

NGUYỄN TRUNG KIÊN



Các chuyên đề
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

ĐẠI SỐ

$$\left(2m + \frac{a^2}{4}\right)x^2 + amx + m^2$$

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + m\right)^2$$

9



- * Dành cho học sinh giỏi lớp 9 bồi dưỡng và nâng cao kiến thức
- * Dành cho học sinh ôn luyện thi vào lớp 10 và chuyên Toán
- * Tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + m\right)^2 = x^4 + ax^3 + \left(2m + \frac{a^2}{4}\right)x^2 + amx + m^2$$



NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Mục lục

Chủ đề 1. BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ
Chủ đề 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT, HÀM SỐ BẬC HAI
Chủ đề 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN
Chủ đề 4. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH
Chủ đề 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ
Chủ đề 6. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ
Chủ đề 7. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH
Chủ đề 8. BẤT ĐẲNG THỨC (BĐT)
Chủ đề 9. CÁC ĐỀ TOÁN ÔN TẬP TỔNG HỢP

Chủ đề 1: BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ

Chương 1: Căn thức

1.1 CĂN THỨC BẬC 2

Kiến thức cần nhớ:

- Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Cho số thực a không âm. Căn bậc hai số học của a kí hiệu là $\sqrt{a}$ là một số thực không âm x mà bình phương của nó bằng a :

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

- Với hai số thực không âm a, b ta có: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$.
- Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn thức bậc 2 ta cần lưu ý:

$$+ \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = A \sqrt{B} \text{ với } A, B \geq 0; \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = -A \sqrt{B} \text{ với } A < 0; B \geq 0$$

$$+ \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{B^2}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{|B|} \text{ với } AB \geq 0, B \neq 0$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A}} = \frac{M \cdot \sqrt{A}}{A} \text{ với } A > 0; (\text{Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu})$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{M(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \text{ với } A, B \geq 0, A \neq B \text{ (Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu)}$$

1.2 CĂN THỨC BẬC 3, CĂN BẬC n .

1.2.1 CĂN THỨC BẬC 3.

Kiến thức cần nhớ:

- Căn bậc 3 của một số a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$
- Cho $a \in \mathbb{R}; \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = (\sqrt[3]{a})^3 = a$
- Mọi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.
- Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$.
- Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$.
- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ với mọi $b \neq 0$.
- $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ với mọi a, b .
- $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
- $A\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3B}$.
- $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{AB^2}}{B}$ với $B \neq 0$
- $\frac{\sqrt[3]{A}}{B} = \sqrt[3]{\frac{A}{B^3}}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}} = \frac{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{A \pm B}$ với $A \neq \pm B$.

1.2.2 CĂN THỨC BẬC n .

Cho số $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}; n \geq 2$. Căn bậc n của một số a là một số mà lũy thừa bậc n của nó bằng a .

- Trường hợp n là số lẻ: $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$
Mọi số thực a đều có một căn bậc lẻ duy nhất:
 $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^{2k+1} = a$, nếu $a > 0$ thì $\sqrt[n]{a} > 0$, nếu $a < 0$ thì $\sqrt[n]{a} < 0$, nếu $a = 0$ thì $\sqrt[n]{a} = 0$
- Trường hợp n là số chẵn: $n = 2k, k \in \mathbb{N}$.
Mọi số thực $a > 0$ đều có hai căn bậc chẵn đối nhau. Căn bậc chẵn dương kí hiệu là $\sqrt[k]{a}$ (gọi là căn bậc $2k$ số học của a). Căn bậc chẵn âm kí hiệu là $-\sqrt[k]{a}$, $\sqrt[k]{a} = x \Leftrightarrow x \geq 0$ và $x^{2k} = a$;
 $-\sqrt[k]{a} = x \Leftrightarrow x \leq 0$ và $x^{2k} = a$.

Mọi số thực $a < 0$ đều không có căn bậc chẵn.

Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Phân tích các biểu thức sau thành tích:

- a) $P = x^4 - 4$
- b) $P = 8x^3 + 3\sqrt{3}$
- c) $P = x^4 + x^2 + 1$

Lời giải:

- a) $P = (x^2 - 2)(x^2 + 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2).$
- b) $P = (2x)^3 + (\sqrt{3})^3 = (2x + \sqrt{3})(4x^2 - 2\sqrt{3}x + 3).$
- c) $P = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức:

- a) $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}}$ khi $x \geq 0$.
- b) $B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x - 1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x - 1}}$ khi $x \geq \frac{1}{4}$.
- c) $C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{8 + 10\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}}}$

Lời giải:

$$\text{a) } A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}} = \sqrt{x} - \sqrt{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x} - \left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right|$$

$$+ \text{ Nếu } \sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4} \text{ thì } \left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{x} - \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

$$+ \text{ Nếu } \sqrt{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{4} \text{ thì } \left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right| = -\sqrt{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}$$

b)

$$B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x-1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x-1}} = \sqrt{4x-1-2\sqrt{4x-1}+1} + \sqrt{4x-1+2\sqrt{4x-1}+1}$$

$$\text{Hay } B = \sqrt{(\sqrt{4x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{4x-1}+1)^2} = |\sqrt{4x-1}-1| + |\sqrt{4x-1}+1| \\ = |\sqrt{4x-1}-1| + \sqrt{4x-1}+1$$

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1 \geq 0 \Leftrightarrow 4x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ thì $|\sqrt{4x-1}-1| = \sqrt{4x-1}-1$ suy ra $B = 2\sqrt{4x-1}$.

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1 < 0 \Leftrightarrow 4x-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$ thì $|\sqrt{4x-1}-1| = -\sqrt{4x-1}+1$ suy ra $B = 2$.

$$\text{c) Đề ý rằng: } 7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

Suy ra

$$C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3}} + 5\sqrt{8+10(2-\sqrt{3})}} = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3}} + 5\sqrt{28-10\sqrt{3}}} \\ = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3}} + 5\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}} \text{ Hay} \\ C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3}} + 5(5-\sqrt{3})} = \sqrt{9 - \sqrt{25}} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$$

Ví dụ 3) Chứng minh:

$$\text{a) } A = \sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}} \text{ là số nguyên.}$$

$$\text{b) } B = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \text{ là một số nguyên (Trích đề TS vào lớp} \\ \text{10 chuyên Trường THPT chuyên ĐHQG Hà Nội 2006).}$$

c) Chứng minh rằng: $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với

$a \geq \frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

d) Tính $x + y$ biết $(x + \sqrt{x^2 + 2015})(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015$.

Lời giải:

a) Dễ thấy $A < 0$,

Ta có

$$A^2 = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}} \right)^2 = 7-2\sqrt{6} + 7+2\sqrt{6} - 2\sqrt{7-2\sqrt{6}}\sqrt{7+2\sqrt{6}} \\ = 14 - 2 \cdot 5 = 4$$

Suy ra $A = -2$.

b) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$. Ta có:

$$B^3 = \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right)^3 = 1 + \frac{\sqrt{84}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{9} + 3 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right)$$

$$\left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right). \text{ Hay}$$

$$B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{\left(1 + \frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{84}}{9}\right)} \cdot B \Leftrightarrow B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{1 - \frac{84}{81}} B \Leftrightarrow B^3 = 2 - B \Leftrightarrow B^3 + B - 2$$

$$\Leftrightarrow (B-1)(B^2 + B + 2) = 0 \text{ mà } B^2 + B + 2 = \left(B + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ suy ra } B = 1.$$

Vậy B là số nguyên.

c) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

Ta có

$$x^3 = 2a + (1 - 2a)x \Leftrightarrow x^3 + (2a - 1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2a) = 0$$

Xét đa thức bậc hai $x^2 + x + 2a$ với $\Delta = 1 - 8a \geq 0$

$$+ \text{ Khi } a = \frac{1}{8} \text{ ta có } x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1.$$

+ Khi $a > \frac{1}{8}$, ta có $\Delta = 1 - 8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$

Vậy với mọi $a \geq \frac{1}{8}$ ta có: $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1$ là số tự nhiên.

d) Nhận xét:

$$\left(\sqrt{x^2 + 2015} + x\right)\left(\sqrt{x^2 + 2015} - x\right) = x^2 + 2015 - x^2 = 2015.$$

Kết hợp với giả thiết ta suy ra $\sqrt{x^2 + 2015} - x = \sqrt{y^2 + 2015} + y$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2 + 2015} + y + \sqrt{x^2 + 2015} + x = \sqrt{x^2 + 2015} - x + \sqrt{y^2 + 2015} - y \Leftrightarrow x + y = 0$$

Ví dụ 4)

a) Cho $x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}.$$

b) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$B = x^4 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 1942. \text{ (Trích đề thi vào lớp 10 Trường PTC Ngoại Ngữ - ĐHQG Hà Nội năm 2015-2016).}$$

c) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015$$

Giải:

a) Ta có:

$$x^2 = \left(\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right)^2 = 8 + 2\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{5} + 1. \text{ Từ đó ta suy ra } (x - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 4.$$

$$\text{Ta biến đổi: } P = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) + 12}{x^2 - 2x + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 12}{4 + 12} = 1.$$

b) Ta có $x = 1 + \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x - 1)^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$. Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$P = x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + x(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + 1945 = 1945$$

c) Để ý rằng: $x = \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1$ ta nhân thêm 2 vế với $\sqrt[3]{2} - 1$ để tận dụng hằng đẳng thức: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Khi đó ta có:

$$(\sqrt[3]{2} - 1)x = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} - 1)x = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x + 1 \Leftrightarrow 2x^3 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Ta biến đổi:

$$P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015 = (x^2 - x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x - 1) + 2016 = 2016$$

Ví dụ 5) Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$.

a) Tính giá trị biểu thức:

$$P = x\sqrt{\frac{(1 + y^2)(1 + z^2)}{1 + x^2}} + y\sqrt{\frac{(1 + z^2)(1 + x^2)}{1 + y^2}} + z\sqrt{\frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{1 + z^2}}$$

$$\text{b) Chứng minh rằng: } \frac{x}{1 + x^2} + \frac{y}{1 + y^2} - \frac{z}{1 + z^2} = \frac{2xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)}}$$

Lời giải:

a) Để ý rằng: $1+x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(x+z)$

Tương tự đối với $1+y^2; 1+z^2$ ta có:

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)}} = x(y+z)$$

Suy ra $P = x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2$.

b) Tương tự như câu a)

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} &= \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} - \frac{z}{(z+y)(z+x)} \\ &= \frac{x(y+z) + y(z+x) - z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}} \end{aligned}$$

Ví dụ 6)

a) Tìm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn:

$$\sqrt{x_1^2 - 1^2} + 2\sqrt{x_2^2 - 2^2} + \dots + n\sqrt{x_n^2 - n^2} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

b) Cho $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính

$$f(1) + f(2) + \dots + f(40).$$

Lời giải:

a) Đẳng thức tương đương với:

$$\left(\sqrt{x_1^2 - 1^2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x_2^2 - 2^2} - 2\right)^2 + \dots + \left(\sqrt{x_n^2 - n^2} - n\right)^2 = 0$$

Hay $x_1 = 2, x_2 = 2.2^2, \dots, x_n = 2.n^2$

$$\text{b) Đặt } x = \sqrt{2n+1}, y = \sqrt{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4n \\ xy = \sqrt{4n^2 - 1} \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$$

Suy ra

$$f(n) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}(x^3 - y^3) = \frac{1}{2}(\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3}).$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \dots + f(40) &= \frac{1}{2}[(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) + (\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}) + \dots + (\sqrt{81^3} - \sqrt{79^3})] \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{81^3} - \sqrt{1^3}) = 364 \end{aligned}$$

Ví dụ 7)

- a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$. **Đề thi chuyên ĐHSP 2011**
- b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.
- c) Chứng minh: $2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) Xét } A &= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}, \\ B &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}} \end{aligned}$$

Dễ thấy $A > B$.

$$\text{Ta có } A + B = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

Mặt khác ta có:
$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

Suy ra $A + B = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) = \sqrt{81} - 1 = 8$. Do $A > B$ suy ra $2A > A + B = 8 \Leftrightarrow A > 4$.

b) Để ý rằng:
$$\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} < \frac{1}{2k\sqrt{k+1}}$$
 với mọi k nguyên dương.

Suy ra

$$VT > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

c) Đặt $P = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có:
$$\frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$
 với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Từ đó suy ra

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \text{ hay}$$

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{2}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

Do đó: $2\left[(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\right] < T$ và

$$T < 1 + 2\left[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\right].$$

Hay $2\sqrt{n} - 2 < T < 2\sqrt{n} - 1$.

Ví dụ 8)

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} = \frac{3}{2}. \text{ Chứng minh rằng:}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}.$$

a) Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3. \text{ (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán- Trường chuyên ĐHSPT Hà Nội 2014)}$$

Lời giải:

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2+1-b^2}{2} + \frac{b^2+1-c^2}{2} + \frac{c^2+1-a^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = \sqrt{1-b^2} \\ b = \sqrt{1-c^2} \\ c = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1-b^2 \\ b^2 = 1-c^2 \\ c^2 = 1-a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2} \text{ (đpcm).}$$

b) Ta viết lại giả thiết thành: $2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} = 6.$

Áp dụng bất đẳng thức : $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:

$$2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} \leq x^2 + 1 - y^2 + y^2 + 2 - z^2 + z^2 + 3 - x^2 = 6$$

. Suy ra $VT \leq VP$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ

khi:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1; y=0; z=\sqrt{2}$$

Ví dụ 9) Cho $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$

- Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải:

- Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2})}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{x(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2|)}{|x-4|} = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2|)}{x-4}$$

+ Nếu $4 < x < 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 < 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + 2 - \sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + \sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8$$

(Theo bất đẳng thức Cô si). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8.$$

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x=8$.

b) Xét $4 < x < 8$ thì $A = 4 + \frac{16}{x-4}$, ta thấy $A \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi

$\frac{16}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4$ là ước số nguyên dương của 16. Hay

$x-4 \in \{1; 2; 4; 8; 16\} \Leftrightarrow x = \{5; 6; 8; 12; 20\}$ đối chiếu điều kiện suy ra $x = 5$ hoặc $x = 6$.

+ Xét $x \geq 8$ ta có: $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, đặt $\sqrt{x-4} = m \Rightarrow \begin{cases} x = m^2 + 4 \\ m \geq 2 \end{cases}$ khi đó ta có:

$$A = \frac{2(m^2 + 4)}{m} = 2m + \frac{8}{m} \text{ suy ra } m \in \{2; 4; 8\} \Leftrightarrow x \in \{8; 20; 68\}.$$

Tóm lại để A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$.

MỘT SỐ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. (Đề thi vào lớp 10 thành phố Hà Nội – năm học 2013-2014)

Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

- 1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tính x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Câu 2. (Đề thi năm học 2012 -2013 thành phố Hà Nội)

- 1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức A .
- 2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0, x \neq 16$)

- 3) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

Câu 3. (Đề thi năm học 2011 -2012 thành phố Hà Nội).

Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x \geq 0, x \neq 25$.

- 1) Rút gọn biểu thức A
- 2) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- 3) Tìm x để $A < \frac{1}{3}$.

Câu 4. (Đề thi năm học 2010 -2011 thành phố Hà Nội).

Cho $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0, x \neq 9$.

- 1) Rút gọn P .
- 2) Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{3}$.
- 3) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Câu 5. (Đề thi năm học 2014 – 2015 Thành phố Hồ Chí Minh)

Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{5}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$B = \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) \quad (x > 0).$$

Câu 6. (Đề thi năm học 2013 – 2014 TPHCM)

Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{\sqrt{x}-3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

$$B = 21 \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \right)^2 - 6 \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{5}} \right)^2 - 15\sqrt{15}.$$

Câu 7. (Đề thi năm 2014 – 2015 TP Đà Nẵng)

Rút gọn biểu thức $P = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x}+x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x-2}}{x-2}$, với $x > 0, x \neq 2$.

Câu 8. (Đề thi năm 2012 – 2013 tỉnh Bình Định)

Cho $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ và

$$B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}}.$$

Chứng minh rằng $B > A$.

Câu 9. (Đề thi năm 2014 – 2015 tỉnh Ninh Thuận)

Cho biểu thức $P = \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x+y}{x^2-y^2}, x \neq y$.

1) Rút gọn biểu thức P .

2) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ và $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Câu 10. (Đề thi năm 2014 – 2015, ĐHSPTN)

Cho các số thực dương a, b ; $a \neq b$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} = 0.$$

Câu 11. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Hùng Vương Phú Thọ)

$$A = \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x - 9} + \frac{x - 7\sqrt{x} + 19}{x + \sqrt{x} - 12} - \frac{x - 5\sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x}}; x > 0, x \neq 9.$$

Câu 12. (Đề thi năm 2014 – 2015 tỉnh Tây Ninh)

Cho biểu thức $A = \frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{1}{2 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4 - x} \quad (x \geq 0, x \neq 4).$

Rút gọn A và tìm x để $A = \frac{1}{3}.$

Câu 13. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi).

- 1) Cho biểu thức $P = \frac{3}{\sqrt{x-3} - \sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}.$ Tìm tất cả các giá trị của x để $P > 2.$
- 2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - 1$ (m là tham số). chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \geq 2.$

Câu 14. (Đề thi năm 2014 – 2014 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa)

Cho biểu thức $C = \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}.$

- 1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn $C.$
- 2) Tính giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}.$

Câu 15. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Thái Bình tỉnh Thái Bình)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$
($x > 0, x \neq 4$).

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 16. (Đề năm 2014 – 2015 Thành Phố Hà Nội)

- 1) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, khi $x = 9$.
- 2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.
 - a) Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.
 - b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Câu 17) Cho $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh rằng
 $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Câu 18) Cho $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

Tính giá trị của biểu thức: $T = \frac{a^2 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}$.

Câu 19) Giả thiết $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = a$.

Chứng minh rằng:

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a.$$

Câu 20. Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$.

a) Chứng minh rằng: $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$.

b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Câu 21. Cho $a = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$.

Giả sử có đa thức $f(x) = (x^3 + 3x + 1940)^{2016}$. Hãy tính $f(a)$.

Câu 22. Cho biểu thức $f(n) = \frac{2n+1+\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

Tính tổng $S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2016)$.

Câu 23) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$1 \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}.$$

Câu 24) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 3$, ta có

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{65}{54}.$$

Câu 25) Chứng minh rằng:

$$\frac{43}{44} < \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2002\sqrt{2001}+2001\sqrt{2002}} < \frac{44}{45}$$

(Đề thi THPT chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm 2001-2002)

Câu 26) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Câu 27) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 2$, ta có:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} < \frac{1}{3\sqrt{n+1}}.$$

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN CHỦ ĐỀ 1

1). Lời giải:

$$1) \text{ Với } x=64 \text{ ta có } A = \frac{2+\sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \frac{2+8}{8} = \frac{5}{4}.$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (x+\sqrt{x}) + (2\sqrt{x}+1) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot (x+\sqrt{x})} = \frac{x\sqrt{x}+2x}{x\sqrt{x}+x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Với } x > 0, \text{ ta có: } \frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2 > 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \text{ (do } x > 0 \text{)}.$$

2. Lời giải:

$$1) \text{ Với } x=36, \text{ ta có } A = \frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

2) Với $x \geq 0, x \neq 16$ ta có:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \right) \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

$$3) \text{ Biểu thức } B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \left(\frac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right) = \frac{2}{x-16}$$

$B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà

$U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$. Ta có bảng giá trị tương ứng:

Kết hợp điều kiện, để $B(A-1)$ nguyên thì $x \in \{14; 15; 16; 17\}$.

3). Lời giải:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5) - 10\sqrt{x} - 5(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\
&= \frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{x-10\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-5)^2}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}. \text{ Với } x=9 \text{ ta có: } \sqrt{x}=3. \text{ Vậy} \\
A &= \frac{3-5}{3+5} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

4). Lời giải:

$$\begin{aligned}
1) \quad P &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x - 9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \\
2) \quad P &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x}+3=9 \Leftrightarrow x=36 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)} \\
3) \quad \text{Với } x \geq 0, P &= \frac{3}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{3}{0+3} = 1 \Rightarrow P_{\max} = 1 \text{ khi } x=0 \text{ (TM)}.
\end{aligned}$$

5. Lời giải:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\
&= \frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{3\sqrt{5}(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\
&= 3\sqrt{5} - 5 + \frac{5+\sqrt{5}}{4} - \frac{9\sqrt{5}-15}{4} = 3\sqrt{5} - 5 + \frac{5+\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{4}
\end{aligned}$$

$$= 3\sqrt{5} - 5 + 5 - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) (x > 0) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} : \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) = (\sqrt{x}+1) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = 1. \end{aligned}$$

6. Lời giải:

Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9} = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3. \\ B &= \frac{21}{2} \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} \right)^2 - 3 \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} \right)^2 - 15\sqrt{15} \\ &= \frac{21}{2} (\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1)^2 - 3 (\sqrt{3}-1+\sqrt{5}+1)^2 - 15\sqrt{15} \\ &= \frac{15}{2} (\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 - 15\sqrt{15} = 60. \end{aligned}$$

7). **Lời giải:** Với điều kiện đã cho thì:

$$P = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}x(\sqrt{2}+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = 1.$$

8. Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} + \dots + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{(\sqrt{120}+\sqrt{121})(\sqrt{120}-\sqrt{121})} \\
&= \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \dots + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{-1} \\
&= \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-2+\dots+\sqrt{121}-\sqrt{120} = -1+\sqrt{121} = 10 \quad (1)
\end{aligned}$$

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$$\text{Do đó } B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}}$$

$$\Rightarrow B > 2(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\dots+\sqrt{36}-\sqrt{35})$$

$$\Rightarrow B > 2(-\sqrt{1}+\sqrt{36}) = 2(-1+6) = 10 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra } B > A.$$

9. Lời giải:

$$1) \quad P = \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$2) \quad \text{Với } x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \text{ và } y = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$$

$$\text{Thay vào } P \text{ ta được: } P = \frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{(2-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{3-2\sqrt{3}} = -\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

10. Lời giải:

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } Q &= \frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a} \\
&= \frac{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 (\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}+(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = 0 \\
&= \frac{a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \\
&= \frac{3a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}-3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}-3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} = 0 \quad (\text{ĐPCM}).
\end{aligned}$$

11. Lời giải:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{x+\sqrt{x}-6}{x-9} + \frac{x-7\sqrt{x}+19}{x+\sqrt{x}-12} - \frac{x-5\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} + \frac{x-7\sqrt{x}+19}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} - \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+4} \\
&= \frac{x+2\sqrt{x}-8+x-7\sqrt{x}+19-x+8\sqrt{x}-15}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}.
\end{aligned}$$

12. Lời giải:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{4}{4-x} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{2(2-\sqrt{x})}{4-x} = \frac{2}{2+\sqrt{x}}. \text{ Với} \\
A &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (nhận). Vậy } A = \frac{1}{3} \text{ khi } x = 16.
\end{aligned}$$

13. Lời giải:

1) ĐKXĐ: $x \geq 3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \frac{3}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{3\sqrt{x-3}+3\sqrt{3}+3\sqrt{x-3}-3\sqrt{x}}{(x-3)-x} + \frac{x(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{6\sqrt{x-3}}{-3} + x = x - 2\sqrt{x-3}. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } P > 2 \Rightarrow x - 2\sqrt{x-3} > 2 \Leftrightarrow (x-3) - 2\sqrt{x-3} + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-3}-1)^2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}-1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 4. \text{ Vậy } x \geq 3 \text{ và } x \neq 4.$$

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 + mx - 1 = 0.$$

có $\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m , nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo hệ thức Viet ta có: $x_1 + x_2 = -m$ và $x_1 x_2 = -1$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = (-m)^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = m^2$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4x_1 x_2 = m^2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4(-1) = m^2$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = m^2 + 4 \geq 4 \text{ với mọi } m \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq 2 \text{ với mọi } m \text{ (ĐPCM).}$$

14. Lời giải:

$$1) \text{ Biểu thức } C \text{ có nghĩa khi: } \begin{cases} a \geq 0 \\ a-16 \neq 0 \\ \sqrt{a}-4 \neq 0 \\ \sqrt{a}+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 16 \\ a \neq 16 \\ \forall a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq 0, a \neq 16.$$

Rút gọn

$$\begin{aligned} C &= \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} = \frac{a}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} \\ &= \frac{a-2(\sqrt{a}+4)-2(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-2\sqrt{a}-8-2\sqrt{a}+8}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}.$$

2) Giá trị của C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

Ta có:

$$a = 9 - 4\sqrt{5} = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = (2 - \sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$$

$$\text{Vậy } C = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2+4} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = 9 - 4\sqrt{5}.$$

15. Lời giải:

1) Với $x > 0, x \neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{3}+3}{5x-10\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(2\sqrt{x}+1)+3(\sqrt{x}-2)-(5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy với } x > 0, x \neq 4 \text{ thì } A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}.$$

2) Ta có $\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$ nên $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0, x > 0, x \neq 4$

$$A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2}, x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 0 < A < \frac{5}{2}, \text{ kết hợp với } A$$

nhận giá trị là một số nguyên thì $A \in \{1, 2\}$.

$$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

$$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

16. Lời giải:

1) Với $x = 9$ ta có $A = \frac{3+1}{3-1} = 2$.

2) a)

$$P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

b) Theo câu a) $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow 2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5$$

$$2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \text{ và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

17. Giải:

$$\begin{aligned} a^2 &= \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + 3 - \sqrt{5+2\sqrt{3}} + 2\sqrt{9-(5+2\sqrt{3})} = 6 + 2\sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ &= 6 + 2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = 6 + 2(\sqrt{3}-1) = 4 + 2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2. \text{ Do } a > 0 \text{ nên} \\ a &= \sqrt{3} + 1. \text{ Do đó } (a-1)^2 = 3 \text{ hay } a^2 - 2a - 2 = 0. \end{aligned}$$

18. Giải:

$$\begin{aligned} a^2 &= 8 + 2\sqrt{16-(10+2\sqrt{5})} = 8 + 2\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} \\ &= 8 + 2(\sqrt{5}-1) = 6 + 2\sqrt{5}. \text{ Vì } a > 0 \text{ nên } a = \sqrt{5} + 1. \text{ Do đó } (a-1)^2 = 5 \text{ hay} \end{aligned}$$

$$a^2 - 2a = 4. \text{ Biểu diễn } T = \frac{(a^2 - 2a)^2 - 3(a^2 - 2a) + 4}{a^2 - 2a + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 4}{4 + 12} = \frac{1}{2}.$$

19. Giải:

Ta có: $a + x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x + y)(x + z)$. Tương tự ta có:

$$a + y^2 = (y + x)(y + z); a + z^2 = (z + x)(z + y).$$

Từ đó ta có:

$$x\sqrt{\frac{(a + y^2)(a + z^2)}{a + x^2}} = x\sqrt{\frac{(x + y)(y + z)(z + x)(z + y)}{(x + y)(x + z)}} = x(x + y). \text{ Tương}$$

$$\text{tự: } y\sqrt{\frac{(a + z^2)(a + x^2)}{a + y^2}} = y(z + x); z\sqrt{\frac{(a + x^2)(a + y^2)}{a + z^2}} = z(x + y). \text{ Vậy}$$

$$VT = x(y + z) + y(z + x) + z(x + y) = 2(xy + yz + zx) = 2a.$$

20. Giải:

$$\text{a) Vì } \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})^3} = 1 + 2\sqrt{5}$$

$$\text{Từ đó } a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - 1 - 2\sqrt{5}} + 1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow a^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 \Rightarrow a^2 - 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow a^4 - 14a^2 + 9 = 0.$$

b) Do $f(x) = (x^4 - 14x^2 + 9)(x + 2) + 1$ và $x^4 - 14x^2 + 9 = 0$ nên ta được $f(a) = 1$.

21. Giải:

$$\text{Vì } a^3 = 38 + 17\sqrt{5} + 38 - 17\sqrt{5} + 3.3.\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}}.\sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow a^3 = 76 - 3a \Rightarrow a^3 + 3a = 76 \Rightarrow f(a) = (76 + 1940)^{2012} = 2016^{2016}.$$

22. Nhân cả tử và mẫu của $f(n)$ với $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, ta được:

$f(n) = (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}$. Cho n lần lượt từ 1 đến 2016, ta được:

$$f(1) = 2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}; f(2) = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}; \dots; f(2016) = 2017\sqrt{2017} - 2016\sqrt{2016}$$

Từ đó suy ra: $S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2016) = 2017\sqrt{2017} - 1$.

23. Giải:

Vì n là số nguyên dương nên: $1 \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{1^2} = 1$ (1). Mặt

khác, với mọi $k \geq 1$ ta có:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{4}{4k^2} < \frac{4}{4k^2 - 1} = 2 \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right). \text{ Cho } k = 2, 3, 4, \dots, n \text{ ta có:}$$

$$\frac{1}{2^2} = \frac{4}{4 \cdot 2^2} < \frac{4}{4 \cdot 2^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot 2 - 1} - \frac{2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{3^2} = \frac{4}{4 \cdot 3^2} < \frac{4}{4 \cdot 3^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot 3 - 1} - \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{2}{5} - \frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{4^2} = \frac{4}{4 \cdot 4^2} < \frac{4}{4 \cdot 4^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot 4 - 1} - \frac{2}{2 \cdot 4 + 1} = \frac{2}{7} - \frac{2}{9}$$

.....

$$\frac{1}{n^2} = \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2 - 1} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}$$

Cộng vế với vế ta được:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{2n+1} < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra}$$

điều phải chứng minh.

24. Giải:

Đặt $P = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$. Thực hiện làm trội mỗi phân số ở vế trái

bằng cách làm giảm mẫu, ta có:

$$\frac{2}{k^3} < \frac{2}{k^3 - k} = \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}, \forall k > 1$$

Cho $k = 4, 5, \dots, n$ thì

$$\begin{aligned} 2P &< 2\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}\right) + \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6}\right) + \dots + \left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right] \\ &= \frac{251}{108} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{n(n+1)} < \frac{251}{108} + \frac{1}{3.4} = \frac{65}{27}. \text{ Do đó } P < \frac{65}{64} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

25. Giải:

$$\text{Đặt } S_n = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

Đề ý rằng :

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2 k - k^2(k+1)} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \forall k:$$

Cho $k = 1, 2, \dots, n$ rồi cộng về với về ta có:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{Do đó } S_{2001} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2002}}$$

Như vậy ta phải chứng minh:

$$\frac{43}{44} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2002}} < \frac{44}{45} \Leftrightarrow \frac{1}{45} < \frac{1}{\sqrt{2002}} < \frac{1}{44}$$

$$\Leftrightarrow 44 < \sqrt{2002} < 45 \Leftrightarrow 1936 < 2002 < 2025$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.

26. Giải:

Để giải bài toán này ta cần có bổ đề sau:

Bổ đề: với mọi số thực dương x, y ta có: $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$.

Chứng minh: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \Leftrightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + y(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.$$

Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề ta có:

$$(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n} > n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

$$\text{Vì thế: } \frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} <$$

$$< \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}. \text{ Mà theo kết quả câu 25}$$

$$\text{thì: } \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 27)

Giải:

Để ý rằng các phân số có tử và mẫu hơn kém nhau 2 đơn vị, nên ta nghĩ đến đẳng thức

$$\frac{n}{n+2} < \frac{n-1}{n} \left(\Leftrightarrow n^2 < n^2 + n - 2 \Leftrightarrow n > 2 \right). \text{ Kí hiệu}$$

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3}. \text{ Ta có:}$$

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} \right) \\ &< \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{3n-3}{3n-2} \cdot \frac{3n}{3n+1} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} \right) \\ &< \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{10}{10} \cdots \frac{3n-3}{3n-2} \cdot \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n}{3n+1} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} = \frac{1}{3(3n+3)} = \frac{1}{9(n+1)}. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $P < \frac{1}{3\sqrt{n+1}}$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Chủ đề 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT, HÀM SỐ BẬC 2

Vấn đề 1: Hàm số bậc nhất

Kiến thức cần nhớ:

1. Định nghĩa:

+ Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức: $y = ax + b$ trong đó a và b là các số thực cho trước và $a \neq 0$.

+ Khi $b = 0$ thì hàm số bậc nhất trở thành hàm số $y = ax$, biểu thị tương quan tỉ lệ thuận giữa y và x .

2. Tính chất:

a) Hàm số bậc nhất, xác định với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$.

b) Trên tập số thực, hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

3. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ với $(a \neq 0)$.

+ Đồ thị hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{b}{a}$.

+ a gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$

4. Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$.

+ Vẽ hai điểm phân biệt của đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua 2 điểm.

+ Thường vẽ đường thẳng đi qua 2 giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ là $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right), B(0; b)$.

+ Chú ý: Đường thẳng đi qua $M(m;0)$ song song với trục tung có phương trình: $x - m = 0$, đường thẳng đi qua $N(0;n)$ song song với trục hoành có phương trình: $y - n = 0$

5. Kiến thức bổ sung.

Trong mặt phẳng tọa độ cho hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \text{ Điểm } M(x; y) \text{ là trung điểm của } AB \text{ thì}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

6. Điều kiện để hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc.

Cho hai đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ và đường thẳng $(d_2): y = a'x + b'$ với $a, a' \neq 0$.

- $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b \neq b'.$
- $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b = b'.$
- $(d_1) \text{ cắt } (d_2) \Leftrightarrow a \neq a'.$
- $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow a.a' = -1$

Chú ý: Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox , nếu $a > 0$ thì $\tan \varphi = a$.

Một số bài toán trên mặt phẳng tọa độ:

Ví dụ 1) Cho đường thẳng $(d_1): y = x + 2$ và đường thẳng $(d_2): y = (2m^2 - m)x + m^2 + m$.

- a) Tìm m để $(d_1) // (d_2)$.

- b) Gọi A là điểm thuộc đường thẳng (d_1) có hoành độ $x = 2$. Viết phương trình đường thẳng (d_3) đi qua A vuông góc với (d_1) .
- c) Khi $(d_1) // (d_2)$. Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.
- d) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d_1) và tính diện tích tam giác OMN với M, N lần lượt là giao điểm của (d_1) với các trục tọa độ Ox, Oy .

Lời giải:

- a) Đường thẳng $(d_1) // (d_2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2m^2 - m = 1 \\ m^2 + m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(2m+1) = 0 \\ (m-1)(m+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Vậy với $m = -\frac{1}{2}$ thì $(d_1) // (d_2)$.

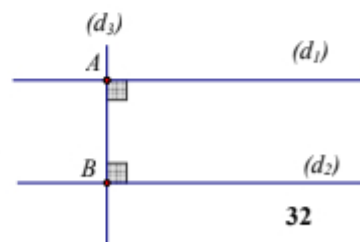
- b) Vì A là điểm thuộc đường thẳng (d_1) có hoành độ $x = 2$ suy ra tung độ điểm A là $y = 2 + 2 = 4 \Rightarrow A(2; 4)$.

Đường thẳng (d_1) có hệ số góc là $a = 1$, đường thẳng (d_2) có hệ số góc là $a' \Rightarrow a' \cdot 1 = -1 \Rightarrow a' = -1$. Đường thẳng (d_3) có dạng $y = -x + b$. Vì (d_3) đi qua $A(2; 4)$ suy ra $4 = -2 + b \Rightarrow b = 6$. Vậy đường thẳng (d_3) là $y = -x + 6$.

c)

Khi $(d_1) // (d_2)$ thì khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cũng chính là khoảng cách giữa hai điểm A, B lần lượt thuộc (d_1) và (d_2) sao cho $AB \perp (d_1), AB \perp (d_2)$.

Hình vẽ: Gọi B là giao điểm của đường thẳng (d_3) và (d_2) . Phương trình hoành độ giao điểm



của (d_2) và (d_3) là:

$$-x+6=x-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\frac{25}{8} \Rightarrow y=\frac{23}{8} \Rightarrow B\left(\frac{25}{8}; \frac{23}{8}\right).$$

Vậy độ dài đoạn thẳng AB là: $AB = \sqrt{\left(\frac{25}{8}-2\right)^2 + \left(\frac{23}{8}-4\right)^2} = \frac{9\sqrt{2}}{8}.$

d) Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng (d_1) với các trục tọa độ Ox, Oy . Ta có:

Cho $y=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow A(-2;0)$, cho $y=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow N(-2;0)$. Từ đó suy ra $OM=ON=2 \Rightarrow MN=2\sqrt{2}$. Tam giác OMN vuông cân tại O . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên MN ta có $OH=\frac{1}{2}MN=\sqrt{2}$ và

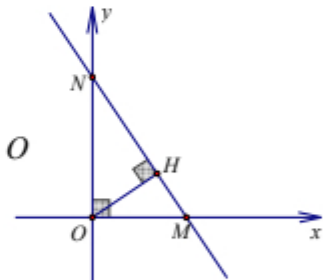
$$S_{OMN} = \frac{1}{2}OM.ON = 2 \text{ (đvdt)}.$$

Chú ý 1: Nếu tam giác OMN không vuông cân tại O ta có thể tính OH theo cách:

Trong tam giác vuông OMN ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \text{ (*)}. \text{ Từ đó để khoảng cách từ điểm } O$$

đến đường thẳng (d) ta làm theo cách:



+ Tìm các giao điểm M, N của (d) với các trục tọa độ

+ Áp dụng công thức tính đường cao từ đỉnh góc vuông trong tam giác vuông OMN (công thức (*)) để tính đoạn OH .

Bằng cách làm tương tự ta có thể chứng minh được công thức sau:

Cho $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $ax + by + c = 0$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng là:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ví dụ 2: Cho đường thẳng $mx + (2 - 3m)y + m - 1 = 0$ (d).

- Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua.
- Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.
- Tìm m để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB cân.

Lời giải:

- Gọi $I(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m khi đó

ta có:

$$mx_0 + (2 - 3m)y_0 + m - 1 = 0 \forall m \Leftrightarrow m(x_0 - 3y_0 + 1) + 2y_0 - 1 = 0 \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 3y_0 + 1 = 0 \\ 2y_0 - 1 = 0 \end{cases} \text{ Hay } \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d). Ta có: $OH \leq OI$ suy ra OH lớn nhất bằng OI khi và chỉ khi $H \equiv I \Leftrightarrow OI \perp (d)$. Đường thẳng qua O có phương trình: $y = ax$ do

$$I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \in OI \Rightarrow \frac{1}{2} = a \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow OI: y = x.$$

Đường thẳng (d) được viết lại như sau:

$$mx + (2 - 3m)y + m - 1 = 0 \Leftrightarrow (2 - 3m)y = -mx + 1 - m.$$

+ Để ý rằng với $m = \frac{2}{3}$ thì đường thẳng $(d): x - \frac{1}{2} = 0$ song song với trục

Oy nên khoảng cách từ O đến (d) là $\frac{1}{2}$.

+ Nếu $m \neq \frac{2}{3}$ đường thẳng (d) có thể viết lại: $y = \frac{m}{3m-2}x + \frac{m-1}{3m-2}$. Điều

kiện để $(d) \perp OI$ là $\frac{m}{3m-2} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow m = 2 - 3m \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Khi đó khoảng

cách $OI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có thể giải bài toán theo 2 cách sau:

+ Cách 1: Dễ thấy $m = \frac{2}{3}$ không thỏa mãn điều kiện (Do (d) không cắt

Oy). Xét $m \neq \frac{2}{3}$, đường thẳng (d) cắt Ox, Oy tại các điểm A, B tạo thành

tam giác cân OAB , do góc $\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân tại O . Suy ra hệ số góc của đường thẳng (d) phải bằng 1 hoặc -1 và đường thẳng (d) không đi qua gốc O .

$$\begin{cases} \frac{m}{3m-2} = 1 \\ \frac{m}{3m-2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Ta thấy chỉ có giá trị } m = \frac{1}{2} \text{ là thỏa mãn điều kiện}$$

bài toán.

Cách 2: Dễ thấy $m = \frac{2}{3}, m = 0$ không thỏa mãn điều kiện

Xét $m \neq 0, \frac{2}{3}$, đường thẳng (d) có thể viết lại: $y = \frac{m}{3m-2}x + \frac{m-1}{3m-2}$.

Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm A có tung độ bằng 0 nên

$$\frac{m}{3m-2}x + \frac{m-1}{3m-2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-m}{m} \Rightarrow A\left(\frac{1-m}{m}; 0\right) \Rightarrow OA = \left|\frac{1-m}{m}\right|, \text{ đường}$$

thẳng (d) cắt trục Oy tại điểm có hoành độ bằng 0 nên

$$y = \frac{m-1}{3m-2} \Rightarrow B\left(0; \frac{m-1}{3m-2}\right) \Rightarrow OB = \left|\frac{m-1}{3m-2}\right|. \text{ Điều kiện để tam giác } OAB$$

$$\text{cân là } OA = OB \Leftrightarrow \left|\frac{1-m}{m}\right| = \left|\frac{m-1}{3m-2}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ |m|=|3m-2| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Giá trị}$$

$m=1$ không thỏa mãn, do đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ.

$$\text{Kết luận: } m = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3) Cho hai đường thẳng

$$(d_1): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0, (d_2): (1-m)x + my - 4m + 1 = 0$$

- Tìm các điểm cố định mà $(d_1), (d_2)$ luôn đi qua.
- Tìm m để khoảng cách từ điểm $P(0;4)$ đến đường thẳng (d_1) là lớn nhất.
- Chứng minh hai đường thẳng trên luôn cắt nhau tại điểm I . Tìm quỹ tích điểm I khi m thay đổi.
- Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IAB với A, B lần lượt là các điểm cố định mà $(d_1), (d_2)$ đi qua.

Lời giải:

$$\text{a) Ta viết lại } (d_1): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m(x+y-2) + 1-y = 0.$$

Từ đó dễ dàng suy ra đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm cố định: $A(1;1)$.

$$\text{Tương tự viết lại } (d_2): (1-m)x + my - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m(y-x-4) + 1+x = 0$$

suy ra (d_2) luôn đi qua điểm cố định: $B(-1;3)$.

b) Để ý rằng đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm cố định: $A(1;1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên (d_1) thì khoảng cách từ A đến (d_1) là $PH \leq PA$. Suy ra khoảng cách lớn nhất là PA khi

$P \equiv H \Leftrightarrow PH \perp (d_1)$. Gọi $y = ax + b$ là phương trình đường thẳng đi qua

$$P(0;4), A(1;1) \text{ ta có hệ: } \begin{cases} a \cdot 0 + b = 4 \\ a \cdot 1 + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -3 \end{cases} \text{ suy ra phương trình đường}$$

thẳng $PA: y = -3x + 4$.

Xét đường thẳng $(d_1): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0$. Nếu $m = 1$ thì

$(d_1): x - 1 = 0$ không thỏa mãn điều kiện. Khi $m \neq 1$ thì:

$$(d_1): y = \frac{m}{1-m}x + \frac{2m-1}{m-1}. \text{ Điều kiện để } (d_1) \perp PA \text{ là}$$

$$\frac{m}{1-m}(-3) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}.$$

c) Nếu $m = 0$ thì $(d_1): y - 1 = 0$ và $(d_2): x + 1 = 0$ suy ra hai đường thẳng này luôn vuông góc với nhau và cắt nhau tại $I(-1;1)$. Nếu $m = 1$ thì

$(d_1): x - 1 = 0$ và $(d_2): y - 3 = 0$ suy ra hai đường thẳng này luôn vuông góc với nhau và cắt nhau tại $I(1;3)$. Nếu $m \neq \{0;1\}$ thì ta viết lại

$$(d_1): y = \frac{m}{1-m}x + \frac{2m-1}{m-1} \text{ và } (d_2): y = \frac{m-1}{m}x + \frac{4m-1}{m}. \text{ Ta thấy}$$

$$\left(\frac{m}{1-m}\right)\left(\frac{m-1}{m}\right) = -1 \text{ nên } (d_1) \perp (d_2).$$

Do đó hai đường thẳng này luôn cắt nhau tại 1 điểm I .

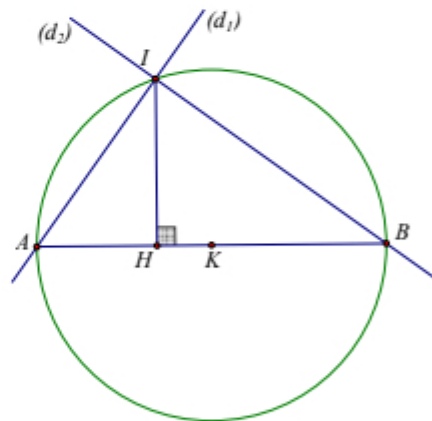
Tóm lại với mọi giá trị của m thì hai

đường thẳng $(d_1), (d_2)$ luôn vuông góc

và cắt nhau tại 1 điểm I . Mặt khác theo

câu a) ta có $(d_1), (d_2)$ lần lượt đi qua 2

điểm cố định A, B suy ra tam giác IAB vuông tại A . Nên I nằm trên đường tròn đường kính AB .



d) Ta có $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$. Dựng $IH \perp AB$ thì

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB \leq \frac{1}{2} IK \cdot AB = \frac{1}{2} \frac{AB}{2} \cdot AB = \frac{AB^2}{4} = 2. \text{ Vậy giá trị lớn nhất của}$$

diện tích tam giác IAB là 2 khi và chỉ khi $IH = IK$. Hay tam giác IAB vuông cân tại I .

Ứng dụng của hàm số bậc nhất trong chứng minh bất đẳng thức và tìm GTLN, GTNN

Ta có các kết quả quan trọng sau:

+ Xét hàm số $y = f(x) = ax + b$ với $m \leq x \leq n$ khi đó GTLN, GTNN của hàm số sẽ đạt được tại $x = m$ hoặc $x = n$. Nói cách khác:

$$\min_{m \leq x \leq n} f(x) = \min\{f(m); f(n)\} \text{ và } \max_{m \leq x \leq n} f(x) = \max\{f(m); f(n)\}. \text{ Như vậy}$$

để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x) = ax + b$ với $m \leq x \leq n$ ta chỉ cần tính các giá trị biên là $f(m), f(n)$ và so sánh hai giá trị đó để tìm GTLN, GTNN.

+ Cũng từ tính chất trên ta suy ra: Nếu hàm số bậc nhất $y = f(x) = ax + b$ có $f(m), f(n) \geq 0$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị của x thỏa mãn điều kiện: $m \leq x \leq n$.

Ví dụ 1: Cho các số thực $0 \leq x, y, z \leq 2$. Chứng minh rằng:

$$2(x + y + z) - (xy + yz + zx) \leq 4.$$

Lời giải:

Ta coi y, z như là các tham số, x là ẩn số thì bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại như sau: $f(x) = (2 - y - z)x + 2(y + z) - yz - 4 \leq 0$.

Để chứng minh $f(x) \leq 0$ ta chỉ cần chứng minh: $\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$. Thật vậy ta

có:

$$+ f(0) = 2(y+z) - yz - 4 = (y-2)(2-z) \leq 0 \text{ với } y, z \text{ thỏa mãn:}$$

$$0 \leq y, z \leq 2.$$

$$+ f(2) = 2(2-y-z) + 2(y+z) - yz - 4 = -yz \leq 0 \text{ với } y, z \text{ thỏa mãn:}$$

$$0 \leq y, z \leq 2.$$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh: Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x; y; z) = (0; 2; 2)$ hoặc các hoán vị của bộ số trên.

Ví dụ 2: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$x + y + z = 1. \text{ Tìm GTLN của biểu thức: } P = xy + yz + zx - 2xyz.$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $z = \min(x, y, z) \Rightarrow z \leq \frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3}$. Ta

$$\text{có } 0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(1-z)^2}{4}.$$

$P = xy(1-2z) + (x+y)z = xy(1-2z) + z(1-z)$. Ta coi z là tham số xy là ẩn số thì $f(xy) = xy(1-2z) + z(1-z)$ là hàm số bậc nhất của xy với

$$0 \leq xy \leq \frac{(1-z)^2}{4}. \text{ Để ý rằng: } 1-2z > 0 \text{ suy ra hàm số}$$

$f(xy) = xy(1-2z) + z(1-z)$ luôn đồng biến. Từ đó suy ra

$$f(xy) \leq f\left(\frac{(1-z)^2}{4}\right) = (1-2z)\frac{(1-z)^2}{4} + z(1-z) = \frac{-2z^3 + z^2 + 1}{4} =$$

$$\frac{7}{27} - \left(\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{108}\right) = \frac{7}{27} - \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{3}\right)^2\left(z + \frac{1}{6}\right) \leq \frac{7}{27}. \text{ Dấu bằng xảy ra}$$

$$\text{khi và chỉ khi } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng: $5(a^2 + b^2 + c^2) - 6(a^3 + b^3 + c^3) \leq 1$.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử: $a = \min\{a, b, c\}$ suy ra $a \leq \frac{1}{3}$. Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} 5[a^2 + (b+c)^2 - 2bc] &\leq 6[a^3 + (b+c)^3 - 3bc(b+c)] + 1 \\ \Leftrightarrow 5[a^2 + (1-a)^2 - 2bc] &\leq 6[a^3 + (1-a)^3 - 3bc(1-a)] + 1 \Leftrightarrow (9a-4)bc + (2a-1)^2 \geq 0 \\ \text{Đặt } t = bc \text{ thì } 0 < t &\leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2. \text{ Ta cần chứng minh:} \end{aligned}$$

$$f(t) = (9a-4)t + (2a-1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } t \in \left(0; \left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right]. \text{ Do } 9a-4 < 0 \text{ suy}$$

$$\text{ra hàm số } f(t) \text{ nghịch biến. Suy ra } f(t) \geq f\left(\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}a(3a-1)^2 \geq 0.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c = \frac{1}{2}.$$

Vấn đề 2: HÀM SỐ BẬC HAI

Kiến thức cần nhớ.

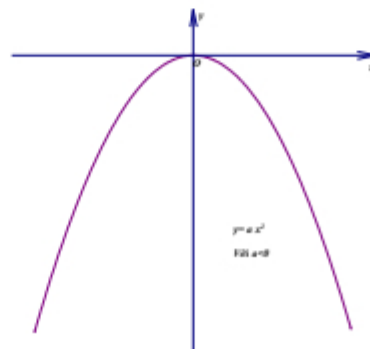
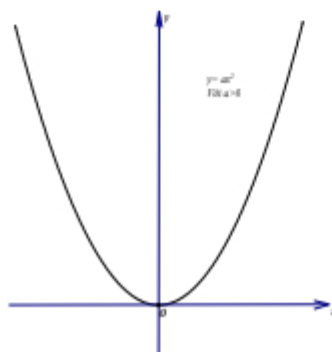
Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$): Hàm số xác định với mọi số thực x

Tính chất biến thiên:

+) Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến khi $x > 0$, nghịch biến khi $x < 0$.

+) Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$, nghịch biến khi $x > 0$.

Đồ thị hàm số là một đường Parabol nhận gốc tọa độ O làm đỉnh, nhận trục tung làm trục đối xứng. Khi $a > 0$ thì Parabol có bề lõm quay lên trên, khi $a < 0$ thì Parabol có bề lõm quay xuống dưới.



Ví dụ 1.

- a) Hãy xác định hàm số $y = f(x) = ax^2$ biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $A(2;4)$.
- b) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho
- c) Tìm các điểm trên Parabol có tung độ bằng 16.
- d) Tìm m sao cho $B(m;m^3)$ thuộc Parabol.
- e) Tìm các điểm trên Parabol (khác gốc tọa độ) cách đều hai trục tọa độ.

Lời giải:

a) Ta có $A \in (P) \Leftrightarrow 4 = a.2^2 \Leftrightarrow a = 1$

b) Đồ thị Parabol có đỉnh là gốc tọa độ

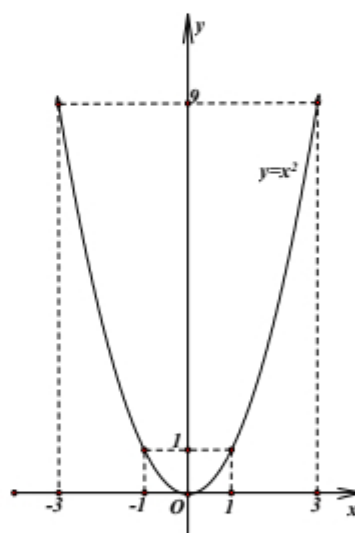
$O(0;0)$ quay bề lõm xuống dưới, có trục

đối xứng là Oy đi qua các điểm

$M(1;1), N(-1;1), E(3;9), F(-3;9)$

c) Gọi C là điểm thuộc (P) có tung độ bằng 16.

Ta có: $y_C = 16 \Leftrightarrow x_C^2 = 16 \Leftrightarrow x_C = \pm 4$. Vậy $C(4;16)$ hoặc $C(-4;16)$.



d) Thay tọa độ điểm B vào (P) ta được:

$$m^3 = m^2 \Leftrightarrow m^3 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 1.$$

e) Gọi D là điểm thuộc (P) cách đều hai trục tọa độ. Ta có:

$$d(D, Ox) = |y_D| = x_D^2; d(D, Oy) = |x_D|. \text{ Theo giả thiết ta có:}$$

$$x_D^2 = |x_D| \Leftrightarrow |x_D| = 0 \text{ (loại) hoặc } |x_D| = 1. \text{ Vậy } D(1;1) \text{ hoặc } D(-1;1).$$

Ví dụ 2: Một xe tải có chiều rộng là 2,4 m chiều cao là 2,5 m muốn đi qua một cái cổng hình Parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (Bỏ qua độ dày của cổng).

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi Parabo $(P): y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

2) Hỏi xe tải có đi qua cổng được không? Tại sao?

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 – Trường THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội 2015-2016)

Lời giải:

1) Giả sử trên mặt phẳng tọa độ, độ dài các đoạn thẳng được tính theo đơn vị mét. Do khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m nên $MA = NA = 2m$. Theo giả thiết ta có $OM = ON = 2\sqrt{5}$, áp dụng định lý Pitago ta tính được: $OA = 4$ vậy $M(2; -4), N(-2; -4)$. Do $M(2; -4)$ thuộc parabol nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $(P): y = ax^2$ hay $-4 = a.2^2 \Rightarrow a = -1$ và $(P): y = -x^2$.

2) Để đáp ứng chiều cao trước hết xe tải phải đi vào chính giữa cổng.

$$\text{Xét đường thẳng } (d): y = -\frac{3}{2}$$

(ứng với chiều cao của xe). Đường

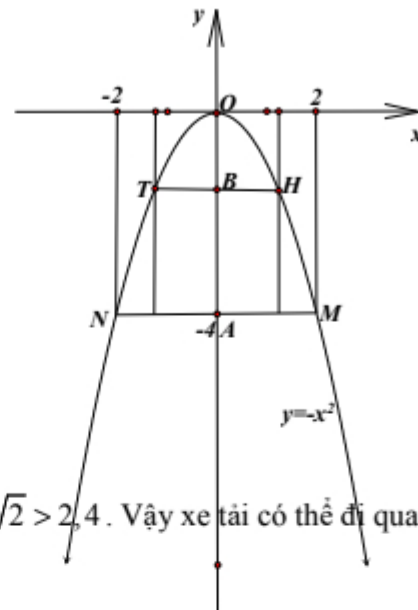
thẳng này cắt Parabol tại 2 điểm

có tọa độ thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

suy ra tọa độ hai giao điểm là

$$T\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\right); H\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow HT = 3\sqrt{2} > 2,4. \text{ Vậy xe tải có thể đi qua cống.}$$



Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: y = -1$ và điểm $F(0;1)$. Tìm tất cả những điểm I sao cho khoảng cách từ I đến d bằng IF .

Lời giải:

Giả sử điểm $I(x; y)$. Khi đó khoảng cách từ I đến d bằng $|y+1|$ và

$$IF = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}. \text{ Như vậy } (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2. \text{ Từ đây suy ra}$$

$$y = \frac{1}{4}x^2. \text{ Do đó tập hợp tất cả những điểm } I \text{ sao cho khoảng cách từ } I \text{ đến}$$

$$d \text{ bằng } IF \text{ là đường Parabol } (P_1): y = \frac{1}{4}x^2.$$

Ví dụ 4.

- a) Xác định điểm M thuộc đường Parabol $(P): y = x^2$ sao cho độ dài đoạn IM là nhỏ nhất, trong đó $I(0;1)$.

- b) Giả sử điểm A chạy trên Parabol $(P): y = x^2$. Tìm tập hợp trung điểm J của đoạn OA .

Lời giải:

- a) Giả sử điểm M thuộc đường Parabol $(P): y = x^2$ suy ra $M(m; m^2)$.

Khi đó $IM^2 = m^2 + (m^2 - 1)^2 = m^4 - m^2 + 1$. Vậy

$$IM = \sqrt{\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Ta thấy } IM \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ khi } m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{hay } M\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

- b) Giả sử điểm $A(a; a^2)$ thuộc $(P): y = x^2$. Gọi $I(x_1; y_1)$ là trung

$$\text{điểm đoạn } OA. \text{ Suy ra } \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \\ y_1 = \frac{a^2}{2} = 2x_1^2 \end{cases}. \text{ Vậy tập hợp các trung điểm } I \text{ của}$$

đoạn OA là đường Parabol $(P_1): y = 2x^2$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm A và B chạy trên parabol $(P): y = x^2$ sao cho $A, B \neq O(0;0)$ và $OA \perp OB$. Giả sử I là trung điểm của đoạn AB .

- a) Tìm quỹ tích điểm trung điểm I của đoạn AB .
 b) Đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.
 c) Xác định tọa độ điểm A và B sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Lời giải:

- a) Giả sử $A(a; a^2)$ và $B(b; b^2)$ là hai điểm thuộc (P) . Để $A, B \neq O(0;0)$ và $OA \perp OB$ ta cần điều kiện: $ab \neq 0$ và $OA^2 + OB^2 = AB^2$ hay $ab \neq 0$ và

$a^2 + a^4 + b^2 + b^4 = (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2$. Rút gọn hai vế ta được: $ab = -1$.

Gọi $I(x_1; y_1)$ là trung điểm đoạn AB . Khi đó:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a+b}{2} \\ y_1 = \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{2} = 2x_1^2 + 1 \end{cases}. \text{ Vậy tọa độ điểm } I \text{ thỏa mãn}$$

phương trình $y = 2x^2 + 1$.

Ta cũng có thể tìm điều kiện để $OA \perp OB$ theo cách sử dụng hệ số góc:

Đường thẳng OA có hệ số góc là $k_1 = \frac{a^2}{a} = a$, đường thẳng OB có hệ số

góc là $k_2 = \frac{b^2}{b} = b$. Suy ra điều kiện để $OA \perp OB$ là $ab = -1$

b) Phương trình đường thẳng đi qua A và B là $(AB): \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a^2}{b^2-a^2}$ hay

$(AB): y = (a+b)x - ab = (a+b)x + 1$. Từ đây ta dễ dàng suy ra đường thẳng $(AB): y = (a+b)x + 1$ luôn luôn đi qua điểm cố định $(0;1)$.

c) Vì $OA \perp OB$ nên $ab = -1$. Độ dài đoạn $AB = \sqrt{(a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2}$ hay

$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + a^4 + b^4 - 2a^2b^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có

$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab|$, $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$. Ta có:

$AB \geq \sqrt{2|ab| + 2 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2} = 2$. Vậy AB ngắn nhất bằng 2 khi

$a^2 = b^2, ab = -1$. Ta có thể chỉ ra cặp điểm đó là: $A(-1;1)$ và $B(1;1)$.

Ví dụ 5) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$, trên (P) lấy hai điểm $A(-1;1), B(3;9)$.

a) Tính diện tích tam giác OAB .

- b) Xác định điểm C thuộc cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải:

- a) Gọi $y = ax + b$ là phương

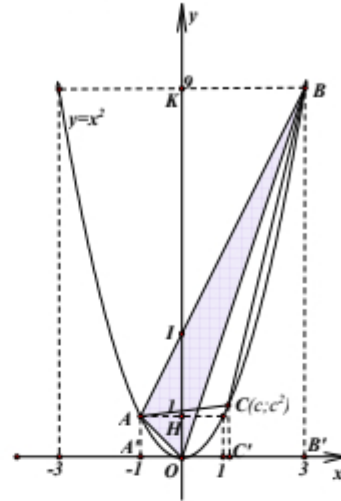
trình đường thẳng AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} a \cdot (-1) + b = 1 \\ a \cdot 3 + b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

suy ra phương trình đường thẳng AB (d): $y = 2x + 3$. Đường thẳng AB cắt

trục Oy tại điểm $I(0;3)$. Diện tích tam giác OAB là:

$$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2}AH \cdot OI + \frac{1}{2}BK \cdot OI. \text{ Ta có } AH = 1; BK = 3, OI = 3. \text{ Suy ra } S_{OAB} = 6 \text{ (đvdt).}$$



- b) Giả sử $C(c; c^2)$ thuộc cung nhỏ (P) với $-1 < c < 3$. Diện tích tam giác: $S_{ABC} = S_{ABB'A'} - S_{ACC'A'} - S_{BCC'B'}$. Các tứ giác $ABB'A'$, $AA'C'C$, $CBB'C'$ đều là hình thang vuông nên ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1+9}{2} \cdot 4 - \frac{1+c^2}{2} \cdot (c+1) - \frac{9+c^2}{2} \cdot (3-c) = 8 - 2(c-1)^2 \leq 8. \text{ Vậy diện tích tam giác } ABC \text{ lớn nhất bằng } 8 \text{ (đvdt) khi } C(1;1).$$

Ví dụ 10) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$ và parabol $(P): y = x^2$.

- a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .
- b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB . (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT Hà Nội năm 2014)

Lời giải:

1) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3. \text{ Ta có } y(2) = 4; y(-3) = 9.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $B(2;4)$ và $A(-3;9)$.

2) Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B xuống trục hoành.

$$\text{Ta có } S_{\Delta OAB} = S_{AA'B'B} - S_{\Delta OAA'} - S_{\Delta OBB'}$$

$$\text{Ta có } A'B' = |x_{B'} - x_{A'}| = x_{B'} - x_{A'} = 5; AA' = y_A = 9; BB' = y_B = 4$$

$$S_{AA'BB'} = \frac{AA' + BB'}{2} \cdot A'B' = \frac{9+4}{2} \cdot 5 = \frac{65}{2} \text{ (đvdt)}, S_{\Delta OAA'} = \frac{1}{2} A'A \cdot AO = \frac{27}{2}$$

$$(\text{đvdt}) \Rightarrow S_{\Delta OAB} = S_{AA'B'B} - S_{\Delta OAA'} - S_{\Delta OBB'} = \frac{65}{2} - \left(\frac{27}{2} + 4 \right) = 15 \text{ (đvdt)}.$$

Phương trình bậc hai và định lý Viet

Kiến thức cần nhớ:

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có biệt thức

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

+ Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Công thức nghiệm thu gọn : Khi $b = 2b'$, ta xét $\Delta' = b'^2 - ac$. Khi đó:

+ Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b'}{a}$.

+ Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{2a}$;
 $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{2a}$.

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

Để chứng minh một phương trình bậc 2 có nghiệm. Thông thường ta chứng minh: $\Delta \geq 0$ dựa trên các kỹ thuật như biến đổi tương đương để đưa về dạng $(Ax + B)^2 \geq 0$, kiến thức về bất đẳng thức, bất phương trình, trong một số bài toán khó ta cần nắm bắt được những tính chất đặc biệt của tam thức bậc 2 để vận dụng.

Ngoài các kiến thức cơ sở trong SGK ta cần nắm thêm một số kết quả, bổ đề quan trọng sau:

+ Mọi tam thức bậc 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ đều có thể phân tích thành dạng $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ với $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Để chứng minh một phương trình bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có nghiệm ngoài cách chứng minh $\Delta \geq 0$ ta còn có cách khác như sau: "Chỉ ra số thực α sao cho $a \cdot f(\alpha) \leq 0$ hoặc hai số thực α, β sao cho: $f(\alpha) \cdot f(\beta) \leq 0$ ".

Thật vậy ta có thể chứng minh điều này như sau:

+ Ta có $a \cdot f(\alpha) = a^2 \left[\left(\alpha + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \leq 0 \Rightarrow$
 $\left(\alpha + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4a^2} \geq \left(\alpha + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq 0$ suy ra phương trình có nghiệm.

+ Xét $(a.f(\alpha))(a.f(\beta)) = a^2 f(\alpha).f(\beta) \leq 0 \Rightarrow$ trong hai số $af(\alpha)$ và $af(\beta)$ có một số không dương, tức là $af(\alpha) \leq 0$ hoặc $af(\beta) \leq 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 1). Giải các phương trình sau:

- 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$
- 2) $-2x^2 + 3x + 1 = 0$.
- 3) $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$
- 4) $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m = 0$.

Lời giải:

1) Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$.

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \frac{5-1}{2.1} = 2 \\ x_2 = \frac{5+1}{2.1} = 3 \end{cases}$

2) Ta có $-2x^2 + 3x + 1 = 0 \Delta = 3^2 - 4(-2).1 = 17 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$.

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2.(-2)} = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2.(-2)} = \frac{3-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$

3) Ta có:

$\Delta = (2 + \sqrt{3})^2 - 4.2\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 - \sqrt{3}$. Phương trình có hai

nghiệm phân biệt là: $\begin{cases} x_1 = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$,

$$4) \Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + m) = 1.$$

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt là:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{2m+1+1}{2} = m+1 \\ x_2 = \frac{2m+1-1}{2} = m \end{cases}$$

Ví dụ 2. Cho phương trình: $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + (m-3) = 0$ (1)

1. Giải phương trình (1) khi $m = 2$
2. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép.
3. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải:

1. Với $m = 2$ ta có phương trình: $x^2 - 6x - 1 = 0$. Ta có $\Delta' = (-3)^2 + 1 = 10$ nên phương trình có 2 nghiệm là: $x = 3 - \sqrt{10}$ và $x = 3 + \sqrt{10}$.

2. Phương trình (1) có nghiệm kép khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} (m-1) \neq 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - (m-1)(m-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 6m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$$

3. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (m-1) \neq 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - (m-1)(m-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 6m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 3. Cho $a+b \geq 0, b+c \geq 0, a+c \geq 0$. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm: $(a+b+c)x^2 - 2\sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}x + (a^2+b^2+c^2) = 0$.

Lời giải:

Nếu $a + b + c = 0$ thì từ giả thiết ta suy ra $a = b = c = 0$. Do vậy phương trình có vô số nghiệm.

Dưới đây ta xét trường hợp $a + b + c \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \Delta' &= 3(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 2(a^3 + b^3 + c^3) - ab(a + b) - bc(b + c) - ac(a + c) \\ &= (a^3 + b^3 - ab(a + b)) + (b^3 + c^3 - bc(b + c)) + (a^3 + c^3 - ac(a + c)) \\ &= (a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (a + c)(a - c)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Do $a + b, b + c, a + c \geq 0$. Từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 4: Cho phương trình: $ax^2 + bcx + b^3 + c^3 - 4abc = 0$ (1)

($a \neq 0$) vô nghiệm. Chứng minh rằng trong hai phương trình sau có một phương trình vô nghiệm và một phương trình có nghiệm: $ax^2 + bx + c = 0$ (2) và $ax^2 + cx + b = 0$ (3).

Lời giải:

Vì (1) vô nghiệm nên ta có:

$$\Delta_1 = b^2c^2 - 4a(b^3 + c^3 - 4abc) < 0 \Leftrightarrow (b^2 - 4ac)(c^2 - 4ab) < 0 (*)$$

Phương trình (2) có: $\Delta_2 = b^2 - 4ac$; Phương trình (3) có: $\Delta_3 = c^2 - 4ab$

Nên $(*) \Leftrightarrow \Delta_2 \cdot \Delta_3 < 0 \Rightarrow$ trong hai số Δ_2, Δ_3 luôn có một số dương và một số âm dẫn đến trong hai phương trình (2) và (3) luôn có một phương trình có nghiệm và một phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 5)

a) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + 2b + 3c = 1$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$4x^2 - 4(2a+1)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0 \text{ và}$$

$$4x^2 - 4(2b+1)x + 4b^2 + 96abc + 1 = 0.$$

b) Cho các số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm: $x^2 + ax + 1 = 0$; $x^2 + bx + 1 = 0$; $x^2 + cx + 1 = 0$

c) Chứng minh rằng trong ba phương trình sau có ít nhất một phương trình có nghiệm: $ax^2 + 2bx + c = 0$ (1); $bx^2 + 2cx + a = 0$ (2); $cx^2 + 2ax + b = 0$ (3).

Lời giải:

a) Hai phương trình trên lần lượt có

$\Delta'_1 = 16a(1 - 48bc), \Delta'_2 = 16b(1 - 24ac)$. Vì a, b là các số dương nên Δ'_1, Δ'_2 lần lượt cùng dấu với $1 - 48bc$ và $1 - 24ac$. Mặt khác ta lại có $1 - 48bc + 1 - 24ac = 2 - 24c(a + 2b) = 2 - 24c(1 - 3c) = 2(6c - 1)^2 \geq 0$. Dẫn đến $\Delta'_1 + \Delta'_2 \geq 0$. Vậy có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

b). Ba phương trình đã cho lần lượt có $\Delta_1 = a^2 - 4$; $\Delta_2 = b^2 - 4$; $\Delta_3 = c^2 - 4$. Do đó $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = a^2 + b^2 + c^2 - 12$.

Lại có

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq (a + b + c)^2. \text{ Suy}$$

$$\text{ra } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{6^2}{3} = 12. \text{ Do đó } a^2 + b^2 + c^2 - 12 \geq 0 \text{ hay}$$

$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq 0$. Vậy có ít nhất một trong ba phương trình đã cho có nghiệm.

c) Nếu Trong ba số a, b, c có một số bằng 0, chẳng hạn $a = 0 \Rightarrow$ (2) có nghiệm $x = 0$.

Ta xét a, b, c là các số thực khác 0, khi đó ba phương trình đã cho là ba phương trình bậc hai lần lượt có : $\Delta'_1 = b^2 - ac; \Delta'_2 = c^2 - ab; \Delta'_3 = a^2 - bc$.

Xét tổng $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ ta có:

$$\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$$

Suy ra trong ba số $\Delta'_1; \Delta'_2; \Delta'_3$ có ít nhất một số không âm hãy ba phương trình đã cho có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Ví dụ 6)

- a) Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + bx + c$ trong đó b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên k để được $f(k) = f(2015).f(2016)$.
- b) Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + bx + c$. Giả sử phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng phương trình $f(f(x)) = x$ có 4 nghiệm nếu: $(b+1)^2 > 4(b+c+1)$.

Giải:

- a) Đây là bài toán khó: Để chứng minh sự tồn tại của số k ta cần chỉ ra tính chất:

Với mọi đa thức bậc 2 dạng $f(x) = x^2 + px + q$. Ta luôn có

$f(f(x)+x) = f(x).f(x+1)$ với mọi x . Thật vậy ta có:

$$\begin{aligned} f(f(x)+x) &= [f(x)+x]^2 + b[f(x)+x] + c \\ &= f^2(x) + 2f(x).x + x^2 + b.f(x) + bx + c \\ &= f^2(x) + 2f(x).x + b.f(x) + x^2 + bx + c \\ &= f^2(x) + 2f(x).x + bf(x) + f(x) \\ &= f(x)[f(x) + 2x + b + 1] = f(x)[x^2 + 2x + 1 + b(x+1) + c] = f(x).f(x+1) \end{aligned}$$

Trở lại bài toán chọn $x = 2015$ ta có

$f(f(2015)+2015)=f(2015).f(2016)$. Ta suy ra số k cần tìm chính là:
 $k=f(2015)+2015$.

b) Ta có: $f(f(x))-x=f^2(x)+bf(x)+c-x$
 $=f(x)[f(x)-x]+x[f(x)-x]+b[f(x)-x]+x^2+bx+c-x$ hay
 $f(f(x))-x=[f(x)-x][f(x)+x+b+1]=[f(x)-x][x^2+(b+1)x+b+c+1]$
 Để ý rằng phương trình $x^2+(b+1)x+b+c+1=0$ có
 $\Delta=(b+1)^2-4(b+c+1)>0$ và $f(x)-x=0$ có 2 nghiệm phân biệt nên
 suy ra $f(f(x))=x$ có 4 nghiệm.

Chú ý:

+ Để chứng minh trong n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ có ít nhất một số không âm (hoặc một số dương) ta chỉ cần chứng minh tổng $k_1a_1+k_2a_2+\dots+k_na_n \geq 0$ trong đó $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$.

Ví dụ 7: Cho a, b, c là các số thực có tổng khác 0. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm:

$$a(x-a)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0 \quad (1)$$

Cách 1: $(1) \Leftrightarrow (a+b+c)x^2-2(ab+bc+ca)x+3abc=0 \quad (2)$

Vì $a+b+c \neq 0$ nên (2) là phương trình bậc hai, do đó để chứng minh phương trình có nghiệm ta chỉ cần chứng minh $\Delta' \geq 0$

Ta có:

$$\begin{aligned} \Delta' &= (ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c) \\ &= \frac{1}{2}[(ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2] \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Cách 2: Gọi $f(x)$ là vế trái của phương trình (1). Ta có:

$f(0) = -3abc; f(a) = a(a-b)(a-c); f(b) = b(b-a)(b-c); f(c) = c(c-a)(c-b)$
 $\Rightarrow f(0).f(a).f(b).f(c) = -3[abc(a-b)(b-c)(c-a)]^2 \leq 0 \Rightarrow$ trong bốn
 số $f(0), f(a), f(b), f(c)$ luôn tồn tại hai số có tích không dương. Dẫn
 đến phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Ví dụ 8: Cho a, b, c thỏa mãn: $3a + 4b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương
 trình sau luôn có nghiệm: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

Cách 1:

* Nếu $a = 0 \Rightarrow 4b + 6c = 0 \Rightarrow c = -\frac{2}{3}b \Rightarrow f(x) = b\left(x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow f(x)$ có
 nghiệm

* Nếu $a \neq 0$ ta có:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{(3a+6c)^2}{16} - 4ac = \frac{(3a-6c)^2}{16} \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm}$$

Cách 2: Ta có:

$$2f(1) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 2(a+b+c) + 4\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c\right) = 3a + 4b + 6c = 0$$

$$\Rightarrow f(1) = -2f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(1).f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm.}$$

Cách 3: Ta có

$$f(0) = c; f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}a + \frac{3}{4}b + c = \frac{9a+12b+16c}{16} = \frac{3(3a+4b+6c)-2c}{16} = -\frac{c^2}{8}$$

Suy ra $f(0).f\left(\frac{3}{4}\right) \leq 0$ suy ra phương trình luôn có nghiệm.

Nhận xét:

Với cách giải thứ hai thì việc khó nhất là phải chứng minh được đẳng thức: $2f(1) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Tại sao ta xét $f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ và nhân thêm các hệ số 2 và 4. Vậy ngoài hai giá trị $f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ ta còn có những giá trị nào khác không? Câu trả lời là có, chẳng hạn ta xét $f(1), f\left(\frac{2}{3}\right), f(0)$. Ta cần xác định hệ số $m, n, p > 0$ sao cho: $mf(1) + nf\left(\frac{2}{3}\right) + pf(0) = 3a + 4b + 6c$.
 Đồng nhất các hệ số ta có hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} m + \frac{4}{9}n = 3 \\ m + \frac{2}{3}n = 4 \\ m + n + p = 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1, n = \frac{9}{2}, p = \frac{1}{2}. \text{ Vậy ta}$$

có: $2f(1) + 9f\left(\frac{2}{3}\right) + f(0) = 0 \Rightarrow$ trong ba số $f(1), f\left(\frac{2}{3}\right), f(0)$ tồn tại một số không âm và một số không dương, dẫn đến tích hai số đó không dương hay phương trình có nghiệm.

Cách giải thứ 3: Tại sao ta chỉ ra được $f\left(\frac{3}{4}\right)$. Điều này là hoàn toàn tự nhiên nếu ta cần tạo ra một tỷ lệ $3a : 4b$ để tận dụng giả thiết:
 $3a + 4b + 6c = 0$

Ta xét bài toán tổng quát sau:

Ví dụ 9: Cho các số thực dương m, n, p thỏa mãn: $n < m; mp < n^2$

và $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 0$. Chứng minh rằng phương trình: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

(1) có nghiệm $x \in (0; 1)$

Giải: Để chứng minh (1) có nghiệm $x \in (0;1)$, ta sẽ chỉ ra các số thực $\alpha, \beta \in (0;1)$ sao cho $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$. Vì $\alpha, \beta \in (0;1)$ và có giả thiết

$n < m \Leftrightarrow \frac{n}{m} < 1$ nên dẫn đến ta xét: $f\left(\frac{n}{m}\right) = a \frac{n^2}{m^2} + b \frac{n}{m} + c$. Mặt khác

$$\text{từ: } \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 0 \Rightarrow \frac{m}{n^2} \left(a \cdot \frac{n^2}{m^2} + b \frac{n}{m} + c \right) + c \left(\frac{1}{p} - \frac{m}{n^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{n^2} f\left(\frac{n}{m}\right) + c \cdot \frac{n^2 - pm}{pn^2} = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{pm - n^2}{pm} c = \frac{pm - n^2}{pm} f(0)$$

* Xét $c = 0$

- Nếu $a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x)$ là đa thức không, do đó $f(x)$ sẽ có nghiệm trong $(0;1)$

- Nếu $a \neq 0$, từ giả thiết $\Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{n}{m} < 1$ và

$$f(x) = x(ax+b) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \in (0;1)$$

* Xét $c \neq 0$ ta có: $f\left(\frac{n}{m}\right) \cdot f(0) = \frac{pm - n^2}{pm} f^2(0) < 0 \Rightarrow f(x)$ có nghiệm

$$x \in \left(0; \frac{n}{m}\right) \subset (0;1)$$

VẬN DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC GTLN,GTNN (Phương pháp miền giá trị hàm số)

Bài toán 1: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$ với

$$mx^2 + nx + p > 0 \forall x.$$

Phương pháp:

Gọi y_0 là một giá trị của biểu thức: Khi đó

$$y_0 = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p} \Leftrightarrow (y_0 m - a)x^2 + (y_0 n - b)x + y_0 p - c = 0. (*)$$

Ta xét 2 trường hợp:

+ Nếu $y_0 m - a = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{a}{m}$ thay vào (*) ta tìm được x suy ra $y_0 = \frac{a}{m}$ là một giá trị của biểu thức.

+ Nếu $y_0 m - a \neq 0 \Leftrightarrow y_0 \neq \frac{a}{m}$ thì (*) là phương trình bậc 2 ẩn x . Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta \geq 0$. Từ đó ta suy ra điều kiện của y_0 . Trên cơ sở đó ta tìm được GTLN, GTNN (nếu có) của biểu thức.

+ Ngoài ra trong quá trình chứng minh bất đẳng thức ta cần nắm kết quả

sau: Ta có: $a.f(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a^2 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4}$. Từ đó suy ra

Nếu $\Delta \leq 0$ thì $a.f(x) \geq 0 \Leftrightarrow a, f(x)$ luôn cùng dấu. Một kết quả thường xuyên sử dụng trong giải toán là: “Nếu tam thức bậc 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$ có $a > 0, \Delta \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x$.”

Ví dụ 1: Tìm GTLN, GTNN của các biểu thức:

a) $y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7}.$

b) $P = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}.$

c) $A = \frac{2x^2 - 2xy + 9y^2}{x^2 + 2xy + 5y^2}$ với $y \neq 0$.

d) $A = \frac{2x^2 + 12xy}{1 + 2xy + 2y^2}$ biết $x^2 + y^2 = 1$ (Đề TS ĐH khối B- 2008)

Lời giải:

a) Do $x^2 - 5x + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x$ suy ra biểu thức y luôn xác

định với mọi x . Gọi y_0 là một giá trị của biểu thức khi đó ta có:

$$y_0 = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7} \Leftrightarrow (y_0 - 1)x^2 - 5y_0x + 7y_0 = 0 \quad (*)$$

+ Nếu $y_0 = 1 \Rightarrow -5x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$ điều đó có nghĩa là $y_0 = 1$ là một giá trị của biểu thức nhận được.

+ Nếu $y_0 \neq 1$ thì (*) là một phương trình bậc 2 có

$$\Delta = (5y_0)^2 - 4 \cdot (y_0 - 1) \cdot 7y_0 = y_0(28 - 3y_0).$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y_0 \leq \frac{28}{3}$. Để ý rằng với mỗi giá trị $y_0 = 0$ hoặc

$$y_0 = \frac{28}{3} \text{ thì } \Delta = 0 \text{ nên}$$

+ GTNN của y là 0 khi và chỉ khi $x = -\frac{5y_0}{2(y_0 - 1)} = 0$.

+ GTLN của y là $\frac{28}{3}$ khi và chỉ khi $x = -\frac{5y_0}{2(y_0 - 1)} = \frac{5 \cdot \frac{28}{3}}{2\left(\frac{28}{3} - 1\right)} = \frac{14}{5}$.

b) ĐKXD $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $P = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1} \Leftrightarrow (P - 1)x^2 + 8x + (P - 7) = 0 \quad (1)$. Coi (1) là

phương trình bậc hai ẩn x .

Trường hợp 1: $P - 1 = 0 \Leftrightarrow P = 1$ thì $x = \frac{3}{4} \quad (*)$

Trường hợp 2: $P-1 \neq 0 \Leftrightarrow P \neq 1$ phương trình (1) có nghiệm khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 8P - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (P+1)(P-9) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 9 \quad (**).$$

Kết hợp (*) và (**) ta có $\min P = -1; \max P = 9$.

c) $A = \frac{2x^2 - 2xy + 9y^2}{x^2 + 2xy + 5y^2}$. Biểu thức A có dạng đẳng cấp bậc 2.

Ta chia tử số và mẫu số cho y^2 và đặt $t = \frac{x}{y}$ thì $A = \frac{2t^2 - 2t + 9}{t^2 + 2t + 5}$. Ta có

$t^2 + 2t + 5 = (t+1)^2 + 4 > 0$ với mọi t . Gọi A_0 là một giá trị của biểu thức.

Khi đó ta có: $A_0 = \frac{2t^2 - 2t + 9}{t^2 + 2t + 5} \Leftrightarrow (A_0 - 2)t^2 + (2A_0 + 2)t + 5A_0 - 9 = 0 \quad (*)$

+ Nếu $A_0 = 2$ thì $t = -\frac{1}{6}$ suy ra $A_0 = 2$ là một giá trị của biểu thức nhận được.

+ Nếu $A_0 \neq 2$ thì (*) là một phương trình bậc 2 có

$\Delta' = (A_0 + 1)^2 - (A_0 - 2)(5A_0 - 9) = -4A_0^2 + 21A_0 - 17$. Điều kiện để phương trình có nghiệm là

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -4A_0^2 + 21A_0 - 17 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - A_0)(4A_0 - 17) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq A_0 \leq \frac{17}{4}.$$

đó ta có GTNN của A là 1 khi và chỉ khi $t = -\frac{A_0 + 1}{A_0 - 2} = 2 \Leftrightarrow x = 2y$. GTLN

của A là $\frac{17}{4}$ khi và chỉ khi $t = -\frac{A_0 + 1}{A_0 - 2} = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{3}y$.

d) Nếu $y = 0$ thì $x^2 = 1 \Rightarrow P = 2x^2 = 2$.

Xét $y \neq 0$ đặt $x = ty$ thì $A = \frac{2x^2 + 12xy}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{2x^2 + 12xy}{x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{2(t^2 + 6t)}{t^2 + 2t + 3}$.

Giải tương tự như câu b) Ta có $-6 \leq A \leq 3$. Suy ra GTNN của A là -6 đạt

được khi và chỉ khi $x = \frac{3}{\sqrt{13}}; y = \frac{-2}{\sqrt{13}}$ hoặc $x = -\frac{3}{\sqrt{13}}; y = \frac{2}{\sqrt{13}}$. GTLN của

A là 3 đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{3}{\sqrt{10}}; y = \frac{1}{\sqrt{10}}$ hoặc

$$x = -\frac{3}{\sqrt{10}}; y = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ví dụ 2: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$. Tìm

GTLN, GTNN của x .

Lời giải:

Ta viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases} yz = 8 - x(y + z) \\ y + z = 5 - x \end{cases} (*)$ hay

$\begin{cases} yz = 8 - x(5 - x) \\ y + z = 5 - x \end{cases} (*)$. Vì x, y, z là các số thực thỏa mãn $(*)$ nên suy ra y, z

là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - (5 - x)t + 8 - 5x - x^2 = 0 (**)$.

Điều kiện để phương trình $(**)$ có nghiệm là:

$$\Delta = (5 - x)^2 - 4(8 - 5x - x^2) = -3x^2 + 10x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow (7 - 3x)(1 - x) \geq 0 \text{ hay}$$

$$1 \leq x \leq \frac{7}{3}.$$

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow y = z = 2$ nên GTNN của x là 1.

Khi $x = \frac{7}{3} \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow y = z = \frac{4}{3}$ suy ra GTLN của $x = \frac{7}{3}$.

Ví dụ 3) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm

GTLN của biểu thức: $P = 9xy + 10yz + 11zx$.

Lời giải:

Thay $z = 1 - x - y$ vào P ta có:

$$P = 9xy + z(10y + 11x) = 9xy + (1 - x - y)(10y + 11x)$$

$$= -11x^2 + (11 - 12y)x - 10y^2 + 10y \text{ hay}$$

$$11x^2 + (12y - 11)x + 10y^2 - 10y + P = 0. \text{ Để phương trình có nghiệm điều}$$

$$\text{kiện là } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (12y - 11)^2 - 4.11(10y^2 - 10y + P) \geq 0 \text{ hay}$$

$$-296y^2 + 176y + 121 - 44P \geq 0$$

$$\Leftrightarrow P \leq -\frac{74}{11} \left(-y^2 + \frac{22}{37}y - \frac{121}{296} \right) = -\frac{74}{11} \left(y - \frac{11}{27} \right)^2 + \frac{495}{148} \leq \frac{495}{148}. \text{ Do đó}$$

$$\text{GTLN của } P \text{ là } \frac{495}{148} \text{ đạt được khi } x = \frac{25}{74}; y = \frac{11}{37}; z = \frac{27}{74}.$$

Ví dụ 4) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$\text{rằng: } a + ab + 2abc \leq \frac{9}{2}.$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra $b = 3 - a - c$. Ta biến đổi bất đẳng thức thành:

$$a + a(3 - a - c) + 2ac(3 - a - c) - \frac{9}{2} \leq 0 \Leftrightarrow (2c + 1)a^2 + (2c^2 - 5c - 4)a + \frac{9}{2} \geq 0$$

$$\text{coi đây là hàm số bậc 2 của } a. \text{ Xét } f(a) = (2c + 1)a^2 + (2c^2 - 5c - 4)a + \frac{9}{2}$$

ta có hệ số của a^2 là $2c + 1 > 0$ và ta có:

$$\Delta = (2c^2 - 5c - 4)^2 - 18(2c + 1) = (2c - 1)^2(c^2 - 4c - 2) =$$

$$(2c - 1)^2[c(c - 3) - c - 2] \leq 0 \text{ do } 0 < c < 3. \text{ Suy ra } f(a) \geq 0, \text{ dấu bằng xảy}$$

$$\text{ra khi và chỉ khi } a = \frac{3}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}.$$

ĐỊNH LÝ VIET VỚI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

Kiến thức cần nhớ:

Định lý Viet: Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0) \text{ thì } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (*)$$

Ghi chú: Trước khi sử dụng định lý Viet, chúng ta cần kiểm tra điều kiện phương trình có nghiệm, nghĩa là $\Delta \geq 0$.

Một số ứng dụng cơ bản của định lý Viet

+ Nhằm nghiệm của một phương trình bậc hai:

Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$.

Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm là $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$.

+ Tính giá trị của biểu thức $g(x_1, x_2)$ trong đó $g(x_1, x_2)$ là biểu thức đối xứng giữa hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (*):

Bước 1: Kiểm tra điều kiện $\Delta \geq 0$, sau đó áp dụng định lý Viet.

Bước 2: Biểu diễn biểu thức $g(x_1, x_2)$ theo $S = x_1 + x_2, P = x_1 \cdot x_2$ từ đó tính được $g(x_1, x_2)$.

Một số biểu thức đối xứng giữa hai nghiệm thường gặp:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P;$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP;$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2;$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{S^2 - 4P}, \dots$$

+ Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là x_1, x_2 cho trước:

Bước 1: Tính $S = x_1 + x_2; P = x_1x_2$.

Bước 2: Phương trình bậc hai nhận hai nghiệm x_1, x_2 là $X^2 - S.X + P = 0$.

+ Tìm điều kiện để phương trình bậc hai (*) (a, b, c phụ thuộc vào tham số m), có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn một điều kiện cho trước $h(x_1, x_2) = 0$ (1)

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình (*) có nghiệm, nghĩa là $\Delta \geq 0$. Sau đó áp dụng định lý Viet để tính $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ (2) và $P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$ (3) theo m .

Bước 2: Giải hệ phương trình (1),(2),(3) (thường sử dụng phương pháp thế) để tìm m , sau đó chú ý kiểm tra điều kiện của tham số m ở bước 1.

+ Phân tích đa thức bậc hai thành nhân tử: Nếu phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

+ Chứng minh bất đẳng thức liên quan đến nghiệm của phương trình bậc 2 ta cần chú ý đến các điều kiện ràng buộc sau:

Nếu: $x_1 \leq m \leq x_2 \Leftrightarrow (x_1 - m)(x_2 - m) \leq 0$.

Nếu $m \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2m \\ (x_1 - m)(x_2 - m) \geq 0 \end{cases}$

Nếu $x_1 \leq x_2 \leq m \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2m \\ (x_1 - m)(x_2 - m) \geq 0 \end{cases}$

Một số ví dụ:

Ví dụ 1. Không giải phương trình, cho biết dấu các nghiệm

a) $x^2 - 13x + 20 = 0$

c) $5x^2 + 7x + 1 = 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

Lời giải:

a) Ta có:
$$\begin{cases} P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 20 > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 13 > 0 \end{cases}$$

Vì $P > 0$ nên hai nghiệm x_1, x_2 cùng dấu và $S > 0$ nên hai nghiệm cùng dấu dương.

b) Ta có: $P = x_1 \cdot x_1 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3} < 0$ nên hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu.

c) Ta có:
$$\begin{cases} P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{5} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{5} < 0 \end{cases}$$

Vì $P > 0$ nên hai nghiệm x_1, x_2 cùng dấu và $S < 0$ nên hai nghiệm cùng dấu âm.

Ví dụ 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

b) $g(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $P(x; y) = 6x^2 - 11xy + 3y^2$

d)

$Q(x; y) = 2x^2 - 2y^2 - 3xy + x - 2y$.

Lời giải:

a) Phương trình $3x^2 - 5x + 2 = 0$ có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = \frac{2}{3}$

Suy ra $f(x) = 3(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (3x-2)(x-1)$.

b) Phương trình $-x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow -(x^2)^2 + 5x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$
 hoặc $x^2 = 4$. Suy ra $g(x) = -(x^2 - 1)(x^2 - 4) = -(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

c) Ta coi phương trình $6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x .

