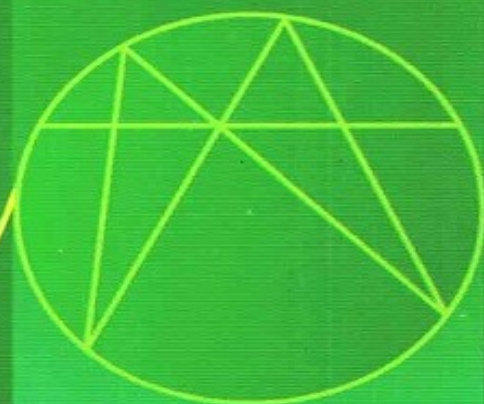


V Û H Û U B Ì N H

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN

9

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN

TOÁN 9

TẬP HAI

(Tái bản lần thứ bảy)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chương III

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§12. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng $ax + by = c$, trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$), x và y là các ẩn.

Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một đường thẳng :

– Khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$ ta có $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, đường thẳng cắt cả hai trục tọa độ, đó là đồ thị của hàm số bậc nhất.

– Khi $a = 0$ và $b \neq 0$, ta có $y = \frac{c}{b}$, đường thẳng vuông góc với trục tung, đó là đồ thị của hàm hằng.

– Khi $b = 0$ và $a \neq 0$, ta có $x = \frac{c}{a}$, đường thẳng vuông góc với trục hoành.

Ví dụ Olympic Cho đường thẳng :

$$(m - 2)x + (m - 1)y = 1 \quad (m \text{ là tham số}). \quad (1)$$

a) Chứng minh rằng đường thẳng (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (1) là lớn nhất.

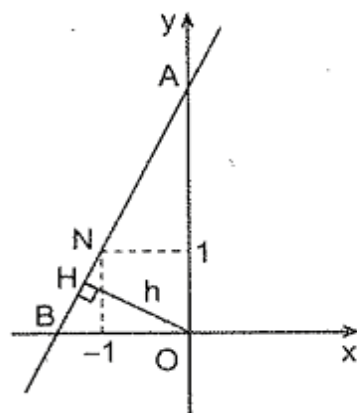
Giải : a) Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(m - 2)x + (m - 1)y = 1$ đi qua điểm cố định $N(x_0, y_0)$ với mọi m là :

$$(m-2)x_0 + (m-1)y_0 = 1 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow mx_0 - 2x_0 + my_0 - y_0 - 1 = 0 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + y_0)m - (2x_0 + y_0 + 1) = 0 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 = 0 \\ 2x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$



Hình 1

Vậy các đường thẳng (1) luôn đi qua điểm cố định $N(-1; 1)$.

b) Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng (1)

Nếu $m = 2$ thì $y = 1$, ta có $h = 1$. (2)

Nếu $m = 1$ thì $x = -1$, ta có $h = 1$. (3)

Xét $m \neq 1, m \neq 2$ (h.1) Gọi A là giao điểm của đường thẳng (1) với trục tung. Với $x = 0$ thì $y = \frac{1}{m-1}$, do đó $OA = \frac{1}{|m-1|}$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng (1) với trục hoành. Với $y = 0$ thì $x = \frac{1}{m-2}$ do đó $OB = \frac{1}{|m-2|}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{h^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = (m-1)^2 + (m-2)^2 = 2m^2 - 6m + 5 \\ &= 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } h^2 \leq 2. \quad (4) \end{aligned}$$

Từ (2), (3), (4) suy ra $\max h = \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $m = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 67. Tìm các điểm thuộc đường thẳng $3x - 5y = 8$ có tọa độ là các số nguyên và nằm trên dải song song tạo bởi hai đường thẳng $y = 10$ và $y = 20$ (phần tô màu xám trên hình 2).

Giải : Cần tìm các số nguyên x, y thỏa mãn cả hai điều kiện

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 & (1) \\ 10 \leq y \leq 20 & (2) \end{cases}$$

Trước hết ta giải phương trình (1) với nghiệm nguyên.

Cách 1. Rút x từ (1) ta được

$$x = \frac{5y + 8}{3} = 2y + 3 - \frac{y + 1}{3}.$$

(1) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \frac{y + 1}{3} = k$ (k nguyên)

$$\Leftrightarrow y = 3k - 1, x = 2(3k - 1) + 3 - k = 5k + 1.$$

Nghiệm nguyên của (1) là $(5k + 1; 3k - 1)$ với k nguyên.

Thay biểu thức của x vào (2) được

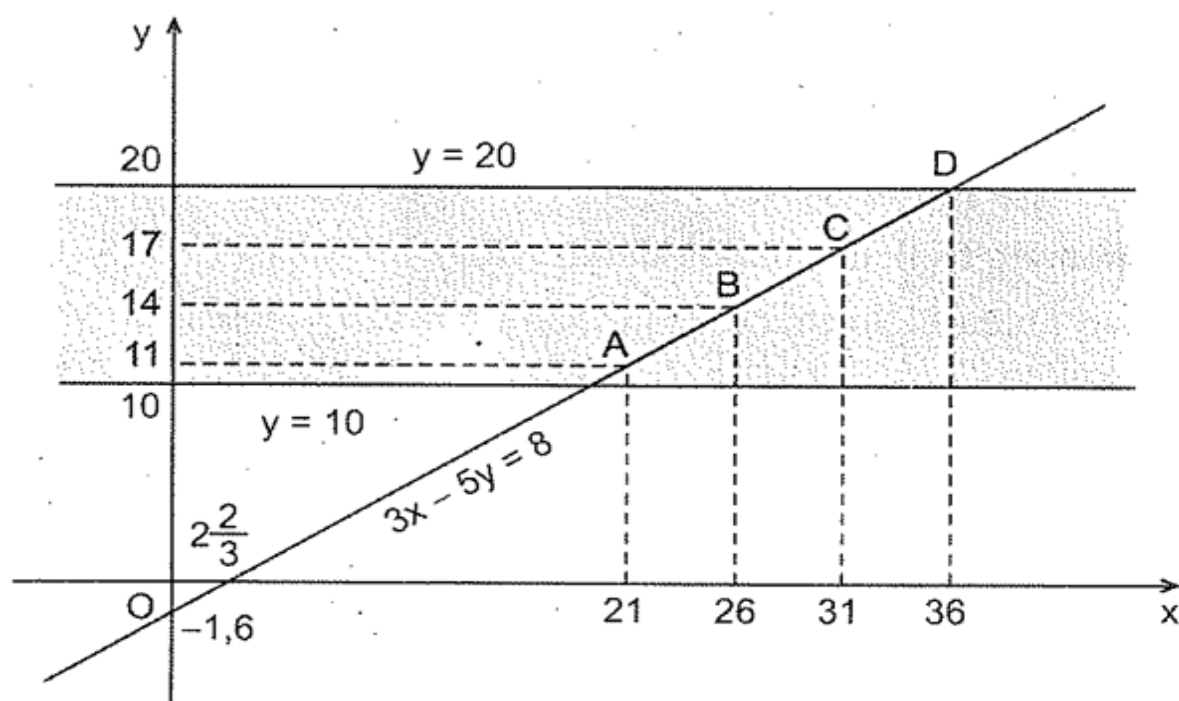
$$10 \leq 3k - 1 \leq 20 \Leftrightarrow 11 \leq 3k \leq 21 \Leftrightarrow k \in \{4; 5; 6; 7\}.$$

k	4	5	6	7
$x = 5k + 1$	21	26	31	36
$y = 3k - 1$	11	14	17	20

Có bốn điểm thoả mãn đề bài là A(21 ; 11), B(26 ; 14), C(31 ; 17), D(36 ; 20) trên hình 2.

Cách 2. $5y + 8 = 3x$ chia hết cho 3 $\Rightarrow (6y + 9) - (y + 1) : 3 \Rightarrow y + 1 : 3$
 $\Rightarrow y = 3k - 1$ với k nguyên.

Do đó $x = 5k + 1$. Sau đó giải tiếp như cách 1.



Hình 2

Bài tập

198. Xét các đường thẳng d có phương trình :

$$(2m + 3)x + (m + 5)y + (4m - 1) = 0 \text{ (m là tham số).}$$

a) Vẽ đường thẳng d ứng với $m = -1$.

b) Tìm điểm cố định mà mọi đường thẳng d đều đi qua.

199. Tìm các giá trị của b và c để các đường thẳng

$$4x + by + c = 0 \text{ và } cx - 3y + 9 = 0 \text{ trùng nhau.}$$

200. Vẽ đồ thị biểu diễn tập nghiệm của phương trình $x^2 - 2xy + y^2 = 1$.

201. Đường thẳng $ax + by = 6$ (với $a > 0$, $b > 0$) tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 9. Tìm tích ab .

202. Cho đường thẳng

$$(m + 2)x - my = -1 \text{ (m là tham số).} \quad (1)$$

a) Tìm điểm cố định mà đường thẳng (1) luôn đi qua.

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (1) là lớn nhất.

203*. Trong hệ trục toạ độ Oxy, lấy các điểm A và B sao cho $A(1; 1)$, $B(9; 1)$. Viết phương trình của đường thẳng d vuông góc với AB và chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau.

204. Tìm các điểm nằm trên đường thẳng $8x + 9y = -79$, có hoành độ và tung độ là các số nguyên và nằm bên trong góc vuông phần tư III.

205. Cho hai điểm A và B có toạ độ $A(3; 17)$, $B(33; 193)$.

a) Viết phương trình của đường thẳng AB .

b) Có bao nhiêu điểm thuộc đoạn thẳng AB và có hoành độ và tung độ là các số nguyên ?

206. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.

b)* Có bao nhiêu điểm nằm trên cạnh hoặc nằm trong tam giác tạo bởi ba đường thẳng $x = 6$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ và có hoành độ và tung độ là các số nguyên ?

§13. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

trong đó $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ là những phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 68. Cho hệ phương trình với tham số a :

$$\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 & (1) \\ x + (a-1)y = 2 & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $a = 2$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình.

c) Tìm các giá trị nguyên của a để hệ phương trình có nghiệm nguyên.

d) Tìm các giá trị nguyên của a để nghiệm của hệ phương trình thoả mãn điều kiện $x + y$ nhỏ nhất.

Giải : a) $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{3}{4}$. Bạn đọc tự giải.

b) Rút y từ (1) : $y = (a+1)x - (a+1)$. Thay vào (2) được

$$x + (a^2 - 1)x - (a^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow a^2x = a^2 + 1. \quad (3)$$

Nếu $a \neq 0$ thì $x = \frac{a^2 + 1}{a^2}$. Khi đó $y = \frac{a+1}{a^2}$.

Hệ có một nghiệm duy nhất $\left(\frac{a^2 + 1}{a^2}; \frac{a+1}{a^2} \right)$.

Nếu $a = 0$ thì (3) là $0x = 1$, vô nghiệm. Hệ đã cho vô nghiệm.

c) **Điều kiện cần.** Ta phải có $a^2 + 1 : a^2 \Rightarrow 1 : a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$.

Điều kiện đủ. Với $a = 1$ thì $x = 2$, $y = 2$.

Với $a = -1$ thì $x = 2$, $y = 0$.

Vậy các trị nguyên của a phải tìm là 1 và -1.

d) Ta có $x + y = \frac{a^2 + a + 2}{a^2} = 1 + \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2}$ (với $a \neq 0$).

Đặt $\frac{1}{a} = z$, ta có

$$x + y = 1 + z + 2z^2 = 2\left(z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{16}\right) + \frac{7}{8} = 2\left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}.$$

Vậy $\min(x + y) = \frac{7}{8}$ khi và chỉ khi $z = -\frac{1}{4}$, tức là $a = -4$.

Ví dụ 69. Tìm các số nguyên a, b, c thoả mãn cả hai phương trình

$$2a + 3b = 6 \text{ và } 3a + 4c = 1.$$

Giải : Để khử a , ta biến đổi các phương trình đã cho thành $6a + 9b = 18$ và $6a + 8c = 2$. Suy ra $9b - 8c = 16$. Do đó $c = \frac{9b - 16}{8} = b - 2 + \frac{b}{8}$.

b và c là các số nguyên khi và chỉ khi $\frac{b}{8}$ là số nguyên.

Đặt $b = 8k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $c = 8k - 2 + k = 9k - 2$.

Thay vào $3a + 4c = 1$ được $3a = 1 - 4(9k - 2) = -36k + 9$, do đó $a = -12k + 3$.

Các số nguyên a, b, c phải tìm có dạng : $a = -12k + 3, b = 8k, c = 9k - 2$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 70*. Cho các đường thẳng :

$$2x - 3y = 4, \quad (d)$$

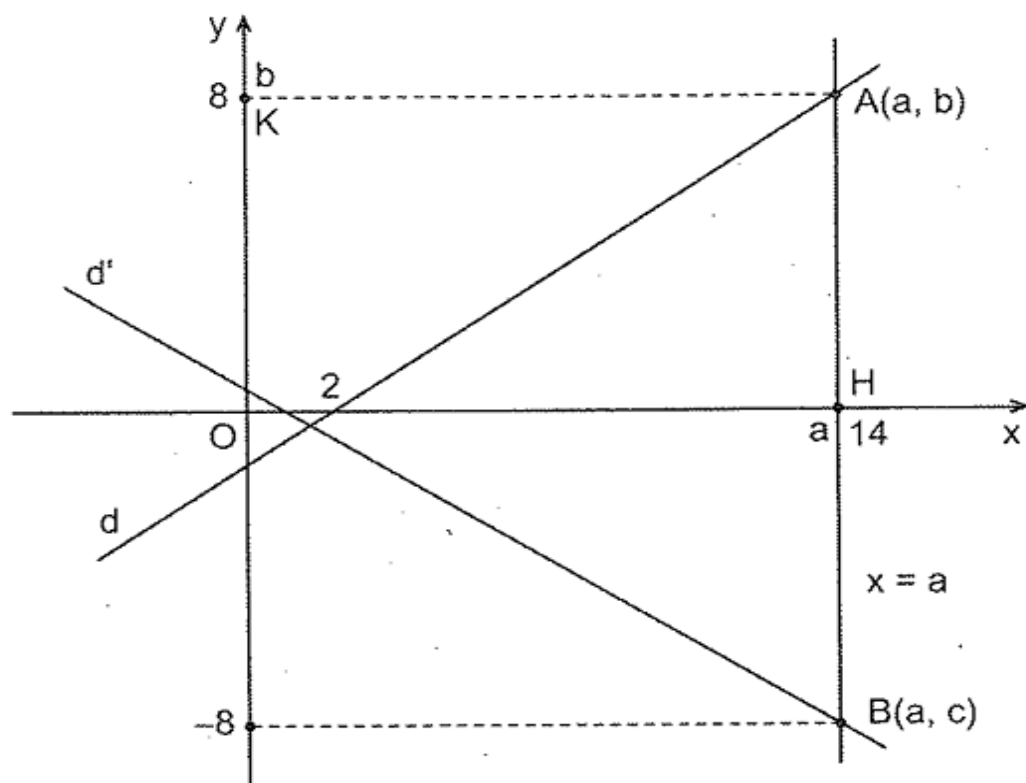
$$3x + 5y = 2. \quad (d')$$

Tìm trên trục Ox điểm có hoành độ là số nguyên dương nhỏ nhất, sao cho nếu qua điểm đó ta dựng đường vuông góc với Ox thì đường vuông góc ấy cắt các đường thẳng d và d' tại các điểm có toạ độ là các số nguyên.

Giải : (h.3) Gọi toạ độ của điểm phải tìm là $(a ; 0)$ với a là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho đường thẳng $x = a$ cắt các đường thẳng d và d' theo thứ tự tại $A(a ; b)$ và $B(a ; c)$, trong đó b, c là các số nguyên.

Như vậy cần tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho có các số nguyên b

$$\text{và } c \text{ thoả mãn } \begin{cases} 2a - 3b = 4 \\ 3a + 5c = 2 \end{cases}$$



Hình 3

Khử a ta được
$$\begin{cases} 6a - 9b = 12 \\ 6a + 10c = 4 \end{cases} \Rightarrow 9b + 10c = -8 \Rightarrow b = -1 - c + \frac{1-c}{9}.$$

b và c thuộc $\mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{1-c}{9} = k$ (k nguyên) hay $c = -9k + 1$. Từ đó tính được $b = 10k - 2$ và $a = 15k - 1$.

Để a là số tự nhiên nhỏ nhất thoả mãn $a = 15k - 1$, ta chọn $k = 1$. Khi đó $a = 14$, $b = 8$, $c = -8$.

Điểm phải tìm trên Ox là $H(14; 0)$, đường thẳng $x = 14$ cắt d và d' theo thứ tự tại $A(14; 8)$ và $B(14; -8)$.

Ví dụ 71. Giải hệ phương trình với các ẩn x, y, z và các tham số a, b, c khác nhau đôi một :

$$\begin{cases} a^2x + ay + z = 5 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} b^2x + by + z = 5 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} c^2x + cy + z = 5 \end{cases} \quad (3)$$

Giải : Lấy (1) trừ (2) : $(a^2 - b^2)x + (a - b)y = 0$.

Chia hai vế cho $a - b \neq 0$ được $(a + b)x + y = 0$ (4)

Lấy (2) trừ (3) : $(b^2 - c^2)x + (b - c)y = 0$.

Chia hai vế cho $b - c \neq 0$ được $(b + c)x + y = 0$.

(5)

Lấy (4) trừ (5) : $(a - c)x = 0$.

Do $a \neq c$ nên $x = 0$. Từ đó, $y = 0$, $z = 5$.

Nghiệm của hệ là $(0; 0; 5)$.

Bài tập

207. Giải các hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} (x + 3)(y - 5) = xy \\ (x - 2)(y + 5) = xy \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

208. Giải các hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{x}{y + 12} = 1 \\ \frac{x}{y - 12} - \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4(x + y) = 5(x - y) \\ \frac{40}{x + y} + \frac{40}{x - y} = 9 \end{cases}$$

209. Giải các hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} |x - 2| + 2|y - 1| = 9 \\ x + |y - 1| = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + |x| = 25 \\ x - y + |y| = 30 \end{cases}$$

210. Tìm các giá trị của a để hai hệ phương trình sau tương đương :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} ax - 3y = -2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

211. Tìm các giá trị của m để nghiệm của hệ phương trình sau là các số dương :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ mx + y = 3 \end{cases}$$

212. Chứng minh rằng tam giác tạo bởi ba đường thẳng $y = 3x - 2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$,

$y = -2x + 8$ là tam giác vuông cân.

213. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau vô nghiệm, vô số nghiệm :

$$\begin{cases} 2(m+1)x + (m+2)y = m-3 \\ (m+1)x + my = 3m+7 \end{cases}$$

214. Cho hệ phương trình với tham số m :

$$\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ 3x + (m+1)y = -1 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 3$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình theo m .

c) Tìm các giá trị nguyên của m để nghiệm của hệ phương trình là các số nguyên.

215. Cho hệ phương trình với tham số m :

$$\begin{cases} (m-1)x + y = 3m-4 \\ x + (m-1)y = m \end{cases}$$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo m .

b) Tìm các giá trị nguyên của m để nghiệm của hệ phương trình là các số nguyên.

c) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm dương duy nhất.

216. Cho hệ phương trình với tham số m :

$$\begin{cases} x + my = m+1 \\ mx + y = 3m-1 \end{cases}$$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo m .

b) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất, tìm các giá trị của m để tích xy nhỏ nhất.

217. Các số không âm x, y, z thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x - 4y + 2z = 1 \\ 8x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

a) Biểu thị x và y theo z .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x + y - z$.

218. Tìm các số nguyên a, b, c thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ 3a - 4c = 6 \end{cases}$$

219*. Tìm trên trục tung các điểm có tung độ là số nguyên, sao cho nếu qua điểm đó ta dựng đường vuông góc với trục tung thì đường vuông góc ấy cắt các đường thẳng $x + 2y = 6$ (d) và $2x - 3y = 4$ (d') tại các điểm có tọa độ là các số nguyên.

220*. Tìm trên trục hoành các điểm có hoành độ là số nguyên sao cho nếu qua điểm đó ta dựng đường thẳng vuông góc với trục hoành thì đường vuông góc ấy cắt cả ba đường thẳng sau tại các điểm có tọa độ là các số nguyên :

$$x - 2y = 3 \text{ (d}_1\text{)}, x - 3y = 2 \text{ (d}_2\text{)}, x - 5y = -7 \text{ (d}_3\text{)}.$$

Giải các hệ phương trình với các ẩn x, y, z (từ bài 221 đến bài 225) :

$$221. \quad \begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 14 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + y - z - t = 8 \\ x - y + z - t = 12 \\ x - y - z + t = 16 \end{cases} \end{array}$$

$$222. \quad \begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x + y + z = 12 \\ ax + 5y + 4z = 46 \\ 5x + ay + 3z = 38 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x + ay + z = 3a \text{ (a là tham số)} \\ x + y + az = 2 \end{cases} \end{array}$$

$$223. \quad \begin{cases} (a + b)(x + y) - cz = a - b \\ (b + c)(y + z) - ax = b - c \\ (a + c)(x + z) - by = c - a \end{cases} \quad (a, b, c \text{ là tham số, } a + b + c \neq 0)$$

224*. Giải hệ phương trình với các tham số a, b, c đôi một khác nhau, $a + b + c \neq 0$:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bx + cy + az = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} ax + by + cz = a + b + c \\ bx + cy + az = a + b + c \\ cx + ay + bz = a + b + c \end{cases} \end{array}$$

$$225. \quad \begin{cases} x^2 + xy + xz = 2 \\ y^2 + yz + xy = 3 \\ z^2 + xz + yz = 4 \end{cases}$$

§14. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 72. Điểm trung bình của 100 học sinh trong hai lớp 8A và 8B là 7,2. Tính điểm trung bình của các học sinh mỗi lớp, biết rằng số học sinh lớp 8A gấp rưỡi số học sinh lớp 8B và điểm trung bình của lớp 8B gấp rưỡi điểm trung bình của lớp 8A.

Giải : Gọi điểm trung bình của các học sinh lớp 8A là x , điểm trung bình của các học sinh lớp 8B là y . Điều kiện của ẩn là $x > 0, y > 0$.

Số học sinh lớp 8A bằng 150% số học sinh lớp 8B nên tổng số học sinh của hai lớp bằng $150\% + 100\% = 250\%$ số học sinh lớp 8B, cũng bằng 100 học sinh.

$$\text{Số học sinh lớp 8B là } 100 : \frac{250}{100} = 40.$$

$$\text{Số học sinh lớp 8A là } 100 - 40 = 60.$$

Điểm trung bình của các học sinh lớp 8B gấp rưỡi điểm trung bình của lớp 8A nên

$$y = 1,5x. \quad (1)$$

Điểm trung bình của các học sinh cả hai lớp là 7,2 nên

$$\frac{60x + 40y}{100} = 7,2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = 1,5x \\ \frac{60x + 40y}{100} = 7,2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được $x = 6 ; y = 9$.

Trả lời : Điểm trung bình của các học sinh lớp 8A là 6,0.

Điểm trung bình của các học sinh lớp 8B là 9,0.

Ví dụ 73*. Giả sử có một cánh đồng cỏ dày như nhau, mọc cao đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng trong suốt thời gian bò ăn cỏ trên cánh đồng ấy.

Biết rằng 9 con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 2 tuần, 6 con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 4 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 6 tuần ? (mỗi con bò ăn số cỏ như nhau).

Giải : Bài toán khó ở chỗ trong suốt thời gian bò ăn cỏ, cỏ vẫn mọc đều trên cánh đồng.

Gọi khối lượng cỏ có sẵn trên cánh đồng trước khi bò ăn cỏ là 1 (đơn vị khối lượng quy ước), khối lượng cỏ mọc thêm trên cánh đồng trong một tuần là y (với đơn vị khối lượng nói trên), $y > 0$.

Gọi số bò phải tìm là x con, x nguyên dương. Theo đề bài :

9 con bò ăn trong 2 tuần hết $1 + 2y$ nên mỗi con bò trong một tuần ăn hết $\frac{1 + 2y}{18}$.

6 con bò ăn trong 4 tuần hết $1 + 4y$ nên mỗi con bò trong một tuần ăn hết $\frac{1 + 4y}{24}$.

x con bò ăn trong 6 tuần hết $1 + 6y$ nên mỗi con bò trong một tuần ăn hết $\frac{1 + 6y}{6x}$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1 + 2y}{18} = \frac{1 + 4y}{24} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{1 + 4y}{24} = \frac{1 + 6y}{6x} \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) cho ta $y = \frac{1}{4}$. Thay vào (2) được $x = 5$.

Vậy 5 con bò ăn hết cỏ của cánh đồng trong 6 tuần.

Bài tập

226. Có 45 người gồm bác sĩ và luật sư, tuổi trung bình của họ là 40. Tính số bác sĩ, số luật sư, biết rằng tuổi trung bình của các bác sĩ là 35, tuổi trung bình của các luật sư là 50.
227. Trong một hội trường có một số ghế băng, mỗi ghế băng quy định ngồi một số người như nhau. Nếu bớt 2 ghế băng và mỗi ghế băng ngồi thêm 1 người thì thêm được 8 chỗ. Nếu thêm 3 ghế băng và mỗi ghế băng ngồi rút đi 1 người thì giảm 8 chỗ. Tính số ghế băng trong hội trường.

228. Có hai loại quặng sắt : quặng loại I chứa 70% sắt, quặng loại II chứa 40% sắt. Người ta trộn một lượng quặng loại I với một lượng quặng loại II thì được hỗn hợp quặng chứa 60% sắt. Nếu lấy tăng hơn lúc đầu 5 tấn quặng loại I và lấy giảm hơn lúc đầu 5 tấn quặng loại II thì được hỗn hợp quặng chứa 65% sắt. Tính khối lượng mỗi loại quặng đem trộn lúc đầu.
229. Người ta cho thêm 1 kg nước vào dung dịch A thì được dung dịch B có nồng độ axit là 20% (nồng độ axit là tỉ số của khối lượng axit so với khối lượng dung dịch). Sau đó lại cho thêm 1 kg axit vào dung dịch B thì được dung dịch C có nồng độ axit là $33\frac{1}{3}\%$. Tính nồng độ axit trong dung dịch A.
230. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể trong 1 giờ thì được $\frac{3}{10}$ bể. Nếu vòi I chảy trong 3 giờ, vòi II chảy trong 2 giờ thì mới được $\frac{4}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu bể sẽ đầy ?
- 231*. Lúc 7 giờ, An khởi hành từ A để đến gặp Bích tại B lúc 9 giờ 30 phút. Nhưng đến 9 giờ, An được biết Bích bắt đầu đi từ B để đến C (không nằm trên quãng đường AB) với vận tốc bằng 3,25 lần vận tốc của An. Ngay lúc đó An tăng thêm vận tốc 1 km/h và khi tới B, An đã đi theo đường tắt đến C chỉ dài bằng $\frac{1}{3}$ quãng đường mà Bích đi từ B đến C, do đó An và Bích đến C cùng một lúc. Nếu Bích cũng đi theo đường tắt như An thì Bích đến B trước An là 2 giờ. Tính vận tốc lúc đầu của An.
- 232*. Một cánh đồng cỏ dày như nhau, mọc cao đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng và trong suốt thời gian bò ăn cỏ trên cánh đồng ấy. Biết rằng 75 con bò ăn hết cỏ trên 60a đồng cỏ trong 12 ngày, 81 con bò ăn hết cỏ trên 72a đồng cỏ đó trong 15 ngày. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ trên 96a đồng cỏ trong 18 ngày ? ($1a = 100m^2$)

Bài toán của Niu-ton

233. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng nếu lấy bình phương của số đó trừ đi bình phương của số gồm chính hai chữ số của số phải tìm viết theo thứ tự ngược lại thì được một số chính phương.
234. Ba tổ công nhân A, B, C có tuổi trung bình theo thứ tự là 37, 23, 41. Tuổi trung bình của hai tổ là A và B là 29, tuổi trung bình của hai tổ B và C là 33. Tính tuổi trung bình của cả ba tổ.

HÀM SỐ $Y = AX^2$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

§15. HÀM SỐ $Y = AX^2$

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi x thuộc $\mathbf{R}$.

Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến với $x < 0$, đồng biến với $x > 0$, bằng 0 với $x = 0$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến với $x < 0$, nghịch biến với $x > 0$, bằng 0 với $x = 0$.

Đồ thị của hàm số là một parabol đi qua gốc toạ độ và nhận trục tung làm trục đối xứng.

Ví dụ 74

a) Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$, điểm $A(0; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $y = -1$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc parabol. Chứng minh rằng MA bằng khoảng cách MH từ điểm M đến đường thẳng d .

b) Cho điểm $A(0; a)$, gọi d là đường thẳng có phương trình $y = -a$. Chứng minh rằng quỹ tích của điểm $M(x; y)$ sao cho khoảng cách MH từ M tới d bằng MA là một parabol.

Giải : a) (h.4)

Ta luôn luôn có

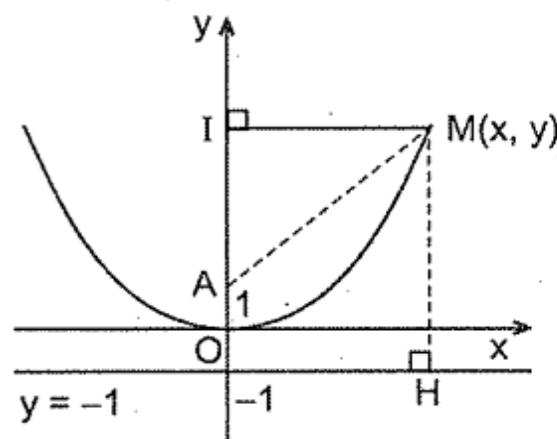
$$MH = y + 1. \quad (1)$$

Để tính MA , ta kẻ $MI \perp Oy$.

Ta có $MI = |x|$, $AI = |y - 1|$ nên

$$\begin{aligned} MA^2 &= MI^2 + AI^2 = x^2 + (y - 1)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$

Do $y = \frac{1}{4}x^2$ nên thay x^2 bởi $4y$ ta được



Hình 4

$$MA^2 = 4y + y^2 - 2y + 1 = (y + 1)^2.$$

Do đó $MA = |y + 1| = y + 1$ (do $y \geq 0$). (2)

Từ (1) và (2) ta có $MA = MH$.

b) (h.5 ứng với $a > 0$) Theo công thức tính khoảng cách giữa hai điểm $M(x; y)$ và $A(0; a)$ ta có

$$\begin{aligned} MA^2 &= (x - 0)^2 + (y - a)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2ay + a^2. \end{aligned}$$

Ta lại có $MH = |y + a|$ nên

$$MH^2 = (y + a)^2 = y^2 + 2ay + a^2.$$

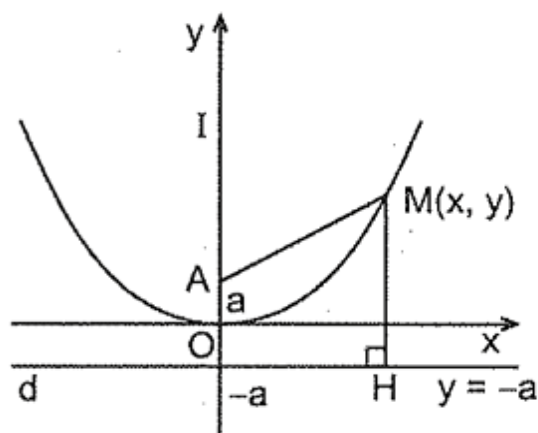
$$MA^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4ay \Leftrightarrow y = \frac{1}{4a}x^2.$$

Do đó quỹ tích của M là parabol $y = \frac{1}{4a}x^2$.

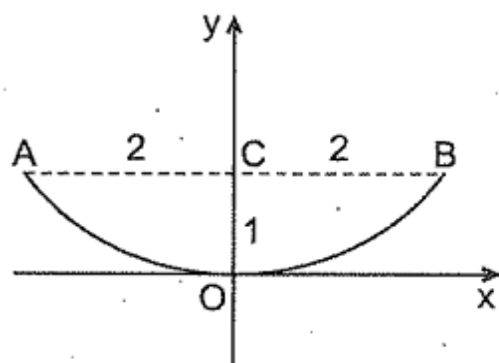
Chú ý : Tổng quát, cho một điểm A và đường thẳng d không đi qua A , quỹ tích các điểm M sao cho khoảng cách MA bằng khoảng cách từ M đến d là một parabol. Khi đó điểm A gọi là *tiêu điểm*, đường thẳng d gọi là *đường chuẩn* của parabol.



Hình 5

Bài tập

235. Thiết diện đi qua trục của một chiếc gương có dạng parabol (h.6). Hãy xác định phương trình của parabol đó, biết rằng độ sâu $OC = 1\text{cm}$ và đường kính $AB = 4\text{cm}$.

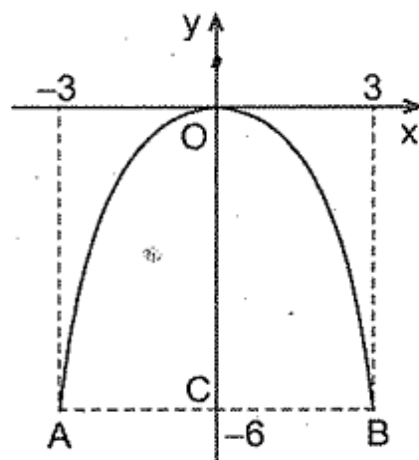


Hình 6

236. Một cổng dạng parabol có kích thước được chỉ ra trên hình 7 là $OC = 6\text{m}$, $AB = 6\text{m}$. Viết phương trình của parabol ấy.

237. a) Xác định hệ số a của parabol $y = ax^2$, biết rằng parabol đi qua điểm $A(-2; -2)$.

b) Tìm tọa độ của điểm M thuộc parabol nói trên, biết rằng khoảng cách từ M đến trục hoành gấp đôi khoảng cách từ M đến trục tung.



Hình 7

238. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x|x|$.

239. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

b) Gọi C là một điểm tùy ý nằm trên parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$. Gọi K là trung điểm của OC . Khi điểm C di chuyển trên parabol đó thì điểm K di chuyển trên đường nào?

§16. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó x là ẩn, a, b, c là các hệ số đã cho, $a \neq 0$.

1. Giải phương trình bậc hai một ẩn

Ví dụ 75. Cho phương trình

$$(m^2 - m - 2)x^2 + 2(m + 1)x + 1 = 0 \quad (m \text{ là tham số}). \quad (1)$$

a) Giải phương trình (1) với $m = 1$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

c) Tìm các giá trị của m để tập nghiệm của phương trình (1) chỉ có một phân tử.

Giải : a) Với $m = 1$, phương trình (1) trở thành

$$-2x^2 + 4x + 1 = 0.$$

$\Delta' = 2^2 - (-2) \cdot 1 = 6$. Phương trình có hai nghiệm là

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{6}}{-2} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}; \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{6}}{-2} = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}.$$

b) Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là

$$\begin{cases} a = m^2 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - m - 2) > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Giải (2): } m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{Giải (3): } (m+1)^2 - (m^2 - m - 2) > 0 \Leftrightarrow 3m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Điều kiện phải tìm là: $-1 < m \neq 2$.

c) (1) chỉ có một nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) là phương trình bậc nhất hoặc (1) là phương trình bậc hai có $\Delta = 0$. Với $m = -1$, (1) có dạng $0x + 1 = 0$, phương trình vô nghiệm.

Với $m = 2$, (1) có dạng $6x + 1 = 0$, phương trình có một nghiệm là $x = -\frac{1}{6}$.

Với $m \neq -1$, $m \neq 2$, (1) là phương trình bậc hai, nó có một nghiệm (nghiệm kép) khi và chỉ khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 3m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, trái với điều kiện trên.

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) chỉ có một phần tử khi $m = 2$.

2. Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm

Ta đã biết phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$. Từ đó suy ra phương trình đó có nghiệm nếu $ac < 0$. Do vậy để chứng minh phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm, thường có các cách sau:

Cách 1. Chứng tỏ rằng $\Delta \geq 0$.

Ví dụ 76. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm với mọi a và b :

$$(a+1)x^2 - 2(a+b)x + (b-1) = 0. \quad (1)$$

Giải

– Với $a \neq -1$, phương trình (1) là bậc hai, nó có nghiệm nếu

$$\Delta' = (a+b)^2 - (a+1)(b-1) \geq 0.$$

Đặt $a + 1 = m$, $b - 1 = n$, ta có $a + b = m + n$. Khi đó

$$\Delta' = (m + n)^2 - mn = m^2 + mn + n^2 = \left(m + \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3n^2}{4} \geq 0.$$

Vậy (1) có nghiệm khi $a \neq -1$.

– Với $a = -1$, phương trình (1) trở thành

$$-2(b - 1)x = -(b - 1). \quad (2)$$

Nếu $b \neq 1$, (2) có nghiệm $x = \frac{1}{2}$. Nếu $b = 1$, (2) vô số nghiệm.

Kết luận : Phương trình đã cho có nghiệm với mọi a, b .

Cách 2. Chứng tỏ rằng $ac < 0$ (Thật vậy, nếu $ac < 0$ thì $\Delta = b^2 - 4ac > 0$)

Ví dụ 77. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm với mọi m :

$$x^2 - (3m^2 - 5m + 1)x - (m^2 - 4m + 5) = 0. \quad (1)$$

Giải : Xét tích $ac = -(m^2 - 4m + 5) = -(m - 2)^2 - 1 < 0$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm với mọi m .

Chú ý

a) Nếu $ac \leq 0$ mà $a \neq 0$ ta cũng có $\Delta \geq 0$ nên phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

b) Chỉ với điều kiện $ac \leq 0$, chưa đảm bảo phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm. Chẳng hạn ta xét phương trình $m^2x^2 - mx - 2 = 0$, ta có $ac = -2m^2 \leq 0$, nhưng với $m = 0$ thì phương trình trở thành $0x = 2$, vô nghiệm.

Như vậy khi gặp trường hợp $ac \leq 0$, phải xét hai trường hợp : $a \neq 0$ và $a = 0$.

3. Nghiệm hữu tỉ của phương trình bậc hai

Ví dụ 78. Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ (1) với m, n là những số nguyên.

a) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó là số nguyên.

b) Tìm nghiệm hữu tỉ của phương trình (1) với $n = 3$.

Giải

a) Nếu (1) có nghiệm $x = 0$ thì ta có điều phải chứng minh.

Nếu (1) có nghiệm hữu tỉ $x = \frac{a}{b} \neq 0$ với $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{N}^*$, $(|a|, b) = 1$.

Thay vào (1) được

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + m \cdot \frac{a}{b} + n = 0 \text{ nên } a^2 = -mab - nb^2 = -b(ma + nb).$$

Suy ra $a^2 \vdots b$. Ta lại có $(|a|, b) = 1$ nên $b = 1$. Do đó x là số nguyên.

b) Với $n = 3$ thì (1) trở thành

$$x^2 + mx + 3 = 0. \quad (2)$$

Ta có $\Delta = m^2 - 12$.

(2) có nghiệm hữu tỉ $\Leftrightarrow \Delta$ là số chính phương, tức là

$$m^2 - 12 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow m^2 - k^2 = 12 \Leftrightarrow (m + k)(m - k) = 12.$$

Ta thấy $m + k$ và $m - k$ là ước của 12, hiệu của chúng bằng $(m + k) - (m - k) = 2k$ là số chẵn nên $m + k$ và $m - k$ phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do tích của chúng là số chẵn (12) nên chúng cùng chẵn. Chú ý rằng $m + k \geq m - k$ nên chỉ có hai trường hợp :

$$\begin{cases} m + k = 6 \\ m - k = 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} m + k = -2 \\ m - k = -6 \end{cases}$$

Trường hợp đầu cho $m = 4$. Phương trình (2) là $x^2 + 4x + 3 = 0$, nó có nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -3$.

Trường hợp sau cho $m = -4$. Phương trình (2) là $x^2 - 4x + 3 = 0$, nó có nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Kết luận : Khi $n = 3$ thì :

Với $m = 4$, phương trình (2) có nghiệm hữu tỉ là -1 và -3 .

Với $m = -4$, phương trình (2) có nghiệm hữu tỉ là 1 và 3 .

Với $m \neq \pm 4$, phương trình (2) không có nghiệm hữu tỉ.

Chú ý : Có thể giải phương trình (2) bằng cách sử dụng hệ thức Vi-ét (§17). Nếu (2) có nghiệm hữu tỉ thì chúng là số nguyên (theo câu a)) và có tích bằng 3, tổng bằng $-m$. Ta tìm được các nghiệm đó là -1 và -3 (khi đó $m = 4$) hoặc 1 và 3 (khi đó $m = -4$).

4. Nghiệm nguyên của phương trình bậc hai

Ví dụ 79. Tìm các số nguyên n để các nghiệm của phương trình sau là các số nguyên :

$$x^2 - (4 + n)x + 2n = 0. \quad (1)$$

Giải : Ta có $\Delta = (4 + n)^2 - 8n = n^2 + 16 > 0$.

Nếu nghiệm của phương trình (1) là số nguyên thì $n^2 + 16$ phải là số chính phương.

Đặt $n^2 + 16 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$n^2 - k^2 = -16 \Leftrightarrow (n + k)(n - k) = -16.$$

Ta thấy $(n + k) - (n - k) = 2k$ là số chẵn nên $n + k$ và $n - k$ phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do tích của chúng là số chẵn (-16) nên chúng cùng chẵn. Do $n + k \geq n - k$ nên có các trường hợp :

$n + k$	8	2	4
$n - k$	-2	-8	-4
n	3	-3	0

Với $n = 3$ thì phương trình (1) trở thành $x^2 - 7x + 6 = 0$, nó có các nghiệm là 1 và 6.

Với $n = -3$ thì phương trình (1) trở thành $x^2 - x - 6 = 0$, nó có các nghiệm là -2 và 3.

Với $n = 0$ thì phương trình (1) trở thành $x^2 - 4x = 0$, nó có các nghiệm là 0 và 4.

Vậy với $n \in \{3; -3; 0\}$ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

5. Quan hệ giữa các nghiệm của hai phương trình bậc hai

Ví dụ 80. Tìm các giá trị của a để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung :

$$x^2 + ax + 8 = 0, \quad (1)$$

và
$$x^2 + x + a = 0. \quad (2)$$

Giải

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, thế thì

$$x_0^2 + ax_0 + 8 = 0, \quad (1')$$

$$x_0^2 + x_0 + a = 0. \quad (2')$$

Suy ra $(a - 1)x_0 + 8 - a = 0.$

– Nếu $a \neq 1$ thì $x_0 = \frac{a-8}{a-1}$. Thay vào (2') và rút gọn được

$$a^3 - 24a + 72 = 0 \Leftrightarrow (a + 6)(a^2 - 6a + 12) = 0 \Leftrightarrow a = -6.$$

Với $a = -6$ thì (1) trở thành $x^2 - 6x + 8 = 0$, có nghiệm là 2 và 4 ; (2) trở thành $x^2 + x - 6 = 0$, có nghiệm là 2 và -3. Do đó (1) và (2) có một nghiệm chung là 2.

– Nếu $a = 1$ thì (1) trở thành $x^2 + x + 8 = 0$, (2) trở thành $x^2 + x + 1 = 0$. Cả hai phương trình đều vô nghiệm.

Kết luận : Với $a = -6$ thì (1) và (2) có một nghiệm chung.

Bài tập

Phương trình bậc hai một ẩn

240. Cho phương trình

$$mx^2 + 6(m - 2)x + 4m - 7 = 0.$$

Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho

- a) Có nghiệm kép ;
- b) Có hai nghiệm phân biệt ;
- c) Vô nghiệm.

241. Giải các phương trình sau với m là tham số :

$$\text{a) } x^2 - mx - 3(m + 3) = 0 ; \quad \text{b) } mx^2 - 4x + 4 = 0.$$

242. Tìm các giá trị của m , biết rằng phương trình $x^2 + mx + 12 = 0$ có hiệu hai nghiệm bằng 1.

243. Cho các số dương a, b thoả mãn $a + b = 4\sqrt{ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

244. Tìm x và y biết rằng $2(x^2 + 1) + y^2 = 2y(x + 1)$.

Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm

245. Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm :

a) $(m^2 - m)x^2 + 2mx + 1 = 0$; b) $(m + 1)x^2 - 2x + (m - 1) = 0$.

246. Chứng minh rằng các phương trình sau có nghiệm với mọi a và b :

a) $x(x - a) + x(x - b) + (x - a)(x - b) = 0$;

b) $x^2 + (a + b)x - 2(a^2 - ab + b^2) = 0$.

247. Chứng minh rằng các phương trình sau có nghiệm với mọi a , b và c :

a) $3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$;

b) $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$.

248. Chứng minh rằng nếu a , b , c là những số khác 0 thì tồn tại một trong các phương trình sau có nghiệm :

$$ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0, cx^2 + 2ax + b = 0.$$

249. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm, biết rằng $5a + 2c = b$.

250. Cho a , b , c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm :

$$(a^2 + b^2 - c^2)x^2 - 4abx + (a^2 + b^2 - c^2) = 0.$$

251. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm nếu $\frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4$.

252. Chứng minh rằng nếu $bm = 2(c + n)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm :

$$x^2 + bx + c = 0 \text{ và } x^2 + mx + n = 0.$$

Nghiệm hữu tỉ của phương trình bậc hai

253. Cho a , b , c là những số hữu tỉ, $a \neq 0$ và $|b| = |a + c|$. Chứng minh rằng các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là những số hữu tỉ.

254. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỉ nếu a , b , c là những số nguyên lẻ.

255*. Chứng minh rằng nếu $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

256. Tìm các giá trị nguyên của m để nghiệm của phương trình sau là số hữu tỉ :

$$mx^2 - 2(m-1)x + (m-4) = 0.$$

Nghiệm nguyên của phương trình bậc hai

257. Tìm các số nguyên n để các nghiệm của phương trình sau là những số nguyên :

$$x^2 - (n+4)x + (4n-25) = 0.$$

258. Tìm số nguyên tố p , biết rằng phương trình $x^2 + px - 12p = 0$ có hai nghiệm đều là những số nguyên.

Quan hệ giữa các nghiệm của hai phương trình bậc hai

259. Tìm các giá trị của m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung :

a) $x^2 + 2x + m = 0$ và $x^2 + mx + 2 = 0$;

b) $x^2 + mx + 1 = 0$ và $x^2 - x - m = 0$;

260. Tìm các giá trị của m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung :

a) $x^2 + (m-2)x + 3 = 0$ và $2x^2 + mx + (m+2) = 0$;

b) $2x^2 + (3m-5)x - 9 = 0$ và $6x^2 + (7m-15)x - 19 = 0$.

261. Tìm các giá trị của m để một nghiệm của phương trình

$$2x^2 - 13x + 2m = 0 \tag{1}$$

gấp đôi một nghiệm của phương trình

$$x^2 - 4x + m = 0. \tag{2}$$

262. Cho các phương trình :

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

$$cx^2 + bx + a = 0. \tag{2}$$

Biết phương trình (1) có nghiệm dương m , chứng minh rằng phương trình (2) có nghiệm n sao cho $m + n \geq 2$.

~ Ví dụ : 108, 119 đến 123, 125, 127.

Bài tập : 349 đến 351, 368, 369, 371 đến 375, 378, 380.

§17. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

1. Hệ thức Vi - ét

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm ($\Delta \geq 0$) thì tổng các nghiệm bằng $-\frac{b}{a}$, tích các nghiệm bằng $\frac{c}{a}$.

Áp dụng

a) Tính nhẩm nghiệm : Cho phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

– Nếu $a + b + c = 0$ thì (1) có hai nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$.

– Nếu $a - b + c = 0$ thì (1) có hai nghiệm là $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$.

b) Xác định dấu của các nghiệm : Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Gọi $S = -\frac{b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$. Ta có :

$P < 0$	Hai nghiệm trái dấu	
$\Delta \geq 0$ và $P > 0$	Hai nghiệm cùng dấu	$S > 0$: Hai nghiệm dương
		$S < 0$: Hai nghiệm âm

2. Tìm hai số biết tổng và tích

Muốn tìm hai số biết tổng của chúng bằng S , tích của chúng bằng P , ta chỉ cần giải phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

Ví dụ 81. Cho phương trình với tham số m :

$$mx^2 - 2(m+1)x + (m-4) = 0. \quad (1)$$

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu. Khi đó trong hai nghiệm, nghiệm nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn ?

c) Xác định m để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thỏa mãn $x_1 + 4x_2 = 3$.

d) Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

Giải

a) Với $m = 0$ thì (1) có dạng $-2x - 4 = 0$, có nghiệm $x = -2$.

Với $m \neq 0$ thì (1) là phương trình bậc hai, $\Delta' = (m + 1)^2 - m(m - 4) = 6m + 1$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$, tức là $m \geq -\frac{1}{6}$.

Kết luận : Với $m \geq -\frac{1}{6}$ thì (1) có nghiệm.

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có $S = \frac{2(m+1)}{m}$, $P = \frac{m-4}{m}$.

Điều kiện để (1) có hai nghiệm trái dấu là :

$$P < 0 \Leftrightarrow \frac{m-4}{m} < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Khi đó, do $0 < m < 4$ nên $S > 0$, do đó nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

c) Giải hệ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{m-4}{m} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} m \geq -\frac{1}{6} \end{cases} \quad (5)$$

Từ (2) và (4) tính được $x_2 = \frac{m-2}{3m}$, $x_1 = \frac{5m+8}{3m}$.

Thay vào (3) được $\frac{(m-2)(5m+8)}{9m^2} = \frac{m-4}{m}$.

Giải phương trình này được $2m^2 - 17m + 8 = 0$, do đó $m = 8$; $m = \frac{1}{2}$, điều kiện (5) được thỏa mãn.

Vậy với $m \in \left\{ \frac{1}{2}; 8 \right\}$ thì phương trình (1) có nghiệm thỏa mãn đề bài.

d) Với $m \geq -\frac{1}{6}$ thì ta có $x_1 + x_2 = 2 + \frac{2}{m}$, $x_1 x_2 = 1 - \frac{4}{m}$.

Thay $\frac{2}{m} = x_1 + x_2 - 2$ vào biểu thức của $x_1 x_2$ ta được $x_1 x_2 = 1 - 2(x_1 + x_2 - 2)$.

Vậy $x_1 x_2 = 5 - 2(x_1 + x_2)$.

Ví dụ 82. Cho phương trình $mx^2 - 2(m-2)x + (m-3) = 0$. Tìm các giá trị của m để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Giải : Điều kiện để phương trình có hai nghiệm (phân biệt hoặc nghiệm kép) là $m \neq 0$, $\Delta' \geq 0$.

$$\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = -m + 4.$$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4.$$

Với $0 \neq m \leq 4$, phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 . Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m-2)}{m}$, $x_1 x_2 = \frac{m-3}{m}$.

$$\text{Do đó } 1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{4(m-2)^2}{m^2} - \frac{2(m-3)}{m}$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 4m^2 - 16m + 16 - 2m^2 + 6m$$

$$\Leftrightarrow 0 = m^2 - 10m + 16 \Leftrightarrow m = 2 \text{ hoặc } m = 8.$$

Giá trị $m = 8$ không thỏa mãn điều kiện $0 \neq m \leq 4$.

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 83. Cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm c và d , phương trình $x^2 + cx + d = 0$ có hai nghiệm a và b . Tính a, b, c, d , biết rằng các số đó đều khác 0.

Giải : Áp dụng hệ thức Vi-ét vào hai phương trình đã cho, ta được :

$$c + d = -a \quad (1), \quad cd = b \quad (2)$$

$$a + b = -c \quad (3), \quad ab = d \quad (4).$$

Từ (1) suy ra $a + c = -d$. Từ (3) suy ra $a + c = -b$. Do đó $b = d$.

Từ (2), do $b = d \neq 0$, ta có $c = 1$.

Từ (4) do $b = d \neq 0$, ta có $a = 1$.

Thay $a = c = 1$ vào (1), ta được $d = -2$, suy ra $b = -2$.

Ví dụ 84. Cho phương trình

$$x^2 + 5x - 1 = 0. \quad (1)$$

Không giải phương trình (1), hãy lập một phương trình bậc hai có các nghiệm là lũy thừa bậc bốn của các nghiệm của phương trình (1).

Giải

Ta thấy phương trình (1) có nghiệm.

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho, ta có $x_1 + x_2 = -5$,
 $x_1 x_2 = -1$.

Gọi y_1, y_2 là các nghiệm của phương trình phải lập, ta được

$$y_1 + y_2 = x_1^4 + x_2^4, \quad y_1 y_2 = x_1^4 x_2^4.$$

Ta có
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 25 + 2 = 27.$$

Do đó
$$y_1 + y_2 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 729 - 2 = 727.$$

$$y_1 y_2 = (x_1 x_2)^4 = (-1)^4 = 1.$$

Phương trình phải lập có tổng các nghiệm bằng 727 và tích các nghiệm bằng 1 nên có dạng $y^2 - 727y + 1 = 0$.

Bài tập

263. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình :

a) $mx^2 - 2(m-1)x + (m-2) = 0$; b) $(m-1)x^2 + (m+1)x + 2 = 0$.

264. Không giải phương trình, xét dấu các nghiệm của phương trình (nếu có) :

a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$; b) $5x^2 + 3x - 1 = 0$;

c) $2x^2 + 13x + 8 = 0$; d) $4x^2 - 11x + 8 = 0$.

265. Xác định giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt cùng dấu :

$$(m - 1)x^2 - 2x + 3 = 0.$$

266*. Giải phương trình $x^2 - mx + n = 0$, biết rằng phương trình có hai nghiệm nguyên dương phân biệt và m, n là các số nguyên tố.

267. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính :

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;

b) $(x_1 - x_2)^2$;

c) $x_1^3 + x_2^3$.

268. Cho phương trình

$$x^2 - 2(m - 2)x + (m^2 + 2m - 3) = 0.$$

Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thoả

$$\text{mãn } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}.$$

269. Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có $3m^2 = 16n$. Chứng minh rằng trong hai nghiệm của phương trình, có một nghiệm gấp ba lần nghiệm kia.

270. Cho biết phương trình $x^2 - (m + 2)x + (2m - 1) = 0$ có các nghiệm x_1, x_2 . Lập một hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m .

271. Tìm hai số, biết rằng :

a) Tổng của chúng bằng 2, tích của chúng bằng -1 .

b) Tổng của chúng bằng 1, tích của chúng bằng 5.

272. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm bằng :

a) $\sqrt{3}$ và $2\sqrt{3}$;

b) $2 - \sqrt{3}$ và $2 + \sqrt{3}$.

273. Chứng minh rằng tồn tại một phương trình có các hệ số hữu tỉ nhận một trong các nghiệm là :

a) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$;

b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$;

c) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

274. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm bằng :

a) Bình phương của các nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$;

b) Nghịch đảo của các nghiệm của phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$;

275. Xác định các số m, n sao cho các nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$ cũng là m và n .

276. Cho các số a, b, c khác nhau đôi một, $c \neq 0$. Biết rằng các phương trình

$$x^2 + ax + bc = 0 \quad (1)$$

và $x^2 + bx + ca = 0 \quad (2)$

có ít nhất một nghiệm chung.

a) Tìm các nghiệm còn lại của hai phương trình.

b) Chứng minh rằng các nghiệm còn lại đó là nghiệm của phương trình $x^2 + cx + ab = 0$.

277. Cho các phương trình :

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

$$cx^2 + dx + a = 0. \quad (2)$$

Biết rằng phương trình (1) có các nghiệm m và n , phương trình (2) có các nghiệm p và q . Chứng minh rằng $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \geq 4$.

278*. Cho các phương trình :

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

$$cx^2 + bx + a = 0. \quad (2)$$

Tìm một hệ thức giữa các hệ số a, b, c , biết rằng các nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) và các nghiệm x_3, x_4 của phương trình (2) thoả mãn đẳng thức $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$.

279. Cho phương trình $x^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm x_1, x_2 ; phương trình $x^2 - b^2x + bc = 0$ có các nghiệm x_3, x_4 . Biết $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$. Xác định b và c .

280*. Tìm các số a, b sao cho các phương trình $x^2 + ax + 6 = 0$ và $x^2 + bx + 12 = 0$ có ít nhất một nghiệm chung và $|a| + |b|$ nhỏ nhất.

281*. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$. Kí hiệu $s_n = x_1^n + x_2^n$ với n là số nguyên dương.

a) Tính s_1, s_2, s_3 .

b) Tìm một hệ thức giữa s_n, s_{n+1}, s_{n+2} .

c) Chứng minh rằng s_n là số nguyên với mọi số n nguyên dương.

d) Tìm số dư khi chia s_{50} cho 5.

~ Ví dụ : 109, 124, 126.

Bài tập : 325 đến 358, 370, 376, 377.

§18. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I - PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ BẬC CAO

Ta gọi *phương trình đại số bậc n* là các phương trình đưa được về dạng

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

trong đó n nguyên dương, x là ẩn, $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực cho trước, $a_n \neq 0$.

Phương trình đại số bậc n thường được giải bằng cách quy về các phương trình bậc nhất và bậc hai.

Sau đây là một số phương pháp thường dùng để giải phương trình bậc cao hơn hai.

1. Đưa về phương trình tích

Ví dụ 85. Giải phương trình

$$x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0.$$

Giải

$$x^3 + 2x(x + \sqrt{2}) + \sqrt{2}^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{2})(x^2 - x\sqrt{2} + 2) + 2x(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{2})[x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 2] = 0.$$

Phương trình $x + \sqrt{2} = 0$ có nghiệm $x = -\sqrt{2}$.

Phương trình $x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 2 = 0$ vô nghiệm (vì $\Delta < 0$).

Phương trình đã cho có một nghiệm là $x = -\sqrt{2}$.

2. Đặt ẩn phụ

Ví dụ 86. Giải phương trình $\sqrt{2}x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

Giải

Viết phương trình đã cho dưới dạng $2\sqrt{2}x^3 + 3.2x^2 - 4 = 0$. Đặt $y = x\sqrt{2}$, phương trình trở thành

$$y^3 + 3y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Kết luận : Phương trình có hai nghiệm $\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $-\sqrt{2}$.

Ví dụ 87. Giải phương trình $(x + 1)^4 = 2(x^4 + 1)$.

Giải

Khai triển rồi rút gọn được

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0. \quad (1)$$

Chia hai vế cho x^2 (hiển nhiên $x \neq 0$ vì $x = 0$ không là nghiệm của (1)) được

$$x^2 - 4x - 6 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0. \quad (2)$$

$$\text{Đặt} \quad x + \frac{1}{x} = y \quad (3)$$

thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Phương trình (2) trở thành

$$y^2 - 2 - 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \pm 2\sqrt{3}.$$

Với $y = 2 + 2\sqrt{3}$, thay vào (3) được

$$x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}.$$

Với $y = 2 - 2\sqrt{3}$, thay vào (3), phương trình vô nghiệm.

Kết luận : Phương trình đã cho có nghiệm $x = 1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$.

Chú ý

a) Phương trình (1) nói trên có dạng

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0)$$

gọi là phương trình *đối xứng* bậc bốn. Để giải phương trình loại này, ta chia hai vế của phương trình cho x^2 (vì $x \neq 0$) rồi đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$. Khi đó

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \geq 2 + 2 = 4, \text{ do đó } |y| \geq 2.$$

Chú ý rằng nếu m là nghiệm của phương trình đối xứng thì $\frac{1}{m}$ cũng là nghiệm của phương trình đó.

b) Phương trình đối xứng bậc lẻ (chẳng hạn phương trình đối xứng bậc năm $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$) bao giờ cũng nhận -1 là một nghiệm. Do đó ta có thể hạ bậc để đưa về phương trình đối xứng bậc chẵn.

c) Cách chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ cũng được sử dụng đối với các phương trình có dạng

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \text{ trong đó } \frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2,$$

gọi là phương trình *hồi quy*. Ẩn phụ có dạng $y = x + \frac{d}{bx}$.

Ví dụ 88. Giải phương trình

$$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) = 3x^2. \quad (1)$$

Giải

$$\text{Cách 1. } (1) \Leftrightarrow 4(x^2 + 17x + 60)(x^2 + 16x + 60) = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x + 17 + \frac{60}{x}\right)\left(x + 16 + \frac{60}{x}\right) = 3 \text{ (vì } x \neq 0\text{)}. \quad (2)$$

Đặt $x + 16 + \frac{60}{x} = y$ thì (2) trở thành

$$4y(y+1) = 3 \Leftrightarrow 4y^2 + 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}; y = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Với } y = \frac{1}{2} \text{ ta có } 2x^2 + 31x + 120 = 0 \Leftrightarrow x = -8; x = -\frac{15}{2}.$$

$$\text{Với } y = -\frac{3}{2} \text{ ta có } 2x^2 + 35x + 120 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-35 \pm \sqrt{265}}{4}.$$

Cách 2. Đặt $x^2 + 16,5x + 60 = y$, từ phương trình đã cho ta được $y^2 = x^2$.

Xét hai trường hợp $y = x$ và $y = -x$ ta được bốn nghiệm của phương trình.

Chú ý

a) Phương trình (1) nói trên có dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = mx^2$ trong đó $ad = bc$. Ta nhóm

$$[(x + a)(x + d)][(x + b)(x + c)] = mx^2.$$

Ẩn phụ có thể đặt là $y = x + \frac{ad}{x}$ (hoặc sai khác một hằng số như cách 1) hoặc $y = (x + a)(x + d)$ (như cách 2).

b) Đối với các phương trình có dạng $d(x + a)(x + b)(x + c) = mx$ (xem bài 290b) trong đó $d = \frac{a+b+c}{2}$, $m = (d-a)(d-b)(d-c)$, ta đặt ẩn phụ $y = x + d$.

Một nghiệm của phương trình là $y = 0$.

c) Đối với các phương trình có dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$ trong đó $a + d = b + c$ (xem bài 289a, b, c, d) ta nhóm

$$[(x + a)(x + d)][(x + b)(x + c)] = m,$$

từ đó đi đến cách đặt ẩn phụ.

d) Đối với các phương trình có dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ (xem bài 291b, c, d) ta thường đặt ẩn phụ $y = x + \frac{a+b}{2}$.

3. Đưa hai vế về lũy thừa cùng bậc

Ví dụ 89. Giải phương trình $x^4 = 24x + 32$.

Giải : Thêm $4x^2 + 4$ vào hai vế được

$$x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 24x + 36$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 6)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 2x + 6 & (1) \\ x^2 + 2 = -2x - 6 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{5}$, phương trình (2) vô nghiệm.

Kết luận : Phương trình đã cho có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

Ví dụ 90*. Giải phương trình

$$x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Giải :
$$x^3 = -3x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow 2x^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt[3]{2})^3 = (x-1)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{2} = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}.$

4. Dùng bất đẳng thức

a) Dùng tính đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số trên từng khoảng

Ví dụ 91. Giải phương trình

$$|x-8|^5 + |x-9|^6 = 1. \quad (1)$$

Giải : Viết phương trình dưới dạng

$$|x-8|^5 + |9-x|^6 = 1.$$

Để thấy $x=8$, $x=9$ đều là nghiệm của (1). Xét các giá trị còn lại của x .

a) Với $x < 8$ thì $|9-x| > 1$, $|9-x|^6 > 1$, còn $|x-8|^5 > 0$ nên vế trái của (1) lớn hơn 1, (1) vô nghiệm.

b) Với $x > 9$ thì $|x-8| > 1$, $|x-8|^5 > 1$, còn $|9-x|^6 > 0$ nên vế trái của (1) lớn hơn 1, (1) vô nghiệm.

c) Với $8 < x < 9$ thì

$$0 < x-8 < 1 \Rightarrow |x-8|^5 < |x-8| = x-8,$$

$$0 < 9-x < 1 \Rightarrow |9-x|^6 < |9-x| = 9-x.$$

Vế trái của (1) nhỏ hơn $x-8 + 9-x = 1$, (1) vô nghiệm.

Vậy (1) có hai nghiệm : $x=8$, $x=9$.

b) Dùng điều kiện xảy ra dấu "=" ở bất đẳng thức không chặt

Ví dụ 92. Giải phương trình

$$|x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2| = 3. \quad (1)$$

Giải : Ta có $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 + |2 - x^2 + x| = 3 \Leftrightarrow |2 - x^2 + x| = 2 - x^2 + x.$$

Áp dụng bất đẳng thức $|A| \geq A$, xảy ra đẳng thức với $A \geq 0$, ta có

$$2 - x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Vậy nghiệm của phương trình là các giá trị x thoả mãn $-1 \leq x \leq 2$.

II – PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC

Phương pháp đặt ẩn phụ đặc biệt có hiệu quả khi giải nhiều phương trình chứa ẩn ở mẫu thức. Nếu không đặt ẩn phụ, sau khi đưa về dạng nguyên, nhiều khi ta phải giải các phương trình bậc cao khá phức tạp. Sau đây là một số cách biến đổi thường dùng.

1. Chia tử và mẫu của phân thức cho x

Ví dụ 93. Giải phương trình

$$\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1.$$

Giải : Điều kiện $x \neq -1, x \neq -\frac{2}{3}$. Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho $x \neq 0$ được

$$\frac{2}{3x - 1 + \frac{2}{x}} - \frac{7}{3x + 5 + \frac{2}{x}} = 1.$$

Đặt $3x + 2 + \frac{2}{x} = y$, phương trình trở thành $\frac{2}{y - 3} - \frac{7}{y + 3} = 1$.

Điều kiện : $y \neq \pm 3$. Bạn đọc tự giải tiếp.

$$\text{Đáp số : } x = \frac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}.$$

Chú ý : Ta thường dùng phương pháp trên đối với các phương trình có dạng sau :

a) Dạng 1 : $\frac{mx}{ax^2 + bx + d} + \frac{nx}{ax^2 + cx + d} = p.$

b) Dạng 2 : $\frac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \frac{ax^2 + px + c}{ax^2 + qx + c} = 0.$

c) Dạng 3 : $\frac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \frac{px}{ax^2 + qx + c} = 0.$

2. Thêm cùng một biểu thức vào hai vế để tạo thành bình phương đúng

Ví dụ 94. Giải phương trình

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 12.$$

Giải : Điều kiện : $x \neq -2$. Thêm $-2x \cdot \frac{2x}{x+2}$ vào hai vế được

$$\left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 = 12 - \frac{4x^2}{x+2} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} - 12 = 0.$$

Đặt $\frac{x^2}{x+2} = y$, ta được $y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ hoặc $y = -6$.

Với $y = 2$ ta được $x^2 = 2x + 4$, có nghiệm là $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

Với $y = -6$ ta được $x^2 = -6x - 12$, vô nghiệm.

3. Đặt hai ẩn phụ rồi tìm liên hệ giữa chúng

Ví dụ 95. Giải phương trình

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48 \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0. \quad (1)$$

Giải : Điều kiện $x \neq \pm 1$. Đặt $\frac{x-2}{x+1} = y$, $\frac{x+2}{x-1} = z$, ta được

$$20y^2 - 5z^2 + 48yz = 0. \quad (2)$$

Cách 1. Nếu $z = 0$ thì $y = 0$, loại.

Nếu $z \neq 0$, chia hai vế của (2) cho z^2 được

$$20\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 48 \cdot \frac{y}{z} - 5 = 0. \quad (3)$$

Đặt $\frac{y}{z} = a$, ta được $a = \frac{1}{10}$, $a = -\frac{5}{2}$.

Từ đó tìm được y, z, x . *Đáp số:* $x = 3, x = \frac{2}{3}$.

Cách 2. $(2) \Leftrightarrow (10y - z)(2y + 5z) = 0$. Từ đó tìm được x .

III – PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Phương trình vô tỉ đã được nêu ở *Nâng cao và phát triển Toán 9 tập một*. Sau đây là một số ví dụ khác.

Ví dụ 96. Giải phương trình

$$\frac{x}{\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x-1}}{x} = 2. \quad (1)$$

Giải : Điều kiện $x > \frac{1}{4}$. (2)

Ta có bất đẳng thức $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với $a, b > 0$. xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

Với $x > \frac{1}{4}$ thì $(1) \Leftrightarrow x = \sqrt{4x-1} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$ thoả mãn (2).

Chú ý : Cũng có thể đặt $\frac{x}{\sqrt{4x-1}} = y$.

Ví dụ 97. Giải phương trình

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 2.$$

Giải : Điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}$. Đặt $\sqrt{x + \frac{1}{4}} = y \geq 0$ thì $x = y^2 - \frac{1}{4}$.

Thay vào phương trình đã cho và chú ý rằng $y \geq 0$, ta được

$$\begin{aligned} y^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}} + y &= 2 \Leftrightarrow y^2 - \frac{1}{4} + y + \frac{1}{2} = 2 \\ \Leftrightarrow y^2 + y + \frac{1}{4} &= 2 \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Do $y \geq 0$ nên $y + \frac{1}{2} = \sqrt{2}$, do đó $y = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

Khi đó $x = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2 - \sqrt{2}$, thoả mãn điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}$.

Nghiệm của phương trình là $x = 2 - \sqrt{2}$.

Ví dụ 98. Giải phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2.$$

Giải : Điều kiện : $x \neq 0$, $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. (1)

Đặt $\sqrt{2-x^2} = y > 0$ (2)

thì $2-x^2 = y^2$. Khi đó ta có

$$x^2 + y^2 = 2 \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2.$$

Đặt $S = x + y$, $P = xy$, các điều kiện trên trở thành $S^2 - 2P = 2$ và $S = 2P$.

Dễ dàng tìm được $P = 1$, $S = 2$ và $P = -\frac{1}{2}$, $S = -1$.

Với $P = 1$, $S = 2$ thì x, y là nghiệm của $X^2 - 2X + 1 = 0$. Ta được $X = 1$, do đó $x = 1$, $y = 1$ thoả mãn (1) và (2).

Với $P = -\frac{1}{2}$, $S = -1$ thì x, y là nghiệm của $2X^2 + 2X - 1 = 0$. Ta được $X = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Do $y > 0$ nên $x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

Kết luận : Nghiệm của phương trình là $x = 1$; $x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 99*. Giải và biện luận phương trình

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x \quad (a \text{ là tham số}).$$

Giải : Đặt $\sqrt{a+x} = y$, phương trình trở thành $\sqrt{a-y} = x$. Phương trình đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, & (1) \\ x^2 = a - y, & (2) \\ y^2 = a + x. & (3) \end{cases}$$

Khử a từ (2) và (3) được

$$x^2 - y^2 = -(x + y) \Leftrightarrow (x + y)(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = -x \text{ hoặc } y = x + 1.$$

a) Trường hợp $y = -x$. Do $x \geq 0, y \geq 0$ nên $x = y = 0$. Khi đó $a = 0$.

b) Trường hợp $y = x + 1$. Thay vào (3) được

$$(x + 1)^2 = a + x \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - a = 0. \quad (4)$$

(4) có nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$ với $a \geq \frac{3}{4}$.

Do (1) ta loại $x = \frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}$.

Giải điều kiện $\frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \geq 0$ được $a \geq 1$.

Kết luận : Nếu $a = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$.

Nếu $a \geq 1$, phương trình có nghiệm $x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$.

Nếu $0 \neq a < 1$, phương trình vô nghiệm.

IV – MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Ví dụ 100. Tìm các giá trị của m để tồn tại các số x, y thoả mãn cả hai phương trình :

$$4x - 3y = 7 \quad (1)$$

và $2x^2 + 5y^2 = m. \quad (2)$

Giải : Rút x ở (1), thay vào (2) và rút gọn được

$$49y^2 + 42y + (49 - 8m) = 0. \quad (3)$$

Từ (1) ta thấy nếu tồn tại y thì cũng tồn tại x . Do đó chỉ cần tìm điều kiện để (3) có nghiệm. Ta phải có

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 21^2 - 49(49 - 8m) \geq 0 \Leftrightarrow 9 - (49 - 8m) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5.$$

Vậy với $m \geq 5$ thì tồn tại các số x, y thoả mãn cả hai phương trình (1) và (2).

Ví dụ 101. Tìm các cặp số $(x; y)$ thoả mãn cả hai phương trình

$$x^2 + y^2 = 11 \quad (1)$$

và
$$x + xy + y = 3 + 4\sqrt{2}. \quad (2)$$

Giải : Nhân hai vế của (2) với 2 rồi cộng với (1) được

$$(x + y)^2 + 2(x + y) = 17 + 8\sqrt{2} \Leftrightarrow (x + y + 1)^2 = (4 + \sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{2} \\ x + y = -5 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{2} \\ x + y = -5 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (4)$$

Từ (2) và (3) ta có $xy = 3\sqrt{2}$. Từ $x + y = 3 + \sqrt{2}$ và $xy = 3\sqrt{2}$ ta tìm được hai cặp số $(3; \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; 3)$.

Từ (2) và (4) ta có $xy = 8 + 5\sqrt{2}$. Khi đó

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 11 - (16 + 10\sqrt{2}) < 0, \text{ vô lí.}$$

Có hai cặp số $(x; y)$ thoả mãn bài toán là $(3; \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; 3)$.

Nhận xét : Mỗi phương trình (1) và (2) nói trên đều không đổi khi ta đổi chỗ x và y cho nhau. Trong trường hợp này, ta thường tìm tích xy , tổng $x + y$ rồi đưa về giải một phương trình bậc hai.

Ví dụ 102. Tìm cặp số $(x; y)$ thoả mãn cả hai phương trình

$$x^2 + y + \frac{1}{4} = 0 \quad (1)$$

và
$$x + y^2 + \frac{1}{4} = 0. \quad (2)$$

Giải : Cách 1. Trừ từng vế (1) và (2) được

$$x^2 - y^2 - x + y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0.$$

Nếu $x = y$, thay vào (1) được $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. Ta có $x = y = -\frac{1}{2}$.

Nếu $x + y = 1$, thay vào (1) được $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$, vô nghiệm.

Cách 2. Cộng (1) với (2) được

$$\begin{aligned} & \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Thử lại, $x = y = -\frac{1}{2}$ nghiệm đúng (1) và (2).

Nhận xét : Trong mỗi phương trình (1) và (2) nói trên, nếu đổi chỗ x và y cho nhau thì phương trình này trở thành phương trình kia. Trong trường hợp này, ta thường trừ vế với vế hai phương trình và nhận được phương trình tích.

Ví dụ 103. Tìm các cặp số $(x ; y)$ thoả mãn cả hai phương trình

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \quad (1)$$

và $2x^2 - 3xy + 4y^2 = 3. \quad (2)$

Giải

Cách 1. Nhân (1) với 3 rồi trừ đi (2) được $x^2 - y^2 = 0$. Do đó $y = \pm x$.

Với $y = x$, thay vào (1) được $x^2 = 1$. Ta có $(1 ; 1), (-1 ; -1)$.

Với $y = -x$, thay vào (1) được $x^2 = \frac{1}{3}$. Ta có $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} ; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Có bốn cặp số thoả mãn bài toán.

Cách 2. Ta thấy $x = 0$ không thoả mãn phương trình (1).

Xét $x \neq 0$, đặt $y = kx$. Thay vào (1) và (2) ta được

$$x^2(k^2 - k + 1) = 1 \text{ và } x^2(4k^2 - 3k + 2) = 3.$$

Khử x^2 ta được $3k^2 - 3k + 3 = 4k^2 - 3k + 2$, suy ra $k = \pm 1$.

Với $k = 1$, ta được $x^2 = 1$. Từ đó ta có $(1 ; 1), (-1 ; -1)$.

Với $k = -1$, ta được $x^2 = \frac{1}{3}$. Từ đó ta có $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} ; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Nhận xét : Các phương trình (1) và (2) nói trên có dạng

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \text{ và } a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d'.$$

Thường giải chúng theo hai cách :

– Cách 1. Dùng phương pháp cộng đại số để biểu thị một ẩn theo ẩn kia, sau đó thế vào một phương trình.

– Cách 2. Xét $x = 0$. Xét $x \neq 0$, đặt $y = kx$, thay vào hai phương trình rồi khử x để tìm k .

Ví dụ 104. Tìm các số x, y, z thỏa mãn cả hai phương trình

$$x + y + z = 9 \quad (1)$$

và
$$x^2 + y^2 + z^2 = 27. \quad (2)$$

Giải

Cách 1. Biến đổi (1) và (2) thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 81 \text{ và } 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 81.$$

Suy ra
$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0.$$

Do đó $x = y = z = 3$. Thử lại, đúng.

Cách 2. Ta có

$$6x + 6y + 6z = 54 \text{ và } x^2 + y^2 + z^2 = 27.$$

Suy ra
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z + 27 = 0$$

nên
$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 0.$$

Do đó $x = y = z = 3$. Thử lại, đúng.

Ví dụ 105. Tìm các bộ ba số $(x ; y ; z)$ thỏa mãn cả ba phương trình

$$x + y + z = a, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (2)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \quad (3)$$

Giải : Từ (1) và (3) ta có

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 0.$$

Áp dụng hằng đẳng thức

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x),$$

ta được
$$3(x + y)(y + z)(z + x) = 0.$$

Xét $x + y = 0$, thay vào (1) được $z = a$.

Thay $z = a$ vào (2) được $x^2 + y^2 = 0$, do đó $x = y = 0$. Ta được $(0; 0; a)$.

Tương tự đối với $y + z = 0$, $z + x = 0$ ta được $(a; 0; 0)$ và $(0; a; 0)$. Thử lại, đúng.

Có ba bộ số phải tìm là $(0; 0; a)$, $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$.

Ví dụ 106. Tìm các bộ ba số $(x; y; z)$ thoả mãn cả ba phương trình

$$x + \frac{1}{y} = 2, \quad (1)$$

$$y + \frac{1}{z} = 2, \quad (2)$$

$$z + \frac{1}{x} = 2. \quad (3)$$

Giải : Điều kiện x, y, z đều khác 0. Rút y từ (1) được $\frac{1}{y} = 2 - x$ nên $(2 - x)y = 1$. Do $x \neq 2$ (vì $x = 2$ không thoả mãn (1)) nên $y = \frac{1}{2 - x}$. Rút z từ (3) được $z = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x - 1}{x}$.

Thay các biểu thức của y và z vào (2) được

$$\frac{1}{2 - x} + \frac{x}{2x - 1} = 2. \quad (4)$$

Giải (4) được $x = 1$. Do đó $y = 1, z = 1$. **Đáp số :** $(1; 1; 1)$.

