t_2 = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10t_1 = 3m + 2 \\ 9t_1^2 = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3m+2}{10} \\ 9t_1^2 = m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3m+2}{10} \\ 9(3m+2)^2 = 100m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3m+2}{10} \\ 19m^2 - 108m - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{6}{19} \\ m = 6 \end{cases}$$

thoả mãn điều kiện (*).

Vậy với $m = -\frac{6}{19}$ hoặc $m = 6$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm thoả mãn các điều kiện của đề bài.

b) Ta có

$$\text{b1) (1) } \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 24 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } x^2 - 5x + 4 = t.$$

$$(1) \Leftrightarrow t(t+2) - 24 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 4 \\ x^2 - 5x + 6 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \\ x^2 - 5x + 12 = 0 \text{ vô nghiệm.} \end{cases}$$

Vậy (1) có các nghiệm là $x = 0$ và $x = 5$.

$$\text{b2) Đặt } u = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \quad (u \geq 0).$$

$$(1) \Leftrightarrow \left(u - \frac{9}{4}\right) \cdot \left(u - \frac{1}{4}\right) - m = 0 \Leftrightarrow u^2 - \frac{5}{2}u + \frac{9}{16} - m = 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm khác

$$\frac{25}{4} \text{ và dương } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} \geq 0 \\ \frac{5}{2} > 0 \\ \frac{9}{16} - m > 0 \\ \left(\frac{25}{4}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{25}{4} + \frac{9}{16} - m \neq 0. \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử phương trình $x^2 - 5x + \frac{25}{4} - u_1 = 0$ (3) có 2

nghiệm x_1, x_2 và phương trình $x^2 - 5x + \frac{25}{4} - u_2 = 0$ (4) có 2 nghiệm x_3, x_4 .

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_3 + x_4}{x_3 x_4}.$$

Áp dụng định lý Vi-ét cho các phương trình (2); (3); (4), ta có :

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = \frac{5}{2} \\ u_1 u_2 = \frac{9}{16} - m \end{cases} ; \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = \frac{25}{4} - u_1 \end{cases} ; \begin{cases} x_3 + x_4 = 5 \\ x_3 x_4 = \frac{25}{4} - u_2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{5}{\frac{25}{4} - u_1} + \frac{5}{\frac{25}{4} - u_2} = \frac{5 \left[\frac{25}{2} - (u_1 + u_2) \right]}{\left(\frac{25}{4} - u_1 \right) \cdot \left(\frac{25}{4} - u_2 \right)} \\ &= \frac{5 \left(\frac{25}{2} - \frac{5}{2} \right)}{\frac{625}{16} - \frac{25}{4} (u_1 + u_2) + u_1 u_2} = \frac{50}{\frac{625}{16} - \frac{25}{4} \cdot \frac{5}{2} + \frac{9}{16} - m} = \frac{50}{24 - m}. \end{aligned}$$

Bài 3.

$$a) x^3 - (3+m)x^2 + (3m+2)x - 2m = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-m)(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = m. \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2. \end{cases}$

b) Coi (1) là phương trình theo m, ta có

$$m^2 - 2(x^2 - x)m + (3x^2 - 2x^3 - 1) = 0$$

$$\Delta' = (x^2 - x)^2 - (3x^2 - 2x^3 - 1) = (x^2 - 1)^2$$

Do đó
$$\begin{cases} m = x^2 - x - (x^2 - 1) = 1 - x \\ m = x^2 - x + (x^2 - 1) = 2x^2 - x - 1. \end{cases}$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - m & (*) \\ 2x^2 - x - (m + 1) = 0 & (**) \end{cases}$

Ta giải phương trình $2x^2 - x - (m + 1) = 0 \quad (**)$

$$\Delta_{(**)} = 1 + 8(m + 1) = 8m + 9.$$

- $m < -\frac{9}{8}$: phương trình (**) vô nghiệm.

- $m = -\frac{9}{8}$: phương trình (**) có nghiệm kép.

- $m > -\frac{9}{8}$: phương trình (**) có 2 nghiệm phân biệt
$$\begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{8m + 9}}{4} \\ x = \frac{1 + \sqrt{8m + 9}}{4} \end{cases}$$

Ta có phương trình (*) và (**) có nghiệm chung

$$\Leftrightarrow 2(1 - m)^2 - (1 - m) - (m + 1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2. \end{cases}$$

Vậy :

- $m < -\frac{9}{8}$: phương trình (1) có nghiệm $x = 1 - m$.

- $m = -\frac{9}{8}$: phương trình (1) có nghiệm
$$\begin{cases} x_1 = 17 : 8 \\ x_2 = 1 : 4. \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} m > \frac{-9}{8} \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} : \text{phương trình (1) có nghiệm} \begin{cases} x_1 = 1 - m \\ x_2 = \left(1 - \sqrt{8m+9}\right); 4 \\ x_3 = \left(1 + \sqrt{8m+9}\right); 4. \end{cases}$$

$$\bullet m = 0 : \text{phương trình (1) có nghiệm} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-1}{2}. \end{cases}$$

$$\bullet m = 2 : \text{phương trình (1) có nghiệm} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$c) \text{ Với } x > 3 \text{ thì } x^3 > 16\sqrt{2} \Rightarrow \left| x^3 - 16\sqrt{2} \right| = x^3 - 16\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } \left| x^3 - 16\sqrt{2} \right| + (x^2 - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{2})(x^2 + 2\sqrt{2}x + 8 + x + 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ x^2 + (2\sqrt{2} + 1)x + 8 + 2\sqrt{2} = 0 \text{ (vô nghiệm)}. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2\sqrt{2}$.

Bài 4.

$$a) x^3 - x - ax^3 - ax = 0 \Leftrightarrow (1-a)x^3 - (1+a)x = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = a(x^2 + 1) \Leftrightarrow (a-1)x^2 = -(a+1). \end{cases}$$

- Nếu $a = 1$ thì (2) vô nghiệm. Vậy phương trình (1) chỉ có một nghiệm là $x = 0$.

- Nếu $a \neq 1$ thì $x^2 = \frac{a+1}{1-a}$. Dễ thấy (1) có 3 nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{a+1}{1-a} > 0 \Leftrightarrow -1 < a < 1.$$

b) Dễ thấy phương trình có 3 nghiệm là $x_1 = -2a$; $x_2 = a + 1$ và $x_3 = -(a + 1)$.
 Tích của 3 nghiệm đó là $2a(a + 1)^2$. So sánh các giá trị nhận được, ta thấy x_1 là nghiệm nhỏ nhất nếu $a > 1$, x_2 nhỏ nhất nếu $a < -1$ và x_3 nhỏ nhất nếu $-1 < a < 1$. Khi $a = 1$ thì $x_1 = x_3$, $a = -1$ thì $x_2 = x_3$.

Vậy ta có các hệ sau :

- $\begin{cases} a < -1 \\ 2a(a+1)^2 < a+1 \end{cases} \Rightarrow a < -\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$
- $\begin{cases} -1 \leq a < 1 \\ 2a(a+1)^2 < -(a+1) \end{cases}$ hệ vô nghiệm.
- $\begin{cases} a > 1 \\ 2a(a+1)^2 < -2a \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Đáp số : $a < -\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$

Bài 5. Đặt $\sqrt[3]{x+34} = u$ và $\sqrt[3]{x-3} = v$, ta có $\begin{cases} u^3 - v^3 = 37 \\ u - v = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u - v)(u^2 + uv + v^2) = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 1 \\ (v + 1)^2 + v(v + 1) + v^2 = 37 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 1 \\ v^2 + v - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3 \\ v = -4 \\ u = 4 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+34} = -3 \\ \sqrt[3]{x+34} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -61 \\ x = 30. \end{cases}$$

b) Đặt $y = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow y^3 = 2x-1 \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x.$

$$\text{Ta có : } x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ x^3 - y^3 + 2(x - y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ (x - y)(x^2 - xy + y^2 + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm : $x_1 = 1$; $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

c) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$ (*). Lập phương 2 vế, ta có

$$(*) \Leftrightarrow (x-1) + (x-2) + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)} \cdot (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 2x-3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)(x-2)} \cdot (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x - 1 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình (*) có 3 nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{3}{2}$.

d) $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$. Điều kiện : $x \geq -5$.

$$\text{Đặt } y = \sqrt{x+5} \ (y \geq 0) \Leftrightarrow y^2 - x = 5.$$

$$\text{Ta có : } x^2 + \sqrt{x+5} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y = 5 \\ y^2 - x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y = 5 \\ (x+y)(x-y+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5; y \geq 0 \\ y = -x \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 0 \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 0 \\ x_1 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5; y \geq 0 \\ y = x + 1 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ (loại)} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \text{ (thỏa mãn).} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$; $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

$$c) \sqrt{x^2 - 1} = 2(x - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 1 = 4(x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 1 = 4(x^2 - 4x + 4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x^2 - 16x + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x_1 = \frac{8 + \sqrt{13}}{3} \\ x_2 = \frac{8 - \sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

Để thấy $x_1 > 2$ thỏa mãn, $x_2 < 2$ (loại).

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{8 + \sqrt{13}}{3}$.

f) $|x^2 - 2x - 3| = 2x + 2$ (*). Điều kiện: $x \geq -1$.

$$(*) \Leftrightarrow |(x+1)(x-3)| = 2(x+1) \Leftrightarrow |x+1||x-3| = 2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \cdot |x-3| - 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)[|x-3| - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ |x-3|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=5 \\ x=1. \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = 1$ và $x_3 = 5$.

$$\begin{aligned} \text{g) Ta có: } -2x^2 - x + 7 &= -2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right) \\ &= -2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{7}{2}\right] = -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{57}{8} \leq \frac{57}{8}. \end{aligned}$$

Ta có vế trái luôn nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{57}{8} < 8$.

$$\sqrt{(2x+1)(x+1)+81} = \sqrt{2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} + 81} > 8.$$

Do đó vế phải luôn lớn hơn 8.

Vậy phương trình $\sqrt{(2x+1)(x+1)+81} = -2x^2 - x + 7$ vô nghiệm.

$$\text{h) } |x+1| + |x-1| = |x-2| \quad (*) \quad \text{với } -2 \leq x \leq 2$$

$$1) \text{ Nếu } -2 \leq x \leq -1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow -(x+1) - (x-1) = 2-x$$

$$\Leftrightarrow -2x = 2-x \Leftrightarrow x = -2 \text{ thoả mãn.}$$

$$2) \text{ Nếu } -1 \leq x \leq 1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow (x+1) - (x-1) = 2-x \Leftrightarrow x = 0 \text{ thoả mãn.}$$

$$3) \text{ Nếu } 1 \leq x \leq 2 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow (x+1) + (x-1) = 2-x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ (loại).}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1 = -2$ và $x_2 = 0$.

Bài 6.

$$\text{a) } (m^2 - 1)x = 7x + (m + 1) \Leftrightarrow (m^2 - 8)x = (m + 1).$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m^2 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{8}$.

b) Giả sử x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình (*).

Do $1 - (1 - x) = x$ nên $1 - x_0$ cũng là nghiệm của (*).

$$\text{Suy ra } x_0 = 1 - x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} + 2m\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} - 2\sqrt[4]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = m^3 \Rightarrow m = m^3 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

Thứ lại :

$$m = 0, (*) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = 0, \text{ điều kiện } 0 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ thoả mãn.}$$

$$m = -1, (*) \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x} \right)^2 + \left(\sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ thoả mãn.}$$

$$m = 1, (*) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = 1. \quad (*)$$

Dễ thấy $x = 0$ và $x = 1$ là nghiệm của (*)

$\Rightarrow$ (*) không phải là có nghiệm duy nhất (loại).

$$\text{Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất } \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1. \end{cases}$$

$$\text{Bài 7. Ta có: } |x^4 - 1| + |a(x^2 + 1)| = 0 \quad (*)$$

$$\begin{cases} |x^4 - 1| = 0 \\ |a(x^2 + 1)| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 1 = 0 \\ |a| = 0. \end{cases}$$

Nếu $a = 0$, phương trình (*) có nghiệm $x = \pm 1$.

Nếu $a \neq 0$, phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = 1$ nếu $a = 0$, phương trình vô nghiệm nếu $a \neq 0$.

$$\text{Bài 8. Điều kiện } x \geq \frac{a}{2}.$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30010 \\ \sqrt{2x-a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30010 \\ x = \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Vậy : Nếu $30010 > \frac{a}{2}$ thì phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 30010$; $x_2 = \frac{a}{2}$.

Nếu $30010 = \frac{a}{2}$ thì phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{a}{2} = 30010$.

Nếu $30010 < \frac{a}{2}$ thì phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{a}{2}$.

Bài 9.

$$a) \quad x + \sqrt{2010} = \sqrt{2010} \cdot x + a^3 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{2010} = x - a^3 \quad (**)$$

Do $x \in \mathbf{Q}$ và $a \in \mathbf{Q}$ nên vế phải của phương trình (**) chỉ nhận các giá trị hữu tỉ.

Nếu $x \neq 1$ thì $(**) \Leftrightarrow \sqrt{2010} = \frac{x - a^3}{x - 1} \Rightarrow$ vô lí, vì $\sqrt{2010} \notin \mathbf{Q}$.

Do đó $x = 1$. Với $x = 1$ thì $a^3 = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

Dễ thấy điều ngược lại cũng đúng.

Vậy : Nếu $a = 1$ thì $x = 1$ là nghiệm của phương trình (*)

$$\begin{cases} a \neq 1 \\ a \in \mathbf{Q} \end{cases} \quad \text{thì phương trình (*) không có nghiệm hữu tỉ.}$$

b) Nếu $\begin{cases} x < 2010 \\ x > 2011 \end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm do vế trái lớn hơn 1.

Nếu $2010 < x < 2011$ thì

$$|x - 2010|^{2011} + |x - 2011|^{2010} < |x - 2010| + |x - 2011| = 1 \quad (\text{loại}).$$

Nếu $x = 2010$ hoặc $x = 2011$ thì thỏa mãn phương trình (*)

Vậy phương trình (*) có 2 nghiệm $x_1 = 2010$ và $x_2 = 2011$. dễ thấy

$x_1 \in \mathbf{Q}$; $x_2 \in \mathbf{Q}$ do đó phương trình (*) không có nghiệm nào mà không phải là số hữu tỉ.

Bài 10. Giả sử $x_0 > 2$ là nghiệm của phương trình $x^{12} - abx + a^2 = 0$. Khi đó, tồn tại giá trị của các tham số a và b thỏa mãn đẳng thức $x_0^{12} - ab \cdot x_0 + a^2 = 0$ (1). Nếu ta xét đẳng thức (1) như một phương trình bậc 2 đối với biến số a thì (1) có dạng : $a^2 - bx_0a + x_0^{12} = 0$ (2)

Ta có : $\Delta_{(2)} = b^2 x_0^2 - 4x_0^{12} \geq 0$ do (2) có nghiệm.

Vậy $b^2 \geq 4x_0^{10} \Leftrightarrow |b| \geq 2x_0^5$, tức là $|b| > 64$ với mọi giá trị a.

Đáp số : a tùy ý.

Bài 11.

$$(1) \Leftrightarrow 2xy - \sqrt{x^2 \left(y - \frac{1}{4}\right)} - 2\sqrt{y^2(x-1)} = 0.$$

Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ và $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ là nghiệm của phương trình (1).

Nếu $x \neq 0$ ta có điều kiện $y \geq \frac{1}{4}$ và $x \geq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow x \left(\sqrt{y - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2 + y (\sqrt{x-1} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \left(\sqrt{y - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right) = 0 \\ y (\sqrt{x-1} - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm $x = y = 0$ và $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Bài 12

a) Điều kiện : $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $u = \sqrt{1+x}$; $v = \sqrt{1-x}$ $u, v \geq 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ \sqrt{1+uv} \cdot (u^3 - v^3) = 2 + u \cdot v \end{cases}$$

$$1 + uv = \frac{1}{2}(2 + 2uv) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + 2uv) = \frac{1}{2}(u + v)^2;$$

$$u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + v^2 + uv) = (u - v)(2 + uv).$$

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ u^2 - v^2 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow u^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Thử lại, ta thấy $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thoả mãn. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Tương tự a).

Bài 13.

$$\text{Cách 1. } \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x+34} - \sqrt{x+7} \quad (1)$$

Điều kiện $x \geq 1$.

Đặt $x = k + 2 \Rightarrow k \geq -1$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{k+1} + \sqrt{k+4} + \sqrt{k+9} = \sqrt{k+36}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{k+1}{k+36}} + \sqrt{\frac{k+4}{k+36}} + \sqrt{\frac{k+9}{k+36}} = 1 \quad (2)$$

Dễ thấy $k = 0$ là nghiệm của phương trình (2)

$\Rightarrow x = 2$ là nghiệm của phương trình (1).

Nếu $k > 0$ thì

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{k+1}{k+36}} &> \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}, \quad \sqrt{\frac{k+4}{k+36}} > \sqrt{\frac{4}{36}} = \frac{2}{6}, \quad \sqrt{\frac{k+9}{k+36}} > \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{3}{6} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{k+1}{k+36}} + \sqrt{\frac{k+4}{k+36}} + \sqrt{\frac{k+9}{k+36}} &> 1 \text{ (loại).} \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } k < 0 \text{ thì } \sqrt{\frac{k+1}{k+36}} + \sqrt{\frac{k+4}{k+36}} + \sqrt{\frac{k+9}{k+36}} < 1 \text{ (loại).}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có

$$\begin{aligned} &\left[(\sqrt{1})^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 \right] \left[(\sqrt{x-1})^2 + \left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \\ &\geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+7})^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{11x+14}{6} \geq (\sqrt{x+34})^2 \Leftrightarrow 11x+14 \geq x+34 \Leftrightarrow x \geq 2. \quad (*)$$

Do $x \geq 2$ nên $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \geq \sqrt{2-1} + \sqrt{2+2} = 3$.

$$\text{Mà } \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x+34} - \sqrt{x+7} \Rightarrow \sqrt{x+34} - \sqrt{x+7} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+34} \geq \sqrt{x+7} + 3 \Leftrightarrow x+34 \geq (x+7) + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x+7} + 9$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq \sqrt{x+7} \Leftrightarrow x \leq 2. \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $x = 2$. Thay $x = 2$ vào hai vế của phương trình đã cho, ta thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$.

$$\text{b) Ta có: } (a-x)^3 = (a-x)$$

$$\Leftrightarrow (a-x)^3 - (a-x) = 0 \Leftrightarrow (a-x) [(a-x)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-x=0 \\ a-x=1 \\ a-x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ x=a-1 \\ x=a+1. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = a$; $x = a \pm 1$.

$$\text{c) } \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3 \quad (1), \text{ điều kiện } x \geq -1.$$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{x-2} = y; \sqrt{x+1} = z$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=3 \\ y^3-z^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-z \\ z^3-8z^2+27z-30=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3. \text{ Vậy phương trình (1) có nghiệm } x=3.$$

Bài 14.

$$\text{a) } \frac{\sqrt{3x-2}}{x} = \frac{x}{1-x} \quad (1), \text{ điều kiện } \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \neq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = \frac{x^2}{1-x}. \text{ Do } \sqrt{3x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1-x} \geq 0.$$

$\Rightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Mà $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$. Vậy nghiệm của phương trình

(1) thuộc nửa đoạn $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

Ta có vế trái $= \sqrt{3x - 2} < \sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 1$,

vế phải $= \frac{x}{1-x} \geq \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} \times 3 = \frac{4}{3} > 1$.

Vậy vế trái nhỏ hơn vế phải, do đó phương trình (1) vô nghiệm.

$$b) \sqrt{11x^2 - 14x + 9} + \sqrt{11x^2 - 2x + 3} + \sqrt{17x^2 + 2x + 3} = \sqrt{2}(2x + 4). \quad (1)$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \text{Vế trái} &= \sqrt{(3x-1)^2 + 2(2-x)^2} + \sqrt{(3x-1)^2 + 2(1+x)^2} + \\ &\quad + \sqrt{(3x-1)^2 + 2(2x+1)^2} \geq \sqrt{2} \cdot (2x+4). \end{aligned} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta có :

$$\text{Vế trái} = \sqrt{2}(2x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ 2-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$.

Bài 15.

$$a) \sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4 \quad (1). \text{ Điều kiện } |x| \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2-x^2} = a \geq 0 \text{ và } \sqrt{x^2+8} = b > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^2 + (4-a)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ a = 3 \Leftrightarrow x^2 = -7 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $x = \pm 1$.

b) Cách 1: $\left[(x+2) - \frac{x}{x+2} \right]^2 = (2x-1)^2$. Điều kiện $x \neq -2$.

Vậy $S = \left\{ \sqrt{6}, -\sqrt{6}, \frac{-3-\sqrt{3}}{3}, \frac{-3+\sqrt{3}}{3} \right\}$.

Cách 2 : $(1) \Leftrightarrow 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 36x - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6)(3x^2 + 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6 \\ 3x^2 + 6x + 2 = 0. \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ \pm\sqrt{6}; \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3} \right\}$.

c) $10\sqrt{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = 3(x^4-x^2+1) + 3(x^2+1) \quad (1)$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{x^4-x^2+1}{x^2+1} - 10\sqrt{\frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}} + 3 = 0. \quad (2)$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}} = t \quad (t > 0)$.

$$(2) \Leftrightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^4-x^2+1}{x^2+1} = 9 \\ \frac{x^4-x^2+1}{x^2+1} = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-x^2+1 = 9x^2+9 \\ 9x^4-9x^2+9 = x^2+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4-10x^2-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=5+\sqrt{33} \\ x^2=5-\sqrt{33} \text{ (loại)} \end{cases} \\ 9x^4-10x^2+8=0 \Leftrightarrow \text{vô nghiệm.} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm: $x = \sqrt{5+\sqrt{33}}$ và $x = -\sqrt{5+\sqrt{33}}$.

III.4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

III.4.1. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

III.4.1.1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases} \quad (*)$$

(a, b, c, a', b', c' là các số đã cho thoả mãn $a^2 + b^2 > 0$ và $a'^2 + b'^2 > 0$).

- Giải hệ (*) là tìm tất cả các cặp số (x, y) là nghiệm chung của phương trình (1) và (2).
- Minh hoạ hình học tập nghiệm của hệ phương trình (*)

Trên mặt phẳng toạ độ, nếu gọi (d) là đường thẳng $ax + by = c$ và (d') là đường thẳng $a'x + b'y = c'$ thì điểm chung (nếu có) của hai đường thẳng ấy có toạ độ là nghiệm chung của hai phương trình (1) và (2) của hệ (*).

Vậy tập nghiệm của (*) được biểu diễn bởi tập các điểm chung của d và d'.

Do đó :

Hệ (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d$ cắt d'.

Hệ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow d \parallel d'$.

Hệ (*) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow d$ trùng d'.

Áp dụng điều kiện về vị trí tương đối của hai đường thẳng trên mặt phẳng, ta suy ra rằng :

- Hệ (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow ab' - ba' \neq 0$.

$$\text{Hệ (*) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} ab' - ba' = 0 \\ (ac' - a'c)^2 + (bc' - cb')^2 > 0. \end{cases}$$

$$\text{Hệ (*) có vô số nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} ab' - ba' = 0 \\ ac' - a'c = 0 \\ bc' - b'c = 0. \end{cases}$$

- Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

- Để giải một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, người ta dùng các phương pháp thế, cộng đại số.

III.4.1.2. Hệ phương trình bậc 2 hai ẩn và hệ phương trình bậc cao, hệ phương trình nhiều ẩn.

Để giải một hệ phương trình các dạng nói trên, ta cũng thường dùng các phương pháp như :

- Phương pháp thế
- Phương pháp cộng đại số
- Phương pháp đặt ẩn phụ
- Phương pháp đánh giá, dùng các bất đẳng thức

Tất nhiên việc lựa chọn phương pháp nào phải tùy thuộc vào từng tình huống cụ thể và các phương trình của hệ đã cho. Sau đây là một số ví dụ tương đối đơn giản và hay gặp trong các bài thi và bài kiểm tra.

III.4.2. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xác định các giá trị a, b để hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - ay = b \\ ax + by = 1. \end{cases}$$

a) Có nghiệm là $x = 1, y = -2$;

b) Có vô số nghiệm.

Giải.

$$\text{a) Hệ đã cho có nghiệm } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 - a(-2) = b \\ a \cdot 1 + b(-2) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -2 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-5}{3} \\ b = \frac{-4}{3} \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - ay = b \\ ax + by = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b+ay}{2} \\ a \cdot \frac{b+ay}{2} + by = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{ay+b}{2} \\ (a^2+2b)y = 2-ab \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có vô số nghiệm.

$$(2) \text{ có vô số nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b = 0 \\ 2 - ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\sqrt[3]{4} \\ b = -\sqrt[3]{2}. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 2. \end{cases} \quad (*)$

- Chứng minh rằng hệ $(*)$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbf{R}$.
- Tìm m để hệ $(*)$ có nghiệm (x, y) mà $x < 0, y > 0$.
- Tìm m để hệ $(*)$ có nghiệm (x, y) mà $x = 2012y$.
- Chứng minh rằng với mọi số $k > -2$, bao giờ cũng tìm được một giá trị tương ứng của m sao cho hệ có nghiệm (x, y) với $x = ky$.

Giải.

$$a) \begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + my \\ m(1 + my) + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + my \\ (m^2 + 1)y = 2 - m. \end{cases}$$

Do $(1 + m^2) > 0 \quad \forall m \in \mathbf{R}$ nên hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = 1 + m \cdot \frac{2 - m}{1 + m^2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 1} \\ y = \frac{2 - m}{1 + m^2} \end{cases} \quad \text{với mọi giá trị } m.$$

b) Hệ $(*)$ có nghiệm $x < 0$ và $y > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m + 1}{m^2 + 1} < 0 \\ \frac{2 - m}{m^2 + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 < 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}.$$

c) Hệ có nghiệm (x, y) mà $x = 2012y$.

$$\Leftrightarrow \frac{2m + 1}{m^2 + 1} = 2012 \cdot \frac{2 - m}{m^2 + 1} \Leftrightarrow 2m + 1 = 2012 \cdot (2 - m)$$

$$\Leftrightarrow 2014m = 4023 \Leftrightarrow m = \frac{4023}{2014}.$$

d) Hệ (*) có nghiệm (x, y) mà $x = ky$ ($k > -2$)

$$\Leftrightarrow \frac{2m+1}{m^2+1} = \frac{k(2-m)}{m^2+1} \Leftrightarrow 2m+1 = 2k - km$$

$$\Leftrightarrow (k+2)m = 2k-1 \Leftrightarrow m = \frac{2k-1}{k+2} \text{ (do } k \neq -2\text{)}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{2k-1}{k+2}.$$

Ví dụ 3. Tìm các giá trị a, b, c sao cho các đường thẳng sau : $y = ax + b$ (1) ; $y = bx + c$ (2) ; $y = cx + a$ (3) cùng đi qua điểm $I(1, 1)$.

Giải.

Do các đường thẳng (1) ; (2) ; (3) cùng đi qua $I(1; 1)$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} a.1 + b = 1 \\ b.1 + c = 1 \\ c.1 + a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b + c = 1 \\ c + a = 1 \\ a + b + c = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } a = b = c = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1. \end{cases}$

Giải.

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my \\ m(my) - y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my \\ (m^2 - 1)y = m + 1. \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp } m^2 - 1 \neq 0 \text{ thì hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{m}{m-1} \\ y = \frac{1}{m-1}. \end{cases}$$

Trường hợp $m^2 - 1 = 0$: Nếu $m = 1$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $m = -1$ thì hệ có vô số nghiệm.

Ví dụ 5. Giải các hệ phương trình :

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x^2 + y^2 - 3xy = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ xy + x + y = 2. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y - 24 = 0 \\ x^2 - 2y^2 - 3x + 3y + xy = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3(x^2 + y^2) - 5xy - 225 = 0 \\ xy - 6(x + y) = 0 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} |x^2 - 2x + 3| = x^2 - 3x + 2y - 2 \\ 3x + y = 4. \end{cases}$$

Giải.

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2y + 3 \\ (2y + 3)^2 + y^2 - 3(2y + 3)y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ -y^2 + 3y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ y^2 - 3y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + \sqrt{41} \\ y = \frac{3 + \sqrt{41}}{2} \\ x = 6 - \sqrt{41} \\ y = \frac{3 - \sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

b) Đặt $S = x + y$ và $P = xy$. Khi đó $x^2 + xy + y^2 = S^2 - P$.

Do đó từ hệ đã cho ta có hệ sau $\begin{cases} S^2 - P = 4 \\ S + P = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 4 \\ S^2 - 4 + S = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -3 \\ P = 5 \\ S = 2 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 5 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(0; 2)$ và $(2, 0)$.

c) Hệ được viết lại như sau :

$$\begin{cases} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y - 24 = 0 & (1) \\ (x - y)(x + 2y - 3) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Giải I :

$$\begin{cases} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y - 24 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 11x + 8 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Giải (II) :

$$\begin{cases} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y - 24 = 0 \\ x = 3 - 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 42y^2 - 42 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm (x, y) là : $(1, 1)$; $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$; $(5, -1)$.

$$d) \text{ Biến đổi về hệ } \begin{cases} 3(x + y)^2 - 11xy - 225 = 0 \\ xy - 6(x + y) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $(x + y) = S$ và $xy = P$, ta có :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3S^2 - 11P - 225 = 0 \\ P = 6S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 25 \\ xy = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \\ x = 15 \\ y = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \\ x = 3 \\ y = -6 \end{cases} \end{cases}$$

c) Dễ thấy $x^2 - 2x + 3 > 0$ nên $|x^2 - 2x + 3| = x^2 - 2x + 3$.

Biến đổi về hệ :
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 3 = x^2 - 3x + 2y - 2 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ 3(2y - 5) + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{19}{7} \end{cases}$$

Ví dụ 6. Giải hệ
$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15. \end{cases}$$

Giải.

$$\text{Xét } y = 0, \text{ ta có } \begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{38}{3} \\ x^2 = 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (loại)}.$$

$$\text{Xét } y \neq 0 : (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 45x^2 + 75xy - 60y^2 = 38.15 \\ 190x^2 - 342xy - 114y^2 = 15.38 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 145x^2 - 417xy - 54y^2 = 0 \Leftrightarrow 145t^2 - 417t - 54 = 0, \text{ trong đó } t = \frac{x}{y} (**)$$

$$\text{Ta có (**)} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = \frac{-18}{145} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = \frac{-18}{145}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3y \\ y^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-18}{145}y \\ \left[5 \cdot \left(\frac{18}{145} \right)^2 + 9 \cdot \frac{18}{145} - 3 \right] \cdot y^2 = 15 \text{ (loại do vế trái } < 0) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ x = -3 \\ y = -1. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm (x, y) là $(3, 1); (-3, -1)$.