Ta có $\Delta_x = (11y)^2 - 4 \cdot 6y^2 = 49y^2 \geq 0$. Suy ra phương trình có nghiệm là

$$x = \frac{11y \pm 7y}{12} \Leftrightarrow x = \frac{y}{3} \text{ hoặc } x = \frac{3y}{2}. \text{ Do đó}$$

$$P(x; y) = 6 \left(x - \frac{y}{3} \right) \left(x - \frac{3y}{2} \right) = (3x - y)(2x - 3y)$$

d) Ta có $2x^2 - 2y^2 - 3xy + x - 2y = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (1 - 3y)x - 2y^2 - 2y = 0$

Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn x và có:

$$\Delta_x = (1 - 3y)^2 - 8(-2y^2 - 2y) = 25y^2 + 10y + 1 = (5y + 1)^2 \geq 0$$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x = \frac{3y - 1 \pm (5y + 1)}{4} \Leftrightarrow x = 2y$ hoặc

$$x = \frac{-y - 1}{2}. \text{ Do đó } Q(x; y) = 2(x - 2y) \left(x - \frac{-y - 1}{2} \right) = (x - 2y)(2x + y + 1)$$

Ví dụ 3: Phân tích đa thức $f(x) = x^4 - 2mx^2 - x + m^2 - m$ thành tích của hai tam thức bậc hai ẩn x .

Lời giải:

Ta có $x^4 - 2mx^2 - x + m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m^2 - (2x^2 + 1)m + x^4 - x = 0$

Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn m và có:

$$\Delta_m = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2 \geq 0$$

Suy ra $f(x) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2x^2 + 1 + 2x + 1}{2} = x^2 + x + 1$ hoặc

$$m = \frac{2x^2 + 1 - 2x - 1}{2} = x^2 - x. \text{ Do đó } f(x) = (m - x^2 - x - 1)(m - x^2 + x).$$

Ví dụ 4:

- a) Cho phương trình $2x^2 - mx + 5 = 0$, với m là tham số. Biết phương trình có một nghiệm là 2, tìm m và tìm nghiệm còn lại.
- b) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương.
- c) Cho phương trình $x^2 - 4x = 2|x-2| - m - 5$, với m là tham số. Xác định m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải:

a) Vì $x = 2$ là nghiệm của phương trình nên thay $x = 2$ vào phương trình ta được $8 - 2m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{2}$. Theo hệ thức Viet ta có: $x_1 x_2 = \frac{5}{2}$ mà $x_1 = 2$ nên $x_2 = \frac{5}{4}$. Vậy $m = \frac{13}{2}$ và nghiệm còn lại là $\frac{5}{4}$.

b) Phương trình có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m + 2 \geq 0 \\ S = 2m + 1 > 0 \\ P = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m > 1 \vee m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy với $m > 1$ thỏa mãn bài toán.

c) Ta có $x^2 - 4x = 2|x-2| - m - 5 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) - 2|x-2| = -m - 1$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 2|x-2| = -m - 1 \quad (1)$$

Đặt $t = |x-2| \geq 0$. Khi đó (1) thành: $t^2 - 2t + 1 + m = 0 \quad (2)$

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương, tức là

$$\text{phải có: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m > 0 \\ 1 + m > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0 \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Ví dụ 5)

a) Tìm m để phương trình $3x^2 + 4(m-1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

b) Chứng minh rằng phương trình: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) (1)$ có hai nghiệm phân biệt và nghiệm này gấp $k (k \neq -1)$ lần nghiệm kia khi và chỉ khi $(1+k)^2 ac = kb^2$.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 - mx + m^2 - m - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông ABC , biết độ dài cạnh huyền $BC = 2$.

Lời giải:

a) Trước hết phương trình phải có hai nghiệm khác 0 nên:

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 + 4m + 1 > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 4m + 1}{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 1 > 0 \\ m^2 - 4m + 1 \neq 0 \end{cases} (*). \text{ Khi đó theo định lý Viet ta}$$

$$\text{có: } S = x_1 + x_2 = \frac{4(1-m)}{3}; P = x_1 x_2 = \frac{m^2 - 4m + 1}{3}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 x_2 - 2) = 0$$

$$(\text{do } x_1 x_2 \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m^2 - 4m - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1; m = -1; m = 5$$

Thay vào (*) ta thấy $m = -1$ không thỏa mãn.

Vậy $m = 1; m = 5$ là giá trị cần tìm.

b) Giả sử (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và nghiệm này gấp k lần nghiệm kia thì ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - kx_2 = 0 \\ x_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1+k^2)x_1x_2 - k(x_1^2 + x_2^2) = 0 \Leftrightarrow (1+k^2)x_1x_2 - k[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = 0 \\ &\Leftrightarrow (1+k^2)\frac{c}{a} - k\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}\right] = 0 \Leftrightarrow (1+k^2)ac = k(b^2 - 2ac) \Leftrightarrow (1+k)^2 ac = kb^2 \end{aligned}$$

Giả sử $(1+k)^2 ac = kb^2$ ta chỉ cần chứng minh (1) có nghiệm là được. Ta có:

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - \frac{4k}{(k+1)^2}b^2 = b^2 \frac{(k-1)^2}{(k+1)^2} \geq 0. \text{ Vậy ta có điều phải chứng}$$

minh.

c) Vì độ dài cạnh của tam giác vuông là số dương nên $x_1, x_2 > 0$.

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 x_2 = m^2 - m - 3 > 0 \end{cases}$ (1). Điều kiện để phương

trình có nghiệm là: $\Delta = m^2 - 4(m^2 - m - 3) \geq 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m - 12 \leq 0$ (2).

Từ giả thiết suy ra $x_1^2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4$. Do đó

$$m^2 - 2(m^2 - m - 3) = 4 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{3}$$

Thay $m = 1 \pm \sqrt{3}$ vào (1) và (2) ta thấy $m = 1 + \sqrt{3}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = 1 + \sqrt{3}$.

Ví dụ 7: Cho phương trình $x^4 - mx^3 + (m+1)x^2 - m(m+1)x + (m+1)^2 = 0$.

- Giải phương trình khi $m = -2$.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình có bốn nghiệm đôi một phân biệt.

Lời giải:

a) Khi $m = -2$, ta có phương trình: $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

Kiểm tra ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình

Chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được: $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$. Thay vào phương trình trên ta được:

$t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Với $t = -1$ ta được

$x - \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Vậy với $m = -2$ phương trình có

nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) Nếu $x = 0$ phương trình đã cho thành: $(m+1)^2 = 0$

Khi $m \neq -1$ phương trình vô nghiệm.

Khi $m = -1$ thì $x = 0$ là một nghiệm của phương trình đã cho và khi đó

phương trình đã cho có dạng $x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$. Trong trường hợp này

phương trình chỉ có hai nghiệm nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó $x \neq 0$ và $m \neq -1$. Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ và đặt

$t = x + \frac{(m+1)}{x}$. Ta thu được phương trình: $t^2 - mt - (m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = m+1 \end{cases}$

Với $t = -1$ ta được $x^2 + x + (m+1) = 0$ (1)

Với $t = m+1$ ta được $x^2 - (m+1)x + (m+1) = 0$ (2)

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi mỗi một trong các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt, đồng thời chúng không có nghiệm chung.

Để (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 1 - 4(m+1) > 0 \\ (m+1)^2 - 4(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1 \quad (*)$$

Khi đó nếu x_0 là một nghiệm chung của (1) và (2) thì:

$$\begin{cases} (m+1) = -x_0^2 - x_0 \\ (m+1) = -x_0^2 + (m+1)x_0 \end{cases} \text{ Suy ra } (m+2)x_0 = 0 \text{ điều này tương đương với}$$

hoặc $m = -2$ hoặc $x_0 = 0$.

Nếu $x_0 = 0$ thì $m = -1$ (không thỏa mãn). Nếu $m = -2$ thì (1) và (2) cùng

có hai nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Do đó kết hợp với (*), suy ra phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2 \neq m < -1$.

Ví dụ 8) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình:

a) $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 + 2x_2 = 1.$$

b) $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0.$$

c) $x^2 - 3x - m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1^2(1-x_2) + x_2^2(1-x_1) = 19.$$

d) $3x^2 + 4(m-1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa

$$\text{mãn } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Lời giải:

a) Nếu $m = 0$ thì phương trình đã cho thành: $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
(không thỏa mãn)

Nếu $m \neq 0$. Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - m \cdot 3(m-2) = -2m^2 + 4m + 1$

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{6}}{2} \leq m \leq \frac{2+\sqrt{6}}{2}$

(*). Với điều kiện (*) giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Từ yêu cầu bài toán và áp dụng Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{2-m}{m}$$

Thay $x = \frac{2-m}{m}$ vào phương trình ta được $(m-2)(6m-4)=0 \Leftrightarrow m=2$ hoặc

$m = \frac{2}{3}$. Đối chiếu điều kiện ta được $m=2$ hoặc $m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có: $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+2) = 4m-7$

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{4}$

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 x_2 = m^2 + 2 \\ x_1 + x_2 = 2m + 1 \end{cases}$ thay vào hệ thức

$3x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$, ta được $3m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$ hoặc $m = 2$

Đối chiếu điều kiện ta được $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Ta có: $\Delta = 9 - 4.1(-m) = 9 + 4m$

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{9}{4}$

Ta có: $x_1^2(1-x_2) + x_2^2(1-x_1) = 19 \Leftrightarrow x_1^2 - x_1^2 x_2 + x_2^2 - x_2^2 x_1 = 19$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1 = 19 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 19$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 19$. Theo định lý Viet ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$. Thay vào hệ thức $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 19$ ta

được: $3^2 - 2(-m) - (-m).3 = 19 \Leftrightarrow 5m = 10 \Leftrightarrow m = 2$

Đối chiếu điều kiện ta được $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

d) Ta có: $\Delta' = 4(m-1)^2 - 3(m^2 - 4m + 1) = m^2 + 4m + 1$

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -2 - \sqrt{3}$ hoặc

$m > -2 + \sqrt{3}$. Ta có: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Theo định lý

Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-4(m-1)}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-(m^2 - 4m + 1)}{3} \end{cases}$$
 Thay vào hệ thức $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, ta

được:
$$-\frac{4(m-1)}{3} \cdot \frac{3}{m^2 - 4m + 1} = -\frac{4(m-1)}{6} \Leftrightarrow \frac{2(m-1)(m^2 - 4m - 5)}{3(m^2 - 4m + 1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-1)(m^2 - 4m - 5) \\ m^2 - 4m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \vee m = 1 \vee m = 5 \\ m \neq 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$
 . Đối chiếu điều kiện

ta được $m = 1$ hoặc $m = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 9) Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 2 = 0$, với m là tham số.

- Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu với mọi m .
- Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2 . Tìm m để biểu

thức $A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

a) Xét $\Delta = -m^2 + m - 2 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi m .

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2 .

Theo câu a) thì $x_1 x_2 \neq 0$, do đó A được xác định với mọi x_1, x_2 .

Do x_1, x_2 trái dấu nên $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -t$ với $t > 0$, suy ra $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 < 0$, suy ra $A < 0$

Đặt $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -t$, với $t > 0$, suy ra $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 = -\frac{1}{t}$. Khi đó $A = -t - \frac{1}{t}$ mang giá

trị âm và A đạt giá trị lớn nhất khi $-A$ có giá trị nhỏ nhất. Ta có

$-A = t + \frac{1}{t} \geq 2$, suy ra $A \leq -2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$t = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1$. Với $t = 1$, ta có

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = -1 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow -(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = 1$ thì biểu thức A đạt giá trị lớn nhất là -2 .

Ví dụ 10) Cho phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

- Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .
- Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$$

Lời giải:

Ta có $\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0$, với mọi m .

Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

Theo hệ thức Viet, ta có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = m-1$

- Thay $m = x_1 + x_2$ vào $x_1x_2 = m-1$, ta được $x_1x_2 = x_1 + x_2 - 1$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m là $x_1x_2 = x_1 + x_2 - 1$.

- Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2(m-1) = m^2 - 2m + 2$.

Suy ra $A = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2m+1}{m^2+2}$. Vì

$$A - 1 = \frac{2m+1}{m^2+2} - 1 = \frac{2m+1-m^2-2}{m^2+2} = -\frac{(m-1)^2}{m^2+2} \leq 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Suy ra $A \leq 1, \forall m \in \mathbb{R}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$

$$\text{Và } A + \frac{1}{2} = \frac{2m+1}{m^2+2} + \frac{1}{2} = \frac{2(m+1)+m^2+2}{2(m^2+2)} = \frac{(m+2)^2}{2(m^2+2)} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Suy ra $A \geq -\frac{1}{2}, \forall m \in \mathbb{R}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = -2$. Vậy GTLN

của A bằng 1 khi $m = 1$ và GTNN của A bằng $-\frac{1}{2}$ khi $m = -2$.

Ví dụ 11) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình. Chứng minh rằng:

$$|x_1 + x_2 + x_1x_2| \leq \frac{9}{8}.$$

Lời giải:

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (2m^2 - 3m + 1) = -m^2 + m = m(1-m)$. Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$. Theo định lý Viet ta có:

$x_1 + x_2 = 2(m-1)$ và $x_1x_2 = 2m^2 - 3m + 1$. Ta có

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + x_1x_2| &= |2(m-1) + 2m^2 - 3m + 1| \\ &= |2m^2 - m - 1| = 2 \left| m^2 - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \right| = 2 \left| \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right| \end{aligned}$$

$$\text{Vì } 0 \leq m \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \text{ suy ra } \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \leq 0$$

Do đó

$$|x_1 + x_2 + x_1x_2| = 2 \left| \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right| = 2 \left| \frac{9}{16} - \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \right| = \frac{9}{8} - 2 \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{9}{8}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 13) Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$, với m là tham số. tìm tất cả các giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

sao cho biểu thức $P = \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải:

Ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+1) = 4m-3$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$. Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2m+1$ và

$$x_1 x_2 = m^2 + 1. \text{ Do đó } P = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 + 1}{2m + 1} = \frac{2m - 1}{4} = \frac{5}{4(2m + 1)}. \text{ Suy ra}$$

$$4P = 2m - 1 + \frac{5}{2m + 1}. \text{ Do } m > \frac{3}{4} \text{ nên } 2m + 1 > 1$$

Để $P \in \mathbb{Z}$ thì ta phải có $(2m+1)$ là ước của 5, suy ra $2m+1 = 5 \Leftrightarrow m = 2$

Thử lại với $m = 2$, ta được $P = 1$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 14)

a) Tìm m để phương trình $x^2 + x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và biểu thức: $Q = x_1^2(x_1 + 1) + x_2^2(x_2 + 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$, với m là tham số.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho

$$P = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2x^2 - (3a-1)x - 2 = 0$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2$$

Lời giải:

a) Phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4} (*)$.

Khi đó theo định lý Viet: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -1 \\ P = x_1 x_2 = m \end{cases}$. Ta có:

$$Q = S(S^2 - 3P) + S^2 - 2P = m \leq \frac{1}{4} \text{ (do (*))} \Rightarrow \max Q = \frac{1}{4} \text{ đạt được khi}$$

$$m = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } m = \frac{1}{4} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

$$\text{b) Ta có } \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1$$

Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$ (*). Theo định lý Viet

ta có: $x_1 + x_2 = 2m + 2$ và $x_1 x_2 = m^2 + 2$. Ta có

$$P = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6 = m^2 + 2 - 2(2m + 2) - 6$$

$$= m^2 - 4m - 8 = (m - 2)^2 - 12 \geq -12. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } m = 2$$

thỏa mãn điều kiện (*). Vậy với $m = 2$ thì biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất bằng -12 .

c) Ta có: $\Delta = (3a - 1)^2 + 16 > 0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân

biệt. Theo định lý Viet thì: $x_1 + x_2 = \frac{3a - 1}{2}; x_1 x_2 = -1$. Ta có

$$P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2 \left[\frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2)}{2x_1 x_2} \right]^2 = 6(x_1 - x_2)^2$$

$$= 6 \left[(x_1 - x_2)^2 - 4x_1 x_2 \right] = 6 \left[\frac{(3a - 1)^2}{4} + 4 \right] \geq 24. \text{ Đẳng thức xảy ra khi}$$

$$3a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } \min P = 24.$$

Ví dụ 14: Giả sử phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có 2 nghiệm lớn hơn 1.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 - a - 2b}{b - a + 1} \geq \frac{2\sqrt{b}}{1 + \sqrt{b}}.$

Lời giải:

Theo định lý Vi et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = b \end{cases}$. Bất đẳng thức cần chứng minh có

dạng: $\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{1+\sqrt{x_1x_2}}$. Hay $\frac{x_1}{1+x_2} + 1 + \frac{x_2}{1+x_1} + 1 \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{1+\sqrt{x_1x_2}} + 2$

$(x_1 + x_2 + 1) \left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \right) \geq \frac{2(1+2\sqrt{x_1x_2})}{1+\sqrt{x_1x_2}}$. Theo bất đẳng thức Cô si ta

có: $x_1 + x_2 + 1 \geq 2\sqrt{x_1x_2} + 1$. Để chứng minh (*) ta quy về chứng minh:

$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \geq \frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}}$ với $x_1, x_2 > 1$. Quy đồng và rút gọn bất đẳng thức

trên tương đương với $(\sqrt{x_1x_2} - 1)(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$ (Điều này là hiển nhiên đúng). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^2 = 4b$.

Ví dụ 15: Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 3]$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{18a^2 - 9ab + b^2}{9a^2 - 3ab + ac}$$

Lời giải:

Vì phương trình bậc 2 có 2 nghiệm nên $a \neq 0$. Biểu thức Q có dạng đẳng

cấp bậc 2 ta chia cả tử và mẫu của Q cho a^2 thì $Q = \frac{18 - 9\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{9 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}}$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy: } Q = \frac{18 - 9\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{9 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{18 + 9(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2}$$

* Ta GTLN của Q : Ta đánh giá $(x_1 + x_2)^2$ qua $x_1 x_2$ với điều kiện $x_1, x_2 \in [0; 3]$.

$$\text{Giả sử } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 \leq x_1 x_2 \\ x_2^2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \leq 9 + 3x_1 x_2$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{18 + 9(x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 + 9}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2} = 3.$$

Ta cũng có thể đánh giá theo cách:

$$0 \leq x_1, x_2 \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1(x_1 - 3) \leq 0 \\ x_2(x_2 - 3) \leq 0 \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 3(x_1 + x_2) \\ x_1 x_2 + 9 \geq 3(x_1 + x_2) \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 x_2 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \leq 3x_1 x_2 + 9. \text{ Suy ra}$$

$$Q = \frac{18 + 9(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2} \leq \frac{18 + 9(x_1 + x_2) + 9 + 3x_1 x_2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2} = 3. \text{ Đẳng thức}$$

$$\text{xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 3 \\ x_1 = 0; x_2 = 3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -\frac{b}{a} = 6 \\ \frac{c}{a} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -\frac{b}{a} = 3 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } Q - 2 = \frac{3(x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2} \geq 0 \Rightarrow Q \geq 2. \text{ Đẳng thức xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow b = c = 0. \text{ Vậy GTLN của } Q \text{ là } 3 \text{ và GTNN của } Q \text{ là } 2.$$

Ví dụ 16: Cho phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, trong đó a, b, c là các số nguyên và $a > 0$, có hai nghiệm phân biệt trong khoảng $(0;1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của a .

Giải: Gọi $x_1, x_2 \in (0;1)$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình đã cho

$\Rightarrow f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. Vì a, b, c là các số nguyên và

$a > 0 \Rightarrow f(0) = c = ax_1x_2, f(1) = a + b + c = a(1-x_1)(1-x_2)$ là các số nguyên dương.

Áp dụng BĐT Cauchy

ta có: $x_1(1-x_1) \leq \frac{1}{4}; x_2(1-x_2) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow x_1x_2(1-x_1)(1-x_2) < \frac{1}{16}$ (2) (Vì

do $x_1 \neq x_2$ nên không có đẳng thức). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{a^2}{16} > 1 \Rightarrow a^2 > 16$

$\Rightarrow a \geq 5$ (a là số nguyên dương). Xét đa thức $f(x) = 5x(x-1)+1$, ta thấy $f(x)$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy giá trị nhỏ nhất của a bằng 5.

Ví dụ 17: Chứng minh: $a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$ là số chính phương

với mọi số tự nhiên lẻ.

Lời giải:

Ta có $a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]^2$.

Xét dãy $S_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, ta chứng minh b_n là một số nguyên.

Xét $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$ suy ra x_1, x_2 là hai nghiệm

của phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$.

Ta có $S_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} = (x_1^n + x_2^n)(x_1 + x_2) - x_1x_2(x_1^{n-1} + x_2^{n-1})$ hay
 $S_{n+1} = S_n - S_{n-1}$. Ta có $S_1 = 1, S_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3, S_3 = S_2 - S_1 = 2$. Từ đó bằng phép quy nạp ta dễ dàng chứng minh được S_n là số nguyên. Suy ra $a_n = (S_n)^2$ là số chính phương.

CÁC BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

Kiến thức cần nhớ: Khi cần biện luận số giao điểm của một đường thẳng (d) và Parabol $(P): y = ax^2$ ta cần chú ý:

a) Nếu đường thẳng (d) là $y = m$ (song song với trục Ox) ta có thể dựa vào đồ thị để biện luận hoặc biện luận dựa vào $ax^2 = m$.

b) Nếu đường thẳng $(d): y = mx + n$ ta thường xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$ từ đó ta xét số giao điểm dựa trên số nghiệm của phương trình $ax^2 - mx - n = 0$ bằng cách xét dấu của Δ .

Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (P) tại hai điểm phân biệt A, B thì $A(x_1; mx_1 + n), B(x_2; mx_2 + n)$ khi đó ta có:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(m^2 + 1)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]}$. Mọi câu hỏi liên quan đến nghiệm x_1, x_2 ta đều quy về định lý Viet.

Chú ý: Đường thẳng (d) có hệ số góc a đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ thì có dạng: $y = a(x - x_0) + y_0$

Ví dụ 1) Tìm phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0;1)$ và cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt M và N sao cho $MN = 2\sqrt{10}$.

(Trích đề thi THPT chuyên Ngoại Ngữ - ĐHQGHN năm học 2000-2001).

Lời giải:

Đường thẳng (d) qua I với hệ số góc a có dạng: $y = ax + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$x^2 = ax + 1 \Leftrightarrow x^2 - ax - 1 = 0$ (1). Vì $\Delta = a^2 + 4 > 0$ với mọi a , (1) luôn có hai nghiệm phân biệt nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ hay $M(x_1; ax_1 + 1), N(x_2; ax_2 + 1)$. Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = -1$.

$$\begin{aligned} MN = 2\sqrt{10} &\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + 1 - ax_1 - 1)^2 = 40 \\ &\Leftrightarrow (a^2 + 1)(x_2 - x_1)^2 = 40 \Leftrightarrow (a^2 + 1)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 40 \\ &\Leftrightarrow (a^2 + 1)(a^2 + 4) = 40 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng

$$(d): y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1.$$

- Với $m = 1$, xác định tọa độ giao điểm A, B và (d) và (P) .
- Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$. (Trích đề tuyển sinh lớp 10 – thành phố Hà Nội năm 2014).

Lời giải:

- Với $m = 1$ ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3 \text{ (do } a + b + c = 0 \text{)}$$

Ta có $y(-1) = \frac{1}{2}; y(3) = \frac{9}{2}$. Vậy tọa độ các giao điểm là $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và

$$B\left(3; \frac{9}{2}\right).$$

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$\frac{1}{2}x^2 = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2 = 0 \quad (*)$$

Để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt x_1, x_2 thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Khi đó } \Delta' = m^2 - m^2 + 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

Cách 1:

$$\begin{aligned} \text{Khi } m > -1 \text{ ta có: } |x_1 - x_2| = 2 &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - 2m - 2) = 4 \Leftrightarrow 8m = -4 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\text{Khi } m > -1 \text{ ta có: } |x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a'} \right| = 2\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{2m+2}$$

Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$2\sqrt{2m+2} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m+2} = 2 \Leftrightarrow 2m+2 = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = -\frac{1}{2}x^2$, điểm $M(m; 0)$ với m là tham số khác 0 và điểm $I(0; -2)$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm M, I . Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với độ dài đoạn $AB > 4$.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng $(d): y = \frac{2}{m}x - 2$. Phương trình hoành độ giao

điểm của đường thẳng (d) và Parabol là: $-\frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{m}x - 2$

$\Leftrightarrow mx^2 + 4x - 4m = 0$. Ta có $\Delta' = 4 + 4m^2 > 0, \forall m$ suy ra (d) luôn cắt (P)

tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1; \frac{-x_1^2}{2}\right), B\left(x_2; \frac{-x_2^2}{2}\right)$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] \left[1 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2\right]$$

Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-4}{m}, x_1x_2 = -4$.

Vậy $AB^2 = \left(\frac{16}{m^2} + 16\right) \left(1 + \frac{4}{m^2}\right) > 16$ nên $AB > 4$.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình

$y = \frac{-x^2}{2}$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $I(0; -2)$ và có hệ số góc k .

- Viết phương trình đường thẳng (d) . Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi k thay đổi.
- Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK vuông tại I .

Trích đề thi THPT chuyên Ngoại Ngữ - ĐHQGHN năm học 2006-2007

Lời giải:

- Đường thẳng $(d): y = kx - 2$

Xét phương trình $\frac{-x^2}{2} = kx - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2kx - 4 = 0$ (1). Ta

có: $\Delta' = k^2 + 4 > 0$ với mọi k , suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt.

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

- Giả sử (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Suy ra $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì $H(x_1; 0), K(x_2; 0)$. Khi đó

$IH^2 = x_1^2 + 4, IK^2 = x_2^2 + 4, KH^2 = (x_1 - x_2)^2$. Theo định lý Viet thì $x_1x_2 = -4$ nên $IH^2 + IK^2 = x_1^2 + x_2^2 + 8 = KH^2$. Vậy tam giác IHK vuông tại I .

Ví dụ 4: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 4$.

- a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi x_1, x_2 là hoành độ của các điểm A, B . Tìm giá trị

$$\text{lớn nhất của } Q = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2}.$$

- b) Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng 8.

Lời giải:

a). Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$x^2 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$. Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0$, với mọi m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng (d) luôn cắt

(P) tại hai điểm phân biệt. Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$ ta có

$$Q = \frac{2m + 7}{m^2 + 8}.$$

(dùng phương pháp miền giá trị hàm số- Xem thêm phần ứng

dụng trong bài toán GTLN, GTNN) ta dễ tìm được giá trị lớn nhất của Q là

1 và GTNN của Q là $-\frac{1}{8}$ đạt được khi $m = 1$ và $m = -8$.

b) Để ý rằng đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $I(0; 4)$ nằm trên trục tung. Ngoài ra nếu gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì $x_1 x_2 = -4 < 0$ nên hai giao điểm A, B nằm về hai phía trục tung. Giả sử $x_1 < 0 < x_2$ thì ta có:

$$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2}AH.OI + \frac{1}{2}BK.OI \text{ với } H, K \text{ lần lượt là hình chiếu}$$

vuông góc của điểm A, B trên trục Oy . Ta có

$$OI = 4, AH = |x_1| = -x_1, BK = |x_2| = x_2. \text{ Suy ra } S_{OAB} = 2(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow S_{OAB}^2 = 4(x_1 - x_2)^2 = 4[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]. \text{ Theo định lý Viet ta có:}$$

$$x_1 + x_2 = m, x_1 x_2 = -4. \text{ Thay vào ta có: } S_{OAB}^2 = 4(m^2 + 16) = 64 \Leftrightarrow m = 0.$$

Nếu thay điều kiện $S = 8$ thành diện tích tam giác OAB nhỏ nhất ta cũng có kết quả như trên. Vì $m^2 \geq 0 \Rightarrow S^2 \geq 4(m^2 + 16) \geq 64$.

Ví dụ 5) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng

$(d): 2x - y - a^2 = 0$ và parabol $(P): y = ax^2$ ($a > 0$).

- Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Chứng minh rằng A và B nằm bên phải trục tung.
- Gọi x_A, x_B là hoành độ của A và B . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{4}{x_A + x_B} + \frac{1}{x_A \cdot x_B}$. (Trích Đề thi vòng 1 THPT chuyên – TP

Hà Nội năm học 2005-2006)

Lời giải:

- Xét phương trình $ax^2 = 2x - a^2 \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a^2 = 0$ (1)

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow a < 1$. Kết hợp với điều kiện ta có $0 < a < 1$ khi đó (1) có hai nghiệm dương nên A, B nằm ở bên phải trục Oy .

- Theo định lý Vi et ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = \frac{2}{a} > 0 \\ x_A \cdot x_B = a > 0 \end{cases} \text{ Ta có: } T = 2a + \frac{1}{a} \text{ theo bất đẳng thức Cô si cho 2 số}$$

dương ta có: $2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2}$. Vậy $\min T = 2\sqrt{2}$ khi $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 6) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 1$.

- Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị m .
- Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là các giao điểm của (d) và (P) . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = (y_1 - 1)(y_2 - 1)$.

(Trích đề TS lớp 10 Trường THPT chuyên ĐH sư phạm Hà Nội năm 2009)

Lời giải:

- Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và Parabol là:

$$x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0 \quad (1)$$

$\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m nên (1) có hai nghiệm phân biệt, suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

b) Theo định lý Viet, ta có: $x_1 + x_2 = m; x_1 x_2 = -1$

$$M = (y_1 - 1)(y_2 - 1) = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 - (x_1 + x_2)^2 + 1 = -m^2 \leq 0$$

Vậy $\max M = 0$ khi $m = 0$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1) Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 - m - 8 = 0$ có nghiệm $x = 2$.

Tìm các giá trị của m và tìm nghiệm còn lại của phương trình.

2) Cho phương trình $x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt

b) Gọi các nghiệm của phương trình là x_1, x_2 . Không tính giá trị của

x_1, x_2 , hãy tính các giá trị của biểu thức sau:

$$A = x_1^2 + x_2^2$$

$$B = x_1^3 + x_2^3$$

$$C = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1}$$

3) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m+2)x + 1 + m^2 = 0$, m là tham số.

a) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Tính giá trị của biểu thức P sau theo m :

$$P = \frac{2x_1 x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 x_2 + 1)}. \text{ Từ đó tìm các giá trị của } m \text{ để } P \text{ đạt giá}$$

trị lớn nhất và tìm các giá trị của m để P đạt giá trị nhỏ nhất.

4) Cho phương trình $x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm gấp đôi nghiệm còn lại.

- 5) Cho phương trình $x^2 - 2x + m = 0$, m là tham số. tìm điều kiện của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.
- 6) Cho phương trình $x^2 - 2mx + (5m - 4) = 0$, với m là tham số. Xác định các giá trị của m để phương trình có:
- Nghiệm bằng 0.
 - Hai nghiệm phân biệt trái dấu.
 - Hai nghiệm phân biệt cùng dương.
- 7) Cho phương trình $x^2 - x + 3m = 0$, với m là tham số. Xác định các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.
- 8) Cho các phương trình $x^2 + ax + b = 0$ (1); $x^2 + cx + d = 0$ (2), trong đó các hệ số a, b, c, d đều khác 0. Biết a, b là nghiệm của phương trình (2) và c, d là nghiệm của phương trình (1). Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$.
- 9)
- Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $ax_1 + bx_2 + c = 0$ Chứng minh rằng $ac(a + c - 3b) + b^3 = 0$.
 - Giả sử p, q là hai số nguyên dương khác nhau. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm $x^2 + px + q = 0; x^2 + qx + p = 0$.
- 10) Tìm các số a, b thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:
- Hai phương trình $x^2 + ax + 11 = 0$ và $x^2 + bx + 7 = 0$ có nghiệm chung;
 - $|a| + |b|$ bé nhất.
- 11)

- a) Cho các số a, b, c thỏa mãn $a > 0, bc = 4a^2, 2a + b + c = abc$. Chứng minh rằng $a \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$.
- b) Cho a, b, c là ba số khác nhau và $c \neq 0$. Chứng minh rằng nếu các phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ và $x^2 + bx + ac = 0$ có đúng một nghiệm chung thì các nghiệm còn lại của chúng là nghiệm của phương trình $x^2 + cx + ab = 0$.

12)

- a) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), biết rằng phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm. chứng minh rằng phương trình $af^2(x) + bf(x) + c = x$ vô nghiệm.
- b) Cho các số a_1, a_2, b_1, b_2 sao cho các phương trình sau vô nghiệm:
 $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ và $x^2 + a_2x + b_2 = 0$. Hỏi phương trình
 $x^2 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)x + \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = 0$ có nghiệm hay không? Vì sao?

13) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (x là ẩn số)

- a) Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .
- b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để biểu thức

$$M = \frac{-24}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$$
 đạt giá trị nhỏ nhất.

14) Cho phương trình $x^2 + 2(m-2)x - m^2 = 0$, với m là tham số.

- 1) Giải phương trình khi $m = 0$.
- 2) Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với $x_1 < x_2$, tìm tất cả các nghiệm của m sao cho $|x_1| - |x_2| = 6$.

15) Cho phương trình $x^2 - 2x - 3m^2 = 0$, với m là tham số

- 1) Giải phương trình khi $m = 1$.
- 2) Tìm tất các các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm
 $x_1, x_2 \neq 0$ và thỏa điều kiện $\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} = \frac{8}{3}$.

16) Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (m là tham số).

- a) Giải phương trình khi $m = 2$.
- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:
 $x_1^2 + x_2^2 = 3x_1x_2 - 1$.

17) Cho phương trình: $x^2 + 2(m+1)x - 2m^4 + m^2 = 0$ (m là tham số).

- a) Giải phương trình khi $m = 1$.
- b) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

18) Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (m là tham số)

- a) Giải phương trình với $m = 2$.
- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn
 $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

19) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = mx - 3$ tham số m và parabol $(P): y = x^2$.

- a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1; 0)$.
- b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

20) Cho phương trình: $x^2 + x + m - 5 = 0$ (1) (m là tham số, x là ẩn)

- 1) Giải phương trình (1) với $m = 4$.

- 2) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ thỏa mãn:

$$\frac{6-m-x_1}{x_2} + \frac{6-m-x_2}{x_1} = \frac{10}{3}.$$

- 21) Cho phương trình: $x^2 - 2x + m + 3 = 0$ (m là tham số).

- 1) Tìm m để phương trình có nghiệm $x = 3$. Tìm nghiệm còn lại.
- 2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

- 22) Chứng minh rằng phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và biểu thức $M = x_1(1-x_2) + x_2(1-x_1)$ không phụ thuộc vào m .

- 23) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3m + 2 = 0$ (1) (m là tham số).

- 1) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
- 2) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 12$.

- 24) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -\frac{2}{3}(m+1)x + \frac{1}{3}$ (m là tham số).

- 1) Chứng minh rằng mỗi giá trị của m thì (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- 2) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm (P) và (d) , đặt $f(x) = x^3 + (m+1)x^2 - x$.

Chứng minh rằng: $f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^3$. (Trích đề thi vào lớp 10 trường chuyên ĐHSP Hà Nội 2013)

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1) Vì $x = 2$ là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$4 - 2(2m + 1) + m^2 - m - 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ hoặc } m = 6.$$

Với $m = -1$ ta có phương trình: $x^2 + x - 6 = 0$. Phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 2$, nghiệm còn lại là $x = -3$ (vì tích hai nghiệm bằng (-6))

Với $m = 6$, ta có phương trình $x^2 - 13x + 22 = 0$, phương trình đã cho có một nghiệm $x = 2$, nghiệm còn lại là $x = 11$ (vì tích hai nghiệm bằng 22)

2) Xét $\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (-\sqrt{2}) = 3 + 4\sqrt{2} > 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

Chú ý: Có thể nhận xét $ac < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu

b) Áp dụng định lý Vi ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\sqrt{3} \\ x_1 \cdot x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-\sqrt{3})^2 - 2(-\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{2})(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} - 3\sqrt{6}$$

$$C = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{x_1 + x_2 - 2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = \frac{-\sqrt{3} - 2}{-\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}$$

3) a) Ta có $\Delta = (-m)^2 - 4(m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$

phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$. Theo hệ

thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$. Khi đó $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$

Ta có $P = \frac{2m + 1}{m^2 + 2} = \frac{m^2 + 2 - (m - 1)^2}{m^2 + 2} = 1 - \frac{(m - 1)^2}{m^2 + 2} \leq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $m = 1$ nên giá trị lớn nhất $\max P = 1$. Tương tự ta có giá trị nhỏ nhất

$\min P = -\frac{1}{2}$, đạt được khi $m = -2$. (Xem thêm phần phương pháp miền giá trị hàm số)

4)

Cách 1: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow [-(2m+1)^2] - (4m^2 + 4m - 3) = 4 > 0, \forall m$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m . Gọi hai nghiệm của phương trình là

x_1, x_2 . Theo hệ thức Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(2m+1) & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 4m^2 + 4m - 3 & (2) \end{cases}$$

Có thể giả sử $x_1 = 2x_2$ (3). Khi đó từ (1) và (3) có
$$\begin{cases} x_2 = \frac{2(2m+1)}{3} \\ x_1 = \frac{4(2m+1)}{3} \end{cases}$$
. Thay

vào (2) ta có phương trình $8 \cdot \frac{(2m+1)^2}{9} = 4m^2 + 4m - 3 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 35 = 0$

Giải phương trình ta được $m = \frac{5}{2}$ hoặc $m = -\frac{7}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Cách 2: Từ yêu cầu đề bài suy ra $x_1 = 2x_2$ hoặc $x_2 = 2x_1$,

tức là: $(x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 0 \Leftrightarrow 9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2 = 0$

áp dụng hệ thức Viet ta được phương trình $4m^2 + 4m - 35 = 0$.

5)

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

Theo hệ thức Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(1) \\ x_1 \cdot x_2 = m(2) \end{cases}$. Ta có $x_1 + 2x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - 2x_2$

(3). Từ (1) và (3) ta có được $\begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$. Thay vào (2) ta có được $m = -3$

thỏa mãn điều kiện

6)

a) Phương trình có nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow 5m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{5}$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (5m - 4) < 0 \Leftrightarrow m < \frac{4}{5}$$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - (5m - 4) > 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 4) > 0 \Leftrightarrow m > 4 \text{ hoặc } m < 1.$$

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = 5m - 4 \end{cases}$

Hai nghiệm của phương trình cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ 5m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{4}{5}$

Kết hợp với điều kiện ta có $\frac{4}{5} < m < 1$ hoặc $m > 4$.

7) Cách 1. Đặt $x - 1 = t$, ta có

$$x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1 \Leftrightarrow t_1 < 0 < t_2$$

Phương trình ẩn x là $x^2 - x + 3m = 0$ được đưa về phương trình ẩn t :

$(t + 1)^2 - (t + 1) + 3m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 3m = 0$. Phương trình ẩn t phải có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3m < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Vậy $m < 0$

Cách 2: Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 12m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{12}$. Khi đó theo hệ thức Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = 3m \end{cases} \quad (1). \text{ Hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn}$$

$$x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 - 1 \text{ và } x_2 - 1 \text{ trái dấu}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \quad (2). \text{ Thay (1) vào (2) ta có:}$$

$$3m - 1 + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $m < 0$ là các giá trị cần tìm.

Chú ý:

Nếu hai nghiệm $x_1, x_2 < 1$ thì phương trình ẩn t có hai nghiệm đều là số âm.

Nếu hai nghiệm $x_1, x_2 > 1$ thì phương trình ẩn t có hai nghiệm đều là số dương.

8) Giải:

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $a + b = -c; ab = d; c + d = -a; cd = b$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} c + d = -a \\ a + b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a - d \\ a + b = -c \end{cases} \Rightarrow b = d$$

Kết hợp với $ab = d$ và $cd = b$ suy ra $a = 1, c = 1$

Do $a + b = -c$ và $c + d = -a$ suy ra $b = -2, d = -2$

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 = 10$.

9)

a) Vì $a \neq 0$ nên

$$ac(a+c-3b)+b^3=ac^2+a^2c+b^3-3abc=a^3\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-3\frac{bc}{a^2}\right](*) . \text{ Theo}$$

hệ thức Viet, ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}; x_1x_2=\frac{c}{a}$. Khi đó (*) thành:

$$\begin{aligned} & a^3\left[x_1^2x_2^2+x_1x_2-(x_1+x_2)^3+3x_1x_2(x_1+x_2)\right] \\ &= a^3\left[x_1^2x_2^2+x_1x_2-(x_1^3+x_2^3)\right]=a^3(x_1^2-x_2)(x_2^2-x_1) \\ &\Rightarrow ac(a+c-3b)+b^3=a^3(x_1^2-x_2)(x_2^2-x_1) \end{aligned}$$

Mà theo giả thiết ta có $ax_1^2+bx_2+c=0$ và $ax_2+bx_2+c=0(a \neq 0)$

Suy ra $bx_2+c=-ax_2^2=-ax_1 \Rightarrow x_2^2-x_1=0$. Do đó $ac(a+c-3b)+b^3=0$

b) Vì p, q nguyên dương khác nhau nên xảy ra hai trường hợp là
 $p > q$ hoặc $p < q$.

Nếu $p > q$ suy ra $p \geq q+1$. Khi đó $\Delta = p^2 - 4q \geq (q+1)^2 - 4q = (q-1)^2 \geq 0$.

Vậy trong trường hợp này phương trình $x^2 + px + q = 0$ có nghiệm.

Tương tự trường hợp $p < q$ thì phương trình $x^2 + qx + p = 0$ có nghiệm (đpcm).

10)

a) Theo điều kiện đầu bài thì ta gọi x_0 là nghiệm chung hai phương trình, ta có:

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 11 = 0 \\ x_0^2 + bx_0 + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_0^2 + (a+b)x_0 + 18 = 0$$

Do đó phương trình $2x^2 + (a+b)x + 18 = 0$ có nghiệm (*)

Khi đó $\Delta = (a+b)^2 - 144 \geq 0$ hay $|a+b| \geq 12$.

Mặt khác, ta có $|a| + |b| \geq |a+b| \geq 12$. Vậy $|a| + |b|$ bé nhất bằng 12 khi và chỉ khi a và b cùng dấu.

Với $a+b=-12$, thay vào (*) ta được: $2x^2-12x+18=0$. Phương trình trên có nghiệm kép $x=3$.

Thay $x=3$ vào các phương trình đã cho ta được $a=-\frac{20}{3}; b=-\frac{16}{3}$.

Với $a+b=12$ thay vào (*) ta được: $2x^2+12x+18=0$. Phương trình trên có nghiệm kép $x=-3$

Thay $x=-3$ vào phương trình ta được: $a=\frac{20}{3}; b=\frac{16}{3}$. Vậy các cặp số sau

thỏa mãn điều kiện bài toán: $(a;b)=\left(-\frac{20}{3};-\frac{16}{3}\right),\left(\frac{20}{3};\frac{16}{3}\right)$.

11)

a) Từ giả thiết ta có: $bc=4a^2$ và

$b+c=abc-2a=4a^3-2a=2a(2a^2-1)$. Suy ra b,c là nghiệm của phương trình $x^2-(4a^3-2a)x+4a^2=0$. Khi đó

$$\Delta'=a^2(2a^2-1)^2-4a^2\geq 0 \Leftrightarrow (2a^2-1)^2\geq 4 \Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (vì } a>0\text{)}.$$

b) Giả sử x_0 là nghiệm chung, tức là $\begin{cases} x_0^2+ax_0+bc=0 \\ x_0^2+bx_0+ca=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (a-b)x_0-c(a-b) \Leftrightarrow (a-b)(x_0-c)=0$. Vì $a\neq b$ nên $x_0=c$. Khi đó

ta có: $c^2+bc+ca=0 \Leftrightarrow c(a+b+c)=0$, Do $c\neq 0$ nên

$a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$. Mặt khác theo định lý Viet, phương trình

$x^2+ax+bc=0$ còn có nghiệm $x=b$; phương trình $x^2+bx+ac=0$ còn có nghiệm $x=a$. Theo định lý đảo của định lý Viet, hai số a và b là nghiệm của phương trình: $x^2-(a+b)x+ab=0$ hay $x^2+cx+ab=0$ (đpcm).

12)

a) Vì phương trình $f(x)=x$ vô nghiệm, nên suy ra $f(x)>x$ hoặc

$$f(x)<x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Khi đó $af^2(x)+bf(x)+c>f(x)>x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc

$af^2(x)+bf(x)+c<f(x)<x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tức là phương trình

$af^2(x)+bf(x)+c=x$ vô nghiệm.

b) Từ giả thiết suy ra $a_1^2 - 4b_1 < 0$ và $a_2^2 - 4b_2 < 0$. Do đó

$$x^2 + a_1x + b_1 = \left(x + \frac{a_1}{2}\right)^2 - \frac{a_1^2 - 4b_1}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ . và}$$

$$x^2 + a_2x + b_2 = \left(x + \frac{a_2}{2}\right)^2 - \frac{a_2^2 - 4b_2}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên}$$

$$x^2 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)x + \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = \frac{1}{2}[(x^2 + a_1x + b_1) + (x^2 + a_2x + b_2)] > 0 \text{ .}$$

Do vậy phương trình $x^2 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)x + \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = 0$ vô nghiệm.

13)

a) $\Delta' = m^2 - m + 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ với mọi m Vậy phương trình luôn

có hai nghiệm với mọi m .

b) Theo hệ thức Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2m; x_1x_2 = m - 2$

$$M = \frac{-24}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2} = \frac{-24}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_2} = \frac{-24}{(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2}$$

$$= \frac{-24}{(2m)^2 - 8(m - 2)} = \frac{-24}{4m^2 - 8m + 16} = \frac{-6}{(m - 1)^2 + 3} \geq -2 \text{ . Dấu “=” xảy ra khi}$$

$m = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $M = -2$ khi $m = 1$.

14)

1) Khi $m = 0$ phương trình thành: $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.

2) $\Delta' = (m - 2)^2 + m^2 = 2m^2 - 4m + 4 = 2(m^2 - 2m + 1) + 2$

$= 2(m - 1)^2 + 2 > 0, \forall m$. Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với

mọi m . Ta có $S = x_1 + x_2 = 2(2 - m); P = x_1x_2 = -m^2 \leq 0$

Ta có $|x_1| - |x_2| = 6 \Rightarrow x_1^2 - 2|x_1x_2| + x_2^2 = 36$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_2 = 36 \Leftrightarrow 4(2 - m)^2 = 36 \Leftrightarrow (m - 2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \vee m = 5 \text{ .}$$

15)

1) Khi $m=1$ phương trình thành: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ (do $a-b+c=0$).

2) Với $x_1, x_2 \neq 0$ ta có: $\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3(x_1^2 - x_2^2) = 8x_1x_2$

$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 8x_1x_2$. Ta có $a.c = -3m^2 \leq 0$ nên $\Delta \geq 0, \forall m$

Khi $\Delta \geq 0$, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2$ và $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -3m^2 \leq 0$

Phương trình có hai nghiệm $\neq 0$ do đó $m \neq 0 \Rightarrow \Delta > 0$ và $x_1x_2 < 0$. Giả sử $x_1 > x_2$

Với $a=1 \Rightarrow x_1 = -b' - \sqrt{\Delta'}$ và $x_2 = -b' + \sqrt{\Delta'} \Rightarrow x_1 - x_2 = 2\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{1+3m^2}$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 3.2(-2\sqrt{1+3m^2}) = 8.(-3m^2)$ và $m \neq 0$

$$\Leftrightarrow 4m^4 - 3m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

16)

a) Khi $m=2$ ta có phương trình:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}. \text{ Phương trình có tập nghiệm là: } S = \{1; 3\}$$

b) Ta có $\Delta' = m^2 - (m^2 - m + 1) = m - 1$.

Để phương trình bậc hai đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì

$\Delta' > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$. Khi đó theo hệ thức Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - m + 1 \end{cases}. \text{ Theo bài ra:}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 3x_1x_2 - 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3x_1x_2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 + 1 = 0 \Rightarrow 4m^2 - 5(m^2 - m + 1) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện $m > 1$ ta có $m = 4$ thỏa mãn bài toán.

17)

a) Khi $m = 1$ phương trình thành: $x^2 + 4x - 1 = 0$ có $\Delta' = 2^2 + 1 = 5 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -2 - \sqrt{5}; x_2 = -2 + \sqrt{5}$

b) Ta có: $\Delta' = 2m^4 + 2m + 1 = 2m^4 - 2m^2 + \frac{1}{2} + 2m^2 + 2m + \frac{1}{2}$

$$= 2\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall m. \text{ Nếu } \Delta' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ m + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad (\text{vô}$$

nghiệm). Do đó $\Delta' > 0, \forall m$. Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

18)

a) Với $m = 2$, ta có phương trình: $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$.

b) Xét phương trình (1) ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 4) = 2m - 3$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$. Theo hệ thức Viet:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 4 \end{cases}. \text{ Theo giả thiết: } x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 x_2 \leq 3m^2 + 16 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \leq 3m^2 + 16 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - (m^2 + 4) \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 8m \leq 16 \Leftrightarrow m \leq 2. \text{ Vậy } \frac{3}{2} \leq m \leq 2.$$

19)

1) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1; 0)$ nên có: $0 = m \cdot 1 - 3 \Rightarrow m = 3$

2) Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (P) :

$x^2 - mx + 3 = 0$. Có $\Delta = m^2 - 12$, nên (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 khi

$$\Delta = m^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 12 \Leftrightarrow |m| > 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{3} \\ m < -2\sqrt{3} \end{cases}. \text{ Áp dụng hệ thức}$$

Viết ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases}$. Theo bài ra ta có:

$$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4 \\ \Leftrightarrow m^2 - 4.3 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4 \text{ (TM)}. \text{ Vậy } m = \pm 4 \text{ là giá trị cần tìm.}$$

20)

1) Thay $m = 4$ vào phương trình ta có: $x^2 + x - 1 = 0$

Có $\Delta = 1^2 + 4.1.1 = 5$. Vậy phương trình có 2 nghiệm:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

2) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì:

$$\Delta = 1 - 4(m - 5) > 0 \Rightarrow m < \frac{21}{4}. \text{ Theo hệ thức Viet ta có: } x_1 + x_2 = -1 \quad (1);$$

$$x_1 x_2 = m - 5 \quad (2)$$

Xét:

$$\frac{6 - m - x_1}{x_2} + \frac{6 - m - x_2}{x_1} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{(6 - m)x_1 + (6 - m)x_2 - x_1^2 - x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(6 - m)(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{10}{3}$$

$$\text{Thay (1),(2) vào ta có: } \frac{-1(6 - m) - 1 + 2(m - 5)}{m - 5} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{3m - 17}{m - 5} = \frac{10}{3}$$

$\Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn). Vậy với $m = -1$ thì bài toán thỏa mãn.

21)

1) Phương trình có nghiệm $x = 3$

$$\Leftrightarrow 3^2 = 2.3 + m + 3 = 0 \Leftrightarrow 6 + m = 0 \Leftrightarrow m = -6$$

Ta có: $x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow 3 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -1$. Vậy nghiệm còn lại là $x = -1$.

$$2) \Delta' = 1 - (m + 3) = -m - 2$$

Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow -m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m < -2$

$$\text{Khi đó: } x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \right] = 8$$

Áp dụng hệ thức Viet ta được: $2[2^2 - 3(m+3)] = 8 \Leftrightarrow 2(4 - 3m - 9) = 8$
 $\Leftrightarrow 8 - 6m - 18 = 8 \Leftrightarrow -6m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn). Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

22)

a) Phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 4m - 3 = 0$ (1)

có $\Delta' = (m+1)^2 - (4m-3) = m^2 + 2m + 1 - 4m + 3$
 $= (m^2 - 2m + 1) + 3 = (m-1)^2 + 3 > 0$ với mọi m . Suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b). Gọi hai nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2

Theo hệ thức Viet ta có: $S = x_1 + x_2 = 2m + 2 \Rightarrow m = \frac{S-2}{2}$ (2)

$$P = x_1 x_2 = 4m - 3 \Rightarrow m = \frac{P+3}{4} \Rightarrow \frac{S-2}{2} = \frac{P+3}{4} \Rightarrow 2S - 4 = P + 3.$$

$$\Rightarrow 2S - P = 7 \Rightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 - x_1 x_2 = 7$$

23) Phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 2m^2 + 2m + 1 = 0$

Có $\Delta' = (m+1)^2 - 2m^2 - 2m - 1 = m^2 + 2m + 1 - 2m^2 - 2m - 1 = -m^2$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Theo định lý Vi et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m^2 + 2m + 1 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 12 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 12 = 0$$

Hay $4(m+1)^2 - 2(2m^2 + 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

24)

a) Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{-2(m+1)}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x^2 + 2(m+1)x - 1 = 10 \end{cases} \quad (1)$$

(1) Có hệ số a và c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt mọi m nên (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m .

$$\text{b) Theo hệ thức Viet: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(m+1)}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = \frac{-3(x_1+x_2)}{2} \\ 3x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(x_1) - f(x_2) &= x_1^3 - x_2^3 + (m+1)(x_1^2 - x_2^2) - x_1 + x_2 \\ \Rightarrow 2(f(x_1) - f(x_2)) &= 2x_1^3 - 2x_2^3 - 3(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_2^2) - 2x_1 + 2x_2 \\ &= -x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_2 - x_1) - 2(x_1 - x_2) = -x_1^3 + x_2^3 + (x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2) \\ &= -(x_1^3 - x_2^3 - 3x_1 x_2 (x_1 - x_2)) = \left[(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2) \right] = -(x_1 - x_2)^3. \end{aligned}$$

$$\text{Nên } f(x_1) - f(x_2) = \frac{-1}{2}(x_1 - x_2)^3.$$

Chủ đề 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Kiến thức cần nhớ

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

+ Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình nếu nó là nghiệm chung của cả hai phương trình đó.

+ Hệ có thể có nghiệm duy nhất, vô nghiệm hoặc vô số nghiệm tùy theo vị trí tương đối của hai đường thẳng biểu diễn nghiệm của hai phương trình.

+ Phương pháp giải hệ: Chúng ta thường dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số để khử bớt một ẩn, từ đó sẽ giải được hệ.

Một số ví dụ

Ví dụ 1. Xác định các hệ số a, b của hàm số $y = ax + b$ để:

- 1) Đồ thị của nó đi qua hai điểm $A(1; 3), B(2; 4)$
- 2) Đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 .

Lời giải:

- 1) Thay tọa độ các điểm A, B vào phương trình của đường thẳng ta được:

$$\begin{cases} 3 = a + b \\ 4 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ 4 = 2a + 3 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - a = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } a = 1, b = 2.$$

- 2) Tương tự phần (1) ta có hệ: $\begin{cases} -4 = a \cdot 0 + b \\ 0 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ 2a = -b + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$

Vậy $a = 2, b = -4$.

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -1 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y-1} = 3 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y-1} = -1 \end{cases} & \text{c)} \quad \begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 2 \\ 2\sqrt{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 1 \end{cases} \end{array}$$

Lời giải:

a) Đặt $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}$. Theo đề bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ 3u - 2v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ 3u - 2(3 - u) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u = 5 \\ v = 3 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra: $x = \frac{1}{u} = 1; y = \frac{1}{v} = \frac{1}{2}$.

b) Đặt $u = \frac{x}{x+1}; v = \frac{y}{y-1}$. Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u - v = 3 \\ u + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 + v \\ 3 + v + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 + v \\ 4v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{y}{y-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 2 \\ y = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$

c). Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}, x - y > 0$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \\ b = \frac{1}{\sqrt{x-y}} \end{cases}$ ta có hệ phương trình mới

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x-y}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=1; y=0$

Ví dụ 3. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=5 & (1) \\ mx-y=4 & (2) \end{cases}$

- Giải hệ phương trình với $m=2$.
- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) trong đó x, y trái dấu.
- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x=|y|$.

Giải:

a) Với $m=2$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 2(2y+5)-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 3y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

b) Từ phương trình (1) ta có $x=2y+5$. Thay $x=2y+5$ vào phương trình (2) ta được: $m(2y+5)-y=4 \Leftrightarrow (2m-1).y=4-5m$ (3)

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất. Điều này tương đương với: $2m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$. Từ đó ta được: $y = \frac{4-5m}{2m-1}$;

$x=5+2y = \frac{3}{2m-1}$. Ta có: $x.y = \frac{3(4-5m)}{(2m-1)^2}$. Do đó

$x, y < 0 \Leftrightarrow 4-5m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{4}{5}$ (thỏa mãn điều kiện)

c)Ta có: $x = |y| \Leftrightarrow \frac{3}{2m-1} = \left| \frac{4-5m}{2m-1} \right| \quad (4)$

Từ (4) suy ra $2m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$. Với điều kiện $m > \frac{1}{2}$ ta có:

$$(4) \Leftrightarrow |4-5m| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-5m = 3 \\ 4-5m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{5} (l) \\ m = \frac{7}{5} \end{cases}. \text{ Vậy } m = \frac{7}{5}.$$

Ví dụ 4. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1 & (2) \end{cases}$

- Không giải hệ phương trình trên, cho biết với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?
- Giải và biện luận hệ phương trình trên theo m .
- Tìm số nguyên m sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) mà x, y đều là số nguyên.
- Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất (x, y) thì điểm $M(x, y)$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định.
- Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Từ phương trình (2) ta có $y = 3m - 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được: $x + m(3m - 1 - mx) = m + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 3m^2 - 2m - 1 \quad (3)$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, tức là $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Ta cũng có thể lập luận theo cách khác: Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ

khi: $\frac{1}{m} \neq \frac{m}{1} \Leftrightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

b) Từ phương trình (2) ta có $y = 3m - 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được: $x + m(3m - 1 - mx) = m + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1).x = 3m^2 - 2m - 1$ (3)

Trường hợp 1: $m \neq \pm 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \frac{3m^2 - 2m - 1}{m^2 - 1} = \frac{(m-1)(3m+1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{3m+1}{m+1} \\ y = 3m - 1 - m \cdot \frac{3m+1}{m+1} = \frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $m = 1$. Khi đó phương trình (3) thành: $0.x = 0$.

Vậy hệ có vô số nghiệm dạng $(x; 2 - x), x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 3: $m = -1$ khi đó phương trình (3) thành: $0.x = 4$

(3) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm.

c) Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq \pm 1$.

Ta có: $\begin{cases} x = \frac{3m+1}{m+1} = 3 - \frac{2}{m+1} \\ y = \frac{m-1}{m+1} = 1 - \frac{2}{m+1} \end{cases}$. Vậy x, y nguyên khi và chỉ khi $\frac{2}{m+1}$

nguyên. Do đó $m+1$ chỉ có thể là $-2; -1; 1; 2$. Vậy $m = -3; -2; 0$ (thỏa mãn) hoặc $m = 1$ (loại)

Vậy m nhận các giá trị là $-3; -2; 0$.

d) Khi hệ có nghiệm duy nhất (x, y) ta có: $x - y = 3 - \frac{2}{m+1} - \left(1 - \frac{2}{m+1}\right) = 2$

Vậy điểm $M(x; y)$ luôn chạy trên đường thẳng cố định có phương trình $y = x - 2$.

e) Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ theo (d) ta có: $y = x - 2$. Do đó:

$$xy = x(x - 2) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$x = 1 \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{m+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{m+1} = 2 \Leftrightarrow m+1 = 1 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy với $m = 0$ thì x, y đạt giá trị nhỏ nhất.

Chú ý: Ta cũng có thể tìm quan hệ $x - y = 2$ theo cách khác: Khi hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất } (m \neq \pm 1) \text{ lấy}$$

phương trình (2) trừ đi phương trình (1) của hệ ta thu được:

$$(m-1)x - (m-1)y = 2(m-1) \Rightarrow x - y = 2$$

Ví dụ 5. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi

m hệ phương trình luôn có nghiệm. Gọi $(x_0; y_0)$ là một cặp nghiệm của phương trình: Chứng minh: $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán - ĐHSP Hà Nội 2015).

Lời giải:

Từ phương trình (2) của hệ phương trình ta có $y = 3m + 1 - mx$ thay vào phương trình (1) của hệ ta có: $(m^2 + 1)x = 3m^2 - 3m + 2$. Do $m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m nên phương trình này luôn có nghiệm duy nhất x_0 . Suy ra hệ luôn có nghiệm với mọi m .

Gọi $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ: Từ hệ phương trình ta có:

$$\begin{cases} x_0 - 2 = m(y_0 - 4) \\ y_0 - 1 = m(3 - x_0) \end{cases} \text{ Nhân cả hai vế phương trình thứ nhất với } (3 - x_0),$$

phương trình thứ hai với $(y_0 - 4)$ rồi trừ hai phương trình cho nhau ta được:

$$(3 - x_0)(x_0 - 2) - (y_0 - 4)(y_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0.$$

Ngoài ra ta cũng có thể giải theo cách khác như sau:

$(d) : x - my + 4m - 2 = 0, (d') : mx + y - 3m - 1 = 0$. Ta dễ dàng chứng minh được đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định: $A(2; 4)$ và đường thẳng (d') luôn đi qua điểm cố định: $B(3; 1)$. Mặt khác ta cũng dễ chứng minh đường thẳng (d) và đường thẳng (d') vuông góc với nhau nên hai đường thẳng này luôn cắt nhau. Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng thì tam giác MAB vuông tại M . Gọi I là trung điểm của AB thì

$$I\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right), AB = \sqrt{10} \text{ suy ra}$$

$$IM = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow 4IM^2 = AB^2 \Leftrightarrow 4\left[\left(x_0 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{5}{2}\right)^2\right] = 10.$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0.$$

Ví dụ 6. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = 3 & (1) \\ mx + y = 2m + 1 & (2) \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất (x, y) , hãy tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau đây:

a) $P = x^2 + 3y^2$ (1).

b) $Q = x^4 + y^4$ (2).

Lời giải:

Từ phương trình (2) ta suy ra: $y = 2m + 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x + m(2m + 1 - mx) = 3 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2m^2 + m - 3 \quad (3).$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, điều đó xảy ra khi và chỉ khi: $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x = \frac{2m^2 + m - 3}{m^2 - 1} = \frac{(m-1)(2m+3)}{(m-1)(m+1)} = \frac{2m+3}{m+1} = 2 + \frac{1}{m+1} \\ y = 2m+1 - m \cdot \frac{2m+3}{m+1} = \frac{1}{m+1} \end{cases}.$$

a) Ta có: $P = x^2 + 3(x-2)^2 = 4x^2 - 12x + 12 = (2x-3)^2 + 3 \geq 3$

$$P = 3 \text{ khi } x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2m+3}{m+1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4m+6 = 3m+3 \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3.

b) Ta có: $Q = x^4 + y^4 = x^4 + (x-2)^4$

đặt $t = x-1$.

Khi đó

$$Q = (t+1)^4 + (t-1)^4 = t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 + t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 2t^4 + 12t^2 + 2 \geq 2$$

$$Q = 2 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow \frac{2m+3}{m+1} = 1 \Leftrightarrow 2m+3 = m+1 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng 2.

Ví dụ 7): Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + (m+1)y = 1 \\ (m+1)x - my = 8m+3 \end{cases}$. Chứng minh hệ

luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ và tìm GTLN của biểu thức

$$P = \left| x^2 + y^2 + (4 + 2\sqrt{3})y \right|.$$

Lời giải:

Xét hai đường thẳng

$$(d_1): mx + (m+1)y - 1 = 0; (d_2): (m+1)x - my - 8m + 3 = 0.$$

+ Nếu $m = 0$ thì $(d_1): y - 1 = 0$ và $(d_2): x - 5 = 0$ suy ra (d_1) luôn vuông góc với (d_2) .

+ Nếu $m = -1$ thì $(d_1): x + 1 = 0$ và $(d_2): y + 11 = 0$ suy ra (d_1) luôn vuông góc với (d_2) .

+ Nếu $m \neq \{0; -1\}$ thì đường thẳng $(d_1), (d_2)$ lần lượt có hệ số góc là:

$$a_1 = -\frac{m}{m+1}, a_2 = \frac{m+1}{m} \text{ suy ra } a_1 \cdot a_2 = -1 \text{ do đó } (d_1) \perp (d_2).$$

Tóm lại với mọi m thì hai đường thẳng (d_1) luôn vuông góc với (d_2) . Nên hai đường thẳng luôn vuông góc với nhau.

Xét hai đường thẳng

$(d_1): mx + (m+1)y - 1 = 0; (d_2): (m+1)x - my - 8m + 3 = 0$ luôn vuông góc với nhau nên nó cắt nhau, suy ra hệ có nghiệm duy nhất. Gọi giao điểm là $I(x; y)$, đường thẳng (d_1) đi qua $A(-1; 1)$ cố định, đường thẳng (d_2) luôn đi qua $B(3; -5)$ cố định suy ra I thuộc đường tròn đường kính AB . Gọi

$$M(1; -2) \text{ là trung điểm } AB \text{ thì } MI = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 13 (*).$$

$$P = \left| (x-1)^2 + (y+2)^2 + 2x + 2\sqrt{3}y - 5 \right| = \left| 8 + 2(x + \sqrt{3}y) \right| = \left| 8 + 2[x-1 + \sqrt{3}(y+2) + 1 - 2\sqrt{3}] \right| \text{ hay } P = \left| 10 - 4\sqrt{3} + 2[x-1 + \sqrt{3}(y+2)] \right|$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\left[x-1 + \sqrt{3}(y+2) \right]^2 \leq (1+3) \left[(x-1)^2 + (y+2)^2 \right] = 52 \Rightarrow x-1 + \sqrt{3}(y+2) \leq \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ Vậy } P \leq 10 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{13}.$$

Chủ đề 4: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn ẩn số (nêu đơn vị của ẩn và đặt điều kiện nếu cần).

Bước 2: Tính các đại lượng trong bài toán theo giả thiết và ẩn số, từ đó lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 3: Giải phương trình hoặc hệ phương trình vừa lập.

Bước 4: Đối chiếu với điều kiện và trả lời.

CÁC BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG:

Kiến thức cần nhớ:

+ Quãng đường = Vận tốc . Thời gian.

+ Vận tốc tỷ lệ nghịch với thời gian và tỷ lệ thuận với quãng đường đi được:

+ Nếu hai xe đi ngược chiều nhau khi gặp nhau lần đầu: Thời gian hai xe đi được là như nhau, Tổng quãng đường 2 xe đi được bằng đúng quãng đường cần đi của 2 xe.

+ Nếu hai phương tiện chuyển động cùng chiều từ hai địa điểm khác nhau là A và B, xe từ A chuyển động nhanh hơn xe từ B thì khi xe từ A đuổi kịp xe từ B ta luôn có hiệu quãng đường đi được của xe từ A với quãng đường đi được của xe từ B bằng quãng đường AB

+ Đối với (Ca nô, tàu xuồng) chuyển động trên dòng nước: Ta cần chú ý:

Khi đi xuôi dòng: Vận tốc ca nô= Vận tốc riêng + Vận tốc dòng nước.

Khi đi ngược dòng: Vận tốc ca nô= Vận tốc riêng - Vận tốc dòng nước.

Vận tốc của dòng nước là vận tốc của một vật trôi tự nhiên theo dòng nước (Vận tốc riêng của vật đó bằng 0)

Ví dụ 1. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24km. Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4km/h so với lúc đi, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

Lời giải:

Đổi 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h, $x > 0$). Thời gian xe đi từ A đến B là $\frac{24}{x}$ (giờ).

Đi từ B về A, người đó đi với vận tốc $x + 4$ (km/h). Thời gian xe đi từ B về A là $\frac{24}{x+4}$ (giờ)

Do thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút nên ta có phương trình:

$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = \frac{1}{2}$. Giải phương trình:

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 192 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -16 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có vận tốc của xe đạp đi từ A đến B là 12km/h.

Ví dụ 2: Trên quãng đường AB dài 210 m, tại cùng một thời điểm một xe máy khởi hành từ A đến B và một ô tô khởi hành từ B đi về A . Sau khi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A . Biết rằng vận tốc ô tô và xe máy không thay đổi trong suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

(Trích đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội năm 2013).

Lời giải:

Gọi vận tốc xe máy là x (km/h) Điều kiện $x > 0$.

Gọi vận tốc ô tô là y (k/h). Điều kiện $y > 0$.

Thời gian xe máy dự định đi từ A đến B là: $\frac{210}{x}$ giờ. Thời gian ô tô dự

định đi từ B đến A là: $\frac{210}{y}$ giờ.

Quãng đường xe máy đi được kể từ khi gặp ô tô cho đến khi đến B là : $4x$ (km).

Quãng đường ô tô đi được kể từ khi gặp xe máy cho đến khi đến A là :

$$\frac{9}{4}y \text{ (km). Theo giả thiết ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{210}{x} - \frac{210}{y} = 4 - \frac{9}{4} \\ \frac{9}{4}x + 2y = 210 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{210}{x} - \frac{210}{y} = \frac{7}{4} \\ 4x + \frac{9}{4}y = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x + \frac{9}{4}y}{x} - \frac{4x + \frac{9}{4}y}{y} = \frac{7}{4} \\ 4x + \frac{9}{4}y = 210 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad \text{Từ phương trình (1)}$$

$$\text{ta suy ra } \frac{4x + \frac{9}{4}y}{x} - \frac{4x + \frac{9}{4}y}{y} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{9y}{4x} - \frac{4x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y. \text{ Thay vào}$$

$$\text{phương trình (2) ta thu được: } \frac{12}{4}y + \frac{9}{4}y = 210 \Leftrightarrow y = 40, x = 30.$$

Vậy vận tốc xe máy là 30 km/h. Vận tốc ô tô là 40 km/h.

Ví dụ 3: Quãng đường AB dài 120 km. lúc 7h sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ xe bị hỏng phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10km/h. Biết xe máy đến B lúc 1h40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc

xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau cũng không đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ? (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường chuyên ĐHSPT Hà Nội năm 2015)

Lời giải:

Gọi vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là x (km/h), điều kiện: $x > 10$

Thì vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là $x - 10$ (km/h)

Thời gian trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là $\frac{90}{x}$ (h)

Thời gian đi trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là: $\frac{30}{x-10}$ (h)

Thời gian đi cả hai quãng đường là: 11 giờ 40 phút – 7 giờ - 10 phút = $\frac{9}{2}$ giờ.

Nên ta có phương trình: $\frac{90}{x} + \frac{30}{x-10} = \frac{9}{2}$

Giải phương trình ta được $x = 30$ thỏa mãn điều kiện

Do đó thời gian đi trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu $\frac{90}{30} = 3$ (giờ)

Vậy xe hỏng lúc 10 giờ.

Ví dụ 4. Một ca nô xuôi dòng 78km và ngược dòng 44 km mất 5 giờ với vận tốc dự định. nếu ca nô xuôi 13 km và ngược dòng 11 km với cùng vận tốc dự định đó thì mất 1 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.

Lời giải:

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x > 0$)

Và vận tốc của dòng nước là y (km/h, $y > 0$)

Ca nô xuôi dòng đi với vận tốc $x + y$ (km/h). Đi đoạn đường 78 km nên thời gian đi là $\frac{78}{x+y}$ (giờ).

Ca nô đi ngược dòng với vận tốc $x - y$ (km/h). Đi đoạn đường 44 km nên thời gian đi là $\frac{44}{x-y}$ (giờ).

Tổng thời gian xuôi dòng là 78 km và ngược dòng là 44 km mất 5 giờ nên ta có phương trình: $\frac{78}{x+y} + \frac{44}{x-y} = 5$ (1).

Ca nô xuôi dòng 13 km và ngược dòng 11 km nên ta có phương trình:

$$\frac{13}{x+y} + \frac{11}{x-y} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{78}{x+y} + \frac{44}{x-y} = 5 \\ \frac{13}{x+y} + \frac{11}{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=26 \\ x-y=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ y=2 \end{cases}.$$

Đổi chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h và vận tốc của dòng nước là 2 km/h.

Ví dụ 3. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc dự định trong một thời gian dự định. Nếu ô tô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì thời gian rút ngắn được 2 giờ so với dự định. Nếu ô tô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian đi tăng hơn 3 giờ so với dự định. tính độ dài quãng đường AB.

Lời giải:

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h, $x > 3$) và thời gian dự định đi từ A đến B là y (giờ, $y > 2$). Khi đó quãng đường từ A đến B dài xy (km).

Nếu ô tô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì vận tốc lúc đó là $x + 3$ (km/h). khi đó thời gian đi sẽ là: $y - 2$ (giờ).

Ta có phương trình: $(x + 3)(y - 2) = xy$ (1)

Tương tự nếu ô tô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian tăng 3 giờ nên ta có phương trình: $(x - 3)(y + 3) = xy$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + 3)(y - 2) = xy \\ (x - 3)(y + 3) = xy \end{cases}$$

Giải hệ ta được $\begin{cases} x = 15 \\ y = 12 \end{cases}$. Đối chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vậy quãng đường AB dài là: $12 \cdot 15 = 180$ (km).

Chú ý rằng: Trong bài toán này, vì các dữ kiện liên quan trực tiếp đến sự thay đổi của vận tốc và thời gian nên ta chọn là ẩn và giải như trên. Nếu đặt độ dài quãng đường và vận tốc dự định là ẩn số ta cũng lập được hệ hai phương trình hai ẩn và vẫn giải được bài toán, tuy nhiên sẽ khó khăn hơn.

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN NĂNG SUẤT LAO ĐỘNG, CÔNG VIỆC.

Ta cần chú ý: Khi giải các bài toán liên quan đến năng suất thì liên hệ giữa ba đại lượng là: **Khối lượng công việc = năng suất lao động $\times$ thời gian**

Ví dụ 1) Một công ty dự định điều động một số xe để chuyển 180 tấn hàng từ cảng Dung Quất vào thành phố Hồ Chí Minh, mỗi xe chở khối lượng hàng như nhau. Nhưng do nhu cầu thực tế cần chuyển thêm 28 tấn hàng nên công ty đó phải điều động thêm một xe cùng loại và mỗi xe bây giờ phải chở thêm 1 tấn hàng mới đáp ứng được nhu cầu đặt ra. Hỏi theo dự định công ty đó cần điều động bao nhiêu xe? Biết rằng mỗi xe không chở quá 15 tấn. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 Tỉnh Quảng Ngãi 2015)

Lời giải:

Gọi x (tấn) là số tấn hàng trong thực tế mà mỗi xe phải chở (ĐK:
 $1 < x \leq 15, x \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow x-1$ là số tấn hàng mỗi xe phải chở theo dự định.

Số xe thực tế phải điều động là: $\frac{180+28}{x}$ (xe)

Số xe cần điều động theo dự định là: $\frac{180}{x-1}$ (xe)

Vì vậy số xe thực tế nhiều hơn dự định là 1 xe nên ta có phương trình:

$$\frac{208}{x} - \frac{180}{x-1} = 1 \Leftrightarrow 208x - 208 - 180x = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 29x + 208 = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 13$ (tm) hoặc $x_2 = 16$ (loại vì $x \leq 15$)

Vậy theo dự định cần điều động: $\frac{180}{x-1} = \frac{180}{13-1} = 15$ (xe).

Ví dụ 2) Hưởng ứng phong trào “Vì biển đảo Trường Sa” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 Tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2015)

Lời giải: Gọi x (chiếc) là số tàu dự định của đội ($x \in \mathbb{N}^*, x < 140$)

Số tàu tham gia vận chuyển là $x+1$ (chiếc)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định $\frac{280}{x}$ (tấn)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc thực tế $\frac{286}{x+1}$ (tấn)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{280}{x} - \frac{286}{x+1} = 2$

$$\Leftrightarrow 280(x+1) - 286x = 2x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 140 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -14(I) \end{cases}. \text{ Vậy}$$

đội tàu lúc đầu có 10 chiếc tàu.

Ví dụ 3. Một công nhân theo kế hoạch phải làm 85 sản phẩm trong một khoảng thời gian dự định. Nhưng do yêu cầu đột xuất, người công nhân đó phải làm 96 sản phẩm. Do người công nhân mỗi giờ đã làm tăng thêm 3 sản phẩm nên người đó đã hoàn thành công việc sớm hơn so với thời gian dự định là 20 phút. Tính xem theo dự định mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm, biết rằng mỗi giờ chỉ làm được không quá 20 sản phẩm.

Lời giải:

Gọi số sản phẩm công nhân dự định làm trong một giờ là x ($0 < x \leq 20$).

Thời gian dự kiến người đó làm xong 85 sản phẩm là $\frac{85}{x}$ (giờ)

Thực tế mỗi giờ làm tăng thêm 3 sản phẩm nên số sản phẩm làm được mỗi giờ là $x + 3$.

Do đó 96 sản phẩm được làm trong $\frac{96}{x+3}$ (giờ)

Thời gian hoàn thành công việc thực tế sớm hơn so với dự định là 20 phút $= \frac{1}{3}$ giờ nên ta có phương trình $\frac{85}{x} - \frac{96}{x+3} = \frac{1}{3}$

Giải phương trình ta được $x = 15$ hoặc $x = -51$

Đối chiếu điều kiện ta loại nghiệm $x = -51$.

Theo dự định mỗi giờ người đó phải làm 15 sản phẩm.

Ví dụ 4. Để hoàn thành một công việc, nếu hai tổ cùng làm chung thì hết 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một tiếp tục làm và đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ sẽ hoàn thành công việc này trong thời gian bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi thời gian tổ một làm riêng và hoàn thành công việc là x (giờ, $x > 6$).

Gọi thời gian tổ hai làm riêng và hoàn thành công việc là y (giờ, $y > 6$)

Mỗi giờ tổ một làm được $\frac{1}{x}$ (phần công việc)

Mỗi giờ tổ hai làm được $\frac{1}{y}$ (phần công việc)

Biết hai tổ làm chung trong 6 giờ thì hoàn thành được công việc nên ta có phương trình:

$\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1$. (1). Thực tế để hoàn thành công việc này thì tổ hai làm trong 2

giờ và tổ một làm trong $2 + 10 = 12$ (giờ), ta có phương trình: $\frac{12}{x} + \frac{2}{y} = 1$

(2). Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1 \\ \frac{12}{x} + \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$
. Giải hệ ta được:

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases}$$
 thỏa mãn điều kiện.

Nếu làm riêng thì tổ một hoàn thành công việc trong 15 giờ và tổ hai hoàn thành công việc trong 10 giờ.

Nhận xét: Bài toán hai người (hai đội) cùng làm chung – làm riêng để hoàn thành một công việc có hai đại lượng chính là năng suất của mỗi người (hoặc mỗi đội). Ta coi toàn bộ khối lượng công việc cần thực hiện là 1.

+ Năng suất công việc = 1: thời gian.

+ Năng suất chung = Tổng năng suất riêng.

Chú ý:

Trong bài toán trên có thể thay điều kiện $x > 6$ bằng điều kiện $x > 10$ hoặc thậm chí là $x > 12$.

Có thể thay phương trình (2) bằng phương trình $\frac{10}{x} = \frac{2}{3}$ vì phần việc còn lại riêng tổ một làm là $\frac{2}{3}$. Ta có ngay $x = 15$.

Ví dụ 5. Cho một bể cạn (không có nước). Nếu hai vòi nước cùng được mở để chảy vào bể này thì sẽ đầy bể sau 4 giờ 48 phút. Nếu mở riêng từng vòi chảy vào bể thì thời gian vòi một chảy đầy bể sẽ ít hơn thời gian vòi hai chảy đầy bể là 4 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

Lời giải

$$\text{Đổi } 4 \text{ giờ } 48 \text{ phút} = 4\frac{4}{5} \text{ giờ} = \frac{24}{5} \text{ giờ}$$

Cách 1: Lập hệ phương trình

Gọi thời gian vòi một chảy một mình đầy bể trong x (giờ, $x > \frac{24}{5}$)

Gọi thời gian vòi hai chảy một mình đầy bể trong y (giờ, $y > \frac{24}{5}$)

Biết hai vòi cùng chảy thì sau $\frac{24}{5}$ giờ thì đầy bể nên ta có phương trình:

$$\frac{24}{5x} + \frac{24}{5y} = 1 \quad (1)$$

Nếu chảy riêng thì vòi một chảy đầy bể nhanh hơn vòi hai là 4 giờ nên ta có phương trình:

$$x = y - 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{24}{5x} + \frac{24}{5y} = 1 \\ x = y - 4 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $\begin{cases} x=8 \\ y=12 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với một chảy một mình trong 8 giờ thì đầy bể và với hai chảy một mình trong 12 giờ thì đầy bể.

Cách 2: Lập phương trình

Gọi thời gian với một chảy một mình đầy bể là x (giờ, $x > \frac{24}{5}$)

Khi đó trong một giờ với một chảy được $\frac{1}{x}$ (phần bể)

Với hai chảy một mình đầy bể trong $x+4$ (giờ) nên trong một giờ chảy được: $\frac{1}{x+4}$ (phần bể)

Tổng cộng trong một giờ hai với chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}$ (phần bể) (3)

Sau 4 giờ 48 phút $= \frac{24}{5}$ giờ hai với cùng chảy thì đầy bể nên trong một giờ chảy được $\frac{5}{24}$ (phần bể) (4)

Từ (3) và (4) ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{5}{24}$

Giải phương trình ta được $x = -\frac{12}{5}$ (loại) hoặc $x = 8$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian với một chảy một mình đầy bể là 8 giờ. Với hai chảy một mình đầy bể là $8+4=12$ (giờ).

Nhận xét: Ta có thể chuyển bài toán trên thành bài toán sau: “Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 4 giờ 48 phút. Nếu làm riêng để hoàn thành công việc này thì thời gian đội một ít hơn thời gian

đội hai là 4 giờ. Hỏi khi làm riêng thì mỗi đội hoàn thành công việc trong bao lâu?

Ví dụ 6. Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài lớn hơn chiều rộng là 7m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Lời giải:

Cách 1: Lập phương trình

Gọi chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là x ($m, x > 0$)

Chiều dài mảnh đất hình chữ nhật lớn hơn chiều rộng 7m nên chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là $x + 7$ (m)

Biết độ dài đường chéo là 13m nên theo định lý Pitago ta có phương trình:

$$x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$$

Giải phương trình ta được $x = 5$ hoặc $x = -12$. Đối chiếu với điều kiện ta có chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật là 5m và chiều dài mảnh đất đó là 12m.

Cách 2: Lập hệ phương trình

Gọi chiều dài của mảnh đất đó là x và chiều rộng của mảnh đất đó là y ($m, x > y > 0$)

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} y + 7 = x \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{cases}$. Giải hệ ta được $\begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \end{cases}$.

Đối chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn. Vậy chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật là 5m và chiều dài là 12m.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

1). Một ô tô tải đi từ A đến B với vận tốc 45km/h. sau 1 giờ 30 phút thì một xe con cũng xuất phát đi từ A đến B với vận tốc 60km/h và đến B cùng lúc với xe tải. Tính quãng đường AB.

2). Hai người đi xe đạp xuất phát cùng một lúc đi từ A đến B. vận tốc của họ hơn kém nhau 3km/h nên đến B sớm muộn hơn nhau 30 phút. Tính vận tốc của mỗi người, biết quãng đường AB dài 30km/h.

3). Hai tỉnh A,B cách nhau 180km/h. Cùng một lúc, ô tô đi từ A đến B và một xe máy đi từ B về A. Hai xe gặp nhau ở thị trấn C. Từ C đến B ô tô đi hết 2 giờ, còn từ C về A xe máy đi hết 4 giờ 30 phút. Tính vận tốc của ô tô và xe máy biết rằng trên đường AB hai xe đều chạy với vận tốc không đổi.

4). Trong một cuộc đua, ba tay đua mô tô đã khởi hành cùng một lúc. Mỗi giờ người thứ hai chạy chậm hơn người thứ nhất 15km và nhanh hơn người thứ ba 3 km. người thứ ba đến đích chậm hơn người thứ nhất 12 phút và sớm hơn người thứ ba 3 phút. Tính thời gian chạy hết quãng đường đua của các tay đua.

5). Một xe máy đi từ A đến B trong thời gian dự định. Nếu vận tốc tăng 20km/h thì đến sớm 1 giờ, nếu vận tốc giảm đi 10km/h thì đến muộn 1 giờ. Tính quãng đường AB.

6). Một ô tô đi từ A đến B. Cùng một lúc, một ô tô khác đi từ B đến A với vận tốc bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc ô tô thứ nhất. Sau 5 giờ chúng gặp nhau. Hỏi mỗi ô tô đi cả quãng đường AB mất bao lâu?

7). Hai bến sông A và B cách nhau 40km. cùng một lúc với ca nô xuôi từ bến A có một chiếc bè trôi từ bến A với vận tốc 3km/h. Sau khi đến bến B, ca nô quay trở về bến A ngay và gặp bè, khi đó bè đã trôi được 8km. tính vận tốc riêng của ca nô.

8) Hai bạn A và B cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 6 ngày. Hỏi nếu A làm một mình 3 ngày rồi nghỉ thì B hoàn thành nốt công việc trong thời gian bao lâu? Biết rằng nếu làm một mình xong công việc thì B làm lâu hơn A là 9 ngày.

9) Trong một kỳ thi, hai trường A,B có tổng cộng 350 học sinh dự thi. Kết quả là hai trường có tổng cộng 338 học sinh trúng tuyển. Tính ra thì trường A có 97% và trường B có 96% học sinh dự thi trúng tuyển. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu thí sinh dự thi?

10) Có hai loại quặng sắt. quặng loại A chứa 60% sắt, quặng loại B chứa 50% sắt. người ta trộn một lượng quặng loại A với một lượng quặng loại B thì được hỗn hợp chứa $\frac{8}{15}$ sắt. Nếu lấy tăng hơn lúc đầu là 10 tấn quặng loại A và lấy giảm hơn lúc đầu là 10 tấn quặng loại B thì được hỗn hợp quặng chứa $\frac{17}{30}$ sắt. Tính khối lượng quặng mỗi loại đem trộn lúc đầu.

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1). Lời giải:

Gọi độ dài quãng đường AB là x (đơn vị km, $x > 0$)

Thời gian ô tô tải đi từ A đến B là $\frac{x}{45}$ (giờ)

Thời gian xe con đi từ A đến B là $\frac{x}{60}$ (giờ)

Vì xe con xuất phát sau xe tải 1 giờ 30 phút = $\frac{3}{2}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{45} - \frac{x}{60} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{180} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 270 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy độ dài quãng đường AB là 270km.

2). Gọi vận tốc của người đi chậm là x (km / h), $x > 0$. Vận tốc của người đi nhanh là $x + 3$ (giờ). Vì người đi chậm đến muộn hơn 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ nên

$$\text{ta có phương trình: } \frac{30}{x} - \frac{30}{x+3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 60(x+3) - 60x = x^2 + 3x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-180) = 729 = 27^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 27$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3-27}{2} = -15 \\ x = \frac{-3+27}{2} = 12 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện suy ra chỉ có nghiệm $x = 12$ thỏa mãn.

Vậy vận tốc của người đi chậm là 12km/h, vận tốc của người đi nhanh là 15km/h.

3). Lời giải:

Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h), của xe máy là y (km/h) với $x, y > 0$.

Sau một thời gian, hai xe gặp nhau tại C, xe ô tô phải chạy tiếp hai giờ nữa thì tới B nên quãng đường CB dài $2x$ km, còn xe máy phải đi tiếp 4 giờ 30 phút hay 4,5 giờ mới tới A nên quãng đường CA dài 4,5y km. Do đó ta có phương trình: $2x + 4,5y = 180$

Ô tô chạy với vận tốc x km/h nên thời gian đi quãng đường AC là $\frac{4,5y}{x}$

giờ, xe máy đi với vận tốc y km/h thì thời gian đi quãng đường CB là $\frac{2x}{y}$

Vì hai xe khởi hành cùng một lúc và gặp nhau tại C nên tại lúc gặp nhau hai xe đã đi được một khoảng thời gian như nhau và ta có phương trình:

$$\frac{4,5y}{x} = \frac{2x}{y}$$

Vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 4,5y = 180 \\ \frac{4,5y}{x} = \frac{2x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4,5y = 180 \\ 9y^2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4,5 = 180 \\ 3y = 2x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 4,5y = 180 \\ 3y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15y}{2} = 180 \\ x = \frac{3y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 24 \\ x = 36 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện ta thấy các giá trị $x = 36, y = 24$ đều thỏa mãn.

Vậy vận tốc của ô tô là 36km/h, vận tốc của xe máy là 24km/h.

4). Lời giải:

Gọi vận tốc của người thứ hai là x (km/h), $x > 3$ thì vận tốc của người thứ nhất là $x + 15$ (km/h), vận tốc của người thứ ba là $x - 3$ (km/h)

Gọi chiều dài quãng đường là y (km, $y > 0$)

Thời gian người thứ hai đi hết đường đua là $\frac{y}{x}$ (giờ)

Thời gian người thứ nhất đi hết đường đua là $\frac{y}{x+15}$ (giờ)

Thời gian người thứ ba đi hết đường đua là $\frac{y}{x-3}$ (giờ)

Người thứ hai đi đến đích chậm hơn người thứ nhất là 12 phút $= \frac{1}{5}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5}$$

Vì $y > 0$ nên phương trình này tương đương với $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+15} = \frac{1}{5y}$ (1).

Người thứ hai đến đích sớm hơn người thứ ba là 3 phút $= \frac{1}{20}$ giờ nên ta có

$$\text{phương trình: } \frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}$$

Vì $y > 0$ nên phương trình này tương đương với $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{20y}$ (2).

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{1}{x} - \frac{1}{x+15} = 4 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{x(x+15)} = \frac{12}{x(x-3)} \Leftrightarrow 15(x-3) = 12(x+15) \Leftrightarrow 5(x-3) = 4(x+15) \Leftrightarrow x = 75$$

Nghiệm $x = 75$ thỏa mãn điều kiện, từ (1) ta có $y = 90$.

Vậy vận tốc của người thứ hai là 75km/h, vận tốc của người thứ nhất là 90km/h, vận tốc của người thứ ba là 72km/h.

5). Lời giải:

Để tính quãng đường AB ta tính đại lượng là vận tốc dự định và thời gian dự định.

Gọi vận tốc dự định là x giờ, thời gian dự định là y km/h ($x > 10, y > 1$).

Quãng đường AB dài là $x.y$ (km)

Nếu vận tốc tăng thêm 20km/h thì đến sớm 1 giờ, quãng đường được tính bằng công thức:

$$(x+20).(y-1) \text{ (km)}$$

Nếu giảm vận tốc đi 10km/h thì đến muộn 1 giờ, quãng đường đi được tính bằng công thức $(x-10).(y+1)$ (km)

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} (x+20)(y-1) = xy \\ (x-10)(y+1) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - x + 20y - 20 = xy \\ xy + x - 10y - 10 = xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 20y = 20 \\ x - 10y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 30 \\ x = 10y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 40 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện ta thấy giá trị $x = 40, y = 3$ thỏa mãn

Vậy vận tốc dự định là 40km/h, thời gian dự định là 3 giờ. Quãng đường AB dài là: $40 \cdot 3 = 120$ km.

6).. Lời giải:

Gọi thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là x giờ ($x > 5$).

Vận tốc xe ô tô thứ nhất là $\frac{AB}{x}$ (km/h)\

Vận tốc xe ô tô thứ hai là $\frac{2}{3} \cdot \frac{AB}{x}$ (km/h)

Sau 5 giờ hai xe gặp nhau, nghĩa là tổng quãng đường hai xe đi được bằng

quãng đường AB, ta có phương trình: $5 \cdot \frac{AB}{x} + 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{AB}{x} = AB$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \frac{1}{x} + \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{3} \cdot \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > 5)$$

Thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB là: $\frac{2AB}{3x} = \frac{3x}{2} = \frac{3 \cdot \frac{25}{3}}{2} = 12\frac{1}{2}$.

Vậy thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là $8\frac{1}{3}$ giờ, thời gian xe thứ hai đi hết quãng đường AB là 12 giờ 30 phút.