Bài tập

Phương trình đại số bậc cao

Giải các phương trình (từ bài 282 đến bài 299) :

282. a) $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$;

b) $x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0$;

c) $x^3 + 2x - 5\sqrt{3} = 0$;

d) $x^3 - x - \sqrt{2} = 0$;

e) $(x - 2)^3 + (x + 1)^3 = 8x^3 - 1$.

$$283.a) x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0;$$

$$c) x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0;$$

$$e) x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0;$$

$$284. a) x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0;$$

$$c) x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 6x + 4 = 0.$$

$$285. 6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = 0.$$

$$286.a) x^4 + 9 = 5x(x^2 - 3);$$

$$287. a) (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 14x^2;$$

$$b) (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2.$$

$$288. a) 4\sqrt{2}x^3 - 22x^2 + 17\sqrt{2}x - 6 = 0;$$

$$b) x^4 - 12x^2 + 16\sqrt{2}x - 12 = 0.$$

$$289. a) x(x+1)(x+2)(x+3) = 8;$$

$$c) (x+2)(x+3)(x-7)(x-8) = 144;$$

$$e) (4x+3)^2(x+1)(2x+1) = 810;$$

$$290. a) 4(x^2 - x + 1)^3 = 27(x^2 - x)^2;$$

$$291. a) (x-2)^3 + (x-4)^3 = 8;$$

$$c) (x+2)^4 + (x+8)^4 = 272;$$

$$d) (x+\sqrt{2})^4 + (x+1)^4 = 33 + 12\sqrt{2};$$

$$e) (x-2)^6 + (x-4)^6 = 64.$$

$$292. a) (x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81;$$

$$b) x^4 + (x-1)(3x^2 + 2x - 2) = 0;$$

$$c) x^4 + (x+1)(5x^2 - 6x - 6) = 0;$$

$$d) (x^2 + 1)^2 + (x+2)(3x^2 - 4x - 5) = 0;$$

$$e) x^2(x-1)^2 + x(x^2-1) = 2(x+1)^2.$$

$$293. x^5 + x^2 + 2x + 2 = 0.$$

$$b) x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0;$$

$$d) 2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0;$$

$$g) x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0.$$

$$b) x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0;$$

$$b) (x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9).$$

$$b) x(x-1)(x+1)(x+2) = 3;$$

$$d) (x+5)(x+6)(x+8)(x+9) = 40;$$

$$g) (6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35.$$

$$b) 3(x+5)(x+6)(x+7) = 8x.$$

$$b) (x+2)^4 + (x+4)^4 = 82;$$

$$294. \text{ a) } x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0;$$

$$\text{ c) } x^4 = 2x^2 + 8x + 3;$$

$$\text{ e) } (x^2 - a^2)^2 = 4ax + 1;$$

$$\text{ h) } x^4 = 2x^2 - 12x + 8.$$

$$\text{ b) } x^4 - 9x^2 + 24x - 16 = 0;$$

$$\text{ d) } (x^2 - 16)^2 = 16x + 1;$$

$$\text{ g) } x^4 = 4x - 3;$$

$$295^*. \text{ a) } x^4 = 4x + 1;$$

$$\text{ b) } x^4 = 8x + 7;$$

$$\text{ c) } x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0;$$

$$\text{ d) } x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}.$$

$$296. (x + 2)^2 + (x + 3)^3 + (x + 4)^4 = 2.$$

$$297^*. (x - \sqrt{2})^3 + (x + \sqrt{3})^3 + (\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2x)^3 = 0.$$

$$298^*. x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0 \text{ (a, b là tham số).}$$

$$299^*. (a + b + x)^3 - 4(a^3 + b^3 + x^3) - 12abx = 0 \text{ (a, b là tham số).}$$

300. Giải phương trình $x^3 - (m^2 - m + 7)x - 3(m^2 - m - 2) = 0$, biết rằng -1 là một nghiệm của phương trình.

301. Giải phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, biết rằng a, b, c là những số hữu tỉ và $\sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình.

302. Giải phương trình $x^5 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0$, biết rằng a, b là những số hữu tỉ và $1 + \sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình.

303. Giải phương trình $4x^4 - 11x^2 + 9x + m = 0$, biết rằng tồn tại hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình thoả mãn $x_1 + x_2 = -1, x_1 > x_2$.

304^{*}. a) Chứng minh rằng nếu $x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)$ thì $4x^3 + 3x = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right)$.

b) Áp dụng nhận xét trên để giải phương trình $4x^3 + 3x = \frac{3}{4}$.

c) Giải phương trình $4x^3 + 3x = \frac{4}{3}$.

305. Ta có định lí Vi-ét đối với phương trình bậc ba như sau : Nếu phương trình bậc ba

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ (a} \neq 0 \text{)}$$

có các nghiệm thực x_1, x_2, x_3 thì

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Tìm các nghiệm của phương trình $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ rồi kiểm nghiệm lại chúng thoả mãn định lí Vi-ét đối với phương trình bậc ba.

Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Giải các phương trình (từ bài 306 đến bài 315):

306. a) $\frac{1}{x^2 - 3x + 3} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} = \frac{6}{x^2 - 3x + 5};$

b) $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{x^2 - 2x + 3} = \frac{9}{2(x^2 - 2x + 4)};$

c) $\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$

d) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}.$

307. a) $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40;$

b) $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15;$

c) $\frac{x^4}{2x^2 + 1} + \frac{2x^2 + 1}{x^4} = 2.$

308. a) $4\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 13\left(x + \frac{1}{x}\right);$

b) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 13\left(x + \frac{1}{x}\right).$

309. a) $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1;$

b) $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6;$

c) $\frac{3x}{x^2 - 3x + 1} + \frac{7x}{x^2 + x + 1} = -4.$

$$310. a) \frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{4x}{x^2 - 12x + 15};$$

$$b) \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4x + 5} - \frac{x^2 - 5x + 5}{x^2 - 6x + 5} = -\frac{1}{4}.$$

$$311. a) x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5;$$

$$b) x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11.$$

$$312. a) \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = \frac{40}{9};$$

$$b) \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0;$$

$$313. a) \frac{x(3-x)}{x+1} \left(x + \frac{3-x}{x+1}\right) = 2;$$

$$b) \frac{x(5-x)}{x+1} \left(x + \frac{5-x}{x+1}\right) = 6;$$

$$c) x \cdot \frac{8-x}{x-1} \left(x - \frac{8-x}{x-1}\right) = 15.$$

$$314^*. \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}.$$

$$315. \frac{(1995-x)^2 + (1995-x)(x-1996) + (x-1996)^2}{(1995-x)^2 - (1995-x)(x-1996) + (x-1996)^2} = \frac{19}{49}.$$

Phương trình vô tỉ

Giải phương trình (từ bài 316 đến bài 321):

$$316. a) x^2 - 4x = 8\sqrt{x-1};$$

$$b) x^2 + \sqrt{x+72} = 72.$$

$$317. a) 2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1;$$

$$b^*) 5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2).$$

$$318. a) \sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x;$$

$$b) \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x.$$

$$319^*. (x-1)(x+3) + 2(x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = 8.$$

$$320. \sqrt{x-2a+16} - 2\sqrt{x-a+4} + \sqrt{x} = 0 \text{ (a là tham số).}$$

321. $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \sqrt{a}$ (a là tham số).

322. Tìm các số hữu tỉ x, y với $x > y \geq 0$ thoả mãn phương trình

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

323. Cho $(x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3$. Tính giá trị của biểu thức $A = x + y$.

Một số dạng khác

Tìm các cặp số (x ; y) thoả mãn cả hai phương trình (từ bài 324 đến bài 329)

324. a) $x^2 + 4y^2 + x = 4xy + 2y + 2$ và $4x^2 + 4xy + y^2 = 2x + y + 56$;

b) $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{26}{5}$ và $xy = 6$;

c) $3x + 5y = 9 + 2xy$ và $2x + 3y = 10 - xy$;

d) $x^2 - 4xy + y^2 = 1$ và $y^2 - 3xy = 4$.

325. a) $x + y = 1$ và $x^2 + y^2 = 41$;

b) $x - y = 1$ và $x^2 - xy + y^2 = 7$;

c) $x - y = 3$ và $x^2 + xy + y^2 = 21$;

d) $x - y = 2$ và $x^3 - y^3 = 26$;

e) $x - y = a$ và $x^3 - y^3 = 19a^3$ với $a > 0$.

326. a) $x^2 + 2y + 1 = 0$ và $y^2 + 2x + 1 = 0$;

b) $x^2 - 3x = 2y$ và $y^2 - 3y = 2x$;

c) $2x = y(1 - x^2)$ và $2y = x(1 - y^2)$.

327. a) $x^2 + (x + y)^2 = 17$ và $y^2 + (x + y)^2 = 25$;

b) $x^2 + 2xy - 2y^2 = 1$ và $2x^2 - xy + 3y^2 = 4$.

328. a) $2x^2 - y^2 = 1$ và $xy + x^2 = 2$;

b) $x^2 + y^2 = 5$ và $x + y - xy = 1$.

329. a) $x + y = 4$ và $x^4 + y^4 = 82$;

b) $x + y + xy = 8$ và $x^4 + y^4 = 32$.

330. Tìm các bộ số (x ; y ; z) thoả mãn cả hai phương trình :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ và $xy + yz + zx = 12$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ và $x + y + z = 3$;

c*) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$.

Tìm các bộ số $(x ; y ; z)$ thoả mãn cả ba phương trình (từ bài 331 đến bài 333) :

$$331. \text{ a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{5};$$

$$\text{b) } x + y + z = 8, \quad xy + yz + zx = 20, \quad xyz = 16;$$

$$\text{c) } x + xy + y = 1, \quad y + yz + z = 3, \quad z + zx + x = 7;$$

$$\text{d) } x - \frac{1}{y} = 1, \quad y - \frac{1}{z} = 1, \quad z - \frac{1}{x} = 1.$$

$$332. \quad \frac{4x^2}{1+4x^2} = y, \quad \frac{4y^2}{1+4y^2} = z, \quad \frac{4z^2}{1+4z^2} = x.$$

$$333. \quad \sqrt{x}(1+y) = 2y, \quad \sqrt{y}(1+z) = 2z, \quad \sqrt{z}(1+x) = 2x.$$

334*. Cho các số x, y, z thoả mãn các phương trình :

$$x^3 - y^2 - y = \frac{1}{3} \quad (1), \quad y^3 - z^2 - z = \frac{1}{3} \quad (2), \quad z^3 - x^2 - x = \frac{1}{3} \quad (3)$$

a) Chứng minh rằng $x, y, z > 0$.

b) Chứng minh rằng $x = y = z$.

c) Tìm các số x, y, z thoả mãn cả ba phương trình trên.

335*. Cho các số x, y, z thoả mãn các phương trình :

$$x^2 = y + 1 \quad (1), \quad y^2 = z + 1 \quad (2), \quad z^2 = x + 1 \quad (3)$$

a) Chứng minh rằng x, y, z đều khác 0.

b) Chứng minh rằng x, y, z cùng dấu.

c) Chứng minh rằng $x = y = z$.

d) Tìm các số x, y, z thoả mãn cả ba phương trình trên.

336. Tìm bốn số dương sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng ba số còn lại.

337*. Tìm bốn số biết rằng nếu cộng tích của ba số bất kì với số còn lại thì mỗi kết quả đều bằng 2.

~ Ví dụ : 110 đến 118.

Bài tập : 359 đến 367, 379.

§19. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 107. Hai bà ra chợ bán tổng cộng 100 quả trứng. Số trứng của hai người không bằng nhau, nhưng số tiền thu được lại bằng nhau.

Bà thứ nhất nói với bà thứ hai :

– Nếu tôi có số trứng như của bà, tôi sẽ thu được 15 đồng.

Bà thứ hai nói :

– Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của bà, tôi chỉ bán được $6\frac{2}{3}$ đồng.

Hỏi mỗi bà có bao nhiêu quả trứng mang đi bán ?

Bài toán của Ô-le

Giải : Gọi số trứng của bà I mang đi bán là x (quả), x nguyên dương, $x < 100$, Số trứng của bà II mang đi bán là $100 - x$ (quả).

Giá tiền mỗi quả trứng mang đi bán của bà I là $\frac{15}{100 - x}$ đồng, của bà II là

$6\frac{2}{3} : x$ hay $\frac{20}{3x}$ đồng.

Số tiền hai người thu được bằng nhau nên có phương trình

$$\frac{15}{100 - x} \cdot x = \frac{20}{3x} \cdot (100 - x).$$

Thu gọn phương trình trên được $x^2 + 160x - 8000 = 0$.

Giải phương trình ta được $x_1 = 40$ (thỏa mãn các điều kiện)

$$x_2 = -200, \text{ loại.}$$

Vậy bà I có 40 quả trứng, bà II có 60 quả trứng mang đi bán.

Chú ý : Có thể giải bài toán trên bằng phương pháp số học :

Gọi tỉ số giá trứng của bà I và giá trứng của bà II là k . Họ bán được số tiền bằng nhau nên số trứng của bà II mang đi gấp k lần số trứng của bà I mang đi.

Giả sử trước khi bán, họ đổi trứng cho nhau, tức là bà nọ bán trứng của bà kia nhưng bán với giá trứng của mình. Thế thì số trứng của bà I bán trở thành gấp k lần số trứng của bà II bán, giá trứng cũng gấp k lần giá trứng của bà II bán, nên số tiền 15 đồng gấp k^2 lần số tiền $6\frac{2}{3}$ đồng.

Do đó $k^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = 45 : 20 = 9 : 4 \Rightarrow k = 3 : 2$.

Số trứng của bà II mang đi bán gấp $\frac{3}{2}$ lần số trứng của bà I.

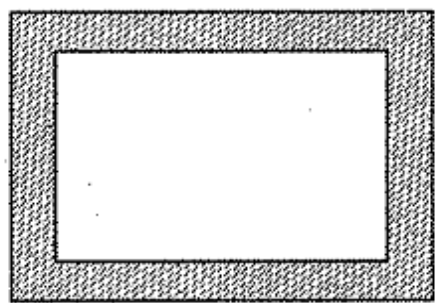
Dễ dàng tìm được số trứng của mỗi người mang đi bán.

Bài tập

338. Trong cùng một thời gian như nhau, đội I phải đào 810m^3 đất, đội II phải đào 900m^3 đất. Kết quả đội I đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày, đội II hoàn thành trước thời hạn 6 ngày. Tính số đất mỗi đội đã đào trong một ngày, biết rằng mỗi ngày đội II đã đào nhiều hơn đội I là 4m^3 .
339. Một người thả hòn đá rơi xuống giếng, sau 1,5 giây thì nghe thấy tiếng đá chạm đáy giếng. Xác định thời gian rơi của đá (làm tròn đến 0,1 giây) và chiều sâu của giếng (làm tròn đến mét), biết rằng quãng đường s (mét) của một vật rơi tự do (không có vận tốc ban đầu) sau t giây được tính theo công thức $s = 5t^2$ và vận tốc của âm thanh là 340m/s .
340. Có hai loại quặng sắt : quặng loại I và quặng loại II, khối lượng tổng cộng là 10 tấn. Khối lượng sắt nguyên chất trong quặng loại I là 0,8 tấn, trong quặng loại II là 0,6 tấn. Biết tỉ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại I nhiều hơn tỉ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại II là 10%. Tính khối lượng của mỗi loại quặng.
341. Nếu đường kính của một hình tròn tăng 3m thì diện tích của nó tăng gấp đôi. Tính độ dài đường kính lúc đầu (làm tròn đến 0,01m).
342. Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc ở cùng một chỗ, người thứ nhất đi về phía bắc, người thứ hai đi về phía đông. Sau 2 giờ họ cách nhau 60km theo đường chim bay. Biết vận tốc của người thứ nhất lớn hơn vận tốc của người thứ hai là 6 km/h. Tính vận tốc của mỗi người.
343. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu chảy một mình cho đầy bể thì vòi I cần nhiều hơn vòi II là 5 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu thì đầy bể ?
- 344*. Trên quãng đường AB dài 60 km, người I đi từ A đến B, người II đi từ B đến A. Họ khởi hành cùng một lúc và gặp nhau tại C sau khi khởi hành 1 giờ 12 phút. Từ C, người I đi tiếp đến B với vận tốc giảm hơn trước

- 6km/h, người II đi tiếp đến A với vận tốc như cũ. Kết quả người I đến nơi sớm hơn người II là 48 phút. Tính vận tốc lúc đầu của mỗi người.
345. Một cửa hàng mua x chiếc áo hết d nghìn đồng. Cửa hàng bán 2 chiếc với giá bằng một nửa giá mua, bán những chiếc còn lại được lãi 8 nghìn đồng mỗi chiếc. Tiền lãi tổng cộng là 72 nghìn đồng.
- a) Tính x , biết rằng $d = 480$.
- b*) Tìm giá trị nhỏ nhất của x , biết rằng d là một số tự nhiên.
- 346*. Bạn Long có đồ chơi là một chiếc thuyền buồm. Khi Long cho thuyền chạy từ A đến B thì thời gian thuyền đi nhiều hơn so với khi có gió thổi thuận chiều là 9 giây. Khi bị gió thổi ngược chiều thì thời gian thuyền đi từ A đến B là 84 giây. Tính thời gian thuyền đi từ A đến B khi không có gió thổi.
347. Ba công nhân cùng làm một công việc thì làm xong sớm hơn 18 giờ so với khi người III làm một mình, sớm hơn 3 giờ so với khi người II làm một mình và bằng nửa thời gian so với khi người I làm một mình công việc ấy. Tính thời gian mỗi công nhân làm một mình xong công việc ấy.
- 348*. (Bài toán của Xem Lôi-đơ (*Sam Loyd*, Mĩ, 1841 – 1911).

Một điền chủ muốn cắt ra từ một mảnh đất hình chữ nhật một dải đất có chiều rộng không đổi dọc theo bốn bờ của mảnh đất (phần gạch sọc trên hình 8) sao cho diện tích phần cắt ra bằng diện tích phần còn lại.



Hình 8

Trong cuốn sách của mình, Xem Lôi-đơ đưa ra cách làm của người điền chủ (nhưng không chứng minh) : Lấy nửa chu vi hình chữ nhật ban đầu trừ đi đường chéo của nó, rồi chia cho 4, đó chính là chiều rộng của dải đất được cắt ra. Hãy chứng tỏ rằng cách làm trên là đúng.

CHUYÊN ĐỀ

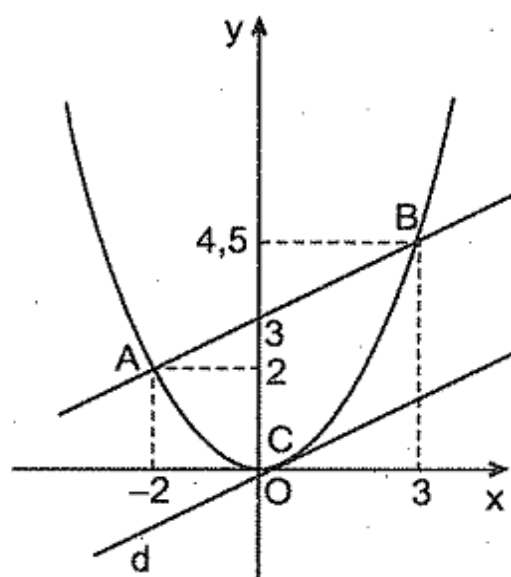
QUAN HỆ GIỮA PARABOL $y = ax^2$ VÀ ĐƯỜNG THẲNG $y = mx + n$

Hoành độ giao điểm của parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $y = mx + n$ ($m \neq 0$) là nghiệm của phương trình

$$ax^2 = mx + n. \quad (1)$$

Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì đường thẳng không giao với parabol. Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt. Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì đường thẳng cắt parabol tại hai điểm trùng nhau, khi đó ta nói đường thẳng tiếp xúc với parabol.

Ví dụ 108(16). Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 3$.



Hình 9

a) Xác định tọa độ các giao điểm A, B của parabol và đường thẳng đã cho.

b) Xác định tọa độ điểm C thuộc cung AB của parabol đó sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Giải : (h.9)

a) Hoành độ giao điểm của parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 3$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3. \quad (1)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x = -2$ và $x = 3$. Với $x = -2$ thì $y = 2$, với $x = 3$ thì $y = 4\frac{1}{2}$.

Giao điểm của parabol với đường thẳng là $A(-2; 2)$ và $B(3; 4\frac{1}{2})$.

b) Ta cần tìm điểm C thuộc cung AB và cách xa AB nhất. Ta xác định đường thẳng d song song với AB và tiếp xúc với parabol, tiếp điểm là điểm C cần tìm.

Đường thẳng d song song với AB có dạng $y = \frac{1}{2}x + n$.

Điều kiện để d tiếp xúc với parabol là phương trình sau có nghiệm kép

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + n. \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - x - 2n = 0.$$

Phương trình (2) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 8n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{8}$.

Với $n = -\frac{1}{8}$ thì nghiệm kép của (2) là $x = \frac{1}{2}$. Khi đó

$$y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

Toạ độ tiếp điểm C của đường thẳng d với parabol là $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$.

Mọi điểm C' khác C thuộc cung AB của parabol đều có khoảng cách đến AB nhỏ hơn khoảng cách từ C đến AB.

Vậy ΔABC có diện tích lớn nhất khi điểm C có toạ độ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$.

Bài tập

349(16). Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = mx + n$ (d). Xác định các hệ số m và n để đường thẳng d đi qua điểm A (1 ; 0) và tiếp xúc với parabol. Tìm toạ độ của tiếp điểm.

350(16). Cho parabol $y = x^2$. Tìm điểm A thuộc parabol sao cho tiếp tuyến với parabol tại A song song với đường thẳng $y = 4x + 5$.

351(16). Cho parabol $y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc parabol với hoành độ tương ứng là -1 và 2. Tìm điểm M trên cung AB của parabol sao cho tam giác AMB có diện tích lớn nhất.

352* (17). Cho parabol $y = x^2$. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc đường thẳng $y = -\frac{1}{4}$, các tiếp tuyến kẻ từ M với parabol vuông góc với nhau.

353* (17). Cho parabol $y = x^2$. Gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng $y = mx + 2$ với parabol (m là tham số). Tìm giá trị của m để đoạn thẳng AB có độ dài nhỏ nhất. Cho biết công thức tính khoảng cách giữa hai điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ là

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH

I – DẤU CỦA CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Theo hệ thức Vi-ét, nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm x_1, x_2 thì $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Do đó điều kiện để một phương trình bậc hai :

- Có hai nghiệm dương là $\Delta \geq 0$, $P > 0$, $S > 0$;
- Có hai nghiệm âm là $\Delta \geq 0$, $P > 0$, $S < 0$;
- Có hai nghiệm trái dấu là $P < 0$ (khi đó hiển nhiên $\Delta > 0$).

II – SO SÁNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI MỘT SỐ

1. So sánh nghiệm của phương trình bậc hai với số 0

Trong nhiều trường hợp, ta cần so sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số cho trước, trong đó có nhiều bài toán đòi hỏi tìm điều kiện để phương trình bậc hai ($a \neq 0$) có ít nhất một nghiệm không âm.

Ví dụ 109(17). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có ít nhất một nghiệm không âm :

$$x^2 + mx + (2m - 4) = 0. \quad (1)$$

Giải

Cách 1. $\Delta = m^2 - 4(2m - 4) = (m - 4)^2 \geq 0$, $P = 2m - 4$, $S = -m$.

Phương trình (1) có nghiệm với mọi m . Trước hết ta tìm điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm (phân biệt hoặc nghiệm kép) đều âm. Điều kiện đó là

$$\begin{cases} P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4 > 0 \\ -m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Vậy điều kiện để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm không âm là $m \leq 2$.

Cách 2. $\Delta = m^2 - 4(2m - 4) = (m - 4)^2 \geq 0$, $P = 2m - 4$, $S = -m$.

Nếu $P \leq 0$, tức là $m \leq 2$, thì phương trình (1) tồn tại nghiệm không âm.

Nếu $P > 0$ (đã có $\Delta \geq 0$) thì phương trình (1) có hai nghiệm cùng dấu. Để thoả mãn đề bài, phải có $S > 0$. Giải điều kiện $P > 0$, $S > 0$ được $m > 2$ và $-m > 0$, không xảy ra.

Kết luận : $m \leq 2$.

Cách 3. Giải phương trình (1) : $\Delta = m^2 - 4(2m - 4) = (m - 4)^2 \geq 0$.

$$\text{Ta có } x_1 = \frac{-m - (m - 4)}{2} = 2 - m, \quad x_2 = \frac{-m + (m - 4)}{2} = -2.$$

$$\text{Phải có } x_1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

2. So sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số bất kì

Ví dụ 110(18). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có ít nhất một nghiệm lớn hơn hay bằng 2 :

$$x^2 + mx - 1 = 0. \quad (1)$$

Giải

Cách 1. Đặt $y = x - 2$. Thay $x = y + 2$ vào (1) và rút gọn ta được

$$y^2 + (m + 4)y + (2m + 3) = 0. \quad (2)$$

Ta cần tìm m để phương trình (2) có ít nhất một nghiệm không âm.

$$\Delta = (m + 4)^2 - 4(2m + 3) = m^2 + 4 > 0, \quad P = 2m + 3, \quad S = -(m + 4).$$

Điều kiện để phương trình (2) có hai nghiệm (phân biệt hoặc nghiệm kép) đều âm là

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3 > 0 \\ -(m + 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}.$$

Vậy với $m \leq -\frac{3}{2}$ thì (2) có ít nhất một nghiệm không âm, tức là (1) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hay bằng 2.

Cách 2. Giải phương trình (1) được

$$x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}.$$

Ta thấy $x_1 > x_2$ nên chỉ cần tìm m để $x_1 \geq 2$.

Ta có $\frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \geq 2$ khi và chỉ khi

$$\sqrt{m^2 + 4} \geq m + 4. \quad (3)$$

Nếu $m \leq -4$ thì (3) có vế trái dương, vế phải âm nên (3) đúng.

Nếu $m > -4$ thì (3) $\Leftrightarrow m^2 + 4 \geq m^2 + 8m + 16 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}$. Ta được

$$-4 < m \leq -\frac{3}{2}.$$

Gộp $m \leq -4$ và $-4 < m \leq -\frac{3}{2}$ ta được giá trị phải tìm của m là $m \leq -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 111(18). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 :

$$3x^2 - 4x + 2(m - 1) = 0. \quad (1)$$

Giải : Cách 1. Đặt $x - 2 = y$. Thay $x = y + 2$ vào (1) và rút gọn ta được

$$3y^2 + 8y + (2m + 2) = 0. \quad (2)$$

Cần tìm m để phương trình (2) có hai nghiệm âm phân biệt. Ta giải điều kiện

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 6m > 0 \\ 2m + 2 > 0 \\ -\frac{8}{3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{3}.$$

Cách 2. Xét phương trình (1). Giải điều kiện

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Giải (2) được $m < \frac{5}{3}$.

Giải (3) : $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{3} - 2 \cdot \frac{4}{3} + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Giải (4) : $x_1 + x_2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} - 4 < 0$, luôn đúng.

Vậy ta được $-1 < m < \frac{5}{3}$.

Cách 3 . Giải phương trình (1) :

$$\Delta' = 4 - 6(m - 1) = 10 - 6m.$$

Nếu $\Delta' > 0$ (tức là $m < \frac{5}{3}$) thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{10 - 6m}}{3}, \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{10 - 6m}}{3}.$$

Do $x_1 < x_2$ nên điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 là

$$x_2 < 2 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{10 - 6m} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{10 - 6m} < 4 \Leftrightarrow 10 - 6m < 16 \Leftrightarrow m > -1.$$

Vậy ta được $-1 < m < \frac{5}{3}$.

III - ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM CỦA MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ví dụ 112(18). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm :

$$x^4 + mx^2 + (2m - 4) = 0. \quad (1)$$

Giải

Đặt $x^2 = y \geq 0$. Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là phương trình $y^2 + my + (2m - 4) = 0$ có ít nhất một nghiệm không âm.

Theo kết quả ở ví dụ 109, các giá trị của m phải tìm là $m \leq 2$.

Ví dụ 113(18). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{2x^2 + (m - 4)x + 3} = x - 2. \quad (1)$$

Giải : Với $x \geq 2$ thì

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2 + (m - 4)x + 3 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0. \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là phương trình (2) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hay bằng 2.

Theo kết quả ở ví dụ 110, các giá trị của m phải tìm là $m \leq -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 114(18). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt :

$$x^3 - m(x + 1) + 1 = 0. \quad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - x + 1 - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(1) có hai nghiệm phân biệt nếu :

a) Phương trình (2) có nghiệm kép, nghiệm đó phải khác -1 .

$\Delta = 4m - 3$. Giải $\Delta = 0$ được $m = \frac{3}{4}$. Khi đó $x = \frac{1}{2} \neq -1$.

b) Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm là -1 :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - (-1) + 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{4} \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Khi đó $x_1 = -1$, $x_2 = m - 1 = 2$.

Kết luận : Với $m = \frac{3}{4}$ thì (1) có hai nghiệm là -1 và $\frac{1}{2}$. Với $m = 3$ thì (1) có hai nghiệm là -1 và 2 .

Ví dụ 115(18). Tìm các giá trị của m để tập nghiệm của phương trình

$$x - \sqrt{1 - x^2} = m \quad (1) \quad \text{chỉ có một phần tử.}$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow x - m = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ (x - m)^2 = 1 - x^2 \end{cases} \quad (*)$$

(*) Chú ý rằng $f(x) = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ [f(x)]^2 = g(x) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ 2x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Do đó tập nghiệm của (1) chỉ có một phần tử khi và chỉ khi có một và chỉ một nghiệm của (2) thỏa mãn $x \geq m$.

Đặt $x - m = y$, khi đó (2) trở thành $2y^2 + 2my + m^2 - 1 = 0$. (3)

Cần tìm m để chỉ có một nghiệm của (3) thỏa mãn $y \geq 0$. Có ba trường hợp :

a) Phương trình (3) có nghiệm kép không âm :

$$\begin{cases} \Delta' = 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 2 = 0 \\ -m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\sqrt{2}.$$

b) Phương trình (3) có hai nghiệm trái dấu :

$$P < 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 - 1}{2} < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

c) Phương trình (3) có một nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại âm :

$$\begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \\ -m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Kết luận : $m = -\sqrt{2}$ hoặc $-1 < m \leq 1$.

Ví dụ 116(18). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt :

$$x(x-2)(x+2)(x+4) = m. \quad (1)$$

Giải : (1) $\Leftrightarrow (x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 8) = m$.

Đặt $x^2 + 2x + 1 = y \geq 0$, khi đó (1) trở thành

$$(y-1)(y-9) = m \Leftrightarrow y^2 - 10y + (9-m) = 0. \quad (2)$$

Với cách đặt ẩn phụ như trên, ứng với mỗi giá trị dương của y có hai giá trị của x . Do đó :

(1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt. Do đó ở (2) ta phải có

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - (9-m) > 0 \\ 9-m > 0 \\ 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9.$$

Kết luận : $-16 < m < 9$.

Ví dụ 117(18). Cho phương trình

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + (2m+1) = 0. \quad (1)$$

Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$) thoả mãn điều kiện $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$.

Giải : Đặt $y = x^2 \geq 0$ ta có phương trình

$$y^2 - 2(m+1)y + (2m+1) = 0. \quad (2)$$

Giả sử phương trình (2) có hai nghiệm dương a và b với $0 < a < b$. Ta có $x_1 = -\sqrt{b}, x_2 = -\sqrt{a}, x_3 = \sqrt{a}, x_4 = \sqrt{b}$.

Từ $x_4 - x_3 = x_3 - x_2$ suy ra $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \sqrt{a} - (-\sqrt{a})$ nên $\sqrt{b} = 3\sqrt{a}$. Do đó $b = 9a$.

Cách 1. Từ $b = 9a$ và từ hệ thức Vi-ét đối với phương trình (2), ta có

$$\begin{cases} b = 9a \\ a + b = 2m + 2 \\ ab = 2m + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a = 2m + 2 \\ 9a^2 = 2m + 1 \end{cases} \Rightarrow 9a^2 - 10a + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Với $a = 1$ thì $b = 9, m = 4$. Với $a = \frac{1}{9}$ thì $b = 1, m = -\frac{4}{9}$.

Cách 2. Ta thấy (bằng cách tính nhẩm nghiệm) phương trình (2) có một nghiệm là 1, nghiệm kia bằng $2m + 1$.

Do $b = 9a$ nên có hai trường hợp :

- Nếu $a = 1$ thì $b = 9$. Từ $2m + 1 = 9$ ta được $m = 4$.

- Nếu $b = 1$ thì $a = \frac{1}{9}$. Từ $2m + 1 = \frac{1}{9}$ ta được $m = -\frac{4}{9}$.

Ví dụ 118(18). Tìm các giá trị của m để tập nghiệm của phương trình sau chỉ có một phần tử :

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{9-x} = m. \quad (1)$$

Giải : Điều kiện cần. Giả sử a là nghiệm của (1) thì

$$\sqrt{a-5} + \sqrt{9-a} = m. \quad (2)$$

$$\text{hay} \quad \sqrt{(14-a)-5} + \sqrt{9-(14-a)} = m, \quad (3)$$

chứng tỏ $14-a$ cũng là nghiệm của (1)^(*).

Để tập nghiệm của (1) chỉ có một phần tử, phải có $a = 14-a \Leftrightarrow a = 7$. Khi đó $m = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Điều kiện đủ. Giải phương trình

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{9-x} = 2\sqrt{2}. \quad (4)$$

Cách 1. Điều kiện : $5 \leq x \leq 9$. Bình phương hai vế của (4) rồi rút gọn được

$$\sqrt{-x^2 + 14x - 45} = 2 \Leftrightarrow (x-7)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 7, \text{ thoả mãn } 5 \leq x \leq 9.$$

Cách 2. Đặt $\sqrt{x-5} = y$, $\sqrt{9-x} = z$. Từ hai phương trình $y + z = 2\sqrt{2}$, $y^2 + z^2 = 4$ với $y \geq 0$, $z \geq 0$, ta được $y = z = \sqrt{2}$. Suy ra $x = 7$.

Chú ý : Cách khác giải ví dụ 118 :

Điều kiện : $5 \leq x \leq 9$, $m \geq 0$. Bình phương hai vế của (1) được

$$4 + 2\sqrt{-x^2 + 14x - 45} = m^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{-x^2 + 14x - 45} = m^2 - 4. \quad (5)$$

Với điều kiện $m^2 \geq 4$ thì (5) trở thành

$$\begin{aligned} 4(-x^2 + 14x - 45) &= m^4 - 8m^2 + 16 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 56x + (m^4 - 8m^2 + 196) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Giải điều kiện $\Delta' = 0$ để tập nghiệm của (6) chỉ có một phần tử, ta được $m^2(m^2 - 8) = 0$. Do $m^2 \geq 4$ nên chỉ có $m^2 = 8$.

Do $m \geq 0$ nên $m = 2\sqrt{2}$. Khi đó tập nghiệm của (6) là $\{7\}$, đó cũng là tập nghiệm của (1).

Bài tập

354(17). Tìm các giá trị của m để tồn tại nghiệm không âm của phương trình

$$x^2 - 2x + (m-2) = 0.$$

355(17). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm :

$$x^2 + 2m|x-2| - 4x + m^2 + 3 = 0.$$

(*) Ta đã có $x_1 = a$. Ta tìm được $x_2 = 14-a$ như sau : Tìm x_2 sao cho $x_2 - 5 = 9 - a$ và $9 - x_2 = a - 5$, được $x_2 = 14 - a$.

356(17). Tìm các giá trị của m để phương trình

$$(m-1)x^2 - (m-5)x + (m-1) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn } -1.$$

357(17). Với giá trị nào của m thì hai nghiệm của phương trình $x^2 + x + m = 0$ đều lớn hơn m ?

358 (17). Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 + mx - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm nhỏ hơn hoặc bằng -2.

359(18). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt :

$$x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + m - 3)x - m^2 + 3 = 0.$$

360(18). Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm :

$$\text{a) } (m-3)x^4 - 2mx^2 + 6m = 0 ; \quad \text{b) } x^4 - 2mx^2 + (m+2) = 0.$$

361* (18). Cho phương trình

$$x^4 - 2(m-1)x^2 - (m-3) = 0. \quad (1)$$

Tìm các giá trị của m để tập nghiệm của phương trình (1) có :

a) Bốn phần tử; b) Ba phần tử ; c) Hai phần tử ; d) Không có phần tử nào.

362(18). Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$) thoả mãn điều kiện $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$:

$$\text{a) } mx^4 - 10mx^2 + (m+8) = 0 ; \quad \text{b) } x^4 - (m+7)x^2 + 3m = 0.$$

363(18). Tìm các giá trị của m sao cho phương trình $x^4 - 40x^2 + 6m = 0$ có bốn nghiệm, và khi biểu diễn bốn nghiệm đó (từ nhỏ đến lớn) trên trục số bởi các điểm A, B, C, D thì $AB = BC = CD$.

364(18). Chứng minh rằng phương trình sau có hai nghiệm với mọi giá trị của m :

$$(x+1)^4 - (m-1)(x+1)^2 - (m^2 - m + 1) = 0.$$

365* (18). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm :

$$x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0.$$

366(18). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$2x - 4 = 3\sqrt{x - m}.$$

367(18). Tìm các giá trị của m để tập nghiệm của phương trình sau chỉ có một phân tử :

a) $\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4-x^2} = m$;

b) $\sqrt{6-x} + \sqrt{x+2} = m$.

ĐA THỨC BẬC HAI VỚI BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TOÁN CỰC TRỊ

I – DẤU CỦA ĐA THỨC BẬC HAI

Ví dụ 119(16). Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Chứng minh rằng :

a) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị của x .

b) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị của x khác $-\frac{b}{2a}$.

c) Nếu $\Delta > 0$ thì :

$f(x)$ trái dấu với a với mọi giá trị của x nằm trong khoảng hai nghiệm ;

$f(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị của x nằm ngoài khoảng hai nghiệm.

Giải

$$\frac{f(x)}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}.$$

a) Nếu $\Delta < 0$ thì $\frac{f(x)}{a} > 0$, do đó $f(x)$ luôn cùng dấu với a với mọi x .

b) Nếu $\Delta = 0$ thì $\frac{f(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, do đó $f(x)$ luôn cùng dấu với a với

mọi x khác $-\frac{b}{2a}$.

c) Nếu $\Delta > 0$ thì $\frac{f(x)}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$, do đó (giả sử $x_1 < x_2$) :

$f(x)$ trái dấu với a nếu $x_1 < x < x_2$, $f(x)$ cùng dấu với a nếu $x < x_1$ hoặc

$x > x_2$.

Ví dụ 120(16). Tìm các giá trị của x để

$$x^2 - 2x - 1 > 0. \quad (1)$$

Giải

Cách 1. $(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 > 2 \Leftrightarrow |x - 1| > \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < -\sqrt{2} \\ x - 1 > \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Cách 2. (áp dụng ví dụ 119)

Phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$ có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Nghiệm của (1) là các giá trị của x sao cho $f(x) > 0$, tức là $f(x)$ cùng dấu với hệ số của x^2 , xảy ra điều này khi x nằm ngoài khoảng hai nghiệm, tức là :

$$\begin{cases} x < 1 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Ví dụ 121(16). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm :

$$mx^2 + (m - 2)x + 3 = 0. \quad (1)$$

Giải : Khi $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

Khi $m \neq 0$, (1) là phương trình bậc hai, $\Delta = (m - 2)^2 - 12m = m^2 - 16m + 4$.

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 16m + 4 \geq 0.$$

Nghiệm của đa thức $m^2 - 16m + 4$ là $8 \pm 2\sqrt{15}$.

$$\text{Do đó } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 8 - 2\sqrt{15} \\ m \geq 8 + 2\sqrt{15} \end{cases}$$

Giá trị $m = 0$ cũng thoả mãn $\Delta > 0$. Do đó các giá trị của m để (1) có nghiệm là

$$m \leq 8 - 2\sqrt{15} \text{ hoặc } m \geq 8 + 2\sqrt{15}.$$

II – CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ta có thể vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai ($\Delta \geq 0$) để chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 122(16). Cho đẳng thức

$$x^2 - x + y^2 - y = xy. \quad (1)$$

a) Chứng minh rằng $(y - 1)^2 \leq \frac{4}{3}$, $(x - 1)^2 \leq \frac{4}{3}$.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x ; y)$ thoả mãn đẳng thức (1).

Giải

a) Viết (1) dưới dạng một phương trình bậc hai với x là ẩn, y là tham số, ta được

$$x^2 - (y + 1)x + (y^2 - y) = 0. \quad (2)$$

$$\Delta = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1.$$

Để phương trình (2) với ẩn x có nghiệm, ta phải có $\Delta \geq 0$, tức là

$$3y^2 - 6y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 6y + 3 \leq 4 \Leftrightarrow 3(y - 1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow (y - 1)^2 \leq \frac{4}{3}.$$

Vai trò của x và y trong (1) bình đẳng. Do đó ta cũng có $(x - 1)^2 \leq \frac{4}{3}$.

b) $(y - 1)^2 \leq \frac{4}{3}$, mà y là số nguyên nên $y - 1 \in \{-1 ; 0 ; 1\}$, tương ứng $y \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

Thay $y = 0$ vào (1) được $x^2 - x = 0$ nên $x \in \{0 ; 1\}$.

Thay $y = 1$ vào (1) được $x^2 - 2x = 0$ nên $x \in \{0 ; 2\}$.

Thay $y = 2$ vào (1) được $x^2 - 3x + 2 = 0$ nên $x \in \{1 ; 2\}$. Thử lại, ta có sáu cặp số thoả mãn (1) là $(0 ; 0)$, $(1 ; 0)$, $(0 ; 1)$, $(2 ; 1)$, $(1 ; 2)$, $(2 ; 2)$.

III – PHƯƠNG PHÁP MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

Ví dụ 123(16). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Giải : Biểu thức A nhận giá trị a khi và chỉ khi phương trình ẩn x sau đây có nghiệm :

$$a = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}. \quad (1)$$

Do $x^2 + x + 1 \neq 0$ nên $(1) \Leftrightarrow ax^2 + ax + a = x^2 - x + 1$

$$\Leftrightarrow (a-1)x^2 + (a+1)x + (a-1) = 0. \quad (2)$$

Trường hợp 1. Nếu $a = 1$ thì (2) có nghiệm $x = 0$.

Trường hợp 2. Nếu $a \neq 1$ thì để (2) có nghiệm, cần và đủ là $\Delta \geq 0$, tức là

$$(a+1)^2 - 4(a-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+1+2a-2)(a+1-2a+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3a-1)(a-3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq a \leq 3 \quad (a \neq 1).$$

Với $a = \frac{1}{3}$ hoặc $a = 3$ thì nghiệm của (2) là $x = \frac{-(a+1)}{2(a-1)} = \frac{a+1}{2(1-a)}$.

Với $a = \frac{1}{3}$ thì $x = 1$, với $a = 3$ thì $x = -1$.

Kết luận : Gộp cả hai trường hợp 1 và 2, ta có :

$\min A = \frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x = 1$; $\max A = 3$ khi và chỉ khi $x = -1$.

Chú ý

a) Phương pháp giải như ở ví dụ trên gọi là *phương pháp miền giá trị của hàm số*. Đoạn $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ là tập giá trị của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

b) Cách khác tìm giá trị lớn nhất của A :

$$A = \frac{3x^2 + 3x + 3 - 2x^2 - 4x - 2}{x^2 + x + 1} = 3 - \frac{2(x+1)^2}{x^2 + x + 1} \leq 3 ;$$

$\max A = 3$ khi và chỉ khi $x = -1$.

c) Cách khác tìm giá trị nhỏ nhất của A :

$$\begin{aligned} A &= \frac{3x^2 - 3x + 3}{3x^2 + 3x + 3} = \frac{x^2 + x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{3(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2(x-1)^2}{3(x^2 + x + 1)} \geq \frac{1}{3} ; \end{aligned}$$

$\min A = \frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x = 1$.

Ví dụ 124^{*}(17). Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + mx + n}{x^2 + 2x + 4}$. Tìm các giá trị của m, n để biểu thức A có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$, giá trị lớn nhất bằng 3.

Giải : Gọi a là giá trị tùy ý của biểu thức A . Ta có

$$\frac{x^2 + mx + n}{x^2 + 2x + 4} = a \Leftrightarrow x^2 + mx + n = ax^2 + 2ax + 4a$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)x^2 + (2a - m)x + (4a - n) = 0. \quad (1)$$

Theo điều kiện của bài toán, giá trị $a = 1$ không là giá trị nhỏ nhất, không là giá trị lớn nhất của A nên ta chỉ xét $a \neq 1$. Từ (1) ta có

$$\Delta = (2a - m)^2 - 4(a - 1)(4a - n) = -12a^2 + 4(n - m + 4)a + (m^2 - 4n).$$

Điều kiện để (1) có nghiệm (tức là điều kiện để biểu thức A nhận giá trị a) là

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 12a^2 + 4(m - n - 4)a + (4n - m^2) \leq 0 \quad (2)$$

Nghiệm của bất phương trình (2) là $a_1 \leq a \leq a_2$, trong đó a_1 và a_2 là các nghiệm của phương trình

$$12a^2 + 4(m - n - 4)a + (4n - m^2) = 0. \quad (2')$$

Theo đề bài, ta phải có $\frac{1}{3} \leq a \leq 3$. Như vậy cần tìm m, n để (2') có hai nghiệm là $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = 3$. Theo hệ thức Vi-ét đối với phương trình (2') :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \frac{-4(m - n - 4)}{12} \\ a_1 a_2 = \frac{4n - m^2}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} + 3 = \frac{4 + n - m}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{4n - m^2}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + n - m = 10 \\ 4n - m^2 = 12 \end{cases}$$

Thay $n = 6 + m$ vào $4n - m^2 = 12$, ta được $m^2 - 4m - 12 = 0$ nên $m = 6$ hoặc $m = -2$.

Với $m = 6$ thì $n = 12$, khi đó $A = \frac{x^2 + 6x + 12}{x^2 + 2x + 4}$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ và giá trị lớn nhất là 3.

Với $m = -2$ thì $n = 4$, khi đó $A = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ và giá trị lớn nhất là 3.

IV – CỰC TRỊ CỦA ĐA THỨC BẬC HAI VỚI ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC CỦA BIẾN

Xét đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Ta có

$$\begin{aligned}f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.\end{aligned}$$

Nếu $a > 0$ thì $\min f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$ khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Nếu $a < 0$ thì $\max f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$ khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Như vậy, khi biến x nhận mọi giá trị thuộc $\mathbf{R}$ thì đa thức $f(x)$ đạt cực trị tại $x = -\frac{b}{2a}$. Sau đây ta sẽ xét các trường hợp biến x không nhận giá trị $-\frac{b}{2a}$.

Ví dụ 125(16). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (2x - 3)^2 - 7$ với $x \leq -1$ hoặc $x \geq 3$.

Giải.

Với $x \geq 3$ thì

$$2x - 3 \geq 2 \cdot 3 - 3 = 3 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 \geq 9 \Leftrightarrow A = (2x - 3)^2 - 7 \geq 2.$$

Với $x \leq -1$ thì

$$2x - 3 \leq 2(-1) - 3 = -5 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 \geq (-5)^2 \Leftrightarrow A = (2x - 3)^2 - 7 \geq 25 - 7 = 18.$$

So sánh hai trường hợp trên, ta thấy $\min A = 2$ khi và chỉ khi $x = 3$.

Chú ý : Mặc dù $A = (2x - 3)^2 - 7 \geq -7$, xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = \frac{3}{2}$,

nhưng giá trị này không thoả mãn $x \leq -1$, không thoả mãn $x \geq 3$. Do đó không thể kết luận được giá trị nhỏ nhất của A bằng -7 .

Ví dụ 126(17). Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình sau, tìm các giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị nhỏ nhất :

a) $x^2 - (2m - 1)x + (m - 2) = 0$;

b) $x^2 + 2(m - 2)x - (2m - 7) = 0$.

Giải

a) Xét phương trình $x^2 - (2m - 1)x + (m - 2) = 0$.

$$\Delta = (2m - 1)^2 - 4(m - 2) = 4(m - 1)^2 + 5 > 0.$$

Phương trình đã cho có nghiệm với mọi m .

Theo hệ thức Vi-ét, ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2m - 1)^2 - 2(m - 2) = 4m^2 - 6m + 5 \\ &= \left(2m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

$$\min(x_1^2 + x_2^2) = \frac{11}{4} \text{ với } m = \frac{3}{4}.$$

b) Xét phương trình $x^2 + 2(m - 2)x - (2m - 7) = 0$.

$$\Delta' = (m - 2)^2 + 2m - 7 = m^2 - 2m - 3 = (m - 3)(m + 1)$$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1 \text{ hoặc } m \geq 3.$$

Với $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$ thì phương trình có nghiệm.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m - 2)^2 - 2(-2m + 7) \\ &= 4m^2 - 12m + 2. \end{aligned}$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $4m^2 - 12m + 2$ với điều kiện $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

$$\text{Ta có} \quad 4m^2 - 12m + 2 = (2m - 3)^2 - 7.$$

$$\text{Theo ví dụ 125, } \min(4m^2 - 12m + 2) = 2 \text{ với } m = 3.$$

$$\text{Do đó } \min(x_1^2 + x_2^2) = 2 \text{ với } m = 3.$$

Ví dụ 127 (16). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = 3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 8\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$$

Giải : Đặt $m = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ thì $m^2 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 4$ nên $m^2 \geq 4$, tức là $|m| \geq 2$.

$$A = 3(m^2 - 2) - 8m = 3m^2 - 8m - 6.$$

Cần tìm giá trị nhỏ nhất của A với $m \geq 2$ hoặc $m \leq -2$.

Cách 1. $A = 3\left(m - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{34}{3}.$

Với $m \geq 2$, ta có

$$\begin{aligned} m - \frac{4}{3} &\geq 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(m - \frac{4}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{9} \\ \Rightarrow 3\left(m - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{34}{3} &\geq 3 \cdot \frac{4}{9} - \frac{34}{3} = -10. \end{aligned}$$

Với $m \leq -2$, ta có

$$\begin{aligned} m - \frac{4}{3} &\leq -2 - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3} \Rightarrow \left(m - \frac{4}{3}\right)^2 \geq \frac{100}{9} \\ \Rightarrow 3\left(m - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{34}{3} &\geq 3 \cdot \frac{100}{9} - \frac{34}{3} = 22. \end{aligned}$$

Vậy min $A = -10$ với $m = 2$, khi đó $a = b$.

Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned} A &= 3m^2 - 8m - 6 = m^2 - 4 + 2m^2 - 8m + 8 - 10 \\ &= (m^2 - 4) + 2(m - 2)^2 - 10. \end{aligned}$$

Do $m^2 \geq 4$, $(m - 2)^2 \geq 0$ nên $A \geq -10$.

Vậy min $A = -10$ với $m = 2$, khi đó $a = b$.

Bài tập

368(16). Chứng minh rằng nếu có các số x, y thoả mãn đẳng thức

$$x + y + xy = (x + y)^2 \text{ thì } -\frac{1}{3} \leq x \leq 1; -\frac{1}{3} \leq y \leq 1.$$

369(16). Chứng minh rằng nếu có các số x, y thoả mãn đẳng thức

$$x^2 = 3(xy + y - y^2) \text{ thì } 0 \leq y \leq 4.$$

370(17). Chứng minh rằng nếu có các số a, b, c thoả mãn $a + b + c = 5$ và

$$ab + bc + ac = 8 \text{ thì } 1 \leq a \leq \frac{7}{3}, 1 \leq b \leq \frac{7}{3}, 1 \leq c \leq \frac{7}{3}.$$

371(16). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^4 - 4x^3 + 8x + 20$.

372(16). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của :

$$\text{a) } A = \frac{x}{x^2 + 1};$$

$$\text{b) } B = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1};$$

$$\text{c) } C = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2};$$

$$\text{d) } D = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}.$$

373(16). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$.

374(16). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) - 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$.

375^{*}(16). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$ với $x > 0$.

376^{*}(17). Tìm các số m, n để biểu thức $A = \frac{2x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$ nhận giá trị nhỏ nhất bằng 1, giá trị lớn nhất bằng 6.

377(17). Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \left(xy + \frac{1}{xy} \right)^2$ với $x + y = 1$.

378(16). Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}$ với $0 < x < 1$.

379(18). Cho phương trình $x^4 + 2x^2 + 2ax + (a+1)^2 = 0$.

Tìm giá trị của a để nghiệm của phương trình đó :

a) Đạt giá trị nhỏ nhất ;

b) Đạt giá trị lớn nhất.

380^{*}(16). Cho phương trình $x^2 + ax + (a-5) = 0$ với $a \geq -1$. Tìm giá trị lớn nhất mà nghiệm của phương trình đó có thể đạt được.

Phương trình đại số bậc cao

Bốn nghìn năm trước đây, người Hi Lạp đã biết cách giải các phương trình bậc nhất và bậc hai. Trải qua nhiều thế kỉ, các nhà toán học tìm cách giải tổng quát các phương trình bậc ba, nhưng không kết quả.

Mãi đến năm 1526, nhà toán học I-ta-li-a Phe-rô (*Ferro*) mới tìm được cách giải phương trình bậc ba dạng $x^3 + ax = b$ với $a, b > 0$, nhưng ông không công bố phát minh của mình. Năm được cách giải này, tháng 2 năm 1535, các học trò của Phe-rô thách nhà toán học có tiếng lúc đó là Tac-ta-li-a (*Tartaglia*) giải phương trình bậc ba và họ tin rằng mình nắm chắc phần thắng. Một tuần trước ngày thi tài, Tac-ta-li-a đã tìm được cách giải tổng quát phương trình $x^3 + ax + b = 0$ với mọi giá trị của a và b . Ông đã giải được tất cả 30 bài toán của đối phương trong ngày độ sức, trong khi đối phương không giải được bài nào trong 30 bài toán mà ông đưa ra.

Theo lời khẩn khoản của Cac-đa-nô (*Cardano*), Tac-ta-li-a đã truyền lại cách giải ấy, nhưng yêu cầu giữ bí mật. Năm 1545, Cac-đa-nô công bố công thức tìm nghiệm của phương trình bậc ba trong một cuốn sách của mình.

I – PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Trước hết, phương trình bậc ba nào cũng dễ dàng biến đổi về dạng

$$y^3 + my^2 + ny + c = 0. \quad (1)$$

Bằng cách đặt $y = x - \frac{m}{3}$, phương trình sẽ có dạng $x^3 + ax + b = 0$.

Để giải phương trình

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (2)$$

ta biểu thị ẩn x thành tổng của hai ẩn u và v , tức là $x = u + v$. Như thế, v có thể chọn giá trị tùy ý. Thay vào (2), ta có

$$(u + v)^3 + a(u + v) + b = 0 \Leftrightarrow (u^3 + v^3 + b) + (u + v)(3uv + a) = 0.$$

Chọn v sao cho $3uv + a = 0$, bài toán sẽ quy về giải hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ uv = -\frac{a}{3} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ u^3 v^3 = -\frac{a^3}{27} \end{cases}$$

Như vậy, u^3 và v^3 là nghiệm của phương trình bậc hai

$$t^2 + bt - \frac{a^3}{27} = 0. \quad (3)$$

Giải phương trình (3), nếu (3) có nghiệm thì ta được

$$u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{D}, v^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{D} \quad (4)$$

trong đó $D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

Do đó công thức nghiệm của phương trình (2) là

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{D}}. \quad (5)$$

Phần tiếp theo của mục này liên quan đến số phức học ở lớp 12, được trình bày vắn tắt để bạn đọc tham khảo. Ta công nhận có số i mà $i^2 = -1$, khi đó $\sqrt{D}$ luôn tồn tại, chẳng hạn với $D = -4$ thì $\sqrt{D} = \sqrt{-4} = \sqrt{4i^2} = 2i$. Do đó với $D = -4$ và $b = 6$ thì nghiệm của phương trình (2) là $x = \sqrt[3]{-3+2i} + \sqrt[3]{-3-2i}$. Các số $-3+2i$ và $-3-2i$ là các số phức.

Vì căn bậc ba của một số phức có ba giá trị, nên công thức (5) cho ba giá trị của u cũng như v , các giá trị đó được lựa chọn để thoả mãn điều kiện $uv = -\frac{a}{3}$. Người ta tìm được ba nghiệm của phương trình (2) là:

$$x_1 = u_1 + v_1,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1),$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1),$$

với u_1 là một giá trị của u và v_1 là giá trị tương ứng của v thoả mãn (4) và điều kiện $uv = -\frac{a}{3}$.

Nếu $D > 0$, trong các nghiệm của phương trình (2) có một nghiệm thực. Nếu $D = 0$, trong các nghiệm của phương trình (2) có hai nghiệm thực, trong đó có một nghiệm kép. Nếu $D < 0$, phải tính căn bậc hai của một số âm, được một số phức. Do đó để tìm u_1 , phải biết khai căn bậc ba của một số phức. Đó là một công việc khá phức tạp. Điều lí thú trong trường hợp $D < 0$ là phương trình có ba nghiệm thực. Thành ra việc sử dụng công cụ số phức lại giúp tìm được nghiệm thực của phương trình.

Sau đây là một số ví dụ tìm nghiệm thực của phương trình bậc ba.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$y^3 + 3y^2 + 12y - 16 = 0.$$

Giải : Đặt $y = x - 1$, ta có

$$(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 12(x-1) - 16 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 9x - 26 = 0.$$

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(-\frac{26}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{3}\right)^3 = 13^2 + 3^3 = 196 > 0 ;$$

$$u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{D} = 13 + 14 = 27 \text{ nên } u_1 = 3, \text{ suy ra } v_1 = -1.$$

Phương trình $x^3 + 9x - 26 = 0$ có một nghiệm thực $x = 3 - 1 = 2$. Do đó phương trình đã cho có một nghiệm thực $y = 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$x^3 - 3x - 2 = 0.$$

$$\text{Giải : } D = \left(-\frac{2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{3}\right)^3 = 1 - 1 = 0 ;$$

$$u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{D} = 1, \text{ nên } u_1 = 1, \text{ suy ra } v_1 = 1.$$

Phương trình có hai nghiệm thực $x_1 = 1 + 1 = 2$ và $x_2 = x_3 = -1$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$x^3 - 6x + 4 = 0.$$

$$\text{Giải : } D = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = 4 - 8 = -4 < 0 ;$$

$$\sqrt{D} = 2i ; v^3 = -2 - 2i = -\sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{8}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ).$$

Người ta chứng minh được rằng một trong các căn bậc ba của số phức $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ là $\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{3} + i\sin\frac{\alpha}{3}\right)$. Do đó một giá trị của v là

$$v_1 = -\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ).$$

Ta tính được $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (xem bài 39 phần Hình học trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 9* tập một) nên

$$v_1 = -\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ) = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

$$\text{Do đó } u_1 = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Phương trình có ba nghiệm thực :

$$x_1 = u_1 + v_1 = -(\sqrt{3} + 1) ;$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = 2 ;$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = \sqrt{3} - 1.$$

II – PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

Năm 1545, nhà toán học I-ta-li-a Phe-ra-ri (*Ferrari*), học trò của Cac-đa-nô, đã tìm ra cách giải tổng quát phương trình bậc bốn. Cách giải này được trình bày trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0. \quad (1)$$

Giải : Chuyển ba hạng tử cuối sang vế phải rồi cộng $16x^2$ vào hai vế, ta được

$$(x^2 + 4x)^2 = x^2 + 4x + 2.$$

Đưa vào một ẩn mới là y , cộng hai vế của phương trình trên với $(x^2 + 4x)y + \frac{y^2}{4}$, phương trình trở thành

$$\left(x^2 + 4x + \frac{y}{2}\right)^2 = (1+y)x^2 + (4+4y)x + \left(\frac{y^2}{4} + 2\right). \quad (2)$$

Lựa chọn y sao cho vế phải là một bình phương. Muốn vậy, biệt số Δ của tam thức bậc hai đối với x (ở vế phải) phải bằng 0, tức là

$$(4+4y)^2 - 4(1+y)\left(\frac{y^2}{4} + 2\right) = 0$$

hay
$$(1+y)[16(1+y) - (y^2 + 8)] = 0.$$

Ta có ngay một giá trị $y = -1$.

Thay giá trị này vào phương trình (2), được

$$\left(x^2 + 4x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}. \quad (3)$$

Phương trình (3) tương đương với hai phương trình $x^2 + 4x + 1 = 0$ và $x^2 + 4x - 2 = 0$. Giải các phương trình bậc hai đó, được bốn nghiệm của phương trình (1) là :

$$x = -2 \pm \sqrt{3} ; \quad x = -2 \pm \sqrt{6}.$$

III – MỘT SỐ CÁCH GIẢI KHÁC

Giải phương trình bậc ba và bậc bốn bằng công thức tổng quát khá phức tạp. Tuy vậy, nhiều phương trình bậc ba và bậc bốn giải được dễ dàng bằng phương pháp hạ bậc sau khi phân tích vế trái của phương trình thành nhân tử hoặc đưa vào các ẩn mới.

Chẳng hạn, các phương trình nêu trong các ví dụ 1, 2, 3, 4 có thể biến đổi thành

$$(y - 1)(y^2 + 4y + 16) = 0,$$

$$(x - 2)(x + 1)^2 = 0,$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x - 2) = 0,$$

$$(x^2 + 4x + 1)(x^2 + 4x - 2) = 0.$$

Khi đó, việc giải phương trình bậc ba và bậc bốn được đưa về giải các phương trình bậc nhất và bậc hai.

IV – PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO HƠN BỐN

Trong các thế kỉ XVII, XVIII, các nhà toán học đã mất bao công sức để tìm cách giải tổng quát các phương trình bậc năm, bậc sáu. Đến đầu thế kỉ XIX, vấn đề mới được giải quyết bởi hai nhà toán học thiên tài A-ben người Na Uy (*Niels Henrik Abel*, 1802 – 1829) và Ga-loa người Pháp (*Évariste Galois*, 1811 – 1832).

Cuộc đời của hai nhà toán học giống nhau một cách kì lạ. Cả hai cùng mất cha năm 18 tuổi, cùng phải chật vật kiếm sống để đảm đương gánh nặng gia đình. Cả hai đều bị xã hội bất công vùi dập, đều gặp nhiều bất hạnh, đắng cay. A-ben chết năm 27 tuổi, còn Ga-loa chết năm 21 tuổi, sau A-ben 3 năm. Một công trình lớn của A-ben về hàm siêu việt, sau này được đánh giá là để lại công việc cho các nhà toán học nghiên cứu 500 năm sau, được gửi đến Viện Hàn lâm Khoa học Pháp, đã bị Cô-si làm thất lạc, mãi sau mới tìm thấy khi A-ben đã qua đời. Ga-loa cũng gửi các công trình của mình đến Viện hàn lâm Khoa học Pháp, nhưng đều gặp rủi ro, lần thì Cô-si đánh mất, lần thì Phu-ri-ê nhận rồi chết đột ngột, lần thì các viện sĩ không hiểu nổi.



A-ben



Ga-loa

Là người tích cực chống chế độ phong kiến, Ga-loa hai lần bị cầm tù vì hoạt động chính trị, cuối cùng bị chết trong một cuộc đấu súng do bọn mật thám bố trí. Biết mình khó thoát, hôm trước cuộc đấu, Ga-loa viết vội 62 trang bản thảo về điều kiện

giải được các phương trình bằng căn thức trong 13 giờ. Ga-loa đã đưa ra khái niệm mở rộng phân rã của đa thức và nhóm của mở rộng này (mà ta gọi là nhóm Ga-loa), sự giải được của một phương trình bằng căn thức tương đương với một điều kiện mà nhóm Ga-loa phải có. Ý tưởng độc đáo và sự phức tạp của vấn đề làm cho các nhà toán học đương thời không hiểu nổi. Mười bốn năm sau, công trình của Ga-loa mới được công bố trong một cuốn sách của Liu-vin, nhưng không ai chú ý tới. Mãi đến năm 1870, sau nhiều năm nghiên cứu, Jor-đăng mới hiểu được công trình của Ga-loa và cho xuất bản một cuốn sách giải thích 62 trang bản thảo cô đọng và súc tích này.

Cống hiến của A-ben là đã chứng minh các phương trình bậc cao hơn bốn dưới dạng tổng quát không giải được bằng căn thức, nghĩa là không thể biểu thị được nghiệm của các phương trình đó bằng các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa, khai căn. Còn Ga-loa đã chỉ ra được dấu hiệu nhận biết một phương trình bậc cao hơn bốn có thể giải được bằng căn thức hay không bằng một lí thuyết độc đáo sau này mang tên ông : lí thuyết nhóm. Hai ông đã giải quyết được một vấn đề toán học bế tắc hàng mấy thế kỉ và đưa môn đại số phát triển những bước mới.

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III

GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

§11. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

Căn cứ vào số đo của cung mà ta thiết lập quan hệ bằng nhau hoặc không bằng nhau giữa hai cung trong một đường tròn.

Để thiết lập sự tương ứng 1-1 giữa cung và dây căng cung, ta chỉ xét các cung nhỏ hơn hoặc bằng nửa đường tròn. Ta có trong một đường tròn :

- Hai cung bằng nhau khi và chỉ khi hai dây căng cung bằng nhau ;
- Cung lớn hơn khi và chỉ khi dây căng cung lớn hơn.

Quan hệ giữa dây và cung còn được thể hiện ở các định lí :

- Hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau ;
- Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và chia dây ấy thành hai phần bằng nhau ;
- Đường kính đi qua trung điểm của một dây (không phải là đường kính) thì chia cung căng dây ấy thành hai phần bằng nhau.

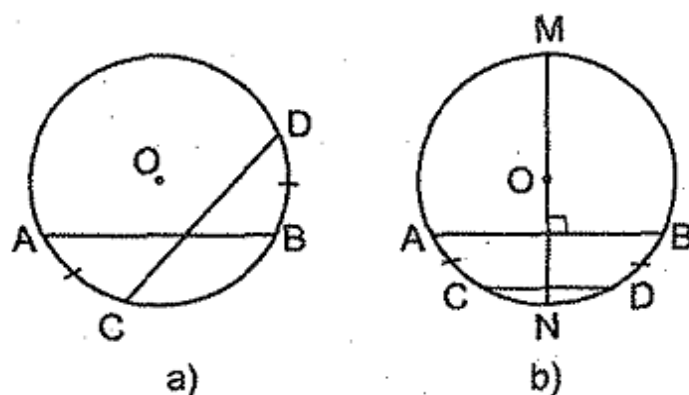
Lưu ý : Khi nói cung AB mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là cung nhỏ AB.

Ví dụ 31. Cho đường tròn tâm O, dây AB. Các điểm C và D di chuyển trên đường tròn sao cho $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. Trong trường hợp nào thì dây CD có độ dài không đổi ?

Giải : (h.10)

Xét hai trường hợp :

a) Trường hợp các cung AC (theo chiều từ A đến C) và BD (theo chiều từ B đến D) là cùng chiều trên đường tròn (h.10a) :



Hình 10

– Xét C thuộc cung nhỏ AB :

$\widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{CB} = \widehat{CB} + \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD$. Dây CD có độ dài không đổi.

– Xét C thuộc cung lớn AB. Chứng minh tương tự, dây CD có độ dài không đổi.

b) Trường hợp các cung AC và BD (theo quy ước trên) là ngược chiều trên đường tròn (h.10b).

Gọi MN là đường kính vuông góc với AB. Ta có $\widehat{NA} = \widehat{NB}$, $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ nên $\widehat{NC} = \widehat{ND}$. Do đó MN là đường trung trực của dây CD, C và D đối xứng với nhau qua MN. Độ dài dây CD thay đổi khi C và D di chuyển.

Vậy dây CD có độ dài không đổi khi và chỉ khi các cung AC và BD (theo chiều từ A đến C, từ B đến D trên đường tròn) là cùng chiều.

Bài tập

194. Tính bán kính của đường tròn (O), biết rằng dây AB của đường tròn có độ dài bằng 2a và khoảng cách từ điểm chính giữa của cung AB đến dây AB bằng h.

195. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2 cm, dây CD song song với AB ($C \in \widehat{AD}$). Tính độ dài các cạnh của hình thang ABDC biết chu vi hình thang bằng 5cm.

196. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 20cm. C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Điểm H thuộc bán kính OA sao cho OH = 6 cm. Đường vuông góc với OA tại H cắt nửa đường tròn ở D. Vẽ dây AE song song với DC. Gọi K là hình chiếu của E trên AB. Tính diện tích tam giác AEK.

197*. Cho tam giác đều ABC có diện tích S, nội tiếp đường tròn (O). Trên các cung AB, BC, CA, lấy theo thứ tự các điểm A', B', C' sao cho các cung $\widehat{AA'}$, $\widehat{BB'}$, $\widehat{CC'}$ đều có số đo bằng 30° . Tính diện tích phần chung của hai tam giác ABC và A'B'C'.

198*. Gọi R và r theo thứ tự là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp một tam giác. Chứng minh rằng $R \geq 2r$.

§12. GÓC NỘI TIẾP

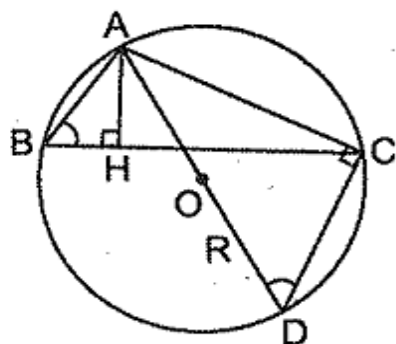
Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn. Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

Nếu hai cát tuyến AB, CD của một đường tròn cắt nhau tại điểm M (ở bên trong hoặc ở bên ngoài đường tròn) thì ta có hệ thức $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Ví dụ 32. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R) có $AB = 8\text{cm}$, $AC = 15\text{cm}$, đường cao $AH = 5\text{cm}$ (điểm H nằm trên cạnh BC). Tính bán kính của đường tròn.

Giải : (h.11)



Hình 11

Kẻ đường kính AD. Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung), $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Vậy $\triangle AHB \sim \triangle ACD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{5}{15} = \frac{8}{2R} \Rightarrow R = 12 \text{ (cm)}.$$

Bán kính của đường tròn (O) bằng 12cm.

Chú ý : Nếu điểm H nằm ngoài cạnh BC, ta vẫn có $R = 12 \text{ cm}$ (xem ví dụ 38).

Ví dụ 33. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R), gọi (I ; r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, H là tiếp điểm của AB với đường tròn (I), D là giao điểm của AI với đường tròn (O), DK là đường kính của đường tròn (O). Gọi d là độ dài của OI. Chứng minh rằng :

- Tam giác AHI và tam giác KCD đồng dạng ;
- $DI = DB = DC$;
- $IA \cdot ID = R^2 - d^2$;
- $d^2 = R^2 - 2Rr$ (định lý Ô-le).

Giải : (h.12)

a) Xét hai tam giác KCD và AHI, ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{K}$, $\widehat{AHI} = \widehat{KCD} = 90^\circ$ nên $\triangle AHI \sim \triangle KCD$ (g.g).

b) $\widehat{BID} = \widehat{B}_1 + \widehat{A}_1$, $\widehat{IBD} = \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3$. Ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{B}_3$ nên $\widehat{BID} = \widehat{IBD}$. Suy ra $DI = DB$. Tương tự $DI = DC$. Vậy $DI = DB = DC$.

c) Gọi MN là đường kính đi qua I của đường tròn (O) . Theo hệ thức lượng trong đường tròn, ta có

$$IA \cdot ID = IM \cdot IN = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2. \quad (1)$$

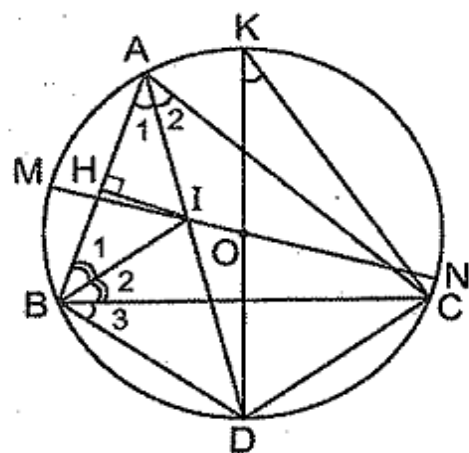
d) Từ câu a suy ra $\frac{IA}{DK} = \frac{IH}{DC}$ nên

$$IA \cdot DC = DK \cdot IH = 2Rr.$$

Do $DC = DI$ (câu b) nên ta có

$$IA \cdot ID = 2Rr. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $R^2 - d^2 = 2Rr$, tức là $d^2 = R^2 - 2Rr$.



Hình 12

Bài tập

199. Cho tam giác nhọn ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.
200. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 12\text{cm}$. Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) ở M và cắt tiếp tuyến của đường tròn tại B ở N . Gọi I là trung điểm của MN . Tính độ dài AM , biết rằng $AI = 13\text{ cm}$.
201. Cho đường tròn tâm O bán kính R , các đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của OB . Tia CI cắt đường tròn ở E , EA cắt CD ở K . Tính độ dài DK .
202. Cho nửa đường tròn đường kính BC . Các điểm M, N thuộc nửa đường tròn sao cho $\widehat{BM} = \widehat{MN} = \widehat{NC}$. Các điểm D, E thuộc đường kính BC sao cho $BD = DE = EC$. Gọi A là giao điểm của MD và NE . Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.
203. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF cắt đường tròn (O) theo thứ tự ở M, N, K . Chứng minh rằng

$$\frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CK}{CF} = 4.$$

204. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB có dây CD vuông góc với AB. Gọi M là một điểm bất kì thuộc đường tròn (MC không song song với AB), E là giao điểm của MD và AB, F là giao điểm của MC và AB. Chứng minh rằng $\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB}$.

205*. Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến ABC. Gọi E là điểm chính giữa của cung BC, DE là đường kính của đường tròn. AD cắt đường tròn tại I, IE cắt BC tại K. Chứng minh rằng AC.BK = AB.KC.

206. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, bán kính OC = R. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cung AC, CB. Gọi E, G theo thứ tự là hình chiếu của M, N trên AB. Gọi F, H theo thứ tự là hình chiếu của M, N trên OC. Chứng minh rằng EF = GH.

207. Trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, vẽ các dây AA' // BC, BB' // AC, CC' // AB. Trên các cung AA', BB', CC', lấy các cung AD, BE, CF theo thứ tự bằng $\frac{1}{3}$ các cung trên. Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.

208. Các đường cao BH, CK của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp theo thứ tự ở D, E. Tính số đo góc A biết rằng DE là đường kính của đường tròn.

209. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm, I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Chứng minh rằng AI là tia phân giác của góc OAH.

b) Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$, chứng minh rằng IO = IH.

210. Tính số đo góc A của tam giác ABC biết rằng khoảng cách từ A đến trực tâm của tam giác bằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

211. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cung BC.

a) Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

b) Gọi D là giao điểm của MA và BC. Chứng minh rằng $\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = 1$.

c*) Tính tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo R.

212. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 54^\circ$, $\widehat{C} = 18^\circ$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Chứng minh rằng $AC - AB = R$.

213. Hai đường tròn tâm O và O' cùng bán kính R cắt nhau ở A và B. Một đường thẳng d song song với OO' cắt các đường tròn trên tại các điểm C, D, E, F theo thứ tự trên d ($C, E \in (O)$; $D, F \in (O')$).

- a) Chứng minh rằng CDO'O là hình bình hành.
- b) Tính độ dài CD biết $AB = a$.
- c) Chứng minh rằng số đo góc CAD không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d (d luôn luôn song song với OO').
214. Cho điểm C thuộc nửa đường tròn đường kính AB, H là hình chiếu của C trên AB. Các điểm D, E thuộc nửa đường tròn đó sao cho HC là tia phân giác của góc DHE. Chứng minh rằng $HC^2 = HD \cdot HE$.
215. Một đường tròn tâm O đi qua đỉnh A và các trung điểm D, E của các cạnh AB, AC của tam giác ABC sao cho BC tiếp xúc với đường tròn tại K. Chứng minh rằng $KA^2 = KB \cdot KC$.
216. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm E thuộc cạnh AC sao cho các độ dài BE, AE, CE là những số tự nhiên.
217. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm M thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng $AB^2 - AM^2 = MB \cdot MC$ (bằng cách vẽ đường tròn tâm A bán kính AB).
218. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Chứng minh rằng
- $$AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$$
- (bằng cách vẽ giao điểm E của AD với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).
- 219*. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Các điểm M, N theo thứ tự di chuyển trên các đường tròn (O), (O') sao cho chiều từ A đến M và từ A đến N trên các đường tròn đều theo chiều quay của kim đồng hồ và các cung $\widehat{AM}$, $\widehat{AN}$ có số đo bằng nhau. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn : MN đi qua B.

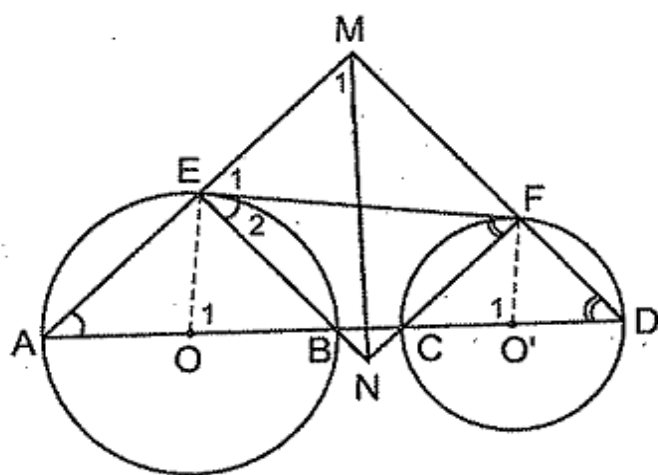
~ Bài tập : 391, 401, 406, 409, 421.

§13. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Nếu góc BAx có số đo bằng nửa số đo của cung BA nằm trong góc đó thì Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn chứa cung AB.

Nếu MT là tiếp tuyến và MAB là cát tuyến của một đường tròn thì ta có hệ thức $MT^2 = MA \cdot MB$.



Hình 13

Ví dụ 34. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt các đường tròn (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF, $E \in (O)$, $F \in (O')$. Gọi M là giao điểm của AE và DF, N là giao điểm của EB và FC. Chứng minh rằng :

- MENF là hình chữ nhật ;
- MN vuông góc với AD ;
- $ME.MA = MF.MD$.

Giải : (h.13)

a) Theo tính chất góc nội tiếp :

$$\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{O_1}, \widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{O'_1}, \text{ mà } \widehat{O_1} + \widehat{O'_1} = 180^\circ \text{ (vì } OE \parallel O'F \text{) nên } \widehat{A} + \widehat{D} = 90^\circ.$$

Do đó $\widehat{AMD} = 90^\circ$.

Ta lại có $\widehat{MEB} = 90^\circ$, $\widehat{MFC} = 90^\circ$.

Tứ giác MENF có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

b) Theo tính chất hình chữ nhật : $\widehat{M_1} = \widehat{E_1}$.

Theo tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, ta có $\widehat{A} = \widehat{E_2}$.

Suy ra $\widehat{M_1} + \widehat{A} = 90^\circ$. Do đó $MN \perp AD$.

$$\text{c) } \triangle MFE \sim \triangle MAD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MF}{MA} = \frac{ME}{MD} \Rightarrow ME.MA = MF.MD.$$

Ví dụ 35. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi BD là dây của đường tròn song song với AC, E là giao điểm của AD với đường tròn, I là giao điểm của BE và AC. Chứng minh rằng I là trung điểm của AC.

Giải : (h.14)

Cách 1. IC là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

$$IC^2 = IE.IB. \quad (1)$$

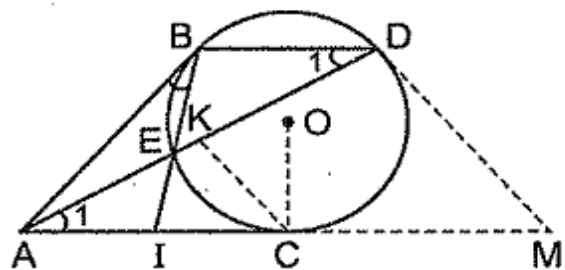
Theo tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, ta có $\widehat{EBA} = \widehat{D_1}$, mà $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ (so le trong, $BD \parallel AC$) nên $\widehat{EBA} = \widehat{A_1}$.

$$\Delta IBA \sim \Delta IAE \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{IA}{IE} = \frac{IB}{IA} \Rightarrow IA^2 = IE \cdot IB. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $IA = IC$.

Cách 2. Kẻ tiếp tuyến với (O) tại D, cắt AC ở M. Hình thang ABDM có $\widehat{DBA} = \widehat{BDM}$ nên là hình thang cân. Suy ra $\widehat{BAI} = \widehat{M}$ và C là trung điểm của AM.