Ví dụ 7. Tìm a để hệ sau có nghiệm :
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ x + y = 2a + 1. \end{cases} \quad (*)$$

Giải. Điều kiện $x \geq -1$ và $y \geq 1$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ \left(\sqrt{x+1} \right)^2 + \left(\sqrt{y-1} \right)^2 = 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{y-1} = \frac{1}{2} [a^2 - (2a + 1)] \end{cases}$$

Vậy $\sqrt{x+1}$ và $\sqrt{y-1}$ là nghiệm của phương trình :

$$t^2 - at + \frac{1}{2}(a^2 - 2a - 1) = 0 \quad (1).$$

Hệ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm không âm.

$$\text{Phương trình (1) có 2 nghiệm không âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} > 0 \\ S_{(1)} \geq 0 \\ P_{(1)} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2(a^2 - 2a - 1) \geq 0 \\ a \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a^2 - 2a - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{6}.$$

Vậy với $1 + \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{6}$ thì hệ (*) có nghiệm.

III. 4.3. MỘT SỐ BÀI TẬP

A. Để bài

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$b) \begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^5+y^5+z^5=3 \end{cases} \quad (*)$$

$$c) \begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ xy=z^2 \end{cases} \quad (*)$$

(với a, b là các hằng số cho trước).

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y - 2|x| - 3 = 0 \\ 2|y| + 7x + 11 = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (x+y)=1 \\ \left(1+\frac{1}{x}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{y}\right) = 9 \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ xy(x+1)(y+1)=12 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2. \end{cases} \quad (*)$$

Bài 3.

$$a) \text{ Cho hệ phương trình } \begin{cases} 2x+2y+x^2+y^2=2012 \\ xy(x+2)(y+2)=a \end{cases} \quad (*)$$

Tìm a để hệ (*) có nghiệm.

$$b) \text{ Cho hệ phương trình } \begin{cases} y+7x-\frac{m^3}{x^2}=0 \\ x+7y-\frac{m^3}{y^2}=0. \end{cases} \quad (**)$$

Tìm tất cả các giá trị m ≠ 0 để hệ (**) có nghiệm duy nhất.

c) Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)^4 + 13 = 6x^2y^2 + m \\ xy(x^2 + y^2) = m. \end{cases}$$

Chứng minh rằng không tồn tại giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất.

d) Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = m \\ y^2 + (x+1)^2 = m. \end{cases}$$

Bài 4. a) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+19} - \sqrt{y+6} = (m-2008)y + 1 \\ \sqrt{y+19} - \sqrt{x+6} = (m-2008)x + 1. \end{cases}$$

a₁) Giải hệ khi $m = 2008$.

a₂) Chứng minh rằng khi $m \geq 2008$ thì hệ đã cho không có quá một nghiệm.

(Đề thi vào trường THPT Chu Văn An (Hà Nội) và Hà Nội - Amsterdam vòng II năm học 2007 – 2008)

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2y - y^2x = 1 \\ 8x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$$

(Đề thi vào khối chuyên ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội vòng II năm học 2009 – 2010)

c) Với giá trị nào của a thì hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \sqrt{2-a^2} + \sqrt{2-\frac{1}{a^2}} + \frac{a^2+1}{a} \end{cases}$$

Có ít nhất một nghiệm thỏa mãn điều kiện $x > 0, y > 0$? Với các giá trị của a vừa tìm được, hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho.

(Đề thi vào khối chuyên ĐHSP Hà Nội vòng II năm học 1999 – 2000)

Bài 5. Giải các hệ phương trình :

a)
$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{2012}} = 2012\sqrt{1+\frac{1}{2012}} \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{2012}} = 2012\sqrt{1-\frac{1}{2012}} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 |x_1| - (x_1 - a) |x_1 - a| = x_2 |x_2| & (1) \\ x_2 |x_2| - (x_2 - a) |x_2 - a| = x_3 |x_3| & (2) \\ \dots & \\ x_n |x_n| - (x_n - a) |x_n - a| = x_1 |x_1| & (n) \end{cases}$$

B. Lời giải

Bài 1. Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

$$a) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{xy + yz + zx}{xyz} = 0 \Rightarrow xy + yz + zx = 0.$$

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \text{ (do } xy + yz + zx = 0)$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0 \text{ (loại).}$$

Vậy hệ vô nghiệm.

$$b) \begin{cases} x + y + z = 3 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 & (2) \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 6 \Leftrightarrow 2(xy + yz + zx) = 6$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx = 3 \Rightarrow x = y = z = 1.$$

Dễ thấy $x = y = z = 1$ thỏa mãn phương trình (3).

Vậy hệ có nghiệm $x = 1, y = 1, z = 1$.

$$c) \text{ Nếu } a = 0 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2 \end{cases}$$

Nếu $b = 0$ thì (*) có nghiệm $x = y = z = 0$.

Nếu $b \neq 0$ thì (*) vô nghiệm.

$$\text{Nếu } a \neq 0 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ 2xy + 2yz + 2zx = a^2 - b^2 \\ xy = z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ 2z(x+y+z)=a^2-b^2 \\ xy=z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{a^2+b^2}{2a} & (1) \\ xy=z^2 & (2) \\ z=\frac{a^2-b^2}{2a} & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có
$$\begin{cases} x+y=\frac{a^2+b^2}{2a} \\ xy=\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2 \end{cases}$$

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - \frac{a^2+b^2}{2a}t + \left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2 = 0$ (4)

Ta có $\Delta_{(4)} = \left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2 = \frac{-3a^4 - 3b^4 + 10a^2b^2}{4a^2}$.

Nếu $\Delta_{(4)} < 0$ thì hệ (*) vô nghiệm.

Nếu $\Delta_{(4)} = 0$ thì hệ (*) có nghiệm
$$\begin{cases} x = \frac{a^2+b^2}{2a} : 2 \\ y = \frac{a^2+b^2}{2a} : 2 \\ z = \frac{a^2-b^2}{2a}. \end{cases}$$

Nếu $\Delta_{(4)} > 0$ thì hệ (*) có các nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = \left(\frac{a^2+b^2}{2a} + \sqrt{\Delta_{(4)}}\right) : 2 \\ y_1 = \left(\frac{a^2+b^2}{2a} - \sqrt{\Delta_{(4)}}\right) : 2, \text{ hoặc } \\ z_1 = \frac{a^2-b^2}{2a} \end{cases} \begin{cases} x_1 = \left(\frac{a^2+b^2}{2a} - \sqrt{\Delta_{(4)}}\right) : 2 \\ y_1 = \left(\frac{a^2+b^2}{2a} + \sqrt{\Delta_{(4)}}\right) : 2 \\ z_1 = \frac{a^2-b^2}{2a}. \end{cases}$$

Bài 2. a) Điều kiện $x \geq 0$ và $y \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = p$ và $\sqrt{y} = q$, ta có $p, q \geq 0$.

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2q + q^2p = 30 \\ p^3 + q^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pq(p+q) = 30 \\ (p+q)^3 - 3pq(p+q) = 35. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } S_1 = p + q \text{ và } P_1 = p \cdot q, \text{ ta có } \begin{cases} S_1 \cdot P_1 = 30 & (1) \\ S_1^3 - 3P_1 \cdot S_1 = 35 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = 5 \\ P_1 = 6. \end{cases}$$

$$\text{Do đó có hệ } \begin{cases} p+q=5 \\ p \cdot q=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3 \\ q=2 \\ p=2 \\ q=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{y}=3 \\ \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=9 \\ x=9 \\ y=4. \end{cases}$$

Vậy nghiệm (x, y) của hệ là $(4, 9)$ và $(9, 4)$.

$$\text{b) } \begin{cases} y = 2|x| + 3 & (1) \\ 2|y| = -7x - 11. & (2) \end{cases} \quad (*)$$

Từ (1) ta có $y > 0 \Rightarrow 2|y| = 2y$. Vậy

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3, x \geq 0 \\ 2y = -7x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-17}{11} < 0 \\ y = \frac{-1}{11} \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 3, x < 0 \\ 2y = -7x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-17}{3} < 0 \\ y = \frac{43}{3}. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x, y) = \left(\frac{-17}{3}, \frac{43}{3} \right)$.

$$\text{c) Do } (x + y) = 1 \text{ nên } 1 + \frac{1}{x} = (x + y) + \frac{1}{x} = \frac{x + y}{x} + 1 = \frac{x + y + x}{x}.$$

Do $x, y > 0$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x + y + x \geq 3\sqrt[3]{x^2y} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+y+x}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2y}{x}}. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } 1 + \frac{1}{y} \geq 3\sqrt[3]{\frac{y^2x}{y}} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9\sqrt[3]{\frac{x^3 \cdot y^3}{xy}} = 9.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm là } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 1 \\ xy(x+y) + y^2(x+y) = 2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 1 & (1) \\ (x+y)(xy + y^2) = 2 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) dễ thấy $x + y \neq 0$ và $xy + y^2 \neq 0$.

$$\text{Lấy (1) chia cho (2), ta có } \frac{x^2 - xy + y^2}{(x+y)y} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2xy + 2y^2 = xy + y^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \text{ (dễ thấy } x \neq 0 \text{ và } y \neq 0).$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x = y. \end{cases}$$

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x = y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ y = 2x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \\ y = 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm (x, y) là $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right); \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}, 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)$.

$$\text{e) } \begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = 12. \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $u = x^2 + x$; $v = y^2 + y$. Dễ thấy $u \geq -\frac{1}{4}$ và $v \geq -\frac{1}{4}$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 8 \\ u, v \geq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 6 \\ v = 2 \\ u = 2 \\ v = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y^2 + y - 6 = 0. \end{cases} & \text{(II)} \end{cases}$$

Giải các hệ (I) và (II), ta có hệ (*) có 8 nghiệm (x, y) là :

$(1, 2); (1, -3); (-2, 2); (-2, -3); (2, 1); (-3, 1); (2, -2); (-3, -2)$.

f) $y = 0$ (loại)

$$y \neq 0, \text{ ta có } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + x + y = 4 \\ (x+y)^2 - 2\left(\frac{x^2 + 1}{y}\right) = 7. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x^2+1}{y} \text{ và } v = x+y, \text{ ta có hệ } \begin{cases} u+v=4 \\ v^2-2u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=3 \\ u=9 \\ v=-5. \end{cases}$$

$$\text{Với } u=1 \text{ và } v=3 \text{ ta có: } \begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=-2 \\ y=5. \end{cases}$$

$$\text{Với } v=-5, u=9 \text{ ta có hệ } \begin{cases} x^2+1=9y \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=9y \\ y=-5-x \end{cases} \text{ (hệ vô nghiệm).}$$

Vậy hệ (*) có hai nghiệm (x, y) là $(1, 2); (-2, 5)$.

Bài 3.

$$\text{a) Đặt } u = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow u \geq 0; v = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow v \geq 0.$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0, v \geq 0 \\ u+v=2014 \\ u.v=a+2013 \end{cases}$$

Hệ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $t^2 - 2014t + a + 2013 = 0$ (1)
có hai nghiệm đều lớn hơn hay bằng 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} \geq 0 \\ 2014 > 0 \\ a+2013 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1007^2 - (a+2013) \geq 0 \\ a+2013 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2013 \leq a \leq 1007^2 - 2013.$$

b) Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 7x+y-\frac{m^3}{x^2}=0 \\ x+7y-\frac{m^3}{y^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^3+x^2y-m^3=0 \\ 7(x^3-y^3)+xy(x-y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x^3 + x^2y - m^3 = 0 \\ (x-y)(7x^2 + 7y^2 + 8xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^3 + x^2y - m^3 = 0 \\ x = y \text{ (do } 7x^2 + 7y^2 + 8xy > 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 8x^3 = m^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m}{2} \neq 0 \\ y = \frac{m}{2} \neq 0. \end{cases}$$

Vậy hệ (*) có nghiệm duy nhất với mọi $m \neq 0$.

c) Giả sử hệ có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) , dễ thấy (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ nên $(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$. Thay vào hệ, ta có :

$$\begin{cases} 10x_0^4 = m - 13 \\ 2x_0^4 = m \end{cases} \Leftrightarrow m - 13 = 5m \Leftrightarrow m = \frac{-13}{4}.$$

Vậy $m = \frac{-13}{4}$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

d) *Cách 1 :*

Giả sử hệ có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) , dễ thấy (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ. Do hệ có nghiệm duy nhất nên $x_0 = y_0$. Khi đó, hệ có dạng :

$$\begin{cases} x_0^2 + (x_0 + 1)^2 = m & (1) \\ x_0^2 + (x_0 + 1)^2 = m & (2) \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất thì (1) cũng có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ phương trình $2x^2 + 2x + 1 - m = 0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow \Delta' = 1 - 2(1 - m) = 0$
 $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$

Thứ lại : Với $m = \frac{1}{2}$ thì hệ có dạng
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (2x+1)^2 + (2y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Cách 2 : Điều kiện $m \geq 0$.

$x^2 + (y+1)^2 = m$ là phương trình đường tròn tâm $I(0, -1)$, bán kính $\sqrt{m}$.

$y^2 + (x+1)^2 = m$ là phương trình đường tròn tâm $K(-1, 0)$, bán kính $\sqrt{m}$.

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ Đường tròn $(I, \sqrt{m})$ tiếp xúc với đường tròn $(K, \sqrt{m}) \Leftrightarrow \sqrt{m} + \sqrt{m} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy $m = \frac{1}{2}$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 4. Bạn đọc tự giải.

Bài 5. a) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có

$$\left(\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{2012}} \right)^2 \leq (1^2 + 1^2 + \dots + 1^2) \times \left[\left(\sqrt{1+x_1} \right)^2 + \dots + \left(\sqrt{1+x_{2012}} \right)^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow 2012^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2012} \right) \leq 2012 \cdot (2012 + x_1 + x_2 + \dots + x_{2012})$$

$$\Leftrightarrow 2012^2 + 2012 \leq 2012^2 + 2012 \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_{2012})$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{2012}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \sqrt{1+x_1} = \sqrt{1+x_2} = \dots = \sqrt{1+x_{2012}}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{2012}. \quad (1)$$

Tương tự, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta lại có

$$\left(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{2012}}\right)^2 \leq (1^2 + 1^2 + \dots + 1^2) \\ \times \left[\left(\sqrt{1-x_1}\right)^2 + \dots + \left(\sqrt{1-x_{2012}}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq x_1 + x_2 + \dots + x_{2012}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} = \sqrt{1-x_2} = \dots = \sqrt{1-x_{2012}}. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta có $x_1 = x_2 = \dots = x_{2012}$.

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } x_1 = x_2 = \dots = x_{2012} = \frac{1}{2012}.$$

b) Nếu $a \leq 0$ thì ta đổi dấu tất cả các số hạng của hệ mà không làm thay đổi các phương trình (1), (2), ..., (n), nên ta có thể giả sử $a \geq 0$.

$$\bullet \quad x_1 \geq a \geq 0 : x_1|x_1| - |x_1 - a|(x_1 - a) = x_2|x_2|$$

$$\Rightarrow x_1x_1 - (x_1 - a)(x_1 - a) = x_2|x_2| \Rightarrow x_1^2 - (x_1^2 - 2x_1a + a^2) = x_2|x_2|$$

$$\Rightarrow 2x_1a - a^2 = x_2|x_2| \Rightarrow a[x_1 + (x_1 - a)] = x_2|x_2| \geq a^2$$

$$\Rightarrow x_2|x_2| \geq a^2 \Rightarrow x_2 \geq a. \text{ Tương tự } x_3 \geq a, \dots, x_n \geq a \quad (*)$$

Mặt khác, cộng các vế của (1), (2), ..., (n), ta có :

$$(x_1 - a)|x_1 - a| + (x_2 - a)|x_2 - a| + \dots + (x_n - a)|x_n - a| = 0. \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**) } \Rightarrow x_1 = a, x_2 = a, \dots, x_n = a.$$

$$\bullet \quad x_1 < a \Rightarrow x_2 < a, x_3 < a, \dots, x_n < a.$$

Mặt khác :

$$0 = (x_1 - a)|x_1 - a| + (x_2 - a)|x_2 - a| + \dots + (x_n - a)|x_n - a| < 0 \Rightarrow \text{vô lí.}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a, a, \dots, a)$.

Chương IV

BẤT ĐẲNG THỨC

IV.1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

IV.1.1. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

IV.1.1.1. Định nghĩa bất đẳng thức

Định nghĩa : Cho các số thực a, b . Số a được gọi là lớn hơn hay bằng b (kí hiệu $a \geq b$) khi và chỉ khi hiệu $(a - b)$ lớn hơn hay bằng 0, tức là $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$.

IV.1.1.2. Một số tính chất của bất đẳng thức

$$a > b \text{ và } b > c \Rightarrow a > c ;$$

$$a > b \Leftrightarrow a + m > b + m, \forall m ;$$

$$\text{Nếu } c > 0 \text{ thì } a > b \Leftrightarrow ac > bc ;$$

$$\text{Nếu } c < 0 \text{ thì } a > b \Leftrightarrow ac < bc.$$

Từ đó ta có một số hệ quả sau :

$$a > b \text{ và } c > d \Rightarrow a + c > b + d ;$$

$$a + c > b \Leftrightarrow a > b - c ;$$

$$a \geq b \geq 0 \text{ và } c \geq d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd ;$$

$$a > b \geq 0 \text{ và } n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow a^n > b^n ;$$

$$a > b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} ;$$

$$a > b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} ;$$

$$-|a| \leq a \leq |a| \text{ với mọi } a \in \mathbf{R} ;$$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \text{ (với } a > 0) ;$$

$$|x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases} \text{ (với } a > 0) ;$$

$$|a - b| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \text{ (} \forall a, b \in \mathbf{R} \text{)}.$$

IV.1.1.3. Một số bất đẳng thức quen thuộc

- Bất đẳng thức Còsi

Với mọi n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta có $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

- Bất đẳng thức Bunhia côpxki

Với hai bộ số thực $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

- Hệ quả của bất đẳng thức Còsi

Nếu n số dương thay đổi nhưng có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi n số đó bằng nhau.

Nếu n số dương thay đổi nhưng có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi n số đó bằng nhau.

IV.1.2. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1.

a) Chứng minh rằng nếu a, b, c là 3 số dương thì $(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$.

Khi nào xảy ra đẳng thức ?

b) Nếu a, b, c là 3 số dương thì $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Giải.

a) *Cách 1:* $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}$.

Do $a, b > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Còsi, ta có : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$.

Tương tự : $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$ và $\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$.

Vậy $(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương a, b, c ta có

$$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c.$$

b) Ta có :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) + \left(\frac{b}{a+c} + 1 \right) = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) = \\ & \frac{1}{2} [(b+c) + (c+a) + (a+b)] \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right). \end{aligned}$$

Áp dụng câu a), ta có ngay kết quả sau :

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) + 3 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng :

a) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 \cdot \sqrt{bc} + b^2 \cdot \sqrt{ca} + c^2 \cdot \sqrt{ab}$ với mọi $a, b, c \geq 0$.

b) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc \cdot (a + b + c)$ với mọi $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Giải.

a) Ta có : $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab$
 $\Rightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b).$

Tương tự, $b^3 + c^3 \geq bc(b + c)$; $c^3 + a^3 \geq ca(c + a).$

Do đó $2 \cdot (a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$

$$\Rightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c$$

$$\Rightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \quad (1)$$

Mặt khác, ta có $(b + c) \geq 2\sqrt{bc}$; $c + a \geq 2\sqrt{ac}$; $(a + b) \geq 2\sqrt{ab}.$

Do đó $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \geq 2(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}),$

suy ra : $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

b) Ta có : $(ab)^2 + (bc)^2 \geq 2abbc$;

$$b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2beca ;$$

$$c^2a^2 + a^2b^2 \geq 2caab.$$

Cộng các vế, ta có : $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc \cdot (a + b + c)$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 3.

a) Cho x, y là hai số thay đổi thoả mãn $2x + 3y = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = x^2 + y^2.$$

b) Chứng minh rằng : Nếu $a^2 + 2b^2 + 9c^2 = 3$ thì $a + 2b + 9c \leq 6$.

Giải.

a) Ta có : $(x^2 + y^2)(2^2 + 3^2) \geq (2x + 3y)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{25}{13}$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2) \text{ nhỏ nhất } = \frac{25}{13}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{13} \\ y = \frac{15}{13}. \end{cases}$$

b) Ta có :

$$\begin{aligned} (a + 2b + 9c)^2 &= (a \cdot 1 + \sqrt{2}^2 \cdot b + 3c \cdot 3)^2 \leq \left[a^2 + (\sqrt{2}b)^2 + (3c)^2 \right] \left[1^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2 \right] \\ &= 12 \cdot (a^2 + 2b^2 + 9c^2) = 36. \end{aligned}$$

Vậy $(a + 2b + 9c) \leq 6$.

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{2}} = \frac{3c}{3} \\ a^2 + 2b^2 + 9c^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

IV.1.3. MỘT SỐ BÀI TẬP

A. Đề bài

Bài 1. Cho $x \geq 0$. Chứng minh rằng :

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{2010}) \cdot (1 + x^{2010}) \geq 4022 \cdot x^{2010}.$$

Bài 2. Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng :

$$(1 + 2009a_1)(1 + 2009a_2) \dots (1 + 2009a_n) \geq 2010^n.$$

Bài 3. Trên bảng, người ta viết các số 3 ; 4; 5 ; 6. Lấy ra một cặp bất kì hai số a, b và biến đổi chúng thành $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ và $(a + b) - \sqrt{a^2 + b^2}$. Hỏi sau một số phép biến đổi, trên bảng sẽ xuất hiện một số nhỏ hơn 1 được hay không ?

Bài 4. Cho x, y tùy ý và x, y đều lớn hơn $\sqrt{2}$. Chứng minh rằng :

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 > x^2 + y^2.$$

Bài 5. Chứng minh rằng :

$$\text{Nếu } a < b < c < d \text{ thì } x = (a + b)(c + d) < y = (a + c)(b + d) < z = (a + d)(b + c).$$

Bài 6. Chứng minh rằng :

$$A = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Bài 7. Cho $x > y$ và $xy = 1$. Chứng minh rằng : $\frac{(x^2 + y^2)^2}{(x - y)^2} \geq 8$.

Bài 8. Chứng minh rằng : $\frac{x}{2010 + y^3 + z^3} + \frac{y}{2010 + z^3 + x^3} + \frac{z}{2010 + y^3 + x^3} < \frac{1}{3}$

với $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Bài 9. So sánh hai số sau :

a) $x = \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}$ và $y = a^2 + b^2 + c^2$ với a, b, c dương ;

b) $u = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$ và $v = a + b + c$ với a, b, c dương ;

c) $m = \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}$ và $h = x^4 + y^4$ với x, y tùy ý ;

d) $t = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ và $k = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ với $n \in \mathbf{N}^*$;

e) 31^{11} và 17^{14} ;

f) 5^{100} và 7^{90} .

Bài 10.

a) Cho $|a| \geq 2$; $|b| \geq 2$. Chứng minh rằng :

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq (a + b)(1 + ab) + 5.$$

b) Cho a, b, c tùy ý thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng :

$$P = |ab| + |bc| + |ca| - abc \leq 4.$$

Bài 11.

a) Cho $x > 0, y > 0$ và $x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leq 0$. Chứng minh rằng :

$$A = 5x + y \geq 7\sqrt{3}.$$

b) Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng tổng của hai trong ba số đó không bé hơn 16 lần tích của ba số đó.

Bài 12.

a) Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{4a}{b+c} + 1\right) \left(\frac{4b}{c+a} + 1\right) \left(\frac{4c}{a+b} + 1\right) > 25. \quad (1)$$

b) Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{d}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \text{ với } abcd \neq 0.$$

Bài 13. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi x, y, z là các khoảng cách từ O đến các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng

minh : $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 3\sqrt{\frac{R}{2}}.$

Bài 14. Với mỗi số thực x đặt

$a = \sqrt{x^2 + 2012x + 1 + 1006^2}$, $b = \sqrt{x^2 - 2010x + 1 + 1005^2}$, $c = 2011$. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbf{R}$ thì a, b, c luôn có thể chọn làm độ dài ba cạnh của tam giác ABC.

Bài 15. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

$$a) \frac{x}{y+z} + \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \frac{y}{z+x} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \frac{z}{x+y} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 3 ;$$

$$b) \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + xz + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z).$$

B. Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Bài 1. Ta có : } & (1 + x + x^2 + \dots + x^{2010})(1 + x^{2010}) = \\ & = 1 + x + x^2 + \dots + 2^{2010} + x^{2010} + x^{2011} + \dots + x^{4020} \\ & = (1 + x^{4020}) + (x + x^{4019}) + \dots + (x^{2010} + x^{2010}) \\ & \geq 2 \cdot x^{2010} + 2 \cdot x^{2010} + \dots + 2 \cdot x^{2010} = 2 \times 2011 \times x^{2010} \\ \text{Vậy } & (1 + x + x^2 + \dots + x^{2010})(1 + x^{2010}) \geq 4022x^{2010}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

Bài 2. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$1 + 2009a_1 = 1 + \underbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{2009 \text{ lần}} \geq 2010 \cdot \sqrt[2010]{\underbrace{a_1 \cdot a_1 \dots a_1}_{2009 \text{ lần}}}$$

$$1 + 2009a_2 = 1 + \underbrace{a_2 + \dots + a_2}_{2009 \text{ lần}} \geq 2010 \cdot \sqrt[2010]{\underbrace{a_2 \cdot a_2 \dots a_2}_{2009 \text{ lần}}}$$

...

$$\text{Tương tự, } 1 + 2009a_n \geq 2010 \cdot \sqrt[2010]{a_n \cdot a_n \dots a_n}.$$

Do các vế đều không âm nên nhân các vế, ta có

$$(1 + 2009a_1) \cdot (1 + 2009a_2) \dots (1 + 2009a_n) \geq 2010^n \cdot \sqrt[2010]{(a_1 a_2 \dots a_n)^{2009}} = 2010^n.$$

$$\text{Vậy } (1 + 2009a_1) \cdot (1 + 2009a_2) \dots (1 + 2009a_n) \geq 2010^n.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Bài 3. Dễ thấy $(a+b) - \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} + 2ab - \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ với mọi $a > 0$ và $b > 0$. Do đó sau các phép biến đổi, các số trên bảng đều là các số dương. Mặt khác, tổng nghịch đảo của cặp số a, b nào sau phép biến đổi không thay đổi. Thật vậy :

$$\frac{1}{(a+b)+\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{(a+b)-\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2(a+b)}{(a+b)^2 - (a^2+b^2)} = \frac{2(a+b)}{2a \cdot b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Giả sử sau một số phép biến đổi trên bảng sẽ xuất hiện một số nhỏ hơn 1 thì tổng nghịch đảo của tất cả các số được viết trên bảng sẽ lớn hơn 1. Mặt khác $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20} < 1$. Điều này là vô lí. Vậy trên bảng sẽ không thể xuất hiện một số nhỏ hơn 1 được.

Bài 4. Ta có: $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

$$\Rightarrow x^4 - yx^3 + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = (x^5 + y^5) : (x+y)$$

Do $x > \sqrt{2}$ và $y > \sqrt{2}$ nên $x^5 + y^5 > 2.(x^3 + y^3)$ và

$$(x^5 + y^5) : (x+y) > 2(x^3 + y^3) : (x+y) = 2(x^2 - xy + y^2) \geq x^2 + y^2.$$

$$\text{Vậy } x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 > x^2 + y^2.$$

Bài 5. Vì $a < b < c < d$ nên $y - x = ab + cd - ac - bd = (a-d) \cdot (b-c) > 0$,

$$z - y = ac + bd - ad - bc = (a-b)(c-d) > 0. \text{ Do vậy } x < y < z.$$

Bài 6. Nếu $x \leq 0$ thì $A > 0$ hiển nhiên.

$$\text{Nếu } x \geq 1 \text{ thì } A = x^5(x-1) + x^3(x-1) + x(x-1) + \frac{3}{4} > 0.$$

$$\text{Nếu } 0 < x < 1 \text{ thì } A = \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2(1-x^3) > 0.$$

Vậy $A > 0$ với $\forall x \in \mathbf{R}$.

Bài 7. Đặt $x^2 = u$ và $y^2 = v \Rightarrow u, v \geq 0$ và $u \cdot v = 1, u + v \geq 2\sqrt{uv} = 2 \Rightarrow u + v - 2 \geq 0$.

Do $x > y$ nên $u + v - 2 > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x-y)^2} - 8 &= \frac{(u+v)^2 - 8u - 8v + 16}{u+v-2} \\ &= \frac{u^2 + v^2 + 16 + 2uv - 8(u+v)}{u+v-2} = \frac{(u+v-4)^2}{u+v-2} \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x-y)^2} \geq 8.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow u + v = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Bài 8. Do $0 \leq x, y, z \leq 1$ nên ta có

$$\frac{x}{2010 + y^3 + z^3} + \frac{y}{2010 + z^3 + x^3} + \frac{z}{2010 + x^3 + y^3} < \frac{x}{6 + x^3 + y^3 + z^3} + \frac{y}{6 + x^3 + y^3 + z^3} + \frac{z}{6 + x^3 + y^3 + z^3} = \frac{x + y + z}{6 + x^3 + y^3 + z^3}.$$

Mặt khác lại có : nếu $0 \leq x \leq 1$ thì $x^3 - 3x + 2 \geq 0$.

Thật vậy, $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 \cdot (x + 2) \geq 0$

Tương tự, $y^3 - 3y + 2 \geq 0$ và $z^3 - 3z + 2 \geq 0$.