7). Lời giải:

Gọi vận tốc ca nô là x (km/h), $x > 3$. Vận tốc ca nô xuôi dòng là $x + 3$ (km/h)

Thời gian ca nô xuôi dòng từ A đến B là $\frac{40}{x+3}$ (giờ)

Vận tốc ca nô ngược dòng là $x - 3$ (km/h)

Quãng đường ca nô ngược dòng từ B đến địa điểm gặp bè là : $40 - 8 = 32$ km

Thời gian ca nô ngược dòng từ B đến địa điểm gặp bè là: $\frac{32}{x-3}$ (giờ)

Ta có phương trình: $\frac{40}{x+3} + \frac{32}{x-3} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{x+3} + \frac{4}{x-3} = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 15(x-3) + 12(x+3) = x^2 - 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 27x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 \\ x = 0 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện thì chỉ có nghiệm $x = 27$ thỏa mãn, suy ra vận tốc của ca nô là 27km/h.

8). Lời giải:

Gọi thời gian A,B làm riêng xong công việc lần lượt là x, y (ngày),
 $x, y > 0$.

Mỗi ngày đội A làm riêng được $\frac{1}{x}$ công việc.

Mỗi ngày đội B làm riêng được $\frac{1}{y}$ công việc.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} y-x=6 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=18 \end{cases}$$

Vì A làm 9 ngày xong nên 3 ngày làm được $\frac{1}{3}$ công việc.

Vì B làm 18 ngày xong nên 3 ngày B làm được $\frac{1}{18}$ công việc, số ngày làm xong $\frac{2}{3}$ công việc còn lại là $\frac{2}{3} : \frac{1}{18} = 12$ ngày.

9. Lời giải:

Gọi số thí sinh tham dự của trường A và trường B lần lượt là $x, y (x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 350)$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=350 \\ \frac{97}{100}x+\frac{96}{100}y=338 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=200 \\ y=150 \end{cases}$$

10. Lời giải:

Gọi khối lượng quặng đem trộn lúc đầu quặng loại A là x (tấn), quặng loại B là y (tấn), $x > 0, y > 10$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{60}{100}x+\frac{50}{100}y=\frac{8}{15}(x+y) \\ \frac{60}{100}(x+10)+\frac{50}{100}(y-10)=\frac{17}{30}(x+10+y-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=20 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Chủ đề 5: PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Để giải một phương trình bậc lớn hơn 3. Ta thường biến đổi phương trình đó về một trong các dạng đặc biệt đó là:

1. Phương pháp đưa về dạng tích: Tức là biến đổi phương trình:

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow f(x).g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Đưa về một phương trình tích ta thường dùng các cách sau:

Cách 1: Sử dụng các hằng đẳng thức đưa về dạng: $a^2 - b^2 = 0, a^3 - b^3 = 0, \dots$

Cách 2: Nhẩm nghiệm rồi chia đa thức: Nếu $x = a$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì ta luôn có sự phân tích: $f(x) = (x - a)g(x)$. Để dự đoán nghiệm ta dựa vào các chú ý sau:

Chú ý:

Cách 3: Sử dụng phương pháp hệ số bất định. Ta thường áp dụng cho phương trình bậc bốn.

Đặc biệt đối với phương trình bậc 4: Ta có thể sử dụng một trong các cách xử lý sau:

- Phương trình dạng: $x^4 = ax^2 + bx + c$

Phương pháp: Ta thêm bớt vào 2 vế một lượng: $2mx^2 + m^2$ khi đó phương trình trở thành: $(x^2 + m)^2 = (2m + a)x^2 + bx + c + m^2$

Ta mong muốn vế phải có dạng: $(Ax + B)^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + a > 0 \\ \Delta = b^2 - 4(2m + a)(c + m^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow m$$

- Phương trình dạng: $x^4 + ax^3 = bx^2 + cx + d$

Ta sẽ tạo ra ở vế phải một biểu thức bình phương dạng: $\left(x^2 + \frac{a}{2}x + m\right)^2$

Bằng cách khai triển biểu thức:

$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + m\right)^2 = x^4 + ax^3 + \left(2m + \frac{a^2}{4}\right)x^2 + amx + m^2$. Ta thấy cần thêm vào hai vế một lượng: $\left(2m + \frac{a^2}{4}\right)x^2 + amx + m^2$ khi đó phương trình trở thành:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + m\right)^2 = \left(2m + \frac{a^2}{4} + b\right)x^2 + (am + c)x + m^2 + d$$

$$\text{Bây giờ ta cần: } \begin{cases} 2m + \frac{a^2}{4} + b > 0 \\ \Delta_{VP} = (am + c)^2 - 4\left(2m + \frac{a^2}{4} + b\right)(m^2 + d) = 0 \end{cases} \Rightarrow m = ?$$

Ta sẽ phân tích để làm rõ cách giải các bài toán trên thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1)

Giải các phương trình:

- $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$.
- $x^4 - 22x^2 - 8x + 77 = 0$
- $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0$.
- $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3 = 0$.

Lời giải:

$$\text{a) } x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 10x^2 + x - 20$$

Ta thêm vào 2 vế phương trình một lượng: $2mx^2 + m^2$

Khi đó phương trình trở thành: $x^4 + 2mx^2 + m^2 = (10 + 2m)x^2 + x + m^2 - 20$

Ta có $\Delta_{VP} = 1 - 4(m^2 - 20)(10 + 2m) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{2}$. Ta viết lại phương trình thành:

$$x^4 - 9x^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{9}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 5)(x^2 + x - 4) = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ , và } x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

$$\text{b) } x^4 - 22x^2 - 8x + 77 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 22x^2 + 8x - 77$$

Ta thêm vào 2 vế phương trình một lượng: $2mx^2 + m^2$

Khi đó phương trình trở thành:
 $x^4 + 2mx^2 + m^2 = (22 + 2m)x^2 + 8x + m^2 - 77$.

Ta có $\Delta_{VP} = 1 - 4(22 + 2m)(m^2 - 77) = 0 \Leftrightarrow m = -9$.

Ta viết lại phương trình thành:

$$x^4 - 18x^2 + 81 = 4x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow (x^2 - 9)^2 - (2x + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 7)(x^2 - 2x - 11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \pm 2\sqrt{2} \\ x = 1 \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

c) Phương trình có dạng:

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^3 = -8x^2 - 2x + 1$$

Ta tạo ra vế trái dạng: $(x^2 - 3x + m)^2 = x^4 - 6x^3 + (9 + 2m)x^2 - 6mx + m^2$

Tức là thêm vào hai vế một lượng là: $(9+2m)x^2 - 6mx + m^2$ phương trình trở thành: $(x^2 - 3x + m)^2 = (2m+1)x^2 - (6m+2)x + m^2 + 1$. Ta cần

$\Delta'_{VP} = (3m+1) - (2m+1)(m^2+1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Phương trình trở thành:

$$(x^2 - 3x)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

d) Phương trình đã cho được viết lại như sau: $x^4 + 2x^3 = 5x^2 - 6x + 3$

Ta tạo ra phương trình: $(x^2 + x + m)^2 = (2m+6)x^2 + (2m-6)x + m^2 + 3$

Ta cần: $\begin{cases} 2m+6 > 0 \\ \Delta'_{VP} = (m-3)^2 - (2m+6)(m^2+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

Phương trình trở thành: $(x^2 + x - 1)^2 = (2x-2)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 3)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2)

a) Giải phương trình: $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$ (1).

b) Giải phương trình: $x^4 - 13x^2 + 18x - 5 = 0$

c) Giải phương trình: $2x^4 - 10x^3 + 11x^2 + x - 1 = 0$ (4)

Lời giải:

a) Ta có phương trình $\Leftrightarrow x^4 - (2x-3)^2 = 0$ (1.1)

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; x = 3. \text{ Vậy}$$

phương trình có hai nghiệm $x = 1; x = 3$

b) Phương trình $\Leftrightarrow (x^4 - 4x^2 + 4) - (9x^2 - 18x + 9) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - (3x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 5)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 5 = 0 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}; x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

c) Ta có phương trình

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)(x^2 - 3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 1 = 0 \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}.$$

2. Phương pháp đặt ẩn phụ:

Là phương pháp khá hữu hiệu đối với các bài toán đại số, trong giải phương trình bậc cao cũng vậy, người ta thường đặt ẩn phụ để chuyển phương trình bậc cao về phương trình bậc thấp hơn.

Một số dạng sau đây ta thường dùng đặt ẩn phụ.

Dạng 1: Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0 (a \neq 0)$ (1)

Với dạng này ta đặt $t = x^2, t \geq 0$ ta chuyển về phương trình: $at^2 + bt + c = 0$
(2)

Chú ý: Số nghiệm của phương trình (1) phụ thuộc vào số nghiệm không âm của (2)

Dạng 2: Phương trình đối xứng (hay phương trình hồi quy):

$ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm kbx + k^2a = 0 (k > 0)$. Với dạng này ta chia hai vế phương

trình cho $x^2 (x \neq 0)$ ta được: $a\left(x^2 + \frac{k^2}{x^2}\right) \pm b\left(x + \frac{k}{x}\right) + c = 0$. Đặt $t = x + \frac{k}{x}$

với $|t| \geq 2\sqrt{k}$ ta có: $x^2 + \frac{k^2}{x^2} = \left(x + \frac{k}{x}\right)^2 - 2k = t^2 - 2k$ thay vào ta được

phương trình: $a(t^2 - 2k) \pm bt + c = 0$

Dạng 3: Phương trình: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$, trong đó $a+b=c+d$

Phương trình $\Leftrightarrow [x^2 + (a+b)x + ab][x^2 + (c+d)x + cd] = e$.

Đặt $t = x^2 + (a+b)x$, ta có: $(t+ab)(t+cd) = e$

Dạng 4: Phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = ex^2$, trong đó $ab=cd$.

Với dạng này ta chia hai vế phương trình cho $x^2 (x \neq 0)$. Phương trình tương đương:

$$\left[x^2 + (a+b)x + ab\right]\left[x^2 + (c+d)x + cd\right] = ex^2 \Leftrightarrow \left[x + \frac{ab}{x} + a+b\right]\left[x + \frac{cd}{x} + c+d\right] = e$$

Đặt $t = x + \frac{ab}{x} = x + \frac{cd}{x}$. Ta có phương trình: $(t+a+b)(t+c+d) = e$

Dạng 5: Phương trình $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$. Đặt $x = t - \frac{a+b}{2}$ ta đưa về phương trình trùng phương

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

$$1) 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$2) (x+1)^4 + (x+3)^4 = 2$$

$$3) x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$$

4)

$$(x+2)(x-3)(x+4)(x-6) + 6x^2 = 0$$

Lời giải:

1) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0. \text{ Đặt}$$

$$t = x + \frac{1}{x}, (|t| \geq 2) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2. \text{ Ta}$$

$$\text{có: } 2(t^2 - 2) - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Với}$$

$$t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

2) Đặt $x = t - 2$ ta

$$\text{được: } (t-1)^4 + (t+1)^4 = 2 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -2$.

Chú ý: Với bài 2 ta có thể giải bằng cách khác như sau: Trước hết ta có BĐT:

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a+b}{4}\right)^4 \text{ với } a+b \geq 0.$$

Áp dụng BĐT này với: $a = -x-1, b = x+3 \Rightarrow VT \geq VP$. Đẳng thức xảy ra khi $x = -2$.

3) Ta có phương trình: $\Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 24$. Đặt $t = x^2 + 3x$. Ta được: $t(t+2) = 24 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow t = -6, t = 4$

* $t = -6 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 6 = 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

* $t = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -4$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1; x = -4$.

$$4) \text{ Phương trình } \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 12)(x^2 + x - 12) + 6x^2 = 0$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được:

$$\left(x - \frac{12}{x} - 4\right)\left(x - \frac{12}{x} + 1\right) + 6 = 0. \text{ Đặt } t = x - \frac{12}{x}, \text{ ta có:}$$

$$(t-4)(t+1) + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$* t = 1 \Leftrightarrow x - \frac{12}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$* t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{13}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm: $x = -3; x = 4; x = 1 \pm \sqrt{13}$

Ví dụ 2)

$$\text{a) Giải phương trình: } 3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x+1)^2 = 5(x^3 + 1)$$

- b) Giải phương trình: $x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 21x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$
- c) Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5) = 360$
- d) Giải phương trình: $(x^3 + 5x + 5)^3 + 5x^3 + 24x + 30 = 0$.

Lời giải:

- a) Vì $x = -1$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho $x^3 + 1$ ta được:

$$3 \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} - 2 \frac{x + 1}{x^2 - x + 1}. \text{ Đặt}$$

$$t = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \Rightarrow 3t - \frac{2}{t} = 5 \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2, t = -\frac{1}{3}$$

$$* t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$* t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 4 = 0 \text{ phương trình vô nghiệm}$$

b) Đây là phương trình bậc 6 và ta thấy các hệ số đối xứng do đó ta có thể áp dụng cách giải mà ta đã giải đối với phương trình bậc bốn có hệ số đối xứng.

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia 2 vế của phương trình cho x^3 ta được:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 21 = 0. \text{ Đặt } t = x + \frac{1}{x}, |t| \geq 2. \text{ Ta}$$

$$\text{có: } x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2; x^3 + \frac{1}{x^3} = t(t^2 - 3) \text{ nên phương trình trở}$$

$$\text{thành: } t(t^2 - 3) + 3(t^2 - 2) - 6t - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - 9t - 27 = 0 \Leftrightarrow (t+3)^2(t-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=-3 \end{cases}$$

$$* t=3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$* t=-3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ Vậy phương trình có bốn nghiệm}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}; x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{c) Phương trình } \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 360$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 6x, \text{ ta có phương trình: } (y+5)(y+8)(y+9) = 360$$

$$\Leftrightarrow y(y^2 + 22y + 157) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-6 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=0; x=-6$.

d) Ta có: $x^3 + 5x + 30 = 5(x^3 + 5x + 5) - x + 5$ nên phương trình tương đương

$(x^3 + 5x + 5)^3 + 5(x^3 + 24x + 30) = 0$. Đặt $u = x^3 + 5x + 5$. Ta được hệ:

$$\begin{cases} u^3 + 5u + 5 = x \\ x^3 + 5x + 5 = u \end{cases} \Rightarrow (u-x)(u^2 + ux + x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow u = x.$$

$\Leftrightarrow x^3 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Dạng 6:

a) Phương trình: $\frac{ax}{x^2+mx+p} + \frac{bx}{x^2+nx+p} = c$ với $abc \neq 0$.

Phương pháp giải: Nhận xét $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Với $x \neq 0$, ta chia cả tử số và mẫu số cho x thì thu được:

$$\frac{a}{x+m+\frac{p}{x}} + \frac{b}{x+n+\frac{p}{x}} = c. \text{ Đặt } t = x + \frac{k}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{k^2}{x^2} + 2k \geq 2|k| + 2k.$$

Thay vào phương trình để quy về phương trình bậc 2 theo t .

b) Phương trình: $x^2 + \left(\frac{ax}{x+a}\right)^2 = b$ với $a \neq 0, x \neq -a$.

Phương pháp: Dựa vào hằng đẳng thức $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$. Ta viết lại phương trình thành:

$$\left(x - \frac{ax}{x+a}\right)^2 + 2a \cdot \frac{x^2}{x+a} = b \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+a}\right)^2 + 2a \frac{x^2}{x+a} - b = 0. \text{ Đặt } t = \frac{x^2}{x+a} \text{ quy về phương trình bậc 2.}$$

Ví dụ 1) Giải các phương trình:

a) $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$. (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2013).

b) $\frac{12x}{x^2+4x+2} - \frac{3x}{x^2+2x+2} = 1$. (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Đại học Vinh 2010).

c) $\frac{x^2}{(x+2)^2} = 3x^2 - 6x - 3$ (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSP Hà Nội 2008).

d) $x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0$

Giải:

a) Điều kiện $x \neq -5$

Ta viết lại phương trình thành

$$\left(x - \frac{5x}{x+5}\right)^2 + \frac{10x^2}{x+5} - 11 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2 + \frac{10x^2}{x+5} - 11 = 0. \text{ Đặt } t = \frac{x^2}{x+5} \text{ thì}$$

$$\text{phương trình có dạng } t^2 + 10t - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -11 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } t = 1 \text{ ta có: } \frac{x^2}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}. \text{ Nếu}$$

$$t = -11 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+5} = -11 \Leftrightarrow x^2 + 11x + 55 = 0 \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

b) Để ý rằng nếu x là nghiệm thì $x \neq 0$ nên ta chia cả tử số và mẫu số vế trái cho x thì thu được: $\frac{12}{x+4+\frac{2}{x}} - \frac{3}{x+2+\frac{2}{x}} = 1$. Đặt $t = x + \frac{2}{x} + 2$ thì

phương trình trở thành:

$$\frac{12}{t+2} - \frac{3}{t} = 1 \Leftrightarrow 12t - 3t - 6 = t^2 + 2t \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 6 \end{cases}.$$

Với $t = 1$ ta có: $x + \frac{2}{x} + 2 = 1 \Leftrightarrow t^2 + t + 2 = 0$ vô nghiệm. Với $t = 6$ ta có:

$$x + \frac{2}{x} + 2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}.$$

$$\text{c) } \left(\frac{x}{x+2} - (x+2)\right)^2 - (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+2} + x - 3\right)\left(\frac{x}{x+2} - 3x - 1\right) = 0$$

Giải 2 phương trình ta thu được các nghiệm là $x = \pm\sqrt{6}; x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$.

d) Sử dụng HĐT $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ ta viết lại phương trình thành:

$$x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[x + \frac{x}{x-1} \right]^3 - 3 \frac{x^2}{x-1} \left(x + \frac{x}{x-1} \right) + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0$$

hay

$$\left(\frac{x^2}{x-1} \right)^3 - 3 \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^2 + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1} - 1 \right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

. Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Giải các phương trình sau:

- 1) $(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 3) = 6.$
- 2) $(6x + 7)^2 (3x + 4)(x + 1) = 1.$
- 3) $(x - 1)^4 + (x + 3)^4 = 82.$
- 4) $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 10.$
- 5) $(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2.$
- 6) $(x - 2)(x - 1)(x - 8)(x - 4) = 4x^2.$
- 7) $3(x^2 + 2x - 1)^2 - 2(x^2 + 3x - 1)^2 + 5x^2 = 0.$
- 8) $3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 4x + 3 = 0.$
- 9) $2x^4 - 21x^3 + 34x^2 + 105x + 50 = 0.$
- 10) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0.$
- 11) $\frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} - \frac{x+8}{x-2} - \frac{x-8}{x+2} = -\frac{8}{3}.$

$$12) \frac{x+1}{x(x+2)} + \frac{x+6}{x^2+12x+35} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+5}{x^2+10x+24}.$$

$$13) \frac{x^2+x+1}{x+1} + \frac{x^2+2x+2}{x+2} - \frac{x^2+3x+3}{x+3} - \frac{x^2+4x+4}{x+4} = 0.$$

$$14) \frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$$

$$15) (2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1) = 9x^2.$$

$$16) (x^2-5x+1)(x^2-4) = 6(x-1)^2.$$

$$17) x^4 - 9x^3 + 16x^2 + 18x + 4 = 0.$$

$$18) \frac{x^2-12}{(x+2)^2} = 3x^2 - 6x - 3.$$

$$19) \frac{2x}{3x^2-5x+2} + \frac{13x}{3x^2+x+2} = 6.$$

$$20) x^2(x^4-1)(x^2+2)+1=0.$$

$$21) 20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 + 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 20\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$$

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN

$$1) \text{ Đặt } x^2 + x + 2 = t. \text{ Phương trình đã cho thành } t(t+1) = 6 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases}.$$

Với $t = 2$ thì $x^2 + x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$.

Với $t = -3$ thì $x^2 + x + 2 = -3 \Leftrightarrow x^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -1; 0; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \right\}$.

2) Biến đổi phương trình thành

$$(36x^2 + 84x + 49)(36x^2 + 84x + 48) = 12.$$

Đặt

$$t = 36x^2 + 84x + 48 \text{ thì phương trình trên thành } t(t+1) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = 3 \text{ thì } 36x^2 + 84x + 48 = 3 \Leftrightarrow 36x^2 + 84x + 45 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ hoặc}$$

$$x = -\frac{5}{6}. \quad \text{Với } t = -4 \text{ thì } 36x^2 + 84x + 48 = -4 \Leftrightarrow 36x^2 + 84x + 52 = 0,$$

phương trình này vô nghiệm.

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ -\frac{5}{6}; -\frac{3}{2} \right\}.$$

3) Đặt $y = x+1$ thì phương trình đã cho thành

$$24y^4 + 48y^2 + 216 = 82 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là } S = \{-2; 0\}.$$

4) Đặt $y = \frac{x+1+x+2+x+4+x+5}{4} = x+3$ thì phương trình trở thành:

$$(y^2 - 4)(y^2 - 1) = 10 \Leftrightarrow y^4 - 5y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{6} \\ y = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6} - 3 \\ x = \sqrt{6} - 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \{-\sqrt{6} - 3; \sqrt{6} - 3\}.$$

5) Do $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia hai vế cho x^2 ta được $\left(x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x + \frac{2}{x} + 2\right) = 2$. Đặt $y = x + \frac{2}{x}$ thì phương trình trở

$$\text{thành } (y+1)(y+2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{x} = 0 \\ x + \frac{2}{x} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

6) Biến đổi phương trình thành

$$((x-2)(x-4))((x-1)(x-8)) = 4x^2 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 8)(x^2 - 9x + 8) = 4x^2.$$

Do $x=2$ không là nghiệm nên chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$\left(x + \frac{8}{x} - 6\right)\left(x + \frac{8}{x} - 9\right) = 4$. Đặt $y = x + \frac{8}{x}$ thì phương trình trở thành

$$(y-6)(y-9) = 4 \Leftrightarrow y^2 - 15y + 50 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = 10 \end{cases}. \text{ Với } y = 5 \text{ thì}$$

$$x + \frac{8}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 = 0 \text{ (vô nghiệm)}. \text{ Với } y = 10 \text{ thì}$$

$$x + \frac{8}{x} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - \sqrt{17} \\ x = 5 + \sqrt{17} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = (5 - \sqrt{17}; 5 + \sqrt{17})$.

7) Do $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được $3\left(x - \frac{1}{x} + 2\right)^2 - 2\left(x - \frac{1}{x} + 3\right)^2 + 5 = 0$. Đặt $y = x - \frac{1}{x}$, phương trình trở thành:

$$3(y+2)^2 - 2(y+3)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}. \text{ Suy ra}$$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = 1 \\ x - \frac{1}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}. \text{ Vậy tập nghiệm của phương trình là}$$

$$S = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

8) Phương trình không nhận $x=0$ là nghiệm, chia hai vế cho x^2 được $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 5 = 0$. Đặt $t = x - \frac{1}{x}$ thì phương trình trở thành

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Với } t = 1 \text{ thì } x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Với $t = \frac{1}{3}$ thì $x - \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = \frac{1 + \sqrt{37}}{2}$ hoặc
 $x_4 = \frac{1 - \sqrt{37}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{37}}{2}; \frac{1 - \sqrt{37}}{2} \right\}.$$

9) $2x^4 - 21x^3 + 34x^2 + 105x + 50 = 0$ (8).

Lời giải:

Ta thấy $k = \frac{105}{-21} = -5$ và $k^2 = \frac{50}{2} = 25$ nên phương trình (8) là phương trình

bậc bốn có hệ số đối xứng tỉ lệ. (8) $\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x - \frac{5}{x}\right) + 34 = 0$. Đặt

$t = x - \frac{5}{x}$ suy ra $t^2 = x^2 + \frac{25}{x^2} - 10$. Phương trình (9) trở thành

$$2t^2 - 21t + 54 = 0 \Leftrightarrow t = 6 \text{ hoặc } t = \frac{9}{2}. \text{ Với } t = 6 \text{ thì}$$

$x - \frac{5}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 = 0$. Phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = 3 + \sqrt{14}; x_2 = 3 - \sqrt{14}. \text{ Với } x = \frac{9}{2} \text{ thì } x - \frac{5}{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 10 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm $x_3 = \frac{9 + \sqrt{161}}{4}; x_4 = \frac{9 - \sqrt{161}}{4}$. Vậy PT (8) có

$$\text{tập nghiệm } S = \left\{ 3 + \sqrt{14}; 3 - \sqrt{14}; \frac{9 + \sqrt{161}}{4}; \frac{9 - \sqrt{161}}{4} \right\}.$$

10) Điều kiện $x \notin \{-1; -2; -3; -4; 0\}$. Ta biến đổi phương trình thành

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) + \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3}\right) + \frac{1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+2)}{x^2+4x} + \frac{2(x+2)}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+4x} + \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{2(x^2+4x+4)} = 0. \text{ Đặt } u = x^2 + 4x, \text{ phương trình}$$

trở thành $\frac{1}{u} + \frac{1}{u+3} + \frac{1}{2(u+4)} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5u^2 + 25u + 24}{2u(u+3)(u+4)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-25 + \sqrt{145}}{10} \\ u = \frac{-25 - \sqrt{145}}{10} \end{cases}.$$

Do đó $\begin{cases} x^2 + 4x = \frac{-25 + \sqrt{145}}{10} \\ x^2 + 4x = \frac{-25 - \sqrt{145}}{10} \end{cases}$. Tìm được tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ -2 - \sqrt{\frac{15 + \sqrt{145}}{10}}; -2 + \sqrt{\frac{15 + \sqrt{145}}{10}}; -2 + \sqrt{\frac{15 - \sqrt{145}}{10}}; -2 - \sqrt{\frac{15 - \sqrt{145}}{10}} \right\}$$

11) Biến đổi phương trình thành

$$\frac{5}{x-1} + \frac{-5}{x+1} - \frac{10}{x+2} + \frac{10}{x+2} = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{x^2-1} - \frac{40}{x^2-4} = -\frac{8}{3}.$$

Đặt $u = x^2$ ($u \neq 1, u \neq 4; u \geq 0$) dẫn đến phương trình

$$4u^2 - 65u + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 16 \\ u = \frac{1}{4} \end{cases}. \text{ b) Tìm được tập nghiệm của phương trình là}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}; -4; \frac{1}{2}; 4 \right\}.$$

12)

Điều kiện $x \notin \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. Biến đổi phương trình thành

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x(x+2)} + \frac{x+6}{(x+5)(x+7)} &= \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} + \frac{x+5}{(x+4)(x+6)} \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{x+6}{2} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} \right) \\ &= \frac{x+2}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) + \frac{x+5}{x} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7} \right) + \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} \right) &= \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6} \right) + \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \right) \\ \Leftrightarrow (2x+7) \left(\frac{1}{x^2+7} + \frac{1}{x^2+7x+10} - \frac{1}{x^2+7x+6} - \frac{1}{x^2+7x+12} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{x^2+7x} + \frac{1}{x^2+7x+10} + \frac{1}{x^2+7x+6} - \frac{1}{x^2+7x+12} = 0(*) \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $u = x^2 + 7x$ thì phương trình (*) có dạng

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} + \frac{1}{u+10} + \frac{1}{u+6} + \frac{1}{u+12} &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+6} \right) + \left(\frac{1}{u+10} - \frac{1}{u+12} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow u^2 + 18u + 90 &= 0. \end{aligned}$$

Mặt khác $u^2 + 18u + 90 = (u+9)^2 + 9 > 0$ với mọi u . Do đó phương trình (*)

vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -\frac{7}{2}$.

13).

Lời giải:

Điều kiện $x \notin \{-4; -3; -2; -1\}$. Biến đổi phương trình thành

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} - \frac{4}{x+4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+4} \right) + \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{3}{x^2 + 5x + 4} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{3}{x^2 + 5x + 4} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = 0(*) \end{cases}.$$

Đặt $u = x^2 + 5x$ thì phương trình (*) trở thành $\frac{3}{u+4} + \frac{1}{u+6} = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{11}{2}$.

Từ đó ta có $2x^2 + 10x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ 0; \frac{-5 - \sqrt{3}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{3}}{2} \right\}$.

14)

Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức ở vế trái của phương trình cho x , rồi đặt $y = 4x + \frac{7}{x}$ ta được

$$\frac{4}{y-8} + \frac{3}{y-10} = 1.$$

Phương trình trên có 2 nghiệm $y = 16, y = 9$.

Với $y = 9$ thì $4x + \frac{7}{x} = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 7 = 0$. Phương trình này vô nghiệm.

Với $y = 16$ thì $4x + \frac{7}{x} = 16 \Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 7 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{7}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{7}{2} \right\}$.

15) Đặt $t = 2x^2 + x + 1$, phương trình (1) thành

$$(t - 4x)(t + 4x) = 9x^2 \Leftrightarrow t^2 - 16x^2 = 9x^2 \Leftrightarrow t^2 = 25x^2 \Leftrightarrow t = -5x \text{ hoặc } t = 5x.$$

$$\text{Với } t = -5x \text{ thì } 2x^2 + x + 1 = -5x \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Với } t = 5x \text{ thì } 2x^2 + x + 1 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là } \left\{ \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}; \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \right\}.$$

16) Lời giải:

Đặt $u = x - 1$ đưa phương trình (2) về dạng tổng quát

$$(u^2 - 7u - 3)(u^2 - 2u - 3) = 6u^2.$$

Bạn đọc giải tiếp theo phương pháp đã nêu. Ta có thể giải bằng cách khác như sau

$$\text{Viết phương trình đã cho về dạng } (x^2 - 4 - 5x + 5)(x^2 - 4) - 6(x - 1)^2 = 0.$$

Đặt $t = x^2 - 4$, phương trình thành

$$t^2 + (-5x + 5)t + (-6x + 6)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 6x + 6)(t + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 6x - 6 \\ t = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 6x - 6 \\ x^2 - 4 = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 2 = 0 \\ x^2 + x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{7} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của PT(2) là } S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; 3 - \sqrt{7}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; 3 + \sqrt{7} \right\}.$$

17) PT tương đương với $x^4 - 9x(x^2 - 2) + 16x^2 + 4 = 0$.

Đặt $t = x^2 - 2$ thì $t^2 = x^4 - 4x^2 + 4$, PT trên thành

$$t^2 - 9xt + 20x^2 = 0 \Leftrightarrow (t - 4x)(t - 5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4x \\ t = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 4x \\ x^2 - 2 = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 = 0 \\ x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{6} \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{ 2 - \sqrt{6}; \frac{5 - \sqrt{33}}{2}; 2 + \sqrt{6}; \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \right\}$.

18) Điều kiện $x \neq -2$. Khử mẫu thức ta được phương trình tương đương:

$$3x^4 + 6x^3 - 16x^2 - 36x - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 6x(x^2 - 6) - 16x^2 - 12 = 0.$$

đặt $t = x^2 - 6$ thì $t^2 = x^4 - 12x^2 + 36$, suy ra $3x^4 = 3t^2 + 36x^2 - 108$, PT trên thành

$$3t^2 + 6xt + 20t = 0 \Leftrightarrow t(3t + 6x + 20) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } 3t = -6x - 20.$$

Với $t = 0$ thì $x^2 - 6 = 0$, suy ra $x = \pm\sqrt{6}$ (thỏa mãn đk). Với

$3t = -6x - 20$ ta có $3x^2 - 18 = -6x - 20$ hay $3x^2 + 6x + 2 = 0$ suy ra

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$ (thỏa mãn đk). Vậy tập nghiệm của PT(4) là

$$S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{3}}{3}; -\sqrt{6}; \frac{-3 + \sqrt{3}}{3}; \sqrt{6} \right\}.$$

19) $\frac{2x}{3x^2 - 5x + 2} + \frac{13x}{3x^2 + x + 2} = 6$ (5).

Lời giải: Đặt $t = 3x^2 + 2$ PT(5) trở thành

$$\frac{2x}{t - 5x} + \frac{13x}{t + x} = 6. \text{ ĐK: } t \neq 5x, t \neq -x.$$

Khử mẫu thức ta được PT tương đương

$$2t^2 - 13tx + 11x^2 = 0 \Leftrightarrow (t - x)(2t - 11x) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = x \text{ hoặc } t = \frac{11}{2}x \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Với $t = x$ thì $3x^2 + 2 = x \Leftrightarrow 3x^2 - x + 2 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Với $t = \frac{11}{2}x$ thì $3x^2 + 2 = \frac{11}{2}x \Leftrightarrow 6x - 11x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{4}{3}$. Vậy

tập nghiệm của PT(5) là $\left\{\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right\}$.

$$\mathbf{20) PT} \Leftrightarrow x^2(x^2 + 1)(x^2 - 1)(x^2 + 2) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + x^2)(x^4 + x^2 - 2) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + x^2)^2 - 2(x^4 + x^2) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

Giải phương trình trùng phương trên ta được tập nghiệm của PT là

$$\left\{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}; \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\}.$$

21) Lời giải:

Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Đặt $\frac{x-2}{x+1} = y; \frac{x+2}{x-1} = z$, PT có dạng:

$$20y^2 + 5z^2 - 20yz = 0 \Leftrightarrow 5(2y - z)^2 = 0 \Leftrightarrow 2y = z$$

Dẫn đến

$$2. \frac{x-2}{x+1} = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow 2(x-2)(x-1) = (x+2)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 + \sqrt{73}}{2} \text{ hoặc}$$

$$x = \frac{9 - \sqrt{73}}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy tập nghiệm của PT(2) là $\left\{ \frac{9 - \sqrt{73}}{2}; \frac{9 + \sqrt{73}}{2} \right\}$.

CHỦ ĐỀ 6: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1. Phương trình vô tỷ cơ bản:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2 + 2x + 6} = 2x + 1$

b) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{4x+9}$

Lời giải:

a). Phương trình tương đương với:

$$x = 2 + \sqrt{2}$$

b). Điều kiện: $x \geq 0$. Bình phương 2 vế ta được:

$$3x + 1 + 2\sqrt{2x^2 + x} = 4x + 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + x} = x + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ 4(2x^2 + x) = (x + 8)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ 7x^2 - 12x - 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{16}{7} \end{cases}. \text{ Đối chiếu với điều kiện ta thấy chỉ có}$$

$x = 4$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

II. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ THƯỜNG GẶP

1. Giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp sử dụng biểu thức liên hợp:

Dấu hiệu:

+ Khi ta gặp các bài toán giải phương trình dạng: $\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[m]{g(x)} + h(x) = 0$

Mà không thể đưa về một ẩn, hoặc khi đưa về một ẩn thì tạo ra những phương trình bậc cao dẫn đến việc phân tích hoặc giải trực tiếp khó khăn.

+ Nhằm được nghiệm của phương trình đó: bằng thủ công (hoặc sử dụng máy tính cầm tay)

Phương pháp:

- Đặt điều kiện chặt của phương trình (nếu có)

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 3} + 3 = \sqrt{2x^2 + 7} + 2x$.

+ Nếu bình thường nhìn vào phương trình ta thấy:

Phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nhưng đó chưa phải là điều kiện chặt. Để giải quyết triệt để phương trình này ta cần đến điều kiện chặt đó là:

+ Ta viết lại phương trình thành: $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{2x^2 + 7} = 2x - 3$

Để ý rằng: $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{2x^2 + 7} < 0$ do đó phương trình có nghiệm khi

$$2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

- Nếu phương trình chỉ có một nghiệm x_0 :

Ta sẽ phân tích phương trình như sau: Viết lại phương trình thành:

$$\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{f(x_0)} + \sqrt[m]{g(x)} - \sqrt[m]{g(x_0)} + h(x) - h(x_0) = 0$$

Sau đó nhân liên hợp cho từng cặp số hạng với chú ý:

$$+ \left(\sqrt[n]{a} - b \right) \left(\sqrt[n]{a^2} + \sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{b^2} \right) = a - b^3$$

$$+ \left(\sqrt{a} - b \right) \left(\sqrt{a} + b \right) = a - b^2$$

+ Nếu $h(x) = 0$ có nghiệm $x = x_0$ thì ta luôn phân tích được

$$h(x) = (x - x_0)g(x)$$

Như vậy sau bước phân tích và rút nhân tử chung $x - x_0$ thì phương trình

$$\text{ban đầu trở thành: } (x - x_0)A(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = 0 \\ A(x) = 0 \end{cases}$$

Việc còn lại là dùng hàm số, bất đẳng thức hoặc những đánh giá cơ bản để kết luận $A(x) = 0$ vô nghiệm.

- Nếu phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 theo định lý Viet đảo ta có nhân tử chung sẽ là: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$

Ta thường làm như sau:

+ Muốn làm xuất hiện nhân tử chung trong $\sqrt[n]{f(x)}$ ta trừ đi một lượng $ax + b$. Khi đó nhân tử chung sẽ là kết quả sau khi nhân liên hợp của $\sqrt[n]{f(x)} - (ax + b)$

+ Để tìm a, b ta xét phương trình: $\sqrt[n]{f(x)} - (ax + b) = 0$. Để phương trình có

hai nghiệm x_1, x_2 ta cần tìm a, b sao cho
$$\begin{cases} ax_1 + b = \sqrt[n]{f(x_1)} \\ ax_2 + b = \sqrt[n]{f(x_2)} \end{cases}$$

+ Hoàn toàn tương tự cho các biểu thức còn lại:

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{5x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + x - 4 = 0$

b) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = 2x^2 - 5x - 3$

Giải:

a).

Phân tích: Phương trình trong đề bài gồm nhiều biểu thức chứa căn nhưng không thể quy về 1 ẩn. Nếu ta lũy thừa để triệt tiêu dấu $\sqrt[3]{}, \sqrt{}$ thì sẽ tạo ra phương trình tối thiểu là bậc 6. Từ đó ta nghĩ đến hướng giải: Sử dụng biểu thức liên hợp để tách nhân tử chung.

$$\text{Điều kiện } x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

Ta nhẩm được nghiệm của phương trình là: $x = 1$. Khi đó

$$\sqrt{5x^3 - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2; \sqrt[3]{2x - 1} = \sqrt[3]{2 - 1} = 1$$

Ta viết lại phương trình thành: $\sqrt{5x^3 - 1} - 2 + \sqrt[3]{2x - 1} - 1 + x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^3 - 5}{\sqrt{5x^3 - 1} + 2} + \frac{2x - 2}{\sqrt[3]{(2x - 1)^2} + \sqrt[3]{2x - 1} + 1} + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \left[\frac{5(x^2 + x + 1)}{\sqrt{5x^3 - 1} + 2} + \frac{2}{\sqrt[3]{(2x - 1)^2} + \sqrt[3]{2x - 1} + 1} + 1 \right] = 0$$

Dễ thấy :

$$\text{Với điều kiện } x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \text{ thì } \frac{5(x^2 + x + 1)}{\sqrt{5x^3 - 1} + 2} + \frac{2}{\sqrt[3]{(2x - 1)^2} + \sqrt[3]{2x - 1} + 1} + 1 > 0$$

Nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$

b). Điều kiện: $x \in [2; 4]$

Ta nhẩm được nghiệm của phương trình là: $x = 3$. Khi đó

$$\sqrt{x - 2} = \sqrt{3 - 2} = 1; \sqrt{4 - x} = \sqrt{4 - 3} = 1$$

Từ đó ta có lời giải như sau:

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{x-2}-1+1-\sqrt{4-x}=2x^2-5x-3$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1} + \frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}} = (x-3)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{1}{\sqrt{x-2}-1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} - (2x+1) \right] = 0$$

$$\begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} - (2x+1) = 0 \end{cases}$$

Để ý rằng: Với điều kiện $x \in [2;4]$ thì

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} \leq 1; \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} \leq 1; 2x+1 \geq 5 \text{ nên}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} - (2x+1) < 0$$

Từ đó suy ra: $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Nhận xét: Để đánh giá phương trình cuối cùng vô nghiệm ta thường dùng các ước lượng cơ bản: $A+B \geq A$ với $B \geq 0$ từ đó suy ra $\frac{A}{A+B} \leq 1$ với mọi

$$\text{số } A, B \text{ thỏa mãn } \begin{cases} A+B > 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

a) $\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}$

b) $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - (x-4)\sqrt{x-7} - 3x + 28 = 0$

Giải:

a). Điều kiện: $x \geq \sqrt[3]{2}$.

Ta nhận được nghiệm $x = 3$. Nên phương trình được viết lại như sau:

$$\sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3=\sqrt{x^3-2}-5$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+x-3=\frac{x^3-27}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1-\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1-\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}=0 \end{cases}$$

Ta dự đoán: $\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1-\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}<0$ (Bằng cách thay

một giá trị $x \geq \sqrt[3]{2}$ ta sẽ thấy $\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1-\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}<0$)

Ta sẽ chứng minh: $\frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2-1}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}<1$ và $\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}>2$

Thật vậy:

$$+ \text{ Ta xét } \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}<1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}>x-1$$

Đặt $\sqrt[3]{x^2-1}=t>0 \Rightarrow x=\sqrt{t^3+1}$. Bất phương trình tương đương với

$$t^2+2t+1>\sqrt{t^3+1} \Leftrightarrow t^4+3t^3+6t^2+4t>0. \text{ Điều này là hiển nhiên đúng.}$$

+ Ta xét:

$$\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} > 2 \Leftrightarrow x^2+3x-1 > 2\sqrt{x^3-2} \Leftrightarrow x^4+2x^3+7x^2-6x+9 > 0$$

$\forall x \geq 0$ (*). Điều này luôn đúng.

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 3$

b.) Điều kiện: $x \geq 7$.

Để đơn giản ta đặt $\sqrt[3]{x} = t \geq \sqrt[3]{7} \Rightarrow x = t^3$

Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - 2t - (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7} - 3t^3 + 28 = 0 \Leftrightarrow 3t^3 - t^2 + 2t - 28 + (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7} = 0$$

Nhẩm được $t = 2$. Nên ta phân tích phương trình thành:

$$\Leftrightarrow 4t^3 - t^2 + 2t - 32 + (t^3 - 4)(\sqrt{t^3 - 7} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2) \left[(4t^2 + 7t + 16) + (t^3 - 4) \left(\frac{t^2 + 2t + 4}{\sqrt{t^3 - 7} + 1} \right) \right] = 0$$

Để ý rằng $4t^2 + 7t + 16 > 0$ và $t^3 \geq 7$ nên ta có

$$(4t^2 + 7t + 16) + (t^3 - 4) \left(\frac{t^2 + 2t + 4}{\sqrt{t^3 - 7} + 1} \right) > 0. \text{ Vì vậy phương trình có nghiệm}$$

duy nhất $t = 2 \Leftrightarrow x = 8$.

Nhận xét: Việc đặt $\sqrt[3]{x} = t$ trong bài toán để giảm số lượng dấu căn đã giúp đơn giản hình thức bài toán.

Ngoài ra khi tạo liên hợp do $(t^3 - 4) > 0$ nên ta tách nó ra khỏi biểu thức để các thao tác tính toán được đơn giản hơn.

Ví dụ 3: Giải các phương trình:

$$\text{a)} \quad 4\sqrt{x+3} + \sqrt{19-3x} = x^2 + 2x + 9$$

$$\text{b)} \quad \sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} = \frac{2x-11}{5}$$

$$\text{c)} \quad \sqrt{x+\frac{3}{x}} = \frac{x^2+7}{2(x+1)} \quad (\text{Tuyển sinh vòng 1 lớp 10 Trường THPT chuyên Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội 2012})$$

$$\text{d)} \quad \frac{x^3+5x^2+4x+2}{x^2+2x+3} = \sqrt{x^2+x+2}$$

$$\text{a). Điều kiện: } -3 \leq x \leq \frac{19}{3}$$

Ta nhận được 2 nghiệm là $x=1, x=-2$ nên ta phân tích để tạo ra nhân tử chung là: x^2+x-2 . Để làm được điều này ta thực hiện thêm bớt nhân tử như sau:

+ Ta tạo ra $4\sqrt{x+3} - (ax+b) = 0$ sao cho phương trình này nhận $x=1, x=-2$ là nghiệm.

$$\text{Để có điều này ta cần: } \begin{cases} a+b=8 \\ -2a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=\frac{20}{3} \end{cases}$$

+ Tương tự $\sqrt{19-3x} - (mx+n) = 0$ nhận $x=1, x=-2$ là nghiệm.

$$\text{Tức là } \begin{cases} m+n=5 \\ -2m+n=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{13}{3} \end{cases}$$

Từ đó ta phân tích phương trình thành:

$$4\sqrt{x+3} - \left(\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}\right) + \sqrt{19-3x} - \left(\frac{13}{3} - \frac{x}{3}\right) - (x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \left[3\sqrt{x+3} - (x+5) \right] + \frac{3\sqrt{19-3x} - (13-x)}{3} - (x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \left[\frac{-x^2 - x + 2}{3\sqrt{x+3} + (x+5)} \right] + \frac{-x^2 - x + 2}{3 \left[3\sqrt{19-3x} + (13-x) \right]} - (x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x^2 - x - 2) \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{x+3} + (x+5)} + \frac{1}{3 \left[3\sqrt{19-3x} + (13-x) \right]} + 1 \right] = 0$$

Dễ thấy với $-3 \leq x \leq \frac{19}{3}$ thì $\frac{1}{3\sqrt{x+3} + (x+5)} > 0$,

$$\frac{1}{3 \left[3\sqrt{19-3x} + (13-x) \right]} > 0$$

Nên $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{x+3} + (x+5)} + \frac{1}{3 \left[3\sqrt{19-3x} + (13-x) \right]} + 1 > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x=3, x=8$.

b). Điều kiện: $x \geq \frac{8}{3}$.

Phương trình được viết lại như sau: $5\sqrt{3x-8} - 5\sqrt{x+1} = 2x-11$

Ta nhằm được 2 nghiệm $x = 3, x = 8$ nên suy ra nhân tử chung là:

$$x^2 - 11x + 24$$

Ta phân tích với nhân tử $5\sqrt{3x-8}$ như sau:

+ Tạo ra $5\sqrt{3x-8} - (ax+b) = 0$ sao cho phương trình này nhận $x = 3, x = 8$

là nghiệm. Tức là a, b cần thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 3a+b=5 \\ 8a+b=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$

+ Tương tự với $5\sqrt{x+1} - (mx+n) = 0$ ta thu được: $\begin{cases} 3m+n=10 \\ 8m+n=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=7 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$5\sqrt{3x-8} - (3x-4) + (x+7) - 5\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-9(x^2-11x+24)}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)} + \frac{x^2-11x+24}{(x+7)+5\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-11x+24) \left[\frac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)} + \frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-11x+24=0 \\ \frac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)} + \frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta xét } A(x) = \frac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)} + \frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}$$

$$\text{Ta chứng minh: } A(x) < 0 \text{ tức là: } \frac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)} + \frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}} < 0$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{3x-8} + 3x - 4 - 9(x+7+5\sqrt{x+1}) < 0$$

$$\Leftrightarrow 3x-8-5\sqrt{3x-8}+\frac{25}{4}+\frac{275}{4}+x+45\sqrt{x+1}>0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-8}-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{275}{4}+x+45\sqrt{x+1}>0. \text{ Điều này là hiển nhiên đúng.}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x=3, x=8$.

Chú ý:

Những đánh giá để kết luận $A(x) < 0$ thường là những bất đẳng thức không chặt nên ta luôn đưa về được tổng các biểu thức bình phương.

Ngoài ra nếu tinh ý ta có thể thấy: $5\sqrt{3x-8}+3x-4-9(x+7+5\sqrt{x+1}) < 0$
 $5\sqrt{3x-8}+3x-4 \leq 9x+63+5\sqrt{81x+81}$ Nhưng điều này là hiển nhiên đúng
 do: $5\sqrt{3x-8} < 5\sqrt{81x+81}; 3x-4 < 9x+63$ với mọi $x \geq \frac{8}{3}$

c). Điều kiện: $x > 0$

Ta nhận được $x=1; x=3$ nên biến đổi phương trình như sau:

Ta có: khi $x=1 \Rightarrow \frac{x^2+7}{2(x+1)}=2$, khi $x=3 \Rightarrow \frac{x^2+7}{2(x+1)}=2$ nên ta trừ 2 vào 2

$$\text{về thì thu được: } \sqrt{x+\frac{3}{x}}-2=\frac{x^2+7}{2(x+1)}-2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+3}-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{x^2-4x+3}{2(x+1)}$$

$$\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^3+3x+2x}}=\frac{x^2-4x+3}{2(x+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 & (1) \\ \sqrt{x^3+3x+2x}=2(x+1) & (2) \end{cases}$$

Giải (1) suy ra $x=1, x=3$

Giải (2) ta có: $\sqrt{x^3+3x+2x}=2(x+1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+3x}=2 \Leftrightarrow x^3+3x-4=0 \Leftrightarrow x=1$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm là $x=1; x=3$

Nhận xét: Ta cũng có thể phân tích phương trình như câu a, b .

d). Ta có: $x^3 + 5x^2 + 4x + 2 = (x+3)(x^2 + 2x + 3) - 5x - 7$ nên phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x + 3} &= \sqrt{x^2 + x + 2} \Leftrightarrow x + 3 - \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \frac{5x + 7}{x^2 + 2x + 3} = 0 \\ \Leftrightarrow (5x + 7) \left(\frac{1}{(x+3) + \sqrt{x^2 + x + 2}} - \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (5x + 7) = 0 \\ \left(\frac{1}{(x+3) + \sqrt{x^2 + x + 2}} - \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \right) = 0 \end{cases} &(1) \end{aligned}$$

$$\text{Giải (1): } \frac{1}{(x+3) + \sqrt{x^2 + x + 2}} - \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \Leftrightarrow x^2 + x - \sqrt{x^2 + x + 2} = 0 .$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 2} > 0$. Phương trình trở thành:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1(L) \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có 3 nghiệm: $x = -\frac{7}{5}; x = 1; x = -2$

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^3 + 15} + 2 = \sqrt{x^3 + 8} + 3x$

b) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3} + 1 - x = 0$

a). Phương trình được viết lại như sau:

$\sqrt{x^3+15}+2=\sqrt{x^3+8}+3x \Leftrightarrow \sqrt{x^3+15}-\sqrt{x^3+8}=3x-2$. Để phương trình có nghiệm ta cần: $3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$. Nhẩm được $x=1$ nên ta viết lại

phương trình thành: $\sqrt{x^3+15}-4=\sqrt{x^3+8}-3+3x-3$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{(x^2+x+1)}{\sqrt{x^3+15}+4} - \frac{(x^2+x+1)}{\sqrt{x^3+8}+3} - 3 \right] = 0$$

Để ý rằng: $\frac{(x^2+x+1)}{\sqrt{x^3+15}+4} - \frac{(x^2+x+1)}{\sqrt{x^3+8}+3} - 3 < 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

b). Điều kiện $x \in \left[-3; -\frac{1}{3}\right]$

Ta viết lại phương trình như sau: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}+1-x=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}+1-x=0 \Leftrightarrow (2x-2) \left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=2 \end{cases}$$

Xét phương trình: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=2$. Bình phương 2 vế ta thu được:

$$4x+4+2\sqrt{(3x+1)(x+3)}=4 \Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x+3)}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2-10x-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=5-2\sqrt{7}$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là $x=1, x=5-2\sqrt{7}$

Nhận xét:

+ Ta thấy phương trình có nghiệm $x = 1$. Nếu ta phân tích phương trình thành $\sqrt{3x+1} - 2 + 2 - \sqrt{x+3} + 4 - 4x = 0$ thì sau khi liên hợp phương trình

mới thu được sẽ là: $\frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{1-x}{2+\sqrt{x+3}} + 4 - 4x = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{1}{2+\sqrt{x+3}} - 4 \right) = 0$. Rõ ràng phương trình hệ quả

$\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{1}{2+\sqrt{x+3}} - 4 = 0$ phức tạp hơn phương trình ban đầu rất nhiều.

+ Để ý rằng khi $x = 1$ thì $\sqrt{3x+1} = \sqrt{x+3}$ nên ta sẽ liên hợp trực tiếp biểu thức $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}$.

2. Đặt ẩn phụ dựa vào tính đẳng cấp của phương trình:

Ta thường gặp phương trình dạng này ở các dạng biến thể như:

$$+ ax^2 + bx + c = d\sqrt{px^3 + qx^2 + rx + t} \quad (1)$$

$$+ ax^2 + bx + c = d\sqrt{px^4 + qx^3 + rx^2 + ex + h} \quad (2)$$

$$+ A\sqrt{ax^2 + bx + c} + B\sqrt{ex^2 + gx + h} = C\sqrt{rx^2 + px + q} \quad (*)$$

Thực chất phương trình (*) khi bình phương 2 vế thì xuất hiện theo dạng (1) hoặc (2).

Để giải các phương trình (1), (2).

Phương pháp chung là:

+ Phân tích biểu thức trong dấu $\sqrt{\quad}$ thành tích của 2 đa thức $P(x), Q(x)$

+ Ta biến đổi $ax^2 + bx + c = mP(x) + nQ(x)$ bằng cách đồng nhất hai vế.

Khi đó phương trình trở thành: $mP(x) + nQ(x) = d\sqrt{P(x).Q(x)}$

Chia hai vế cho biểu thức $Q(x) > 0$ ta thu được phương trình:

$$m \frac{P(x)}{Q(x)} + n = d \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}. \text{ Đặt } t = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}} \geq 0 \text{ thì thu được phương trình:}$$

$$mt^2 - dt + n = 0.$$

Một cách tổng quát: Với mọi phương trình có dạng:

$aP^n(x) + bQ^n(x) + cP^{n-k}(x)Q^k(x) + d^2\sqrt[n]{P(x).Q(x)} = 0$ thì ta luôn giải được theo cách trên.

Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$

b) $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 3\sqrt{x}$

c) $4x^2 + 3(x^2 - x)\sqrt{x + 1} = 2(x^3 + 1)$

Lời giải:

a). Điều kiện: $x \geq -2$.

Ta viết lại phương trình thành: $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}$

Giả sử $x^2 - 3x + 2 = m(x + 2) + n(x^2 - 2x + 4)$. Suy ra m, n phải thỏa mãn

$$\begin{cases} n=1 \\ m-2n=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases} \\ 2m+4n=2 \end{cases}$$

Phương trình đã cho có dạng:

$$-2(x+2)+2(x^2-2x+4)-3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}=0.$$

Chia phương trình cho $x^2-2x+4>0$ ta thu được:

$$-2\left(\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)-3\sqrt{\frac{(x+2)}{(x^2-2x+4)}}+2=0$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{(x+2)}{(x^2-2x+4)}}\geq 0$ ta thu được phương trình: $-2t^2-3t+2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ do } t\geq 0 \Rightarrow t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x+2)}{(x^2-2x+4)}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-2x+4=4(x+2).$$

$$x^2-6x-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+\sqrt{13} \\ x=3-\sqrt{13} \end{cases}$$

b). Điều kiện: $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-4x+1\geq 0 \end{cases}$

Bình phương 2 vế của phương trình ta thu được:

$$x^2+2x+1+2(x+1)\sqrt{x^2-4x+1}+x^2-4x+1=9x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-11x+2+2\sqrt{(x^2+2x+1)(x^2-4x+1)}=0$$

Giả sử

$$2x^2 - 11x + 2 = m(x^2 + 2x + 1) + n(x^2 - 4x + 1) \Rightarrow \begin{cases} m + n = 2 \\ 2m - 4n = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Phương trình trở thành:

$$-\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + \frac{5}{2}(x^2 - 4x + 1) + 2\sqrt{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4x + 1)} = 0$$

Chia phương trình cho $x^2 + 2x + 1 > 0$ ta thu được:

$$-1 + 5\left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}\right) + 4\sqrt{\left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}\right)} = 0. \text{ Đặt } t = \sqrt{\left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}\right)} \geq 0 \text{ ta có}$$

$$\text{Phương trình } 5t^2 + 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}\right) = \frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow 24x^2 - 102x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = 4 \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{1}{4}, x = 4$

Nhận xét: Trong lời giải ta đã biến đổi:

$$(x+1)\sqrt{x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4x + 1)} \text{ là vì } x+1 > 0$$

c). Điều kiện: $x \geq -1$

$$\text{Ta viết lại phương trình thành: } (x-1)\left[2x^2 - 2x - 2 - 3x\sqrt{x+1}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 - 2x - 2 - 3x\sqrt{x+1} = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình:

$$2x^2 - 2x - 2 - 3x\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x\sqrt{x+1} - 2(x+1) = 0.$$

Dễ thấy $x = -1$ không phải là nghiệm.

Xét $x > -1$ ta chia cho $x+1$ thì thu được phương trình:

$$2\frac{x^2}{x+1} - 3\frac{x}{\sqrt{x+1}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 2 & (1) \\ \frac{x}{\sqrt{x+1}} = -1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Giải (2): } \frac{x}{\sqrt{x+1}} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - 2\sqrt{2}$$

Kết hợp điều kiện ta suy ra các nghiệm của phương trình là:

$$x = 1; x = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

$$\text{a)} \quad 4(2x^2 + 1) + 3(x^2 - 2x)\sqrt{2x-1} = 2(x^3 + 5x)$$

$$\text{b)} \quad \sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$$

$$\text{c)} \quad \sqrt{5x^2 - 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x+1}$$

Lời giải:

$$\text{a). Điều kiện } x \geq \frac{1}{2}$$

Phương trình đã cho được viết lại như sau:

$$\begin{aligned}
& 2x^3 - 8x^2 + 10x - 4 - 3x(x-2)\sqrt{2x-1} = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 - 4x + 2) - 3x(x-2)\sqrt{2x-1} = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-2)\left[(2x^2 - 4x + 2) - 3x\sqrt{2x-1}\right] = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ (2x^2 - 4x + 2) - 3x\sqrt{2x-1} = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình:

$$2x^2 - 4x + 2 - 3x\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 - 3\sqrt{x^2(2x-1)} = 0$$

$$\text{Ta giả sử: } 2x^2 - 4x + 2 = mx^2 + n(2x-1) \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-2 \end{cases}$$

Phương trình trở thành: $2x^2 - 2(2x-1) - 3\sqrt{x^2(2x-1)} = 0$. Chia cho $x^2 > 0$

Ta có: $2 - 2\left(\frac{2x-1}{x^2}\right) - 3\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} = 0$. Đặt $t = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} \geq 0$ phương trình mới

$$\text{là: } -2t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \text{ ta có: } \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ x = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Nhận xét:

+ Đối với phương trình $2x^2 - 4x + 2 - 3x\sqrt{2x-1} = 0$ ta có thể không cần đưa x vào trong dấu $\sqrt{\quad}$ khi đó ta phân tích: $2x^2 - 4x + 2 = mx^2 + n(2x-1)$ và chia như trên thì bài toán vẫn được giải quyết. Việc đưa vào $\sqrt{\quad}$ là giúp các em học sinh nhìn rõ hơn bản chất bài toán.

+ Ngoài ra cần lưu ý rằng: Khi đưa một biểu thức $P(x)$ vào trong dấu $\sqrt[n]{}$ thì điều kiện là $P(x) \geq 0$. Đây là một sai lầm học sinh thường mắc phải khi giải toán.

$$\text{b). Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 3x - 18 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 5x^2 + 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 6.$$

Phương trình đã cho được viết lại thành: $\sqrt{5x^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 3x - 18} + 5\sqrt{x}$

Bình phương 2 vế và thu gọn ta được: $2x^2 - 9x + 9 - 5\sqrt{x(x^2 - 3x - 18)} = 0$

Nếu ta giả sử $2x^2 - 9x + 9 = mx + n(x^2 - 3x - 18)$ thì m, n phải thỏa mãn

$$\begin{cases} n = 2 \\ m - 3n = -9 \text{ điều này là hoàn toàn vô lý.} \\ -18n = 9 \end{cases}$$

Để khắc phục vấn đề này ta có chú ý sau: $x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3)$ khi đó $\sqrt{x(x^2 - 3x - 18)} = \sqrt{x(x - 6)(x + 3)} = \sqrt{(x^2 - 6x)(x + 3)}$

Bây giờ ta viết lại phương trình thành: $2x^2 - 9x + 9 - 5\sqrt{(x^2 - 6x)(x + 3)} = 0$

$$\text{Giả sử: } 2x^2 - 9x + 9 = m(x^2 - 6x) + n(x + 3) \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ -6m + n = -9 \\ n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

Như vậy phương trình trở thành:

$$2(x^2 - 6x) + 3(x + 3) - 5\sqrt{(x^2 - 6x)(x + 3)} = 0$$

$$\text{Chia cho } x + 3 > 0 \text{ ta thu được: } 2\left(\frac{x^2 - 6x}{x + 3}\right) - 5\sqrt{\left(\frac{x^2 - 6x}{x + 3}\right)} + 3 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\left(\frac{x^2 - 6x}{x+3}\right)} \geq 0 \Rightarrow 2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x^2 - 6x}{x+3}\right)} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{7 - \sqrt{61}}{2} \end{cases}$$

Suy ra $x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2:

$$t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x^2 - 6x}{x+3}\right)} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 33x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x = 9$$

Tóm lại: Phương trình có 2 nghiệm là: $x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2}$ và $x = 9$

c). Điều kiện $x \geq 5$.

Chuyển về bình phương ta được: $2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x^2 - x - 20)(x+1)}$

Giả sử: $2x^2 - 5x + 2 = m(x^2 - x - 20) + n(x+1)$

Khi đó ta có :
$$\begin{cases} m = 2 \\ -m + n = -5 \\ -20m + n = 2 \end{cases}$$
 không tồn tại m, n thỏa mãn hệ.

Nhưng ta có :

$$(x^2 - x - 20)(x+1) = (x+4)(x-5)(x+1) = (x+4)(x^2 - 4x - 5)$$

Giả sử: $2x^2 - 5x + 2 = \alpha(x^2 - 4x - 5) + \beta(x + 4)$. Suy ra

$$\begin{cases} m = 2 \\ -4m + n = -5 \\ -5m + 4n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

Ta viết lại phương trình: $2(x^2 - 4x - 5) + 3(x + 4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x + 4)}$.

Chia hai vế cho $x + 4 > 0$ ta thu được:

$$2\left(\frac{x^2 - 4x - 5}{x + 4}\right) - 5\sqrt{\left(\frac{x^2 - 4x - 5}{x + 4}\right)} + 3 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{\left(\frac{x^2 - 4x - 5}{x + 4}\right)} \geq 0$ ta thu được phương trình:

$$2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 1: $t = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 4} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{61}}{2} \end{cases}$

Trường hợp 2: $t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -\frac{7}{4} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện ta suy ra các nghiệm của phương trình là:

$$x = 8; x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$$

Ví dụ 3: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

$$\text{b)} \quad x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$$

Lời giải: a). Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương 2 vế phương trình ta thu được:

$$x^2 + 4x - 1 + 2\sqrt{(x^2 + 2x)(2x - 1)} = 3x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 - \sqrt{(x^2 + 2x)(2x - 1)} = 0$$

$$\text{Ta giả sử: } x^2 + 1 = m(x^2 + 2x) + n(2x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -1 \\ 2m + 2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -1 \end{cases}$$

Phương trình trở thành:

$$(x^2 + 2x) - (2x - 1) - \sqrt{(x^2 + 2x)(2x - 1)} = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{2x - 1}{x^2 + 2x}\right) - \sqrt{\left(\frac{2x - 1}{x^2 + 2x}\right)} + 1 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\left(\frac{2x - 1}{x^2 + 2x}\right)} \geq 0 \Rightarrow -t^2 - t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Về cơ bản đến đây ta hoàn toàn tìm được x . Nhưng với giá trị

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}} > 0 \text{ như vậy việc tính toán sẽ gặp khó khăn.}$$

Để khắc phục ta có thể xử lý theo hướng khác như sau:

Ta viết lại: $\sqrt{(x^2 + 2x)(2x - 1)} = \sqrt{(x + 2)(2x^2 - x)}$ lúc này bằng cách phân tích như trên ta thu được phương trình:

$$\frac{1}{2}(2x^2 - x) + \frac{1}{2}(x + 2) - \sqrt{(x + 2)(2x^2 - x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x}{x + 2} - 2\sqrt{\frac{2x^2 - x}{x + 2}} + 1 = 0$$

Đặt

$$t = \sqrt{\frac{2x^2 - x}{x+2}} \geq 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Kiểm tra điều kiện ta thấy chỉ có giá trị $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ là thỏa mãn điều kiện.

b). Điều kiện: $x \geq -2$.

Ta viết lại phương trình thành: $x^3 - 3x(x+2) + 2\sqrt{(x+2)^3} = 0$

Để ý rằng:

Nếu ta đặt $y = \sqrt{x+2}$ thì phương trình trở thành: $x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0$. Đây là một phương trình đẳng cấp bậc 3. Từ định hướng trên ta có lời giải cho bài toán như sau:

+ Xét trường hợp: $x = 0$ không thỏa mãn phương trình:

+ Xét $x \neq 0$. Ta chia phương trình cho x^3 thì thu được:

$$1 - 3\frac{(x+2)}{x^2} + 2\frac{\sqrt{(x+2)^3}}{x^3} = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{\sqrt{x+2}}{x} \text{ ta có phương trình: } 2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $t = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}}{x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 4x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - 2\sqrt{3}$$

Trường hợp 1: $t = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}}{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm: $x = 2; x = 2 - 2\sqrt{3}$

Ví dụ 4: Giải các phương trình:

a) $2x^3 - x^2 - 3x + 1 = \sqrt{x^5 + x^4 + 1}$

b) $5\sqrt{x^4 + 8x} = 4x^2 + 8$

Lời giải:

a). Hình thức bài toán dễ làm cho người giải bối rối nhưng để ý thật kỹ ta thấy:

Chìa khóa bài toán nằm ở vấn đề phân tích biểu thức: $x^5 + x^4 + 1$

Ta thấy do vế trái là biểu thức bậc 3 nên ta nghĩ đến hướng phân tích:

$$x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^3 + bx^2 + cx + 1). \text{ Đồng nhất hai vế ta thu được:}$$

$a = 1; b = 0; c = -1$. Nên ta viết lại phương trình đã cho thành:

$$2(x^3 - x + 1) - (x^2 + x + 1) - \sqrt{(x^3 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = 0$$

Chia cho $x^2 + x + 1 > 0$ ta thu được:

$$2 \cdot \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right) - \sqrt{\left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right)} - 1 = 0. \text{ Đặt } t = \sqrt{\left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right)} \geq 0 \text{ ta có}$$

$$\text{phương trình: } 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} (L) \end{cases}$$

$$\text{Giải } t=1 \Leftrightarrow \frac{x^3-x+1}{x^2+x+1}=1 \Leftrightarrow x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Kết luận: Thử lại ta thấy 3 nghiệm: $x=0, x=-1; x=2$ đều thỏa mãn.

$$\text{b). Điều kiện: } x^4+8x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Ta thấy chìa khóa bài toán nằm ở việc phân tích biểu thức:

$$x^4+8x = x(x^3+8) = x(x+2)(x^2-2x+4) = (x^2+2x)(x^2-2x+4) \text{ Giả sử}$$

$$4x^2+8 = m(x^2-2x+4) + n(x^2+2x) \Rightarrow \begin{cases} m+n=4 \\ -2m+2n=0 \Leftrightarrow m=n=2 \\ 4m=8 \end{cases}$$

Phương trình trở thành:

$$2(x^2-2x+4) + 2(x^2+2x) - 5\sqrt{(x^2-2x+4)(x^2+2x)} = 0. \text{ Chia hai vế cho}$$

$$x^2-2x+4 > 0 \text{ ta thu được: } 2\frac{x^2+2x}{x^2-2x+4} - 5\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2-2x+4}} + 2 = 0. \text{ Đặt}$$

$$t = \sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2-2x+4}} \geq 0 \text{ ta có phương trình: } 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } t=2 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{x^2-2x+4} = 4 \Leftrightarrow 3x^2-10x+16=0 \text{ vô nghiệm}$$

Trường hợp 2:

$$t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{x^2-2x+4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3x^2+10x-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-5-\sqrt{37}}{3} \\ x=\frac{-5+\sqrt{37}}{3} \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm là:
$$\begin{cases} x = \frac{-5 - \sqrt{37}}{3} \\ x = \frac{-5 + \sqrt{37}}{3} \end{cases}$$

Nhận xét: Ta có thể phân tích:

$$\sqrt{x^4 + 8x} = \sqrt{x(x^3 + 8)} = \sqrt{x(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \sqrt{(x^2 + 2x)(x^2 - 2x + 4)}$$

Chú ý rằng: Trong một số phương trình: *Ta cần dựa vào tính đẳng cấp của từng nhóm số hạng để từ đó phân tích tạo thành nhân tử chung.*

Ví dụ 5: Giải các phương trình:

a) $(x+2)(\sqrt{2x+3} - 2\sqrt{x+1}) + \sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 1 = 0$

b) $(x^2 + 4)\sqrt{2x+4} = 3x^2 + 6x - 4$

c) $(x^2 - 6x + 11)\sqrt{x^2 - x + 1} = 2(x^2 - 4x + 7)\sqrt{x-2}$

Giải:

a). Đặt $\sqrt{2x+3} = a, \sqrt{x+1} = b \Rightarrow a, b \geq 0$

Phương trình đã cho trở thành: $(a^2 - b^2)(a - 2b) - (a^2 - ab - 2b^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (a - 2b)(a - b)(a + b) - (a - b)(a - 2b) = 0 \Leftrightarrow (a - 2b)(a - b)(a + b - 1) = 0$$

Ta quy bài toán về giải 3 phương trình cơ bản là:
$$\begin{cases} \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 0 \\ 2\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} - 1 = 0 \end{cases}$$

Với điều kiện: $x \geq -1 \Rightarrow a \geq 1, b \geq 0$

Trường hợp 1: $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x+3 = x+1 \Leftrightarrow x = -2(L)$

Trường hợp 2: $2\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow 8x+12 = x+1 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{7}(L)$

Trường hợp 3: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} - 1 = 0$. Vì $\sqrt{2x+3} \geq 1, \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow VT \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$

b). Điều kiện $x \geq -2$

Ta thấy rằng nếu bình phương trực tiếp sẽ dẫn đến phương trình bậc 5

Để khắc phục ta sẽ tìm cách tách $x^2 + 4$ ra khỏi $\sqrt{2x+4}$

Từ đó ta viết lại phương trình như sau: $(x^2 + 4)\sqrt{2x+4} + x^2 + 4 = 4x^2 + 6x$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4)(\sqrt{2x+4} + 1) = 2x(2x+3) \Leftrightarrow (x^2 + 4)(\sqrt{2x+4} + 1) = 2x(\sqrt{(2x+4)^2} - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4)(\sqrt{2x+4} + 1) = 2x(\sqrt{2x+4} + 1)(\sqrt{2x+4} - 1)$$

Do $\sqrt{2x+4} + 1 > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 = 2x(\sqrt{2x+4} - 1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 - 2x\sqrt{2x+4} = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2x+4})^2 = 0$$

$$x - \sqrt{2x+4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1 + \sqrt{5}$

c). Điều kiện: $x \geq 2$

Giả sử

$$x^2 - 6x + 11 = m(x^2 - x + 1) + n(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ -m + n = -6 \Leftrightarrow m = 1, n = -5 \\ m - 2n = 11 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 7 = p(x^2 - x + 1) + q(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ -p + q = -4 \Leftrightarrow p = 1, q = -3 \\ p - 2q = 7 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\left[(x^2 - x + 1) - 5(x - 2) \right] \sqrt{x^2 - x + 1} - 2 \left[(x^2 - x + 1) - 3(x - 2) \right] \sqrt{x - 2} = 0$$

Chia phương trình cho $\sqrt{(x^2 - x + 1)^3}$ ta thu được:

$$1 - 5 \cdot \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} - 2 \sqrt{\frac{x - 2}{x^2 - x + 1}} + 6 \sqrt{\left(\frac{x - 2}{x^2 - x + 1} \right)^3} = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x - 2}{x^2 - x + 1}} \geq 0$$

$$\text{Ta thu được phương trình: } 6t^3 - 5t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{2} (L) \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } t = 1 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 (VN)$$

$$+ \text{ Nếu } t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 10x + 19 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \pm \sqrt{6}$$

$$\text{Kết luận: } x = 5 \pm \sqrt{6}$$

2. Giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

+ Đặt ẩn phụ không hoàn toàn là phương pháp chọn một số hạng trong phương trình để đặt làm ẩn sau đó ta quy phương trình ban đầu về dạng một phương trình bậc 2: $mt^2 + g(x)t + h(x) = 0$ (phương trình này vẫn còn ẩn x)

+ Vấn đề của bài toán là phải chọn giá trị m bằng bao nhiêu để phương trình bậc 2 theo ẩn t có giá trị Δ chẵn $\left(\Delta = [A(x)]^2 \right)$ như thế việc tính t theo x sẽ được dễ dàng.

+ Thông thường khi gặp các phương trình dạng:

$ax^2 + bx + c + (dx + e)\sqrt{px^2 + qx + r} = 0$ thì phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn tỏ ra rất hiệu quả:

+ Để giải các phương trình dạng này ta thường làm theo cách:

- Đặt $\sqrt{f(x)} = t \Rightarrow t^2 = f(x)$

- Ta tạo ra phương trình: $mt^2 + g(x)t + h(x) = 0$

Ta có $\Delta = [g(x)]^2 - 4m.h(x) = f_1(m)x^2 + g_1(m)x + h_1(m)$. Để Δ có dạng $[A(x)]^2$ thì điều kiện cần và đủ là

$$\Delta_m = [g_1(m)]^2 - 4f_1(m).h_1(m) = 0 \Rightarrow m$$

Ta xét các ví dụ sau:

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $x^2 + 1 - (x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 0$

$$\text{b) } 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$$

$$\text{c) } (2x+7)\sqrt{2x+7} = x^2+9x+7 \text{ (Trích đề TS lớp 10 Chuyên Tự nhiên – ĐHQG Hà Nội 2009)}$$

Giải:

$$\text{a) Đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x + 3} > 0 \Rightarrow t^2 = x^2 - 2x + 3$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } x^2 + 1 - (x+1)t = 0$$

$$\text{Ta sẽ tạo ra phương trình: } mt^2 - (x+1)t + x^2 + 1 - m(x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$(\text{Ta đã thêm vào } mt^2 \text{ nên phải bớt đi một lượng } mt^2 = m(x^2 - 2x + 3))$$

Phương trình được viết lại như sau:

$$mt^2 - (x+1)t + (1-m)x^2 + 2mx + 1 - 3m = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (x+1)^2 - 4m[(1-m)x^2 + 2mx + 1 - 3m]$$

$$= (4m^2 - 4m + 1)x^2 + (2 - 8m^2)x + 12m^2 - 4m + 1$$

Ta mong muốn

$$\Delta = (Ax + B)^2 \Leftrightarrow \Delta_m = (1 - 4m^2)^2 - (12m^2 - 4m + 1)(4m^2 - 4m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

$$\text{Phương trình mới được tạo ra là: } t^2 - (x+1)t + 2x - 2 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} t = \frac{x+1-(x-3)}{2} = 2 \\ t = \frac{x+1+(x-3)}{2} = x-1 \end{cases}$$

+ Trường hợp 1: $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

+ Trường hợp 2:

$$t = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

Phương trình vô nghiệm.

Tóm lại: Phương trình có 2 nghiệm là: $x = 1 \pm \sqrt{2}$

b) Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

Bình phương 2 vế phương trình và thu gọn ta được:

$$9x^2 - 16\sqrt{8 - 2x^2} + 8x - 32 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{8 - 2x^2}$ ta tạo ra phương trình là:

$$\begin{aligned} mt^2 - 16t - m(8 - 2x^2) + 9x^2 + 8x - 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow mt^2 - 16t + (9 + 2m)x^2 + 8x - 8m - 32 &= 0 \\ \Delta' = 64 - m[(9 + 2m)x^2 + 8x - 8m - 32] \\ &= (-2m^2 - 9m)x^2 + 8mx + 8m^2 + 32m + 64 \end{aligned}$$

Ta mong muốn $\Delta' = (Ax + B)^2 \Leftrightarrow \Delta = 0$ phải có nghiệm kép. Tức là:

$$\Delta'_m = 16m^2 - (-2m^2 - 9m)(8m^2 + 32m + 64) = 0 \Leftrightarrow m = -4$$

Từ đó suy ra phương trình mới là: $-4t^2 - 16t + x^2 + 8x = 0$

$$\text{Tính được: } \Delta' = 4x^2 + 32x + 64 = (2x + 8)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{8 - (2x + 8)}{-4} = \frac{x}{2} \\ t = \frac{8 + (2x + 8)}{-4} = -\frac{x}{2} - 4 \end{cases}$$

+ Trường hợp 1: $t = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{8 - 2x^2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4(8 - 2x^2) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

+ Trường hợp 2:

$$t = -\frac{x}{2} - 4 \Leftrightarrow \sqrt{8-2x^2} = -\frac{x}{2} - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -8 \\ 4(8-2x^2) = (x+8)^2 \end{cases} \text{VN}$$

Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

c). Đặt $\sqrt{2x+7} = t$ ta tạo ra phương trình:

$$mt^2 - (2x+7)t + x^2 + (9-2m)x + 7 - 7m = 0$$

Làm tương tự như trên ta tìm được $m = 1$. Nên phương trình có dạng

$$t^2 - (2x+7)t + x^2 + 7x = 0 \Rightarrow \Delta = (2x+7)^2 - 4(x^2 + 7x) = 49 \Rightarrow \begin{cases} t = x+7 \\ t = x \end{cases}$$

giải theo các trường hợp của t ta tìm được $x = 1 + 2\sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 3: Giải các phương trình:

a) $10x^2 - 9x - 8x\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + 3 = 0$

b) $x^3 + 6x^2 - 2x + 3 - (5x-1)\sqrt{x^3+3} = 0$

c) $4\sqrt{x+1} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$

Lời Giải:

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$ ta tạo ra phương trình:

$$mt^2 - 8xt + (10-2m)x^2 + (3m-9)x + 3 - m = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \Delta &= 16x^2 - m[(10-2m)x^2 + (3m-9)x + 3-m] \\
&= 16x^2 - m[(10-2m)x^2 + (3m-9)x + 3-m] \\
&= (2m^2 - 10m + 16)x^2 + (9m - 3m^2)x + m^2 - 3m
\end{aligned}$$

$$\text{Ta cần : } \Delta_m = (9m - 3m^2)^2 - 4(2m^2 - 10m + 16)(m^2 - 3m) = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } 3t^2 - 8xt + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3}x \\ t = 2x \end{cases}$$

Trường hợp

1

$$\begin{aligned}
t = \frac{2}{3}x &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9(2x^2 - 3x + 1) = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 14x^2 - 27x + 9 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{7} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{Trường hợp 2: } t = 2x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{Kết luận: Phương trình có 3 nghiệm: } x = \frac{3}{2}, x = \frac{3}{7}, x = \frac{1}{3}$$

b) Điều kiện: $x \geq 1$. Đặt $t = \sqrt{x^3 + 3} \geq 0 \Leftrightarrow x^3 = t^2 - 3$. Do hệ số của x^3 trong phương trình là: 1. Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - (5x-1)t + 6x^2 - 2x = 0$$

$$\Delta = (5x-1)^2 - 4(6x^2 - 2x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} t = \frac{(5x-1)-(x-1)}{2} = 2x \\ t = \frac{(5x-1)+(x-1)}{2} = 3x-1 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \sqrt{x^3+3} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 - 4x^2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{21}}{2} (L) \end{cases}$$

Trường hợp 2:

$$\sqrt{x^3+3} = 3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^3 - 9x^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4+2\sqrt{3} \\ x = 4-2\sqrt{3} (L) \end{cases}$$

Tóm lại phương trình có 3 nghiệm: $x = 1, x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}, x = 4+3\sqrt{2}$

a) Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$. Ta viết phương trình thành:

$$4\sqrt{x+1} - 2\sqrt{1-x} = 3x+1 + \sqrt{1-x^2}.$$

Bình phương 2 vế ta thu được phương trình mới:

$$16(x+1) + 4(1-x) - 16\sqrt{1-x^2} = 9x^2 + 6x + 1 + 2(3x+1)\sqrt{1-x^2} + 1-x^2$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 6x - 18 + (6x+18)\sqrt{1-x^2} = 0$$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$ ta tạo ra phương trình:

$$mt^2 + (6x+18)t + (8+m)x^2 - 6x - 18 - m = 0$$

$$\text{Có } \Delta' = (3x+9)^2 - m[(8+m)x^2 - 6x - 18 - m]$$

$$= (9 - 8m - m^2)x^2 + (54 + 6m)x + m^2 + 18m + 81$$

Ta mong muốn

$$\Delta = (Ax + B)^2 \Leftrightarrow \Delta'_m = (3m + 27)^2 - (9 - 8m - m^2)(m^2 + 18m + 81) = 0$$

Từ đó tính được $m = -8$

Phương trình đã cho trở thành: $-8t^2 + (6x + 18)t - 6x - 10 = 0$

Ta có $\Delta' = (3x + 9)^2 - 8(6x + 10) = (3x + 1)^2$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} t = \frac{-3x - 9 - (3x + 1)}{-8} = \frac{3x + 5}{4} \\ t = \frac{-3x - 9 + (3x + 1)}{-8} = 1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ thỏa mãn điều kiện

Trường hợp 2:

$$t = \frac{3x + 5}{4} \Leftrightarrow 4\sqrt{1 - x^2} = 3x + 5 \Leftrightarrow 16(1 - x^2) = 9x^2 + 30x + 25$$

$$16(1 - x^2) = 9x^2 + 30x + 25 \Leftrightarrow 25x^2 + 30x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$$

Thử lại ta thấy: $x = -\frac{3}{5}$ thỏa mãn phương trình:

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm $x = 0, x = -\frac{3}{5}$

Chú ý: Ở bước cuối cùng khi giải ra nghiệm ta phải thử lại vì phép bình phương lúc đầu khi ta giải là không tương đương.

Ví dụ 4) Giải các phương trình:

a) $\sqrt{5 - x} = x^2 - 5$

$$\text{b) } x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$$

$$8x^2 + 3x + (4x^2 + x - 2)\sqrt{x+4} = 4$$

Giải:

$$\text{a) Điều kiện: } \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 \geq 5 \end{cases}$$

$$\text{Bình phương 2 vế ta thu được: } 5^2 - (2x^2 + 1).5 + x + x^4 = 0$$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 của 5 ta có:

$$\Delta = (2x^2 + 1)^2 - 4(x + x^4) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} 5 = \frac{1}{2}(2x^2 + 1 + 2x + 1) = x^2 + x \\ 5 = \frac{1}{2}(2x^2 + 1 - 2x + 1) = x^2 - x + 1 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2: } x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có 4 nghiệm đều thỏa mãn phương trình.

$$\text{b) Ta viết lại phương trình thành: } 3 - (2x^2 + 1)\sqrt{3} + x + x^4 = 0$$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 của $\sqrt{3}$ ta có:

$$\Delta = (2x^2 + 1)^2 - 4(x + x^4) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} \sqrt{3} = \frac{1}{2}(2x^2 + 1 + 2x - 1) = x^2 + x \\ \sqrt{3} = \frac{1}{2}(2x^2 + 1 - 2x + 1) = x^2 - x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - \sqrt{3} = 0 \\ x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

Giải 2 phương trình trên ta thu được các nghiệm của phương trình đã cho

$$\text{là: } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$$

c) Điều kiện $x \geq -4$

Ta viết lại phương trình thành:

$$x + 4 + (4x^2 + x - 2)\sqrt{x + 4} + 8x^2 + 2x - 8 = 0. \text{ Coi đây là phương trình}$$

bậc 2 ẩn $\sqrt{x + 4}$ thì

$$\Delta = (4x^2 + x - 2)^2 - 4(8x^2 + 2x - 8) = (4x^2 + x - 6)^2.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} \sqrt{x + 4} = -2x \\ \sqrt{x + 4} = 2x + 1 \end{cases}$$

Giải 2 trường hợp ta thu được các nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{65}}{8} \\ x = \frac{-3 + \sqrt{57}}{8} \end{cases}$$

Ví dụ 5: Giải các phương trình:

$$\text{a) } 3(\sqrt{2x^2 + 1} - 1) = x(1 + 3x + 8\sqrt{2x^2 + 1})$$

$$\text{b) } \sqrt{x^2 + 3x + 6} + \sqrt{2x^2 - 1} = 3x + 1$$

Lời Giải:

a) Ta viết lại phương trình thành: $3x^2 + x + 3 + (8x - 3)\sqrt{2x^2 + 1} = 0$.

Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 1} \geq 0$ suy ra $t^2 = 2x^2 + 1$.

Ta tạo ra phương trình: $mt^2 + (8x - 3)t + (3 - 2m)x^2 + x + 3 - m = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \Delta &= (8x - 3)^2 - 4m[(3 - 2m)x^2 + x + 3 - m] = \\ &= (8m^2 - 12m + 64)x^2 - (48 + 4m)x + 4m^2 - 12m + 9.\end{aligned}$$

$$\text{Ta cần } \Delta'_m = (24 + 2m)^2 - (8m^2 - 12m + 64)(4m^2 - 12m + 9) = 0 \Rightarrow m = 3.$$

Phương trình trở thành: $3t^2 + (8x - 3)t - 3x^2 + x = 0$.

$$\text{Ta có: } \Delta = (8x - 3)^2 - 12(-3x^2 + x) = 100x^2 - 60x + 9 = (10x - 3)^2.$$

$$\text{Từ đó tính được: } \begin{cases} t = \frac{3 - 8x - (10x - 3)}{6} = -3x + 1 \\ t = \frac{3 - 8x + (10x - 3)}{6} = -\frac{x}{3} \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \sqrt{2x^2 + 1} = -3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Trường hợp 2: } \sqrt{2x^2 + 1} = -\frac{x}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 17x^2 + 9 = 0 \end{cases} \text{ VN}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 0$

b) Điều kiện: $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Ta viết lại phương trình thành: } \sqrt{x^2 + 3x + 6} = 3x + 1 - \sqrt{2x^2 - 1}.$$

Bình phương 2 vế và thu gọn ta được phương trình mới:

$$10x^2 + 3x - 6 - 2(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 0$$

Đặt $t = \sqrt{2x^2-1} \geq 0$ suy ra $t^2 = 2x^2 - 1$.

Ta tạo ra phương trình: $mt^2 - 2(3x+1)t + (10-2m)x^2 + 3x - 6 + m = 0$. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta' &= (3x+1)^2 - m[(10-2m)x^2 + 3x - 6 + m] \\ &= (2m^2 - 10m + 9)x^2 + (6-3m)x - m^2 + 6m + 1.\end{aligned}$$

Ta cần $\Delta_m = (6-3m)^2 - 4(2m^2 - 10m + 9)(-m^2 + 6m + 1) = 0 \Rightarrow m = 4$.

Phương trình trở thành: $4t^2 - 2(3x+1)t + 2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Ta có: $\Delta' = (3x+1)^2 - 4(2x^2 + 3x - 2) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

Từ đó tính được:
$$\begin{cases} t = \frac{3x+1-(x-3)}{4} = \frac{x+2}{2} \\ t = \frac{3x+1+(x-3)}{4} = \frac{2x-1}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\sqrt{2x^2-1} = \frac{x+2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 7x^2 - 4x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2+2\sqrt{15}}{7} \\ x = \frac{2-2\sqrt{15}}{7} \end{cases}$.

Đối chiếu với điều kiện ban đầu ta thấy chỉ có $x = \frac{2+2\sqrt{15}}{7}$ là thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: $\sqrt{2x^2-1} = \frac{2x-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 + 4x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$.

Đối chiếu với điều kiện ban đầu ta thấy chỉ có $x = \frac{-1+\sqrt{6}}{2}$ là thỏa mãn điều kiện .

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x = \frac{2+2\sqrt{15}}{7}$ và $x = \frac{-1+\sqrt{6}}{2}$

SỬ DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Dấu hiệu:

Các bài toán giải được bằng hằng đẳng thức thường có dạng:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = e(fx + h)\sqrt{px + q} \text{ hoặc}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = e^3\sqrt[3]{px^3 + qx^2 + rx + s}$$

Phương pháp chung để giải các bài toán này là: Đặt $\sqrt[n]{f(x)} = y$ với $n = 2$ hoặc $n = 3$.

Đưa phương trình ban đầu về dạng $m(Ax + B)^3 + n(Ax + B) = my^3 + ny$

Ví dụ 1:

a) $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x - 5}$

b) $8x^3 - 13x^2 + 7x = 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3}$

c) $\sqrt[3]{24x - 11} - 16x\sqrt{2x - 1} - 1 = 0$.

d) $x^3 = 6\sqrt[3]{6x + 4} + 4$

e) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$

f) $(4x^2 + 1)x = (3 - x)\sqrt{5 - 2x}$

Giải:

Những phương trình có dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = (ex + h)\sqrt{px + q}$ (1)

Hoặc: $ax^3 + bx^2 + cx + d = e\sqrt[3]{px^3 + qx^2 + rx + h}$ (2)

ta thường giải theo cách:

Đối với (1): Đặt $\sqrt{px + q} = y$ khi đó $x = \frac{y^2 - p}{q}$ thay vào phương trình ta

đưa về dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = Ay^3 + By$. Sau đó biến đổi phương trình thành: $A[u(x)]^3 + B.u(x) = Ay^3 + By$

Đối với (2): Đặt $g\sqrt[3]{px^3 + qx^2 + rx + h} = y$ sau đó tạo ra hệ tạm:

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d = s.y \\ g^3(px^3 + qx^2 + rx + h) = y^3 \end{cases} \text{ cộng hai phương trình ta thu được:}$$

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = s.y + y^3$ sau đó đưa phương trình về dạng:

$$[u(x)]^3 + s.[u(x)] = y^3 + s.y$$

Ta xét các ví dụ sau:

a) Đặt $\sqrt[3]{3x-5} = y$ ta có hệ sau:
$$\begin{cases} 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = y \\ 3x - 5 = y^3 \end{cases} \quad (I)$$

Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta thu được:

$8x^3 - 36x^2 + 56x - 30 = y^3 + y$ (*). Ta nghĩ đến việc biến đổi về trái thành:

$$[A(x)]^3 + A(x) \text{ để phương trình có dạng: } [A(x)]^3 + A(x) = y^3 + y$$

$$\text{Giả sử: } 8x^3 - 36x^2 + 56x - 30 = (2x + a)^3 + (2x + a).$$

Đồng nhất hệ số của $x^2 \Rightarrow a = -3$

Như vậy phương trình (*) có dạng: $(2x-3)^3 + (2x-3) = y^3 + y$ (1)

Đặt $z = (2x-3)$. Từ phương trình ta suy ra $z^3 + z = y^3 + y$

$$z^3 + z = y^3 + y \Leftrightarrow (z-y)(z^2 + zy + y^2 + 1) = 0. \text{ Do}$$

$$z^2 + zy + y^2 + 1 = \left(z + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 > 0, \forall y, z \Rightarrow PT \Leftrightarrow y = z$$

$$\Leftrightarrow y = 2x-3 \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = 2x-3$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4} \\ x = 2 \end{cases}$$

Qua ví dụ trên ta thấy việc chuyển qua hệ tạm (I) giúp ta hình dung bài toán được dễ dàng hơn.

b) Đặt $\sqrt[3]{x^2+3x-3} = y$ ta thu được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 8x^3 - 13x^2 + 7x = 2y \\ x^2 + 3x - 3 = y^3 \end{cases}. \text{ Cộng hai phương trình của hệ ta thu được:}$$

$$8x^3 - 12x^2 + 10x - 3 = y^3 + 2y \Leftrightarrow (2x-1)^3 + 2(2x-1) = y^3 + 2y (*)$$

Đặt $z = 2x-1$ ta thu được phương trình: $z^3 + 2z = y^3 + 2y$

$$\Leftrightarrow (z-y)(z^2 + zy + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow z = y \Leftrightarrow y = 2x-1 \Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 7x = 4x-2$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{89}}{16} \end{cases}$$

c) Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$. Ta đặt $\sqrt{2x-1} = a \geq 0$ thì phương trình đã cho trở

$$\text{thành: } \sqrt[3]{12a^2+1} - 8a^3 - 8a - 1 = 0 \Leftrightarrow 8a^3 + 8a + 1 = \sqrt[3]{12a^2+1}$$

Đặt $\sqrt[3]{12a^2+1}=y$ ta thu được hệ sau: $\begin{cases} 8a^3+8a+1=y \\ 12a^2+1=y^3 \end{cases}$. Cộng hai phương

trình của hệ với nhau ta thu được: $(2a+1)^3+(2a+1)=y^3+y$ (*)

Đặt $2a+1=z$ ta có: $z^3+z=y^3+y$.