Hình 14

Gọi K là trung điểm của AD, ta có CK là đường trung bình của ΔADM nên

$$CK = \frac{MD}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2}.$$

ΔABI và ΔCAK có $AB = AC$, $\widehat{ABI} = \widehat{CAK}$ (cùng bằng $\widehat{D_1}$), $\widehat{BAI} = \widehat{ACK}$ (cùng bằng $\widehat{M}$) nên $\Delta ABI = \Delta CAK$ (g.c.g). Suy ra $AI = CK$.

$$\text{Do } CK = \frac{AC}{2} \text{ nên } AI = \frac{AC}{2}, \text{ hay } AI = IC.$$

Bài tập

220. Cho tam giác ABC. Vẽ đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B. Kẻ dây BD song song với AC. Gọi I là giao điểm của CD với đường tròn. Chứng minh rằng $\widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}$.
221. Cho đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Dây BC của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại H. Gọi D, E theo thứ tự là giao điểm (khác A) của AB, AC với đường tròn nhỏ. Chứng minh rằng:
- DE song song với BC;
 - AH là tia phân giác của góc BAC.
222. Cho điểm B thuộc đoạn thẳng AC. Vẽ về một phía của AC các nửa đường tròn có đường kính AC, AB, BC có tâm theo thứ tự là O, O_1 , O_2 . Gọi EF là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (O_1) và (O_2), $E \in (O_1)$, $F \in (O_2)$. Đường vuông góc với AC tại B cắt nửa đường tròn (O) ở D. Chứng minh rằng BEDF là hình chữ nhật.
223. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn tâm A cắt đường tròn (O) ở C và D. Kẻ dây BN của đường tròn (O), cắt đường tròn (A) tại điểm E ở bên trong đường tròn (O). Chứng minh rằng
- $\widehat{CEN} = \widehat{EDN}$;
 - $NE^2 = NC \cdot ND$.

- 224*. Tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O đường kính 5cm. Tiếp tuyến với đường tròn tại C cắt tia phân giác của góc B tại K. Tính độ dài BK, biết rằng BK cắt AC tại D và $BD = 4$ cm.
225. Tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau ở E. Vẽ các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEB, CED. Tìm điều kiện của tứ giác để hai đường tròn tiếp xúc nhau.
226. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A cắt BC ở I.
- Chứng minh rằng $\frac{IB}{IC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.
 - Tính IA, IC, biết rằng $AB = 20$ cm, $AC = 28$ cm, $BC = 24$ cm.
227. Cho hình vuông ABCD có cạnh dài 2cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua A và B biết rằng đoạn tiếp tuyến kẻ từ D đến đường tròn đó bằng 4cm.
228. Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung trực của AB cắt BC ở K. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACK.
229. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $BD^2 = AB \cdot CD$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BC.
230. Cho hình bình hành ABCD, $\hat{A} \leq 90^\circ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AC ở E. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB.
- 231*. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CC' ($C \in (O)$, $C' \in (O')$), kẻ đường kính COD. Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm của OO' với C'D, CC'. Chứng minh rằng :
- $\widehat{EAF} = 90^\circ$ (A, C, C' nằm cùng phía đối với OO').
 - FA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CAC'.
- 232*. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau ở A và B, trong đó tiếp tuyến chung CD song song với cát tuyến chung EBF, C và E thuộc (O), D và F thuộc (O'), B nằm giữa E và F. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của DA, CA với EF. Gọi I là giao điểm của EC và FD. Chứng minh rằng :
- $\triangle ICD = \triangle BCD$.
 - IB là đường trung trực của MN.

§14. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

Ví dụ 36. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Điểm D di chuyển trên cung AC. Gọi E là giao điểm của AC và BD, gọi F là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{AFB} = \widehat{ABD}$.

b) Tích AE. BF không đổi.

Giải : (h.15)

a) Theo tính chất góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn :

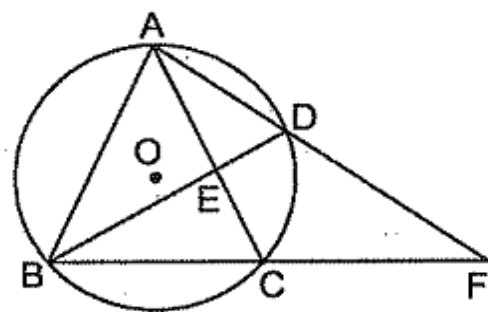
$$\widehat{AFB} = \frac{1}{2}(\text{sd}\widehat{AB} - \text{sd}\widehat{CD}). \quad (1)$$

Theo tính chất góc nội tiếp :

$$\widehat{ABD} = \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{AD} = \frac{1}{2}(\text{sd}\widehat{AB} - \text{sd}\widehat{CD}). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AFB} = \widehat{ABD}$.

b) $\triangle AFB$ và $\triangle EBA$ có $\widehat{AFB} = \widehat{EBA}$ (câu a), $\widehat{FBA} = \widehat{BAE} = 60^\circ$ nên chúng đồng dạng, suy ra $\frac{AB}{AE} = \frac{BF}{AB}$. Do đó $AE \cdot BF = AB^2$ (không đổi).



Hình 15

Bài tập

233. Tứ giác ABCD có các góc B và D tù. Chứng minh rằng $AC > BD$.

234. Cho đường tròn tâm O bán kính 2 cm, các bán kính OA và OB vuông góc với nhau. M là điểm chính giữa của cung AB. Gọi C là giao điểm của AM và OB, H là hình chiếu của M trên OA. Tính diện tích hình thang OHMC.

235*. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CA. Gọi D là giao điểm của MN và AB, E là giao điểm của PN và AC. Chứng minh rằng DE song song với BC.

236*. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đó ; M, N , P theo thứ tự là tâm của các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C. Gọi K là điểm đối xứng với I qua O. Chứng minh rằng K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

~ Ví dụ : 62.

Bài tập : 388, 389.

§15. CUNG CHỨA GÓC

Cung chứa góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) dựng trên đoạn thẳng AB là cung mà mọi góc ACB có đỉnh C thuộc cung đó đều có số đo bằng α .

Áp dụng cung chứa góc vào chứng minh : Nếu một tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α thì bốn đỉnh của tứ giác ấy thuộc cùng một đường tròn.

Áp dụng cung chứa góc vào các bài toán quỹ tích và dựng hình : Xem các chuyên đề *Quỹ tích, Dựng hình*.

Ví dụ 37. Từ điểm M ở bên ngoài đường tròn tâm O, kẻ cát tuyến MAB đi qua O và các tiếp tuyến MC, MD. Gọi K là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng :

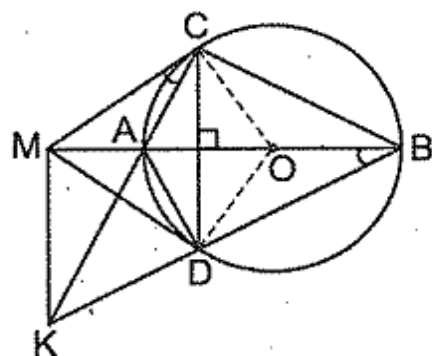
- Bốn điểm B, C, M, K thuộc cùng một đường tròn.
- MK vuông góc với AB.

Giải : (h.16)

a) Dễ dàng chứng minh $AB \perp CD$ nên $\widehat{AC} = \widehat{AD}$, do đó $\widehat{ACM} = \widehat{ABD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây và góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau), tức là $\widehat{KCM} = \widehat{KBM}$.

Tứ giác BCMK có các đỉnh B và C cùng nhìn KM dưới hai góc bằng nhau nên bốn điểm B, C, M, K thuộc cùng một đường tròn.

- Từ câu a suy ra $\widehat{BMK} = \widehat{BCK} = 90^\circ$. Vậy $KM \perp AB$.



Hình 16

Bài tập

237. Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} < 90^\circ$. Đường tròn tâm A bán kính AB cắt đường thẳng BC ở điểm thứ hai E. Đường tròn tâm C bán kính CB cắt đường thẳng AB ở điểm thứ hai K. Chứng minh rằng :
- $DE = DK$;
 - Năm điểm A, D, C, K, E thuộc cùng một đường tròn.
238. Qua điểm M thuộc cạnh đáy BC của tam giác cân ABC, kẻ các đường thẳng song song với các cạnh bên, chúng cắt AB, AC theo thứ tự ở D, E. Gọi I là điểm đối xứng với M qua DE. Chứng minh rằng :
- Điểm I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ;
 - Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng IM đi qua một điểm cố định.
239. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AD, điểm M nằm giữa B và C. Đường trung trực của BM cắt AB ở E, đường trung trực của CM cắt AC ở F. Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua EF, I là giao điểm của NM và AD. Chứng minh rằng năm điểm A, B, I, C, N thuộc cùng một đường tròn.
240. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), O là giao điểm của hai đường chéo. Trên tia OA lấy điểm M sao cho $OM = OB$. Trên tia OB lấy điểm N sao cho $ON = OA$. Chứng minh rằng :
- Bốn điểm D, M, N, C thuộc cùng một đường tròn ;
 - $\widehat{ACN} = \widehat{BDM}$.
- 241*. Cho tam giác ABC ($AC > AB$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác đó tiếp xúc với AB, BC ở D, E. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AC, BC. Gọi K là giao điểm của MN và AI. Chứng minh rằng :
- Bốn điểm I, E, K, C thuộc cùng một đường tròn ;
 - Ba điểm D, E, K thẳng hàng.
- 242*. Cho tam giác ABC, đường cao AH, đường trung tuyến AM (H, M phân biệt và thuộc cạnh BC) thoả mãn $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

~ Ví dụ : 49, 51, 54 đến 56, 61.

Bài tập : 356 đến 364, 370, 372, 373, 377, 378, 383 đến 387, 390, 392, 393, 395 đến 398, 411 đến 417.

§16. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).

Trong một tứ giác nội tiếp, hai góc đối bù nhau.

Đảo lại, nếu một tứ giác có hai góc đối bù nhau thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

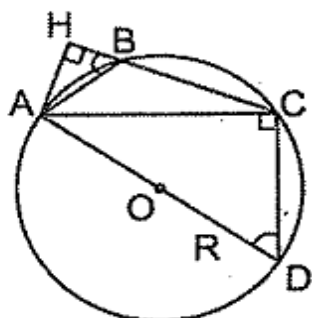
Ví dụ 38. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R) có AB = 8 cm, AC = 15 cm, đường cao AH = 5 cm (điểm H nằm ngoài cạnh BC). Tính bán kính của đường tròn.

Giải : (h.17)

Kẻ đường kính AD. Ta có ABCD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$. Ta lại có $\widehat{ABH} + \widehat{ABC} = 180^\circ$. Do đó $\widehat{ABH} = \widehat{ADC}$.

$\triangle ABH \sim \triangle ADC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{5}{15} = \frac{8}{2R} \Rightarrow R = 12 \text{ (cm)}.$$



Hình 17

Chú ý : Nếu điểm H nằm trên cạnh BC, ta vẫn có $R = 12$ cm (xem ví dụ 32).

Ví dụ 39. Chứng minh rằng chân các đường vuông góc kẻ từ một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp một tam giác đến ba cạnh của tam giác ấy nằm trên một đường thẳng.

Giải : Xét $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O), M là điểm bất kì thuộc đường tròn, $MH \perp AB$, $MI \perp AC$, $MK \perp BC$ (h.18).

Tứ giác MIKC có $\widehat{MIC} = \widehat{MKC} = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra

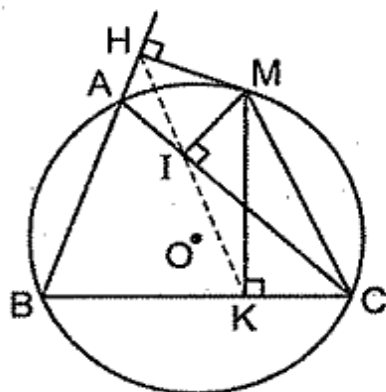
$$\widehat{MIK} + \widehat{MCB} = 180^\circ. \quad (1)$$

ABCM là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{MCB} = \widehat{MAH} \text{ (cùng bù với } \widehat{MAB} \text{)}. \quad (2)$$

Tứ giác AIMH có $\widehat{AIM} + \widehat{AHM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra

$$\widehat{MAH} = \widehat{MIH}. \quad (3)$$



Hình 18

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{MIK} + \widehat{MIH} = 180^\circ$. Vậy ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Ghi chú : Đường thẳng HIK trong ví dụ trên được gọi là đường thẳng Xim-xon của điểm M (Robert Simson, 1687 – 1768, nhà toán học Xcôt-len).

Ví dụ 40*. Qua điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến ABC với đường tròn. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau ở K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AO, cắt AO tại H và cắt đường tròn (O) tại E và F (E nằm giữa K và F). Gọi M là giao điểm của OK và BC. Chứng minh rằng :

- EMOF là tứ giác nội tiếp ;
- AE, AF là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

Giải : (h.19).

- $\triangle OKC$ vuông, $CM \perp OK$ nên

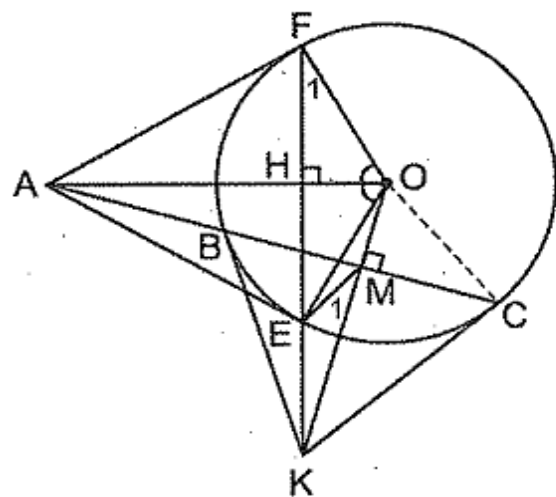
$$KC^2 = KM.KO.$$

KC là tiếp tuyến, KEF là cát tuyến nên

$$KC^2 = KE.KF.$$

Suy ra $KM.KO = KE.KF$, nên

$$\frac{KM}{KE} = \frac{KF}{KO}.$$



Hình 19

Ta có $\triangle KEM \sim \triangle KOF$ (c.g.c) nên $\widehat{M_1} = \widehat{F_1}$, từ đó EMOF là tứ giác nội tiếp. (1)

b) Đặt $\widehat{M_1} = \widehat{F_1} = \alpha$. Ta có $\widehat{AOE} = \widehat{AOF} = 90^\circ - \alpha$, $\widehat{AME} = 90^\circ - \alpha$, nên AOME là tứ giác nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra năm điểm A, E, M, O, F thuộc cùng một đường tròn, đường kính của đường tròn là AO (vì $\widehat{AMO} = 90^\circ$).

Do đó $\widehat{AFO} = \widehat{AEO} = 90^\circ$, tức là AF và AE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài tập

243. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC$. Lấy điểm I thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{C}$. Đường tròn (O) đường kính IC cắt BI ở D và cắt BC ở M.

Chứng minh rằng:

- a) CI là tia phân giác của góc DCM ;
- b) DA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

244. Cho tam giác ABC vuông tại A, I là trung điểm của BC, D là điểm nằm giữa I và C. Gọi E, F theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng E và F nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AID.

245. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, đường phân giác AD. Gọi H, K theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng $OH = OK$.

246. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng :

a) $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$;

b) $AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{2}$.

247. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD, trực tâm H. Gọi AM, AN là các tiếp tuyến với đường tròn (O) đường kính BC (M, N là các tiếp điểm). Chứng minh rằng :

- a) AMDN là tứ giác nội tiếp ;
- b) Ba điểm M, H, N thẳng hàng.

248. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R), đường cao AH. Chứng minh rằng :

a) $AB \cdot AC = 2R \cdot AH$;

b) $S = \frac{abc}{4R}$ với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, diện tích tam giác ABC bằng S.

249. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của các góc A, B, C cắt đường tròn (O) theo thứ tự ở D, E, F. Chứng minh rằng :

a) $AD > \frac{AB + AC}{2}$;

b) $AD + BE + CF$ lớn hơn chu vi tam giác ABC.

250*. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt BC ở D, cắt đường tròn ở E. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB, AC. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của E trên AB, AC. Chứng minh rằng :

a) $AI + AK = AB + AC$;

b) Diện tích tứ giác AMEN bằng diện tích tam giác ABC.

251*. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm M thuộc cung BC không chứa A. Gọi MH, MI, MK theo thứ tự là các đường vuông góc kẻ từ M đến BC, AB, AC. Chứng minh rằng $\frac{BC}{MH} = \frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK}$.

252. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên EF. Chứng minh rằng $DE + DF = IK$.

253. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD, CE. Vẽ ở phía ngoài tam giác các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AC, AB. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của BD, CE với các nửa đường tròn đó. Chứng minh rằng $AI = AK$.

254. Cho đường tròn tâm O và hai điểm B, C thuộc đường tròn, các tiếp tuyến với đường tròn tại B và tại C cắt nhau ở A. Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC. Tiếp tuyến với đường tròn tại M cắt AB, AC theo thứ tự ở D, E. Gọi giao điểm của OD, OE với BC theo thứ tự là I, K. Chứng minh rằng :

a) OBDK, DIKE là các tứ giác nội tiếp ;

b) Các đường thẳng OM, DK, EI đồng quy.

255. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn tâm O, vẽ các tiếp tuyến AB, AC (B và C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC. Kẻ dây EF bất kì đi qua H. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc EAF.

256*. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn tâm O, vẽ các tiếp tuyến AB, AC (B và C là các tiếp điểm) và cát tuyến ADE. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với OB cắt BC, BE theo thứ tự ở H, K. Chứng minh rằng $DH = HK$.

257. Cho đường tròn (O). Qua điểm K ở bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến KB, KD (B, D là các tiếp điểm), kẻ cát tuyến KAC.

a) Chứng minh rằng $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

b) Vẽ dây CN song song với BD. Gọi I là giao điểm của AN và BD. Chứng minh rằng I là trung điểm của BD.

258*. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Từ điểm B thuộc đường tròn (O'), kẻ các tiếp tuyến BC, BD với đường tròn (O) (C, D là các tiếp điểm). Gọi E, F theo thứ tự là các giao điểm thứ hai của CA, DA với đường tròn (O'). Chứng minh rằng $AF \cdot BE = AE \cdot BF$.

Hướng dẫn : Sử dụng kết quả ở câu a của bài 257.

259. Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD . Gọi E là hình chiếu của B trên AD , H là hình chiếu của A trên BC , M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $\triangle MEH$ là tam giác cân.
260. Tứ giác $ABCD$ có $AB = AD + BC$, cạnh AB và các tia phân giác của các góc C và D đồng quy. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thang hoặc tứ giác nội tiếp.
261. Cho tam giác ABC . Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác, K là tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A . Chứng minh rằng $AI \cdot AK = AB \cdot AC$.
- 262*. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC cắt đoạn nối các tâm B', C' của hai đường tròn bàng tiếp trong các góc B, C tại điểm M (khác A). Chứng minh rằng M là trung điểm của $B'C'$.
263. Một hình thang cân nội tiếp đường tròn tâm O , cạnh bên được nhìn từ O dưới góc 120° . Tính diện tích hình thang, biết đường cao của hình thang bằng h .
264. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = a$, $CD = b$, $a < b$. Một đường tròn (O) đi qua A và B , cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N . Tính độ dài MN theo a, b , biết rằng các tứ giác $ABNM$ và $CDMN$ có diện tích bằng nhau.
265. Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AD, BE, CF . Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác DEF .
- Chứng minh rằng OA vuông góc với EF .
 - Tính tỉ số diện tích các tam giác DEF và ABC theo R và r .
- 266*. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{C} = 40^\circ$, đường cao AH , điểm I thuộc cạnh AC sao cho $AI = \frac{1}{3}AC$, điểm K thuộc tia đối của tia HA sao cho $HK = \frac{1}{3}AH$. Tính số đo góc BIK .
267. Tam giác ABC cân có $\widehat{A} = 100^\circ$. Điểm D thuộc nửa mặt phẳng không chứa A có bờ BC sao cho $\widehat{CBD} = 15^\circ$, $\widehat{BCD} = 35^\circ$. Tính số đo góc ADB .
268. Tam giác ABC nhọn, trực tâm H . Vẽ hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{ABH} = \widehat{ADH}$.

269. Cho tam giác ABC. Điểm I nằm trong tam giác sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{ACI}$. Vẽ hình bình hành BICK. Chứng minh rằng $\widehat{BAI} = \widehat{CAK}$.
270. Cho điểm I nằm trong hình bình hành ABCD sao cho $\widehat{IAB} = \widehat{ICB}$. Chứng minh rằng $\widehat{IBC} = \widehat{IDC}$.
271. Cho tam giác đều ABC, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đối xứng với M qua AC. Vẽ hình bình hành DMEI. Chứng minh rằng :
- Bốn điểm D, A, I, E thuộc cùng một đường tròn ;
 - AI song song với BC.
272. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$), điểm E nằm giữa C và D. Vẽ đường tròn (O) đi qua E và tiếp xúc với AD tại D. Vẽ đường tròn (O') đi qua E và tiếp xúc với AC tại C. Gọi K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn đó. Chứng minh rằng :
- Năm điểm A, B, C, D, K thuộc cùng một đường tròn ;
 - Ba điểm K, E, B thẳng hàng.
273. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là điểm chính giữa của $\widehat{BC}$ không chứa A. Vẽ đường tròn (O_1) đi qua I và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn (O_2) đi qua I và tiếp xúc với AC tại C. Gọi K là giao điểm thứ hai của các đường tròn (O_1), (O_2).
- Chứng minh rằng ba điểm B, K, C thẳng hàng.
 - Lấy điểm D bất kì thuộc cạnh AB, điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A.
274. Cho đường tròn tâm O đường kính AB, điểm C cố định trên đường kính ấy ($C \neq O$). Điểm M chuyển động trên đường tròn. Đường vuông góc với AB tại C cắt MA, MB theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định khác A.
275. Cho góc vuông xAy, điểm B cố định trên Ay, điểm C di chuyển trên Ax. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC, BC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.
- 276*. Cho đường tròn tâm O đường kính BC, A là một điểm thuộc đường tròn. H là hình chiếu của A trên BC. Vẽ đường tròn (I) có đường kính AH, cắt AB và AC theo thứ tự ở M và N.

- a) Chứng minh rằng OA vuông góc với MN .
- b) Vẽ đường kính AOK của đường tròn (O) . Gọi E là trung điểm của HK . Chứng minh rằng E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMNC$.
- c) Cho BC cố định. Xác định vị trí của điểm A để bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMNC$ lớn nhất.

277*. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi (P) , (Q) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp hai tam giác AHB và AHC . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài (khác BC) của hai đường tròn (P) và (Q) , nó cắt AB , AH , AC theo thứ tự ở M , K , N . Chứng minh rằng :

- a) Các tam giác HPQ và ABC đồng dạng ;
- b) $KP \parallel AB$, $KQ \parallel AC$;
- c) $BMNC$ là tứ giác nội tiếp ;
- d) Năm điểm A , M , P , Q , N thuộc cùng một đường tròn ;
- e) Tam giác AED vuông cân (D , E theo thứ tự là giao điểm của PQ với AB , AC).

278. Cho đường tròn tâm O , dây AB . Điểm M di chuyển trên cung lớn AB . Các đường cao AE , BF của tam giác ABM cắt nhau ở H .

- a) Chứng minh rằng OM vuông góc với EF .
- b) Đường tròn tâm H bán kính HM cắt MA , MB theo thứ tự ở C , D . Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ M và vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định.
- c) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ H và vuông góc với CD cũng đi qua một điểm cố định.

279*. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn tâm I tùy ý đi qua B và C , cắt AB và AC theo thứ tự ở M và N . Đường tròn tâm K ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D . Chứng minh rằng :

- a) $AKIO$ là hình bình hành ;
- b) $\widehat{ADI} = 90^\circ$.

280. Dựng ra phía ngoài một tứ giác nội tiếp các hình chữ nhật mà mỗi hình chữ nhật có một cạnh là của tứ giác, cạnh kia bằng cạnh đối diện của tứ giác. Chứng minh rằng giao điểm các đường chéo của bốn hình chữ nhật là các đỉnh của một hình chữ nhật.

281. Cho đường tròn đường kính AC, dây BD vuông góc với AC. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là tâm của các đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ABD, ACD, BCD. Chứng minh rằng EFGH là hình vuông.

282. Cho đường tròn (O), dây AB, điểm M thuộc đường tròn. Gọi Ax, By là các tiếp tuyến của đường tròn, H, I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, Ax, By. Chứng minh rằng :

a) $MH^2 = MI \cdot MK$;

b) $MI + MK \geq 2MH$.

283*. Gọi M là điểm bất kì thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tứ giác ABCD. Khoảng cách từ M đến các đường thẳng AB, BC, CD, AD theo thứ tự là MH, MK, MI, MN. Chứng minh rằng $MH \cdot MI = MK \cdot MN$.

284. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM, đường phân giác AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB, AC theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng $BE = CF$.

285*. Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính AB, điểm C thuộc bán kính OA. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn ở D. Đường tròn tâm I tiếp xúc với nửa đường tròn và tiếp xúc với các đoạn thẳng CA, CD. Gọi E là tiếp điểm trên AC của đường tròn (I).

a) Chứng minh rằng $BD = BE$.

b) Suy ra cách dựng đường tròn (I) nói trên.

286*. Cho tam giác ABC cân tại A, $AB = 16$, $BC = 24$, đường cao AE. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC tại F.

a) Chứng minh rằng OECF là tứ giác nội tiếp và BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

b) Gọi M là giao điểm của BF với đường tròn (O). Chứng minh rằng BMOC là tứ giác nội tiếp.

287. Cho đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Các dây BC, BD của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O') theo thứ tự tại E, F. Gọi I là giao điểm của EF với tia phân giác của góc CAD. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{DAF} = \frac{1}{2} \widehat{DCB}$;

b) $\widehat{DAF} = \widehat{IAE}$.

c) I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

- 288*. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Lấy điểm M bất kỳ thuộc DF, kẻ MN song song với BC (N thuộc DE). Lấy điểm I trên đường thẳng DE sao cho $\widehat{MAI} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng :
- Tam giác AMN là tam giác cân ;
 - AMNI là tứ giác nội tiếp ;
 - MA là tia phân giác của góc FMI.
- 289*. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CD ($C \in (O)$, $D \in (O')$). Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của C, D trên OO'. Chứng minh rằng $\widehat{OAO'} = \widehat{HAK}$.
290. Cho hai hình vuông ABCD, A'B'C'D' sao cho nếu vẽ các đường tròn ngoại tiếp các hình vuông thì chiều từ A lần lượt qua B, C, D và chiều từ A lần lượt qua B', C', D' đều theo chiều quay của kim đồng hồ. Gọi I là giao điểm của BB' và DD'. Chứng minh rằng :
- I thuộc đường tròn ngoại tiếp mỗi hình vuông ;
 - CC' cũng đi qua điểm I.
- 291*. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Đường vuông góc với AD tại A cắt BC ở E. Đường vuông góc với AB tại A cắt CD ở F. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.
292. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AC, AB theo thứ tự ở D, E, F. Biết $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.
293. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB và A'B', các tiếp tuyến chung trong CD và EF (A, A', C, E thuộc (O) ; B, B', D, F thuộc (O')). Gọi M là giao điểm của AB và EF, N là giao điểm của A'B' và CD, H là giao điểm của MN và OO'. Chứng minh rằng :
- MN vuông góc với OO' ;
 - Năm điểm O', B, M, H, F thuộc cùng một đường tròn ;
 - Năm điểm O, A, M, E, H thuộc cùng một đường tròn ;
 - Ba điểm H, D, B thẳng hàng ;
 - Ba điểm A, H, C thẳng hàng.
- 294*. Cho đường tròn tâm O, hai điểm A và B ở vị trí đối xứng với nhau qua một bán kính của đường tròn. Vẽ dây CD đi qua A, dây EF đi qua B. Các

đường thẳng CE, DF cắt đường thẳng AB theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng $AN = BM$.

295*. Cho ABCD là tứ giác nội tiếp có các cạnh đối không song song, F là giao điểm của AB và CD, E là giao điểm của DA và CB. Gọi H và G theo thứ tự là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng :

a) Tia phân giác của góc BED cũng là tia phân giác của góc HEG.

b) Các tia phân giác của các góc BED và BFD gặp nhau tại một điểm nằm trên GH.

296*. Cho tứ giác ABCD. Vẽ bốn đường tròn, mỗi đường tròn đi qua trung điểm các cạnh của một trong các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng bốn đường tròn đó cùng giao nhau tại một điểm.

297*. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Kẻ ra ngoài tam giác ABC các tia Ax, Ay theo thứ tự tạo với AB, AC các góc nhọn bằng nhau. Gọi I là hình chiếu của B trên Ax, gọi K là hình chiếu của C trên Ay, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng :

a) $MI = MK$;

b) Bốn điểm I, H, M, K thuộc cùng một đường tròn.

298*. Cho tam giác ABC, trực tâm H. Kẻ các đường thẳng AA', BB', CC' sao cho các tia phân giác của các góc A'AH, B'BH, C'CH song song với nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' gặp nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Sử dụng ví dụ 39 (về đường thẳng Xim-xon) để giải các bài toán sau (từ bài 299 đến bài 302) :

299. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm M thuộc cung AC, Ax là tiếp tuyến tại A. Gọi H, I, K, N theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC, BC, Ax. Chứng minh rằng $MH, MI = MK, MN$.

300. Cho tam giác ABC và các điểm M, N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ấy. Biết các đường thẳng Xim-xon của điểm M, của điểm N vuông góc với nhau. Chứng minh rằng MN là đường kính của đường tròn .

301. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H, I theo thứ tự là hình chiếu của B trên AC, CD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, HI. Chứng minh rằng :

a) Các tam giác ABD và HBI đồng dạng ;

b*) $\widehat{MNB} = 90^\circ$.

302*. Cho tam giác ABC, M là điểm bất kì thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ấy. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đối xứng với M qua BC. Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O) thì DE luôn đi qua một điểm cố định.

303. Chứng minh rằng trong một tứ giác nội tiếp, tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của hai cặp cạnh đối.

Định lí Ptô-lê-mê (Ptolémée, thế kỉ II, nhà toán học Hi Lạp)

304. Vận dụng định lí Ptô-lê-mê (bài 303) để giải bài toán sau : Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ tâm của đường tròn ngoại tiếp một tam giác nhọn đến các cạnh của tam giác bằng tổng các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Định lí Cac-nô (Lazare Carnot, 1753 – 1823, nhà toán học Pháp)

~ Ví dụ : 50, 52, 53, 57, 59, 60, 63 đến 65.

Bài tập : 365 đến 369, 371, 374 đến 376, 379 đến 382, 394, 400, 403 đến 405, 407, 408, 410, 418 đến 420, 424 đến 432.

§17. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP ĐA GIÁC

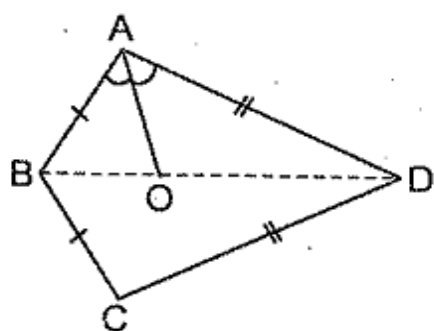
Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác, khi đó đa giác được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.

Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác, khi đó đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.

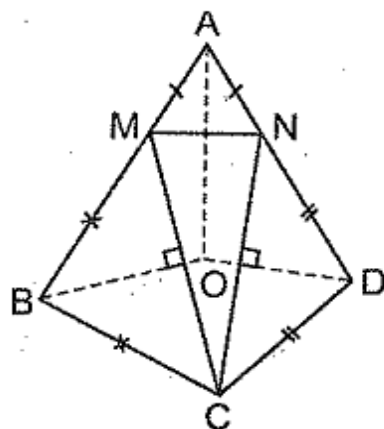
Điều kiện cần và đủ để một tứ giác ngoại tiếp đường tròn là tổng các cạnh đối bằng nhau.

Đa giác đều nào cũng có một đường tròn ngoại tiếp, một đường tròn nội tiếp. Tâm của hai đường tròn này trùng nhau và được gọi là tâm của đa giác đều.

Ví dụ 41. Chứng minh định lí "Nếu tứ giác ABCD có tổng các cạnh đối bằng nhau $AB + CD = BC + AD$ thì tứ giác đó ngoại tiếp được một đường tròn" bằng cách chứng minh các tia phân giác của bốn góc A, B, C, D cùng gặp nhau tại một điểm.



a)



b)

Hình 20

Giải : Ta chỉ cần chứng minh các tia phân giác của ba góc A, B, D gặp nhau tại một điểm. Xét hai trường hợp :

a) Nếu $AB = BC$ (h.20a) thì do giả thiết suy ra $CD = AD$, do đó BD là đường phân giác của các góc B và D. Gọi O là giao điểm của tia phân giác góc A với BD. Thế thì BO, DO là các tia phân giác của các góc $\widehat{B}$, $\widehat{D}$.

b) Nếu $AB \neq BC$ (h.20b), giả sử $AB > BC$, thế thì $DA > DC$. Lấy điểm M trên AB, điểm N trên AD sao cho $BM = BC$, $DN = DC$. Do giả thiết suy ra $AM = AN$. Các đường phân giác của các góc A, B, D chính là các đường trung trực của $\triangle CMN$ nên chúng gặp nhau tại một điểm O.

Điểm O là tâm của đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD.

Ví dụ 42. Các đường trung tuyến BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại I. Cho biết tứ giác ADIE ngoại tiếp được một đường tròn. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

Giải : (h.21)

Chứng minh bằng phản chứng.

Đặt $AD = b$, $AE = c$, $ID = m$, $IE = n$. Ta có ADIE là tứ giác ngoại tiếp nên

$$b + n = c + m. \quad (1)$$

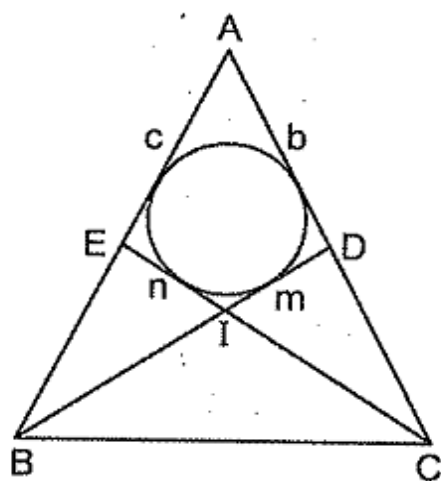
Mặt khác dễ dàng chứng minh được bổ đề :
"Trong một tam giác, đường trung tuyến ứng với cạnh lớn hơn thì nhỏ hơn". Do đó :

Nếu $b > c$ thì $n > m$ (theo bổ đề). Suy ra

$$b + n > c + m, \text{ trái với (1).}$$

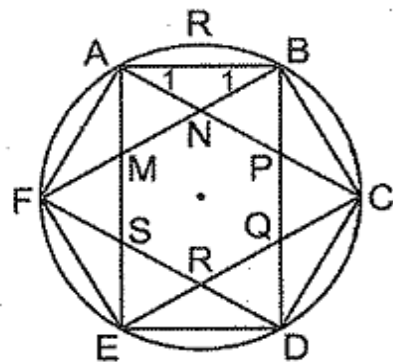
Nếu $b < c$ thì $n < m$ (theo bổ đề). Suy ra $b + n < c + m$, trái với (1).

Vậy $b = c$. Suy ra $\triangle ABC$ là tam giác cân.



Hình 21

Ví dụ 43. Cho một lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R . Kẻ các đường chéo nối các đỉnh cách nhau một đỉnh. Tính diện tích lục giác có đỉnh là giao điểm của các đường chéo đó.



Hình 22

Giải

Kí hiệu như trên hình 22. Ta có $\triangle AMN$ đều (vì các góc bằng 60°), $\triangle ANB$ cân (vì $\widehat{A_1} = \widehat{B_1} = 30^\circ$), $\triangle AMF$ cân, nên

$$FM = MN = NB = \frac{AB}{2 \sin 60^\circ} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

$MNPQRS$ là lục giác đều (dễ chứng minh) có diện tích bằng :

$$\frac{MN^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{R^2 \sqrt{3}}{3 \cdot 4} \cdot 6 = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Bài tập

Tứ giác ngoại tiếp đường tròn

- 305.** Hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) ngoại tiếp đường tròn tâm O . Tính diện tích hình thang biết rằng :
- $OB = 10\text{cm}$, $OC = 20\text{cm}$;
 - $AB = b$, $CD = a$.
- 306.** Hình thang $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm O , đáy nhỏ $AB = 2\text{cm}$, E là tiếp điểm của đường tròn (O) trên cạnh BC . Biết rằng $BE = 1\text{cm}$, $EC = 4\text{cm}$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang cân và tìm diện tích của nó.
- 307.** Tính các cạnh của một hình thang cân ngoại tiếp đường tròn (O ; 10cm) biết khoảng cách giữa hai tiếp điểm trên cạnh bên bằng 16cm .
- 308.** Đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông $ABCD$, tiếp điểm trên AB là M . Một tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt các cạnh BC , CD lần lượt ở E , F . Chứng minh rằng :
- Các tam giác DFO và BOE đồng dạng ;
 - ME song song với AF .
- 309.** Cho tứ giác $ABCD$, các đường tròn nội tiếp hai tam giác ABC , ADC tiếp xúc nhau. Chứng minh rằng các đường tròn nội tiếp hai tam giác BAD , BCD tiếp xúc nhau.

310. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp một đường tròn. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau và chu vi bằng nhau thì đường thẳng đó đi qua tâm của đường tròn đó.

311. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) ngoại tiếp đường tròn (O), tiếp điểm trên AB, CD theo thứ tự là E, F. Chứng minh rằng AC, BD, EF đồng quy.

312*. Chứng minh rằng trong một tứ giác ngoại tiếp đường tròn, các đường thẳng nối các tiếp điểm trên các cạnh đối đồng quy tại giao điểm các đường chéo của tứ giác.

313*. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo BD và AC. Chứng minh rằng :

$$a) S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} ;$$

b) Ba điểm I, O, K thẳng hàng.

Tứ giác nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn

314. Cho đường tròn tâm O, các dây AB, CD vuông góc với nhau. Các tiếp tuyến với đường tròn tại A, B, C, D cắt nhau lần lượt tại E, F, G, H. Chứng minh rằng EFGH là tứ giác nội tiếp.

315. Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O), đồng thời nội tiếp một đường tròn khác, $AB = 14$ cm, $BC = 18$ cm, $CD = 26$ cm. Gọi H là tiếp điểm của CD và đường tròn (O). Tính các độ dài HC, HD.

316*. Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O ; r), đồng thời nội tiếp một đường tròn khác. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là hình chiếu của O trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng :

$$a) r^2 = AE \cdot CG = BF \cdot DH ;$$

b) Diện tích tứ giác ABCD bằng $\sqrt{abcd}$ với $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

Đa giác nội tiếp đường tròn

317. Cho lục giác ABCDEF nội tiếp một đường tròn và có hai cặp cạnh đối song song là $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$. Chứng minh rằng hai cạnh đối còn lại cũng song song với nhau.

318*. Lục giác ABCDEF nội tiếp một đường tròn có các cạnh AB, CD, EF bằng bán kính của đường tròn. Chứng minh rằng các trung điểm của ba cạnh còn lại là các đỉnh của một tam giác đều.

Đa giác đều nội tiếp, ngoại tiếp đường tròn

319. Tính diện tích bát giác đều cạnh a .

320. Cho đa giác đều 20 cạnh $A_1A_2...A_{20}$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc đường tròn. Tính tổng $MA_1^2 + MA_2^2 + ... + MA_{20}^2$.

321*. Cho tam giác đều ABC và hình vuông $ADEG$ cùng nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Tính diện tích phần chung của tam giác và hình vuông.

~ Bài tập : 399, 433.

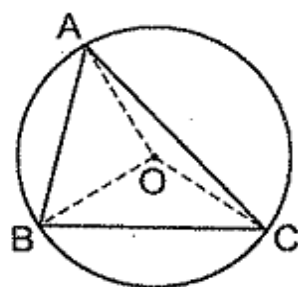
§18. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN

Độ dài đường tròn còn được gọi là chu vi hình tròn và được kí hiệu là C . Gọi bán kính của đường tròn là R , ta có $C = 2\pi R$.

Trên đường tròn bán kính R , độ dài l của một cung n° được tính theo công thức

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Ví dụ 44. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Độ dài các cung AB , BC , CA theo thứ tự bằng 3π , 4π , 5π . Tính diện tích tam giác ABC .



Hình 23

Giải : (h.23) Gọi R là bán kính của đường tròn (O) . Ta có $2\pi R = 3\pi + 4\pi + 5\pi$ nên $R = 6$.

Số đo của các góc AOB , BOC , COA tỉ lệ với 3, 4, 5 nên

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{AOB}}{3} &= \frac{\widehat{BOC}}{4} = \frac{\widehat{COA}}{5} = \frac{\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA}}{3 + 4 + 5} \\ &= \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{AOB} = 90^\circ$, $\widehat{BOC} = 120^\circ$, $\widehat{COA} = 150^\circ$. Ta có

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18.$$

Để chứng minh : Nếu một tam giác có hai cạnh bằng a, b và góc tạo bởi hai cạnh này là góc tù α thì diện tích tam giác bằng $\frac{1}{2}ab\sin(180^\circ - \alpha)$. Do đó

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}R^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3},$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}R^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{2} = 9.$$

Vậy $S_{ABC} = 18 + 9\sqrt{3} + 9 = 27 + 9\sqrt{3}.$

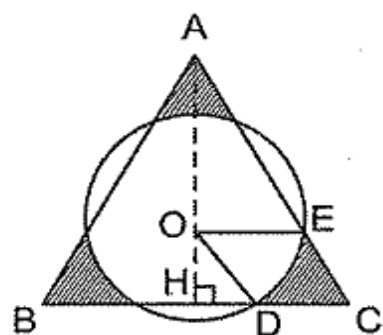
Bài tập

322. Cho đường tròn tâm O, cung AB bằng 120° . Các tiếp tuyến của đường tròn tại A và tại B cắt nhau ở C. Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc với các đoạn thẳng CA, CB và cung AB nói trên. So sánh độ dài của đường tròn (I) với độ dài cung AB của đường tròn (O).
323. Cho hai đường tròn đồng tâm. Biết khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm thuộc hai đường tròn bằng 1m. Tính hiệu các độ dài của hai đường tròn.
324. Cho hình quạt tròn có cung BC bằng 120° , tâm A bán kính R. Tính độ dài đường tròn nội tiếp hình quạt đó (đường tròn nội tiếp hình quạt là đường tròn tiếp xúc với cung BC và với các bán kính AB, AC).
325. Lấy bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường tròn (O) sao cho $sđ\widehat{AB} = 60^\circ$, $sđ\widehat{BC} = 90^\circ$, $sđ\widehat{CD} = 120^\circ$.
- a) Tứ giác ABCD là hình gì ?
- b) Tính độ dài đường tròn (O), biết diện tích tứ giác ABCD bằng $100m^2$.

§19. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

Diện tích S của hình tròn bán kính R được tính theo công thức $S = \pi R^2$.

Ví dụ 45. Cho tam giác đều có tâm O, cạnh 3cm. Vẽ đường tròn tâm O bán kính 1cm. Tính diện tích phần tam giác nằm ngoài hình tròn.



Hình 24

Giải : (h.24)

Gọi AH là đường cao của tam giác đều ABC, ta có :

$$AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}, OH = \frac{AH}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}.$$

Xét $\triangle OHD$ vuông tại H, ta có

$$HD^2 = OD^2 - OH^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow HD = \frac{1}{2} \text{ cm}.$$

Suy ra $CD = 1 \text{ cm}$. Tương tự $CE = 1 \text{ cm}$.

Tứ giác ODCE là hình thoi cạnh 1 cm, $\widehat{DCE} = 60^\circ$. Do đó

$$S_{ODCE} = \frac{CD^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích hình quạt ODE bằng $\frac{\pi \cdot 1^2}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ (cm}^2\text{)}.$

Diện tích "tam giác cong" CED (phần gạch sọc giới hạn bởi các đoạn thẳng CD, CE và cung DE) bằng

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích phải tìm bằng

$$\frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi) \cdot 3 = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} - \pi) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài tập

326. Cho một hình thang ngoại tiếp một đường tròn. So sánh tỉ số giữa diện tích hình tròn và diện tích hình thang với tỉ số giữa chu vi hình tròn và chu vi hình thang.
327. Cho một hình tròn và một hình vuông có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn hơn ?
328. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng $AB = 2R$. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là OA, OB, AB. Vẽ đường tròn tâm I tiếp xúc ba nửa đường tròn trên.

a) Tính bán kính của đường tròn (I).

b) Tính diện tích phần hình tròn lớn nằm ngoài hình tròn tâm I và nằm ngoài hai nửa hình tròn nhỏ.

329. Cho hai đường tròn đồng tâm, đường tròn nhỏ chia hình tròn lớn thành hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng diện tích phần hình vành khăn giới hạn bởi hai tiếp tuyến song song của đường tròn nhỏ bằng diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn nhỏ.

330. Cho đa giác đều n cạnh, độ dài mỗi cạnh bằng a . Vẽ các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp đa giác.

a) Tính diện tích hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn.

b) Tính chiều rộng của hình vành khăn đó.

331. Một hình quạt có chu vi bằng 28cm và diện tích bằng 49cm^2 (chu vi hình quạt bằng độ dài cung hình quạt cộng với hai lần bán kính). Tính bán kính của hình quạt.

332. Cho ba đường tròn cùng có bán kính r và tiếp xúc ngoài đôi một.

a) Tính diện tích "tam giác cong" có đỉnh là các tiếp điểm của hai trong ba đường tròn đó.

b) Kẻ ba đường thẳng, mỗi đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn và không giao với đường tròn thứ ba. Tính diện tích tam giác tạo bởi ba đường thẳng đó.

333. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 15$, $AC = 20$, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Kẻ các tiếp tuyến BD, CE với đường tròn (D, E là các tiếp điểm). Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng BD, BC, CE và cung DE không chứa H của đường tròn.

334. Một hình viên phân có số đo cung 90° , diện tích $2\pi - 4$. Tính độ dài dây của hình viên phân.

335. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. Tính diện tích phần chung của hình tròn (I) và hình tròn tâm A bán kính a .

336. Cho đường tròn (O ; R), cung AB bằng 60° . Vẽ cung OB có tâm A bán kính R. Vẽ cung OA có tâm B bán kính R. Chứng minh rằng diện tích hình giới hạn bởi các cung OA, OB, AB nhỏ hơn $\frac{1}{4}$ diện tích hình tròn (O ; R).

337*. Cho đường tròn $(O; R)$. Một đường tròn (O') cắt đường tròn (O) ở A và B sao cho cung $\widehat{AB}$ của đường tròn (O') chia hình tròn (O) thành hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng độ dài cung $\widehat{AB}$ của đường tròn (O') lớn hơn $2R$.

338*. Cho tam giác ABC có diện tích S. Gọi S_1 là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác, S_2 là diện tích hình tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $2S < S_1 + S_2$.

339. Cho hình viên phân BC có dây $BC = a$, cung $\widehat{BC} = 90^\circ$.

a) Tính diện tích hình viên phân.

b) Tính diện tích hình vuông DEGH nội tiếp trong viên phân đó (D và E thuộc BC, G và H thuộc cung BC).

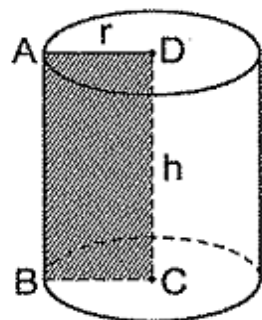
340*. Tính bán kính của hình viên phân BC có dây $BC = 6\text{cm}$, cạnh của hình vuông MNPQ nội tiếp viên phân ấy bằng 2cm (M và N thuộc BC, P và Q thuộc cung BC).

~ Bài tập : 402.

Chương IV

HÌNH TRỤ. HÌNH NÓN. HÌNH CẦU

§20. HÌNH TRỤ



Hình 25

Khi quay hình chữ nhật ABCD một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một hình trụ (h.25). Hai đáy của hình trụ là hai hình tròn bằng nhau. Đoạn thẳng AB là một đường sinh, DC là trục, độ dài DC là chiều cao của hình trụ.

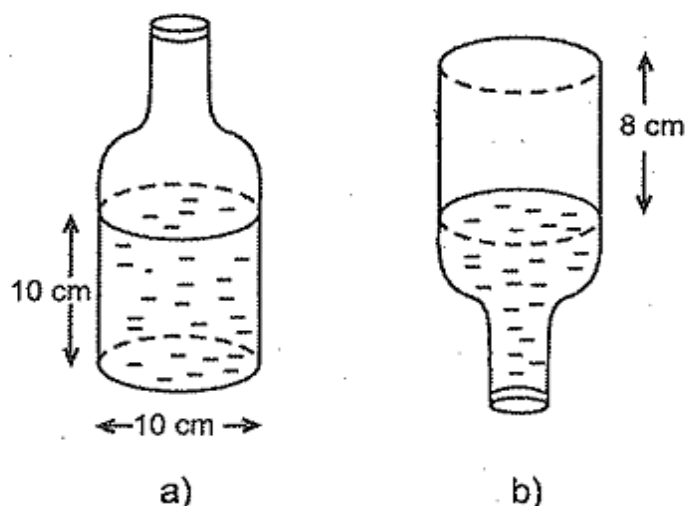
Đặt $DA = r$, $DC = h$.

Diện tích xung quanh hình trụ : $S_{xq} = 2\pi rh$.

Thể tích hình trụ : $V = \pi r^2 h$.

Ví dụ 46. Một chai có phía dưới là hình trụ chứa một lượng nước có chiều cao 10cm như ở hình 26a. Người ta lật ngược chai lại thì phần chai không chứa nước là một hình trụ có chiều cao 8cm (h.26b). Tính thể tích của chai, biết rằng đường kính của đáy chai bằng 10cm.

Giải : Thể tích chai bằng tổng các thể tích của khối nước hình trụ ở hình 26a và phần chai không chứa nước ở hình 26b.

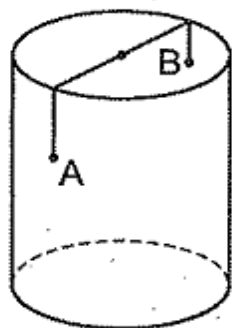


Hình 26

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 + \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = 25\pi (10 + 8) = 450\pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 1413 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Bài tập

341. Có ba vật hình trụ bằng chì, bằng sắt, bằng nhôm cùng có khối lượng bằng 2 kg và cùng có đường kính đáy bằng 10cm. Tính chiều cao của mỗi vật, biết rằng khối lượng riêng của chì là $11,3 \text{ kg/dm}^3$, khối lượng riêng của sắt là $7,8 \text{ kg/dm}^3$, khối lượng riêng của nhôm là $2,7 \text{ kg/dm}^3$.
342. Một băng giấy dài được cuộn chặt lại 60 vòng làm thành một cuộn giấy hình trụ rỗng. Biết đường kính của đường tròn trong cùng bằng 2cm, đường kính của đường tròn ngoài cùng bằng 6cm. Tính chiều dài của băng giấy (làm tròn đến 0,1).
343. Người ta cần cưa một thân cây hình trụ có đường kính đáy bằng d để được một khúc gỗ hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất. Tính các kích thước đáy của khúc gỗ hình hộp chữ nhật.
344. *Chú kiến và giọt mật.* Một chú kiến ở vị trí A trên mặt ngoài của một lọ thủy tinh hình trụ (không có nắp), nhìn thấy một giọt mật ở thẳng trước mặt tại vị trí B ở mặt trong của lọ (h.27). Biết A cách miệng lọ 5cm, B cách miệng lọ 2cm và độ dài của đường tròn miệng lọ bằng 48 cm. Tính độ dài ngắn nhất để chú kiến bò được tới chỗ giọt mật.



Hình 27

- 345*. Chứng minh rằng trong các hình trụ có cùng thể tích, hình trụ có đường cao bằng đường kính của đáy là hình có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

§21. HÌNH NÓN

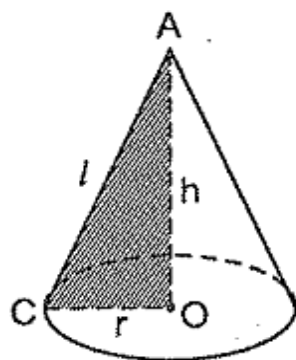
Khi quay tam giác vuông AOC một vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định, ta được một hình nón (h.28).

Đáy của hình nón là hình tròn tâm O bán kính OC. Điểm A gọi là đỉnh, đoạn thẳng AC là một đường sinh, AO là trục, độ dài AO là chiều cao của hình nón.

Đặt $OC = r$, $AC = l$, $AO = h$.

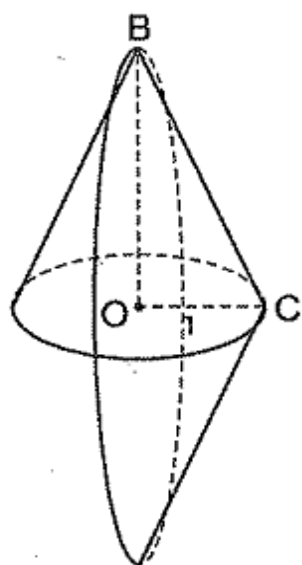
Diện tích xung quanh hình nón : $S_{xq} = \pi rl$.

Thể tích hình nón : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



Hình 28

Ví dụ 47. Cho tam giác OBC vuông tại O. Nếu quay tam giác đó quanh cạnh OB cố định thì được một hình nón có thể tích 800π , còn nếu quay tam giác đó quanh cạnh OC cố định thì được một hình nón có thể tích 1920π . Tính các độ dài OB, OC.



Hình 29

Giải : (h.29) Thể tích hình nón khi quay tam giác quanh OB :

$$\frac{1}{3}\pi OC^2 \cdot OB = 800\pi. \quad (1)$$

Thể tích hình nón khi quay tam giác quanh OC :

$$\frac{1}{3}\pi OB^2 \cdot OC = 1920\pi. \quad (2)$$

Lấy (1) chia cho (2) được $\frac{OC}{OB} = \frac{5}{12}$.

Thay $OB = \frac{12}{5}OC$ vào (1) được

$$\frac{1}{3}\pi \cdot OC^2 \cdot \frac{12}{5}OC = 800\pi,$$

suy ra $OC^3 = 1000$ nên $OC = 10$. Do đó

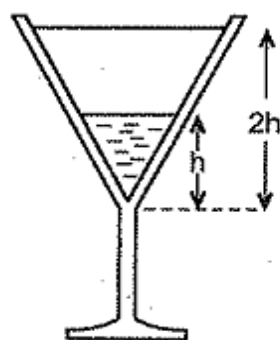
$$OB = \frac{12}{5} \cdot 10 = 24.$$

Bài tập

346. Ông Tuấn đã uống rượu ở một cốc có dạng hình nón. Chiều cao phần rượu còn lại bằng nửa chiều cao rượu lúc đầu (h.30). Ông Tuấn đã uống bao nhiêu phần cốc rượu?

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{3}{4}$; C) $\frac{5}{6}$; D) $\frac{7}{8}$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.



Hình 30

347. Một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, đường kính AB, $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Qua trung điểm I của SO, kẻ đường thẳng song song với AB, cắt mặt xung quanh của hình nón ở C và D. Tính thể tích hình nón, biết $CD = 6\text{cm}$.
348. Một hình nón có chiều cao h. Hai đường sinh vuông góc với nhau chia mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có tỉ số diện tích là 1 : 2. Tính thể tích hình nón.
349. Tam giác ABC có $BC = a$, chiều cao tương ứng bằng h. Tính thể tích hình tạo thành khi quay tam giác một vòng quanh cạnh BC.
350. Hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$, các tia phân giác của các góc C và D gặp nhau tại trung điểm của AB. Biết $AB = 8\text{cm}$, diện tích hình thang bằng 40cm^2 . Tính diện tích mặt xung quanh của hình nón cắt do cạnh CD tạo thành khi quay hình thang một vòng quanh trục AB.
- 351*. Tính số đo của cung AB của một hình quạt tâm O bán kính R để khi cuộn hình quạt lại, ta được một hình nón có thể tích lớn nhất.

Hướng dẫn : Gọi r là bán kính của đường tròn đáy của hình nón. Trước hết hãy tính tỉ số $\frac{r}{R}$ để hình nón có thể tích lớn nhất.

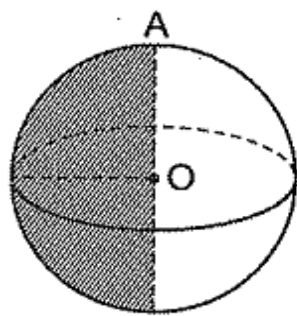
§22. HÌNH CẦU

Khi quay nửa hình tròn tâm O bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định, ta được một hình cầu (h.31).

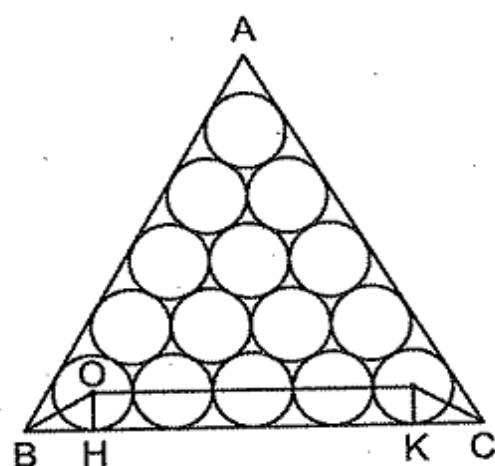
Điểm O gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu.

Diện tích mặt cầu : $S = 4\pi R^2$.

Thể tích hình cầu : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.



Hình 31



Hình 32

Ví dụ 48. Có 15 quả bi-a hình cầu đặt nằm trên mặt bàn, sao cho chúng được dồn khít trong một khung hình tam giác đều (h.32) có chu vi bằng 858 mm. Tính bán kính của mỗi quả bi-a.

Giải : Gọi r là bán kính của mỗi quả bi-a.

Cạnh của tam giác đều ABC bằng

$$858 : 3 = 286 \text{ (mm)}.$$

Xét $\triangle OBH$ vuông tại H, ta có

$$BH = OH \operatorname{tg} 60^\circ = r\sqrt{3}.$$

Ta có

$$BC = BH + HK + KC = r\sqrt{3} + 8r + r\sqrt{3} = 2(4 + \sqrt{3})r.$$

Do đó

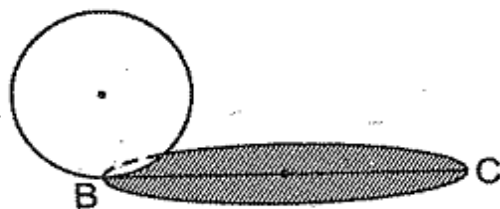
$$r = \frac{286}{2(4 + \sqrt{3})} = \frac{143(4 - \sqrt{3})}{13} = 11(4 - \sqrt{3}) \approx 25 \text{ (mm)}.$$

Bán kính của mỗi quả bi-a bằng 25 mm.

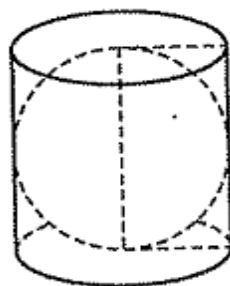
Bài tập

352. Một quả bóng hình cầu bán kính 13cm nổi trên mặt hồ, đỉnh của quả bóng cao hơn mặt hồ 18cm. Tính độ dài của đường tròn được tạo thành bởi quả bóng và mặt hồ.

353. Một quả bóng hình cầu đặt trên mặt đất có bóng của nó như trên hình 33, trong đó độ dài lớn nhất của bóng là $BC = 1\text{m}$. Biết một cột cao 1m lúc đó có bóng dài 2m, tính bán kính của quả bóng.



Hình 33



Hình 34

354. Hình 34 mô tả một hình cầu nội tiếp một hình trụ (tức là hình cầu được đặt khít vào trong hình trụ). Hãy chọn câu trả lời đúng.

a) Tỷ số giữa diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần hình trụ bằng

- A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{2}{3}$; C) $\frac{3}{4}$; D) $\frac{4}{5}$.

b) Tỷ số giữa thể tích hình cầu và thể tích hình trụ bằng

- A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{2}{3}$; C) $\frac{3}{4}$; D) $\frac{4}{5}$.

355. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh rằng tồn tại một hình cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình hộp chữ nhật.

b) Tính thể tích của hình cầu đó biết các kích thước của hình hộp chữ nhật là 6cm, 8cm, 24cm.

CHUYÊN ĐỀ

QUỸ TÍCH

Cách giải bài toán tìm tập hợp điểm đã được trình bày ở chuyên đề *Tìm tập hợp điểm* trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8* tập một. Trong chuyên đề này, chúng ta làm quen với quỹ tích cung chứa góc và đi sâu hơn về cách giải bài toán quỹ tích.

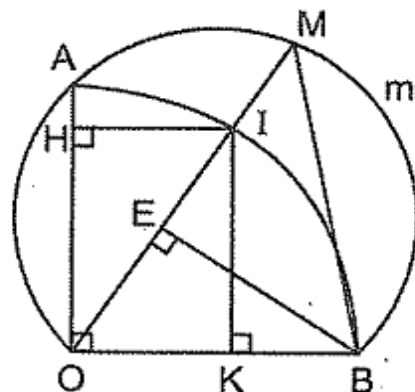
I – QUỸ TÍCH CUNG CHỨA GÓC

Ví dụ 49(15). Cho cung AB cố định tạo bởi các bán kính OA, OB vuông góc với nhau, điểm I chuyển động trên cung AB. Trên tia OI lấy điểm M sao cho OM bằng tổng các khoảng cách từ I đến OA và đến OB. Tìm quỹ tích các điểm M.

Giải : (h.35)

Phần thuận. Kẻ $IH \perp OA$, $IK \perp OB$. Điểm M thuộc tia OI có tính chất

$$OM = IH + IK. \quad (1)$$



Hình 35

Kẻ $BE \perp OI$. Ta có $\triangle OBE = \triangle OIK$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên

$$OE = OK = IH, BE = IK. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OM = OE + BE$, do đó $EM = EB$.

Tam giác EMB vuông cân nên $\widehat{EMB} = 45^\circ$. Điểm M nhìn OB cố định dưới góc 45° nên M di chuyển trên cung chứa góc 45° dựng trên OB .

Giới hạn. Vì điểm M chỉ nằm trong góc vuông AOB nên M chỉ di chuyển trên cung AmB , một phần của cung chứa góc 45° dựng trên OB (phần cung nằm trong góc AOB).

Phân đảo. Lấy điểm M bất kì trên cung AmB nói trên. Kẻ $BE \perp OM$, $IH \perp OA$, $IK \perp OB$. Ta sẽ chứng minh $OM = IH + IK$.

Thật vậy, do $\widehat{OMB} = 45^\circ$ nên $\triangle EMB$ vuông cân, suy ra $EM = EB$.

$\triangle OBE = \triangle OIK$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $OE = OK = IH$, $BE = IK$. Do đó $EM = IK$.

Vậy $OM = OE + EM = IH + IK$.

Kết luận. Quỹ tích các điểm M là cung AmB , một phần của cung chứa góc 45° dựng trên OB (phần nằm trong góc AOB).

Chú ý :

a) Các cách khác để chứng minh phân đảo :

- Trên tia OM lấy điểm E sao cho $OE = IH$, chứng minh rằng $EM = IK$.
- Kẻ $AF \perp OM$, chứng minh rằng $OF = IK$, $FM = IH$.
- Trên tia OM lấy điểm F sao cho $OF = IK$, chứng minh rằng $FM = IH$.

b) Tổng quát, khi chứng minh phân đảo của bài toán quỹ tích, sau khi lấy điểm M bất kì thuộc hình vừa tìm được, ta phải chứng minh rằng điểm M có tính chất T nêu trong đề bài. Tính chất T này thường được tách làm hai nhóm tính chất T_1 và T_2 . Ta dựng các điểm chuyển động còn lại thoả mãn tính chất T_1 rồi chứng minh M và các điểm ấy thoả mãn tính chất T_2 . Như thế, tùy theo cách chia nhóm T_1 và T_2 mà có nhiều cách chứng minh đảo đối với cùng một bài toán.

c) Cung AmB ở ví dụ 49 chính là nửa đường tròn đường kính AB . Thật vậy, $\widehat{OMB} = \widehat{OAB}$ (cùng bằng 45°) nên $OAMB$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Do đó có thể giải ví dụ trên bằng cách đưa về quỹ tích cung chứa góc vuông : Điểm M nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới góc vuông, từ đó dẫn đến quỹ tích của M là nửa đường tròn đường kính AB (nửa đường tròn không đi qua O).

II – PHÁT HIỆN ĐIỂM CỐ ĐỊNH ĐỂ TÌM QUỸ TÍCH

Ví dụ 50(16). Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm M, N theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB, AC sao cho $AM = CN$. Tìm quỹ tích các tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

Giải : (h.36)

1. *Phần thuận.* Đường tròn (O) đi qua một điểm cố định là A. Ta sẽ chứng minh rằng (O) còn đi qua một điểm cố định khác.

Gọi giao điểm khác A của (O) với đường cao AH (cố định) là K. Ta có AMKN là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AMK} = \widehat{CNK}$. Ta lại có

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{KM} = \widehat{KN} \Rightarrow KM = KN.$$

Do đó $\triangle AMK = \triangle CNK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{C_1} \Rightarrow K$ thuộc đường trung trực của AC. Vậy K là điểm cố định, đó là giao điểm của các đường trung trực của $\triangle ABC$.

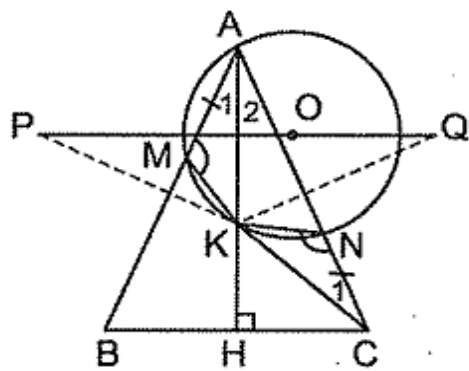
Đường tròn (O) đi qua hai điểm cố định A và K nên O nằm trên đường trung trực d của AK.

Giới hạn. Khi $M \equiv A$ thì $N \equiv C$, $O \equiv Q$, giao điểm của d với đường trung trực của AC.

Khi $M \equiv B$ thì $N \equiv A$, $O \equiv P$, giao điểm của d với đường trung trực của AB. Như vậy O chỉ di chuyển trên đoạn thẳng PQ.

2. *Phần đảo.* Bạn đọc tự chứng minh.

3. *Kết luận.* Quỹ tích của O là đoạn thẳng PQ nằm trên đường trung trực của AK (K là giao điểm của các đường trung trực của $\triangle ABC$).



Hình 36

III – VẬN DỤNG CÁC PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC, ĐỐI XỨNG TÂM, VỊ TỰ ĐỂ TÌM QUỸ TÍCH

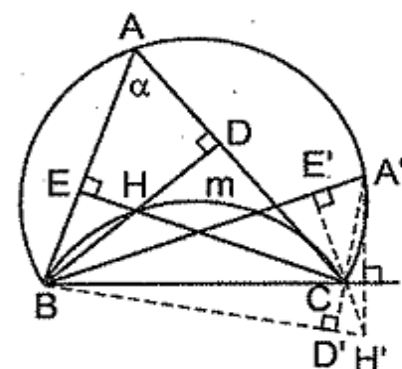
Các phép đối xứng trục, đối xứng tâm, vị tự còn được gọi chung là phép biến hình. Trong nhiều trường hợp, điểm M phải tìm quỹ tích là ảnh của một điểm N trong một phép biến hình f. Người ta chứng minh được rằng : Nếu quỹ tích các điểm N là một hình H thì quỹ tích các điểm M là hình H', là ảnh của hình H trong phép biến hình nói trên.

Ví dụ 51(15). Tìm quỹ tích trực tâm H của các tam giác ABC có BC cố định, $\widehat{A} = \alpha$ không đổi (để cho gọn, ta chỉ xét điểm A di chuyển về một phía của BC).

Một sai lầm dễ mắc

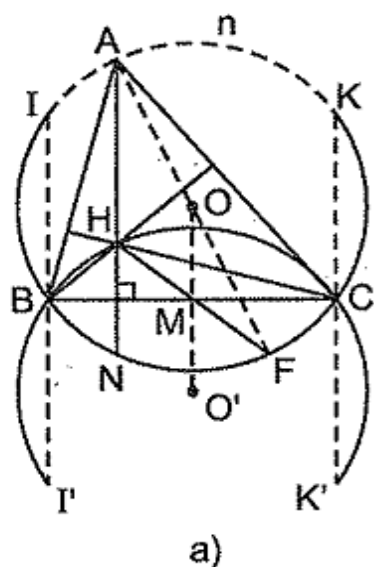
Một học sinh giải như sau : Gọi BD, CE là các đường cao của ΔABC (h.37).

Ta có $\widehat{BHC} = \widehat{DHE} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - \alpha$. Như vậy H di chuyển trên cung BmC chứa góc $180^\circ - \alpha$ dựng trên BC (cung nằm cùng phía với A đối với BC).

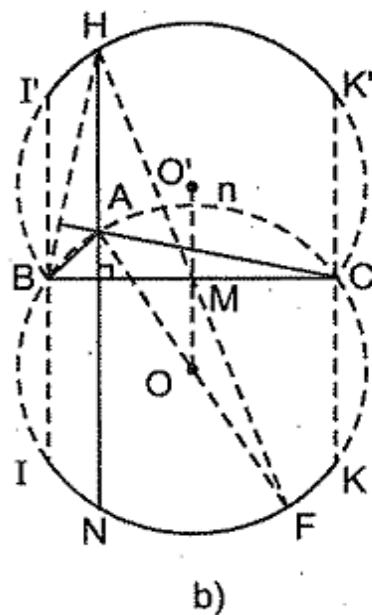


Hình 37

Lời giải trên đã *kể thiếu* quỹ tích của điểm H trong trường hợp $\alpha < 90^\circ$. Thật vậy, giả sử ta lấy điểm A ở vị trí A' sao cho $\widehat{BCA'} > 90^\circ$ (h.37), thế thì điểm H ở vị trí H', khi đó $\widehat{BH'C}$ bằng α (chứ không bằng $180^\circ - \alpha$), điểm H' không thuộc cung BmC nói trên. Vậy trong trường hợp $\alpha < 90^\circ$ (h.38a), quỹ tích của điểm H là toàn bộ cung I'K'. Lời giải trên cũng *kể thừa* quỹ tích của điểm H trong trường hợp $\alpha > 90^\circ$. Trong trường hợp này (h.38b), quỹ tích của điểm H không là toàn bộ cung BI'K'C chứa góc $180^\circ - \alpha$, mà chỉ là cung I'K'.



a)



b)

Hình 38

Gợi ý giải bài toán trên bằng cách vận dụng phép đối xứng trục

Điểm A di chuyển trên cung BnC chứa góc α dựng trên BC, cung chứa góc này thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC (h.38).

Gọi giao điểm thứ hai của AH với (O) là N. Ta chứng minh được H đối xứng với N qua BC, do đó H là ảnh của N trong phép đối xứng trục BC. Kẻ các đường kính BK, CI của (O).

Khi A di chuyển trên cung BnC thì N di chuyển trên cung IK không chứa A. Như vậy quỹ tích của H là cung I'K' đối xứng với cung IK nói trên qua BC. (Hình 38a với $\alpha < 90^\circ$, hình 38b ứng với $\alpha > 90^\circ$).

Gợi ý giải bài toán trên bằng cách vận dụng phép đối xứng tâm

Kẻ đường kính AF của (O) (h.38). Dễ dàng chứng minh được H đối xứng với F qua trung điểm M của BC, do đó H là ảnh của F trong phép đối xứng tâm M.

Khi A di chuyển trên cung BnC thì F di chuyển trên cung IK không chứa A. Như vậy quỹ tích của H là cung I'K' đối xứng với cung IK nói trên qua M.

Học sinh tự giải ví dụ 51 theo các gợi ý trên.

Chú ý : Có thể giải bài toán trên bằng cách vận dụng phép tịnh tiến được học ở lớp 10.

IV – BIỆN LUẬN TRONG BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

Ta xét một số trường hợp sau:

1. Hình dạng của quỹ tích thay đổi theo các trường hợp khác nhau của yếu tố cho trước. Khi đó cần xét từng trường hợp của yếu tố cho trước.

Ví dụ 52 (16). Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp. Gọi (I) là đường tròn bất kì đi qua A và B, gọi (K) là đường tròn đi qua C, D và tiếp xúc với đường tròn (I). Gọi M là tiếp điểm của hai đường tròn (I) và (K). Điểm M di chuyển trên đường nào ?

Giải : (h.39)

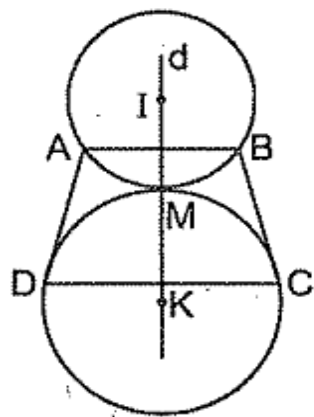
– Xét trường hợp $AB \parallel CD$ (h.39a). Khi đó ABCD là hình thang cân. Điểm I thuộc đường trung trực của AB, điểm K thuộc đường trung trực của CD. Các điểm I và K thuộc trục đối xứng d của hình thang cân. Tiếp điểm M nằm trên đường nối tâm IK nên thuộc đường trung trực của hai đáy nên cũng thuộc d.

– Xét trường hợp AB cắt CD tại O (h.39b). Gọi ON là tiếp tuyến của (I), ta có

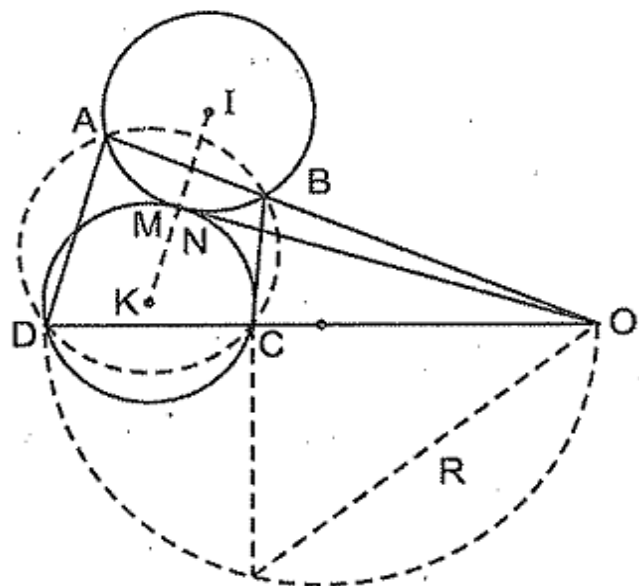
$$OA \cdot OB = ON^2. \quad (1)$$

Mặt khác ABCD là tứ giác nội tiếp nên

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD, \quad (2)$$



a)



b)

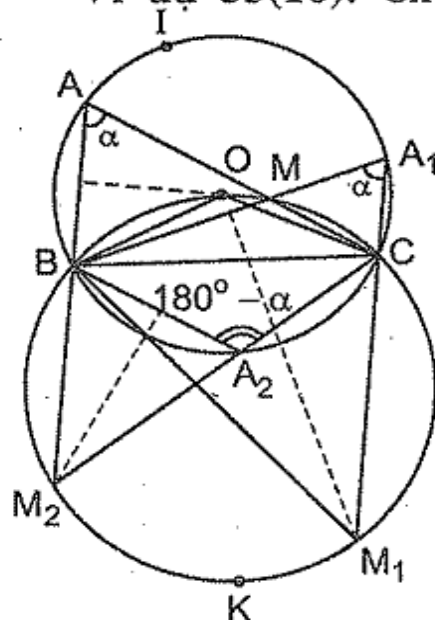
Hình 39

Từ (1) và (2) ta có $ON^2 = OC \cdot OD$. Suy ra ON là tiếp tuyến của đường tròn đi qua D, C, N. Do đó ON là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K). Hai đường tròn (I) và (K) tiếp xúc nhau tại N và $M \equiv N$.

Đặt $R = \sqrt{OC \cdot OD}$, M di chuyển trên đường tròn (O ; R). Cách dựng đường tròn nói trên được thể hiện trên hình 39b.

2. Quan hệ giữa điểm phải tìm quỹ tích với các yếu tố cố định có sự thay đổi tại các vị trí khác nhau của điểm phải tìm quỹ tích. Khi đó cần giải bài toán ở từng phần của mặt phẳng rồi lấy tất cả các tập hợp điểm tìm được.

Ví dụ 53(16). Cho đường tròn tâm O và dây BC cố định. Điểm A di chuyển trên đường tròn. Đường trung trực của AB cắt AC ở M. Tìm quỹ tích các điểm M.



Hình 40

Giải : (h.40)

Đặt $\widehat{BOC} = 2\alpha$. Xét các trường hợp :

a) $A \in \widehat{BI}$ (I thuộc cung lớn BC sao cho $CI = CB$).
Ta có $\widehat{BAC} = \alpha \Rightarrow \widehat{BMC} = 2\alpha = \widehat{BOC} \Rightarrow B, O, M, C$ thuộc cùng một đường tròn $\Rightarrow M$ thuộc cung BOC chứa góc 2α của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BOC$.

b) A ở vị trí A_1 thuộc cung IC thì M ở vị trí M_1 .
Ta có $\widehat{BA_1C} = \alpha \Rightarrow \widehat{BM_1C} = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow BOCM_1$

là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow M_1$ thuộc cung CK chứa góc $180^\circ - 2\alpha$ của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BOC$ (OK là đường kính của đường tròn này).

c) A ở vị trí A_2 thuộc cung CB thì M ở vị trí M_2 . Ta có $\widehat{BA_2C} = 180^\circ - \alpha$.
 $\Rightarrow \widehat{BM_2C} = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow BOCM_2$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow M_2$ thuộc cung KB chứa góc $180^\circ - 2\alpha$ của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BOC$.

Kết luận : Quỹ tích các điểm M gồm cả ba cung chứa góc trên, đó là đường tròn ngoại tiếp $\triangle BOC$.

Ví dụ 54(15). Tìm quỹ tích các điểm M mà từ đó ta nhìn một hình vuông cho trước dưới một góc vuông (điểm M gọi là nhìn một hình vuông dưới một góc AMB nếu các điểm A, B thuộc cạnh của hình vuông và hình vuông thuộc miền trong của góc AMB).

Giải : (h.41)

Xét hình vuông ABCD. Các đường thẳng chứa cạnh của hình vuông chia mặt phẳng thành 9 miền như hình vẽ.

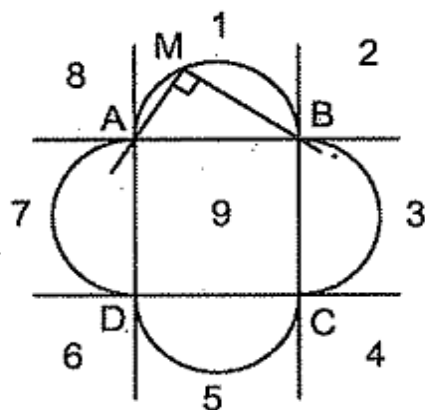
– Xét M thuộc miền 1 : Quỹ tích của điểm M là nửa đường tròn có đường kính AB.