Do đó $(x^3 + y^3 + z^3) - 3(x + y + z) + 6 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 6 \geq 3(x + y + z), \text{ hay } \frac{x + y + z}{x^3 + y^3 + z^3 + 6} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow (\text{dpcm}).$$

Bài 9. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki

$$\left[\left(\sqrt{\frac{a^3}{b}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b^3}{c}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c^3}{a}} \right)^2 \right] \left[(\sqrt{ab})^2 + (\sqrt{bc})^2 + (\sqrt{ca})^2 \right]$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{a^3}{b} ab} + \sqrt{\frac{b^3}{c} bc} + \sqrt{\frac{c^3}{a} ca} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \right) \cdot (ab + bc + ca) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Mà $(a^2 + b^2 + c^2) \geq ab + bc + ca$, hay

$$(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \right) \geq (ab + bc + ca) \left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \right) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2. \text{ Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c.$$

b) Tương tự a)

c) Đặt $x^2 = a$ và $y^2 = b$. Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} - x^4 - y^4 &= \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} - a^2 - b^2 = \frac{(a-b)a^2}{b} + \frac{(b-a)b^2}{a} \\ &= (a-b) \left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} \right) = \frac{(a-b)(a^3 - b^3)}{ab} \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} \geq x^4 + y^4.$$

d) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số, trong đó có n số bằng $1 + \frac{1}{n}$ và 1 số bằng 1, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} &\geq \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ \Leftrightarrow \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} &\geq \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \quad \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (*) \end{aligned}$$

Dễ thấy dấu "=" của (*) không thể xảy ra. Vậy $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$\text{e) } 31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}.$$

$$\text{f) } \left(\frac{7}{5}\right)^{90} = \left[\left((1.4)^3\right)^2\right]^{15} \cdot \left((2.3)^2\right)^{15} > 5^{15} > 5^{10}.$$

$$\text{Vậy } 7^{90} > 5^{100}.$$

Bài 10. Ta phải chứng minh

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq (ab + 1) \cdot (a + b) + 5$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + a^2b^2 \geq (a + b).ab + (a + b) + 4 \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{a^2b^2}{2} \geq |a+b| \cdot |ab| \geq (a+b)ab, \quad (1)$$

$$\frac{a^2b^2}{8} + 2 \geq |ab| \geq ab, \quad (2)$$

$$2 + \frac{a^2+b^2}{4} \geq 2 + \frac{(a+b)^2}{8} \geq |a+b| \geq a+b, \quad (3)$$

$$\frac{a^2+b^2}{4} \geq \frac{2^2+2^2}{4} = 2, \quad (4)$$

$$\frac{3}{8}a^2b^2 \geq \frac{3}{8} \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 6, \quad (5)$$

Cộng các vế (1) : (2), ... (5), suy ra

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} + a^2b^2 \geq (a+b) + ab(a+b) + ab + 4.$$

$$\text{Mặt khác, } a^2 + b^2 + a^2b^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} + a^2b^2 - ab,$$

hay $a^2 + b^2 + a^2b^2 \geq (a+b)ab + (a+b) + 4$. Vậy (*) được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 2$.

b) Đặt $P = |ab| + |bc| + |ca| - abc$.

$$P = |ab| + |bc| + |ca| - abc \leq |a| \cdot |b| + |b| \cdot |c| + |c| \cdot |a| + |abc|. \quad (1)$$

Đặt $|a| = x$; $|b| = y$ và $|c| = z \Rightarrow x, y, z \geq 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$,

$$\begin{cases} 3 = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \\ 3 = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt{(xyz)^2} \Rightarrow xyz \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx + xyz \leq 4. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $P \leq 4$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| = |c| \\ -abc = |abc| \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ trong 3 số a, b, c có một số bằng -1 , hai số bằng 1 , hoặc ba số cùng bằng -1 .

Bài 11. $A = 5x + y \Leftrightarrow y = A - 5x$,

$$x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x(A - 5x) + (A - 5x)^2 + 21 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 56x^2 - 16Ax + A^2 + 21 \leq 0 \text{ (do } S = \frac{16}{56} > 0 \text{ và } P = \frac{A^2 + 21}{56} > 0 \text{ nên tam}$$

thức ở vế trái có nghiệm dương khi $\Delta' \geq 0$).

$$\Rightarrow \Delta' = (8A)^2 - 56(21 + A^2) \geq 0 \Leftrightarrow A^2 \geq 147 \Leftrightarrow |A| \geq 7\sqrt{3}, \text{ mà } A > 0 \Rightarrow A \geq 7\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{3}$ và $y = 2\sqrt{3}$.

$$\text{b) } (x+y)+z \geq 2\sqrt{(x+y) \cdot z} \Leftrightarrow [(x+y)+z]^2 \geq 4(x+y)z$$

$$\Rightarrow 1 \geq 4(x+y)z \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \geq 4xy \cdot 4(x+y) \cdot z \Rightarrow (x+y) \geq 16xyz.$$

Tương tự, ta có $x+z \geq 16xyz$ và $y+z \geq 16xyz$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ hai trong ba số bằng $\frac{1}{4}$, một số bằng $\frac{1}{2}$.

Bài 12. a) Đặt $S = a + b + c$. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \max\{a, b, c\}$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{3a+S}{S-a}\right) \cdot \left(\frac{3b+S}{S-b}\right) \cdot \left(\frac{3c+S}{S-c}\right) > 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{27abc + 9(ab+bc+ca)S + 4S^3}{S(ab+bc+ca) - abc} > 25$$

$$\Leftrightarrow 52abc - 16(ab+bc+ca)S + 4S^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow 13abc - 4(ab+bc+ca)(a+b+c) + (a+b+c)^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow 13abc + (a+b+c)[(a+b-c)^2 - 4ab] > 0$$

$$\Leftrightarrow 13abc + (a+b+c) \cdot (a+b-c)^2 - 4ab(a+b+c) > 0$$

$$\Leftrightarrow ab(9c - 4a - 4b) + (a+b+c)(a+b-c)^2 > 0 \quad (2)$$

(2) hiển nhiên đúng do $c = \max\{a, b, c\}$, nên $9c > 4a + 4b$, suy ra điều phải chứng minh.

b) Đặt $\frac{a}{b} = x$; $\frac{b}{c} = y$; $\frac{c}{d} = z$ và $\frac{d}{a} = t \Rightarrow xy.z.t = 1$.

Ta luôn có: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (t-1)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 2.(x + y + z + t) \quad (1)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi: } x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 4 \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2), ta suy ra: $2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \geq 2(x + y + z + t)$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = t$, hay $a = b = c = d$.

Bài 13. Ta có $S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} \Rightarrow 2S_{ABC} = ax + by + cz$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpki có

$$\begin{aligned} & \left[(\sqrt{ax})^2 + (\sqrt{by})^2 + (\sqrt{cz})^2 \right] \left[\left(\sqrt{\frac{1}{a}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{b}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 \right] \\ & \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2, \text{ hay } (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \leq \sqrt{2S_{ABC}} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \\ & = \sqrt{2 \frac{abc}{4R} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2R}} \sqrt{ab + bc + ca} \leq \frac{1}{\sqrt{2R}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2R}} \cdot \sqrt{9R^2} = 3\sqrt{\frac{R}{2}}, \text{ (do } a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2). \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi tam giác ABC đều.

(Bạn đọc có thể tự chứng minh kết quả sau: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$).

Bài 14. Ta có bất đẳng thức quen thuộc sau

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{u^2 + v^2} \geq \sqrt{(x+u)^2 + (y+v)^2}. \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{u} = \frac{y}{v}$.

$$a = \sqrt{(x+1006)^2 + 1}, \quad b = \sqrt{(1005-x)^2 + 1}, \quad c = 2011.$$

Sử dụng bất đẳng thức (*), dễ thấy

$$a + b \geq \sqrt{(x + 1006 + 1005 - x)^2 + (1 + 1)^2} > c = 2011 \text{ và}$$

$$\begin{aligned} a + c &= \sqrt{(x + 1006)^2 + 1^2} + \sqrt{2011^2 + 0^2} \geq \sqrt{[2011 + (-x - 1006)]^2 + (1 + 0)^2} \\ &\geq \sqrt{(1005 - x)^2 + 1^2} = b. \end{aligned}$$

Không xảy ra dấu "=" do $\frac{2011}{-x - 1006} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow a + c > b$. Tương tự: $b + c > a$.

Vậy a, b, c luôn có thể được chọn làm độ dài ba cạnh của tam giác ABC.

Bài 15. a) Ta có

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} > \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1. \quad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} &= \frac{x}{\sqrt{x(y+z)}} + \frac{y}{\sqrt{y(z+x)}} + \frac{z}{\sqrt{z(x+y)}} \\ &\geq \frac{2x}{(x+y+z)} + \frac{2y}{(x+y+z)} + \frac{2z}{(x+y+z)} = 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2), ta được điều phải chứng minh.

$$\text{b) } x^2 + xy + y^2 = 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \geq 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + xy + y^2} \geq \sqrt{3} \cdot \frac{(x+y)}{2}.$$

$$\text{Tương tự, } \sqrt{y^2 + yz + z^2} \geq \sqrt{3} \left(\frac{y+z}{2}\right), \quad \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{3} \left(\frac{x+z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{3}(\lambda + y + z).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

IV.2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

IV.2.1. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Giả sử $F = F(x, y)$ là biểu thức phụ thuộc vào hai biến x, y , trong đó $x \in X$ và $y \in Y$.

Nếu $\begin{cases} F \geq m \text{ với } \forall x \in X, \forall y \in Y \\ \exists x_0 \in X, \exists y_0 \in Y \text{ sao cho } F(x_0, y_0) = m \end{cases}$

thì m gọi là giá trị bé nhất của F .

Ta kí hiệu như sau : $m = \min_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} F$ (hoặc $m = \min F$)

Nếu $\begin{cases} F \leq k \text{ với } \forall x \in X, \forall y \in Y \\ \exists x_0 \in X, \exists y_0 \in Y \text{ sao cho } F(x_0, y_0) = k \end{cases}$

thì k gọi là giá trị lớn nhất của F .

Ta kí hiệu như sau : $k = \max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} F$, hoặc $k = \max F$

Nếu $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là biểu thức phụ thuộc vào n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ thì ta định nghĩa $\min F, \max F$ cũng bằng cách tương tự trên.

IV.2.2. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1.

a) Cho $x > 2012, y > 2012$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{x^2}{x-2012} + \frac{y^2}{y-2012}.$$

b) Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$B = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \cdot \left(1 + \frac{y}{z}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{x}\right).$$

Giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$A \geq 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x-2012}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y-2012}}$$

$$= 2 \left(\frac{x-2012}{\sqrt{x-2012}} + \frac{2012}{\sqrt{x-2012}} \right) \cdot \left(\frac{y-2012}{\sqrt{y-2012}} + \frac{2012}{\sqrt{y-2012}} \right) \\ \geq 2 \left(2\sqrt{2012} \right) \cdot \left(2\sqrt{2012} \right) = 8 \cdot 2012 = 16096.$$

Vậy $\min A = 16096$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2 \times 2012 = 4024$.

b) Ta có

$$B = \left(1 + \frac{x}{y} \right) \left(1 + \frac{y}{z} \right) \left(1 + \frac{z}{x} \right) = 2 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \\ = \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} + 1 \right) + \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{z} + 1 \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1 \right) - 1 \geq 3 \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}} + \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}} \right) - 1 \\ = 3 \cdot \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} - 1 = 2 \left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \right) + \left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \right) - 1 \geq 2 \left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \right) + 3 \left(\frac{\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{xyz}} \right) - 1 \\ = 2 \left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \right) + 2 \geq 2 \cdot 3 + 2 = 8. \text{ Vậy } \min B = 8.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Ví dụ 2.

a) Cho a, b là hai số thay đổi thỏa mãn $(2a - 2009)^2 + (3b - 2010)^2 = 53$.

Tìm giá trị lớn nhất của $X = 4a + 21b$.

b) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$H = \frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)}.$$

Giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có

$$\left[(2a - 2009)^2 + (3b - 2010)^2 \right] \left[2^2 + 7^2 \right] \geq \left[2 \cdot (2a - 2009) + 7 \cdot (3b - 2010) \right]^2.$$

hay

$$2(2a - 2009) + 7(3b - 2010) \leq \sqrt{(2a - 2009)^2 + (3b - 2010)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 7^2} = 53$$

$$\Rightarrow (4a + 21b) - 2.2009 - 7.2010 \leq 53$$

$$\Rightarrow 4a + 21b \leq 2.2009 + 7.2010 + 53.$$

Vậy $(4a + 21b)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 18141.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a-2009}{2} = \frac{3b-2010}{7} \\ (2a-2009)^2 + (3b-2010)^2 = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2011}{2} \\ b = \frac{2017}{3} \end{cases}.$$

b) Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $c = \frac{1}{z}$, ta có: $abc = 1$ và $a, b, c > 0$.

$$H = \frac{a^3bc}{b+c} + \frac{b^3ac}{a+c} + \frac{c^3ab}{a+b} = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \text{ do } abc = 1.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= \left(\frac{a}{\sqrt{b+c}} \cdot \sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} \cdot \sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \cdot \sqrt{a+b} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \cdot (2a+2b+2c). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } H \geq \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) \geq \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{abc} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a.b.c=1 \\ \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Vậy $\min H = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của y

$$a) y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1};$$

$$b) y = \sqrt{x} + \sqrt{x-2\sqrt{x}+1} + \sqrt{x-4\sqrt{x}+4} + \sqrt{x-6\sqrt{x}+9}.$$

Giải.

$$a) y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} \text{ xác định} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Ta có $y \geq 1$ với $x \geq 1$. Vậy y nhỏ nhất $= 1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

$$b) \text{ Ta có } y = \sqrt{x} + \sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x}-3)^2}.$$

Tập xác định : $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y &= \sqrt{x} + |\sqrt{x}-1| + |\sqrt{x}-2| + |\sqrt{x}-3| \\ &= \sqrt{x} + |3-\sqrt{x}| + |1-\sqrt{x}| + |\sqrt{x}-2| \geq |\sqrt{x}+3-\sqrt{x}| + |1-\sqrt{x}+\sqrt{x}-2| = 4. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}(3-\sqrt{x}) \geq 0 \\ (1-\sqrt{x})(\sqrt{x}-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2. \text{ Vậy min } y = 4.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

IV.2.3. MỘT SỐ BÀI TẬP

A. Để bài

Bài 1.

a) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $y = \sqrt{2010-x} + \sqrt{x-2009}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ với $0 \leq x \leq 2$.

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$a) g(x) = \frac{2x^2 + 73}{\sqrt{x^2 + 4}};$$

$$b) h(x) = x^4 + (3-x)^4 + 6x^2(3-x)^2 \text{ với } x \text{ thay đổi thỏa mãn điều kiện} \\ x^2 + (3-x)^2 \geq 5.$$

(Để thi vào khối chuyên toán và chuyên tin ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Bài 3. a) Tìm giá trị lớn nhất của

$$A = \frac{y.z.x^4 + 2yz}{x^4y^2z^2 + x^4y^2 + x^4z^2 + 2y^2z^2 + x^4 + 2y^2 + 2z^2 + 2}.$$

b) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của $B = 2(x^6 + y^6 + z^6) - (x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2)$.

Bài 4.

a) Cho x, y, z dương thay đổi thoả mãn $(x + y + z) = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của } A = \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{z^2} + \frac{z^6}{x^2}.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)}$
với a, b, c là các số dương.

Bài 5.

a) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $A = \frac{1}{2011 - \sqrt{2010 - 3x^2}}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $B = \sqrt{3x^2 + 6x} - 11$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của $C = x^3(2010 - x)$ với $x \geq 0$.

d) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $D = |x - 2009| + |y - 2010|$, trong đó
 $|x| + |y| = 2008$.

e) Cho các số dương x, y, z thoả mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng :

$$A = \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là } 3\sqrt{3}.$$

f) Cho $x, y, z \in [0; 2]$. Chứng minh rằng $B = 2(x + y + z) - (xy + yz + zx)$
đạt giá trị lớn nhất là 4.

B. Lời giải

Bài 1.

a) Điều kiện $2009 \leq x \leq 2010$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta có } y^2 &= (2010 - x) + (x - 2009) + 2\sqrt{(2010 - x)(x - 2009)} \\ &= 1 + 2\sqrt{(2010 - x)(x - 2009)} \geq 1. \end{aligned}$$

$$y^2 \geq 1 \text{ mà } y \geq 0 \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow \min y = 1.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2010 \\ x = 2009. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max A = \frac{1}{4}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \\ x \text{ tùy ý.} \end{cases}$$

b) Do vai trò của x, y, z bình đẳng, nên giả sử $|x| \leq |y| \leq |z|$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x^4(x^2 - y^2) \leq 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(x^4 - z^4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4(2y^2 - z^2) \leq y^4 z^2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4 z^2 \leq z^6 & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(x^6 + y^6 + z^6) - (x^4 y^2 + y^4 z^2 + z^4 x^2) \leq 3z^6 \leq 3 \cdot 2^6 = 192. \quad (**)$$

Ta thấy (**) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ (1), (2), (3) \text{ đồng thời trở thành đẳng thức} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ |y| = |z| \\ \begin{cases} x = 0 \\ |x| = |z| \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ |x| = |y| \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow |y| = |z| = 2 \text{ và } |x| = 2, \text{ hoặc } x = 0,$$

$$\text{hay } B + 4xy(x^2 + y^2) = 81 \Rightarrow B = 81 - 4xy(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow B = 81 - 2[9 - (x^2 + y^2)] \cdot (x^2 + y^2) = 81 - 18(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2)^2.$$

Đặt $u = x^2 + y^2 \geq 5$, lại có

$$B = 2u^2 - 18u + 81 = 41 + 2(u - 5)^2 + 2(u - 5) \geq 41.$$

$$\text{Vậy } B \text{ đạt min bằng } 41, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = 2; y = 1. \end{cases}$$

Bài 4.

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$\frac{x^6}{y^2} + y + y + 1 + 1 + 1 \geq 6\sqrt{\frac{x^6}{y^2} \cdot y^2 \cdot 1^3} = 6x \quad (1)$$

$$\frac{y^6}{z^2} + z + z + 1 + 1 + 1 \geq 6\sqrt{\frac{y^6}{z^2} \cdot z^2} = 6y \quad (2)$$

$$\frac{z^6}{x^2} + x + x + 1 + 1 + 1 \geq 6\sqrt{\frac{z^6}{x^2} \cdot x^2} = 6z \quad (3)$$

Cộng vế của các bất đẳng thức (1) ; (2) ; (3), suy ra

$$A + 2(x + y + z) + 9 \geq 6(x + y + z) \Leftrightarrow A \geq 4(x + y + z) - 9 = 3. \text{ Vậy } \min A = 3.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c}{2abc + a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Vì } a, b, c \text{ dương, nên} \\ &4(a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c) \geq \\ &\geq 3(2abc + a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c) \\ &\Leftrightarrow a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c - 6abc \geq 0 \\ &\Leftrightarrow b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + c(b-a)^2 \geq 0 \text{ (hiển nhiên)}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P \geq \frac{3}{4} \text{ với mọi } a, b, c \text{ dương. Do đó } \min P = \frac{3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 5.

$$\text{a) Ta có điều kiện } \begin{cases} 2010 - 3x^2 \geq 0 \\ 2011 \neq \sqrt{2010 - 3x^2} \end{cases} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{2010}{3}.$$

Để thấy với $|x| \leq \frac{2010}{3}$, thì $A > 0$ và $A = \frac{1}{2011 - \sqrt{2010 - 3x^2}} \geq \frac{1}{2011}$.

Do $2011 - \sqrt{2010 - 3x^2} \leq 2011 \Rightarrow \min A = \frac{1}{2011}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2010 = 3x^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2010}{3}}$.

Lại có: $2011 - \sqrt{2010 - 3x^2} \geq 2011 - \sqrt{2010}$, nên $A \leq \frac{1}{2011 - \sqrt{2010}}$

$\Rightarrow \max A = \frac{1}{-\sqrt{2010} + 2011}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

b) $B = \sqrt{3(x+1)^2 - 14}$

B xác định $\Leftrightarrow 3(x+1)^2 - 14 \geq 0 \Leftrightarrow |x+1| \geq \sqrt{\frac{14}{3}}$.

Ta có $B = \sqrt{3(x+1)^2 - 14} \geq 0 \Rightarrow \min B = 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{\frac{14}{3}} \\ x+1 = -\sqrt{\frac{14}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{\frac{14}{3}} \\ x = -1 - \sqrt{\frac{14}{3}} \end{cases}$.

Không tồn tại giá trị lớn nhất của B

c) Nếu $0 \leq x \leq 2010$, áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\left(\frac{\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + (2010-x)}{4} \right)^4 \geq \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{3} \cdot (2010-x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1005}{2} \right)^4 \geq \frac{1}{27} \cdot C \Leftrightarrow C \leq \frac{27}{16} \cdot 1005^4. \quad (1)$$

$$\text{Nếu } x > 2010, \text{ khi đó } c < 0. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta có $\max C = \frac{27}{16} \cdot 1005^4$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = 2010 - x \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3015}{2}.$$

d) Ta có

$$D = |x - 2009| + |y - 2010| \leq |x| + 2009 + |y| + 2010 = 2008 + 2009 + 2010.$$

$$\max D = 6027.$$

Dấu "=" xảy ra khi chẳng hạn $x = -4$ và $y = -2004$.

$$D \geq |x| - 2009 + |y| - 2010 = 2008 - 2009 - 2010; \min D = -2011.$$

Dấu "=" xảy ra khi chẳng hạn $x = 5$; $y = 2003$.

e) Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$1 + x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3xy \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{1 + x^3 + y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } \frac{\sqrt[3]{1 + y^3 + z^3}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} \quad (2) \text{ và } \frac{\sqrt[3]{1 + x^3 + z^3}}{xz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xz}} \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xz}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{xz}}} = 3\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\text{Cộng (1); (2); (3); (4), ta có } A \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow \min A = 3\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

f) Do $0 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 2$ và $0 \leq z \leq 2$

$$\Rightarrow (2 - x)(2 - y)(2 - z) \geq 0$$

$$\Rightarrow 8 - 4(x + y + z) + 2(zy + yz + zx) - xyz \geq 0$$

$$\Rightarrow 4(x + y + z) - 2(xy + yz + zx) \leq 8 - xyz \leq 8$$

$$\Rightarrow B = 2(x + y + z) - (xy + yz + zx) \leq 4.$$

Vậy $\max B = 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ trong ba số x, y, z có một số bằng 2 và một số bằng 0.

Chương V

MỘT SỐ NỘI DUNG CƠ BẢN VỀ HÌNH HỌC

V.1. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

V.1.1. ĐA GIÁC

a) Khái niệm đa giác :

Đa giác là một hình gồm một số hữu hạn đoạn thẳng, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

Các đoạn thẳng này được gọi là cạnh của đa giác. Các đầu mút của các cạnh gọi là các đỉnh của đa giác.

b) Định nghĩa đa giác lồi :

Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

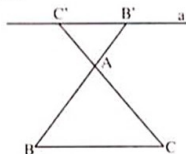
c) Đa giác đều : là đa giác có tất cả các góc bằng nhau và tất cả các cạnh bằng nhau.

V.1.2. ĐỊNH LÝ TALET VÀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

a) Định lý Talét thuận và đảo

Đường thẳng a cắt cạnh AB , AC của tam giác ABC tại B' , C' (h.1)

$$B'C' \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$



Hình 1

b) Tính chất đường phân giác trong tam giác

Giả sử AD là phân giác trong của góc BAC ; AE là phân giác ngoài của góc BAC thì

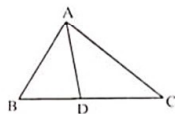
$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC}.$$

c) Tam giác đồng dạng

c1) Định nghĩa : $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

(tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C'$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A'}; \hat{B} = \hat{B'}; \hat{C} = \hat{C'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \end{cases}$$



Hình 2

Người ta gọi $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$ là tỉ số đồng dạng.

c2) Các trường hợp đồng dạng

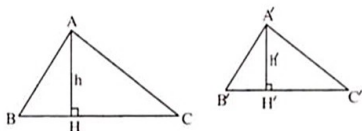
- *Trường hợp thứ nhất* : Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia, thì hai tam giác đó đồng dạng.
- *Trường hợp thứ hai* : Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đó đồng dạng.
- *Trường hợp thứ ba* : Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

c3) Tính chất

Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ với tỉ số đồng dạng k thì

$$\bullet \frac{AH}{A'H'} = \frac{h}{h'} = k \quad (\text{h.3})$$

(h, h' là độ dài các đường cao ứng với các cạnh $BC, B'C'$ lần lượt của $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$).

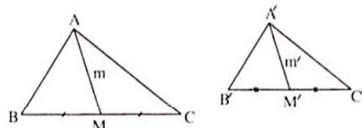


Hình 3

$$\bullet \frac{p}{p'} = k ; \frac{S}{S'} = k^2 \quad (p, p' \text{ tương ứng là nửa chu vi } \triangle ABC \text{ và } \triangle A'B'C' ; S, S' \text{ tương ứng là diện tích } \triangle ABC \text{ và } \triangle A'B'C').$$

$$\bullet \frac{AM}{A'M'} = k = \frac{m}{m'} \quad (\text{h.4})$$

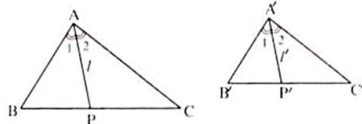
(m, m' tương ứng là độ dài các trung tuyến ứng với các cạnh $BC, B'C'$ của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$).



Hình 4

$$\bullet \frac{AP}{A'P'} = k = \frac{l}{l'} \quad (\text{h.5})$$

(l, l' tương ứng là độ dài các phân giác trong của $\hat{A}$ và $\hat{A}'$ của các tam giác ABC và $A'B'C'$).



Hình 5

V.1.3. ĐỊNH LÝ MÊNÉLAUYT VÀ ĐỊNH LÝ XÊVA

• **Định lý Mênélauyt** cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P tùy ý tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB (h.6).

$$M, N, P \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1.$$

• **Định lý Xêva**

AM, BN, CP đồng quy $\Leftrightarrow$

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \quad (\text{h.7}).$$

V.1.4. HỆ THỨC CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC VUÔNG

$\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$, $AH \perp BC$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$,
 $AH = h$ thì

$$\bullet \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$AC^2 = CH \cdot CA$$

$$bc = a \cdot h$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC}; \quad \cos B = \frac{AB}{BC}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB}; \quad \operatorname{cotg} B = \frac{AB}{AC}.$$

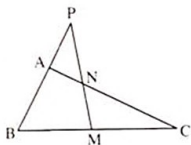
• Nếu α, β là 2 góc nhọn mà $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì

$$\sin \alpha = \cos \beta; \quad \cos \alpha = \sin \beta; \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$$

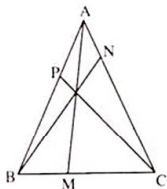
$$b = AC = a \sin B = a \cos C$$

$$b = c \cdot \operatorname{tg} B = c \cdot \operatorname{cotg} C$$

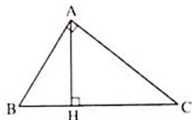
$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 \text{ với mọi góc } \gamma \text{ nhọn.}$$



Hình 6



Hình 7



Hình 8

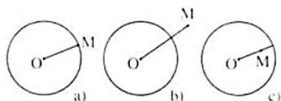
V.1.5. ĐƯỜNG TRÒN

a) **Định nghĩa đường tròn** : Đường tròn tâm O, bán kính R là tập hợp các điểm M sao cho $OM = R$ (ở đó O là điểm cố định, $R > 0$ là số không đổi cho trước).

M nằm trên (O, R) $\Leftrightarrow OM = R$ (h.9a).

M nằm ngoài (O, R) $\Leftrightarrow OM > R$ (h.9b).

M nằm trong (O, R) $\Leftrightarrow OM < R$ (h.9c).



Hình 9

b) Tứ giác nội tiếp

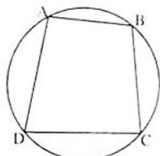
• **Định nghĩa** : Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp) (h.10).

• Các dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp :

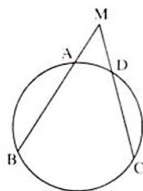
+ Tứ giác ABCD nội tiếp $\Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

+ Tứ giác ABCD nội tiếp $\Leftrightarrow$ tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa 2 đỉnh còn lại dưới cùng một góc.

+ Tứ giác ABCD nội tiếp $\Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$, ở đó M là giao điểm của AB và CD (h.11).



Hình 10



Hình 11

V.1.6. MỘT SỐ CÔNG THỨC HAY DÙNG

ΔABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ (h.12)

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC , thì :

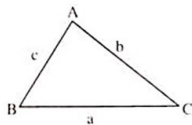
$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{abc}{4R} = p \cdot r \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

$$AH = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

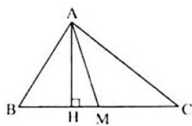
(AH là đường cao ứng với BC) (h.13).

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

(AM là trung tuyến ứng với cạnh BC (h.13)).



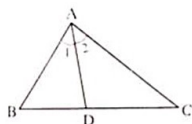
Hình 12



Hình 13

$$\bullet AD^2 = bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}$$

(AD là phân giác trong của $\hat{A}$ (h.14)).



Hình 14

V.2. MỘT SỐ BÀI TẬP

A. ĐỀ BÀI

Bài 1. Cho tam giác ABC và M tùy ý trong tam giác. Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác ABC và tạo thành các tam giác MIK, MPQ, MRS có các diện tích tương ứng là S_1, S_2, S_3 (h.15). Chứng minh rằng

$$S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

Bài 2. Cho tam giác ABC và tam giác MNK, ở đó MN song song với BC, NK song song với AB và MK song song với AC. Các cạnh của tam giác ABC và tam giác MNK cắt nhau tạo thành các tam giác BET, MEF, AFP, PNQ, QRC, TKR lần lượt có diện tích $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} + \dots + \sqrt{S_6} = \sqrt{S_{\Delta ABC}} + \sqrt{S_{\Delta MNK}}.$$

Bài 3. Cho ΔABC và điểm Q thuộc cạnh AB. CM là trung tuyến. Đường thẳng l tùy ý song song với CM cắt BC ở R và AC ở P. Chứng minh rằng :

$$QA \cdot QB = QP \cdot QR \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ.$$

Bài 4. Cho ΔABC đều. M tùy ý trên cạnh BC. Kẻ MP vuông góc với AB và MQ vuông góc với AC. Gọi I là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng MI luôn đi qua một điểm cố định, khi M di động trên cạnh BC.

Bài 5. a) Cho đoạn thẳng AB = a cm, điểm Q nằm giữa AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tam giác cân đỉnh Q là QAE và QBF sao cho góc ở đỉnh Q bằng 45° . Tìm vị trí của Q để EF có độ dài nhỏ nhất. Tính độ dài nhỏ nhất đó.

b) Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB dựng các hình vuông AQPR và QBKH với các tâm tương ứng là O, O'. Tìm vị trí của Q để OO' có độ dài nhỏ nhất. Tính độ dài nhỏ nhất đó.

Bài 6. a) Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh BC. Dựng phân giác trong của góc ADM cắt AB ở N. Chứng minh rằng : $DM = AN + CM$.

b) Tìm điểm M trên mặt phẳng hình vuông sao cho $MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm điểm N trên mặt phẳng hình vuông sao cho $NA^2 + NB^2 + NC^2 + ND^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

d) Biết độ dài cạnh hình vuông ABCD là a (đơn vị độ dài). Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến các cạnh của hình vuông bằng b (đơn vị độ dài).

e) Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A, cạnh bên bằng a(cm) và hai điểm M, N bất kì. Chứng minh rằng trên các cạnh của tam giác ABC tồn tại một điểm sao cho tổng các khoảng cách từ đó đến M và N lớn hơn 1,4a (cm).

Bài 7. a) Cho $\triangle ABC$. A' , B' , C' tương ứng thuộc các tia BA, AC, CB sao cho $AB = AA'$, $BC = BC'$ và $AC = CB'$. Chứng minh rằng trọng tâm $\triangle ABC$ trùng với trọng tâm $\triangle A'B'C'$.

b) Cho lục giác ABCDEF. Gọi I, K, M, N, R, S tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF và FA. Chứng minh rằng trọng tâm $\triangle IMR$ trùng với trọng tâm $\triangle SKN$.

c) Cho $\triangle ABC$ không có góc nào vượt quá 120° . Người ta dựng ra phía ngoài $\triangle ABC$ ba tam giác đều BCA_1 , CAB_1 và ABC_1 . Chứng minh rằng : trọng tâm của $\triangle A_1B_1C_1$ và trọng tâm của $\triangle ABC$ trùng nhau.