Tương tự như các bài toán trên ta suy ra $z=y$.

Theo (*) ta có $\Leftrightarrow y=2a+1 \Rightarrow 8a^3+8a+1=2a+1 \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Kết luận: $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình:

d) Đặt $y=\sqrt[3]{6x+4}$ ta có hệ sau:

$$\begin{cases} x^3-4=6y \\ 6x+4=y^3 \end{cases} \Leftrightarrow x^3+6x=y^3+6y \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+6)=0 \Leftrightarrow x=y$$

Thay vào phương trình ta có:

$$x^3-6x-4=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{cases}$$

e) Đặt $y=\sqrt[3]{2x-1}$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x^3+1=2y \\ 2x=y^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow x^3+2x=y^3+2y \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0 \Leftrightarrow x=y$$

$$\text{Suy ra } x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$f) (4x^2 + 1)x = (3 - x)\sqrt{5 - 2x}$$

Đặt $\sqrt{5 - 2x} = y \geq 0 \Rightarrow x = \frac{5 - y^2}{2}$ thay vào ta có:

$$(4x^2 + 1)x = \left(3 - \frac{5 - y^2}{2}\right)y \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = y^3 + 2y \Leftrightarrow (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2 + 2) = 0$$

$$y = 2x \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \end{cases} \text{ Thử lại ta thấy chỉ có}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \text{ thỏa mãn điều kiện bài toán.}$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

$$a) 7x^2 - 13x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{x(1 + 3x - 3x^2)}$$

$$b) 3x^3 + 4x^2 - 1 = \sqrt[3]{x^6 + 2x^3 + x^2}$$

$$c) \left(\frac{x^3 - x}{2}\right)^3 = 2x + \sqrt[3]{\frac{x^3 + 3x}{2}}$$

Giải:

a) Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình:

Chia hai vế phương trình cho x^3 ta thu được:

$$\frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3}.$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3} \text{ ta thu được hệ sau: } \begin{cases} \frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2y \\ \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3 = y^3 \end{cases}.$$

Cộng hai phương trình của hệ ta có:

$$\frac{8}{x^3} - \frac{12}{x^2} + \frac{10}{x} - 3 = y^3 + 2y \Leftrightarrow \left(\frac{2}{x} - 1\right)^3 + 2\left(\frac{2}{x} - 1\right) = y^3 + 2y \quad (*)$$

Đặt $z = \frac{2}{x} - 1$ ta thu được:

$$z^3 + 2z = y^3 + 2y \Rightarrow (z - y)(z^2 + yz + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow z = y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = \frac{4}{x} - 2 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} - \frac{13}{x^2} + \frac{3}{x} + 2 = 0.$$

$$\text{Suy ra } x = 1, x = \frac{-5 \pm \sqrt{89}}{4}$$

b) Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế phương trình cho x thì thu được phương trình tương đương

$$\text{là: } 3x^2 + 4x - \frac{1}{x} = \sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}}.$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt[3]{x^3 + 2 + \frac{1}{x}} \text{ ta có hệ sau: } \begin{cases} 3x^2 + 4x - \frac{1}{x} = y \\ x^3 + 2 + \frac{1}{x} = y^3 \end{cases}. \text{ Cộng hai phương}$$

trình của hệ ta có: $(x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y$.

$$\text{Từ phương trình ta suy ra } y = x+1 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - \frac{1}{x} = x+1$$

$$3x^2 + 4x - \frac{1}{x} = x+1 \Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

c) Ta viết lại phương trình thành: $(x^3 - x)^3 - 16x = 4\sqrt[3]{4x^3 + 12x}$

Đặt $y = \sqrt[3]{4x^3 + 12x}$ ta có hệ tậm sau:
$$\begin{cases} (x^3 - x)^3 - 16x = 4y \\ 4x^3 + 12x = y^3 \end{cases}$$

Cộng hai vế hệ phương trình ta thu được: $(x^3 - x)^3 + 4(x^3 - x) = y^3 + 4y$

Đặt $z = x^3 - x$ ta có:

$$z^3 + 4z = y^3 + 4y \Leftrightarrow (z - y)(z^2 + yz + y^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow (x^3 - x)^3 = 4x^3 + 12x$$

$$\Leftrightarrow x \left[x^2 (x^2 - 1)^3 - 4x^2 - 12 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $x = 0; x = \pm\sqrt{3}$

PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Những kỹ thuật qua trọng để giải phương trình giải bằng phương pháp đánh giá ta thường sử dụng là:

- + Dùng hằng đẳng thức: $A_1^2 + A_2^2 + \dots A_n^2 = 0 \Leftrightarrow A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$
- + Dùng các bất đẳng thức cổ điển Cô si, Bunhiacopxki, Bất đẳng thức hình học
- + Dùng phương pháp khảo sát hàm số để tìm $GTLN, GTNN$:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $4x^2 + 3x + 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$.

b) $13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 0$.

c) $x(5x^3 + 2) - 2(\sqrt{2x+1} - 1) = 0$ (Trích đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Trường chuyên Amsterdam 2014).

$$d) \quad \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

Lời giải:

a) Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Ta viết lại phương trình thành:

$$4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + (x+3) + 2x - 1 - 2\sqrt{2x-1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{2x-1} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{x+3} = 0 \\ \sqrt{2x-1} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

b) Điều kiện: $x \geq 1$. Ta viết lại phương trình thành:

$$13\left(x - 1 - \sqrt{x-1} + \frac{1}{4}\right) + 9\left(x + 1 - 3\sqrt{x+1} + \frac{9}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 + 9\left(\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - \frac{1}{2} = 0 \\ \sqrt{x+1} - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

c) Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Ta viết lại phương trình thành:

$$5x^4 + (2x + 1 - 2\sqrt{2x+1} + 1) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 + (\sqrt{2x+1} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{2x+1} - 1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

d) Điều kiện $x \geq 1; y \geq 4; z \geq 9$ ta viết lại phương trình thành:

$$2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} + 6\sqrt{z-9} = x + y + z$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 + y - 4 - 4\sqrt{y-4} + 4 + z - 9 - 6\sqrt{z-9} + 9 = 0$$

$$(\sqrt{x-1} - 1)^2 + (\sqrt{y-4} - 2)^2 + (\sqrt{z-9} - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-4} - 2 = 0 \\ \sqrt{z-9} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \\ z = 18 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $16x^4 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^3 + x}$

b) $4x^4 + x^2 + 3x + 4 = 3\sqrt[3]{16x^3 + 12x}$

c) $96x^2 - 20x + 2 + x\sqrt{8x-1} - \sqrt[3]{4x(8x+1)} = 0$

Giải:

a) Vì $16x^4 + 5 > 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi

$$4x^3 + x \geq 0 \Leftrightarrow x(4x^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0. \text{ Để ý rằng khi } x = \frac{1}{2} \text{ thì } VT = VP$$

nên ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cô si sao cho dấu bằng xảy ra khi

$$x = \frac{1}{2}. \text{ Mặt khác khi } x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x^3 + x = 4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 1 \text{ thì Từ những cơ sở}$$

trên ta có lời giải như sau: Theo bất đẳng thức Cô si dạng

$$3\sqrt[3]{abc} \leq a + b + c \text{ ta có}$$

$$\text{Ta có } 6\sqrt[3]{4x^3 + x} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{(4x^3 + x) \cdot 1 \cdot 1} \leq 2(4x^3 + x + 1 + 1) = 8x^3 + 2x + 4$$

Mặt khác ta có:

$$16x^4 + 5 - (8x^3 + 2x + 4) = 16x^4 - 8x^3 - 2x + 1 = (2x - 1)^2(4x^2 + 2x + 1) \geq 0$$

Suy ra $VT \geq VP$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2(2x - 1)^2(2x^2 + 2x + 1) = 0 \\ 4x = (4x^3 + x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Tóm lại: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$

b) Vì $4x^4 + x^2 + 3x + 4 > 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi

$$16x^3 + 12x \geq 0 \Leftrightarrow 4x(4x^2 + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0. \text{ Để ý rằng khi } x = \frac{1}{2} \text{ thì}$$

$VT = VP$ nên ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cô si sao cho dấu bằng

xây ra khi $x = \frac{1}{2}$. Khi $x = \frac{1}{2}$ thì $16x^3 + 12x = 16 \cdot \frac{1}{8} + 12 \cdot \frac{1}{2} = 8$. Từ những cơ sở trên ta có lời giải như sau:

Theo bất đẳng thức Cô si dạng $3\sqrt[3]{abc} \leq a + b + c$ ta có

$$3\sqrt[3]{(16x^3 + 12x)} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(16x^3 + 12x) \cdot 8 \cdot 8} \leq \frac{1}{4}(16x^3 + 12x + 8 + 8) = 4x^3 + 3x + 4$$

Mặt khác ta có:

$$4x^4 + x^2 + 3x + 4 - (4x^3 + 3x + 4) = 4x^4 - 4x^3 + x^2 = x^2(2x - 1)^2 \geq 0.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x^2(2x - 1)^2 = 0 \\ 2 = x(4x^2 + 3) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

- c) Điều kiện: $x \geq \frac{1}{8}$. Để ý rằng $x = \frac{1}{8}$ là nghiệm của phương trình nên ta có lời giải như sau:

$$\sqrt[3]{4x(8x+1)} = \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot 4x(8x+1)} \leq \frac{1+1+4x(8x+1)}{3} = \frac{32x^2+4x+2}{3}.$$

Mặt khác ta có

$$96x^2 - 20x + 2 - \frac{32x^2 + 4x + 2}{3} = \frac{256x^2 - 64x + 4}{3} = \frac{4(8x-1)^2}{3} \geq 0.$$

$$\text{Suy ra } 96x^2 - 20x + 2 + x\sqrt{8x-1} - \sqrt[3]{4x(8x+1)} \geq 0.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x = \frac{1}{8}$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4x-3}} = \frac{2}{x}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{4x-1}} + \frac{1}{\sqrt{5x-2}} \right)$$

$$c) \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1} = \sqrt[4]{\frac{4x-1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{5x-2}{3}}$$

$$d) \sqrt{-x^2+4x+21} - \sqrt{-x^2+3x+10} = \sqrt{2}$$

Giải:

$$a) \text{ Điều kiện: } x > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Phương trình đã cho có thể viết lại như sau: } \frac{x}{\sqrt{2x-1}} + \frac{x}{\sqrt[4]{4x-3}} = 2.$$

$$+ \text{ Ta chứng minh: } \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \geq 1. \text{ Thật vậy bất đẳng thức tương đương với}$$

$$x^2 \geq 2x-1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0. \text{ Điều này là hiển nhiên đúng.}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

$$\text{Ta chứng minh: } \frac{x}{\sqrt[4]{4x-3}} \geq 1. \text{ Thật vậy bất đẳng thức tương đương với}$$

$$x^4 \geq 4x-3 \Leftrightarrow x^4 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + 2x + 3) \geq 0$$

Điều này là hiển nhiên đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

Từ đó suy ra $VT \geq 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

$$b) \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{4x-1}} + \frac{1}{\sqrt{5x-2}} \right)$$

$$\text{Ta thấy rằng: } 4x-1 = x+x+2x-1; 5x-2 = x+2x-1+2x-1$$

Theo bất đẳng thức cô si ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)(\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1}) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \geq \frac{9}{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1}}$$

Mặt khác ta có

$(\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1})^2 \leq 3(4x-1) \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1} \leq \sqrt{3(4x-1)}$ (Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 3 số)

Từ đó suy ra: $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4x-1}}$

Tương tự ta cũng có: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5x-2}}$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta có:

$$\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{2x-1}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4x-1}} + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5x-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{4x-1}} + \frac{1}{\sqrt{5x-2}} \right).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

c) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng:

$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ ta có:

$$\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1}\right)^2 \leq (1+1+1)(\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1}).$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1} \leq \sqrt{3(\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1})}$$

Lại có $\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x-1} \leq \sqrt{3(4x-1)}$ suy ra

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1} \leq \sqrt[4]{3\sqrt{3(4x-1)}} = \sqrt[4]{27(4x-1)}$$

(1)

$$\text{Tương tự: } \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1} \leq \sqrt[4]{3\sqrt{3(5x-2)}} = \sqrt[4]{27(5x-2)}$$

(2)

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều (1), (2) ta có:

$$3\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1}\right) \leq \sqrt[4]{27(4x-1)} + \sqrt[4]{27(5x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2x-1} \leq \sqrt[4]{\frac{4x-1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{5x-2}{3}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

c) Ta có

$$VT = \sqrt{(x+3)(7-x)} - \sqrt{(x+2)(5-x)} = \frac{x+11}{\sqrt{(x+3)(7-x)} + \sqrt{(x+2)(5-x)}}$$

Điều kiện xác định là $-2 \leq x \leq 5$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{(x+3)(7-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2x+6)(7-x)} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} [(2x+6) + (7-x)] = \frac{x+13}{2\sqrt{2}}$$

và

$$\sqrt{(x+2)(5-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2x+4)(5-x)} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} [(2x+4) + (5-x)] = \frac{x+9}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Nhu vậy: } \sqrt{(x+3)(7-x)} + \sqrt{(x+2)(5-x)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (x+11)$$

$$\text{Từ đó ta suy ra: } VT = \frac{x+11}{\sqrt{(x+3)(7-x)} + \sqrt{(x+2)(5-x)}} \geq \sqrt{2} \text{ . Dấu bằng}$$

$$\text{xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} (2x+6) = (7-x) \\ (2x+4) = (5-x) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vậy $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình:

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4)$$

$$b) \sqrt{13x^2-6x+10} + \sqrt{5x^2-13x+\frac{17}{2}} + \sqrt{17x^2-48x+36} = \frac{1}{2}(36x-8x^2-21)$$

$$c) \sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{-x^2+x+1} = x^2-x+2$$

Giải:

$$\text{Điều kiện: } x \geq 1 \vee x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski cho hai bộ số $(1; 1; -x)$ và

$$(\sqrt{3x^2-1}; \sqrt{x^2-x}; \sqrt{x^2+1}) \text{ ta có: } VT(*) \leq \sqrt{(x^2+2)(5x^2-x)}. \text{ Dấu “=”}$$

xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Do $x \geq 1 \vee x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $5x^2-x > 0$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} VP(*) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}[5x^2-x+2(x^2+1)] \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{(5x^2-x)2(x^2+2)} \\ &= \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = -1$ và $x = \frac{4}{3}$. Từ đó ta có nghiệm của PT(*) là:

$$x = -1$$

b) Ta có:

$$VT = \sqrt{(3x+1)^2 + (2x-3)^2} + \sqrt{\left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{x^2 + (4x-6)^2}$$

$$\geq |3x+1| + \left|2x - \frac{5}{2}\right| + |x| \Rightarrow VT \geq \left|3x+1 + 2x - \frac{5}{2} + x\right| = \left|6x - \frac{3}{2}\right| \geq 6x - \frac{3}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{3}{2}$. Mặt khác ta cũng có:

$$VP = \frac{1}{2} [12x - 3 - 2(4x^2 - 12x + 9)] = \frac{1}{2} [12x - 3 - 2(2x-3)^2] \leq \frac{1}{2} (12x - 3) = 6x - \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{3}{2}$. Từ đó ta có nghiệm của phương

$$\text{trình là } x = \frac{3}{2}$$

c) Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{1(x^2 + x - 1)} \leq \frac{1}{2} [1 + (x^2 + x - 1)] = \frac{x^2 + x}{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } 1 = (x^2 + x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\sqrt{-x^2 + x + 1} = \sqrt{1(-x^2 + x + 1)} \leq \frac{1}{2} [1 + (-x^2 + x + 1)] = \frac{-x^2 + x + 2}{2}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } 1 = (-x^2 + x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } VT \leq \frac{x^2 + x}{2} + \frac{-x^2 + x + 2}{2} = (x + 1).$$

$$\text{Mặt khác ta có } x^2 - x + 2 - (x + 1) = (x - 1)^2 \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{14-x^3} + x = 2(1 + \sqrt{x^2 - 2x - 1})$

b) $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = 12(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$

Giải:

a) Điều kiện: $x^2 - 2x - 1 \geq 0$

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt[3]{14-x^3} = 2\sqrt{x^2 - 2x - 1} + 2 - x$

Do $2\sqrt{x^2 - 2x - 1} \geq 0$ nên từ phương trình ta cũng suy ra:

$$\sqrt[3]{14-x^3} \geq 2-x$$

Lập phương 2 vế ta thu được: $14-x^3 \geq (2-x)^3 \Leftrightarrow 6(x^2 - 2x - 1) \leq 0$

Như vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là: $x = 1 + \sqrt{2}$ và $x = 1 - \sqrt{2}$

b) Điều kiện: $0 \leq x \leq 4$.

Xét $f(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}$ trên $[0; 4]$ Dễ thấy

$$\sqrt{12} = f(0) \leq f(x) \leq f(4) = 12 \Rightarrow VT \leq 12 \quad (1)$$

Xét $g(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{4-x}$ trên $[0; 4]$ ta có

Dễ thấy $1 = g(4) \leq g(x) \leq g(0) = \sqrt{5}$. Suy ra $VP \geq 12 \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra phương trình có nghiệm khi $VT = VP = 12 \Leftrightarrow x = 4$.

MỘT SỐ CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ KHÁC

1) Đặt ẩn phụ hoàn toàn để quy về phương trình một ẩn.

- + Điểm mấu chốt của phương pháp này là phải chọn một biểu thức $f(x)$ để đặt $f(x) = t$ sao cho phần còn lại phải biểu diễn được theo ẩn t . Những bài toán dạng này nói chung là dễ.
- + Trong nhiều trường hợp ta cần thực hiện phép chia cho một biểu thức có sẵn ở phương trình từ đó mới phát hiện ẩn phụ. Tùy thuộc vào cấu trúc phương trình ta có thể chia cho $g(x)$ phù hợp (thông thường ta chia cho x^k với k là số hữu tỷ)
- + Đối với những bài toán mà việc đưa về một ẩn dẫn đến phương trình mới phức tạp như: Số mũ cao, căn bậc cao .. thì ta có thể nghĩ đến hướng đặt nhiều ẩn phụ để quy về hệ phương trình hoặc dựa vào các hằng đẳng thức để giải toán.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 = (1 - \sqrt{x})(2x - 3\sqrt{x} + 3)$

b) $x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1$ c) $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 3\sqrt{x}$

d) $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1.$

Giải:

- a) Điều kiện: $x \geq 0$. Phương trình đã cho có thể viết lại như sau:

$$x^2 = (1 - \sqrt{x})[2x + 3(1 - \sqrt{x})] \Leftrightarrow x^2 = 2x(1 - \sqrt{x}) + 3(1 - \sqrt{x})^2. \text{ Ta thấy}$$

$x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Ta chia hai vế cho x^2 thì

thu được: $1 = 2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x}\right) + 3\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x}\right)^2$. Đặt $\frac{1-\sqrt{x}}{x} = t$ ta có phương trình

$$\text{theo } t: 3t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Trường hợp 1: $t = -1$ ta có: $\frac{1-\sqrt{x}}{x} = -1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 0 (VN)$

Trường hợp 2: $t = \frac{1}{3}$ ta có:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{3-\sqrt{21}}{2} (L) \\ \sqrt{x} = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{15+3\sqrt{21}}{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \frac{15+3\sqrt{21}}{2}$

b) Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Vì vậy ta chia hai

$$\text{vế cho } x \text{ thì thu được: } x + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = 2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} - 2 = 0$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}}$ ta thu được phương trình:

$$t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\text{c) Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 - \sqrt{3} \\ x \geq 2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế cho

$\sqrt{x}$ ta thu được: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-4 + \frac{1}{x}} = 3$. Đặt

$t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow t^2 = x + \frac{1}{x} + 2$ theo bất đẳng thức Cô si ta có $t \geq 2$. Thay vào phương trình ta có:

$$\sqrt{t^2 - 6} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t^2 - 6 = t^2 - 6t + 9 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{4} = x + \frac{1}{x} + 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm: $x = 4, x = \frac{1}{4}$

d). Nhận xét: $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình:

Ta chia hai vế cho x khi đó phương trình trở thành:

$x - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 3 = 0$. Đặt $t = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \geq 0$ phương trình trở thành:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $(13 - 4x)\sqrt{2x - 3} + (4x - 3)\sqrt{5 - 2x} = 2 + 8\sqrt{16x - 4x^2 - 15}$

b) $7\sqrt{3x - 7} + (4x - 7)\sqrt{7 - x} = 32$.

Giải:

a) Điều kiện $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$.

Phương trình được viết lại như sau:

$$7(\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x}) - 2[(2x-3)\sqrt{2x-3} + (5-2x)\sqrt{5-2x}] \stackrel{\text{Đặt}}{=} 2 + 8\sqrt{(5-2x)(2x-3)}$$

$$t = \sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} \Rightarrow \sqrt{(5-2x)(2x-3)} = \frac{t^2 - 2}{2}. \text{ Điều kiện } (\sqrt{2} \leq t \leq 2).$$

Phương trình đã cho có dạng: $t^3 - 4t^2 + t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x = 2$

Ngoài ra ta cũng có thể giải phương trình trên bằng cách đưa về hệ.

b) Điều kiện: $\frac{7}{3} \leq x \leq 7$. Phương trình đã cho được viết lại như sau:

$$\left[\frac{1}{2}(3x-7) + \frac{3}{2}(7-x) \right] \sqrt{3x-7} + \left[\frac{1}{2}(7-x) + \frac{3}{2}(3x-7) \right] \sqrt{7-x} = 32$$

$$\Leftrightarrow [(3x-7) + (7-x)] \sqrt{3x-7} + [(7-x) + (3x-7)] \sqrt{7-x} = 64$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x-7} + \sqrt{7-x}$$

$$\Rightarrow t^3 = (3x-7)\sqrt{3x-7} + (7-x)\sqrt{7-x} + 3\sqrt{(3x-7)(7-x)} (\sqrt{3x-7} + \sqrt{7-x})$$

Từ phương trình suy ra $t^3 = 64 \Leftrightarrow t = 4$. Hay $\sqrt{3x-7} + \sqrt{7-x} = 4$

Bình phương 2 vế ta thu được:

$$\sqrt{(3x-7)(7-x)} = 8-x \Leftrightarrow 4x^2 - 44x + 113 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

Tại sao ta phân tích được hai phương trình như trên:

Ta thấy với những phương trình:

$(ax+b)\sqrt{cx+d} + (ex+h)\sqrt{gx+k} + r\sqrt{(cx+d)(gx+k)} + s = 0$ thì một trong những cách xử lý khá hiệu quả là:

Phân tích: $ax+b = m(cx+d) + n(gx+k)$ và

$ex+h = m'(cx+d) + n'(gx+k)$ sau đó ta có thể đặt ẩn phụ trực tiếp , hoặc đặt hai ẩn phụ để quy về hệ.

Ví dụ:

Khi giải phương trình:

$(13-4x)\sqrt{2x-3} + (4x-3)\sqrt{5-2x} = 2 + 8\sqrt{16x-4x^2-15}$ ta thực hiện các phân tích :

+ Giả sử: $13-4x = m(2x-3) + n(5-2x)$.

Đồng nhất hai vế ta suy ra: $\begin{cases} 2m-2n=-4 \\ -3m+5n=13 \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}, n=\frac{7}{2}$

+ Tương tự ta giả sử: $(4x-3) = m'(2x-3) + n'(5-2x) \Rightarrow m'=\frac{7}{2}, n'=\frac{3}{2}$

Khi giải phương trình: $7\sqrt{3x-7} + (4x-7)\sqrt{7-x} = 32$.

Ta thực hiện phân tích: $m(3x-7) + n(7-x) = 7$ và

$p(3x-7) + q(7-x) = 4x-7$ Sau đó đồng nhất 2 vế để tìm m, n, p, q ta

có: $m=\frac{1}{2}; n=\frac{3}{2}; p=\frac{3}{2}; q=\frac{1}{2}$

Như vậy ngoài cách đặt ẩn phụ như trên ta có thể giải các bài toán theo cách khác như sau:

a) Điều kiện $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$.

Đặt $a = \sqrt{2x-3}, b = \sqrt{5-2x}$ thì $a^2 + b^2 = 2$.

Từ cách phân tích trên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ (3a^2 + 7b^2)a + (3b^2 + 7a^2)b = 4 + 16ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 2 \\ 3(a+b)^3 - 2ab(a+b) - 16ab - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 2 \\ 3(a+b)^3 + [2 - (a+b)^2](a+b) + 8[2 - (a+b)^2] - 4 = 0 \end{cases}$$

Đặt $a+b=S, ab=P$ điều kiện $S, P \geq 0; S^2 \geq 4P$.

Ta có hệ mới sau:

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 2 \\ 2S^3 - 8S^2 + 2S + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

b) Đặt $a = \sqrt{3x-7}, b = \sqrt{7-x}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (a+b)^3 = 64 \\ a^2 + 3b^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a^2 + 3b^2 = 14 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta thu được: $a, b \Rightarrow x$.

2) Đặt ẩn phụ hoàn để quy về hệ đối xứng loại 2:

Phương pháp này đặc biệt hiệu quả với các phương trình dạng:

$$ax^2 + bx + c = d\sqrt{ex+h} \text{ hoặc } ax^3 + bx^2 + cx + d = e\sqrt[3]{gx+h}$$

Với mục đích tạo ra các hệ đối xứng hoặc gần đối xứng ta thường làm theo cách:

Đối với những phương trình dạng: $ax^2 + bx + c = d\sqrt{ex+h}$.

Ta đặt $my + n = \sqrt{ex+h}$ thì thu được quan hệ:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = d(my+n) \\ m^2y^2 + 2mny + n^2 = ex+h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bx - dmy + c - dn = 0 \\ m^2y^2 + 2mny - ex + n^2 - h = 0 \end{cases}$$

Ta mong muốn có quan hệ $x = y$. Nếu điều này xảy ra thì từ hệ trên ta sẽ

$$\text{có: } \frac{a}{m^2} = \frac{b-dm}{2mn} = \frac{c-dn}{n^2-h} (*)$$

Công việc còn lại là chọn m, n thỏa mãn (*)

Đối với những phương trình dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = e\sqrt[3]{gx+h}$

Ta đặt: $my + n = \sqrt[3]{gx+h}$ thì thu được hệ:

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d = e(my + n) \\ m^3y^3 + 3m^2ny^2 + 3mn^2y + n^3 = gx + h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx - emy + d - en = 0 \\ m^3y^3 + 3m^2ny^2 + 3mn^2y - gx + n^3 - h = 0 \end{cases}$$

Để thu được quan hệ $x = y$ ta cần: $\frac{a}{m^3} = \frac{b}{3m^2n+3mn^2} = \frac{c-em}{-g} = \frac{d-en}{n^3-h}$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$

b) $\frac{2}{3}\sqrt{4x+1} - 9x^2 + 26x - \frac{37}{3} = 0$

c) $\sqrt[3]{3x-5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25$

d) $27\sqrt[3]{81x-8} = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 54$

Giải:

a) Điều kiện: $x \geq -\frac{5}{4}$. Đặt $my + n = \sqrt{4x+5}$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 = my + n \\ m^2y^2 + 2mny + n^2 = 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x - 2my - 2 - 2n = 0 \\ m^2y^2 + 2mny - 4x + n^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Ta cần tìm m, n để tạo ra quan hệ $x = y \Leftrightarrow \frac{4}{m^2} = \frac{-12-2m}{2mn-4} = \frac{-2-2n}{n^2-5}$

$$\text{Chọn } m = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2-2n}{n^2-5} = 1 \\ \frac{-16}{4n-4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + 2n - 3 = 0 \\ 4n = -12 \end{cases} \Rightarrow n = -3$$

Chú ý:

Việc nhân số 2 vào phương trình (1) của hệ để tạo ra $4x^2 - 12x - 1$ là rất cần thiết để chọn m được chẵn và nhóm $4x^2 - 12x - 2$ thành bình phương biểu thức bậc 2 được dễ hơn.

Từ đó ta có lời giải cho bài toán như sau:

Đặt $2y - 3 = \sqrt{4x + 5}$ thì thu được hệ:

$$\begin{cases} 4x^2 - 12x - 2 = 2(2y - 3) \\ (2y - 3)^2 = 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 3)^2 = 4y + 5 \\ (2y - 3)^2 = 4x + 5 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta có:

$$(2x - 3)^2 - (2y - 3)^2 = 4(y - x) \Leftrightarrow 2(x - y)(4x + 4y - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Trường hợp 1:

$$x = y \Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt{4x + 5} \begin{cases} (2x - 3)^2 = 4x + 5 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3}$$

Trường hợp:

$$y = 2 - x \Leftrightarrow 2(2 - x) - 3 = \sqrt{4x + 5} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 2x)^2 = 4x + 5 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là: $x = 2 + \sqrt{3}, x = 1 - \sqrt{2}$

b) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{4}$.

Phương trình đã cho được viết lại như sau: $9x^2 - 26x + \frac{47}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{4x+1}$

Đặt $my + n = \sqrt{4x+1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x^2 - 26x + \frac{37}{3} = \frac{2}{3}(my + n) \\ m^2 y^2 + 2mny + n^2 = 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 26x - \frac{2}{3}my + \frac{37}{3} - \frac{2}{3}n = 0 \\ m^2 y^2 + 2mny - 4x + n^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Ta cần: $\frac{9}{m^2} = \frac{-26 - \frac{2}{3}m}{2mn - 4} = \frac{\frac{37}{3} - \frac{2}{3}n}{n^2 - 1}$. Chọn

$$m = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-28}{6n - 4} = 1 \\ -\frac{\frac{37}{3} - \frac{2}{3}n}{n^2 - 1} = 1 \end{cases} \Rightarrow n = -4$$

Đặt $3y - 4 = \sqrt{4x+1} \Rightarrow$

Hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (3x - 4)^2 = 2x + 2y + 1 \\ (3y - 4)^2 = 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3y - 4)^2 = 4x + 1 \\ (x - y)(9x + 9y - 22) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3y - 4)^2 = 4x + 1 \\ x = y \\ 9x + 9y - 22 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình ứng với 2 trường hợp trên ta thu được các nghiệm là

$$x = \frac{14 + \sqrt{61}}{9} \text{ và } x = \frac{12 - \sqrt{53}}{9}$$

Chú ý: Ta có thể tìm m, n nhanh hơn bằng cách:

c) Đặt $my + n = \sqrt{4x+5}$ khi đó ta có hệ:
$$\begin{cases} (2x-3)^2 = 2(my+n) + 11 \\ (my+n)^2 = 4x+5 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình cho nhau: $(2x-3)^2 - (my+n)^2 = 2my - 4x + 2n + 6$

Để có quan hệ: $x = y$ ta cần:
$$\begin{cases} 2my = 4x \\ 2n + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 2; n = -3.$$

Tương tự khi giải quyết câu b).

d) Đặt $my + n = \sqrt[3]{3x-5}$ ta có hệ sau:

$$\sqrt[3]{3x-5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 36x^2 + 53x - my - n - 25 = 0 \\ m^3y^3 + 3m^2ny^2 + 3mn^2y - 3x + n^3 + 5 = 0 \end{cases}$$

Ta chọn m, n sao cho $\frac{8}{m^3} = \frac{-36}{3m^2n} = \frac{53-m}{3mn^2-3} = \frac{-n-25}{n^3+5} \Rightarrow m = 2, n = -3$

Đặt $2y-3 = \sqrt[3]{3x-5}$. Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (2x-3)^3 = 2y-3+x-2 \\ (2y-3)^3 = 3x-5 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình cho nhau ta thu được:

$$(2x-3)^3 - (2y-3)^3 = 2y-2x$$

$$\Leftrightarrow 2(x-y) \left[(2x-3)^2 + (2x-3)(2y-3) + (2y-3)^2 + 1 \right] = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Do $(2x-3)^2 + (2x-3)(2y-3) + (2y-3)^2 + 1$

$$= \left[(2x-3) + \left(\frac{2y-3}{2} \right) \right]^2 + \frac{3}{4}(2y-3)^2 + 1 > 0$$

Giải $x = y$ ta có: $(2x-3)^2 = 3x-5 \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 3x-5$

$$\Leftrightarrow (x-2)(8x^2-20x+11)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x=2$, $x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}$

d) Ta viết lại phương trình thành: $27\sqrt[3]{81x-8}=(3x-2)^3-46$

Đặt $3y-2=\sqrt[3]{81x-8}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (3y-2)^3=81x-8 \\ (3x-2)^3=27(3y-2)+46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3y-2)^3=81x-8 \\ (3x-2)^3=81x-8 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình của hệ ta thu được: $(3x-2)^3-(3y-2)^3=81(y-x)$

$$\Leftrightarrow 3(x-y)\left[(3x-2)^2+(3x-2)(3y-2)+(3y-2)^2+27\right]=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Thay vào ta được:

$$(3x-2)^3=27(3x-2)+46 \Leftrightarrow 27x^3-54x^2-33x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3\pm2\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có 3 nghiệm là: $x=0$, $x=\frac{3\pm2\sqrt{5}}{3}$

Chú ý:

+ **Với những phương trình dạng:** $[f(x)]^n+b=a\sqrt[n]{af(x)-b}$ (*)

Bằng phép đặt $t=f(x)$; $y=\sqrt[n]{af(x)-b}$ ta có hệ đối xứng loại 2 là:

$$\begin{cases} t^n+b=ay \\ y^n+b=at \end{cases}$$

+ **Trong phương trình (*)** nếu ta thay a, b bởi các biểu thức chứa x thì cách giải phương trình vẫn như trên. Những phương trình dạng này thường có hình thức và lời giải khá đẹp.

* **Ta xét ví dụ sau:**

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $4x^2 - 11x + 6 = (x-1)\sqrt{2x^2 - 6x + 6}$

b) $8x^3 - 13x + 7 = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$.

Giải:

a) Ta viết lại phương trình thành:

$$(2x-3)^2 + x - 3 = (x-1)\sqrt{(x-1)(2x-3) - (x-3)}$$

Đặt $a = 2x-3, b = \sqrt{(x-1)(2x-3) - (x-3)}$ ta thu được hệ sau:

$$\begin{cases} a^2 + x - 3 = (x-1)b \\ b^2 + x - 3 = (x-1)a \end{cases}. \text{ Trừ hai phương trình của hệ ta được:}$$

$$a^2 - b^2 = (x-1)(b-a) \Leftrightarrow (a-b)(a+b+x-1) = 0$$

Trường hợp 1:

$$a = b \Leftrightarrow 2x-3 = \sqrt{2x^2 - 6x + 6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 2x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} (L) \\ x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} (TM) \end{cases}$$

Trường hợp 2:

$$\begin{aligned} 2x-3 + \sqrt{2x^2 - 6x + 6} + x - 3 &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x} = 6 - 3x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 7x^2 - 30x + 36 = 0 \end{cases} (VN) \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

b) Ta viết lại phương trình thành:

$$(2x-1)^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + x^2 - x - 1}$$

Đặt $a = 2x-1, b = \sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + x^2 - x - 1} = \sqrt[3]{3x^2 - 2}$ ta thu được hệ

phương trình: $\begin{cases} a^3 - (x^2 - x + 1) = (x+1)b \\ b^3 - (x^2 - x + 1) = (x+1)a \end{cases}$. Trừ hai phương trình của hệ

cho nhau ta thu được: $(a-b)(a^2 + ab + b^2 + x + 1) = 0$

Trường hợp 1: $a = b$ ta có:

$$2x-1 = \sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $a^2 + ab + b^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + 4x^2 + 2(2x-1)^2 + 5 = 0(VN)$$

Tóm lại phương trình có 2 nghiệm là $x = 1, x = -\frac{1}{8}$.

3) Một số cách đặt ẩn phụ khác:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x+6}} = 6$

b) $2(x^2 + x + 1)^2 + 2x^2 + 2x - 3 - \sqrt{4x+5} = 0$.

Giải:

a) Đặt
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+6} = z \\ \sqrt[3]{z+6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^3 - x = 6 \\ y^3 - z = 6 \end{cases}$$

Mặt khác với các phép đặt ẩn phụ trên, từ phương trình trong đầu bài, ta có $x^3 - y - 6 = 0$.

Như vậy ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 = y + 6 & (1) \\ y^3 = z + 6 & (2) \\ z^3 = x + 6 & (3) \end{cases}$$

Nhìn thấy hệ trên không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với x, y, z nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $x = \max(x, y, z)$ (x là số lớn nhất trong 3 số x, y, z hay $x \geq y, x \geq z$)

Nếu $x > y$, từ (1) và (2) suy ra $y + 6 = x^3 > y^3 = z + 6 \Rightarrow y > z$

Khi đó từ (2), (3) suy ra $y + 6 = x^3 > y^3 = x + 6 \Rightarrow z > x$. Mâu thuẫn với giả thiết $x \geq z$ ở trên. Do đó phải có $x = y$.

Với $x = y$, từ (1) và (2) suy ra $y = z$

Vậy $x = y = z$

Phương trình (1) trở thành: $x^3 - x - 6 = 0$ hay $(x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$ (4)

Vì $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$ nên PT (4) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) Đặt $y = x^2 + x - 1$ khi đó phương trình đưa về

$$2y^2 + 2(y + 1) = 3 + \sqrt{5 + 4x} \Leftrightarrow y^2 + y - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5 + 4x}}{2}$$

Đặt $z = \frac{-1 + \sqrt{5+4x}}{2}$ điều kiện $z \geq \frac{-1}{2}$.

Ta có $2z+1 = \sqrt{5+4x} \Rightarrow 4z^2 + 4z + 1 = 5 + 4x \Rightarrow z^2 + z - 1 = x$.

Do đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = y \\ y^2 + y - 1 = z \\ z^2 + z - 1 = x \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = y+1 \\ y(y+1) = z+1 \\ z(z+1) = x+1 \end{cases}$$

Do điều kiện $z \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow y \neq -1 \Rightarrow z \neq -1$.

Nhân các phương trình theo vế rồi rút gọn được $xyz = 1$.

Mặt khác từ hệ phương trình (*), cộng các phương trình vế theo vế ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \geq \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \leq 1.$$

Do đẳng thức xảy ra nên phải có $x^2 = y^2 = z^2 = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$ (vì $x, y, z \neq -1$).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2 + 4x + 7} = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 7$

b) $\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}$

c) $\frac{6-2x}{\sqrt{5-x}} + \frac{6+2x}{\sqrt{5+x}} = \frac{8}{3}$

b) $2(5x-3)\sqrt{x+1} + 5(x+1)\sqrt{3-x} = 3(5x+1)$

Giải:

Cách 1: Biến đổi pt như sau:

$$4\sqrt{2x^2+4x+7} = (2x^2+4x+7)^2 - 16(2x^2+4x+7) + 35 \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{2x^2+4x+7} = a$ (với $a \geq \sqrt{5}$), ta có:

$$4a = a^4 - 16a^2 + 35 \Leftrightarrow (a^2 - 6)^2 = (2a + 1)^2 \Leftrightarrow (a^2 - 2a - 7)(a^2 + 2a - 5) = 0 (*)$$

Với $a \geq \sqrt{5}$ thì $a^2 + 2a - 5 > 0$, nên từ (*) suy ra $a^2 - 2a - 7 = 0$, phương trình này có 2 nghiệm là $a = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Đối chiếu với điều kiện $a \geq \sqrt{5}$ chỉ chọn được $a = 1 + 2\sqrt{2}$.

$$\text{Khi đó } \sqrt{2x^2+4x+7} = 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + 2x - (1 + 2\sqrt{2}) = 0 \quad (**)$$

Phương trình (**) có 2 nghiệm là $-1 \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$. Vậy tập nghiệm của PT đã cho là $\{-1 \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\}$.

Cách 2: Biến đổi PT về dạng: $\sqrt{2(x+1)^2+5} = (x+1)^4 - 3(x+1)^2 - 5$

Đặt $(x+1)^2 = u; \sqrt{2(x+1)^2+5} = v, (u \geq 0; v \geq \sqrt{5})$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} u^2 - 3u - 5 = v \\ 2u + 5 = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - u = v^2 + v \\ 2u + 5 = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v - 1 = 0 \\ v = \sqrt{2u + 5} \end{cases}$$

Dẫn đến $u^2 - 4u - 4 = 0$, PT này có 2 nghiệm $2 \pm 2\sqrt{2}$. Do $u \geq 0$ nên chọn $u = 2 + 2\sqrt{2}$. Từ đó suy ra kết quả như cách 1.

b) Điều kiện trên ta được: $x \geq \sqrt{\frac{5}{2}}$ hoặc $-1 \leq x < 0$ (*).

Phương trình (1) tương đương: $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{2x - \frac{5}{x}} = x - \frac{4}{x}$

Đặt $u = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$; $v = \sqrt{2x - \frac{5}{x}}$ với $u \geq 0$; $v \geq 0$. Ta được: $u - v = x - \frac{4}{x}$
(1)

Lại có $v^2 - u^2 = \left(2x - \frac{5}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) = x - \frac{4}{x}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $v^2 - u^2 = u - v \Leftrightarrow (u - v)(u + v + 1) = 0$. Vì

$$u + v + 1 > 0 \text{ nên } u - v = 0 \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Thử lại thấy nghiệm $x = -2$ không thỏa mãn điều kiện, nghiệm $x = 2$ thỏa mãn phương trình.

c) Điều kiện: $-5 < x < 5$.

Đặt: $a = \sqrt{5+x}$; $b = \sqrt{5-x}$ ($a, b > 0$).

Khi đó ta có: $6 - 2x = 2b^2 - 4$; $6 + 2x = 2a^2 - 4$

Khi đó ta có:

$$\frac{2b^2 - 4}{a} + \frac{2a^2 - 4}{b} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow (2b^2 - 4)a + (2a^2 - 4)b = \frac{8}{3}ab$$

$$\Leftrightarrow 2ab(a + b) - 4(a + b) = \frac{8}{3}ab$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2ab(a + b) - 4(a + b) = \frac{8}{3}ab \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab(a + b) - 4(a + b) = \frac{8}{3}ab \\ (a + b)^2 - 2ab = 10 \end{cases}$$

Đặt: $S = a + b$; $P = ab$, $S \geq \sqrt{10}$.

Hệ phương trình trên trở thành:
$$\begin{cases} 2SP - 4S = \frac{8}{3}P \\ S^2 - 2P = 10 \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta có: $P = \frac{S^2 - 10}{2}$ thế lên phương trình trên và rút gọn ta được: $6S^3 - 8S^2 - 84S + 80 = 0 \Leftrightarrow (S - 4)(3S^2 + 8S - 10) = 0 \Leftrightarrow S = 4 \text{ (TM)}$

$$3S^2 + 8S - 10 = 0 \text{ (VN) vì } S > \sqrt{10}.$$

$$S = 4$$

$$\Rightarrow P = 3 \Leftrightarrow \sqrt{5+x} \cdot \sqrt{5-b} = 3 \Leftrightarrow 25 - x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases} \text{ (TM)}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x = 4; x = -4$

d) Điều kiện $-1 \leq x \leq 3$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{3-x} \end{cases}$ ta suy ra $\begin{cases} u^2 = x+1 \\ 3u^2 - 2v^2 = 5x-3 \\ 4u^2 - v^2 = 5x+1 \\ u^2 + v^2 = 4 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$2(3u^2 - 2v^2) + 5uv^2 = 3(4u^2 - v^2) \Leftrightarrow 6u^2(2-u) = v^2(u+3).$$

Thay $v^2 = 4-u$ ta thu được phương trình:

$$\begin{aligned} 2(3u^2 - 2v^2) + 5uv^2 &= 3(4u^2 - v^2) \\ \Leftrightarrow 6u^2(2-u) &= (4-u^2)(u+3) \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ u = \frac{5+\sqrt{145}}{10} \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình là:
$$\begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{7 + \sqrt{145}}{10} \end{cases}$$

Khi gặp các phương trình dạng: $a\sqrt[n]{b+c.f(x)} + d\sqrt[m]{e+h.f(x)} = g$ **ta có thể đặt ẩn phụ theo cách:**

Đặt $\sqrt[n]{b+c.f(x)} = u \Rightarrow f(x) = \frac{u^n - b}{c}$, $\sqrt[m]{e+h.f(x)} = v \Rightarrow f(x) = \frac{v^m - e}{h}$

Từ đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} au + dv = g \\ \frac{u^n - b}{c} - \frac{v^m - e}{h} = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

- a) $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$ b) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt[4]{x^2+x-1} + \sqrt[6]{1-x} = 1$
- c) $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ d) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$

Giải:

a) Điều kiện: $x \leq 12$

Đặt $u = \sqrt[3]{24+x}; v = \sqrt{12-x} \Rightarrow u \leq \sqrt[3]{36}, v \geq 0$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = 6 \\ u^3 + v^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - u \\ u^3 + (6 - u)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - u \\ u(u^2 + u - 12) = 0 (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có 3 nghiệm $u = 0; u = -4; u = 3$ thỏa mãn $u \leq \sqrt[3]{36}$.

Từ đây ta tìm được: $x = -24; x = -88; x = 3$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = -24; x = -88; x = 3$.

b) Điều kiện: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1$.

Ta thấy tổng của biểu thức trong căn bằng 1 nên ta đặt:

$$a = \sqrt{1-x^2}, b = \sqrt[4]{x^2+x-1}, c = \sqrt[6]{1-x}; a, b, c \geq 0.$$

Khi đó ta có hệ:
$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^4+c^6=1 \\ a, b, c \geq 0 \end{cases}$$

$$\forall \begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \leq a \\ b^4 \leq b \Rightarrow a^2+b^4+c^6 \leq 1. \\ c^6 \leq c \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm khi
$$\begin{cases} a = a^2 \\ b = b^4 \\ c = c^6 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ là nghiệm của phương}$$

trình đã cho.

c) Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ thì $\sqrt{x-x^2} = \frac{t^2-1}{2}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình bậc hai với ẩn là t:

$$1 + \frac{t^2-1}{3} = t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t=1; t=2$$

Vậy ta có:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-x^2} = 0 \\ VN (VT < 2) \end{cases} \Leftrightarrow x=0; x=1$$

d) Sử dụng đẳng thức: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

Lập phương 2 vế ta thu được:

$$\Leftrightarrow 2x-3+3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)=2x-3$$

Thay $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$ thì phương trình trở thành:

$$\sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)}=0\Leftrightarrow x=1, x=2, x=\frac{3}{2}$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}=181-14x$

b) $5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\frac{1}{2x}+4$

c) $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$

d) $(x-1)(x+3)+2(x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}=8$

Giải:

a) Điều kiện: $x \geq \frac{6}{7}$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}, (t \geq 0) \Rightarrow 14x + 2\sqrt{49x^2 + 7x - 42} = t^2 - 1$$

BPT đã cho trở thành:

$$t + t^2 - 1 = 181 \Leftrightarrow t^2 + t - 182 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 13 \\ t = -14 \end{cases} \Leftrightarrow t = 13$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} = 13 \quad (*)$$

Vì hàm số $f(x) = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} - 13$ là hàm đồng biến và $f(6) = 0$

Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $x = 6$.

b) Điều kiện: $x > 0$. Phương trình $\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 2\left(x + \frac{1}{4x}\right) + 4$

Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, (t \geq \sqrt{2}) \Rightarrow x + \frac{1}{4x} = t^2 - 1$.

Phương trình trở thành:

$$5t = 2(t^2 - 1) + 4 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{4x} = 3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ là nghiệm của phương trình.}$$

c) Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x + \sqrt{1-x^2})(x^2 - x\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2) = x\sqrt{2(1-x^2)}$$

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \frac{t^2-1}{2} = x\sqrt{1-x^2}$. Ta có phương trình:

$$t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) = \sqrt{2} \frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t^2 + 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \pm 1 \end{cases}$$

+ Nếu: $t = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} - x = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow (\sqrt{2} - x)^2 = 1 - x^2 \text{ (do } |x| \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

+ Nếu $t = -\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = -1 - \sqrt{2}$ vô nghiệm, do $VT \geq -1 > VP$

+ Nếu $t = -\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{2} - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 - \sqrt{2} \\ x^2 - (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$.

d). Điều kiện: $\frac{x+3}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ hoặc $x > 1$. Đặt $t = (x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$ thì

$$t^2 = (x-1)(x+3) \text{ ta có phương trình: } t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } t = 2 \Rightarrow (x-1)(x+3) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } t = -4 \text{ thì } (x-1)(x+3) = 16 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 19 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{5} \\ x = -1 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Tóm lại phương trình có 4 nghiệm là:

$$x = \{-1 + 2\sqrt{2}; -1 - 2\sqrt{2}; -1 - 2\sqrt{5}; -1 + 2\sqrt{5}\}.$$

MỘT SỐ BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Giải các phương trình sau:

$$1) \quad x^2 + x + 6 + 2x\sqrt{x+3} = 4(x + \sqrt{x+3}) \quad (1).$$

$$2) \sqrt{x+2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{2x+1}.$$

$$3) \sqrt{x+1} + 2(x+1) = x-1 + \sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-x^2}.$$

$$4) \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x+2)} = \sqrt{x(x-3)}.$$

- 5) Tìm tất cả các số nguyên dương $p > 1$ sao cho phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$x^3 + px^2 + \left(p-1 + \frac{1}{p-1}\right)x + 1 = 0$$

$$6) \sqrt[3]{x^2 - 4x + 31} + x^2 = 4x - 1.$$

$$7) x^4 + \sqrt{x^2 + 2016} = 2016.$$

- 8) Tìm k để phương trình sau có nghiệm:

$$(x^2 + 2)[x^2 - 2x(2k-1) + 5k^2 - 6k + 3] = 2x = 1. \text{ Trích đề thi vào}$$

lớp 10 Chuyên Amsterdam 2002).

9) Cho phương trình $m\sqrt{x^6 + 1} = 3(x^4 + 2)$

- a) Giải phương trình với $m = 10$.
b) Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm.

$$10) x^2 - 2(x+1)\sqrt{x^2 - 1} - 3x^2 + 6x - 1 = 0.$$

$$11) x+1 = \sqrt{2(x+1)} + 2\sqrt{2(x+1)} + 2\sqrt{4(x+1)}.$$

$$12) \frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}} \quad (*).$$

$$13) \sqrt{x+9} = \sqrt{x} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}.$$

$$14) \sqrt{x(3x+1)} - \sqrt{x(x-1)} = 2\sqrt{x^2} \quad (1).$$

$$15) 4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14.$$

$$16) (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3 \quad (1).$$

$$17) \sqrt{12 - \frac{3}{x^2}} + \sqrt{4x^2 - \frac{3}{x^2}} = 4x^2 \quad (*).$$

$$18) (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{1-x} + 1) = 1 \text{ (THPT chuyên KHTN-ĐHQG Hà Nội 2011-2012).}$$

$$19) \text{ Giải bất phương trình: } \sqrt[3]{25x(2x^2+9)} \geq 4x + \frac{3}{x}. \text{ Trích đề thi vòng 2, THPT chuyên Hà Nội Amsterdam 2004-2005}$$

$$20) \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + \sqrt{x(x^2 - x + 1)} \leq \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^3}{x}}$$

$$21) \sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} \leq x^3 + 30$$

$$22) (x+1)\sqrt{2x^2-2x} = 2x^2-3x-2 \text{ (Trích đề tuyển sinh lớp 10 Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2014)}$$

$$23) \sqrt{2x-1} + \sqrt{1-2x^2} = 2\sqrt{x-x^2}. \text{ (Trích đề tuyển sinh lớp 10 PTNK-ĐHQG Tp Hồ Chí Minh 2015).}$$

$$24) 8x^2 + 16x - 20 - \sqrt{x+15} = 0$$

$$25) 4x^2 - 11x + 10 = (x-1)\sqrt{2x^2 - 6x + 2}$$

$$26) x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

$$27) 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{5-x} + 3x^2 - 30x + 71 = 0$$

$$28) (2x^2 - 4x + 1)\sqrt{2x-1} = 4x^2 - 7x + 3$$

$$29) \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$$

$$30) \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + 2 = 0$$

$$31) 5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$$

$$32) \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{2x^2} + \sqrt[3]{2x^2+1}$$

$$33) x^3 + 6x^2 - 2x + 3 = (5x-1)\sqrt{x^3+3}$$

$$34) \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$35) 25x + 9\sqrt{9x^2 - 4} = \frac{2}{x} + \frac{18x}{x^2 + 1}$$

$$36) \sqrt{20x^2 + 80x + 125} \leq 2x + 1 + 4\sqrt{3x + 6}$$

$$37) 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} = 16$$

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1) Giải:

Điều kiện: $x \geq -3$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2x\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x+3} + 6 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{x+3}$$

$$\text{Do đó } (2) \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = 3$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta giải phương trình } x + \sqrt{x+3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+3 = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x+3 = 1-2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{array} \right] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Với } t = 3, \text{ ta giải phương trình } x + \sqrt{x+3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ x = 6 \end{array} \right] \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, x = 1$.

2)

Điều kiện $x \geq -2; x \neq -\frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x+2} = x^2 + 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x+x+1)\sqrt{x+2} = x(x+1) + (x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x+2) - (2x+1)\sqrt{x+2} + x(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2} - x)[\sqrt{x+2} - (x+1)] = 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } \sqrt{x+2} = x \text{ với } x \geq 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = -1 \text{ (loại)}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \sqrt{x+2} = x+1 \text{ với } x \geq -1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2, x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

3)

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x+1}, v = \sqrt{1-x} \quad (u, v \geq 0)$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$u + 2u^2 = -v^2 + v + 3uv \Leftrightarrow v^2 - (3u+1)v + 2u^2 + u = 0 \quad (1)$$

Xem (1) như là phương trình bậc hai đối với biến v , giải ra được $u = v$ hoặc $v = 2u + 1$.

Xét $v = 2u + 1$, vì $v^2 = 1 - x = 2 - u^2 \Rightarrow 2 - u^2 = (2u + 1)^2$

$$\Leftrightarrow 5u^2 + 4u - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{5} (tm) \\ u = -1 (l) \end{cases}. \text{ Với } u = \frac{1}{5} \Rightarrow x = -\frac{24}{25}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0; x = -\frac{24}{25}$.

4) Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \leq -2 \\ x = 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Dễ thấy $x = 0$ là 1 nghiệm và $x = 3$ không là nghiệm của phương trình đã cho

Xét $x \neq 0, x \neq 3$ khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} + \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{4}{x-3}} + \sqrt{1 + \frac{5}{x-3}} = 1$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{1 + \frac{4}{x-3}} \quad (a > 0); \quad b = \sqrt{1 + \frac{5}{x-3}} \quad (b > 0)$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a + b = 1 \\ 5a^2 - 4b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 - \sqrt{21} (l) \\ a = -4 + \sqrt{21} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{4}{x-3} = -4 + \sqrt{21} \Leftrightarrow x = \frac{-2\sqrt{21}}{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0; x = \frac{-2\sqrt{21}}{3}$.

5) Phương trình đã cho tương đương với $(x + p - 1)\left(x^2 + x + \frac{1}{p-1}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -p + 1 & (1) \\ x^2 + x + \frac{1}{p-1} = 0 & (2) \end{cases} \text{ Yêu cầu bài toán tương đương (2) vô nghiệm}$$

hoặc có nghiệm kép $x = -(p-1)$

Vậy $p \in \{2; 3; 4\}$.

6)

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{(x-2)^2 + 27} + (x-2)^2 = 3$.

Do $\sqrt[3]{(x-2)^2 + 27} + (x-2)^2 \geq 3, \forall x$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

7)

Phương trình đã cho tương đương với:

$$x^4 + x^2 + \frac{1}{4} = (x^2 + 2016) - \sqrt{x^2 + 2016} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + 2016} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2} = \sqrt{x^2 + 2016} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 1 = \sqrt{x^2 + 2016} \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2015 = 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{8061}}{2}}; x = \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{8061}}{2}}$.

8) Giải:

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x^2 + 2) \left[x^2 - 2x(2k - 1) + (4k^2 - 4k + 1) + (k^2 - 2k + 1) + 1 \right] = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(x - 2k + 1)^2 + (x^2 + 2)(k - 1)^2 + (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = k = 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $k = 1$.

9) Phương trình đã cho tương đương với:

$$m\sqrt{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = 3 \left[(x^2 + 1) + (x^4 - x^2 + 1) \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{3} = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1}} + \sqrt{\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + 1}}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + 1}}, (t > 0) \text{ ta được: } \frac{m}{3} = t + \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 - \frac{m}{t}t + 1 = 0$$

a) Với $m = 10$ ta có phương trình: $3t^2 - 10t + 3 = 0$

ta suy ra $t = 3$ hoặc $t = \frac{1}{3}$

b) Tự giải

10) Giải:

Điều kiện: $|x| \geq 1$. Phương trình tương đương với

$$x^2 - 1 - 2(x + 1)\sqrt{x^2 - 1} + x^2 + 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - \sqrt{x^2 - 1})(2 - x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \sqrt{x^2 - 1} \\ 2 - x = \sqrt{x^2 - 1} \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp } 3x = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 9x^2 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1 \leq 1 \\ 8x^2 = -1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Trường hợp

$$2-x=\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x^2-4x+4=x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 4x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}.$$

11).Giải:

Điều kiện $x \geq -1$. Ta có $x=3$ là một nghiệm của phương trình.

Với $x > 3$. Đặt $x+1=y, (y > 4)$, phương trình đã cho

$$\text{thành: } y = \sqrt{2y+2\sqrt{2y+2\sqrt{4y}}}.$$

$$\text{Ta có } \sqrt{4y} < \sqrt{y^2} = y \Rightarrow 2\sqrt{4y} < 2y$$

$$\Rightarrow \sqrt{2y+2\sqrt{2y+2\sqrt{4y}}} < \sqrt{2y+2\sqrt{4y}} < \sqrt{2y+2y} = \sqrt{4y} < y$$

Phương trình vô nghiệm.

Với $0 < x < 3$. Chứng minh tương tự, ta có phương trình vô nghiệm.

Vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

12) Giải:

$$\text{Ta có (*) } \Leftrightarrow \frac{4}{x} - x + \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{2x - \frac{5}{x}} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x - \frac{1}{x}}; v = \sqrt{2x - \frac{5}{x}} \text{ thì } u, v \geq 0 \text{ và } u^2 - v^2 = \frac{4}{x} - x$$

$$\text{Do đó (1) thành: } u^2 - v^2 + u - v = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u+v+1) = 0 \Leftrightarrow u = v \text{ (vì } u, v \geq 0)$$

$$\text{Từ đó ta có: } \sqrt{x - \frac{1}{x}} = \sqrt{2x - \frac{5}{x}} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 2x - \frac{5}{x} \geq 0 \quad (2)$$

Phương trình $x - \frac{1}{x} = 2x - \frac{5}{x}$ có nghiệm là $x = \pm 2$

Từ (2) suy ra chỉ có $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

13)

Giải: Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình tương đương với:

$$x+9 = x + \frac{8}{x+1} + \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{9x+1}{x+1} - \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x}{x+1} - \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} - 1 \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} = 1 \Leftrightarrow 8x = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7} \text{ (thỏa mãn)}$$

14) Giải:

Điều kiện: $x \geq 1$. Dễ thấy $x = 0$ là nghiệm của (1)

Với $x \neq 0$, chia hai vế của (1) cho $\sqrt{x^2} \neq 0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 2$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{3 + \frac{1}{x}} \geq 0, v = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \geq 0$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} u - v = 2 \\ u^2 + v^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2 \\ (2 + v)^2 + v^2 = 4 \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

Giải hệ ta được $v = 0, u = 2$ từ đó ta có $x = 1$.

15) Giải:

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x+1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=3$.

16) Giải:

Điều kiện: $x \geq -2$

Nhân hai vế của phương trình (1) với $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2} > 0$, ta được phương trình tương đương:

$$1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5}=1 \\ \sqrt{x+2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 & (l) \\ x=-1 & (tm) \end{cases}$$

17) Giải:

Đặt $y = x^2, y \geq 0$, ta có (*) thành: $\sqrt{12 - \frac{3}{y}} = 4y - \sqrt{4y - \frac{3}{y}}$

Bình phương rồi biến đổi thành: $(\sqrt{4y^2 - 3} - \sqrt{y})^2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - y - 3 = 0$

Do đó các nghiệm của phương trình là $x=1, x=-1$.

18) Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$

Nhân cả tử và mẫu về trái với biểu thức $\sqrt{x+3} + \sqrt{x}$ ta thu được:

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{1-x} + 1) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}(\sqrt{1-x} + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{1-x} + 1 = \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \quad (*)$$

Nếu $x=1$ thì $VT(*) = 3 = VP(*)$ nên $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $0 \leq x < 1$ thì $\sqrt{1-x} > 0 \Rightarrow 3\sqrt{1-x} + 3 > 3$ hay $VT(*) > 3$ với $0 \leq x < 1$

Vì $0 \leq x < 1$ nên $\sqrt{x+3} < \sqrt{1+3} = 2, \sqrt{x} < \sqrt{1} = 1 \Rightarrow VP(*) < 3$

Do đó phương trình đã cho không có nghiệm trong nửa khoảng $[0;1)$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

19) Giải:

Điều kiện: $x \neq 0$

Trường hợp $x > 0$: áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$4x + \frac{3}{x} = \frac{5}{3}x + \frac{2x^2 + 9}{3x} \geq 3\sqrt{\frac{5}{3}x \cdot \frac{5}{3}x \cdot \frac{2x^2 + 9}{3x}} = \sqrt[3]{25x(2x^2 + 9)}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \frac{5}{3}x = \frac{2x^2 + 9}{3x} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$$

Trường hợp $x < 0$: từ phần trên ta thấy, với mọi $x < 0$ đều thỏa mãn bất phương trình

$$\text{Đáp số } \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x < 0 \end{cases}.$$

20) Giải:

Điều kiện $x > 0$

Chia cả hai vế bất phương trình cho $\sqrt{x(x^2+1)}$ và đặt $t = x + \frac{1}{x}, t \geq 2$, ta

đưa về bất phương trình $\sqrt{1 - \frac{1}{t}} \leq t - \sqrt{t - \frac{1}{t}}$

Với điều kiện $t \geq 2$ thì cả hai vế của (1) đều dương. Bình phương hai vế ta đưa về bất phương trình tương đương $\left(\sqrt{t - \frac{1}{t}} - 1\right)^2 \geq 0$

Bất phương trình này nghiệm đúng với mọi $t \geq 2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 0$.

21) .Giải:

Điều kiện: $2 \leq x \leq 4$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} \leq \sqrt{\frac{x-2+4-x}{2}} = 1$;

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{\sqrt{x-2} \cdot 1} \leq \frac{\sqrt{x-2} + 1}{2} \leq \frac{\frac{x-2+1}{2} + 1}{2} = \frac{x+1}{4};$$

$$\sqrt[4]{4-x} \leq \frac{-x+7}{2}; 6x\sqrt{3x} = 2\sqrt{x^3 \cdot 27} \leq x^3 + 27$$

Do đó $VT \leq VP$ với mọi x thỏa mãn $2 \leq x \leq 4$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $2 \leq x \leq 4$.

22) Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 2x} \geq 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x = t^2$. Phương trình trở thành :
 $t^2 - (x+1)t - x - 2 = 0$. Ta có

$$\Delta = x^2 + 2x + 1 + 4x + 8 = (x+3)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1-(x+3)}{2} = -1 \\ t = \frac{x+1+(x+3)}{2} = x+2 \end{cases}. \text{ Do } t \geq 0 \text{ ta chỉ}$$

$$\text{cần giải: } \sqrt{2x^2 - 2x} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 6x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3 + \sqrt{13}.$$

$$\text{23) Điều kiện: } \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 1 - 2x^2 \geq 0 \\ x - x^2 \geq 0 \end{cases}. \text{ Bình phương 2 vế ta thu được:}$$

$$2x - 1 + 1 - 2x^2 + 2\sqrt{(2x-1)(1-2x^2)} = 4(x - x^2)$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 2x - 2\sqrt{(2x-1)(1-2x^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1-2x^2} - \sqrt{2x-1}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 2x-1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện nài toán chỉ có nghiệm $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

24) Ta viết lại phương trình thành:

$$16x^2 + 32x - 40 - 2\sqrt{x+15} = 0 \Leftrightarrow (4x+4)^2 - 56 = \sqrt{4x+60}$$

Đặt $\sqrt{4x+60} = 4y+4$ ta có hệ sau:

$$\begin{cases} (4y+4)^2 = 4x+60 \\ (4x+4)^2 - 56 = 4y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4y+4)^2 = 4x+60 \\ (4x+4)^2 = 4y+60 \end{cases}.$$

Trừ từng vế 2 phương trình của hệ ta có:

$$(4x+4)^2 - (4y+4)^2 = 4(y-x) \Leftrightarrow 16(x-y)(x+y+8) = 4(y-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 4(x+y+8)=1 \end{cases}$$

Giải phương trình ứng với 2 trường hợp ta thu được: $x=1; x=\frac{-9+\sqrt{221}}{9}$

25) Điều kiện:
$$\begin{cases} x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ta viết lại phương trình thành:

$$(2x-3)^2 + (x+1) = (x-1)\sqrt{(x-1)(2x-3) - (x+1)}$$

Đặt $\begin{cases} u = 2x-3 \\ v = \sqrt{(x-1)(2x-3) - (x+1)} \end{cases}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^2 + x + 1 = (x-1)v \\ v^2 + x + 1 = (x-1)u \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình ta có:

$$(u-v)(u+v+x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u=-v-x+1 \end{cases}$$

Giải theo hai trường hợp ta thu được phương trình vô nghiệm.

26) Cách 1: Ta viết lại phương trình thành:

$$x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

Chia phương trình cho $(x^2 + x + 1) > 0$ ta thu được:

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right) - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right)}. \text{ Đặt } t = \sqrt{\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right)} > 0$$

Ta có phương trình: $2t^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{Giải } \sqrt{\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 1$$

* **Cách 2:**

Xét $x > 0$ chia hai vế phương trình ta có: $x - 3 + \frac{1}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}}$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \geq 2$ ta có phương trình: $t - 3 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{t^2 - 1}$

Xét $x < 0$ chia hai vế phương trình ta có: $x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}}$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ ta có phương trình: $t - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{t^2 - 1}$

27) Điều kiện: $1 \leq x \leq 5$. Phương trình được viết lại:

Ta viết lại phương trình thành:

$$2\sqrt{x-1} - 4 + 3\sqrt{5-x} + 3x^2 - 30x + 75 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{(x-5)}{\sqrt{x-1}+2} + 3\sqrt{5-x} + (x-5)(3x-15) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{(x-5)}{\sqrt{x-1}+2} + 3\sqrt{5-x} + (x-5)(3x-15) = 0 \begin{cases} x=5 \\ \frac{-2\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-1}+2} + 3 - \sqrt{5-x}(3x-15) = 0 \end{cases}$$

Ta thấy $-\sqrt{5-x}(3x-15) \geq 0 \forall x \in [1;5]$

Ta chứng minh: $\frac{-2\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-1}+2} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} + 6 - 2\sqrt{5-x} \geq 0$ nhưng điều

này là hiển nhiên đúng do: $2\sqrt{5-x} \leq 2\sqrt{5-1} = 4$ nên $6 - 2\sqrt{5-x} > 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$

28) Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Đặt $u = x-1; v = \sqrt{2x-1}$ phương trình đã cho trở thành

$$(2u^2 - 1)v = (2v^2 - 1)u \Leftrightarrow (u-v)(2uv+1) = 0$$

$$+ \text{ Nếu } u=v \Rightarrow x-1 = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}$$

$$+ \text{ Nếu } 2uv+1=0 \Leftrightarrow 2(1-x)\sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

Mặt khác ta có: $2(1-x) < 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$; $\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{2-1} = 1$ nên phương trình đã cho vô nghiệm

Kết luận: $x = 2 + \sqrt{2}$

29) Sử dụng đẳng thức: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } &\Leftrightarrow 2x - 3 + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)} \left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} \right) = 2x - 3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3} \\ \sqrt[3]{(x-1)(x-2)}(2x-3) = 0 \end{cases} (*) \Leftrightarrow x=1; x=2; x=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

30)

$$\text{Điều kiện: } -1 < x < 1. \text{ Đặt } t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow t^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} + 1.$$

$$\text{PT đã cho thành: } 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2;$$

$$* \quad t = -2 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$* \quad t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ hệ vô nghiệm.}$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

31)

$$\text{Điều kiện. } x \geq -1$$

$$\begin{aligned} \text{PT } &\Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 2(x^2-x+1) + 2(x+1) \\ &\Leftrightarrow 2\frac{x+1}{x^2-x+1} - 5\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} + 2 = 0 \text{ (Do: } x^2-x+1 > 0 \forall x) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}, t \geq 0, \text{ ta có: } 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$* \quad t = 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-x+1} = 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ PT vô nghiệm}$$

$$* \quad t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-x+1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2-5x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

32) Do $VT \geq 1$ nên $\Rightarrow VP \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$.

$$\text{Ta có PT} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2x^2+1} - \sqrt[3]{2x^2+2} \right) + \left(\sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{2x^2+1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-2x-1}{\sqrt[3]{(2x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(2x^2+1)(2x+2)} + \sqrt[3]{(2x^2+2)^2}} + \frac{2x^2-2x-1}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{2x^2(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x^2+1)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ là nghiệm của phương trình đã cho.}$$

33) Điều kiện: $x \geq -\sqrt[3]{3}$.

Ta thấy $x = \frac{1}{5}$ không là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1} = \sqrt{x^3+3}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1} - 2x = \sqrt{x^3+3} - 2x \Leftrightarrow \frac{x^3-4x^2+3}{5x-1} = \sqrt{x^3+3} - 2x \quad (1)$$

$$* \text{ Nếu } \sqrt{x^3+3} - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^3-4x^2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ (x-1)(x^2-3x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$$

Khi đó (1) đúng $\Rightarrow x = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$ là một nghiệm của phương trình.

$$* \text{ Nếu } x \neq \frac{3-\sqrt{21}}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{x^3-4x^2+3}{5x-1} = \frac{x^3-4x^2+3}{\sqrt{x^3+3}+2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+3=0 & (1) \\ \sqrt{x^3+3}+2x=5x-1 & (2) \end{cases}$$

Ta thấy: (1) có 2 nghiệm $x=1; x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^3+3} = 3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^3 - 9x^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ (x-1)(x^2-8x-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 + 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $x = 1; x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}; x = 4 + 3\sqrt{2}.$

34) Điều kiện: $x > -4$

$$PT \Leftrightarrow 2 \left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} - 1 \right) + x^2 - 3 = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{x^2+x+1}{x+4}}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + 1} + x^2 - 3 + \frac{4 - (x^2+1)}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-3)}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)} + x+4} + x^2 - 3 + \frac{x^2-3}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3) \left[\frac{2}{(x+4)(x^2+x+1) + x+4} + 1 + \frac{1}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

35) Điều kiện: $|x| \geq \frac{2}{3}$

* Với $x \geq \frac{2}{3}$, phương trình đã cho tương đương với:

$$25 + \frac{9\sqrt{9x^2 - 4}}{x} = \frac{2}{x^2} + \frac{18}{x^2 + 1} \quad (1)$$

Để thấy phương trình (1) có VT > 25 và do $x \geq \frac{2}{3}$ ta có $VP \leq \frac{9}{2} + \frac{162}{13} < 25$
nên phương trình đã cho vô nghiệm

* Với $x \leq -\frac{2}{3}$ phương trình đã cho tương đương với

$$25 - 9\sqrt{9 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{x^2} + \frac{18}{x^2 + 1} \quad (2)$$

Đặt $\frac{1}{x^2} = t \left(0 < t \leq \frac{9}{4} \right)$, phương trình (2) thành:

$$\begin{aligned} 25 - 9\sqrt{9 - 4t} &= 2t + \frac{18t}{1+t} \Leftrightarrow 9 - 9\sqrt{9 - 4t} = 2t + \frac{18t}{1+t} - 16 \\ \Leftrightarrow \frac{36(t-2)}{\sqrt{9-4t}+1} &= \frac{2(t-2)(t+4)}{t+1} \Leftrightarrow (t-2) \left(\frac{18}{\sqrt{9-4t}+1} - \frac{t+4}{t+1} \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Lưu ý rằng với $0 < t \leq \frac{9}{4}$ có $\frac{18}{\sqrt{9-4t}+1} \geq \frac{18}{4}$ và $\frac{t+4}{t+1} = 1 + \frac{3}{t+1} < 4 < \frac{18}{4}$

nên $\frac{18}{\sqrt{9-4t}+1} - \frac{t+4}{t+1} > 0$.

$$\text{Vậy (3)} \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

KL: Phương trình có 1 nghiệm $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

36) Điều kiện: $x \geq -2$

BPT được viết lại: $\sqrt{5(2x+1)^2 + 20(3x+6)} \leq 2x+1 + 4\sqrt{3x+6}$

Đặt $a = 2x + 1$; $b = \sqrt{3x+6}$; BPT $\Leftrightarrow \sqrt{5a^2 + 20b^2} \leq a + 4b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 4b \geq 0 \\ 5a^2 + 20b^2 \leq (a + 4b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b$$

$$2x + 1 = \sqrt{3x + 6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận: Nghiệm của bất phương trình là: $x = 1$

37) Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

$$\text{Bình phương 2 vế ta có : } x^2 \left(13\sqrt{1-x^2} + 9\sqrt{1+x^2} \right)^2 = 256$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\left(\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{1-x^2} + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{1+x^2} \right)^2 \leq (13+27)(13-13x^2+3+3x^2) = 40(16-10x^2)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi: } 10x^2(16-10x^2) \leq \left(\frac{16}{2} \right)^2 = 64$$

$$\text{Dấu bằng} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3} \\ 10x^2 = 16-10x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

CHỦ ĐỀ 7: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI 1:

a) Một hệ phương trình ẩn x, y được gọi là hệ phương trình đối xứng loại 1 nếu mỗi phương trình ta đổi vai trò của x, y cho nhau thì phương trình đó không đổi

b) Tính chất

Nếu (x_0, y_0) là một nghiệm thì hệ (y_0, x_0) cũng là nghiệm

c) Cách giải: Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ quy hệ phương trình về 2 ẩn S, P

Chú ý: Trong một số hệ phương trình đôi khi tính đối xứng chỉ thể hiện trong một phương trình. Ta cần dựa vào phương trình đó để tìm quan hệ S, P từ đó suy ra qua hệ x, y .

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y + 2xy = 2 \\ x^3 + y^3 = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ (x + y)(8 + xy) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x + y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$

Giải:

a) Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} S+2P=2 \\ S(S^2-3P)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\frac{2-S}{2} \\ S\left(S^2-\frac{6-3S}{2}\right)=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2S^3+3S^2-6S-16=0 \Leftrightarrow (S-2)(2S^2+7S+8)=0 \Leftrightarrow S=2 \Rightarrow P=0$$

Suy ra x, y là hai nghiệm của phương

$$\text{trình: } X^2-2X=0 \Leftrightarrow X=0, X=2$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

b) Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=x.y \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} S(S^2-3P)=19 \\ S(8+P)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP=-8S \\ S^3-3(2-8S)=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP=-8S \\ S^3+24S-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-6 \end{cases}$$

Suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2-X-6=0 \Leftrightarrow X_1=3; X_2=-2$$

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm $(x, y) = (-2; 3), (3; -2)$

c) Đặt $a=\sqrt[3]{x}, b=\sqrt[3]{y}$ hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} 2(a^3+b^3)=3(a^2b+b^2a) \\ a+b=6 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S=a+b \\ P=ab \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ thì hệ đã cho trở thành.

$$\begin{cases} 2(S^3-3SP)=3SP \\ S=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(36-3P)=3P \\ S=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=8 \end{cases}$$

Suy ra a, b là 2 nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 6X + 8 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 2; X_2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow x = 8 \\ b = 4 \Rightarrow y = 64 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \Rightarrow x = 64 \\ b = 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm $(x; y) = (8; 64), (64; 8)$

d) Điều kiện: $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x, y \geq -1 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x \cdot y \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S - \sqrt{P} = 3 \\ S + 2 + 2\sqrt{S + P + 1} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 3; P = (S - 3)^2 \\ 2\sqrt{S + (S - 3)^2 + 1} = 14 - S \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq S \leq 14; P = (S - 3)^2 \\ 4(S^2 + 8S + 10) = 196 - 28S + S^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq S \leq 14; P = (S - 3)^2 \\ S^2 + 30S - 52 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 9 \Rightarrow x = y = 3 \end{cases}. \text{ Vậy hệ đã cho có nghiệm } (x; y) = (3; 3). \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3y(1+y) + x^2y^2(2+y) + xy^3 - 30 = 0 \\ x^2y + x(1+y+y^2) + y - 11 = 0 \end{cases}$

Giải:

a) Đặt $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$ điều kiện $a, b \geq 0$.

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} \sqrt{a^4 + b^4} + \sqrt{2ab} = 8\sqrt{2} \\ a + b = 4 \end{cases}$. Ta viết lại hệ

phương trình thành: $\begin{cases} \sqrt{(a+b)^4 - 4ab(a+b)^2 + 2a^2b^2} + \sqrt{2ab} = 8\sqrt{2} \\ a + b = 4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = a + b \\ P = ab \end{cases}$ điều kiện $\begin{cases} S^2 \geq 4P \\ S, P \geq 0 \end{cases}$ thì hệ đã cho trở thành.

$$\begin{cases} \sqrt{256 - 64P - 6P^2} + \sqrt{2P} = 8\sqrt{2} \\ S = 4 \end{cases} \Leftrightarrow S = P = 4 \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = 4$$

Ngoài ra ta cũng có thể giải ngắn gọn hơn như sau:

$$\begin{cases} \sqrt{2(x^2 + y^2)} + 2\sqrt{xy} = 16 \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 + y^2)} = x + y \Leftrightarrow (x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy hệ có một cặp nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 4)$

b) Điều kiện: $x + y > 0$.

Biến đổi phương trình (1):

$$x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 1 + \frac{2xy}{x+y} - 2xy = 0$$

Đặt $x + y = S, xy = P$ ta có phương trình: $S^2 + \frac{2P}{S} - 2P - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow S^3 + 2P - 2SP - S = 0 \Leftrightarrow S(S^2 - 1) - 2P(S - 1) = 0 \Leftrightarrow (S - 1)(S^2 + S - 2P) = 0$$

.

Vì $S^2 > 4P, S > 0$ suy ra $S^2 + S - 2P > 0$. Do đó $S = 1$

Với $x + y = 1$ thay vào (2) ta được: $1 = (1 - y)^2 - y \Leftrightarrow y = 0, y = 3$

Xét $x + y + 1 = \frac{2xy}{x + y} \Leftrightarrow x + y + 1 = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + y = 0$ (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 0), (-2; 3)$.

c) Điều kiện: $xy \neq 0$.

Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) = 5 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 9 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) = S \\ \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) = P \end{cases}$$

Hệ trở thành:

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 9 \\ S = 5 \end{cases} \Leftrightarrow S = 5, P = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2; y + \frac{1}{y} = 3 \\ x + \frac{1}{x} = 3; y + \frac{1}{y} = 2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; y = 1 \end{cases}. \text{ Vậy hệ đã cho có nghiệm:}$$

$$(x; y) = \left(1; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; 1\right).$$

d) Hệ tương đương với :
$$\begin{cases} xy(x+y)(x+y+xy) = 30 \\ xy(x+y) + x + y + xy = 11 \end{cases}$$

Đặt $xy(x+y) = a; xy + x + y = b$. Ta thu được hệ:

$$\begin{cases} ab = 30 \\ a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5; b = 6 \\ a = 6; b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} xy(x+y) = 5 \\ xy + x + y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} xy(x+y) = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} xy(x+y) = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 1 \\ x = 1; y = 2 \end{cases} \quad (L)$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} xy(x+y) = 5 \\ xy + x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} xy = 5 \\ x + y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}; y = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}; y = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm: $(x; y) = (1; 2), (2; 1), \left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}; \frac{5 \mp \sqrt{21}}{2} \right)$.

II) HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI 2

Một hệ phương trình 2 ẩn x, y được gọi là đối xứng loại 2 nếu trong hệ phương trình ta đổi vai trò x, y cho nhau thì phương trình trở thành phương trình kia.

+ Tính chất.: Nếu $(x_0; y_0)$ là 1 nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm

+ Phương pháp giải:

Trừ vế với vế hai phương trình của hệ ta được một phương trình có dạng

$$(x-y)[f(x;y)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ f(x;y)=0 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^3 + 3x - 1 + \sqrt{2x+1} = y \\ y^3 + 3y - 1 + \sqrt{2y+1} = x \end{cases}$$

d)

Giải:

a) Điều kiện: $x, y \geq 0$. Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được:

$$\begin{aligned} x^2 + \sqrt{x} - (y^2 + \sqrt{y}) &= 2(y-x) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})[(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})] &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) > 0$$

nên phương trình đã cho tương đương với: $x = y$.

Hay

$$x^2 - 2x + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{x} = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có 3 cặp nghiệm: $(x;y) = (0;0), (1;1), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

$$\text{b) Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + 6x - y^2 - 6 = yx^2 + y \\ yx^2 + 6y - x^2 - 6 = xy^2 + x \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$2xy(y-x) + 7(x-y) + (x-y)(x+y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2xy+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y - 2xy + 7 = 0 \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } x = y \text{ thay vào hệ ta có: } x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = 3 \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } x + y - 2xy + 7 = 0 \Leftrightarrow (1-2x)(1-2y) = 15.$$

Mặt khác khi cộng hai phương trình của hệ đã cho ta được:

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y + 12 = 0 \Leftrightarrow (2x-5)^2 + (2y-5)^2 = 2. \text{ Đặt } a = 2x-5, b = 2y-5$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ (a+4)(b+4) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 2 \\ ab + 4(a+b) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ ab = -1 \\ a+b = -8 \\ ab = 31 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} a+b = 0 \\ ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (3; 2), (2; 3)$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} a+b = -8 \\ ab = 31 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x, y) = (2; 2), (3; 3), (2; 3), (3; 2)$

$$\text{c) Điều kiện: } x \geq -\frac{1}{2}; y \geq -\frac{1}{2}$$

Để ý rằng $x = y = -\frac{1}{2}$ không phải là nghiệm.

Ta xét trường hợp $x + y \neq -1$

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được:

$$x^3 + 3x - 1 + \sqrt{2x+1} - (y^3 + 3y - 1 + \sqrt{2y+1}) = y - x$$

$$\Leftrightarrow (x-y)[x^2 + xy + y^2] + 4(x-y) + \frac{2(x-y)}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[x^2 + xy + y^2 + 4 + \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}} \right] = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Khi $x = y$ xét phương trình:

$$x^3 + 2x - 1 + \sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x + \sqrt{2x+1} - 1 = 0$$

$$x(x^2 + 1) + \frac{2x}{\sqrt{2x+1} + 1} = 0 \Leftrightarrow x \left[x^2 + 1 + \frac{2}{\sqrt{2x+1} + 1} \right] = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tóm lại hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x = y = 0$

HỆ CÓ YẾU TỐ ĐẲNG CẤP ĐẲNG CẤP

- + Là những hệ chứa các phương trình đẳng cấp
- + Hoặc các phương trình của hệ khi nhân hoặc chia cho nhau thì tạo ra phương trình đẳng cấp.

Ta thường gặp dạng hệ này ở các hình thức như:

$$+ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ ex^2 + gxy + hy^2 = k \end{cases},$$

$$+ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = dx + ey \\ gx^2 + hxy + ky^2 = lx + my \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ gx^3 + hx^2y + kxy^2 + ly^3 = mx + ny \end{cases} \dots\dots$$

Một số hệ phương trình tính đẳng cấp được giấu trong các biểu thức chứa cần đòi hỏi người giải cần tinh ý để phát hiện:

Phương pháp chung để giải hệ dạng này là: Từ các phương trình của hệ ta nhân hoặc chia cho nhau để tạo ra phương trình đẳng cấp bậc n :

$$a_1x^n + a_kx^{n-k}.y^k \dots + a_ny^n = 0$$

Từ đó ta xét hai trường hợp:

$y = 0$ thay vào để tìm x

$$+ \quad y \neq 0 \text{ ta đặt } x = ty \text{ thì thu được phương trình: } a_1t^n + a_kt^{n-k} \dots + a_n = 0$$

+ Giải phương trình tìm t sau đó thế vào hệ ban đầu để tìm x, y

Chú ý: (Ta cũng có thể đặt $y = tx$)

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x + y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x + y)^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải:

$$a) \text{ Ta biến đổi hệ: } \begin{cases} x^3 + y^3 = 8x + 2y \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$$

Để ý rằng nếu nhân chéo 2 phương trình của hệ ta có:

$6(x^3 + y^3) = (8x + 2y)(x^2 + 3y^2)$ đây là phương trình đẳng cấp bậc 3: Từ đó ta có lời giải như sau:

Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y = tx$. Khi đó hệ thành:

$$\begin{cases} x^3 - 8x = t^3 x^3 + 2tx \\ x^2 - 3 = 3(t^2 x^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1 - t^3) = 2t + 8 \\ x^2(1 - 3t^2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{t + 4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(1 - t^3) = (t + 4)(1 - 3t^2) \Leftrightarrow 12t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$* \quad t = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x^2(1 - 3t^2) = 6 \\ y = \frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}.$$

$$* \quad t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{78}}{13} \\ y = \mp \frac{\sqrt{78}}{13} \end{cases}.$$

Suy ra hệ phương trình có các cặp nghiệm:

$$(x, y) = (3, 1); (-3, -1); \left(\frac{4\sqrt{78}}{13}, \frac{\sqrt{78}}{13} \right); \left(-\frac{4\sqrt{78}}{13}, -\frac{\sqrt{78}}{13} \right)$$

b). Phương trình (2) của hệ có dạng:

$$\begin{aligned}
xy(x^2 + y^2) + 2 &= x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(xy - 1) - 2(xy - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (xy - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x + y) = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

TH2:

$$\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 = 2(x + y) \quad (*) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Nếu ta thay $x^2 + y^2 = 2$ vào phương trình (*) thì thu được phương trình đẳng cấp bậc 3: $5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 = (x^2 + y^2)(x + y)$

Từ đó ta có lời giải như sau:

Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ.

$$\text{Xét } y \neq 0 \text{ đặt } x = ty \text{ thay vào hệ ta có: } \begin{cases} 5t^2y^3 - 4ty^3 + 3y^3 = 2(ty + y) \\ t^2y^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Chia hai phương trình của hệ ta được:

$$\begin{aligned}
\frac{5t^2 - 4t + 3}{t^2 + 1} &= \frac{t + 1}{1} \Leftrightarrow t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 3} + 2y - 3 = 0 \\ 2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{3x} + \frac{2x}{3y} = \frac{x + \sqrt{y}}{2x^2 + y} \\ 2(2x + \sqrt{y}) = \sqrt{2x + 6} - y \end{cases}$$

Giải:

a) Điều kiện: $x^2 + 2y + 3 \geq 0$.

Phương trình (2) tương đương:

$$2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x^2 + 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^3 + 3y(x+1)^2 + 4y^3 = 0$$

Đây là phương trình đẳng cấp giữa y và $x+1$.

+ Xét $y = 0$ hệ vô nghiệm

+ Xét $y \neq 0$. Đặt $x+1 = ty$ ta thu được phương trình: $2t^3 + 3t^2 + 4 = 0$

$$\text{Suy ra } t = -2 \Leftrightarrow x+1 = -2y$$

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$\sqrt{x^2 - x + 2} = x + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{14}{9} \Rightarrow y = \frac{5}{18}.$$

$$\text{Vậy hệ có một cặp nghiệm: } (x; y) = \left(-\frac{14}{9}; \frac{5}{18}\right).$$

b) Dễ thấy phương trình (1) của hệ là phương trình đẳng cấp của x và $\sqrt{y}$

Điều kiện: $y > 0; -3 \leq x \neq 0$.

Đặt $\sqrt{y} = tx \Rightarrow y = t^2 x^2$ thay vào (1) ta được: $\frac{1}{3x} + \frac{2x}{3t^2 x^2} = \frac{x+tx}{2x^2+t^2 x^2}$

Rút gọn biến x ta đưa về phương trình ẩn t :

$$(t-2)^2(t^2+t+1)=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{y}=2x \geq 0.$$

Thay vào (2) ta được:

$$4x^2+8x=\sqrt{2x+6} \Leftrightarrow 4x^2+10x+\frac{25}{4}=2x+6+\sqrt{2x+6}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x+\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+6}+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Giải ra ta được $x = \frac{\sqrt{17}-3}{4} \Rightarrow y = \frac{13-3\sqrt{17}}{2}.$

Vậy nghiệm của hệ $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{17}-3}{4}; \frac{13-3\sqrt{17}}{2}\right).$

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} 3x^3 - y^3 = \frac{1}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2xy - 2x = 1 \\ x^3 - 3x - 3xy = 6 \end{cases}$$

Giải:

a) Ta có thể viết lại hệ thành:
$$\begin{cases} (3x^3 - y^3)(x+y) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Ta thấy vế trái của phương trình (1) là bậc 4. Để tạo ra phương trình đẳng cấp ta sẽ thay vế phải thành $(x^2 + y^2)^2$.

Như vậy ta có:

$$(3x^3 - y^3)(x + y) = (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 - 2y^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + 2y)(2x^2 + xy + y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y \\ 2x^2 + xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

+ Nếu $2x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{4}x^2 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ không thỏa mãn.