– Tương tự với M thuộc các miền 3, 5, 7.

– Xét M thuộc miền 2 : Quỹ tích của điểm M là tập hợp rỗng. Tương tự với M thuộc các miền 4, 6, 8.

– Xét M thuộc miền 9 : Quỹ tích của điểm M cũng là tập hợp rỗng.

Kết luận : Quỹ tích của điểm M là bốn nửa đường tròn dựng ở phía ngoài hình vuông và có đường kính là cạnh của hình vuông.



Hình 41

Bài tập

356(15). Cho nửa đường tròn đường kính AB, C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Điểm M di chuyển trên cung BC. Gọi N là giao điểm của AM và OC. Tìm quỹ tích các tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

357(15). Tứ giác ABCD có AC cố định, $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

a) Chứng minh rằng BD có độ dài không đổi.

b) Gọi E là giao điểm của BC và AD, F là giao điểm của DC và AB. Chứng minh rằng EF có độ dài không đổi.

c) Tìm quỹ tích các tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

358(15). Cho góc xOy và một điểm I cố định thuộc tia phân giác của góc ấy. Một đường tròn tâm I bán kính thay đổi cắt các tia Ox, Oy theo thứ tự ở M, N (M không đối xứng với N qua OI).

a) Tìm quỹ tích các tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN.

b) Đường vuông góc với Ox tại M và đường vuông góc với Oy tại N cắt nhau ở P. Tìm quỹ tích các điểm P.

359(15). Cho tam giác đều ABC. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong tam giác đó sao cho $MA^2 = MB^2 + MC^2$.

360 (15). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong tam giác đó sao cho

$$MA^2 = \frac{MB^2 - MC^2}{2}.$$

361* (15). Cho M là một điểm thuộc đường tròn (O' ; R). Đường tròn này lăn (không trượt) trong đường tròn (O ; 2R). Tìm quỹ tích các điểm M.

Phát hiện điểm cố định để tìm quỹ tích

362(15). Tìm quỹ tích đỉnh C của các tam giác ABC có AB cố định, đường cao BH bằng cạnh AC.

363(15). Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Một đường thẳng d bất kì luôn đi qua A cắt (O) và (O') theo thứ tự ở C và D.

a) Tìm quỹ tích các trung điểm M của CD.

b) Cho biết bán kính của các đường tròn (O) và (O') là 3cm và 2cm. Tính tỉ số BC : BD.

c) Đường thẳng d có vị trí nào thì đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất (A nằm giữa C và D) ?

364(15). Cho đường tròn (O), điểm A cố định trên đường tròn. Trên tiếp tuyến tại A lấy một điểm B cố định. Gọi (O') là đường tròn tiếp xúc với AB tại B và có bán kính thay đổi. Tìm quỹ tích các điểm I là trung điểm của dây chung MN của (O) và (O').

365(15). Cho đường tròn (O) và một điểm A ở bên trong đường tròn. Điểm B di chuyển trên đường tròn. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn ở điểm M. Tìm quỹ tích các điểm M.

366(16). Cho đường tròn (O), đường kính AB vuông góc với dây CD. Điểm E di chuyển trên đường tròn. Các đường thẳng AE, BE cắt đường thẳng CD theo thứ tự ở I, K. Tìm quỹ tích tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK.

367(16). Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua A và B. Kẻ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn (D, E là các tiếp điểm)

a) Tìm quỹ tích các điểm D và E.

b) Tìm quỹ tích các trung điểm K của DE.

c) Gọi MN là đường kính của đường tròn (O) vuông góc với AB, F là giao điểm của CM với đường tròn (O). Chứng minh rằng AB, DE, FN đồng quy.

368(16). Cho đường tròn (O), dây AB. Điểm C di chuyển trên đường thẳng AB và nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn (D, E là các tiếp điểm). Tìm quỹ tích giao điểm K của OC và DE.

369(16). Cho đường tròn (O ; R), điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn. BC là một đường kính thay đổi.

a) Tìm quỹ tích tâm O_1 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Gọi D, E theo thứ tự là giao điểm của AB, AC với đường tròn (O). Tìm quỹ tích tâm O_2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

c) Gọi F là giao điểm khác A của các đường tròn (O_1) và (O_2). Chứng minh rằng AF, BC, DE đồng quy.

370(15). Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A di chuyển trên đường tròn. Gọi M là trung điểm của AC. Tìm quỹ tích hình chiếu H của M trên AB.

Vận dụng các phép đối xứng trục, đối xứng tâm, vị tự để tìm quỹ tích

371(16). Cho góc vuông xOy và một điểm A cố định nằm trong góc đó. Một góc vuông đỉnh A có hai cạnh thay đổi cắt Ox, Oy theo thứ tự ở B, C. Gọi M là điểm đối xứng với A qua BC.

a) Tìm quỹ tích các điểm M.

b) Chứng minh rằng $\frac{AB}{AC}$ là hằng số.

372(15). Cho đường tròn (O), điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm). Một cát tuyến AMN luôn đi qua A. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác BMN.

373(15). Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm H cố định ở bên trong đường tròn. Xét các tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và nhận H làm trực tâm. Tìm quỹ tích :

- a) Chân các đường cao của tam giác ABC ;
- b) Chân các đường trung tuyến của tam giác ABC .

Các bài toán quỹ tích có biện luận

374(16). Cho đường tròn (O) và các đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Các điểm E, F chuyển động trên đường tròn (O) sao cho OE vuông góc với OF . Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với CD , qua F kẻ đường thẳng vuông góc với AB , chúng cắt nhau ở M . Tìm quỹ tích các điểm M .

375 (16). Cho đường tròn (O) và dây AB cố định. Các điểm M, N di chuyển trên đường tròn sao cho $AM = BN$. Tìm quỹ tích giao điểm I của các đường thẳng AM và BN .

376(16). Cho tam giác ABC cân tại A . Tìm quỹ tích các điểm M sao cho MA là tia phân giác của góc BMC .

377(15). Cho tam giác ABC cân tại A . Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A . Trên d lấy điểm M sao cho $MC + MB$ nhỏ nhất. Tìm quỹ tích các điểm M .

378(15). Tìm quỹ tích các điểm M mà từ đó ta nhìn một hình vuông cho trước dưới một góc bằng 45° .

379(16). Cho đường tròn (O) và dây AB cố định. Điểm M di chuyển trên đường tròn. Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB . Gọi I là giao điểm của hai tiếp tuyến (khác AB) kẻ từ A và B với đường tròn (M) . Tìm quỹ tích của điểm I .

380(16). Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng thay đổi luôn đi qua A cắt hai đường tròn $(O), (O')$ theo thứ tự ở C, D . Tìm quỹ tích tâm I các đường tròn nội tiếp tam giác CBD .

381(16). Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Qua A vẽ cát tuyến cố định $CAD, C \in (O), D \in (O')$. Một đường thẳng thay đổi luôn đi qua A cắt hai đường tròn $(O), (O')$ theo thứ tự ở M, N . Tìm quỹ tích giao điểm P của các đường thẳng CM và DN .

382* (16). Cho tam giác ABC và điểm D cố định trên cạnh BC . Một góc vuông đỉnh D có các cạnh thay đổi vị trí cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở M, N . Tìm quỹ tích hình chiếu H của D trên MN .

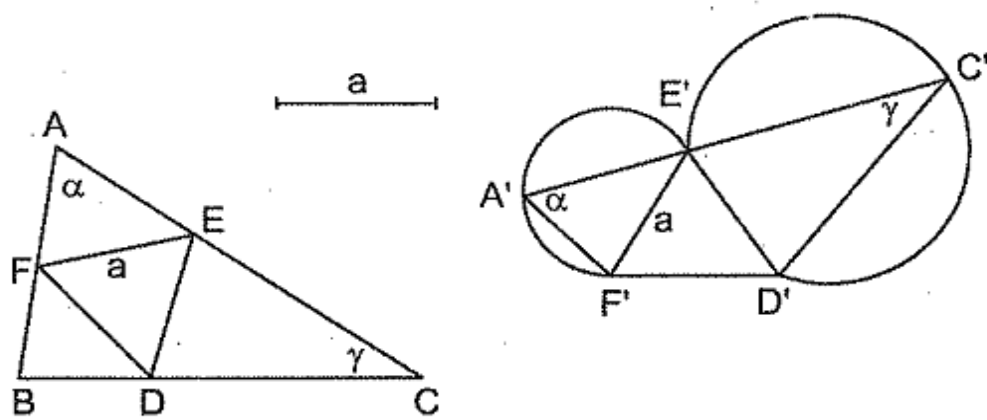
DỤNG HÌNH

Toán dựng hình đã được giới thiệu trong các cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8* tập một, tập hai, *Nâng cao và phát triển Toán 9* tập một.

I – DỤNG HÌNH THEO THỨ TỰ NGƯỢC

Ví dụ 55(15). Cho tam giác ABC. Dựng tam giác đều DEF có độ dài cạnh bằng a cho trước, ba đỉnh nằm trên ba cạnh của tam giác ABC.

Nhận xét : Cho trước tam giác ABC, cần dựng tam giác đều DEF cạnh a sao cho $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Ta xét cách làm sau : Cho trước tam giác đều DEF cạnh a, dựng tam giác ABC sao cho $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Từ đó có cách giải sau, ta gọi là dựng hình "theo thứ tự ngược".



Hình 42

Giải : (h.42)

Cần dựng $\triangle DEF$ đều cạnh a có $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Gọi $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{C} = \gamma$.

Để xác định vị trí của E trên AC, ta dựng một hình khác theo thứ tự ngược lại :

- Dựng $\triangle D'E'F'$ đều cạnh a.
- Dựng ra phía ngoài $\triangle D'E'F'$ các cung chứa góc α , γ theo thứ tự dựng trên các cạnh $E'F'$, $D'E'$.
- Qua E' , dựng cát tuyến $A'E'C'$ có độ dài bằng AC, cắt các cung chứa góc α , γ theo thứ tự ở A' , C' (bạn đọc tự giải bài toán này).

Biết vị trí của E' trên $A'C'$, ta xác định được vị trí của E trên AC. Từ đó dựng được D và F.

Bài toán có thể có 0, 1, 2 nghiệm hình.

II – TÌM THÊM CÁC ĐIỂM CỐ ĐỊNH TRONG BÀI TOÁN DỰNG HÌNH

Bài toán dựng hình nào cũng có những điểm cố định. Từ các điểm cố định đó có thể tạo ra nhiều điểm cố định mới, chẳng hạn :

- Lấy giao điểm của hai đường thẳng.
- Dựng hình chiếu của một điểm trên một đường thẳng.
- Chia một đoạn thẳng cho trước theo một tỉ số nào đó.
- Sử dụng phép biến hình (dựng hình đối xứng qua một tâm, qua một trục...).

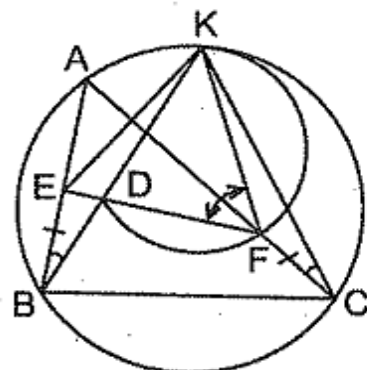
Cách tạo điểm cố định mới là có ích nếu nó làm xuất hiện các quan hệ mới trong hình vẽ.

Ví dụ 56* (15). Cho tam giác ABC và một điểm D nằm trong tam giác. Dựng đường thẳng đi qua D cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở E, F sao cho $BE = CF$.

Giải : (h.43)

Ta nhớ lại một bài toán mang tính chất một bổ đề : Khi các điểm E, F thay đổi vị trí trên AB, AC mà $BE = CF$ thì đường trung trực của EF luôn đi qua một điểm cố định, đó là điểm chính giữa của cung BC chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Thật vậy, gọi K là điểm chính giữa cung BC nói trên. Ta có $\triangle KBE = \triangle KCF$ (c.g.c) nên $KE = KF$. Bổ đề được chứng minh.



Hình 43

Bây giờ ta tính $\widehat{KFE}$. Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$ (không đổi). Do $\triangle KBE = \triangle KCF$ nên $\widehat{EKB} = \widehat{FKC}$, suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{BKC} = \widehat{BAC} = \alpha$. Do đó góc đáy $\widehat{KFE} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Điểm F là giao điểm của cạnh AC với cung chứa góc $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ dựng trên KD.

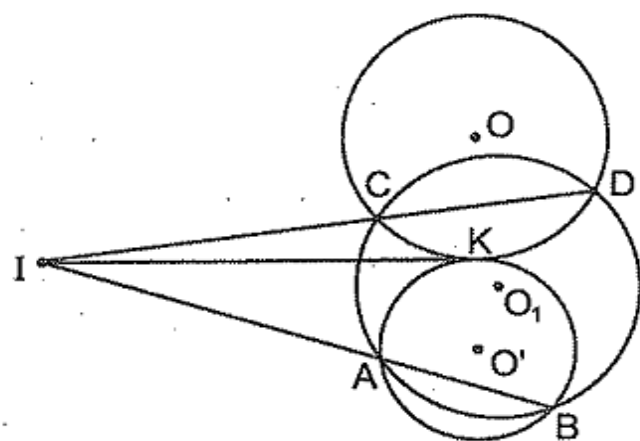
Chú ý : Có thể thay điều kiện $BE = CF$ bởi điều kiện tổng quát hơn : $BE - CF = a$. Để giải bài này, trên BA lấy B' sao cho $BB' = a$, và đưa về ví dụ 56, trong đó điểm B được thay bởi điểm B'.

III – PHƯƠNG PHÁP DỰNG ĐƯỜNG TRÒN PHỤ

Ví dụ 57* (16). Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B ở bên ngoài đường tròn. Dựng đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) và đi qua hai điểm A, B.

Giải : (h.44)

1. *Phân tích.* Giả sử đã dựng được đường tròn (O') đi qua A, B và tiếp xúc với (O) tại K. Kẻ tiếp tuyến chung Kx.



Hình 44

Trường hợp $Kx \parallel AB$ (khi đó O thuộc đường trung trực của AB), bài toán được giải dễ dàng (bạn đọc tự giải).

Trường hợp Kx cắt AB. Gọi I là giao điểm của Kx và AB. Kẻ đường thẳng bất kì qua I cắt (O) ở C, D.

Ta có $IA \cdot IB = IK^2 = IC \cdot ID \Rightarrow A, B, D, C$ thuộc cùng một đường tròn.

Từ đó suy ra cách dựng.

2. Cách dựng

- Dựng đường tròn (O_1) bất kì đi qua A, B cắt (O) ở C, D.
- Gọi I là giao điểm của AB và CD. Dựng tiếp tuyến IK với đường tròn (O) .
- Đường tròn đi qua A, B, K là đường tròn phải dựng.

3. *Chứng minh.* Bạn đọc tự giải.

4. *Biện luận.* Bài toán có hai nghiệm hình.

IV – DỤNG HÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ

Dụng hình bằng phương pháp đại số đã được trình bày trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 9* tập một. Sau đây là một số ví dụ khác.

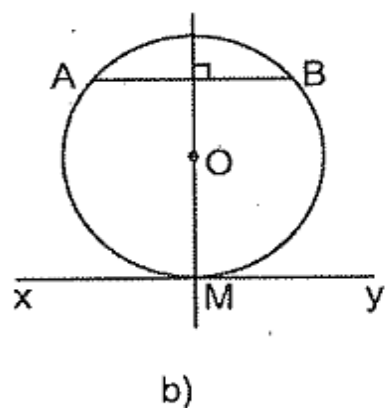
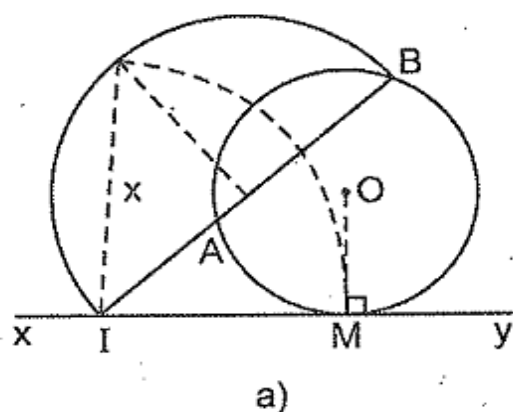
Ví dụ 58(13). Cho hai điểm A, B nằm về một phía của đường thẳng xy. Dựng đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng xy.

Giải

Xét hai trường hợp :

a) AB cắt xy tại I (h.45a). Gọi M là tiếp điểm, ta có $IM^2 = IA \cdot IB$. Dựng được IM là trung bình nhân của IA và IB (cách dựng được thể hiện trên h.45a). Sau đó dựng đường tròn đi qua A, B, M.

Có hai điểm M nằm về hai phía của I trên xy. Bài toán có hai nghiệm hình.



Hình 45

b) $AB \parallel xy$ (h.45b). Dựng đường trung trực của AB, cắt xy ở M. Đường tròn đi qua A, B, M là đường tròn phải dựng.

Bài toán có một nghiệm hình.

Ví dụ 59* (16). Dựng tam giác ABC vuông tại A biết cạnh huyền $BC = a$, đường phân giác $AD = d$.

Giải : (h.46)

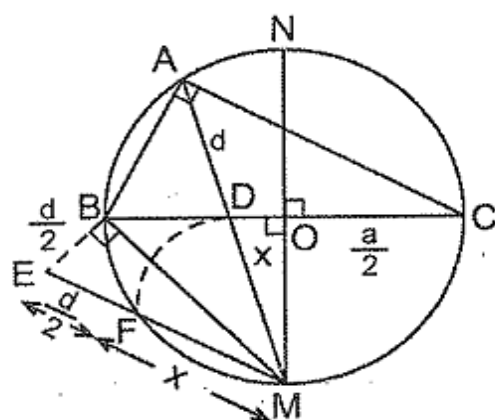
Cách 1. Phân tích. Gọi M là giao điểm của AD với đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$. Đặt $MD = x$ thì $MA = x + d$. Vẽ đường kính MN. Ta có ODAN là tứ giác nội tiếp nên :

$$MD \cdot MA = MO \cdot MN$$

$$x(x + d) = \frac{a}{2} \cdot a \Rightarrow x^2 + xd = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + xd + \frac{d^2}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{d^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$



Hình 46

Như vậy $x + \frac{d}{2}$ là cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$ và $\frac{d}{2}$.

Cách dựng

- Dựng đường tròn tâm O đường kính $BC = a$.
- Dựng M là điểm chính giữa của cung BC.

- Dụng $\triangle MBE$ vuông tại B (đã có $MB = \frac{a}{\sqrt{2}}$) có $BE = \frac{d}{2}$.
- Trên tia EM lấy F sao cho $EF = EB$.
- Đường tròn (M ; MF) cắt BC ở D.
- MD cắt (O) ở A. Nối AB, AC.

Cách 2. Xem bài 405. Cách dựng này tổng quát hơn so với cách 1.

Bài tập

- 383(15). Cho ba tia chung gốc Ox, Oy, Oz. Dụng tam giác đều cạnh a có ba đỉnh thuộc ba tia trên.
- 384(15). Cho góc xOy. Dụng đoạn thẳng $AB = a$ có A thuộc tia Ox, B thuộc Oy sao cho $OA + OB = m$.
- 385(15). a) Dụng tam giác vuông biết chu vi bằng $2p$ và bán kính của đường tròn nội tiếp bằng r .
- b) Dụng tam giác biết một cạnh bằng a , chu vi bằng $2p$ và bán kính của đường tròn nội tiếp bằng r .
- 386(15). Dụng tam giác ABC biết $\hat{A} = \alpha$, đường cao $AH = h$, đường trung tuyến $AM = m$.
- 387*(15). Dụng tam giác ABC biết $\hat{A} = \alpha$, $AC - AB = d$, bán kính của đường tròn nội tiếp bằng r .
- 388(14). Dụng tam giác ABC biết ba điểm I, O, P theo thứ tự là tâm của các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, bàng tiếp.
- 389(14). Dụng tam giác ABC biết cạnh $BC = a$, bán kính r của đường tròn nội tiếp, bán kính R_a của đường tròn bàng tiếp trong góc A.
- 390(15). Dụng tam giác ABC biết $\hat{A} = \alpha$, $AB - BC = m$, $AC - BC = n$.
- 391*(12). Dụng tam giác ABC biết $BC = a$, đường cao $AH = h$ biết rằng đường phân giác AD bằng trung bình nhân của BD và DC.
- 392(15). Cho bốn điểm A, B, C, D. Dụng hình vuông EFGH có bốn cạnh (hoặc đường thẳng chứa cạnh) đi qua bốn điểm trên (mỗi đường thẳng đi qua một điểm).
- 393(15). Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Dụng đường tròn đi qua A, M và cắt AB, AC theo thứ tự ở D, E sao cho DE song song với BC.

394** (16). Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với d . Dụng điểm M thuộc d sao cho $AM + MB = a$.

Vận dụng các phép đối xứng trục, đối xứng tâm, vị tự để dựng hình

Đối xứng trục

395(15). Dụng tam giác ABC biết $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$, đường cao $AH = h$, đường trung tuyến $AM = m$.

396(15). Dụng tam giác ABC biết $BC = a$, $\widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$, đường cao $AH = h$.

397(15). Cho góc nhọn xOy và hai điểm M, N nằm trong góc đó. Dụng điểm A thuộc tia Ox sao cho tia phân giác của góc MAN vuông góc với Oy .

398(15). Dụng tứ giác $ABCD$ biết $AB = a$, $AD = b$ ($b > a$), $AC = m$, $\widehat{B} - \widehat{D} = \alpha$ sao cho AC là tia phân giác của góc A .

399(17). Dụng tứ giác $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$, $\widehat{B} = \alpha$, $\widehat{D} = \beta$ biết rằng tứ giác đó có thể ngoại tiếp được một đường tròn.

Đối xứng tâm

400(16). Cho tam giác nhọn ABC . Dụng điểm M nằm trong tam giác sao cho nếu lấy các điểm đối xứng với M qua trung điểm mỗi cạnh của tam giác ABC thì được ba điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Vị tự

401 (12). Cho góc nhọn xOy và điểm M nằm trong góc. Dụng đường tròn (I) đi qua điểm M , cắt Ox, Oy thành các dây AB, CD sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{CMD} = xOy$.

402(19). Dụng hình vuông nội tiếp một hình viên phân cho trước (một cạnh của hình vuông thuộc dây của viên phân, hai đỉnh còn lại của hình vuông thuộc cung của viên phân).

Dựng hình bằng phương pháp đại số

403 (16). Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$). D là một điểm thuộc cạnh BC . Đường vuông góc với DA tại A cắt các đường vuông góc với BC tại B và tại C theo thứ tự ở M và N . Dụng điểm D sao cho diện tích tam giác MDN gấp đôi diện tích tam giác ABC .

404(16). Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Dụng điểm E thuộc cạnh CD sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{CBE}$.

405* (16). Dụng tam giác ABC biết $\widehat{A} = \alpha$, $BC = a$, đường phân giác $AD = d$.

TOÁN CỰC TRỊ

Cách giải các bài toán cực trị đã được đề cập đến trong các cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8 tập hai*, *Nâng cao và phát triển Toán 9 tập một*. Sau đây là một số ví dụ khác.

Ví dụ 60(16). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M chuyển động trên đường tròn (O). Gọi D, E theo thứ tự là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AB, AC. Tìm vị trí của điểm M sao cho DE có độ dài lớn nhất.

Giải : (h.47)

Từ các tứ giác nội tiếp ADME và ABCM, ta có $\widehat{MDE} = \widehat{MAE} = \widehat{MBC}$, $\widehat{MED} = \widehat{MAD} = \widehat{MCB}$, do đó $\triangle MDE \sim \triangle MBC$ (g.g), suy ra $\frac{DE}{BC} = \frac{ME}{MC}$. Ta lại có $ME \leq MC$ nên $DE \leq BC$.

Do đó $\max DE = BC \Leftrightarrow ME = MC \Leftrightarrow MC \perp AC \Leftrightarrow M$ trùng K (K đối xứng với A qua O).

Chú ý : $DE \leq AM \leq AK$ nhưng không thể kết luận $\max DE = AK$ vì không xảy ra được $DE = AK$. Thật vậy,

$$DE = AK \Leftrightarrow \begin{cases} DE = AM \\ AM = AK \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DE \text{ đi qua trung điểm của } AM \\ AM \text{ đi qua } O \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Không đồng thời xảy ra (1) và (2), vì khi AM đi qua O thì $DE = BC$, mà BC không đi qua O, tức là DE không đi qua trung điểm của AM.

Ví dụ 61(15). Trong các tam giác ABC có $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$, tam giác nào có :

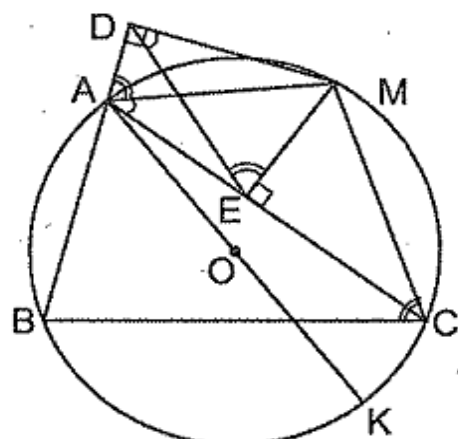
a) Diện tích lớn nhất ?

b) Chu vi lớn nhất ?

Giải

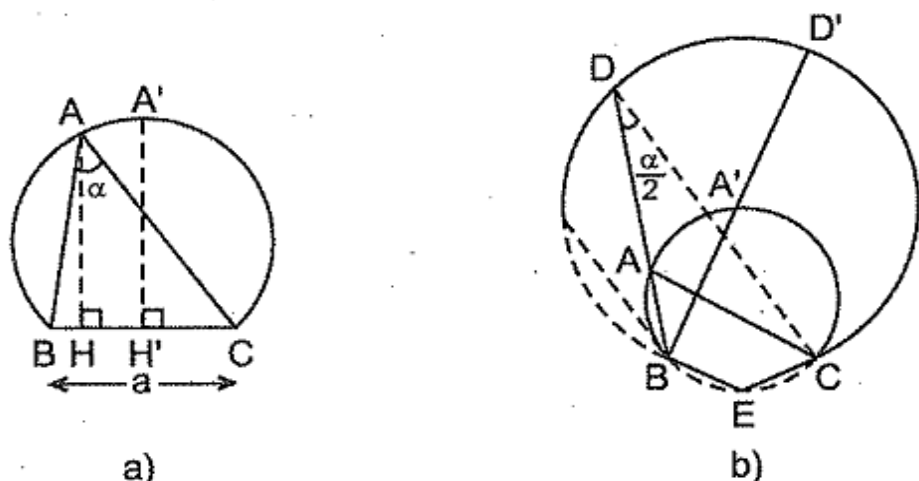
Xét các tam giác ABC có $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Khi đó A nằm trên cung chứa góc α dựng trên BC.

a) (h.48a) Gọi A' là điểm chính giữa của cung chứa góc nói trên. Kẻ AH, A'H' $\perp$ BC. Hiển nhiên $AH \leq A'H'$, do đó $S_{ABC} \leq S_{A'BC}$.



Hình 47

Vậy trong các tam giác nói trên, tam giác cân tại A có diện tích lớn nhất.



Hình 48

b) (h.48b) Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Khi đó $\widehat{BDC} = \frac{\alpha}{2}$ nên D di chuyển trên cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên BC (có giới hạn bởi tiếp tuyến tại B).

Chu vi $\triangle ABC$ lớn nhất $\Leftrightarrow BA + AC$ lớn nhất $\Leftrightarrow BD$ lớn nhất.

Chú ý rằng tâm của cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ là điểm chính giữa A' của cung chứa góc α . Gọi giao điểm của BA' với cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ là D' (khác B). Ta luôn có $BD \leq BD'$ (đường kính là dây lớn nhất). Do đó $BA + AC \leq BA' + A'C$.

Vậy $\triangle A'BC$ cân tại A' là tam giác có chu vi lớn nhất trong các tam giác ABC có $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$.

Chú ý : Có thể giải câu b bằng cách sử dụng định lí Ptô-lê-mê (bài 303). Gọi E là điểm chính giữa của cung BC không chứa A (h.48b). Đặt $EB = EC = m$ (không đổi). Áp dụng định lí Ptô-lê-mê vào tứ giác nội tiếp ABEC, ta có $AB \cdot EC + AC \cdot BE = AE \cdot BC$, từ đó $AB + AC = AE \cdot \frac{a}{m}$. Do đó $AB + AC$ lớn nhất

$\Leftrightarrow AE$ lớn nhất $\Leftrightarrow AE$ là đường kính $\Leftrightarrow \triangle ABC$ cân tại A (có $BC = a$, $\widehat{A} = \alpha$).

Nhận xét : Trong các bài toán cực trị, thường có các điểm di chuyển trên các hình nhất định. Các hình đó có khi được cho ngay trong đề bài, có khi phải được tìm ra bởi một bài toán quỹ tích.

Ví dụ 62(14). Cho đường thẳng xy và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với xy. Tìm điểm M trên xy sao cho $\widehat{AMB}$ lớn nhất.

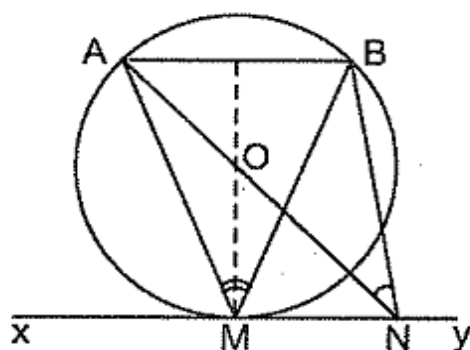
Giải

Trước hết ta xét bài toán phụ : Dựng đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với xy. Cách dựng đường tròn này được trình bày ở ví dụ 58.

Xét hai trường hợp :

a) Trường hợp $AB \parallel xy$, bài toán phụ có một nghiệm hình : có duy nhất một đường tròn đi qua AB và tiếp xúc xy tại M (h.49).

Khi đó bài toán cực trị cũng có một nghiệm hình duy nhất là điểm M nói trên. Thật vậy, lấy điểm N bất kì (khác M) thuộc xy, ta có $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AB}$

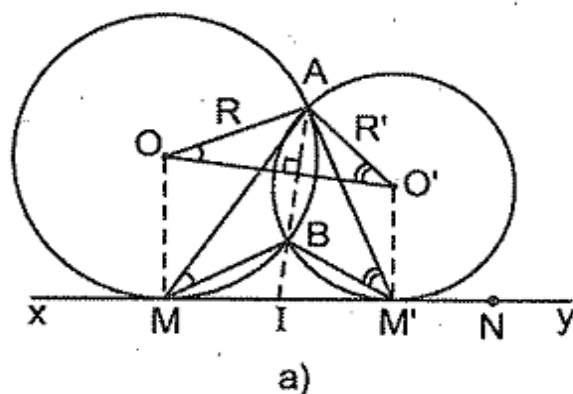


Hình 49

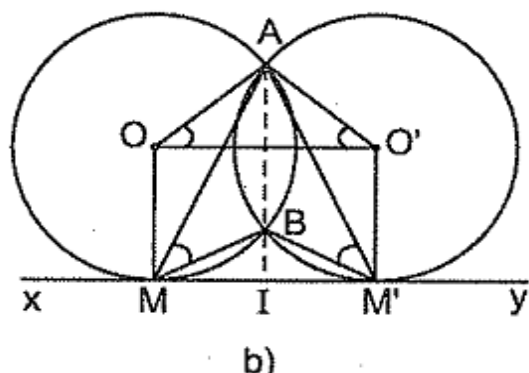
(góc nội tiếp), còn $\widehat{ANB} < \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AB}$ (góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn). Do đó

$$\widehat{AMB} > \widehat{ANB}.$$

b) Trường hợp AB cắt xy tại I, bài toán phụ có hai nghiệm hình : có hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') đi qua A, B và tiếp xúc với xy theo thứ tự tại M và M' (h.50).



a)



b)

Hình 50

Tương tự như trên, với mọi điểm N (khác M') thuộc tia Iy ta có $\widehat{AM'B} > \widehat{ANB}$, với mọi điểm N (khác M) thuộc tia Ix ta có $\widehat{AMB} > \widehat{ANB}$.

Bây giờ cần so sánh $\widehat{AMB}$ với $\widehat{AM'B}$ để chọn ra góc nào lớn hơn. Có hai trường hợp :

– Nếu $R \neq R'$, chẳng hạn $R > R'$ (h.50a) thì $OA > O'A$ nên $\widehat{AO'O} > \widehat{AOO'}$. Ta lại có $\widehat{AO'O} = \widehat{AM'B}$, $\widehat{AOO'} = \widehat{AMB}$. Do đó $\widehat{AM'B} > \widehat{AMB}$. Điểm M' là nghiệm hình của bài toán cực trị, đó là tiếp điểm trên xy của đường tròn (O') có bán kính nhỏ hơn.

– Nếu $R = R'$ (h.50b) thì $\triangle AOO'$ cân (khi đó $AB \perp xy$), ta có $\widehat{AO'O} = \widehat{AOO'}$ nên $\widehat{AM'B} = \widehat{AMB}$. Bài toán cực trị có hai nghiệm hình, đó là M và M' .

Tóm lại :

Nếu $AB \parallel xy$, bài toán có một nghiệm hình, đó là tiếp điểm của đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với xy .

Nếu $AB \perp xy$, bài toán có hai nghiệm hình, đó là hai tiếp điểm của hai đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với xy .

Trường hợp còn lại, bài toán có một nghiệm hình, đó là tiếp điểm của đường tròn có bán kính nhỏ hơn qua A, B và tiếp xúc với xy .

Nhận xét : Có những bài toán cực trị mà tại mỗi miền của mặt phẳng lại có cực trị riêng, khi đó ta cần so sánh chúng với nhau để tìm ra cực trị chung của bài toán.

Bài tập

406(12). Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về hai phía của d . Dựng đường tròn (O) đi qua A, B sao cho nó cắt d thành một dây có độ dài nhỏ nhất.

407(16). Trong các hình thang có một góc nhọn (α) nội tiếp một đường tròn cho trước, hình nào có diện tích lớn nhất $(\alpha > 45^\circ)$?

408(16). Cho điểm I nằm trên đoạn thẳng AB ($IA < IB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ nửa đường tròn đường kính AB và các tiếp tuyến Ax, By . Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn đó. Đường vuông góc với IM tại M cắt Ax, By theo thứ tự tại D, E .

a) Chứng minh rằng tích $AD \cdot BE$ có giá trị không đổi.

b) Tìm vị trí của điểm M để hình thang $ABED$ có diện tích nhỏ nhất.

409(12). Cho tam giác ABC vuông tại A . Tìm vị trí của điểm M thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC , sao cho nếu gọi D, E theo thứ tự là các hình chiếu của M trên các đường thẳng AB, AC thì DE có độ dài lớn nhất.

410 (16). Cho đường tròn (O) và dây AB . Điểm M di chuyển trên cung nhỏ AB . Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên các tiếp tuyến tại A, B của đường tròn. Tìm vị trí của M để tích $MI \cdot MK$ có giá trị lớn nhất.

411(15). Cho đường tròn (O) và dây BC không đi qua O . Điểm A di chuyển trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi H là

trục tâm của tam giác ABC. Tìm vị trí của điểm A để tổng $HA + HB + HC$ có giá trị lớn nhất.

412(15). Cho đường tròn (O) và dây AB. Tìm điểm C thuộc cung nhỏ AB sao cho tổng $\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}$ có giá trị nhỏ nhất.

413 (15). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Tìm điểm M thuộc cung BC sao cho nếu gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, BC, AC, thì tổng

$MA + MB + MC + MH + MI + MK$ có giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

414 (15). Cho tam giác đều ABC. Vẽ các tia Bx, Cy cùng phía với A đối với BC sao cho $Bx \parallel AC$, $Cy \parallel AB$. Một đường thẳng d đi qua A cắt Bx, Cy theo thứ tự ở D, E. Gọi I là giao điểm của CD và BE. Xác định vị trí của đường thẳng d để tam giác BIC có chu vi lớn nhất.

415(15). Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = 10\text{cm}$.

a) Chứng minh rằng tồn tại vô số tam giác vuông cân DEF ngoại tiếp tam giác ABC (mỗi cạnh của $\triangle DEF$ đi qua một đỉnh của $\triangle ABC$).

b) Tính diện tích lớn nhất của tam giác DEF.

416* (15). Cho tam giác ABC. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên các tia BA, CA sao cho $BD = CE$.

a) Vẽ hình bình hành BDEM. Tìm quỹ tích các điểm M.

b) Tìm vị trí của các điểm D, E sao cho độ dài DE nhỏ nhất.

417(15). Cho đường tròn (O), M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB, điểm C chuyển động trên cung lớn AB, D là giao điểm của MC và AB.

a) Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

b) Tìm vị trí của điểm C để độ dài BI nhỏ nhất.

418* (16). Cho tam giác ABC. Điểm M di chuyển trên cạnh BC. Vẽ đường tròn (O_1) đi qua M và tiếp xúc với AB tại B. Vẽ đường tròn (O_2) đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn.

a) Chứng minh rằng điểm N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

c) Tìm vị trí của điểm M để đoạn thẳng O_1O_2 có độ dài nhỏ nhất.

419(16). Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm I nằm bên trong đường tròn. Gọi AB và CD là hai dây bất kì cùng đi qua I và vuông góc với nhau. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD .

a) Chứng minh rằng khi các dây AB, CD thay đổi thì các tổng sau không đổi : $OM^2 + ON^2, AB^2 + CD^2, AC^2 + BD^2$.

b) Xác định vị trí của AB, CD để hình chữ nhật $OMIN$ có diện tích lớn nhất ; có chu vi lớn nhất.

c) Xác định vị trí của AB, CD để tổng $AB + CD$ lớn nhất, nhỏ nhất.

d) Xác định vị trí của AB, CD để tứ giác $ACBD$ có diện tích lớn nhất ; nhỏ nhất.

420(16). Cho đường tròn (O) đường kính AB , đường thẳng d không giao với đường tròn. Dựng điểm M thuộc d sao cho các tia MA, MB cắt đường tròn ở D, E và độ dài DE nhỏ nhất.

421** (12). Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , dây CD . Tìm điểm M thuộc cung CD sao cho các tia MA, MB cắt dây CD ở I, K và IK có độ dài lớn nhất.

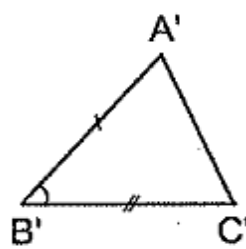
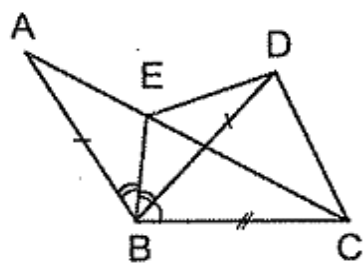
MỘT SỐ BÀI TOÁN NỔI TIẾNG

I – BÀI TOÁN "TAM GIÁC CÓ HAI ĐƯỜNG PHÂN GIÁC BẰNG NHAU LÀ TAM GIÁC CÂN"

Trong các bài tập ở mục này, ta được sử dụng định lí : Nếu hai tam giác có hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một nhưng các góc xen giữa không bằng nhau thì các cạnh thứ ba cũng không bằng nhau và cạnh nào đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Chứng minh : Xét các tam giác ABC và $A'B'C'$ có $AB = A'B', BC = B'C',$

$\widehat{B} > \widehat{B'}$ (h.51). Trên nửa mặt phẳng chứa A có bờ BC , vẽ điểm D sao cho $\widehat{CBD} = \widehat{B'}$ và $BD = B'A'$. Ta có $\triangle DBC = \triangle A'B'C'$ (c.g.c) nên $DC = A'C'$. Tia phân giác của góc ABD cắt AC ở E , ta có $\triangle ABE = \triangle DBE$ (c.g.c) suy ra $AE = DE$. Do đó



Hình 51

$$AC = AE + EC = DE + EC > DC = A'C'.$$

Vậy $AC > A'C'$.

Ví dụ 63(16). Cho tam giác ABC có các đường phân giác BD, CE bằng nhau. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A.

Giải :

Cách 1 (h.52) Giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì $\widehat{B}_1 > \widehat{C}_1$,
 $\widehat{B}_2 > \widehat{C}_2$. Xét $\triangle CBD$ và $\triangle BCE$, ta có BC là cạnh chung,
 $BD = CE$, $\widehat{B}_1 > \widehat{C}_1$ nên

$$CD > BE. \quad (1)$$

Vẽ hình bình hành BEKD, ta có

$$BE = DK. \quad (2)$$

$$EK = BD = CE. \quad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CD > DK$ nên $\widehat{K}_2 > \widehat{C}_3$. Mặt khác $\widehat{K}_1 = \widehat{B}_2 > \widehat{C}_2$. Do đó
 $\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 > \widehat{C}_2 + \widehat{C}_3$, tức là $\widehat{EKC} > \widehat{ECK}$, suy ra $CE > EK$, mâu thuẫn với (3).

Giả sử $\widehat{B} < \widehat{C}$, cũng chứng minh tương tự dẫn đến điều vô lí.

Vậy $\widehat{B} = \widehat{C}$, do đó $\triangle ABC$ cân tại A.

Cách 2 (h.53). Gọi K là giao điểm của BD và CE.

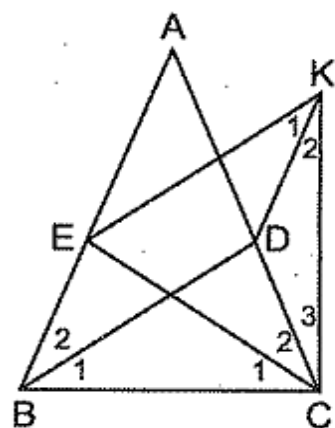
Giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì $\widehat{KBE} > \widehat{C}_1$, ta lấy điểm I trên đoạn thẳng KE sao cho $\widehat{KBI} = \widehat{C}_1$, thế thì BIDC là tứ giác nội tiếp.

Ta lại có $\widehat{KBC} > \widehat{C}_2$ nên $\widehat{KBI} + \widehat{KBC} > \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2$
 tức là $\widehat{IBC} > \widehat{C}$.

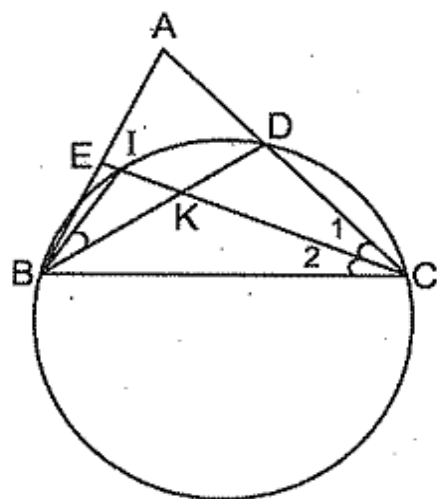
Ta chú ý rằng $\widehat{IBC} < 90^\circ$ (vì $\widehat{IBC} = \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} < 90^\circ$) nên từ $\widehat{IBC} > \widehat{C}$ suy ra
 $\widehat{CI} > \widehat{BD}$, do đó $CI > BD$, dẫn đến $CE > BD$, trái với giả thiết.

Giả sử $\widehat{B} < \widehat{C}$ cũng dẫn đến điều trái với giả thiết.

Vậy $\widehat{B} = \widehat{C}$, do đó $\triangle ABC$ cân tại A.



Hình 52



Hình 53

Cách 3. Xem bài 228 ở cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8* tập hai.

Cách 4. Xem bài 247 ở cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8* tập hai.

Bốn cách chứng minh khác, xem các bài tập 422, 425, 426, 427.

II – BÀI TOÁN "CON BUỒM"

Ví dụ 64(16). Cho đường tròn (O), dây AB, các điểm C và E thuộc cung AB. Vẽ các dây CD, EF đi qua trung điểm I của AB. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của CF, ED với AB. Chứng minh rằng $IM = IN$.

Cách 1. (h.54a) Vẽ dây E'F' đối xứng với dây EF qua OI. Ta có FCE'F' là tứ giác nội tiếp nên

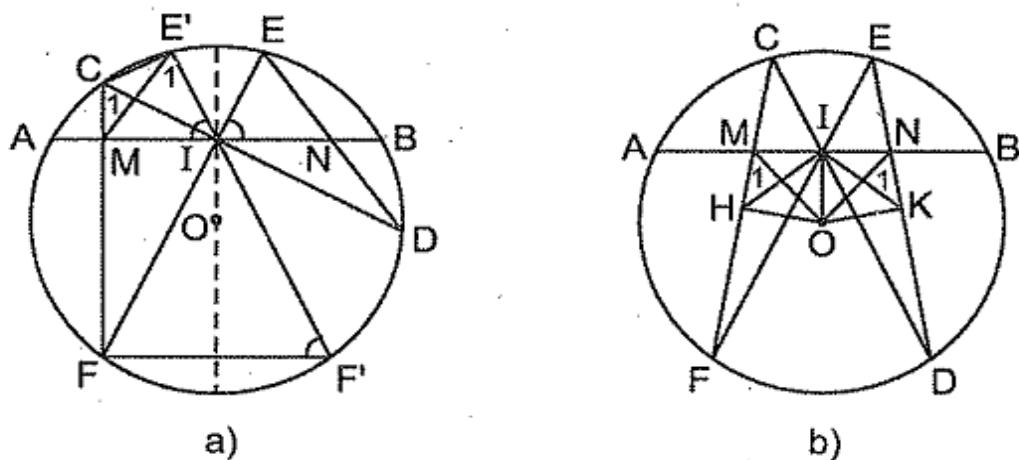
$$\widehat{FCE'} + \widehat{F'} = 180^\circ. \quad (1)$$

Do F đối xứng với F' qua OI nên $OI \perp FF'$, ta lại có $OI \perp AB$ nên $FF' \parallel AB$, suy ra

$$\widehat{F'} = \widehat{MIE'}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FCE'} + \widehat{MIE'} = 180^\circ$ nên MCE'I là tứ giác nội tiếp. Do đó $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$. Ta lại có $\widehat{C_1} = \widehat{E}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FD) nên $\widehat{E_1} = \widehat{E}$.

Dễ dàng chứng minh $\triangle MIE' = \triangle NIE$ (g.c.g) suy ra $IM = IN$.



Hình 54

Cách 2. (h.54b) Dễ dàng chứng minh bài toán trong trường hợp AB là đường kính.

Xét trường hợp AB không là đường kính. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của CF, ED. Ta có $\triangle CFI \sim \triangle EDI$ (g.g), IH và IK là các đường trung tuyến tương ứng nên $\widehat{H_1} = \widehat{K_1}$.

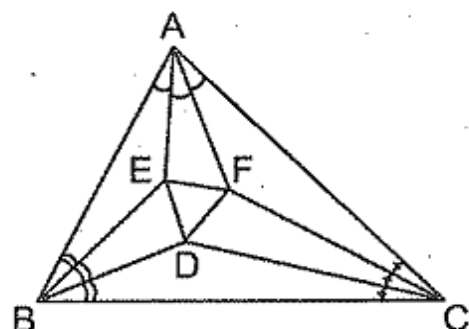
OIMH và OINK là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{H_1} = \widehat{IOM}$, $\widehat{K_1} = \widehat{ION}$. Suy ra $\widehat{IOM} = \widehat{ION}$.

$\triangle OMN$ có đường cao OI cũng là đường phân giác nên $IM = IN$.

Cách 3. Xem bài tập 430.

III – BÀI TOÁN CHIA BA CÁC GÓC MỘT TAM GIÁC CỦA MOÓC-LÂY

Năm 1899, nhà toán học Anh sống ở Mỹ là Moóc-lây (Morley, 1860 – 1937) đã phát hiện rằng khi chia ba các góc của một tam giác thì ba giao điểm của các đường chia ấy là đỉnh của một tam giác đều (h.55). Ví dụ sau đây chứng minh điều đó.



Hình 55

Ví dụ 65*(16). Cho tam giác ABC. Đặt $\widehat{A} = 3\alpha$, $\widehat{B} = 3\beta$, $\widehat{C} = 3\gamma$. Lấy điểm K nằm trong tam giác sao cho $\widehat{KBA} = \beta$, $\widehat{KCA} = \gamma$. Gọi D là giao điểm của các đường phân giác của tam giác KBC. Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng KB, điểm F thuộc đoạn thẳng KC sao cho $\widehat{KDE} = \widehat{KDF} = 30^\circ$.

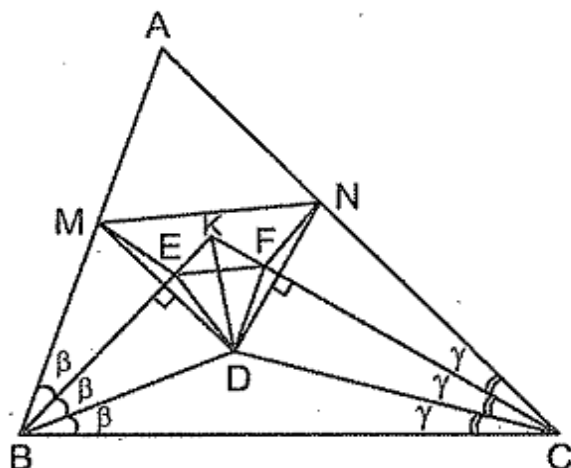
- Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.
- Gọi M, N theo thứ tự là điểm đối xứng với D qua KB, KC. Chứng minh rằng MEFN là hình thang cân, tính các góc của hình thang cân đó theo α .
- Chứng minh rằng năm điểm A, M, E, F, N thuộc cùng một đường tròn và các tia AE, AF chia góc A thành ba góc bằng nhau.

Giải : (h.56)

a) $\triangle KED = \triangle KFD$ (g.c.g) nên $DE = DF$. Ta lại có $\widehat{EDF} = 60^\circ$ nên $\triangle DEF$ là tam giác đều.

b) KD là tia phân giác của góc BKC nên dễ dàng chứng minh được $DM = DN$. Tam giác cân DMN có DK là tia phân giác của góc MDN nên $DK \perp MN$.

Tam giác đều DEF có DK là tia phân giác của góc EDF nên $DK \perp EF$.



Hình 56

Suy ra $EF \parallel MN$. Bây giờ ta tính các góc ở đáy MEF, EFN của hình thang MEFN. Ta có

$$\widehat{MEF} = 360^\circ - 60^\circ - 2\widehat{DEB} = 300^\circ - 2\widehat{DEB} \text{ (xét các góc tại đỉnh E)} \quad (1)$$

$$\widehat{DEB} = 30^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BKC}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \widehat{BKC} &= 180^\circ - (2\beta + 2\gamma) = 180^\circ - 2(\beta + \gamma) \\ &= 180^\circ - 2(60^\circ - \alpha) = 60^\circ + 2\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\widehat{MEF} = 300^\circ - (60^\circ + \widehat{BKC}) = 300^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 2\alpha) = 180^\circ - 2\alpha.$$

Tương tự $\widehat{EFN} = 180^\circ - 2\alpha$.

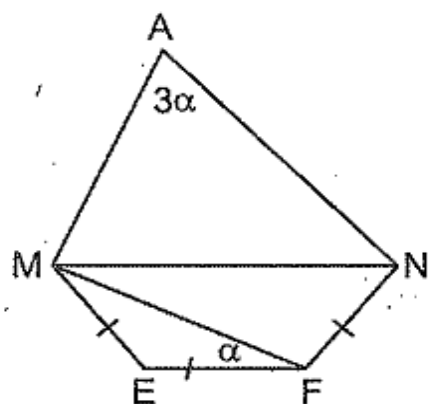
Vậy MEFN là hình thang cân có các góc bằng $180^\circ - 2\alpha$ và 2α .

c) Ta có $ME = ED = EF$ nên $\triangle MEF$ là tam giác cân, do góc ở đỉnh $\widehat{MEF} = 180^\circ - 2\alpha$ nên góc ở đáy $\widehat{MFE} = \alpha$ (h.57).

Suy ra

$$\begin{aligned} \widehat{MFN} &= \widehat{EFN} - \widehat{MFE} \\ &= 180^\circ - 2\alpha - \alpha = 180^\circ - 3\alpha. \end{aligned}$$

Mặt khác $\widehat{A} = 3\alpha$. Do đó MFNA là tứ giác nội tiếp. Hình thang cân MEFN cũng là tứ giác nội tiếp. Vậy năm điểm A, M, E, F, N thuộc cùng một đường tròn. Do $ME = EF = FN$ nên $\widehat{ME} = \widehat{EF} = \widehat{FN}$, suy ra $\widehat{MAE} = \widehat{EAF} = \widehat{FAN}$.



Hình 57

Bài tập

Liên quan đến bài toán "Tam giác có hai đường phân giác bằng nhau là tam giác cân" :

422(11). Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2\beta$, $\widehat{C} = 2\alpha$, các đường phân giác BD và CE bằng nhau. Vẽ hình bình hành BDCK.

a) Tính các góc BEK, BKE theo α và β .

b) Chứng minh rằng $\alpha = \beta$.

423(1). Cho tam giác ABC, đường phân giác BD. Gọi d là đường phân giác của góc ngoài đỉnh B. Gọi M, Q theo thứ tự là hình chiếu của A, C trên d. Chứng minh rằng $BD \cdot MQ = 2S_{ABC}$.

424(16). Chứng minh rằng nếu một tứ giác nội tiếp có hai cạnh đối bằng nhau thì hai cạnh đối kia song song và tứ giác đó là hình thang cân.

425(16). Cho tam giác ABC. Gọi d_1, d_2 theo thứ tự là đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh B, đỉnh C. Gọi M, Q theo thứ tự là hình chiếu của A, C trên d_1 . Gọi N, P theo thứ tự là hình chiếu của A, B trên d_2 .

a) Chứng minh rằng MN song song với BC.

b) Chứng minh rằng MNPQ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi BD, CE là các đường phân giác của tam giác ABC. Chứng minh rằng $BD \cdot MQ = CE \cdot NP$.

d) Chứng minh rằng nếu $BD = CE$ thì tam giác ABC là tam giác cân.

426(16). Cho tam giác ABC có các đường phân giác BD, CE bằng nhau và cắt nhau tại I.

a) Vẽ điểm N sao cho $NB = AE, ND = AC$ (N và A cùng phía đối với BD). Chứng minh rằng ANBD là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi NK là đường phân giác của tam giác NBD. Chứng minh rằng ANKI là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh rằng ANBD là hình thang cân.

d) Chứng minh rằng ABC là tam giác cân.

427(16). Chứng minh rằng nếu hai tam giác ABC và EPQ có $BC = PQ, \hat{A} = \hat{E}$, các đường phân giác AD và EF bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau.

Hướng dẫn : Đặt các tam giác ABC, EPQ sao cho PQ trùng BC, A và E nằm cùng phía với BC và nằm cùng phía đối với đường trung trực của BC.

428(16). Cho tam giác ABC, điểm D thuộc đường phân giác AI. Các đường thẳng BD, CD cắt AC, AB theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng nếu $BM = CN$ thì tam giác ABC là tam giác cân.

Liên quan đến bài toán "con bướm" :

429(16). Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), điểm E di chuyển trên cung AB. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của ED, EC với AB.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác EMC cắt đường thẳng AB tại một điểm K cố định.

b) Đặt $AM = a$, $MN = b$, $NB = c$, chứng minh rằng $\frac{ac}{b}$ có giá trị không đổi.

430(16). Vận dụng bài 429 để giải ví dụ 64.

431(16). Cho đường tròn (O), dây AB, các điểm C và E thuộc cung AB (C thuộc cung AE). Vẽ các dây CD, EF đi qua điểm I thuộc dây AB. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của CF, ED với AB. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AI} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{IB} + \frac{1}{IM}.$$

Bài toán của Na-pô-lê-ông (Napoléon Bonaparte, 1769 – 1821, Hoàng đế Pháp) :

432(16). Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác ABC vẽ các tam giác đều BCD, ACE, ABF. Gọi H, I, K theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác đều ấy. Chứng minh rằng tam giác HIK là tam giác đều.

Bài toán trên còn có thể được diễn đạt như sau :

Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác cân BCH, ACI, ABK theo thứ tự có cạnh đáy là BC, AC, AB và góc ở đáy bằng 30° . Chứng minh rằng tam giác HIK là tam giác đều.

Bài toán của Pa-xcan (Pascal, 1623 – 1662, nhà toán học và vật lý học Pháp) :

433* (17). Chứng minh rằng nếu một lục giác nội tiếp đường tròn có các cạnh đối không song song thì giao điểm của các cặp cạnh đối là ba điểm thẳng hàng.

Bài đọc thêm

Những điều có thể bạn chưa biết về số π

1. Số π có bao nhiêu chữ số thập phân ?

Tỉ số giữa độ dài đường tròn và đường kính của nó được nhà toán học Anh là Giôn-xơn kí hiệu bằng chữ cái Hi Lạp π vào năm 1706 và ngày nay đã trở nên quen thuộc ngay cả với các học sinh tiểu học.

Trong chương trình Toán của ta, số π được giới thiệu ở lớp 5 với giá trị gần đúng là 3,14. Nếu cần chính xác hơn, ta lấy $\pi = 3,1416$ và kể ra như vậy độ chính xác đã khá cao rồi.

Khi biết rằng giá trị 3,1416 cũng chỉ là giá trị gần đúng của số π , bạn đọc ưa tìm tòi chắc sẽ đặt câu hỏi : Lấy đến bao nhiêu chữ số thập phân thì đạt đến giá trị đúng của số π ? Đó cũng chính là vấn đề đặt ra cho các nhà toán học.

Năm 1761, nhà toán học Đức Lăm-be chứng minh được rằng π là số vô tỉ, tức là một số thập phân vô hạn không tuần hoàn : các chữ số thập phân của nó kéo dài mãi mà không bao giờ lặp lại theo chu kì nào, điều này được nhà toán học Ả Rập An Ka-si dự đoán từ thế kỉ XV. Hơn nữa, năm 1882 nhà toán học Đức Lin-đơ-man còn chứng minh được rằng số π không phải là nghiệm của bất kì phương trình đại số nào, giải quyết trọn vẹn vấn đề do O-le nêu lên từ thế kỉ XVIII.

Năm 1949, người ta đã tính được, số π với hai nghìn chữ số thập phân. Năm 1999, nhà nghiên cứu tin học Nhật Bản Ka-na-đa đã tính được trên 206 tỉ chữ số thập phân của số π với một siêu máy tính chạy trong 46 giờ.

2. Lịch sử số π

Bây giờ chúng ta cùng nhau lần giở lại những trang lịch sử của số π .

Từ hàng ngàn năm trước Công nguyên, người cổ Ba-bi-lon đã tìm ra $\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125$. Trong các bản di cảo được tìm thấy ở Kim tự tháp, người Ai Cập cổ đã biết tính diện tích hình tròn có đường kính d bằng cách tính diện tích hình vuông có cạnh $\frac{8}{9}d$, như vậy số π được tính bằng $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ hay 3,16 (sai số là 2%).

Vào thế kỉ III trước Công nguyên, nhà toán học cổ Hi Lạp Ác-si-mét đã tìm được $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ bằng cách xét các đa giác đều 96 cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn.

Trong việc tìm giá trị của số π , người Trung Quốc đã đạt được những kết quả kì diệu. Đầu thế kỉ II, Trương Hành tìm được $\pi = \sqrt{10} \approx 3,162$. Đầu thế kỉ III, Lưu Huy biểu thị $\pi \approx 3,14$ và sau đó còn tìm được $\pi = 3,14159$. Đến thế kỉ V, Tổ Sung Chi đã tính số π đúng tới 8 chữ số : 3,1415926.

Mãi mười thế kỉ sau, kỉ lục trên mới bị phá bởi An Ka-si : ông xét các đa giác đều có $3 \cdot 10^{28}$ cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn và tìm được số π đúng với 17 chữ số : 3,141 592 653 589 793 2.

Ở nước ta, trong dân gian có lưu truyền một quy tắc xác định đường kính của hình tròn khi biết chu vi của nó "quân bát, phát tam, tồn ngũ, quân nhị" tức là "chia (chu vi) làm 8 phần, bỏ đi 3 phần, còn lại 5 phần, chia đôi". Theo quy tắc này, tỉ số của đường kính và chu vi bằng $\frac{5}{16}$, do đó số π bằng $\frac{16}{5} = 3,2$.

3. Một số cách biểu thị số π

Người ta còn biểu thị số π theo nhiều cách khác, chẳng hạn $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3,146$. Nhà toán học Đức Lai-bơ-nít (1646 – 1716) cũng đưa ra một cách biểu thị số π bằng một chuỗi số vô hạn rất đẹp :

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1} + \dots \right).$$

Với $k = 5000$, ta tìm được $\pi \approx 3,1417$.

4. Bạn thử tính giá trị của số π

Cuối thế kỷ XVIII, nhà nghiên cứu người Pháp là Buýp-phông (*Buffon*) đã tính giá trị của số π bằng cách thả nhiều lần chiếc kim có độ dài $\frac{a}{2}$ lên mặt giấy có các dòng kẻ song song cách đều có khoảng cách bằng a . Giả sử sau n lần thả kim, có m lần kim chạm vào dòng kẻ, thế thì $\pi = \frac{n}{m}$. Năm 1901, nhà toán học I-ta-li-a La-de-ri-ni (*Lazzerini*) đã kiên trì thả kim 3407 lần và tính được $\pi \approx 3,1415929$.

Ác-si-mét là người đầu tiên tính giá trị của số π bằng cách tính chu vi các đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp một đường tròn. Độ dài của đường tròn nằm lọt giữa hai giá trị trên.

Bây giờ, bạn hãy dùng bảng lượng giác (hoặc máy tính bỏ túi) để tính giá trị của số π bằng cách tính chu vi của các đa giác đều 75 cạnh nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn.

Giải : Gọi R là bán kính của đường tròn. Chu vi đa giác đều 75 cạnh nội tiếp đường tròn bằng :

$$75 \cdot 2 \cdot R \cdot \sin \frac{180^\circ}{75} \approx 150R \cdot 0,0419.$$

Chu vi đa giác đều 75 cạnh ngoại tiếp đường tròn bằng :

$$75 \cdot 2R \cdot \tan \frac{180^\circ}{75} \approx 150R \cdot 0,0419.$$

Do đó độ dài đường tròn bằng $150R \cdot 0,0419$.

Suy ra
$$\pi = \frac{150R \cdot 0,0419}{2R} \approx 3,1425.$$

5. Một vài cách nhớ giá trị của số π

Người ta đã đưa ra nhiều cách nhớ số π căn cứ vào số chữ cái trong các chữ của một số câu văn, câu thơ.

Người Anh có câu :

How I wish I could recollect, of circle round

The exact relation Archimede unwound !

Các chữ số của số π theo câu trên là : 3,141 592 653 589 7.

Tạm dịch : Ước gì tôi có thể tìm lại được mối quan hệ chính xác trong đường tròn đã được Ác-si-mét giải quyết !

Người Pháp có câu :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !

Immortel Archimède, sublime ingénieur

Que de ton jugement peut sonder la valeur !

Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

Các chữ số của số π theo câu trên là :

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 (31 chữ số)

Tạm dịch :

Tôi thích biết bao được dạy một con số

Ích lợi dường nào cho những kẻ khôn ngoan !

Ác-si-mét bất tử, người kĩ sư tuyệt đỉnh.

Cách đánh giá số π của Người hợp lí làm sao !

Nó đã giúp tôi vươn lên những tầm cao.

Còn trong tiếng Việt, năm 1943 Nguyễn Bá Thái đưa ra câu thơ :

Cầu Ô tuân ý Cao-xa

Ngân-giang lẻ phượng đậm-đà bắc ngang

Tung-bừng nghênh-đón cô-nường

Chàng-Ngưu vui tỏ nỗi thương-ai tràn

Thường là chuyện khóc khó can

Hoá-thành mưa lũ miên-man tháng-ngày.

Câu này cũng gồm 31 chữ số của số π (chú ý rằng các chữ có gạch nối trong bài coi như một chữ, chẳng hạn Cao-xa biểu thị 5, Ngân-giang biểu thị 9).

Năm 1994, tác giả của cuốn sách này cũng đưa ra một cách nhớ số π với câu châm ngôn sau :

Một ý nghĩ ý tưởng trong-sáng

3 1 4 1 5 9

Là phương hướng cho nhiều hành-động cao-thượng.

2 6 5 3 5 8 9

LỜI GIẢI, CHỈ DẪN HOẶC ĐÁP SỐ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III – HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§12. Phương trình bậc nhất hai ẩn

198. a) $x + 4y - 5 = 0$. Bạn đọc tự vẽ đồ thị.

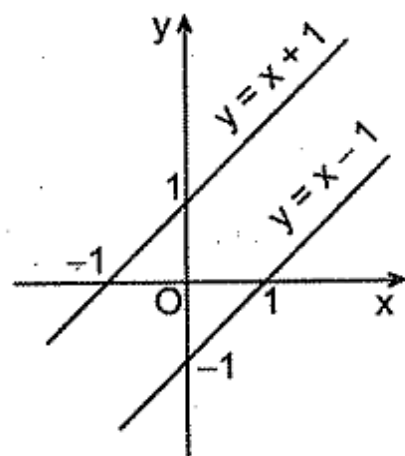
b) Điểm cố định là $(-3; 2)$.

199. Giải điều kiện $\frac{4}{c} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{9}$, ta được hai đáp số :

$c = 6, b = -2$ và $c = -6, b = 2$.

$$200. (x - y)^2 = 1 \Leftrightarrow |x - y| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

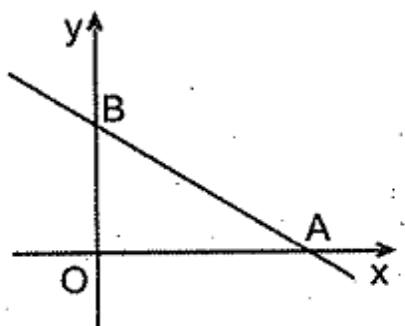
Đồ thị biểu diễn tập nghiệm của phương trình là hai đường thẳng $y = x - 1$ và $y = x + 1$ (xem hình 58).



Hình 58

201. (h.59) Gọi A và B là các giao điểm của đường thẳng $ax + by = 6$ với trục hoành và trục tung. Ta tính được $OA = \frac{6}{a}$, $OB = \frac{6}{b}$.

Từ $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{a} \cdot \frac{6}{b} = 9$, ta tính được $ab = 2$.



Hình 59

202. (h.60) Giải tương tự ví dụ 66.

a) Điểm cố định là $N\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Đặt $\frac{1-y}{8} = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $y = 1 - 8k$. Từ đó tính được $x = 9k - 11$.

Giải điều kiện $9k - 11 < 0$ và $1 - 8k < 0$ ta được $\frac{1}{8} < k < 1\frac{2}{9}$. Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1$. Có duy nhất một điểm phải tìm là $(-2; -7)$.

205. a) Gọi đường thẳng phải tìm là $y = ax + b$. Ta tìm được $a = \frac{88}{15}$, $b = -\frac{3}{5}$.

Đường thẳng phải tìm là $y = \frac{88}{15}x - \frac{3}{5}$.

$$b) y = \frac{88}{15}x - \frac{3}{5} \quad (1)$$

Cần tìm số nghiệm nguyên của phương trình mà $3 \leq x \leq 33$. Rút y từ (1), ta được

$$y = \frac{88x - 9}{15} = 6x - 1 - \frac{2x - 6}{15} = 6x - 1 - \frac{2(x - 3)}{15}.$$

Đặt $x - 3 = 15k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $x = 15k + 3$, $y = 88k + 17$.

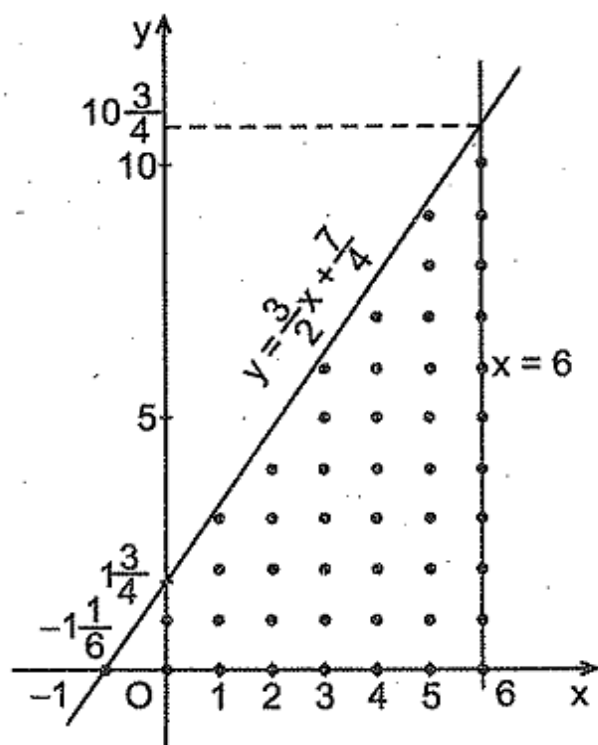
Do $3 \leq 15k + 3 \leq 33$ nên $0 \leq k \leq 2$.

Có ba giá trị nguyên của k (là 0, 1, 2). Tương ứng có ba điểm thuộc đoạn thẳng AB có tọa độ là các số nguyên.

206. a) Xem hình 62.

b) Đường thẳng $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ (d) cắt đường thẳng $y = 0$ (trục hoành) tại điểm có hoành độ $x = -1\frac{1}{6}$. Đường thẳng d cắt đường thẳng $x = 6$ tại điểm có tung độ $y = 10\frac{3}{4}$.

Xét hàm số $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$. Lần lượt cho x nhận các giá trị $-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$, ta được các giá trị tương ứng của y là



Hình 62

$\frac{1}{4}$; $1\frac{3}{4}$; $3\frac{1}{4}$; $4\frac{3}{4}$; $6\frac{1}{4}$; $7\frac{3}{4}$; $9\frac{1}{4}$; $10\frac{3}{4}$. Do đó số điểm có tọa độ nguyên phải tìm trên các đường thẳng $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6$ lần lượt là 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11.

Tổng số điểm phải đếm : $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 = 48$.

§13. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

207. a) (12 ; 25) ; b) (2 ; 4).

208. a) (144 ; 36) ; b) (9 ; 1).

209. a) Rút $|y - 1|$ từ phương trình dưới, thay vào phương trình trên và rút gọn được $|x - 2| - 2x = 11$. Hai nghiệm : (-3 ; 3) ; (-3 ; -1).

$$\text{b) } \begin{cases} |x| + x + y = 25 & (1) \\ |y| + x - y = 30 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x \leq 0$, từ (1) được $y = 25$. Thay vào (2) được $x = 30$, loại.

- Xét $y \geq 0$, từ (2) được $x = 30$. Thay vào (1) được $y = -35$, loại.

- Xét $x > 0, y < 0$, ta tìm được nghiệm (16 ; -7).

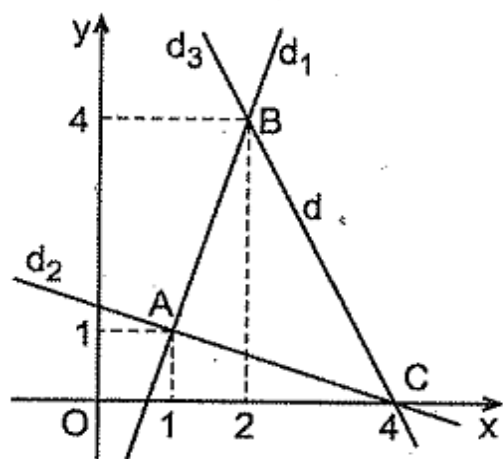
210. Giải hệ phương trình đầu, ta được nghiệm (1 ; 2). Thay vào hệ phương trình sau, ta tìm được $a = 4$.

211. Nghiệm của hệ phương trình là $\left(\frac{5}{m+1}; \frac{3-2m}{m+1}\right)$. Giải điều kiện

$x > 0, y > 0$, ta được $-1 < m < \frac{3}{2}$.

212. (h.63) Gọi các đường thẳng đã cho theo thứ tự là d_1, d_2, d_3 . Ta tìm được giao điểm của d_1 và d_2 là $A(1 ; 1)$, giao điểm của d_1 và d_3 là $B(2 ; 4)$, giao điểm của d_2 và d_3 là $C(4 ; 0)$.

Ta tính được $AB = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{10}$, lại có $d_1 \perp d_2$ vì $3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$. Do đó $\triangle ABC$ vuông cân tại A.



Hình 63

213. Điều kiện cần để hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm là $ab' - a'b = 0$. Giải điều kiện trên được $m = 2$ hoặc $m = -1$.

Với $m = 2$, hệ có dạng $\begin{cases} 6x + 4y = -1 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$ vô nghiệm.

Với $m = -1$, hệ có dạng $\begin{cases} y = -4 \\ -y = 4 \end{cases}$ vô số nghiệm : $(x ; -4)$ với $x \in \mathbf{R}$.

214. a) Nghiệm $(1 ; -1)$.

$$\text{b) } \begin{cases} mx + 2y = 1 & (1) \\ 3x + (m+1)y = -1 & (2) \end{cases}$$

Rút y từ (1) rồi thay vào (2) và rút gọn được $(m-2)(m+3)x = m+3$.

Với $m \neq 2$ và $m \neq -3$ thì hệ có một nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{m-2}; \frac{1}{2-m}\right)$.

Với $m = 2$, hệ vô nghiệm.

Với $m = -3$, hệ vô số nghiệm : $\left(x; \frac{3x+1}{2}\right)$ với $x \in \mathbf{R}$.

c) Với $m = -3$, hệ có vô số nghiệm nguyên : $\left(x; \frac{3x+1}{2}\right)$ với x lẻ.

Với $m \neq -3$ và $m \neq 2$, hệ có nghiệm nguyên nếu $m-2$ là ước của 1, tức là $m = 3$ hoặc $m = 1$. Khi đó các nghiệm nguyên là $(1 ; -1)$, $(-1 ; 1)$.

Kết luận : Với $m = -3$, $m = 3$, $m = 1$, hệ có nghiệm nguyên.

215.a) Với $m \neq 0$, $m \neq 2$, hệ có một nghiệm duy nhất : $\left(\frac{3m-2}{m}; \frac{m-2}{m}\right)$.

Với $m = 0$, hệ vô nghiệm.

Với $m = 2$, hệ vô số nghiệm : $(x ; 2-x)$ với $x \in \mathbf{R}$.

b) Với $m = 1$ thì nghiệm là $(1 ; -1)$. Với $m = -1$ thì nghiệm là $(5 ; 3)$.

Với $m = -2$ thì nghiệm là $(4 ; 2)$. Với $m = 2$ thì nghiệm là $(x ; 2-x)$ với $x \in \mathbf{Z}$.

c) *Đáp số :* $m < 0$ hoặc $m > 2$.

(Chú ý rằng $x = \frac{3m-2}{m} = \frac{m-2}{m} + 2 = y + 2$ nên $y > 0$ sẽ kéo theo $x > 0$).

216. a) Với $m \neq \pm 1$, hệ có một nghiệm duy nhất : $\left(\frac{3m+1}{m+1}; \frac{m-1}{m+1} \right)$.

Với $m = 1$, hệ vô số nghiệm : $(x; 2-x)$ với $x \in \mathbb{R}$.

Với $m = -1$, hệ vô nghiệm.

b) Với $m \neq \pm 1$, ta có :

$$\begin{aligned} xy &= \frac{(3m+1)(m-1)}{(m+1)^2} = \frac{3m^2 - 2m - 1}{(m+1)^2} = \\ &= \frac{4m^2 - (m^2 + 2m + 1)}{(m+1)^2} = \frac{4m^2}{(m+1)^2} - 1 \geq -1. \end{aligned}$$

Kết luận : min $xy = -1$ khi và chỉ khi $m = 0$.

217. a) $x = \frac{3-z}{4}, y = \frac{z+2}{4}$.

b) Do $x \geq 0, y \geq 0$ nên $-2 \leq z \leq 3$. Do $z \geq 0$ nên $0 \leq z \leq 3$.

Biểu thị A theo z ta có

$$A = x + y - z = \frac{3-z}{4} + \frac{z+2}{4} - z = \frac{5-4z}{4}.$$

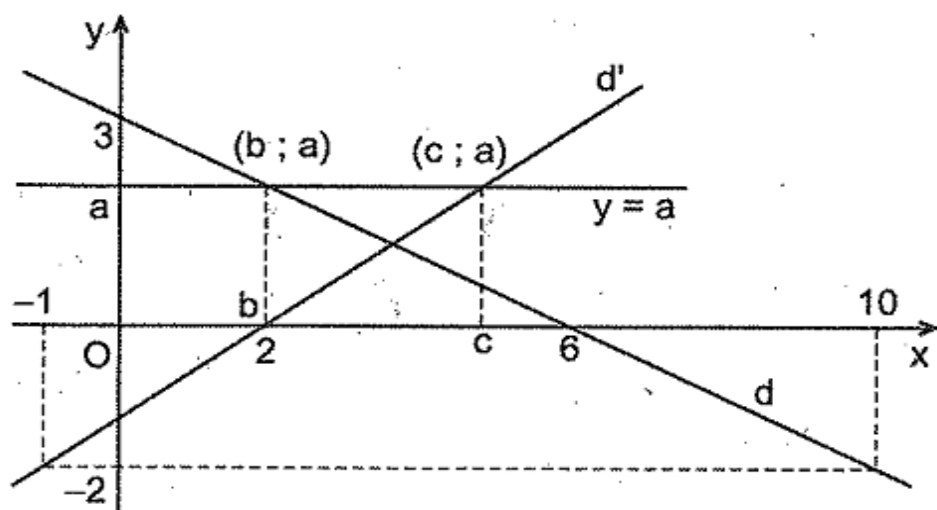
A nhỏ nhất $\Leftrightarrow 5-4z$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow z$ lớn nhất $\Leftrightarrow z = 3$. Khi đó $x = 0$,
 $y = \frac{5}{4}, A = -\frac{7}{4}$.

A lớn nhất $\Leftrightarrow 5-4z$ lớn nhất $\Leftrightarrow z$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow z = 0$. Khi đó $x = \frac{3}{4}$,
 $y = \frac{1}{2}, A = \frac{5}{4}$.

218. Khử a ta được $9b + 8c = 3$. Tìm nghiệm nguyên của phương trình trên, ta được $b = 8k + 3, c = -9k - 3$ (k nguyên). Từ đó $a = -12k - 2$.