Bài 8. a) Cho lục giác ABCDEF có các cạnh đối song song. Chứng minh rằng :

$$S_{\triangle ACE} \geq \frac{1}{2} S_{\text{ABCDEF}}.$$

b) Chứng minh rằng nếu một lục giác có các góc bằng nhau thì hiệu các cạnh đối diện bằng nhau.

Bài 9. a) Cho ngũ giác lồi ABCDE có $\triangle ABC$ và $\triangle CED$ đều. Gọi O là tâm tam giác ABC. M và N lần lượt là trung điểm của BD và AE. Chứng minh $\triangle OME$ đồng dạng với $\triangle OND$.

b) Chứng minh rằng ngũ giác có 5 cạnh bằng nhau và ba góc liên tiếp bằng nhau là ngũ giác đều.

Bài 10. Cho $\triangle ABC$ với độ dài các phân giác trong tương ứng với 3 cạnh a, b, c là l_a , l_b , l_c và độ dài các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c là h_a , h_b , h_c . Tính 3 góc của tam giác ABC nếu :

$$a) l_a + l_b + l_c = \frac{\sqrt{3}}{2} (a + b + c) ;$$

$$b) a + h_a = b + h_b = c + h_c ;$$

$$c) m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3\sqrt{3} S_{\Delta ABC} \text{ (ở đó } m_a, m_b, m_c \text{ là độ dài các trung tuyến tương ứng với các cạnh } a, b, c \text{ của } \Delta ABC) ;$$

$$d) \text{ Chu vi của tam giác ABC bằng 2 và } a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = \frac{52}{27} ;$$

$$e) h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = 27r^2 \text{ (r là bán kính đường tròn nội tiếp } \Delta ABC).$$

Bài 11. Trên tia Ax lấy điểm E, E khác A. Từ E vẽ tia Ey không trùng với Ax. Trên tia Ey, lấy 2 điểm C, D phân biệt, khác E và C nằm giữa 2 điểm E, D. Một điểm B chạy trên tia Ex. Các đường thẳng AC và BD cắt nhau ở M, AD và BC cắt nhau ở N.

- 1) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn cắt tia Ey tại một điểm F cố định.
- 2) Hãy xác định một vị trí của B trên tia Ex sao cho các tam giác MCD và NCD có diện tích bằng nhau.

Bài 12. Cho ΔABC , AD là tia phân giác trong của góc A ; CH, BM tương ứng là các đường cao và đường trung tuyến ứng với cạnh AB và AC của ΔABC . Biết rằng AD, AH và AM cắt nhau tại 1 điểm. Chứng minh rằng : $AB\cos A = BC\cos B$.

Bài 13. a) Cho hình vuông ABCD. Tính $\cos \widehat{MAN}$, biết rằng M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, CD.

b) Lấy Q trong hình vuông ABCD sao cho $AQ = 1, QB = \sqrt{2}, QC = \sqrt{3}$. Tính $\sin \widehat{ABQ}$ và $\widehat{AQB}$.

Bài 14. Trực tâm H của ΔABC chia đường cao CC_1 thành hai phần bằng nhau. Chứng minh rằng $\cos C = \cos A \cdot \cos B$.

Bài 15. Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Chứng minh rằng : $R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3)$, (*) ở đó R_1, R_2, R_3 là các khoảng cách từ điểm O tùy ý nằm trong ΔABC đến các đỉnh A, B, C và r_1, r_2, r_3 là khoảng cách từ O đến các cạnh BC, CA, AB. Bất đẳng thức (*) còn đúng nữa không nếu ΔABC không phải là tam giác có 3 góc đều nhọn.

Bài 16. Cho tứ giác ABCD có $AD = \sqrt{3}$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 60^\circ$, E và F là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD. Biết $EF = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. Tính $\cos \widehat{EIF}$ và BC.

Bài 17. Cho ΔABC có 3 góc đều nhọn. Chứng minh rằng :

a) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$;

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{A}{R}$, ở đó r, R theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 18. Nếu tam giác ABC có góc A tù và độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp thì độ dài các cạnh đó là 2, 3, 4.

Bài 19. Cho $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4).$$

Chứng minh rằng : 3 số a_i, a_j, a_k ($1 \leq i < j < k \leq n$) là độ dài 3 cạnh của một tam giác. (1)

Bài 20. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng trong 3 tam giác ADF, BDE, CEF tồn tại một tam giác có diện tích nhỏ hơn hay bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC.

Khi nào cả 3 tam giác có cùng diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC.

Bài 21. Cho tam giác ABC và 3 đường phân giác trong AD, BE, CF. Chứng minh

rằng $S_{DEF} \leq \frac{1}{4} S_{ABC}$.

Bài 22. Chứng minh rằng nếu một tam giác và một hình vuông có cùng diện tích thì chu vi tam giác lớn hơn chu vi hình vuông.

Bài 23. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác cắt nhau tại H và cắt (O ; R) lần lượt tại các giao điểm thứ hai D', E', F'.

a) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF ;

b) Chứng minh $DD' = DH$; $EE' = EH$; $FF' = FH$;

c) Chứng minh EF song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O ; R).

d) Gọi các đường tròn (O_1) ; (O_2) ; (O_3) lần lượt là các đường tròn đối xứng của (O, R) qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng : 3 đường tròn đó cùng đi qua một điểm.

e) Tìm điều kiện ràng buộc giữa góc B và góc C của ΔABC để tỉ số $\frac{HA}{HD} = 2012$.

Bài 24. a) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi P, Q tương ứng là các điểm đối xứng với I và O qua AC. Chứng minh rằng nếu P nằm trên (O, R) thì Q cũng nằm trên đường tròn ấy.

b) Đường trung tuyến CE của tam giác ABC cắt đường tròn (O, R) ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Chứng minh rằng : điều kiện cần và đủ để trọng tâm của tam giác ABC là trung điểm của dây CD là $2c^2 = a^2 + b^2$.

Bài 25. Cho đường tròn (O) bán kính R, một dây AB cố định $(AB < 2R)$, một điểm M bất kì trên cung AB lớn của (O) . Gọi I là trung điểm của dây AB và (O') là đường tròn qua M tiếp xúc với đường thẳng AB tại A. Đường thẳng MI cắt các đường tròn (O) và (O') tương ứng tại N, P. Chứng minh rằng :

a) $IA^2 = IP \cdot IM$.

b) Tứ giác ANBP là hình bình hành.

c) IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMBP .

d) Khi M di chuyển trên cung lớn AB thì trọng tâm của tam giác PAB chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 26. Cho tam giác vuông có độ dài các cạnh là các số nguyên. Hai trong các số đó là các số nguyên tố và hiệu của chúng là 50. Tìm giá trị nhỏ nhất mà cạnh thứ ba có thể nhận được.

Bài 27. Cho tam giác ABC. Biết BQ, AP, CR cắt nhau tại 1 điểm M (Q, P, R tương ứng thuộc các đoạn AC, BC, AB) và $S_{\Delta AMQ} = S_{\Delta AMR}$; $S_{\Delta BMR} = S_{\Delta BMP}$ và $S_{\Delta CMP} = S_{\Delta CMQ}$. Chứng minh rằng : M là giao điểm các trung tuyến của tam giác ABC.

Bài 28. Cho hình vuông ABCD và một điểm E bất kì trên cạnh BC. Tia Ax vuông góc với AE cắt cạnh CD kéo dài tại F. Kẻ trung tuyến AI của tam giác AEF và kéo dài cắt cạnh CD ở K. Đường thẳng qua E song song với AB cắt AI tại G.

a) Chứng minh $AE = AF$ và tứ giác EGIK là hình thoi.

b) Chứng minh hai tam giác AKF, CAF đồng dạng và $AF^2 = KF \cdot CF$.

c) Cho E chuyển động trên cạnh BC. Chứng minh $EK = BE + DK$ và chu vi ΔECK không đổi.

Bài 29. Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau, từ giao điểm của hai đường chéo hạ đường vuông góc xuống các cạnh. Chứng minh rằng chân các đường vuông góc và trung điểm bốn cạnh tạo thành một bát giác nội tiếp.

Bài 30. Một tam giác ABC thay đổi nhưng luôn ngoại tiếp đường tròn cố định tâm O, bán kính r. Đỉnh A chạy trên một đường thẳng Δ cố định, còn hai đỉnh B và C thì chạy trên một đường thẳng Δ' , $\Delta' \parallel \Delta$. I là tiếp điểm của đường tròn (O) và đường thẳng Δ' .

a) Chứng minh rằng : $BI \cdot IC$ là một hằng số.

b) Tìm vị trí của A để tích các bán kính các đường tròn bàng tiếp của ΔABC là nhỏ nhất.

B. LỜI GIẢI

Bài 1. Đặt $QP = y$; $BP = x$ và $QC = z$ (h.15).

Ta có các ΔIKM , ΔMPQ và ΔSMR đồng dạng với tam giác ABC,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{x^2}{(x+y+z)^2}$$

(ở đó S là diện tích ΔABC);

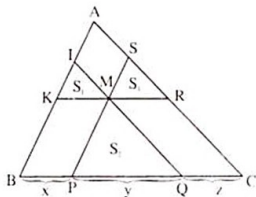
$$\frac{S_2}{S} = \frac{y^2}{(x+y+z)^2}; \quad \frac{S_3}{S} = \frac{z^2}{(x+y+z)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{(x+y+z)^2} \geq \frac{1}{3} \text{ (hiển nhiên).}$$

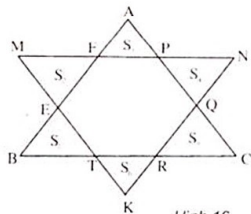
$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{BC}{3}.$$

Bài 2. Ta có (h.16) :

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_{ABC}}} + \frac{\sqrt{S_6}}{\sqrt{S_{ABC}}} + \frac{\sqrt{S_5}}{\sqrt{S_{ABC}}} \\ &= \frac{BT}{BC} + \frac{TR}{BC} + \frac{RC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1 \end{aligned}$$



Hình 15



Hình 16

$$\Rightarrow \sqrt{S_1} + \sqrt{S_6} + \sqrt{S_5} = \sqrt{S_{ABC}}. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{S_2} + \sqrt{S_4} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S_{MNC}}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \dots + \sqrt{S_6} = \sqrt{S_{ABC}} + \sqrt{S_{MNC}}.$$

Bài 3. Ta có (h.17) :

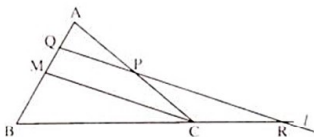
$$QP \parallel CM \Rightarrow \frac{QA}{QP} = \frac{AM}{CM} = \frac{BA}{2CM};$$

$$QR \parallel CM \Rightarrow \frac{QB}{QR} = \frac{BM}{CM} = \frac{BA}{2CM}.$$

$$QA \cdot QB = QP \cdot QR$$

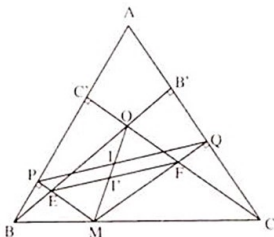
$$\Leftrightarrow BA^2 = (2CM)^2$$

$$\Leftrightarrow BA = 2MC \Leftrightarrow \hat{C} = 90^\circ.$$



Hình 17

Bài 4. Ta có kết quả sau : “Trong một hình thang giao điểm của hai cạnh bên, giao điểm hai đường chéo và hai trung điểm hai đáy nằm trên một đường thẳng”. Kẻ BB' , CC' lần lượt vuông góc với AC , AB . BB' cắt CC' tại O . Gọi E , F tương ứng là giao điểm của MP và BB' , MQ và CC' . Dễ thấy tứ giác $MEOF$ là hình bình hành và $\frac{ME}{MP} = \frac{MF}{MQ} \Rightarrow EF \parallel PQ$.



Hình 18

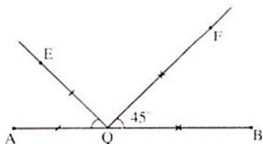
Lại có I , I' lần lượt là trung điểm của PQ , $EF \Rightarrow M, I, I'$ thẳng hàng $\Rightarrow M, I, O$ thẳng hàng, tức là MI qua O cố định (h.18).

Bài 5. a) Ta có $QA = QE$; $QB = QF$. Từ giả thiết suy ra $\widehat{EQF} = 90^\circ$ (h.19)

$$\Rightarrow EF^2 = QE^2 + QF^2 = QA^2 + QB^2$$

$$\geq \frac{(QA + QB)^2}{2} \Rightarrow EF \geq \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}AB}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min EF = \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$



Hình 19

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow Q$ là trung điểm của đoạn AB.

Chú ý : Kết quả bài toán vẫn đúng nếu các tam giác QAE, QBF cân tại Q và

$\widehat{EQA} = \widehat{FQB} = \alpha^\circ$ (α cho trước, tùy

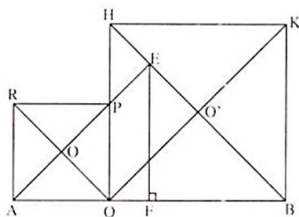
ý, $\alpha < 90^\circ$).

b) Kéo dài AO cắt BO' tại E, kẻ EF vuông góc với AB tại F. Dễ thấy tứ giác EOQO' là hình chữ nhật (h.20).

$\Rightarrow EQ = OO', EQ \geq EF$.

Suy ra min $OO' = EF$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow Q$ trùng với F, với F là trung điểm của đoạn AB.



Hình 20

Bài 6. a) Kéo dài BA, trên tia BA lấy E sao cho $AE = CM$ (h. 21).

$\Rightarrow \triangle AED = \triangle CMD$

$\Rightarrow ED = DM$ (1) và $\widehat{D}_3 = \widehat{D}_4$ (2)

có $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ và $\widehat{D}_3 = \widehat{D}_4$

$\Rightarrow \widehat{EDN} = \widehat{NDC} = \widehat{END}$

$\Rightarrow \triangle EDN$ cân tại E $\Rightarrow DE = EN$,

mà $EN = EA + AN = CM + AN$ (3)

Vậy $DM = AN + CM$.

b) $X = MA + MB + MC + MD \geq AC + BD$

$\Rightarrow X$ nhỏ nhất $= AC + BD$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv Q$ (Q là giao điểm 2 đường chéo AC, BD) (h.22).

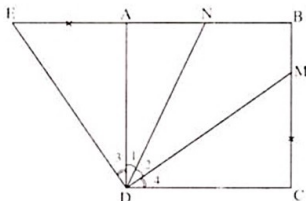
c) $Y = NA^2 + NB^2 + NC^2 + ND^2$

$= (NA^2 + NC^2) + (NB^2 + ND^2)$

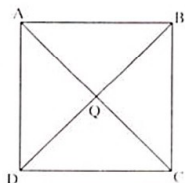
$= 4NQ^2 + AC^2 + BD^2 \geq AC^2 + BD^2$.

Vậy Y nhỏ nhất $= AC^2 + BD^2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow N \equiv Q$ (h.22).



Hình 21



Hình 22

d) Trường hợp I (h.23)

M nằm trong mặt phẳng hình vuông ABCD. Do M nằm trong mặt phẳng hình vuông nên tổng các khoảng cách từ M đến 4 cạnh của hình vuông bằng $2a$.

- Nếu $b > 2a$ hoặc $b < 2a$ thì không tồn tại quỹ tích M.

- Nếu $b = 2a$ thì quỹ tích các điểm M là toàn bộ phần mặt phẳng ở trong hình vuông ABCD, kể cả biên.

Trường hợp II :

Nếu M nằm ngoài mặt phẳng hình vuông ABCD (h.24).

II.1) Nếu M nằm trong các phần (I) ; (II) ; (III) ; (IV), ta có tổng các khoảng cách từ M đến

$$AB, BC, CD, DA \text{ là } MH + ME + MF + MI = 2a + 2MH.$$

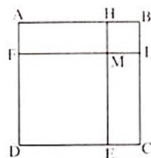
- Nếu $b \leq 2a$ thì không tồn tại quỹ tích các điểm M.

- Nếu $b > 2a$ thì quỹ tích M là các đoạn thẳng $A'B', C'D', E'F', I'K'$ tương ứng cách các đoạn AB, BC, CD, AD một khoảng bằng $(b - 2a) : 2$ (h.25).

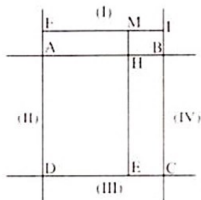
II.2) Nếu M nằm trong các góc V, VI, VII, VIII (h.26) thì tổng các khoảng cách từ M đến các cạnh AB, BC, CD, DA là

$$\begin{aligned} & MH + MI + MF + ME = \\ & = (x + a) + (y + a) + y + x \\ & = 2(x + y) + 2a \text{ (h.27).} \end{aligned}$$

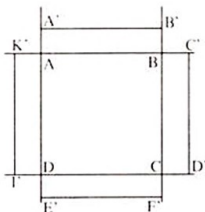
- Nếu $b \leq 2a$ thì không tồn tại quỹ tích M.



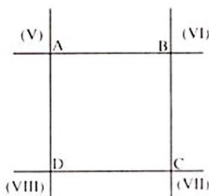
Hình 23



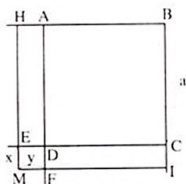
Hình 24



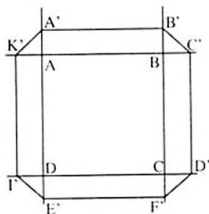
Hình 25



Hình 26



Hình 27



Hình 28

- Nếu $b > 2a$ thì $x + y = \frac{b - 2a}{2}$.

Dễ chứng minh thấy (h.28) :

Nếu $M \in (V)$ thì M thuộc đoạn $A'K'$.

Nếu $M \in (VI)$ thì M thuộc đoạn $B'C'$.

Nếu $M \in (VII)$ thì M thuộc đoạn $D'F'$.

Nếu $M \in (VIII)$ thì M thuộc đoạn $I'E'$.

Vậy quỹ tích các điểm M là bất giác $A'B'C'D'F'E'I'K'$.

e) Vì $AB = AC = a$ nên $BC = a\sqrt{2} > 1,4a$.

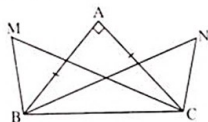
Ta có $BM + CM \geq BC > 1,4a$;

$BN + CN \geq BC > 1,4a$

$\Rightarrow (BM + BN) + (CM + CN) > 2,8a$

$\Rightarrow$ tồn tại một tổng lớn hơn $1,4a$.

Giả sử $BM + BN > 1,4a$ thế thì B là điểm cần tìm (h.29).



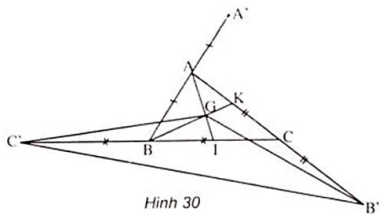
Hình 29

Bài 7. Sử dụng kết quả bài toán sau :

“Cho $\triangle ABC$, G là một điểm nằm trong $\triangle ABC$. G là trọng tâm $\triangle ABC$

$$\Leftrightarrow S_{GAB} = S_{GBC} =$$

$$= S_{GCA} = \frac{1}{3} S_{ABC}.”$$



Hình 30

Để thấy $S_{\Delta A'B'C'} = 7S_{\Delta ABC}$. Gọi G là trọng tâm ΔABC (h.30).

$$\text{Ta có : } S_{C'BB'} = S_{\Delta BC} : S_{GC'B} = S_{GBC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} :$$

$$S_{BGB'} = \frac{2}{3} S_{BKB'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABC}.$$

$$\text{Do đó } S_{GB'C'} = \frac{7}{3} S_{\Delta ABC} = S_{GBC} + S_{C'BB'} + S_{GBB'}.$$

Tương tự $S_{GA'B'} = S_{GA'C'} = \frac{7}{3} S_{\Delta ABC} \Rightarrow G$ là trọng tâm $\Delta A'B'C'$. Vậy tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

b) Gọi Q là trung điểm của FC (h.31)

Để thấy, tứ giác SIKQ và tứ giác RQMN là hình bình hành, suy ra IQ cắt SK tại N' và N' là trung điểm của SK.

Tương tự, QN' cắt RM tại I' thì I' là trung điểm của RM. Trong tam giác QIN, các trung tuyến II' , NN' cắt nhau tại G và G là trọng tâm ΔQIN
 $\Rightarrow IG = \frac{2}{3} II'$, $NG = \frac{2}{3} NN'$.

Ta có : G thuộc trung tuyến II' của tam giác

IRM và $IG = \frac{2}{3} II' \Rightarrow G$ là trọng tâm ΔIRM (1)

Mặt khác, G cũng thuộc trung tuyến NN'

của ΔNSK và $NG = \frac{2}{3} NN'$

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của ΔNSK (2).

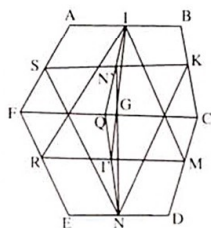
Vậy ΔNSK và ΔIRM có cùng trọng tâm.

c) Dựng tam giác đều PBC (P nằm trên nửa mặt phẳng chứa A bờ BC).

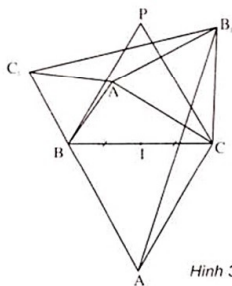
Ta có $\Delta ABC = \Delta PCB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow B_1P = AB = AC_1$$

$$\text{và } \widehat{PB_1A} + \widehat{B_1AC_1} = 180^\circ$$



Hình 31



Hình 32

$\Rightarrow PB_1 \parallel AC_1$ và tứ giác PB_1AC_1 là hình bình hành. Dễ thấy tứ giác $BPCA_1$ cũng là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của BC (h.32).

ΔPAA_1 có AI và A_1M là các trung tuyến cắt nhau tại G và G là trọng tâm ΔPAA_1 . Mặt khác, AI là trung tuyến của ΔABC và $AG = \frac{2}{3} AI$ nên G là trọng tâm của ΔABC . A_1M là trung tuyến của ΔAA_1P và $A_1G = \frac{2}{3} A_1M$ nên G là trọng tâm $\Delta A_1B_1C_1$. Vậy trọng tâm ΔABC trùng với trọng tâm $\Delta A_1B_1C_1$.

Bài 8. a) Dựng các hình bình hành như hình 33.

Dễ thấy : $S_{ACE} = S_1 + S_2 + S_3 + S_{IKH}$

$S_{ABCDEF} = 2(S_1 + S_2 + S_3) + S_{IKH}$.

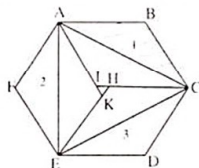
suy ra $S_{ACE} \geq \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$.

Dấu “=” xảy ra khi lục giác $ABCDEF$ là lục giác đều.

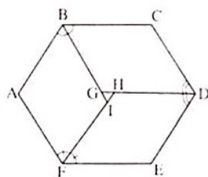
b) Vẽ các tia phân giác trong của các góc B, D, F , chúng cắt nhau tạo thành ΔGHI (h.34).

Dễ thấy ΔGHI đều nên

$AB - DE = CD - AF = EF - BC$.



Hình 33



Hình 34

Bài 9. a) Trên tia ON lấy $ON = NK$

$\Rightarrow \Delta AON = \Delta EKN$ (c.g.c)

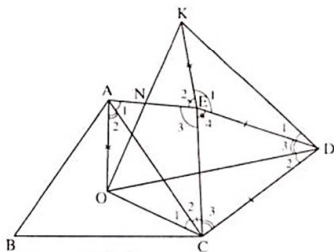
$\Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{AEK}$

$= \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 30^\circ + \hat{A}_1$

$\Rightarrow \hat{E}_1 = 360^\circ - \hat{E}_2 - \hat{E}_3 - \hat{E}_4$

$= 360^\circ - 30^\circ - \hat{A}_1 - \hat{E}_3 - 60^\circ$

$= 270^\circ - \hat{A}_1 - \hat{E}_3$



Hình 35

$$= 270^\circ - (180^\circ - \hat{C}_2) = 90^\circ + \hat{C}_2 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{OCD} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 = 30^\circ + \hat{C}_2 + 60^\circ = 90^\circ + \hat{C}_2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OCD} = \widehat{KED}$ ($= 90^\circ + \hat{C}_2$), mà $KE = AO$

(do $\Delta NKE = \Delta NAO$), $AO = OC$ (do O là tâm của ΔABC đều), $CD = ED$

$$\Rightarrow \Delta KED = \Delta OCD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \text{ và } DK = DO \quad (3)$$

$$\text{Ta có } \hat{D}_2 + \hat{D}_3 = \hat{D}_1 + \hat{D}_3 = 60^\circ, \text{ hay } \widehat{KDO} = 60^\circ. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \Delta KDO$ đều, hay ΔNOD là tam giác nửa đều.

Tương tự, ΔOME cũng là tam giác nửa đều. Vậy $\Delta OME \sim \Delta OND$.

b) Ta có (h.36)

$$\Delta ABC = \Delta BCD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \text{ và } AC = BD;$$

$$\Delta ABD = \Delta ACD \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D}_2$$

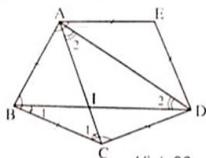
$$\Rightarrow \Delta IAD \text{ và } \Delta IBC \text{ cân tại } I \text{ mà } \widehat{AID} = \widehat{BIC}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \hat{A}_2 = \hat{D}_2 \Rightarrow \text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình}$$

thang cân, suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CDA}$, do đó $\widehat{BAE} = \widehat{EDC}$, tức là $\hat{A} = \hat{D}$.

Chứng minh tương tự đối với tứ giác $ABCE$, ta được $\hat{C} = \hat{E}$.

Vậy $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E}$, hay ngũ giác $ABCDE$ là ngũ giác đều.



Hình 36

Bài 10. a) Ta có $3(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2) \geq (l_a + l_b + l_c)^2$.

$$\text{Mà } l_a^2 = bc \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}; l_b^2 = ac \frac{(a+c)^2 - b^2}{(a+c)^2}; l_c^2 = ab \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}.$$

$$\Rightarrow 3(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2) \leq \frac{3}{4}[(b+c)^2 - a^2 + (a+c)^2 - b^2 + (a+b)^2 - c^2]$$

$$= \frac{3}{4}(a+b+c) \cdot [(b+c) - a + (a+c) - b + (a+b) - c]$$

$$= \frac{3}{4}(a+b+c)(a+b+c).$$

$$\text{Vậy } (l_a^2 + l_b^2 + l_c^2) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (a + b + c).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Do đó nếu $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (a + b + c)$ thì ΔABC là tam giác đều.

$$\text{b) } a + h_a = b + h_b = c + h_c \quad (1) \Leftrightarrow a^2 + h_a^2 = b^2 + h_b^2 = c^2 + h_c^2$$

$$a^2 + h_a^2 = b^2 + h_b^2 \Rightarrow a^2 - h_b^2 = b^2 - h_a^2$$

$$\Rightarrow (a - h_b)(a + h_b) = (b - h_a)(b + h_a) \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác, do } (1) \Rightarrow a - h_b = b - h_a \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $a + h_b = b + h_a$ và $a + h_a = b + h_b$, suy ra $h_a = h_b$.

Tương tự, $h_b = h_c$. Vậy ΔABC là tam giác đều.

c) Ta có :

$$\left. \begin{aligned} b^2 + c^2 &= 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \\ c^2 + a^2 &= 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \\ a^2 + b^2 &= 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$\begin{aligned} p &= (p - a) + (p - b) + (p - c) \geq 3\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)} = 3\sqrt{\frac{S^2}{p}} \\ \Rightarrow p^2 &\geq 3\sqrt{3}S. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } a^2 + b^2 + c^2 &\geq \frac{1}{3} (a + b + c)^2 = \frac{1}{3} \cdot 4 \frac{(a + b + c)^2}{4} \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{a + b + c}{2} \right)^2 = \frac{4}{3} p^2 \geq \frac{4}{3} \cdot 3\sqrt{3}S = 4\sqrt{3}S. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt{3}S.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

$$d) \text{Ta có: } (a+b-c)(b+c-a) \leq \left(\frac{(a+b-c) + (b+c-a)}{2} \right)^2 = b^2.$$

Tương tự, suy ra $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$

$$\Rightarrow (2-2c)(2-2a)(2-2b) \leq abc \Rightarrow 8(ab+bc+ca) - 8 \leq 9abc$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9}(ab+bc+ca) - \frac{16}{9} \leq 2abc$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + \frac{16}{9}(ab+bc+ca) - \frac{16}{9} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9}(a+b+c)^2 + \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{16}{9} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$$

$$\Rightarrow \frac{32}{9} + \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{16}{9} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc.$$

$$\text{Mặt khác, } (a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \geq \frac{32}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{3} - \frac{16}{9} = \frac{52}{27}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

c) Bạn đọc tự chứng minh kết quả sau :

$$\text{“Nếu } a, b, c > 0 \text{ thì } (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.”

$$\text{Ta có: } h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq \frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c)^2. \quad (1)$$

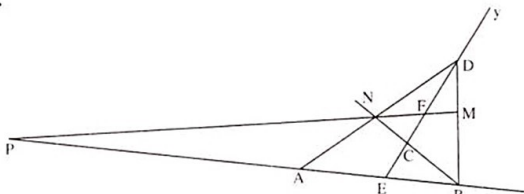
$$\text{Mà } h_a + h_b + h_c = 2S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = r(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9r \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq 27r^2$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 11.



Hình 37

1) Giả sử MN cắt tia đối của tia Ax ở P (h.37). Áp dụng định lí Mênêlauýt cho $\triangle CDA$ và $\triangle CDM$, ta có :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{FC}{FD} \cdot \frac{ND}{NA} \cdot \frac{MA}{MC} = 1 \\ \frac{EC}{ED} \cdot \frac{BD}{BM} \cdot \frac{AM}{AC} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{FC}{FD} = \frac{NA \cdot MC}{ND \cdot MA} \quad (1); \quad \frac{EC}{ED} = \frac{BM \cdot AC}{BD \cdot AM} \quad (2)$$

Ta có $\frac{NA}{ND} \cdot \frac{BD}{BM} \cdot \frac{CM}{CA} = 1$ (do áp dụng định lí Mênêlauýt đối với $\triangle ADM$)

$$\Rightarrow \frac{NA}{ND} \cdot \frac{MC}{MA} = \frac{BM}{BD} \cdot \frac{AC}{AM}$$

$$\Rightarrow \frac{FC}{FD} = \frac{EC}{ED} \text{ và } F \text{ thuộc đoạn } ED \Rightarrow F \text{ cố định.}$$

2) Khi $AE = EB$ thì $MN \parallel AB$. Thật vậy giả sử MN cắt AB tại P , ta có :

$$\frac{EA}{EB} \cdot \frac{MB}{MD} \cdot \frac{ND}{NA} = 1 = \frac{MB}{MD} \cdot \frac{ND}{NA} \cdot \frac{PA}{PB}$$

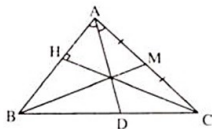
$$\Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{PA}{PB}, \text{ mà } EA = EB \Rightarrow PA = PB \text{ vô lí. Do đó } MN \parallel AB$$

$\Rightarrow FM = FN \Rightarrow S_{MCD} = S_{NCD}$. Vậy một vị trí thích hợp của B là $EB = EA$.