+ Nếu $x = y$ ta có $2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

+ Nếu $x = -2y \Leftrightarrow 5y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$

Tóm lại hệ phương trình có các cặp nghiệm:

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

b) Điều kiện $y \geq -1$. Ta viết lại hệ thành:
$$\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2x(y+1) = 1 \\ x^3 - 3x(y+1) = 6 \end{cases}$$

Ta thấy các phương trình của hệ đều là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với $x, \sqrt{y+1}$

Dễ thấy $y = -1$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $y > -1$. Đặt $x = t\sqrt{y+1}$ thay vào hệ ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{(y+1)^3} [t^2 - 2t] = 1 \\ \sqrt{(y+1)^3} [t^3 - 3t] = 6 \end{cases} \Leftrightarrow t^3 - 3t - 6(t^2 - 2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

+ Nếu $t = 0$ thì $x = 0$. Không thỏa mãn hệ

$$+ \text{ Nếu } t = 3 \Leftrightarrow 27\sqrt{(y+1)^3} - 9\sqrt{(y+1)^3} = 6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$$

$$\text{Vậy hệ có 1 cặp nghiệm duy nhất } (x; y) = \left(\sqrt[3]{9}; \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1 \right)$$

Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} xy + x^2\sqrt{y} = 2 \\ 2xy^2 + (x^3 + 2x - 3)y + x^3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + xy + x + 3 = 0 \\ (x+1)^2 + 3(y+1) + 2(xy - \sqrt{x^2y + 2y}) = 0 \end{cases}$$

Giải:

a) Điều kiện: $y \geq 0$. Phương trình (2) của hệ có dạng:

$$2xy(y+1) + x^3(y+1) = 3(y+1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 2xy + x^3 = 3 \end{cases}$$

Trường hợp $y = -1$ không thỏa mãn điều kiện

$$\text{Trường hợp } 2xy + x^3 = 3 \text{ ta có hệ: } \begin{cases} 2xy + x^3 = 3 \\ xy + x^2\sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

Vế trái của các phương trình trong hệ là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với $x, \sqrt{y}$. Dễ thấy $y > 0$. Ta đặt $x = t\sqrt{y}$ thì thu được hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{y^3}(2t + t^3) = 3 \\ \sqrt{y^3}(t + t^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{t^2 + 2}{t + 1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } t = 1 \text{ thì } x = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$+ \text{ Nếu } t = \frac{1}{2} \text{ thì } x = \frac{1}{2}\sqrt{y} \Leftrightarrow y = 4x \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow y = \frac{4}{\sqrt[3]{9}}$$

Tóm lại hệ có các nghiệm: $(x; y) = (1; 1), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{4}{\sqrt[3]{9}}\right)$

b) Điều kiện: $x^2y + 2y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$.

Từ phương trình thứ nhất ta có: $xy = -x^2 - x - 3$ thay vào phương trình thứ hai ta thu được:

$$(x+1)^2 + 3(y+1) - 2x^2 - 2x - 6 - 2\sqrt{y(x^2+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 - 3y + 2\sqrt{y(x^2+2)} = 0$$

Đây là phương trình đẳng cấp bậc 2 đối với $\sqrt{y}$ và $\sqrt{x^2+2}$

Đặt $\sqrt{y} = t\sqrt{x^2+2}$ ta thu được: $3t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases} (L)$

Khi $t = 1$ ta có: $y = x^2 + 2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta thu được: $x = -1 \Rightarrow y = 3$

Tóm lại hệ phương trình có một cặp nghiệm $(x; y) = (1; -3)$

Ví dụ 5: Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \\ \frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4}} - \frac{y}{2} \end{cases} & \quad \text{b) } \begin{cases} x^2y - 3x - 1 = 3x\sqrt{y}(\sqrt{1-x} - 1)^3 \\ \sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + \sqrt{xy} = 4y \end{cases} \end{aligned}$$

Giải:

a) Điều kiện: $y \neq 0, x + y \neq 0, \frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4} \geq 0$.

Phương trình (2) tương đương:

$$\frac{x^2}{8y} + \frac{4x+3y}{6} = 2\sqrt{\frac{x^3}{12y} + \frac{x^2}{16}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{8y} + \frac{4x+3y}{6} = 2\sqrt{\frac{x^2}{8y} \cdot \left(\frac{4x}{6} + \frac{3y}{6}\right)}.$$

Đây là phương trình đẳng cấp đối với $\frac{x^2}{8y}$ và $\frac{4x+3y}{6}$

Ta thấy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{x^2}{8y}$ và $\frac{4x+3y}{6}$ cùng dấu

hay $\frac{x^2}{8y} \geq 0, \frac{4x+3y}{6} \geq 0$.

Đặt $\frac{x^2}{8y} = a, \frac{4x+3y}{6} = b$ suy ra $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{8y} = \frac{4x+3y}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6y \\ x = -\frac{2}{3}y \end{cases}.$$

TH1: $x = 6y$ thay vào (1) ta có:

$$\frac{4}{9}y^2 + y^2 - 16y = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{28}{37} \Rightarrow x = -\frac{168}{37} (L) \\ y = \frac{4}{7} \Rightarrow x = \frac{24}{7} \end{cases}.$$

TH2: $x = -\frac{2}{3}y$ thay vào (1) ta có:

$$\frac{4}{9}y^2 + y^2 - 16y = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{12}{13} (L) \\ y = 12 \Rightarrow x = -8 (TM) \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{24}{7}; \frac{4}{7}\right), (-8; 12)$.

b) Điều kiện:
$$\begin{cases} xy \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Đề ý rằng phương trình thứ hai của hệ là phương trình đẳng cấp đối với x, y . Ta thấy nếu $y = 0$ thì từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $x = 0$, cặp nghiệm này không thỏa mãn hệ.

Xét $y > 0$. Ta chia phương trình thứ hai của hệ cho y ta thu được:

$$\sqrt{8\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} + 4} + \sqrt{\frac{x}{y}} = 4. \text{ Đặt } \sqrt{\frac{x}{y}} = t \text{ ta thu được phương trình}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{8t^4 - 3t^2 + 4} = 4 - t &\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 8t^4 - 3t^2 + 4 = t^2 - 8t + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 8t^4 - 4t^2 + 8t - 12 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 2t^4 - t^2 + 2t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ (t-1)(2t^3 + 2t^2 + t + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \end{aligned}$$

Khi $t = 1 \Rightarrow x = y$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành: $x^3 - 3x - 1 = 3\sqrt{x}(\sqrt{1-x} - 1)^3$.

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$. Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn phương trình.

Ta xét $0 < x \leq 1$. Chia bất phương trình cho $x^3 > 0$ ta thu được phương

trình: $1 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 3\left(\sqrt{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$. Đặt $\frac{1}{x} = t \Rightarrow t \geq 1$ phương trình trở

thành: $t^3 + 3t^2 - 1 = 3(\sqrt{t} - \sqrt{t-1})^3 \Leftrightarrow (t^3 + 3t^2 - 1)(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})^3 = 3$

Xét $f(t) = (t^3 + 3t^2 - 1)(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})^3$ Dễ thấy $f(t) \geq f(1) = 3$ suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $t = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Tóm lại hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$

Chú ý: Ta cũng có thể tìm quan hệ x, y dựa vào phương trình thứ hai của hệ theo cách:

Phương trình có dạng:

$$\begin{aligned} \sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} - 3y + \sqrt{xy} - y &= 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)(8x+5y)}{\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + 3y} + \frac{(x-y)y}{\sqrt{xy} + y} = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \frac{8x+5y}{\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + 3y} + \frac{y}{\sqrt{xy} + y} = 0 \end{cases} &(3). \text{ Vì } x, y > 0 \text{ nên ta suy ra} \\ x = y \end{aligned}$$

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Biến đổi tương đương là phương pháp giải hệ dựa trên những kỹ thuật cơ bản như: Thế, biến đổi các phương trình về dạng tích, cộng trừ các phương trình trong hệ để tạo ra phương trình hệ quả có dạng đặc biệt...

* Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{4-2y} + \sqrt{5+2y-(x-1)^2} = 5 & (1) \\ 3x^4 + (x-y)^2 = 6x^3y + y^2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^3 - 12x = y^3 - 6y^2 + 16 \\ x^2 + y^2 + xy - 4x - 6y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2xy - x + 2y = 3 \\ x^3 + 4y^3 = 3x + 6y^2 - 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \sqrt{y^2 - 7x - 6} - \sqrt[3]{y(x-6)} = 1 \\ \sqrt{2(x-y)^2 + 6x - 2y + 4} - \sqrt{y} = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

Giải:

$$a). \text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -1 \\ y \leq 2 \\ 5 + 2y \geq (x-1)^2 \end{cases}$$

Xuất phát từ phương trình (2) ta có:

$$\begin{aligned} 3x^4 - 6x^3y + (x-y)^2 - y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^3(x-2y) + x(x-2y) &= 0 \Leftrightarrow x(x-2y)(3x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2y \end{cases} \end{aligned}$$

Với $x = 0$ thay vào (1) ta có:

$$1 + \sqrt{4-2y} + \sqrt{4+2y} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{4-2y} + \sqrt{4+2y} = 4$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\left(\sqrt{4-2y} + \sqrt{4+2y} \right)^2 \leq 2(4-2y+4+2y) = 16 \Leftrightarrow \sqrt{4-2y} + \sqrt{4+2y} \leq 4$$

Dấu = xảy ra khi: $4-2y = 4+2y \Leftrightarrow y = 0$

Hệ có nghiệm: $(0; 0)$

Với: $x = 2y$. Thay vào phương trình trên ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{5+x-(x-1)^2} &= 5 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5 \\ (*) \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x} = \frac{t^2-5}{2}$. Thay vào phương trình ta có: $t + \frac{t^2-5}{2} = 5 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = 3 \end{cases}$.

Khi $t = 3 \Rightarrow \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x} = 2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Tóm lại hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 0), \left(3; \frac{3}{2}\right)$

Nhận xét : Điều kiện $t > 0$ chưa phải là điều kiện chặt của biến t

Thật vậy ta có: $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 5 + 2\sqrt{(x+1)(4-x)} \Rightarrow t^2 \geq 5$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cô si ta có

$$2\sqrt{(x+1)(4-x)} \leq 5 \Rightarrow t^2 \leq 10 \Leftrightarrow t \in [\sqrt{5}; \sqrt{10}]$$

b) Hệ viết lại dưới dạng $\begin{cases} x^3 - 12x = (y-2)^3 - 12(y-2) \\ x^2 + x(y-4) + (y-3)^2 = 0 \end{cases}$

Đặt $t = y - 2$. Ta có hệ :

$$\begin{cases} x^3 - 12x = t^3 - 12t \\ x^2 + x(t-2) + (t-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-t)(x^2 + t^2 + xt - 12) = 0 & (*) \\ x^2 + t^2 + xt - 2(x+t) + 1 = 0 & (2*) \end{cases}$$

Từ (*) suy ra $\begin{cases} x^2 + t^2 + xt - 12 = 0 & (3*) \\ x = t \end{cases}$

- Với $x = t$ thay vào (2*) ta có phương trình $3x^2 - 4x + 1 = 0$

Từ đây suy ra 2 nghiệm của hệ là $(x; y) = (1; 3), \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$

- Với (3*) kết hợp với (2*) ta có hệ

$$\begin{cases} (x+t)^2 - xt - 12 = 0 \\ (x+t)^2 - xt - 2(x+t) + 1 = 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+t = \frac{13}{2} \\ xt = \frac{121}{4} \end{cases} (VN) . \text{ Do } (x+t)^2 < 4xt$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(x; y) = (1; 3), \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$

c) Đưa hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} (x+1)(2y-1) = 2 \\ (x+1)^3 + \frac{1}{2}(2y-1)^3 = 3(x+1)^2 + \frac{3}{2}(2y-1) - 5 \end{cases}$$

Đặt: $a = x+1$; $b = 2y-1$.

Khi đó ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} ab = 2 \\ a^3 + \frac{1}{2}b^3 = 3a^2 + \frac{3}{2}b - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 2 \\ 2a^3 + b^3 = 6a^2 + 3b - 10 \end{cases}$$

Từ hệ phương trình ban đầu ta nhận được nghiệm là $x = y = 1$ nên ta sẽ có hệ này có nghiệm khi: $a = 2$; $b = 1$

Do đó ta sẽ phân tích hệ về dạng: $\begin{cases} (a-2)b = 2(1-b) \\ (a-2)^2(a+1) = (b-1)^2(b+2) \end{cases}$

Vì ta luôn có: $b \neq 0$ nên từ phương trình trên ta rút ra $a-2 = \frac{2(1-b)}{b}$

Thế xuống phương trình dưới ta được:

$$\begin{aligned} \frac{4(b-1)^2}{b^2}(a+1) &= (b-1)^2(b+2) \Leftrightarrow (b-1)^2[4(a+1) - b^2(b+2)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 4(a+1) = b^2(b+2) \end{cases} \end{aligned}$$

Với: $b = 1 \Rightarrow a = 2$, suy ra: $x = y = 1$;

Với $4(a+1) = b^2(b+2)$. Ta lại có:

$$ab = 2 \Leftrightarrow b(a+1) = b+2 \Leftrightarrow a+1 = \frac{b+2}{b}.$$

Thế lên phương trình trên ta có:

$$\frac{4(b+2)}{b} = b^2(b+2) \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \Rightarrow a = -1 \Leftrightarrow x = -2; y = -\frac{1}{2} \\ b^3 = 4 \text{ (Không TM)} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm là: $(x; y) = (1; 1), \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

d) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Ta viết lại hệ phương trình thành:

$$\sqrt{2(x-y)^2 + 6x - 2y + 4} - \sqrt{y} = \sqrt{x+1}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2(x-y)^2 + 6x - 2y + 4} = \sqrt{y} + \sqrt{x+1}$. Bình phương 2 vế ta thu được:

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 6x - 2y + 4 = x + y + 1 + 2\sqrt{y(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2[(x+1)^2 - 2y(x+1) + y^2] + (x+1+y) = 2\sqrt{y(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1-y)^2 + (\sqrt{x+1} - \sqrt{y})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = y \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow x+1 = y$$

Thay vào phương trình (2) ta có:

$$\sqrt{y^2 - 7y + 1} - \sqrt[3]{y(y-7)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 7y + 1} = \sqrt[3]{y(y-7)} + 1.$$

Đặt $a = \sqrt[3]{y(y-7)}$ ta có phương trình:

$$\sqrt{a^3+1}=a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -1 \\ a^3-a^2-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -1 \\ a=0 \\ a=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

$$\text{Với } a=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=-1 \\ y=7 \Rightarrow x=6 \end{cases}$$

$$\text{Với } a=-1 \Rightarrow y^2-7y+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{5-3\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{5+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } a=2 \Rightarrow y^2-7y-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 & (\text{L}) \\ y=8 \Rightarrow x=7 \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm là :

$$(x; y) = (-1; 0), (6; 7), \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2}; \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2}; \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right), (7; 8)$$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - (2y+2)x - 3y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy^2 - (y+3)x - 2y^3 - 6y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y = 0 \\ x^3 - x^2y + 2y^2 + 2y - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} xy^2 - 3x^3y - 4yx^2 - y + 3x^2 = 0 \\ 3x^2y - y^2 + 3xy + 1 = 0 \end{cases}$$

Giải:

a) **Cách 1:** Lấy phương trình thứ hai trừ phương trình thứ nhất theo vế ta được: $2xy^2 - (y+3)x - 2y^3 - 6y^2 + 1 + (2y+2)x + 3y^2 = 0$
 $\Leftrightarrow 2xy^2 + xy - 2y^3 - 3y^2 + 1 - x = 0 \Leftrightarrow x(2y^2 + y - 1) - 2y^3 - 3y^2 + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (y+1)(2y-1)(x-y-1) = 0.$

+ Nếu $y = -1$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

+ Nếu $y = \frac{1}{2}$ thay vào phương trình (1) ta có:

$$4x^2 - 12x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

+ Nếu $y = x - 1$ thay vào phương trình (1) ta có:

$$x^2 - 2x^2 - 3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 6x - 3 = 0. \text{ Vô nghiệm.}$$

$$\text{Kết luận: } (x; y) = (\sqrt{3}; 1), (-\sqrt{3}; 1), \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

* **Cách 2:** Phương trình thứ hai phân tích được: $(2y^2 + x)(x - y - 3) + 1 = 0$

Phương trình thứ nhất phân tích được: $(x - y)^2 - 2(x + 2y^2) = 0$

$$\text{Đặt } a = x - y, b = x + 2y^2 \text{ ta có hệ: } \begin{cases} a^2 - 2b = 0 \\ (a - 3)b + 1 = 0 \end{cases}$$

b) Lấy phương trình thứ hai trừ phương trình thứ nhất, ta được:

$$x^3 - x^2 - x^2y + 2xy - 2x = 0, \text{ hay } (x^3 - x^2 - 2x) - y(x^2 - 2x) = 0.$$

Do $x^3 - x^2 - 2x = (x+1)(x^2 - 2x)$ nên từ trên, ta có
 $(x^2 - 2x)(x+1-y) = 0.$

+ Nếu $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

$$+ \text{ Nếu } x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

+ Nếu $y = x + 1$ thay vào phương trình (1) ta thu được: $1 + 2y^2 + 2y = 0$ vô nghiệm.

Kết luận:

Hệ phương trình có các cặp nghiệm là:

$$(x; y) = (0; 0), (0; -2), (2; 0), \left(2; \frac{4}{3}\right)$$

c) Hệ được viết lại như sau:

$$\begin{cases} (xy^2 - y) + (3x^2 - 3x^3y) = 4x^2y \\ 3x^2y - y^2 + 3xy + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy - y)(y - 3x^2) = 4x^2y \\ 3x^2 - y^2 + 3xy + 1 = 0 \end{cases}$$

Xét với $y = 0$ thay vào ta thấy không là nghiệm của hệ .

Với $y \neq 0$ ta biến đổi hệ thành :

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{y}\right)(y - 3x^2) = 4x^2 \\ 3x^2 - y + 3x + \frac{1}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{y}\right)(y - 3x^2) = 4x^2 \\ 3x^2 - y + \frac{1}{y} - x = -4x \end{cases}$$

$$\text{Đặt : } \begin{cases} a = x - \frac{1}{y} \\ b = y - 3x^2 \end{cases} \text{ Khi đó hệ trở thành hệ : } \begin{cases} ab = 4x^2 \\ a + b = 4x \end{cases}$$

Theo Viets thì ta có 2 số a và b là nghiệm của phương trình :

$$t^2 - 4xt + 4x^2 \Leftrightarrow (t - 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x - \frac{1}{y} \\ 2x = y - 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ 2x = -\frac{1}{x} - 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ 2x = -\frac{1}{x} - 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ 3x^3 + 2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ có 1 nghiệm $(x; y) = (-1; 1)$

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt[3]{1+x} + \sqrt{1-y} = 2 \\ x^2 - y^4 + 9y = x(9+y-y^3) \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^3 - 2x^2y - 15x = 6y(2x-5-4y) \\ \frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4}} - \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - 6\sqrt{2x-4} = 4\sqrt{3y-9} - 2y \\ 6x^3 - 3x^2y + 2xy + 4 = y^2 + 4x + 6x^2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x^3y - 8y^4 + 3x^2y = -4 \\ 2xy + y - y^2 = 2 \end{cases}$$

Giải:

a) Từ phương trình (2) của hệ ta có:

$$x^2 - y^4 + 9y = x(9+y-y^3) \Leftrightarrow (x-y)(x+y^3-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y^3 - 9 = 0 \end{cases}$$

Vì $y \leq 1$ và $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt{1-y} = 2$ nên $\sqrt[3]{1+x} < 2 \Leftrightarrow x < 7$

Do đó $x + y^3 - 9 < -1 < 0$ nên $x + y^3 - 9 = 0$ vô nghiệm.

Ta chỉ cần giải trường hợp $x = y$. Thế vào phương trình ban đầu ta được: $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt{1-x} = 2$. Đặt $a = \sqrt[3]{1+x}$; $b = \sqrt{1-x}$ ($b > 0$) thì

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a^3+b^2=2 \end{cases} \Rightarrow a^3+(2-a)^2=2 \Leftrightarrow a^3+a^2-4a+2=0 \Leftrightarrow (a-1)(a^2+2a-2)=0$$

Từ đó suy ra nghiệm của phương trình ban đầu

$$x=0; x=-11+6\sqrt{3}; x=-11-6\sqrt{3}$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là

$$x=y=0; x=y=-11+6\sqrt{3}; x=y=-11-6\sqrt{3}$$

b) Phương trình thứ nhất của hệ

$$\Leftrightarrow (2y-x)(x^2-12y-15)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=x \\ y=\frac{x^2-15}{12} \end{cases}$$

TH 1: $y=\frac{x^2-15}{12}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\frac{3x^2}{2(x^2-15)} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{4x^3}{x^2-15} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2-15}{24}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{36x^2}{x^2-15} - 12\sqrt{\frac{x^2}{x^2-15}(x^2+16x-15)} + (x^2+16x-15) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+16x-15 \geq 0 \\ 6\sqrt{\frac{x^2}{x^2-15}} = \sqrt{(x^2+16x-15)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+16x-15 \geq 0 \\ 36\frac{x^2}{x^2-15} = x^2+16x-15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+16x-15 \geq 0 \\ 36x^2 = (x^2-15)(x^2+16x-15) (*) \end{cases}$$

Xét phương trình (*) $36x^2 = (x^2-15)(x^2+16x-15)$

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm. Ta chia hai vế phương trình cho x^2 ta có:

$$36 = \left(x - \frac{15}{x}\right) \left(x + 16 - \frac{15}{x}\right) \text{ Đặt}$$

$$x - \frac{15}{x} = t \Rightarrow t^2 + 16t - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -18 \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } t = 2 \Leftrightarrow x - \frac{15}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

$$+ \text{ Nếu } t = -18$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{15}{x} = -18 \Leftrightarrow x^2 + 18x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 - 4\sqrt{6} \\ x = -9 + 4\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = -9 - 4\sqrt{6}$$

$$\text{Nghiệm của hệ đã cho là: } (x; y) = \left(5; \frac{5}{6}\right), \left(-9 - 4\sqrt{6}; \frac{27 + 12\sqrt{6}}{2}\right)$$

TH 2: $x = 2y$ Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4x} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{2x^3}{3x} + \frac{x^2}{4}} - \frac{x}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{6}x = \sqrt{\frac{11x^2}{12}} \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại) (do điều kiện } y \neq 0)$$

$$\text{KL: Nghiệm của hệ đã cho là: } (x; y) = \left(5; \frac{5}{6}\right), \left(-9 - 4\sqrt{6}; \frac{27 + 12\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\text{c) Điều kiện } \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 3 \end{cases}$$

Phương trình (2) của hệ tương đương với:

$$(2x - 2 - y)(3x^2 + y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = 2 - 3x^2 \end{cases}$$

+ Với $y = 2x - 2$ thế vào phương trình (1) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 7x - 6\sqrt{2x-4} - 4\sqrt{6x-15} - 4 = 0 \quad (3)$$

Đến đây sử dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\begin{cases} 6\sqrt{2x-4} = 3 \cdot 2\sqrt{2(x-2)} \leq 3x \\ 4\sqrt{6x-15} = 2 \cdot 2\sqrt{3(2x-5)} \leq 2(2x-2) \end{cases} \Rightarrow 6\sqrt{2x-4} + 4\sqrt{6x-15} \leq 7x - 4$$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $x = 4$

Từ (3) suy ra $x = 4$ là nghiệm duy nhất. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (4; 6)$

- Với $y = 2 - 3x^2 \leq 2$ hệ vô nghiệm do điều kiện $y \geq 3$

Vậy hệ đã cho chỉ có 1 nghiệm $(x; y) = (4; 6)$

d) Thế phương trình 2 vào phương trình 1 của hệ ta được phương trình :

$$x^3y - 8y^4 + 3x^2y = -2(2xy + y - y^2) \Leftrightarrow (x^3 - 8y^3 + 3x^2)y = (-4x - 2 + 2y)y$$

Vì $y = 0$ không là nghiệm của hệ. Chia cả hai vế cho y ta được phương trình $x^3 - 8y^3 + 3x^2 = -4x - 2 + 2y \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x = 8y^3 + 2y - 2$

Đặt : $z = x + 1 \Rightarrow x = z - 1$. Khi đó ta có phương trình :

$$\begin{aligned} z^3 + z &= 8y^3 + 2y \Leftrightarrow (z - 2y)(z^2 + 4y^2 + 2zy) = 0 \left[\text{do } (z^2 + 4y^2 + 2zy) > 0 \right] \\ \Leftrightarrow z &= 2y \Rightarrow x + 1 = 2y \Rightarrow x = 2y - 1 \end{aligned}$$

Thế vào phương trình 2 của hệ ta được phương trình:

$$3y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 & \Rightarrow x = 1 \\ y = \frac{-2}{3} & \Rightarrow x = \frac{-7}{3} \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y) = (1; 1); \left(\frac{-7}{3}; \frac{-2}{3}\right)$

Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} 3y^2 + 1 + 2y(x+1) = 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} \\ y(y-x) = 3 - 3y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + (3 - 2xy)y^2 = 3 \\ 2x^2 - x^3y = 2x^2y^2 - 7xy + 6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^4 + 2xy + 6y - (7 + 2y)x^2 = -9 \\ 2yx^2 - x^3 = 10 \end{cases}$$

Giải:

a) Điều kiện: $x^2 + 2y + 1 \geq 0$.

Phương trình (1) tương đương:

$$\begin{aligned} 4y^2 - 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} + x^2 + 2y + 1 &= x^2 - 2xy + y^2 \\ \Leftrightarrow \left(2y - \sqrt{x^2 + 2y + 1}\right)^2 &= (x - y)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 3y - x \\ \sqrt{x^2 + 2y + 1} = x + y \end{cases} \end{aligned}$$

TH1: $\sqrt{x^2 + 2y + 1} = 3y - x$. Bình phương hai vế phương trình ta được:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x \\ x^2 + 2y + 1 = 9y^2 - 6xy + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x \\ 6xy = 9y^2 - 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 1(TM) \\ x = \frac{415}{51}; y = \frac{17}{3}(TM) \end{cases}$$

TH2: $\sqrt{x^2 + 2y + 1} = x + y$. Bình phương hai vế phương trình:

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x^2 + 2y + 1 = x^2 + 2xy + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2xy = -y^2 + 2y + 1 \\ xy = y^2 + 3y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 1 \\ x = \frac{41}{21}; y = -\frac{7}{3} \end{cases} (L)$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1), \left(\frac{41}{21}; -\frac{7}{3}\right)$.

b) Từ phương trình (1) ta thấy: $2x(1 - y^3) = 3(1 - y^2)$.

TH1: $y = 1$ thay vào (2) ta có: $x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 3; x = -2$.

TH2: Kết hợp với (2) ta có hệ mới: $\begin{cases} 2x + 2xy + 2xy^2 = 3 + 3y & (*) \\ 2x^2 - x^3y = 2x^2y^2 - 7xy + 6 & (3) \end{cases}$

Phương trình (3) tương đương với: $(xy - 2)(2xy + x^2 - 3) = 0$.

+ Nếu: $xy = 2$ thay vào (*) ta có:

$$2x + 4 + 4y = 3 + 3y \Rightarrow x = \frac{-1 - y}{2} \Rightarrow y(1 + y) = -4.$$

Phương trình này vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

+ Nếu $2xy = 3 - x^2$ thay vào (*) ta có:

$$\begin{aligned} 2x + 3 - x^2 + y(3 - x^2) &= 3 + 3y \Rightarrow y = \frac{2}{x} - 1 \\ \Rightarrow 2x\left(\frac{2}{x} - 1\right) &= 3 - x^2 \Leftrightarrow x = 1; y = 1 \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1), (3; 1), (-2; 1)$.

c) Phương trình (1) tương đương:

$$x^4 - 7x^2 + 9 - 2y(x^2 - x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 3)(x^2 + x - 3) - 2y(x^2 - x - 3) = 0$$

$$\text{TH1: } x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{79 + \sqrt{13}}{36} \\ x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{79 - \sqrt{13}}{36} \end{cases}$$

TH2: $2y^2 = x^2 + x - 3$ thay vào (2) ta có:

$$(x^2 + x - 3)x^2 - x^3 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \Rightarrow y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = -\sqrt{5} \Rightarrow y = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm

$$(x; y) = \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{79 + \sqrt{13}}{36} \right), \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{79 - \sqrt{13}}{36} \right), \left(\sqrt{5}; 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \right), \left(-\sqrt{5}; 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

Ví dụ 5: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} xy - x - y = 1 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} xy - x + 2y = 4 \\ 4x^3 + 24x^2 + 45x = -y^3 + 6y - 20 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \left(\frac{1 - x^2}{x^2} \right)^3 + xy + \frac{3}{2} = y^3 \\ (xy + 2)^2 + \frac{1}{x^2} = 2y + \frac{4}{x} \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x^2 + y^2 + x = 3 \\ x^2 - 4y^2 + \frac{2xy}{x + y - 1} = -1 \end{cases}$$

Giải:

a) Hệ tương đương:
$$\begin{cases} 3xy - 3x - 3y = 3 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình cho nhau ta được: $4(x-1)^3 = -y^3 + 3xy + 3y$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)^3 + 4y^3 = 3y^3 + 3xy + 3y$$

$$\Leftrightarrow 4(x+y-1)\left[(x-1)^2 - (x-1)y + y^2\right] = 3y(y^2 + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4(x+y-1)\left[(x-1)^2 - (x-1)y + y^2\right] = 3y(y^2 + xy - y - 1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4(x+y-1)\left[(x-1)^2 - (x-1)y + y^2\right] = 3y^2(x+y-1)$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(2x-2-y)^2 = 0$$

Với $y = 1 - x$ thay vào (1) ta được: $x^2 - x + 2 = 0$ (vô nghiệm).

Với $y = 2x - 2$ thay vào (1) ta được: $2x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{4}; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right), \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{4}; \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right)$.

b) Hệ tương đương:
$$\begin{cases} 6y - 3x + 3xy - 12 = 0 \\ 4x^3 + 24x^2 + 45x = -y^3 + 6y - 20 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình trên cho nhau ta được:

$$4x^3 + 24x^2 + 48x + 32 = -y^3 + 3xy + 12y$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)^3 + 4y^3 = 3y^3 + 3xy + 12y$$

$$\Leftrightarrow 4(x+y+2)\left[(x+2)^2 - (x+2)y + y^2\right] = 3y(y^2 + x + 4)$$

Thế $x = xy + 2y - 4$ vào VP ta được:

$$4(x + y + 2)\left[(x + 2)^2 - (x + 2)y + y^2\right] = 3y(y^2 + 2y + xy - 4 + 4) = 3y^2(x + y + 2)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 2)\left(4(x + 2)^2 - 4(x + 2)y + y^2\right) = 0.$$

Với $y = -x - 2$ thay vào (1) ta được: $x^2 - 5x + 8 = 0$ (vô nghiệm).

$$\text{Với } y = 2x + 2 \text{ thay vào (1) ta được: } 2x^2 - 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17} - 7}{4} \\ x = -\frac{\sqrt{17} + 7}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } (x; y) = \left(\frac{\sqrt{17} - 7}{4}; \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{17} + 7}{4}; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right).$$

c) Điều kiện: $x \neq 0$.

Phương trình (2) tương đương:

$$\left(y + 2 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{x} - 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}.$$

Thay vào (1) ta được:

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)^3 \Leftrightarrow (t^2 - 1)^3 + t - \frac{1}{2} = (t^2 - 2t)^3$$

$$\Leftrightarrow (2t - 1)(6t^4 - 12t^3 + 2t^2 + 4t + 3) = 0.$$

$$\text{TH1: } t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{TH2: } 6t^4 - 12t^3 + 2t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow 6\left(t^2 - t - \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3} \text{ (vô lý)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của hệ } (x; y) = \left(2; -\frac{3}{4}\right).$$

d) Điều kiện: $x + y \neq 1$. Phương trình (2) tương đương:

$$(x^2 - 4y^2)(x + y - 1) + 2xy = -(x + y - 1).$$

$$\text{Phân tích nhân tử ta được: } (x + 2y - 1)(x^2 - 2y^2 - xy + y + 1) = 0.$$

TH1: $x + 2y - 1 = 0$ thay vào (1) dễ dàng tìm được:

$$(x; y) = \left(\frac{-1 - 2\sqrt{14}}{5}; \frac{3 + \sqrt{14}}{5}\right), \left(\frac{2\sqrt{14} - 1}{5}; \frac{3 - \sqrt{14}}{2}\right).$$

$$\text{TH2: Kết hợp với (1) ta có hệ mới: } \begin{cases} x^2 - 2y^2 - xy + y + 1 \\ x^2 + y^2 + x = 3 \end{cases}.$$

Giải bằng cách:

$$PT(1) - PT(2) \Leftrightarrow 3y^2 + xy + x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(x + 3y - 4) = 0.$$

Vậy nghiệm của hệ

$$(x; y) = \left(\frac{-1 - 2\sqrt{14}}{5}; \frac{3 + \sqrt{14}}{5}\right), \left(\frac{2\sqrt{14} - 1}{5}; \frac{3 - \sqrt{14}}{2}\right), \left(-\frac{10}{11}; \frac{17}{10}\right), (1; 1), (1; -1), (-2; -$$

Ví dụ 7) Giải hệ phương trình với nghiệm là số thực:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 6 = 0 \\ x^2 + xy + y + 4x + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x^2 + 2xy + y - 5 = 0 \\ y^2 + xy + 5x - 7 = 0 \end{cases}$$

Giải:

* **Cách 1:** Đặt $\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}$ thay vào phương trình (1) của hệ ta có:

$$(u + a)^2 + 2(v + b)^2 + 2(u + a) + 8(v + b) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2 + 2v^2 + 2(a + 1)u + 4v(b + 2) + a^2 + 2b^2 + 2a + 8b + 6 = 0.$$

Ta mong muốn không có số hạng bậc nhất trong phương trình nên điều kiện là: $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$

Từ đó ta có các h đặt ẩn phụ như sau: Đặt $\begin{cases} x = u - 1 \\ y = v - 2 \end{cases}$ thay vào hệ ta có:

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 = 3 \\ u^2 + uv = 2 \end{cases} \text{ đây là hệ đẳng cấp.}$$

Từ hệ ta suy ra

$$2(u^2 + 2v^2) = 3(u^2 + uv) \Leftrightarrow u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -4v \end{cases}$$

Công việc còn lại là khá đơn giản.

* **Cách 2:** Ta cộng phương trình (1) với k lần phương trình (2).

$$x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 6 + k[x^2 + xy + y + 4x + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + k)x^2 + (2 + 4k + ky)x + 2y^2 + 8y + ky + k + 6 = 0$$

Ta có

$$\Delta = (2 + 4k + ky)^2 - 4(k + 1)(2y^2 + 8y + ky + k + 6)$$

$$= (k^2 - 8k - 8)y^2 + (4k^2 - 32k - 32)y + 12k^2 - 12k - 20.$$

Ta mong muốn Δ có dạng $(Ay + B)^2 \Leftrightarrow \Delta = 0$ có nghiệm kép:

$$\Leftrightarrow (4k^2 - 32k - 32)^2 - 4(k^2 - 8k - 8)(12k^2 - 12k - 20) = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}.$$

Từ đó ta có cách giải như sau:

Lấy 2 lần phương trình (1) trừ 3 lần phương trình (2) của hệ ta có:

$$2(x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 6) - 3(x^2 + xy + y + 4x + 1) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$-x^2 - 3xy - 8x + 4y^2 + 13y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (3y + 8)x - (4y^2 + 13y + 9) = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = (3y + 8)^2 + 4(4y^2 + 13y + 9) = 25y^2 + 100y + 100 = (5y + 10)^2$$

$$\text{Từ đó tính được: } \begin{cases} x = \frac{3y + 8 - (5y + 10)}{2} = -y - 1 \\ x = \frac{3y + 8 + (5y + 10)}{2} = 4y + 9 \end{cases}$$

Phần việc còn lại là khá đơn giản.

b) Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) ta thu được:

$$2x^2 + 2xy + y - 5 - (y^2 + xy + 5x - 7) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (y - 5)x - y^2 + y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y + 1}{2} \\ x = -y + 2 \end{cases}$$

Nhận xét: Khi gặp các hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0 \\ b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6 = 0 \end{cases}$$

- + Ta đặt $x = u + a, y = v + b$ sau đó tìm điều kiện để phương trình không có số hạng bậc 1 hoặc không có số hạng tự do .
- + Hoặc ta cộng phương trình (1) với k lần phương trình (2) sau đó chọn k sao cho có thể biểu diễn được x theo y . Để có được quan hệ này ta cần dựa vào tính chất. Phương trình $ax^2 + bx + c$ biểu diễn được thành dạng:
 $(Ax + B)^2 \Leftrightarrow \Delta = 0$

Đối với các hệ đại số bậc 3:

Ta có thể vận dụng các hướng giải

- + Biến đổi hệ để tạo thành các hằng đẳng thức
- + Nhân các phương trình với một biểu thức đại số sau đó cộng các phương trình để tạo ra quan hệ tuyến tính.

Ví dụ 8) Giải hệ phương trình với nghiệm là số thực:

$$\text{a) } \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^3 + 3x^2y = 6xy - 3x - 49 \\ x^2 - 6xy + y^2 = 10y - 25x - 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^3 - y^3 = 35 \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} xy(3x + y) = 4 \\ 7x^3 + 11 = 3(x + y)(x + y + 1) \end{cases} \quad (1)$$

Giải:

$$\text{a) Phân tích: Ta viết lại hệ như sau: } \begin{cases} x^3 + 3xy^2 + 49 = 0 \\ y^2 + 8(x + 1)y + x^2 + 17x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nhận thấy } x = -1 \text{ thì hệ trở thành: } \begin{cases} -3y^2 + 48 = 0 \\ y^2 - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 4$$

Từ đó ta có lời giải như sau:

Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) của hệ ta có:

$$x^3 + 3xy^2 + 49 + 3(x^2 - 8xy + y^2 - 8y + 17x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[(x+1)^2 + 3(y-4)^2] = 0$$

Từ đó ta dễ dàng tìm được các nghiệm của hệ: $(x; y) = (-1; 4), (-1; -4)$

b) Làm tương tự như câu a

Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) thì thu được:

$(x+1)[(x+1)^2 + 3(y-5)^2] = 0$. Từ đó dễ dàng tìm được các nghiệm của hệ.

c) Lấy phương trình (1) trừ 3 lần phương trình (2) ta thu được:

$$(x-2)^3 = (y+3)^3 \Leftrightarrow x = y + 5$$

Thay vào phương trình (2) ta có:

$$2(y+5)^2 + 3y^2 = 4(y+5) - 9y \Leftrightarrow 5y^2 + 25y + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là: $(x; y) = (2; -3), (3; -2)$

d) Lấy 2 lần phương trình (2) trừ đi phương trình (1) ta thu được:

$$(x-1)[y^2 - (x+3)y + x^2 - x - 2] = 0$$

Trường hợp 1: $x = 1$ hệ vô nghiệm

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} y^2 - (x+3)y + x^2 - x - 2 = 0 \\ x^3 + y^2 = (x-y)(xy-1) \end{cases}$$

Lấy 2 lần phương trình (2) trừ đi phương trình (1) ta thu được:

$$(2x+1)[y^2 - (x-1)y + x^2 - x + 2] = 0$$

$$+ \text{ Nếu } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{4}$$

$$+ \text{ Nếu } y^2 - (x-1)y + x^2 - x + 2 = 0 \text{ ta có hệ: } \begin{cases} y^2 - (x-1)y + x^2 - x + 2 = 0 \\ y^2 - (x+3)y + x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}.$$

Trừ hai phương trình cho nhau ta có: $y = -1$ thay vào thì hệ vô nghiệm

$$\text{KL: Nghiệm của hệ là: } (x, y) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3+3\sqrt{5}}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{3-3\sqrt{5}}{4}\right)$$

d).

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow 7x^3 + 3xy(3x+y) = 1 + 3(x+y)(x+y+1)$$

$$\Leftrightarrow 7x^3 + 3xy(4x+2y-x-y) = 1 + 3(x+y)(x+y+1)$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + y^3 + 6xy(2x+y) = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + 3(x+y+1)(x+y) + 1$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)^3 = (x+y)^3 + 3(x+y)(x+y+1) + 1^3 = (x+y+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x+y = x+y+1 \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x=1 \\ y(y+3)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}.$$

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Đặt ẩn phụ là việc chọn các biểu thức $f(x, y); g(x, y)$ trong hệ phương trình để đặt thành các ẩn phụ mới làm đơn giản cấu trúc của phương trình, hệ phương trình. Qua đó tạo thành các hệ phương trình mới đơn giản hơn, hay quy về các dạng hệ quen thuộc như đối xứng, đẳng cấp...

Để tạo ra ẩn phụ người giải cần xử lý linh hoạt các phương trình trong hệ thông qua các kỹ thuật: Nhóm nhân tử chung, chia các phương trình theo những số hạng có sẵn, nhóm dựa vào các hằng đẳng thức, đổi biến theo đặc thù phương trình...

Ta quan sát các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ 2x^3 - 3x^2 - 3xy^2 - y^3 + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}$$

Giải:

a) Ta viết lại hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} 3x^2 - (x+y)^2 = 2 \\ 3x^3 + 3x^2y - (x+y)^3 - 3x^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - (x+y)^2 = 2 \\ 3x^2(x+y) - (x+y)^3 - 3x^2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } a = 3x^2, b = x+y \text{ ta thu được hệ phương trình: } \Leftrightarrow \begin{cases} a - b^2 = 2 \\ ab - b^3 - a = -1 \end{cases}$$

Từ phương trình (1) suy ra $a = b^2 + 2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta thu được: $(b^2 + 2)b - b^3 - (b^2 + 2) = -1 \Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = 3$

$$\text{Khi } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Tóm lại hệ phương trình có 2 cặp nghiệm: $(x; y) = (1; 0), (-1; 2)$

$$\text{b) Ta viết lại hệ phương trình thành: } \begin{cases} (x^2 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}$$

Đặt $a = x^2 - 2; b = y - 3$. Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (a+2)(b+3) + a + 2 + 2(b+3) = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ ab + 4(a+b) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 4 \\ ab + 4(a+b) = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 + 8(a+b) - 20 = 0 \\ ab + 4(a+b) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ ab = 0 \\ a+b = -10 \\ ab = 48 \end{cases} (L)$$

$$\text{Xét } \begin{cases} a+b = 2 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, b = 0 \\ a = 0, b = 2 \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu: } a = 0, b = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 5 \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } a = 2, b = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Tóm lại hệ có các cặp nghiệm: $(x; y) = (\sqrt{2}; 5), (-\sqrt{2}; 5), (2; 3), (-2; 3)$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y + 1) = 25(y + 1) \\ x^2 + xy + 2y^2 + x - 8y = 9 \end{cases} \quad \text{b)}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6xy - \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{9}{8} = 0 \\ 2y - \frac{1}{x-y} + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

Giải:

a) Để ý rằng khi $y = -1$ thì hệ vô nghiệm

Xét $y \neq -1$. Ta viết lại hệ thành:
$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y + 1) = 25(y + 1) \\ x^2 + y^2 + x(y + 1) + (y + 1)^2 = 10(y + 1) \end{cases}$$

Chia hai phương trình của hệ cho $y + 1$ ta thu được:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{y + 1}(x + y + 1) = 25 \\ x^2 + y^2 + x(y + 1) + (y + 1)^2 = 10(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{y + 1}(x + y + 1) = 25 \\ \frac{x^2 + y^2}{y + 1} + (x + y + 1) = 10 \end{cases}.$$

Đặt $\frac{x^2 + y^2}{y + 1} = a; x + y + 1 = b$. Ta có:

$$\begin{cases} ab = 25 \\ a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5(y + 1) \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 1 \\ x = -\frac{3}{2}; y = \frac{11}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (3; 1), \left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

b) Điều kiện: $x \neq y$.

Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} 2(x + y)^2 - (y - x)^2 - \frac{1}{(y - x)^2} + \frac{9}{8} = 0 \\ \left(y - x + \frac{1}{y - x}\right) + (x + y) + \frac{5}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x + y)^2 - \left(y - x + \frac{1}{y - x}\right)^2 + \frac{25}{8} = 0 \\ \left(y - x + \frac{1}{y - x}\right) + (x + y) + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}.$$

Đặt $x + y = a; y - x + \frac{1}{y - x} = b; |b| \geq 2$ hệ thành:

$$\begin{cases} a+b=-\frac{5}{4} \\ 2a^2-b^2=-\frac{25}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{4} \\ b=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x=\frac{5}{4} \\ y-x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{8}; y=-\frac{3}{8} \\ x=\frac{7}{8}; y=\frac{3}{8} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{7}{8}; \frac{3}{8}\right), \left(\frac{13}{8}; -\frac{3}{8}\right)$.

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x\sqrt{17-4x^2} + y\sqrt{19-9y^2} = 3 \\ \sqrt{17-4x^2} + \sqrt{19-9y^2} = 10-2x-3y \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} (x^2+x)y^2 - 4y^2 + y + 1 = 0 \\ xy + x^2y^2 + 1 - (4-x^3)y^3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Giải:

a) Điều kiện: $-\frac{\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{17}}{2}; -\frac{\sqrt{19}}{3} \leq y \leq \frac{\sqrt{19}}{3}$.

Đề ý $x\sqrt{17-4x^2}$ liên quan đến $2x$ và $\sqrt{17-4x^2}$, $y\sqrt{19-9y^2}$ liên quan đến $3y$ và $\sqrt{19-9y^2}$. Và tổng bình phương của chúng là những hằng số.

Đặt $2x + \sqrt{17-4x^2} = a; 3x + y\sqrt{19-9y^2} = b$. Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} a+b=10 \\ \frac{a^2-17}{4} + \frac{b^2-19}{6} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5; b=5 \\ a=3; b=7 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x + \sqrt{17 - 4x^2} = 5 \\ 3y + \sqrt{19 - 9y^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \\ y = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6} \end{cases}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x + \sqrt{17 - 4x^2} = 3 \\ 3y + \sqrt{19 - 9y^2} = 7 \end{cases} \quad (\text{loại}).$$

Vậy hệ có nghiệm

$$(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \right), \left(\frac{1}{2}; \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \right), \left(2; \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \right), \left(2; \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \right).$$

b) Ta viết lại hệ như sau:
$$\begin{cases} (x^2 + x)y^2 + y + 1 = 4y^2 \\ xy + x^2y^2 + 1 + x^3y^3 = 4y^3 \end{cases}$$

Ta thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ. Chia phương trình đầu cho y^2 ,

phương trình thứ 2 cho y^3 ta được:
$$\begin{cases} (x^2 + x) + \frac{y+1}{y^2} = 4 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + 1 + x^3 = 4 \end{cases}$$

Viết lại hệ dưới dạng:
$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{xy+1}{y} = 4 \\ \left(x^2 + \frac{1}{y^2} \right) \left(\frac{xy+1}{y} \right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} = 2 \\ x + \frac{1}{y} = 2 \end{cases}.$$

Đặt $x^2 + \frac{1}{y^2} = a, \frac{xy+1}{y} = b$ ta có hệ mới
$$\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} = 2 \\ x + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{2x}{y} = 2 \\ x + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ có một cặp nghiệm duy nhất $x = y = 1$

Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} 6x^4 - (x^3 - x)y^2 - (y + 12)x^2 = -6 \\ 5x^4 - (x^2 - 1)^2 \cdot y^2 - 11x^2 = -5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x}{x^2 - y} + \frac{5y}{x + y^2} = 4 \\ 5x + y + \frac{x^2 - 5y^2}{xy} = 5 \end{cases}$$

Giải

a) Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ.

Chia hai vế phương trình cho x^2 ta có:

$$\begin{cases} 6x^2 + \frac{6}{x^2} - \left(x - \frac{1}{x}\right)y^2 - y - 12 = 0 \\ 5x^2 + \frac{5}{x^2} - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 y^2 - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)y^2 - y = 0 \\ 5\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = a. \text{ Hệ thành: } \begin{cases} 6a^2 - ay^2 - y = 0 \\ 5a^2 - a^2 y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Chia hai vế cho a^2 và đặt $y + \frac{1}{a} = X, \frac{y}{a} = Y$ giải ra ta được

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}, y = 1 \\ a = 1, y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ x - \frac{1}{x} = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \\ y = 1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}; 1 \right), \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; 2 \right)$.

b). Điều kiện: $x, y \neq 0; x \neq -y^2; y \neq x^2$.

Phương trình (2) tương đương:

$$y + \frac{x}{y} + 5x - \frac{5y}{x} = 5 \Leftrightarrow \frac{x + y^2}{x} + 5 \cdot \frac{x^2 - y}{x} = 5$$

Đặt $\frac{x^2 - y}{x} = a, \frac{x + y^2}{x} = b$.

Hệ thành:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{5}{b} = 4 \\ b + 5a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 - y) = x \\ 2(x + y^2) = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}, y = 3 \\ x = 1, y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(-\frac{3}{2}; 3 \right), \left(1; \frac{1}{2} \right), \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right)$.

Ví dụ 5: Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} (xy+3)^2 + (x+y)^2 = 8 \\ \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} = -\frac{1}{4} \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \sqrt{9x + \frac{y}{x}} + 2\sqrt{y + \frac{2x}{y}} = 4 \\ \left(\frac{2x}{y^2} - 1\right)\left(\frac{y}{x^2} - 9\right) = 18 \end{cases} \end{array}$$

Giải

a) Triển khai phương trình (1)

$$(1) \Leftrightarrow x^2y^2 + 6xy + 9 + x^2 + 2xy + y^2 = 8 \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = -8xy$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(y^2+1) = -8xy.$$

Nhận thấy $x=0, y=0$ không là nghiệm của hệ.

Phương trình (1) khi đó là: $\frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{y^2+1}{y} = -8.$

Đặt $\frac{x}{x^2+1} = a; \frac{y}{y^2+1} = b$. Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} a+b = -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{ab} = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{2} \\ \frac{y}{y^2+1} = \frac{1}{4} \\ \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4} \\ \frac{y}{y^2+1} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \pm \sqrt{3} \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm

$$(x; y) = (-1; 2 - \sqrt{3}), (-1; 2 + \sqrt{3}), (2 - \sqrt{3}; -1), (2 + \sqrt{3}; -1).$$

b) Phương trình (2) tương đương:

$$(2x - y^2)(y - 9x^2) = 18x^2y^2 \Leftrightarrow 9x^2y^2 + 18x^3 + y^3 = 2xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2y^2 + 18x^3 + y^3}{xy} = 2 \Leftrightarrow 9xy + \frac{18x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 9x\left(y + \frac{2x}{y}\right) + \frac{y}{x}\left(y + \frac{2x}{y}\right) = 4 \Leftrightarrow \left(9x + \frac{y}{x}\right)\left(y + \frac{2x}{y}\right) = 4.$$

Đặt $a = \left(9x + \frac{y}{x}\right); b = \left(y + \frac{2x}{y}\right)$. Hệ thành:

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2; b = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + \frac{y}{x} = 4 \\ y + \frac{2x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 + y = 4x \\ y^2 + 2x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x - 9x^2 \\ (4x - 9x^2)^2 + 2x = 4x - 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(L) \\ x = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$.

Ví dụ 6: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} x\sqrt{x^2+6} + y\sqrt{x^2+3} = 7xy \\ x\sqrt{x^2+3} + y\sqrt{y^2+6} = x^2 + y^2 + 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$$

Giải

Giải hệ:.

Hệ phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} (x\sqrt{y^2+6}+y)+y(\sqrt{x^2+3}+x)=9xy \\ x(\sqrt{x^2+3}-x)+y(\sqrt{y^2+6}-y)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{y^2+6}+y}{y}+\frac{(\sqrt{x^2+3}+x)}{x}=9 \\ x(\sqrt{x^2+3}-x)+y(\sqrt{y^2+6}-y)=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{y(\sqrt{y^2+6}-y)}+\frac{3}{x(\sqrt{x^2+3}-x)}=9 \\ x(\sqrt{x^2+3}-x)+y(\sqrt{y^2+6}-y)=2 \end{cases}$$

Đặt $x(\sqrt{x^2+3}-x)=a; y(\sqrt{y^2+6}-y)=b$.

Hệ thành: $\begin{cases} \frac{6}{b}+\frac{3}{a}=9 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2}; b=1 \\ a=\frac{2}{3}; b=\frac{4}{3} \end{cases}$.

TH1: $\begin{cases} x(\sqrt{x^2+3}-x)=1 \\ y(\sqrt{y^2+6}-y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$.

TH2: $\begin{cases} x(\sqrt{x^2+3}-x)=\frac{2}{3} \\ y(\sqrt{y^2+6}-y)=\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{15}} \\ y=2\sqrt{\frac{2}{15}} \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ $(x; y)=\left(1; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{15}}; 2\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$.

PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ HẸNG ĐẲNG THỨC:

Điểm mấu chốt khi giải hệ bằng phương pháp biến đổi theo các hằng đẳng thức:

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 \\ \sqrt[3]{x+2}+2\sqrt{y+2}=5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x^2y+y^3=2x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$$

Giải

a) Điều kiện: $x \leq 2, y \geq \frac{1}{2}$. Phương trình (1) tương đương:

$$(2-x)\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x}=(2y-1)\sqrt{2y-1}+\sqrt{2y-1}$$

Đặt $a=\sqrt{2-x}, b=\sqrt{2y-1}$. Ta có phương trình: $a^3+a=b^3+b$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0. \text{ Do}$$

$$a^2+ab+b^2+1=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+1>0 \text{ suy ra phương trình cho ta } a=b$$

$\sqrt{2y-1}=\sqrt{2-x} \Leftrightarrow x=3-2y$ thay vào ta có: $\sqrt[3]{5-2y}+2\sqrt{y+2}=5 \Leftrightarrow$ Đặt $a=\sqrt[3]{5-2y}; b=\sqrt{y+2}$ ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a+2b=5 \\ a^3+2b^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1; b=2 \\ a=\frac{-3-\sqrt{65}}{4}; b=\frac{23+\sqrt{65}}{8} \\ a=\frac{\sqrt{65}-3}{4}; b=\frac{23-\sqrt{65}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=\frac{233+23\sqrt{65}}{32} \\ y=\frac{233-23\sqrt{65}}{32} \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm

$$(x; y) = (-1; 2), \left(\frac{23\sqrt{65} - 185}{16}; \frac{233 - 23\sqrt{65}}{32} \right), \left(-\frac{23\sqrt{65} + 185}{16}; \frac{233 + 23\sqrt{65}}{32} \right)$$

b) Điều kiện: $y \geq -1$.

Ta viết lại phương trình (1) thành: $y^3 - x^6 + 2x^2(y - x^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (y - x^2)(y^2 + yx^2 + x^4 + 2x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy $x = y = 0$ không phải là nghiệm. Khi $y = x^2$ thay vào (2) ta được:

$$(x+2)\sqrt{x^2+1} = (x+1)^2 \Rightarrow (x+2)^2(x^2+1) = (x+1)^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}, y = 3 \\ x = -\sqrt{3}, y = 3 \end{cases}$$

(thỏa mãn). Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (\pm\sqrt{3}; 3)$.

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau

a)
$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x}\sqrt{3-2y} + 1 \end{cases}$$

Giải

a) Điều kiện: $x \geq -\frac{5}{4}$.

Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ. chia hai vế của (1) cho y^5 ta được:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y. \text{ Đặt } a = \frac{x}{y} \text{ ta có phương trình: } a^5 + a = y^5 + y \text{ suy ra}$$

$$(a - y)(a^4 + a^3y + a^2y^2 + ay^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow y = a \Leftrightarrow x = y^2$$

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 1. \text{ Từ đó tính được } y = \pm 1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; \pm 1)$.

b) Điều kiện: $x \geq -2; y \leq \frac{3}{2}$. Ta thấy khi $x = 0$ thì hệ không có nghiệm.

Chia phương trình (1) cho $x^2 \neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = (4 - 2y)\sqrt{3 - 2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{3 - 2y})^3 + \sqrt{3 - 2y}.$$

Đặt $a = 1 - \frac{1}{x}, b = \sqrt{3 - 2y}$. Ta có

$$a^3 + a = b^3 + b \Rightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{3 - 2y} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Thay vào (2) ta được:

$$x + 2 - \sqrt[3]{15 - x} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{15 - x} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x - 14 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \Rightarrow y = \frac{111}{98}. \text{ Vậy hệ có nghiệm } (x; y) = \left(7; \frac{111}{98}\right).$$

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} (17 - 3x)\sqrt{5 - x} + (3y - 14)\sqrt{4 - y} = 0 & (1) \\ 2\sqrt{2x + y + 5} + 3\sqrt{3x + 2y + 11} = x^2 + 6x + 13 & (2) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3} + 1) \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) - 4 = 6\sqrt{xy-x+1} \end{cases}$$

Giải

$$\text{a) Điều kiện: } \begin{cases} x \leq 5 \\ y \leq 4 \\ 2x + y + 5 \geq 0 \\ 3x + 2y + 11 \geq 0 \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1) ta có:

$$\begin{aligned} [3(5-x) + 2]\sqrt{5-x} &= [3(4-y) + 2]\sqrt{4-y} \quad \text{Đặt } a = \sqrt{5-x}, b = \sqrt{4-y} \text{ ta} \\ \text{có"} \quad 3a^3 + 2a &= 3b^3 + 2b \Leftrightarrow (a-b)(3a^2 + 3ab + 3b^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{4-y} \Leftrightarrow y = x-1$$

$$\text{Thay vào (2) ta có: } x^2 + 6x + 13 = 2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} \quad (4)$$

$$\text{Điều kiện xác định của phương trình (4) là: } x \geq -\frac{4}{3}$$

$$(4) \Leftrightarrow x^2 + x + 2(x+2-\sqrt{3x+4}) + 3(x+3-\sqrt{5x+9}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + \frac{2(x^2+x)}{x+2+\sqrt{3x+4}} + \frac{3(x^2+x)}{x+3+\sqrt{5x+9}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x) \left(1 + \frac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}} + \frac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ 1 + \frac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}} + \frac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}} = 0 \end{cases}$$

$$(*) \quad x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Ta có $1 + \frac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}} + \frac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}} > 0$ do điều kiện $x \geq -\frac{4}{3}$

Kết luận: $(x; y) = (0; -1), (-1; -2)$

b) Điều kiện: $y \geq 0, x + y \geq 0$.

Nhận thấy $y = 0$ thì hệ vô nghiệm. Ta xét khi $y > 0$

Từ phương trình (1) ta sử dụng phương pháp liên hợp:

$$PT(1) \Leftrightarrow x^2 + xy - 2y^2 = \sqrt{2y} - \sqrt{x+y} \Leftrightarrow (x-y)(x+2y) = \frac{-(x-y)}{\sqrt{2y} + \sqrt{x+y}}$$

Rõ ràng $x+2y = x+y+y > 0$; $\frac{-1}{\sqrt{2y} + \sqrt{x+y}} < 0$, từ đó suy ra $x = y$.

Thay vào (2) ta được: $x^3 - 5x^2 + 14x - 4 = 6\sqrt[3]{x^2 - x + 1}$.

Biến đổi phương trình đã cho tương đương:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 8x^2 - 8x + 8 + 3\sqrt[3]{8x^2 - 8x + 8}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = 8x^2 - 8x + 8 + 3\sqrt[3]{8x^2 - 8x + 8}.$$

Đặt $a = x+1, b = \sqrt[3]{8x^2 - 8x + 8}$ suy ra

$$a^3 + 3a = b^3 + 3b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$x+1 = \sqrt[3]{8x^2 - 8x + 8} \Leftrightarrow x = 1; y = 1.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

KHI TRONG HỆ CÓ CHỨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

THEO ẨN x , HOẶC y

Khi trong hệ phương trình có chứa phương trình bậc hai theo ẩn x hoặc y ta có thể nghĩ đến các hướng xử lý như sau:

- * Nếu Δ chẵn, ta giải x theo y rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để giải tiếp
- * Nếu Δ không chẵn ta thường xử lý theo cách:
 - + Cộng hoặc trừ các phương trình của hệ để tạo được phương trình bậc hai có Δ chẵn hoặc tạo thành các hằng đẳng thức
 - + Dùng điều kiện $\Delta \geq 0$ để tìm miền giá trị của biến x, y . Sau đó đánh giá phương trình còn lại trên miền giá trị x, y vừa tìm được:

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y} \end{cases}$$

Giải

Xét phương trình (1) của hệ ta có:

$xy + x + y = x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow x^2 - x(y+1) - 2y^2 - y = 0$. Ta coi đây là phương trình bậc 2 của x thì ta có: $\Delta = (y+1)^2 + 8y^2 + 4y = (3y+1)^2$. Từ đó suy ra

$$\begin{cases} x = \frac{y+1-(3y+1)}{2} = -y \\ x = \frac{y+1+(3y+1)}{2} = 2y+1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $x = -y$. Từ phương trình (2) của hệ ta có điều kiện:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ suy ra phương trình vô nghiệm}$$

Trường hợp 2: $x = 2y+1$ thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$\begin{aligned} (2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} &= 2y+2 \Leftrightarrow y\sqrt{2y} + \sqrt{2y} = 2(y+1) \\ \Leftrightarrow (y+1)(\sqrt{2y}-2) &= 0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=5 \end{aligned}$$

Vậy hệ có một cặp nghiệm: $(x; y) = (5; 2)$

b) Xét phương trình (1) của hệ ta có:

$$2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x(3-3y) + y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Coi đây là phương trình bậc 2 của x ta có:

$$\Delta = (3-3y)^2 - 8(y^2 - 2y + 1) = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = \frac{3y-3-(y-1)}{4} = \frac{y-1}{2} \\ x = \frac{3y-3+(y-1)}{4} = y-1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $y = x+1$ thay vào phương trình (2) ta thu được:

$$\begin{aligned} 3x^2 - x + 3 &= \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + (x+1-\sqrt{3x+1}) &+ (x+2-\sqrt{5x+4}) = 0 \\ \Leftrightarrow (x^2-x) \left[3 + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Do $x \geq -\frac{1}{3}$ nên

$$3 + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}} > 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Trường hợp 2: $y = 2x + 1$ thay vào phương trình (2) ta thu được:

$$3 - 3x = \sqrt{4x+1} + \sqrt{5x+4} \Leftrightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{5x+4} + 3x - 3 = 0$$

Giải tương tự như trên ta được $x = 0$.

Kết luận: Hệ phương trình có 2 cặp nghiệm: $(x; y) = (0; 1), (1; 2)$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} x+3 = 2\sqrt{(3y-x)(y+1)} & (1) \\ \sqrt{3y-2} - \sqrt{\frac{x+5}{2}} = xy - 2y - 2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{2y^2 - 7y + 10 - x(y+3)} + \sqrt{y+1} = x+1 \\ \sqrt{y+1} + \frac{3}{x+1} = x+2y \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \sqrt{4x-y} - \sqrt{3y-4x} = 1 \\ 2\sqrt{3y-4x} + y(5x-y) = x(4x+y) - 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $y \geq \frac{2}{3}; x \geq -3; 3y \geq x$.

Phương trình (1) tương đương $(x+3)^2 = 4(y+1)(3y-x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 12y^2 + 12y - 4xy - 4x \Leftrightarrow x^2 + 2x(5+2y) - 12y^2 - 12y + 9 = 0$$

Coi đây là phương trình bậc 2 của x ta có:

$$\Delta' = (2y+5)^2 + 12y^2 + 12y - 9 = (4y+4)^2$$

$$\text{suy ra } \begin{cases} x = -5 - 2y - (4y+4) = -6y - 9 \\ x = -5 - 2y + (4y+4) = 2y - 1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $x = -6y - 9$.

Do $x \geq -3 \Rightarrow -6y - 9 \geq -3 \Leftrightarrow y \leq -1$ suy ra phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x = 2y - 1$ thay vào phương trình 2 của hệ ta có:

$$\sqrt{3y-2} - \sqrt{y+2} = 2y^2 - 3y - 2 \Leftrightarrow \frac{2(y-2)}{\sqrt{3y-2} + \sqrt{y+2}} = (2y+1)(y-2)$$

$$\text{Ta có: } \frac{2}{\sqrt{3y-2} + \sqrt{y+2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; 2y+1 \geq \frac{7}{3}.$$

Nghĩa là $VP > VT$, suy ra $y = 2 \Rightarrow x = 1$.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$.

$$\text{b) Điều kiện: } \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ y+1 \geq 0 \\ 2y^2 - 7y + 10 - x(y+3) \geq 0 \end{cases}.$$

Từ phương trình dễ thấy để phương trình có nghiệm thì:
 $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Ta viết phương trình thứ nhất dưới dạng:

$$\sqrt{2y^2 - 7y + 10 - x(y+3)} = x+1 - \sqrt{y+1}.$$

Để bình phương được ta cần điều kiện: $x+1 \geq \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x^2 + x \geq y$.

Ta bình phương hai vế được:

$$2y^2 - 8y + 8 - x(y+3) = x^2 + 2x - 2(x+1)\sqrt{y+1} \quad (1).$$

Ta đưa phương trình (2) về dạng: $(x+1)\sqrt{y+1} = x^2 + x + 2xy + 2y - 3$
(2).

Thế (2) vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} 2y^2 - 8y + 8 - x(y+3) &= x^2 + 2x - 2(x^2 + x + 2xy + 2y - 3) \\ \Leftrightarrow 2y^2 - 4y + 2 + 3xy + x^2 - 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x(y-1) + 2(y-1)^2 &= 0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x+2y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \end{aligned}$$

- * Với $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$, ta có thêm $x \leq 2$ thay vào phương trình (2) ta có: $(x+1)\sqrt{2-x} = -1+x-x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 + (x+1)\sqrt{2-x} = 0$.

Vì $-1 \leq x \leq 2$, ta dễ thấy: $VT > 0$, nên suy ra phương trình vô nghiệm.

- * Với $x+2y-2=0 \Leftrightarrow y = \frac{2-x}{2}$, thay vào phương trình (2) ta được:

$$\sqrt{\frac{4-x}{2}} + \frac{3}{x+1} = 2. \text{ Đặt } u = x+1 \text{ khi đó ta thu được phương trình:}$$

$$\sqrt{\frac{5-u}{2}} = 2 - \frac{3}{u} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 3u^2 - 24u + 18 = 0 \\ u \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow u = 3 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0.$$

Hệ có một cặp nghiệm duy nhất: $x = 2; y = 0$

- c). Điều kiện $\frac{y}{4} \leq x \leq \frac{3y}{4}$.

Ta viết phương trình (1) thành: $\sqrt{4x-y} = 1 + \sqrt{3y-4x}$. Bình phương 2 vế ta thu được: $2\sqrt{3y-4x} = 8x-4y-1$. Thay vào phương trình (2) của hệ ta có:

$4x^2 - 4x(y+2) + y^2 + 4y = 0$. Ta coi đây là phương trình bậc 2 của x thì

$$\Delta' = 4(y+2)^2 - 4(y^2 + y) = 16 \text{ suy ra } \begin{cases} x = \frac{2(y+2)-4}{4} = \frac{y}{2} \\ x = \frac{2(y+2)+4}{4} = \frac{y+4}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 1: $y = 2x$ thay vào phương trình (1) ta có: $\sqrt{2x} = -12$ vô nghiệm

Trường hợp 2: $y = 2x - 4$ thay vào phương trình (1) ta thu được:

$$2\sqrt{2x-12} = 15 \Leftrightarrow x = \frac{273}{8}, y = \frac{257}{4}$$

Vậy hệ phương trình có 1 cặp nghiệm: $(x; y) = \left(\frac{273}{8}; \frac{257}{4}\right)$

PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Để giải được hệ phương trình bằng phương pháp đánh giá ta cần nắm chắc các bất đẳng thức cơ bản như: Cauchy, Bunhiopxki, các phép biến đổi trung gian giữa các bất đẳng thức, qua đó để đánh giá tìm ra quan hệ x, y

Ngoài ra ta cũng có thể dùng hàm số để tìm GTLN, GTNN từ đó có hướng đánh giá, so sánh phù hợp.

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} x(x^2 - y^2) + x^2 = 2\sqrt{(x-y^2)^3} \\ 76x^2 - 20y^2 + 2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} \end{cases} \end{aligned}$$

Giải

a) Điều kiện: $0 \leq x, y \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{Đặt } a = \sqrt{2}x, b = \sqrt{2}y; a, b \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

$$\text{Ta có: } VT = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}\right)}.$$

Ta sử dụng bổ đề với $a, b > 0$ và $ab \leq 1$ ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)} \leq 0 \text{ (đúng)}.$$

$$\text{Vậy } VT \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}} = VP.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y$. Thay vào(2) ta tìm được nghiệm của phương trình.

$$\text{Nghiệm của hệ } (x; y) = \left(\frac{9-\sqrt{73}}{36}; \frac{9-\sqrt{73}}{36}\right), \left(\frac{9+\sqrt{73}}{36}; \frac{9+\sqrt{73}}{36}\right).$$

b) Điều kiện: $x \geq y^2 \geq 0$.

Phương trình (1) tương đương: $x^3 + x(x - y^2) - 2\sqrt{(x - y^2)^3} = 0$.

Đặt $\sqrt{x - y^2} = u$ phương trình (1) thành:

$$x^3 + xu^2 - 2u^3 = 0 \Leftrightarrow x = u \Leftrightarrow y^2 = x - x^2.$$

Thay vào (2) ta được: $96x^2 - 20x + 2 = \sqrt[3]{32x^2 + 4x}$.

$$\text{Ta có } 96x^2 - 20x + 2 = \sqrt[3]{32x^2 + 4x} = \sqrt[3]{1.1.(32x^2 + 4x)} \leq \frac{32x^2 + 4x + 2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(96x^2 - 20x + 2) \leq 32x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow (16x - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{7}}{8}$$

Từ đó ta có các nghiệm của hệ là: Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{8}; \pm \frac{\sqrt{7}}{8}\right)$.

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y^2 (1) \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x^2 (2) \end{cases} \quad \text{với } x, y \geq 0$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 10\sqrt{xy} - y = 12 \\ x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{2(x^2 + y^2)} \leq 3 \end{cases}$$

Giải

a) Hiển nhiên $x = y = 0$ là một nghiệm của hệ. Ta xét $x \neq 0$ và $y \neq 0$.
Cộng theo về hai phương trình trong hệ ta được

$$2xy \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}} \right) = x^2 + y^2. \text{ Chú ý rằng}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}} \leq \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Với } xy > 0 \text{ ta có } 2xy \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}} \right) \leq 2xy \leq x^2 + y^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$. Với $xy < 0$. Khả năng này không thể xảy ra. Thật vậy, không làm mất tính tổng quát giả sử $x < 0, y > 0$ thì rõ ràng đẳng thức (1) không thể xảy ra. Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0), (1; 1)$.

b) Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có :

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Rightarrow 12 = 3x + 10\sqrt{xy} - y \leq 3x + 5x + 5y - y = 8x + 4y \Rightarrow 2x + y \geq 3$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\begin{aligned} x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{2(x^2 + y^2)} &\geq 2x + y \\ \Leftrightarrow \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} &\geq \sqrt{2(x^2 + y^2)} + x + y (*). \end{aligned}$$

Ta có: $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ Để chứng minh (*) ta sẽ chứng minh bất

$$\text{đẳng thức mạnh hơn là: } \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} \geq 2\sqrt{2(x^2 + y^2)} \quad (1)$$

Mặt khác ta cũng có: $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ nên (1) sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được:

$$\frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{2}} \geq 2\sqrt{2(x^2 + y^2)} \Leftrightarrow 2(x^3 + y^3) \geq (x^2 + y^2)\sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

$$\Leftrightarrow x^6 + y^6 + 4x^3y^3 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) \geq 0 \quad (2)$$

Vì $y > 0$ chia hai vế cho y^6 đặt $t = \frac{x}{y} > 0$ bất đẳng thức (2) trở thành.

$$t^6 - 3t^4 + 4t^3 - 3t^2 + 1 \geq 0$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do:

$$t^6 - 3t^4 + 4t^3 - 3t^2 + 1 = (t-1)^2(t^4 + 2t^3 + 2t + 1)$$

$$\Rightarrow x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq 3$$

Kết hợp tất cả các vấn đề vừa chỉ ra ta thấy chỉ có bộ số x, y thỏa mãn

$$\text{điều kiện } \begin{cases} x, y > 0 \\ 2x + y = 3 \Leftrightarrow x = y = 1 \text{ là nghiệm của hệ} \\ x = y \end{cases}$$

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} 9\sqrt{\frac{41}{2}\left(x^2 + \frac{1}{2x+y}\right)} = 3 + 40x & \text{với } x, y > 0 \\ x^2 + 5xy + 6y = 4y^2 + 9x + 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} = x + y \\ x\sqrt{2xy + 5x + 3} = 4xy - 5x - 3 \end{cases}$$

Giải

a) Phương trình (1) tương đương: $\sqrt{82\left(x^2 + \frac{1}{2x+y}\right)} = \frac{6+80x}{9}$.

Ta có:

$$VT = \sqrt{(1^2 + 9^2)\left(x^2 + \frac{1}{2x+y}\right)} \geq \left|9x + \frac{1}{\sqrt{2x+y}}\right| \geq 9x + \frac{3}{\sqrt{9(2x+y)}} \geq 9x + \frac{6}{2x+y+9}$$

$$\Rightarrow \frac{6+80x}{9} \geq \frac{6}{2x+y+9} \Leftrightarrow 3x - 2x^2 - xy + 6y \geq 0 \quad (*)$$

Lấy (*) cộng với PT(2) ta được:

$$-x^2 + 4xy - 4y^2 + 12y - 6x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow -(x - 2y + 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + 3 = 2y.$$

Để dấu bằng xảy ra thì $x = y = 3$.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (3; 3)$.

b) Ta có

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{(x-y)^2}{4} \geq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{|x+y|}{2}$$

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{3} = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{(x-y)^2}{12} \geq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} \geq \frac{|x+y|}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} \geq |x+y| \geq x+y$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y \geq 0$

Thay $x = y$ vào phương trình còn lại ta có: $x\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 4x^2 - 5x - 3$

Để ý rằng $x = 0$ không phải là nghiệm. Ta xét $x > 0$, chia phương trình

cho x^2 thì thu được: $\sqrt{2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} = 4 - \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$. Đặt

$t = \sqrt{2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} > 0$ ta có phương trình:

$$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow 2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 4 \Leftrightarrow \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 3)$

Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình sau

a)
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 + 3 = 0 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y - 24 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} & (1) \\ (x+1)[y + \sqrt{xy} + x(1-x)] = 4 & (2) \end{cases}$$

Giải

a) Điều kiện:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 32 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình vế theo vế ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{32-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} = y^2 - 6y + 21 \quad (*)$$

Ta có: $y^2 - 6y + 21 = (y-3)^2 + 12 \geq 12$.

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \sqrt{32-x} &\leq \sqrt{(1+1)(x+32-x)} = 8 \\ \Rightarrow \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} &\leq \sqrt{(1+1)(\sqrt{x} + \sqrt{32-x})} = 4\end{aligned}$$

Vậy $\sqrt{x} + \sqrt{32-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \leq 12$. Từ đó suy ra hệ có nghiệm khi

$$\text{và chỉ khi } x, y \text{ phải thỏa mãn: } \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{32-x} \\ \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{32-x} \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x; y) = (16; 3)$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ xy + (x-y)(\sqrt{xy}-2) \geq 0 \end{cases}$

Chuyển về và bình phương ở phương trình thứ nhất của hệ ta thu được:

$$\begin{aligned}xy + (x-y)(\sqrt{xy}-2) &= (y + \sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \\ \Leftrightarrow (x-y)(y + \sqrt{xy}-2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(2y + \sqrt{y} - \sqrt{x}) &= 0 \quad (3)\end{aligned}$$

Từ phương trình (1) của hệ ta có

$$2y + \sqrt{y} - \sqrt{x} = y + \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy}-2)} \geq 0.$$

Từ phương trình (2) ta có:

$$(x+1)(y + \sqrt{xy}) = x^3 - x + 4 = (x+2)(x-1)^2 + 2(x+1) \geq 2(x+1) \Rightarrow y + \sqrt{xy} \geq 2$$

Kết hợp với (3) ta suy ra $x = y$

Thay vào phương trình (2) ta có:

$$(x+1)[2x + x(1-x)] = 4 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 1$

Nhận xét: Việc nhìn ra được quan hệ $x = y$ là chìa khóa để giải quyết bài toán. Đây là kỹ năng đặc biệt quan trọng khi giải hệ bằng phương pháp đánh giá cũng như chứng minh bất đẳng thức.

MỘT SỐ BÀI TẬP RÈN LUYỆN PHÂN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ (x-1)^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$
 (Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên

ĐHQG Hà Nội 2008) .

2)
$$\begin{cases} 2x^2y - y^2x = 1 \\ 8x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$$
 (Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên

ĐHQG Hà Nội 2008) .

3)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 1 \\ 3x + y = y^2 + 3 \end{cases}$$
 (Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên

ĐHQG Hà Nội 2009) .

4)
$$\begin{cases} 3x^2 + 8y^2 + 12xy = 23 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$
 (Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT

Chuyên ĐHQG Hà Nội 2010) .

5)
$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 + 2xy = 26 \\ 3x + (2x - y)(x - y) = 11 \end{cases}$$
 (Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10

THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2010) .

6)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x^2y^2 \\ (x+y)(1+xy) = 4x^2y^2 \end{cases}$$
 (Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT

Chuyên ĐHQG Hà Nội 2011) .

7)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 4 \\ 2x + y + xy = 4 \end{cases}$$
 (Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT

Chuyên ĐHQG Hà Nội 2012) .

$$8) \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (\text{Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT}$$

Chuyên ĐHQG Hà Nội 2014) .

$$9) \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + xy = 12 \\ 6x + x^2y = 12 + 6y + y^2x \end{cases} \quad (\text{Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10}$$

THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2014) .

$$10) \begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ 4x^2 + y^2 = 5xy^2 \end{cases} \quad (\text{Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT}$$

Chuyên ĐHQG Hà Nội 2015) .

$$11) \begin{cases} 2x + 2y + xy = 5 \\ 27(x + y) + y^3 + 7 = 26x^3 + 27x^2 + 9x \end{cases} \quad (\text{Trích đề tuyển sinh vòng 2-}$$

lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2015) .

$$12) \begin{cases} x(4y + 1) - 2y = -3 \\ x^2(x^2 - 12y) + 4y^2 = 9 \end{cases} \quad (\text{Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên}$$

Amsterdam và Chu Văn An năm 2014)

$$13) \begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \\ 3xy = x + y + 1 \end{cases} \quad (\text{Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên}$$

Phan Bội Châu – Nghệ An 2014)

$$14) \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} = 4 - x - y \\ \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{2y} = 2 \end{cases} \quad (\text{Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên}$$

Lam Sơn Thanh Hóa 2014)

$$15) \begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases} \quad (\text{Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10}$$

chuyên Thái Bình 2014) .

$$16) \begin{cases} xy(3x + y) = 4 \\ 7x^3 + 11 = 3(x + y)(x + y + 1) \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x^2y^2 \\ y + 8x^2y + 3x = 5x^2 + 7xy \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ 2y^3 = x + y \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 15 \\ y + y^4 = x \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 2 \\ (x+y)(x^4+y^4+x^2y^2-2) = 2x^5 \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ (x+y)^3 = x \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} (xy+1)(x^2y^2+1) = 15y^3 \\ y^3 + 1 = xy^4 \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8xy = 16 \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ 27x^3 + 6y^2x = 2 + y^3 + 30x^2y \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5 \\ \frac{15x^3}{y} + \frac{y^3}{x} + 12xy = 40 \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} x(x+2y) = 8 \\ \frac{1}{(x+y)^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x+y)^3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \frac{1-x^2}{(1+xy)^2 - (x+y)^2} - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} (x-4)\sqrt{y-3} + (y-1)\sqrt{x-2} = 7\sqrt{6} \\ 12x\sqrt{y-4} + 4\sqrt{2y}\sqrt{x-2} = 5xy \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} \frac{8xy}{x^2+y^2+6xy} + \frac{17}{8} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) = \frac{21}{4} \\ \sqrt{x-16} + \sqrt{y-9} = 7 \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{13-y} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{y-3} + \sqrt{13-z} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{z-3} + \sqrt{13-x} = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$31) \begin{cases} x^3 + 7y = (x+y)^2 + x^2y + 7x + 4 \\ 3x^2 + y^2 + 8y + 4 = 8x \end{cases}$$

$$32) \begin{cases} 3\sqrt{x+2y} + \sqrt{3-x-y} = 5 \\ 2\sqrt{3-x-y} - \sqrt{2x+3y+4} = 2 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

$$33) \begin{cases} (x-2)(2y-1) = x^3 + 20y - 28 \\ 2(\sqrt{x+2y} + y) = x^2 + x \end{cases}$$

$$34) \begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-16} = 2 + \sqrt{y-3x} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

$$35) \begin{cases} 3y(9y^2+1) = (x-2y+1)\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x+3y-2 \end{cases}$$

$$36) \begin{cases} \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{9x}{5} \\ \frac{x}{y} = \frac{3x+5}{30-6y} \end{cases}$$

$$37) \begin{cases} (x+3)\sqrt{y^2+8y+20} + (y+4)\sqrt{x^2+6x+10} = 0 \\ 4(x+5)^2 + 6y+11 = 3\sqrt{2y+5} \end{cases}$$

$$38) \begin{cases} 2x^3 + xy^2 + x^2 - 2y = 4 \\ 2x^2 + xy + 2y^2 + 2y = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$39) \begin{cases} 2y(x+3)(2y+3) = x^2y^2 + 12xy^2 + 11y + 8 \\ y\sqrt{6x} = \sqrt{13y^2 + y + 1} \end{cases}$$

$$40) \begin{cases} 2x^3 - x^2y^2 = 4 \\ y^3 - 2xy + \frac{2x^2}{y} = 2 \end{cases}$$

$$41) \begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x = 2 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} = -2 \end{cases}$$

$$42) \begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x}\sqrt{3-2y} + 1 \end{cases}$$

$$43) \begin{cases} (2x^2-1)(2y^2-1) = \frac{7}{2}xy \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

$$44) \begin{cases} 16x^3 + 24x^2 + 14x + 3 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt[4]{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}$$

$$45) \begin{cases} \sqrt{13x+4y} + 2 = \sqrt{2x+y} - 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$46) \begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$$

$$47) \begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \\ \sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt{y+2} = 5 \end{cases}$$

$$48) \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \\ y + \frac{y}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12} \end{cases}$$

$$49) \begin{cases} (xy + 3)^2 + (x + y)^2 = 8 \\ \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$50) \begin{cases} x^4 - x^3 + 3x^2 - 4y - 1 = 0 \\ \sqrt{\frac{x^2 + 4y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 2xy + 4y^2}{3}} = x + 2y \end{cases}$$

$$51) \begin{cases} x^3 - 12z^2 + 48z - 64 = 0 \\ y^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \\ x^3 - 12y^2 + 48y - 64 = 0 \end{cases}$$

$$52) \begin{cases} x^2 + 2 + (y^2 - y - 1)\sqrt{x^2 + 2} - y^3 + y = 0 \\ 2x + xy + 2 + (x + 2)\sqrt{y^2 + 4x + 4} = 0 \end{cases}$$

$$53) \begin{cases} \sqrt{3x + y} + \sqrt{2x + 7} = 10 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})\left(\frac{1}{\sqrt{x + 3y}} + \frac{1}{\sqrt{3x + y}}\right) = 2 \end{cases}$$

$$54) \begin{cases} 2y^3 - (x + 4)y^2 + 8y + x^2 - 4x = 0 \\ \sqrt{\frac{1-x}{2}} + \sqrt{x + 2y + 3} = 4(x - 1)^2 + 8y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$55) \begin{cases} (x-y)(x+y+y^2) = x(y+1) \\ 3\sqrt{x^3+4x} = y^2+4y+7 \end{cases}$$

$$56) \begin{cases} 2y^3 - (x-4)y^2 + 4y - x^2 - 2x = 0 \\ 3(\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{4(x-y+1)}) = (x+1)^2 - 8(y-1) \end{cases}$$

$$57) \begin{cases} 8(x^2+y^2) + 4xy + \frac{5}{(x+y)^2} = 13 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$$

$$58) \begin{cases} x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} = 2 \\ (x+y)^3 - 12(x-1)(y-1) + \sqrt{xy} = 9 \end{cases}$$

$$59) \begin{cases} x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x-3} = 6-2x \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1) Ta viết lại hệ phương trình thành:
$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$
 đặt $a = x-1$ ta

có hệ mới $\begin{cases} a^2 + y^2 = 1 \\ a^3 + y^3 = 1 \end{cases}$. Suy ra $-1 \leq a, y \leq 1$. Mặt khác ta cũng có:

$$a^3 = 1 - y^3 = (1-y)(1+y+y^2) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq a \leq 1. \text{ Tương tự ta cũng có}$$

$$0 \leq y \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq a^3 \\ y^2 \geq y^3 \end{cases} \Rightarrow a^2 + y^2 \geq a^3 + y^3 = 1. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi}$$

$a = 1, y = 0$ hoặc $a = 0, y = 1$. Từ đó suy ra các nghiệm của hệ là:

$$(x, y) = (1; 1), (2; 0).$$

2) Hệ phương trình có dạng gần đối xứng từ hệ ta suy ra

$$8x^3 - y^3 = 7(2x^2y - y^2x) \Leftrightarrow 8x^3 - 14x^2y + 7xy^2 - y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(4x-y)(2x-y) =$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = 4x \end{cases} \text{ thay vào một phương trình ta tìm được nghiệm là:}$$

$$(x; y) = (1; 1), \left(-\frac{1}{2}; -2\right)$$

Ta có thể giải nhanh hơn như sau: Lấy phương trình (2) trừ 6 lần phương trình (1) thì thu được: $(2x - y)^3 = 1 \Rightarrow 2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

3) Từ hệ phương trình suy

$$\text{ra } \begin{cases} x^2 - 1 + xy = y^2 \\ 3x + y - 3 = y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 1 + xy = 3x + y - 3 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)x - y + 2 = 0. \text{ Đây}$$

là phương trình bậc 2 của x có $\Delta = y^2 - 6y + 9 - 4(-y + 2) = (y - 1)^2$ từ đó tính được $x = 1$ hoặc $x = 2 - y$ thay vào ta tìm được các nghiệm là

$$(x; y) = (1; 0), (1; 1), (5; -3)$$

Chú ý ta có thể giải cách khác:

$$x^2 - 1 + xy = 3x + y - 3 \Leftrightarrow y(x - 1) + x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(y + x - 2) = 0.$$

4) Nhận xét: Có thể đưa hệ về dạng đẳng cấp: Từ hệ ta suy ra

$$2(3x^2 + 8y^2 + 12xy) = 23(x^2 + y^2) \Leftrightarrow 17x^2 - 24xy + 7y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(17x - 7y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{7}{17}y \end{cases}. \text{ Giải hệ với 2 trường hợp ta suy ra}$$

$$(x; y) = (1; 1), (-1; -1), \left(\frac{7}{13}; \frac{17}{13}\right), \left(-\frac{7}{13}; -\frac{17}{13}\right).$$

Cách khác: Cộng hai phương trình của hệ ta thu được:

$$(2x + 3y)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases} \text{ rồi thay vào để giải như trên.}$$

5) Ta viết lại hệ đã cho thành:
$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 + 2xy = 26 \\ 3x + 2x^2 - xy - y^2 = 11 \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình: (2) với 2 rồi cộng với phương trình (1) ta

được: $9x^2 + 6x = 48 \Leftrightarrow (3x+1)^2 = 48 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{8}{3} \end{cases}$ thay vào ta tìm được

$y = 1$ hoặc $y = -3$.

Cách khác: Ta viết lại hệ thành:

$$\begin{cases} (2x+y)^2 + (x-y)^2 = 26 \\ (2x+y) + (x-y) + (2x+y)(x-y) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 26 \\ a + b + ab = 11 \end{cases} \text{ đây là hệ đối}$$

xúng loại 1.

6) Nhận xét $x = y = 0$ là nghiệm của hệ. Xét $x, y \neq 0$. Ta chia 2 phương trình cho $x^2 y^2$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2 \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(2 + \frac{2}{xy}\right) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{2}{xy} = 2 \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(2 + \frac{2}{xy}\right) = 8 \end{cases} \text{ . Đặt}$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = a; \left(2 + \frac{2}{xy}\right) = b \text{ thu được } \begin{cases} ab = 8 \\ a^2 - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2; b = 4. \text{ Từ}$$

đó tìm được nghiệm là $(x, y) = (1; 1)$.

7) Ta viết lại hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 5 \\ x + x(y+1) + y + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a + b + ab = 5 \end{cases} \text{ đây là hệ đối}$$

Xúng loại 1, ta dễ tìm được $a = 2, b = 1$ hoặc $a = 1, b = 2$. Từ đó giải được

$x = y = 1$ hoặc $x = 2, y = 0$.

Cách khác: Ta viết lại hệ thành:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 4 \\ 4x + 2y + 2xy = 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 4(x+y) = 12 \Leftrightarrow (x+y)^2 + 4(x+y) - 12 = 0$$

8) Từ hệ ta suy ra

$$x^2 + xy + 2y^2 = 4(x^2 + y^2 - xy) \Leftrightarrow 3x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(3x-2y) = 0$$

Giải hệ ứng với 2 trường hợp ta có: $x = y = 1; x = y = -1$,

$$x = \frac{2\sqrt{7}}{7}; y = \frac{3\sqrt{7}}{7}; x = -\frac{2\sqrt{7}}{7}; y = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

9) Ta viết hệ đã cho thành:

$$\begin{cases} (x-y)(2x+3y) = 12 \\ (x-y)(xy+6) = 12 \end{cases} \Rightarrow (x-y)(2x+3y) = (x-y)(xy+6)$$

$$(x-y)(2x+3y-6-xy) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-3)(y-2) = 0. \text{Giải 3 trường hợp}$$

ta thu được: $(x, y) = (3; -1), (3; 2), (-4; 2)$.

10) Từ hệ ta suy ra

$$\begin{cases} 2xy + 3y^2 = 5xy^2 \\ 4x^2 + y^2 = 5xy^2 \end{cases} \Leftrightarrow 2xy + 3y^2 = 4x^2 + y^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 2xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(4x+2y)$$

. Giải 2 trường hợp ta thu được $(x, y) = (0; 0), (1; 1), \left(\frac{2}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

$$11) \text{ Ta viết lại hệ đã cho thành: } \begin{cases} (x+2)(y+2) = 9 \\ 27(x+y) + y^3 + x^3 + 8 = (3x+1)^3 \end{cases}$$

Chú ý rằng: $27(x+y) = 3(x+2)(y+2)$ suy ra

$$27(x+y) + y^3 + x^3 + 8 = (3x+1)^3 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3(x+2)(y+2)(x+y) + 8 = (3x+1)^3$$

$\Leftrightarrow (x+y+2)^3 = (3x+1)^3 \Leftrightarrow x+y+2 = 3x+1 \Leftrightarrow y = 2x-1$ thay vào ta tìm được: $(x; y) = (1; 1), \left(-\frac{7}{2}; -8\right)$.

12) Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2(4y+1) = 2y-3 \\ x^2(x^2-12y) = 9-4y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(4y+1)(2y+3) = 4y^2-9 \\ x^2(x^2-12y) = 9-4y^2 \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình ta được: $x^2(x^2+8y^2+2y+3) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2[x^2+7y^2+(y+1)^2+2] = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \quad (\text{tm})$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Điều kiện: $x \neq -1; y \neq -1$.

13) Hệ phương trình đã cho tương đương:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{y+1} \cdot \frac{y}{x+1} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{x}{y+1}; v = \frac{y}{x+1}$, hệ thành:
$$\begin{cases} u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \\ uv = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 + 2uv = 1 \\ u^2 + v^2 - 2uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 1 \\ (u-v)^2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $u = v = \frac{1}{2}$ hoặc $u = v = -\frac{1}{2}$. Nếu $u = v = \frac{1}{2}$ thì $x = y = 1$ (tm). Nếu $u = v = -\frac{1}{2}$ thì $x = y = -\frac{1}{3}$ (tm).