219. (h.64) Giả sử đường thẳng $y = a$ cắt d và d' theo thứ tự tại các điểm có hoành độ b và c. Cần tìm số nguyên a sao cho a, b, c là các số nguyên

$$\text{thoả mãn } \begin{cases} b + 2a = 6 \\ 2c - 3a = 4 \end{cases}$$

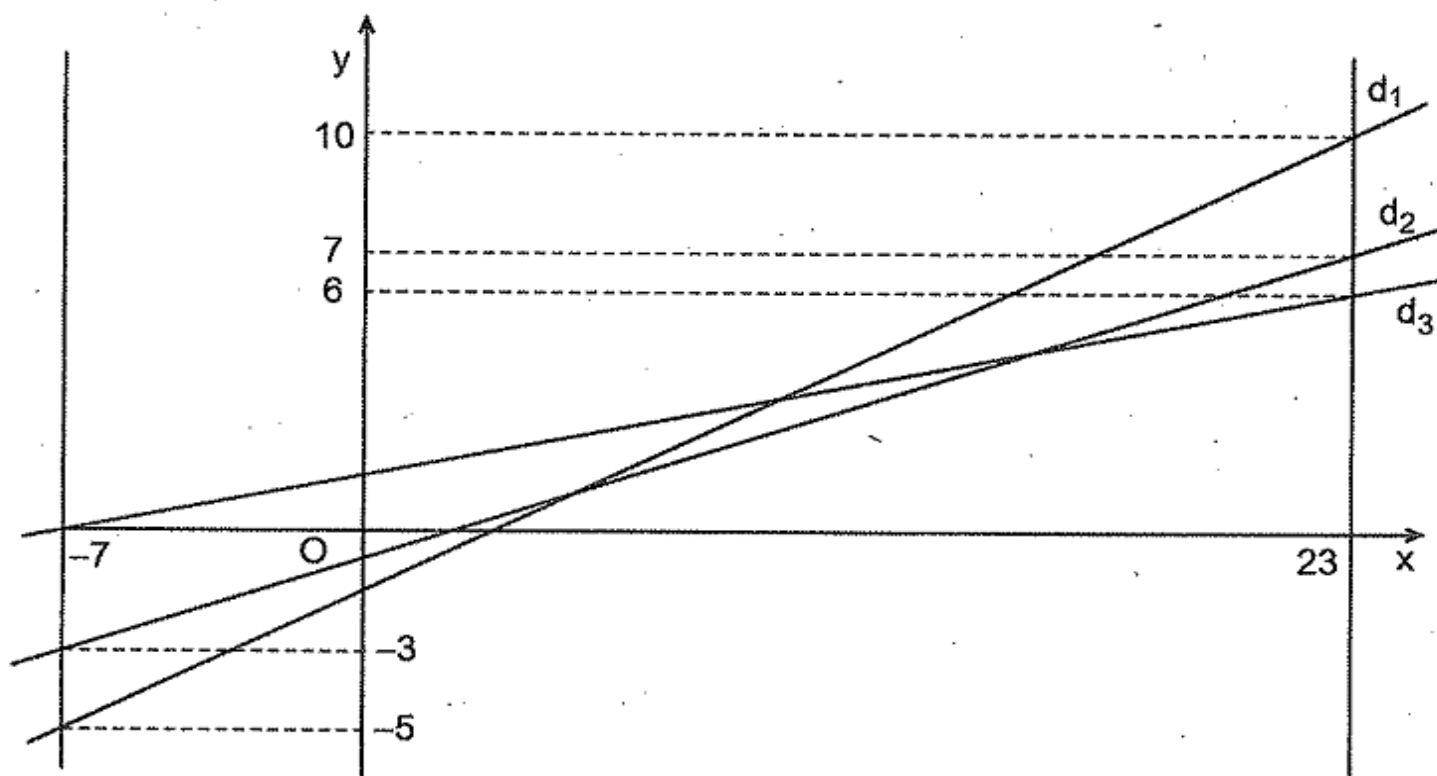


Hình 64

Ta tìm được $c = 3k - 1$, $b = 10 - 4k$, $a = 2k - 2$ (k nguyên). Trên hình 64, tương ứng với k bằng 0, 1, 2 ta có a bằng -2, 0, 2.

220.(h.65). Giả sử đường thẳng $x = a$ cắt các đường thẳng d_1 , d_2 , d_3 tại các điểm có tung độ theo thứ tự là b , c , d . Cần tìm các số nguyên a , b , c , d sao cho $a - 2b = 3$, $a - 3c = 2$, $a - 5d = -7$. Muốn vậy, ta tìm số nguyên a sao cho :

- a chia cho 2 thì dư 1 (1)
- a chia cho 3 thì dư 2 (2)
- a chia cho 5 thì dư 3 (3)



Hình 65

$BCNN(2, 3, 5) = 30$. Gọi $a = 30k + r$ với k, r nguyên, $0 < r < 30$.

Từ (3) ta có $r \in \{3; 8; 13; 18; 23; 28\}$.

Do (1) nên r là số lẻ, do đó $r \in \{3; 13; 23\}$.

Do (2) nên r chia cho 3 dư 2, vậy $r = 23$. Do đó $a = 30k + 23$ (k nguyên).

Trên hình 65, ứng với $k = -1$ ta có $a = -7$, ứng với $k = 0$ ta có $a = 23$.

221. a) $(0; 3; 8)$; b) $(10; -4; -2; 0)$.

222. a) Với $a \neq 2, a \neq 5$, nghiệm là $\left(\frac{2}{5-a}; \frac{2}{a-5}; 12\right)$.

Với $a = 2$ hệ vô số nghiệm, với $a = 5$ hệ vô nghiệm.

b) Với $a \neq -2, a \neq 1$, nghiệm là $\left(\frac{a^2 - a - 1}{a - 1}; \frac{2a - 1}{a - 1}; -1\right)$.

Với $a = -2$ hệ vô số nghiệm, với $a = 1$ hệ vô nghiệm.

223. Cộng từng vế. Nghiệm: $\left(\frac{c-b}{a+b+c}; \frac{a-c}{a+b+c}; \frac{b-a}{a+b+c}\right)$.

224. a) Cộng từng vế ba phương trình rồi chia cho $a+b+c \neq 0$ được $x+y+z=0$.

Thay $z = -(x+y)$ vào hai phương trình đầu được

$$\begin{cases} (a-c)x + (b-c)y = 0 \\ (b-a)x + (c-a)y = 0 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} (a-c)^2x + (b-c)(a-c)y = 0 \\ (b-a)(b-c)x + (b-c)(c-a)y = 0 \end{cases}$

Cộng từng vế ta được $[(a-c)^2 + (b-a)(b-c)]x = 0$.

Biểu thức trong dấu ngoặc vuông bằng

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] > 0 \text{ nên } x = 0.$$

Nghiệm: $(0; 0; 0)$.

b) Viết hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} a(x-1) + b(y-1) + c(z-1) = 0 \\ b(x-1) + c(y-1) + a(z-1) = 0 \\ c(x-1) + a(y-1) + b(z-1) = 0 \end{cases}$$

Đặt $x - 1 = X$, $y - 1 = Y$, $z - 1 = Z$, giải như câu a được $X = Y = Z = 0$.
Nghiem : (1 ; 1 ; 1).

225. Cộng từng vế các phương trình được

$$(x + y + z)^2 = 9.$$

Với $x + y + z = 3$, ta tìm được $\left(\frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}\right)$.

Với $x + y + z = -3$, ta tìm được $\left(-\frac{2}{3}; -1; -\frac{4}{3}\right)$.

§14. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

226. Gọi số bác sĩ là x , số luật sư là y . Hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ \frac{35x + 50y}{45} = 40 \end{cases} \quad \text{Nghiem : } \begin{cases} x = 30 \\ y = 15 \end{cases}$$

Số bác sĩ là 30, số luật sư là 15.

227. Gọi số ghế băng là x , số người ngồi trên mỗi ghế theo quy định là y . Hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x - 2)(y + 1) = xy + 8 \\ (x + 3)(y - 1) = xy - 8 \end{cases} \quad \text{Nghiem : } \begin{cases} x = 20 \\ y = 5 \end{cases}$$

Đáp số : 20 ghế băng.

228. Gọi khối lượng mỗi loại quặng I và II đem trộn lúc đầu theo thứ tự là x và y tấn. Hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{70}{100}x + \frac{40}{100}y = \frac{60}{100}(x + y) \\ \frac{70}{100}(x + 5) + \frac{40}{100}(y - 5) = \frac{65}{100}(x + y) \end{cases} \quad \text{Nghiem : } \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$$

Khối lượng quặng đem trộn lúc đầu loại I là 20 tấn, loại II là 10 tấn.

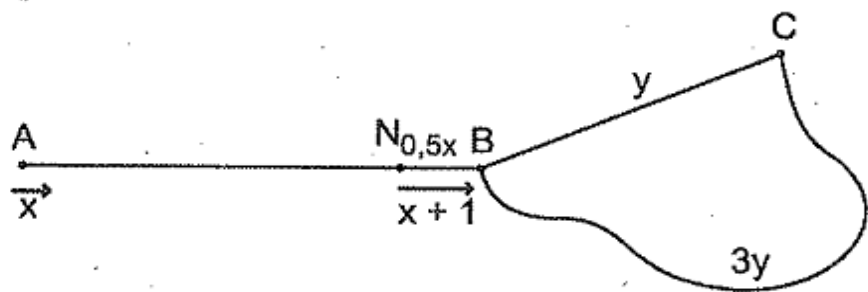
229. Gọi khối lượng axit trong dung dịch A là x (kg), khối lượng nước trong dung dịch A là y (kg). Hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{x+y+1} = \frac{20}{100} \\ \frac{x+1}{x+y+2} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{Nghiem : } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Nồng độ axit trong dung dịch A là $\frac{1}{3+1} = 25\%$.

230. Vòi I chảy một mình đầy bể trong 5 giờ, vòi II : 10 giờ.

231. Gọi vận tốc lúc đầu của An là x (km/h) thì vận tốc của Bích là $3,25x$ (km/h). Gọi chiều dài quãng đường tắt BC là y (km) thì quãng đường Bích đã đi từ B đến C là $3y$ (km). Gọi N là vị trí mà An bắt đầu tăng vận tốc (h.66).



Hình 66

Quãng đường NB mà An dự định đi trong $\frac{1}{2}$ giờ là $0,5x$ (km). An đi từ N đến C (theo đường tắt) được $0,5x + y$ (km) với vận tốc $x + 1$ (km/h) hết $\frac{0,5x + y}{x + 1}$ (giờ). Trong thời gian đó, Bích đi $3y$ (km) với vận tốc $3,25x$ (km/h).

Ta có phương trình :

$$\frac{0,5x + y}{x + 1} = \frac{3y}{3,25x} \quad (1)$$

Nếu Bích đi đường tắt từ B đến C thì chỉ hết $\frac{y}{3,25x}$ (giờ), ít hơn so với đi theo đường vòng 2 giờ, ta có phương trình :

$$\frac{3y}{3,25x} - \frac{y}{3,25x} = 2. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $\frac{2y}{3,25x} = 2$ nên $y = 3,25x$.

Thay vào (1) được $\frac{0,5x + 3,25x}{x + 1} = 3$ nên $x = 4$.

Vận tốc của An lúc đầu là 4 km/h.

232. Giải tương tự như ví dụ 73. Hệ phương trình :

$$\frac{60 + 12.60y}{75.12} = \frac{72 + 15.72y}{81.15} = \frac{96 + 18.96y}{18x}$$

Giải ra được $y = \frac{1}{12}$, $x = 100$. Đáp số: 100 con bò.

233. Gọi số phải tìm là $\overline{xy}$. Ta có

$$\overline{xy}^2 - \overline{yx}^2 = n^2 \quad (1) \quad (x, y, n \in \mathbb{N}, 0 \leq y < x \leq 9).$$

Biến đổi vế trái của (1), ta được

$$(10x + y)^2 - (10y + x)^2 = 99x^2 - 99y^2 = 3^2 \cdot 11 \cdot (x + y)(x - y).$$

Để tích trên là số chính phương, $(x + y)(x - y)$ phải chia hết cho 11, do đó tồn tại một thừa số $x + y$ hoặc $x - y$ chia hết cho 11.

Do $0 \leq y < x \leq 9$ nên $1 \leq x - y \leq 9$, $1 \leq x + y \leq 17$, vì vậy thừa số chia hết cho 11 là $x + y$ và ta có $x + y = 11$. Do đó (1) trở thành

$$3^2 \cdot 11^2 \cdot (x - y) = n^2.$$

Như vậy $x - y$ cũng phải là số chính phương, và nhận giá trị 1, hoặc 4, hoặc 9.

Xét các hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

Hệ thứ nhất cho $x = 6$, $y = 5$. Thử lại : $65^2 - 56^2 = 33^2$.

Hệ thứ hai cho $x = 7,5$, loại. Hệ thứ ba cho $x = 10$, loại.

Vậy có duy nhất số 65 thỏa mãn bài toán.

234. Gọi số người của mỗi tổ A, B, C là x, y, z . Ta có :

$$\begin{cases} \frac{37x + 23y}{x + y} = 29 \\ \frac{23y + 41z}{y + z} = 33 \end{cases}$$

$$\text{Cần tính } m = \frac{37x + 23y + 41z}{x + y + z}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 37x + 23y = 29x + 29y \\ 23y + 41z = 33y + 33z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 6y \\ 8z = 10y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ z = \frac{5}{4}y \end{cases}$$

Từ đó tính được $m = 34$. Tuổi trung bình của cả ba tổ là 34.

Chương IV

HÀM SỐ $y = ax^2$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

§15. Hàm số $y = ax^2$

235. Parabol $y = ax^2$ đi qua $B(2; 1)$ nên $1 = a \cdot 2^2$, do đó $a = \frac{1}{4}$. Phương trình của parabol là $y = \frac{1}{4}x^2$.

236. $y = -\frac{2}{3}x^2$.

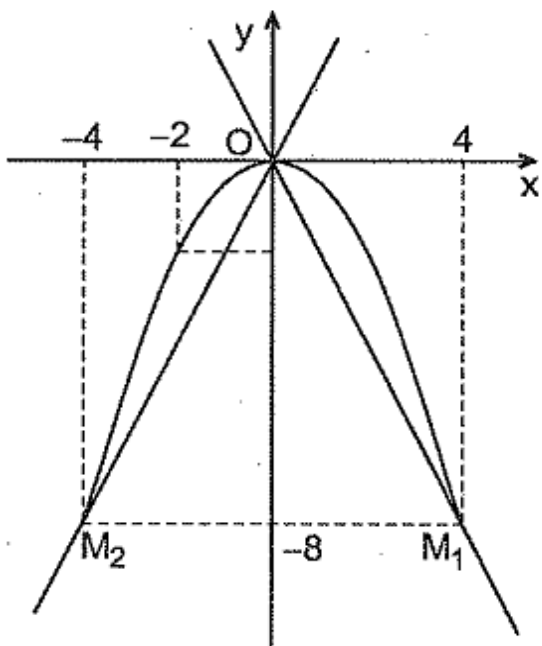
237. (h.67) a) $y = -\frac{1}{2}x^2$.

b) Quỹ tích các điểm M có khoảng cách đến trục hoành gấp đôi khoảng cách đến trục tung là hai đường thẳng $y = 2x$ và $y = -2x$.

Giải hai hệ: $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 \\ y = 2x \end{cases}$ và $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 \\ y = -2x \end{cases}$.

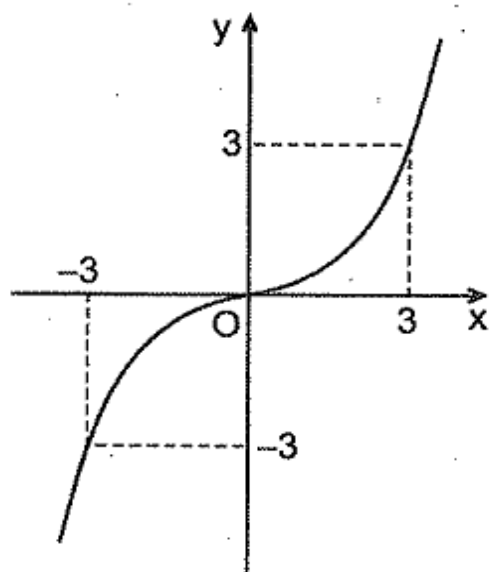
Vậy có ba điểm phải tìm là

$$(0; 0), (4; -8); (-4; -8).$$

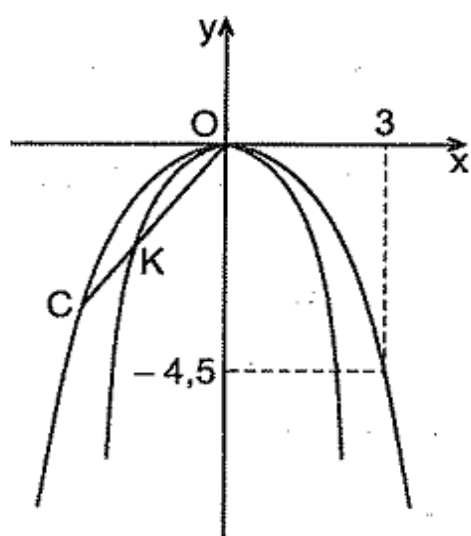


Hình 67

238. (h.68) $y = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & \text{với } x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x^2 & \text{với } x < 0 \end{cases}$



Hình 68



Hình 69

239. a) Xem hình 69.

b) Gọi toạ độ của điểm C là $(m; n)$. Điểm C thuộc parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$ nên

$$n = -\frac{1}{2}m^2 \quad (1)$$

Gọi toạ độ của điểm K là $(x; y)$, ta cần biểu thị y theo x.

K là trung điểm của OC nên $x = \frac{m}{2}$, $y = \frac{n}{2}$. Suy ra $m = 2x$, $n = 2y$. Thay vào (1) ta được

$$2y = -\frac{1}{2}(2x)^2 = -2x^2.$$

Do đó $y = -x^2$. Điểm K di chuyển trên parabol $y = -x^2$.

§16. Phương trình bậc hai một ẩn

240. $\Delta' = 5m^2 - 29m + 36 = (m - 4)(5m - 9)$.

a) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = \frac{9}{5} \end{cases}$

$$b) \text{ Phương trình có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < \frac{9}{5} (m \neq 0) \end{cases}$$

c) Xét $m = 0$, phương trình có nghiệm.

$$\text{Xét } m \neq 0, \text{ phương trình vô nghiệm } \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{5} < m < 4.$$

Vậy nếu $\frac{9}{5} < m < 4$ thì phương trình vô nghiệm.

$$241. a) \Delta = (m + 6)^2.$$

Nếu $m = -6$, phương trình có nghiệm kép $x = -3$.

Nếu $m \neq -6$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $m + 3$ và -3 .

b) Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Với $m \neq 0$, phương trình là bậc hai, $\Delta' = 4(1 - m)$.

– Nếu $m > 1$: phương trình vô nghiệm.

– Nếu $m = 1$: phương trình có nghiệm kép $x = 2$.

– Nếu $0 \neq m < 1$: phương trình có hai nghiệm $\frac{2 \pm 2\sqrt{1-m}}{m}$.

$$242. \text{ Gọi } x_1 \text{ và } x_2 \text{ là hai nghiệm của phương trình } x^2 + mx + 12 = 0 \text{ với } x_1 > x_2.$$

$$\text{Ta có } x_1 - x_2 = 1, \text{ mặt khác } x_1 - x_2 = \sqrt{\Delta} = \sqrt{m^2 - 48}.$$

$$\text{Đáp số: } m = \pm 7.$$

$$243. \text{ Chia hai vế của } a + b = 4\sqrt{ab} \text{ cho } b, \text{ ta được } \frac{a}{b} + 1 = 4\sqrt{\frac{a}{b}}. \text{ Đặt } \sqrt{\frac{a}{b}} = k > 0.$$

$$\text{Giải phương trình } k^2 + 1 = 4k \text{ được } k = 2 \pm \sqrt{3}. \text{ Từ đó } \frac{a}{b} = 7 \pm 4\sqrt{3}.$$

$$244. \text{ Cách 1. } (x - 1)^2 + (x - y + 1)^2 = 0; x = 1, y = 2.$$

Cách 2. Coi y là tham số của phương trình bậc hai có ẩn là x :

$$2x^2 - 2yx + (y^2 - 2y + 2) = 0; \Delta' = -(y - 2)^2.$$

Để tồn tại x , phải có $\Delta' \geq 0$, tức là $y = 2$. Khi đó $x = 1$.

Cách 3. Coi x là tham số của phương trình bậc hai có ẩn là y .

245. a) Với $m = 0$, phương trình vô nghiệm.

Với $m = 1$, phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

Với $m \neq 0, m \neq 1$, phương trình là bậc hai, nó có nghiệm nếu $\Delta' \geq 0$, tức là $m \geq 0$. Do đó phải có $m > 0$.

Kết luận : Với $m > 0$ thì phương trình có nghiệm.

b) *Đáp số* : $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

246. a) $\Delta' = a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$.

b) $\Delta = 6(a^2 + b^2) + 3(a - b)^2 \geq 0$.

247. a) b) $\Delta' = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$.

248. $\Delta'_1 = b^2 - ac, \Delta'_2 = c^2 - ba, \Delta'_3 = a^2 - cb$.

Chứng minh rằng $\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 \geq 0$ nên tồn tại một trong các biểu thức $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ không âm.

249. $\Delta = b^2 - 4ac = (5a + 2c)^2 - 4ac = 25a^2 + 16ac + 4c^2 = (2c + 4a)^2 + 9a^2 \geq 0$.

250. Trường hợp $a^2 + b^2 - c^2 \neq 0$, tính được

$$\Delta = (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c + b - a) > 0.$$

Trường hợp $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ thì $x = 0$ (trường hợp này tam giác vuông tại C).

251. Nếu $ac \leq 0$, hiển nhiên phương trình có nghiệm.

Nếu $ac > 0$: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương :

$$\frac{c}{a} + 4 \geq 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot 4} = 4\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Theo giả thiết $\frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4$ nên $\frac{2b}{a} \geq 4\sqrt{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{4c}{a} \Rightarrow$

$b^2 \geq 4ac$. Vậy phương trình có nghiệm.

252. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử cả hai phương trình đều vô nghiệm thì $b^2 < 4c$, $m^2 < 4n$, do đó $c > 0$, $n > 0$ và

$$b^2 m^2 < 16cn = 4 \cdot 4cn \leq 4 \cdot (c + n)^2. \quad (1)$$

Mặt khác, theo giả thiết $bm = 2(c + n)$ nên

$$b^2 m^2 = 4(c + n)^2, \quad (2)$$

mâu thuẫn với (1).

Vậy ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

253. $\Delta = b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2.$

Nghiệm của phương trình là $\frac{-b \pm (a - c)}{2}$, đó là số hữu tỉ.

254. Giả sử a, b, c là các số nguyên lẻ. Do $a \neq 0$ nên phương trình là bậc hai. Xét $\Delta = b^2 - 4ac$, ta sẽ chứng minh rằng Δ không là số chính phương.

Do a, b, c lẻ nên $b^2 = 8A + 1$, còn $ac = 2B + 1$ (với A, B nguyên), do đó

$$\Delta = (8A + 1) - 4(2B + 1) = 8A - 8B - 3,$$

không là số chính phương (vì số chính phương lẻ chia cho 8 phải dư 1).

255. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm hữu tỉ thì $\Delta = b^2 - 4ac$ là số chính phương m^2 ($m \in \mathbb{N}$).

$$\begin{aligned} \text{Xét } 4a \cdot \overline{abc} &= 4a(100a + 10b + c) = 400a^2 + 40ab + 4ac \\ &= (20a + b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a + b)^2 - m^2 \\ &= (20a + b + m)(20a + b - m). \end{aligned}$$

Tồn tại một trong hai thừa số $20a + b + m$, $20a + b - m$ chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$. Điều này không xảy ra vì cả hai thừa số trên đều nhỏ hơn $\overline{abc}$. Thật vậy, do $m < b$ (vì $m^2 - b^2 = -4ac < 0$) nên:

$$20a + b - m \leq 20a + b + m < 100a + 10b + c = \overline{abc}.$$

256. Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = 2$.

Với $m \neq 0$, ta phải có $\Delta' = 2m + 1$ là số chính phương, tức là $2m + 1 = (2k + 1)^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Suy ra $m = 2k(k + 1)$.

Gộp cả trường hợp $m = 0$, ta có các giá trị phải tìm của m là $2k(k + 1)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

257. Ta có $\Delta = (n + 4)^2 - 4(4n - 25) = n^2 - 8n + 116 > 0$.

Điều kiện cần để phương trình đã cho có nghiệm nguyên là $n^2 - 8n + 116$ là số chính phương.

Đặt $n^2 - 8n + 116 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$), dẫn đến $(n - 4 + k)(n - 4 - k) = -100$.

Chú ý rằng $n - 4 + k$ và $n - 4 - k$ cùng chẵn, và $n - 4 + k \geq n - 4 - k$ nên :

$n - 4 + k$	50	2	10
$n - 4 - k$	-2	-50	-10
k	26	26	10
$n - 4$	24	-24	0
n	28	-20	4

Với $n = 28$, phương trình đã cho là $x^2 - 32x + 87 = 0$, có các nghiệm là 3 và 29.

Với $n = -20$, phương trình đã cho là $x^2 + 16x - 105 = 0$, có các nghiệm là -21 và 5.

Với $n = 4$, phương trình đã cho là $x^2 - 8x - 9 = 0$, có các nghiệm là -1 và 9.

Vậy $n \in \{-20, 4, 28\}$.

258. Phương trình $x^2 + px - 12p = 0$ có $\Delta = p^2 + 48p$.

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên là : Δ là số chính phương $\Leftrightarrow p(p + 48)$ là số chính phương $\Leftrightarrow p + 48 : p \Leftrightarrow 48 : p$.

Ước nguyên tố của 48 là 2 và 3.

Với $p = 2$ thì $\Delta = 100 = 10^2$. Hai nghiệm của phương trình là 4 và -6.

Với $p = 3$ thì $\Delta = 153$, không phải là số chính phương, loại.

Vậy $p = 2$.

259. a) Gọi x_0 là nghiệm chung. Ta có $x_0^2 + 2x_0 + m = 0$, $x_0^2 + mx_0 + 2 = 0$, suy ra $(m - 2)x_0 = m - 2$.

Nếu $m = 2$ thì cả hai phương trình đều là $x^2 + 2x + 2 = 0$ nên cùng vô nghiệm.

Nếu $m \neq 2$ thì $x_0 = 1$. Từ đó $m = -3$.

Với $m = -3$, phương trình đầu là $x^2 + 2x - 3 = 0$, có nghiệm 1 và -3 ;
phương trình sau là $x^2 - 3x + 2 = 0$, có nghiệm 1 và 2.

Kết luận : $m = -3$.

b) $m = 2$.

260. a) $m = -2$.

b) Với $m = 4$, phương trình đầu có nghiệm 1 và $-\frac{9}{2}$, phương trình sau có nghiệm 1 và $-\frac{19}{6}$.

Với $m = \frac{8}{3}$, phương trình đầu có nghiệm $\frac{3}{2}$ và -3 , phương trình sau có nghiệm $\frac{3}{2}$ và $-\frac{19}{9}$.

Vậy $m = 4$ hoặc $m = \frac{8}{3}$.

261. Giả sử (2) có nghiệm $x = a$, (1) có nghiệm $x = 2a$.

Thay vào các phương trình đã cho, rồi khử m ta được $6a(a - 3) = 0$.

Với $a = 0$ thì $m = 0$, (1) là $2x^2 - 13x = 0$, có nghiệm 0 và $6\frac{1}{2}$; (2) là $x^2 - 4x = 0$, có nghiệm 0 và 4.

Với $a = 3$ thì $m = 3$, (1) là $2x^2 - 13x + 6 = 0$, có nghiệm 6 và $\frac{1}{2}$; (2) là $x^2 - 4x + 3 = 0$, có nghiệm 3 và 1.

Vậy $m = 0$ hoặc $m = 3$.

262. Do m là nghiệm của (1) nên $am^2 + bm + c = 0$. Chia hai vế cho $m \neq 0$ được

$$a + \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2} = 0 \Rightarrow c\left(\frac{1}{m}\right)^2 + b\left(\frac{1}{m}\right) + a = 0 \Rightarrow \frac{1}{m} \text{ là nghiệm của (2).}$$

Ta chọn $n = \frac{1}{m}$. Dễ dàng chứng minh được $m + n \geq 2$.

§17. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

263. a) Nếu $m = 0$ thì phương trình có một nghiệm $x = 1$.

Nếu $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm 1 và $\frac{m-2}{m}$.

b) Nếu $m = 1$ thì phương trình có một nghiệm $x = -1$.

Nếu $m \neq 1$ thì phương trình có hai nghiệm -1 và $\frac{2}{1-m}$.

264. a) $\Delta > 0, P > 0, S > 0$: hai nghiệm cùng dương.

b) $P < 0$: hai nghiệm trái dấu.

c) $\Delta > 0, P > 0, S < 0$: hai nghiệm cùng âm.

d) $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.

265. Giải điều kiện : $m - 1 \neq 0, \Delta > 0, P > 0$. Đáp số : $1 < m < \frac{4}{3}$.

266. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Theo hệ thức Vi-ét :
 $x_1 + x_2 = m, x_1 x_2 = n$. Do n là số nguyên tố nên $x_1 = 1, x_2 = n$ (giả sử $x_1 < x_2$). Từ $x_1 + x_2 = m$ suy ra $1 + n = m$. Do n và m là hai số nguyên tố liên tiếp nên $n = 2, m = 3$.

Khi đó phương trình là $x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm 1 và 2.

267. Dễ thấy $\Delta > 0$ nên phương trình có nghiệm. Ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}; x_1 x_2 = -\frac{5}{2}.$$

$$\text{a) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{3}{5}.$$

$$\text{b) } (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{49}{4}.$$

$$\text{c) } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{117}{8}.$$

268. Ta phải có :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 & (1) \\ x_1 x_2 \neq 0 & (2) \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5} & (3) \end{cases}$$

Giải (1) được $m < \frac{7}{6}$. Giải (2) được $m \neq 1$ và $m \neq -3$.

Giải (3) được $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} - \frac{x_1 + x_2}{5} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left(\frac{1}{x_1 x_2} - \frac{1}{5} \right) = 0$.

– Trường hợp $x_1 + x_2 = 0$ cho ta $m = 2$, trái với (1).

– Trường hợp $x_1 x_2 = 5$ cho ta

$$m^2 + 2m - 3 - 5 = 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 4) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (loại)}, m = -4.$$

Đáp số: $m = -4$.

269. Từ $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 x_2 = n$, $3m^2 = 16n$ suy ra

$$3(x_1 + x_2)^2 - 16x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow 3x_1^2 - 10x_1 x_2 + 3x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 3x_2)(3x_1 - x_2) = 0.$$

Suy ra $x_1 = 3x_2$ hoặc $x_2 = 3x_1$.

270. Khử m từ $x_1 + x_2 = m + 2$ và $x_1 x_2 = 2m - 1$ ta được $x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2 - 2) - 1$.

$$\text{Do đó } 2x_1 + 2x_2 - x_1 x_2 = 5.$$

271. a) Giải phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Đáp số: $1 + \sqrt{2}$ và $1 - \sqrt{2}$.

b) Giải phương trình $x^2 - x + 5 = 0$. Phương trình vô nghiệm.

272. a) $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$;

b) $x^2 - 4x + 1 = 0$.

273. a) $x_1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = -4 + \sqrt{15}$. Chọn $x_2 = -4 - \sqrt{15}$.

Ta có $x_1 + x_2 = -8$, $x_1 x_2 = 1$ nên x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 8x + 1 = 0$.

b) $x_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = -5 - 2\sqrt{6}$. Chọn $x_2 = -5 + 2\sqrt{6}$.

$$\text{Đáp số: } x^2 + 10x + 1 = 0.$$

c) Trước hết lập phương trình bậc hai nhận $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ làm một nghiệm.

Chọn nghiệm kia là $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$. Đáp số: $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

274. a) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Gọi y_1, y_2 là các nghiệm của phương trình phải lập.

Cách 1. Tính x_1, x_2 , từ đó tính y_1, y_2 .

Cách 2. Tính $x_1 + x_2, x_1x_2$, từ đó tính $y_1 + y_2, y_1y_2$.

Vậy phương trình phải lập là $y^2 - 6y + 1 = 0$.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$.

Ta có $x_1 + x_2 = -m, x_1x_2 = -2$.

Gọi y_1, y_2 là các nghiệm của phương trình phải lập. Ta tính được

$$y_1 + y_2 = \frac{m}{2}, y_1y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình phải lập là $2y^2 - my - 1 = 0$.

275. Điều kiện : $m^2 - 4n \geq 0$. Ta có

$$m + n = -m \quad (1)$$

$$\text{và} \quad mn = n \quad (2)$$

Giải (2) được $n = 0$ hoặc $m = 1$. Sử dụng (1) để giải tiếp.

Đáp số : $m = 0, n = 0$, phương trình là $x^2 = 0$;

$m = 1, n = -2$, phương trình là $x^2 + x - 2 = 0$.

276. a) Gọi x_0 là nghiệm chung của (1) và (2). Ta có

$$x_0^2 + ax_0 + bc = 0 ; x_0^2 + bx_0 + ca = 0.$$

Suy ra $(a - b)x_0 = c(a - b)$. Do $a \neq b$ nên $x_0 = c$.

Gọi nghiệm còn lại của (1) và (2) theo thứ tự là x_1, x_2 .

Theo hệ thức Vi-ét : $x_0x_1 = bc, x_0x_2 = ca$. Do $x_0 = c \neq 0$ nên $x_1 = b, x_2 = a$.

Nghiem còn lại của (1) là b , nghiệm còn lại của (2) là a .

b) Do b, c là nghiệm của (1) nên $b + c = -a$, suy ra $a + b = -c$.

Vậy a và b là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0 \text{ hay } x^2 + cx + ab = 0.$$

277. Các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm nên $a, c \neq 0$.

$$\text{Ta có } m^2 + n^2 \geq 2|m \cdot n| = 2 \left| \frac{c}{a} \right|, \quad p^2 + q^2 \geq 2|p \cdot q| = 2 \left| \frac{a}{c} \right|.$$

$$\text{Suy ra } m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \geq 2 \left(\left| \frac{c}{a} \right| + \left| \frac{a}{c} \right| \right) \geq 2 \cdot 2 = 4.$$

278. Các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm nên $a, c \neq 0$. Do đó các nghiệm của (1) và (2) đều khác 0.

Gọi m là nghiệm của (1), ta có

$$\begin{aligned} am^2 + bm + c = 0 &\Rightarrow a + \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2} = 0 \Rightarrow c \left(\frac{1}{m} \right)^2 + b \left(\frac{1}{m} \right) + a = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{m} \text{ là nghiệm của (2).} \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_3 = \frac{1}{x_1}, x_4 = \frac{1}{x_2}$.

Dễ dàng chứng minh được

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geq 4.$$

Theo đề bài, xảy ra đẳng thức, do đó $x_1^2 = \frac{1}{x_1^2}, x_2^2 = \frac{1}{x_2^2}$, tức là $x_1 = \pm 1,$

$$x_2 = \pm 1.$$

Xét ba trường hợp :

a) (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$. Theo hệ thức Vi-ét :

$$-\frac{b}{a} = 2, \quad \frac{c}{a} = 1 \text{ nên } c = a, b = -2a.$$

b) (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -1$. Bạn đọc tự tính được : $c = a, b = 2a$.

c) (1) có nghiệm 1 và -1. Bạn đọc tự tính được : $b = 0, c = -a$.

279. Theo giả thiết, $x_3 = x_1 + 1, x_4 = x_2 + 1$. Theo hệ thức Vi-ét :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = c & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = b^2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) = bc & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) : $b^2 + b - 2 = 0 \Rightarrow (b - 1)(b + 2) = 0 \Rightarrow b = 1$ hoặc $b = -2$.

Từ (4) : $x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = bc$. Do đó

$$c - b + 1 = bc \quad (5)$$

Với $b = 1$, (5) luôn đúng. Khi đó phương trình $x^2 + bx + c = 0$ trở thành $x^2 + x + c = 0$, có nghiệm nếu $\Delta = 1 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow c \leq \frac{1}{4}$; phương trình

$x^2 - b^2 x + bc = 0$ trở thành $x^2 - x + c = 0$, cũng có nghiệm nếu $c \leq \frac{1}{4}$.

Với $b = -2$, (5) trở thành $c + 3 = -2c \Rightarrow c = -1$. Khi đó phương trình $x^2 + bx + c = 0$ trở thành $x^2 - 2x - 1 = 0$, có nghiệm $1 \pm \sqrt{2}$; phương trình $x^2 - b^2 x + bc = 0$ trở thành $x^2 - 4x + 2 = 0$, có nghiệm $2 \pm \sqrt{2}$.

Kết luận : $b = 1, c \leq \frac{1}{4}$; $b = -2, c = -1$.

280. Gọi nghiệm chung của hai phương trình là m , ta có :

$$m^2 + am + 6 = 0 \text{ và } m^2 + bm + 12 = 0.$$

$$\text{Suy ra } 2m^2 + (a + b)m + 18 = 0 \quad (1)$$

Để tồn tại m thì (1) phải có nghiệm, tức là

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 - 144 \geq 0 \Leftrightarrow |a + b| \geq 12.$$

Ta có $|a| + |b| \geq |a + b| \geq 12$.

$$\min(|a| + |b|) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ |a + b| = 12 \end{cases}$$

Với $a + b = 12$, (1) là $m^2 + 6m + 9 = 0$, có nghiệm $m = -3$. Dễ dàng tính được $a = 5, b = 7$.

Với $a + b = -12$, (1) là $m^2 - 6m + 9 = 0$, có nghiệm $m = 3$. Dễ dàng tính được $a = -5, b = -7$.

281. a) Bạn đọc tự tính được $s_1 = 6, s_2 = 34, s_3 = 198$.

$$\text{b) } s_{n+2} = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = (x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^n + x_2^n) = 6s_{n+1} - s_n.$$

c) Từ $s_1 = 6, s_2 = 34$ và $s_{n+2} = 6s_{n+1} - s_n$ suy ra s_n là số nguyên với mọi số nguyên dương n .

d) Theo câu b ta có $s_{n+2} = 6s_{n+1} - s_n$. Chứng minh tương tự $s_{n+3} = 6s_{n+2} - s_{n+1}$.
Do đó

$$s_{n+3} = 6(6s_{n+1} - s_n) - s_{n+1} = 35s_{n+1} - 5s_n - s_n.$$

Suy ra $s_n + s_{n+3} \vdots 5$, tương tự $s_{n+3} + s_{n+6} \vdots 5$. Do đó s_n và s_{n+6} có cùng số dư khi chia cho 5. Như vậy s_{50} và s_2 có cùng số dư khi chia cho 5.

Do s_2 chia cho 5 dư 4 nên s_{50} chia cho 5 dư 4.

§18. Phương trình quy về phương trình bậc hai

282. a) $(x-1)(x^2-2x-1)=0$. Đáp số: $1; 1 \pm \sqrt{2}$.

b) $(x+1)(x^2-6x+7)=0$. Đáp số: $-1; 3 \pm \sqrt{2}$.

c) $x^3-3\sqrt{3}+2x-2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x^2+x\sqrt{3}+5)=0$. Đáp số: $\sqrt{3}$.

d) $x^3-2\sqrt{2}-x+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x^2+x\sqrt{2}+1)=0$. Đáp số: $\sqrt{2}$.

e) $2x-1$ là nhân tử chung của hai vế. Đáp số: $\frac{1}{2}; 1; -2$.

283. Các phương trình trong bài là phương trình đối xứng bậc bốn.

Chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ rồi đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$ ($|y| \geq 2$) hoặc phân tích vế trái thành tích của hai đa thức bậc hai.

a) Đưa về $y^2-2y-3=0$; $y=-1$ loại; $y=3$ cho $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) $3 \pm \sqrt{8}; 2 \pm \sqrt{3}$;

c) $1; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

d) $2; \frac{1}{2}; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$;

e) $2 \pm \sqrt{3}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

g) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; -2 \pm \sqrt{3}$.

284. Các phương trình trong bài là phương trình hồi quy.

Chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ rồi đặt $y = x - \frac{1}{x}$ hoặc phân tích vế trái thành tích của hai đa thức bậc hai.

a) $y^2 - 3y - 4 = 0$. Với $y = -1$ ta được $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Với $y = 4$ ta được $x = 2 \pm \sqrt{5}$.

b) $1 \pm \sqrt{2}$; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

c) $1 \pm \sqrt{3}$; $\frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$.

285. Phương trình đối xứng bậc năm. Biến đổi phương trình thành

$$(x+1)(6x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 6) = 0.$$

Nghiệm: -1 ; 2 ; $\frac{1}{2}$.

286. a) Chia hai vế cho x^2 . Đáp số: 3 ; -1 ; $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

b) Chia hai vế cho x^2 được $\left(x - 6 - \frac{9}{x}\right)^2 = x - 4 - \frac{9}{x}$.

Đặt $x - 5 - \frac{9}{x} = y$, được $y = 0$, $y = 3$. Đáp số: 9 ; -1 ; $\frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$.

287. a) Chia hai vế cho x^2 rồi đặt $x + \frac{4}{x} = y$, được $y = 4$, $y = -5$.

Đáp số: 2 ; -1 ; -4 .

b) Chia hai vế cho x^2 rồi đặt $2x + \frac{1}{x} = y$. Đáp số: $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$; $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

288. a) Đặt $x\sqrt{2} = y$ được $(2y - 1)(y^2 - 5y + 6) = 0$.

Đáp số: $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\sqrt{2}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

b) Đặt $x\sqrt{2} = y$ được $(y + 6)(y - 2)^3 = 0$.

Đáp số: $\sqrt{2}$; $-3\sqrt{2}$.

289. a) $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 8$. Đặt ẩn phụ $y = x^2 + 3x + 1$. Tìm được $y = \pm 3$.

Đáp số: $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

$$b) \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$c) \text{Đặt } x^2 - 5x - 19 = 9, \text{ được } y = \pm 13. \text{ Đáp số: } 6; -1; \frac{5 \pm \sqrt{153}}{2}.$$

$$d) \text{Đặt } x^2 + 14x + 45 = y, \text{ được } y = 5, y = -8. \text{ Đáp số: } -10; -4.$$

$$e) (4x + 3)^2(4x + 4)(4x + 2) = 810.8.$$

$$\text{Đặt } y = 4x + 3, \text{ dẫn tới } y^4 - y^2 - 6480 = 0. \text{ Tìm được } y = \pm 9.$$

$$\text{Đáp số: } \frac{3}{2}; -3.$$

$$g) \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{6}.$$

$$290. a) \text{Đặt } x^2 - x = y, \text{ đưa về } (4y + 1)(y - 2)^2 = 0. \text{ Đáp số: } -1; 2; \frac{1}{2}.$$

$$b) \text{Phương trình có dạng } 9(x + 5)(x + 6)(x + 7) = 24x, \text{ trong đó } \frac{5 + 6 + 7}{2} = 9, \text{ và } (9 - 5)(9 - 6)(9 - 7) = 24. \text{ Đặt } y = x + 9. \text{ Đưa về}$$

$$y(3y^2 - 27y + 70) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

$$\text{Đáp số: } x = -9.$$

$$\text{Cách khác. Đặt } x + 6 = y.$$

$$291. a) \text{Đặt } x - 3 = y \text{ được } (y - 1)(y^2 + y + 4) = 0. \text{ Đáp số: } 4.$$

$$b) \text{Đặt } x + 3 = y \text{ được } (y^2 - 4)(y^2 + 10) = 0. \text{ Đáp số: } -1; -5.$$

$$c) \text{Đặt } x + 5 = y, \text{ được } y = \pm 1. \text{ Đáp số: } -4; -6.$$

$$d) x = 1 \text{ là một nghiệm. Với } x > 1, \text{ vế trái lớn hơn vế phải. Với } x < 1, \text{ vế trái nhỏ hơn vế phải. Vậy } x = 1 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

$$e) \text{Đặt } x - 3 = y \text{ được } y^6 + 15y^4 + 15y^2 - 31 = 0.$$

$$\text{Đặt } y^2 = z \geq 0 \text{ được } (z - 1)(z^2 + 16z + 31) = 0. \text{ Chú ý rằng phương trình } z^2 + 16z + 31 = 0 \text{ vô nghiệm vì } z \geq 0. \text{ Đáp số: } x = 2, x = 4.$$

$$292. a) (x^2 - 6x)^2 - 81 = 2(x - 3)^2 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9)(x^2 - 6x - 9) = 2(x - 3)^2 \\ \Leftrightarrow (x - 3)^2(x^2 - 6x - 11) = 0. \text{ Đáp số: } 3; 3 \pm 2\sqrt{5}.$$

$$b) x^4 + (x-1)2x^2 + (x-1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 2x - 2) + (x-1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 2)(x^2 + x - 1) = 0. \text{ Đáp số: } -1 \pm \sqrt{3}; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$c) \text{ Cách 1. } x^4 + 5x^2(x+1) - 6(x+1)^2 = 0.$$

$$\text{Đặt } x^2 = y, x+1 = z \text{ được } (y-z)(y+6z) = 0. \text{ Đáp số: } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; -3 \pm \sqrt{3}.$$

$$\text{Cách 2. } x^4 - x^2(x+1) + (x+1)(6x^2 - 6x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - x - 1) + 6(x+1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)(x^2 + 6x + 6) = 0.$$

$$d) \text{ Cách 1. } (x^2 + 1)^2 + (x+2)[3(x^2 + 1) - 4(x+2)] = 0. \text{ Đặt } x^2 + 1 = y, \\ x+2 = z \text{ được } (y-z)(y+4z) = 0.$$

$$\text{Đáp số: } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Cách 2. } (x^2 + 1)^2 + (x+2)(3x^2 - 3x - 3 - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 + (x+2)(3x^2 - 3x - 3) - (x+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1 + x + 2)(x^2 + 1 - x - 2) + (x^2 - x - 1)(3x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)(x^2 + 4x + 9) = 0.$$

$$e) \text{ Cách 1. Đặt } x-1 = y, x+1 = z \text{ được}$$

$$x^2y^2 + xyz - 2z^2 = 0 \Leftrightarrow (xy - z)(xy + 2z) = 0. \text{ Đáp số: } 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$\text{Cách 2. Khai triển rồi biến đổi thành } (x^2 - 2x - 1)(x^2 + x + 2) = 0.$$

293. Chú ý rằng phương trình có nghiệm -1 . Biến đổi :

$$x^2(x^3 - 1) + 2(x^2 + x + 1) = 0, \text{ đưa về } (x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - 2x + 2) = 0.$$

$$\text{Đáp số: } -1.$$

$$294. a) x^4 = (x-1)^2. \text{ Đáp số: } \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Phương trình $x^2 - (a + b)x + (a^2 + b^2 - ab) = 0$ có $\Delta = -3(a - b)^2 \geq 0$ với $a = b$.
Khi đó $x = a$.

Kết luận : Nếu $a \neq b$, nghiệm là $-a - b$. Nếu $a = b$, nghiệm là a và $-2a$.

299. Đặt $a + b = m$, $a - b = n$ thì $4ab = m^2 - n^2$,

$$4(a^3 + b^3) = 4(a + b)[(a - b)^2 + ab] = 4m \left(n^2 + \frac{m^2 - n^2}{4} \right) = m^3 + 3mn^2.$$

Phương trình trở thành

$$(m + x)^3 - (m^3 + 3mn^2) - 4x^3 - 3x(m^2 - n^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow -x^3 + mx^2 + n^2x - mn^2 = 0 \Leftrightarrow (m - x)(x + n)(x - n) = 0.$$

Đáp số : $a + b$, $a - b$, $b - a$.

300. $x^3 - (m^2 - m + 7)x - 3(m^2 - m - 2) = 0.$ (1)

Thay $x = -1$ vào (1) được $m^2 - m = 6$.

Thay vào (1) được $x^3 - 13x - 12 = 0$.

Giải phương trình trên với chú ý $x = -1$ là một nghiệm, ta có :

$$x^3 + 1 - 13x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x - 12) = 0.$$

Ngoài nghiệm -1 , hai nghiệm còn lại là -3 và 4 .

301. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$ (1)

Thay $x = \sqrt{2}$ vào (1) được $\sqrt{2}(b + 2) = -(2a + c)$.

Do a, b, c là các số hữu tỉ nên $b + 2 = 0$, do đó $2a + c = 0$.

Thay $b = -2$, $c = -2a$ vào (1) được $(x^2 - 2)(x + a) = 0$.

Các nghiệm của (1) là $\pm\sqrt{2}$ và $-a$.

302. Lần lượt tính :

$$(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2},$$

$$(1 + \sqrt{2})^3 = (3 + 2\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 7 + 5\sqrt{2},$$

$$(1 + \sqrt{2})^5 = (3 + 2\sqrt{2})(7 + 5\sqrt{2}) = 41 + 29\sqrt{2}.$$

Thay $x = 1 + \sqrt{2}$ vào phương trình đã cho và rút gọn được

$$(34 + 5a + 2b)\sqrt{2} = -48 - 7a - 3b.$$

Suy ra $34 + 5a + 2b = 0$, do đó $7a + 3b + 48 = 0$.

Từ đó $a = -6$, $b = -2$. Phương trình đã cho là

$$x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x + 2)(x^2 - 2x - 1) = 0.$$

Các nghiệm của phương trình : $\pm 1, -2, 1 \pm \sqrt{2}$.

303. Thay x_1 và x_2 vào phương trình, rồi trừ từng vế được

$$4(x_1^4 - x_2^4) - 11(x_1^2 - x_2^2) + 9(x_1 - x_2) = 0.$$

Chia hai vế cho $x_1 - x_2 \neq 0$ và chú ý rằng $x_1 + x_2 = -1$ được

$$-4(x_1^2 + x_2^2) + 11 + 9 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 5$$

Do $x_1 > x_2$ nên từ $x_1 + x_2 = -1$ và $x_1^2 + x_2^2 = 5$, dễ dàng tìm được $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Phương trình đã cho là

$$4x^4 - 11x^2 + 9x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(2x - 1)^2 = 0.$$

Đáp số : $1; -2; \frac{1}{2}$.

304. a) $2x = a - \frac{1}{a} \Rightarrow 8x^3 = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$

$$\Rightarrow 8x^3 + 6x = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right) + 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^3 - \frac{1}{a^3}.$$

b) Viết $\frac{3}{4}$ dưới dạng $\frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)$. Đặt $a = \sqrt[3]{2}$.

Theo câu a nếu $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ thì $4x^3 + 3x = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Điều đó chứng tỏ $x_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ là một nghiệm của phương trình

$$4x^3 + 3x = \frac{3}{4}. \quad (1)$$

Bây giờ ta chứng minh (1) có nghiệm duy nhất. Thật vậy nếu $x > x_0$ thì $4x^3 > 4x_0^3$, $3x > 3x_0$ nên $4x^3 + 3x > 4x_0^3 + 3x_0 = \frac{3}{4}$; tương tự nếu $x < x_0$ thì $4x^3 + 3x < \frac{3}{4}$.

Vậy x_0 là nghiệm duy nhất của (1).

c) Giải tương tự như câu b. *Đáp số*: $\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)$.

305. Phương trình đã cho có ba nghiệm là 2, 3, 4. Ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 26, \quad x_1x_2x_3 = 24.$$

306. a) Đặt $x^2 - 3x + 4 = y$. *Đáp số*: 1; 2.

b) Đặt $x^2 - 2x + 3 = y$. *Đáp số*: 1.

c) Đặt $x^2 + 3x - 1 = y$. *Đáp số*: 0; -3; $\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$.

d) Đặt $x^2 + 2x + 2 = y$. *Đáp số*: 0; -2.

307. a) Cộng $-2x \cdot \frac{9x}{x+9}$ vào hai vế. Đặt $\frac{x^2}{x+9} = y$. *Đáp số*: $1 \pm \sqrt{19}$.

b) Cộng $-\frac{2x^2}{x+1}$ vào hai vế. Đặt $\frac{x^2}{x+1} = y$. *Đáp số*: $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

c) Đặt $\frac{x^4}{2x^2 + 1} = y$. Tìm được $y = 1$. *Đáp số*: $\pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

308. a) Chia hai vế cho $x + \frac{1}{x} \neq 0$. *Đáp số*: ± 2 ; $\pm \frac{1}{2}$.

b) $2 \pm \sqrt{3}$; $-2 \pm \sqrt{3}$.

309. a) Chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x rồi đặt $y = 4x + \frac{7}{x}$ được $y = 9$

và $y = 16$. *Đáp số*: $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{2}$.

Cũng có thể đặt $4x^2 - 9x + 7 = y$, tìm được $y = 0$ hoặc $y = 7x$. Từ đó tìm được x .

b) Chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x rồi đặt $y = 2x + \frac{3}{x}$ được $y = 1$

và $y = \frac{11}{2}$. Đáp số: $2; \frac{3}{4}$.

c) Chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x rồi đặt $y = x + \frac{1}{x}$ được $y = -3$

và $y = \frac{5}{2}$. Đáp số: $2; \frac{1}{2}; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

310. a) Đặt $y = x + \frac{15}{x}$ được $y = 8; y = 18$. Đáp số: $3; 5; 9 \pm \sqrt{66}$.

b) Đặt $y = x + \frac{5}{x}$ được $y = 2; y = 8$. Đáp số: $4 \pm \sqrt{11}$.

311. a) Thêm $-2x \cdot \frac{2x}{x+2}$ vào hai vế. Đáp số: $-1; 2$.

b) Thêm $-2x \cdot \frac{5x}{x+5}$ vào hai vế. Đáp số: $\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

312. a) Đặt $x - 1 = y$, được $y = \pm 2; y = \pm \sqrt{\frac{5}{11}}$. Đáp số: $3; -1; \frac{11 \pm \sqrt{55}}{11}$.

b) Đặt $\frac{x+2}{x+1} = y, \frac{x-2}{x-1} = z$, được $(y-2z)(z-2y) = 0$.

Đáp số: $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}, \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

313. a) Đặt $y = \frac{x(3-x)}{x+1}, z = x + \frac{3-x}{x+1}$, ta có $yz = 2, y + z = 3$. Đáp số: 1 .

b) Đặt $y = \frac{x(5-x)}{x+1}, z = x + \frac{5-x}{x+1}$, ta có $yz = 6, y + z = 5$. Đáp số: $1; 2$.

c) Đặt $y = \frac{x(8-x)}{x+1}, z = x - \frac{8-x}{x-1}$, ta có $yz = 15, y + z = 8$.

Đáp số: $\frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}; \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

314. Nhóm hợp lí các phân thức ta được :

$$\frac{2x+7}{x^2+7x} + \frac{2x+7}{x^2+7x+10} = \frac{2x+7}{x^2+7x+6} + \frac{2x+7}{x^2+7x+12}$$

$$\Leftrightarrow (2x+7) \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y+10} - \frac{1}{y+6} - \frac{1}{y+12} \right) = 0 \text{ với } y = x^2 + 7x.$$

Phương trình $2x+7=0$ có nghiệm $x = -\frac{7}{2}$.

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+6} \right) + \left(\frac{1}{y+10} - \frac{1}{y+12} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{y^2+6y} + \frac{2}{y^2+22y+120} = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 18y + 90 = 0 : \text{ vô nghiệm. Đáp số : } x = -\frac{7}{2}.$$

315. Đặt $x - 1995 = y$. Giải phương trình

$$\frac{y^2 - y(y-1) + (y-1)^2}{y^2 + y(y-1) + (y-1)^2} = \frac{19}{49}, \text{ được } 4y^2 - 4y - 15 = 0.$$

Tìm được $y_1 = 2,5$; $y_2 = -1,5$. Đáp số : 1997,5 ; 1993,5.

316. a) Cách 1. Điều kiện : $x \geq 1$. Bình phương hai vế (điều kiện $x \geq 4$), đưa về

$$x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 8x^2 - 64x + 64 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 8x + 8) + 8(x^2 - 8x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 8x + 8) = 0.$$

$$\text{Đáp số : } x = 4 + 2\sqrt{2}.$$

Cách 2. Điều kiện : $x \geq 1$. Ta có

$$\frac{x^2}{4} = x + 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = (\sqrt{x-1} + 1)^2.$$

Do $x \geq 1$ nên $\frac{x}{2} = \sqrt{x-1} + 1$. Đặt $\sqrt{x-1} = y \geq 0$ thì $x = y^2 + 1$.

Ta có $\frac{y^2+1}{2} = y+1$ nên $y = 1 + \sqrt{2}$. Từ đó $x = 4 + 2\sqrt{2}$.

b) Cách 1. Đặt $\sqrt{x+72} = y \geq 0$ thì $y^2 - x = 72$. Vậy ta có $x^2 + y = y^2 - x$.
Đưa về $(x+y)(x-y+1) = 0$,

Trường hợp $x + y = 0$ dẫn tới $y = -9$ (loại), $y = 8$. Khi đó $x = -8$.

Trường hợp $x - y + 1 = 0$ dẫn tới $y = \frac{1 - \sqrt{285}}{2}$ (loại), $y = \frac{1 + \sqrt{285}}{2}$. Khi đó $x = \frac{-1 + \sqrt{285}}{2}$.

Cách 2. Điều kiện : $x \geq -72$. Ta có $x^2 = 72 - \sqrt{x + 72}$. Cộng $x + \frac{1}{4}$ vào hai vế, đưa về

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x + 72} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

317. a) Đặt $\sqrt[3]{2x - 1} = y$. Từ $x^3 + 1 = 2y$ và $y^3 + 1 = 2x$, ta được

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$\text{Đáp số: } 1; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

b) Cách 1. Điều kiện : $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Đặt $\sqrt{x + 1} = a \geq 0$, $\sqrt{x^2 - x + 1} = b \geq 0$. Phương trình là $5ab = 2(a^2 + b^2)$. Rút gọn được $(2a - b)(a - 2b) = 0$.

$$\text{Đáp số: } x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

Cách 2. Điều kiện : $x \geq -1$. Bình phương hai vế của phương trình, đưa về

$$(4x^2 - 5x + 3)(x^2 - 5x - 3) = 0.$$

318. a) Điều kiện : $x^4 \geq 7$, $x^3 \geq 7$. Chuyển vế : $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} = x - \sqrt{x - \frac{7}{x^2}}$.

Bình phương hai vế rồi thu gọn được $x = 2x\sqrt{x - \frac{7}{x^2}} \Leftrightarrow 1 = 2\sqrt{x - \frac{7}{x^2}}$.

Bình phương hai vế rồi đưa về $(x - 2)(4x^2 + 7x + 14) = 0$. Đáp số : $x = 2$.

b) Điều kiện : $-1 \leq x < 0$ hoặc $x \geq 1$. Đặt $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = a \geq 0$, $\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = b \geq 0$.

Ta có $a + b = x$, $a^2 - b^2 = x - 1$.

Suy ra $a - b = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$. Do đó $2a = x + 1 - \frac{1}{x} = a^2 + 1 \Rightarrow a = 1$.

$$\text{Đáp số: } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

319. Điều kiện : $x \leq -3$ hoặc $x > 1$. Đặt $y = (x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$, phương trình trở thành $y^2 + 2y = 8$, ta được $y = 2, y = -4$.

Với $y = 2$, ta có $(x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = 2$. Bình phương hai vế (điều kiện $x > 1$) ta được $x^2 + 2x - 7 = 0$. Loại $x = -1 - \sqrt{8}$ (không thỏa mãn $x > 1$), chọn $x = -1 + \sqrt{8}$.

Với $y = -4$, ta có $(x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = -4$. Bình phương hai vế (điều kiện $x \leq -3$) ta được $x^2 + 2x - 19 = 0$. Loại $x = -1 + 2\sqrt{5}$ (không thỏa mãn $x \leq -3$), chọn $x = -1 - 2\sqrt{5}$.

$$\text{Đáp số: } -1 + \sqrt{8}, -1 - 2\sqrt{5}.$$

320. Điều kiện : $x \geq 2(a-8), x \geq 0, x \geq a-4$.

$$\text{Chuyển vế: } \sqrt{x-2a+16} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x-a+4}.$$

Bình phương hai vế rồi thu gọn được $\sqrt{x^2 - 2ax + 16x} = x - a$.

$$\text{Với } x \geq a, \text{ bình phương hai vế rồi thu gọn được } x = \frac{a^2}{16}.$$

Giải điều kiện $x \geq a$ được $a \leq 0$ hoặc $a \geq 16$.

Giải điều kiện $x \geq 2(a-8)$ được $(a-16)^2 \geq 0$, đúng.

Kết luận : Với $a \leq 0$ hoặc $a \geq 16$ thì $x = \frac{a^2}{16}$. Với $0 < a < 16$: vô nghiệm.

321. Điều kiện : $-1 \leq x \leq 1, x \neq 0, a \geq 0$. Rút gọn về trái, ta được $\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$.

$$\text{Đưa về } \sqrt{1-x^2} = x\sqrt{a} - 1.$$

Bình phương hai vế (điều kiện $x\sqrt{a} \geq 1$), ta đi đến $x = \frac{2\sqrt{a}}{a+1}$, điều kiện $x\sqrt{a} \geq 1$ dẫn đến $a \geq 1$.

Điều kiện $x \leq 1$ thoả mãn (theo bất đẳng thức Cô-si).

Kết luận : Nghiệm là $x = \frac{2\sqrt{a}}{a+1}$ với $a \geq 1$.

322. Bình phương hai vế được

$$x + y - 2\sqrt{xy} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x + y - 2 = 2\sqrt{xy} - \sqrt{3} \quad (1)$$

Bình phương hai vế của (1) (với $x + y \geq 2$ và $4xy \geq 3$):

$$(x + y - 2)^2 = 4xy + 3 - 4\sqrt{3xy}.$$

Suy ra $\sqrt{3xy}$ là số hữu tỉ. Đặt $\sqrt{3xy} = m$. Từ (1) suy ra

$$(x + y - 2)\sqrt{3} = 2\sqrt{3xy} - 3 \Rightarrow (x + y - 2)\sqrt{3} = 2m - 3.$$

Nếu $x + y - 2 \neq 0$ thì $\sqrt{3} = \frac{2m-3}{x+y-2}$, vô lí (vế trái là số vô tỉ, vế phải là số hữu tỉ).

Vậy $x + y - 2 = 0$. Từ (1) suy ra $2\sqrt{xy} = \sqrt{3}$, tức là $4xy = 3$.

Từ $x + y = 2$, $xy = \frac{3}{4}$, với chú ý rằng $x > y$ ta được $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, thoả mãn các điều kiện đã đặt.

323. Nhân hai vế của

$$(x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3 \quad (1)$$

theo thứ tự với các biểu thức liên hợp là $x - \sqrt{x^2 + 3}$ và $y - \sqrt{y^2 + 3}$

$$\text{được :} \quad -3(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3(x - \sqrt{x^2 + 3}) \quad (2)$$

$$-3(x + \sqrt{x^2 + 3}) = 3(y - \sqrt{y^2 + 3}) \quad (3)$$

Cộng (2) với (3) theo từng vế được $6(x + y) = 0$. Vậy $A = x + y = 0$.

324. a) Từ phương trình đầu, ta tính được $x - 2y = -2$ hoặc $x - 2y = 1$. Từ phương trình sau, ta tính được $2x + y = 8$ hoặc $2x + y = -7$.

Đáp số: $(2,8 ; 2,4), (-3,2 ; -0,6), (3,4 ; 1,2), (-2,6 ; -1,8)$.

b) Đặt $\frac{x+y}{x-y} = z$, được $z = 5, z = \frac{1}{5}$. Đáp số: $(3 ; 2), (-3 ; -2)$.

c) Khử xy được $x = \frac{29-11y}{7}$. Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$11y^2 - 28y + 12 = 0$ được $y = 2, y = \frac{6}{11}$. Đáp số: $(1 ; 2), \left(\frac{23}{7} ; \frac{6}{11}\right)$.

d) Đáp số: $(1 ; 4), (-1 ; -4)$.

325. a) Đáp số: $(-4 ; 5), (5 ; -4)$.

b) Rút y từ $x - y = 1$ rồi thay vào $x^2 - xy + y^2 = 7$, được $x^2 - x - 6 = 0$.

Đáp số: $(-2 ; -3), (3 ; 2)$.

c) Đáp số: $(-1 ; -4), (4 ; 1)$.

d) Đưa về $x - y = 2$ và $x^2 + xy + y^2 = 13$. Đáp số: $(-1 ; -3), (3 ; 1)$.

e) Ta có $x^2 + xy + y^2 = 19a^2$. Thay $y = x - a$ vào phương trình trên và thu gọn được $x^2 - ax - 6a^2 = 0$. Đáp số: $(3a ; 2a), (-2a ; -3a)$.

326. a) Cách 1. Trừ từng vế hai phương trình, được $(x - y)(x + y - 2) = 0$.

Đáp số: $(-1 ; -1)$.

Cách 2. Cộng từng vế hai phương trình, được $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$.

b) Đáp số: $(0 ; 0), (5 ; 5), (2 ; -1), (-1 ; 2)$.

c) Trừ từng vế hai phương trình, được $(x - y)(xy + 3) = 0$.

Đáp số: $(0 ; 0), (\sqrt{3} ; -\sqrt{3}), (-\sqrt{3} ; \sqrt{3})$.

327. Giải tương tự ví dụ 103.

a) Cách 1. Nhân hai vế của phương trình đầu với 25, của phương trình sau với 17, rồi trừ từng vế hai phương trình, đưa về

$$(3x - y)(11x + 9y) = 0.$$

Cách 2. Đặt $y = kx$ dẫn tới $9k^2 - 16k - 33 = 0$ được $k = 3, k = -\frac{11}{9}$.

Đáp số: $(1 ; 3), (-1 ; -3) ; \left(\frac{9}{\sqrt{5}} ; \frac{-11}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{-9}{\sqrt{5}} ; \frac{11}{\sqrt{5}}\right)$.

b) *Đáp số* : $(1; 1), (-1; -1), \left(\frac{-11}{\sqrt{69}}; \frac{2}{\sqrt{69}}\right), \left(\frac{11}{\sqrt{69}}; \frac{-2}{\sqrt{69}}\right)$.

328. a) Từ đề bài suy ra $xy + x^2 = 4x^2 - 2y^2$. Đưa về $(x - y)(3x + 2y) = 0$.

Đáp số : $(1; 1), (-1; -1)$.

b) Đặt $x + y = S, xy = P$. Từ $S - P = 1, S^2 - 2P = 5$ được $S = 3, P = 2$ và $S = -1, P = -2$. *Đáp số* : $(2; 1), (1; 2), (-2; 1), (1; -2)$.

Cách khác. Biến đổi $x + y - xy = 1$ thành $(x - 1)(1 - y) = 0$.

329. a) *Cách 1*. Đặt $xy = a$. Ta có

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 16 - 2a. \text{ Phải có } a \leq 8.$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (16 - 2a)^2 - 2a^2.$$

$$82 = 256 - 64a + 2a^2 \Leftrightarrow (a - 29)(a - 3) = 0. \text{ Vậy } a = 3.$$

Đáp số : $(3; 1), (1; 3)$.

Cách 2. Đặt $x = 2 + a, y = 2 - a$. Thay vào $x^4 + y^4 = 82$ được phương trình trùng phương đối với a .

b) Ta sẽ chứng minh $x + y + xy \leq 8$.

Xét xy , ta có $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2 \Rightarrow 32 \geq 2x^2y^2 \Rightarrow xy \leq 4$ (1)

Xét $x + y$, áp dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

$$(x^2 + y^2)^2 \leq 2(x^4 + y^4) = 64 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 8.$$

Do đó $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \leq 16 \Rightarrow x + y \leq 4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x + y + xy \leq 8$. Xảy ra đẳng thức với $x = y = 2$.

330. a) *Đáp số* : $(2; 2; 2), (-2; -2; -2)$.

b) Nhân hai vế của phương trình đầu với 3, bình phương hai vế của phương trình sau, rồi trừ dẫn đến

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0.$$

Suy ra $x = y = z$. *Đáp số* : $(1; 1; 1)$.

c) Trừ từng vế hai phương trình được

$$x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z) = 0. \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh $1 - x, 1 - y, 1 - z$ đều không âm. Thật vậy, giả sử $1 - x < 0$ thì $x > 1$ nên $x^2 > 1$ suy ra $x^2 + y^2 + z^2 > 1$, trái với $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Do $1 - x, 1 - y, 1 - z$ không âm nên từ (1) suy ra

$$x^2(1 - x) = y^2(1 - y) = z^2(1 - z) = 0.$$

Do đó mỗi số x, y, z hoặc bằng 0, hoặc bằng 1.

Loại các trường hợp : ba số bằng 0 ; ba số bằng 1 ; hai số bằng 1, một số bằng 0.

Kết luận : Trong ba số x, y, z có hai số bằng 0, một số bằng 1.

331. a) Điều kiện : $x, y, z, x + y, y + z, x + z$ khác 0. Từ các phương trình đã cho, ta có

$$xy + xz = 3(x + y + z), xy + yz = 4(x + y + z), xz + yz = 5(x + y + z).$$

Từ đó
$$xy + xz + yz = 6(x + y + z).$$

Suy ra $yz = 3(x + y + z), xz = 2(x + y + z), xy = x + y + z.$

Do đó $y : x = 3 : 2, z : y = 2 : 1.$

Đặt $x = 2k, y = 3k, z = 6k$ ($k \neq 0$), ta tìm được $k = \frac{11}{6}$. **Đáp số :** $\left(\frac{11}{3}; \frac{11}{2}; 11\right).$

b) Rút $y + z$ ở phương trình đầu được $y + z = 8 - x.$

Rút yz ở phương trình cuối được $yz = \frac{16}{x}$ (do $x \neq 0$).

Thay vào phương trình còn lại được

$$x^3 - 8x^2 + 20x - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2(x - 4) = 0.$$

Đáp số : $(2; 2; 4), (2; 4; 2), (4; 2; 2).$

c) Từ các phương trình đã cho, ta có

$$(x + 1)(y + 1) = 2, (y + 1)(z + 1) = 4, (z + 1)(x + 1) = 8.$$

Nhân từng vế các phương trình trên. **Đáp số :** $(1; 0; 3), (-3; -2; -5).$

d) Điều kiện : x, y, z khác 0. Rút y từ phương trình đầu, rút z từ phương trình cuối rồi thay vào phương trình còn lại được $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x+1} = 1$ (dễ thấy do

$x - \frac{1}{y} = 1$ nên $x \neq 1$, do $z - \frac{1}{x} = 1$ và $z \neq 0$ nên $x \neq -1$). Giải phương trình ẩn

x nói trên ta được $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **Đáp số :** $x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

332. Từ các phương trình đã cho, ta có x, y, z đều không âm. Nếu một trong các số x, y, z bằng 0 thì hai số kia bằng 0.

Nếu x, y, z đều khác 0, ta nhân từng vế cả ba phương trình được

$$(1 + 4x^2)(1 + 4y^2)(1 + 4z^2) = 64xyz. \quad (1)$$

Mặt khác $1 + 4x^2 \geq 4x > 0, 1 + 4y^2 \geq 4y > 0, 1 + 4z^2 \geq 4z > 0$ nên

$$(1 + 4x^2)(1 + 4y^2)(1 + 4z^2) \geq 64xyz. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2x = 2y = 2z = 1$, tức là $x = y = z = \frac{1}{2}$.

$$\text{Đáp số: } (0; 0; 0), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

333. Điều kiện: $x, y, z \geq 0$. Nếu $x = 0$ thì $y = 0, z = 0$. Tương tự đối với y và z .

Nếu $xyz \neq 0$, hiển nhiên $x, y, z > 0$.

Từ phương trình đầu suy ra $\sqrt{x} = \frac{2y}{1+y} \leq \frac{2y}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y}$.

Tương tự $\sqrt{y} \leq \sqrt{z}, \sqrt{z} \leq \sqrt{x}$. Suy ra $x = y = z$.

Xảy ra dấu "=" ở các bất đẳng thức trên với $x = y = z = 1$.

$$\text{Đáp số: } (0; 0; 0), (1; 1; 1).$$

334. a) Từ (1) suy ra $x^3 = y^2 + y + \frac{1}{3} = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} > 0$.

Suy ra $x > 0$. Tương tự được $y > 0, z > 0$.

b) Giả sử x là số lớn nhất ($x \geq y, x \geq z$).

Lấy (1) trừ (3) được

$$x^3 - z^3 + x^2 - y^2 + x - y = 0. \quad (4)$$

Do $x \geq z > 0, x \geq y > 0$ nên $x^3 \geq z^3, x^2 \geq y^2$, do đó

$$x^3 - z^3 + x^2 - y^2 + x - y \geq 0. \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $x = y = z$.

c) Giải $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}$ được $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$ (xem bài 295d).

$$\text{Đáp số: } x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}.$$

335. Giả sử x là số lớn nhất ($x \geq y, x \geq z$) thì từ đề bài suy ra $z^2 \geq x^2$, $z^2 \geq y^2$.

a) Bạn đọc tự chứng minh.

b) – Nếu $x < 0$ thì $y < 0, z < 0$, chứng minh xong.

– Nếu $x > 0$ thì $x + 1 > 1$, do (3) nên $z^2 > 1$ do đó $z > 1$ (chú ý rằng $z < -1$ trái với (2)). Ta lại có $x \geq z$ nên $x > 1$, suy ra $x^2 > 1$, do (1) nên $y + 1 > 1$, vậy $y > 0$.

c) – Nếu $x, y, z > 0$ thì từ $z^2 \geq x^2$ có $z \geq x$, lại có $x \geq z$ (theo giả sử) nên $x = z$, do (2) và (3) nên $z = y$.

– Nếu $x, y, z < 0$ thì từ $z^2 \geq y^2$ có $z \leq y$, do (1) và (2) nên $y^2 \leq x^2$, suy ra $y \geq x$, lại có $x \geq y$ (theo giả sử) nên $x = y$, do (1) và (3) nên $x = z$.

Vậy $x = y = z$.

$$d) x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

336. Gọi bốn số phải tìm là x, y, z, t . Ta có

$$x - y = (y + z + t)^2 - (x + z + t)^2 = (y - x)(x + y + 2z + 2t)$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y + 2z + 2t + 1) = 0 \Rightarrow x = y.$$

$$\text{Tương tự } x = y = z = t = \frac{1}{9}.$$

337. Gọi bốn số phải tìm là x, y, z, t . Ta có :

$$xyz + t = 2, \quad (1)$$

$$xyt + z = 2, \quad (2)$$

$$xzt + y = 2, \quad (3)$$

$$yzt + x = 2. \quad (4)$$

Trước hết ta thấy $x, y, z, t \neq 0$ vì chẳng hạn $x = 0$ thì $y = z = t = 2$, trái với (1).

Nhân hai vế của (4) với x được

$$xyzt + x^2 = 2x \Rightarrow 1 - 2x + x^2 = 1 - xyzt \Rightarrow (1 - x)^2 = 1 - xyzt.$$

Tương tự ta có $|1 - x| = |1 - y| = |1 - z| = |1 - t| = 1 - xyzt$.

Giả sử $x \leq y \leq z \leq t$. Xét năm trường hợp :

a) $x \leq y \leq z \leq t \leq 1$. Ta có $1 - x = 1 - y = 1 - z = 1 - t$.

Suy ra $x = y = z = t$, do (1) nên $x^3 + x = 2 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Ta có nghiệm $(1; 1; 1; 1)$.

b) $x \leq y \leq z \leq 1 \leq t$. Ta có $1 - x = 1 - y = 1 - z = t - 1$.

Suy ra $x = y = z$, $t = 2 - x$, do (1) nên $x^3 + 2 - x = 2 \Leftrightarrow x^3 - x = 0$. Do $x \neq 0$ nên $x = \pm 1$.

- Nếu $x = -1$ thì $y = z = -1$, $t = 3$. Ta có nghiệm $(-1; -1; -1; 3)$.

- Nếu $x = 1$ thì $y = z = t = 1$.

c) $x \leq y \leq 1 \leq z \leq t$. Ta có $1 - x = 1 - y = z - 1 = t - 1$. Suy ra $x = y$, $z = t = 2 - x$, do (1) nên $x^2(2 - x) + (2 - x) = 2 \Leftrightarrow x(x - 1)^2 = 0$. Do $x \neq 0$ nên $x = 1$. Suy ra $y = z = t = 1$.

d) $x \leq 1 \leq y \leq z \leq t$. Ta có $1 - x = y - 1 = z - 1 = t - 1$.

Suy ra $y = z = t$, $x = 2 - t$. Từ (4) ta có $t(t^2 - 1) = 0$. Do $t \geq 1$ nên $t = 1$. Suy ra $x = y = z = 1$.

e) $1 \leq x \leq y \leq z \leq t$. Ta có $x - 1 = y - 1 = z - 1 = t - 1$. Trở về trường hợp a có $x = y = z = t = 1$.

Kết luận : Bốn số bằng 1 hoặc một số bằng 3, ba số bằng -1.

§19. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

338. Gọi số đất đội I đã đào một ngày là x (m^3), điều kiện $x > 0$.

$$\text{Phương trình : } \frac{810}{x} - \frac{900}{x + 4} = 6 - 3 \Leftrightarrow x^2 + 34x - 1080 = 0.$$

Giải ra được $x_1 = 20$; $x_2 = -54$ (loại).

Đội I đào $20m^3$ một ngày, đội II đào $24m^3$ một ngày.

339. Gọi thời gian rơi của hòn đá từ miệng giếng đến đáy giếng là t (giây) điều kiện $0 < t < 1,5$, thời gian âm truyền từ đáy giếng đến miệng giếng là $1,5 - t$ (giây). Phương trình :

$$5t^2 = 340(1,5 - t) \Leftrightarrow t^2 + 68t - 102 = 0.$$

Nghiệm dương là : $t \approx 1,5$. Giếng sâu 11m.

340. Gọi khối lượng quặng loại I là x (tấn), điều kiện $0 < x < 10$. Phương trình :

$$\frac{0,8}{x} - \frac{0,6}{10-x} = \frac{10}{100}.$$

Giải ra được $x_1 = 20$ (loại), $x_2 = 4$.

Khối lượng quặng loại I là 4 tấn, khối lượng quặng loại II là 6 tấn.

341. Gọi bán kính của hình tròn lúc đầu là x (mét), điều kiện $x > 0$. Phương trình :

$$2\pi x^2 = \pi(x + 1,5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2,25 = 0.$$

Nghiệm dương : $x = \frac{3 + 3\sqrt{2}}{2}$. Đường kính lúc đầu là $3(1 + \sqrt{2}) \approx 7,24$ m.

342. 24 km/h và 18 km/h.

343. Gọi thời gian vôi I chảy một mình đầy bể là x (giờ), điều kiện $x > 5$.

Phương trình :
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x^2 - 17x + 30 = 0.$$

Giải ra được $x_1 = 2$ loại ; $x_2 = 15$.

Vôi I chảy 15 giờ đầy bể, vôi II chảy 10 giờ đầy bể.

344.(h.70). Tổng vận tốc lúc đầu của hai người là



Hình 70

$$60 : \frac{6}{5} = 50 \text{ (km/h)}.$$

Gọi vận tốc của người I lúc đầu là x (km/h), điều kiện $0 < x < 50$, thì vận tốc của người II là $50 - x$ (km/h).

Quãng đường CB dài $\frac{6}{5}(50 - x)$ km, quãng đường CA dài $\frac{6}{5}x$ (km).

Người I đi quãng đường CB với vận tốc $x - 6$ (km/h) hết $\frac{6(50 - x)}{5(x - 6)}$ giờ.

Người II đi quãng đường CA với vận tốc $50 - x$ (km/h) hết $\frac{6x}{5(50 - x)}$ giờ.

Phương trình :

$$\frac{6x}{5(50 - x)} - \frac{6(50 - x)}{5(x - 6)} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x^2 + 85x - 3450 = 0.$$

Giải ra được $x_1 = 30$, $x_2 = -115$ (loại).

Vận tốc lúc đầu của người I là 30 km/h, vận tốc của người II là 20 km/h.

345. a) Giá mua một chiếc áo là $\frac{480}{x}$ (nghìn đồng), điều kiện $x > 2$. Phương trình :

$$2 \cdot \frac{480}{2x} + (x - 2) \left(\frac{480}{x} + 8 \right) = 480 + 72$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 88x = 480 \Leftrightarrow x^2 - 11x - 60 = 0.$$

Nghiệm dương là $x = 15$.

b) Giá mua một chiếc áo là $\frac{d}{x}$ (nghìn đồng). Ta có

$$2 \cdot \frac{d}{2x} + (x - 2) \left(\frac{d}{x} + 8 \right) = d + 72$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 88x = d \Leftrightarrow 8x(x - 11) = d.$$

Do d và x là các số nguyên dương nên $x > 11$.