Bài 12. (h.38)

Theo định lí Xêva ta có :

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{HA}{HB} = 1 \quad (1)$$



Hình 38

Do AD là phân giác của A nên $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{AC} \cdot \frac{HA}{HB} = 1$

$\Leftrightarrow AB \cdot \frac{HA}{HC} = \frac{HB}{BC} \cdot BC \Leftrightarrow AB \cos A = BC \cos B$.

Bài 13.

a) Gọi E là giao điểm của AN và DM (h.39)

$\triangle ABM = \triangle ADN \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{DAN} = \widehat{MDC}$

$\Rightarrow AN \perp DM$.

$\cos \widehat{MAN} = \frac{AE}{AM}$.

Đặt $AB = BC = CD = DA = 2x$

$\Rightarrow AM = AN = x\sqrt{5}$.

Lại có $AD^2 = AE \cdot AN \Rightarrow AE = \frac{4x}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \widehat{MAN} = \frac{4x : \sqrt{5}}{x\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$.

b) Dựng hình bình hành AQND (h.40)

$\Rightarrow QN \perp DC$ và $DN = AQ = 1$; $AD = QN = BC$.

Ta có: $DQ^2 + CN^2 = QC^2 + DN^2$,

$DQ^2 + QB^2 = QC^2 + DN^2$ (do $CN = QB$)

$DQ^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 \Rightarrow DQ = \sqrt{2}$.

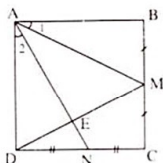
Do $DQ = QB = \sqrt{2} \Rightarrow Q$ thuộc đường chéo AC.

Gọi $\widehat{ABQ} = \alpha$.

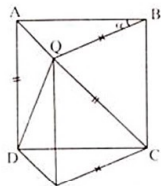
Áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác ABQ, ta có :

$\frac{AQ}{\sin \alpha} = \frac{QB}{\sin \widehat{QAB}} \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$.

Vậy $\sin \widehat{ABQ} = \frac{1}{2}$; $\widehat{AQB} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.



Hình 39



Hình 40

Bài 14. (h.41)

Cách 1 :

Ta có $S_{AHC} = S_{AHC_1} \Rightarrow AC \cdot HB_1 = AC_1 \cdot HC_1$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AC_1} = \frac{HC_1}{HB_1} \quad (1)$$

$$\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{\sin \widehat{HAC_1}}{\sin \widehat{CAH}} = \frac{HC_1 : HA}{HB_1 : HA} = \frac{HC_1}{HB_1} \quad (2)$$

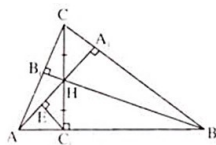
$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AC}{AC_1} = \frac{\cos B}{\cos C} \Rightarrow AC \cdot \cos C = AC_1 \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{AC_1}{AC} \cdot \cos B, \text{ hay } \cos C = \cos A \cdot \cos B.$$

Cách 2 : Kẻ $C_1E \perp AA_1 \Rightarrow CA_1 = C_1E \Rightarrow AC \cos C = AC_1 \cos B$

$$\Rightarrow \cos C = \cos A \cdot \cos B.$$

Cách 3 : Sử dụng định lí Mênêlauýt cho $\triangle ACC_1$ với 3 điểm B_1, H, B thẳng hàng.



Hình 41

Bài 15

Cách 1. (h.42a)

Kẻ $A_1A_2 \perp AB$; $B_1B_2 \perp AB$.

$$A_2B_2 = A_2C_1 + C_1B_2 = r_1 \sin B + r_2 \sin A.$$

Tứ giác CB_1OA_1 nội tiếp nên $A_1B_1 = R_3 \sin C$.

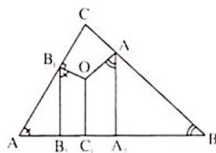
Mà $A_1B_1 \geq A_2B_2$, do đó

$$R_3 \sin C \geq r_1 \sin B + r_2 \sin A$$

$$\Leftrightarrow R_3 \geq r_1 \frac{\sin B}{\sin C} + r_2 \frac{\sin A}{\sin C} \Leftrightarrow R_3 \geq r_1 \frac{b}{c} + r_2 \frac{a}{c} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } R_1 \geq \frac{b}{a} r_3 + \frac{c}{a} r_2. \quad (2)$$

$$R_2 \geq \frac{a}{b} r_3 + \frac{c}{b} r_1. \quad (3)$$



Hình 42a

Cộng các vế (1) ; (2) ; (3), ta có :

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq r_1 \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + r_2 \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + r_3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ A_1B_1 \parallel AB, B_1C_1 \parallel BC, C_1A_1 \parallel AC \\ O \text{ trùng tâm đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC, \end{cases}$$

tức là ΔABC đều và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Cách 2 : (h. 42b)

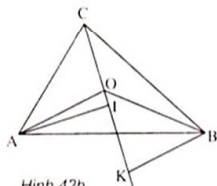
Kẻ $AI \perp OC$ và $BK \perp OC$.

$$2(S_{\Delta OAC} + S_{\Delta OBC}) = (AI + BK).R_3 = ar_1 + br_2.$$

Mặt khác $AI + BK \leq AB$, nên $ar_1 + br_2 \leq c.R_3$

$$\Rightarrow R_3 \geq \frac{a}{c}r_1 + \frac{b}{c}r_2.$$

Chứng minh tương tự như cách 1 sẽ có điều phải chứng minh. Bất đẳng thức (*) luôn đúng nếu ΔABC là tam giác tùy ý.



Hình 42b

Bài 16. (h.43)

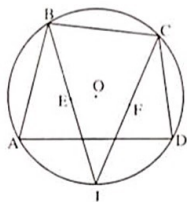
Ta có : $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 60^\circ \Rightarrow$ tứ giác ABCD nội tiếp và $\frac{AD}{\sin \widehat{ABD}} = 2R \Rightarrow R = 1$

(R là bán kính đường tròn (O) ngoại tiếp tứ giác ABCD).

Các đường thẳng BE, CF cắt nhau tại I là điểm chính giữa của cung $\widehat{AD}$. Ta có $IA = IE = IF = ID$ và ΔOAI đều nên $IF = ID = 1$. Trong ΔEIF có $EF^2 = IE^2 + IF^2 - 2IE \cdot IF \cdot \cos \widehat{EIF}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cos \widehat{EIF} \Rightarrow \cos \widehat{EIF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{EIF} = 30^\circ \text{ và } \frac{BC}{\sin \widehat{BIC}} = 2R \Rightarrow BC = 2.1. \frac{1}{2} = 1.$$



Hình 43

Bài 17.

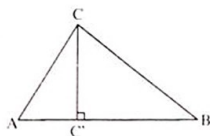
a) Gọi a, b, c là độ dài các cạnh tương ứng với các góc A, B, C của $\triangle ABC$.

Kẻ $CC' \perp AB$, ta có $AC' + C'B = AB$ (h.44)

$$\Rightarrow a \cos B + b \cos A = c \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } b \cos C + c \cos B = a; \quad (2)$$

$$a \cos C + c \cos A = b. \quad (3)$$



Hình 44

$$\text{Vậy ta có hệ sau } \begin{cases} \cos B.a + \cos A.b - c = 0 \\ -a + \cos C.b + \cos B.c = 0 \\ \cos C.a - b + \cos A.c = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giải hệ (*), rút ra a, b, c . Ta sẽ có :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C - 1 = 0.$$

$$b) \cos A + \cos B + \cos C - 1 =$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - 1 \right) + \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - 1 \right) + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1 \right) \\ &= \frac{(a+b-c)(b-a-c)}{2bc} + \frac{(a+b-c)(a-b-c)}{2ac} + \frac{(a+b-c)(b+a+c)}{2ab} \\ &= \frac{2(p-c).(cp-ap-bp+2ab)}{abc} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{4S^2}{pabc} = \frac{r}{R}, \end{aligned}$$

$$\text{hay } \cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

Bài 18. Gọi độ dài 3 cạnh của tam giác là $(n-1), n, n+1$ với $n \in \mathbb{N}$.

Do $\hat{A} > 90^\circ$ nên BC là cạnh lớn nhất và $BC = n+1$ và

$$(n+1)^2 > n^2 + (n-1)^2 \Leftrightarrow n^2 < 4n \Leftrightarrow 0 < n < 4.$$

Hiển nhiên $n \geq 2$, vậy $n = 2$ hoặc $n = 3$.

Nếu $n = 2$ thì ta có ba cạnh của tam giác là 1, 2, 3 (loại).

Nếu $n = 3$ thì độ dài ba cạnh của tam giác là 2, 3, 4, thoả mãn bất đẳng thức tam giác.

Bài 19. Xét $n = 3$:

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 &> 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4) \\ \Rightarrow 2(a_1^2 \cdot a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2) &> a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 \\ \Rightarrow (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2) &> 0 \\ \Rightarrow (a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2) &> 0 \\ \Rightarrow a_1, a_2, a_3 &\text{ là độ dài ba cạnh của một tam giác.}\end{aligned}$$

Xét $n > 3$:

Do vai trò của các a_i, a_j, a_k ($1 \leq i < j < k \leq n$) là như nhau, ta chứng minh (1) đúng với i, j, k là bộ ba số 1, 2, 3.

$$\text{Đặt } 2b^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có :

$$\begin{aligned}(b^2 + b^2 + a_4^2 + a_5^2 + \dots + a_n^2)^2 &\leq (n-1)(b^4 + b^4 + a_4^4 + \dots + a_n^4) \\ \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^2 &\leq (n-1)(2b^4 + a_4^4 + \dots + a_n^4).\end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác, theo giả thiết } \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^2 > (n-1)\sum_{k=1}^n a_k^4.$$

$$\text{Suy ra } (n-1)\sum_{k=1}^n a_k^4 < (n-1)(2b^4 + a_4^4 + a_5^4 + \dots + a_n^4)$$

$$\Rightarrow a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 < 2b^4$$

$$\Rightarrow 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4) < 4b^4 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2.$$

Theo trường hợp $n = 3$ ta có a_1, a_2, a_3 là độ dài ba cạnh của một tam giác.

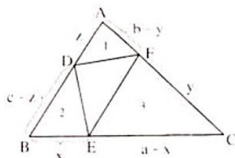
Vậy bộ số a_i, a_j, a_k ($1 \leq i < j < k \leq n$) là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài 20. (h.45)

Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích $\triangle ABC,$

$\triangle ADF, \triangle BDE, \triangle CEF.$

$$\text{Giả sử } \frac{S_1}{S} > \frac{1}{4}; \frac{S_2}{S} > \frac{1}{4}; \frac{S_3}{S} > \frac{1}{4}$$



Hình 45

$$\Rightarrow \frac{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}{S^3} > \frac{1}{64} \quad (1)$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S} &= \frac{z(b-y)}{bc}; \quad \frac{S_2}{S} = \frac{x(c-z)}{ac}; \quad \frac{S_3}{S} = \frac{y(a-x)}{ab} \\ \Rightarrow \frac{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}{S^3} &= \frac{x(a-x)}{a^2} \cdot \frac{y(b-y)}{b^2} \cdot \frac{z(c-z)}{c^2} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \quad (2) \\ \left(\text{do } \frac{x(a-x)}{a^2} \leq \frac{1}{4}; \quad \frac{y(b-y)}{b^2} \leq \frac{1}{4} \quad \text{và} \quad \frac{z(c-z)}{c^2} \leq \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra vô lí. Vậy trong ba tam giác ADF, BDE, CEF tồn tại một tam giác có diện tích nhỏ hơn hay bằng $\frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$.

$$S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x \\ b = 2y \\ c = 2z \end{cases} \Leftrightarrow D, E, F \text{ là trung điểm các cạnh của } \triangle ABC.$$

Bài 21. (h.46)

$$\text{Dễ thấy } AE = \frac{bc}{a+c}, \quad AF = \frac{bc}{a+b}.$$

$$S_{\triangle AEF} = \frac{b^2 c^2 \sin A}{2(a+b)(a+c)} = \frac{bc S_{\triangle ABC}}{(a+b)(a+c)}.$$

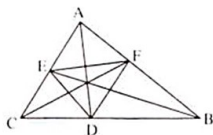
Tương tự,

$$S_{\triangle BDF} = \frac{ac S_{\triangle ABC}}{(b+c)(a+b)}; \quad S_{\triangle CDE} = \frac{ab S_{\triangle ABC}}{(a+c)(b+c)};$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle DEF} &= S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF} - S_{\triangle CDE} - S_{\triangle BDF} \\ &= \frac{2abc \cdot S_{\triangle ABC}}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{2abc}{8abc} S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle DEF} \leq \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c.$$



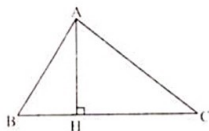
Hình 46

Bài 22. Gọi x là cạnh hình vuông và $\triangle ABC$ có

$$AH \perp BC \text{ (h.47)}$$

$$2p = a + b + c > a + 2AH \geq 2\sqrt{a \cdot 2AH}$$

$$= 4\sqrt{S_{\triangle ABC}} = 4\sqrt{x^2} = 4x.$$



Hình 47

Bài 23. (h.48)

$$a) \widehat{FDH} = \widehat{FBH} = \widehat{HCE} = \widehat{HDE}$$

$\Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{HDE}$, mà tia DH nằm giữa hai tia DF, DE $\Rightarrow$ DH là tia phân giác của $\angle FDE$.

Tương tự, EH là tia phân giác $\angle FED$

$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

b) $\widehat{D'BC} = \widehat{D'AC} = \widehat{EBC} \Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{HBD'}$ và $BD \perp HD' \Rightarrow \triangle BHD'$ cân tại B $\Rightarrow DD' = DH$.

Tương tự, $EE' = EH$; $FF' = FH$.

c) Do $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác BFEC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC} = \widehat{AAC} \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AAC} \Rightarrow Ax \parallel EF$.

d) Từ b) dễ thấy ba đường tròn (O_1) , (O_2) , (O_3) cùng đi qua H.

e) Ta có $\triangle DAB \sim \triangle DCD' \Rightarrow DA \cdot DD' = DB \cdot DC$, mà $DD' = DH$

$$\Rightarrow DA \cdot DH = DB \cdot DC \Rightarrow \frac{DA}{DB} \cdot \frac{DH}{DC} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{HA}{HD} = 2012 \Rightarrow HA = 2012HD \Rightarrow DA = 2013DH. \quad (2)$$

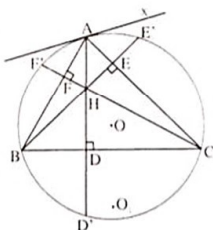
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{DH}{DB} \cdot \frac{DH}{DC} = \frac{1}{2013} \Leftrightarrow \cotg C \cdot \cotg B = \frac{1}{2013},$$

$$\text{hay } \tg B \cdot \tg C = 2013.$$

Bài 24. a) (h.49)

Do P đối xứng với I qua AC

$$\Rightarrow \triangle AIC = \triangle APC.$$



Hình 48

$$\text{Mà } \widehat{AIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2} \Rightarrow \widehat{APC} = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}.$$

Tứ giác ABCP nội tiếp $\Rightarrow \widehat{APC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

$$\Rightarrow 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ.$$

$$\text{Mà } \widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 120^\circ.$$

Do Q đối xứng O qua AC nên

$$\widehat{AOC} = \widehat{AQC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{AQC} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ tứ giác ABCQ nội tiếp, hay Q nằm trên đường tròn (O, R).

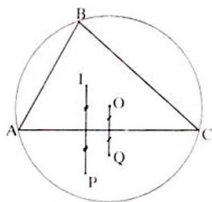
b) M là trọng tâm ΔCAB và $MC = MD$

$$\Leftrightarrow CM = MD = \frac{2}{3} CE. \text{ Ta có (h.50)}$$

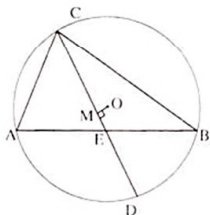
$$\frac{CE^2}{3} = CE \cdot \frac{EC}{3} = CE \cdot ED = EA \cdot EB = \frac{c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow CE^2 = \frac{3c^2}{4}.$$

$$\text{Do đó } \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{3c^2}{4} \Leftrightarrow 2c^2 = a^2 + b^2.$$



Hình 49



Hình 50

Bài 25. (h.51)

a) Ta có $\Delta IAP \sim \Delta IMA$ (g.g) $\Rightarrow IA^2 = IM \cdot IP$.

b) $\Delta IAP = \Delta IBN$ (g.c.g) $\Rightarrow IP = IN$

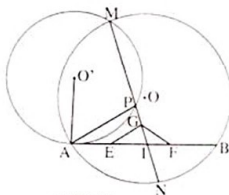
$\Rightarrow$ tứ giác APBN là hình bình hành vì hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

c) $IA^2 = IB^2 = IP \cdot IM$

$$\Rightarrow \frac{IB}{IP} = \frac{IM}{IB} \text{ và } \widehat{MIB} \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \Delta IMB \sim \Delta IBP$$

$\Rightarrow \widehat{IMB} = \widehat{IBP} \Rightarrow IB$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMPB .



Hình 51

d) Gọi G là trọng tâm của $\triangle APB$. Kẻ $GE \parallel PA$ và $GF \parallel PB$

$\Rightarrow AE = \frac{2}{3} AI$, E thuộc đoạn AI $\Rightarrow E$ cố định.

Tương tự, $BF = \frac{2}{3} BI$, F thuộc đoạn BI và F cố định.

Ta có : $\widehat{APB} = 180^\circ - \widehat{PAB} - \widehat{PBA} = 180^\circ - \widehat{AMI} - \widehat{IMB} = 180^\circ - \widehat{sdANB}$

$\Rightarrow \widehat{APB}$ không đổi. $\widehat{EGF} = \widehat{APB}$. Đặt $\widehat{EGF} = \alpha$, có $\widehat{EGF}$ không đổi và EF cố định $\Rightarrow G$ thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn EF.

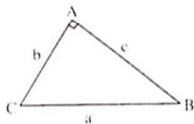
Bài 26. (h.52)

Giả sử $\widehat{A} = 90^\circ$, ta có $a^2 = b^2 + c^2$ và $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ nên b hoặc c phải là số chẵn. Giả sử b chẵn. Dễ thấy a, b, c không thể có số nào bằng 2 và hai số nguyên tố p, q trong chúng không thể đồng thời là số đo của hai cạnh góc vuông. Do vậy :

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 &= (p+q)(p-q) = 50(p+q) \\ &= 50(2p+50) = 100(p+25) = b^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (p+25)$ phải là số chính phương. Từ đó số p nhỏ nhất là 11 và $b^2 = 100.36 \Rightarrow b = 60$.

Vậy số đo nhỏ nhất mà cạnh thứ ba có thể nhận được là 60.



Hình 52

Bài 27. Ta có (h.53)

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AR}{RB} \text{ và } \frac{2S_1 + S_3}{2S_2 + S_3} = \frac{AR}{RB},$$

$$\text{tức là } \frac{S_1}{S_2} = \frac{2S_1 + S_3}{2S_2 + S_3}$$

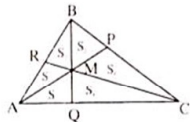
$$\Rightarrow S_1(2S_2 + S_3) = S_2(2S_1 + S_3)$$

$$\Rightarrow S_3(S_1 - S_2) = 0, \text{ mà } S_3 \neq 0 \Rightarrow S_1 = S_2 \Rightarrow AR = RB$$

$\Rightarrow CR$ là đường trung tuyến.

Tương tự, BQ cũng là đường trung tuyến.

Vậy M là trọng tâm của $\triangle ABC$.



Hình 53

Bài 28. (h.54)

a) $\triangle ABE = \triangle ADF \Rightarrow AE = AF$.

Do $AE = AF \Rightarrow \triangle AEF$ cân ở A mà $EI = IF$

$\Rightarrow AI \perp EF$ và $\triangle FGI = \triangle FKI$ (g.c.g)

$\Rightarrow EG \parallel KF$ và $EG = KF$

$\Rightarrow$ tứ giác $EGFK$ là hình thoi.

b) $\triangle AKF \sim \triangle CAF$ do $\widehat{AFC}$ chung và

$$\widehat{FCA} = \widehat{KAF} = 45^\circ \Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{KF}{AF},$$

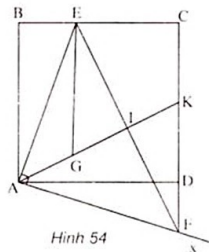
hay $AF^2 = KF.CF$.

c) Do tứ giác $EGFK$ là hình thoi nên $EK = KF = KD + DF = KD + BE$.

Chu vi $\triangle EKC = EC + CK + EK = EC + CK + KD + DF$

$$= (EC + DF) + (CK + KD) = (EC + BE) + (CK + KD) = 2BC.$$

Vậy chu vi $\triangle EKC$ không đổi khi E chuyển động trên cạnh BC.



Hình 54

Bài 29. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

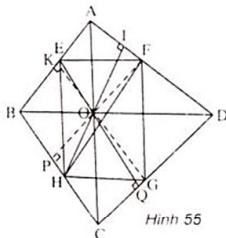
Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AD, CD, BC. I, K, P, Q theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ O xuống các cạnh AD, AB, BC, CD (h.55).

Ta có : Tứ giác EFGH là hình bình hành do $EF \parallel BD \parallel HG$ và $EF = HG = \frac{1}{2} BD$.

Mặt khác $\widehat{FEH} = \widehat{DOC} \Rightarrow$ Tứ giác EFGH là hình chữ nhật. (1)

Lại có H, O, I thẳng hàng ; G, O, K thẳng hàng ; E, O, Q thẳng hàng và F, O, P thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2) ta có bát giác KEIFGQHP là bát giác nội tiếp đường tròn tâm J, bán kính $\frac{HF}{2} = \frac{EG}{2}$ (ở đó J là giao điểm của hai đường chéo HF và EG của hình chữ nhật EFGH).



Hình 55

Bài 30. (h.56)

a) Gọi h là khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' .

Ta có $IB \cdot IC = (p - b) \cdot (p - c)$

$$= \frac{S^2}{p(p-a)} = \frac{p^2 r^2}{p(p-a)} = r^2 \cdot \frac{p}{p-a}.$$

$$\text{Có } \frac{p-a}{p} = 1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{2r}{h}.$$

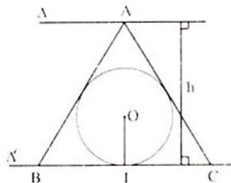
$$\text{Vậy } IB \cdot IC = r^2 \cdot \frac{h}{h-2r} = k \text{ (không đổi).}$$

$$\text{b) Ta có } r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{S}{p-a} \cdot \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c} = \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = S_p = \frac{S^2}{r} = \frac{h^2 a^2}{4r}.$$

$r_a \cdot r_b \cdot r_c$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a$ nhỏ nhất.

$$\text{Mà } a = IB + IC \geq 2\sqrt{IB \cdot IC} = 2\sqrt{h}.$$

Vậy a nhỏ nhất $\Leftrightarrow IB = IC$, khi đó $A \in \Delta$ và A thuộc đường thẳng vuông góc với Δ' tại I .



Hình 56

Chương VI

MỘT SỐ ĐỀ ÔN TẬP, KIỂM TRA

VI.1. ĐỀ BÀI

ĐỀ 1

Bài 1. Tìm các chữ số a, b, c, biết $\frac{\overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca}}{\overline{ab+bc+ca}} = \frac{3321}{11}$.

Bài 2. Cho a, b, c đôi một khác nhau, a, b, c đều khác 0 và

$$\frac{1}{b} + a = \frac{1}{c} + b = \frac{1}{a} + c = t > 0. \text{ Hãy tính giá trị } t.$$

Bài 3. Cho phương trình : $(x+1)^4 - (m-1)(x+1)^2 - m^2 + m - 1 = 0$. (1)

a) Giải phương trình với $m = -1$.

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

c) Tìm các giá trị của m để $|x_1| + |x_2| = 2$.

Bài 4. Cho tam giác ABC với AD, AM tương ứng là các phân giác trong của A và trung tuyến ứng với cạnh BC. Qua D vẽ đường vuông góc với AD cắt AB, AM tại P, O. Qua P vẽ đường vuông góc với AB cắt AD tại Q. Chứng minh OQ vuông góc với BC.

Bài 5. Có 12 đội bóng đá tham gia tranh giải. Mỗi đội đấu với nhau 1 trận, tổng số điểm của mỗi đội đều khác nhau. Số điểm của đội đứng thứ hai trong giải bằng tổng số điểm của 5 đội đứng cuối cùng. Hỏi trong trận đấu giữa đội thứ 7 và đội đứng thứ 8 đội nào thắng ? (thắng được 2 điểm, hoà được 1 điểm, thua 0 điểm).

ĐỀ 2

Bài 1. Chứng minh rằng

$$X = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2011^2 + 2012^2 \text{ không là số chính phương.}$$

Bài 2.

a) Tính giá trị của biểu thức sau :

$$A = 1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \dots - 2010! \cdot 2012 + 2011!$$

b) Cho a, b, c và x, y, z thoả mãn

$$a + b + c = 0, x + y + z = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

$$\text{Tính } a^2x + b^2y + c^2z.$$

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ cắt nhau tại A, A' . Lấy các điểm B, D ($B \in (O); D \in (O')$) sao cho A, B, D không thẳng hàng. Kẻ hình bình hành $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua $A'C$. Chứng minh rằng bốn điểm A', B, E, C nằm trên một đường tròn.

Bài 4.

a) Giải phương trình $\left| \left| x^2 - 1 \right| - 1 \right| = 2.$

b) Tìm m để hai bất phương trình sau có cùng tập nghiệm

$$m - 3x < 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad 3mx + 2m + 1 > x - 1.$$

Bài 5. Gọi a là số tam giác có các cạnh là các số nguyên dương và chu vi bằng 2009 và b là số tam giác có các cạnh là số nguyên dương và chu vi bằng 2012. So sánh a và b .

ĐỀ 3

Bài 1. Tìm số tự nhiên N sao cho $N + S(N) = 2012$, ở đó $S(N)$ là tổng các chữ số của số N .

Bài 2. Tìm a để phương trình $\left| 2x^4 - x^2 + a^2 + 2 \right| = 1 + 2a$ có một số lẻ các nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có các phân giác AY, BZ, CX . Chứng minh rằng :

$$M = \frac{AX^2}{XB^2} + \frac{BY^2}{YC^2} + \frac{CZ^2}{ZA^2} + \frac{AX}{XB} + \frac{BY}{YC} + \frac{CZ}{ZA} \geq 6.$$

Bài 4. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo m :

$$\begin{cases} x - y = 3m \\ 2y + \sqrt{xy} = 0. \end{cases}$$

Bài 5. Chứng minh rằng luôn dựng được 2000 đường thẳng đôi một cắt nhau tại các điểm có tọa độ nguyên và không có ba đường nào đồng quy.

ĐỀ 4

Bài 1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x, y, z) của phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = (xy)^2.$$

Bài 2. Cho $P(x) = x^2 + bx + c$ và $b^2 - 4c > 0$. Hỏi phương trình sau

$$P(x) + P\left(x + \sqrt{b^2 - 4c}\right) = 0 \text{ có bao nhiêu nghiệm ?}$$

Bài 3. Tìm các giá trị của x, y sao cho $x^2 - 2xy + 4y^2 \geq 3(x - 2y - 1)$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại C. Vẽ các đường trung tuyến AE và BF. Đặt $AE = m$; $BF = n$. Gọi r là bán kính các đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

a) Chứng minh rằng $\frac{r^2}{m^2 + n^2} < \frac{1}{20}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{r^2}{m^2 + n^2}$.

Bài 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm các điểm $M(x, y)$ thỏa mãn

$$A = (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0 \text{ và :}$$

a) $x^2 + y^2$ đạt giá trị lớn nhất ;

b) $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐỀ 5

Bài 1. Cho $a = \frac{x+2012}{x-2012}$; $b = \frac{y+2012}{2012-y}$; $c = \frac{x+y}{y-x}$ và $A = ab + bc + ca$.

Chứng minh rằng với $x \neq y$, $x \neq 2012$, $y \neq 2012$ thì số trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của các biến x, y .

Bài 2. Tìm số tự nhiên n sao cho $n + S(2011.n) = 2012$, ở đó $S(2011.n)$ là tổng các chữ số của số $2011.n$.

Bài 3. Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + ax & (1) \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay & (2) \end{cases}$$

Bài 4. Cho hình chữ nhật ABCD và một điểm M trên cạnh AB.

a) Chứng minh rằng : $MC + MD < AC + AD$.

b) Tìm tập hợp các điểm N sao cho $NA^2 + NC^2 = NB^2 + ND^2$.

Bài 5. Cho đa giác đều 5000 đỉnh. Người ta tô màu 2001 đỉnh. Chứng minh rằng trong 2001 điểm đã tô luôn chọn được 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác cân.

ĐỀ 6

Bài 1. Tìm các số nguyên x, y thoả mãn $2x^2 + 2y^2 - 2xy + x + y = 0$.

Bài 2. Giải phương trình

$$\sqrt{5x+8} + 6\sqrt{5x-1} + \sqrt{5x+3-4\sqrt{5x-1}} = 5. \quad (1)$$

Bài 3. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$p = |ab| + |bc| + |ca| - abc.$$

Bài 4. Cho hình thang ABCD ($AD \parallel BC$; $AD > BC$) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ dây CN cắt dây AD tại P. Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với đường tròn qua N, P và tiếp xúc với AD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ tiếp xúc với AC.

Bài 5. Tồn tại hay không một hình thang cân có độ dài cạnh lớn nhất bằng 13, chu vi bằng 28 và diện tích bằng 27,0001 ?

ĐỀ 7

Bài 1. Cho dãy số có số hạng đầu là 16, các số hạng sau là số tạo thành bằng cách viết 15 vào chính giữa số hạng liền trước : 16, 1156, 111556, Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+3} + 1 = x^3 + 3x^2 + 2x$.

Bài 3. Xét các đa thức bậc 2 : $f(x) = ax^2 + bx + c$ sao cho $|f(x)| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.
 Tìm giá trị lớn nhất của $4a^2 + 3b^2$.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC, đường cao AH, M là điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi P và Q là hình chiếu của M trên 2 cạnh AB và AC ; I là trung điểm của AM.