14) Điều kiện $\begin{cases} x+2y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Đặt $t = \sqrt{x+2y} \geq 0$ từ phương trình (1) suy

ra $t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x + 2y = 1$ thay vào phương trình (2) ta có:

$\sqrt[3]{8-4y} + \sqrt{2y} = 2$. Đặt $\sqrt{2y} = a \geq 0 \Rightarrow 2y = a^2$. Thay vào phương trình ta

có: $\sqrt[3]{8-2a^2} = 2-a \Leftrightarrow a^3 - 8a^2 + 12a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \\ a = 6 \end{cases}$. Từ đó tìm được các

nghiệm của hệ là $(x; y) = (1; 0), (-3; 2), (-35; 18)$

15) Phương trình (1) của hệ có thể viết lại như sau:

$$(2x - y)(x + 2y - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 5 - 2y \end{cases}$$

Thay vào phương trình (2) của hệ ta tìm được các nghiệm là

$(x; y) = (1; 2), (-1; -2), (-3; 4)$.

16) Từ phương trình (2) ta có:

$$7x^3 + 3xy(3x + y) = 1 + 3(x + y)(x + y + 1)$$

$$\text{Hay } 7x^3 + 3xy(4x + 2y - x - y) = 1 + 3(x + y)(x + y + 1)$$

$$\text{Hay } 8x^3 + y^3 + 6xy(2x + y) = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + 3(x + y + 1)(x + y) + 1$$

Hay $(2x + y)^3 = (x + y + 1)^3 \Rightarrow 2x + y = x + y + 1 \Rightarrow x = 1$. Thay vào phương trình đầu tìm được nghiệm của hệ là: $(x; y) = (1; 1), (1; -4)$.

17) Dễ thấy hệ có nghiệm $(0; 0)$.

Nếu $x, y \neq (0; 0)$ hệ phương trình tương đương với:
$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{3}{xy} - \frac{7}{x} - \frac{5}{y} = -8 \end{cases}$$

Đặt $\frac{1}{x} = u; \frac{1}{y} = v$ và cộng hai phương trình của hệ ta thu được:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ u^2 + 3uv - 7u + 5v = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2u^2 + v^2 + 3uv - 7u + 5v + 6 = 0 \Leftrightarrow (u + v - 2)(2u + v - 3) = 0. \text{ Ta được:}$$

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2u + v = 3 \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases}$$

18)

Ta có:

$$2y^3 = (x + y) \cdot 1 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3 \Rightarrow y^3 = x^3 \Leftrightarrow x = y. \text{ Hệ}$$

tương đương với $\begin{cases} x = y \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}$

19) Hệ tương đương:

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ 15(x - y) = 15y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ (x + y)(x^2 + y^2)(x - y) = 15y^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ x^4 - y^4 = 15y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} x = 2y \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \end{cases} \Rightarrow 15y^3 = 15 \Leftrightarrow y = 1; x = 2$$

$$+) \begin{cases} x = -2y \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15 \end{cases} \Rightarrow -5y^3 = 15 \Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{3}; x = 2\sqrt[3]{3}$$

Vậy nghiệm của hệ: $x = 2; y = 1$, $x = 2\sqrt[3]{3}; y = -\sqrt[3]{3}$.

$$\mathbf{20)} \text{ Ta có: } 2x^5 = (x+y)(x^4+y^4+x^2y^2-xy(x^2+y^2)) = x^5+y^5 \Leftrightarrow x=y$$

$$\text{Ta thu được hệ tương đương: } \begin{cases} x = y \\ xy(x^2+y^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}.$$

$$\mathbf{21)} \text{ Hệ đã cho tương đương: } \begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 - (x+y)(x-y) = 1 \\ 2(x+y)^3 = (x+y) + (x-y) \end{cases}$$

Đặt $u = x+y; v = x-y$, sau đó giải như bài 18.

$$\mathbf{22)} \text{ Nếu } y = 0 \text{ suy ra } 1 = 0 \text{ (loại)}$$

Chia cả hai vế cho $y^3 \neq 0, y^4 \neq 0$ ta được:

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) = 15 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{y^4} = x \end{cases}. \text{ Đặt } \frac{1}{y} = t \text{ ta được: } \begin{cases} (x+t)(x^2+t^2) = 15 \\ t+t^4 = x \end{cases}, \text{ sau đó}$$

giải như bài 19

$$\mathbf{23)} \text{ Ta có: } 16 = x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 = (x+y)^4 \Rightarrow x+y = \pm 2$$

$$+) \begin{cases} x+y = 2 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (2-x)^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} x+y = -2 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (x+2)^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ có 2 cặp nghiệm là $(1;1), (-1;-1)$.

$$\text{24) Ta có: PT 2} \Leftrightarrow 27x^3 - y^3 - 27x^2y + 9y^2x = x^3 + y^3 + 3y^2x + 3x^2y$$

$$\Leftrightarrow (3x - y)^3 = (x + y)^3 \Leftrightarrow x = y. \text{ Hệ đã cho tương đương:}$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

$$\text{25) Ta có: PT 2} \Leftrightarrow 15x^4 + y^4 + 12x^2y^2 = 40xy = 8xy(4x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 + y^4 - 8xy(4x^2 + y^2) + 12x^2y^2 = x^4$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^4 = x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = x \\ 2x - y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x = y \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}.$$

$$+) \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5 \\ 3x = y \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 9x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{13} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{5}{13}}; 3\right), \left(-\sqrt{\frac{5}{13}}; -3\sqrt{\frac{5}{13}}\right).$$

26) Điều kiện: $x, y \neq 0$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{(x+y)^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x+y)^3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{x^2y^2}$$

$$\text{Hệ đã cho tương đương với hệ: } \begin{cases} x(x+2y) = 8 \\ x^2y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \pm 4 \\ x^2 + 2xy = 8 \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + 2xy = 8 \end{cases} \text{ khi đó } \begin{cases} xy = 4 \\ x^2 = 0 \end{cases} \text{ Hệ này vô nghiệm.}$$

Xét hệ: $\begin{cases} xy = -4 \\ x^2 = 16 \end{cases}$

Hệ này có nghiệm $(4; -1)$ và $(-4; 1)$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(4; -1)$ và $(-4; 1)$.

27) Ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \frac{1-x^2}{(1+xy)^2 - (x+y)^2} + 1 - y^2 = 2 \end{cases}$

Hệ này tương tự với hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \frac{1-x^2}{(1+xy)^2 - (x+y)^2} + 1 - y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x, y \neq \pm 1 \end{cases}$

Khi đó, hệ có nghiệm $(-3; 0)$ và $(3; 0)$.

28) Điều kiện: $x \geq 2, y \geq 4$

Vì $12x\sqrt{y-4} \leq 3x(y-4+4) = 3xy$ và $4\sqrt{2}y\sqrt{x-2} \leq 2y(x-2+2) = 2xy$

Cộng hai bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được:

$$5xy = 12x\sqrt{y-4} + 4\sqrt{2}y\sqrt{x-2} \leq 3xy + 2xy = 5xy$$

Do vậy dấu “=” phải xảy ra. Khi đó $x = 4, y = 8$.

Kiểm tra lại, ta thấy $x = 4, y = 8$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

29) Điều kiện: $x \geq 16, y \geq 9$.

Khi đó: $\frac{8}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 6} + \frac{17}{8} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) = \frac{21}{4}$. Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$.

Từ sự đánh giá qua bất đẳng thức dưới đây:

$$6 = \frac{8}{t+6} + \frac{17}{8}t + \frac{3}{4} = \frac{8}{t+6} + \frac{1}{8}(t+6) + 2t \geq 2 + 2.2 = 6, \text{ suy ra } t+6=8 \text{ hay } t=2.$$

Vậy $t = x \geq 16$. Xét phương trình vô tỷ $\sqrt{x-16} + \sqrt{x-9} = 7$ với $x \geq 16$.

Bình phương hai vế và giản ước được: $\sqrt{(x-16)(x-9)} = 37-x$

Từ đây suy ra $x = 25$.

Kiểm tra lại, ta thấy $x = 25, y = 25$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

30) Điều kiện: $3 \leq x, y, z \leq 13$. Cộng ba phương trình vế theo vế, ta được:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{13-x} + \sqrt{y-3} + \sqrt{13-y} + \sqrt{z-3} + \sqrt{13-z} = 6\sqrt{5}.$$

Xét: $T = \sqrt{t-3} + \sqrt{13-t}$ với $t \in [3; 13]$

$$\text{Vì } T = \sqrt{t-3} + \sqrt{13-t} \leq \sqrt{(1+1)(t-3+13-t)} = 2\sqrt{5}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki và dấu “=” xảy ra khi $t = 8$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm $x = y = z = 8$.

31) Biến đổi hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} x^2(x-y) = (x+y)^2 + 7(x-y) + 4 & (1) \\ 4 = -3x^2 - y^2 + 8(x-y) & (2) \end{cases}$$

Thực hiện phép thế (2) vào (1) ta có:

$$\begin{aligned}
x^2(x-y) &= (x+y)^2 + 7(x-y) - 3x^2 - y^2 + 8(x-y) \\
\Leftrightarrow x^2(x-y) &= -2x^2 + 2xy + 15(x-y) \\
\Leftrightarrow x^2(x-y) &= -2x(x-y) + 15(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + 2x - 15) = 0
\end{aligned}$$

TH1: $x = y$. Thay vào phương trình (2) có ngay: $4x^2 + 4 = 0$. Phương trình này vô nghiệm.

$$\text{TH2: } x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y^2 + 8y + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -7 \end{cases} \\ x = -5 \Rightarrow y^2 + 8y + 11 = 0 (VN) \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm sau: $(3; -1), (3; -7)$

$$32) \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{2x+y} \\ v = \sqrt{3-x-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y = u^2 \\ 3-x-y = v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = u^2 + v^2 - 3 \\ x = 6 - u^2 - 2v^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y + 4 = u^2 - v^2 + 7$$

$$\text{Khi đó hệ ban đầu trở thành: } \begin{cases} 3u + v = 5 \\ 2v - \sqrt{u^2 - v^2 + 7} = 2 (*) \end{cases}$$

Thế $v = 5 - 3u$ vào phương trình (*) giải tìm được $u = 1$, từ đó $v = 2$

$$\Rightarrow x = -3; y = 2$$

33) PT thứ hai của hệ

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x + 2y + 2\sqrt{x+2y} + 1 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x+2y} + 1)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2y} = x \\
&\text{hoặc } \sqrt{x+2y} = -x - 2
\end{aligned}$$

$$\text{TH1: } \sqrt{x+2y} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2y = x^2 - x \end{cases} \text{ thay vào phương trình thứ nhất ta}$$

$$\text{được } 13x^2 - 11x - 30 = 0$$

TH2: $\sqrt{x+2y} = -x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \leq 0 \\ 2y = x^2 + x + 1 \end{cases}$ thay vào phương trình thứ nhất ta được bậc hai theo x

34) Điều kiện: $x \geq 4; y \geq 0; x^2 \geq y; 4x \geq y; y \geq 3x$

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x^2 - y} = 4x - y \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - y} = y - 2x \Leftrightarrow y = 4x - 4 \vee y = 0$$

+ Nếu $y = 0$ thì không thỏa mãn do điều kiện $y \geq 3x \geq 12$

+ Nếu $y = 4x - 4$ thay vào phương trình (2) ta thu được:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 16} &= 2 + \sqrt{x - 4} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 16} - 3 = \sqrt{x - 4} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 - 16} + 3} &= \frac{x - 5}{\sqrt{x - 4} + 1} \Leftrightarrow (x - 5) \left(\frac{x + 5}{\sqrt{x^2 - 16} + 3} - \frac{1}{\sqrt{x - 4} + 1} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 5 \vee \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 - 16} + 3} - \frac{1}{\sqrt{x - 4} + 1} &= 0 \end{aligned}$$

Với $x = 5 \Rightarrow y = 16$

$$\text{Xét } \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 - 16} + 3} - \frac{1}{\sqrt{x - 4} + 1} = 0 \Leftrightarrow (x + 5)\sqrt{x - 4} + x + 2 - \sqrt{x^2 - 16} = 0.$$

Dễ thấy $x + 2 - \sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 16} > 0$ với mọi $x \geq 4$ nên phương trình vô nghiệm

Tóm lại hệ có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (5; 16)$

35). ĐK: $x \geq 2y, x + \sqrt{x - 2y} \geq 0$

Đặt $\begin{cases} a = 3y \\ b = \sqrt{x - 2y} \end{cases}$, phương trình (1) của hệ đã cho tương đương với:

$$a(a^2+1)=b(b^2+1)\Rightarrow(a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0.$$

$$\text{Do } a^2+ab+b^2>0(\forall a,b)\Rightarrow a=b$$

Hệ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2y}=3y \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x=9y^2+2y \\ \sqrt{9y^2+2y+3y}=9y^2+2y+3y-2 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } t=9y^2+5y, pt \Leftrightarrow \sqrt{t}=t-2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t^2-5t+4=0 \end{cases} \Rightarrow t=4.$$

$$\text{Do } y \geq 0 \Rightarrow y=\frac{4}{9} \Rightarrow x=\frac{8}{3}$$

$$\text{Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất: } (x,y)=\left(\frac{8}{3};\frac{4}{9}\right)$$

36) Từ phương trình (1) ta rút ra được:

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}{\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)}=\frac{9x}{5} \Leftrightarrow \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-y^2}+x^2-y^2}{y^2}=\frac{9x}{5}$$

(*)

$$\text{Từ phương trình 2 ta có kết quả: } \frac{9x}{5}=\frac{6x}{y}-1$$

Thay vào (*) ta có:

$$\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-y^2}-y^2}{y^2}=\frac{6x}{y}-1 \Leftrightarrow 2x^2+2x\sqrt{x^2-y^2}=6xy \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+\sqrt{x^2-y^2}=3y \end{cases}$$

Nếu $x=0$ vô nghiệm.

Nếu $x + \sqrt{x^2 - y^2} = 3y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = 3y - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y - x \geq 0 \\ x^2 - y^2 = 9y^2 - 6xy + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - x \geq 0 \\ y = 0 \\ y = \frac{5}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x.$$

Thay vào ta tìm được: $(x; y) = (5; 3)$

KL: Hệ có nghiệm: $(x; y) = (5; 3)$

37) Biến đổi phương trình (1)

$$(x+3)\sqrt{(y+4)^2+4} = -(y+4)\sqrt{(x+3)^2+1} \quad (*)$$

+ $x = -3 \Rightarrow y = -4$ ta thấy không thỏa mãn.

+ $x \neq -3 \Rightarrow y \neq -4$ thì bình phương hai vế phương trình (*)

$$\begin{cases} (x+3)(y+4) < 0 \\ (y+4)^2 = 4(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow y+4 = -2(x+3) \Leftrightarrow y = -2x-10$$

Thay vào phương trình (2) và rút gọn ta được:

$$4x^2 + 28x + 51 + 3\sqrt[3]{4x+15} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 8x + 16) + 3\sqrt[3]{4x+15} - (4x+13) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+4)^2 + \frac{27(4x+15) - (4x+13)^3}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2} + 3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15} + (4x+13)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+4)^2 - \frac{16(4x+7)(x+4)^2}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2} + 3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15} + (4x+13)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 \left[1 - \frac{4(4x+7)}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2} + 3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15} + (4x+13)^2} \right] = 0$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{4(4x+7)}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2} + 3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15} + (4x+13)^2} = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

- Với $x = -4 \Rightarrow y = -2$

$$\text{- Với } 1 - \frac{4(4x+7)}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2} + 3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15} + (4x+13)^2} = 0 \quad (3)$$

Ta sẽ chứng minh phương trình này vô nghiệm như sau:

Để thấy với mọi x thì $4x^2 + 28x + 51 > 0$

Do đó phương trình(**) có nghiệm khi $3\sqrt[3]{4x+15} < 0 \Rightarrow x < -\frac{15}{4}$. Từ đó suy ra vế trái của (3) luôn dương, dẫn đến phương trình này vô nghiệm.

KL: $(x; y) = (-4; -2)$

38) Từ phương trình (2) ta thu được: $y^2 = 2 - x^2 - y - \frac{xy}{2}$

Thay vào phương trình (1) ta có:

$$2x^3 + x \left(2 - x^2 - y - \frac{xy}{2} \right) + x^2 - 2y = 4 \Rightarrow x^3 + 2x - xy - \frac{x^2y}{2} + x^2 - 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) + x(x^2 + 2x + 4) - y(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 + 4x - x^2y - 2xy - 4y = 8$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 8) + (x^3 + 2x^2 + 4x) - (x^2y + 2xy + 4y) = 0 \Rightarrow (2x - 2 - y)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Thay $y = 2x - 2$ vào phương trình (2) và rút gọn ta được

$$x(6x - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = \frac{7}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y) = (0; -2), \left(\frac{7}{6}; \frac{1}{3}\right)$

39) Với điều kiện $x > 0$ hệ phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x^2y^2 + 8xy^2 - 6xy - 12y^2 - 7y + 8 = 0 \\ 13y^2 + y + 1 - 6xy^2 = 0 \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) ta có được phân tích sau:

$$x^2y^2 + 2xy^2 + y^2 - 6xy - 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow [y(x+1)]^2 - 6y(x+1) + 9 = 0$$

$$\text{Ta được } y(x+1) = 3 \Leftrightarrow 19y^2 - 17y + 1 = 0$$

$$\text{- Với } y = \frac{17 + \sqrt{213}}{38}; x = \frac{49 - 3\sqrt{213}}{2}$$

$$\text{- Với } y = \frac{17 - \sqrt{213}}{38}; x = \frac{49 + 3\sqrt{213}}{2}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có bộ nghiệm là:

$$(x; y) = \left(\frac{49 - 3\sqrt{213}}{2}, \frac{17 + \sqrt{213}}{38}\right), \left(\frac{49 + 3\sqrt{213}}{2}, \frac{17 - \sqrt{213}}{38}\right)$$

40). Điều kiện: $y \neq 0$

Với $y \neq 0$ ta biến đổi hệ phương trình thành
$$\begin{cases} 2\frac{x^2}{y} - xy = \frac{4}{xy} \\ 2\frac{x^2}{y} - 2xy + y^3 = 2 \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{x^2}{y}; b = xy$ hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} 2a - b = \frac{4}{b} \\ 2a - 2b + \frac{b^2}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab - b^2 = 4 & (3) \\ 2a^2 - 2ab + b^2 = 2a & (4) \end{cases}$$

Cộng (3) và (4) theo vế và thu gọn ta được

$$a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

TH1: $a = -1 \Rightarrow b^2 + 2b + 4 = 0$ (VN)

TH2: $a = 2 \Rightarrow b = 2$ ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \\ y = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2})$

41) Điều kiện:
$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 2y - y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Cách 1: Đặt $t = x + 1, 0 \leq t \leq 2$. Lúc đó hệ pt thành:

$$\begin{cases} t^3 - 3t^2 + 2 = y^3 - 3y^2 + 2 \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2 \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} = -2 \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta suy ra: $(t-y)(t^2+ty+y^2-3(t+y))=0$ Vì
 $t^2+ty+y^2-3(t+y)=0 \Leftrightarrow t^2+(y-3)t+y^2-3y=0$ có
 $\Delta=(y-3)^2-4(y^2-3y)=(y-3)(y-3-4y)=-3(y-3)(y+1)<0$ nên
 phương trình này vô nghiệm.

Vậy $t=y \Rightarrow x+1=y$. Thay $x+1=y$ vào phương trình (2) có:

$$x^2-2\sqrt{1-x^2}=-2 \Leftrightarrow 1-x^2+2\sqrt{1-x^2}-3=0 \Leftrightarrow (\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2}=1 \\ \sqrt{1-x^2}=-3 \end{cases} \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=1$$

Vậy hệ pt có 1 nghiệm duy nhất là $(x; y)=(0;1)$

Cách 2: Phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2+\sqrt{1-x^2}+2=3\sqrt{2y-y^2} \Leftrightarrow f(x)=g(y)$.

Xét $f(x)$ trên miền $[-1;1]$ ta có $3 \leq f(x) \leq \frac{13}{4}$

Ta lại có: $g(y)=3\sqrt{y(2-y)} \leq \frac{y+2-y}{2}=3$.

Vậy $f(x) \geq g(y)$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y=1 \\ x=\pm 1, x=0 \end{cases}$.

Thay vào phương trình (1) có nghiệm $(x; y)=(0;1)$ (thỏa mãn)

Vậy hệ có nghiệm $(x; y)=(0;1)$.

42) Vì $x=0$ không phải là nghiệm của hệ chia phương trình (1) cho x^3
 ta thu được: $2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)^3 + \left(1-\frac{1}{x}\right) = \sqrt{(3-2y)^3} + \sqrt{3-2y}$$

Đặt $a = 1 - \frac{1}{y}, b = \sqrt{3-2y}$ suy ra

$$a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Thay vào pt thứ 2 ta được:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+2}-3) - (\sqrt[3]{15-x}-2) &= 0 \Leftrightarrow \frac{x-7}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{x-7}{\sqrt[3]{(15-x)^2+2\sqrt[3]{15-x}+4}} = 0 \\ \Leftrightarrow x=7 &\Rightarrow y = \frac{111}{98} \end{aligned}$$

43) Dễ thấy $xy=0$ không thỏa mãn hệ.

Với $xy \neq 0$ viết lại hệ dưới dạng:
$$\begin{cases} \left(2x - \frac{1}{x}\right)\left(2y - \frac{1}{y}\right) = \frac{7}{2} \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0$ (ẩn x) có nghiệm là $\Delta_1 = (y-7)^2 - 4y^2 + 24y - 56 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[1; \frac{7}{3}\right]$

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0$ (ẩn y) có nghiệm là: $\Delta_2 = (x-6)^2 - 4x^2 + 28x - 56 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[2; \frac{10}{3}\right]$

Xét hàm số $f(t) = 2t - \frac{1}{t}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên

$$\Rightarrow f(x) \cdot f(y) \geq f(2) \cdot f(1) = \frac{7}{2}$$

Kết hợp với phương trình thứ nhất ta được: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ là nghiệm của hệ.

“Để chứng minh hàm số $f(x)$ đồng biến trên miền xác định D ta làm như sau: Xét hai giá trị $x_1 \neq x_2 \in D$. Chứng minh: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ”

Ngược lại để chứng minh hàm số $f(x)$ nghịch biến trên miền xác định D ta làm như sau: Xét hai giá trị $x_1 \neq x_2 \in D$. Chứng minh: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ”

44) Điều kiện xác định $x \geq \frac{-1}{2}; y \geq 2$.

Ta viết lại hệ thành:
$$\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt[4]{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}$$

Đặt $a = 2x+1, b = \sqrt{y-2}$ suy ra $2a^3 + a = 2b^3 + b \Leftrightarrow a = b$. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có: $\Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt{y-2}$

Thay vào phương trình thứ hai ta được: $\sqrt[4]{4y-8} + \sqrt{2y+4} = 6(*)$

Đặt $t = \sqrt{2y+4}$ thì $2y = t^2 - 4$ thay vào ta có: $\sqrt[4]{2t^2 - 16} = 6 - t \Rightarrow t = 4$

$\Rightarrow y = 6$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 6\right)$

45) Điều kiện:
$$\begin{cases} 13x+4y \geq 0 \\ 2x+y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4y}{13} \\ x \geq -\frac{y}{2} \end{cases}$$

Đặt $a = \sqrt{13x+4y}, b = \sqrt{2x+y}$. Khi đó ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2 - 4b^2 = 5x \\ a + 2b = 5 \\ b + x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = x \\ a + 2b = 5 \\ b + x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5-x}{4} & (1) \\ a + 2b = 5 & (2) \\ b + x - 2y = 2 & (3) \end{cases}$$

Thế (1) vào (3) ta được: $x = \frac{8y+3}{3}$ (4). Thế (4) vào phương trình

$$\sqrt{2x+y} + x - 2y = 2 \text{ ta được: } \sqrt{\frac{19y+6}{3}} = \frac{3-2y}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ 4y^2 - 69y - 19 = 0 \end{cases}$$

Giải ra $y = \frac{69-3\sqrt{545}}{8}$ từ đó tính được $x = 24 - \sqrt{545}$

Thử lại ta thấy $(x; y) = \left(24 - \sqrt{545}; \frac{69-3\sqrt{545}}{8} \right)$ là nghiệm cần tìm.

- 46)** Ta tìm cách loại bỏ $18y^3$. Vì $y = 0$ không là nghiệm của phương trình (2) nên tương đương $72x^2y^2 + 108xy = 18y^3$.

Thế $18y^3$ từ phương trình (1) vào ta thu được:

$$8x^3y^3 - 72x^2y^2 - 108xy + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -\frac{3}{2} \\ xy = \frac{21-9\sqrt{5}}{4} \\ xy = \frac{21+9\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Thay vào phương trình (1) ta tìm được x, y .

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0(L) \\ y=\sqrt[3]{\frac{8(xy)^3+27}{18}}=-\frac{3}{2}(\sqrt{5}-3) \Rightarrow x=\frac{1}{4}(3-\sqrt{5}) \\ y=\sqrt[3]{\frac{8(xy)^3+27}{18}}=\frac{3}{2}(3+\sqrt{5}) \Rightarrow x=\frac{1}{4}(3+\sqrt{5}) \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm

$$(x; y) = \left(\frac{1}{4}(3-\sqrt{5}); -\frac{3}{2}(\sqrt{5}-3) \right), \left(\frac{1}{4}(3+\sqrt{5}); -\frac{3}{2}(3+\sqrt{5}) \right).$$

47) Điều kiện: $x \leq 2, y \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình (1) tương đương:

$$(2-x)\sqrt{2-x} + \sqrt{2-x} = (2y-1)\sqrt{2y-1} + \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow f(\sqrt{2x-1}) = f(\sqrt{2y-1})$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{2-x}, b = \sqrt{2y-1} \Rightarrow a^3 + a = b^3 + b \Rightarrow a = b.$$

$$\sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow x = 3-2y \text{ thay vào ta có:}$$

$$\sqrt[3]{5-2y} + 2\sqrt{y+2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=5 \\ a^3+2b^2=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1; b=2 \\ a=\frac{-3-\sqrt{65}}{4}; b=\frac{23+\sqrt{65}}{8} \\ a=\frac{\sqrt{65}-3}{4}; b=\frac{23-\sqrt{65}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=\frac{233+23\sqrt{65}}{32} \\ y=\frac{233-23\sqrt{65}}{32} \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm

$$(x; y) = (-1; 2), \left(\frac{23\sqrt{65} - 185}{16}; \frac{233 - 23\sqrt{65}}{32} \right), \left(-\frac{23\sqrt{65} + 185}{16}; \frac{233 + 23\sqrt{65}}{32} \right)$$

48) Điều kiện: $x^2 > 1$.

Ta có (1) tương đương

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1})(\sqrt{y^2 + 1} - y) &= \sqrt{y^2 + 1} - y \\ \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} &= -y + \sqrt{y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Từ đó ta rút ra $x = -y$.

$$\text{Thay vào (2) ta được: } y + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{35}{12}.$$

Bình phương hai vế (điều kiện $y > 0$). Khi đó ta có:

$$y^2 + \frac{2y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} + \frac{y^2}{y^2 - 1} = \left(\frac{35}{12}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{y^4 - y^2 + y^2}{y^2 - 1} + \frac{2y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} = \left(\frac{35}{12}\right)^2.$$

Đặt $\frac{y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} = t > 0$. Phương trình tương đương:

$$t^2 + 2t - \left(\frac{35}{12}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{49}{12} (L) \\ t = \frac{25}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{25}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{5}{4} \\ y = \pm \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Đổi chiều điều kiện chỉ lấy 2 giá trị dương.

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } (x; y) = \left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right), \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

49) Triển khai phương trình (1)

$$(1) \Leftrightarrow x^2 y^2 + 6xy + 9 + x^2 + 2xy + y^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1 = -8xy$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(y^2 + 1) = -8xy.$$

Nhận thấy $x = 0, y = 0$ không là nghiệm của hệ.

Phương trình (1) khi đó là: $\frac{x^2 + 1}{x} \cdot \frac{y^2 + 1}{y} = -8.$

Đặt $\frac{x}{x^2 + 1} = a; \frac{y}{y^2 + 1} = b$. Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} a + b = -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{ab} = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2} \\ \frac{y}{y^2 + 1} = \frac{1}{4} \\ \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{4} \\ \frac{y}{y^2 + 1} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \pm \sqrt{3} \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm

$$(x; y) = (-1; 2 - \sqrt{3}), (-1; 2 + \sqrt{3}), (2 - \sqrt{3}; -1), (2 + \sqrt{3}; -1).$$

50) Ta có:

$$(x + 2y)^2 \leq (1 + 1)(x^2 + 4y^2) \Rightarrow \frac{(x^2 + 4y^2)}{2} \geq \sqrt{\frac{(x + 2y)^2}{4}} \Leftrightarrow \frac{(x^2 + 4y^2)}{2} \geq \frac{|x + 2y|}{2}$$

Mặt khác ta cũng có:

$$\frac{x^2 + 2xy + 4y^2}{3} = \frac{3(x+2y)^2 + (x-2y)^2}{12} \geq \frac{(x+2y)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 + 2xy + 4y^2}{3}} \geq \frac{|x+2y|}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sqrt{\frac{x^2 + 4y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 2xy + 4y^2}{3}} \geq |x+2y| \geq x+2y$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 2y \geq 0$

Thay vào phương trình còn lại ta thu được:

$$x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Hệ có một cặp nghiệm: } (x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$$

51) Cộng theo vế các pt của hệ ta được: $(x-4)^3 + (y-4)^3 + (z-4)^3 = 0 (*)$

Từ đó suy ra trong 3 số hạng ở tổng này phải có ít nhất 1 số hạng không âm, không mất tính tổng quát ta giả sử: $(z-4)^3 \geq 0 \Rightarrow z \geq 4$

Thế thì phương trình thứ nhất của hệ tương đương:

$$x^3 - 16 = 12(z-2)^2 \geq 12 \cdot 2^2 \Rightarrow x \geq 4$$

Thế thì phương trình thứ hai của hệ tương đương:

$$y^3 - 16 = 12(x-2)^2 \geq 12 \cdot 2^2 \Rightarrow y \geq 4$$

Do vậy từ $(x-4)^3 + (y-4)^3 + (z-4)^3 = 0 (*) \Rightarrow x = y = z = 4$ thử lại thỏa mãn.

Vậy $(x; y; z) = (4; 4; 4)$ là nghiệm của hệ.

52) Phương trình (1) của hệ có dạng: $(\sqrt{x^2+2}-y)(\sqrt{x^2+2}+y^2-1)=0$

Do $\sqrt{x^2+2}+y^2-1>0$ nên suy ra $\sqrt{x^2+2}-y=0 \Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+2}$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$(x+2)+(x+2)\sqrt{(x+2)^2+2}=-x-x\sqrt{(-x)^2+2}$$

$$\Rightarrow x+2=-x \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=\sqrt{3}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)=(-1; \sqrt{3})$

53) Theo bất đẳng thức cô si ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{x+3y}} = \sqrt{\frac{x}{x+y} \cdot \frac{x+y}{x+3y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x+y}{x+3y} \right) \\ \sqrt{\frac{y}{x+3y}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{x+3y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2y}{x+3y} \right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{3}{2} \right)$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{3}{2} \right)$$

Từ đó suy ra $(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}} + \frac{1}{\sqrt{3x+y}} \right) \leq 2$. Dấu bằng xảy ra khi

$x=y$ thay vào phương trình thứ nhất ta được: $x=y=4$

$$\begin{cases} 2y^3-(x+4)y^2+8y+x^2-4x=0 \\ \sqrt{\frac{1-x}{2}}+\sqrt{x+2y+3}=4(x-1)^2+8y-\frac{1}{2} \end{cases}$$

54) Điều kiện: $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+2y+3 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại thành:

$$x^2 - (y^2 + 4)x + 2y^3 - 4y^2 + 8y = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (y^2 + 4)^2 - 4(2y^3 - 4y^2 + 8y) = (y^2 - 4y + 4)^2$$

Từ đó ta tính được:
$$\begin{cases} x = 2y \\ x = y^2 - 2y + 4 \end{cases}$$

Vì $x = y^2 - 2y + 4 = (y - 1)^2 + 3 > 1$ nên không thỏa mãn

Thay $x = 2y$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} + \sqrt{2x+3} = 4x^2 - 4x + \frac{7}{2}$$

Ta có: $4x^2 - 4x + \frac{7}{2} = (2x - 1)^2 + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2};$

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} + \sqrt{2x+3} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2x} + \sqrt{2x+3} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{4}+1\right)(2-2x+2x+3)} = \frac{5}{2}$$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi các dấu bằng đồng thời xảy ra.

Suy ra $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{4}$

55) Từ phương trình (2) ta suy ra $x > 0$

Phương trình (1) được viết lại như sau:

$$x^2 + (y^2 - y - 1)x - y^3 - y^2 = 0 \Rightarrow \Delta = (y^2 - y - 1)^2 + 4(y^3 + y^2) = (y^2 + y + 1)^2$$

Từ đó tính được:
$$\begin{cases} x = -y^2 < 0 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Thay $y = x - 1$ vào phương trình ta thu được: $3\sqrt{x(x^2 + 4)} = x^2 + 4 + 2x$.

Chia phương trình cho $x^2 + 4$ ta có: $3\sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}} = 1 + \frac{2x}{x^2 + 4}$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}} > 0 \text{ ta có } 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 4 = 0$ vô nghiệm

Với $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$

56) Điều kiện: $x \geq 1$

Ta viết lại phương trình (1) thành: $x^2 + (y^2 + 2)x - 2y^3 - 4y^2 - 4y = 0$

Tính được

$$\Delta = (y^2 + 2)^2 + 8y^3 + 16y^2 + 16y = (y^2 + 4y + 2)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -y^2 - 2y - 2 < 0 \end{cases}$$

Thay $y = \frac{x}{2}$ vào phương trình ta thu được:

$$3(\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{2x+4}) = x^2 - 2x + 9(*)$$

Theo bất đẳng thức Cossi ta có:

$$3(\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{2x+4}) = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{1 \cdot (x-1)} \leq \frac{3}{2}(1+x-1) = \frac{3}{2}x$$

$$3\sqrt[3]{2x+4} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot (x+2)} \leq \frac{1}{2}(4+4+x+2) = \frac{x+10}{2}$$

Từ đó suy ra $3(\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{2x+4}) \leq \frac{3}{2}x + \frac{x+10}{2} = 2x+5$

Mặt khác ta có: $x^2 - 2x + 9 - (2x+5) = (x-2)^2 \geq 0$

Từ đó suy ra phương trình (*) có nghiệm khi các dấu bằng đồng thời xảy ra $x = 2$.

Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$

Mặt khác ta thấy $x = 2; y = 3$ là một nghiệm của hệ

Vậy $(x; y) = (2; 3)$ là nghiệm duy nhất của hệ.

57) Đặt $a = x + y + \frac{1}{x+y}, b = x - y \Leftrightarrow$

Hệ $\begin{cases} 5\left[(x+y)^2 + \frac{1}{(x+y)^2}\right] + 3(x-y)^2 = 13 \\ (x+y + \frac{1}{x+y}) + x - y = 1 \end{cases}$ nên ta có:

$$\begin{cases} 5(a^2 - 2) + 3b^2 = 13 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 + 3b^2 = 23 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được $\begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}$ và $\begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ:

$$(x; y) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, -\frac{11}{4}\right), \left(\frac{3}{2}, -2\right).$$

58) Từ phương trình (2) ta suy ra $xy \geq 0 \Leftrightarrow x, y$ cùng dấu. Từ phương trình (1) ta suy ra $x, y \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cossi ta có:

$$x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} \leq \frac{x^2+2-y^2}{2} + \frac{y^2+2-x^2}{2} = 2. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x^2 + y^2 = 2.$$

Bài toán trở thành: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x+y)^3 - 12(x-1)(y-1) + \sqrt{xy} = 9 \end{cases}$$

Ta có:

$$(x+y)^3 - 12(x-1)(y-1) + \sqrt{xy} - 9 = (x+y)^3 + 12(x+y) - 21 - 12xy + \sqrt{xy}$$

Đặt $t = x + y \Rightarrow t \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = 2$ ta thu được

$$(x+y)^2 - 2xy = 2 \Leftrightarrow x+y = \sqrt{2(t^2+1)}. \text{ Ta có:}$$

$$\begin{aligned} & (x+y)^3 + 12(x+y) - 21 - 12xy + \sqrt{xy} \leq \\ & (x+y)^3 + 12(x+y) - 21 - 12 \frac{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} + \frac{(x+y)}{2} = t^3 - 6t^2 + 12t - 8. \end{aligned}$$

Ta có $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t-2)^3 \leq 0$. Khi $t = 2$ thì $\Rightarrow x = y = 1$ là nghiệm duy nhất của hệ.

59). Từ phương trình 2 của hệ ta suy ra $x, y \geq 0$. Xét phương trình:

$$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

Ta có:

$$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = (x+y)(x^2 + y^2 + 6xy) = (x+y)[(x+y)^2 + 4xy].$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $(x+y)^2 + 4xy \geq 2\sqrt{(x+y)^2 \cdot 4xy}$. Suy ra

$$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 4\sqrt{xy}(x+y)\sqrt{(x+y)^2} = 4\sqrt{xy}(x+y)^2. \text{ Ta có}$$

$$(x+y)^2 = (x^2 + y^2) + 2xy \geq 2\sqrt{(x^2 + y^2) \cdot 2xy}.$$

Suy ra $x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 8xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Thay vào phương trình (2) ta thu được:

$$\sqrt{x} - \sqrt{2x-3} = 6-2x \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2(x-3) \Leftrightarrow \frac{(x-3)}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} = 2(x-3)$$

Suy ra $x = 3$ hoặc: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x} = \frac{1}{2}$ Do $x \geq \frac{3}{2}$ nên pt này vô nghiệm.

Tóm lại: Hệ có nghiệm: $x = y = 3$.

Chủ đề 8 - BẤT ĐẲNG THỨC

Phần 1: BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY (CÔ SI)

Cho các số thực không âm a, b, c khi đó ta có:

1. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.
2. $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Các bất đẳng thức 1, 2 gọi là bất đẳng thức Cauchy cho 2 và 3 số thực không âm. (Còn gọi là bất đẳng thức Cô si hay bất đẳng thức AM- GM)

Để vận dụng tốt bất đẳng thức Cauchy . Ta cần nắm chắc những kết quả sau:

$$1) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$$

$$2) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$3) a^2 + ab + b^2 = \frac{3}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq \frac{3}{4}(a+b)^2$$

$$4) a^2 - ab + b^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2 + \frac{3}{4}(a-b)^2 \geq \frac{1}{4}(a+b)^2$$

$$5) ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$6) \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

$$7) a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4}$$

$$8) 2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2 \geq \left[\frac{(a+b)^2}{2} \right]^2 = \frac{(a+b)^4}{4} \Rightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{(a+b)^4}{8}$$

$$9) \text{ Với } a, b \geq 0 \text{ thì } a^{m+n} + b^{m+n} \geq \frac{1}{2}(a^m + b^m) \quad (*)$$

Thật vậy BĐT cần chứng minh tương đương với

$$(a^n + b^n)(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0 \text{ điều này là hiển nhiên đúng.}$$

$$(**) \text{ Tổng quát ta có } \frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^n$$

$$\text{Thật vậy áp dụng } (*) \text{ ta có } \frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(\frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2} \right) \dots \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^n$$

$$10) \text{ Với } a, b, c \geq 0 \text{ thì } a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n} \geq \frac{1}{3}(a^m + b^m + c^m)(a^n + b^n + c^n) \quad (*)$$

Thật vậy ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(a^m - b^m)(a^n - b^n) + (b^m - c^m)(b^n - c^n) + (c^m - a^m)(c^n - a^n) \geq 0 \text{ mà điều này là hiển nhiên đúng.}$$

$$\text{Tổng quát ta có: } \frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^n. \text{ Thật vậy áp dụng } (*) \text{ ta có:}$$

$$\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right) \left(\frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{3} \right) \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2 \left(\frac{a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}}{3} \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức này ta có:

$$\frac{\sqrt[n]{a^n} + \sqrt[n]{b^n} + \sqrt[n]{c^n}}{3} \geq \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n \Leftrightarrow \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \leq \sqrt[n]{\frac{a+b+c}{3}}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}}{3} \geq \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \right)^n$$

$$\text{Do } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \text{ suy ra } \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} \geq 3 \left(\frac{3}{a+b+c} \right)^n.$$

$$11) \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \text{ với mọi } a, b \geq 1$$

Tổng quát: với $a, b \geq 1$ ta có $\frac{1}{(1+a)^n} + \frac{1}{(1+b)^n} \geq \frac{2}{(1+\sqrt{ab})^n}$

12) Với $0 \leq a, b \leq 1$ thì $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Tổng quát: Với $a, b \in [0;1]$ ta có: $\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1+b}} \leq \frac{2}{\sqrt[n]{1+\sqrt{ab}}}$

13) Một số kết quả được suy ra từ bất đẳng thức Cô si.

$$+ (a^3 + b^3)(x^3 + y^3)(m^3 + n^3) \geq (axm + byn)^3 \quad (*)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{a^3 + b^3} + \frac{x^3}{x^3 + y^3} + \frac{m^3}{m^3 + n^3} &\geq \frac{3axm}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)(x^3 + y^3)(m^3 + n^3)}} \\ \frac{b^3}{a^3 + b^3} + \frac{y^3}{x^3 + y^3} + \frac{n^3}{m^3 + n^3} &\geq \frac{3byn}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)(x^3 + y^3)(m^3 + n^3)}} \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra:

$$\begin{aligned} 3 &\geq \frac{3axm + 3byn}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)(x^3 + y^3)(m^3 + n^3)}} \Leftrightarrow \\ (a^3 + b^3)(x^3 + y^3)(m^3 + n^3) &\geq (axm + byn)^3. \end{aligned}$$

+ Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được:

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3.$$

Ví dụ 1: Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng:

a) $a^3 + b^3 \geq ab(a + b).$

$$b) \frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}. \text{ Với } (a, b, c > 0)$$

$$c) (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

$$d) (a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

$$e) \text{ Cho } (a+b)(b+c)(c+a)=1. \text{ Chứng minh: } ab+bc+ca \leq \frac{3}{4} \text{ (Trích}$$

đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2015)

Lời giải:

$$a) \text{ Ta có : } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2). \text{ Suy ra}$$

$$a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \text{ suy ra}$$

đpcm.

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta có:

$$a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b) + abc = ab(a+b+c). \text{ Suy ra}$$

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)}. \text{ Tương tự ta có:}$$

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc} \leq \frac{1}{bc(a+b+c)}; \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{ca(a+b+c)}. \text{ Cộng ba bất}$$

đẳng thức cùng chiều ra suy ra:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và}$$

chỉ khi $a=b=c$.

$$c) (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Cách 1: Ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, b+c \geq 2\sqrt{bc}, c+a \geq 2\sqrt{ca} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Cách 2: $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$. Theo bất

đẳng thức Cauchy ta có:

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}, ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow$$

$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$. Suy ra

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \geq 8abc.$$

Chú ý: $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$ là một biến đổi được sử dụng rất nhiều trong chứng minh bất đẳng thức:

$$d) \quad (a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Chú ý rằng: $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$. Áp dụng câu c ta có đpcm.

e) Ta chú ý: $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$. Suy

$$\text{ra } ab+bc+ca = \frac{1+abc}{a+b+c}.$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$a+b+b+c+c+a \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = 3 \Rightarrow a+b+c \geq \frac{3}{2}.$$
 Mặt

khác sử dụng: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8}$. Từ đó suy ra:

$$ab+bc+ca = \frac{1+abc}{a+b+c} \leq \frac{1+\frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}.$$
 Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$a=b=c=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2:

a) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c+ab+bc+ca=6$.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2 \geq 6$. Trích đề tuyển sinh lớp 10- TP Hà Nội 2013.

- b) Cho các số thực dương a, b sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$. Chứng minh:

$$Q = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2a^2b} \leq \frac{1}{2}$$

Trích đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Nguyễn Trãi- Hải Dương 2013).

- c) Cho các số thực dương a, b sao cho $a + b = 2$. Chứng minh:

$$2(a^2 + b^2) - 6\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 9\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq 10.$$

- d) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{2a + bc} + \sqrt{2b + ac} + \sqrt{2c + ab}$. Trích đề tuyển sinh lớp 10- TP Hà Nội 2014.

- e) Cho các số thực không âm a, b sao cho $a^2 + b^2 = 4$. Tìm GTLN của

$$P = \frac{ab}{a + b + 2}. \text{ Trích đề tuyển sinh lớp 10- TP Hà Nội 2015.}$$

Lời giải:

- a) Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Ta có cách giải như sau:

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ac, a^2 + 1 \geq 2a, b^2 + 1 \geq 2b, c^2 + 1 \geq 2c.$$

Cộng 6 bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 2(ab + bc + ca + a + b + c) = 12 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3. \text{ Dấu}$$

bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

- b) Dự đoán khi $a = b = 1$ thì bất đẳng thức xảy ra dấu bằng. Từ đó ta có cách áp dụng BĐT Cô si như sau:

Ta có: $a^4 + b^2 \geq 2a^2b, b^4 + a^2 \geq 2ab^2$. Từ đó suy ra

$$Q \leq \frac{1}{2a^2b + 2ab^2} + \frac{1}{2b^2a + 2a^2b} = \frac{1}{2ab(a + b)} + \frac{1}{2ab(a + b)} = \frac{1}{ab(a + b)}. \text{ Từ}$$

giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = 2 \Rightarrow a+b = 2ab$ suy ra $Q \leq \frac{2}{(a+b)^2}$. Do

$2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2}$. Suy ra $Q \leq \frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

c) Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$2\left[(a+b)^2 - 2ab\right] - 6\frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} + 9\frac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2b^2} \geq 10. \text{ Hay}$$

$$8 - 4ab - 6\frac{4-2ab}{ab} + 9\frac{4-2ab}{a^2b^2} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow -2a^2b^2 - 4a^3b^3 - 24ab + 12a^2b^2 + 36 - 18ab :$$

$$\Leftrightarrow -2a^2b^2 - 4a^3b^3 - 24ab + 12a^2b^2 + 36 - 18ab \geq 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 10t^2 + 42t - 36 \leq 0$$

(*) với $0 < t = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = 1$. Ta có (*) tương đương với:

$$2t^3 - 5t^2 + 21t - 18 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 - 3t + 18) \leq 0. \text{ Do } 2t^2 - 3t + 18 > 0 \text{ và}$$

$t-1 \leq 0$ nên $(t-1)(2t^2 - 3t + 18) \leq 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$t = 1 \Leftrightarrow a = b = 1.$$

d) $\sqrt{2a+bc} = \sqrt{a(a+b+c)+bc}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{a+b+a+c}{2}, \text{ tương tự ta có:}$$

$$\sqrt{2b+ac} = \sqrt{b(a+b+c)+ac} \leq \sqrt{(b+a)(b+c)} \leq \frac{b+a+b+c}{2},$$

$$\sqrt{2c+ab} \leq \frac{c+a+c+b}{2}. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$P = \sqrt{2a+bc} + \sqrt{2b+ac} + \sqrt{2c+ab} \leq \frac{2a+b+c}{2} + \frac{2b+c+a}{2} + \frac{2c+a+b}{2} = 2(a+b+c),$$

.Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Ta viết lại $P = \frac{ab}{a+b+2} \Rightarrow$. Đặt $a+b+2 = t \Rightarrow t > 2$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = (t-2)^2 \Rightarrow 2ab = t^2 - 2t + 2 \quad (a+b)^2 = (t-2)^2. \text{ Ta có :}$$

$2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 8 \Leftrightarrow a+b \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow 2 < t \leq 2\sqrt{2} + 2$. Ta sẽ

chứng minh: $P = \frac{ab}{a+b+2} = \frac{t^2 - 2t + 2}{t}$. Dự đoán dấu bằng xảy ra khi

$a = b = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2\sqrt{2} + 2$ nên ta chứng minh:

$$P \leq \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 2}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)t^2 - (2\sqrt{2}+3)t + 2\sqrt{2} + 2 \leq 0.$$

Hay $t^2 - (\sqrt{2}+1)t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (t - 2\sqrt{2} - 2)(t - \sqrt{2} + 1) \leq 0$. Bất đẳng thức

này luôn đúng do $2 < t \leq 2\sqrt{2} + 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$t = 2\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}.$$

MỘT SỐ KỸ THUẬT VẬN DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI.

1. Dự đoán dấu bằng để phân tích số hạng và vận dụng bất đẳng thức Cô si.

Đối với các bài toán bất đẳng thức đối xứng thông thường dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau đây là cơ sở để ta phân tích các số hạng sao cho khi áp dụng bất đẳng thức Cô si thì dấu bằng phải đảm bảo.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 Chu Văn An, Hà Nội – Amsterdam 2006-2007)

Lời giải:

Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$. Khi đó $xy = 1$, $x^2 + y^2 = 2$

Mặt khác để tận dụng giả thiết $x + y = 2$ ta sẽ đưa về hằng đẳng thức

$(x+y)^2$. Vì vậy ta phân tích bài toán như

sau: $x^2 y^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot 2xy (x^2 + y^2)$. Theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = 1, \quad 2xy(x^2 + y^2) \leq \left(\frac{2xy + x^2 + y^2}{2} \right)^2 = \frac{(x+y)^4}{4} = 4. \text{ Từ đó}$$

suy ra $x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$.

Ngoài cách làm trên ta có thể giải bài toán bằng cách đưa về một biến:

$t = x + y$ hoặc $t = xy$ với chú ý: $(x+y)^2 \geq 4xy$, $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$. Thật

vậy: Đặt $t = xy$; $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$.

$$\Rightarrow 4 = x^2 + y^2 + 2t \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 - 2t. \text{ Do } xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = 1 \Rightarrow 0 < t \leq 1. \text{ Ta}$$

cần chứng minh: $t^2(4-2t) \leq 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 - t - 1) \leq 0$.

Bất đẳng thức này luôn đúng với mọi giá trị $0 < t \leq 1$.

Ví dụ 2:

- a) Cho a, b là các số không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 2$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)} \leq 6. \text{ (Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Ngoại Ngữ ĐHQGHN năm 2008-2009).}$$

- b) Với ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{x}{x + \sqrt{x+yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{y+zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{z+xy}}$. (Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội 2014)

Lời giải:

- a) Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$. Khi đó $3a = a + 2b, 3b = b + 2a$ nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy trực tiếp cho biểu thức trong dấu căn.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, dễ thấy

$$a\sqrt{3a(a+2b)} \leq a \frac{3a+a+2b}{2} = 2a^2 + ab,$$

$$b\sqrt{3b(b+2a)} \leq b \frac{3b+b+2a}{2} = 2b^2 + ab.$$

Cộng hai bất đẳng thức này lại về theo về, ta được:

$$M = a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)} \leq 2(a^2 + b^2) + 2ab = 4 + 2ab. \text{ Tiếp tục}$$

sử dụng bất đẳng thức Cauchy kết hợp với giả thiết, ta có:

$$4 + 2ab \leq 4 + a^2 + b^2 = 6. \text{ Từ đó ta có ngay } M \leq 6. \text{ Dấu bằng xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow a = b = 1.$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{x}{x + \sqrt{x+yz}} = \frac{x(\sqrt{x+yz} - x)}{x + yz - x^2} = \frac{x(\sqrt{x(x+y+z)} + yz - x)}{x(x+y+z) + yz - x^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ta có:

$$\frac{x(\sqrt{(x+y)(x+z)} - x)}{xy + yz + xz} \leq \frac{x + \left(\frac{x+y+x+z}{2} - x\right)}{xy + yz + xz} = \frac{xy + xz}{2(xy + yz + xz)}. \text{ Chứng}$$

minh tương tự rồi cộng về, ta suy ra $Q \leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi

$$x = y = z = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } Q \text{ lớn nhất bằng } 1 \text{ khi } x = y = z = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 3: Cho $c > 0$ và $a, b \geq c$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

Lời giải: Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b$. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết thành:

$P = \sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a-c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{b-c}{b}} \leq 1$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng:

$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ta có: $P \leq \frac{\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a}}{2} + \frac{\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b}}{2} = \frac{\frac{c}{b} + 1 - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} + 1 - \frac{c}{b}}{2} = 1$. Bài

toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{a-c}{a} \\ \frac{c}{a} = \frac{b-c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh bài toán bằng

biến đổi tương đương.

Ví dụ 4: Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2zx} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \geq 1.$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng: $2ab \leq a^2 + b^2$, dễ thấy:

$$P = \frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2zx} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \geq \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{y^2 + z^2 + x^2} + \frac{z^2}{z^2 + x^2 + y^2} = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Ví dụ 5: Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 1$. Chứng minh rằng $8(x^4 + y^4) + \frac{1}{xy} \geq 5$.

Giải:

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$. Ta đánh giá $x^4 + y^4$ để đưa về xy .

Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$ suy ra $8(x^4 + y^4) \geq 16x^2y^2$.

Suy ra $8(x^4 + y^4) + \frac{1}{xy} \geq 16x^2y^2 + \frac{1}{xy}$ Để ý rằng dấu bằng xảy ra thì

$16x^2y^2 = 1$ nên ta phân tích như

sau: $16x^2y^2 + \frac{1}{xy} = 16x^2y^2 + \frac{1}{4xy} + \frac{1}{4xy} + \frac{1}{2xy}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si

$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ ta có: $16x^2y^2 + \frac{1}{4xy} + \frac{1}{4xy} \geq 3$,

$4xy \leq (x + y)^2 = 1 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}$. Suy ra $16x^2y^2 + \frac{1}{4xy} + \frac{1}{4xy} + \frac{1}{2xy} \geq 3 + 2 = 5$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 6) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

rằng: $a^2b + b^2c + c^2a \geq \frac{9a^2b^2c^2}{1 + 2a^2b^2c^2}$.

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$$(a^2b + b^2c + c^2a) \left(2 + \frac{1}{a^2b^2c^2} \right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2b + b^2c + c^2a) + \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{bc^2} + \frac{1}{ca^2} \geq 9. \text{ Mặt khác sử dụng bất đẳng}$$

thức Cauchy bộ ba số, ta có: $a^2b + a^2b + \frac{1}{ab^2} \geq 3\sqrt[3]{a^2b \cdot a^2b \cdot \frac{1}{ab^2}} = 3a$,

$$b^2c + b^2c + \frac{1}{bc^2} \geq 3\sqrt[3]{b^2c \cdot b^2c \cdot \frac{1}{bc^2}} = 3b$$

$$c^2a + c^2a + \frac{1}{ca^2} \geq 3\sqrt[3]{c^2a \cdot c^2a \cdot \frac{1}{ca^2}} = 3c$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại về theo về, ta được:

$2(a^2b + b^2c + c^2a) + \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{bc^2} + \frac{1}{ca^2} \geq 9$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 7) Cho $x, y > 1$. Chứng minh rằng: $\frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)} \geq 8$.

Giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$P = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y-1} \cdot \frac{y^2}{x-1}} = \frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}} \quad (1). \text{ Mặt khác, lại dễ ý}$$

rằng nếu sử dụng bất đẳng thức Cauchy bộ hai số dạng $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, thì:

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{1 \cdot (x-1)} \leq \frac{2+x-1}{2} = \frac{x}{2}; \sqrt{y-1} = \sqrt{1 \cdot (y-1)} \leq \frac{1+y-1}{2} = \frac{y}{2}. \text{ Nhân}$$

hai bất đẳng thức trên lại theo về, ta thu

$$\text{được: } \sqrt{(x-1)(y-1)} \leq \frac{xy}{4} \Leftrightarrow \frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}} \geq 8 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy}$$

ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y-1} = \frac{y^2}{x-1} \\ x = 2, y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2.$$

Đối với các bài toán mà dấu bằng không xảy ra khi các biến bằng nhau. Ta cần chú ý tính đối xứng của từng bộ phận, để dự đoán sau đó liên kết các dữ liệu của bài toán để tìm ra điểm rơi. Từ đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy để thu được kết quả:

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 8: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$. Tìm GTNN của

$$P = x^2 + y^2 + 2z^2$$

Giải:

Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x = y = az$ và mong muốn biến đổi được :

$P = x^2 + y^2 + 2z^2 \geq k(xy + yz + zx)$ để tận dụng giả thiết $xy + yz + zx = 1$ và dấu bằng xảy ra khi $x = y = az$. Để có tích $x.y$ ta áp dụng $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Để tạo ra yz ta áp dụng: $y^2 + a^2z^2 \geq 2ayz$. Để tạo ra zx ta áp dụng:

$$a^2z^2 + x^2 \geq 2azx.$$

Vì hệ số của yz, zx là a nên ta nhân a vào bất đẳng thức đầu tiên rồi cộng lại theo vế ta thu được

$$a(xy + yz + zx) \leq \frac{a(x^2 + y^2) + (y^2 + a^2z^2) + (a^2z^2 + x^2)}{2} = \frac{(a+1)(x^2 + y^2) + 2a^2z^2}{2}$$

Hay $2a \leq (a+1)(x^2 + y^2) + 2a^2z^2$. Để tạo ra $P = x^2 + y^2 + 2z^2$ ta cần có tỷ

$$\text{lệ: } (a+1) : 2a^2 = 1 : 2 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Từ đó ta tìm được: $P \geq \frac{2a}{1+a} = \sqrt{5} - 1$. Các em học sinh tự hoàn thiện lời giải.

Ví dụ 9) Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x + y + z = 3$. Tìm GTNN của

$$P = x^2 + y^2 + z^3$$

Lời giải:

Ta dự đoán dấu bằng có khi $x = y = a, z = b$; và $2a + b = 3$. Theo bất đẳng

thức Cô si ta có:
$$\begin{cases} x^2 + a^2 \geq 2ax \\ y^2 + a^2 \geq 2ay \\ z^3 + b^3 + b^3 \geq 3b^2z \end{cases}$$
. Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta

có: $x^2 + y^2 + z^3 + 2a^2 + 2b^3 \geq 2a(x + y) + 3b^2z$. Tức là:

$$x^2 + y^2 + z^3 \geq 2a(x + y) + 3b^2z - 2a^2 - 2b^3$$

Bây giờ ta cần chọn a, b sao cho $2a : 3b^2 = 1 : 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3b^2 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$. Giải hệ tìm

$$\text{được: } x = y = a = \frac{19 - \sqrt{37}}{12}; z = c = \frac{\sqrt{37} - 1}{6}$$

Từ đó bạn đọc tự hoàn thiện lời giải:

Ví dụ 10) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1$.

Tìm GTNN của $P = 2a^3 + 3b^3 + 4c^3$

Lời giải:

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = x; b = y; c = z$ với $x, y, z > 0$ và

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

Ta có: $a^3 + a^3 + x^3 \geq 3a^2x$; $b^3 + b^3 + y^3 \geq 3b^2y$; $c^3 + c^3 + z^3 \geq 3c^2z$, suy ra $2a^3 \geq 3a^2x - x^3$

$$b^3 + b^3 + y^3 \geq 3b^2y \Leftrightarrow 3b^3 \geq \frac{9}{2}yb^2 - \frac{3}{2}y^3,$$

$$c^3 + c^3 + z^3 \geq 3c^2z \Leftrightarrow 2c^3 \geq 3c^2z - z^3 \Rightarrow 4c^3 \geq 2(3c^2z - z^3).$$
 Cộng ba bất

$$\text{đẳng thức cùng chiều suy ra: } P \geq 3\left(xa^2 + \frac{3}{2}yb^2 + 2zc^2\right) - x^3 - \frac{3}{2}y^3 - 2z^3.$$

Ta cần chọn x, y, z để: $x : \frac{3}{2}y : 2z = 1 : 2 : 3$ và $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta dễ dàng tìm được:

$$x = \frac{6}{\sqrt{407}}; y = \frac{8}{\sqrt{407}}; z = \frac{9}{\sqrt{407}}. \text{ Học sinh tự hoàn thiện lời giải.}$$

Ví dụ 11) Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn:

$abc + bcd + cda + dab = 1$. Tìm GTNN của $P = 4(a^3 + b^3 + c^3) + 9d^3$. (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Trường chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội 2012)

Lời giải:

Biểu thức P cho ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = xd$, Để giảm ảm trong bài toán ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Cô si theo cách:

Khi đó $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, $b^3 + c^3 + x^3d^3 \geq 3xbcd$, $c^3 + a^3 + x^3d^3 \geq 3xcad$, $a^3 + b^3 + x^3d^3 \geq 3xabd$

Suy ra
$$\begin{cases} x(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3xabc \\ b^3 + c^3 + x^3d^3 \geq 3xbcd \\ c^3 + a^3 + x^3d^3 \geq 3xcad \\ a^3 + b^3 + x^3d^3 \geq 3xabd \end{cases}$$
. Cộng bốn bất đẳng thức cùng chiều ta có:

$$(x+2)a^3 + (x+2)b^3 + (x+2)c^3 + 3x^3d^3 \geq 3x(abc + bcd + cda + dab) = 3x.$$

Bây giờ ta chọn x sao cho $(x+2):3x^3 = 4:9 \Leftrightarrow \frac{x+2}{3x^3} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = 6$.

Đặt $x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)$ thay vào ta tìm được

$$y = \sqrt[3]{6 + \sqrt{35}}, y = \sqrt[3]{6 - \sqrt{35}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6 + \sqrt{35}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{35}}\right).$$

Bạn đọc tự hoàn thiện lời giải.

2. Kỹ thuật ghép đối xứng

Trong nhiều bài toán mà biểu thức ở hai vế tương đối phức tạp, việc chứng minh trực tiếp trở nên khó khăn thì ta có thể sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng để bài toán trở nên đơn giản hơn.

ở các bài toán bất đẳng thức, thông thường chúng ta hay gặp hai dạng sau:

Dạng 1: Chứng minh $X + Y + Z \geq A + B + C$

ý tưởng: Nếu ta chứng minh được $X + Y \geq 2A$. Sau đó, tương tự hóa để chỉ ra $Y + Z \geq 2B$ và $Z + X \geq 2C$ (nhờ tính đối xứng của bài toán). Sau đó cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi rút gọn cho 2, ta có ngay điều phải chứng minh.

Dạng 2: Chứng minh $XYZ \geq ABC$ với $X, Y, Z \geq 0$

Ý tưởng: Nếu ta chứng minh được $XY \geq A^2$. Sau đó, tương tự hóa để chỉ ra $YZ \geq B^2$ và $ZX \geq C^2$ (nhờ tính chất đối xứng của bài toán). Sau đó nhân ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi lấy căn bậc hai, ta có:

$$XYZ = \sqrt{A^2 B^2 C^2} = |ABC| \geq ABC.$$

Ví dụ 1. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 tỉnh Thái Bình năm 2005-2006)

Giải:

Ta cần một đánh giá dạng $2x^2 + xy + 2y^2 \geq (mx + ny)^2$ sao cho dấu bằng xảy ra khi $x = y$. Để có được đánh giá này thông thường ta viết lại

$$2x^2 + xy + 2y^2 = a(x - y)^2 + b(x + y)^2 = (a + b)x^2 + 2(b - a)xy + (a + b)y^2.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} a + b = 2 \\ b - a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}. \text{ Từ đó ta}$$

có:

$$2x^2 + xy + 2y^2 = \frac{3}{4}(x-y)^2 + \frac{5}{4}(x+y)^2 \geq \frac{5}{4}(x+y)^2 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(x+y)$$

tương tự ta có 2 bất đẳng thức và cộng lại ta

có:

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}(x+y+z) = \sqrt{5}$$

dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. Ta cũng có thể chứng minh trực tiếp:

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} \geq \frac{\sqrt{5}(x+y)}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + xy + 2y^2 \geq \frac{5}{4}(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)^2 - 3xy \geq \frac{5}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \text{ (đúng theo Cauchy)}$$

Ví dụ 2. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab + bc + ca = 1$. Chứng

minh rằng: $2abc(a+b+c) \leq \frac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$. (Trích đề tuyển sinh

vào lớp 10- Trường Chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội 2014).

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương ta có:

$$\begin{cases} a^4b^2 + \frac{1}{3}abc^2 + \frac{1}{9}ca \geq a^2bc \\ b^4c^2 + \frac{1}{3}a^2bc + \frac{1}{9}ab \geq b^2ca \Rightarrow \frac{2}{3}abc(a+b+c) \leq a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + \frac{1}{9} \\ c^4a^2 + \frac{1}{3}ab^2c + \frac{1}{9}bc \geq c^2ab \end{cases} \quad (1).$$

Mặt khác ta cũng có:

$$abc(a+b+c) = ab.ac + bc.ba + ca.cb \leq \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 = \frac{1}{3}. \text{ Suy ra}$$

$$\frac{4}{3}abc(a+b+c) \leq \frac{4}{9} \quad (2). \text{ Cộng theo vế (1) và (2) ta có đpcm.}$$

Ví dụ 3) Cho ba số dương x, y, z thỏa $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq 2$. Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Giải:

Từ giả thiết $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq 2$, ta suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &\geq \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) = \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}} \\ \Rightarrow \frac{1}{1+x} &\geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng

$$\text{có: } \frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{zx}{(1+z)(1+x)}}; \frac{1}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$$

Nhân ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu

$$\text{được: } \frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq \frac{8xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{8}.$$

Ví dụ 4. Cho $x, y, z > 2$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh rằng

$$(x-2)(y-2)(z-2) \leq 1$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm 2005-2006).

Lời giải:

Với giả thiết $x, y, z > 2$, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa bài toán về dạng đơn giản và quen thuộc hơn. Đặt $x = a + 2; y = b + 2; z = c + 2$ với $a, b, c > 0$.

Bài toán quay về chứng minh $abc \leq 1$

Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} = 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c+2} &= 1 - \frac{1}{a+2} - \frac{1}{b+2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b+2} \right) \\ &= \frac{a}{2(a+2)} + \frac{b}{2(b+2)} \geq \sqrt{\frac{ab}{(a+2)(b+2)}} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{b+2} \geq \sqrt{\frac{ca}{(c+2)(a+2)}}; \frac{1}{a+2} \geq \sqrt{\frac{bc}{(b+2)(c+2)}}$$

Nhân ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được:

$$\frac{1}{(a+2)(b+2)(c+2)} \geq \frac{abc}{(a+2)(b+2)(c+2)} \Rightarrow abc \leq 1.$$

Ví dụ 5) Cho x, y, z là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(\frac{x}{y+z} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{y}{z+x} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{z}{x+y} + \frac{1}{2} \right).$$

Giải:

$$\text{Ta có } P = \frac{(2x+y+z) + (2y+z+x)(2z+x+y)}{8(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$2x+y+z = (x+y)(x+z) \geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)} \quad (2)$$

$$2y+z+x = (y+z)(y+x) \geq 2\sqrt{(y+z)(x+y)} \quad (3)$$

$$2z+x+y = (z+x)(z+y) \geq 2\sqrt{(z+x)(z+y)} \quad (4)$$

Nhân từng vế của (2),(3),(4) và từ (1) suy ra $P \geq 1$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2),(3),(4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=x+z \\ y+z=y+x \Leftrightarrow x=y=z>0 \\ z+x=z+y \end{cases} \text{ . Từ đó suy ra } \min P=1.$$

3. Kỹ thuật cô si ngược dấu:

Ví dụ 1. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh

rằng: $\frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{3}{2}.$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a}{b^3+ab} = \frac{1}{b} - \frac{b}{a+b^2} \geq \frac{1}{b} - \frac{b}{2\sqrt{ab^2}} = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + 1 \right). \text{ Tương tự:}$$

$$\frac{b}{c^3+bc} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + 1 \right); \frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + 1 \right)$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại về theo về, ta được:

$$\frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{3}{4}$$

Bài toán được quy về chứng

$$\text{minh: } \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + a \right) + \left(\frac{1}{b} + b \right) + \left(\frac{1}{c} + c \right) \geq 3 + a + b + c = 6. \text{ Bất đẳng thức cuối cùng}$$

hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy, ta

$$\text{có: } \frac{1}{a} + a \geq 2; \frac{1}{b} + b \geq 2; \frac{1}{c} + c \geq 2$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 2) Cho $a, b, c > 0, a + b + c = 9$. Chứng minh:

$$\frac{a^3 + b^3}{ab + 9} + \frac{b^3 + c^3}{bc + 9} + \frac{c^3 + a^3}{ac + 9} \geq 9.$$

Ta chứng minh
được

$$a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a+b)^3, ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2 \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab + 9} \geq \frac{(a+b)^3}{(a+b)^2 + 36} = a + b - \frac{36(a+b)}{(a+b)^2 + 36}$$

Mặt khác ta có: $(a+b)^2 + 36 \geq 12(a+b)$. Suy ra $\frac{a^3 + b^3}{ab + 9} \geq a + b - 3$. Cộng ba
bất đẳng thức cùng chiều suy ra đpcm.

Ví dụ 3) Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}.$$

Lời giải:

Ta có: $\frac{x}{1+y^2} = x - \frac{xy^2}{1+y^2}$. Theo bất đẳng thức Cô si thì $1+y^2 \geq 2y$ Suy

ra $\frac{x}{1+y^2} \geq x - \frac{xy}{2}$ Tương tự, ta có: $\frac{y}{1+z^2} \geq y - \frac{yz}{2}, \frac{z}{1+x^2} \geq z - \frac{zx}{2}$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có $P \geq (x+y+z) - \frac{1}{2}(xy+yz+zx)$.

Mặt khác theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2$. Vì

$x+y+z=3 \Rightarrow xy+yz+zx \leq 3$. Như vậy $\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x=y=z=1$

4. Phương pháp đặt ẩn phụ:

Kỹ thuật đặt ẩn phụ là một kỹ thuật rất đặc biệt trong chứng minh bất đẳng thức:

Việc chọn ẩn phụ thích hợp sẽ giúp bài toán trở nên đơn giản hơn:

Một số kỹ thuật hay gặp như sau:

1. Khi có giả thiết : $a+b+c=abc$ ta có thể biến đổi thành:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1 \text{ đặt } \frac{1}{a} = x; \frac{1}{b} = y; \frac{1}{c} = z \Rightarrow xy + yz + zx = 1.$$

2. Khi gặp giả thiết $a+b+c=1$ ta có thể viết thành:

$$\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ba}{c}} + \sqrt{\frac{ac}{b} \cdot \frac{cb}{a}} = 1. \text{ Đặt}$$

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} = x, \sqrt{\frac{bc}{a}} = y, \sqrt{\frac{ca}{b}} = z \Rightarrow xy + yz + zx = 1.$$

3. Khi gặp giả thiết: $ab+bc+ca+abc=4$. Ta có thể viết thành:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1. \text{ Đặt}$$

$$x = \frac{1}{a+2}; y = \frac{1}{b+2}; z = \frac{1}{c+2} \Rightarrow x+y+z=1.$$

4. Từ điều hiển nhiên:

+

$$\frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{y+z}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z+x}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x+y}{z}} = 1$$

. Đặt $a = \frac{y+z}{x}; b = \frac{z+x}{y}; c = \frac{x+y}{z}$ ta suy ra

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1 \Leftrightarrow abc = a+b+c+2. \text{ Từ đó suy ra khi gặp}$$

giả thiết: $abc = a+b+c+2$ ta có thể đặt:

$$a = \frac{y+z}{x}; b = \frac{z+x}{y}; c = \frac{x+y}{z}$$

+ Nếu đổi $(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$ ta có: $abc = a+b+c+2$ tương

đương với $ab+bc+ca+2abc=1$. Vì vậy khi gặp giả thiết

$$ab+bc+ca+2abc=1 \text{ ta có thể đặt } a = \frac{x}{y+z}; b = \frac{y}{z+x}; c = \frac{z}{x+y}.$$

Một cách tổng quát: Khi gặp giả thiết: $\frac{1}{k+a} + \frac{1}{k+b} + \frac{1}{k+c} = 1$ khi

khai triển thu gọn ta có:

$k^3 - 3k^2 + (k^2 - 2k)(a + b + c) + (k - 1)(ab + bc + ca) + abc = 0$. Suy ra tồn tại các số x, y, z sao cho

$\frac{1}{k+a} = \frac{x}{x+y+z}; \frac{1}{k+b} = \frac{y}{x+y+z}; \frac{1}{k+c} = \frac{z}{x+y+z}$. Như vậy: Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{k+a} + \frac{1}{k+b} + \frac{1}{k+c} = 1$. Thì tồn

tại các số $m, n, p > 0$ sao cho:

$$a = \frac{m+n+p}{m} - k; b = \frac{m+n+p}{n} - k; c = \frac{m+n+p}{p} - k.$$

+ Nếu $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca + abc = 4$ thì ta có thể đặt

$$a = \frac{2m}{n+p}; b = \frac{2n}{p+m}; c = \frac{2p}{m+n}.$$

+ Nếu $a, b, c > 0$ và $a + b + c + 1 = 4abc$ thì ta có thể đặt

$$a = \frac{n+p}{2m}; b = \frac{p+m}{2n}; c = \frac{m+n}{2p}.$$

5. Khi gặp giả thiết: $xyz = 1$. Ta có thể chọn các phép đặt:

$$\frac{a^2}{b} = x; \frac{b^2}{c} = y; \frac{c^2}{a} = z \Rightarrow abc = 1; \frac{a^2}{bc} = x; \frac{b^2}{ac} = y; \frac{c^2}{ab} = z \text{ hoặc}$$

$$a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x} \dots$$

6. Đặt: $x = a + b - c; y = b + c - a; z = c + a - b$ hoặc đặt

$$x = a + b; y = b + c; z = c + a \dots$$

Ví dụ 1: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện

$x + y + z = xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Lời giải:

Từ giả thiết $x + y + z = xyz$, ta có $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$. Đặt

$$a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z} \Rightarrow a, b, c > 0$$

Giả thiết trở thành: $ab + bc + ca = 1$, $P = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ Để

ý rằng: $a^2 + 1 = (a+b)(a+c); b^2 + 1 = (b+a)(b+c); c^2 + 1 = (c+a)(c+b)$

Lúc này P có dạng

$$P = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \\ = \sqrt{\frac{a}{a+b}} \sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+b}} \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \sqrt{\frac{c}{c+b}}. \text{ Theo bất đẳng thức Cô si,}$$

ta có: $P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} \right) = \frac{3}{2}$ hay $P \leq \frac{3}{2}$.

Dấu = xảy ra $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}$. Vậy $\max P = \frac{3}{2}$. Giá trị lớn

nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$.

Ví dụ 2) Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 3xyz$. Chứng minh:

$$\frac{yz}{x^3(z+2y)} + \frac{zx}{y^3(x+2z)} + \frac{xy}{z^3(y+2x)} \geq 1.$$

Lời Giải:

Đặt $P = \frac{yz}{x^3(z+2y)} + \frac{zx}{y^3(x+2z)} + \frac{xy}{z^3(y+2x)}$, đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$. Từ

giả thiết ta có $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 3$. Lúc này dễ thấy

$P = \frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b}$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{9a^3}{b+2c} + (b+2c)a \geq 6a^2, \quad \frac{9b^3}{c+2a} + (c+2a)b \geq 6b^2,$$

$\frac{9c^3}{a+2b} + (a+2b)c \geq 6c^2$. Cộng từng vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta có $9P + 3(ab+bc+ca) \geq 6(a^2+b^2+c^2)$. Mặt khác ta có kết quả quen thuộc: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ kết hợp với $ab+bc+ca=3$ suy ra $P \geq 1$. Vậy $\min P = 1$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x=y=z=1$.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh rằng:
 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$.

Lời giải:

Đặt $x = a+b-c, y = b+c-a, z = c+a-b \Rightarrow a+b+c = \frac{x+y+z}{2}$. Từ đó ta suy ra $a = \frac{z+x}{2}; b = \frac{x+y}{2}; c = \frac{y+z}{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng: $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$. Đây là bất đẳng thức quen thuộc (xem ở 1).

Ví dụ 4. Cho $x, y, z > 2$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh rằng

$$(x-2)(y-2)(z-2) \leq 1$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm 2005-2006).

Giải:

Với giả thiết $x, y, z > 2$, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa bài toán về dạng đơn giản và quen thuộc hơn.

Đặt $x = a+2; y = b+2; z = c+2$ với $a, b, c > 0$. Bài toán quay về chứng minh $abc \leq 1$

Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} = 1. \text{ Đến đây ta đặt tiếp}$$

$$m = \frac{a}{a+2}; n = \frac{b}{b+2}; p = \frac{c}{c+2} \Rightarrow m+n+p=1. \text{ Ta có:}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{m} - 1 = \frac{n+p}{m} \Rightarrow a = \frac{2m}{n+p}. \text{ Tương tự:}$$

$$b = \frac{2n}{p+m}; c = \frac{2p}{m+n}$$

Do đó bất đẳng thức trở

$$\text{thành: } \frac{2m}{n+p} \cdot \frac{2n}{p+m} \cdot \frac{2p}{m+n} \leq 1 \Leftrightarrow (m+n)(n+p)(p+m) \geq 8mnp$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta

$$\text{có: } (m+n)(n+p)(p+m) \geq 2\sqrt{mn} \cdot 2\sqrt{np} \cdot 2\sqrt{pm} = 8mnp.$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow m=n=p \Leftrightarrow a=b=c=1 \Leftrightarrow x=y=z=3.$$

Ví dụ 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$

Chứng minh rằng: $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq 3.$

Lời giải:

Ta có:

$$ab+bc+ca+abc=4 \Leftrightarrow abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8=12+ab+bc+ca+4$$

$$\Leftrightarrow (a+2)(b+2)(c+2) = (a+2)(b+2)(c+2) + (c+2)(a+2)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}.$$

$$\text{Suy ra tồn tại các số dương } m, n, p \text{ sao cho: } a = \frac{2m}{n+p}, b = \frac{2n}{p+m}, c = \frac{2p}{m+n}.$$

Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh ta

$$\begin{aligned}
&\text{được: } \sqrt{\frac{2m}{n+p} \cdot \frac{2n}{p+m}} + \sqrt{\frac{2n}{p+m} \cdot \frac{2p}{m+n}} + \sqrt{\frac{2p}{m+n} \cdot \frac{2m}{n+p}} \leq 3 \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{m}{m+p} \cdot \frac{n}{n+p}} + 2\sqrt{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{p}{m+p}} + 2\sqrt{\frac{p}{n+p} \cdot \frac{m}{m+n}} \leq 3. \text{ Sử dụng bất} \\
&\text{đẳng thức Cauchy, ta} \\
&\text{có: } 2\sqrt{\frac{m}{m+p} \cdot \frac{n}{n+p}} \leq \frac{m}{m+p} + \frac{n}{n+p} \quad 2\sqrt{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{p}{m+p}} \leq \frac{n}{m+n} + \frac{p}{m+p}, \\
&2\sqrt{\frac{p}{n+p} \cdot \frac{m}{m+n}} \leq \frac{p}{n+p} + \frac{m}{m+n}
\end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại theo vế, ta được:

$$2\sqrt{\frac{m}{m+p} \cdot \frac{n}{n+p}} + 2\sqrt{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{p}{m+p}} + 2\sqrt{\frac{p}{n+p} \cdot \frac{m}{m+n}} \leq \frac{m+n}{m+n} + \frac{n+p}{n+p} + \frac{m+p}{m+p} = 3$$

BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

Cho x, y, z là các số thực không âm và số thực dương t . Khi đó ta có:

$$x'(x-y)(x-z) + y'(y-z)(y-x) + z'(z-y)(z-x) \geq 0 \quad (*)$$

Đây là bất đẳng thức có khá nhiều ứng dụng và tương đối chặt chẽ nhiều bài toán Bất chỉ là hệ quả của BĐT này. Việc chứng minh (*) khá đơn giản:

Giả sử:

$x \geq y \geq z \Rightarrow (*) \Leftrightarrow (x-y)[x'(x-z) - y'(y-x)] + z'(z-y)(z-x) \geq 0$. Điều này là hiển nhiên. Dấu bằng xảy ra khi cả 3 số bằng nhau hoặc hai số bằng nhau, một số bằng 0.

Các bất đẳng thức suy ra từ BĐT SCHUR khi $t=1$ là:

- 1) $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$
- 2) $(a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca).$

- 3) $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$
- 4) $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca).$
- 5) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$

Các BĐT (4) (5) còn gọi là BĐT SCHUR dạng phân thức khi $t = 1$.

Ngoài ra cần chú ý biến đổi:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \left[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) \right]. \text{Hoặc:}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \left[a^2 + b^2 + c^2 - (ab+bc+ca) \right]$$

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1) Cho a, b, c là ba số thực không âm và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $9abc \geq 4(ab+bc+ca) - 1$.

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Schur dạng:

$$(a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca). \text{Thay } a+b+c=1 \text{ ta có:}$$

$$1+9abc \geq 4(ab+bc+ca). \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có hai số}$$

$$\text{bằng } \frac{1}{2} \text{ và 1 số bằng 0 hoặc } a=b=c=\frac{1}{3}$$

Ví dụ 2) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca+abc \leq 4$.

Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab+bc+ca)$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10- Trường Chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội 2015).

Lời giải:

Áp dụng BĐT Schur dạng phân số ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca). \text{ Để chứng minh bài toán ta chỉ cần}$$

chỉ ra: $a+b+c \geq \frac{9abc}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 9abc$. Theo bất đẳng thức Cô si

ta có: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow (a+b+c)^2 \geq 9\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2$. Ta chứng minh:

$abc \leq 1$. Thật vậy từ giả thiết ta có: $ab+bc+ca+abc \leq 4$ mà

$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Đặt $t = \sqrt[3]{abc}$ ta suy ra:

$t^3 + 3t^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$. Suy ra $abc \leq 1$ hay

$\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 \geq abc$ suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 3) Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $4(a^3+b^3+c^3)+15abc \geq 1$.

Lời giải:

Ta có:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\right] = 1-3(ab+bc+ca)$$

Suy ra

$$4(a^3+b^3+c^3)+15abc = 27abc+4-12(ab+bc+ca)$$

$\geq 3[4(ab+bc+ca)-1]+4-12(ab+bc+ca) = 1$. Theo ví dụ 1 ta có:

$9abc \geq 4(ab+bc+ca)-1$. Từ đó suy ra:

$$27abc+4-12(ab+bc+ca) \geq 3[4(ab+bc+ca)-1]+4-12(ab+bc+ca) = 1$$

Hay $4(a^3+b^3+c^3)+15abc \geq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có hai

số bằng $\frac{1}{2}$ và 1 số bằng 0 hoặc $a=b=c=\frac{1}{3}$

Ví dụ 4) Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq (ab+bc+ca) \text{ (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10}$$

Trường chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2014)

Lời giải:

Đặt $\sqrt[3]{a^2} = x; \sqrt[3]{b^2} = y; \sqrt[3]{c^2} = z$

Suy ra: $a^2 = x^3; b^2 = y^3; c^2 = z^3 \Rightarrow a = \sqrt{x^3}; b = \sqrt{y^3}; c = \sqrt{z^3}$ và $x, y, z \geq 0$. Bất đẳng thức đã cho thành:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3 y^3} + \sqrt{y^3 z^3} + \sqrt{z^3 x^3}) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur ta suy ra:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $xy(x+y) \geq 2xy\sqrt{xy} = 2\sqrt{x^3 y^3}$.

Tương tự ta có: $yz(y+z) \geq 2\sqrt{y^3 z^3}$, $zx(z+x) \geq 2\sqrt{z^3 x^3}$. Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta thu được:

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \geq 2(\sqrt{x^3 y^3} + \sqrt{y^3 z^3} + \sqrt{z^3 x^3}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3 y^3} + \sqrt{y^3 z^3} + \sqrt{z^3 x^3})$

Hay $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt{(abc)^2} \geq (ab + bc + ca)$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c$.

Ví dụ 5) Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $6(a^3 + b^3 + c^3) + 1 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$.

Lời giải:

Ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)] = 1 - 3(ab+bc+ca)$$

suy ra

$$\begin{aligned} 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1 &= 6[1 - 3(ab+bc+ca)] + 18abc + 1 \\ &= 1 + 18abc + 6(a+b+c)^2 - 18(ab+bc+ca) = \\ &= 1 + 18abc + 5(a+b+c)^2 + (a+b+c)^2 - 18(ab+bc+ca) \\ &= 1 + 5(a^2 + b^2 + c^2) + 18abc + (a+b+c)^2 - 8(ab+bc+ca) \\ &= 5(a^2 + b^2 + c^2) + 2[9abc + 1 - 4(ab+bc+ca)] \end{aligned}$$

Theo ví dụ 1 ta có:

$$9abc \geq 4(ab+bc+ca)-1 \Rightarrow 9abc+1-4(ab+bc+ca) \geq 0. \text{ Suy ra}$$

$$6(a^3+b^3+c^3)+1 \geq 5(a^2+b^2+c^2).$$

Ví dụ 6) Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca)$.

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(a+b+c)^2+2abc+1 \geq 4(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 2abc+1 \geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2, \text{ Áp dụng bất đẳng thức Schur}$$

dạng phân số ta có: $a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$

Hay: $\frac{9abc}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2$. Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$2abc+1 \geq \frac{9abc}{a+b+c} \text{ hay } \left(\frac{9}{a+b+c}-2\right)abc \leq 1.$$

Nếu $S \geq \frac{9}{2}$ thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng. Nếu $a+b+c \leq \frac{9}{2}$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta

$$\text{được: } \left(\frac{9}{a+b+c}-2\right)abc \leq \frac{9-2s}{s} \cdot \frac{s^3}{27} \leq \frac{1}{27} \left(\frac{s+s+(9-2s)}{3}\right)^3 = 1 \text{ với}$$

$$s = a+b+c$$

Ví dụ 7) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$ab+bc+ca=1. \text{ Chứng minh rằng } a^3+b^3+c^3+6abc \geq a+b+c.$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)[a^2 + b^2 + c^2 - (ab+bc+ca)] \\&= (a+b+c)[a^2 + b^2 + c^2 - 1]. \text{ Suy ra}\end{aligned}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = 9abc + (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - 1). \text{ Áp dụng bất đẳng}$$

thức Schur dạng: $(a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$. Ta suy ra:

$$9abc + (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - 1) \geq 4s - s^3 + (a^2 + b^2 + c^2)s - s$$

$$= s(3 - s^2 + a^2 + b^2 + c^2) = s \text{ với } s = a+b+c. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ}$$

khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc có hai số bằng 1, một số bằng 0.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN CƠ BẢN

Câu 1) Cho $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$. Chứng minh rằng: $\sqrt{3-4x} + \sqrt{1+4x} \geq 2$.

Câu 2) Chứng minh rằng với mọi số thực khác không x, y , ta có:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Câu 3). Chứng minh rằng với mọi số thực khác không x, y ta có:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

Câu 4) Cho $x \geq 1, y \geq 1$. Chứng minh rằng $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leq xy$.

Câu 5) Cho hai số thực x, y khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 3.$$

Câu 6. Cho các số thực dương a, b . Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2b}{2a^3+b^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}$$

Câu 7) Cho các số thực dương a, b . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2ab}{a+b} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} + \frac{a+b}{2}.$$

Câu 8) Cho $a, b, c \in [-1; 2]$ và $a+b+c=0$. Chứng minh rằng:

- a) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$;
- b) $2abc \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2abc + 2$;
- c) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8 - abc$.

Câu 9) Cho các số thực không âm a, b, c .

Chứng minh rằng $(a+b+c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$.

Câu 10) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng $\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$

Câu 11) Cho các số thực dương a, b, c .

Chứng minh rằng $\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc} + \frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \geq 33$.

Câu 12) Cho các số thực a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Câu 13) Cho các số $x, y, z \geq 0$ và $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng $x+2y+z \geq 4(1-x)(1-y)(1-z)$.

Câu 14) Cho các số thực dương a, b . Chứng minh:

$$\frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{b^2}{3a^2+2b^2} \leq \frac{3}{5}$$

Câu 15) Cho các số thực dương a, b . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{16}{a+b} \geq 5 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Câu 16) Cho các số thực dương a, b . Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{3a^2+2ab+3b^2}{a+b} \geq 2\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

Câu 17) Giả sử x, y là những số thực không âm thỏa mãn:

$x^3 + y^3 + xy = x^2 + y^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{y}} + \frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}.$$

Câu 18) Cho a, b, c dương thỏa mãn: $6a+3b+2c=abc$. Tìm giá trị lớn

nhất của $B = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{b^2+4}} + \frac{3}{\sqrt{c^2+9}}$.

Câu 19) Cho các số a, b, c không âm. Chứng minh rằng

$a^2+b^2+c^2+3\sqrt{(abc)^2} \geq (ab+bc+ca)$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 20) Cho các số thực dương a, b sao cho $ab+1 \leq b$. Tìm GTNN của

$$P = a + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI;

Câu 1) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\sqrt{3-4x} + \sqrt{1+4x} \right)^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{3-4x}\sqrt{1+4x} \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3-4x}\sqrt{1+4x} \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 2) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2 \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x^2+xy+y^2)}{x^2y^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Mà $2(x^2+xy+y^2) = x^2+y^2+(x+y)^2 > 0, \forall x, y \neq 0$ nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y \neq 0$.

Câu 3) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 + 2 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \\ \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Mà $2(x^2-xy+y^2) = x^2+y^2+(x-y)^2 > 0$ với mọi số thực x, y khác 0 nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y \neq 0$.

Câu 4)

Đặt $a = \sqrt{x-1}, b = \sqrt{y-1}$ thì $a \geq 0, b \geq 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(a^2+1)b + (b^2+1)a \leq (a^2+1)b + (b^2+1)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+1)b + (b^2+1) - 2(a^2+1)b + (a^2+1)(b^2+1) - 2(b^2+1)a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2+1)b + (b^2+1) + (b^2+1)(a-1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$ hay $x = y = 2$.

Câu 5) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} - 1 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2y^2 - (x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 \cdot \left[\frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 \frac{(x^2-y^2)^2 - x^2y^2}{x^2y^2(x^2+y^2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 \frac{x^4+y^4+x^2y^2}{x^2y^2(x^2+y^2)^2} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \pm y$.

Câu 6)

Dấu đẳng thức xảy ra với $a = b$ khi và chỉ khi: $\frac{a^2b}{2a^3+b^3} = \frac{1}{3}; \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} = 1$.