Giá trị nguyên dương nhỏ nhất của x là 12.

346. Gọi thời gian thuyền đi từ A đến B khi không có gió là x (giây), điều kiện $x > 9$. Thời gian thuyền đi từ A đến B khi gió thổi thuận chiều là $x - 9$ (giây). Khi không có gió, trong một giây thuyền đi được $\frac{1}{x}$ (quãng đường

AB). Khi gió thổi thuận chiều, trong một giây thuyền đi được $\frac{1}{x - 9}$ (quãng đường AB). Khi gió thổi ngược chiều, trong một giây thuyền đi được $\frac{1}{84}$ (quãng đường AB).

Ta biết rằng vận tốc của thuyền khi không có gió bằng trung bình cộng của vận tốc thuyền khi gió thổi thuận chiều và vận tốc thuyền khi gió thổi ngược chiều. Do đó :

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x - 9} + \frac{1}{84} \right) : 2 \Leftrightarrow x^2 - 93x + 1512 = 0.$$

Giải ra được $x_1 = 72$, $x_2 = 21$.

Thời gian thuyền đi khi không có gió là 72 giây hoặc 21 giây.

347. Gọi thời gian người I, II, III làm một mình xong công việc theo thứ tự là x, y, z (giờ), điều kiện $x, y, z > 0$. Trong một giờ, mỗi người I, II, III làm được $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ (công việc), cả ba người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (công việc).

Thời gian cả ba người cùng làm xong công việc là $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$. Ta có

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = z - 18 = y - 3 = \frac{1}{2}x$$

nên
$$\frac{1}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{z - 18} = \frac{1}{y - 3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Biểu thị z theo x , được $z = \frac{x + 36}{2}$. Biểu thị y theo x được $y = \frac{x + 6}{2}$. Từ đó dẫn đến phương trình $x^2 + 14x - 72 = 0$. Nghiệm dương là $x = 4$. Từ đó $y = 5$, $z = 20$.

Thời gian người I, II, III làm một mình xong công việc theo thứ tự là 4 giờ, 5 giờ, 20 giờ.

348. (h.71) Gọi a, b là các kích thước của hình chữ nhật ($a \geq b$), x là chiều rộng của dải đất.

Ta có
$$x < \frac{b}{2} \quad (1)$$

Diện tích mảnh đất ban đầu là ab , diện tích phần còn lại là $(a - 2x)(b - 2x)$.

Ta có
$$2(a - 2x)(b - 2x) = ab.$$

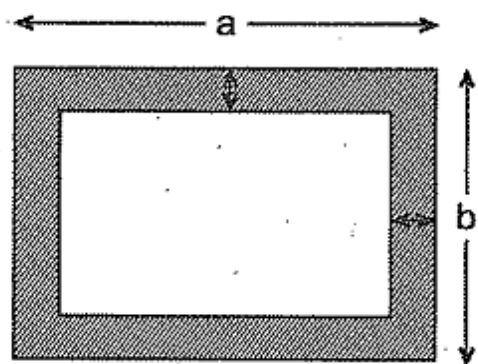
Thu gọn được $8x^2 - 4(a + b)x + ab = 0$.

$\Delta' = 4(a + b)^2 - 8ab = 4(a^2 + b^2) = 4d^2$ (với d là độ dài đường chéo của hình chữ nhật). Giải ra được $x_1 = \frac{a + b - d}{4}$; $x_2 = \frac{a + b + d}{4}$.

Ta thấy $x_2 > \frac{a + b}{4} \geq \frac{2b}{4} = \frac{b}{2}$, trái với (1), loại.

Còn $x_1 < \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{a + b - d}{4} < \frac{b}{2} \Leftrightarrow a - b < d$, đúng.

Chỉ có nghiệm $x = \frac{a + b - d}{4}$ thoả mãn bài toán. Vậy cách làm trên là đúng.



Hình 71

Quan hệ giữa parabol $y = ax^2$ và đường thẳng $y = mx + n$

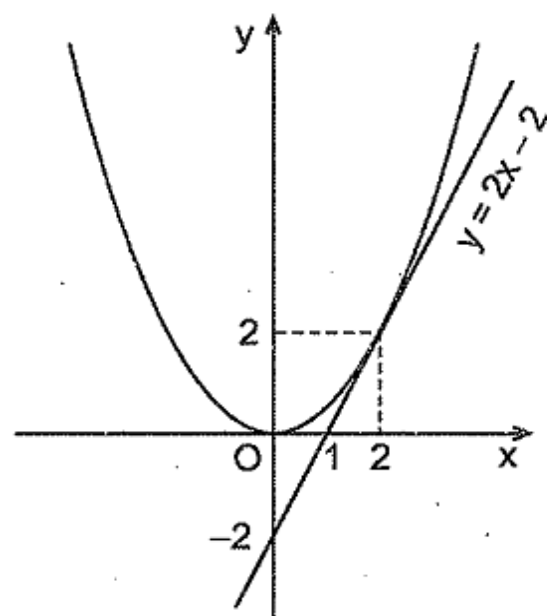
349. (h.72) a) Từ điều kiện đường thẳng $y = mx + n$ đi qua điểm $(1; 0)$ ta tìm được $n = -m$.

Giải điều kiện để đường thẳng $y = mx - m$ tiếp xúc với parabol $y = \frac{1}{2}x^2$, ta được $m_1 = 0; m_2 = 2$.

Với $m = 0$, đường thẳng là $y = 0$ (trục hoành), tọa độ của tiếp điểm là $(0; 0)$.

Với $m = 2$, đường thẳng là $y = 2x - 2$, tọa độ của tiếp điểm là $(2; 2)$.

350. Tìm n để phương trình $x^2 = 4x + n$ có nghiệm kép, được $n = -4$. Tiếp điểm A có tọa độ là $(2; 4)$.



Hình 72

351. Giải tương tự ví dụ 108. Đáp số: $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

352. (h.73) Trước hết lập phương trình đường thẳng $y = mx + n$ đi qua $M\left(x_0; -\frac{1}{4}\right)$ được

$$y = mx - \left(mx_0 + \frac{1}{4}\right).$$

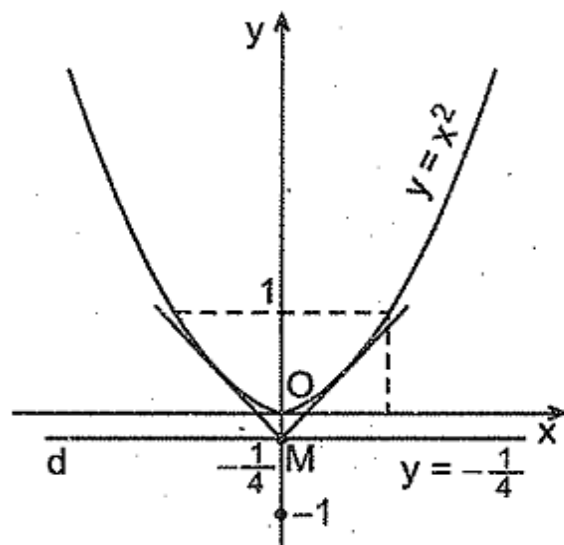
Giải điều kiện phương trình

$$x^2 = mx - \left(mx_0 + \frac{1}{4}\right)$$

có nghiệm kép, được $m^2 - 4mx_0 - 1 = 0$.

Hai nghiệm m_1, m_2 của phương trình này có tích $m_1 m_2 = -1$ (theo hệ thức Vi-ét) chứng tỏ rằng hai tiếp tuyến với parabol kẻ từ M vuông góc với nhau.

353. (h.74) Gọi tọa độ của A và B theo thứ tự là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Các điểm A, B thuộc parabol $y = x^2$ nên $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$. Ta có



Hình 73

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Do A, B là giao điểm của parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx + 2$ nên x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 = mx + 2$, tức là $x^2 - mx - 2 = 0$.

Giả sử $x_1 < x_2$ thì

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 8}}{2}, \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 8}}{2}.$$

Khi đó $x_2 - x_1 = \sqrt{m^2 + 8},$

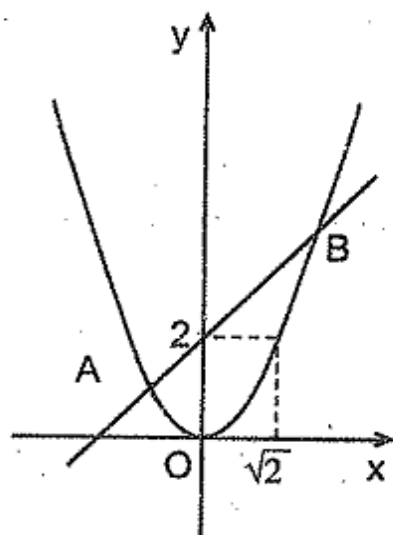
$$x_2 + x_1 = m,$$

$$y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = m\sqrt{m^2 + 8}.$$

Suy ra

$$AB^2 = (m^2 + 8) + m^2(m^2 + 8) = (m^2 + 8)(m^2 + 1) = m^4 + 9m^2 + 8 \geq 8.$$

Do đó $\min AB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 0.$



Hình 74

Điều kiện về nghiệm của một phương trình

354. $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$. Tổng các nghiệm của phương trình bằng 2 nên phương trình bao giờ cũng có nghiệm dương. *Đáp số*: $m \leq 3$.

355. Đặt $|x - 2| = y$ thì $x^2 - 4x + 4 = y^2$. Phương trình đã cho trở thành $y^2 + 2my + m^2 - 1 = 0$. Cần tìm m để phương trình này có ít nhất một nghiệm $y \geq 0$. *Đáp số*: $m \leq 1$.

356. *Đáp số*: $-3 < m < 1$.

357. *Đáp số*: $m < -2$.

358. Nghiệm nhỏ của phương trình là $x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}$. Giải bất phương trình $x_1 \leq -2$ được $m \geq \frac{3}{2}$.

359. $(x - 1)(x^2 - mx + m^2 - 3) = 0$.

Cần tìm m để phương trình $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. *Đáp số*: $-2 < m < -1, -1 < m < 2$.

360. a) Đặt $x^2 = y$. Cần tìm m để phương trình

$$(m - 3)y^2 - 2my + 6m = 0 \quad (1)$$

có ít nhất một nghiệm $y \geq 0$.

Giải theo cách 2 của ví dụ 109.

Với $m = 3$ thì (1) có nghiệm $y = 3$.

Với $m \neq 3$, ta tính được $\Delta' = m(18 - 5m)$, $P = \frac{6m}{m - 3}$, $S = \frac{2m}{m - 3}$, $\Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3,6.$$

Nếu $0 \leq m < 3$ thì $P \leq 0$ nên phương trình (1) tồn tại nghiệm không âm.

Nếu $3 < m \leq 3,6$ thì $P > 0$ và $S > 0$ nên (1) có hai nghiệm dương.

Vậy điều kiện để (1) có nghiệm không âm, tức là để phương trình đã cho có nghiệm, là $0 \leq m \leq 3,6$.

b) *Đáp số*: $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$.

361. Đặt $x^2 = y \geq 0$, ta có $y^2 - 2(m - 1)y - (m - 3) = 0$. (2)

$$\Delta' = (m - 1)^2 + (m - 3) = m^2 - m - 2 = (m + 1)(m - 2).$$

$$P = 3 - m, S = 2(m - 1).$$

a) (1) có bốn nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \Delta' > 0, P > 0, S > 0$.
Ta tìm được $2 < m < 3$.

b) (1) có ba nghiệm $\Leftrightarrow P = 0$ và $S > 0$. Ta tìm được $m = 3$.

c) (1) có hai nghiệm nếu xảy ra một trong hai trường hợp:

+ (2) có nghiệm kép dương. Từ $\Delta' = 0$ và $S > 0$, ta được $m = 2$.

+ (2) có hai nghiệm trái dấu. Từ $P < 0$, ta được $m > 3$.

d) (1) vô nghiệm nếu xảy ra một trong hai trường hợp:

+ (2) vô nghiệm. Từ $\Delta' < 0$, ta được $-1 < m < 2$.

+ (2) có hai nghiệm (kép hoặc phân biệt) âm. Từ $\Delta' \geq 0, P > 0, S < 0$ ta được $m \leq -1$.

Do đó (1) vô nghiệm nếu $m < 2$.

362. Giải tương tự ví dụ 117.

a) Đặt $x^2 = y \geq 0$, ta có $my^2 - 10my + (m + 8) = 0$. (1)

Gọi a, b là nghiệm của (1), giả sử $0 < a < b$.

Từ $b = 9a$, $a + b = 10$, $ab = \frac{m+8}{m}$, ta được $a = 1$, $b = 9$, $m = 1$. Phương trình đã cho là $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, có các nghiệm là $-3, -1, 1, 3$.

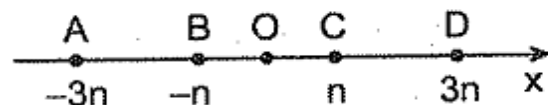
b) Đặt $x^2 = y \geq 0$, ta có $y^2 - (m + 7)y + 3m = 0$. Đáp số: $3; \frac{49}{3}$.

363. Ta thấy nếu k là nghiệm của phương trình

$$x^4 - 40x^2 + 6m = 0 \quad (1)$$

thì $-k$ cũng là nghiệm của phương trình đó.

Do đó, trong bốn nghiệm của phương trình (1), có hai nghiệm dương và hai nghiệm âm. Gọi nghiệm dương nhỏ nhất của (1) là n . Do $AB = BC = CD$ nên hoành độ của các điểm C, B, D, A theo thứ tự là $n, -n, 3n, -3n$ (h.75).



Hình 75

Đặt $x^2 = y \geq 0$, ta có $y^2 - 40y + 6m = 0$. (2)

Phương trình (2) có hai nghiệm dương là n^2 và $9n^2$.

Từ $n^2 + 9n^2 = 40$ và $n^2 \cdot 9n^2 = 6m$, ta tìm được $n = 2$ (chú ý rằng $n > 0$), do đó $m = 24$.

Phương trình (1) là $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$, có các nghiệm $-6, -2, 2, 6$.

364. Đặt $(x + 1)^2 = y \geq 0$. Ta có

$$y^2 - (m - 1)y - (m^2 - m + 1) = 0. \quad (1)$$

Do $P = -(m^2 - m + 1) < 0$ nên (1) có hai nghiệm trái dấu.

Gọi nghiệm dương là a . Từ $(x + 1)^2 = a$, ta được $x = -1 \pm \sqrt{a}$, đó là hai nghiệm của phương trình đã cho.

365. Phương trình $x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0 \quad (1)$

là phương trình đối xứng bậc bốn. Chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ rồi đặt ẩn phụ

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad (1) \text{ trở thành}$$

$$y^2 + my - 1 = 0. \quad (2)$$

Để phương trình $x + \frac{1}{x} = y$ (với y là tham số) có nghiệm hay phương trình $x^2 - yx + 1 = 0$ có nghiệm, ta phải có $y^2 - 4 \geq 0$, tức là $y \geq 2$ hoặc $y \leq -2$.

Do đó để (1) có nghiệm thì (2) phải có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $y \geq 2$ hoặc $y \leq -2$.

Điều kiện để tồn tại nghiệm của (2) thỏa mãn $y \geq 2$ là $m \leq -\frac{3}{2}$ (xem ví dụ 110).

Điều kiện để tồn tại nghiệm của (2) thỏa mãn $y \leq -2$ là $m \geq \frac{3}{2}$ (xem bài tập 358). *Đáp số*: $m \leq -\frac{3}{2}$ hoặc $m \geq \frac{3}{2}$.

366. Đặt $\sqrt{x - m} = y \geq 0$, ta có

$$2(y^2 + m) - 4 = 3y \Leftrightarrow 2y^2 - 3y + (2m - 4) = 0. \quad (1)$$

Cần tìm m để (1) có nghiệm $y \geq 0$. Giải $\Delta \geq 0$ được $m \leq \frac{41}{16}$. Khi đó tổng

hai nghiệm $y_1 + y_2 = \frac{3}{2} > 0$ nên luôn tồn tại nghiệm dương.

$$\text{Đáp số: } m \leq \frac{41}{16}.$$

367. a) Nếu a là nghiệm của phương trình thì $-a$ cũng là nghiệm. Do đó a phải bằng 0, khi đó $m = 4$. Dễ dàng giải phương trình

$$\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{4 - x^2} = 4, \text{ được } x = 0.$$

b) Tương tự như ví dụ 118, nếu a là nghiệm của phương trình thì $4 - a$ cũng là nghiệm. *Đáp số*: $m = 4$, nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Đa thức bậc hai với bất đẳng thức và toán cực trị

368. Viết đẳng thức đã cho dưới dạng một phương trình bậc hai đối với x :

$$x^2 + (y - 1)x + (y^2 - y) = 0.$$

Giải điều kiện $\Delta \geq 0$ được $-\frac{1}{3} \leq y \leq 1$. Tương tự $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

369. Viết đẳng thức đã cho dưới dạng một phương trình bậc hai đối với x , rồi giải điều kiện $\Delta \geq 0$.

370. Ta có $b + c = 5 - a$, $bc = 8 - a(b + c) = 8 - a(5 - a)$.

Suy ra các số b và c là nghiệm của phương trình

$$x^2 - (5 - a)x + (a^2 - 5a + 8) = 0.$$

Giải điều kiện $\Delta \geq 0$ được $1 \leq a \leq \frac{7}{3}$. Tương tự $1 \leq b \leq \frac{7}{3}$, $1 \leq c \leq \frac{7}{3}$.

371. Viết A dưới dạng $A = (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) + 20$.

Đặt $x^2 - 2x = y$, ta có $A = y^2 - 4y + 20 = (y - 2)^2 + 16 \geq 16$.

Ta có $\min A = 16 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$.

372. Dùng phương pháp miền giá trị của hàm số.

a) $\min A = -\frac{1}{2}$ với $x = -1$; $\max A = \frac{1}{2}$ với $x = 1$.

b) $\min B = 1$ với $x = -2$; $\max B = 6$ với $x = \frac{1}{2}$.

c) $\min C = 3 - 2\sqrt{2}$ với $x = \sqrt{2}$; $\max C = 3 + 2\sqrt{2}$ với $x = -\sqrt{2}$.

d) $\min D = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ với $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$; $\max D = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ với $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

373. Viết A dưới dạng sau (với $y \neq 0$):

$$A = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1} = \frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a + 1} \quad (\text{đặt } \frac{x}{y} = a).$$

Giải như ví dụ 123, được $\frac{1}{3} \leq A \leq 3$. Còn với $y = 0$ thì $A = 1$.

Do đó $\min A = \frac{1}{3}$ với $x = y$; $\max A = 3$ với $x = -y$.

374. Giải tương tự ví dụ 127.

Đặt $m = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ thì $A = m^2 - 3m - 2$. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của A với điều kiện $|m| \geq 2$.

Ta tìm được $\min A = -4 \Leftrightarrow m = 2 \Leftrightarrow a = b$.

375. Biểu thức A nhận giá trị m khi và chỉ khi phương trình ẩn x sau đây có nghiệm :

$$m = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} \Leftrightarrow m - x = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}. \quad (1)$$

Với $m \geq x > 0$, (1) tương đương với

$$m^2 - 2mx + x^2 = x^2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2mx^2 - m^2x + 1 = 0. \quad (2)$$

Ở (2), do $m \neq 0$ nên (2) là phương trình bậc hai. Giải điều kiện $\Delta \geq 0$ và chú ý rằng $m > 0$ ta được $m \geq 2$.

$m = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, thoả mãn điều kiện $0 < x \leq m$.

Vậy $\min A = 2$ với $x = \frac{1}{2}$.

376. Gọi a là giá trị tùy ý của A , dẫn đến

$$(a - 2)x^2 - mx + (a - n) = 0. \quad (1)$$

Xét $a \neq 2$, tìm điều kiện để (1) có nghiệm, ta sẽ được

$$4a^2 - 4(n + 2)a + (8n - m^2) \leq 0 \quad (2)$$

Giải tương tự ví dụ 124, ta tìm được $n = 5$, $m = \pm 4$.

$$\text{Vậy } A = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1} \text{ hoặc } A = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1}.$$

377. Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ta có

$$B = \left(xy + \frac{1}{xy} \right)^2 = x^2 y^2 + \frac{1}{x^2 y^2} + 2 \geq 2 \cdot xy \cdot \frac{1}{xy} + 2 = 4.$$

$\min B = 4 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{xy}$ và $x + y = 1$. Giải điều kiện này, ta được

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ và } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{aligned} 378. C &= \frac{x}{1+x} + \frac{5-5x+5x}{x} = \frac{x}{1-x} + \frac{5(1-x)}{x} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{x}{1-x} \cdot \frac{5(1-x)}{x}} + 5 \\ &= 5 + 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi

$$\frac{x}{1-x} = \frac{5(1-x)}{x}. \quad (1)$$

Giải phương trình (1), ta được

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{4} > 1 \text{ (loại)}, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}.$$

Vậy $\min C = 5 + 2\sqrt{5}$ với $x = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$.

379. Gọi m là nghiệm của phương trình (1) đã cho thì

$$m^4 + 2m^2 + 2am + a^2 + 2a + 1 = 0. \quad (2)$$

Viết (2) dưới dạng phương trình bậc hai với ẩn a :

$$a^2 + 2(m+1)a + (m^4 + 2m^2 + 1) = 0. \quad (3)$$

Để tồn tại a , phải có $\Delta' \geq 0$. Giải điều kiện này được

$$m(m-1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1.$$

a) Nghiệm của phương trình đạt giá trị nhỏ nhất là 0 với $a = -1$.

b) Nghiệm của phương trình đạt giá trị lớn nhất là 1 với $a = -2$.

380. Ta có $\Delta = a^2 - 4a + 20 > 0$. Nghiệm lớn của phương trình là

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a + 20}}{2}. \quad (1)$$

Ta dự đoán nghiệm đó có giá trị lớn nhất khi xảy ra dấu "=" ở điều kiện $a \geq -1$ của đề bài, tức là với $a = -1$. Với $a = -1$ thì $x = 3$. Ta sẽ chứng minh với $a > -1$ thì

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a + 20}}{2} < 3. \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 4a + 20} < a + 6$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 20 < a^2 + 12a + 36 \text{ (chú ý rằng } a + 6 > 0)$$

$$\Leftrightarrow -1 < a, \text{ đúng.}$$

Vậy giá trị lớn nhất mà nghiệm của phương trình đã cho đạt được là 3, khi và chỉ khi $a = -1$.

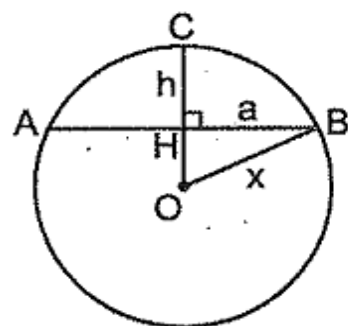
PHẦN HÌNH HỌC

Chương III – GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

§11. Liên hệ giữa cung và dây

194. (h.76) Gọi C là điểm chính giữa của cung AB, H là giao điểm của OC và AB. Ta có $OC \perp AB$. Đặt $OB = x$. Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle OHB$, ta tính được

$$x = \frac{a^2 + h^2}{2h}$$



Hình 76

195. (h.77) Ta có $CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow AC = BD$. Đặt $AC = BD = x$ thì $CD = 3 - 2x$.

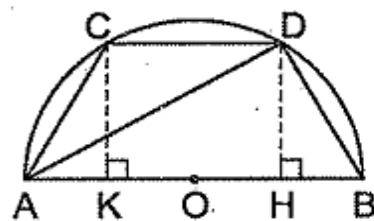
Kẻ DH, CK vuông góc với AB. Ta có

$$HB = KA = \frac{AB - CD}{2} = \frac{2x - 1}{2}$$

$\triangle DAB$ vuông nên

$$DB^2 = AB \cdot HB \Rightarrow x^2 = 2 \cdot \frac{2x - 1}{2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Vậy $AC = BD = 1\text{cm}$, do đó $CD = 1\text{cm}$.

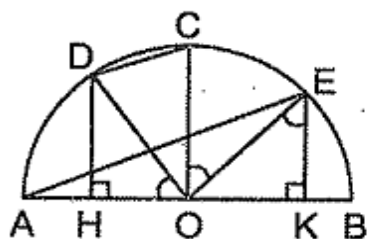


Hình 77

$$196. (h.78) \quad S_{AEK} = \frac{AK \cdot EK}{2} = \frac{(10 + OK)EK}{2}. \quad (1)$$

$DC \parallel AE \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CE} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{COE}$. Ta lại có $\widehat{COE} = \widehat{OEK}$ (do $OC \parallel EK$) nên $\widehat{AOD} = \widehat{OEK}$. Suy ra $\triangle ODK = \triangle OEH$ (cạnh huyền và góc nhọn) nên $EK = OH = 6\text{cm}$, $OK = DH = 8\text{cm}$.

Thay vào (1) được $S_{AEK} = 54\text{ cm}^2$.



Hình 78

197. (h.79) $\triangle AOB = \triangle A'OB'$ (c.g.c). Do $\widehat{A_1} = 30^\circ$ nên $\widehat{A'_1} = 30^\circ$. Ta lại có $\widehat{AOA'} = 30^\circ$ nên

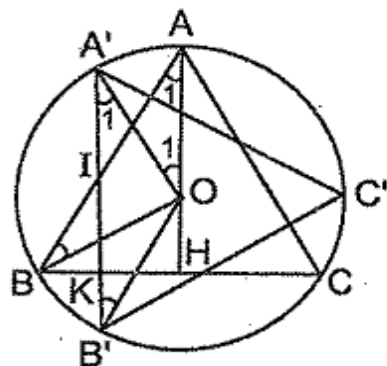
$$A'B' \parallel AO. \quad (1)$$

Tương tự $OB' \parallel AB$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AIB'O$ là hình bình hành (I là giao điểm của AB và A'B'). Do đó $AI = OB' = OA$.

$$\text{Đặt } OA = R \text{ thì } AB = R\sqrt{3}, \quad BH = \frac{R\sqrt{3}}{2},$$

$$BI = AB - AI = R\sqrt{3} - R = R(\sqrt{3} - 1).$$

Gọi K là giao điểm của A'B' và BC. Ta có :



Hình 79

$$S_{BIK} : S_{BAH} = \left(\frac{BI}{AB} \right)^2 = \left[\frac{R(\sqrt{3} - 1)}{R\sqrt{3}} \right]^2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3}$$

nên $S_{BIK} : S_{BAC} = \frac{2 - \sqrt{3}}{3}$. Gọi diện tích phần chung là S' , ta có

$$\frac{S'}{S} = \frac{S - 3S_{BIK}}{S} = 1 - \frac{3(2 - \sqrt{3})}{3} = \sqrt{3} - 1.$$

$$\text{Vậy } S' = (\sqrt{3} - 1)S.$$

198. Xét $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác (h.80). Ta vẽ $\triangle A'B'C'$ ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$ và đồng dạng với ABC bằng cách vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của $\triangle ABC$ và tiếp xúc với cung của đường tròn ngoại tiếp chứa đỉnh đối diện.

ΔABC ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$,
 $\Delta A'B'C'$ ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$,
 mà $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ nên

$$\frac{R}{r} = \frac{B'C'}{BC}. \quad (1)$$

Bây giờ qua mỗi đỉnh của ΔABC , vẽ các đường thẳng song song với cạnh đối diện, ta được $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng với ΔABC và

$$BC = \frac{1}{2} B_1C_1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{R}{r} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{B'C'}{\frac{1}{2} B_1C_1} = \frac{2B'C'}{B_1C_1}.$$

Ta lại có $B'C' \geq B_1C_1$ nên $\frac{R}{r} \geq 2$, tức là $R \geq 2r$.

Chú ý

a) Có thể dùng kết quả của bài 248 để giải bài toán trên.

Gọi a, b, c là các cạnh của ΔABC , S là diện tích, p là nửa chu vi. Ta có

$$R = \frac{abc}{4S} \text{ (xem bài 248) và } r = \frac{S}{p}, \text{ nên}$$

$$R \geq 2r \Leftrightarrow \frac{abc}{4S} \geq \frac{4S}{a+b+c} \Leftrightarrow abc(a+b+c) \geq 16S^2.$$

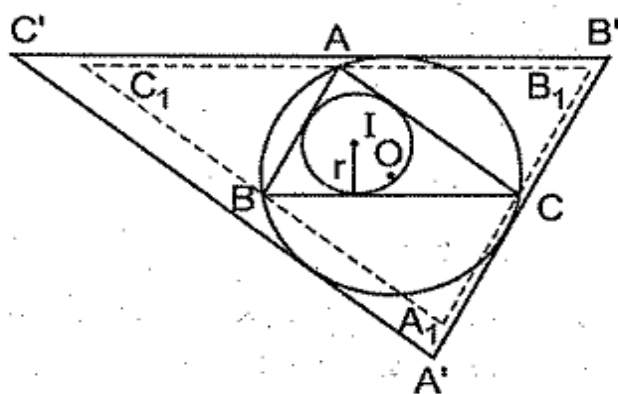
Ta lại có $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ (công thức Hê-rông) nên

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c) \\ &= (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c). \end{aligned}$$

Do đó $R \geq 2r \Leftrightarrow abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$.

Chứng minh bất đẳng thức trên : xem ví dụ 99 phần Đại số trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8* tập hai.

b) Từ định lí Ô-le (xem ví dụ 33), ta cũng suy ra $R^2 - 2Rr \geq 0$ nên $R \geq 2r$.



Hình 80

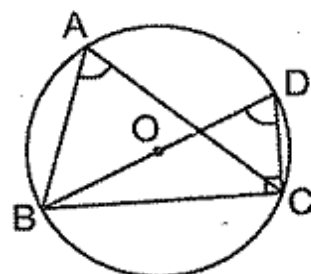
§12. Góc nội tiếp

199. (h.81) Kẻ đường kính BD. Ta có

$$BC = BD \sin D = 2R \sin A$$

nên $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Chứng minh tương tự $\frac{b}{\sin B} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$.

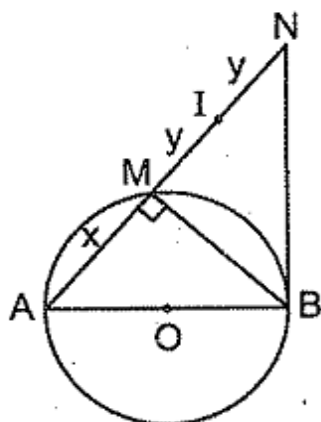


Hình 81

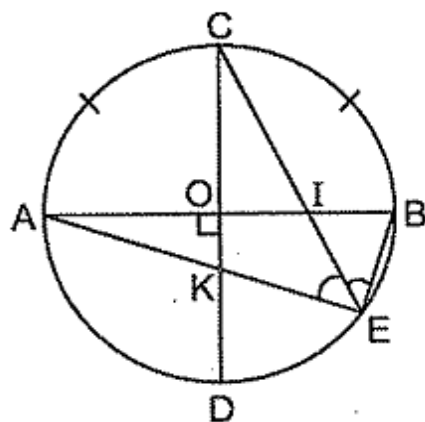
200. (h.82) Đặt $AM = x$, $MI = IN = y$ ($0 < x, y < 13$).

Từ $x + y = 13$ và $x(x + 2y) = 12^2$, ta tính được $x = 18$ (loại), $x = 8$.

Đáp số: $AM = 8$ cm.



Hình 82



Hình 83

201. (h.83) $\triangle AEB$ có EI là đường phân giác nên $\frac{EA}{EB} = \frac{IA}{IB} = 3$.

$\triangle AOK \sim \triangle AEB$ (g.g) nên $\frac{OA}{OK} = \frac{EA}{EB} = 3$.

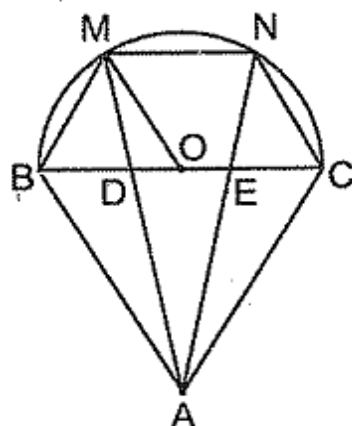
Do đó $OK = \frac{1}{3}OA = \frac{R}{3}$. Vậy $DK = \frac{2}{3}R$.

202. (h.84) Gọi O là tâm của nửa đường tròn. Đặt $OB = OC = a$. Dễ thấy MOCN là hình thoi cạnh a. Do $DE \parallel MN$ nên

$$DE : MN = \frac{2a}{3} : a = \frac{2}{3} \Rightarrow AD = \frac{2}{3}AM \Rightarrow AD = 2DM.$$

Ta lại có $DC = 2DB$ nên $\triangle ADC \sim \triangle MDB$.

Suy ra $AC = 2MB = 2a$. Tương tự $AB = 2a$. Vậy $\triangle ABC$ đều.



Hình 84

203. (h.85) Gọi H là trực tâm của ΔABC . Kí hiệu $S_{ABC} = S$.
Để chứng minh $DM = DH$. Ta có

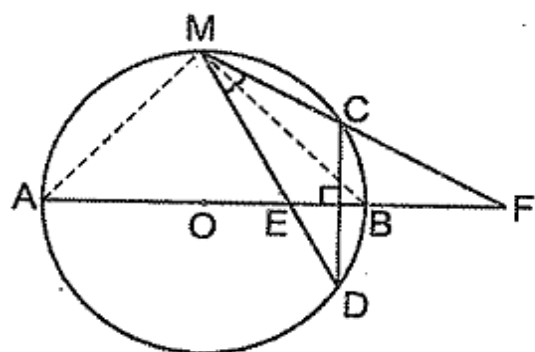
$$\begin{aligned}\frac{AM}{AD} &= \frac{AD + DM}{AD} \\ &= 1 + \frac{DM}{AD} = 1 + \frac{DH}{AD} = 1 + \frac{S_{BHC}}{S}.\end{aligned}$$

Tương tự $\frac{BN}{BE} = 1 + \frac{S_{AHC}}{S}$, $\frac{CK}{CF} = 1 + \frac{S_{AHB}}{S}$.

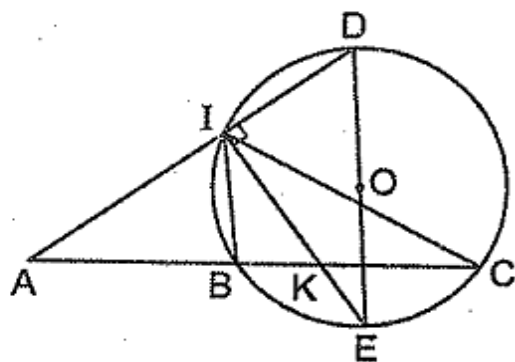
Cộng từng vế ba đẳng thức trên, ta được điều phải chứng minh.

204. Giả sử M thuộc cung lớn CD (h.86). Chứng minh rằng MB là đường phân giác trong, do đó MA là đường phân giác ngoài của ΔMEF . Áp dụng tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác.

Trường hợp M thuộc cung nhỏ CD, chứng minh tương tự.



Hình 86



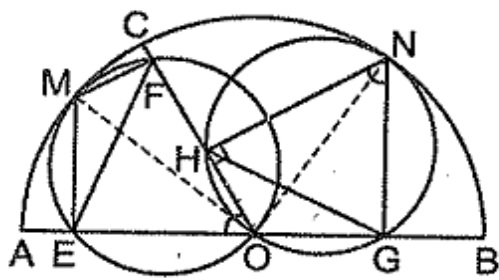
Hình 87

205. (h.87) IK là đường phân giác trong của ΔIBC nên $\frac{KB}{KC} = \frac{IB}{IC}$.

IA là đường phân giác ngoài của ΔIBC nên $\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}$.

Suy ra $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$, do đó $AC \cdot BK = AB \cdot KC$.

206. (h.88) Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{AOC} \leq \widehat{BOC}$. Các điểm O, E, M, F thuộc đường tròn đường kính OM = R. Các điểm O, G, N, H thuộc đường tròn đường kính ON = R. Trong hai đường tròn bằng nhau đó, các góc nội tiếp EOF, GNH bằng nhau (cùng bù với góc GOH) nên $\widehat{EF} = \widehat{GH}$, suy ra $EF = GH$.



Hình 88

207. (h.89) Giả sử $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C}$. Đặt $\widehat{BC} = m$, $\widehat{AC} = n$, $\widehat{AB} = p$. Ta có $m + n + p = 360^\circ$, $\widehat{AA'} = n - p$, $\widehat{BB'} = m - p$, $\widehat{CC'} = m - n$.

$$\begin{aligned}\widehat{DF} &= \frac{2\widehat{AA'}}{3} + \widehat{A'C} + \frac{\widehat{CC'}}{3} \\ &= \frac{2(n-p)}{3} + p + \frac{m-n}{3} = \frac{m+n+p}{3} = 120^\circ.\end{aligned}$$

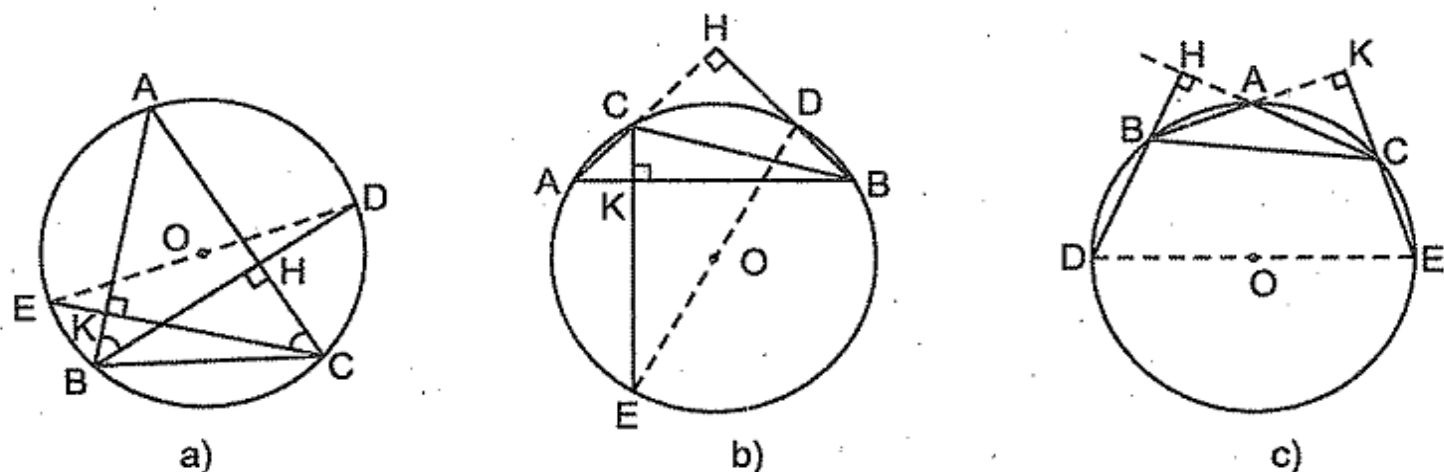
$$\widehat{DE} = \frac{\widehat{AA'}}{3} + \widehat{AB} + \frac{\widehat{BB'}}{3} = \frac{n-p}{3} + p + \frac{m-p}{3} = \frac{m+n+p}{3} = 120^\circ.$$

Suy ra $\widehat{DF} = \widehat{DE} = \widehat{EF}$. Vậy $\triangle DEF$ đều.

208. (h.90) Nếu $\widehat{BAC} < 90^\circ$ thì H thuộc tia AC (h.90a, b).

$$\widehat{ABH} = \widehat{ACK} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{AE}.$$

Ta lại có $\widehat{AD} + \widehat{AE} = 180^\circ$ nên $\widehat{AD} = \widehat{AE} = 90^\circ$, do đó $\widehat{ABH} = 45^\circ$, $\widehat{BAH} = 45^\circ$. Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BAH} = 45^\circ$.



Hình 90

Nếu $\widehat{BAC} > 90^\circ$ thì H thuộc tia đối của tia AC (h.90c). Bạn đọc tự chứng minh rằng khi đó $\widehat{AD} = \widehat{AE} = 90^\circ$, $\widehat{ABH} = 45^\circ$, $\widehat{BAH} = 45^\circ$, do đó

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{BAH} = 135^\circ.$$

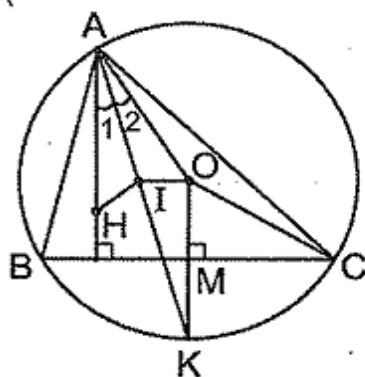
209. (h.91) a) Gọi K là giao điểm của AI và đường tròn. Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ vì cùng bằng $\widehat{K}$.

b) Với $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O), ta chứng minh được AH gấp đôi khoảng cách OM từ O đến BC. Ta lại có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\widehat{KOC} = 60^\circ$, do đó

$$OM = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA.$$

Suy ra $AH = AO$.

$\triangle AIH = \triangle AIO$ (c.g.c) nên $IH = IO$.



Hình 91

210. Có hai đáp số: $\widehat{A} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{A} = 120^\circ$.

211. (h.92) a) Trên MA lấy I sao cho $MI = MB$. Tam giác MBI đều, suy ra $\widehat{IBM} = 60^\circ$, do đó $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.

$\triangle ABI = \triangle CBM$ (c.g.c) nên $AI = MC$. Từ đó $MA = MB + MC$.

b) $\triangle MCD \sim \triangle MAB$ (g.g) nên $\frac{MD}{MB} = \frac{MC}{MA}$, $\frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MA}$. Do đó

$$\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = \frac{MC}{MA} + \frac{MB}{MA} = \frac{MC + MB}{MA} = 1 \text{ (theo câu a).}$$

c) Đặt $MA = x$, $MB = y$. Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= x^2 + y^2 + (x - y)^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 - xy). \end{aligned} \quad (1)$$

Kẻ $BH \perp AM$. Do $\widehat{BMH} = 60^\circ$ nên

$$MH = \frac{y}{2}, \quad BH^2 = y^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{3y^2}{4}.$$

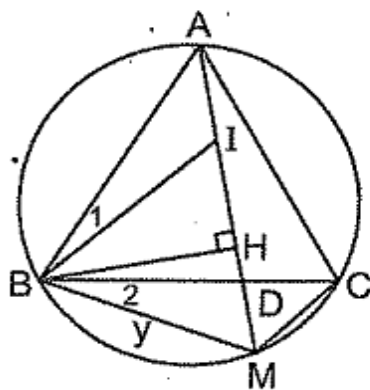
Do đó

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = x^2 + y^2 - xy. \quad (2)$$

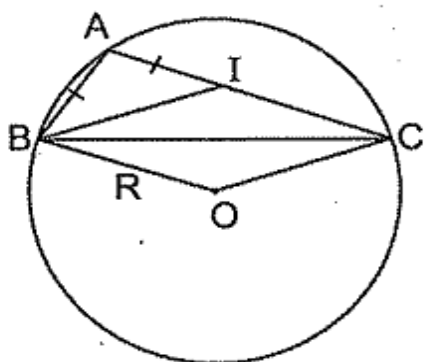
Từ (1) và (2) suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2AB^2$.

Ta lại có $AB = R\sqrt{3}$. Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

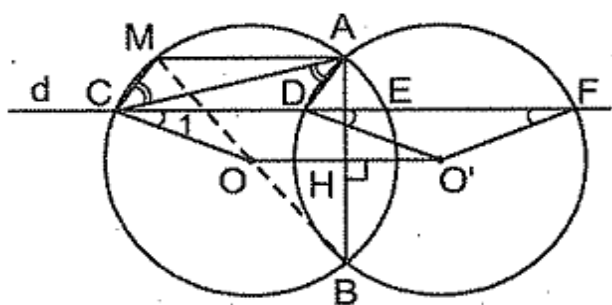
212. (h.93) Trên AC lấy I sao cho $AI = AB$. Hãy chứng minh rằng BICO là hình bình hành (còn là hình thoi).



Hình 92



Hình 93



Hình 94

213. (h.94) a) (O) và (O') đối xứng nhau qua AB, mà $d \perp AB$ nên C đối xứng với F qua AB, $\widehat{C_1} = \widehat{F} = \widehat{O'DF} \Rightarrow OC \parallel O'D$. Ta lại có $CD \parallel OO'$. Suy ra CDO'O là hình bình hành.

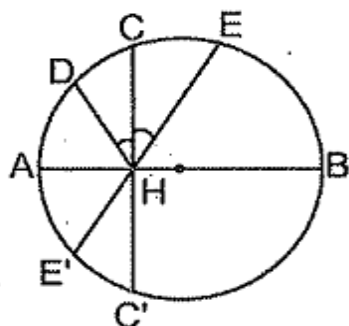
b) OO' cắt AB tại H. Ta có $OH = O'H = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - a^2}$.

Do đó $CD = OO' = \sqrt{4R^2 - a^2}$.

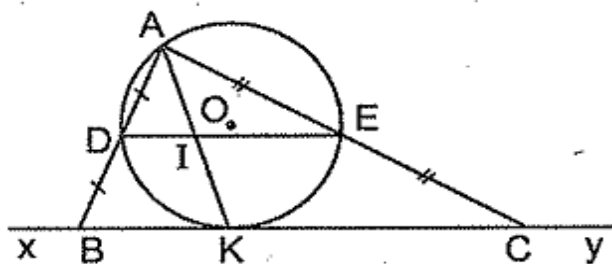
c) Kẻ đường kính BOM thì M là điểm cố định. Ta có $AM = CD$ (cùng gấp đôi OH), $AM \parallel CD$ nên AMCD là hình bình hành, suy ra $AD \parallel MC$, do đó $\widehat{CAD} = \widehat{ACM}$. Vậy $sđ \widehat{CAD} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AM}$.

214. (h.95) Vẽ cả đường tròn đường kính AB. Gọi C', E' theo thứ tự là giao điểm của CH, EH với đường tròn. Ta có

$$HD \cdot HE = HE' \cdot HE = HC \cdot HC' = HC^2.$$



Hình 95



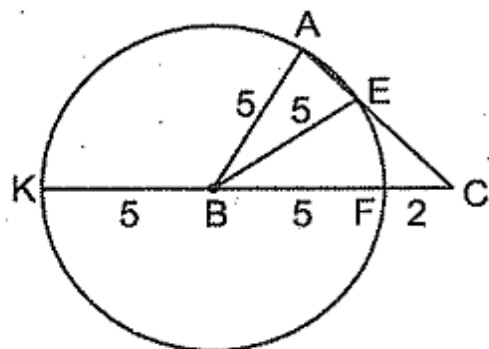
Hình 96

215. (h.96) Để có một tam giác như đề bài, chỉ cần vẽ đường tròn (O), tiếp tuyến xy, K là tiếp điểm. Lấy một điểm A tùy ý trên (O), vẽ đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng một nửa khoảng cách từ A đến xy, đường thẳng này cắt (O) tại D và E.

Gọi I là giao điểm của AK và DE. Đặt $IA = IK = a$.

Từ hệ thức $IA.IK = ID.IE$ dễ dàng suy ra

$$a^2 = ID.IE \Rightarrow 4a^2 = 2ID.2IE \Rightarrow KA^2 = BK.KC.$$

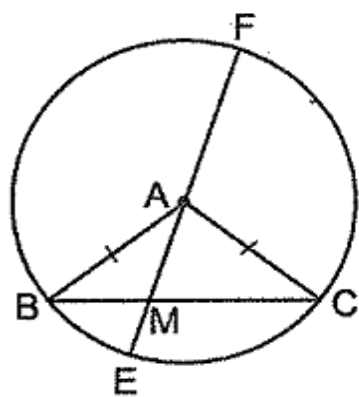


Hình 97

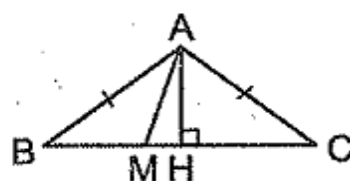
216. (h.97) Vẽ đường tròn $(B; BA)$, cắt AC ở E, cắt cạnh BC ở F và cắt tia đối của tia BC ở K. Ta có $BE = 5$. Ta tính được $AE = 2$, $CE = 4$ dựa vào hệ thức $CE.CA = CF.CK$. Điểm E là một điểm thỏa mãn bài toán.

217. Kẻ đường kính EF đi qua M (h.98a). Ta có

$$\begin{aligned} MB.MC &= ME.MF = (AE - AM)(AF + AM) = (AB - AM)(AB + AM) \\ &= AB^2 - AM^2. \end{aligned}$$



a)



b)

Hình 98

Chú ý : Cách giải sau không dùng đến kiến thức về góc nội tiếp : Kẻ đường cao AH. Giả sử $BM \leq MC$ (h.98b). Ta có

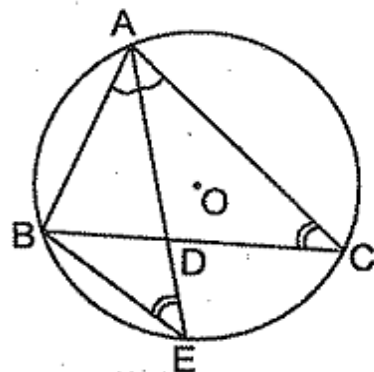
$$\begin{aligned} AB^2 - AM^2 &= (AH^2 + BH^2) - (AH^2 + MH^2) = BH^2 - MH^2 \\ &= (BH + MH)(BH - MH) = (CH + MH).MB = MC.MB. \end{aligned}$$

218. (h.99) $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AB.AC &= AD.AE = AD(AD + DE) \\ &= AD^2 + AD.DE = AD^2 + DB.DC. \end{aligned}$$

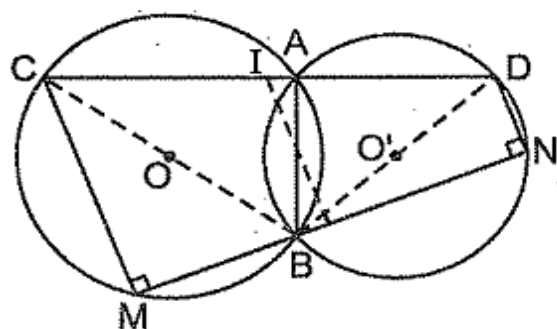
Suy ra $AD^2 = AB.AC - DB.DC.$



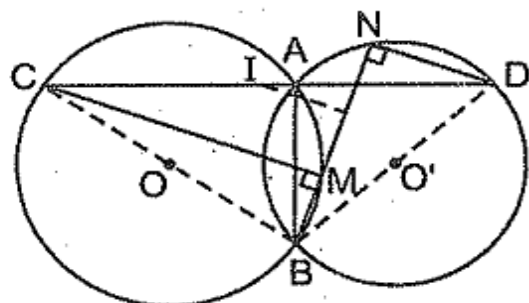
Hình 99

219. (h.100) Kẻ các đường kính BOC, BO'D thì C, A, D thẳng hàng, CAD là cát tuyến chung cố định.

Trường hợp M thuộc cung BC không chứa A (h.100a) : $\widehat{ABN} = \widehat{ACM}$, $\widehat{ACM}$ bù $\widehat{ABM}$ nên $\widehat{ABN}$ bù $\widehat{ABM}$, do đó M, B, N thẳng hàng.



a)



b)

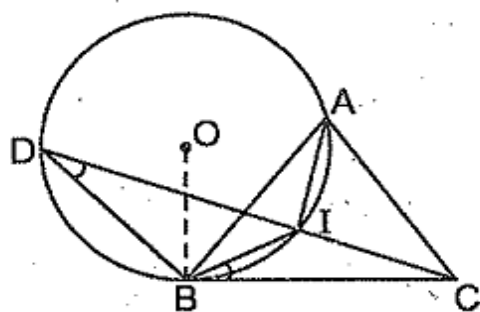
Hình 100

Trường hợp M thuộc cung BC chứa A (h.100b) : $\widehat{ABN} = \widehat{ABM}$ nên M, B, N thẳng hàng.

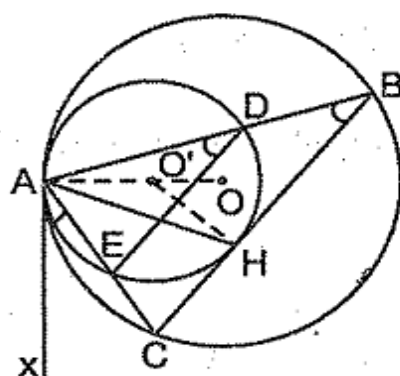
Trong cả hai trường hợp, ta có CM và DN cùng vuông góc với MN. Do đó đường trung trực của MN đi qua trung điểm I của CD, đó là điểm cố định.

§13. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

220. (h.101) Lần lượt chứng minh $\widehat{IBC} = \widehat{IAB} = \widehat{IDB} = \widehat{ICA}$.



Hình 101

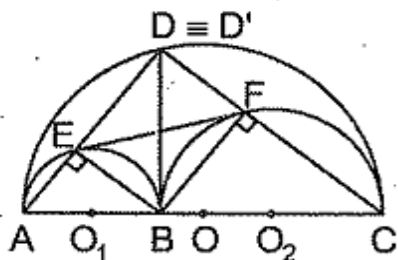


Hình 102

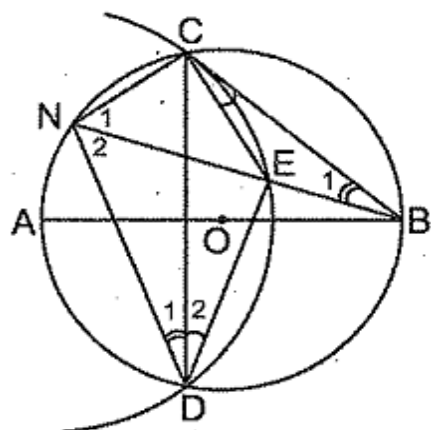
221. (h.102) a) Kẻ tiếp tuyến chung Ax của hai đường tròn. Ta có $\widehat{B} = \widehat{ADE}$ (cùng bằng $\widehat{CAx}$) nên $DE \parallel BC$.

b) $DE \parallel BC$ mà $BC \perp O'H$ nên $DE \perp O'H$. Suy ra $\widehat{HD} = \widehat{HE}$, do đó $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$. Vậy AH là tia phân giác của góc BAC.

222. (h.103) AE cắt CF tại D'. Chứng minh rằng BED'F là hình chữ nhật và $D'B \perp AC$ để suy ra D' là giao điểm của đường vuông góc với AC tại B và nửa đường tròn, do đó D' trùng D.



Hình 103



Hình 104

223. (h.104) a) $\widehat{CEN} = \widehat{ECB} + \widehat{B_1} = \widehat{D_2} + \widehat{D_1} = \widehat{EDN}$.

b) Ta lại có $\widehat{N_1} = \widehat{N_2}$ nên $\triangle CEN \sim \triangle EDN$ (g.g), suy ra $\frac{NE}{ND} = \frac{NC}{NE}$. Vậy $NE^2 = NC \cdot ND$.

224. (h.105) Gọi M là giao điểm của DK với nửa đường tròn. Để thấy $\triangle CDK$ cân. Đặt $DM = MK = x > 0$.

Ta có $BM \cdot BK = BC^2$,
nên $(x + 4)(2x + 4) = 25$.

Rút gọn được $2x^2 + 12x - 9 = 0$.

Nghiệm dương của phương trình là $x = \frac{3\sqrt{6} - 6}{2}$.

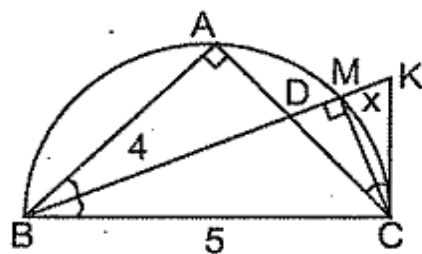
Do đó $DK = 3\sqrt{6} - 6$ (cm), $BK = 3\sqrt{6} - 2$ (cm).

225. (h.106) Gọi EM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEB$, EN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CED$.

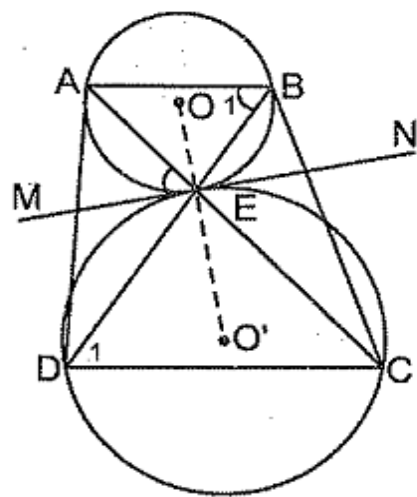
Hai đường tròn tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow M, E, N$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \widehat{AEM} = \widehat{CEN}$.

Ta lại có $\widehat{AEM} = \widehat{B_1}$, $\widehat{CEN} = \widehat{D_1}$ nên

$$\widehat{AEM} = \widehat{CEN} \Leftrightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \Leftrightarrow AB \parallel CD.$$



Hình 105

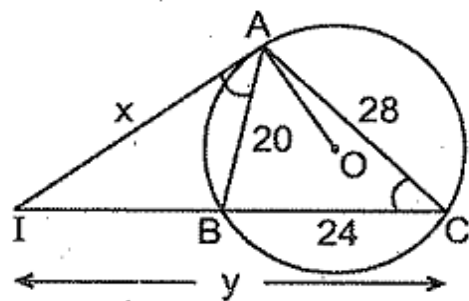


Hình 106

226.(h.107) a) Ta có $\widehat{BAI} = \widehat{C}$, $\triangle BAI \sim \triangle ACI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IA} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IB^2}{IA^2}$$

Ta lại có $IA^2 = IB \cdot IC$ nên $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IB^2}{IB \cdot IC} = \frac{IB}{IC}$.



Hình 107

b) Đặt $IA = x$, $IC = y$. Ta có

$$\triangle BAI \sim \triangle ACI \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AI}{CI} = \frac{BI}{AI} = \frac{AB}{CA} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y - 24}{x} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

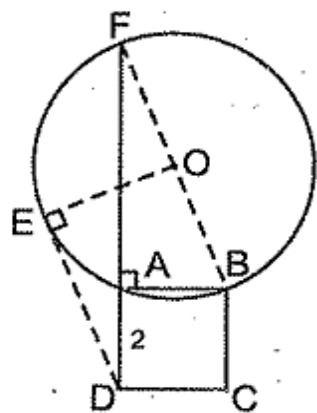
Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x = 5y \\ 5x = 7(y - 24) \end{cases}$ được $\begin{cases} x = 35 \\ y = 49 \end{cases}$

Đáp số: $IA = 35$ cm, $IC = 49$ cm.

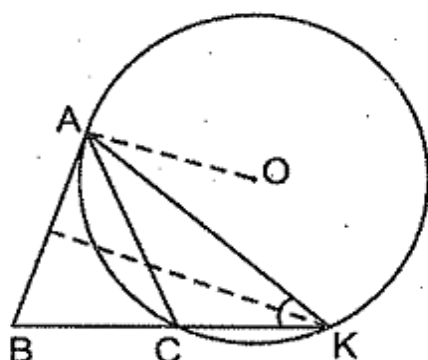
227. (h.108) Kẻ đường kính BOF thì F, A, D thẳng hàng. Gọi DE là tiếp tuyến kẻ từ D. Ta có

$$DE^2 = DA \cdot DF = 2(2 + AF) \Rightarrow 16 = 2(2 + AF) \Rightarrow AF = 6.$$

Đáp số: $OB = \sqrt{10}$ (cm).



Hình 108



Hình 109

228. (h.109) Các tam giác cân $\triangle ABC$, $\triangle KBA$ có chung góc ở đáy $\widehat{B}$ nên $\widehat{CAB} = \widehat{AKB}$ tức là $\widehat{CAB} = \widehat{AKC}$.

Ta có $Sđ\widehat{CAB} = \frac{1}{2} Sđ\widehat{AC}$, từ đó AB là tiếp tuyến của đường tròn.

229. (h.110) $BD^2 = AB \cdot CD \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{BD}$.

$$IB \perp EF. \quad (1)$$

Gọi K là giao điểm của BA và CD.

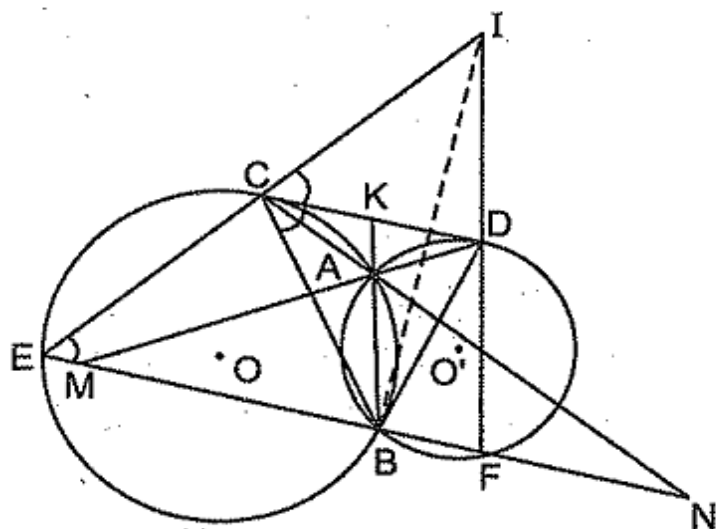
Ta có

$$\frac{KC}{BN} = \frac{KD}{BM} \text{ (cùng bằng } \frac{AK}{AB} \text{)}.$$

Ta lại có $KC = KD$ (cùng bằng $\sqrt{KA \cdot KB}$) nên

$$BN = BM. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra IB là đường trung trực của MN.

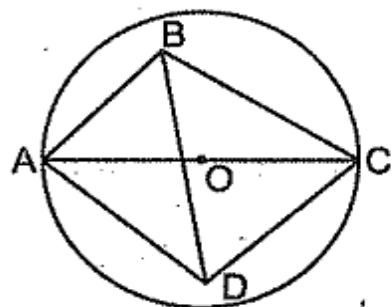


Hình 113

§14. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

233. (h.114) Ta có $\widehat{ABC} > 90^\circ$, $\widehat{ADC} > 90^\circ$ nên B và D ở bên trong đường tròn có đường kính là AC. Để dàng chứng minh được $BD < AC$ (vì BD nhỏ hơn dây chứa nó, còn đường kính AC là dây lớn nhất).



Hình 114

234. (h.115) Vẽ đường kính BOD.

$$\widehat{C} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AD} - \text{sđ}\widehat{MB}) = \frac{90^\circ - 45^\circ}{2} = 22^\circ 30'.$$

Ta lại có $\widehat{MAB} = 22^\circ 30'.$

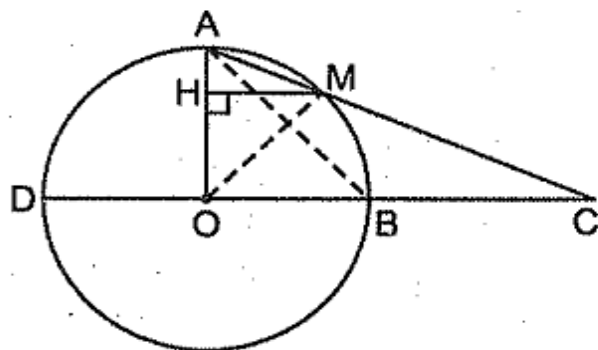
Do đó $BC = AB = OB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

Suy ra $OC = 2 + 2\sqrt{2}.$

$\triangle OHM$ vuông cân nên

$$OH = MH = \frac{OM}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Từ đó tính được $S_{OHMC} = 3 + \sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$



Hình 115

235. (h.116) Cách 1. BP cắt CM tại I. Ta có A, I, N thẳng hàng.

$\widehat{PIC} = \widehat{PCI}$ (xét cung bị chắn) nên $PI = PC.$

Tương tự $NI = NC$. Do đó PN là đường trung trực của $IC \Rightarrow IE = CE \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{I}_1$.

Ta lại có $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ nên $\widehat{I}_1 = \widehat{C}_2$, do đó $IE \parallel BC$.

Chứng minh tương tự, $ID \parallel BC$. Suy ra D, I, E thẳng hàng và $DE \parallel BC$.

Cách 2. (không dùng đến điểm I)

NE là đường phân giác của $\triangle ANC$

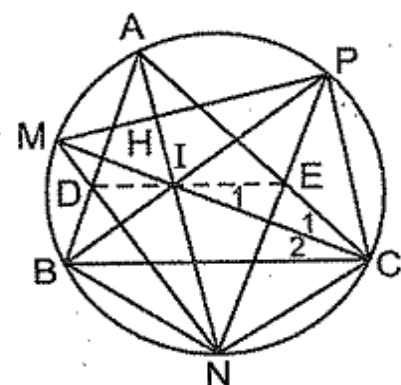
$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AN}{NC}. \quad (1)$$

ND là đường phân giác của $\triangle ANB$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AN}{NB}. \quad (2)$$

Dễ dàng chứng minh được $NB = NC$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$, do đó $DE \parallel BC$.



Hình 116

236. (h.117) Gọi D là giao điểm của AM với đường tròn (O) . Chứng minh các tam giác DBI, DBM cân suy ra

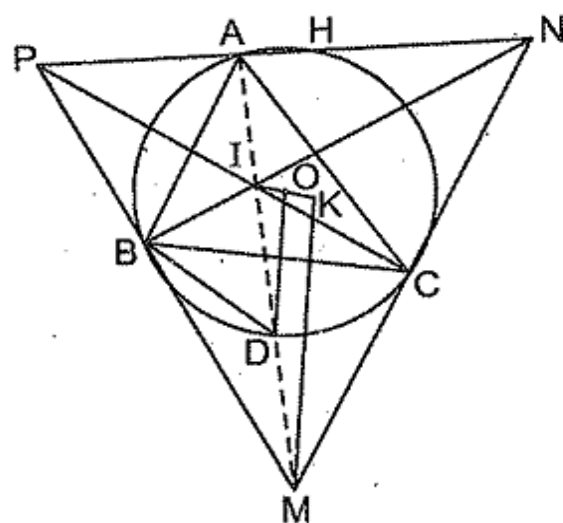
$$DI = DM.$$

Do đó OD là đường trung bình của $\triangle MIK$, suy ra

$$KM = 2OD = 2R.$$

Vậy M thuộc đường tròn $(K; 2R)$. Tương tự đối với các điểm N và P .

Chú ý : Đường tròn (O) đi qua chân ba đường cao của $\triangle MNP$ nên là đường tròn O-le của tam giác đó. Theo tính chất của đường tròn O-le, trung điểm H của NP thuộc đường tròn. Từ đó suy ra "Trung điểm của đoạn nối tâm hai đường tròn bàng tiếp tam giác nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó" (bài 262).



Hình 117

§15. Cung chứa góc

237. (h.118) a) Các tam giác cân ABE, CBK có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$. Ta lại có $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2$ nên $\widehat{DAE} = \widehat{KCD}$.

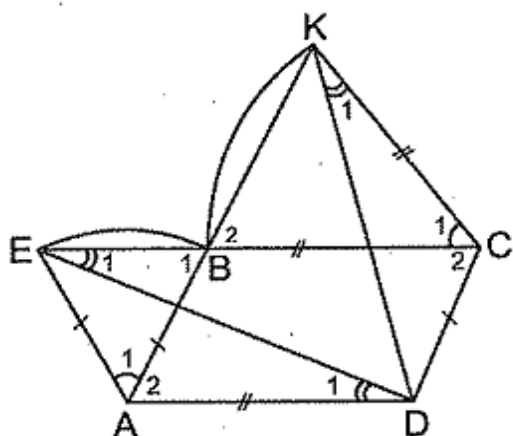
$\triangle DAE = \triangle KCD$ (c.g.c) nên $DE = DK$.

b) $\triangle DAE = \triangle KCD$ nên $\widehat{D_1} = \widehat{K_1}$, mà $\widehat{D_1} = \widehat{E_1}$ nên $\widehat{K_1} = \widehat{E_1}$. Suy ra

D, E, K, C thuộc cùng một đường tròn. (1)

Mặt khác $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ nên A, E, K, C thuộc cùng một đường tròn. (2)

Từ (1), (2) suy ra năm điểm A, E, K, C, D cùng thuộc đường tròn đi qua E, K, C.



Hình 118

238. (h.119)

a) Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$. Ta có $BD = DM = DI$ nên $I \in (D ; DB)$, do đó góc nội tiếp

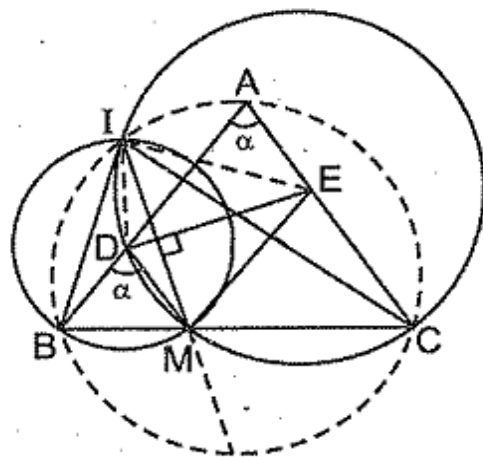
$$\widehat{BIM} = \frac{1}{2} \widehat{BDM} = \frac{\alpha}{2}.$$

Chứng minh tương tự,

$$\widehat{MIC} = \frac{1}{2} \widehat{MEC} = \frac{\alpha}{2}.$$

Do đó $\widehat{BIC} = \alpha$. Ta lại có $\widehat{BAC} = \alpha$. Suy ra I, A, B, C thuộc cùng một đường tròn.

b) $\widehat{BIM} = \widehat{MIC}$ nên IM đi qua điểm chính giữa của cung BC (không chứa A) của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.



Hình 119

239. (h.120) Ta có

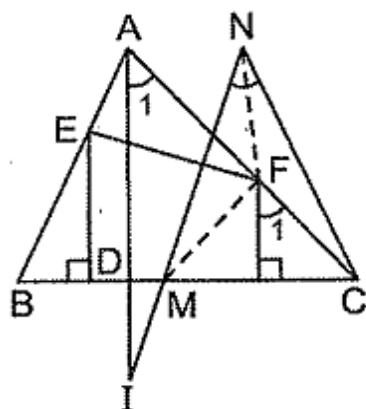
$$FC = FM = FN$$

nên đường tròn (F ; FC) đi qua C, M, N. Góc CNM là góc nội tiếp của đường tròn (F) nên

$$\widehat{CNM} = \widehat{F_1} = \widehat{A_1}.$$

Do đó A, N, C, I thuộc cùng một đường tròn.

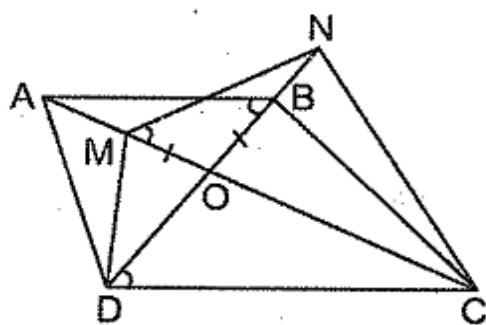
Chứng minh tương tự A, N, B, I cùng thuộc một đường tròn. Vậy năm điểm A, B, I, C, N thuộc cùng một đường tròn.



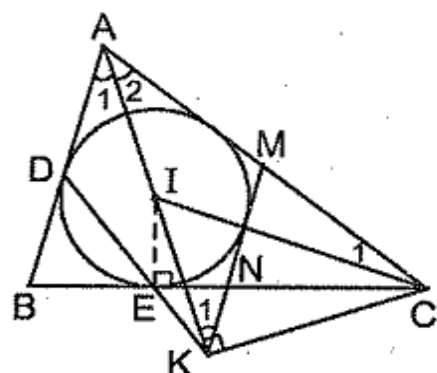
Hình 120

240. (h.121) a) $\triangle OMN = \triangle OBA$ (c.g.c) nên $\widehat{OMN} = \widehat{OBA}$. Ta lại có $\widehat{OBA} = \widehat{ODC}$ nên $\widehat{OMN} = \widehat{ODC}$. Do đó bốn điểm D, M, N, C thuộc cùng một đường tròn (dựa vào cung chứa góc).

b) Suy ra từ câu a.



Hình 121



Hình 122

241. (h.122) a) $MN \parallel AB \Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow KM = AM = MC \Rightarrow \widehat{AKC} = 90^\circ$. Ta lại có $\widehat{IEC} = 90^\circ$. Suy ra I, E, K, C thuộc đường tròn có đường kính IC.

b) Từ câu a suy ra

$$\widehat{CEK} = \widehat{CIK} = \widehat{A_2} + \widehat{C_1} = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \triangle BED \text{ cân} \Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} \Rightarrow \widehat{CED} = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}. \quad (2)$$

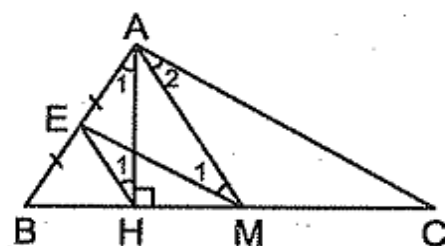
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CEK} + \widehat{CED} = 180^\circ$, do đó D, E, K thẳng hàng.

242. (h.123) Gọi E là trung điểm của AB. Ta có

$$\widehat{H_1} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{M_1}$$

nên bốn điểm A, M, H, E thuộc cùng một đường tròn.

Suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$. Do $EM \parallel AC$ nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$.



Hình 123

§16. Tứ giác nội tiếp

243. (h.124) a) ABCD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$. Theo giả thiết $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$. Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{ACB}$.

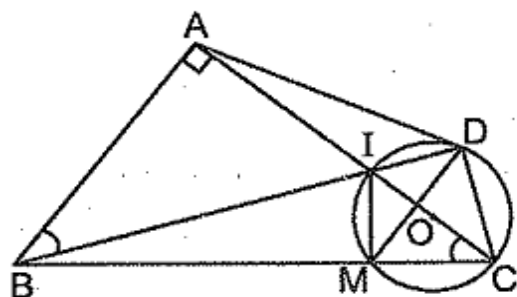
b) ABCD là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACB}.$$

Ta lại có $\widehat{ACB} = \widehat{ACD}$ (câu a)

nên $\widehat{ADB} = \widehat{ACD}$,

do đó DA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

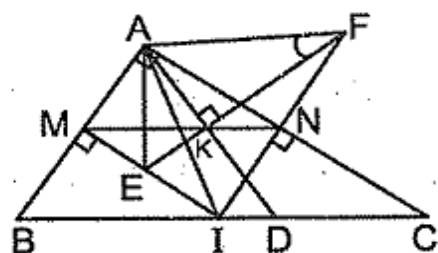


Hình 124

244. (h.125) Gọi M, K, N là trung điểm của AB, AD, AC. Các điểm E, F là giao điểm của IM, IN và đường vuông góc với AD tại K.

$\widehat{AKF} = \widehat{ANF} = 90^\circ \Rightarrow$ AKNF là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFK} = \widehat{ANK}$.

Ta lại có $\widehat{ANM} = \widehat{AIM}$ (ANIM là hình chữ nhật), tức là $\widehat{ANK} = \widehat{AIE}$. Suy ra $\widehat{AFK} = \widehat{AIE}$ tức là $\widehat{AFE} = \widehat{AIE}$. Do đó AEIF là tứ giác nội tiếp.

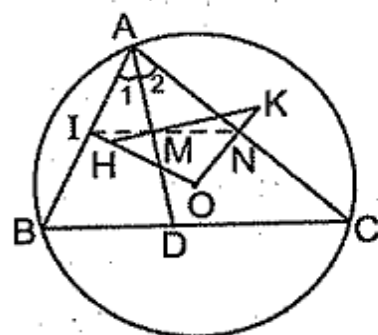


Hình 125

Do $\widehat{EIF} = 90^\circ$ nên EF là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEIF. Do D đối xứng với A qua EF nên D cũng nằm trên đường tròn đó.

245. (h.126) Theo tính chất của hai đường tròn cắt nhau : OH là đường trung trực của AB nên đi qua trung điểm I của AB, HK là đường trung trực của AD nên đi qua trung điểm M của AD, OK là đường trung trực của AC nên đi qua trung điểm N của AC.

Ta có AIHM, AMNK là các tứ giác nội tiếp và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên chứng minh được $\widehat{OHK} = \widehat{OKH}$. Do đó OH = OK.



Hình 126

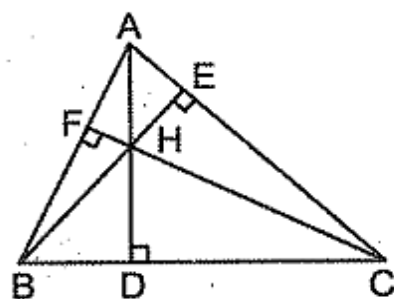
246. (h.127) a) Từ các tứ giác nội tiếp và các tam giác đồng dạng, ta có

$$\begin{aligned} BH.BE + CH.CF &= BD.BC + CD.CB \\ &= BC(BD + CD) = BC^2. \end{aligned}$$

b) Tương tự ta có

$$\begin{aligned} CH.CF + AH.AD &= AC^2, \\ AH.AD + BH.BE &= AB^2. \end{aligned}$$

Bạn đọc tự giải tiếp.



Hình 127

247. (h.128) a) A, M, D, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

b) Gọi BE là đường cao của $\triangle ABC$. Theo hệ thức lượng trong đường tròn (O) ta có

$$AN^2 = AE \cdot AC.$$

Do DHEC là tứ giác nội tiếp nên

$$AE \cdot AC = AH \cdot AD.$$

Suy ra $AN^2 = AH \cdot AD$, do đó $\frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AN}$.

Từ đó $\triangle AHN \sim \triangle AND$ (c.g.c) suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{AND}$.

Chứng minh tương tự $\widehat{AHM} = \widehat{AMD}$. Suy ra

$$\widehat{AHN} + \widehat{AHM} = \widehat{AND} + \widehat{AMD} = 180^\circ \text{ (do AMDN là tứ giác nội tiếp).}$$

Vậy M, H, N thẳng hàng.

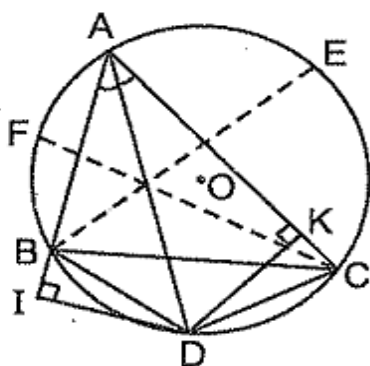
248. a) Kẻ đường kính AD. Trường hợp $\hat{B}$ và $\hat{C}$ là góc nhọn, chứng minh tương tự như ví dụ 32. Trường hợp $\hat{B}$ hoặc $\hat{C}$ là góc tù, chứng minh tương tự như ví dụ 38.

b) $S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} BC \cdot \frac{AB \cdot AC}{2R}$. Vậy $S = \frac{abc}{4R}$.