- a) Tìm vị trí M trên BC để đoạn thẳng QP có độ dài nhỏ nhất, lớn nhất.
 b) Gọi O là giao điểm của IH và PQ. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh BC thì MO luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Có thể tồn tại hay không số thực x sao cho $x + \sqrt{2}$ và $(x^3 + \sqrt{2})$ đều là các số hữu tỉ.

ĐỀ 8

Bài 1. Giải phương trình tìm nghiệm nguyên

$$x^{2011} + 2x^{2010} + \dots + 2011x + 2012 = 0.$$

Bài 2. Cho x_0 và x_1 , x_0 và x_2 , ..., x_0 và x_n là các nghiệm tương ứng của các phương trình

$$x^2 + a_1x + b_1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + a_2x + b_2 = 0 \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$x^2 + a_nx + b_n = 0 \quad (n)$$

Tìm nghiệm của phương trình

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} = 0. \quad (*)$$

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và đường phân giác trong AD. Gọi M, N theo thứ tự là các điểm nằm trên tia đối của các tia BA và CA sao cho $BM = BC = CN$. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Từ I kẻ đường thẳng d song song với AD, đường thẳng d cắt AC tại K. So sánh độ dài các đoạn AB và CK.

Bài 4. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 người ta lập ra các số có 4 chữ số đôi một khác nhau và hai chữ số 1, 2 đứng kế nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số nói trên ?

Bài 5. Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$ với mọi giá trị thực x, y.

ĐỀ 9

Bài 1.

- a) Tìm a để phương trình sau có nghiệm duy nhất $|x-1| = |x-2a+1|$ (1).
- b) Cho a, b, c là ba số khác không tùy ý. Chứng tỏ rằng một trong ba phương trình sau luôn có nghiệm :
- $$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1); \quad bx^2 + 2cx + a = 0 \quad (2) \quad \text{và} \quad cx^2 + 2ax + b = 0 \quad (3).$$

Bài 2.

- a) Chứng minh rằng tích 3 số nguyên dương liên tiếp không thể là lập phương của một số tự nhiên.
- b) Tìm số dư cuối cùng trong phép chia đa thức

$$1 + x - x^{20} + x^{200} - x^{2012} \text{ cho } x^2 - 1.$$

Bài 3. Cho góc $\widehat{xPy}$. Đường tròn tâm O , đường kính AC tiếp xúc với Px, Py tương ứng tại A và B . Kẻ BD vuông góc với AC . Gọi K là giao điểm của PC và BD . Chứng minh $BK = KD$.

Bài 4. Cho x, y là các số tự nhiên thay đổi thỏa mãn $xy = 2012$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x + y$.

Bài 5. Cho 5 điểm nằm trong một hình vuông cạnh $a = 36,7$ (đơn vị độ dài). Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm nằm trong hình vuông hoặc trên cạnh hình vuông mà khoảng cách từ điểm đó đến 5 điểm nói trên đều lớn hơn 10.

ĐỀ 10

Bài 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $\sqrt{x-2} = \frac{5x^2 - 10x + 1}{x^2 + 6x - 11}$;

b) $\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x + 3} = \frac{7}{\sqrt{x - 3}}$;

c)
$$\begin{cases} 2|x| + y = 5 \\ x + 2|y - 5| = 3. \end{cases}$$

Bài 2

- a) Cho hai số nguyên x, y thoả mãn điều kiện $4x + 5y = 7$.

Chứng minh rằng : $5|x| - 3|y| \geq 1$.

- b) Cho $a, b, c \in [\alpha; \beta]$ và $\beta - \alpha \leq 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{ab+1} + \sqrt{bc+1} + \sqrt{ca+1} \geq a+b+c.$$

Bài 3.

- a) Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P tương ứng trên ba cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMP : BMN và CNP luôn cắt nhau tại một điểm.
- b) Cho $BM = CP$. Gọi I, K tương ứng là trung điểm của các đoạn MP và BC. Chứng minh rằng : IK song song với phân giác trong của góc BAC.

- Bài 4.** Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $2x^2 + 19x + 45$ bằng bình phương của một số nguyên tố.

ĐỀ 11

- Bài 1.** Cho 5 số nguyên phân biệt tùy ý a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Chứng minh rằng tích $P = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)(a_4 - a_5)$ luôn chia hết cho 288.

- Bài 2.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0 \\ \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx} = -3 \\ \sqrt[3]{xyz} = -2. \end{cases}$$

- Bài 3.** a, b, c là ba cạnh của một tam giác tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c(a+b)} + \frac{bc}{a(b+c)} + \frac{ca}{b(c+a)} \geq \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Bài 4.

- a) Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB cố định. M là điểm di động trên nửa đường tròn O. Dựng MH vuông góc với AB. Lấy E thuộc OM sao cho OE = MH. Tìm tập hợp các điểm E khi M di động trên nửa đường tròn (O).

- b) Tìm vị trí của M trên nửa đường tròn (O) sao cho $MB > MA$ và $(2MH + HB)$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5. Tìm hàm $f(x)$, biết $a.f(x^n) + f(-x^n) = bx$ (1), trong đó a, b là hằng số, $a^2 \neq 1$ và n là số nguyên lẻ.

ĐỀ 12

Bài 1. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên là bội số của 2011 gồm toàn các chữ số 7.

Bài 2. Cho hai phương trình

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad x^2 + bx + 2 = 0 \quad (2).$$

Tìm các giá trị a, b thoả mãn phương trình (1) và (2) có nghiệm chung và $|a| + |b|$ nhỏ nhất.

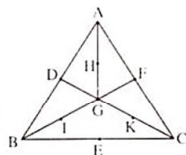
Bài 3. Giải hệ $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ với a, b, c là các hằng số cho trước.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường phân giác trong AD. Vẽ đường tròn (O_1) ngoại tiếp $\triangle ABD$ và đường tròn (O_2) ngoại tiếp $\triangle ACD$. Chứng minh rằng :

a) $AD^2 < AB \cdot AC$:

b) $OO_1 = OO_2$.

Bài 5. (h.57) Cho tam giác đều ABC. Có thể điền các chữ số 0, 1, ..., 9 mỗi chữ số một lần vào các vị trí A, B, ..., K sao cho tổng ba số trên mỗi đoạn AB, BC, CA, AG, BG, GC đều bằng nhau được hay không ?



Hình 57

ĐỀ 13

Bài 1. Có bao nhiêu số tự nhiên n lớn hơn hay bằng 1, nhỏ hơn hay bằng 2012 sao cho $(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n)$ chia hết cho 5 ?

Bài 2.

a) Tìm ba số thực dương x, y, z sao cho

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 13,2 & (1) \\ [x] + \{y\} + z = 14,3 & (2) \\ \{x\} + y + [z] = 15,1 & (3) \end{cases}$$

(ở đó $[a]$ là phần nguyên và $\{a\}$ là phần lẻ của số a).

b) Tìm tất cả các giá trị của số thực m sao cho tồn tại bốn số nguyên x, y, u, v thoả mãn $x^2 + y^2 = (107 - m) \cdot (m - 91)$ và $54(u^2 - v^2) = m(15u + 3v - m)$.

Bài 3. Cho $\widehat{xAy}$ và điểm M chuyển động trong góc đó sao cho $MH + MK = l$ ($l > 0$ cho trước), ở đó $MH \perp Ax$ và $MK \perp Ay$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHMK$ luôn đi qua một điểm cố định thứ hai khác A .

Bài 4. Cho x, y, z dương thoả mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{3}{2}.$$

Bài 5. Người ta tô đỏ 7 cạnh của một hình lập phương một cách ngẫu nhiên. Mỗi đỉnh kề với ít nhất 2 cạnh đỏ đều được gọi là đỉnh đỏ. Chứng minh rằng : có ít nhất một mặt của hình lập phương đó chứa ít nhất 3 đỉnh đỏ.

VI.2. LỜI GIẢI**ĐỀ 1**

Bài 1. $\frac{\overline{ab} \overline{bc} \overline{ca}}{\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}} = \frac{3321}{11} \Leftrightarrow 11 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} = 3321(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca})$

$$\Leftrightarrow 11 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} = 41 \cdot 81 \cdot (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) \quad (1)$$

Do $41 \in P$ nên một trong 3 số $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$ phải chia hết cho 41.

• Nếu $\overline{ca} = 82$, thì $a = 2 ; c = 8$. Thay vào (1), ta có

$$11 \cdot 2b \cdot \overline{b8} \cdot 2 = 81 \cdot (2b + \overline{b8} + 82).$$

$$\text{Vì } \overline{b8} \not\vdots 27, \text{ vì } 2b \not\vdots 27, \text{ hoặc } 2b \vdots 9 \Rightarrow b = 7.$$

Ta có vẻ trái tận cùng là 2, vẻ phải có tận cùng là 7 (loại).

• Nếu $\overline{ca} = 41$, thì $a = 1, c = 4$. Thay vào (1), ta được

$11.1\overline{b}.b4 = 81.(1\overline{b} + b4 + 41)$ vì $1\overline{b} \not\equiv 27$, nên $b4 \equiv 9$. Do đó $b = 5$.

Thử lại đúng. Vậy các bộ số cần tìm là $(1, 5, 4)$ và các hoán vị của chúng.

Bài 2. Ta có $t^3 = \left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{a}\right)$

$$= abc + \frac{1}{abc} + (a+b+c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = abc + \frac{1}{abc} + 3t \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ab-bc}{b-c} = \frac{b(a-c)}{b-c} = t$$

$$\Rightarrow b = \frac{t(b-c)}{a-c} \quad (\text{do } a \neq c).$$

$$\text{Tương tự, } a = \frac{b-a}{b-c} \cdot t; c = \frac{a-c}{a-b} \cdot t \Rightarrow abc = -t^3. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } t^3 = -t^3 - \frac{1}{t^3} + 3t \Leftrightarrow 2t^3 + \frac{1}{t^3} = 3t.$$

$$\text{Do } t > 0 \text{ nên } 2t^3 + \frac{1}{t^3} = t^3 + t^3 + \frac{1}{t^3} \geq 3\sqrt[3]{t^6 \cdot \frac{1}{t^3}} = 3t.$$

$$\text{Vậy } t^3 = \frac{1}{t^3} \Leftrightarrow t^6 = 1, \text{ mà } t > 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Bài 3.

a) Đặt: $(x+1)^2 = t$ ($t \geq 0$).

$$(1) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases} \\ t = -3 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $x = 0$ hoặc $x = -2$.

b) Ta có

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - (m-1)t - (m^2 - m + 1) = 0. \quad (2)$$

(2) có 2 nghiệm trái dấu $t_1 < 0 < t_2$. Vậy (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$x_2 = \sqrt{t_2} - 1; x_1 = -\sqrt{t_2} - 1.$$

$$c) |x_1| + |x_2| = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{t_2} - 1| + |\sqrt{t_2} + 1| = 2 \geq |1 - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_2} + 1| = 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$(1 - \sqrt{t_2})(\sqrt{t_2} + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{t_2}) \geq 0 \Leftrightarrow t_2 \leq 1.$$

t_2 là nghiệm dương của phương trình (2) nên

$$t_2 = \frac{(m-1) + \sqrt{(m-1)^2 - 4(-m^2 + m - 1)}}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{5m^2 - 6m + 5} \leq 3 - m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 6m + 5 \leq 9 + m^2 - 6m \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1.$$

Bài 4. Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với OQ cắt AB tại X, cắt AC tại Y. DP cắt AC tại R $\Rightarrow \triangle APR$ cân tại A do AD vừa là đường cao vừa là phân giác (h.58).

$$\triangle APQ = \triangle ARQ \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ARQ} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ tứ giác PQOX nội tiếp và tứ giác ORYQ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{OQX} = \widehat{OPX}, \widehat{OQY} = \widehat{ORA}.$$

mà $\widehat{OPX} = \widehat{ORA}$ (do $\triangle APR$ cân ở A)

$$\Rightarrow \widehat{OQX} = \widehat{OQY}, \text{ mà } OQ \perp XY \Rightarrow \triangle QXY \text{ cân ở Q.}$$

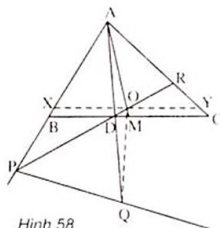
$$\Rightarrow OX = OY. \text{ Ta có } OX = OY, \text{ mà O lại thuộc trung tuyến AM} \Rightarrow XY \parallel BC.$$

$XY \parallel BC$ và $OQ \perp XY \Rightarrow QO \perp BC$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. Gọi số điểm của các đội đứng thứ nhất, thứ hai, ..., thứ 12 là $a_1, a_2, \dots, a_{12}$. Ta có $a_1 > a_2 > \dots > a_{12}$. Dễ thấy $a_2 < 21$ vì nếu $a_2 = 21$ thì $a_1 > a_2 \Rightarrow a_1 = 22 \Rightarrow a_1$ chơi luôn thắng (1).

$$a_2 = 21 \Rightarrow a_2 \text{ có 10 trận thắng và 1 trận đấu hoà} \Rightarrow a_1 \text{ hoà } a_2 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra vô lí. Vậy $a_2 \leq 20$.



Hình 58

Tổng số điểm của 5 đội $a_8, a_9, \dots, a_{12}$ đấu với nhau là $\frac{5 \times 4 \times 2}{2} = 20$ điểm.

Mà $a_8, a_9, \dots, a_{12}$ có thể thắng các đội $a_1, a_2, \dots, a_7$ nên $a_8 + a_9 + \dots + a_{12} \geq 20$ điểm (3).

Lại có
$$\begin{cases} a_2 = a_8 + a_9 + \dots + a_{12} \\ a_2 \leq 20 \text{ điểm.} \end{cases} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $a_8 + a_9 + \dots + a_{12} = 20$ điểm. Vậy 5 đội cuối không thể thắng bất kì đội nào trong các đội $a_1, a_2, \dots, a_7$. Do đó, đội thứ 7 thắng đội thứ 8.

ĐỀ 2

Bài 1. X gồm 1006 số chính phương chẵn và 1006 số chính phương lẻ. Mỗi số chính phương lẻ chia 4 dư 1 và mỗi số chính phương chẵn chia hết cho 4.

$$X = \underbrace{2^2 + 4^2 + \dots + 2012^2}_a + \underbrace{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 2011^2}_b.$$

Đặt $a = 2^2 + 4^2 + \dots + 2010^2 + 2012^2$, a chia hết cho 4 ;

$b = 1^2 + 3^2 + \dots + 2011^2$, b chia 4 dư 2.

Vậy X chia 4 dư 2, nên X không thể là số chính phương.

Bài 2.

a) Ta có $n!(n+2) = n!(n+1+1) = (n+1)! + n!$

$$\begin{aligned} A &= 1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \dots - 2010! \cdot 2012 + 2011! \\ &= 2! + 1! - (3! + 2!) + \dots - (2011! + 2010!) + 2011! = 1. \end{aligned}$$

Vậy $A = 1$.

b) Ta có $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \Leftrightarrow xbc + yca + zab = 0$

$$\Leftrightarrow c(xb + ya) + zab = 0 \Leftrightarrow -(a+b)(xb + ya) + zab = 0$$

$$\Leftrightarrow zab = xab + yab + b^2x + a^2y \Leftrightarrow b^2x + a^2y = ab(z - x - y)$$

$$\Leftrightarrow b^2x + a^2y = 2z.ab \quad (1).$$

Tương tự, $a^2z + c^2x = 2yac$ (2) và $b^2z + c^2y = 2xbc$ (3)

$$\begin{aligned} \text{Từ (1), (2), (3)} &\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(x + y + z) = a^2x + b^2y + c^2z \\ &\Rightarrow a^2x + b^2y + c^2z = 0. \end{aligned}$$

Bài 3. Gọi D' là điểm đối xứng với D qua trung điểm I của AA' (h. 59).

Ta có tứ giác $ADA'D'$ là hình bình hành, suy ra

$$DA' \parallel AD', DA' = AD' \quad (1)$$

$$AD \parallel BC, AD = BC \quad (2)$$

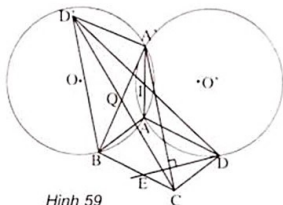
Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow A'D' \parallel BC \text{ và } A'D' = BC$$

$\Rightarrow$ tứ giác $A'D'BC$ là hình bình hành

$\Rightarrow D'$ đối xứng với C qua Q (Q là trung điểm $A'B$)

$\Rightarrow$ Đường tròn qua A', B, C đối xứng với đường tròn qua A', B, D' qua BA' . Chứng minh tương tự, ta cũng có đường tròn qua A', D, C đối xứng với đường tròn (O') qua DA' . Đường tròn (O) và (O') bằng nhau, nên hai đường tròn qua A', B, C và A', D, C cũng bằng nhau. Hai đường tròn trên lại có dây cung chung là $A'C$ nên đối xứng với nhau qua $A'C$, tức là E đối xứng với D thuộc đường tròn qua A', C, D phải thuộc đường tròn qua A', B, C là đường tròn đối xứng với đường tròn qua A', C, D , suy ra điều phải chứng minh.



Hình 59

Bài 4.

$$a) \left| |x^2 - 1| - 1 \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 1| - 1 = 2 \\ |x^2 - 1| - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 1| = 3 \\ |x^2 - 1| = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 3 \\ x^2 - 1 = -3 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

$$b) (1) \Leftrightarrow x > \frac{m}{3}$$

$$(2) \Leftrightarrow (3m - 1)x > -2(m + 1).$$

1) Nếu $(3m - 1) = 0$ thì (2) có vô số nghiệm (loại).

$$2) \text{ Nếu } (3m - 1) < 0 \text{ thì (2) có tập nghiệm là } x < \frac{-2(m+1)}{3m-1}.$$

Đễ thấy (1) và (2) không có cùng tập nghiệm (loại).

$$3) \text{ Nếu } (3m - 1) > 0 \text{ thì (2) có tập nghiệm là } x > \frac{-2(m+1)}{3m-1}.$$

Vậy (1) và (2) có cùng tập nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{m}{3} = \frac{-2(m+1)}{3m-1} \Leftrightarrow 3m^2 - m = -6m - 6$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 5m + 6 = 0 \Leftrightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại giá trị m nào để (1) và (2) có cùng tập nghiệm.

Bài 5. Gọi I là nhóm các tam giác có các cạnh là các số nguyên và chu vi bằng 2009 và II là nhóm các tam giác có các cạnh là các số nguyên và chu vi bằng 2012.

Lấy một tam giác bất kì thuộc nhóm I. Gọi 3 cạnh của tam giác là k, n, m . Giả sử $k \geq n \geq m$, ta có $m + n > k$. Lấy bộ ba số $x = k + 1; y = n + 1; z = m + 1$, dễ thấy x, y, z là các cạnh của một tam giác nào đó thuộc nhóm II. Suy ra $a \leq b$. (1)

Lấy một tam giác bất kì thuộc nhóm II. Gọi ba cạnh của tam giác đó là K, N, M và $K \geq N \geq M$. Ta có $K - 1, N - 1, M - 1$ là ba cạnh của một tam giác thuộc nhóm I. Thật vậy

$$\text{Vì } M + N > K \Rightarrow \begin{cases} M + N = K + 1 \\ M + N > K + 1. \end{cases}$$

Nếu $M + N = K + 1$ thì $M + N + K = 2K + 1 = 2012$ vô lí (loại).

$$\text{Nếu } M + N > K + 1 \text{ thì } (M - 1) + (N - 1) > (K - 1) \quad (*)$$

$$\text{Ta có } K \geq N \geq M \Rightarrow K - 1 \geq N - 1 \geq M - 1 \quad (**)$$

• Nếu $M > 1$ (***) thì từ (*), (**), (***) ta có $K - 1, N - 1$ và $(M - 1)$ là 3 cạnh của một tam giác thuộc nhóm I $\Rightarrow b \leq a$ (2)

• Nếu $M = 1$ thì $|K - N| < 1 \Rightarrow K = N \Rightarrow 2K = K + N = 2012 - M \neq 2011$ vô lí.

Từ (1) và (2) ta có $a = b$.

ĐỀ 3

ài 1. N phải là số có 4 chữ số. Gọi $N = \overline{abcd}$.

$$N + S(N) = \overline{abcd} + a + b + c + d = 1001a + 101b + 11c + 2d = 2012$$

$$\Rightarrow a = 2; b = 0; c = 0; d = 5. \text{ Vậy } N = 2005.$$

ài 2. Giả sử $x_0 \neq 0$ là nghiệm của phương trình

$$|2x^4 - x^2 + a^2 + 2| = 2a + 1 \quad (1)$$

thì $-x_0$ cũng là nghiệm của (1). Do đó để phương trình (1) có một số lẻ nghiệm thì 0 cũng phải là nghiệm của (1).

0 là nghiệm của (1) nên

$$|a^2 + 2| = 2a + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2 = 2a + 1 \\ a^2 + 2 = -(2a + 1) \end{cases} \text{ với } a \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\text{Với } a = 1 \text{ thì (1) có dạng } |2x^4 - x^2 + 3| = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ 2x^4 - x^2 + 6 = 0 \text{ (vô nghiệm).} \end{cases}$$

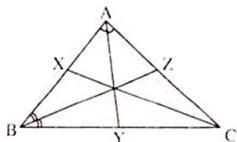
Vậy $a = 1$.

ài 3. Ta có (h.60)

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1.$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{AX}{XB} + \frac{BY}{YC} + \frac{CZ}{ZA} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA}} = 3. \quad (1)$$



Hình 60

$$\text{Mặt khác luôn có } \left(\frac{AX}{XB}\right)^2 + \left(\frac{BY}{YC}\right)^2 + \left(\frac{CZ}{ZA}\right)^2 \geq \frac{\left(\frac{AX}{XB} + \frac{BY}{YC} + \frac{CZ}{ZA}\right)^2}{3} \geq 3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\left(\frac{AX}{XB}\right)^2 + \left(\frac{BY}{YC}\right)^2 + \left(\frac{CZ}{ZA}\right)^2 + \frac{AX}{XB} + \frac{BY}{YC} + \frac{CZ}{ZA} \geq 6.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 4. Ta có

$$\begin{cases} x - y = 3m \\ 2y + \sqrt{xy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3m \\ 2y + \sqrt{(y+3m)y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 3my} = -2y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ 3y^2 - 3my = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = m \text{ (với điều kiện } m \leq 0). \end{cases}$$

Vậy : Nếu $m \geq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} y = 0 \\ x = 3m. \end{cases}$

$$\text{Nếu } m < 0 \text{ thì hệ có hai nghiệm } \begin{cases} x = 3m \\ y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = 4m \\ y = m. \end{cases}$$

Bài 5. Lấy các đường thẳng d_i có phương trình tương ứng như sau :

$$d_i : y = a_i x^2 - a_i^2 \text{ với } a_i = 10^i \text{ và } i = 1, 2, 3, \dots, 2000.$$

Dễ thấy 2000 đường thẳng trên đôi một cắt nhau tại các điểm có tọa độ nguyên và không có ba đường nào đồng quy.

ĐỀ 4

Bài 1. Đặt $VT = x^2 + y^2 + z^2$ và $VP = (xy)^2$

Xét các trường hợp :

1) x, y đều lẻ, do $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2$ nên $z^2 = x^2 y^2 - (x^2 + y^2)$ là số lẻ, suy ra z lẻ.

Khi đó $VT = x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod{4}$; $VP = (xy)^2 \equiv 1.1 \equiv 1 \pmod{4}$ vô lí.

2) x lẻ và y chẵn :

Khi đó, VP chẵn, vậy VT chẵn, suy ra z lẻ.

Khi đó $VT = x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 + 0 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$;

$VP = x^2, y^2 \equiv 1, 0 \equiv 0 \pmod{4}$ vô lí.

3) x chẵn và y chẵn, suy ra z chẵn. Đặt $x = 2a$; $y = 2b$; $z = 2c$.

Ta có: $(2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2 = 4 \cdot 4a^2b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4a^2b^2$ (1)

Lại có: $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{4}$, suy ra a, b, c phải cùng chẵn.

Đặt $a = 2a_1$; $b = 2b_1$; $c = 2c_1$ thì (1) trở thành $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 16a_1^2b_1^2$.

Lí luận tương tự như trên, ta lại có a_1, b_1, c_1 chẵn. Như vậy, ta có thể kéo dài vô hạn lập luận trên. Nhưng nếu phương trình đã cho có nghiệm (x_0, y_0, z_0) thì $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0, y = 0, z = 0$.

Bài 2.

$$\begin{aligned} P(x) = x^2 + bx + c &\Rightarrow P(x) + P(x + \sqrt{b^2 - 4c}) = \\ &= x^2 + bx + c + (x + \sqrt{b^2 - 4c})^2 + b(x + \sqrt{b^2 - 4c}) + c \\ &= 2x^2 + 2(b + \sqrt{b^2 - 4c})x + b^2 + b\sqrt{b^2 - 4c} - 2c; \end{aligned}$$

$$P(x) + P(x + \sqrt{b^2 - 4c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2(b + \sqrt{b^2 - 4c})x + b^2 + b\sqrt{b^2 - 4c} - 2c = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \Delta'_{(1)} = \left(b + \sqrt{b^2 - 4c}\right)^2 - 2\left(b^2 + b\sqrt{b^2 - 4c} - 2c\right)$$

$$= b^2 + 2b\sqrt{b^2 - 4c} - 2b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4c} + 4c + b^2 - 4c = 0.$$

Vậy phương trình đã cho luôn có một nghiệm kép.

Bài 3. Ta có

$$x^2 - 2xy + 4y^2 \geq 3(x - 2y) - 3 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (4y^2 + 4y + 1) - (x - 1)(2y + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x - 1) - \frac{(2y + 1)}{2}\right]^2 + \frac{3}{4}(2y + 1)^2 \geq 0 \text{ hiển nhiên.}$$

Vậy (1) luôn đúng với mọi giá trị của x, y .

Bài 4.

a) Gọi a, b, c là các cạnh tương ứng đối diện với các đỉnh A, B, C , ta có

$$\frac{r^2}{m^2 + n^2} < \frac{1}{20} \Leftrightarrow 20 \frac{(a+b-c)^2}{4} < \frac{5}{4} c^2 \Leftrightarrow (a+b-c)^2 < c^2$$

$\Leftrightarrow a+b < 2c$ hiển nhiên.

b) $AE = m, BF = n$ (h.61).

Ta có $r = \frac{a+b-c}{2}$;

$$m^2 + n^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{5}{4} c^2.$$

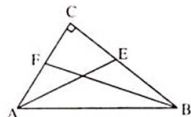
Do $a^2 + b^2 = c^2$, nên $\frac{a+b}{c} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{a+b-c}{c} \leq \sqrt{2} - 1$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b-c)^2}{5c^2} \leq \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{5}. \quad (1)$$

$$\frac{r^2}{m^2 + n^2} = \frac{(a+b-c)^2 : 4}{5c^2 : 4} = \frac{(a+b-c)^2}{5c^2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{r^2}{m^2 + n^2} \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{5}.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại C .



Hình 61

Bài 5. Ta có: $(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2x^2y^2 - 2y^2 + 2x^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 + x^2 - 3y^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 = -4x^2 \leq 0. \quad (1)$$

Đặt $x^2 + y^2 = t$.

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq t \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $(x^2 + y^2)_{\max} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$.

Các điểm M tìm được là : $M_1 \left(0; \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \right)$ và $M_2 \left(0; -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \right)$

$$(x^2 + y^2)_{\min} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}. \end{cases}$$

Các điểm M tìm được là : $M_3 \left(0; \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \right)$ và $M_4 \left(0; -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \right)$.

ĐỀ 5

Bài 1. Ta có $bc + ca = \frac{y+x}{y-x} \left(\frac{y+2012}{2012-y} + \frac{x+2012}{x-2012} \right)$

$$= \frac{y+x}{y-x} \cdot \frac{2 \cdot 2012(x-y)}{(2012-y)(x-2012)} = \frac{-2 \cdot 2012(x+y)}{(x-2012)(2012-y)}.$$

$$\begin{aligned} A = ab + ac + bc &= \frac{(x+2012)(y+2012)}{(x-2012)(2012-y)} - \frac{2 \cdot 2012(x+y)}{(x-2012)(2012-y)} \\ &= \frac{(x-2012)(y-2012)}{(x-2012)(2012-y)} = -1. \end{aligned}$$

Bài 2. Ta có

$$n + S(2011.n) = 2012 \Rightarrow n < 2012.$$

Để thấy n phải là số có 4 chữ số (1)

Ta có $2011.n < 2012 \cdot 2011 = 4046132 \Rightarrow 2011.n$ lớn nhất là số có 7 chữ số.

$$\Rightarrow n \geq 2012 - 7 \cdot 9 = 1949 \quad (2)$$

Mặt khác, $n + S(2011n) \equiv 2012n \pmod{9}$

$$\Rightarrow 2012(n-1) \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow (n-1) \equiv 0 \pmod{9} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $n \in \{1954, 1963, 1972, \dots, 2008\}$.

Thử lại dễ thấy chỉ có $n = 1972$ thoả mãn.

Vậy $n = 1972$.

Bài 3. Giả sử hệ có nghiệm duy nhất là (x_0, y_0) . Dễ thấy (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, suy ra $x_0 = y_0$.

Với $x_0 = y_0$ ta có $x_0^2 = x_0^3 - 4x_0^2 + ax_0$

$$\Rightarrow x_0(x_0^2 - 5x_0 + a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0^2 - 5x_0 + a = 0. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất thì $\begin{cases} x^2 - 5x + a = 0 \text{ vô nghiệm (*)} \\ x^2 - 5x + a = 0 \text{ có nghiệm kép } x = 0 (**) \end{cases}$

Ta có (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow 25 - 4a < 0 \Leftrightarrow a > \frac{25}{4}$;

(**) có nghiệm kép $x = 0 \Rightarrow a = 0$ (loại).

Với $a > \frac{25}{4}$, từ phương trình (1) ta có $y^2 = x(x^2 - 4x + a) \geq 0$.

$a > \frac{25}{4} \Rightarrow x^2 - 4x + a = (x - 2)^2 + a - 4 > 0$.

Do $\begin{cases} x^2 - 4x + a > 0 \\ x(x^2 - 4x + a) \geq 0 \end{cases}$ nên $x \geq 0$ (3). Tương tự (2) $\Rightarrow y \geq 0$.

Giả sử $x \geq y \Rightarrow x^2 \geq y^2$ do $x \geq 0$ và $y \geq 0$.

$$x^2 \geq y^2 = x(x^2 - 4x + a) \Rightarrow x^2 - x(x^2 - 4x + a) \geq 0$$

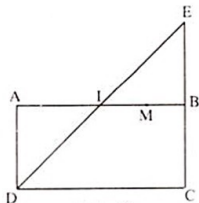
$$\Rightarrow -x(x^2 - 5x + a) \geq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \quad (4) \quad (\text{do } a - 5x + x^2 > 0).$$

Từ (3) và (4) ta có $x = 0$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

Đáp số: $a > \frac{25}{4}$.