Ta có biến đổi sau:

$$\frac{a^2b}{2a^3+b^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{a^2b}{2a^3+b^3} - \frac{1}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(a-b)^2(2a+b)}{3(2a^3+b^3)} \geq \frac{-(a-b)^2}{2a^2+b^2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\frac{1}{2a^2+b^2} - \frac{2a-b}{3(2a^3+b^3)} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[3(2a^3+b^3) - (2a^2+b^2)(2a+b) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 (2a^3+2b^3-2a^2b-2ab^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^4 \geq 0 \text{ (đpcm).}$$

Câu 7) Ta có: $\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} = \frac{\frac{a^2+b^2}{2} - ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} = \frac{(a-b)^2}{2 \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab} \right)}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} - \frac{1}{a+b} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0$$

Vì $(a-b)^2 \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh:

$$2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \geq 0 \text{ (*)}$$

$$a+b - \sqrt{2(a^2+b^2)} = -\frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)}$$

$$a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = \frac{(a-b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$$

Do vậy bất đẳng thức (*) tương đương với:

$$\begin{aligned} & (a-b)^2 \left[\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} - \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)} \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} + a+b - (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b)^2 \frac{2(a^2+b^2)-4ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+2\sqrt{ab}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(a-b)^4}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+2\sqrt{ab}} \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Câu 8) Vì $a, b, c \in [-1; 2]$ nên có một số bất đẳng thức hiển nhiên đúng

$$(a+1)(a-2) \leq 0, (a+1)(b+1)(c+1) \geq 0, (a-2)(b-2)(c-2) \leq 0.$$

$$\text{a) Do } a, b, c \in [-1; 2] \text{ nên } (a+1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq a+2.$$

Tương tự ta suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c + 6 = 6$ (do $a + b + c = 0$).

$$\text{b) Vì } a, b, c \in [-1; 2] \text{ nên } (a+1)(b+1)(c+1) \geq 0, \text{ hay}$$

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow abc + ab + bc + ca + 1 \geq 0 \text{ (do } a + b + c = 0) \quad (1)$$

Mặt khác cũng vì $a + b + c = 0$ nên $(a+b+c)^2 = 0$, tức là

$$ab+bc+ca=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$abc-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+1\geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\leq 2+2abc$$

Dấu đẳng thức có, chẳng hạn $a=-1, b=1, c=0$

Ta còn phải chứng minh $a^2+b^2+c^2\geq 2abc$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$

$$\text{Từ đó suy ra } -1\leq c\leq \frac{a+b+c}{3}\leq 0\Rightarrow |c|\leq 1$$

Sử dụng đánh giá này, ta được $2abc\leq 2|a|\cdot|b|\cdot|c|\leq 2|a|\cdot|b|$

$$\text{Suy ra } a^2+b^2+c^2-2abc\geq a^2+b^2+c^2-2|a|\cdot|b|=(|a|-|b|)^2+c^2\geq 0$$

Dấu đẳng thức có khi $a=b=c=0$.

c) Vì $a, b, c \in [-1; 2]$ nên $(a-2)(b-2)(c-2)\leq 0$, hay

$$abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8\leq 0$$

$$\Leftrightarrow abc-2(ab+bc+ca)-8\leq 0 \quad (\text{do } a+b+c=0) \quad (3)$$

$$\text{Từ (3) và (2) ta có: } abc+a^2+b^2+c^2-8\leq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\leq 8-abc$$

Dấu đẳng thức có, chẳng hạn $a=2, b=-1, c=-1$.

Câu 12. Cho $a, b, c \in [0; 2]$ và $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $3\leq a^3+b^3+c^3-3(a-1)(b-1)(c-1)\leq 9$.

Giải:

Đặt $a=x+1, b=y+1, c=z+1$ thì $x, y, z \in [-1; 1]$ và $x+y+z=0$

$$\text{Ta có } P=a^3+b^3+c^3-3(a-1)(b-1)(c-1)$$

$$=(x+1)^3+(y+1)^3+(z+1)^3-3xyz$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz+3(x^2+y^2+z^2)+3(x+y+z)+3$$

Mà $x + y + z = 0$ nên

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$\text{Do đó } P = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3$$

Vậy ta có $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ nên $3 \leq P \leq 9$.

Câu 9)

Giải:

$$\text{Ta có: } (a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

Nên bất đẳng thức đã cho tương đương với: $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$

$$\Leftrightarrow ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 \geq 6abc$$

$$\Leftrightarrow ab^2 - 2abc + ac^2 + bc^2 - 2abc + ba^2 + ca^2 - 2abc + cb^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \geq 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 10)

Ta có $a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c)$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a(a + b + c) - bc}{(a + b)(a + c)} + \frac{b(a + b + c) - ca}{(b + c)(b + a)} + \frac{c(a + b + c) - ab}{(c + a)(c + b)} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + ab + ac - bc)(b + c) + (b^2 + ba + bc - ca)(c + a) +$$

$$(c^2 + ca + ca - ab)(a + b) \leq \frac{3}{2}(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$\Leftrightarrow ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 \geq 6abc$$

$$\Leftrightarrow a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \geq 0$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Câu 11)

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} - 6 + \frac{9(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - 27 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{abc} - \frac{18(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left(\frac{a + b + c}{abc} - \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right] \left[(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 9abc \right] \geq 0$$

Do $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 9abc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 6abc \geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng vì ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= \frac{(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{2} \geq 0$$

Và

$$a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 6abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 12) Giải:

Từ hằng đẳng thức:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + 2bc - ab - ac)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(b^2 - c^2 + 2ca - bc - ba)^2 + \frac{1}{2}(c^2 - a^2 + 2ab - ca - cb)^2$$

Suy ra ta có điều phải chứng minh.

Câu 13)

Do $x + y + z = 1$ nên bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành:

$$(x + 2y + z)(x + y + z)^2 \geq 4(x + y)(y + z)(z + x)$$

Do vai trò của x và z trong bất đẳng thức trên là như nhau nên ta hoàn toàn có thể giả sử $x \geq z$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $(a + b)^2 \geq 4ab$, ta có

$$(x + y + z)^2 \geq 4x(y + z).$$

Sử dụng đánh giá này, dễ thấy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$x(x+2y+z) \geq (x+y)(z+x) \Leftrightarrow y(x-z) \geq 0$, hiển nhiên đúng theo giả sử $x \geq z$.

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = z = \frac{1}{2}; y = 0$.

Câu 14) Viết lại bất đẳng thức thành:

$$\begin{aligned} & \frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{b^2}{3a^2+2b^2} \leq \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{5} - \frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{1}{5} - \frac{b^2}{3a^2+2b^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2a^2-10ab+8b^2}{a^2+4b^2} + \frac{3a^2-3b^2}{3a^2+2b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2(a-b)(a-4b)}{a^2+4b^2} + \frac{3(a-b)(a+b)}{3a^2+2b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b) \left[\frac{2(a-4b)(3a^2+2b^2) + 3(a+b)(a^2+4b^2)}{(a^2+4b^2)(3a^2+2b^2)} \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b)(9a^3-21a^2b+16ab^2-4b^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(3a-2b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $a = \frac{2}{3}b$.

Câu 15) Vì $a, b > 0$ nên bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{b}{a^2} - \frac{1}{a} + 4 \left(\frac{4}{a+b} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a-b}{b^2} + \frac{b-a}{a^2} + 4 \frac{4ab-(a+b)^2}{(a+b)ab} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2} - \frac{4(a-b)^2}{(a+b)ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[(a+b)^2 - 4ab \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^4 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b > 0$.

Câu 16) Bài toán này có chứa căn nên đề xuất hiện nhân tử chung dạng $(a-b)^2$ ta cần chú ý đến phép biến đổi

$$\sqrt{2(a^2+b^2)} - (a+b) = \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)}$$

Khi đó:

$$\frac{3a^2+2ab+3b^2}{a+b} \geq 2\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2+2ab+3b^2}{a+b} - 2(a+b) \geq 2\sqrt{2(a^2+b^2)} - 2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{a+b} \geq \frac{2(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} - (a+b) - 2(a+b) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} - (a+b) \right] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^4}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + a+b} \geq 0 \text{ Bất đẳng}$$

thức cuối cùng đúng do a, b dương. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Câu 17)

$$x^3 + y^3 + xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) + xy = (x+y)^2 - 2xy$$

Đặt $x+y=a; xy=b$, ta có:

$$a^3 - 3ab + 3b - a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2(a-1) - 3b(a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(a^2-3b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a^2=3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)^2=3xy \end{cases}$$

Vì $(x+y)^2 \geq 4xy; \forall x, y \neq 0$ suy ra $x=y=0$ hoặc $x+y=1$

Với $x=y=0$ thì $P=\frac{5}{2}$

Nếu x hoặc y khác 0, ta có $x+y=1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$,

$$P(\min)=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}; P(\max)=4 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy $P(\min)=\frac{4}{3}$ khi $x=0, y=1; P(\max)=4$ khi $x=1; y=0$.

Câu 18) Đặt $x=a, y=\frac{b}{2}, z=\frac{c}{3}$ thì x, y, z là các số dương và

$$x+y+z=xyz.$$

$$\text{Khi đó: } A = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{\frac{xyz}{x^2(x+y+z)+xyz}} = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{y}{2(x+y)} + \frac{z}{2(x+z)}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \leq \frac{x}{2(x+y)} + \frac{z}{2(y+z)}; \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{x}{2(x+z)} + \frac{y}{2(y+z)}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{x+y}{2(x+y)} + \frac{x+z}{2(x+z)} + \frac{y+z}{2(y+z)} = \frac{3}{2}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ}$$

khi: $x=y=z=\sqrt{3} \Rightarrow a=\sqrt{3}, b=2\sqrt{3}, c=3\sqrt{3}$. Vậy giá trị lớn nhất của

biểu thức A là $\frac{3}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $a=\sqrt{3}, b=2\sqrt{3}, c=3\sqrt{3}$.

Câu 19) Đặt $\sqrt[3]{a^2}=x; \sqrt[3]{b^2}=y; \sqrt[3]{c^2}=z$

Suy ra: $a^2=x^3; b^2=y^3; c^2=z^3 \Rightarrow a=\sqrt{x^3}; b=\sqrt{y^3}; c=\sqrt{z^3}$ và $x, y, z \geq 0$.

Bất đẳng thức đã cho thành:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2\left(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}\right) \quad (1)$$

Vì vai trò của x, y, z bình đẳng nên có thể giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$

$$\text{Khi đó: } x(x-y)^2 + z(y-z)^2 + (z+x-y)(x-y)(y-z) \geq 0$$

$$\text{Suy ra: } x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \quad (2)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: } xy(x+y) \geq 2xy\sqrt{xy} = 2\sqrt{x^3y^3} \quad (3)$$

$$\text{Tương tự ta có: } yz(y+z) \geq 2\sqrt{y^3z^3} \quad (4)$$

$$zx(z+x) \geq 2\sqrt{z^3x^3} \quad (5). \text{ Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (3),(4),(5) ta}$$

$$\text{được: } xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \geq 2\left(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}\right) \quad (6)$$

$$\text{Từ (2) và (6) ta có: } x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2\left(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}\right)$$

$$\text{Hay } a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq (ab + bc + ca)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c$.

Câu 20) Giả thiết ta suy ra $a + \frac{1}{b} \leq 1$. Ta có $P = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{a^2} + b^2 \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\frac{b}{a}$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{a}{b}} \leq \frac{a + \frac{1}{b}}{2} \leq \frac{1}{2}$. Ta chứng minh: $P \geq 9$. Thật vậy ta có:

$$2t + \frac{2}{t^2} - 9 = \frac{2t^3 - 9t^2 + 2}{t^2} = \frac{(2t-1)(t^2 - 4t - 2)}{t^2} \geq 0. \text{ Do } 0 < t \leq \frac{1}{2}, \text{ dấu đẳng}$$

$$\text{thức xảy ra khi và chỉ khi } t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ a + \frac{1}{b} = 1 \end{cases}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN NÂNG CAO

Câu 1) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy}$.

Câu 2) Cho x, y, z là ba số thực dương và $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^2+z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^2+x^2}}{zx}.$$

Câu 3) Cho $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{xy\sqrt{z-4} + yz\sqrt{x-2} + zx\sqrt{y-3}}{xyz}$$

Câu 4) Cho x, y, z là các số dương sao cho $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz}$.

Câu 5) Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{xy}{6} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 27x^3 + 8y^3$.

Câu 6) Cho x, y, z là các số thực dương và $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức:
$$P = \frac{x^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)}.$$

Câu 7) Cho x, y, z là 3 số dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} - \frac{2}{27}(xy + yz + zx).$$

Câu 8) Cho x, y, z là ba số dương và $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{x+1}{y^2+1} + \frac{y+1}{z^2+1} + \frac{z+1}{x^2+1}$$

Câu 9) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}.$$

Câu 10) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{x+2y^3} + \frac{y^2}{y+2z^3} + \frac{z^2}{z+2x^3}$.

Câu 11) Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị bé nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{x+2y} + \frac{y^2}{y+2z^2} + \frac{z^2}{z+2x^2}$.

Câu 12) Cho x, y, z là ba số thực dương và $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}$.

Câu 13) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 8$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x-2}{x+1} + \frac{y-2}{y+1} + \frac{z-2}{z+1}$

Câu 14) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+1)} + \frac{1}{z^3(x+y)}$

Câu 15) Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1+x}{1-x} + \frac{1+y}{1-y} + \frac{1+z}{1-z} - 2\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right)$.

Câu 16) Cho x, y, z là các số thực dương.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}}.$$

Câu 17) Cho x, y, z là ba số dương và $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^5 - x^2 + 3xy + 6}} + \frac{1}{\sqrt{y^5 - y^2 + 3yz + 6}} + \frac{1}{\sqrt{z^5 - z^2 + 3zx + 6}} \quad (1)$$

Câu 18) Cho $x, y, z \geq 0$ và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - (xy + yz + zx).$$

Câu 19) Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x^2 + 2y + 3} + \frac{y}{y^2 + 2z + 3} + \frac{z}{z^2 + 2x + 3}.$$

Câu 20) Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xyz = 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^3)(1+y^3)}} + \frac{y^2}{\sqrt{(1+y^3)(1+z^3)}} + \frac{z^2}{\sqrt{(1+z^3)(1+x^3)}}$$

Câu 21) Cho x, y, z là các số thực dương..

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{x^3}{x^3(y+z)^3}} + \sqrt{\frac{y^3}{y^3(z+x)^3}} + \sqrt{\frac{z^3}{z^3(x+y)^3}}.$$

Câu 22) Cho $x, y, z \geq 0$ và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{1 + y^2 + z^2} + \frac{y}{1 + z^2 + x^2} + \frac{z}{1 + x^2 + y^2}.$$

Câu 23) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2y^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{y^3 + 2z^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{z^3 + 2x^3 + 6}}.$$

Câu 24) Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y+2z}\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z+2x}\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x+2y}\sqrt{y}}.$$

Câu 25) Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{y^3 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{z^3 + 1}} + \frac{z}{\sqrt{x^3 + 1}}.$

Câu 26) Cho x, y, z là ba số dương và thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$.

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 8y^2 + 14xy}} + \frac{y^2}{\sqrt{3y^2 + 8z^2 + 14yz}} + \frac{z^2}{\sqrt{3z^2 + 8x^2 + 14zx}}.$$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \sqrt{\frac{x+y}{x+1}} + \sqrt{\frac{y+z}{y+1}} + \sqrt{\frac{z+x}{z+1}}.$

Câu 27) Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$.

Câu 28) Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x+y)(y+z)(z+x) - 2(x+y+z)$.

Câu 29) Cho các số thực dương a, b, c .

Chứng minh rằng:
$$\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} + \frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}} \leq 2$$

Câu 30) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=1$. Tìm GTLN của $P = 6(ab+bc+ca) + a(a-b)^2 + b(b-c)^2 + c(c-a)^2$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1)

Từ điều kiện $x+y+z=1$, ta có $x+yz = x(x+y+z) + yz = (x+y)(x+z)$.

Tương tự, ta cũng có

$$P = \sqrt{(x+y)(x+z)} + \sqrt{(y+z)(y+x)} + \sqrt{(z+x)(z+y)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$P \leq \frac{(x+y)(x+z)}{2} + \frac{(y+z)(y+x)}{2} + \frac{(z+x)(z+y)}{2} \text{ hay}$$

$$P \leq 2(x+y+z) = 2$$

Như vậy $P \leq 2$. Dấu bằng trong xảy ra khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x+z \\ y+z = y+x \\ z+x = z+y \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}. \text{ Từ đó ta có } \max P = 2 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Câu 2) Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$P \geq \frac{\sqrt{3\sqrt{x^2y^2}}}{xy} + \frac{\sqrt{3\sqrt{y^2z^2}}}{yz} + \frac{\sqrt{3\sqrt{z^2x^2}}}{zx}$$

Hay $P \geq \sqrt{\frac{3}{xy}} + \sqrt{\frac{3}{yz}} + \sqrt{\frac{3}{zx}}$. Lại theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\sqrt{\frac{3}{xy}} + \sqrt{\frac{3}{yz}} + \sqrt{\frac{3}{zx}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2y^2z^2}}}. \text{ Do } xyz=1, \text{ nên suy ra } P \geq 3\sqrt{3}. \text{ Vậy}$$

$$\min P = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Câu 3)

Đưa biểu thức về dạng $P = \frac{\sqrt{z-4}}{z} + \frac{\sqrt{x-2}}{x} + \frac{\sqrt{y-3}}{y}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\sqrt{z-4} = \frac{1}{2}\sqrt{(z-4) \cdot 4} \leq \frac{1}{2} \frac{(z-4)+4}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{z-4}}{z} \leq \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{x-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-2) \cdot 2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(x-2)+2}{2} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{y-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(y-3) \cdot 3} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(y-3)+3}{2} = \frac{y}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{y-3}}{y} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có $P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. Vậy

$$\max P = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right) \Leftrightarrow x = 4, y = 6, z = 8.$$

Câu 4)

Viết lại biểu thức trên dưới dạng: $P = x + \frac{1}{2}\sqrt{x \cdot 4y} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x \cdot 4y \cdot 16z}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$P \leq x + \frac{x+4y}{4} + \frac{x+4y+16z}{12} \text{ hay } P \leq \frac{4(x+y+z)}{3}. \text{ Từ } x+y+z=1 \text{ và (2)}$$

$$\text{suy ra } P \leq \frac{4}{3}. \text{ Vậy } \max P = \frac{4}{3}$$

Câu 5) Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $\frac{x^3}{8} + 1 + 1 \geq 3 \frac{x}{2}$; $\frac{y^3}{27} + 1 + 1 \geq 3 \frac{y}{3}$;

$$\frac{x^3}{8} + \frac{y^3}{27} + 1 \geq 3 \frac{xy}{6}. \text{ Cộng từng vế ta có: } 2 \left(\frac{x^3}{8} + \frac{y^3}{27} \right) + 5 \geq 3 \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{xy}{6} \right).$$

$$\text{Do } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{xy}{6} = 3, \text{ ta có: } \left(\frac{x^3}{8} + \frac{y^3}{27} \right) \geq 2. \text{ Suy ra } P = 27x^3 + 8y^3 \geq 432$$

(4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra khi $x=2, y=3$. Vậy $\min P = 432$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x=2, y=3$.

Câu 6) Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\frac{x^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+y}{8} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x^3}{(1+x)(1+y)} \frac{1+x}{8} \frac{1+y}{8}} \text{ Hay}$$

$$\frac{x^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+y}{8} \geq \frac{3x}{4}. \text{ Lập luận tương tự ta có:}$$

$$\frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{1+z}{8} + \frac{1+x}{8} \geq \frac{3y}{4} \quad \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+y}{8} \geq \frac{3z}{4} \text{ Cộng}$$

$$\text{từng vế ta có } P + \frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}(x+y+z). \text{ Dấu = xảy ra } \Leftrightarrow x=y=z=1. \text{ Lại}$$

theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ Từ đó suy ra

$$P + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{4}. \text{ Dấu bằng trong (5) xảy ra } \Leftrightarrow x=y=z=1 \text{ (do}$$

$$xyz=1). \text{ Như vậy } \min P = \frac{3}{4}. \text{ Giá trị nhỏ nhất đạt được } \Leftrightarrow x=y=z=1.$$

$$\textbf{Câu 7)} \text{ Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: } P = \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y+2}{27} + \frac{y^2-2y+4}{27} \geq \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y^3+8} \geq \frac{9x+y-y^2-6}{27} \quad (1). \text{ Dấu bằng trong (1) xảy}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y+2}{27} = \frac{y^2-2y+4}{27}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1; \frac{x^3}{y^3+8} = \frac{y+2}{27} \\ y=2; \frac{x^3}{y^3+8} = \frac{y+2}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ y=2; x=\frac{4}{3} \end{cases}. \text{ Lập luận tương tự ta có:}$$

$$\frac{y^3}{z^3+8} \geq \frac{9y+z-z^2-6}{27} \quad (2)$$

$$\frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{9z+x-x^2-6}{27} \quad (3). \text{ Cộng từng vế (1),(2),(3) và có:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{10(x+y+z) - (x^2+y^2+z^2) - 18}{27} \quad (4)$$

Do $x+y+z=3$ nên (4) có

$$\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{30 - [(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)] - 18}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} - \frac{2}{27}(xy+yz+zx) \geq \frac{1}{9} \text{ hay } P \geq \frac{1}{9} \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1),(2),(3)

$$\Leftrightarrow x=y=z=1$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x=y=z=1.$$

Câu 8) Ta có: $\frac{x+1}{y^2+1} = x+1 - \frac{(x+1)y^2}{y^2+1}$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$y^2+1 \geq 2y$$

Suy ra $\frac{x+1}{y^2+1} \geq x+1 - \frac{(x+1)y^2}{2y} = x+1 - \frac{xy+y}{2}$. Chứng minh tương tự, ta

có: $\frac{y+1}{z^2+1} \geq y+1 - \frac{yz+z}{2}$; $\frac{z+1}{x^2+1} \geq z+1 - \frac{zx+x}{2}$ suy ra

$$P \geq 3 + \frac{x+y+z-(xy+yz+zx)}{2}$$

Do $9 = (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx \leq 3$. Vậy
 $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 3$.

Câu 9) Giải:

Ta có: $\frac{x}{1+y^2} = x - \frac{xy^2}{1+y^2}$. Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $1+y^2 \geq 2y$, khi

đó $\frac{xy^2}{1+y^2} \leq \frac{xy^2}{2y} = \frac{xy}{2}$ suy ra: $\frac{x}{1+y^2} \geq x - \frac{xy}{2}$ Tương tự ta có:

$$\frac{y}{1+z^2} \geq y - \frac{yz}{2}; \quad \frac{z}{1+x^2} \geq z - \frac{zx}{2}. \text{ Cộng từng vế ta có}$$

$$P \geq x+y+z - \frac{xy+yz+zx}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=1. \text{ Do}$$

$$x+y+z=3 \Rightarrow 9 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow 9 \geq (xy+yz+zx) + 2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx \leq 3 \quad (7). \text{ Vậy}$$

$$\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x=y=z=1.$$

Câu 10)

Ta có: $\frac{x^2}{x+2y^3} = x - \frac{2xy^3}{x+2y^3}$. Theo bất đẳng thức Cô si, thì

$$x+2y^3 = x+y^3+y^3 \geq 3\sqrt[3]{xy^6} = 3y^2\sqrt[3]{x} \text{ suy ra}$$

$$\frac{x^2}{x+2y^3} \geq x - \frac{2xy^3}{2y^2\sqrt[3]{x}} = x - \frac{2}{3}y\sqrt[3]{x^2}. \text{ Tương tự, có: } \frac{y^2}{y+2z^3} \geq y - \frac{2}{3}z\sqrt[3]{z^2},$$

$$\frac{z^2}{z+2x^3} \geq z - \frac{2}{3}x\sqrt[3]{z^2}. \text{ Cộng từng vế ta có:}$$

$$P \geq (x+y+z) - \frac{2}{3}(z\sqrt[3]{y^2} + x\sqrt[3]{z^2} + y\sqrt[3]{x^2}), \text{ hay}$$

$$P \geq 3 - \frac{2}{3}(z\sqrt[3]{y^2} + x\sqrt[3]{z^2} + y\sqrt[3]{x^2}). \text{ Theo bất đẳng thức cô si ta có:}$$

$$x+xz+zx \geq 3x\sqrt[3]{z^2}, y+yx+xy \geq 3y\sqrt[3]{x^2}, z+zy+yz \geq 3z\sqrt[3]{y^2}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) \geq 3(x\sqrt[3]{z^2} + y\sqrt[3]{x^2} + z\sqrt[3]{y^2}) \text{ vì}$$

$$9 = (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx \leq 3. \text{ Do } x+y+z=3, \text{ suy ra}$$

$$3+2.3 \geq 3(x\sqrt[3]{z^2} + y\sqrt[3]{x^2} + z\sqrt[3]{y^2}) \Rightarrow x\sqrt[3]{y^2} + y\sqrt[3]{x^2} + z\sqrt[3]{y^2} \leq 3 \Rightarrow P \geq 1$$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Câu 11) Ta có: $\frac{x^2}{x+2y^2} = x - \frac{2xy^2}{x+2y^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$x+2y^2 = x+y^2+y^2 \geq 3\sqrt[3]{xy^4}. \text{ Suy ra } \frac{x^2}{x+2y^2} \geq x - \frac{2xy^2}{3\sqrt[3]{xy^4}} = x - \frac{2}{3}(xy)^{\frac{2}{3}}.$$

Tương tự, ta có: $\frac{y^2}{y+2z^2} \geq y - \frac{2}{3}(yz)^{\frac{2}{3}}, \frac{z^2}{z+2x^2} \geq z - \frac{2}{3}(zx)^{\frac{2}{3}}$. Cộng theo vế

ta có: $P \geq (x+y+z) - \frac{2}{3}\left[(xy)^{\frac{2}{3}} + (yz)^{\frac{2}{3}} + (zx)^{\frac{2}{3}}\right]$. Theo bất đẳng thức Cô si,

ta có: $x+xy+y \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2}, y+yz+z \geq 3\sqrt[3]{y^2z^2}, z+zx+x \geq 3\sqrt[3]{z^2x^2}$. Từ đó

suy ra $2(x+y+z) + (xy+yz+zx) \geq 3 \left[(xy)^{\frac{2}{3}} + (yz)^{\frac{2}{3}} + (zx)^{\frac{2}{3}} \right]$ (7) Để

thấy dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$. Kết hợp với $x + y + z = 1$, ta

có: $6 + 3 \geq 3 \left[(xy)^{\frac{2}{3}} + (yz)^{\frac{2}{3}} + (zx)^{\frac{2}{3}} \right] \Rightarrow (xy)^{\frac{2}{3}} + (yz)^{\frac{2}{3}} + (zx)^{\frac{2}{3}} \leq 3$. Vậy

$P \geq 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 \Rightarrow P \geq 1$ hay $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Câu 12) Ta có: $\frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{x^2}{x^2+1}$. Theo bất đẳng thức Cô si, thì $x^2 + 1 \geq 2x$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \geq 1 - \frac{x^2}{2x} = 1 - \frac{x}{2}$

Tương tự, ta có: $\frac{1}{y^2+1} \geq 1 - \frac{y}{2}$, $\frac{1}{z^2+1} \geq 1 - \frac{z}{2}$. Suy ra $P \geq 3 - \frac{x+y+z}{2} = \frac{3}{2}$

(do $x + y + z = 3$).

Từ đó suy ra $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Câu 13) Viết lại P dưới dạng: $P = 3 - 3 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$. Đặt

$x = \frac{2X}{Y}; y = \frac{2Y}{Z}; z = \frac{2Z}{X}$

Khi đó có $X, Y, Z > 0$ (vì $xyz = 8$) Lúc này:

$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{1}{\frac{2X}{Y}+1} + \frac{1}{\frac{2Y}{Z}+1} + \frac{1}{\frac{2Z}{X}+1}$

$= \frac{Y}{2X+Y} + \frac{Z}{2Y+Z} + \frac{X}{2Z+X} = \frac{Y^2}{2XY+Y^2} + \frac{Z^2}{2YZ+Z^2} + \frac{X^2}{2ZX+X^2}$. Áp

dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{(X+Y+Z)^2}{2XY+Y^2+2YZ+Z^2+2ZX+X^2} = \frac{(X+Y+Z)^2}{(X+Y+Z)^2} = 1,$$

suy ra $P \leq 0$. Vậy $\max P = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Câu 14) Ta có: $P = \frac{\frac{1}{x^2}}{x(y+z)} + \frac{\frac{1}{y^2}}{y(z+1)} + \frac{\frac{1}{z^2}}{z(x+y)}$. Áp dụng bất đẳng thức

$$\text{Cauchy- Schwarz } P \geq \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}{2(xy+yz+zx)} = \frac{(xy+yz+zx)^2}{2(xy+yz+zx)x^2y^2z^2}.$$
 Do

$$xyz = 1, \text{ nên ta có: } P \geq \frac{xy+yz+zx}{2}$$

Lại theo bất đẳng thức Cô si ta có: $xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3$ (do $xyz = 1$).

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{3}{2} \quad \text{Vậy } \min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Câu 15) Viết lại biểu thức P dưới dạng:

$$P = 1 + \frac{2x}{1-x} + 1 + \frac{2y}{1-y} + \frac{2z}{1-z} - 2\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) = 2x\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{z}\right) + 2y\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{x}\right) + 2z\left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{y}\right)$$

Do $x+y+z=1$, nên ta có:

$$P = 2x\left(\frac{1}{y+z} - \frac{1}{z}\right) + 2y\left(\frac{1}{z+x} - \frac{1}{x}\right) + 2z\left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y}\right) + 3$$

$$= \frac{-2xy}{z(y+z)} - \frac{2yz}{x(z+x)} - \frac{2zx}{y(x+y)} + 3 = 3 - 2\left(\frac{xy}{z(y+z)} + \frac{yz}{x(z+x)} + \frac{zx}{y(x+y)}\right)$$

. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{xy}{z(x+y)}}\sqrt{y+z} + \sqrt{\frac{yz}{x(z+x)}}\sqrt{z+x} + \sqrt{\frac{zx}{y(x+y)}}\sqrt{x+y}\right)^2$$

$$\leq \left[\frac{xy}{z(x+z)} + \frac{yz}{x(z+x)} + \frac{zx}{y(x+y)}\right] \left[(y+z)(z+x)(x+y)\right]$$

Rõ ràng, ta lại có: $\left(\sqrt{\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}\right)^2 \geq 3(x+y+z)$. Dựa vào bất đẳng

thức hiển nhiên $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ suy ra:

$$3(x+y+z) \leq 2\left[\frac{xy}{z(y+z)} + \frac{yz}{x(z+x)} + \frac{zx}{y(x+y)}\right](x+y+z) \quad \text{Từ}$$

$$x+y+z=1 \text{ ta có: } 2\left[\frac{xy}{z(y+z)} + \frac{yz}{x(z+x)} + \frac{zx}{y(x+y)}\right] \geq 3 \text{ suy ra } P \leq 0.$$

$$\text{Vậy } \max P = 0 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Câu 16)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$(x+y)(x+z) = \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2\right] \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{z})^2\right] \geq (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{z})^2$$

$$\Rightarrow (x+y)(x+z) \geq (x + \sqrt{yz})^2. \text{ Suy ra: } \frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{x}{2x + \sqrt{yz}}.$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} \leq \frac{y}{2y + \sqrt{zx}},$$

$$\frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{z}{2z + \sqrt{xy}}. \text{ Suy ra}$$

$$P \leq \frac{x}{2x + \sqrt{yz}} + \frac{y}{2y + \sqrt{zx}} + \frac{z}{2z + \sqrt{xy}}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{\frac{z}{x}}} + \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{z}{y}} \sqrt{\frac{x}{y}}} + \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{x}{z}} \sqrt{\frac{y}{z}}} \text{ . Đặt}$$

$$a = \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{\frac{z}{x}}; b = \sqrt{\frac{z}{y}} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}}; c = \sqrt{\frac{x}{z}} \cdot \sqrt{\frac{y}{z}}, \text{ thì } a, b, c > 0 \text{ và}$$

$$abc = 1. P \leq Q = \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}$$

$$= \frac{(2+b)(2+c) + (2+c)(2+a) + (2+a)(2+b)}{(2+a)(2+b)(2+c)}$$

$$= \frac{12 + 4(a+b+c) + (ab+bc+ca)}{8 + 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + abc}$$

$$= \frac{9 + 4(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3}{9 + 4(a+b+c)(ab+bc+ca) + (ab+bc+ca)} \text{ . Theo bất đẳng thức Cô si}$$

$$\text{thì : } ab+bc+ca \geq 3\sqrt{(abc)^2} = 3 \text{ suy ra } P \leq 1. \text{ Vậy}$$

$$\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z > 0.$$

Câu 17) Ta có: $x^5 - x^2 + 6 - (3x+3) = x^5 - x^2 - 3x + 3 = x^2(x^2 - 1) - 3(x-1)$

$$= (x-1)[(x^2 + x + 1) - 3] = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 - 3)$$

$$= (x-1)[(x^4 - 1) + (x^3 - 1) + (x^2 - 1)] = (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + 3x + 3)$$

$$\text{Do } x > 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + 3x > 0, \text{ nên từ (2) suy ra } x^5 - x^2 + 6 \geq 3x + 3$$

$$\Rightarrow x^5 - x^2 + 6 + 3xy \geq 3(xy + x + 1) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^5 - x^2 + 6 + 3xy}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(xy + x + 1)}}.$$

Tương tự, ta có: $\frac{1}{\sqrt{y^5 - y^2 + 3xyz + 6}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(yz + y + 1)}} ,$

$$\frac{1}{\sqrt{z^5 - z^2 + 3xyz + 6}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(zx + z + 1)}}$$

Suy ra $P \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{xy + x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{yz + y + 1}} + \frac{1}{\sqrt{zx + z + 1}} \right)$. Áp dụng bất đẳng

thức Bunhiacopski, ta

có:

$$\left(\frac{1}{xy + x + 1} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{1}{zx + z + 1} \right) (1 + 1 + 1) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{xy + x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{yz + y + 1}} + \frac{1}{\sqrt{zx + z + 1}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy + x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{yz + y + 1}} + \frac{1}{\sqrt{zx + z + 1}} \leq \sqrt{3 \left(\frac{1}{xy + x + 1} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{1}{zx + z + 1} \right)}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1. \text{ Vậy}$$

$$\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Câu 18) Ta có: $xy + yz + zx = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{9 - x^2 - y^2 - z^2}{2}.$

Vậy P có dạng:

$$P = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \frac{9 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2}$$

$$\Rightarrow 2P = x^2 + y^2 + 9 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) - 9$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:
$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x} \geq 3x \\ y^2 + \sqrt{y} + \sqrt{y} \geq 3y \\ z^2 + \sqrt{z} + \sqrt{z} \geq 3z \end{cases}$$

Suy ra : $x^2 + y^2 + z^2 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 3(x + y + z) = 9$. Vậy
 $\min P = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Câu 19)

Vì $x^2 + 1 \geq 2x; y^2 + 1 \geq 2y; z^2 + 1 \geq 2z$, nên ta có:

$$\begin{aligned}
 P &\leq \frac{x}{2(x+y+1)} + \frac{y}{2(y+z+1)} + \frac{z}{2(z+x+1)}. \text{ Ta có:} \\
 \frac{x}{x+y+1} + \frac{y}{y+z+1} + \frac{z}{z+x+1} &= \left(1 - \frac{y+1}{x+y+1}\right) + \left(1 - \frac{z+1}{y+z+1}\right) + \left(1 - \frac{x+1}{z+x+1}\right) \\
 &= 3 - \left(\frac{y+1}{x+y+1} + \frac{z+1}{y+z+1} + \frac{x+1}{z+x+1}\right) \\
 \Rightarrow P &\leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y+1}{x+y+1} + \frac{z+1}{y+z+1} + \frac{x+1}{z+x+1}\right) \\
 &\leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{(y+1)^2}{(y+1)(x+y+1)} + \frac{(z+1)^2}{(z+1)(y+z+1)} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)(z+x+1)} \right]. \text{ Áp dụng} \\
 &\text{bất đẳng thức Cauchy- Schwarz :} \\
 \frac{(y+1)^2}{(y+1)(x+y+1)} + \frac{(z+1)^2}{(z+1)(y+z+1)} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)(z+x+1)} &\geq \\
 \geq \frac{(y+1+z+1+x+1)^2}{(y+1)(x+y+1) + (z+1)(y+z+1) + (x+1)(z+x+1)}. &\text{ Để ý rằng do:} \\
 x^2 + y^2 + z^2 = 3, \text{ nên ta} \\
 \text{có: } (y+1)(x+y+1) + (z+1)(y+z+1) + (x+1)(z+x+1) &= 3(x+y+z) + xy + yz + zx + x^2 + y^2 + z^2 + 3 \\
 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 9 + 6x + 6y + 6z + 2xy + 2yz + 2zx) &= \frac{1}{2}(x+y+z+3)^2.
 \end{aligned}$$

$$\frac{(y+1)^2}{(y+1)(x+y+1)} + \frac{(z+1)^2}{(z+1)(y+z+1)} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)(z+x+1)} \geq 2. \text{ Vậy}$$

$$\max P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Câu 20) Nhận xét: $\forall a$ thì $4(1+a^3) \leq (a^2+2)^2$. Thật vậy,

$\Leftrightarrow 4+4a^3 \leq a^4+4a^2+4 \Leftrightarrow a^4-4a^3+4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-1)^2 \geq 0$. Cũng có thể chứng minh bằng bất đẳng thức Cauchy:

$$(1+a^3) = (1+a)(1-a+a^2) \leq \left(\frac{1+a+1-a+a^2}{2} \right)^2 = \frac{(a^2+2)^2}{4}. \text{ Áp dụng vào}$$

bài toán ta có:

$$P = \frac{4x^2}{\sqrt{4(1+x^3)(1+y^3)}} + \frac{4y^2}{\sqrt{(1+y^3)4(1+z^3)}} + \frac{4z^2}{\sqrt{4(1+z^3)(1+x^3)}}$$

$$\geq \frac{4x^2}{(2+x^2)(2+y^2)} + \frac{4y^2}{(2+y^2)(2+z^2)} + \frac{4z^2}{(2+z^2)(2+x^2)}. \text{ Đặt}$$

$$a = \frac{x^2}{4}; b = \frac{y^2}{4}; c = \frac{z^2}{4}.$$

Khi đó do $x, y, z > 0$ và $xyz = 8 \Rightarrow a, b, c > 0$ và $abc = 1$.

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{16a}{(2+4a)(2+4b)} + \frac{16b}{(2+4b)(2+4c)} + \frac{16c}{(2+4c)(2+4a)}. \text{ Hay}$$

$$P \geq 4 \left[\frac{a}{(1+2a)(1+2b)} + \frac{b}{(1+ab)(1+2c)} + \frac{c}{(1+2c)(1+2a)} \right]$$

$$\Rightarrow P \geq 4 \frac{a(1+2c)+b(1+2a)+c(1+2b)}{(1+2a)(1+2b)(1+2c)} \Rightarrow P \geq 4 \frac{a+b+c+2(ab+bc+ca)}{1+2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)+8}$$

. Ta có: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3 \Rightarrow a+b+c+2(ab+bc+ca) \geq 9 = 1+8abc$

$$\Rightarrow (1+8abc) + [2(a+b+c) + 4(ab+bc+ca)] \leq 3[(a+b+c) + 2(ab+bc+ca)]$$

. Suy ra $P \geq \frac{4}{3}$. Vậy $\min P = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Câu 21) Ta có nhận xét sau: với mọi x, y, z là các số thực dương, ta

$$\text{có: } \sqrt{\frac{x^3}{x^3 + (y+z)^3}} \geq \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1) \text{ . Thật vậy, (1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^3 + (y+z)^3} \geq \frac{x^4}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 [x^4 + 2x^2(y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)^2] \geq x^7 + x^4(x+z)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)^2 \geq x(y+z)^3 \text{ ..Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:}$$

$$2x^2 + 2x^2(y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)^2 \geq 2\sqrt{2x^2(y^2 + z^2)^3} \text{ . (3). Rõ ràng:}$$

$$2(y^2 + z^2) \geq (y+z)^2 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3),(4) suy ra: } 2x^2(y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)^2 \geq \sqrt{x^2(y+z)^6} = x(y+z)^3 \quad (5)$$

$$\text{Tương tự (1), ta có: } \sqrt{\frac{y^3}{y^3 + (z+x)^3}} \geq \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6),$$

$$\sqrt{\frac{z^3}{z^3 + (x+y)^3}} \geq \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (7)$$

$$\text{Cộng từng vế (1),(6),(7) và có } P \geq 1 \quad (8)$$

$$\text{Vậy } \min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z > 0.$$

$$\text{Chú ý: Ta có thể chứng minh: } \sqrt{\frac{x^3}{x^3 + (y+z)^3}} \geq \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ nhanh hơn bằng}$$

cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$$\sqrt{a^3+1} = \sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \leq \frac{a^2+2}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^3+1}} \geq \frac{2}{a^2+2} \text{ thay } a = \frac{y+z}{x}$$

$$\text{suy ra } \sqrt{\frac{x^3}{x^3+(y+z)^3}} \geq \frac{2x^2}{2x^2+(y+z)^2}. \text{ Lại có } (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \text{ suy}$$

$$\text{ra } \sqrt{\frac{x^3}{x^3+(y+z)^3}} \geq \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Câu 22) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\left[x(1+y^2+z^2) + y(1+z^2+x^2) + z(1+x^2+y^2) \right] \left(\frac{x}{1+y^2+z^2} + \frac{y}{1+z^2+x^2} + \frac{z}{1+x^2+y^2} \right)$$

Từ (1) và do $x+y+z=1$, ta có:

$$P \geq \frac{1}{x(1+y^2+z^2) + y(1+z^2+x^2) + z(1+x^2+y^2)}. \text{ Đặt}$$

$$\begin{aligned} Q &= x(1+y^2+z^2) + y(1+z^2+x^2) + z(1+x^2+y^2) \\ &= (x+y+z) + xy(x+y) + yz(z+y) + zx(z+x) \\ &= 1 + xy(x+y) + yz(z+y) + zx(z+x) \end{aligned}$$

$$= 1 + x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y). \text{ Có thể thấy rằng:}$$

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Từ đó có: } Q \leq \frac{5}{4} \Rightarrow P \geq \frac{4}{5}. \text{ Vậy } \min P = \frac{4}{5}. \text{ Giá trị nhỏ nhất đạt được khi}$$

$$x = y = \frac{1}{2}; z = 0.$$

Câu 23) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+2y^3+6}} + \frac{1}{\sqrt{y^3+2z^3+6}} + \frac{1}{\sqrt{z^3+2x^3+6}} \right) \leq \sqrt{3 \left(\frac{1}{x^3+2y^3+6} + \frac{1}{y^3+2z^3+6} + \frac{1}{z^3+2x^3+6} \right)}$$

Hay $P \leq \sqrt{3 \left(\frac{1}{x^3+2y^3+6} + \frac{1}{y^3+2z^3+6} + \frac{1}{z^3+2x^3+6} \right)}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\begin{aligned} x^3 + 2y^3 + 6 &= (x^3 + y^3 + 1) + (y^3 + 1 + 1) + 3 \geq 3xy + 3y + 3 \\ \Rightarrow x^3 + 2y^3 + 6 &\geq 3(xy + y + 1) \end{aligned}$$

Tương tự, có: $y^3 + 2z^3 + 6 \geq 3(yz + z + 1)$, $z^3 + 2x^3 + 6 \geq 3(zx + x + 1)$

Suy ra: $P \leq \sqrt{\frac{1}{xy+y+1} + \frac{1}{yz+z+1} + \frac{1}{zx+x+1}}$. Do $xyz = 1$, nên dễ

$$\text{thấy } \frac{1}{xy+y+1} + \frac{1}{yz+z+1} + \frac{1}{zx+x+1} = \frac{1}{xy+y+1} + \frac{xy}{xy+y+1} + \frac{y}{xy+y+1} = 1$$

suy ra $P \leq 1$

Vậy $\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Câu 24) Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $y + z \geq 2\sqrt{yz} = 2\sqrt{\frac{1}{x}}$ (do $xyz = 1$)

$$\text{Từ đó suy ra: } x^2(y+z) \geq 2x^2\sqrt{\frac{1}{x}} = 2x\sqrt{x} \Rightarrow \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}$$

(1)

Lập luận tương tự, có:

$$\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} \geq \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}, \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \geq \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}. \text{ Cộng từng vế}$$

$$P \geq 2 \left(\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y\sqrt{y}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z\sqrt{z}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}} \right). \text{ Đặt}$$

$X = x\sqrt{x}; Y = y\sqrt{y}; Z = z\sqrt{z}$ thì $X, Y, Z > 0$ và $XYZ = 1$.

$$\text{Khi đó (4) có dạng } P \geq 2 \left(\frac{X}{Y+2Z} + \frac{Y}{Z+2X} + \frac{Z}{X+2Y} \right)$$

$$\Rightarrow P \geq 2 \left(\frac{X^2}{XY+2ZX} + \frac{Y^2}{YZ+2XY} + \frac{Z^2}{XZ+2YZ} \right). \text{ Áp dụng bất đẳng thức}$$

$$\text{Cauchy- Schwarz ta có: } P \geq 2 \frac{(X+Y+Z)^2}{3(XY+YZ+ZX)} \text{ do}$$

$(X+Y+Z)^2 \geq 3(XY+YZ+ZX) \Rightarrow P \geq 3$ và $P=3 \Leftrightarrow X=Y=Z=1$. Vậy
 $\min P=3 \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 25)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\sqrt{y^3+1} = \sqrt{(y+1)(y^2-y+1)} \leq \frac{(y+1)+(y^2-y+1)}{2} \Rightarrow \sqrt{y^3+1} \leq \frac{y^2+2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{y^3+1}} \geq \frac{2x}{y^2+2} \text{ tương tự, ta có: } \frac{y}{\sqrt{z^3+1}} \geq \frac{2y}{z^2+2}, \frac{z}{\sqrt{x^3+1}} \geq \frac{2z}{x^2+2}$$

$$\Rightarrow P \geq 2 \left(\frac{x}{y^2+2} + \frac{y}{z^2+2} + \frac{z}{x^2+2} \right). \text{ Dấu bằng trong (5) xảy ra } \Leftrightarrow \text{đồng thời}$$

có dấu bằng trong $\Leftrightarrow x=y=z=2$. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{2x}{y^2+2} + \frac{2y}{z^2+2} + \frac{2z}{x^2+2} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2x}{y^2+2} \right) + \left(y - \frac{2y}{z^2+2} \right) + \left(z - \frac{2z}{x^2+2} \right) \leq 4 \quad (\text{do}$$

$$x+y+z=6) \Leftrightarrow \frac{xy^2}{y^2+2} + \frac{yz^2}{z^2+2} + \frac{zx^2}{x^2+2} \leq 4. \text{ Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta}$$

$$\text{có: } 2y^2+4 = y^2+y^2+4 \geq 3\sqrt[3]{4y^4} = 3y\sqrt[3]{4y} \Rightarrow y^2+2 \geq \frac{3}{2}y\sqrt[3]{4y} \quad \text{Tương}$$

tự có: $z^2 + 2 \geq \frac{3}{2} z \sqrt[3]{4z}$, $x^2 + 2 \geq \frac{3}{2} x \sqrt[3]{4x}$

$VT \leq \frac{xy^2}{\frac{3}{2} y \sqrt[3]{4y}} + \frac{yz^2}{\frac{3}{2} z \sqrt[3]{4z}} + \frac{zx^2}{\frac{3}{2} x \sqrt[3]{4x}}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\sqrt[3]{2x \cdot xy \cdot xy} \leq \frac{2x + xy + xy}{3},$$

$$\sqrt[3]{2y \cdot yz \cdot yz} \leq \frac{2y + yz + yz}{3} \quad \sqrt[3]{2z \cdot zx \cdot zx} \leq \frac{2z + zx + zx}{3}. \quad VT$$

$$\leq \frac{1}{9} [2(x + y + z) + 2(xy + yz + zx)]$$

Mặt khác, ta có: $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 \Rightarrow xy + yz + zx \leq 12$. Từ đó suy ra $P \geq 2$. Vậy $\min P = 2 \Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Câu 26)

Giải:

1) Ta có theo bất đẳng thức Cô si:

$$\sqrt{3x^2 + 8y^2 + 14xy} = \sqrt{(x + 4y)(3x + 2y)} \leq \frac{(x + 4y)(3x + 2y)}{2} = 2x + 3y$$

Như vậy suy ra $\frac{x^2}{\sqrt{3x^2 + 8y^2 + 14xy}} \geq \frac{x^2}{2x + 3y}$. Tương tự ta có:

$$\frac{y^2}{\sqrt{3y^2 + 8z^2 + 14yz}} \geq \frac{y^2}{2y + 3z}$$

$\frac{z^2}{\sqrt{3z^2 + 8x^2 + 16zx}} \geq \frac{z^2}{2z + 3x} \Rightarrow P \geq \frac{x^2}{2x + 3y} + \frac{y^2}{2y + 3z} + \frac{z^2}{2z + 3x}$. Theo bất đẳng thức Cauchy- Schwarz ta

có: $\frac{x^2}{2x + 3y} + \frac{y^2}{2y + 3z} + \frac{z^2}{2z + 3x} \geq \frac{1}{5}(x + y + z)$. Theo bất đẳng thức Cô si cơ

bản, ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$. Do $0 < \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq 1$, nên có:

$$x+y+z \geq 9 \text{ vậy } P \geq \frac{9}{5}. \text{ Vậy } \min P = \frac{9}{5} \Leftrightarrow x=y=z=3.$$

Câu 27) Do tính bình đẳng giữa x, y, z nên có thể giả sử $x \geq y \geq z$

Kết hợp với $x+y+z=3$ suy ra $0 < z \leq 1$. Ta có $P = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$

$$\begin{aligned} &= (x+y+z)^2 + xyz - 2(xy+yz+zx) = 9 + xy(z-2) - 2z(y+x) \\ &= 9 + xy(z-2) - 2z(3-z) \quad (1) \end{aligned}$$

Hiển nhiên ta có: $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-z}{2}\right)^2$. Do $0 < z \leq 1 \Rightarrow z-2 < 0$, vậy từ (1) có:

$$P \geq 9 + (z-2)\left(\frac{3-z}{2}\right)^2 - 2z(3-z). \text{ Ta có}$$

$$VP(2) = 9 + \frac{3-z}{2} \left[(z-2)\frac{3-z}{2} - 4z \right] = 9 + \frac{3-z}{2} [(z-2)(3-z) - 8z]$$

$$= 9 + \frac{3-z}{2} [-z^2 - 3z - 6] = \frac{1}{4}(z^3 - 3z + 18) = \frac{1}{4}[(z^2 - 3z + 2) + 16]$$

$$= \frac{1}{4}[(z-1)^2(z+2) + 16]. \text{ Do } 0 < z \leq 1 \text{ nên suy ra } \Rightarrow P \geq 4. \text{ Vậy}$$

$$\min P = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Câu 28) Áp dụng đồng nhất thức

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \quad (*)$$

Ta có: $P = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz - 2(x+y+z)$. Theo bất đẳng

thức Cô si ta có: $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ (do $xyz=1$). Lại có:

$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3$ (do $x^2y^2z^2 = 1$) suy ra:

$$P \geq 3(x + y + z) - 1 - 2(x + y + z)$$

$$\Rightarrow P \geq (x + y + z) - 1 \geq 3 - 1 = 2.$$

2) Trước hết ta chứng minh rằng $(x + y)(y + z)(z + x) \geq (x + 1)(y + 1)(z + 1)$

Thật vậy, dựa vào (*) suy ra:

$$\Leftrightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz \geq xy + yz + zx + x + y + z + 1$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) - 2 \geq xy + yz + zx + x + y + z + 2 \quad (\text{do } xyz = 1)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) \geq xy + yz + zx + x + y + z + 3 \quad \text{Do}$$

$xyz = 1 \Rightarrow x + y + z \geq 3$ và $xy + yz + zx \geq 3$. Ta có

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) = \frac{x + y + z}{3}(xy + yz + zx) + (x + y + z)\frac{xy + yz + zx}{3} + \frac{(x + y + z)(xy + yz + zx)}{3} \text{ suy ra}$$

$(x + y + z)(xy + yz + zx) \geq xy + yz + zx + x + y + z + 3$. Theo bất đẳng thức Cô

si ta có: $Q \geq 3\sqrt[3]{\frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{(x + 1)(y + 1)(z + 1)}} \geq 3$. Vậy

$$\min Q = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Câu 29) Giải:

Ta có:

$$4(a^3 + b^3) = a^3 + b^3 + 3(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq a^3 + b^3 + 3(a + b)ab = (a + b)^3$$

Suy ra $\sqrt[3]{4(a^3 + b^3)} \geq a + b \Rightarrow c + \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)} \geq a + b + c$. Do đó

$$\frac{a + b}{c + \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)}} \leq \frac{a + b}{a + b + c}, \text{ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = b. \text{ Tương}$$

tự cũng có
$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}} \leq \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}} \leq \frac{c+a}{a+b+c}.$$
 Suy ra

$$\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} + \frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}} \leq 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 30) Ta có: $0 < a, b, c < 1$ suy ra

$(a-b)^2 \geq a(a-b)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab + a(a-b)^2$. Tương tự 3 bất đẳng thức nữa ta có:

$$\begin{aligned} P &= 6(ab+bc+ca) + a(a-b)^2 + b(b-c)^2 + c(c-a)^2 \\ &\leq 4(ab+bc+ca) + 2(a^2+b^2+c^2) \text{ hay } P \leq 2. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ} \\ &\text{khi } a=b=c=\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

BẤT ĐẲNG THỨC ABEL VÀ ỨNG DỤNG

CÔNG THỨC ABEL VÀ ỨNG DỤNG.

1. Công thức tổng Abel:

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ là hai dãy số thực. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n &= (b_1 - b_2)S_1 + (b_2 - b_3)S_2 + \dots + b_nS_n \text{ trong đó} \\ S_k &= a_1 + a_2 + \dots + a_k. \end{aligned}$$

Chứng minh: Thật vậy thay $a_k = S_k - S_{k-1}$ với $k = 2, 3, \dots, n$ ta có về trái bằng:

$$b_1S_1 + b_2(S_2 - S_1) + b_3(S_3 - S_2) + \dots + b_n(S_n - S_{n-1}) = VP.$$

Trường hợp $n = 3$ ta

có: $ax + by + cz = (x - y)a + (y - z)(a + b) + z(a + b + c)$ đây là đẳng thức quan trọng có nhiều ứng dụng trong giải toán.

2. Bất đẳng thức Abel:

Cho hai dãy số thực: $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$. Đặt

$S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ với $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ và

$m = \min\{S_1, S_2, \dots, S_n\}, M = \max\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. Khi đó ta có:

$$mb_1 \leq A = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq Mb_1,$$

Chứng minh:

Ta có: $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = (b_1 - b_2)S_1 + (b_2 - b_3)S_2 + \dots + b_nS_n$ mà

$b_k - b_{k+1} \geq 0$ nên

$(b_1 - b_2)m + (b_2 - b_3)m + \dots + b_nm \leq A \leq (b_1 - b_2)M + (b_2 - b_3)M + \dots + b_nM$ hay

$$mb_1 \leq A \leq Mb_1.$$

MỘT SỐ VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho $x \geq y \geq z \geq 0$ thỏa mãn: $x \geq 3, x + y \geq 5, x + y + z \geq 6$. Chứng

minh: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 14$.

Lời giải:

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = (x - 3)(x + 3) + (y - 2)(y + 1) + (z - 1)(z + 1)$. Áp

dụng công thức Abel ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 14 = (x + 3 - y - 2)(x - 3) + (y + 2 - z - 1) + (z + 1)(x - 3 + y - 2 + z - 1)$$

$$= (x - y + 1)(x - 3) + (y - z + 1)(x + y - 5) + (z + 1)(x + y + z - 6) \geq 0. \text{ Dấu}$$

bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 3; y = 2; z = 1$.

Ví dụ 2) Cho các số thực dương x, y, z sao cho $x \geq 3, xy \geq 6, xyz \geq 6$.

Chứng minh: $x + y + z \geq 6$.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} x + y + z - 6 &= 3\left(\frac{x}{3} - 1\right) + 2\left(\frac{y}{2} - 1\right) + 1\left(\frac{z}{1} - 1\right) = (3-2)\left(\frac{x}{3} - 1\right) + (2-1)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 2\right) + \\ &1\left(\frac{x}{3} - 1 + \frac{y}{2} - 1 + \frac{z}{1} - 1\right) = \left(\frac{x}{3} - 1\right) + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 2\right) + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} - 3\right). \text{ Áp dụng} \end{aligned}$$

bất đẳng thức Cô si ta có: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{6}} \geq 2$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{3 \cdot 2 \cdot 1}} \geq 3$. Suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 3, y = 2, z = 1$.

Ví dụ 5: Cho $x, y, z > 0$ sao cho $x < 2y < 3z$ và

$x \geq 1, x + y \geq 3, x + y + z \geq 6$. Chứng minh: $6(xy + yz + zx) \leq 11xyz$.

Lời giải:

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{11}{6}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{11}{6} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{3} - \frac{1}{z} = \frac{x-1}{x} + \frac{y-2}{2y} + \frac{z-3}{3z} = \\ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2y}\right)(x-1) &+ \left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{3z}\right)(x+y-3) + \frac{1}{3z}(x+y+z-6) \geq 0 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 3, y = 2, z = 1$.

Ví dụ 3: Cho các số thực không âm x, y, z sao cho

$x \leq 1, x + y \leq 5, x + y + z \leq 14$. Chứng minh: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 6$.

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)(x+y) + \frac{1}{3}(x+y+z) \leq$$

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right).1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right).5 + \frac{1}{3}.14 = 1 + 2 + 3. \text{ Ta suy ra}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \leq (1+2+3) \left(\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right) \leq (1+2+3)^2 = 36.$$

Ví dụ 4: Cho các số thực dương $a \geq b \geq 1, a \leq 3, ab \leq 6, ab \leq 6c$. Chứng minh: $a+b-c \leq 4$.

Lời giải:

Ta cần chứng minh: $a+b+1 \leq 3+2+c$.

Ta có:

$$3+2+c = \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{c}{1}\right) + (b-1)\left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b}\right) + (a-b)\frac{3}{a} \geq 3\sqrt{\frac{6c}{ab}} + (b-1)2\sqrt{\frac{6}{ab}} + (a-b)\frac{3}{a}$$

$\geq 3+2(b-1) + (a-b) = a+b+1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a=3, b=2, c=1.$$

$$\text{Ví dụ 5: Cho các số thực dương } a, b, c \text{ sao cho } \begin{cases} 0 < a \leq b \leq c, c \geq 9 \\ a + \frac{b}{4} + \frac{9}{c} \leq 3 \\ \frac{b}{4} + \frac{9}{c} \leq 2 \end{cases}.$$

Chứng minh: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{c}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{9} = 1 \left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{b}{4}} + \sqrt{\frac{9}{c}} \right) + \left(\sqrt{\frac{b}{4}} + \sqrt{\frac{9}{c}} \right) + (\sqrt{c} - 2) \sqrt{\frac{9}{c}}$$

$$\leq 3 \left(\sqrt{\frac{a + \frac{b}{4} + \frac{9}{c}}{3}} \right) + 2\sqrt{\frac{\frac{b}{4} + \frac{9}{c}}{2}} + (\sqrt{c} - 2)\sqrt{\frac{9}{2}} = 3 + 2 + \sqrt{c} - 2 = 3 + \sqrt{c} .$$

Ví dụ 6) Cho các số thực a, b, c sao cho $\begin{cases} a \geq b \geq 1 \geq c > 0 \\ \frac{2}{b} + c \leq 2 \\ \frac{3}{a} + \frac{2}{b} + c \leq 3 \end{cases}$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \leq -\frac{1}{6} .$$

Lời giải:

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{c}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{a} \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{b}{2} + \frac{1}{c} \right) + \left(1 - \frac{1}{b} \right) \frac{1}{c} \\ &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\frac{3}{a}} + \frac{1}{\frac{2}{b}} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{\frac{2}{b}} + \frac{1}{c} \right) + \left(1 - \frac{1}{b} \right) \frac{1}{c} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz. Ta có:

$$\frac{1}{\frac{3}{a}} + \frac{1}{\frac{2}{b}} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + c} \geq 3, \frac{1}{\frac{2}{b}} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{\frac{2}{b} + c} \geq 2, \text{ ta có}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{a} + 2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) + \left(1 - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1.$$

Ví dụ 7) Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn:
$$\begin{cases} a \leq b \leq 3 \leq c \\ c \geq b+1 \\ a+b \geq c \end{cases}.$$

Tìm GTNN của $Q = \frac{2ab + a + b + c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Trường chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội)

Lời giải:

Ta có:

$$Q = \frac{(abc + ab + ac + a) + (abc + bc + ba + b) - (abc + ca + cb + c)}{(a+1)(b+1)(c+1)} = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \frac{c}{c+1}$$

Ta chứng minh:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} \geq \frac{1}{1+1} + \frac{2}{1+2} - \frac{3}{1+3} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{3-c}{3(1+c)} + \frac{b-2}{3(b+1)} + \frac{a-1}{2(1+a)} \geq 0$$

Hay

$$(3-c) \left(\frac{1}{4(c+1)} - \frac{1}{3(b+1)} \right) + (3+c+b-2) \left(\frac{1}{3(b+1)} - \frac{1}{2(a+1)} \right) + (3-c+b-2+a-1) \frac{1}{2(1+a)} \geq 0. \text{ Rút gọn ta thu được:}$$

$$(3-c) \frac{(3b-4c-1)}{12(b+1)(c+1)} + (b+1-c) \frac{(2a-3b-1)}{6(b+1)(a+1)} + (a+b-c) \frac{1}{2(a+1)} \geq 0.$$

Điều này là hiển nhiên đúng.

BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI

Một số kết quả quan trọng:

Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z .

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$

- b)** $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.
- c)** $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$.
- d)** $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$
- e)** $8(a + b + c)(ab + bc + ca) \leq 9(a + b)(b + c)(c + a)$
- f)** $b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq abc(a + b + c)$
- g)** $\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} \geq \frac{1}{a^2 + bc}$.
- h)** $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$.
- i)** $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$.

Chứng minh:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức này luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Khai triển hai vế và thu gọn ta quy về câu a.

c) Khai triển hai vế rồi thu gọn ta đưa bất đẳng thức về dạng:

$(ay - bx)^2 \geq 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

d) Khai triển hai vế rồi thu gọn ta đưa bất đẳng thức về dạng:

$(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \geq 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. Các bất đẳng thức c, d còn được gọi là bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 số, 3 số.

e) Khai triển hai vế rồi thu gọn ta đưa bất đẳng thức về dạng:

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ bất đẳng thức này luôn đúng theo AM- GM

(xem chứng minh ở phần Bất đẳng thức Cô si).

f) Theo bất đẳng thức Cô si thì: $b^2c^2 + a^2c^2 \geq 2abc^2$ Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại suy ra đpcm.

g) Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 số ta có:

$$(a+b)^2 = \left(a + \sqrt{bc} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \right)^2 \leq (a^2 + bc) \left(1 + \frac{b}{c} \right) = (a^2 + bc) \left(\frac{b+c}{c} \right) \text{ suy ra}$$

$$\frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{c}{(a^2 + bc)(b+c)}. \text{ Tương tự } \frac{1}{(a+c)^2} \geq \frac{b}{(a^2 + bc)(b+c)}. \text{ Cộng hai}$$

bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra đpcm.

h) Quy đồng và rút gọn đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$(ay - bx)^2 \geq 0.$$

i) Áp dụng bất đẳng thức h) ta có:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}.$$

Bất đẳng thức này còn được gọi là bất đẳng thức Cauchy-Chwarz.

1. Những kỹ năng vận dụng cơ bản:

Ví dụ 1: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+2bc} + \frac{b}{b+2ac} + \frac{c}{c+2ab} \geq 1.$$

Giải:

$$\frac{a}{a+2bc} = \frac{a^2}{a^2+2abc} \Rightarrow \frac{a}{a+2bc} + \frac{b}{b+2ac} + \frac{c}{c+2ab} = \frac{a^2}{a^2+2abc} + \frac{b^2}{b^2+2abc} + \frac{c^2}{c^2+2ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+2abc} + \frac{b^2}{b^2+2abc} + \frac{c^2}{c^2+2abc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6abc}.$$

Ta cần chứng

$$\text{minh: } \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6abc} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca \geq 3abc \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc. \text{ Theo bất đẳng}$$

thức Cô si ta có: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}, ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ nhân 2 vế các

bất đẳng thức dương cùng chiều ta có đpcm. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a^3}{a+2b} = \frac{a^4}{a^2+2ab} \Rightarrow VT = \frac{a^4}{a^2+2ab} + \frac{b^4}{b^2+2bc} + \frac{c^4}{c^2+2ca} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2}.$$

Ta cần chứng

$$\text{minh: } \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca. \text{ Điều này}$$

là hiển nhiên.

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2.$$

Giải:

$$\text{Ta có: } (a+b+c)^2 = \left[a + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{b+c}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 \leq (a^2+2) \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right]. \text{ Suy ra:}$$

$$3(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+2) \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right]. \text{ Ta cần chứng minh:}$$

$$3(a^2+2) \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right] \leq (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \text{ hay}$$

$$3 \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right] \leq (b^2+2)(c^2+2). \text{ Sau khi khai triển và thu gọn ta được:}$$

$\frac{b^2+c^2}{2}+b^2c^2-3bc+1\geq 0$. Đề ý rằng: $\frac{b^2+c^2}{2}\geq bc$ nên bất đẳng thức trở thành: $b^2c^2-2bc+1\geq 0\Leftrightarrow (bc-1)^2\geq 0$.

Ví dụ 4: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\leq \frac{1}{a+b+c}$$

Giải:

Ta mong muốn xuất hiện lượng: $a+b+c$

Ta có:

$$(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)=(a^2+b^2+a^2)(a^2+a^2+c^2)\geq (a^2+ab+ac)^2=a^2(a+b+c)^2$$

Từ đó suy ra: $\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}\leq \frac{a}{(a+b+c)^2}$. Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại thì suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca+abc\leq 4$.

Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+a+b+c\geq 2(ab+bc+ca)$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10- Trường Chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội 2015).

Lời giải:

Ta viết lại giả thiết bài toán thành:

$$12+(ab+bc+ca)+4(a+b+c)\geq 8+4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+abc$$

$$\text{hay } (a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2)\geq (a+2)(b+2)(c+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\geq 1 \text{ Ta có:}$$

$$\frac{1}{a+2}=\frac{a+b^2+c^2}{(a+1+1)(a+b^2+c^2)}\leq \frac{a+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}, \text{ Tương tự ta}$$

có: $\frac{1}{b+2} \leq \frac{b+c^2+a^2}{(a+b+c)^2}; \frac{1}{c+2} \leq \frac{a+a^2+b^2}{(a+b+c)^2}$. Suy ra

$$1 \leq \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \leq \frac{a+b+c+2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow a+b+c+2(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \text{ hay}$$

$a^2+b^2+c^2+a+b+c \geq 2(ab+bc+ca)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 6) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $2abc(a+b+c) \leq \frac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10- Trường Chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội 2014).

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$. Ta có:

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2 \geq a^2b.b^2c+b^2c.c^2a+c^2a.a^2b=abc(ab^2+bc^2+ca^2).$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức: Cauchy- Shwarz và giả thiết $ab+bc+ca=1$ ta có:

$$ab^2+bc^2+ca^2 = \frac{b^2}{\frac{1}{a}} + \frac{c^2}{\frac{1}{b}} + \frac{a^2}{\frac{1}{c}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = abc(a+b+c)^2. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2 \geq [abc(a+b+c)]^2. \text{ Bây giờ ta sẽ chứng minh:}$$

$$[abc(a+b+c)]^2 - 2abc(a+b+c) + \frac{5}{9} \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5) \geq 0$$

với $t=abc(a+b+c)$. Mặt khác ta có:

$$abc(a+b+c) = ab.ac + bc.ba + ca.cb \leq \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < t \leq 1.$$

Suy ra đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 7: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2 + ab + bc} + \frac{1}{b^2 + bc + ca} + \frac{1}{c^2 + ca + ab} \leq \left(\frac{a + b + c}{ab + bc + ca} \right)^2$$

Lời giải:

Ta muốn làm xuất hiện: $ab + bc + ca$

Ta có: $\frac{1}{a^2 + ab + bc} = \frac{c^2 + ab + bc}{(a^2 + ab + bc)(c^2 + ab + bc)} \leq \frac{c^2 + ab + bc}{(ac + ab + bc)^2}$. Tương

tự với 2 số hạng còn lại ta có:

$$\sum \frac{1}{a^2 + ab + bc} \leq \sum \frac{c^2 + ab + bc}{(ac + ab + bc)^2} = \frac{(a + b + c)^2}{(ac + ab + bc)^2}$$

Ví dụ 8: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{ab}{a^2 + bc + ca} + \frac{bc}{b^2 + ca + ab} + \frac{ca}{c^2 + ab + bc} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$$

Giải:

Ta muốn làm xuất hiện: $ab + bc + ca$

$$\frac{ab}{a^2 + bc + ca} = \frac{ab(b^2 + bc + ca)}{(a^2 + bc + ca)(b^2 + bc + ca)} \leq \frac{ab(b^2 + bc + ca)}{(ab + bc + ca)^2}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } VT \leq \frac{ab(b^2 + bc + ca)}{(ab + bc + ca)^2} + \frac{bc(c^2 + ca + ab)}{(ab + bc + ca)^2} + \frac{ca(a^2 + ab + bc)}{(ab + bc + ca)^2}.$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$ab(b^2 + bc + ca) + bc(c^2 + ca + ab) + ca(a^2 + ab + bc) \leq (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a + b + c) \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq a + b + c. \text{ Nhưng bất}$$

đẳng thức này là hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy- Shwarz

Ví dụ 9: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 1$. Chứng minh

rằng:
$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} + \frac{b}{b^3 + c^2 + a} + \frac{c}{c^3 + a^2 + b} \leq 1$$

Giải:

Ta muốn làm xuất hiện $a + b + c$.

$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} = \frac{a \left(\frac{1}{a} + 1 + c \right)}{(a^3 + b^2 + c) \left(\frac{1}{a} + 1 + c \right)} \leq \frac{a \left(\frac{1}{a} + 1 + c \right)}{(a + b + c)^2} = \frac{1 + a + ca}{9}.$$
 Từ đó suy

ra:
$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} + \frac{b}{b^3 + c^2 + a} + \frac{c}{c^3 + a^2 + b} \leq \frac{1 + a + ca}{9} + \frac{1 + b + ab}{9} + \frac{1 + c + bc}{9}$$

Ta cần chứng minh:
$$\frac{1 + a + ca}{9} + \frac{1 + b + ab}{9} + \frac{1 + c + bc}{9} \leq 1 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3.$$

Nhưng điều này là hiển nhiên đúng do:
$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$$

Ví dụ 10: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1 + a + b^2} + \frac{1}{1 + b + c^2} + \frac{1}{1 + c + a^2} \leq 1$$

Giải:

Ta đặt $a = x^3, b = y^3, c = z^3, xyz = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở

thành:
$$\frac{1}{1 + x^3 + y^6} + \frac{1}{1 + y^3 + z^6} + \frac{1}{1 + z^3 + x^6} \leq 1.$$

Ta có:

$$\frac{1}{1 + x^3 + y^6} = \frac{\left(z^4 + x + \frac{1}{y^2} \right)}{(1 + x^3 + y^6) \left(z^4 + x + \frac{1}{y^2} \right)} \leq \frac{z^4 + x + \frac{1}{y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{z^4 + x^2 yz + z^2 x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

Ta cần chứng minh:

$$\Sigma(z^4 + x^2yz + z^2x^2) \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z).$$

Điều này là hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Ví dụ 11: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Do bất đẳng thức thuần nhất nên ta chuẩn hóa: $abc = 1$. Bất đẳng thức cần

chứng minh trở thành:
$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1.$$

Ta có:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + c^2\right)}{(a^3 + b^3 + 1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + c^2\right)} \leq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + c^2\right)}{(a + b + c)^2} = \frac{bc + ca + c^2}{(a + b + c)^2} = \frac{c}{a + b + c}$$

Tương tự với 2 số hạng còn lại và cộng ba bất đẳng thức cùng chiều suy ra đpcm.

Ví dụ 12) Với ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$, tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức: $Q = \frac{x}{x + \sqrt{x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{z + xy}}$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội – 2014)

Lời giải:

Ta có: $\sqrt{x + yz} = \sqrt{x(x + y + z) + yz} = \sqrt{(x + y)(x + z)}$. Chú ý rằng: Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì:

$$(x + y)(x + z) \geq (\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{x})^2 \Rightarrow \sqrt{(x + y)(x + z)} \geq \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{x}.$$

Từ đó suy ra:
$$\frac{x}{x + \sqrt{x + yz}} \leq \frac{x}{x + \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}.$$
 Tương tự

ta có: $\frac{y}{y+\sqrt{y+zx}} \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}; \frac{z}{z+\sqrt{z+xy}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$. Cộng 3 bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra $Q \leq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Ví dụ 13) Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a > 0, b + c > 0$ và

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \text{ Chứng minh: } \frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3 + c^3}{a^2} \geq \sqrt{2}.$$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{a^4}{a(b^2 - bc + c^2)} + \frac{b^4}{a^2b} + \frac{c^4}{a^2c} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a(b^2 - bc + c^2) + a^2b + a^2c} = \frac{1}{a[b^2 - bc + c^2 + a(b + c)]}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} a(b + c) &\leq \frac{a^2 + (b + c)^2}{2} \Rightarrow \\ \frac{1}{a[b^2 - bc + c^2 + a(b + c)]} &\geq \frac{1}{a\left[b^2 - bc + c^2 + \frac{a^2 + (b + c)^2}{2}\right]} \\ &= \frac{2}{a(a^2 + 3b^2 + 3c^2)} = \frac{2}{a(3 - 2a^2)}. \text{ Bây giờ ta chứng minh: } \\ \frac{2}{a(3 - 2a^2)} &\geq \sqrt{2} \Leftrightarrow a(3 - 2a^2) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 2a^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 3a. \text{ Theo bất đẳng} \\ \text{thức Cauchy cho 3 số ta có: } &2a^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 3a. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và} \\ \text{chỉ khi } a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = 0. &\text{ Ta cũng có thể chứng minh:} \end{aligned}$$

$a(3-2a^2) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 2a^3 - 3a + \sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow (2a - \sqrt{2})^2 \left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0$. Bất đẳng thức này luôn đúng.

Ví dụ 14) Cho các số thực x, y sao cho $x^2 y^2 + 2y + 1 = 0$. Tìm GTNN, GTLN của $P = \frac{xy}{3y+1}$ (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Trường chuyên – KHTN- ĐHQG Hà Nội 2015).

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra $y \neq 0$.

$x^2 y^2 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y} = 1 \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{1}{y} + 1\right)^2 = 1$. Đặt $a = \frac{1}{y} + 1$. Ta

được $x^2 + a^2 = 1$. Ta có:

$$P = \frac{x}{3 + \frac{1}{y}} = \frac{x}{a+2} \Rightarrow 2P = x - Pa \Rightarrow 4P^2 = (x - Pa)^2. \text{ Theo bất đẳng thức}$$

Bunhiacopxki ta có: $(x - Pa)^2 \leq (1 + P^2)(x^2 + a^2) = 1 + a^2$. Suy ra

$$4P^2 \leq 1 + P^2 \Leftrightarrow 3P^2 \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq P \leq \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Với } x = \frac{\sqrt{3}}{2}; y = \frac{2}{3} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; y = -\frac{2}{3} \Rightarrow P = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Vậy GTLN của } P \text{ là } \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ GTNN của } P \text{ là } -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Kỹ thuật tách ghép

Để giải quyết những bài toán dạng này người giải cần linh hoạt trong việc tách các nhóm số hạng sao cho đảm bảo dấu bằng và tạo ra các bất đẳng thức phụ quen thuộc.

Ta cần chú ý các bất đẳng thức quen thuộc sau: $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ và

$$\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Ví dụ 1: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ca}{2b+c+a} + \frac{ab}{2c+a+b} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

Giải:

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2a+b+c} = \frac{1}{4} \frac{4}{(a+b)+(a+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \sum \frac{bc}{2a+b+c} \leq \frac{1}{4} \sum \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} \right) = \frac{1}{4} (a+b+c)$$

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)} + \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(a+b)} \leq 3$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} = \frac{(b+c)^2}{b(b+a)+c(c+a)} \leq \frac{b^2}{b(b+a)} + \frac{c^2}{c(c+a)} = \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sum \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} \leq \sum \left(\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} \right) = 3$$

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{4b^2+c^2+a^2} + \frac{1}{4c^2+a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{9}{4a^2+b^2+c^2} = \frac{(a+b+c)^2}{2a^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \leq \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{(a^2+c^2)}$$

$$\text{Suy ra } \sum \frac{9}{4a^2+b^2+c^2} \leq \sum \left[\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{(a^2+c^2)} \right] = \frac{9}{2}$$

Ví dụ 4: Cho các số thực a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leq \frac{3}{4}$$

Giải:

$$\text{Ta có: } \frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leq \frac{1}{4} \left[\frac{(b+c)^2}{a^2+1} + \frac{(c+a)^2}{b^2+1} + \frac{(a+b)^2}{c^2+1} \right]$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+a^2+b^2+c^2} = \frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \leq \frac{b^2}{(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{(a^2+c^2)}. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$\sum \frac{(b+c)^2}{a^2+1} \leq \sum \left[\frac{b^2}{(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{(a^2+c^2)} \right] = 3. \text{ Suy ra điều phải chứng minh.}$$

Ví dụ 5:

Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ac} + \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{b+c}{a^2+bc} = \frac{(b+c)^2}{(a^2+bc)(b+c)} = \frac{(b+c)^2}{c(a^2+b^2)+b(a^2+c^2)} \leq \frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(a^2+c^2)}$$

. Từ đó suy ra :

$$\sum \frac{b+c}{a^2+bc} \leq \sum \left[\frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(a^2+c^2)} \right] = \sum \left[\frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{a^2}{c(a^2+b^2)} \right] = \sum \frac{1}{c}$$

Chú ý: Nếu ta thay $(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ thì thu được bất đẳng thức mới là:

$$\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b^2(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c^2(a+b)}{c^2+ab} \leq a+b+c$$

Nếu phân tích: $\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} = b+c - \frac{bc(b+c)}{a^2+bc}$ thì thu được bất đẳng thức mới:

$$\frac{bc(b+c)}{a^2+bc} + \frac{ca(c+a)}{b^2+ca} + \frac{ab(a+b)}{c^2+ab} \geq a+b+c. \text{ Đây là các bất đẳng thức đẹp và khó.}$$

Ví dụ 6: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq 1$$

Giải: Ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+2bc+b^2+2ac+c^2+2ab} = 1$$

Thay $(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ ta thu được kết quả:

$$\frac{bc}{bc+2a^2} + \frac{ca}{ca+2b^2} + \frac{ab}{ab+2c^2} \geq 1$$

Mặt khác ta có: $\frac{bc}{bc+2a^2} = 1 - \frac{2a^2}{2a^2+bc}$ nên bất đẳng thức trên có thể viết lại thành:

$\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ac} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1$. Thay $(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ ta lại thu được:

$$\frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ac} + \frac{ab}{c^2+2ab} \leq 1$$

Những bất đẳng thức này có ứng dụng rất quan trọng.

Ví dụ 7: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}$$

Giải:

Ta có

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} = \frac{a^2}{2a(a+b+c)+2a^2+bc} = \frac{1}{9} \frac{(2a+a)^2}{2a(a+b+c)+2a^2+bc} \leq \frac{1}{9} \left[\frac{4a^2}{2a(a+b+c)+2a^2+bc} \right]$$

Từ đó suy ra:

$$\sum \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} \leq \frac{1}{9} \sum \left(\frac{4a^2}{2a(a+b+c)+2a^2+bc} \right) = \frac{1}{9} \sum \left[\frac{2a}{a+b+c} + \frac{a^2}{2a^2+bc} \right]$$

. Áp dụng kết quả của VD 6 ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 8: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

Giải:

Ta có: $\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1}$ nên bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \leq \frac{3}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{3a^2+3} + \frac{b^2}{3b^2+3} + \frac{c^2}{3c^2+3} \leq \frac{1}{2}. \text{ Ta có:}$$

$$\begin{aligned} \frac{4a^2}{3a^2+3} &= \frac{4a^2}{3a^2+ab+bc+ca} = \frac{(a+a)^2}{a(a+b+c)+2a^2+bc} \leq \frac{a^2}{a(a+b+c)} + \frac{a^2}{2a^2+bc} \\ &= \frac{a}{(a+b+c)} + \frac{a^2}{2a^2+bc} \end{aligned}$$

Tương tự với 2 số hạng còn lại ta có:

$$\sum \frac{a^2}{3a^2+3} \leq \frac{1}{4} \sum \left(\frac{a}{a+b+c} + \frac{a^2}{2a^2+bc} \right) \leq \frac{1}{2}$$

Ở đây ta đã sử dụng kết quả: $\sum \frac{a^2}{2a^2+bc} \leq 1$

Ví dụ 9: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2} \leq \frac{1}{3}$$

Giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2} &= \frac{9a^2}{(a^2+b^2+c^2)+2(2a^2+bc)} = \frac{(a+2a)^2}{(a^2+b^2+c^2)+2(2a^2+bc)} \\ &\leq \frac{a^2}{(a^2+b^2+c^2)} + \frac{4a^2}{2(2a^2+bc)} = \frac{a^2}{(a^2+b^2+c^2)} + \frac{2a^2}{2a^2+bc} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra: $\sum \frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2} \leq \frac{1}{9} \sum \left[\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2a^2}{2a^2+bc} \right] \leq \frac{1}{3}$

Ví dụ 10: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a+b+c=1$. Chứng

minh: $\frac{ab}{3ab+2b+c} + \frac{bc}{3bc+2c+a} + \frac{ca}{3ca+2a+b} \leq \frac{1}{4}$

Giải:

Ta có:

$$3ab + 2b + c = 3ab + 2b + c(a + b + c) = (ab + bc + ca) + (c^2 + 2ab) + 2b$$

$$\text{Từ đó ta có: } \frac{(1+1+2)^2}{(ab+bc+ca)+(c^2+2ab)+2b} \leq \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{c^2+2ab} + \frac{1}{2b}$$

Như vậy:

$$\frac{ab}{3ab+2b+c} \leq \frac{1}{16} \left[\frac{ab}{ab+bc+ca} + \frac{ab}{c^2+2ab} + \frac{ab}{2b} \right] = \frac{1}{16} \left[\frac{ab}{ab+bc+ca} + \frac{ab}{c^2+2ab} + \frac{a}{2} \right]$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \sum \frac{ab}{3ab+2b+c} \leq \sum \frac{1}{16} \left[\frac{ab}{ab+bc+ca} + \frac{ab}{c^2+2ab} + \frac{a}{2} \right] \leq \frac{1}{4}.$$

3. Kỹ thuật thêm bớt.

Ví dụ 1: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3$$

Phân tích: Nếu ta áp dụng trực tiếp bất đẳng thức:

$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ thì phần sau sẽ bị ngược dấu. Để khắc phục ta thêm bớt như sau:

$$\text{Xét } \frac{1}{2-a} - m = \frac{1-2m+ma}{2-a} \text{ ta chọn } m \text{ sao cho } 1-2m+ma > 0 \text{ và}$$

$1-2m+ma$ chỉ còn đơn giản một số hạng. Điều này làm ta nghĩ đến $m = \frac{1}{2}$.

Từ đó ta có cách chứng minh như sau:

$$\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2-b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2-c} - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2a-a^2} + \frac{b^2}{2b-b^2} + \frac{c^2}{2c-c^2} \geq 3. \text{ Áp dụng bất đẳng thức:}$$

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \geq \frac{(x+y+z)^2}{A+B+C} \text{ ta có: } VT \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 - 6(a+b+c) + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b+c-3)^2 \geq 0$$

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng

minh rằng: $\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \leq 1$

Phân tích:

Xét: $\frac{1}{a^2+2} - m = \frac{1-2m-ma^2}{a^2+2}$ ta nghĩ đến chọn $m = \frac{1}{2}$. Khi đó ta có:

$$\frac{1}{a^2+2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{b^2+2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{c^2+2} - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức: $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \geq \frac{(x+y+z)^2}{A+B+C}$ ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}. \text{ Ta cần chứng minh:}$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} \geq 1. \text{ Nhưng đây là một}$$

đẳng thức. Suy ra điều phải chứng minh.

Ngoài ra ta có thể giải bằng cách khác như sau:

$$\frac{1}{a^2+2} = \frac{1 + \frac{(b+c)^2}{2}}{(a^2+2) \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right]} \leq \frac{1 + \frac{(b+c)^2}{2}}{(a+b+c)^2}. \text{ Từ đó cộng các bất đẳng thức}$$

cùng chiều ta suy ra điều phải chứng minh:

Chú ý: Với các giả thiết a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác ta cần chú ý biến đổi để sử dụng điều kiện: $a+b-c > 0, b+c-a > 0, c+a-b > 0$

Ví dụ 3: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1$$

Phân tích:

Ta viết lại: $\frac{a}{3a-b+c} - m = \frac{a-m(3a-b+c)}{3a-b+c}$. Ta chọn $m = \frac{1}{4}$ khi đó:

$$\frac{a}{3a-b+c} - \frac{1}{4} = \frac{a+b-c}{4(3a-b+c)}. \text{ Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh}$$

được viết lại thành:

$$\begin{aligned} \frac{a}{3a-b+c} - \frac{1}{4} + \frac{b}{3b-c+a} - \frac{1}{4} + \frac{c}{3c-a+b} - \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ \frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} &\geq 1. \end{aligned}$$

Ta có

$$VT \geq \frac{(a+b-c+b+c-a+a+c-b)^2}{\sum (a+b-c)(3a-b+c)} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Đối với các bất đẳng thức dạng $f(a) + f(b) + f(c) \leq M$. Ta thường thêm bớt vào một số m để tử số có dạng bình phương.

Ví dụ 4: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3.$$

Phân tích:

Ta lấy $\frac{1}{a^2 - a + 1} - m = \frac{1 - m - ma^2 + ma}{a^2 - a + 1}$ để $1 - m - ma^2 + ma$ phân tích

được thành: $(x + y)^2$ thì $1 - m - ma^2 + ma = 0$ có nghiệm kép. Hay

$$\Delta = m^2 + 4m(1 - m) = 0 \Leftrightarrow m(4 - 3m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}. \text{ Ta viết lại bất đẳng}$$

$$\text{thức thành: } \frac{1}{a^2 - a + 1} - \frac{4}{3} + \frac{1}{b^2 - b + 1} - \frac{4}{3} + \frac{1}{c^2 - c + 1} - \frac{4}{3} \leq -1 \text{ hay}$$

$$\frac{(2a-1)^2}{a^2 - a + 1} + \frac{(2b-1)^2}{b^2 - b + 1} + \frac{(2c-1)^2}{c^2 - c + 1} \geq 3. \text{ Áp dụng bất đẳng thức:}$$

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \geq \frac{(x + y + z)^2}{A + B + C} \text{ ta thu được:}$$

$$VT \geq \frac{[2(a + b + c) - 3]^2}{(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) + 3}. \text{ Ta cần chứng minh:}$$

$$[2(a + b + c) - 3]^2 \geq 3[(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) + 3] \text{ hay}$$

$$(a + b + c)^2 + 6(ab + bc + ca) \geq 9(a + b + c)$$

$$\text{Ta có: } (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$$

$$\geq a^2bc + b^2ca + c^2ab + 2abc(a + b + c) = 3abc(a + b + c) = 3(a + b + c). \text{ Ta quy}$$

bài toán về chứng minh: $(a + b + c)^2 + 6\sqrt{3(a + b + c)} \geq 9(a + b + c)$. Đặt

$$t = \sqrt{3(a + b + c)} \Rightarrow t \geq 3. \text{ Ta có bất đẳng thức trở thành:}$$

$$\frac{t^4}{9} + 6t \geq 3t^2 \Leftrightarrow t^4 - 27t^2 + 54t \geq 0 \Leftrightarrow t(t^3 - 27t + 54) = t(t - 3)^2(t + 6) \geq 0.$$

Điều này là hiển nhiên. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + 2b + 3} + \frac{b}{b^2 + 2c + 3} + \frac{c}{c^2 + 2a + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

Một số cách thêm bớt không mẫu mực:

Ví dụ 5: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 1$.

$$\text{Chứng minh: } \frac{a^2}{3a+1} + \frac{b^2}{3b+1} + \frac{c^2}{3c+1} \leq \frac{1}{18(ab+bc+ca)}$$

Giải:

Ta có: $\frac{a^2}{3a+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{3a+1} = \frac{1}{3} \left(a - \frac{a}{3a+1} \right)$. Vì vậy ta quy bài toán về chứng

$$\text{minh: } \frac{a}{3a+1} + \frac{b}{3b+1} + \frac{c}{3c+1} + \frac{1}{6(ab+bc+ca)} \geq 1$$

$$\text{Ta có: } \sum \frac{a}{3a+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(3a+1)+b(3b+1)+c(3c+1)} = \frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)+1}$$

$$\text{Suy ra } VT \geq \frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)+1} + \frac{1}{6(ab+bc+ca)} \geq \frac{4}{3(a+b+c)^2+1} = 1$$

Ví dụ 6: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$2 \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right) \geq \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}$$

Giải:

Do $\frac{1+a}{1-a} = \frac{2a}{b+c} + 1$ nên ta viết lại bất đẳng thức thành:

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2}. \text{ Lại có: } \frac{a}{c} - \frac{a}{b+c} = \frac{ab}{c(b+c)} \text{ nên ta sẽ}$$

chứng minh: $\sum \frac{ab}{c(b+c)} \geq \frac{3}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Shwarz ta có:

$$\sum \frac{ab}{c(b+c)} = \sum \frac{a^2 b^2}{abc(b+c)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}$ nhưng đây là bài toán quen thuộc.

Ví dụ 7: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng

minh: $a+b+c + \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{c+a} + \frac{ca}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Giải:

Nhân 2 vế với $a+b+c$ và chú ý: $\frac{ab}{b+c}(a+b+c) = ab + \frac{a^2 b}{b+c}$. Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$(a+b+c)^2 + 1 + \frac{a^2 b}{b+c} + \frac{b^2 c}{c+a} + \frac{c^2 a}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$$

Ta có: $\frac{a^2 b}{b+c} + \frac{b^2 c}{c+a} + \frac{c^2 a}{a+b} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{b(b+c)+c(c+a)+a(a+b)} = \frac{1}{(a+b+c)^2 - 1}$.

Cuối cùng ta chứng minh: $(a+b+c)^2 + 1 + \frac{1}{(a+b+c)^2 - 1} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$.

Nhưng $\frac{3\sqrt{3}}{2}(a+b+c) \leq \frac{3}{4}[(a+b+c)^2 + 3]$ nên ta quy về:

$$(a+b+c)^2 + 1 + \frac{1}{(a+b+c)^2 - 1} \geq \frac{3}{4}[(a+b+c)^2 + 3]. \text{ Dành cho học sinh.}$$

4). PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ.