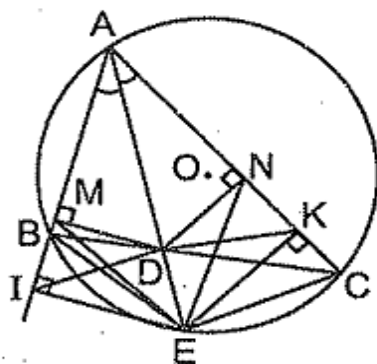
249. (h.129) a) Kẻ $DI \perp AB$, $DK \perp AC$. Hãy chứng minh $BI = CK$, từ đó $AB + AC = AI + AK < 2AD$.

b) Cộng từng vế các bất đẳng thức :

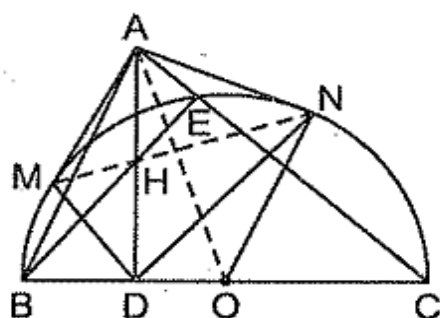
$$AD > \frac{AB + AC}{2}, BE > \frac{AB + BC}{2}, CF > \frac{AC + BC}{2}.$$



Hình 129



Hình 130



Hình 128

250. (h.130)

a) Trước hết hãy chứng minh $BI = CK$.

b) Do $DM \parallel EI$ nên $S_{AME} = S_{ADI}$.

Do $DN \parallel EK$ nên $S_{ANE} = S_{ADK}$. Suy ra

$$S_{AMEN} = S_{ADI} + S_{ADK} = \frac{1}{2}(AI + AK).DM = \frac{1}{2}(AB + AC).DM = S_{ABC}.$$

251. (h.131) Giả sử $AC \geq AB$. Ta có

$$\frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK} = \frac{AI - BI}{MI} + \frac{AK + KC}{MK} = \frac{AI}{MI} + \frac{AK}{MK} \quad (1)$$

$$(\widehat{MBI} = \widehat{MCK} \Rightarrow \cotg \widehat{MBI} = \cotg \widehat{MCK} \Rightarrow \frac{BI}{MI} = \frac{KC}{MK}).$$

Do $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ nên $\cotg \widehat{A_1} = \cotg \widehat{C_1}$, suy ra

$$\frac{AI}{MI} = \frac{CH}{MH}. \quad (2)$$

$\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$ nên $\cotg \widehat{A_2} = \cotg \widehat{B_1}$, suy ra

$$\frac{AK}{MK} = \frac{BH}{MH}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK} = \frac{CH}{MH} + \frac{BH}{MH} = \frac{BC}{MH}.$$

252. (h.132) Ta chứng minh được B, C là tâm của các đường tròn bàng tiếp của $\triangle DEF$. Theo tính chất của tiếp tuyến kẻ đến các đường tròn :

$$2EI = \text{chu vi DEF}, \quad (1)$$

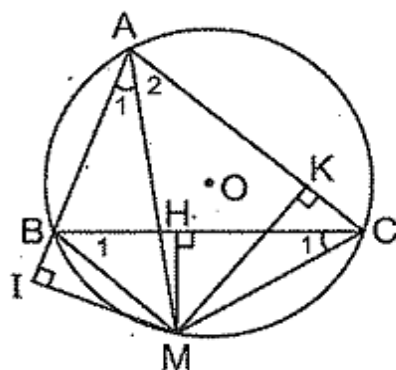
$$2FK = \text{chu vi DEF} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

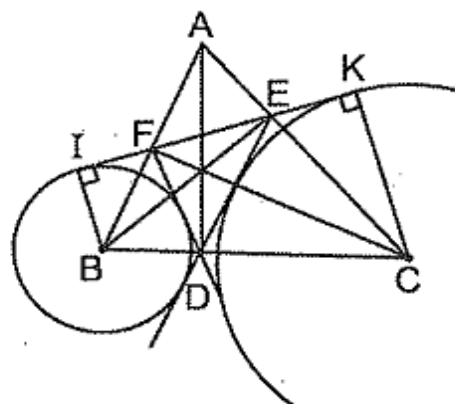
$$\text{chu vi DEF} = EI + FK$$

$$\Rightarrow DE + DF + EF = (IF + EF) + FK$$

$$\Rightarrow DE + DF = IK.$$

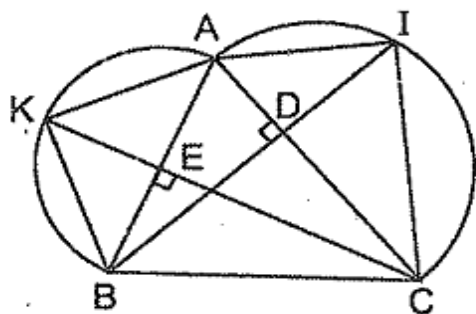


Hình 131

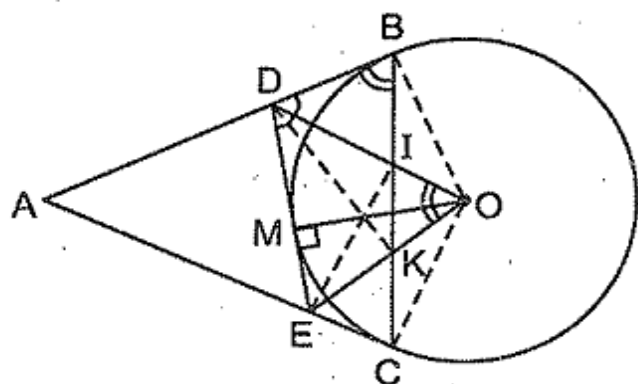


Hình 132

253. (h.133) $AI^2 = AD.AC = AE.AB = AK^2$ nên $AI = AK$.



Hình 133



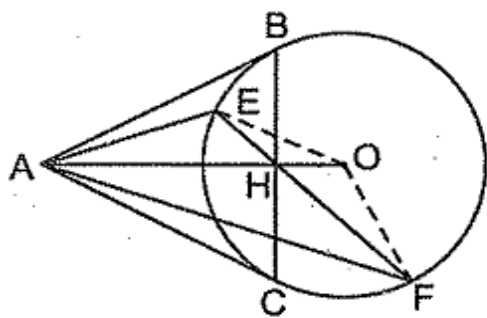
Hình 134

254. (h.134) a) $\widehat{DBK} = \widehat{DOE}$ (cùng bằng nửa số đo cung BC) nên OBDK là tứ giác nội tiếp.

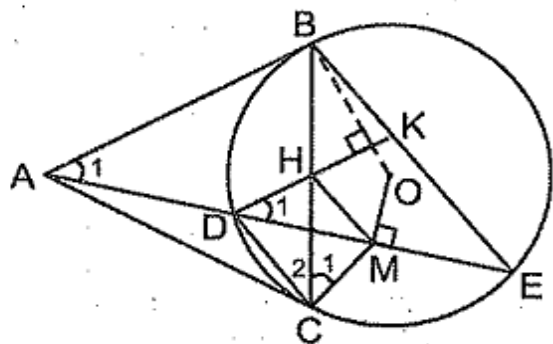
$\triangle DBI$ và $\triangle DOE$ có $\widehat{DBI} = \widehat{DOE}$, $\widehat{BDI} = \widehat{ODE}$ nên $\widehat{BID} = \widehat{OED}$ suy ra DIKE là tứ giác nội tiếp.

b) OBDK là tứ giác nội tiếp (câu a), mà $\widehat{OBD} = 90^\circ$ nên $\widehat{OKD} = 90^\circ$, do đó $DK \perp OE$. Tương tự $EI \perp OD$. Ta lại có $OM \perp DE$. Vậy OM, DK, EI đồng quy.

255. (h.135) Lần lượt chứng minh : $HO.HA = HB.HC = HE.HF$. Từ đó AEOF là tứ giác nội tiếp. Ta lại có $OE = OF$ nên AO là tia phân giác của góc EAF.



Hình 135



Hình 136

256. (h.136) Kẻ $OM \perp DE$. Các điểm B, C, M thuộc đường tròn đường kính AO nên $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$. Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$. Do đó CDHM là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{C_2} = \widehat{HMD}$. Ta lại có $\widehat{C_2} = \widehat{E}$ nên $\widehat{HMD} = \widehat{E}$, do đó $MH \parallel EB$. Dễ dàng chứng minh $DH = HK$.

257. (h.137)

$$a) \triangle KDA \sim \triangle KCD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{KA}{KD} = \frac{AD}{DC}.$$

Tương tự $\frac{KA}{KB} = \frac{AB}{BC}$. Do $KD = KB$ nên

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}, \text{ do đó}$$

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC.$$

$$b) \Delta AIB \sim \Delta ADC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AI}{IB} = \frac{AD}{DC}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BC}.$$

$$\text{Do } \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \text{ (câu a) nên } \frac{AI}{IB} = \frac{AI}{ID}, \text{ suy ra } IB = ID.$$

Chú ý : Từ câu a của bài toán trên, ta suy ra : Nếu một tứ giác nội tiếp có các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tại hai đỉnh đối diện đồng quy với đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại thì tích các cặp cạnh đối của tứ giác đó bằng nhau.

Bằng phản chứng, ta cũng chứng minh được bài toán đảo : Nếu một tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau thì các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tại hai đỉnh đối diện đồng quy với đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại.

258. (h.138) Gọi K là giao điểm thứ hai của BA với đường tròn (O). Theo câu a của bài 257, ta có

$$AD \cdot KC = AC \cdot KD \quad (1)$$

Đặt $\frac{AO'}{AO} = k$, ta dễ dàng chứng minh được $AF = kAD$, $BE = kKC$, $AE = kAC$, $BF = kKD$ nên từ (1) suy ra

$$kAD \cdot kKC = kAC \cdot kKD;$$

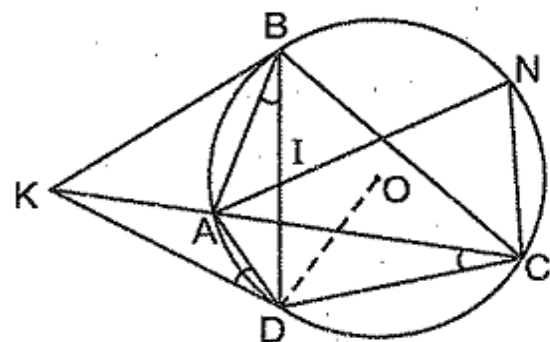
$$\text{tức là } AF \cdot BE = AE \cdot BF.$$

259. (h.139) AHEB là tứ giác nội tiếp

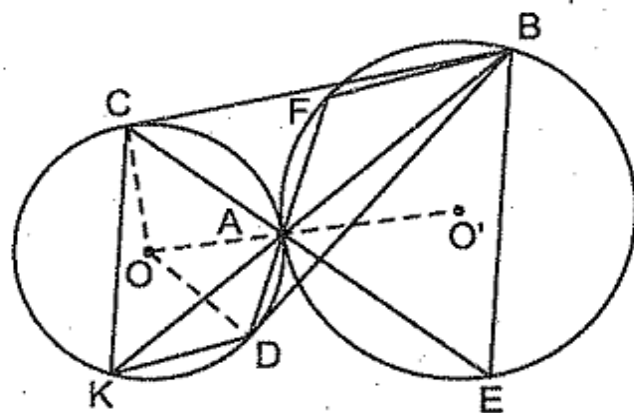
$$\Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BAE}. \quad (1)$$

OMEB là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{BOE} \Rightarrow \widehat{HME} = \widehat{AOB}. \quad (2)$$



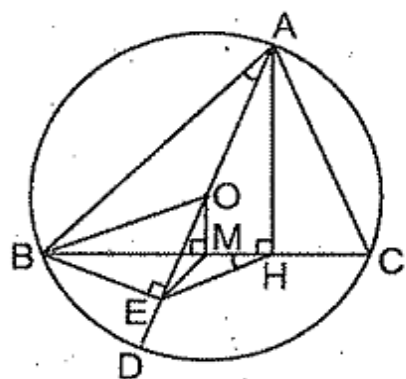
Hình 137



Hình 138

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle HME \sim \triangle AOB$ (g.g). Do $\triangle AOB$ cân nên $\triangle HME$ cân.

Chú ý : Bỏ điều kiện "các góc nhọn, $AB > AC$ ", bài toán vẫn đúng.

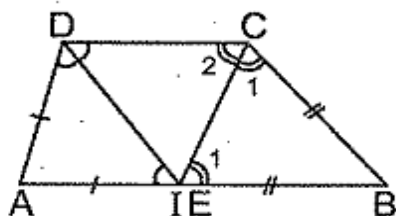


Hình 139

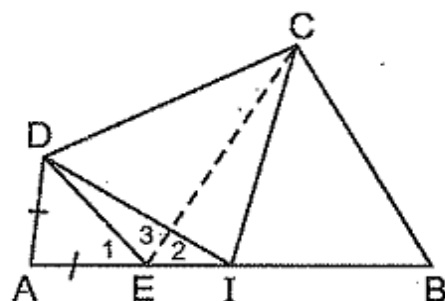
260. Gọi I là điểm đồng quy của các tia phân giác các góc C, D và cạnh AB. Lấy điểm E trên AB sao cho $AE = AD$. Thế thì $EB = BC$. Xét hai trường hợp :

a) E trùng I (h.140). Ta có $\widehat{I}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ nên $CD \parallel AB$.

ABCD là hình thang có đáy AB.



Hình 140



Hình 141

b) E không trùng I, chẳng hạn E nằm giữa A và I (h.141), $\triangle DIC$ có

$$\widehat{DIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}. \quad (1)$$

$\triangle ADE$ và $\triangle BCE$ cân nên

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$$

$$\text{Suy ra} \quad \widehat{E}_3 = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có DEIC là tứ giác nội tiếp.

Do đó $\widehat{CDI} = \widehat{E}_2$.

$$\text{Suy ra} \quad \frac{\widehat{D}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2}. \text{ Do đó } \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ.$$

Vậy ABCD là tứ giác nội tiếp.

Kết luận : ABCD là hình thang hoặc tứ giác nội tiếp.

261. (h.142) BICK là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) đường kính IK. Trên tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Ta có $\triangle OAB = \triangle OAD$ (c.g.c) nên $OB = OD$. Do đó D thuộc đường tròn (O). Dễ dàng chứng minh

$$AI \cdot AK = AD \cdot AC = AB \cdot AC.$$

262. (h.143). *Cách 1.* Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Ta có B, I, B' thẳng hàng. Gọi E là giao điểm của BB' và (O).

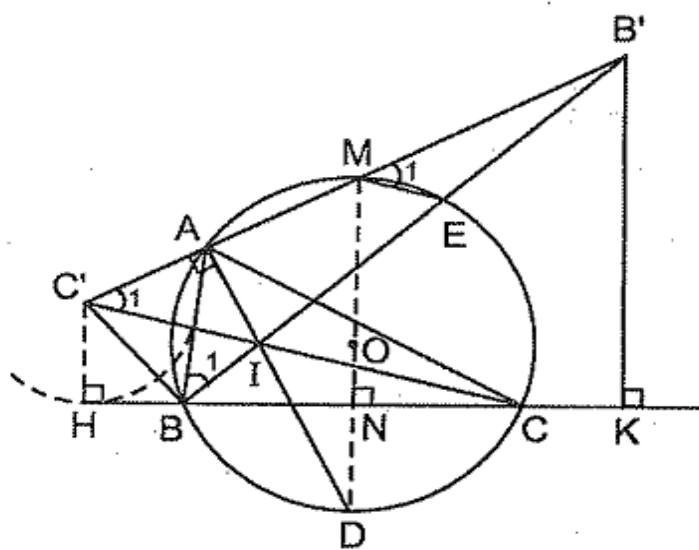
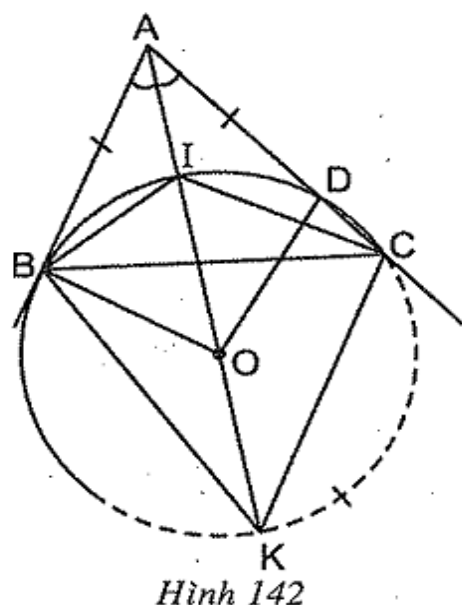
Dễ chứng minh E là trung điểm của IB'. (1)

Ta có $\widehat{M}_1 = \widehat{B}_1$ (ABEM là tứ giác nội tiếp),

$$\widehat{B}_1 = \widehat{C}'_1 \text{ (AIBC' là tứ giác nội tiếp).}$$

suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{C}'_1$ do đó $ME \parallel C'I$. (2)

Từ (1), (2) suy ra M là trung điểm của B'C'.



Hình 143

Cách 2. (không sử dụng tứ giác nội tiếp)

Gọi D là giao điểm của tia phân giác góc A với (O) thì M, O, D thẳng hàng và MD vuông góc với BC tại trung điểm N của BC.

Kẻ C'H, B'K vuông góc với BC. Ta có $CH = BK$ (cùng bằng nửa chu vi $\triangle ABC$) nên $CK = BH$. Do đó N là trung điểm của HK.

Hình thang B'C'HK có $HN = NK$, $NM \parallel B'K$ nên M là trung điểm của B'C'.

Chú ý : Từ bài toán này suy ra mệnh đề :
Trung điểm của đoạn nối tâm của hai đường tròn bàng tiếp tam giác nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Một cách khác chứng minh mệnh đề đó :
xem bài 236. Một cách khác nữa (h.144) :

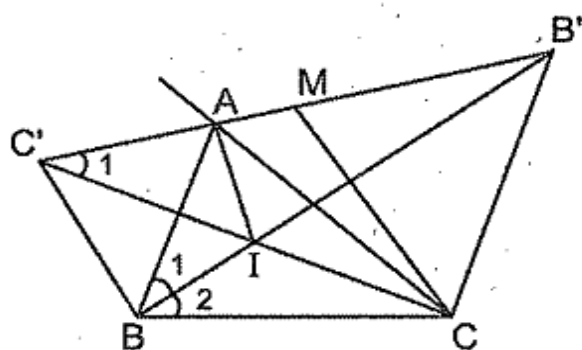
Gọi M là trung điểm của $B'C'$. $\triangle C'CB$ có CM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên

$$\widehat{C_1}' = \frac{1}{2} \widehat{CMB}' \quad (1)$$

$AIBC'$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{C_1}' = \widehat{B_1} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{CMB}' = \widehat{ABC} \Rightarrow ABCM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow M$ thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.



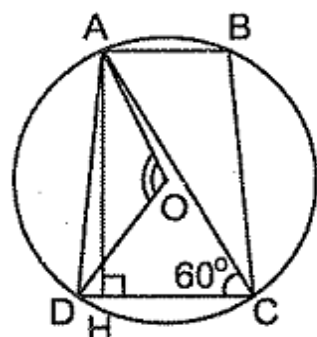
Hình 144

263. (h.145)

$$\widehat{AOD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 60^\circ.$$

$$\triangle AHC \text{ có } HC = h \cotg 60^\circ = \frac{h\sqrt{3}}{3}.$$

Do HC bằng đường trung bình của hình thang nên diện tích hình thang bằng $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$.



Hình 145

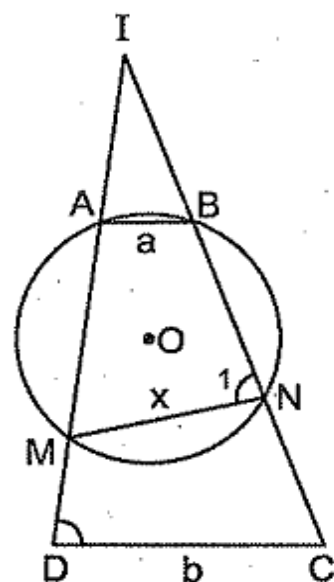
264. (h.146)

Gọi I là giao điểm của AD và BC.

Đặt $MN = x > 0$. Ta có $\widehat{N_1} = \widehat{D}$ (cùng bằng $\widehat{IAB}$).

$$\triangle IAB \sim \triangle INM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{S_{IAB}}{S_{INM}} = \left(\frac{a}{x}\right)^2.$$

$$\triangle IDC \sim \triangle INM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{S_{IDC}}{S_{INM}} = \left(\frac{b}{x}\right)^2.$$



Hình 146

Đặt S là diện tích mỗi tứ giác $ABNM$, $CDMN$. Ta có

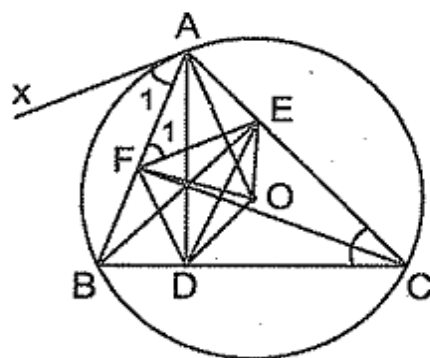
$$\begin{aligned}\frac{a^2 + b^2}{x^2} &= \frac{S_{IAB} + S_{ICD}}{S_{INM}} \\ &= \frac{(S_{INM} - S) + (S_{INM} + S)}{S_{INM}} = 2.\end{aligned}$$

Suy ra
$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

265. (h.147) a) Kẻ tiếp tuyến Ax . Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{F_1}$ (cùng bằng $\widehat{ACB}$) nên $Ax \parallel EF$. Ta lại có $Ax \perp OA$ nên $OA \perp EF$.

b) Tương tự câu a, ta có $OB \perp DF$, $OC \perp DE$.

$$\begin{aligned}S_{ABC} &= S_{AEOF} + S_{BDOF} + S_{CDOE} \\ &= \frac{OA}{2} \cdot EF + \frac{OB}{2} \cdot DF + \frac{OC}{2} \cdot DE \\ &= \frac{R}{2} (EF + DF + DE).\end{aligned}\quad (1)$$



Hình 147

Để chứng minh
$$S_{DEF} = \frac{r}{2} (EF + DF + DE). \quad (2)$$

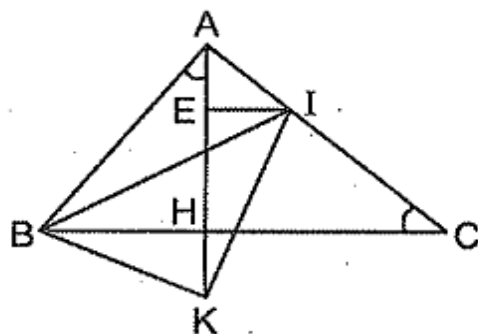
Từ (1) và (2) suy ra
$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{R}.$$

266. (h.148) Kẻ $IE \perp AH$. Ta có

$$AE = \frac{1}{3} AH = HK$$

nên $AH = EK$. Ta có

$$\begin{aligned}BI^2 &= BA^2 + AI^2 = (AH^2 + BH^2) + (AE^2 + EI^2) \\ &= (AH^2 + EI^2) + (BH^2 + AE^2) \\ &= (EK^2 + EI^2) + (BH^2 + HK^2) = IK^2 + BK^2.\end{aligned}$$

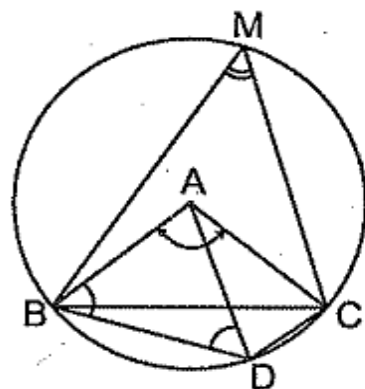


Hình 148

Suy ra $\widehat{BKI} = 90^\circ$. Tứ giác $ABKI$ là tứ giác nội tiếp nên

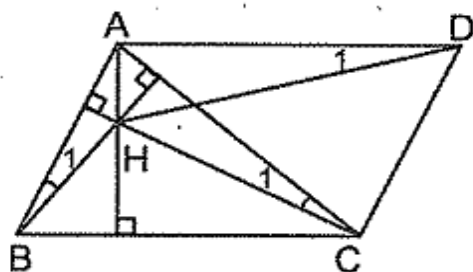
$$\widehat{BIK} = \widehat{BAH} = \widehat{C} = 40^\circ.$$

267. (h.149) Xét $\triangle ABC$ ta tính được $\widehat{D} = 130^\circ$. Vẽ đường tròn (A; AB), lấy M bất kì thuộc đường tròn đó (M và A cùng phía đối với BC). Do $\widehat{BAC} = 100^\circ$ nên $\widehat{BMC} = 50^\circ$. Do đó MBDC là tứ giác nội tiếp, tức là D thuộc đường tròn (A).

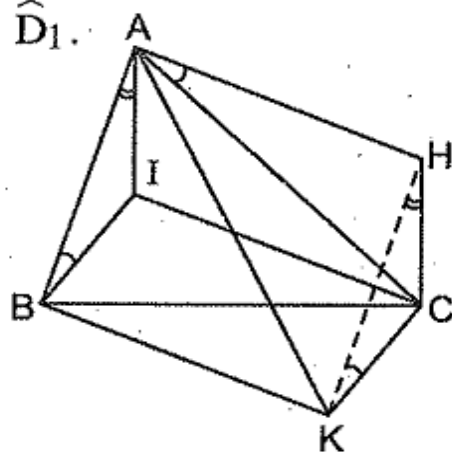


Hình 149

268. (h.150) Để thấy $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$. Hãy chứng minh AHCD là tứ giác nội tiếp để suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$.

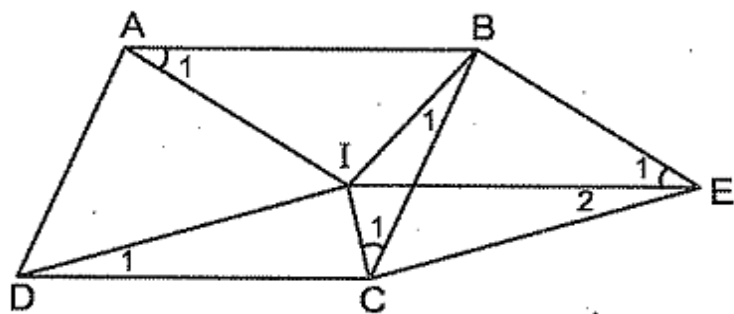


Hình 150

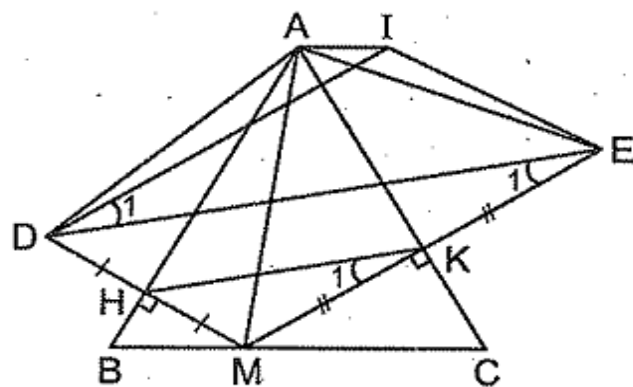


Hình 151

269. (h.151) Vẽ hình bình hành AICH. Chứng minh rằng AKCH là tứ giác nội tiếp.
270. (h.152) Vẽ hình bình hành IABE. Ta có $\widehat{C}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$ nên BICE là tứ giác nội tiếp. Bạn đọc tự giải tiếp.



Hình 152



Hình 153

271. (h.153)

a) $\widehat{DAE}$ và $\widehat{DIE}$ cùng bằng 120° .

b) Từ câu a suy ra $\widehat{IAE} = \widehat{D}_1$. Gọi K là giao điểm của ME và AC. Ta có

$$\widehat{D_1} = \widehat{E_1} = \widehat{K_1} = \widehat{MAB}$$

nên

$$\widehat{IAE} = \widehat{MAB}. \quad (1)$$

Ta lại có

$$\widehat{KAE} = \widehat{KAM}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CAI} = \widehat{CAB} = 60^\circ$. Từ đó $AI \parallel BC$.

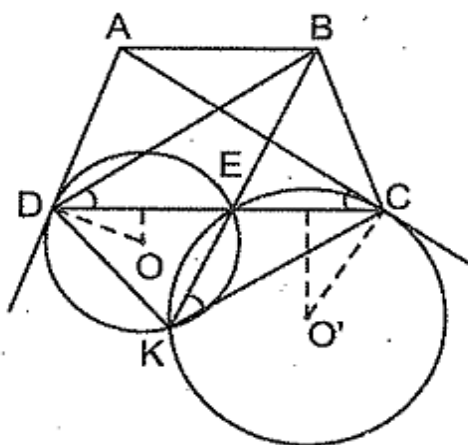
272. (h.154)

a) Chứng minh ABCD và ADKC là các tứ giác nội tiếp.

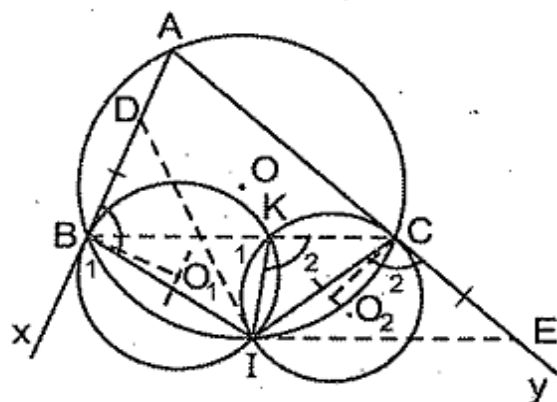
b) Từ câu a suy ra $\widehat{CKB} = \widehat{CDB}$. Ta lại có

$$\widehat{CKE} = \widehat{ECA} = \widehat{CDB}.$$

Suy ra $\widehat{CKB} = \widehat{CKE}$, do đó K, E, B thẳng hàng.



Hình 154



Hình 155

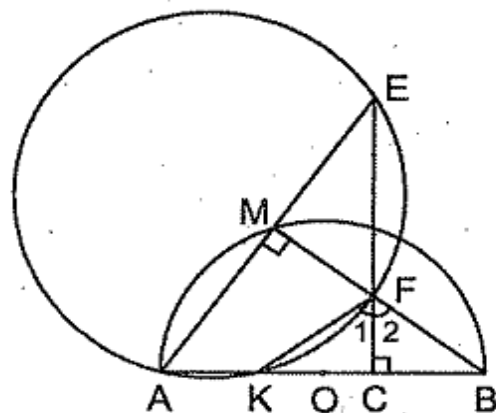
273. (h.155)

$$\begin{aligned} \text{a) } \widehat{ABI} + \widehat{ACI} &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{C_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{K_1} + \widehat{K_2} = 180^\circ \\ &\Rightarrow B, K, C \text{ thẳng hàng.} \end{aligned}$$

b) $\triangle IBD = \triangle ICE$ (c.g.c) nên $\widehat{IDB} = \widehat{IEC}$.
Tứ giác ADIE là tứ giác nội tiếp. Điểm cố định là I.

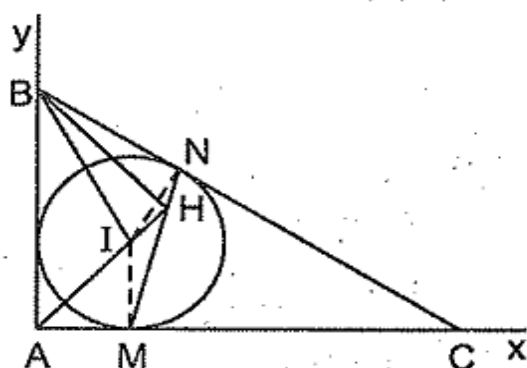
274. (h.156)

Gọi K là giao điểm của đường tròn đi qua A, E, F với AB. Ta sẽ chứng minh K là điểm cố định: Ta có $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$ (cùng bằng $\widehat{A}$), do đó K đối xứng với B qua C.



Hình 156

275. (h.157) Lấy giao điểm của MN với tia AI cố định, ta được điểm H. Ta có $\widehat{BNH} = \widehat{BIA}$ (cùng bằng $90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2}$). Suy ra BIHN là tứ giác nội tiếp. Chứng minh tiếp $BH \perp AI$ để suy ra H là điểm cố định.



Hình 157

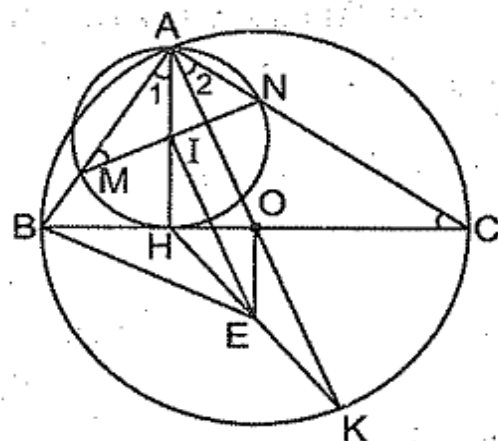
276. (h.158) a) $\widehat{AMN} = \widehat{A_1} = \widehat{C} = \widehat{A_2}$.

Ta lại có $\widehat{AMN} + \widehat{ANM} = 90^\circ$

nên $\widehat{A_2} + \widehat{ANM} = 90^\circ$.

Vậy $OA \perp MN$.

b) Dễ thấy BMNC là tứ giác nội tiếp. EI là đường trung bình của ΔKHA nên $EI \parallel KA$. Ta lại có $OA \perp MN$ (câu a) nên $EI \perp MN$. Ta có EI là đường trung trực của MN, EO là đường trung trực của BC nên E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC.



Hình 158

c) Lần lượt chứng minh : EB lớn nhất $\Leftrightarrow EO$ lớn nhất $\Leftrightarrow AH$ lớn nhất $\Leftrightarrow H$ trùng O. Khi đó $OA \perp BC$.

277. (h.159) a) P và Q là tâm của đường tròn nội tiếp các tam giác đồng dạng AHB và CHA nên $\frac{HP}{HQ} = \frac{AB}{AC}$. Do đó $\Delta HPQ \sim \Delta ABC$ (c.g.c).

b) Từ câu a suy ra $\widehat{HQP} = \widehat{C}$, mà $\widehat{C} = \widehat{A_1}$ nên

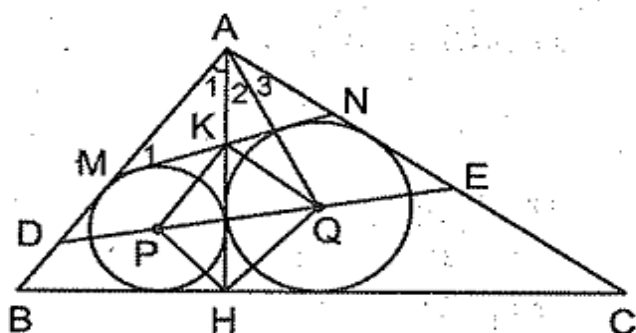
$$\widehat{HQP} = \widehat{A_1}. \quad (1)$$

Tứ giác HPKQ có $\widehat{PHQ} = \widehat{PKQ} = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra

$$\widehat{HQP} = \widehat{HKP}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{HKP}$, do đó $KP \parallel AB$. Chứng minh tương tự, $KQ \parallel AC$.

c) Ta đã có $\widehat{C} = \widehat{HKP} = \widehat{MKP}$. Hãy chứng minh $\widehat{MKP} = \widehat{M_1}$ (sử dụng kết quả ở câu b).



Hình 159

d) Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (cùng bằng $\widehat{C}$) nên $KM = KA$. Tương tự $KN = KA$. Ta có $\widehat{A_2} = \widehat{A_3}$ (cùng bằng $\widehat{A_3}$) nên $KQ = KA$. Tương tự $KP = KA$. Do đó năm điểm A, M, P, Q, N thuộc đường tròn (K ; KA).

e) *Cách 1.* Từ câu a suy ra $\widehat{HQP} = \widehat{C}$ nên HQEC là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{QEA} = \widehat{QHC} = 45^\circ$. Tam giác vuông ADE có $\widehat{E} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân.

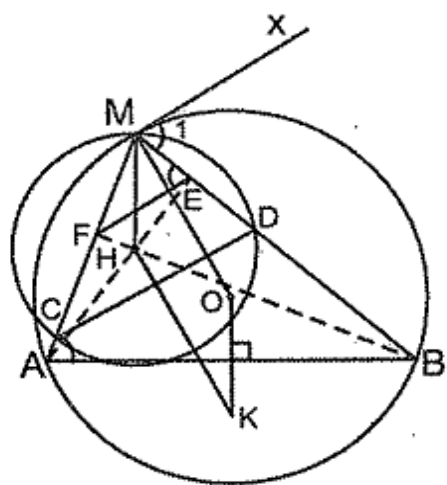
Cách 2 (không dựa vào câu a). Chứng minh $BP \perp AQ$, tương tự $CQ \perp AP$, suy ra $AO \perp PQ$ (O là giao điểm của BP và CQ). Tam giác ADE có AO là tia phân giác của góc A và $AO \perp DE$ nên là tam giác cân, do đó là tam giác vuông cân.

278. (h.160)

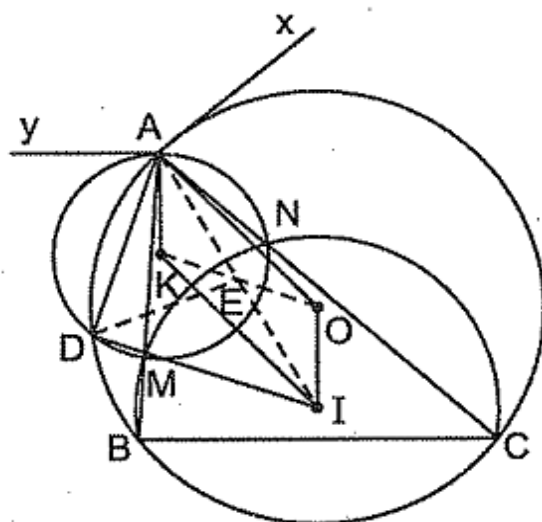
a) Kẻ tiếp tuyến Mx với (O). Ta có $\widehat{M_1} = \widehat{A} = \widehat{MEF}$ nên $Mx \parallel EF$. Do đó $OM \perp EF$.

b) FE là đường trung bình của $\triangle MCD$ nên $FE \parallel CD$. Suy ra $MO \perp CD$. Điểm cố định là điểm O.

c) Lấy K đối xứng với O qua AB. Chứng minh MHKO là hình bình hành. Điểm cố định là điểm K.



Hình 160



Hình 161

279. (h.161 ứng với các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC; các trường hợp khác chứng minh tương tự).

a) Để chứng minh $OA \perp MN$ (tương tự câu a bài 278), $IK \perp MN$ (đường nối tâm vuông góc với dây chung). Suy ra $OA \parallel IK$.

Chứng minh tương tự $KA \parallel IO$. Vậy AKIO là hình bình hành.

b) Gọi E là giao điểm các đường chéo của hình bình hành AKIO, ta có

$$EA = EI. \quad (1)$$

Ta lại có đường nối tâm OK là đường trung trực của AD nên

$$EA = ED. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADI} = 90^\circ$.

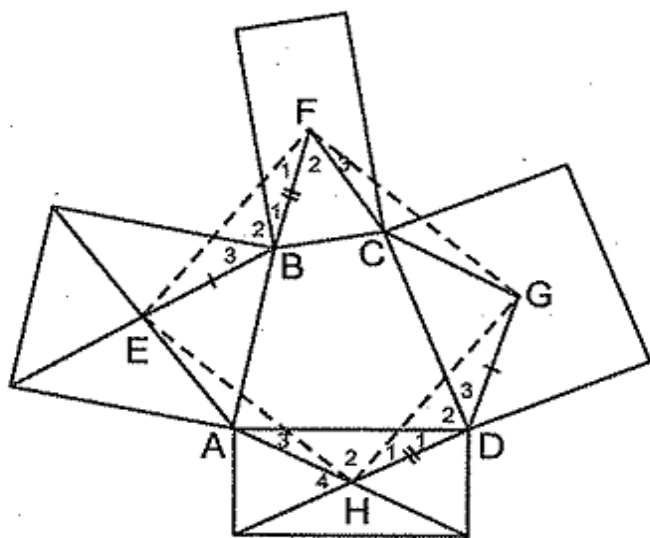
280. (h.162) Trước hết chứng minh EFGH là hình bình hành.

$\triangle EBF = \triangle GDH$ (c.g.c) suy ra $EF = GH$.

Tương tự $FG = EH$. Vậy EFGH là hình bình hành.

Bây giờ ta xét tổng hai góc đối của hình bình hành đó.

$$\begin{aligned} \widehat{EFG} + \widehat{EHG} &= \widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 + \widehat{F}_3 + \widehat{H}_2 \\ &= \widehat{H}_1 + \widehat{H}_4 + \widehat{H}_3 + \widehat{H}_2 \\ &= 180^\circ. \end{aligned}$$



Hình 162

Suy ra $\widehat{EFG} = \widehat{EHG} = 90^\circ$. Hình bình hành EFGH là hình chữ nhật.

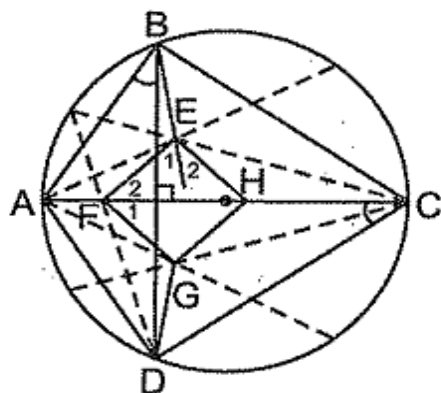
281. (h.163) Theo tính chất của tâm đường tròn nội tiếp:

$$\widehat{AFD} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{ABD},$$

$$\widehat{AGD} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{ACD},$$

mà $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ nên $\widehat{AFD} = \widehat{AGD}$. Suy ra AFGD là tứ giác nội tiếp.

Tương tự các tứ giác ABEF, BCHE, DCHG cũng nội tiếp.



Hình 163

Ta có $\widehat{FEH} = \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{BAF} + \widehat{BCH} = 90^\circ$, $\widehat{F}_1 = \widehat{ADG} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$, tương tự $\widehat{F}_2 = 45^\circ$ nên $\widehat{EFG} = 90^\circ$.

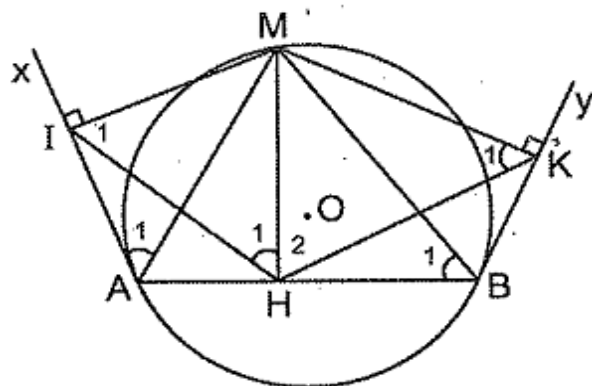
Chứng minh tương tự, $\widehat{EHG} = 90^\circ$. Tứ giác EFGH có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, lại có $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ nên là hình vuông.

282. (h.164)

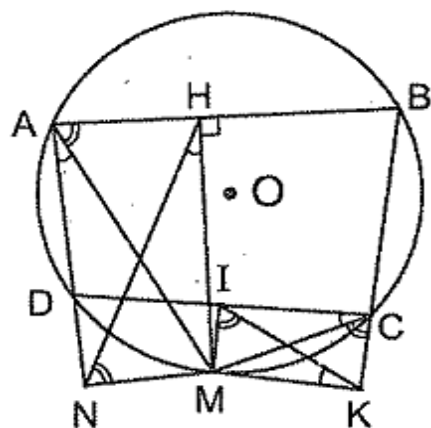
a) Từ các tứ giác nội tiếp, ta có $\widehat{H_1} = \widehat{A_1}$, $\widehat{K_1} = \widehat{B_1}$ mà $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ nên $\widehat{H_1} = \widehat{K_1}$. Tương tự $\widehat{H_2} = \widehat{I_1}$.

$$\Delta MHI \sim \Delta MKH \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MH}{MK} = \frac{MI}{MH} \Rightarrow MH^2 = MI.MK.$$

b) $MI + MK \geq 2\sqrt{MI.MK} = 2MH.$



Hình 164



Hình 165

283. (h.165) Từ các tứ giác nội tiếp, ta có

$$\widehat{MHN} = \widehat{MAN} = \widehat{MCD} = \widehat{MKI},$$

$$\widehat{MNH} = \widehat{MAH} = \widehat{MCK} = \widehat{MIK}.$$

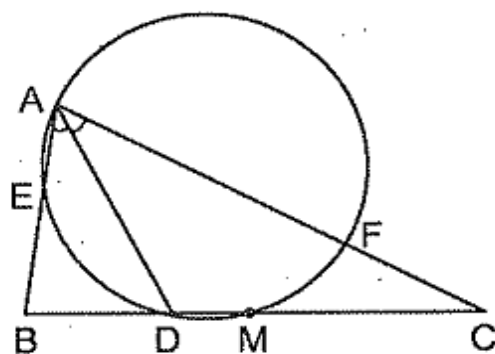
Do đó $\Delta MHN \sim \Delta MKI$ (g.g), suy ra $\frac{MH}{MK} = \frac{MN}{MI}.$

Vậy $MH.MI = MK.MN.$

284. (h.166) $BE.BA = BD.BM$ nên $BE = \frac{BD}{BA}.BM$

$CF.CA = CM.CD$ nên $CF = \frac{CD}{CA}.CM$

Do $BM = CM$, $\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$ (tính chất đường phân giác) nên $BE = CF.$



Hình 166

285. (h.167)

a) ΔABD vuông nên

$$BD^2 = BC.BA.$$

(1)

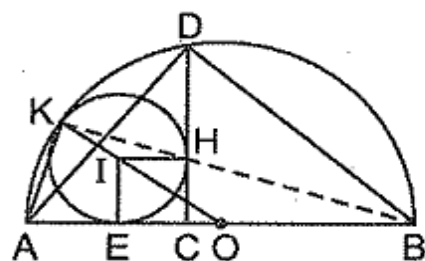
Gọi K là tiếp điểm của (I) và (O). Kẻ $IH \perp CD$. Các tam giác cân IKH và OKB có góc ở đỉnh bằng nhau nên $\widehat{IKH} = \widehat{OKB}$ do đó K, H, B thẳng hàng.

BE là tiếp tuyến, BHK là cát tuyến của đường tròn (I) nên $BE^2 = BH.BK$. Nhưng $BH.BK = BC.BA$ (do AKHC là tứ giác nội tiếp) nên

$$BE^2 = BC.BA. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BD = BE$.

b) Suy ra từ câu a.



Hình 167

286. (h.168)

a) Ta có

$$BE = EC = 12,$$

$$AB = AC = 16,$$

$$CF = CE = 12,$$

do đó $AF = AC - CF = 16 - 12 = 4$.

Để thấy OECF là tứ giác nội tiếp. Để chứng tỏ BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó, ta sẽ chứng minh

$$BF^2 = BE.BC.$$

Ta có

$$BE.BC = 12.24 = 288. \quad (1)$$

Để tính BF^2 , ta kẻ $FH \perp BC$ nhằm tạo ra tam giác vuông BFH.

$$\text{Ta có } FH \parallel AE \Rightarrow \frac{CH}{CE} = \frac{CF}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow CH = \frac{3}{4}CE = 9.$$

Suy ra

$$BH = BC - HC = 24 - 9 = 15.$$

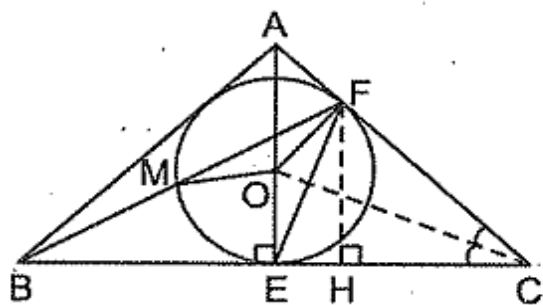
Ta có

$$BF^2 - BH^2 = FH^2 = CF^2 - CH^2$$

$$\Rightarrow BF^2 - 15^2 = 12^2 - 9^2 \Rightarrow BF^2 = 288. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BF^2 = BE.BC$. Từ đó chứng minh được BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF, tức là đường tròn ngoại tiếp tứ giác OECF.

b) Từ câu a suy ra $\widehat{OFM} = \widehat{OCF} = \widehat{OCB}$, mà $\widehat{OFM} = \widehat{OMF}$ nên $\widehat{OCB} = \widehat{OMF}$. Suy ra BMOC là tứ giác nội tiếp.



Hình 168

287. (h.169)

a) Gọi N là giao điểm của AF với đường tròn (O). Ta có $\widehat{O'FA} = \widehat{N}$ nên $O'F \parallel ON$. Bạn đọc tự giải tiếp.

b) Đặt $\widehat{B} = \alpha$. Ta có

$$\widehat{CAD} = 180^\circ - \alpha,$$

$$\widehat{IAD} = \widehat{IAC} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

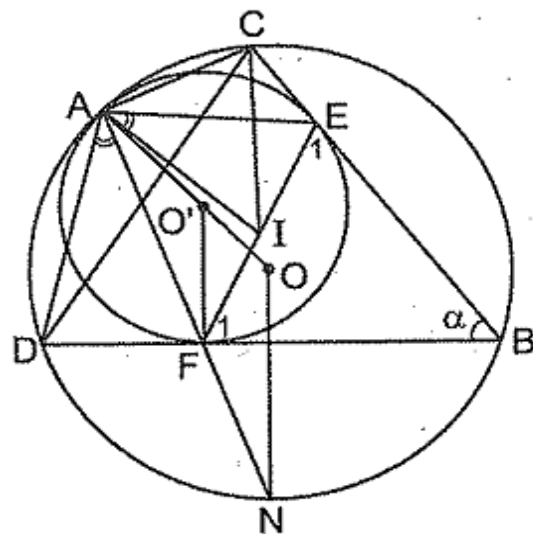
Tam giác BEF cân nên

$$\widehat{E}_1 = \widehat{F}_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Do đó $\widehat{IAD} = \widehat{IAC} = \widehat{E}_1 = \widehat{F}_1$.

Ta lại có $\widehat{EAF} = \widehat{F}_1$ (cùng có số đo bằng nửa số đo cung EF) nên $\widehat{IAD} = \widehat{EAF}$. Cùng trừ đi $\widehat{IAF}$ được $\widehat{DAF} = \widehat{IAE}$.

c) Do $\widehat{IAC} = \widehat{E}_1$ nên IACE là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{IAE} = \widehat{ICE}$. Kết hợp với kết quả của câu a và câu b suy ra $\widehat{ICE} = \frac{1}{2}\widehat{DCB}$, do đó CI là tia phân giác của góc DCB. Tương tự DI là tia phân giác của góc CDB. Vậy I là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle BCD$.



Hình 169

288. (h.170)

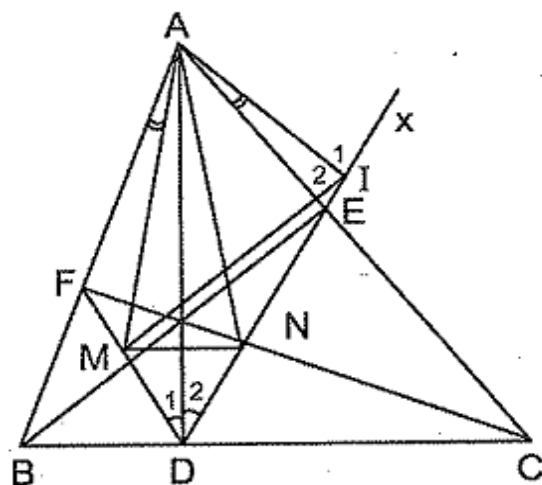
a) Để chứng minh $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ và $DA \perp MN$ nên $\triangle AMN$ cân tại A.

b) Ta có $\widehat{INM} = \widehat{IDB}$ (do $MN \parallel BC$), $\widehat{IDB}$ bù $\widehat{BAE}$ (do ABDE là tứ giác nội tiếp), $\widehat{BAE} = \widehat{MAI}$ nên $\widehat{INM}$ bù $\widehat{MAI}$. Vậy AMNI là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi Ix là tia đối của tia ID. Do AMNI là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{I}_1 = \widehat{AMN}$. Do AMNI là tứ giác nội tiếp và $\triangle AMN$ cân nên

$$\widehat{I}_2 = \widehat{ANM} = \widehat{AMN}.$$

Suy ra $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$.

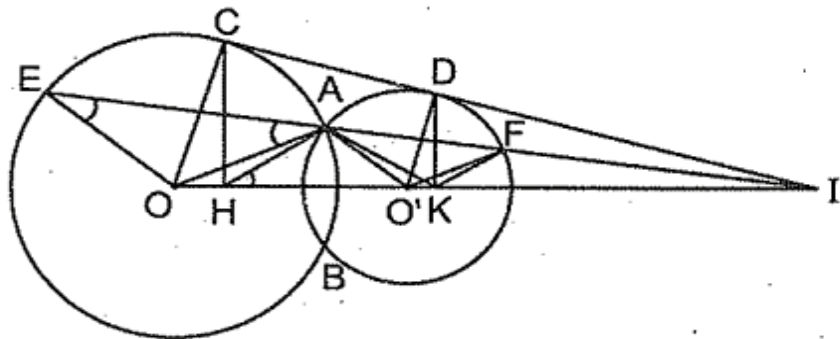


Hình 170

ΔDMI có DA là đường phân giác trong, IA là đường phân giác ngoài nên MA là đường phân giác ngoài, tức là MA là tia phân giác của góc FMI .

289. Trường hợp $CD \parallel OO'$, dễ chứng minh.

Giả sử CD cắt OO' tại I (h.171). Gọi E, F là giao điểm của IA với $(O), (O')$. Ta có



Hình 171

$$IA.IE = IC^2 = IO.IH.$$

Ta chứng minh được $AEOH$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{AHK} = \widehat{E} = \widehat{OAE}. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự $AFKO'$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{AKH} = \widehat{AFO'} = \widehat{O'AF}. \quad (2)$$

Ta lại có

$$\widehat{OAO'} = 180^\circ - \widehat{OAE} - \widehat{O'AF}, \quad (3)$$

$$\widehat{HAK} = 180^\circ - \widehat{AHK} - \widehat{AKH}. \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\widehat{OAO'} = \widehat{HAK}$.

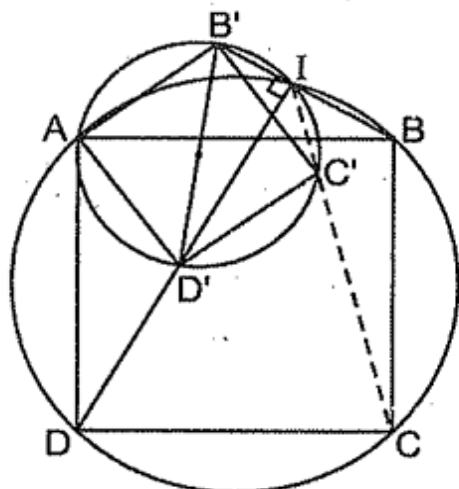
290. (h.172)

a) $\Delta ADD' = \Delta ABB'$ (c.g.c) nên chứng minh được $DD' \perp BB'$.

$\widehat{BID} = 90^\circ$ nên I thuộc đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

$\widehat{B'ID'} = 90^\circ$ nên I thuộc đường tròn ngoại tiếp hình vuông $AB'C'D'$.

b) Suy ra từ câu a).



Hình 172

291. (h.173) Ta có $\widehat{EAF} = \widehat{ECF}$ (cùng bù với $\widehat{BAD}$). Các đỉnh A và C lại ở hai phía của EF . Để "lật phía" nhằm sử dụng điều kiện hai góc bằng nhau, ta vẽ K đối xứng với A qua EF . Ta có $\widehat{EKF} = \widehat{EAF}$ (đối xứng) suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{ECF} \Rightarrow ECKF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{E_1}$. Ta lại có $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ (đối xứng),

$\widehat{E_2} = \widehat{DAK}$ (cùng phụ với $\widehat{EAK}$). Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{DAK} \Rightarrow ADKC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow K \in (O)$.

Vậy EF là đường trung trực của dây AK , suy ra E, O, F thẳng hàng.

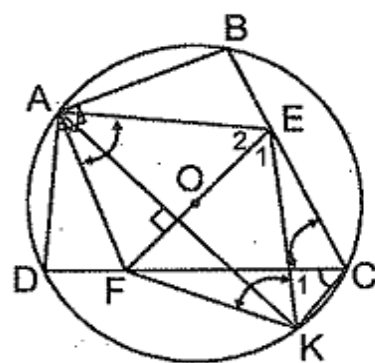
292. (h.174) Giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$. Kẻ $FH \perp BC$. Gọi K là điểm đối xứng với B qua H thì

$$BH < HD \text{ và } \widehat{FKB} = \widehat{B}.$$

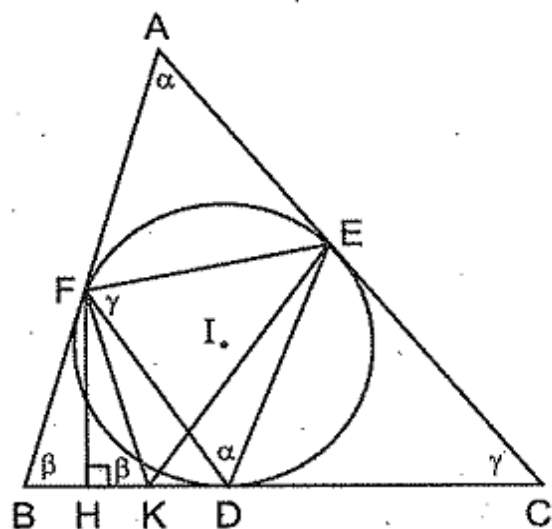
Tứ giác $DEFK$ có $\widehat{FKB} = \widehat{DEF}$ (bằng β) nên là tứ giác nội tiếp. Như vậy đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ có hai điểm chung phân biệt K, D với BC , vô lí.

Vậy không thể $\widehat{B} > \widehat{C}$, tương tự không thể $\widehat{C} > \widehat{B}$, do đó $\widehat{B} = \widehat{C}$.

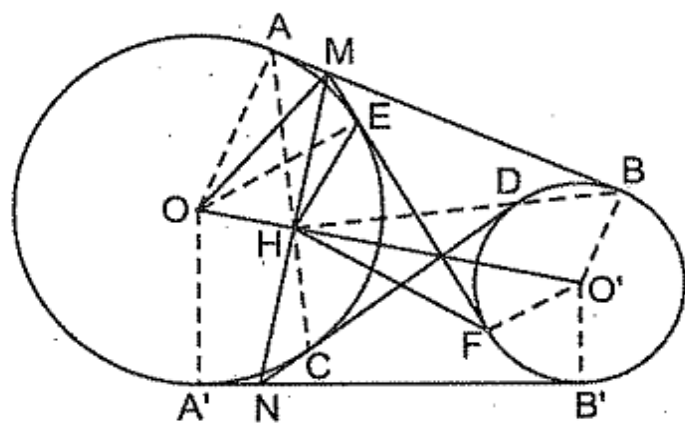
Chứng minh tương tự $\widehat{B} = \widehat{A}$. Vậy $\triangle ABC$ là tam giác đều.



Hình 173



Hình 174



Hình 175

293. (h.175)

- Do tính đối xứng qua OO' nên $MN \perp OO'$.
- Năm điểm cùng thuộc đường tròn có đường kính $O'M$.
- Năm điểm cùng thuộc đường tròn có đường kính OM .
- Do tính đối xứng nên $\widehat{O'HD} = \widehat{O'HF}$. Do câu b ta có $\widehat{O'HB} = \widehat{O'HF}$.
Vậy $\widehat{O'HD} = \widehat{O'HB}$. Suy ra H, D, B thẳng hàng.

- Do tính đối xứng $\widehat{CHN} = \widehat{EHM}$.

Do câu c ta có $\widehat{EHM} = \widehat{AHM}$. Suy ra $\widehat{CHN} = \widehat{AHM}$. Dễ dàng chứng minh A, H, C thẳng hàng.

294. (h.176) Kẻ các dây CC' , DD' song song với AB .

Do tính đối xứng nên C' , B , D' thẳng hàng. Ta có

$$\widehat{N_1} = \widehat{D_1} = \widehat{FC'D'}$$

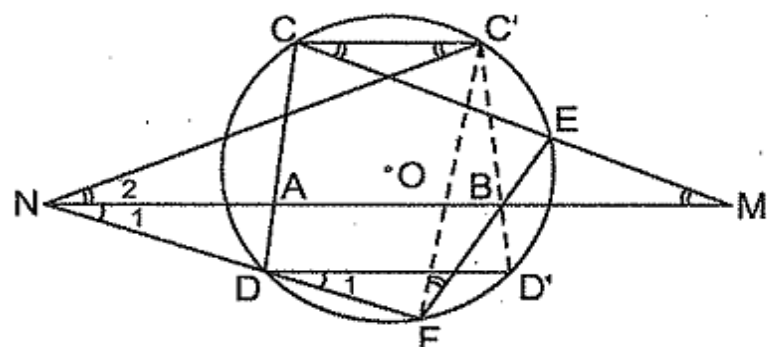
$\Rightarrow NFBC'$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{N_2} = \widehat{BFC'}. \quad (1)$$

Ta lại có

$$\widehat{BFC'} = \widehat{C'CE} = \widehat{M}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{N_2} = \widehat{M} \Rightarrow \widehat{CC'N} = \widehat{C'CM} \Rightarrow C'N$ đối xứng với CM qua đường trung trực của $CC' \Rightarrow N$ đối xứng với M qua đường trung trực của $CC' \Rightarrow AN = BM$.



Hình 176

295. (h.177)

a) $\triangle EBD \sim \triangle EAC$ (g.g) nên tỉ số các đường trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng, suy ra

$$\frac{EG}{EH} = \frac{BD}{AC}. \quad (1)$$

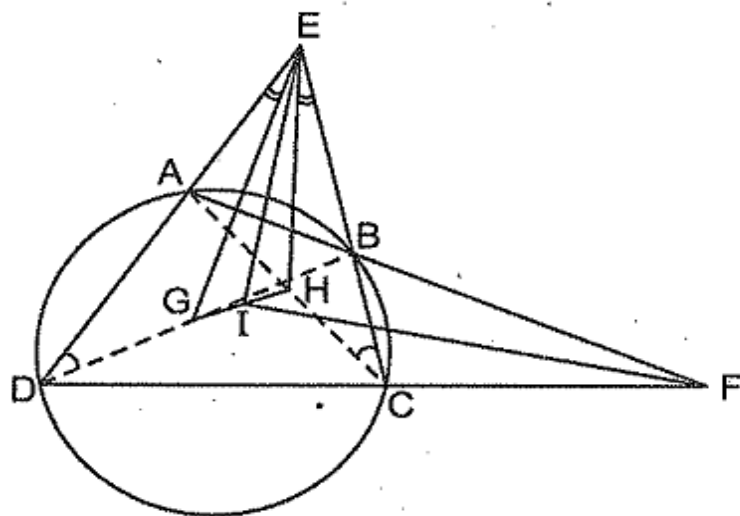
Hai tam giác trên đồng dạng còn suy ra $\widehat{HEC} = \widehat{GED}$, do đó tia phân giác của góc BED cũng là tia phân giác của góc GEH .

b) $\triangle GEH$ có đường phân giác EI chia GH theo tỉ số

$$\frac{EG}{EH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra I chia đoạn thẳng GH theo tỉ số $\frac{BD}{AC}$.

Chúng minh tương tự, tia phân giác của góc BFD cũng chia đoạn thẳng GH theo tỉ số $\frac{BD}{AC}$ tức là cũng đi qua điểm I .



Hình 177

296. (h.178) Gọi E , F , G , H , M , N theo thứ tự là trung điểm của AB , BC , CD , DA , AC , BD . Vẽ đường tròn ngoại tiếp các tam giác EMF và MHG , chúng cắt nhau ở K . Ta sẽ chứng minh rằng $EHNK$, $FGNK$ là các tứ giác nội tiếp.

Ta có

$$\widehat{EKM} = \widehat{EFM} = \widehat{A}_1,$$

$$\widehat{MKH} = \widehat{MGH} = \widehat{A}_2,$$

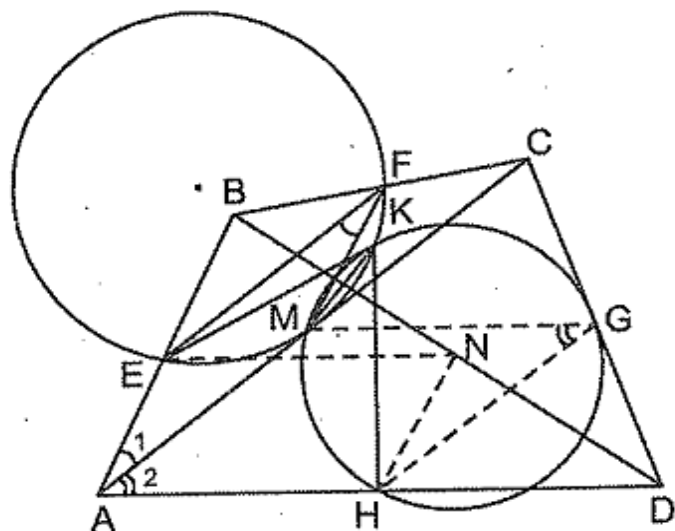
suy ra

$$\widehat{EKM} + \widehat{MKH} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A},$$

$$\text{tức là } \widehat{EKH} = \widehat{A}. \quad (1)$$

Ta lại có

$$\widehat{ENH} = \widehat{A}. \quad (2)$$



Hình 178

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EKH} = \widehat{ENH}$, do đó EHNK là tứ giác nội tiếp. Vậy đường tròn ngoại tiếp $\triangle EHN$ đi qua K.

Chứng minh tương tự, đường tròn ngoại tiếp $\triangle FGN$ cũng đi qua K.

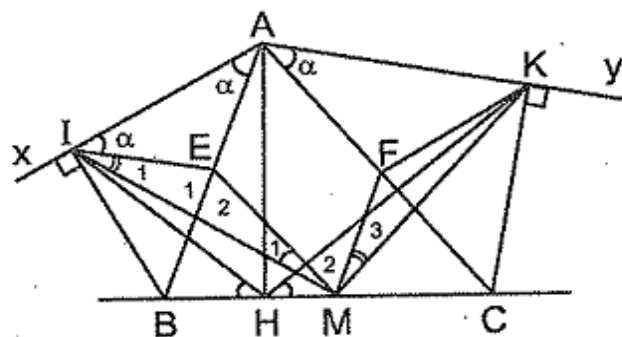
297. (h.179)

a) Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Ta có

$$IE = \frac{1}{2}AB = MF,$$

$$EM = \frac{1}{2}AC = FK,$$

$$\widehat{IEM} = \widehat{MFK},$$



Hình 179

nên $\triangle IEM = \triangle MFK$ (c.g.c) suy ra $MI = MK$.

b) Ta sẽ chứng minh $\widehat{IHK} = \widehat{IMK}$. Đặt $\widehat{BAI} = \widehat{CAK} = \alpha$.

Ta có $\widehat{BHI} = \widehat{BAI} = \alpha$, $\widehat{CHK} = \widehat{CAK} = \alpha$ nên

$$\widehat{IHK} = 180^\circ - 2\alpha. \quad (1)$$

Xét $\triangle IEM$ có $\widehat{E}_1 = 2\alpha$ nên $180^\circ - 2\alpha = \widehat{E}_2 + \widehat{M}_1 + \widehat{I}_1$.

Ta lại có $\widehat{E}_2 = \widehat{M}_2$ (so le trong, $AB \parallel MF$), $\widehat{I}_1 = \widehat{M}_3$ (do $\triangle IEM = \triangle MFK$) nên

$$180^\circ - 2\alpha = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_1 + \widehat{M}_3 = \widehat{IMK}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{IHK} = \widehat{IMK}$. Do đó I, H, M, K thuộc cùng một đường tròn.

298. Giả sử ta có hình vẽ như trên hình 180 (các trường hợp khác chứng minh tương tự). BB' cắt CC' ở K . Do $By \parallel Cz$ nên dễ dàng chứng minh được

$$\widehat{HBy} + \widehat{HCz} = \widehat{BHC} \quad (1)$$

$$\widehat{B'By} + \widehat{C'Cz} = \widehat{BKC} \quad (2)$$

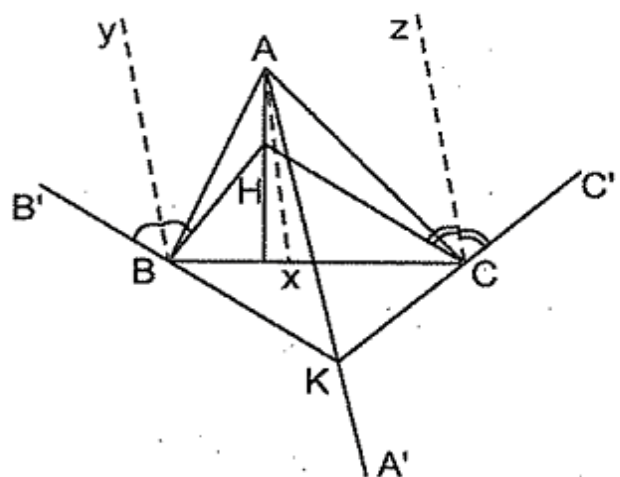
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$. Ta có

$$\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ,$$

$$\text{nên } \widehat{BAC} + \widehat{BKC} = 180^\circ.$$

Vậy K thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Chứng minh tương tự, BB' cắt AA' tại K' thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Do đó K trùng K' .



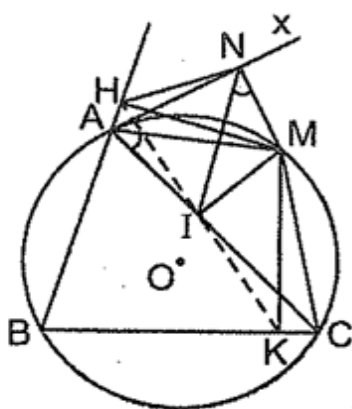
Hình 180

299. (h.181) Ta có H, I, K thẳng hàng, $\widehat{MNI} = \widehat{MHI}$, $\widehat{MKI} = \widehat{MCI} = \widehat{MAN} = \widehat{MIN}$.

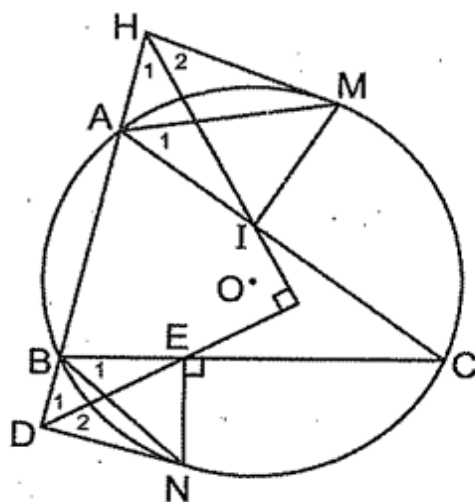
Do đó $\triangle MHK \sim \triangle MNI$ (g.g). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách khác (không đòi hỏi chứng minh H, I, K thẳng hàng) : Chứng minh

$$\triangle MHK \sim \triangle MNI \text{ (g.g)}$$



Hình 181



Hình 182

300. Trên hình 182, ta có HI và DE theo thứ tự là các đường thẳng Xim-xon của M và N . Ta có

$$\widehat{H}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{H}_2 + \widehat{D}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CM} + \widehat{CN} = 180^\circ \Rightarrow MN \text{ là đường kính.}$$

301. (h.183)

a) $\widehat{D}_1 = \widehat{C}_1$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung),
BHIC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{I}_1 = \widehat{C}_1$.

Suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{I}_1$. Tương tự $\widehat{ABD} = \widehat{HBI}$.

Vậy $\triangle ABD \sim \triangle HBI$ (g.g).

b) Kẻ $BK \perp AD$. Ta thấy I, H, K thuộc cùng một đường thẳng (đường thẳng Xim-xon).

$\triangle ABD \sim \triangle HBI$ (câu a) $\Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{BNH} \Rightarrow BKMN$ là tứ giác nội tiếp (theo cung chứa góc). Ta lại có $\widehat{BKM} = 90^\circ$ nên $\widehat{BNM} = 90^\circ$.

Chú ý : Cách giải câu b không dùng đến đường thẳng Xim-xon : $\triangle ABD$ và $\triangle HBI$ đồng dạng, có BM và BN là các đường trung tuyến tương ứng nên

$$\frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BH} \quad (1)$$

Ta lại có $\widehat{ABM} = \widehat{HBN}$ (cặp góc tương ứng của hai tam giác đồng dạng) nên

$$\widehat{ABH} = \widehat{MBN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABH \sim \triangle MBN$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{AHB} = \widehat{MNB}$. Ta lại có $\widehat{AHB} = 90^\circ$ nên $\widehat{MNB} = 90^\circ$.

302. (h.184) Gọi N là trực tâm của $\triangle ABC$, AN cắt (O) ở F. Gọi H, I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC, BC. Theo ví dụ 39, ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Lần lượt chứng minh

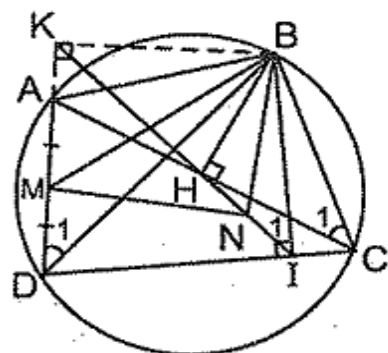
$$\widehat{K}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{F} = \widehat{N}_1 = \widehat{E}$$

để suy ra $NE \parallel HK$. Tương tự $ND \parallel HK$.

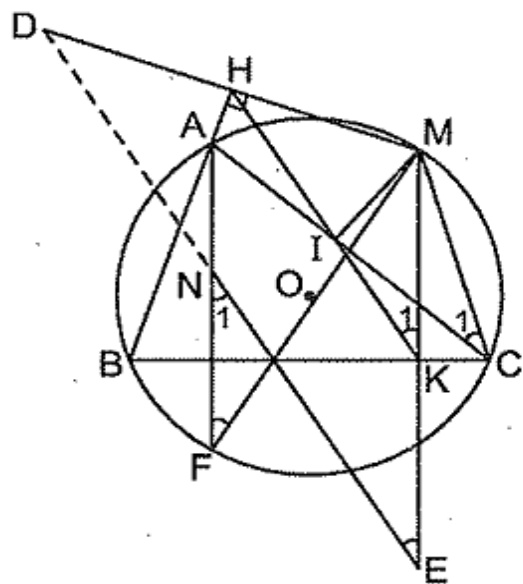
Vậy DE luôn đi qua trực tâm N của $\triangle ABC$.

303. (h.185) Gọi ABCD là tứ giác nội tiếp, cần chứng minh

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$



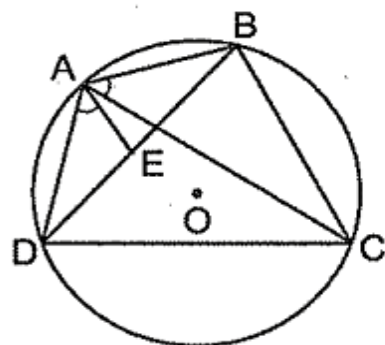
Hình 183



Hình 184

Xét $\triangle ABC$, ta tạo ra một tam giác mới đồng dạng với $\triangle ABC$ bằng cách lấy điểm E trên đường chéo BD sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$.

$$\begin{aligned}\triangle DAE \sim \triangle CAB \text{ (g.g)} &\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \\ &\Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DE. \quad (1)\end{aligned}$$



Hình 185

Tương tự

$$\triangle BAE \sim \triangle CAD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BE. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

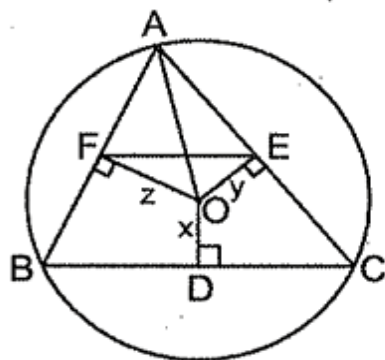
$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot DE + AC \cdot BE = AC(DE + BE) = AC \cdot BD.$$

304. (h.186) Xét $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$.

Gọi OD, OE, OF theo thứ tự là các khoảng cách từ O đến BC, AC, AB. Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $OD = x$, $OE = y$, $OF = z$.

Áp dụng định lý Ptô-lê-mê vào tứ giác nội tiếp AEOF, ta có

$$\begin{aligned}OA \cdot EF &= AF \cdot OE + AE \cdot OF \Rightarrow R \cdot \frac{a}{2} = \frac{c}{2} \cdot y + \frac{b}{2} \cdot z \\ &\Rightarrow aR = cy + bz.\end{aligned}$$



Hình 186

Tương tự $bR = az + cx$, $cR = ay + bx$.

$$\text{Suy ra} \quad R(a + b + c) = a(y + z) + b(x + z) + c(x + y). \quad (1)$$

Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, ta có

$$r(a + b + c) = 2S_{ABC} = ax + by + cz. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(a + b + c)(R + r) = a(x + y + z) + b(x + y + z) + c(x + y + z)$$

$$\text{nên} \quad (a + b + c)(R + r) = (a + b + c)(x + y + z).$$

$$\text{Do đó} \quad R + r = x + y + z.$$

Chú ý: Theo bài 198, ta có $R \geq 2r$ nên từ định lý Cac-nô, ta còn suy ra

$$OD + OE + OF \geq 3r.$$

§17. Đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp đa giác

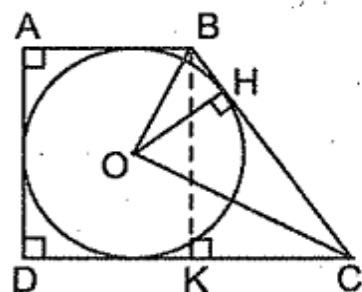
305. (h.187)

a) Tính BC, được $10\sqrt{5}$. Do đó

$$OH = \frac{OB \cdot OC}{BC} = 4\sqrt{5}.$$

Tổng hai đáy

$$AB + CD = AD + BC = 8\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = 18\sqrt{5}.$$



Hình 187

Đáp số: $S = 360\text{cm}^2$.

b) Kẻ $BK \perp DC$, đặt $BK = h$. Ta có $KC = a - b$, $BC^2 = BK^2 + KC^2$ nên

$$(a + b - h)^2 = h^2 + (a - b)^2.$$

Từ đó $h = \frac{2ab}{a+b}$, $S = ab$.

306. (h.188) $OE^2 = BE \cdot EC = 1.4 \Rightarrow OE = 2$ (cm).

Gọi tiếp điểm của (O) với AB là M. Dễ dàng tính được $BM = BE = 1\text{cm}$ nên M là trung điểm của AB. Do đó $\triangle AOB$ cân, suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{MBO}$ và $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$. Vậy ABCD là hình thang cân,

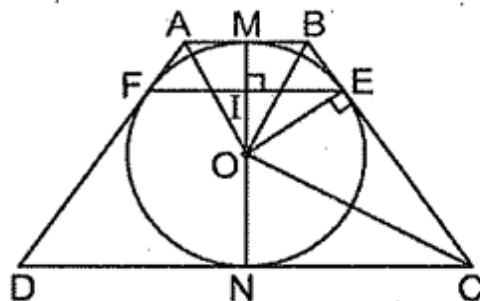
$$S = (MB + NC) \cdot MN = BC \cdot MN = 5.4 = 20 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

307. Kí hiệu như trên hình 188.

Gọi tiếp điểm của (O) với AB, CD là M, N.
Gọi I là giao điểm của MN và EF.