Bài 4. a) Lấy E đối xứng C qua AB. Gọi I là giao điểm của ED và AB (h. 62).

- 1) Nếu M thuộc đoạn BI $\Rightarrow$ M nằm trong $\triangle DBE$
 $\Rightarrow DB + EB > DM + ME$
 $\Rightarrow AC + AD > DM + MC$.



Hình 62

2) Nếu M thuộc đoạn AI (h.63) thì M nằm trong $\triangle ADE$.

$$\Rightarrow DM + ME < AD + AE$$

$$\Rightarrow DM + MC < AD + AC$$

b) Gọi O là giao điểm của AC, BD (h.64).

$$\text{Để thấy } NA^2 + NC^2 = 2NO^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$NB^2 + ND^2 = 2NO^2 + \frac{BD^2}{2},$$

suy ra $NA^2 + NC^2 = NB^2 + ND^2$ với mọi điểm N.

Vậy tập hợp các điểm N là tất cả các đỉnh của mặt phẳng qua các điểm A, B, C, D.

Bài 5. Giả sử ta đánh số các đỉnh theo ngược chiều kim đồng hồ là 1, 2, 3, ..., 5000 (h.65).

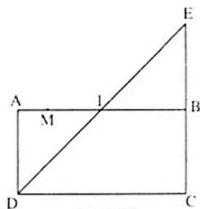
Xét tập $A_1 = \{1; 1001; 2001; 3001; 4001\}$,

$$A_2 = \{2, 1002; 2002; 3002; 4002\},$$

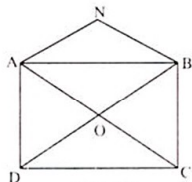
$\vdots$

$$A_{1000} = \{1000; 2000; 3000; 4000; 5000\}.$$

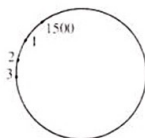
Chọn ra từ tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, 5000\}$ 2001 điểm thì luôn tồn tại ba điểm thuộc cùng một tập hợp A_i ($i = 1, 2, \dots, 1000$) nào đó. Để thấy ba điểm tùy ý của tập A_i luôn lập thành một tam giác cân.



Hình 63



Hình 64



Hình 65

ĐỀ 6

Bài 1. Ta có

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy + x + y = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } x + y = S; xy = P.$$

$$\text{Ta có : } (x + y)^2 \geq 4xy, \text{ hay } P \leq \frac{S^2}{4}.$$

$$2(x+y)^2 - 6xy + (x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2S^2 - 6P + S = 0 \Rightarrow P = \frac{2S^2 + S}{6} \leq \frac{S^2}{4} \Rightarrow S^2 + 2S \leq 0$$

$$\Rightarrow -2 \leq S \leq 0 \text{ mà } S \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{-2; -1; 0\}.$$

$$\text{Với } S = -2 \Rightarrow P = 1$$

$$S = -1 \Rightarrow P = \frac{1}{6} \text{ (loại)}$$

$$S = 0 \Rightarrow P = 0.$$

Vậy ta được các bộ nghiệm $(0, 0); (-1, -1)$.

Bài 2. Điều kiện: $x \geq \frac{1}{5}$.

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{5x-1} + 3) + |\sqrt{5x-1} - 2| = 5 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{5x-1} + 1 = 5 & \text{nếu } \sqrt{5x-1} \geq 2 \\ (\sqrt{5x-1} + 3) + (2 - \sqrt{5x-1}) = 5 & \text{nếu } \sqrt{5x-1} \leq 2. \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có vô số nghiệm với mọi giá trị x thoả mãn $\frac{1}{5} \leq x \leq 1$.

$$\text{Bài 3. } P = |ab| + |bc| + |ca| - abc \leq |a| \cdot |b| + |b| \cdot |c| + |c| \cdot |a| + |abc|. \quad (1)$$

Đặt $|a| = x; |b| = y; |c| = z$, ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ và $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Mặt khác: $3 = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;

$$3 = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \Rightarrow xyz \leq 1 \Rightarrow xy + yz + zx + xyz \leq 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow P \leq 4 \Rightarrow \max P = 4$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| = |c| \\ |abc| = -abc \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ trong ba số a, b, c có một số bằng -1 , hai số bằng 1 , hoặc cả ba số đều bằng -1 .

Bài 4. Kéo dài PQ cắt (O) tại E. Do AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔPQN tại P

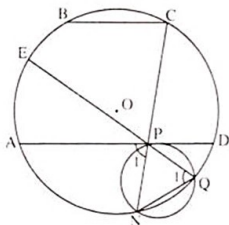
$$\Rightarrow P_1 = \hat{Q}_1 \text{ (h.66).}$$

$$\hat{P}_1 = \frac{\text{sd}\widehat{AN} + \text{sd}\widehat{CD}}{2} = \frac{\text{sd}\widehat{AN} + \text{sd}\widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{sd}\widehat{AE} = \text{sd}\widehat{AB} \Rightarrow E \equiv B. \text{ Lại có}$$

$$\widehat{AQB} = \frac{\text{sd}\widehat{AB}}{2} = \frac{\text{sd}\widehat{CD}}{2} = \widehat{CAD}$$

$\Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ .



Hình 66

Bài 5. Giả sử tồn tại hình thang cân thỏa mãn điều kiện độ dài cạnh lớn nhất bằng 13, chu vi bằng 28.

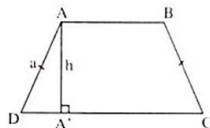
Trường hợp 1.

Cạnh lớn nhất là cạnh đáy DC ($DC = 13$).

Gọi $AD = BC = a$ và $AA' = h$ (h. 67).

$$A'D = \sqrt{a^2 - h^2} = \frac{1}{2}(CD - AB)$$

$$= \frac{1}{2}(13 - 15 + 2a) = a - 1.$$



Hình 67

$$\text{Ta có: } AD^2 = AA'^2 + DA'^2 = h^2 + (a - 1)^2 \Leftrightarrow a^2 = h^2 + (a - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{2a - 1}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{h \cdot (AB + CD)}{2} = \sqrt{2a - 1} \cdot (14 - a) = \sqrt{2a - 1} \cdot \sqrt{14 - a} \cdot \sqrt{14 - a}$$

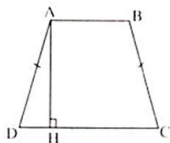
$$\leq \left(\frac{(\sqrt{2a - 1})^2 + (\sqrt{14 - a})^2 + (\sqrt{14 - a})^2}{3} \right)^{3/2} = 27.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 5$.

Trường hợp 2. (h.68)

Hình thang cân ABCD có $AD = BC = 13$

và $AB + CD = 2$



Hình 68

$$S_{ABCD} = \frac{(AB+CD).AH}{2} \leq \frac{2.13}{2} < 27.$$

Do đó, hình thang cân có độ dài cạnh lớn nhất là 13, chu vi bằng 28 thì diện tích lớn nhất chỉ có thể là 27. Như vậy không thể tồn tại một hình thang cân có tính chất trên mà diện tích bằng 27,0001.

ĐỀ 7

Bài 1. Ta có $A = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{55\dots5}_{(n-1)}6$.

Đặt $x = \underbrace{11\dots1}_n$, thì $10^n = 9x + 1$.

$\Rightarrow A = (3x + 1)^2$ là số chính phương.

Bài 2. Ta có : $\sqrt[3]{2x+3} + 1 = x^3 + 3x^2 + 2x \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+3} = (x+1)^3 - x - 2$.

Đặt $y + 1 = \sqrt[3]{2x+3} \Rightarrow (y+1)^3 = 2x+3$. (1)

Phương trình đã cho trở thành

$y + 1 = (x+1)^3 - (x+2) \Rightarrow (x+1)^3 = (x+y) + 3$ (2)

Lấy (2) - (1), ta có $(x+1)^3 - (y+1)^3 = y - x$

$\Leftrightarrow (x-y)[(x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + 1] = 0$

$\Leftrightarrow x = y$ do $(x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + 1 > 0$

Thay $x = y$ vào (1), ta được

$$(x+1)^3 = 2x+3 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = (-1-\sqrt{5}):2 \\ x = (-1+\sqrt{5}):2. \end{cases}$$

Bài 3. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Ta có $|f(x)| \leq 1$ với $\forall x \in \mathbf{R}$ thoả mãn $|x| \leq 1$.

Với $x = 1 \Rightarrow |f(1)| = |a+b+c| \leq 1$,

$x = -1 \Rightarrow |f(-1)| = |a-b+c| \leq 1$.

$$x = 0 \Rightarrow |f(0)| = |c| \leq 1.$$

$$|a+b| = |(a+b+c)+(-c)| \leq |a+b+c| + |-c| \leq 2.$$

$$|a-b| = |(a-b+c)+(-c)| \leq |a-b+c| + |c| \leq 2$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \leq 4 \text{ và } (a-b)^2 \leq 4 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 \leq 8 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 3b^2 \leq 4a^2 + 4b^2 \leq 16.$$

Chẳng hạn, chọn $f(x) = 2x^2 - 1$ ($a = 2$; $b = 0$; $c = -1$), ta có

$$|f(x)| = |2x^2 - 1| \leq 1 \text{ với mọi } x \text{ thoả mãn } |x| \leq 1 \text{ và } 4a^2 + 3b^2 = 16.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $4a^2 + 3b^2$ là 16.

Bài 4. (h.69)

$$a) PQ \leq PI + IQ = \frac{AM}{2} + \frac{AM}{2} = AM$$

$$\Rightarrow PQ \leq AM \leq AC$$

$$\Rightarrow PQ \text{ lớn nhất} = AB = AC.$$

Dấu "=" xảy ra khi M trùng B hoặc M trùng C.

$$\frac{PQ}{\sin A} = AM \Rightarrow PQ = AM \cdot \sin 60^\circ \geq AH \cdot \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow PQ \text{ nhỏ nhất} = AH \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

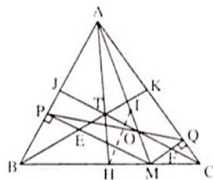
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$.

b) Các điểm A, P, H, M, Q đều nằm trên đường tròn đường kính AM. Tứ giác APHQ nội tiếp mà $\widehat{PAH} = \widehat{HAQ} \Rightarrow PH = HQ$. Ta có: $HP = HQ$; $IP = IQ \Rightarrow IH$ qua O. Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$; E, F tương ứng là giao điểm của BK và PM, CJ và MQ.

Dễ thấy tứ giác METF là hình bình hành.

$$\frac{ME}{MP} = \frac{MF}{MQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF \parallel PQ.$$

Gọi N là trung điểm của EF. Theo bổ đề hình thang ta có: T, O, N, M thẳng hàng. Vậy MO luôn qua T cố định, khi M di động trên BC.



Hình 69

Bài 5. Giả sử tồn tại $x \in \mathbf{R}$ sao cho $x + \sqrt{2}$ và $x^3 + \sqrt{2}$ đều là các số hữu tỉ

$$\begin{aligned} x + \sqrt{2} = a, \quad a \in \mathbf{Q} &\Rightarrow x^3 = (a - \sqrt{2})^3 \Rightarrow x^3 + \sqrt{2} = (a - \sqrt{2})^3 + \sqrt{2} = \\ &= a^3 - 3\sqrt{2}a^2 + 6a - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = a^3 + 6a - (3a^2 + 1)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dễ thấy để $x^3 + \sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ thì $(3a^2 + 1) = 0$, vô lí.

Vậy không tồn tại giá trị $x \in \mathbf{Q}$ sao cho $x + \sqrt{2}$ và $x^3 + \sqrt{2}$ đều là các số hữu tỉ.

ĐỀ 8

Bài 1. Dễ thấy mọi $x \in \mathbf{Z}$ và $x \geq 0$ đều không là nghiệm của phương trình. Nếu $x < 0$, đặt $x = -k$ và $k > 0$.

$$\begin{aligned} 1) \text{ Nếu } k = 1 \text{ thì } & 2.k^{2010} > k^{2011}, \\ & 4.k^{2008} > 3.k^{2009} \\ & \vdots \\ & 2012 > 2011k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{2011} + 2.x^{2010} + \dots + 2011x + 2012 > 0 \text{ (vô lí).}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Nếu } k \geq 2 \text{ thì } & k^{2011} \geq 2.k^{2010}, \\ & 3.k^{2009} > 4.k^{2008}, \\ & 2011k > 2012 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{2011} + 2x^{2010} + \dots + 2012 < 0 \text{ (vô lí).}$$

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 2. Do x_0 là nghiệm của các phương trình (1), (2), ... (2012), ..., (n) nên

$$x_0^2 + a_1x_0 + b_1 = x_0^2 + a_2x_0 + b_2 = \dots = x_0^2 + a_nx_0 + b_n = 0.$$

Cộng các vế, ta có :

$$nx_0^2 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)x_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0$$

$$\Rightarrow x_0^2 + \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right) x_0 + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} = 0$$

x_0 là nghiệm của phương trình (*).

Mặt khác, theo định lí Vi-ét :

$$x_0 + x_1 = -a_1 ; x_0 + x_2 = -a_2 ; \dots ; x_0 + x_n = -a_n.$$

Cộng các vế, ta có

$$nx_0 + (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = -(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

$$\Leftrightarrow x_0 + \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} = -\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n}.$$

$$\text{Đặt } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \text{ suy ra } x_0 + \bar{x} = -\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n}$$

$\Rightarrow \bar{x}$ cũng là nghiệm của phương trình (*).

Vậy phương trình (*) có các nghiệm là x_0 và $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Bài 3. Cách 1. (h.70)

Gọi E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Do $\triangle MBC$ và $\triangle CBN$ theo thứ tự cân tại B và C nên tứ giác BECI là hình bình hành. Áp dụng định lí Mênêlaút cho $\triangle MCA$ với ba điểm thẳng hàng I, K, X, ta có

$$\frac{KC}{KA} \cdot \frac{XA}{XM} \cdot \frac{IM}{IC} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{KC}{XM} = \frac{IC}{IM} = \frac{BE}{IM} \quad (1)$$

$$\triangle AEB \sim \triangle XIM \Rightarrow \frac{AB}{XM} = \frac{BE}{IM} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AB}{XM} = \frac{KC}{XM}$$

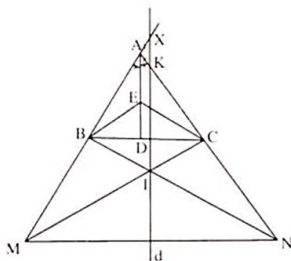
$$\Rightarrow AB = KC.$$

Cách 2. (h.71)

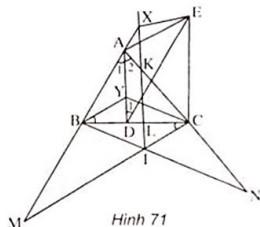
Gọi X là giao điểm của IK và AB.

Dựng hình bình hành BXED

$$\Rightarrow BX = DE.$$



Hình 70



Hình 71

Y là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Dễ thấy tứ giác BYCI là hình bình hành và $\triangle BYD = \triangle CIL$ (g.c.g) $\Rightarrow CL = BD = XE$.

Suy ra tứ giác LXEC là hình bình hành, do $CL \parallel XE$ và $CL = XE$

$\Rightarrow CE \parallel XL \parallel AD \Rightarrow$ tứ giác CDAE là hình thang, mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{D}_1$

$\Rightarrow$ tứ giác CDAE là hình thang cân $\Rightarrow CA = DE = BX$.

Ta có $CA = BX$ mà $AX = AK$. Vậy $AB = CK$.

Bài 4. Gọi các số phải tìm là $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$).

Trường hợp 1 :

$a, b \in \{1, 2\}$, c có 3 cách chọn, d có 2 cách chọn $\Rightarrow$ chọn được 12 số.

Trường hợp 2 :

$b, c \in \{1, 2\}$, a có 2 cách chọn, d có 2 cách chọn $\Rightarrow$ chọn được 8 số.

Trường hợp 3 :

$c, d \in \{1, 2\}$, tương tự như trường hợp 2, ta chọn được 8 số.

Vậy số các số tìm được là : $12 + 8 + 8 = 28$ (số).

Bài 5. Nếu $x = y$ ta có $f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + \frac{f(0)}{2}.$$

$$\text{Nếu } x = y = 0 \text{ ta có } f(0) = 0 + \frac{f(0)}{2} \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = x^2.$$

Thử lại dễ thấy $f(x) = x^2$ thoả mãn điều kiện của đề bài.

ĐỀ 9

Bài 1.

$$a) |x-1| = |x-2a+1| \Leftrightarrow (x-1)^2 = (x-2a+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x(2a-1) + (2a-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(a-1)x = 4a^2 - 4a = 4a(a-1).$$

Dễ thấy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 1$ và nghiệm của (1) là $x = a$.

b) Giả sử (1) ; (2) ; (3) đều vô nghiệm, ta có :

$$\begin{cases} b^2 - ac < 0 & (1') \\ c^2 - ab < 0 & (2') \\ a^2 - bc < 0. & (3') \end{cases}$$

Cộng các vế của (1') ; (2') ; (3'), ta có $a^2 + b^2 + c^2 < ab + bc + ca \Rightarrow$ vô lí.

Vậy một trong ba phương trình trên phải có nghiệm.

Bài 2. Gọi ba số đó là $n - 1$; n ; $n + 1$. Ta có :

$$(n - 1)^3 < (n - 1)n(n + 1) = n(n^2 - 1) < n^3$$

$\Rightarrow$ tích ba số nguyên dương liên tiếp không thể là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 3. Gọi $f(x) = 1 + x - x^{20} + x^{200} - x^{2012}$ và $g(x) = x^2 - 1$ và dư cuối cùng của đa thức $f(x)$ cho $g(x)$ là $ax + b$.

$$\Rightarrow f(x) = h(x) \cdot (x^2 - 1) + ax + b, \quad (1)$$

ở đó $h(x)$ là thương của đa thức $f(x)$ cho $g(x)$.

Với $x = 1$ ta có $f(1) = a \cdot 1 + b = 1$;

$$x = -1 \text{ ta có } f(-1) = a(-1) + b = -1.$$

$$\text{suy ra } \begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases}$$

Vậy số dư cuối cùng trong phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ là x .

Bài 4.

Gọi I là giao điểm của BC và PA
(h.72).

Ta có $PO \parallel IC$ vì $PO \perp AB$

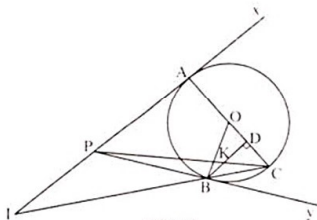
và $AB \perp IC$.

Do $PO \parallel IC$ và $AO = OC$

$\Rightarrow PI = PA$.

Có $PI = PA$ và $BD \parallel IA$

$\Rightarrow BK = KD$.



Hình 72

Bài 5. Ta có : $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ (*)

$xy = 2012$ (1) $\Rightarrow$ các cặp (x, y) thoả mãn (1) là $(1, 2012)$; $(2, 1006)$;

$(4, 503) : (2012, 1) : (1006 : 2)$ và $(503, 4)$

$$\Rightarrow (x - y)^2 \geq (503 - 4)^2. \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow (x + y)^2 \geq 499^2 + 2012 \cdot 4 = 507^2$$

$$\Rightarrow (x + y) \geq 507 \Rightarrow (x + y) \text{ nhỏ nhất bằng } 507.$$

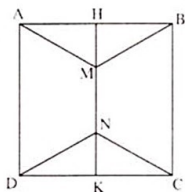
$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} x = 503, y = 4 \\ x = 4, y = 503. \end{cases}$$

Bài 6. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.

Lấy M, N thuộc đoạn HK sao cho $HM = KN = 8$ (h.73)

$$\Rightarrow MN = 20,7 \text{ và } MA = MB = NC = ND > 20.$$

Trong sáu điểm A, B, C, D, M, N thì khoảng cách giữa hai điểm bất kì đều lớn hơn 20. Xét 6 đường tròn tâm A, B, C, D, M, N có bán kính 10. Dễ thấy các đường tròn này ngoài nhau nên chúng không có điểm chung. Vì trong hình vuông chỉ có 5 điểm nên tồn tại một đường tròn không chứa điểm nào trong 5 điểm đó. Gọi O là tâm của đường tròn đó và O chính là điểm thoả mãn các yêu cầu của đề bài.



Hình 73

ĐỀ 10

Bài 1.

$$\text{a) Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq -3 \pm 2\sqrt{5} \end{cases}. \text{ Đặt } t = \sqrt{x-2}, \text{ ta có phương trình}$$

$$t = \frac{5(t^2 + 2)^2 - 10(t^2 + 2) + 1}{(t^2 + 2)^2 + 6(t^2 + 2) - 11} \Rightarrow (t - 1)^5 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 3.$$

Thử lại ta thấy $x = 3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

$$\text{b) Điều kiện } x \geq 4.$$

$$\text{Ta có phương trình } \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9} = 7.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x^2 - 16}; v = \sqrt{x^2 - 9} \Rightarrow u \geq 0 \text{ và } v \geq 0.$$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} u + v = 7 \\ v^2 - u^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow v = 4 \Rightarrow x = 5.$$

Thử lại ta thấy $x = 5$ là nghiệm của phương trình đã cho.

$$\text{c) } 2|x| = 5 - y \Rightarrow 5 - y \geq 0 \Rightarrow |y - 5| = 5 - y$$

$$\begin{cases} 2|x| + y = 5 \\ x + 2|y - 5| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x| + y - 5 = 0 \\ x + 2(5 - y) = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x + 2(5 - y) = 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x + y - 5 = 0 \\ x + 2(5 - y) = 3 \\ x \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0,6 \\ y = 3,8 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 3. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } \begin{cases} x = 0,6 \\ y = 3,8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ y = 3. \end{cases}$$

Bài 2.

$$\text{a) Vì } x, y \in \mathbf{Z} \text{ và } 4x + 5y = 7 \Rightarrow xy < 0.$$

$$\text{* Nếu } x > 0 \text{ và } y < 0 \Rightarrow 5|x| - 3|y| = 5x + 3y = \frac{21 + 13x}{5} \geq \frac{21 + 13,3}{5} > 1.$$

$$\text{* Nếu } x < 0 \text{ và } y > 0 \Rightarrow 5|x| - 3|y| = -(5x + 3y) = -\left(\frac{21 + 13x}{5}\right)$$

$$\Rightarrow 5|x| - 3|y| = -\left(\frac{21 + 13x}{5}\right) \geq \frac{-21 - 13(-2)}{5} = 1.$$

$$\text{Vậy ta luôn có } 5|x| - 3|y| \geq 1.$$

$$\text{b) Ta có } \sqrt{ab+1} \geq \frac{a+b}{2} \text{ với } a, b \in [\alpha; \beta] \text{ và } \beta - \alpha \leq 2.$$

$$\text{Thật vậy: } 4(ab+1) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 4 \Leftrightarrow |a-b| \leq 2 \text{ hiển nhiên.}$$

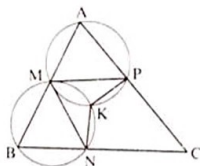
$$\text{Do đó } \sqrt{ab+1} + \sqrt{bc+1} + \sqrt{ca+1} \geq \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} = a+b+c.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow |a-b| = |b-c| = |c-a| = 2.$$

Bài 3. a) (h.74) Giả sử đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMP$ và $\triangle BMN$ cắt nhau tại một điểm thứ hai khác M là K. Dễ thấy :

$$\widehat{PKN} + \widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ tứ giác PKNC nội tiếp, hay đường tròn ngoại tiếp $\triangle NPC$ cũng qua K. Vậy ba đường tròn ngoại tiếp các $\triangle AMP$, $\triangle BMN$ và $\triangle CNP$ cắt nhau tại một điểm.



Hình 74

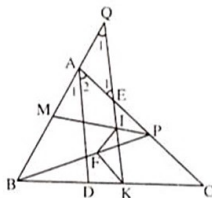
b) (h.75) Gọi F là trung điểm của BP

$$\Rightarrow \triangle FIK \text{ cân ở } F$$

$$\Rightarrow \triangle AQE \text{ cân ở } A$$

$$\Rightarrow \widehat{Q_1} = \widehat{E_1} = \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$$

$$\Rightarrow AD \parallel QE, \text{ hay } AD \parallel IK.$$



Hình 75

Bài 4. Giả sử $2x^2 + 19x + 45 = p^2$, $p \in \mathbb{P}$

$$\Rightarrow (x+5)(2x+9) = p^2.$$

Do p là số nguyên tố nên,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+5=1 \\ 2x+9=p^2 \end{cases} \text{ (loại)} \\ \begin{cases} x+5=-1 \\ 2x+9=-p^2 \end{cases} \text{ (loại)} \\ \begin{cases} x+5=p^2 \\ 2x+9=1 \end{cases} \text{ (loại)} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+5=-p^2 \\ 2x+9=-1 \end{cases} \text{ (loại)} \\ \begin{cases} x+5=p \\ 2x+9=p \end{cases} \text{ (loại)} \\ \begin{cases} x+5=-p \\ 2x+9=-p \end{cases} \text{ (loại)} \end{array} \right.$$

Vậy không có số nguyên x nào sao cho $2x^2 + 19x + 45$ bằng bình phương của một số nguyên tố.

ĐỀ 11

Bài 1. Trong bốn số a_1, a_2, a_3, a_4 luôn tồn tại hai số chẳng hạn $a_1 \equiv a_2 \pmod{3} \Rightarrow (a_1 - a_2) \vdots 3$. Trong bốn số a_2, a_3, a_4, a_5 cũng tồn tại một hiệu khác chia hết cho 3 $\Rightarrow P \vdots 3^2$. (1)

Trong năm số tồn tại hai số, chẳng hạn $a_4 \equiv a_5 \pmod{4}$, nên $(a_4 - a_5) \vdots 4$. Mỗi bộ ba số trong bốn số a_1, a_2, a_3, a_4 sẽ có hai số đồng dư với 2 nên có ba hiệu khác nhau cũng chia hết cho 2. Vậy $P \vdots 2^5$ (2). Từ (1) và (2) ta có $P \vdots 3^2 \times 2^5 = 288$.

Bài 2. Đặt $\sqrt[3]{x} = u$; $\sqrt[3]{y} = v$; $\sqrt[3]{z} = t$, ta có

$$\begin{cases} u + v + t = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} uv + vt + tu = -3 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u.v.t = -2. & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow v + t = -u. \quad (1')$$

$$\text{Từ (3)} \Rightarrow v.t = -\frac{2}{u}. \quad (3')$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow u(v + t) + vt = -3 \quad (2')$$

$$\Rightarrow u.(-u) - \frac{2}{u} = -3 \Rightarrow u^3 - 3u + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (u - 1)^2(u + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = -2. \end{cases}$$

Từ đó hệ có ba nghiệm $(x, y, z) = (-8, 1, 1); (1, 1, -8); (1, -8, 1)$.

Bài 3. Đặt $S = ab + bc + ca$ thì

$$\text{Viết trái (1)} = \frac{S - (ca + bc)}{ca + bc} + \frac{S - (ab + ac)}{ab + ac} + \frac{S - (bc + ba)}{bc + ba}$$

$$= S \left(\frac{1}{ca + bc} + \frac{1}{ab + ac} + \frac{1}{bc + ca} \right) - 3$$

$$= \frac{1}{2} [(ca + bc) + (ab + ac) + (bc + ca)] \cdot \left(\frac{1}{ca + bc} + \frac{1}{ab + ac} + \frac{1}{bc + ba} \right) - 3$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = \frac{3}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ab = bc = ca \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 4.

a) (h.76)

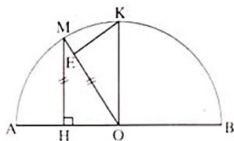
• *Phần thuận* :

Lấy K cố định, K là điểm chính giữa cung

$\widehat{AB}$. Ta có $\Delta MHO = \Delta EOK$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{MHO} = \widehat{KEO} = 90^\circ$$

$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính OK .



Hình 76

• *Phần đảo* : Hiển nhiên

Lấy E tùy ý, E thuộc đường tròn đường kính OK . Nối OE cắt (O) tại M. Kẻ $MH \perp AB$. Dễ thấy $OE = MH$. Vậy quỹ tích E là đường tròn đường kính OK .

b) *HD* : Sử dụng công thức Pytago và định lí Bunhiacôpxki, bạn đọc tự giải.

Bài 5. Vì n là số nguyên lẻ nên $(-x)^n = -x^n$, (2)

Thay x bởi $-x$ vào (1), ta có : $af((-x)^n) + f(-(-x)^n) = -bx$.

Do (2) ta được : $af(-x^n) + f(x^n) = -bx$. (3)

Giải hệ (1) và (3), ta được :

$$f(x^n) = \frac{bx}{a-1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{b\sqrt[n]{x}}{a-1} \quad (a \neq 1).$$

ĐỀ 12

Bài 1. Xét các số $a_1 = 7, a_2 = 77, a_3 = 777, \dots, a_{2012} = \underbrace{77\dots77}_{2012 \text{ chữ số}}$.

Dễ thấy trong 2012 số $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$ nói trên luôn tồn tại hai số chia cho 2011 có cùng số dư. Không mất tính tổng quát gọi hai số đó là a_i và a_j ($i > j$).

Ta có $a_i - a_j \vdots 2011$

$$\Rightarrow \underbrace{777\dots 7}_{i \text{ chữ số}} - \underbrace{77\dots 7}_{j \text{ chữ số}} = \underbrace{77\dots 77}_{(i-j) \text{ chữ số}} \underbrace{00\dots 0}_{j \text{ chữ số}} = 77\dots 7 \cdot 10^j : 2011$$

$$\Rightarrow 77 \dots 7 : 2011.$$

Vậy tồn tại số tự nhiên gồm toàn các chữ số 7 và chia hết cho 2011.

Bài 2. Điều kiện $\Delta_{(1)} \geq 0$ và $\Delta_{(2)} \geq 0$.

Gọi x_0 là nghiệm chung của phương trình (1) và (2)

$$\Rightarrow x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \text{ và } x_0^2 + bx_0 + 2 = 0.$$

$$\text{Để thấy } x_0 \neq 0 \text{ và } a = \frac{-x_0^2 - 1}{x_0}; b = \frac{-x_0^2 - 2}{x_0}$$

$$\Rightarrow |a| + |b| = \frac{2x_0^2 + 3}{|x_0|} = 2|x_0| + \frac{3}{|x_0|} \geq 2\sqrt{2|x_0| \cdot \frac{3}{|x_0|}} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow |x_0| = \frac{3}{2|x_0|} \Leftrightarrow |x_0|^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5\sqrt{6}}{6}; b = \frac{7\sqrt{6}}{6} \\ a = -\frac{5\sqrt{6}}{6}; b = -\frac{7\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Thử lại ta thấy các giá trị a, b trên thoả mãn các điều kiện của đề bài.