Tùy theo bài toán ta có thể chọn một trong các cách đặt ẩn phụ sau:

$$1). (a, b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$$

$$2). (a, b, c) \rightarrow \left(\frac{ka}{b}, \frac{kb}{c}, \frac{kc}{a} \right)$$

$$3). (a, b, c) \rightarrow \left(\frac{kb}{a}, \frac{kc}{b}, \frac{ka}{c} \right)$$

$$4). (a, b, c) \rightarrow \left(\frac{ka^2}{bc}, \frac{kb^2}{ac}, \frac{kc^2}{ab} \right)$$

$$5). (a, b, c) \rightarrow \left(\frac{kbc}{a^2}, \frac{kca}{b^2}, \frac{kab}{c^2} \right)$$

Ví dụ 1: Cho các số thực dương x, y, z sao cho $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{z^2 + z + 1} \geq 1.$$

Phân tích: Nếu áp dụng trực tiếp bất đẳng thức:

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} \geq \frac{(X + Y + Z)^2}{A + B + C} \text{ thì bất đẳng thức tiếp theo bị ngược dấu.}$$

Để không bị ngược dấu ta thay $(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{bc}{a^2}, \frac{ca}{b^2}, \frac{ab}{c^2} \right)$ thì bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{a^4}{a^4 + a^2bc + b^2c^2} + \frac{b^4}{b^4 + b^2ac + a^2c^2} + \frac{c^4}{c^4 + c^2ab + a^2b^2} \geq 1. \quad (*)$$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức: $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} \geq \frac{(X + Y + Z)^2}{A + B + C}$ ta có:

$VT \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^4 + a^2bc + b^2c^2 + b^4 + b^2ac + a^2c^2 + c^4 + c^2ab + a^2b^2}$. Ta cần chứng minh:

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^4 + a^2bc + b^2c^2 + b^4 + b^2ac + a^2c^2 + c^4 + c^2ab + a^2b^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq abc(a + b + c). \text{ Nhưng đây là kết quả quen thuộc.}$$

Ví dụ 2: Cho các số thực dương x, y, z sao cho $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(y+1)(y+2)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)} \geq \frac{1}{2}.$$

Phân tích:

Đặt $x = \frac{bc}{a^2}; y = \frac{ac}{b^2}; z = \frac{ab}{c^2}$ bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sum \frac{a^4}{(2a^2 + bc)(a^2 + bc)} \geq \frac{1}{2}. \text{ Áp dụng bất đẳng thức:}$$

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} \geq \frac{(X + Y + Z)^2}{A + B + C} \text{ ta có:}$$

$$VT \geq \frac{\sum (a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sum (2a^2 + bc)(a^2 + bc)}. \text{ Ta cần chứng minh:}$$

$$2 \sum (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \sum (2a^2 + bc)(a^2 + bc)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c). \text{ Đây là kết quả quen thuộc.}$$

Ví dụ 3: Cho 3 số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2x}{x+y}} + \sqrt{\frac{2y}{y+z}} + \sqrt{\frac{2z}{z+x}} \leq 3$$

Giải:

Đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{a}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+ac}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+ab}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}. \text{ Áp dụng bất đẳng thức}$$

Bunhiacopxki ta có:

$$\sum \left(\sqrt{\frac{a^2}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+ac}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+ab}} \right)^2 \leq \left(\sum \frac{a}{(a+b)(a+c)} \right) \left(\sum \frac{a(a+b)(a+c)}{a^2+bc} \right)$$

Mặt khác ta có: $8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a)$. Mặt

khác ta có: $\sum \frac{a}{(a+b)(a+c)} = \frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{9}{4(a+b+c)}$. Ta quy bài

toán về chứng minh: $\sum \frac{a(a+b)(a+c)}{a^2+bc} \leq 2(a+b+c)$. Mặt khác ta có:

$$\frac{a(a+b)(a+c)}{a^2+bc} = a + \frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}. \text{ Ta quy bài toán về chứng minh:}$$

$$\sum \frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} \leq a+b+c$$

KỸ THUẬT ĐỐI XỨNG HÓA.

Ví dụ 1: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt{\frac{2a}{a+b}} &= \frac{\sqrt{2a(a+c)}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \Rightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{2a(a+c)}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \right)^2 \leq \\ &2(a+b+c) \left[2 \cdot \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \right] \\ &= \frac{8(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \end{aligned}$$

Bây giờ ta cần chứng minh:

$$\frac{8(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq 9 \Leftrightarrow 8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

Nhưng đây là kết quả quen thuộc:

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{c}{c+a+2b}} \leq \frac{3}{2}$$

Giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{a+b+2c}} &= \frac{\sqrt{a(a+2b+c)}}{\sqrt{(a+b+2c)(a+2b+c)}} \Rightarrow \left(\sum \frac{\sqrt{a(a+2b+c)}}{\sqrt{(a+b+2c)(a+2b+c)}} \right)^2 \leq \\ &[\sum a(a+2b+c)] \left[\sum \frac{1}{(a+b+2c)(a+2b+c)} \right] = \frac{4(\sum a^2 + 3\sum ab)(\sum a)}{(a+b+2c)(a+2b+c)(b+2a+c)} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{4(\sum a^2 + 3\sum ab)(\sum a)}{(a+b+2c)(a+2b+c)(b+2a+c)} \leq \frac{9}{4}$. Sau khi khai

triển và thu gọn thì được: $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$.

Đây là bài toán quen thuộc.

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=1$

Chứng minh: $\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+ca}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+ab}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Giải:

Ta có: $\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} = \sqrt{\frac{a^2b}{a+c}} = \sqrt{\frac{a^2b(a+b)}{(a+c)(a+b)}}$ suy ra

$$\left(\sum \sqrt{\frac{a^2b(a+b)}{(a+c)(a+b)}} \right)^2 \leq \left[\sum (a+b) \right] \left[\sum \frac{a^2b}{(a+c)(a+b)} \right] = \frac{2(\sum a) \left[\sum a^2b^2 + abc \sum a \right]}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{2(\sum a) \left[\sum a^2b^2 + abc \sum a \right]}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(\sum a) \left[\sum a^2b^2 + abc \sum a \right]$$

$\leq (a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)$. Khai triển và thu gọn ta quy về:

$ab(a^2+b^2) + bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$. Nhưng bất đẳng thức này là hiển nhiên đúng theo BĐT cô si:

BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$1) \quad \frac{a}{b^2+bc+c^2} + \frac{b}{c^2+ca+a^2} + \frac{c}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

$$2) \quad \frac{a}{a^2+ab+b^2} + \frac{b}{b^2+bc+c^2} + \frac{c}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$$

$$3) \quad (a^2+3)(b^2+3)(c^2+3) \geq 4(a+b+c+1)^2$$

$$4) \quad \frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

$$5) \quad \frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1 \text{ với } a+b+c=3$$

$$6) \quad \frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{6}(a+b+c)$$

- 7) $\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{bc^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{ca^2}{c^2+2a^2+b^2} \leq \frac{a+b+c}{4}$
- 8) $\frac{1}{2ab^2+1} + \frac{1}{2bc^2+1} + \frac{1}{2ca^2+1} \geq 1$ với $a+b+c=3$.
- 9) $\frac{3a+b}{2a+c} + \frac{3b+c}{2b+a} + \frac{3c+a}{2c+b} \geq 4$. Với a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác
- 10) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2}$. Với a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác
- 11) $\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{bc}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{ca}{c^2+a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ biết $a, b, c \geq 0$ sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0 và $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$.
- 12) $\frac{a}{\sqrt{4a+3bc}} + \frac{b}{\sqrt{4b+3ca}} + \frac{c}{\sqrt{4c+3ab}} \leq 1$ biết $a, b, c \geq 0$ sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0 và $a+b+c=2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

$$1) \frac{a}{b^2+bc+c^2} + \frac{b}{c^2+ca+a^2} + \frac{c}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

Ta có: $\frac{a}{b^2+bc+c^2} = \frac{a^2}{ab^2+abc+ac^2}$. Suy ra

$$\sum \frac{a^2}{ab^2+abc+ac^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+3abc}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{(a+b+c)^2}{ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+3abc} \geq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$

$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)(a+b+c) \geq ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+3abc$ (Nhưng đây là hằng đẳng thức)

$$2) \text{ Ta có: } ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$$

Suy ra $\frac{a}{b^2+bc+c^2} + \frac{b}{c^2+ca+a^2} + \frac{c}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$

$$3) \quad (a+b+c+1)^2 = \left[a + \sqrt{3} \left(\frac{b+c+1}{\sqrt{3}} \right) \right]^2 \leq (a^2+3) \left[1 + \frac{(b+c+1)^2}{3} \right]$$

Từ đó suy ra $4(a+b+c+1)^2 \leq 4(a^2+3) \left[1 + \frac{(b+c+1)^2}{3} \right]$. Ta chứng minh:

$$4(a^2+3) \left[1 + \frac{(b+c+1)^2}{3} \right] \leq (a^2+3)(b^2+3)(c^2+3) \Leftrightarrow 4[3+(b+c+1)^2] \leq 3(b^2+3)(c^2+3)$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$4[3+(b+c+1)^2] \leq 3(b^2+3)(c^2+3) \Leftrightarrow 4[4+b^2+c^2+2bc+2b+2c] \leq 9b^2+9c^2+3b^2c+3bc^2+12b+12c+12$$

$\Leftrightarrow 5(b^2+c^2)+3b^2c^2-8(b+c)-8bc+13 \geq 0$. Ta viết lại bất đẳng thức trên

$$\text{thành: } 5(b^2+c^2)-2bc-8(b+c)+8+3(bc-1)^2 \geq 0.$$

Ta có $b^2+c^2 \geq 2bc$, $2(b^2+c^2) \geq (b+c)^2 \Rightarrow 4(b^2+c^2) \geq 2(b+c)^2$. Nên

$$5(b^2+c^2)-2bc-8(b+c)+8+3(bc-1)^2 \geq 2(b+c)^2-8(b+c)+8+2bc-2bc+3(bc-1)^2 \\ = 2(b+c-2)^2+3(bc-1)^2 \geq 0. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a=b=c=1$$

$$4) \quad \frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

Ta có: $\frac{a^3b}{1+ab^2} = \frac{a^4b^2c^2}{abc^2+a^2b^3c^2}$ Suy ra

$$\begin{aligned}\sum \frac{a^3b}{1+ab^2} &= \sum \frac{a^4b^2c^2}{abc^2+a^2b^3c^2} \geq \frac{(a^2bc+b^2ac+c^2ab)^2}{abc^2+a^2b^3c^2+bca^2+b^2c^3a^2+cab^2+c^2a^3b^2} \\ &= \frac{a^2b^2c^2(a+b+c)^2}{abc^2+a^2b^3c^2+bca^2+b^2c^3a^2+cab^2+c^2a^3b^2}\end{aligned}$$

Ta chứng minh:

$$\frac{a^2b^2c^2(a+b+c)^2}{abc^2+a^2b^3c^2+bca^2+b^2c^3a^2+cab^2+c^2a^3b^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

$(1+abc)abc(a+b+c) \geq abc^2+a^2b^3c^2+bca^2+b^2c^3a^2+cab^2+c^2a^3b^2$. Đây là đẳng thức. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

$$5) \quad \frac{a^2}{a+2b^2} = \frac{a^4}{a^2+2a^2b^2}.$$

Suy ra $\sum \frac{a^2}{a+2b^2} = \sum \frac{a^4}{a^3+2a^2b^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum a^3+2\sum a^2b^2}$. Ta chứng minh:

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum a^3+2\sum a^2b^2} \geq 1$$

$$\text{Hay } \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum a^3+2\sum a^2b^2} \geq 1 \Leftrightarrow a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3$$

Ta cần chứng minh: $a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3$ với $a+b+c=3$. Ta chứng minh:

$$3(a^4+b^4+c^4) \geq (a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \Leftrightarrow 2(a^4+b^4+c^4) \geq ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)$$

Để ý rằng:

$$2(a^4+b^4) = (a^2+b^2)^2 = (a^2+b^2)(a^2+b^2) \geq 2ab(a^2+b^2) \Leftrightarrow a^4+b^4 \geq ab(a^2+b^2)$$

. Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra điều phải chứng minh:

6) Ta có:

$$\frac{1}{a+3b+2c} = \frac{1}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right) \Rightarrow \frac{ab}{a+3b+2c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{ab}{b+c} + \frac{ab}{2b} \right)$$

Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại thì thu được:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} &\leq \frac{1}{9} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{1}{2}a + \frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{c+a} + \frac{1}{2}b + \frac{c}{c+a} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} &\leq \frac{1}{6}(a+b+c) \end{aligned}$$

7) Ta có
$$\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{bc^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{ca^2}{c^2+2a^2+b^2} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

$$\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{b}{4} \left[\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+b^2+c^2} \right] \leq \frac{b}{4} \left[\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} \right]$$

Suy ra

$$VT \leq \frac{b}{4} \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} \right) + \frac{c}{4} \left(\frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right) + \frac{a}{4} \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right) = \frac{a+b+c}{4}$$

8)
$$\frac{1}{2ab^2+1} + \frac{1}{2bc^2+1} + \frac{1}{2ca^2+1} \geq 1$$

Ta có:
$$\frac{1}{2ab^2+1} = \frac{c^2}{2ab^2c^2+c^2} \text{ suy ra}$$

$$VT \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c+2a^2bc^2+2ab^2c^2}. \text{ Ta chứng minh:}$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c+2a^2bc^2+2ab^2c^2} \geq 1 \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq a^2b^2c+a^2bc^2+ab^2c^2$$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca \geq abc(a+b+c) \Leftrightarrow abc \leq 1$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$3 = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3 \Rightarrow abc \leq 1$ là điều phải chứng minh.

9) Ta xét: $\frac{3a+b}{2a+c} - m = \frac{a(3-2m)+b-mc}{2a+c}$

Chọn $m=1$ để xuất hiện: $\frac{3a+b}{2a+c} - 1 = \frac{a+b-c}{2a+c}$

Khi đó ta có: Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng:

$$\frac{a+b-c}{2a+c} + \frac{b+c-a}{2b+a} + \frac{c+a-b}{2c+b} \geq 1$$

Suy ra $VT \geq \frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{\sum(a+b-c)(2a+c)} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1$. Đpcm

10) Ta viết lại bất đẳng thức thành:

$$1 - \frac{a}{b+c} + 1 - \frac{b}{c+a} + 1 - \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{2} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c-a}{b+c} + \frac{a+c-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Ta có $VT \geq \frac{4(a+b+c)^2}{\sum(b+c-a)(b+c)} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$

11) Ta có: $\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{ab}\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2} \geq \frac{\sqrt{2}ab}{a^2+b^2}$.

Ta quy bài toán về chứng minh: $\frac{2ab}{a^2+b^2} + \frac{2bc}{b^2+c^2} + \frac{2ca}{c^2+a^2} \geq 1$. Hay

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2} \geq 4. \text{ Thật vậy ta có:}$$

$$VT \geq \frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{4(a+b+c)^2}{(a^2+b^2+c^2)+2ab+2bc+2ca} = 4. \text{ Dấu bằng xảy}$$

ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ và các hoán vị.

$$\textbf{12)} \text{ Ta có: } VT^2 \leq (a+b+c) \left(\frac{a}{4a+3bc} + \frac{b}{4b+3ca} + \frac{c}{4c+3ab} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{a}{4a+3bc} + \frac{b}{4b+3ca} + \frac{c}{4c+3ab} \right). \text{ Ta chứng minh:}$$

$$\frac{a}{4a+3bc} + \frac{b}{4b+3ca} + \frac{c}{4c+3ab} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{a}{4a+3bc} + \frac{1}{4} - \frac{b}{4b+3ca} + \frac{1}{4} - \frac{c}{4c+3ab} \geq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{4a+3bc} + \frac{ca}{4b+3ca} + \frac{ab}{4c+3ab} \geq \frac{1}{3}.$$

Ta có:

$$VT \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+4abc)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c))} = \frac{1}{3}$$

MỘT SỐ ĐỀ ÔN THI VÀO LỚP 10 – THPT

ĐỀ SỐ 1

Câu 1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$
($x > 0, x \neq 4$).

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tính giá trị của A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$
- 3) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 2) Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 2 = 0$, với m là tham số.

- a) Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu với mọi m .
- b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2 . Tìm m để biểu

thức $A = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^3$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3) Một ca nô xuôi dòng 78km và ngược dòng 44 km mất 5 giờ với vận tốc dự định. nếu ca nô xuôi 13 km và ngược dòng 11 km với cùng vận tốc dự định đó thì mất 1 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.

Câu 4) Từ điểm K nằm ngoài đường tròn (O) ta kẻ các tiếp tuyến KA, KB cắt tuyến KCD đến (O) sao cho tia KC nằm giữa hai tia KA, KO . Gọi H là trung điểm CD .

- a) Chứng minh: 5 điểm A, K, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh: Tứ giác $MODC$ nội tiếp.
- c) Đường thẳng qua H song song với BD cắt AB tại I . Chứng minh $CI \perp OB$.

Câu 5) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Chứng minh rằng: $x + y + z \leq xyz + 2$.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1) Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3 - 2\sqrt{2}b^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{2}b^3}{2b + \sqrt{2ab}} - \sqrt{a} \right).$$

- a) Tìm điều kiện của a và b để biểu thức P xác định. Rút gọn biểu thức P .
- b) Biết $a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. Tính giá trị của P .

Câu 2) Cho phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

- a) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}.$$

Câu 3) Hướng ứng phong trào “Vì biển đảo Trường Sa” một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau.

Câu 4) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 3m - 1 \end{cases}$ Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5) Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . A là một điểm di động trên nửa đường tròn. Vẽ AH vuông góc với BC tại H . Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC và nửa đường tròn (O) lần lượt tại D, E, M . AM cắt BC tại N .

a) Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật và $AME = ACN$.

b) Tính $\frac{DE^3}{BD \cdot CE}$ theo R và chứng minh rằng D, E, N thẳng hàng.

c) Xác định vị trí điểm A để diện tích tam giác ABH lớn nhất.

Câu 6) Cho $x, y > 0$ và $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 \leq 2$.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1) Cho $b > a > 0$. Xét biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}.$$

a) Rút gọn P .

b) Biết $(a-1)(b-1) + 2\sqrt{ab} = 1$, hãy tính giá trị của biểu thức P .

Câu 2) Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 4$.

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi x_1, x_2 là hoành độ của các điểm A, B . Tìm giá trị

$$\text{lớn nhất của } Q = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2}.$$

b) Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng 8.

Câu 3) Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A, B cách nhau 150km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 1,5h. Hỏi sau khi gặp

nhau bao lâu thì ô tô đến B và xe máy đến A biết rằng vận tốc của xe máy bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc của ô tô.

Câu 4) Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB < AC$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC và M là một điểm đối xứng của H qua AB . Tia MC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH tại điểm $P(P \neq M)$. Tia HP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác APC tại điểm $N(N \neq P)$.

- Chứng minh rằng $HN = MC$.
- Gọi E là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn ngoại tiếp tam giác APC . Chứng minh rằng EN song song với BC .
- Gọi K là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác APC . Chứng minh rằng H là trung điểm BK .

Câu 5) Cho các số a, b, c không âm. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}.$$

ĐỀ SỐ 4

Câu 1) Cho biểu thức $P = \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$.

- Rút gọn P .
- Xác định x nguyên sao cho P nguyên.

Câu 2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{-x^2}{2}$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $I(0; -2)$ và có hệ số góc k .

- Viết phương trình đường thẳng (d) . Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi k thay đổi.
- Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK vuông tại I .

Câu 3) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \\ xy + \frac{1}{xy} = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Câu 4) Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC . Qua A vẽ cát tuyến ADE của đường tròn (O) ; D và E thuộc đường tròn (O) sao cho đường thẳng AE cắt đoạn thẳng HB tại I . Gọi M là trung điểm dây cung DE .

a) Chứng minh $AB^2 = AD \cdot AE$.

b) Chứng minh năm điểm A, B, M, O, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh tứ giác $OHDE$ nội tiếp.

d) Trên tia đối của tia HD lấy điểm F sao cho H là trung điểm DF . Tia AO cắt đường thẳng EF tại K . Chứng minh $IK \parallel DF$.

Câu 5) Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Chứng minh rằng: $2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \leq 3$.

ĐỀ SỐ 5

Câu 1) Cho $P = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$

a) Rút gọn P .

b) Tìm x nguyên để $P < 0$.

c) Tìm x để $Q = \frac{1}{P}$ nhỏ nhất.

Câu 2) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m+5)x - m$ với m là tham số.

- a) Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
- b) Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các giao điểm của d và (P) . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = |x_1 - x_2|$.

Câu 3) Trên quãng đường AB dài 210 m, tại cùng một thời điểm một xe máy khởi hành từ A đến B và một ô tô khởi hành từ B đi về A . Sau khi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A . Biết rằng vận tốc ô tô và xe máy không thay đổi trong suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

Câu 4) Cho đường tròn (O) và dây cung BC không là đường kính. Gọi A là điểm chính giữa của cung lớn BC . Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại S . Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB và M là trung điểm của CH . Tia AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai N .

- a) Gọi D là giao điểm của SA với BC . Chứng minh tứ giác $CMDN$ nội tiếp.
- b) Tia SN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E . Chứng minh rằng CE song song với SA
- c) Chứng minh đường thẳng CN đi qua trung điểm của đoạn thẳng SD .

Câu 5) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x-3} = 6-2x \end{cases}$$

MỘT SỐ ĐỀ ÔN THI VÀO LỚP 10 – THPT CHUYÊN

ĐỀ SỐ 6.

Câu 1) Giải phương trình: $x^2 + x + 6 + 2x\sqrt{x+3} = 4(x + \sqrt{x+3})$

Câu 2) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn

$a + b + c = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a} + \frac{\sqrt{b}}{1+b} + \frac{\sqrt{c}}{1+c} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

Câu 3) Chứng minh: $a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$ là số chính phương với mọi số tự nhiên lẻ.

Câu 4) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có 3 đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H . Đường thẳng CH cắt (O) tại điểm G khác C . GD cắt (O) tại điểm K khác G .

- a) Chứng minh OA vuông góc với EF .
- b) Chứng minh: AK đi qua trung điểm M của DE .
- c) Gọi N là trung điểm của DF , AN cắt (O) tại điểm L khác A . Chứng minh 4 điểm M, L, N, K cùng thuộc một đường tròn.

Câu 5) Cho a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \geq \frac{3}{5}$.

Câu 6) Cho tập hợp M gồm 1009 số nguyên dương đôi một khác nhau và số lớn nhất trong M bằng 2016. Chứng minh rằng trong tập M có hai số, mà số này là bội của số kia.

ĐỀ SỐ 7.

Câu 1) Giải phương trình $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + \sqrt{x^2 + 2x + 17} = 3$.

Câu 2) Tìm ba chữ số tận cùng của $A = 26^{6^{2015}}$.

Câu 3)

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - y^3 = xy + 8$.

b) Biết $x = \frac{\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} \cdot (2-\sqrt{3})}{\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = (3x^3 - x^2 - 1)^{2016}$$

Câu 4) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt tiếp tuyến tại B, C của (O) lần lượt tại S, T . BT cắt AC tại E , CS cắt AB tại F . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BE, CF, AB, AC . Đường thẳng BQ, CP cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là K, L .

a) Chứng minh: $\triangle ABK \sim \triangle EBC$.

b) Chứng minh tứ giác $PQKL$ nội tiếp.

c) Chứng minh: $BCM = CBN$.

Câu 5) Với n là số tự nhiên, $n \geq 2$, cho n số nguyên $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 + n^3 \leq (2n-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n^2$$

Chứng minh rằng:

a) Các số x_i ($i=1, 2, \dots, n$) là số nguyên dương.

b) Số $x_1 + x_2 + \dots + x_n + n + 1$ không là số chính phương.

ĐỀ SỐ 8

Câu 1) Giải phương trình $\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}$.

Câu 2) Cho các số x, y thỏa mãn: $\begin{cases} x^3 + 3y^2 - 6y + 11 = 0 \\ x^2 + y^2(x^2 - 3) - 2y - 3 = 0 \end{cases}$. Tính giá trị của $P = x^3 + y^3$.

Câu 3) Tìm tất cả các số tự nhiên n để: $2^{2012} + 2^{2015} + 2^n$ là số chính phương.

Câu 4) Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với $AB < AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T . Vẽ đường kính AD , OT cắt BD tại điểm E . Gọi M là trung điểm của BC .

- Chứng minh: $EO \perp AM$.
- Chứng minh: $AE \parallel CD$.
- Giả sử BE cắt AT tại điểm F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt OE tại điểm G khác E . Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp tam giác AGB nằm trên (O) .

Câu 5) Cho tập hợp $X = \{1, 4, 7, 10, \dots, 100\}$. Gọi A là một tập con của tập X mà số phần tử của A bằng 19. Chứng minh rằng trong A có hai phần tử phân biệt mà tổng của chúng bằng 104.

ĐỀ SỐ 9.

Câu 1) Cho các số x, y, z thỏa mãn

$$x\sqrt{1-2y^2} + y\sqrt{4-6z^2} + z\sqrt{15-3x^2} = 4.$$

Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

Câu 2) Tìm phần nguyên của: $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2014^2}} + \frac{1}{\sqrt{2016^2}}$.

Câu 3)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy(3x+y)=4 \\ 7x^3+11=3(x+y)(x+y+1) \end{cases}$$

b) Cho a, b là các số nguyên dương phân biệt sao cho $ab(a+b)$ chia hết cho a^2+ab+b^2 . Chứng minh rằng: $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$

Câu 4) Cho tam giác ABC , trên đoạn thẳng AC lấy điểm P , trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC} = \frac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại điểm R khác B . Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PQR cắt nhau tại điểm S khác P , SP cắt AB tại điểm D .

- Chứng minh: AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBR .
- Chứng minh tam giác CSP cân.
- Chứng minh 4 điểm B, S, R, D cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5) Chứng minh rằng m, n là các số nguyên dương và $n \geq m$ luôn có

$$(n+1)^m n^m \geq \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \geq 2^m m!. \quad (\text{quy ước } 0! = 1)$$

ĐỀ SỐ 10

Câu 1) Giải phương trình: $\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}} = x-5$.

Câu 2) Chứng minh: $A = 2^{2^{n+1}} + 3$ là hợp số với mọi số nguyên dương $n > 1$.

Câu 3) Cho tập hợp A có các tính chất sau:

- Tập A chứa toàn bộ các số nguyên.
- $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in A$

c) Với mọi $x, y \in A$ thì $x + y \in A$ và $xy \in A$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \in A.$$

Câu 4) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp (O) . Đường tròn tâm C bán kính CB cắt BA tại điểm D khác B và cắt (O) tại E khác B .

DE cắt (O) tại điểm F khác E . CO cắt DE, AB lần lượt tại G, L . Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc LE, LF sao cho MG, DN cùng vuông góc với BC . Gọi H là giao điểm của CF, BE .

a) Chứng minh: Tứ giác $CHDE$ nội tiếp.

b) Chứng minh: Tứ giác $HGLF$ nội tiếp.

c) Chứng minh: $DN = MG$.

Câu 5) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = abc + 2$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$.

LỜI GIẢI CÁC ĐỀ TOÁN RÈN LUYỆN

ĐỀ SỐ 1.

Câu 1)

1) Với $x > 0, x \neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{3}+3}{5x-10\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0, x \neq 4$ thì $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

2) Khi $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$ thay vào ta

$$\text{có: } A = \frac{5(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)+1} = \frac{5(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}-1} = \frac{5(\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)}{7} = \frac{5(3-\sqrt{2})}{7}$$

3) Ta có $\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$ nên

$$A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0, x > 0, x \neq 4 \quad A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2}, x > 0, x \neq 4$$

$\Rightarrow 0 < A < \frac{5}{2}$, kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên thì $A \in \{1, 2\}$.

$$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ thỏa mãn điều}$$

kiện. $A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

Câu 2)

a) Xét $ac = -m^2 + m - 2 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi m .

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2 .

Theo câu a) thì $x_1 x_2 \neq 0$, do đó A được xác định với mọi x_1, x_2 .

Do x_1, x_2 trái dấu nên $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -t$ với $t > 0$, suy ra $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 < 0$, suy ra $A < 0$

Đặt $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -t$, với $t > 0$, suy ra $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 = -\frac{1}{t}$. Khi đó $A = -t - \frac{1}{t}$ mang giá

trị âm và A đạt giá trị lớn nhất khi $-A$ có giá trị nhỏ nhất. Ta có

$-A = t + \frac{1}{t} \geq 2$, suy ra $A \leq -2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$t = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1$. Với $t = 1$, ta có

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = -1 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow -(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = 1$ thì biểu thức A đạt giá trị lớn nhất là -2 .

Câu 3) Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x > 0$)

Và vận tốc của dòng nước là y (km/h, $y > 0$)

Ca nô xuôi dòng đi với vận tốc $x + y$ (km/h). Đi đoạn đường 78 km nên thời gian đi là $\frac{78}{x+y}$ (giờ).

Ca nô đi ngược dòng với vận tốc $x - y$ (km/h). Đi đoạn đường 44 km nên thời gian đi là $\frac{44}{x-y}$ (giờ).

Tổng thời gian xuôi dòng là 78 km và ngược dòng là 44 km mất 5 giờ nên ta có phương trình: $\frac{78}{x+y} + \frac{44}{x-y} = 5$ (1).

Ca nô xuôi dòng 13 km và ngược dòng 11 km nên ta có phương trình:

$\frac{13}{x+y} + \frac{11}{x-y} = 1$ (2). Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{78}{x+y} + \frac{44}{x-y} = 5 \\ \frac{13}{x+y} + \frac{11}{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 26 \\ x-y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h và vận tốc của dòng nước là 2 km/h.

Câu 4)

a) Vì KA, KB là các tiếp tuyến của

(O) nên $KAO = KBO = 90^\circ$. Do H là

trung điểm của dây CD nên

$KHO = 90^\circ$. Từ đó suy ra 5 điểm

K, A, H, O, B cùng nằm trên đường

tròn đường kính KO .

b) Vì M là trung điểm của AB nên $AM \perp KO$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông KAO

Ta có: $KM \cdot KO = KA^2$.

Xét tam giác KAC và tam giác KDA có $KAC = KDA$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Góc AKD chung.

Nên $\Delta KAC \sim \Delta KDA$ (g.g). Suy ra $\frac{KA}{KC} = \frac{KD}{KA} \Rightarrow KA^2 = KC \cdot KD$. Suy ra

$KC \cdot KD = KH \cdot KO \Rightarrow \Delta KMC \sim \Delta KDO$ (g.g) $\Rightarrow CMK = CDO \Rightarrow CMOD$ nội tiếp.

c) Ta có $HI \parallel BD \Rightarrow CHI = CDB$. Mặt khác $CAB = CDB$ cùng chắn cung CB nên suy ra $CHI = CAB$ hay $AHIC$ là tứ giác nội tiếp. Do đó

$IAH = ICH \Leftrightarrow BAH = ICH$. Mặt khác ta có A, K, B, O, H cùng nằm trên

đường tròn đường kính OK nên $BAH = BKH$. Từ đó suy ra

$ICH = BKH \Rightarrow CI \parallel KB$. Mà $KB \perp OB \Rightarrow CI \perp OB$

Câu 5) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$x + y + z - xyz = x(1 - yz) + (y + z) \cdot 1 \leq \sqrt{[x^2 + (y + z)^2]} \sqrt{[(1 - yz)^2 + 1]}$$

Tới đây ta cần chứng minh

$$(2 + 2yz)(2 - 2yz + y^2 z^2) \leq 4 \Leftrightarrow y^3 z^3 - y^2 z^2 \leq 0 \Leftrightarrow y^2 z^2 (yz - 1) \leq 0.$$

Mặt khác theo giả thiết ta có: ta có

$$2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq y^2 + z^2 \geq 2yz \Rightarrow yz \leq 1. \text{ Nên bất đẳng thức trên luôn đúng.}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi có 2 số bằng 1 và một số bằng 0.

ĐÁP ÁN ĐỀ 2

Câu 1) Điều kiện: $a \geq 0, b > 0, a \neq 2b$

a) Ta có: $\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3} = (\sqrt{a})^3 - (\sqrt{2b})^3 = (\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)$

b) Suy ra

$$\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} = \frac{2(a+b) - \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{2b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)}$$

$$= \frac{a + \sqrt{2ab} + 2b}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{2b}}$$

$$\frac{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{2b^3}}{2b + \sqrt{2ab}} - \sqrt{a} = \frac{(a + \sqrt{2b})(a - \sqrt{2ab} + 2b)}{\sqrt{2b}(\sqrt{2b} + \sqrt{a})} - \sqrt{a}$$

$$= \frac{a - \sqrt{2ab} + 2b}{\sqrt{2b}} - \sqrt{a} = \frac{a - 2\sqrt{2ab} + 2b}{\sqrt{2b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})^2}{\sqrt{2b}}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{2b}} \cdot \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})^2}{\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{2b}}{\sqrt{2b}}.$$

c) Ta có: $ab = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{8}$. Suy ra: $2b = \frac{1}{4a}$. Do đó

$$P = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{2b}}{\sqrt{2b}} = \sqrt{\frac{a}{2b}} - 1 = \sqrt{4a^2} - 1 = 2a - 1 = 1 + \sqrt{3}.$$

Câu 2)

Ta có $\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0$, với mọi m .

Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

Theo hệ thức Viet, ta có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1 x_2 = m - 1$

a) Thay $m = x_1 + x_2$ vào $x_1 x_2 = m - 1$, ta được $x_1 x_2 = x_1 + x_2 - 1$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m là $x_1 x_2 = x_1 + x_2 - 1$.

b) Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = m^2 - 2(m-1) = m^2 - 2m + 2$.

Suy ra $A = \frac{2x_1 x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 x_2 + 1)} = \frac{2m+1}{m^2+2}$. Vì

$$A - 1 = \frac{2m+1}{m^2+2} - 1 = \frac{2m+1-m^2-2}{m^2+2} = -\frac{(m-1)^2}{m^2+2} \leq 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Suy ra $A \leq 1, \forall m \in \mathbb{R}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$

Và $A + \frac{1}{2} = \frac{2m+1}{m^2+2} + \frac{1}{2} = \frac{2(m+1)+m^2+2}{2(m^2+2)} = \frac{(m+2)^2}{2(m^2+2)} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Suy ra

$A \geq -\frac{1}{2}, \forall m \in \mathbb{R}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = -2$.

Vậy GTLN của A bằng 1 khi $m = 1$ và GTNN của A bằng $-\frac{1}{2}$ khi

$m = -2$.

Câu 3) Gọi x (chiếc) là số tàu dự định của đội ($x \in \mathbb{N}^*, x < 140$)

Số tàu tham gia vận chuyển là $x+1$ (chiếc)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định $\frac{280}{x}$ (tấn)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc thực tế $\frac{286}{x+1}$ (tấn)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{280}{x} - \frac{286}{x+1} = 2$

$$\Leftrightarrow 280(x+1) - 286x = 2x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 140 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -14(l) \end{cases}. \text{ Vậy}$$

đội tàu lúc đầu có 10 chiếc tàu.

Câu 4) Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1 & (2) \end{cases}$. Từ phương trình (2)

của hệ ta suy ra $y = 3m - 1 - mx$ thay vào phương trình (1) của hệ ta thu

được: $x + m(3m - 1 - mx) = m + 1 \Leftrightarrow (1 - m^2)x = -3m^2 + 2m + 1$. Hệ có

nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(1 - m^2)x = -3m^2 + 2m + 1$ có nghiệm duy nhất suy ra điều kiện là: $(1 - m^2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ ta lấy phương trình (2) trừ phương trình

(1) thì thu được: $(m - 1)x - (m - 1)y = 2(m - 1) \Rightarrow x - y = 2$. Do đó:

$xy = x(x - 2) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ

khi: $x = 1 \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{m+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{m+1} = 2 \Leftrightarrow m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$. Vậy với $m = 0$

thì x, y đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 5)

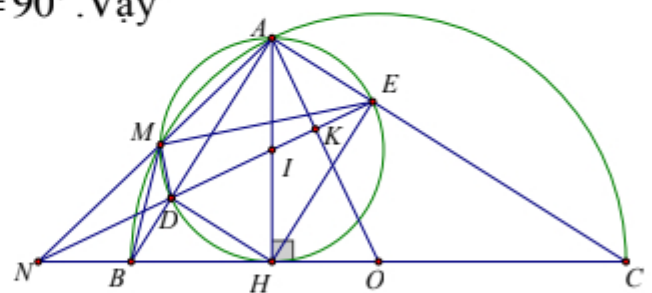
a) $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow$ Chứng minh tứ giác $ADHE$

là hình chữ nhật và $\angle ADH = 90^\circ, \angle AEH = 90^\circ$. Vậy

$\angle DAE = \angle ADH = \angle AEH = 90^\circ$ nên tứ

giác $ADHE$ là hình chữ nhật.

b). Ta có $AM \cdot AN = AE \cdot AC = (AH^2)$



$$\Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AN} \Rightarrow \Delta AME \sim \Delta CAN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AME = ACN. \text{ Áp dụng hệ}$$

thức lượng trong các tam giác vuông ta có $BD^2 = BD \cdot AB; CH^2 = CE \cdot CA$

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC = AH \cdot 2R \text{ (Vì } BC = 2R)$$

$$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH^4 = BH^2 \cdot CH^2 = BD \cdot AB \cdot CE \cdot CA = BD \cdot CE \cdot AH \cdot 2R$$

$$\Rightarrow \frac{AH^3}{BD \cdot CE} = 2R, \text{ mà } AH = DE \text{ nên } \frac{DE^3}{BD \cdot CE} = 2R.$$

Giả sử DE cắt AH tại I , cắt OA tại K ; $IAE = IEA$ (ΔIAE cân tại I),
 $OAC = OCA$ (ΔOAC cân tại O). Do đó $KAE + KEA = OCA + IAE = 90^\circ$
 $\Rightarrow OA \perp DE$. Ta có $DI \perp OA$ (1). Mặt khác $(O), (I)$ cắt nhau tại A và
 $M \Rightarrow OI$ là đường trung trực của $AM \Rightarrow OI \perp AM$. Do đó I là trực tâm
của $\Delta ANO \Rightarrow NI \perp OA$ (2). Từ (1) và (2) cho DI, NI trùng nhau. Vậy
 D, E, N thẳng hàng.

c) Đặt $BH = x (0 < x < 2R)$, $CH = 2R - x$ nên $AH = \sqrt{x(2R - x)}$

$$S_{ABH} = \frac{1}{2} AH \cdot BH = \frac{1}{2} x \sqrt{x(2R - x)} = \frac{\sqrt{3}}{2} x \sqrt{\frac{x}{3}(2R - x)} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3} + 2R - x \right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} x \left(2R - \frac{2x}{3} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x}{2} \left(R - \frac{x}{3} \right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{x}{3} + R - \frac{x}{3} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}. \text{ Dấu "="}$$

xảy ra khi và chỉ khi $BH = 0. \frac{3R}{2} \Leftrightarrow A$ là giao điểm của nửa đường tròn
 (O) với đường trung trực của OC .

Câu 6) Sử dụng lần lượt các bất đẳng thức Cauchy - Schwarz kết hợp với giả thiết của bài toán, ta được:

$$x^3 + y^3 = \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^3} + y \cdot y^2 \leq \sqrt{(x^3 + y^2)(x^3 + y^4)} \leq \sqrt{(x^3 + y^2)(x^2 + y^3)}.$$

Theo bất đẳng thức AM- GM ta cũng có:

$$\sqrt{(x^3 + y^2)(x^2 + y^3)} \leq \frac{x^2 + y^2 + x^3 + y^3}{2}, \text{ và}$$

$x^3 + x^3 + 1 \geq 3x^2$; $y^3 + y^3 + 1 \geq 3y^2$ suy ra

$$\frac{x^2 + y^2 + x^3 + y^3}{2} \leq \frac{\frac{2x^3 + 1}{3} + \frac{2y^3 + 1}{3} + x^3 + y^3}{2} = \frac{5}{6}(x^3 + y^3) + \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow x^3 + y^3 \leq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

ĐÁP ÁN ĐỀ 3.

Câu 1)

a) Ta có:

$$P = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} - a(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + b(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b} = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{a - b} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

b) Ta có: $(a-1)(b-1) + 2\sqrt{ab} = 1 \Rightarrow ab = a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

Vì $a < b$ nên $\sqrt{ab} = \sqrt{b} - \sqrt{a}$.

Vậy $P = -1$.

Câu 2)

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0.$$

Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0$, với mọi m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Theo định

lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$ ta có $Q = \frac{2m+7}{m^2+8}$. (dùng phương pháp miền giá

trị hàm số- Xem thêm phần ứng dụng trong bài toán GTLN, GTNN) ta dễ tìm được giá trị lớn nhất của Q là 1 và GTNN của Q là $-\frac{1}{8}$ đạt được khi

$m = 1$ và $m = -8$.

b)

Đề ý rằng đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $I(0;4)$ nằm trên trục tung. Ngoài ra nếu gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì $x_1.x_2 = -4 < 0$ nên hai giao điểm A, B nằm về hai phía trục tung. Giả sử $x_1 < 0 < x_2$ thì ta có:

$$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2}AH.OI + \frac{1}{2}BK.OI \text{ với } H, K \text{ lần lượt là hình chiếu}$$

vuông góc của điểm A, B trên trục Oy . Ta có

$$OI = 4, AH = |x_1| = -x_1, BK = |x_2| = x_2. \text{ Suy ra } S_{OAB} = 2(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow S_{OAB}^2 = 4(x_1 - x_2)^2 = 4[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]. \text{ Theo định lý Viet ta có:}$$

$$x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = -4. \text{ Thay vào ta có: } S_{OAB}^2 = 4(m^2 + 16) = 64 \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 3) Gọi vận tốc của xe máy là x km/h ($x > 0$). Khi đó vận tốc của ô tô

là $\frac{3x}{2}$ km/h. Theo bài ra ta có phương trình: $1,5x + 1,5 \cdot \frac{3x}{2} = 150 \Leftrightarrow x = 40$.

Do đó, vận tốc của xe máy là 40 km/h và vận tốc của ô tô là 60 km/h. Sau

khi gặp nhau, thời gian ô tô đi đến B là: $\frac{150}{60} - 1,5 = 1$ (giờ). Sau khi gặp

nhau, thời gian xe máy đi đến A là: $\frac{150}{40} - 1,5 = 2,25$ (giờ).

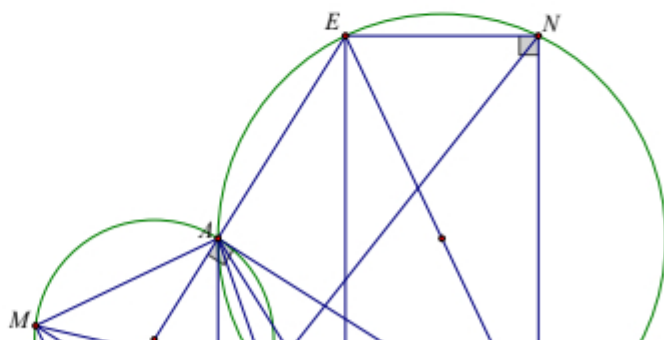
Câu 4)

a) Do đường tròn (ABH) có đường kính là AB nên $M \in (ABH)$.

Xét hai tam giác AHN và AMC có $AM = AH$;

Và có $AMC = AMP = AHP = AHN$; $ACM = ACP = ANP = ANH$ Suy ra $\triangle AHN = \triangle AMC$. Vậy $HN = MC$.

b) Do $CAE = 90^\circ$ nên CE là đường kính của đường tròn (APC) . Suy ra $EN \perp NC$.
Ta chứng minh $CN \perp BC$.



Ta có: $ACN = APN =$

$$AMH = ABH = HAC.$$

Do đó $CN \parallel AH$ hay

$$CN \perp BC.$$

c) Xét đường tròn (APC) , ta có: $AKB = APM = \frac{1}{2}$ số đo AC Xét đường

tròn (ABH) , ta có: $APM = AHM = AMH = ABH$. Suy ra $AKB = ABK$

hay tam giác ABK cân tại A . Do đó $HB = HK$.

Câu 5)

Ta có $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a+b)ab$. Tương tự ta cũng có

$$b^3 + c^3 \geq (b+c)bc \text{ và } c^3 + a^3 \geq (c+a)ca. \text{ Do đó}$$

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

$$= a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geq 2a^2\sqrt{bc} + 2b^2\sqrt{ca} + 2c^2\sqrt{ab}. \text{ Vậy}$$

$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

ĐÁP ÁN ĐỀ 4

Câu 1) Điều kiện: $x \geq 0; x \neq \frac{3}{4}$. Đặt $\sqrt{3x} = a$, ta có:

$$P = \left(\frac{2a^2 + 4}{a^3 - 8} - \frac{a}{a^2 + 2a + 4} \right) \left(\frac{1 + a^3}{1 + a} - a \right)$$

$$= \frac{2a^2 + 4 - a(a-2)}{(a-2)(a^2 + 2a + 4)} \cdot (1 - a + a^2 - a) = \frac{a^2 - 2a + 1}{a - 2}. \text{ Thay } a = \sqrt{3x}, \text{ ta có:}$$

$$P = \frac{3x - 2\sqrt{3x} + 1}{\sqrt{3x} - 2}. \text{ Ta có: } P = \frac{3x - 3}{\sqrt{3x} - 2} - 2$$

Với $x = 1$ ta có $P = -2$ (thỏa mãn).

Xét $x \neq 1$: Do $3x-3 \in \mathbb{Z}$; $3x-3 \neq 0$ và $P \in \mathbb{Z}$ nên $\sqrt{3x}-2 \in \mathbb{Z}$. Ta có:

$$P = \sqrt{3x} + \frac{1}{\sqrt{3x}-2}. \text{ Do đó } P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\sqrt{3x}-2) \text{ là ước}$$

$$1 \Leftrightarrow \sqrt{3x}-2 = \pm 1 \Leftrightarrow x=3 \text{ hoặc } x=\frac{1}{3} \text{ (loại). Vậy } x \in \{1;3\}.$$

Câu 2)

a) Đường thẳng $(d): y = kx - 2$

$$\text{Xét phương trình } \frac{-x^2}{2} = kx - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2kx - 4 = 0 \quad (1)$$

$\Delta' = k^2 + 4 > 0$ với mọi k , suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt.

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Giả sử (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Suy ra $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì $H(x_1; 0), K(x_2; 0)$

$$\text{Khi đó } IH^2 = x_1^2 + 4, IK^2 = x_2^2 + 4, KH^2 = (x_1 - x_2)^2$$

$$\text{Theo định lý Viet thì } x_1 x_2 = -4 \text{ nên } IH^2 + IK^2 = x_1^2 + x_2^2 + 8 = KH^2$$

Vậy tam giác IHK vuông tại I .

Câu 3)

$$\text{Đặt } x+y=u, xy=v \text{ (với } v \neq 0). \text{ Hệ đã cho trở thành } \begin{cases} u + \frac{u}{v} = \frac{9}{2} & (1) \\ v + \frac{1}{v} = \frac{5}{2} & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình (2) có dạng } 2v^2 - 5v + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 \\ v = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

+ Với $v = 2$ thay vào PT (1) tìm được $u = 3$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \text{ nên } x, y \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 - 3X + 2 = 0, \text{ tức là}$$

$$(x, y) = (1; 2), (2; 1).$$

+ Với $v = \frac{1}{2}$ thay vào PT (1) tìm được $u = \frac{3}{2}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ nên } x, y \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} = 0, \text{ tức là}$$

$$(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 1\right). \text{ Từ đó suy ra hệ đã cho có tất cả bốn nghiệm như trên.}$$

Câu 4)

a) $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE$.

b) $\angle OMA = 90^\circ$ (định lý đường kính, dây cung) $\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính OA (1). Ta có

$$\angle ABO = 90^\circ \text{ (tính chất tiếp tuyến)}$$

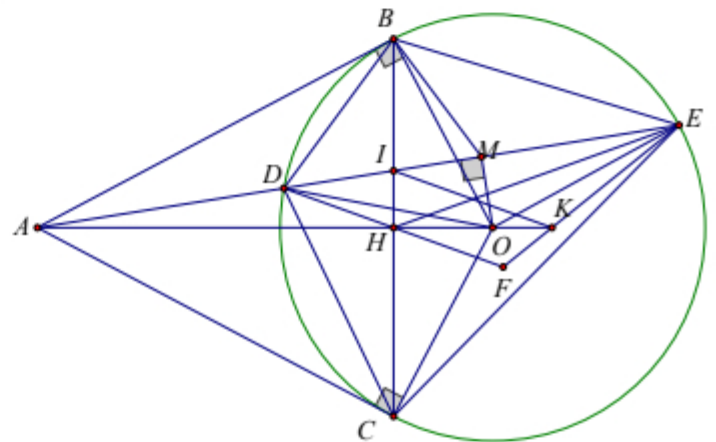
$\Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường

kính OA (2). Ta có $\angle ACO = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính OA (3). Từ (1), (2), (3) suy ra 5 điểm A, B, M, O, C cùng thuộc một đường tròn đường kính OA .

c) Mà $AB^2 = AD \cdot AE$ (cmt) $\Rightarrow AH \cdot AO = AD \cdot AE \Rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AO}$. Chứng

minh $\triangle AHD \sim \triangle AEO$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AHD = \angle AEO \Rightarrow$ Tứ giác $OHDE$ nội tiếp.

d) Ta có $\angle AHD = \angle AEO$ (cmt), $\angle OHE = \angle ODE$ (tứ giác $OHDE$ nội tiếp);
 $\angle AEO = \angle ODE$ ($\triangle OED$ cân tại O). Suy ra $\angle AHD = \angle EHO$.



Ta có $AHB + DHB = 90^\circ$ ($BC \perp OA$ tại H); $EHO + EHB = 90^\circ$ ($BC \perp OA$ tại H); $AHD = EHD$ (cmt) $\Rightarrow EHB = BHD \Rightarrow HI$ là phân giác EHD

Xét $\triangle EHD$ có HI là đường phân giác $\Rightarrow \frac{ID}{IE} = \frac{HD}{HE}$. Ta có tia HI là tia

phân giác EHD ; $HI \perp HK$ ($BC \perp OA$ tại H); $EHD = EHF$ là hai góc kề bù $\Rightarrow HK$ là tia phân giác EHF . Xét $\triangle EHF$ có HK là đường phân giác

$\Rightarrow \frac{KF}{KE} = \frac{HD}{HE}$. Ta có $\frac{ID}{IE} = \frac{HD}{HE}$ (cmt); $\frac{KF}{KE} = \frac{HF}{HE}$ (cmt); $HD = HE$ (H

là trung điểm cạnh HF) $\Rightarrow \frac{ID}{IE} = \frac{KF}{KE}$. Xét $\triangle EFD$ có $\frac{ID}{IE} = \frac{KF}{KE}$ (cmt)

$\Rightarrow IK \parallel DF$ (định lý Ta-lét đảo).

Câu 5) Do $a, b \geq \frac{1}{2} \Rightarrow a + b \geq 1 \Rightarrow \frac{a+b}{1+c} \geq \frac{a+b}{a+b+c}$. Thiết lập hai bất đẳng

thức tương tự và cộng chúng lại theo vế, ta

được: $\sum \frac{a+b}{1+c} \geq \sum \frac{a+b}{a+b+c} = 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a = b = c = \frac{1}{2}$. Tiếp theo, ta chứng minh bất đẳng thức vế bên phải. Do

$a, b \leq 1$ nên $\frac{a}{1+c} \leq \frac{a}{a+c}$; $\frac{b}{1+c} \leq \frac{b}{b+c}$ Từ đó suy ra:

$\sum \frac{a+b}{1+c} \leq \sum \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right) = 3$, với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a = b = c = 1$.

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 5

Câu 1) $P = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$

a) Điều kiện xác định : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right] : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \\
 &= \left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right] : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \\
 &= \frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}
 \end{aligned}$$

b) Ta có

$$P > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x}-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4.$$

c) Đặt $\sqrt{x}+1=t \geq 1$ thì $\sqrt{x}=t-1$. Ta có:

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{x-2(\sqrt{x}+1)+2} = \frac{t}{(t-1)^2-2t+2} = \frac{t}{t^2-4t+3} \Rightarrow \frac{1}{P} = \frac{t^2-4t+3}{t} = t-4+\frac{3}{t}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $t+\frac{3}{t} \geq 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{P} \geq 2\sqrt{3}-4$. Dấu bằng

xảy ra khi và chỉ khi $t=\frac{3}{t} \Leftrightarrow t=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}$. Vậy

GTNN của $\frac{1}{P}$ là $2\sqrt{3}-4$.

Câu 2)

a) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$x^2 = (m+5)x - m \Leftrightarrow x^2 - (m+5)x + m = 0 \quad (1). \text{ Ta có:}$$

$\Delta = (m+5)^2 - 4m = (m+3)^2 + 16 > 0, \forall m$ Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m . Vậy d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của (1). Theo định lý Viet, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 5 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$$

Ta có:

$$M^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (m + 5)^2 - 4m = (m + 3)^2 + 16 \geq 16.$$

Do $M > 0$ nên $M \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi $m = -3$. Vậy $M_{\min} = 4$.

Câu 3) Gọi vận tốc xe máy là x (km/h) Điều kiện $x > 0$.

Gọi vận tốc ô tô là y (k/h). Điều kiện $y > 0$.

Thời gian xe máy dự định đi từ A đến B là: $\frac{210}{x}$ giờ. Thời gian ô tô dự

định đi từ B đến A là: $\frac{210}{y}$ giờ. Quãng đường xe máy đi được kể từ khi gặp ô tô cho đến khi đến B là: $4x$ (km). Quãng đường ô tô đi được kể từ khi gặp xe máy cho đến khi đến A là: $\frac{9}{4}y$ (km). Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{210}{x} - \frac{210}{y} = 4 - \frac{9}{4} \\ \frac{9}{4}x + 2y = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{210}{x} - \frac{210}{y} = \frac{7}{4} \\ 4x + \frac{9}{4}y = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x + \frac{9}{4}y}{x} - \frac{4x + \frac{9}{4}y}{y} = \frac{7}{4} \\ 4x + \frac{9}{4}y = 210 \end{cases} \quad (1)$$

Từ phương trình (1) ta suy ra

$$\frac{4x + \frac{9}{4}y}{x} - \frac{4x + \frac{9}{4}y}{y} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{9y}{4x} - \frac{4x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y. \text{ Thay vào phương trình}$$

$$(2) \text{ ta thu được: } \frac{12}{4}y + \frac{9}{4}y = 210 \Leftrightarrow y = 40, x = 30.$$

Vậy vận tốc xe máy là 30 km/h. Vận tốc ô tô là 40 km/h.

Câu 4)

a) Ta có MD là đường trung bình của tam giác CBH . Suy ra $CDM = CBA = CNM$ Vậy tứ giác $CMDN$ nội tiếp.

b) Do tứ giác $CMDN$ nội tiếp nên $NDC = NMC = AMH$

Suy ra $SDN = 90^\circ - NDC = 90^\circ - AMH = BAN$.

Do SB là tiếp tuyến của (O)

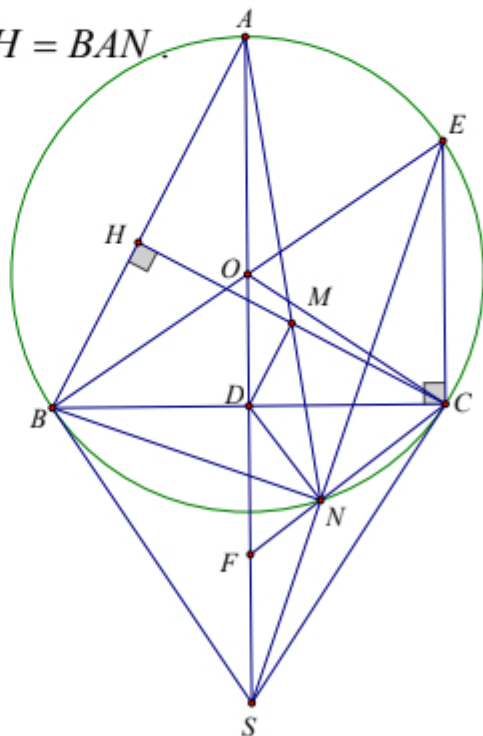
nên $BAN = SBN$. Suy ra

$SDN = SBN$. Do đó, tứ giác

$SBDN$ nội tiếp. suy ra,

$DSN = DBN = NEC$. Vậy

CE song song với SA .



c) Gọi F là giao điểm của CN với SD .

Ta có: $FSN = NEC$ (so le) $= NCS$. Suy ra

$\triangle FNS \sim \triangle FSC \Rightarrow FS^2 = FN.FC$. Xét tam giác vuông DFC có DN là đường cao. Ta có, $FD^2 = FN.FC$. Suy ra $FD^2 = FS^2$ hay F là trung điểm của SD .

Câu 5) Từ phương trình 2 của hệ ta suy ra $x, y \geq 0$. Xét phương trình:

$$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}. \text{ Ta có:}$$

$$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = (x+y)(x^2 + y^2 + 6xy) = (x+y)\left[(x+y)^2 + 4xy\right].$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $(x+y)^2 + 4xy \geq 2\sqrt{(x+y)^2 \cdot 4xy}$. Suy ra

$$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 4\sqrt{xy}(x+y)\sqrt{(x+y)^2} = 4\sqrt{xy}(x+y)^2. \text{ Ta có}$$

$$(x+y)^2 = (x^2 + y^2) + 2xy \geq 2\sqrt{(x^2 + y^2) \cdot 2xy}. \text{ Suy ra}$$

$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 8xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Thay vào phương trình (2) ta thu được:

$$\sqrt{x} - \sqrt{2x-3} = 6-2x \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2(x-3) \Leftrightarrow \frac{(x-3)}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} = 2(x-3)$$

Suy ra $x = 3$ hoặc: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x} = \frac{1}{2}$ Do $x \geq \frac{3}{2}$ nên pt này vô nghiệm. Tóm

lại: Hệ có nghiệm: $x = y = 3$.

ĐÁP ÁN ĐỀ 6

Câu 1) Giải:

Điều kiện: $x \geq -3$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2x\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x+3} + 6 = 0$ (2)

Đặt $t = x + \sqrt{x+3}$

Do đó (2) $\Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = 3$

Với $t = 1$, ta giải phương trình $x + \sqrt{x+3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 1-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+3 = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x+3 = 1-2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{array} \right] \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

Với $t = 3$, ta giải phương trình $x + \sqrt{x+3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, x = 1$.

Câu 2) Lời giải:

Đặt $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$ thì $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 2$.

Suy ra $2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2^2 - 2 = 2$

$\Rightarrow xy + yz + zx = 1$.

Do đó: $1 + a = xy + yz + zx + x^2 = (x + y)(x + z)$;

$1 + b = xy + yz + zx + y^2 = (y + z)(y + x)$;

$1 + c = xy + yz + zx + z^2 = (z + x)(z + y)$.

Vì vậy

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a}}{1+a} + \frac{\sqrt{b}}{1+b} + \frac{\sqrt{c}}{1+c} &= \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} \\ &= \frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2(xy + yz + zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}. \end{aligned}$$

Câu 3) Ta có $a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)^2$

Xét dãy $S_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, ta chứng minh b_n là một số nguyên.

Xét $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$ suy ra x_1, x_2 là hai nghiệm

của phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$.

Ta có $S_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} = (x_1^n + x_2^n)(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^{n-1} + x_2^{n-1})$ hay

$$S_{n+1} = S_n - S_{n-1}.$$

Ta có $S_1 = 1, S_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3, S_3 = S_2 - S_1 = 2$. Từ đó bằng phép

quy nạp ta dễ dàng chứng minh được S_n là số nguyên. Suy ra $a_n = (S_n)^2$ là số chính phương.

Câu 4)

a) Ta có $\angle AEF + \angle OAE =$

$$\angle ABC + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC) = 90^\circ$$

Suy ra $OA \perp EF$

b) Việc chứng minh

trực tiếp AK đi qua trung điểm của DE

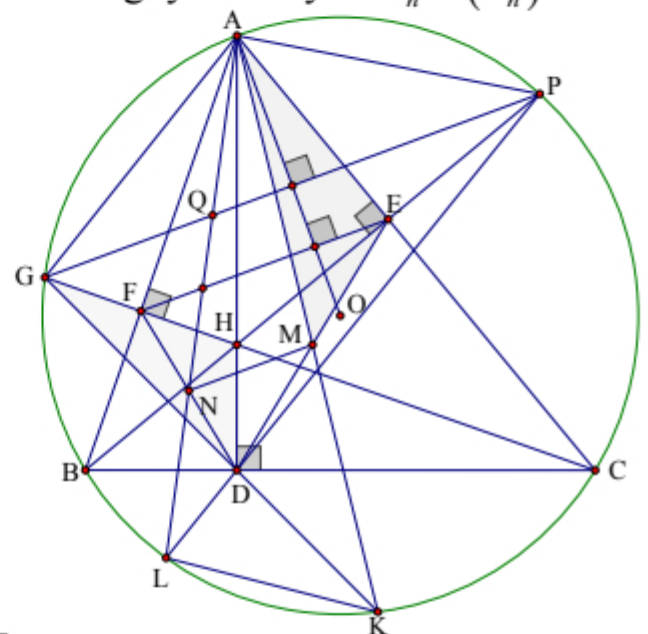
là tương đối khó. Để ý đến chi tiết CH cắt đường

tròn (O) tại điểm G ta sẽ thấy G, H đối xứng nhau qua AB , hay F là trung điểm GH . Như vậy ta cần tìm mối quan hệ giữa điểm F và điểm M thông qua các tam giác đồng dạng. Xét tam giác DFH và tam giác

DAE : Ta thấy $\angle DFH = \angle DBH = \angle DAE$, Ta cũng có

$$\angle AED = 180^\circ - \angle ABD = \angle FHD \text{ suy}$$

$$\text{ra } \triangle DFH \sim \triangle DAE \Rightarrow \frac{HF}{EA} = \frac{HD}{ED} \Leftrightarrow \frac{2HF}{EA} = \frac{2HD}{ED} \Leftrightarrow \frac{HG}{EA} = \frac{2HD}{ED} \text{ hay}$$



$$\frac{HG}{EA} = \frac{HD}{EM}. \text{ Từ đó suy ra } \Delta HGD \sim \Delta EAM \Rightarrow$$

$$EAM = HGD = CAK \Leftrightarrow AM \equiv AK.$$

c) Giả sử BH cắt đường tròn (O) tại điểm P khác B .

Tương tự câu a ta có: P đối xứng với H qua AC . Suy ra $AG = AH = AP$ do đó $GP \perp OA \perp EF$ suy ra $EF \parallel MN \parallel GP$, giả sử AL cắt GP tại Q . Ta có:

$MNA = AQP = AGQ + QAG = APG + QAG = AKG + GKL = AKL$ suy ra tứ giác $MKNL$ nội tiếp.

Câu 5) Đề ý rằng: $2xy \leq x^2 + y^2$.

Ta lại có: $1 + 2bc = a^2 + (b + c)^2 > 0$; $1 + 2ca = b^2 + (c + a)^2 > 0$;

$$1 + 2ab = c^2 + (a + b)^2 > 0$$

Nên

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} &\geq \frac{a^2}{1+b^2+c^2} + \frac{b^2}{1+c^2+a^2} + \frac{c^2}{1+a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2}{1-a^2} + \frac{b^2}{2-b^2} + \frac{c^2}{2-c^2} = -3 + 2\left(\frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2}\right). \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz ta thu được:

$$\frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2} \geq \frac{9}{6-a^2-b^2-c^2} = \frac{9}{5}. \text{ Từ đó suy ra:}$$

$$\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \geq -3 + 2 \cdot \frac{9}{5} = \frac{3}{5}. \text{ Chứng minh hoàn tất. đẳng thức}$$

xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 6) Vì mỗi số nguyên dương m lẻ không vượt quá 2015, ta xây dựng tập A_m gồm các số dạng $2^k \cdot m$, trong đó $k \in \mathbb{N}$ và $2^k \cdot m \leq 2016$. Kí hiệu

$A_m = \{2^k \cdot m \mid k \in \mathbb{N}, 2^k \cdot m \leq 2016\}$. Với cách xây dựng trên, khi $m \geq 1009$ thì A_m chỉ có một phần tử là m . Vì có đúng 1008 số lẻ không vượt quá 2016 nên có đúng 1008 tập A_m . Nhận thấy rằng với n nguyên dương bất kỳ, $1 \leq n \leq 2016$, ta luôn viết được $n = 2^k \cdot m$ với m là số nguyên lẻ, điều này cho thấy mỗi số nguyên từ 1 đến 2016 đều thuộc vào ít nhất một trong 1008 tập A_m . Nhưng tập M có đúng 1009 phần tử, do đó chắc chắn có hai phần tử của M giả sử là $a, b (a < b)$ cùng thuộc một tập A_m nào đó. Khi đó $a = 2^p \cdot m$ và $b = 2^q \cdot m$ với $p < q$, suy ra $\frac{b}{a} = 2^{q-p}$ hay b là bội của a .

ĐỀ SỐ 7

Câu 1) Viết lại phương trình đã cho thành:

$(x^2 + 2x + 1)^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 17} = 4$. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x + 17} \geq 4$. Ta có $x^2 + 2x + 1 = t^2 - 16$ và phương trình đã cho được viết thành: $(t^2 - 16)^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t - 4)[(t - 4)(t + 4)^2 + 1] = 0$. Phương trình $t - 4 = 0$ có nghiệm $t = 4$ hay $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Phương trình $(t - 4)(t + 4)^2 + 1 = 0$ vô nghiệm do $t \geq 4$. Vậy phương trình có một nghiệm $x = -1$.

Câu 2) Ta có $6^{2015} = (5 + 1)^{2015} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 6^{2015} = 5k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}^+$. Suy ra $A = 26^{5m+1} = 26 \cdot (26^5)^m$. Mặt khác để ý rằng:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5. \text{ Nếu}$$

$$a \vdots 25 \Rightarrow (a + b)^5 \equiv b^5 \pmod{125} \text{ suy ra}$$

$$26^5 \equiv 1 \pmod{125} \Rightarrow A \equiv 26 \pmod{125} \Rightarrow A = 125m + 26. \text{ Để thấy } A \vdots 8 \text{ suy ra}$$

$$125m + 26 \vdots 8 \Rightarrow m \text{ chẵn}$$

$$\Rightarrow m = 2r \Rightarrow A = 250r + 26 = 248r + 24 + 2(r + 1) \Rightarrow r \text{ chia cho 4 dư}$$

$3 \Rightarrow r = 4p + 3$. Hay $A = 250(4p + 3) + 26 = 1000p + 776$. Vậy 3 chữ số tận cùng của A là 776

Câu 3)

a) Ta viết lại phương trình thành: $(x - y)^3 + 3xy(x - y) = xy + 8$

Đặt $\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases} (a, b \in \mathbb{Z})$. Ta có $a^3 + 3ab = b + 8 \Leftrightarrow a^3 - 8 = -b(3a - 1)$

$$\Leftrightarrow a^3 - 8 : (3a - 1) \Leftrightarrow 27(a^3 - 8) : 3a - 1 \Leftrightarrow (27a^3 - 1) - 215 : 3a - 1$$

$$\Leftrightarrow 215 : 3a - 1. \text{ Mặt khác ta có } 215 = 5 \cdot 43 \text{ suy ra } 3a - 1 = \pm 1; \pm 5; \pm 43; \pm 215.$$

Cuối cùng ta thay các trường hợp để tìm $a, b \Rightarrow x = 2; y = 0$ hoặc $x = 0; y = -2$.

b) Ta có $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^3} = 2 + \sqrt{3}$. Do đó

$$\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1. \text{ Đặt } a = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$$

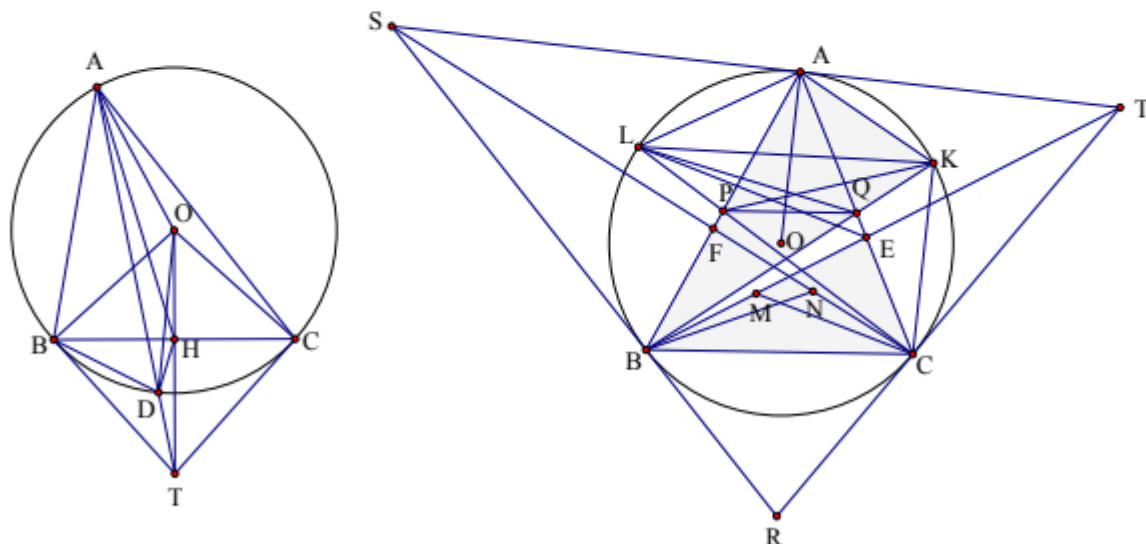
thì ta có:

$$a^3 = 18 + 3a \Leftrightarrow a^3 - 3a - 18 = 0 \Leftrightarrow a^3 - 27 - 3a + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 3)(a^2 + 3a + 6) = 0 \Leftrightarrow a = 3 \text{ (vì } a^2 + 3a + 6 > 0). \text{ Vậy}$$

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3. \text{ Suy ra } x = \frac{1}{3}. \text{ Khi đó } P = (3x^3 - x^2 - 1)^{2016} = 1.$$

Câu 4) Phân tích định hướng giải:



Ta dễ chứng minh được tính chất sau: Tam giác ABC nội tiếp (O) , các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại T , AT cắt (O) tại D , OT cắt BC tại H . Khi đó $AHC = ABD$ và $BAT = HAC$. (Xem thêm phần tính chất cát tuyến, tiếp tuyến)

Trở lại bài toán:

+ Áp dụng kết quả bài toán ta có: $\triangle ABK \sim \triangle EBC$.

+ Từ kết quả $\triangle ABK \sim \triangle EBC$ chú ý rằng: KP, CM lần lượt là trung tuyến của các tam giác $\triangle ABK, \triangle EBC$ nên suy ra $BCM = BKP$ (1), tương tự $CBN = CLQ$ (2).

+ Ta có $PLK = QBC = PQB$ (do $KLBC$ nội tiếp và $PQ \parallel BC$). Từ đó suy ra tứ giác $PQKL$ nội tiếp nên ta có: $BKP = CLQ$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có: $BCM = CBN$.

Câu 5)

a) Ta có: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 + n^3 \leq (2n-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n^2$

$$\Leftrightarrow [x_1^2 - (2n-1)x_1 + n^2 - n] + [x_2^2 - (2n-1)x_2 + n^2 - n] + \dots + [x_n^2 - (2n-1)x_n + n^2 - n]$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - n)(x_1 - n + 1) + (x_2 - n)(x_2 - n + 1) + \dots + (x_n - n)(x_n - n + 1) \leq 0$$

Mặt khác $(x_k - n)[x_k - (n-1)]$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên không âm, do đó $x_k = n$ hoặc $x_k = n-1$. Do $n \geq 2$ nên x_k là số nguyên dương.

b) Vì $x_k \in \{n; n-1\}$ nên $n(n-1) \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n^2$

Do đó $n^2 < 1 + n^2 \leq 1 + n + x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n^2 + n + 1 < (n+1)^2$

Suy ra $x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1 + n$ nằm giữa hai số chính phương liên tiếp nên không là số chính phương.

ĐỀ SỐ 8

Câu 1)

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned} x+9 &= x + \frac{8}{x+1} + \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{9x+1}{x+1} - \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{8x}{x+1} - \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} + 1 &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} - 1 \right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} &= 1 \Leftrightarrow 8x = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Câu 2) Ta có: $x^3 + 2y^2 - 6y + 11 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -3(y-1)^2 - 8 \leq -8 \Rightarrow x \leq -2$

$$(1). \quad x^2 + y^2(x^2 - 3) - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2(y^2 + 1) = 3(y^2 + 1) + 2y$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 + \frac{2y}{y^2 + 1} \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra } x = -2, \text{ khi đó}$$

$$y = 1. \text{ Do đó } x^3 + y^2 = -7.$$

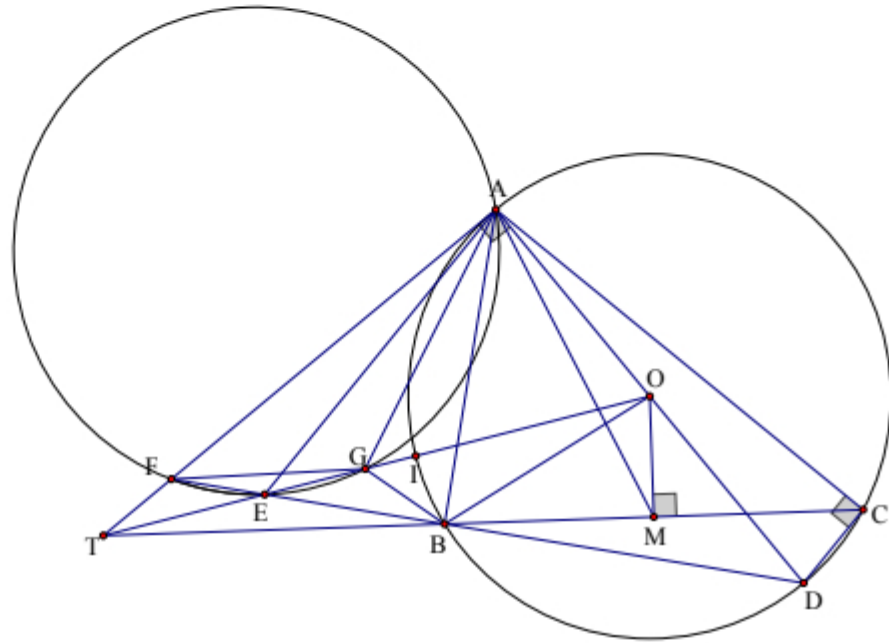
Câu 3) Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$2^{2012} + 2^{2015} + 2^n = k^2 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^{2012} + 2^n = k^2 \Leftrightarrow (k + 3 \cdot 2^{1006})(k - 3 \cdot 2^{1006}) = 2^n.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} k + 3 \cdot 2^{1006} = 2^a \\ k - 3 \cdot 2^{1006} = 2^b \\ a, b \in \mathbb{N}, a + b = n \end{cases} \Rightarrow 2^a - 2^b = 3 \cdot 2^{1007} \text{ hay } 2^{b-1}(2^{a-b} - 1) = 3 \cdot 2^{1006}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} b-1=1006 \\ 2^{a-b}-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1007 \\ a=1009 \end{cases} \Rightarrow n=2016.$$

Câu 4)



a). Ta có : Tứ giác $AOMT$ nội tiếp nên : $\angle AOT = \angle AMT$ suy ra

$\angle EOD = \angle AMC$ (cùng bù với 2 góc bằng nhau) .

b). Ta thấy rằng: $\triangle AMC \sim \triangle EOD$ (g. g) suy ra $\frac{AC}{ED} = \frac{MC}{OD} = \frac{2MC}{2OD} = \frac{BC}{AD}$

suy ra $\triangle EAD \sim \triangle ABC$ nên $\angle EAD = \angle ABC$, tam giác ABC nhọn suy ra O nằm trong tam giác suy ra $\angle ABC = \angle ADC$ (cùng chắn cung AC). Từ đó suy ra $\angle EAD = \angle ADC$ suy ra $AE \parallel CD$ và suy ra $AE \perp AC$.

c). Từ chứng minh trên ta có: $FAE = TAC - 90^\circ = DAC$. Suy ra $FGT = FAE = DAC = DBC = FBT$ hay tứ giác $FGBT$ nội tiếp nên $TGB = TFB = EGA$ suy ra GO là phân giác của góc AGB . Gọi I là giao điểm của GO với (O) . Ta có $OA = OB$ nên $AGBO$ nội tiếp. Mặt khác $OA = OB = OI$ nên I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABG .

Chú ý: Trong phần chứng minh ta đã sử dụng bổ đề sau: “Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , ngoại tiếp (I) . Đường thẳng AI cắt (O) tại D thì $DI = DB = DC$ ” Phần chứng minh dành cho các em học sinh.

Câu 5) Nhận xét rằng trong tập hợp X có 34 phần tử, các phần tử đều có dạng $3n+1$ với $n = 0, 1, 2, \dots, 33$. Trước hết, ta tìm các cặp hai phần tử phân biệt trong X là $3n+1, 3m+1$ sao cho $3n+1+3m+1=104 \Leftrightarrow m+n=34$

Với $n=0$ thì $m=34 > 33$. Với $n=17$ thì $m=17$ suy ra hai phần tử bằng nhau.

Loại trừ hai phần tử trên, 32 phần tử còn lại cho ta 16 cặp hai phần tử phân biệt $3n+1, 3m+1$ thỏa mãn $n+m=34$ đó là

$$(4;100), (7;97), (10;94), \dots, (49;55) (*)$$

Nếu ta lấy ra 19 số bất kỳ từ tập X thì có thể xảy ra một trường hợp “xấu” nhất là 16 số mà mỗi số thuộc vào 16 cặp ở $(*)$ và thỏa mãn $n+m=34$. Vì tập con A có 19 phần tử nên nó thỏa mãn bài toán (đpcm).

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 9.

Câu 1) Ta có

$$x\sqrt{1-2y^2} \leq \frac{x^2+1-2y^2}{2}; y = \sqrt{4-6z^2} = \sqrt{2}y\sqrt{2-3z^2} \leq \frac{2y^2+2-3z^2}{2};$$

$$z\sqrt{15-3x^2} = \sqrt{3}z\sqrt{5-x^2} \leq \frac{3z^2+5-x^2}{2}. \text{ Suy ra}$$

$$4 = x\sqrt{1-2y^2} + y\sqrt{4-6z^2} + z\sqrt{15-3x^2} \leq \frac{x^2+1-2y^2}{2} + \frac{2y^2+2-3z^2}{2} + \frac{3z^2+5-x^2}{2} = 4. \text{ Điều này tương đương với}$$

$$\text{hệ: } \begin{cases} \sqrt{1-2y^2} = x \\ \sqrt{2-3z^2} = \sqrt{2}y \\ \sqrt{5-x^2} = \sqrt{3}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2y^2 = x^2 \\ 2-3z^2 = 2y^2 \\ 5-x^2 = 3z^2 \end{cases} . \text{ Cộng theo vế ba đẳng thức trên ta}$$

được $P = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.

Câu 2) Trước hết ta có nhận xét: Với mọi số nguyên $n > 1$ thì

$$\frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} . \text{ Áp dụng vào bài toán ta có:}$$

$$1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2016^2}+\sqrt{2016^2+1}}\right) < A \text{ và}$$

$$1+2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2016^2-1}+\sqrt{2016^2}}\right) > A . \text{ Mặt khác ta}$$

cũng có: $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ từ đó suy ra

$$1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2014^2}+\sqrt{2016^2+1}}\right) = 1+2\left(\sqrt{2016^2+1} - \sqrt{2}\right)$$

và

$$1+2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2016^2-1}+\sqrt{2016^2}}\right) = 1+2\left(\sqrt{2016^2} - 1\right) .$$

Do đó $1+2\left(\sqrt{2016^2+1} - \sqrt{2}\right) < A < 1+2\left(\sqrt{2016^2} - 1\right) \Leftrightarrow 4030 < A < 4031$

vậy $[A] = 4030$.

Câu 3)

a) Từ phương trình (2) ta có:

$$7x^3 + 3xy(3x+y) = 1+3(x+y)(x+y+1)$$

$$\text{Hay } 7x^3 + 3xy(4x+2y-x-y) = 1+3(x+y)(x+y+1)$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + y^3 + 6xy(2x+y) = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + 3(x+y+1)(x+y).1+1$$

$\Leftrightarrow (2x+y)^3 = (x+y+1)^3 \Rightarrow 2x+y = x+y+1 \Rightarrow x=1$. Thay vào phương trình đầu tìm được nghiệm của hệ là: $(x; y) = (1; 1), (1; -4)$.

b) Giả sử $(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = dx \\ b = dy \\ (x, y) = 1 \end{cases}$.

Theo giả thiết ta có: $\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{xy(x+y)d}{x^2+xy+y^2} \in \mathbb{Z}$. Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được:

$(x^2+xy+y^2, x) = 1; (x^2+xy+y^2, y) = 1; (x^2+xy+y^2, x+y) = 1; (y^2, x) = 1$
suy ra

$d: x^2+xy+y^2 \Rightarrow d \geq x^2+xy+y^2 \Rightarrow |a-b|^3 = d^3 |x-y|^3 \geq d^3$
 $\geq d^2 (x^2+xy+y^2) > d^2 \cdot xy = ab$ hay $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

Câu 4) Phân tích định hướng giải.

a). Từ giả thiết

$$\frac{PC}{PA} = \frac{QC}{QP} \Rightarrow \frac{PC}{PA+PC} = \frac{QC}{QP+QC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{PC}{AC} = \frac{QC}{PC} \Leftrightarrow PC^2 = CA \cdot CQ.$$

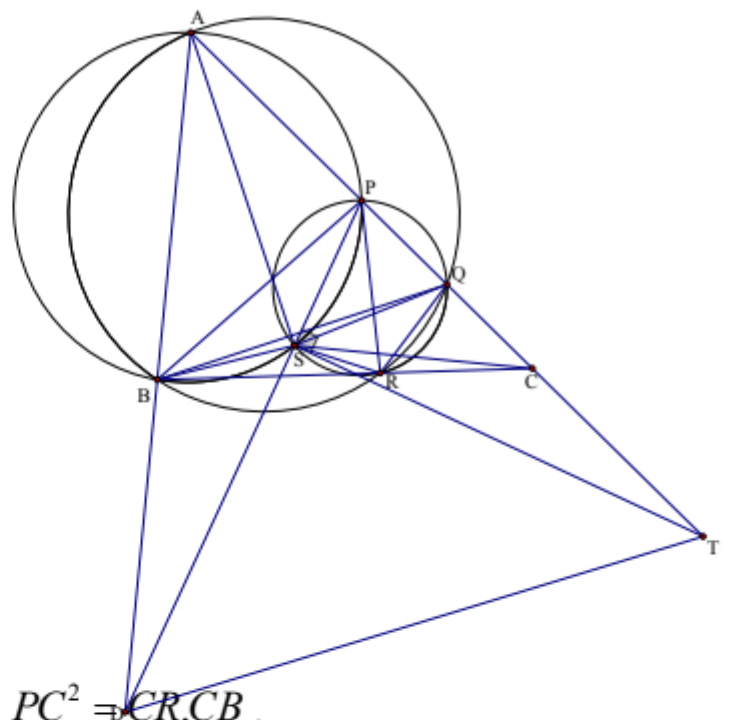
Mặt khác do tứ giác $AQRB$ nội

tiếp nên $CACQ = CR \cdot CB$. Từ đó suy ra $PC^2 = CR \cdot CB$.

Hay PC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBR .

b). Từ chứng minh trên ta suy ra $APB = PRB$, Ta có

$ABP = 180^\circ - BAP - APB = BRQ - BRP = PRQ$ $ASP = ABP = PRQ = PSQ$
nên SP là phân giác trong của góc ASQ . Dựng đường thẳng qua SP cắt



AC tại T thì ST là phân giác ngoài góc ASQ . Ta có

$$\frac{TQ}{TA} = \frac{PQ}{PA} = \frac{CQ}{CP} = \frac{PQ+CQ}{PA+CP} = \frac{CP}{AC} = \frac{TQ-CQ}{TA-CP} = \frac{TC}{CT+AP} \text{ suy ra}$$

$$CP(CT+AP) = CT.AC = CT(AP+PC) \Rightarrow CP.AP = CT.AC \Leftrightarrow CP = CT$$

hay C là trung điểm của PT . Vậy tam giác CSP cân tại C .

c). Ta có $CS^2 = CP^2 = CQ.CA = CR.CB$ suy ra

$$SRC = BSC = BSD + DSC = BAP + APS = 180^\circ - BDS. \text{ Hay}$$

$BDS = 180^\circ - SRC = SRB$. Vậy tứ giác $BSRD$ nội tiếp. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 6) Với $k \in \mathbb{N}^*$, ta có $(n+k)(n-k-1) = n^2 + n - k^2 + k \leq n(n+1)$

$$\text{Lấy tích từ } k=1 \text{ đến } m \text{ ta được } \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \leq (n+1)^m . n^m \quad (1)$$

Ta có $n+k \geq 2k$, với mọi $k=1,2,\dots,m$. Lấy tích từ $k=1$ đến m , ta được

$$\frac{(n+m)!}{n!} \geq 2^m . m!$$

$$\text{Mặt khác vì } n \geq m \geq 1 \text{ nên } n! \geq (n-m)! \text{ suy ra } \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \geq \frac{(n+m)!}{n!}.$$

$$\text{Do đó } \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \geq 2^m . m! \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

ĐỀ SỐ 10

Câu 1) Đặt $y = x-5, z = \sqrt{45-2x}$ ta có $y \geq 0, z \geq 0$.

$$\text{Từ phương trình đã cho ta có hệ phương trình: } \begin{cases} y^2 = 35-2z \\ z^2 = 35-2y \end{cases} \quad (*)$$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được

$$y^2 - z^2 = 2y - 2z \Leftrightarrow (y - z)(y + z - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 2 \\ y = z \end{cases}$$

Với $y = z$ thay vào phương trình đầu của hệ (*) ta được:

$$y^2 + 2y = 35 \Leftrightarrow (y + 1)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -7 \end{cases}$$

Vì $y \geq 0$ nên $y = 5$ suy ra $x = 10$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Với $y + z = 2 \Leftrightarrow z = 2 - y$, thay vào phương trình đầu của hệ (*) ta được

$$y^2 = 35 - 4 + 2y \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 32 \Leftrightarrow y = 1 \pm 4\sqrt{2}$$

Vì $y \geq 0$ nên $y = 1 + 4\sqrt{2}$ suy ra $z = 1 - 4\sqrt{2} < 0$. Do đó hệ (*) vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm $x = 10$.

Câu 2) Để ý ta thấy: $A = 2^{2^{2n+1}} + 3 = 2^{2 \cdot 4^n} + 3$ ta có $4^n = 3k + 1$ nên suy ra:

$$A = 2^{2^{2n+1}} + 3 = 2^{2 \cdot 4^n} + 3 = 2^{2(3k+1)} + 3 = 4 \cdot 64^k + 3 \text{ do}$$

$$64^k = (63 + 1)^k \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow A \equiv 0 \pmod{7}. \text{ Mặt khác ta có:}$$

$$A = 2^{2 \cdot 4^n} + 3 > 2^8 + 3 > 7. \text{ Suy ra } A = 2^{2^{2n+1}} + 3 \text{ là hợp số.}$$

Câu 3)

Vì $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in A$ nên theo tính chất c) ta có: $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \in A \Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{6} \in A$.

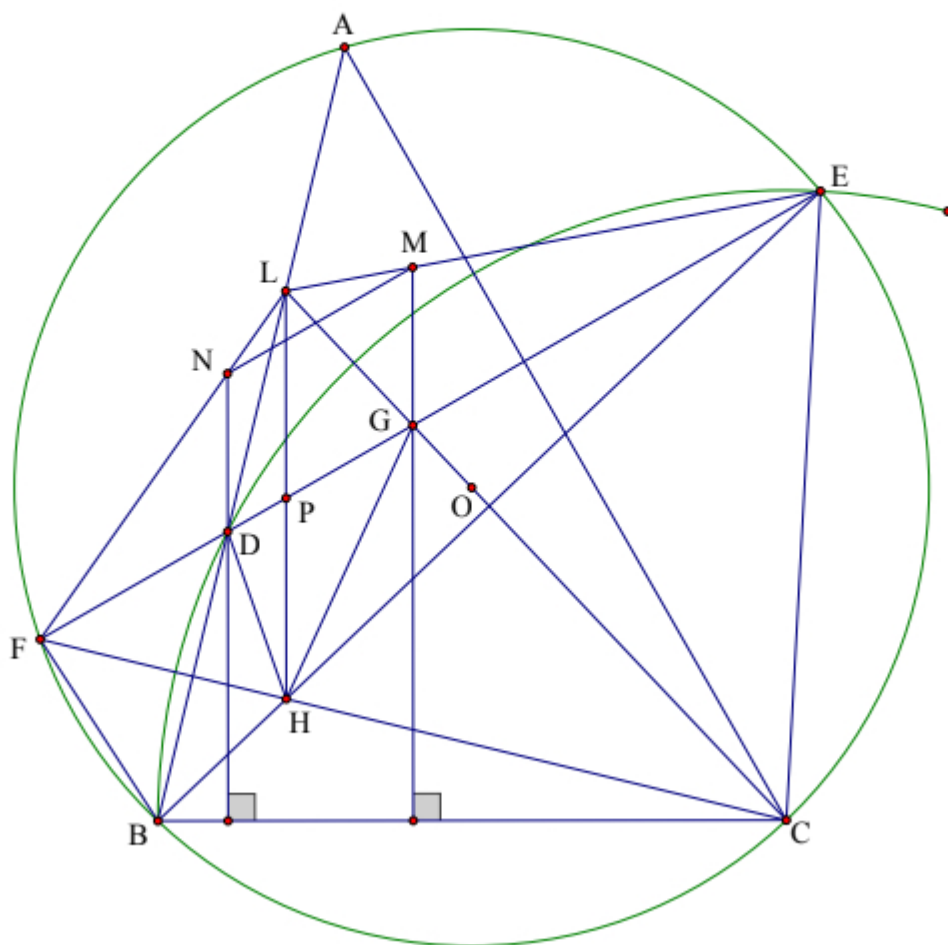
Mặt khác theo tính chất a) có $(-5) \in A$ nên $(-5) + 5 + 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} \in A$

Khi đó $2\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \in A \Rightarrow -6\sqrt{2} - 4\sqrt{3} \in A$

Ta có $5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} \in A$, suy ra $(-6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}) + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \in A$

Do đó $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \in A$ (đpcm).

Câu 4)



a). Ta có $FCB = FEB = \frac{1}{2}BCD$ suy ra CF là phân giác của góc BCD và $CF \perp BD$. Nên $HCD = HCB = HED$ nên tứ giác $CHDE$ nội tiếp

b). Vì tứ giác $CHDE$ nội tiếp nên $HEB = HDC = HBC$ và (O) và (C) cắt nhau theo dây cung BE nên suy ra B, E đối xứng qua OC suy ra $BDC = CBD = LEC$ suy ra tứ giác $CELD$ nội tiếp nên 5 điểm C, E, L, D, H cùng nằm trên một đường tròn (x) . Ta có: $HLG = HEC = CBE = CFE$ suy ra $HGLF$ nội tiếp đường tròn (y) .

c). Ta thấy điểm H là trực tâm của tam giác BCL và LH là trục đẳng phương của hai đường tròn $(x), (y)$ nên LH cắt EF tại P thì

$PG.PF = PD.PE$ suy ra $\frac{PG}{PE} = \frac{PD}{PF}$. Mặt khác $GM // DN // PL$ nên

$\frac{LM}{LE} = \frac{PG}{PE} = \frac{PD}{PF} = \frac{LN}{LF}$ suy ra $MN // EF$ nên tứ giác $GMND$ là hình bình

hành. Từ đó suy ra $DN = MG$.

Câu 5) Ta có

$$[(a-1)(b-1)(c-1)]^2 = [(a-1)(b-1)][(b-1)(c-1)][(c-1)(a-1)] \geq 0$$

Suy ra trong ba số $a-1, b-1, c-1$ luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử $(b-1)(c-1) \geq 0$, suy ra $b+c \leq 1+bc$.

Do đó $abc+2 = bc+a(b+c) \leq bc+a(bc+1)$ hay $a+bc \geq 2$. Sử dụng BĐT

Cauchy $b^2+c^2 \geq 2bc$ và $a+bc \geq 2$, ta có:

$$a^2+b^2+c^2+abc-4 \geq a^2+2bc+abc-4 = (a+2)(a+bc-2) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

HẾT