Bài 3. Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ hoặc $z = 0$, do đó $\frac{xy}{ay+bx}$ hoặc $\frac{zx}{cx+az}$ không xác định $\Rightarrow$ loại.

Vậy x, y, z luôn khác 0.

$$\text{Từ (*) suy ra } \frac{ay+bx}{xy} = \frac{bz+cy}{yz} = \frac{cx+az}{zx} = \frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2} = k.$$

$$\text{Cộng các vế, ta có: } 2\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) = \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta có hệ sau

$$\begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{3}{2}k \\ \frac{b}{y} + \frac{a}{x} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{x^2 + y^2 + z^2} = k \\ \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = k \\ \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{y^2} = \frac{c^2}{z^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2}{4} \text{ có } k \neq 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{k^2}{4} = k \\ k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 - 4k = 0 \\ k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \\ z = \frac{c}{2} \end{cases}$$

Thử lại vào (*), ta thấy thoả mãn.

Vậy hệ có nghiệm $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, $z = \frac{c}{2}$.

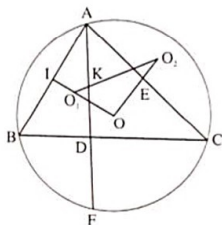
Bài 4. (h.77)

a) Gọi F là giao điểm của AD và (O).

Ta có $\triangle ABD \sim \triangle AFC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AF$$

Lại có $AD < AF \Rightarrow AB \cdot AC > AD^2$.



Hình 77

b) Gọi giao điểm của O_1O_2 và AD là K , OO_1 và AB là I , OO_2 và AC là E .

Dễ thấy $\hat{I} = \hat{K} = \hat{E} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KO_1O} = \widehat{O_2O_1O} = \widehat{IAK} = \frac{\hat{A}}{2}$, do tứ giác AO_1K nội tiếp.

Tương tự, $\widehat{O_1O_2O} = \widehat{KO_2E} = \widehat{KAE} = \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{OO_1O_2} = \widehat{OO_2O_1}$

$\Rightarrow \triangle OO_1O_2$ cân ở O .

Bài 5. Giả sử ta có thể điền được các số $0, 1, \dots, 9$ vào các vị trí $A, B, \dots, K$ theo yêu cầu của đề bài. Gọi các giá trị tại các điểm $A, B, \dots, K$ là $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ (ở đó $a_i \in \mathbb{N}; a_j \leq 9, i = 1, 2, \dots, 10$) như ở hình 78.

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 0 + 1 + \dots + 9 = 45.$$

Mặt khác, ta có :

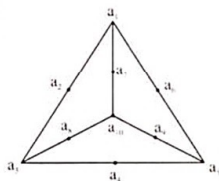
$$a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5 = a_5 + a_6 + a_1$$

$$= a_1 + a_7 + a_{10} = a_3 + a_8 + a_{10} = a_5 + a_9 + a_{10} = s$$

$$\Rightarrow 6s = 6(a_1 + a_2 + a_3) = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_3 + a_4 + a_5) + \dots + (a_5 + a_9 + a_{10})$$

$$\Rightarrow 6s = (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) + 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_{10}) = 45 + 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_{10})$$

$\Rightarrow 45 : 2 \Rightarrow$ vô lí. Vậy không tồn tại cách điền các số $0, 1, 2, \dots, 9$ vào các vị trí $A, B, \dots, K$ theo yêu cầu của đề bài.



Hình 78

ĐỀ 13

Bài 1. Nếu $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì

$$a = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n = 1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} + 5^{4k}$$

$\Rightarrow a$ có chữ số tận cùng là 9.

Nếu $n = 4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì a có chữ số tận cùng là 5,

Nếu $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) thì a có chữ số tận cùng là 5,

Nếu $n = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) thì a có chữ số tận cùng là 5.

Vậy nếu $n \not\equiv 4$ thì $a \equiv 5$ do đó số các số tự nhiên $n \in H = \{1, 2, 3, \dots, 2011, 2012\}$ và không chia hết cho 4 là $\frac{3}{4} \times 2000 + 9 = 1509$ số.

Bài 2.

a) Ta có $\{a\} + \{a\} = a$, cộng các vế của (1), (2) và (3), suy ra

$$2x + 2y + 2z = 13,2 + 14,3 + 15,1 \Rightarrow x + y + z = 21,3 \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4)} \Rightarrow y - \{y\} + z - \{z\} = 21,3 - 13,2 \Rightarrow \{z\} + \{y\} = 8,1 \quad (5)$$

$$\text{Từ (2) và (4)} \Rightarrow x - \{x\} + y - \{y\} = 21,3 - 14,3 \Rightarrow \{y\} + \{x\} = 7,0 \quad (6)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow x - \{x\} + z - \{z\} = 21,3 - 15,1 \Rightarrow \{z\} + \{x\} = 6,2 \quad (7)$$

$$\text{Từ (5) ; (6) ; (7) ta có : } \{x\} + \{x\} = x - 6 + 0 = 6,$$

$$\{y\} + \{y\} = 7 + 0,1 = 7,1,$$

$$\{z\} + \{z\} = 8 + 0,2 = 8,2.$$

$$\text{b) } x^2 + y^2 = (107 - m)(m - 91) \geq 0 \Leftrightarrow 91 \leq m \leq 107. \quad (1)$$

$$54(u^2 - v^2) = m(15u + 3v - m) = m(15u + 3v) - m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - (15u + 3v)m + 54(u^2 - v^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9(u + v) \\ m = 6(u - v). \end{cases}$$

$$\text{Do } u, v \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \equiv 9 \text{ hoặc } m \equiv 6. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta có $m = 96 ; 99 ; 102$.

Mặt khác, x^2 và y^2 là các số chính phương, nên ta có $m = 99$ thoả mãn các điều kiện của đề bài.

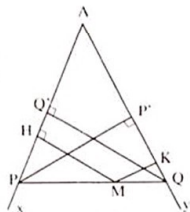
Với $m = 99$ thì $x = 0 ; y = 8 ; u = 6$ và $v = 5$.

Bài 3. (h.79)

Bạn đọc có thể tự chứng minh kết quả sau :

“Tập hợp các điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh Ax, Ay bằng l ($l > 0$, cho trước) là đáy PQ của tam giác cân APQ và khoảng cách PP' từ P đến Ay bằng l , khoảng cách QQ' từ Q đến Ax bằng l ”.

Áp dụng kết quả trên, ta có $\triangle APQ$ cố định, $\triangle APQ$ cân ở A. Kẻ $AE \perp PQ$, suy ra E cố định (h.80).



Hình 79

Để thấy 5 điểm A, H, E, M, K nằm trên đường tròn đường kính AM. Vậy đường tròn ngoại tiếp tứ giác AHMK luôn đi qua một điểm cố định thứ hai khác A là điểm E.

Bài 4. Ta có

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \\ = \sqrt{\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} \right) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y+z} + \frac{y}{y+x} \right); \quad (2)$$

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z+y} + \frac{z}{z+x} \right). \quad (3)$$

Cộng các vế của (1), (2), (3), ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$.

Bài 5. (h.81)

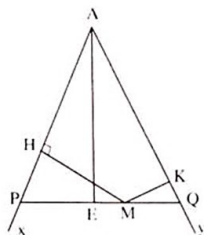
Giả sử không có một mặt nào của hình lập phương chứa ít nhất ba đỉnh đỏ.

Vì mỗi cạnh đỏ đều được tính 2 lượt theo hai mặt kề nó nên có $7 \times 2 = 14$ lượt cạnh đỏ, mà chỉ có 6 mặt nên có ít nhất một mặt với 3 cạnh đỏ. Hình lập phương có 12 cạnh, tổ hợp 7 cạnh đỏ nên có ≤ 5 cạnh không tô đỏ. Giả sử một mặt với 3 cạnh đỏ là ABCD và AD, DC, BC đỏ. Có BB' không đỏ vì nếu BB' đỏ thì B' đỏ, suy ra trái giả thiết là mặt ABCD không thể có 3 đỉnh đỏ. Tương tự, AA' và AB cũng không đỏ. Có ≤ 5 cạnh không đỏ mà AA', AB và BB' đã không đỏ nên còn ≤ 2 cạnh không tô đỏ (*). Xét mặt phẳng CDD'C' có C và D đỏ nên C', D' không đỏ.

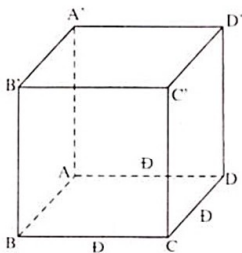
C', D' không đỏ thì số cạnh không đỏ phải ≥ 3 .

(**)

Từ (*) và (**) suy ra mâu thuẫn. Vậy phải có ít nhất một mặt của hình lập phương chứa ít nhất 3 đỉnh đỏ.



Hình 80



Hình 81

VI.3. ĐỀ THAM KHẢO

ĐỀ 1

KỶ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2010-2011

(Dùng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và chuyên Tin)
(150 phút)

Bài I (2,0 điểm)

- 1) Cho n là số nguyên, chứng minh $A = n^3 + 11n$ chia hết cho 6.
- 2) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $B = n^4 - 3n^2 + 1$ là số nguyên tố.

Bài II (2,0 điểm)

Cho phương trình : $(m^2 + 2m + 2)x^2 - (m^2 - 2m + 2)x - 1 = 0$.

- 1) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm các giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2(2x_1x_2 - 1)$.
- 2) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $S = x_1 + x_2$.

Bài III (2,0 điểm)

- 1) Cho a là số bất kì, chứng minh rằng : $\frac{a^{2010} + 2010}{\sqrt{a^{2010} + 2009}} > 2$.
- 2) Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình :
 $y^2 - x(x - 2)(x^2 - 2x + 2) = 0$.

Bài IV (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Đường tròn đường kính OM cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm E, F .

- 1) Chứng minh giao điểm I của đoạn thẳng OM với đường tròn $(O; R)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MEF .
- 2) Cho A là một điểm bất kì thuộc cung EF chứa điểm M của đường tròn đường kính OM (A khác E, F). Đoạn thẳng OA cắt đoạn thẳng EF tại B . Chứng minh $OA \cdot OB = R^2$.
- 3) Cho biết $OM = 2R$ và N là một điểm bất kì thuộc cung EF chứa điểm I của đường tròn $(O; R)$ (N khác E, F). Gọi d là đường thẳng qua F và

vuông góc với đường thẳng EN tại P, d cắt đường tròn đường kính OM tại K (khác F). Hai đường thẳng FN và KE cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng:

$$PN.PK + QN.QK \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R^2.$$

Bài V (1,0 điểm)

Giải phương trình : $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = 0$.

HƯỚNG DẪN CHẤM TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2010 - 2011

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
I			2,0
	1	Cho n là số nguyên, chứng minh $A = n^3 + 11n$ chia hết cho 6 (1,0 điểm)	
		$A = n^3 - n + 12n$	0,25
		$= n(n^2 - 1) + 12n$	0,25
		$= n(n - 1)(n + 1) + 12n$	0,25
		Nhận xét : tích của ba số nguyên liên tiếp $(n - 1)n(n + 1) \div 6$. Vậy $A \div 6$	0,25
	2	Tìm tất cả các số tự nhiên $n \dots$ (1,0 điểm)	
		$B = n^4 - 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 - 1)^2 - n^2$	0,25
		$= (n^2 - 1 + n)(n^2 - 1 - n)$	0,25
		Với n là số tự nhiên thì $n^2 - 1 + n > n^2 - 1 - n$, $n^2 - 1 + n > 0$.	0,25
		B là số nguyên tố suy ra $n^2 - 1 - n = 1 \Rightarrow n = 2$. Với $n = 2$ ta có $B = 5$ là số nguyên tố.	0,25
II			2,5
		Chứng minh rằng ... (1,0 điểm)	
		Nhận xét $a.c < 0$ suy ra phương trình luôn có 2 nghiệm x_1, x_2	0,25

		Theo định lí Vi-et có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 2m + 2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{m^2 + 2m + 2} \end{cases}$	0,25
		$x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2(2x_1x_2 - 1) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 4(x_1x_2)^2$ $\Leftrightarrow \left(\frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 2m + 2} \right)^2 = 4 \left(\frac{-1}{m^2 + 2m + 2} \right)^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 2 = 2.$	0,25
		Kết luận : $m = 0, m = 2.$	0,25
	2	Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất ... (1,0 điểm)	
		$S = x_1 + x_2 = \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 2m + 2}.$	0,25
		Xét phương trình $S = \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 2m + 2} \Leftrightarrow S(m^2 + 2m + 2) = m^2 - 2m + 2$ $\Leftrightarrow (S - 1)m^2 + 2(S + 1)m + 2(S - 1) = 0.$	0,25
		Với $S \neq 1$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$ $\Leftrightarrow (S + 1)^2 - 2(S - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq S \leq 3 + 2\sqrt{2}.$	0,25
		$S = 1$ khi $m = 0$ Kết luận : Giá trị lớn nhất của S bằng $3 + 2\sqrt{2}$ và giá trị nhỏ nhất của S bằng $3 - 2\sqrt{2}$.	0,25
III			2,0
	1	Chứng minh rằng ... (1 điểm)	
		$a^{2010} + 2010 > 2\sqrt{a^{2010} + 2009}$ $\Leftrightarrow a^{2010} + 2009 + 1 > 2\sqrt{a^{2010} + 2009}$	0,25
		$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^{2010} + 2009} \right)^2 - 2\sqrt{a^{2010} + 2009} + 1 > 0$	0,25

		$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^{2010} + 2009} - 1 \right)^2 > 0$ luôn đúng với mọi a.	0,25
2	Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình ... (1,0 điểm)		
		$y^2 - x(x-2)(x^2 - 2x + 2) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow y^2 - [(x-1)^2 - 1][(x-1)^2 + 1] = 0$	
		$y^2 - [(x-1)^4 - 1] = 0 \Leftrightarrow [y + (x-1)^2][y - (x-1)^2] = -1$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} y + (x-1)^2 = 1 \\ y - (x-1)^2 = -1 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} y + (x-1)^2 = -1 \\ y - (x-1)^2 = 1 \end{cases}$	
		Giải và kết luận các số x, y cần tìm là (x = 0, y = 0); (x = 2, y = 0).	0,25
IV			3,0
I	Chứng minh giao điểm I ... (1,0 điểm)		
	Vẽ hình đúng ý 1		0,25
	Chứng minh được ME, MF là tiếp tuyến của đường tròn (O).		0,25
	Nêu được MO là phân giác của $\widehat{EMF}$.		0,25
	Chứng minh được EI là phân giác của $\widehat{MEF}$ và suy ra I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MEF.		0,25

2	Chứng minh $OA.OB = R^2$ (1 điểm)	
	Nếu $A \equiv M$ thì $B \equiv H$. Trong tam giác vuông MEO ta có $OH.OM = OE^2$, hay $OA.OB = R^2$.	0,25
	Nếu A khác M : chứng minh được hai tam giác vuông OHB và OAM đồng dạng.	0,25
	Suy ra $\frac{OB}{OM} = \frac{OH}{OA}$.	0,25
	Suy ra $OA.OB = OH.OM = R^2$.	0,25
3	Cho biết $OM = 2R$... (1 điểm)	
	Chứng minh $\widehat{EKF} = 60^\circ$, $\widehat{PNQ} = 120^\circ$, suy ra tứ giác KPNQ nội tiếp đường tròn đường kính KN.	0,25
	Gọi FT là đường kính của đường tròn đường kính OM. Chứng minh ETKN là hình bình hành, suy ra $KN = TE = EF \cdot \cotg 60^\circ = R\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = R$ và tính được $PQ = \frac{KN}{2} \sqrt{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.	0,25
	$PN.PK + QN.QK = 2.S_{KPNQ} = KN(PP_1 + QQ_1) \leq KN.PQ$ (P_1, Q_1 lần lượt là hình chiếu của P, Q trên KN).	0,25
	Vậy $PN.PK + QN.QK \leq \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $PQ \perp KN$, hay $K \equiv M$.	0,25
V	Chứng minh rằng ... (1,0 điểm)	
	Vì $x^2 + x + 1 > 0$ với mọi x nên phương trình đã cho tương đương với $(x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x^{10} + x^5 + 1 = 0$ Vì $x^{10} + x^5 + 1 = \left(x^5 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x nên phương trình vô nghiệm.	0,5

ĐỀ 2

KỶ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2011-2012

(Dùng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và chuyên Tin)

(150 phút)

Bài I (2,0 điểm)

1) Với $a \neq \pm b$ giải phương trình : $(a^4 - b^4)x^2 - 2(a^3 - b^3)x + a^2 - b^2 = 0$.

2) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x - y - xy = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

Bài II (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 - 9n - 3$ chia hết cho $n - 11$.

2) Với ba số x, y, z không âm thoả mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = x^2 + y^2 + z^2$.

Bài III (3,5 điểm)

Trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ lấy điểm N sao cho $AN = R$ và M là một điểm bất kì trên cung nhỏ BN (M không trùng với B, N). Gọi I là giao điểm của AM và BN . Đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với AB tại điểm H cắt tia AN tại điểm C .

- 1) Chứng minh ba điểm B, M, C thẳng hàng.
- 2) Xác định vị trí của điểm M để chu vi của tứ giác $ABMN$ lớn nhất.
- 3) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNH luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên cung nhỏ BN của đường tròn $(O; R)$.
- 4) Gọi P là điểm chính giữa của cung AB không chứa điểm N của đường tròn $(O; R)$. Đường thẳng MP cắt AB tại điểm D . Chứng minh $\frac{MD}{MA} + \frac{MD}{MB}$ không đổi khi M thay đổi trên cung nhỏ BN của đường tròn $(O; R)$.

Bài IV (1,5 điểm)

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thoả mãn : $xyz = x^2 - 2z + 2$.

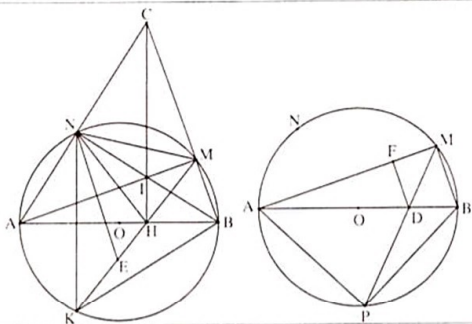
Bài V (1,0 điểm)

Chứng minh rằng từ 53 số tự nhiên bất kì luôn chọn được 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.

HƯỚNG DẪN CHẤM TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2011 - 2012

BÀI	Y	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
I			2,0
	1	<i>Giải phương trình (1,0 điểm)</i>	
		Tính được $\Delta' = a^4b^2 + a^2b^4 - 2a^3b^3 = (a^2b - ab^2)^2$	0,5
		Tìm ra hai nghiệm : $x_1 = \frac{a^3 - b^3 - a^2b + ab^2}{a^4 - b^4}$; $x_2 = \frac{a^3 - b^3 + a^2b - ab^2}{a^4 - b^4}$.	0,25
		Rút gọn được : $x_1 = \frac{1}{a+b}$; $x_2 = \frac{a+b}{a^2+b^2}$.	0,25
	2	<i>Giải hệ phương trình (1,0 điểm)</i>	
		$\begin{cases} x - y - xy = 2 + 3\sqrt{2} & (1) \\ x^2 + y^2 = 6 & (2) \end{cases}$ (2) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 2xy = 6 \Leftrightarrow (x - y)^2 + 2xy = 6$ (3)	0,25
		Thay (1) vào (3) ta có $(x - y)^2 + 2(x - y) - 4 - 6\sqrt{2} = 6$ $\Leftrightarrow (x - y)^2 + 2(x - y) + 1 = 11 + 6\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow (x - y + 1)^2 = (3 + \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 + \sqrt{2} & (4) \\ x - y = -4 - \sqrt{2} & (5) \end{cases}$	0,25
		Thay (4) vào (1) ta có $-xy = 2\sqrt{2}$. Giải hệ $\begin{cases} -xy = 2\sqrt{2} \\ x - y = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$ được $\begin{cases} (x; y) = (2; -\sqrt{2}), \\ (x; y) = (\sqrt{2}; -2). \end{cases}$	0,25
		Thay (5) vào (1), ta có $-xy = 6 + 4\sqrt{2}$, thay tiếp vào (3) không thoả mãn phương trình. Vậy hệ có hai nghiệm : $(x; y) = (2; -\sqrt{2}); (x; y) = (\sqrt{2}; -2)$.	0,25

II			2,0
		<i>Tìm tất cả các số nguyên dương n... (1,5 điểm)</i>	
		Ta có $\frac{n^2 - 9n - 3}{n - 11} = n + 2 + \frac{19}{n - 11}$.	0,5
		$n^2 - 9n - 3$ chia hết cho $n - 11$ khi và chỉ khi $n - 11$ là ước của 19. Suy ra $(n - 11) \in \{-1; 1; -19; 19\}$.	0,25
		Với $n - 11 = 1 \Leftrightarrow n = 12$. Với $n - 11 = -1 \Leftrightarrow n = 10$. Với $n - 11 = 19 \Leftrightarrow n = 30$. Với $n - 11 = -19 \Leftrightarrow n = -8$ (loại). Vậy $n^2 - 9n - 3$ chia hết cho $n - 11$ khi $n = 12; n = 10; n = 30$.	0,25
	2	<i>Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất ... (1,0 điểm)</i>	
		* Vì $x + y + z = 6$ $\Rightarrow 36 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$.	0,25
		Vì $xy + yz + zx \geq 0$ nên $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ Vậy A đạt giá trị lớn nhất bằng 36 khi $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ xy + yz + zx = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ hai trong ba số x, y, z bằng 0 và số còn lại bằng 6.	0,25
		* Luôn có : $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2xy + 2yz + 2zx$. (Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$).	0,25
III			3,5
	1	<i>Chứng minh B, M, C thẳng hàng (1,0 điểm)</i>	



	Tam giác ABC nhận I là trực tâm (vì có hai đường cao BN, CH cắt nhau tại I) suy ra $BC \perp AI$ (1)	0,5
	$\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn suy ra $BM \perp AI$ (2). Từ (1), (2) suy ra ba điểm B, M, C thẳng hàng.	0,5
2	Xác định M... (1,0 điểm)	
	Lấy K đối xứng với N qua AB, lấy E thuộc đoạn thẳng MK sao cho $ME = MN$. Chứng minh được tam giác MNE là tam giác đều	0,5
	Chứng minh được $\triangle MNB = \triangle NEK$. Suy ra $MN + MB = ME + EK = MK$. Chu vi của tứ giác ABMN bằng $BA + BN + MN + MB = 3R + MK$. Suy ra chu vi của tứ giác ABMN là lớn nhất khi KM là đường kính	0,5
3	Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp... (1 điểm)	
	Chứng minh được $\widehat{NHM} = \widehat{NOM}$.	0,5
	Suy ra tứ giác MNOH là tứ giác nội tiếp do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MNOH chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNH	0,25
	Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNH nằm trên	0,25

		đường trung trực của đoạn thẳng ON cố định.	
4		Chứng minh rằng $\frac{MD}{MA} + \frac{MD}{MB}$ <i>không đổi (0,5 điểm)</i>	
		MD là đường phân giác của tam giác MAB. Gọi F là hình chiếu của D trên MA Ta có $\frac{MA}{MB} = \frac{DA}{DB} = \frac{DA}{AB - DA} = \frac{DF}{MB - DF}$ $= \frac{\frac{MD}{\sqrt{2}}}{MB - \frac{MD}{\sqrt{2}}} = \frac{MD}{\sqrt{2}MB - MD}$	0,25
		Suy ra $MA \cdot (\sqrt{2}MB - MD) = MB \cdot MD$ $\Leftrightarrow \sqrt{2} MA \cdot MB = MA \cdot MD + MB \cdot MD$ $\Leftrightarrow \frac{MD}{MA} + \frac{MD}{MB} = \sqrt{2}.$	0,25
IV		Chứng minh rằng... (1,5 điểm)	
		Ta tìm hai số nguyên dương x, y sao cho $z = \frac{x^2 + 2}{xy + 2}$ là số nguyên dương. Với x = y ta có z = 1. Vậy mọi bộ ba (x ; x; 1) trong đó x là số nguyên dương tùy ý đều thỏa mãn.	0,25
		Với x < y, suy ra $x^2 + 2 < xy + 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 2}{xy + 2} < 1$ (không thỏa mãn đề bài)	0,25
		Với x > y : Giả sử bộ ba số nguyên dương (x ; y ; z) thỏa mãn đề bài, suy ra $y(x^2 + 2) \vdots (xy + 2)$, hay $[x(xy + 2) - 2(x - y)] \vdots (xy + 2) \Rightarrow 2(x - y) \vdots (xy + 2).$ Do đó tồn tại k nguyên dương sao cho $2(x - y) = k(xy + 2)$. (1)	0,5
		Với k ≥ 2, suy ra $x - y \geq xy + 2 \Rightarrow (x + 1)(y - 1) + 3 \leq 0$ (Vô lí).	0,25

	Với $k = 1$ ta có $2(x - y) = xy + 2 \Rightarrow (x + 2)(y - 2) = -6$. Do x, y nguyên dương và $x > y$, suy ra $y = 1$ và $x + 2 = 6$, suy ra $x = 4, z = 3$. Thử lại thoả mãn đề bài. Vậy $(x; y; z) = (4; 1; 3)$ và các bộ số $(x; x; 1)$, trong đó x là số nguyên dương tùy ý, thoả mãn đề bài.	
V	Chứng minh rằng từ 53 số... (1,0 điểm)	
	Ta chứng minh từ 5 số tự nhiên bất kì luôn tìm được ba số mà tổng của chúng chia hết cho 3. Thật vậy, mỗi số tự nhiên khi chia cho 3 thì có phần dư là 0, 1 hoặc 2. Nếu trong 5 số dư có một số bằng 0, một số bằng 1, một số bằng 2 thì tổng của ba số tự nhiên tương ứng với ba số dư này là chia hết cho 3. Nếu 5 số dư chỉ nhận không quá 2 trong ba số 0, 1, 2 thì theo nguyên tắc Dirichlet thì tồn tại ba số dư nhận cùng một giá trị và tổng của ba số tự nhiên tương ứng là chia hết cho 3.	0,25
	Từ 53 số tự nhiên đã cho chọn được ba số mà tổng của chúng là a_1 chia hết cho 3. Xét 50 số còn lại chọn được ba số mà tổng là a_2 chia hết cho 3. Lập lại lập luận này, từ 53 số ta chọn được 17 bộ, mỗi bộ gồm ba số có tổng lần lượt là $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ sao cho mỗi tổng đều chia hết cho 3.	0,25
	Chứng minh tương tự thấy từ 5 số tự nhiên bất kì mà mỗi số đều chia hết cho 3, ta chọn được 3 số có tổng chia hết cho 9. Vậy từ 17 số $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ ta chọn được 5 bộ mỗi bộ gồm ba số có tổng lần lượt là $b_1, b_2, \dots, b_5$ sao cho $b_i \vdots 9$ với $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.	0,25
	Từ 5 số chia hết cho 9 là $b_1, b_2, \dots, b_5$ chọn được ba số mà tổng của chúng chia hết cho 27. Tổng của 3 số này chính là tổng của 27 số ban đầu. Vậy từ 53 số tự nhiên bất kì luôn chọn được 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.	0,25

MỤC LỤC

Trang

CHƯƠNG I. MỘT SỐ NỘI DUNG CƠ BẢN VỀ SỐ HỌC

I.1. Tính chia hết và số nguyên tố	3
I.1.1. Những kiến thức cần nhớ	3
I.1.2. Một số ví dụ	5
I.1.3. Một số bài tập	11
I.2. Phương trình nghiệm nguyên	20
I.2.1. Những kiến thức cần nhớ	20
I.2.2. Một số bài tập	20

CHƯƠNG II. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ VÀ CĂN THỨC

II.1. Phân thức đại số	34
II.1.1. Những kiến thức cần nhớ	34
II.1.2. Một số ví dụ	34
II.1.3. Một số bài tập	35
II.2. Số thực – Căn thức	40
II.2.1. Căn thức	40
II.2.1.1. Những kiến thức cần nhớ	40
II.2.1.2. Một số bài tập	41
II.2.2. Số hữu tỉ – Số vô tỉ – Số thực	54
II.2.2.1. Những kiến thức cần nhớ	54
II.2.2.2. Một số ví dụ	55
II.2.2.3. Một số bài tập	56

CHƯƠNG III. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

III.1. Phương trình	64
III.1.1. Những kiến thức cần nhớ	64
III.1.2. Một số ví dụ	65
III.1.3. Một số bài tập	66
III.2. Định lý Vi-ét và ứng dụng	72
III.2.1. Những kiến thức cần nhớ	72
III.2.2. Một số bài tập	73

III.3. Một số dạng phương trình không mẫu mực	78
III.3.1. Những kiến thức cần nhớ	78
III.3.2. Một số ví dụ	79
III.3.3. Một số bài tập	83
III.4. Hệ phương trình	102
III.4.1. Những kiến thức cần nhớ	102
III.4.2. Một số ví dụ	103
III.4.3. Một số bài tập	110

CHƯƠNG IV. BẤT ĐẲNG THỨC

IV.1. Chứng minh bất đẳng thức	121
IV.1.1. Những kiến thức cần nhớ	121
IV.1.2. Một số ví dụ	122
IV.1.3. Một số bài tập	125
IV.2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất	135
IV.2.1. Những kiến thức cần nhớ	135
IV.2.2. Một số ví dụ	135
IV.2.3. Một số bài tập	138

CHƯƠNG V. MỘT SỐ NỘI DUNG CƠ BẢN VỀ HÌNH HỌC

V.1. Những kiến thức cần nhớ	145
V.1.1. Đa giác	145
V.1.2. Định lý Ta-lét và tam giác đồng dạng	145
V.1.3. Định lý Mênêlauýt và định lý Xê-va	147
V.1.4. Hệ thức cơ bản trong tam giác vuông	147
V.1.5. Đường tròn	147
V.1.6. Một số công thức hay dùng	147
V.2. Một số bài tập	149

CHƯƠNG VI. MỘT SỐ ĐỀ ÔN TẬP, KIỂM TRA

VI.1. Đề bài	176
VI.2. Lời giải	184
VI.3. Đề tham khảo	215

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ẨM

Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUỲ THAO

Tổ chức bàn thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng biên tập NGÔ ẨMH TUYẾT

Tổng Giám đốc CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập nội dung :

PHẠM BẢO KHUÊ

Biên tập kỹ thuật :

THÁI MỸ DUNG

Trình bày bìa :

ĐINH THANH LIÊM

Chế bản :

THÁI MỸ DUNG

Sửa bản in :

PHẠM BẢO KHUÊ

Công ty Cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TRUNG HỌC CƠ SỞ

MÔN TOÁN

Mã số : C2T07A2 - ĐTH

Số ĐKKH xuất bản: 172-2012/CXB/50-144/GD