Dễ dàng tính được $IF = 8\text{cm}$, $OI = 6\text{cm}$ nên $MI = 4\text{cm}$.

Do $IE \parallel NC$ nên



Hình 188

$$\frac{BE}{EC} = \frac{MI}{IN} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}. \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có} \quad BE \cdot EC = OE^2 = 100. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BE = 5\text{cm}$, $EC = 20\text{cm}$. Từ đó $AB = 10\text{cm}$, $CD = 40\text{cm}$, $AD = BC = 25\text{cm}$.

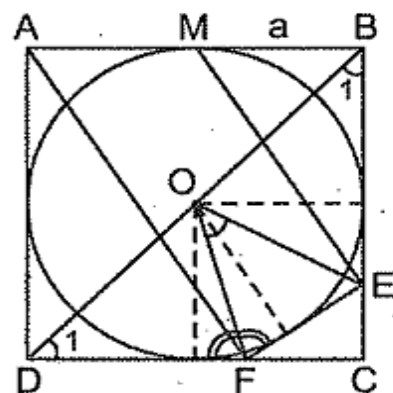
308. (h.189)

a) Để dàng chứng minh $\widehat{EOF} = 45^\circ$. Ta lại có $\widehat{D_1} = 45^\circ$. Do đó $\triangle OFE \sim \triangle DFO$ (g.g). Tương tự $\triangle OFE \sim \triangle BOE$ (g.g). Suy ra $\triangle DFO \sim \triangle BOE$.

b) Đặt $BM = a$. Từ câu a suy ra

$$\begin{aligned} \frac{DF}{BO} &= \frac{DO}{BE} \Rightarrow \frac{DF}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{BE} \Rightarrow \frac{DF}{a} = \frac{2a}{BE} \\ &\Rightarrow \frac{DF}{BM} = \frac{DA}{BE} \Rightarrow \triangle DAF \sim \triangle BEM \text{ (c.g.c)} \\ &\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{EMB}. \end{aligned}$$

Ta lại có $\widehat{AFD} = \widehat{FAB}$ nên $\widehat{EMB} = \widehat{FAB}$, suy ra $ME \parallel AF$.



Hình 189

309. (h.190) Gọi tiếp điểm trên AC của các đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$ là M và N. Ta có :

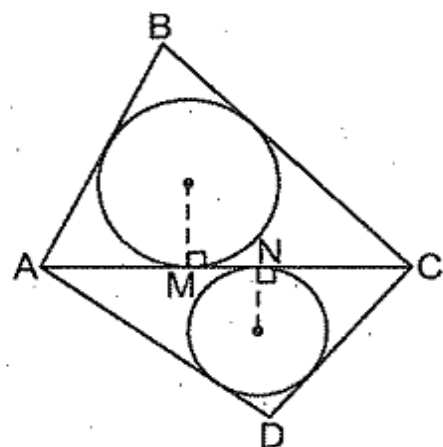
$$2CM = AC + BC - AB$$

$$2CN = AC + CD - AD.$$

Suy ra $2(CM - CN) = (BC + AD) - (AB + CD)$.

Theo đề bài $M \equiv N \Rightarrow BC + AD = AB + CD \Rightarrow ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp.

Gọi M' , N' là tiếp điểm trên BD của các đường tròn nội tiếp $\triangle BAD$ và $\triangle BCD$. Chứng minh tương tự ta được $M' \equiv N'$. Suy ra điều phải chứng minh.

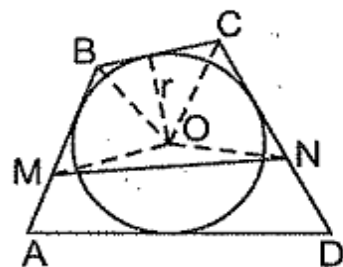


Hình 190

310. (h.191)

Gọi $(O; r)$ là đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD, S là diện tích tứ giác, p là nửa chu vi. Gọi M, N là hai điểm nằm trên cạnh của tứ giác và chia tứ giác ra hai phần có chu vi bằng nhau.

Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh CD (chú ý rằng không nhất thiết M và N thuộc hai cạnh đối của tứ giác), giả sử O nằm trong tứ giác hoặc nằm trên cạnh của tứ giác BMNC. Ta có :



Hình 191

$$S_{BMNC} = S_{MOB} + S_{BOC} + S_{CON} + S_{MON} = \frac{1}{2}r(MB + BC + CN) + S_{MON}$$

$$= \frac{pr}{2} + S_{MON} \quad (1)$$

$$S_{AMND} = S_{MOA} + S_{AOD} + S_{DON} - S_{MON} = \frac{1}{2}r(MA + AD + DN) - S_{MON}$$

$$= \frac{pr}{2} - S_{MON} \quad (2)$$

Do $S_{BMNC} = S_{AMND}$ nên từ (1) và (2) suy ra $S_{MON} = 0$. Vậy đường thẳng MN đi qua O.

Chú ý

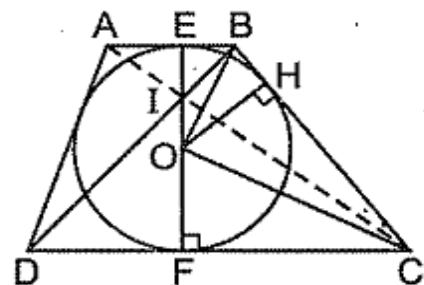
a) Có thể không chứng minh đẳng thức (2) mà nhận xét rằng công thức $S = pr$ đúng với tứ giác ngoại tiếp, do đó $\frac{S}{2} = \frac{pr}{2}$, nên từ (1) suy ra $S_{MON} = 0$.

b) Bài toán trên vẫn đúng nếu thay "tứ giác ngoại tiếp" bởi "đa giác ngoại tiếp".

311. (h.192) Gọi H là tiếp điểm của BC và đường tròn (O ; r). Ta có $BE = BH$, $CF = CH$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$ nên
- $$BE \cdot CF = BH \cdot CH = r^2.$$

Tương tự $AE \cdot DF = r^2$. Suy ra $BE \cdot CF = AE \cdot DF$, do đó

$$\frac{BE}{DF} = \frac{AE}{CF}.$$



Hình 192.

Gọi I là giao điểm của BD và EF. Ta có $\frac{BE}{DF} = \frac{IE}{IF}$. Suy ra $\frac{AE}{CF} = \frac{IE}{IF}$. Từ đó $\triangle AIE \sim \triangle CIF$ (c.g.c), dễ dàng chứng minh A, I, C thẳng hàng.

Chú ý : Tổng quát bài toán này, xem bài 312.

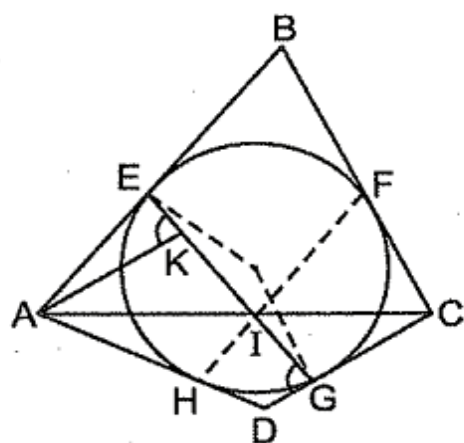
312. Kí hiệu như trên hình 193. Gọi I là giao điểm của AC và EG. Trước hết ta chứng minh F, I, H thẳng hàng.

Qua A vẽ đường thẳng song song với CD, cắt EG ở K. Ta có $\widehat{EKA} = \widehat{AEK}$ (cùng bằng $\widehat{EGD}$) nên $AE = AK$. Do đó $\frac{IA}{IC} = \frac{AK}{CG} = \frac{AE}{CG}$ tức là I chia trong AC theo tỉ số $\frac{AE}{CG}$.

Gọi I' là giao điểm của AC và FH . Chứng minh tương tự, I' chia AC theo tỉ số $\frac{AH}{CF}$.

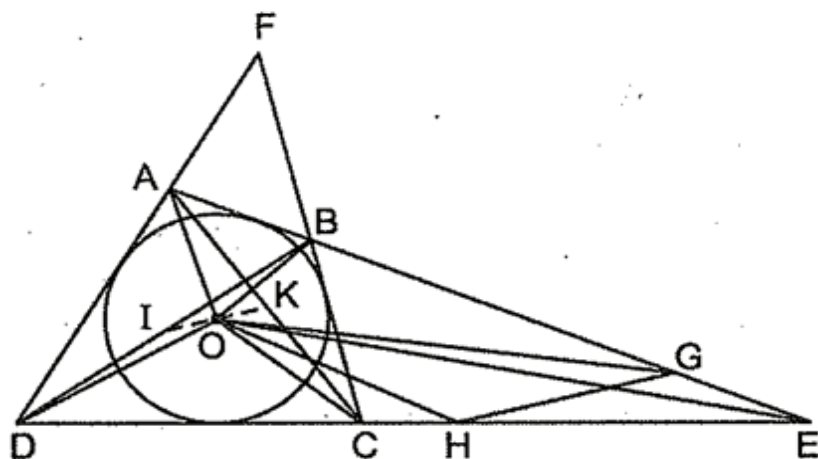
Nhưng $AE = AH$, $CG = CF$ nên I và I' chia AC theo cùng một tỉ số, do đó $I \equiv I'$. Vậy F, I, H thẳng hàng; do đó AC đi qua giao điểm của EG và FH .

Chứng minh tương tự, BD cũng đi qua giao điểm trên.



Hình 193

313. (h.194)



Hình 194

a) Gọi r là bán kính của đường tròn (O) , S là diện tích tứ giác $ABCD$.

Ta có
$$S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{r}{2}(AB + CD)$$

$$S_{OAD} + S_{OBC} = \frac{r}{2}(AD + BC)$$

Do $AB + CD = AD + BC$ nên

$$S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OAD} + S_{OBC} = \frac{1}{2}S.$$

b) Giả sử các tia AB và DC cắt nhau tại E (trường hợp $AB \parallel CD$, bạn đọc tự chứng minh).

"Dồn" các đoạn thẳng AB và CD về phía E : lấy G trên tia EA , lấy H trên tia ED sao cho $EG = AB$, $EH = CD$.

Ta có
$$S_{OEG} + S_{OEH} = S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}S$$

nên
$$S_{OHG} = \frac{1}{2}S - S_{EHG}. \quad (1)$$

Để thấy các điểm I và K cũng có tính chất

$$S_{IAB} + S_{ICD} = \frac{1}{2}S, \quad S_{KAB} + S_{KCD} = \frac{1}{2}S,$$

nên tương tự như trên ta cũng có

$$S_{IHG} = \frac{1}{2}S - S_{EHG}, \quad (2)$$

$$S_{KHG} = \frac{1}{2}S - S_{EHG}. \quad (3)$$

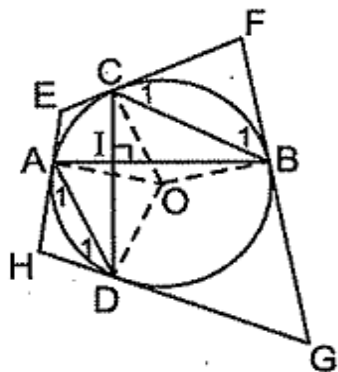
Từ (1), (2), (3) suy ra $S_{OHG} = S_{IHG} = S_{KHG}$ do đó ba điểm I, O, K thẳng hàng.

Chú ý : Kết quả nêu ở câu b là nội dung của định lý Niu-tơn : Trong một tứ giác ngoại tiếp đường tròn, các trung điểm của hai đường chéo thẳng hàng với tâm của đường tròn nội tiếp.

314. (h.195) Trước hết chứng minh $\widehat{AD} + \widehat{BC} = 180^\circ$. Suy ra

$$\widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ,$$

do đó $\widehat{F} + \widehat{H} = 180^\circ$. Vậy EFGH là tứ giác nội tiếp.



Hình 195



Hình 196a

315. (h.196a) Gọi I, K, M là tiếp điểm của đường tròn (O) trên BC, AB, AD, r là bán kính của đường tròn (O).

Đặt $CH = CI = x$, $DH = DM = y$, $BI = BK = t$, $AK = AM = z$. Ta tính được $AD = 22$ cm.

ABCD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ$, từ đó $\widehat{B}_1 = \widehat{HOD}$.

Ta có $\triangle EBO \sim \triangle HOD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{t}{r} = \frac{r}{y} \Rightarrow r^2 = yt$. Tương tự $r^2 = xz$. Suy ra

$xz = yt$. Do đó $\frac{x}{y} = \frac{t}{z} = \frac{18-x}{22-y}$. Từ đó ta được $11x = 9y$.

Ta lại có $x + y = 26$. Ta tính được $x = 11,7$ và $y = 14,3$.

Đáp số: $HC = 11,7\text{cm}$, $HD = 14,3\text{cm}$.

316. (h.196b)

a) Kí hiệu như trên hình vẽ. Chứng minh $r^2 = xz = yt$ như ở bài 315.

b) Gọi S là diện tích tứ giác $ABCD$, p là nửa chu vi. Ta có

$$S = pr = (a + c)r \text{ (vì } a + c = b + d)$$

nên $S^2 = (a + c)^2 r^2$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} abcd &= (z + t)(t + x)(x + y)(y + z) \\ &= (zt + xz + t^2 + xt)(xy + xz + y^2 + yz) \\ &= (zt + yt + t^2 + xt)(xy + yt + y^2 + yz) \text{ (do } xz = yt) \\ &= t(z + y + t + x)y(x + t + y + z) \\ &= yt(x + y + z + t)^2 \\ &= r^2(c + a)^2 \text{ do } r^2 = yt. \end{aligned}$$

Do đó $S^2 = abcd$, vậy $S = \sqrt{abcd}$.

317. (h.197) $AB \parallel DE$ nên $\widehat{AE} = \widehat{BD}$,

$$BC \parallel EF \text{ nên } \widehat{CE} = \widehat{BF}.$$

Suy ra

$$360^\circ - (\text{sđ}\widehat{AE} + \text{sđ}\widehat{CE}) = 360^\circ - (\text{sđ}\widehat{BD} + \text{sđ}\widehat{BF})$$

tức là $\widehat{AC} = \widehat{DF}$.

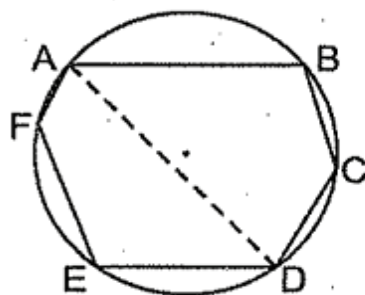
Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{DAF}$, do đó $AF \parallel CD$.

Chú ý: Tổng quát ta chứng minh được: Nếu một đa giác nội tiếp có $4n + 2$ cạnh, trong đó n cặp cạnh đối song song thì cặp cạnh đối còn lại cũng song song.

318. (h.198) Gọi G, H, I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA .



Hình 196b



Hình 197

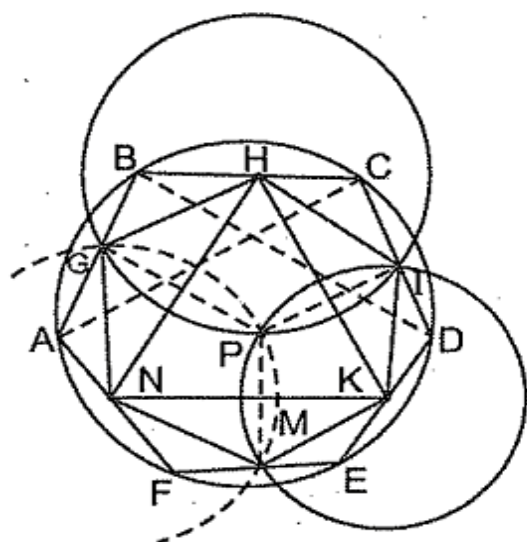
Các dây BD, AC bằng nhau và tạo với nhau góc tù bằng 120° nên $HI = HG$ và $\widehat{GHI} = 120^\circ$. Tương tự $KI = KM$ và $\widehat{IKM} = 120^\circ$, $NM = NG$ và $\widehat{MNG} = 120^\circ$.

Vẽ các đường tròn $(H; HI)$ và $(K; KI)$, chúng cắt nhau ở P. Do $\widehat{GHI} = \widehat{IKM} = 120^\circ$ nên $\widehat{IPG} = \widehat{IPM} = 120^\circ$, do đó $\widehat{MPG} = 120^\circ$.

Từ đó chứng minh được P thuộc đường tròn $(N; NM)$. Do đó PI, PM, PG vuông góc với các cạnh của ΔHKN . Ta lại có

$$\widehat{IPM} = \widehat{MPG} = \widehat{IPG} = 120^\circ$$

nên các góc của ΔHKN bằng 60° .



Hình 198

319. Đáp số: $2a^2(\sqrt{2} + 1)$.

320. Lần lượt tính

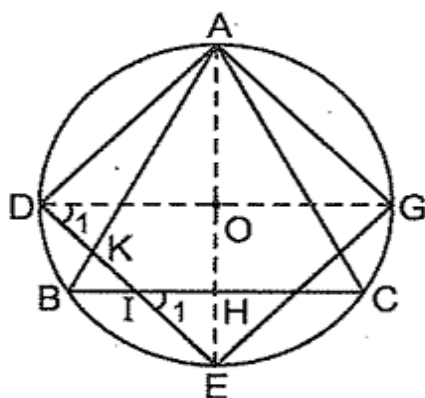
$$MA_1^2 + MA_{11}^2 = 4R^2, MA_2^2 + MA_{12}^2 = 4R^2, \dots, MA_{10}^2 + MA_{20}^2 = 4R^2.$$

Đáp số: $40R^2$.

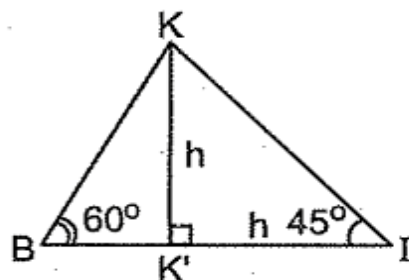
321.(h.199) Gọi H, I là giao điểm của OE, DE với BC. Ta có

$$OH = HE = \frac{R}{2}, \quad \widehat{I}_1 = \widehat{D}_1 = 45^\circ$$

nên $IH = HE = \frac{R}{2}, \quad BI = BH - IH = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1).$



a)



b)

Hình 199

Trước hết tính diện tích ΔKBI (h.199b).

Gọi đường cao $KK' = h$. Ta có $BK' + K'I = BI$ nên $\frac{h}{\sqrt{3}} + h = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

Từ đó tính được $h = \frac{R\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - 1)^2$, $S_{KBI} = \frac{R^2}{8}(9 - 5\sqrt{3})$, cuối cùng diện tích phải tìm bằng :

$$S_{ABC} - 2S_{KBI} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{R^2}{4}(9 - 5\sqrt{3}) = \frac{R^2}{4}(8\sqrt{3} - 9).$$

§18. Độ dài đường tròn

322. (h.200) Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của các đường tròn $(O), (I)$. Gọi tiếp điểm của đường tròn (I) với cung AB và với cạnh CA theo thứ tự là M và H .

$\triangle OAC$ vuông tại A , $\widehat{AOC} = 60^\circ$ nên

$$OC = 2OA = 2R$$

và $CM = OC - OM = 2R - R = R. \quad (1)$

$\triangle IHC$ vuông tại H , $\widehat{HIC} = 60^\circ$ nên $IC = 2IH = 2r$. Do đó

$$MC = MI + IC = r + 2r = 3r. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $r = \frac{R}{3}$.

Độ dài cung AB của (O) bằng $\frac{2\pi R}{3}$.

Độ dài đường tròn (I) bằng $2\pi r = \frac{2\pi R}{3}$.

Vậy độ dài đường tròn (I) bằng độ dài cung AB của đường tròn (O) .

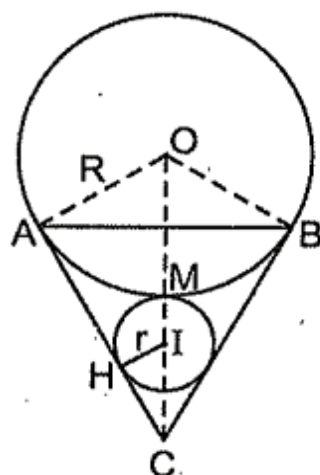
323. (h.201) Gọi A là điểm bất kì thuộc đường tròn $(O; r)$, B là điểm bất kì thuộc đường tròn $(O; R)$ với $R > r$. Với mọi A và B ta có

$$AB \geq OB - OA = R - r.$$

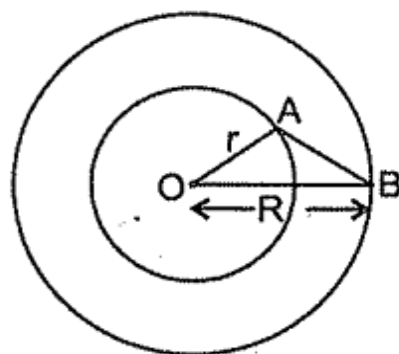
Vậy $\min AB = R - r$. Do đó $R - r = 1$.

Hiệu các độ dài của hai đường tròn bằng

$$2\pi(r + 1) - 2\pi r = 2\pi (m).$$

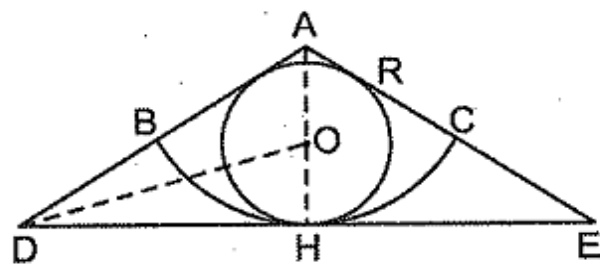


Hình 200



Hình 201

324. (h.202) Kẻ tiếp tuyến chung tại tiếp điểm H, cắt AB, AC ở D, E. Đường tròn (O) nội tiếp hình quạt là đường tròn nội tiếp $\triangle ADE$.



Hình 202

Ta tính được $AH = R$, $AD = 2R$, $DH = R\sqrt{3}$.
Sau đó tính OH theo tính chất đường phân giác của $\triangle ADH$, được

$$OH = R(2\sqrt{3} - 3).$$

Đáp số: $2(2\sqrt{3} - 3)\pi R$.

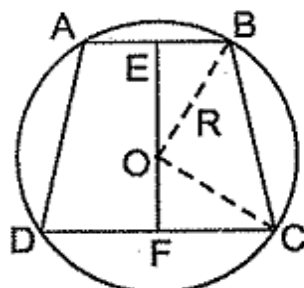
325. (h.203)

a) ABCD là hình thang cân.

b) Gọi R là bán kính của (O), EF là đường cao đi qua O của hình thang. Ta có:

$$EF = \frac{2 \cdot 100}{AB + CD} = \frac{200}{R(\sqrt{3} + 1)}, \quad (1)$$

$$EF = OE + OF = \frac{R}{2}(\sqrt{3} + 1). \quad (2)$$



Hình 203

Từ (1) và (2) suy ra $R = \frac{20}{\sqrt{3} + 1} = 10(\sqrt{3} - 1)$.

Đáp số: Độ dài đường tròn bằng $20(\sqrt{3} - 1)\pi m$.

§19. Diện tích hình tròn

326. Bằng nhau.

327. Gọi a là cạnh của hình vuông, diện tích hình vuông bằng a^2 . Chu vi hình vuông và chu vi đường tròn đều bằng $4a$.

Bán kính của đường tròn bằng $\frac{4a}{2\pi} = \frac{2a}{\pi}$.

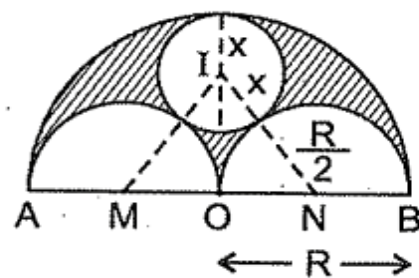
Diện tích hình tròn bằng $\pi \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 = \frac{4a^2}{\pi}$.

Ta có $\frac{4a^2}{\pi} > a^2$. Vậy diện tích hình tròn lớn hơn diện tích hình vuông.

328. (h.204)

a) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của OA, OB. Gọi x là bán kính của (I). Xét $\triangle ION$ vuông, ta có :

$$\begin{aligned} IO^2 + ON^2 &= IN^2 \\ \Rightarrow (R-x)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 &= \left(\frac{R}{2} + x\right)^2 \\ \Rightarrow R(R-3x) &= 0 \Rightarrow R = 3x \Rightarrow x = \frac{R}{3} \end{aligned}$$



Hình 204

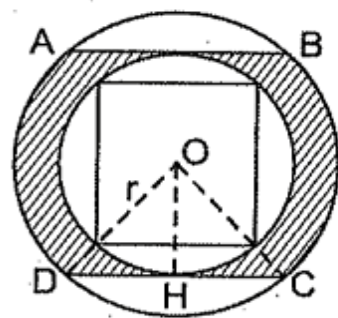
b) Đáp số: $\frac{5}{36}\pi R^2$.

329. Kí hiệu như trên hình 205. Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của hai đường tròn ($R > r$). Ta có

$$\pi R^2 = 2\pi r^2 \Rightarrow R = r\sqrt{2} \Rightarrow \triangle OHC \text{ vuông cân.}$$

Diện tích hình vành khăn bằng $\frac{\pi R^2}{2}$.

Diện tích phần gạch sọc của hình vành khăn và diện tích hình vuông đều bằng R^2 (bạn đọc tự giải).



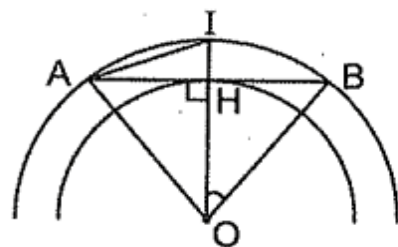
Hình 205

330. (h.206) Gọi AB là cạnh của đa giác đều.

a) Diện tích hình vành khăn bằng $\frac{\pi a^2}{4}$.

b) Chiều rộng hình vành khăn bằng

$$HI = AH \widehat{\text{tg}} \widehat{IAH}.$$



Hình 206

$$\text{Đáp số: } \frac{a}{2} \widehat{\text{tg}} \frac{90^\circ}{n}.$$

331. (h.207). Giả sử hình quạt đã cho có bán kính R, độ dài cung là m, diện tích S.

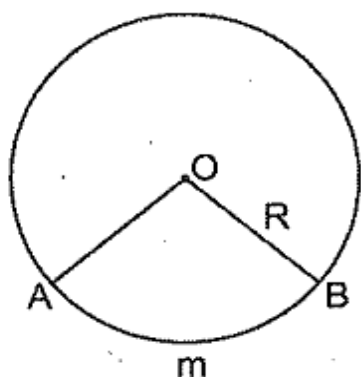
$$\text{Ta có } \frac{mR}{2} = S = 49 \text{ nên}$$

$$mR = 98.$$

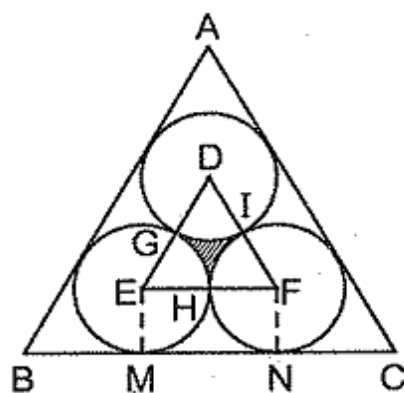
(1)

Ta lại có $m + 2R = 28$ nên $m = 28 - 2R$. Thay vào (1) được

$$(28 - 2R).R = 98 \Rightarrow (R - 7)^2 = 0 \Rightarrow R = 7(\text{cm}).$$



Hình 207



Hình 208

332. (h.208)

a) Diện tích tam giác con GHI bằng hiệu của S_{DEF} (bằng $r^2\sqrt{3}$) và diện tích ba hình quạt bán kính r , số đo cung 60° (bằng $3 \cdot \frac{\pi r^2}{6}$).

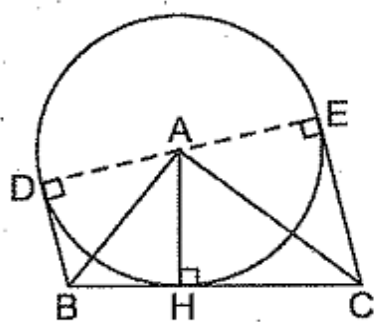
$$\text{Đáp số: } \frac{r^2}{2}(2\sqrt{3} - \pi).$$

b) Ta có $BM = NC = r\sqrt{3}$; $MN = 2r$ nên $BC = 2r(\sqrt{3} + 1)$.

$$\text{Đáp số: } S_{ABC} = 2r^2(2\sqrt{3} + 3).$$

333. (h.209) Dễ thấy D, A, E thẳng hàng. Lần lượt tính được $BC = 25$, $BH = 9$, $HC = 16$, $AH = 12$. Từ đó tính được $S_{ABC} = 150$, $S_{BDEC} = 300$.

$$\text{Đáp số: } 300 + 72\pi.$$



Hình 209

334. Đáp số: 4.

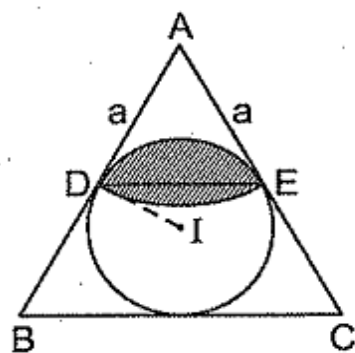
335. Diện tích S phải tìm (phần gạch sọc trên hình 210) bằng tổng diện tích của hai hình viên phân ($S = S_1 + S_2$).

– Hình viên phân bán kính $AD = AE = a$, cung 60° có diện tích

$$S_1 = \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

– Hình viên phân bán kính $ID = IE = \frac{a}{\sqrt{3}}$, cung

120° có diện tích



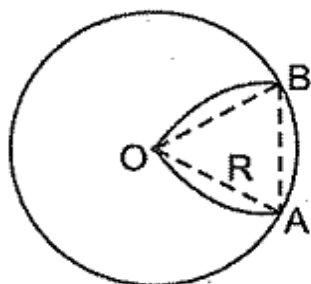
Hình 210

$$S_2 = \frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Đáp số: $\frac{a^2}{18}(5\pi - 6\sqrt{3}).$

336. (h.211) Gọi S là diện tích hình giới hạn bởi các cung OA , OB , AB . Diện tích này bằng hiệu của ba lần diện tích hình quạt 60° bán kính R và hai lần diện tích tam giác đều AOB . Ta tính được

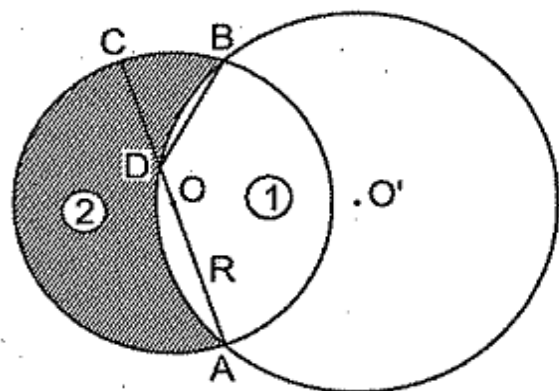
$$S = \frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{3}).$$



Hình 211

Hãy chứng minh $\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) > 0$.

337. (h.212) Cung AB của (O') chia hình tròn (O) thành hai phần có diện tích S_1 , S_2 bằng nhau như hình vẽ. Kẻ đường kính AOC . Ta thấy :



Hình 212

– Đường kính AOC cắt cung AB của (O') tại một điểm D khác A và B (vì nếu đường kính AC chỉ cắt cung AB đó tại A hoặc cắt cung AB đó tại A và B thì $S_1 \neq S_2$).

– Điểm O thuộc đoạn thẳng AD , vì nếu trái lại thì qua O có thể kẻ được một đường kính không cắt (O') dẫn tới $S_1 < S_2$.

Kí hiệu l là độ dài cung, ta có

$$l_{\widehat{AB}} = l_{\widehat{AD}} + l_{\widehat{DB}} > AO + OD + DB > AO + OB = 2R.$$

338. Gọi R , r theo thứ tự là bán kính của đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp $\triangle ABC$. Ta có :

$$2S = (a + b + c)r, \text{ mà } a + b + c < 6R \text{ nên } 2S < 6Rr. \quad (1)$$

Mặt khác

$$S_1 + S_2 \geq 2\sqrt{S_1 S_2} = 2\sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} = 2\pi Rr > 6Rr. \quad (2)$$

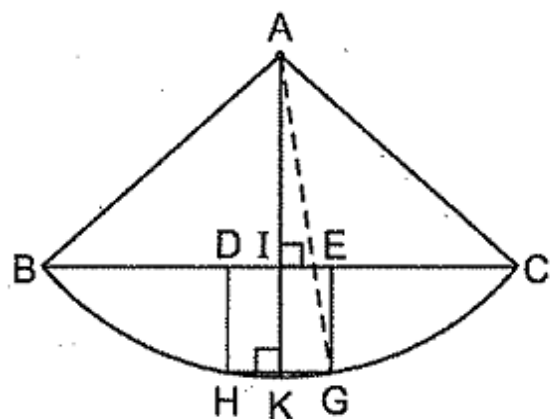
Từ (1) và (2) suy ra $2S < S_1 + S_2$.

339. (h.213) a) Gọi A là tâm của đường tròn chứa cung BC. Ta có $BC = a$ nên

$$AC = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Ta tính được diện tích của viên phân bằng

$$S = \frac{a^2}{8}(\pi - 2).$$



Hình 213

- b) Gọi DEGH là hình vuông nội tiếp viên phân, gọi x là cạnh của hình vuông. Kẻ $AI \perp BC$, cắt GH ở K. Xét $\triangle AKG$ vuông ta có:

$$AK^2 + KG^2 = AG^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad (\text{chú ý } AG = AC).$$

Rút gọn được $5x^2 + 4ax - a^2 = 0$. Vậy $x = \frac{a}{5}$.

340. (h.214) Gọi O là tâm của đường tròn chứa cung BC, MNPQ là hình vuông nội tiếp viên phân. Dễ thấy

$$BM = MN = NC = 2 \text{ (cm)}.$$

Do đó $\triangle BMQ$ vuông cân, $\widehat{B} = 45^\circ$.

$\triangle QMC$ vuông nên

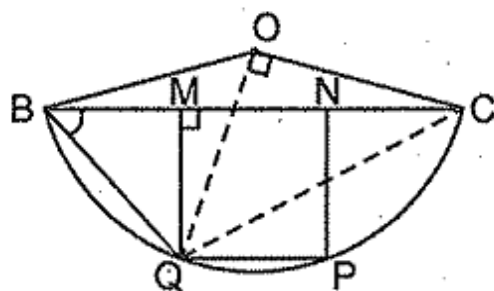
$$QC^2 = QM^2 + MC^2 = 4 + 16 = 20,$$

suy ra $QC = 2\sqrt{5}$.

Góc nội tiếp $\widehat{B} = 45^\circ$ nên góc ở tâm $\widehat{COQ} = 90^\circ$.

$\triangle COQ$ vuông cân nên

$$OC = \frac{QC}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10} \text{ (cm)}.$$



Hình 214

Chương IV – HÌNH TRỤ. HÌNH NÓN. HÌNH CẦU

§20. Hình trụ

341. Thể tích của các khối chì, sắt, nhôm theo thứ tự bằng :

$$V_1 = \frac{2}{11,3}(\text{dm}^3), \quad V_2 = \frac{2}{7,8}(\text{dm}^3), \quad V_3 = \frac{2}{2,7}(\text{dm}^3),$$

Chiều cao của các khối chì, sắt, nhôm theo thứ tự bằng :

$$h_1 = \frac{2}{11,3 \cdot \pi \cdot 0,5^2} \approx 0,23\text{dm} \approx 2,3\text{cm}.$$

$$h_2 = \frac{2}{7,8 \cdot \pi \cdot 0,5^2} \approx 0,33\text{dm} \approx 3,3\text{cm}.$$

$$h_3 = \frac{2}{2,7 \cdot \pi \cdot 0,5^2} \approx 0,94\text{dm} \approx 9,4\text{cm}.$$

342. (h.215) Gọi l là chiều dài của băng giấy, chiều dài đó bằng tổng độ dài của 60 đường tròn có bán kính $r_1, r_2, \dots, r_{60}$, trong đó $r_1 = 1\text{cm}, r_{60} = 3\text{cm}$. Ta có

$$l = 2\pi(r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{60}).$$

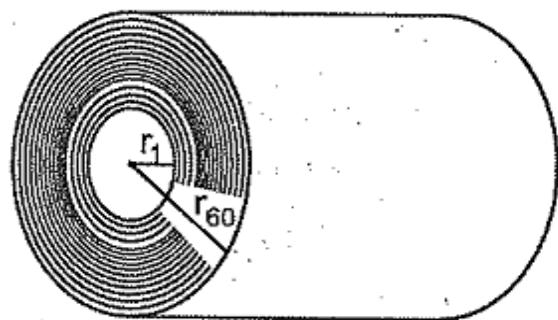
Gọi d là độ dày của tờ giấy thì $r_2 = r_1 + d$,

$r_3 = r_2 + d, \dots, r_{60} = r_{59} + d$.

Do đó

$$r_1 + r_{60} = r_2 + r_{59} = r_3 + r_{58} = \dots = r_{30} + r_{31} = 4\text{cm}.$$

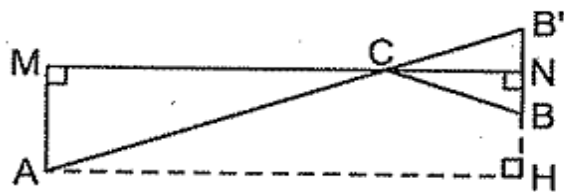
Vậy $l = 2\pi \cdot 30 \cdot 4 = 240\pi (\text{cm}) \approx 7,5\text{m}$.



Hình 215

343. Hãy chứng minh rằng trong các hình chữ nhật nội tiếp một đường tròn cho trước, hình vuông có diện tích lớn nhất. Từ đó, nếu đáy của khúc gỗ là một hình vuông có đường chéo bằng d thì khúc gỗ có thể tích lớn nhất.

344. (h.216) Giả thiết rằng lọ thủy tinh làm "bằng bìa", ta trải mặt xung quanh của lọ thành một hình chữ nhật có chiều dài bằng độ dài của đường tròn miệng lọ (48cm). Gọi AM, BN là các đường vuông góc kẻ từ A, B đến miệng lọ thì $MN = 24\text{ cm}$.



Hình 216

Chú kiến muốn tới B ở phía trong lọ phải vượt qua miệng lọ, tức là phải đi từ A tới MN, rồi tới B. Như vậy, chú phải "giải" bài toán: Tìm điểm C trên MN sao cho $AC + CB$ ngắn nhất.

Dễ dàng tính được $AC + CB = AC + CB' = AB' = 25 \text{ cm}$.

345. Gọi S là diện tích toàn phần, r là bán kính của đáy, h là đường cao của hình trụ. Ta có

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi(rh + r^2).$$

S nhỏ nhất khi và chỉ khi $rh + r^2$ nhỏ nhất.

Gọi V là thể tích của hình trụ (V là hằng số), ta có $V = \pi r^2 h$ nên

$$rh + r^2 = \frac{V}{\pi r} + r^2 = \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r} + r^2.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ba số dương $\frac{V}{2\pi r}$, $\frac{V}{2\pi r}$, r^2 có tích không đổi

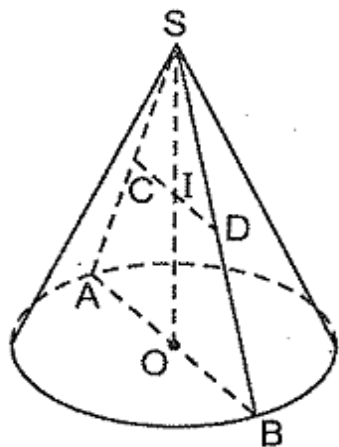
(bằng $\frac{V^2}{4\pi^2}$) nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi ba số ấy bằng nhau, tức là:

$$\frac{V}{2\pi r} = r^2 \Leftrightarrow \frac{rh}{2} = r^2 \Leftrightarrow h = 2r.$$

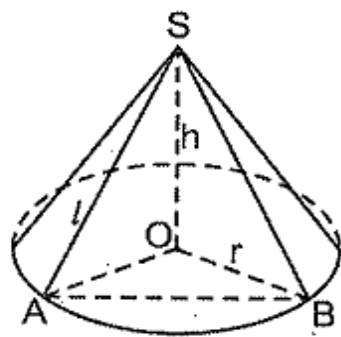
§21. Hình nón

346. Câu trả lời D) là đúng.

347. (h.217) Đáp số: $72\pi\sqrt{3}\text{cm}^3$.



Hình 217



Hình 218

348. (h.218) Gọi SA , SB là hai đường sinh vuông góc. Do SA , SB chia mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có tỉ số diện tích là $1 : 2$ nên A , B chia đường tròn (O) thành hai phần có tỉ số độ dài là $1 : 2$.

Do đó $\widehat{AB} = 120^\circ$.

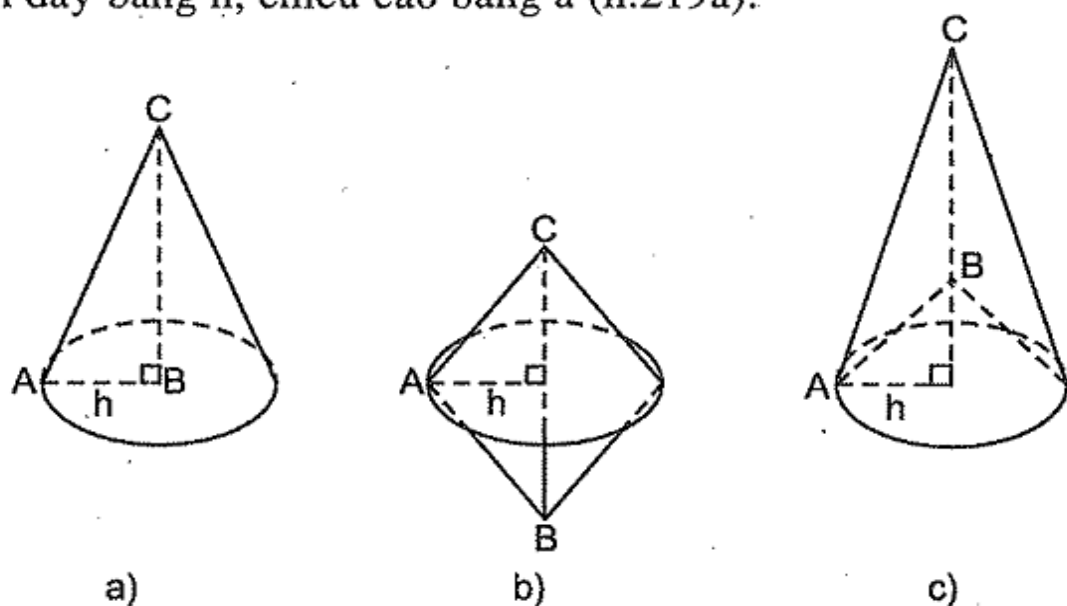
Đặt $OA = OB = r$.

Xét $\triangle AOB$, ta có $AB = 2r \sin 60^\circ = r\sqrt{3}$.

Xét $\triangle SAB$ vuông cân, ta có $AB = SA\sqrt{2}$. Từ đó $SA^2 = \frac{3}{2}r^2$.

$\triangle SOA$ vuông nên $h^2 = SA^2 - r^2 = \frac{r^2}{2}$ suy ra $r^2 = 2h^2$. Từ đó $V = \frac{2}{3}\pi h^3$.

349. (h.219) Giả sử $\widehat{B} \geq \widehat{C}$. Nếu $\widehat{B} = 90^\circ$ thì hình tạo thành là hình nón có bán kính đáy bằng h , chiều cao bằng a (h.219a).



Hình 219

Nếu $\widehat{B} < 90^\circ$ thì thể tích hình tạo thành là tổng thể tích hai hình nón (h.219b).

Nếu $\widehat{B} > 90^\circ$ thì thể tích hình tạo thành là hiệu thể tích hai hình nón (h.219c).

Trong cả ba trường hợp, thể tích hình tạo thành đều bằng $\frac{1}{3}\pi h^2 a$.

350. Đáp số: 100π (cm²).

351. (h.220) Gọi r là bán kính của đường tròn đáy của hình nón, h là chiều cao của hình nón.

Ta có $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ nên V lớn nhất khi và chỉ khi $r^2 h$ lớn nhất.

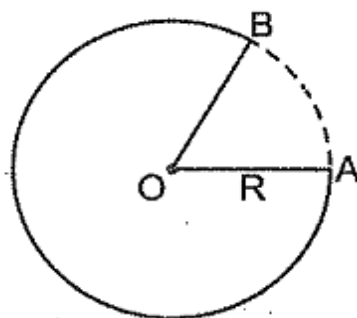
Do $h^2 = R^2 - r^2$ nên ta biến đổi :

V lớn nhất

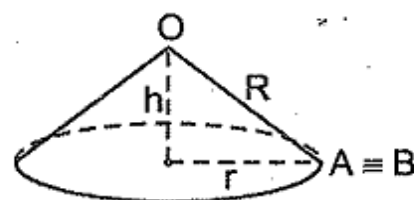
$$\Leftrightarrow r^4 h^2 \text{ lớn nhất}$$

$$\Leftrightarrow r^4 (R^2 - r^2) \text{ lớn nhất}$$

$$\Leftrightarrow r^4 (2R^2 - 2r^2) \text{ lớn nhất.}$$



a)



b)

Hình 220

Theo bất đẳng thức Cô-si, ba số dương $r^2, r^2, 2R^2 - 2r^2$ có tổng không đổi (bằng $2R^2$) nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi ba số đó bằng nhau, tức là

$$r^2 = 2R^2 - 2r^2 \Leftrightarrow 3r^2 = 2R^2 \Leftrightarrow \frac{r^2}{R^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

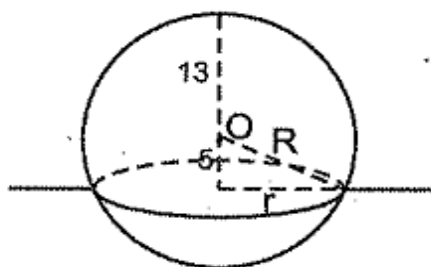
Độ dài cung lớn AB bằng $2\pi r$. Độ dài đường tròn (O ; R) bằng $2\pi R$.

Số đo của cung lớn AB bằng

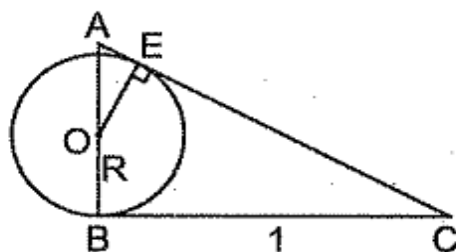
$$\frac{2\pi r}{2\pi R} \cdot 360^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 360^\circ \approx 294^\circ.$$

§22. Hình cầu

352. (h.221) Gọi r là bán kính của đường tròn được tạo thành bởi quả bóng và mặt hồ, ta tính được $r = 12$ cm. *Đáp số:* 24π (cm).



Hình 221



Hình 222

353. Gọi R là bán kính của quả bóng. Trên hình 222, tia sáng tiếp xúc với đường tròn (O) tại E, A là giao điểm của BO và CE. Ta tính được

$$AB = 0,5 \text{ m}, \quad AC = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ m}.$$

$$\triangle AEO \sim \triangle ABC \text{ (g.g)} \text{ nên } \frac{OA}{CA} = \frac{OE}{BC}. \text{ Từ đó tính được } R = \sqrt{5} - 2 \text{ (m).}$$

354. a), b) Câu trả lời B là đúng.

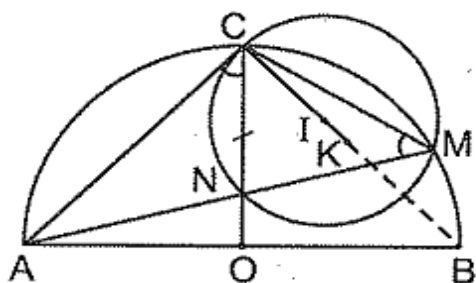
355. a) Chứng minh rằng bốn đường chéo của hình hộp chữ nhật cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường chéo.

b) Đáp số: $\frac{8788}{3} \pi \text{ cm}^3$.

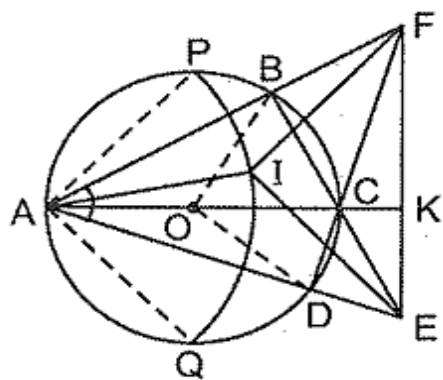
QUỸ TÍCH

356. (h.223) Ta có $\widehat{CMN} = \widehat{NCA}$ (cùng bằng 45°) nên chứng minh được CA là tiếp tuyến của đường tròn (I).

Quỹ tích của I là đoạn thẳng CK (K là trung điểm của CB).



Hình 223



Hình 224

357. (h.224)

a) B, D thuộc đường tròn (O) đường kính AC cố định. Đặt $AC = 2a$. Do $\widehat{BAD} = 45^\circ$ nên $\triangle BOD$ vuông cân,

$$BD = OB\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

b) AC cắt EF tại K, $\triangle FDE = \triangle ADC$ (g.c.g) nên

$$EF = AC = 2a.$$

c) Do $\widehat{BAD} = 45^\circ$ nên

$\triangle EIF$ vuông cân,

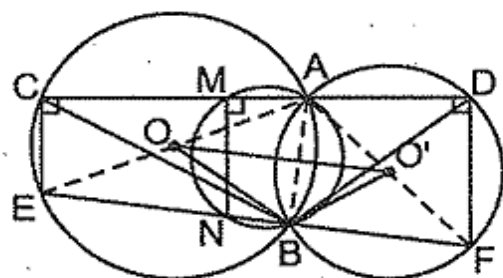
$$IA = IE = IF = \frac{EF}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}.$$

Gọi P, Q là điểm chính giữa của các cung AC, ta có $IA = PA$. Quỹ tích của I là cung PQ của đường tròn tâm A bán kính $a\sqrt{2}$.

b) $\triangle CBD \sim \triangle OBO'$ (g.g), từ đó chứng minh được

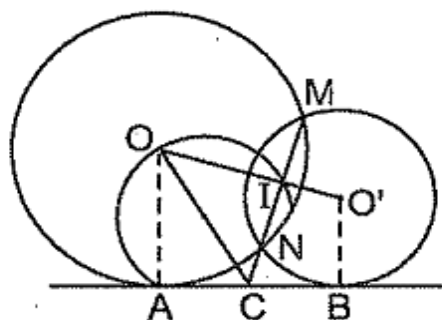
$$\frac{CB}{BD} = \frac{OB}{BO'} = \frac{3}{2}.$$

c) Khi $d \parallel OO'$ thì độ dài CD lớn nhất.

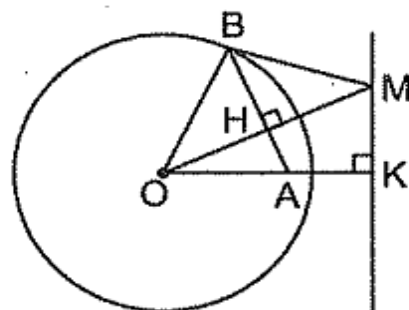


Hình 230

364. (h.231) Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm C của AB . Điểm I di chuyển trên đường tròn đường kính OC (phần nằm trong đường tròn tâm O).



Hình 231

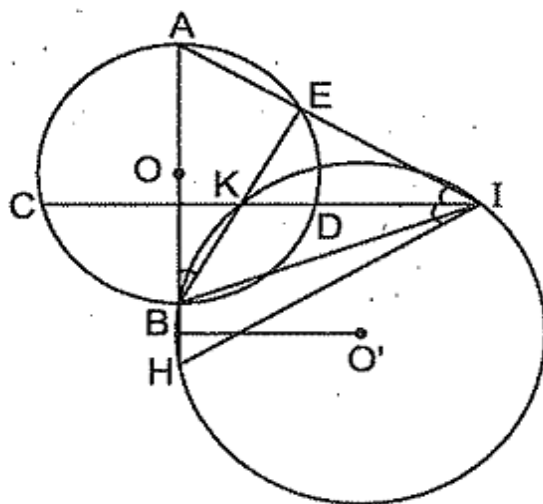


Hình 232

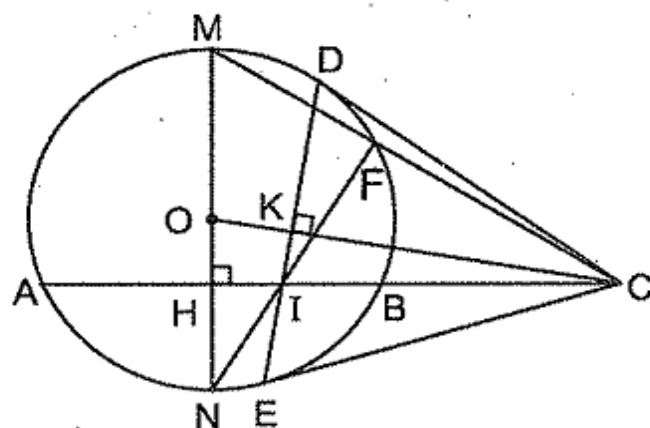
365. (h.232) Kẻ $MK \perp OA$. Đặt $OB = R$. Ta có $OA \cdot OK = OH \cdot OM = R^2$ nên K là điểm cố định. Quỹ tích của M là đường vuông góc với OK tại K .

366. (h.233) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle BIK$ cắt AB tại H (khác B). Lần lượt chứng minh $\widehat{HIK} = \widehat{ABK} = \widehat{AIK}$. Do đó H đối xứng với A qua CD .

Quỹ tích của O' là đường trung trực của BH .



Hình 233



Hình 234

367. (h.234) a) Quỹ tích của D, E là đường tròn $(C; \sqrt{CA \cdot CB})$, trừ giao điểm với đường thẳng ABC .

b) Chứng minh rằng DE cắt AB tại một điểm I cố định. Gọi H là trung điểm của AB. Ta có

$$CI.CH = CK.CO = CD^2 = CA.CB$$

nên I là điểm cố định. Quỹ tích của K là đường tròn đường kính IC, trừ điểm C.

c) Gọi I' là giao điểm của FN và AB. Chứng minh rằng CI' = CI để suy ra I' = I.

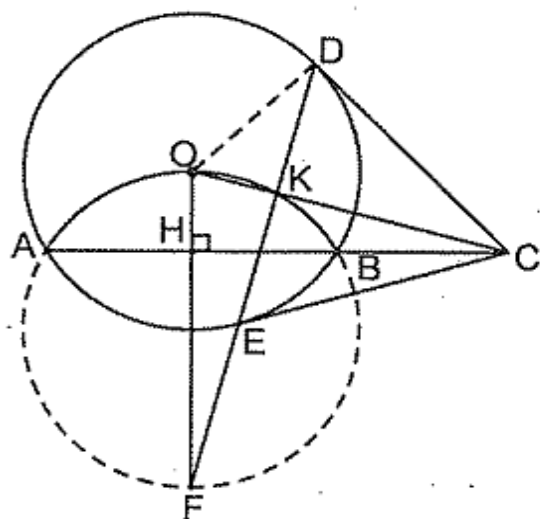
368. (h.235) Đặt OD = R. Kẻ OH $\perp$ AB. Gọi F là giao điểm của DE và OH. Ta có

$$OH.OF = OK.OC = OD^2 = R^2$$

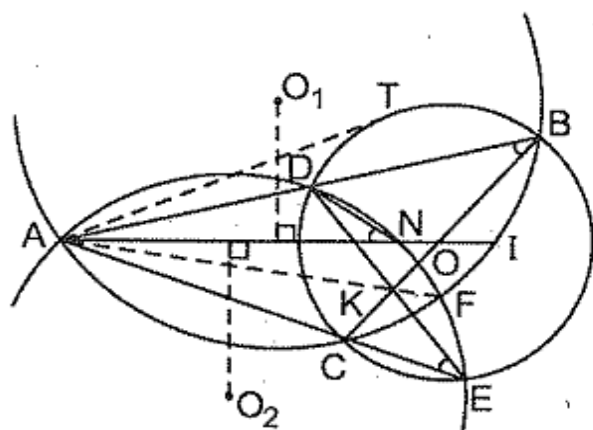
nên F là điểm cố định.

Quỹ tích của K là cung AOB của đường tròn đường kính OF, trừ các điểm A, O, B.

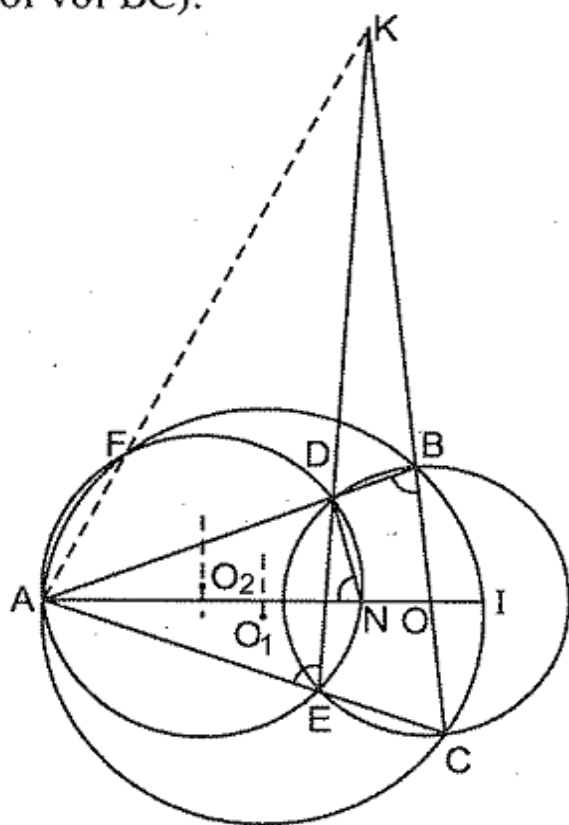
369. (h.236a ứng với trường hợp D và E nằm khác phía đối với BC, h.236b ứng với trường hợp D và E nằm cùng phía đối với BC).



Hình 235



a)



b)

Hình 236

a) Gọi I là giao điểm của AO với (O₁).

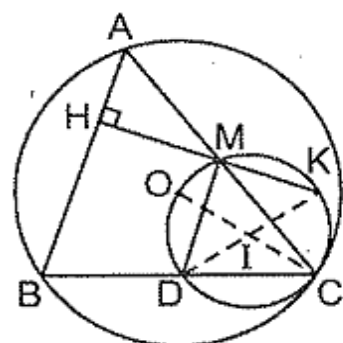
Ta có OA.OI = OB.OC = R² nên I cố định. Quỹ tích O₁ là đường trung trực của AI.

- b) Gọi N là giao điểm của AO với (O_2) . Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{AED} = \widehat{AND} \Rightarrow$ BDNO là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow AN.AO = AD.AB = AT^2$ với AT là tiếp tuyến của (O) . Do đó N cố định. Quỹ tích của O_2 là đường trung trực của AN.
- c) Gọi K là giao điểm của BC và DE. Gọi giao điểm khác A của AK với (O_1) , (O_2) theo thứ tự là F_1, F_2 . Ta có

$$KA.KF_1 = KB.KC = KD.KE = KA.KF_2$$

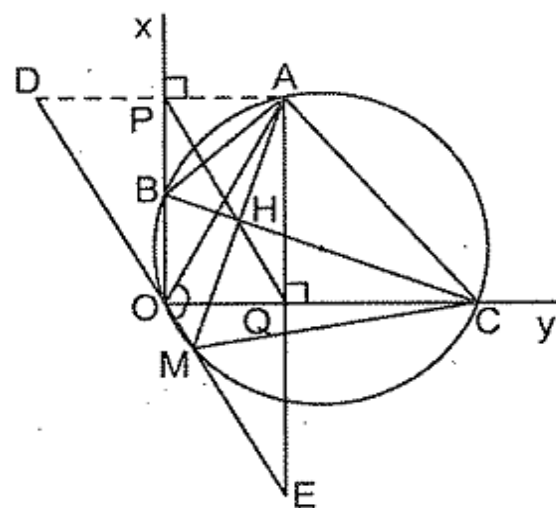
nên $F_1 \equiv F_2$.

370. (h.237) Trước hết tìm quỹ tích của M, đó là đường tròn đường kính OC (tâm I, trung điểm của OC). HM cắt (I) ở K. (I) cắt BC tại trung điểm D của BC. Hãy chứng minh rằng D, I, K thẳng hàng và K là điểm cố định.



Hình 237

371. (h.238) a) *Cách 1.* A, B, M đều thuộc đường tròn đường kính BC, ta lại có $CA = CM$ nên $\widehat{COA} = \widehat{COM}$. Do đó M thuộc đường thẳng đối xứng với OA qua Oy (giới hạn : đoạn thẳng DE).

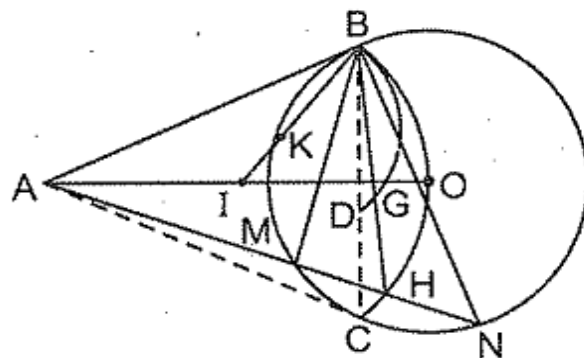


Hình 238

Cách 2. Gọi H là giao điểm của AM và BC. Trước hết ta tìm quỹ tích của H, đó là đoạn thẳng PQ (P, Q là hình chiếu của A trên Ox, Oy). Để chứng minh điều này, ta chứng minh $\widehat{BHP} = \widehat{CHQ}$ để suy ra P, H, Q thẳng hàng. M là ảnh của H trong phép vị tự tâm A tỉ số 2.

b) $\frac{AB}{AC} = \tan \widehat{ACB} = \tan \widehat{AOx}$, là hằng số.

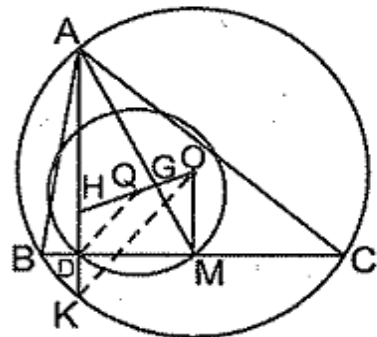
372. (h.239) Gọi H là trung điểm của MN. Quỹ tích của H là cung BOC của đường tròn tâm I đường kính AO. G là ảnh của H trong phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{2}{3}$. Từ đó, quỹ tích của G là cung BD của đường tròn tâm K bán kính KB với K thuộc BI



Hình 239

và $BK = \frac{2}{3}BI$ (D thuộc đoạn thẳng BC, trong đó AC là tiếp tuyến của đường tròn đã cho).

373. (h.240) a) AH cắt BC ở D và cắt (O) ở K. Dễ dàng chứng minh $DH = DK$. Sử dụng phép vị tự: Quỹ tích của K là (O; R). D là ảnh của K trong phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$. Chứng minh trực tiếp: Gọi Q là



Hình 240

trung điểm của OH. Ta có $QD = \frac{OK}{2} = \frac{R}{2}$. Quỹ tích của D là đường tròn $(Q; \frac{R}{2})$.

b) Gọi M là trung điểm của BC, AM cắt OH ở G. Dễ thấy G chia OH theo tỉ số 1 : 2 nên G là điểm cố định. M là ảnh của A trong phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$. Quỹ tích của M chính là đường tròn (Q) ở câu a (đó là đường tròn O-le của ΔABC).

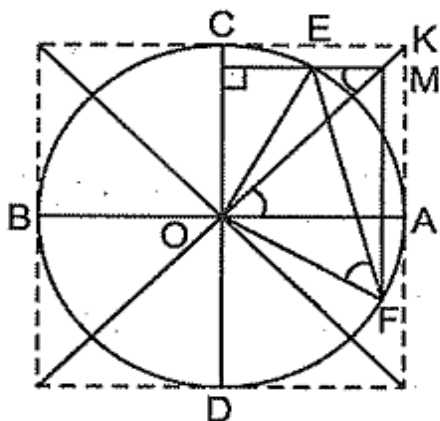
374. Xét $E \in \widehat{AC}$, $F \in \widehat{AD}$ (h.241). Do $OA \parallel ME$ và OEMF là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{AOM} = \widehat{OME} = \widehat{OFE} = 45^\circ.$$

Do đó M thuộc tia phân giác của góc AOC.

Giới hạn: M thuộc đoạn thẳng OK của tia phân giác đó (OK là đường chéo của hình vuông AOCK).

Tương tự đối với các vị trí khác của E và F trên đường tròn, ta được quỹ tích của M là hai đường chéo của hình vuông có cạnh tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, B, C, D.



Hình 241

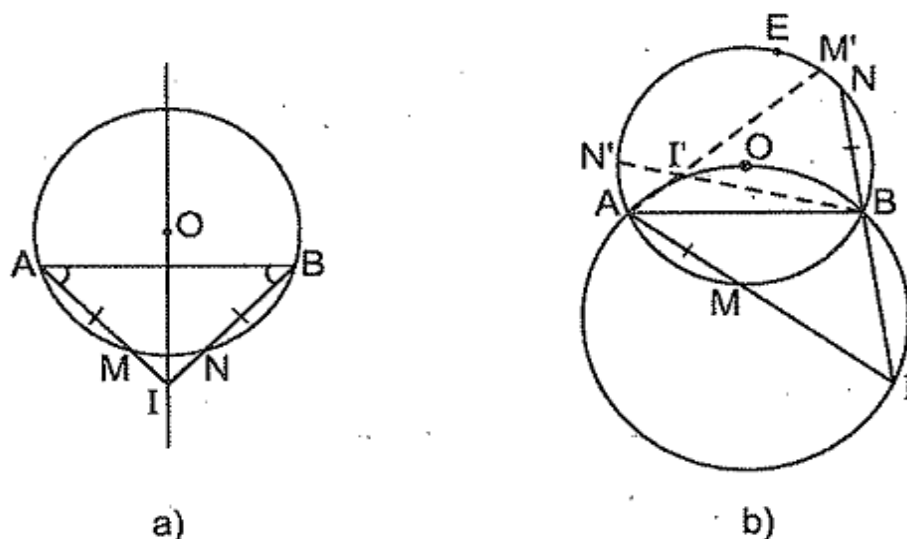
375. Xét hai trường hợp:

a) Các cung AM, BN ngược chiều (h.242a). Ta có

$$\widehat{AN} = \widehat{BM} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{ABN} \Rightarrow IA = IB.$$

Quỹ tích của I là đường trung trực của AB.

b) Các cung AM, BN cùng chiều (h.242b). Đặt $\widehat{AOB} = 2\alpha$. Ta chứng minh bốn điểm A, O, B, I thuộc cùng một đường tròn bằng cách chứng minh:

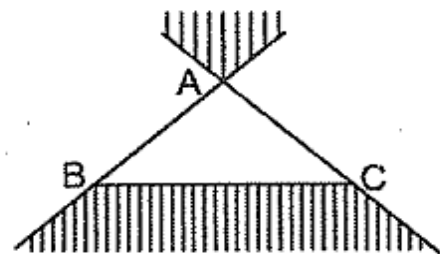


Hình 242

- Nếu I và O cùng phía đối với AB (trường hợp này ứng với $M \in \widehat{BE}$ trong đó E thuộc cung lớn AB của (O) sao cho $AE = AB$) thì $\widehat{AIB} = 2\alpha$.
- Nếu I và O khác phía đối với AB (trường hợp này ứng với các vị trí còn lại của M trên đường tròn O) thì $\widehat{AIB} = 180^\circ - 2\alpha$.

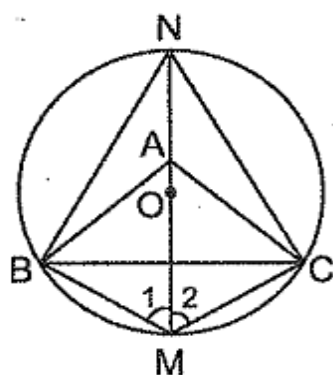
Quỹ tích của I là đường tròn ngoại tiếp $\triangle AOB$.

376. Trước hết ta có nhận xét : Để MA là tia phân giác của góc BMC thì tia MA phải cắt cạnh BC. Do đó M phải nằm trong góc A (nhưng không nằm trong $\triangle ABC$) hoặc M nằm trong góc đối đỉnh với góc A, tức là M thuộc phần gạch sọc trên hình 243.

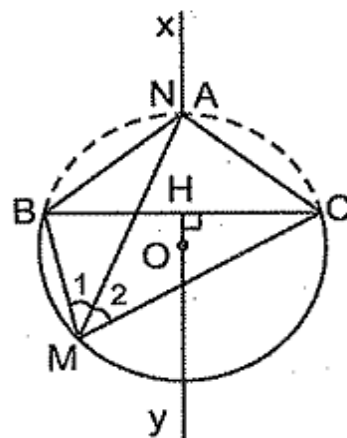


Hình 243

Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle MBC$. Xét hai trường hợp :



Hình 244



Hình 245

a) Đường tròn (O) không đi qua A (h.244). Gọi N là giao điểm của tia MA với đường tròn. Do $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ nên $\widehat{BN} = \widehat{NC}$ suy ra $BN = NC$. Ta lại có

$AB = AC$, do đó NA là đường trung trực của BC . Điểm M thuộc phần đường trung trực của BC không nằm trong $\triangle ABC$.

b) Đường tròn (O) đi qua A (h.245). Khi đó đường tròn (O) xác định vì nó chính là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Mọi điểm M thuộc cung BC không chứa A đều thỏa mãn bài toán. Mọi điểm M thuộc cung BC chứa A không thỏa mãn bài toán (do nhận xét nêu ở trên).

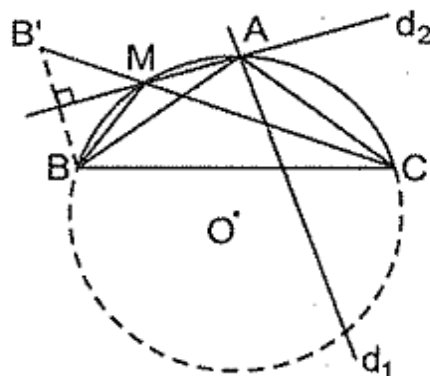
Kết luận : Quỹ tích của M gồm phần đường trung trực của BC nằm ngoài tam giác ABC và một cung như trên hình 245.

377. (h.246)

– Xét đường thẳng d_1 cắt cạnh BC : Điểm M nằm trên cạnh BC .

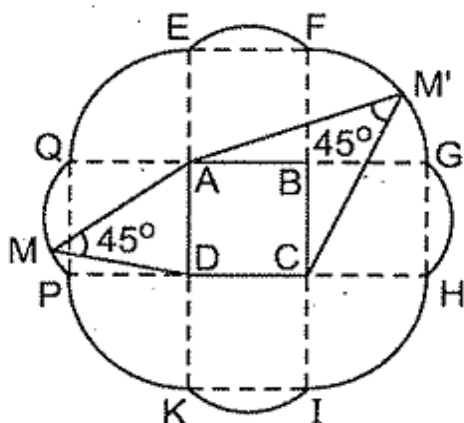
– Xét đường thẳng d_2 không cắt cạnh BC : Điểm M nằm trên cung BAC của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Quỹ tích của M là đoạn thẳng BC và cung BAC của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

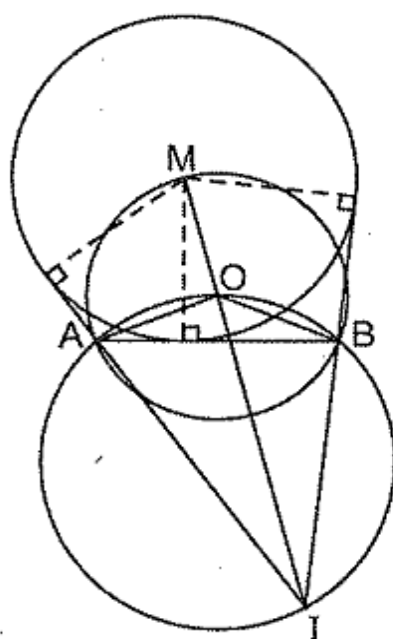


Hình 246

378. Quỹ tích của M gồm tám cung như trên hình 247. Cung PQ là một phần của cung chứa góc 45° dựng trên AD (cũng là cung phần tư đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ADPQ$). Cung FG là một phần của cung chứa góc 45° dựng trên AC (cũng là cung phần tư đường tròn tâm B bán kính BA).



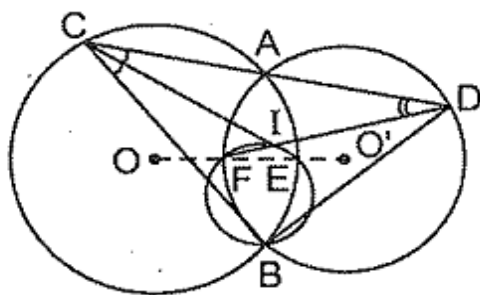
Hình 247



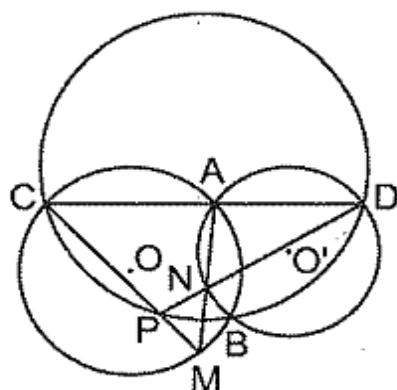
Hình 248

379. Quỹ tích của I là đường tròn ngoại tiếp $\triangle AOB$ (h.248).

380. Gọi E, F là điểm chính giữa của các cung AB (phần cung của đường tròn này nằm trong đường tròn kia). Ta có O, O', E, F thẳng hàng. Quỹ tích của I là đường tròn ngoại tiếp $\triangle BEF$ (h.249).



Hình 249



Hình 250

381. Quỹ tích của P là đường tròn ngoại tiếp $\triangle CBD$ (h.250).

382. (h.251, 252, 253). Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB, AC thì E, F cố định. Ta tính $\widehat{EHF}$

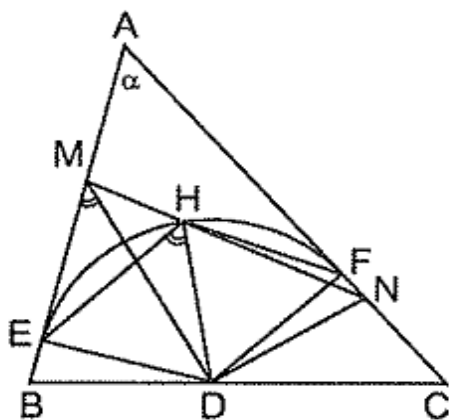
$$\widehat{EHF} = \begin{cases} \widehat{DHE} + \widehat{DHF} & \text{nếu } \widehat{DHE} + \widehat{DHF} \leq 180^\circ \text{ (h.251, h.253)} \\ 360^\circ - (\widehat{DHE} + \widehat{DHF}) & \text{nếu } \widehat{DHE} + \widehat{DHF} > 180^\circ \text{ (h.252)} \end{cases}$$

Trước hết tính $\widehat{DHE} + \widehat{DHF}$. Do D, H, M, E thuộc cùng một đường tròn, D, H, F, N thuộc cùng một đường tròn nên $\widehat{DHE} = \widehat{DMB}$, $\widehat{DHF} = \widehat{DNC}$ suy ra

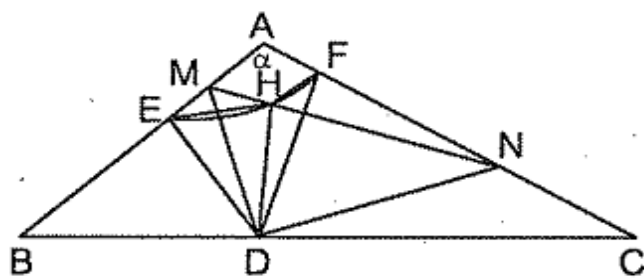
$$\begin{aligned} \widehat{DHE} + \widehat{DHF} &= \widehat{DMB} + \widehat{DNC} = 360^\circ - (\widehat{AMD} + \widehat{AND}) \\ &= \widehat{MDN} + \widehat{A} = 90^\circ + \alpha \text{ (đặt } \widehat{A} = \alpha). \end{aligned}$$

Xét các trường hợp :

- a) $\alpha < 90^\circ$ (h.251), $\therefore \widehat{EHF} = 90^\circ + \alpha$. Quỹ tích của H là cung chứa góc $90^\circ + \alpha$ dựng trên EF (cùng phía với A đối với EF).



Hình 251



Hình 252

b) $\alpha > 90^\circ$ (h.252) :

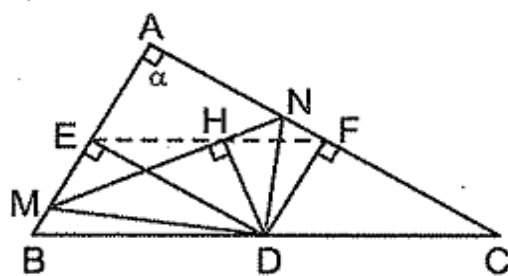
$$\widehat{EHF} = 360^\circ - (90^\circ + \alpha) = 270^\circ - \alpha.$$

Quỹ tích của H là cung chứa góc $270^\circ - \alpha$ dựng trên EF (khác phía với A đối với EF).

c) $\alpha = 90^\circ$ (h.253). Ta có

$$90^\circ + \alpha = 180^\circ.$$

Các điểm E, H, F thẳng hàng. Quỹ tích của H là đoạn thẳng EF.



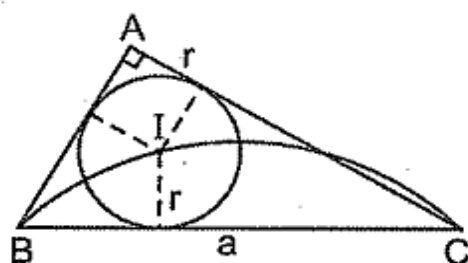
Hình 253

DỤNG HÌNH

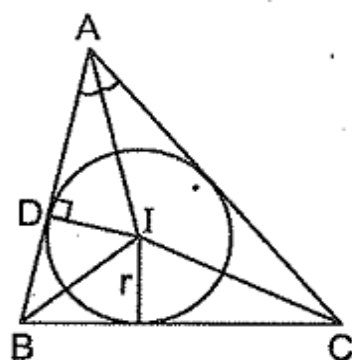
383. Dụng theo thứ tự ngược.

384. Dụng theo thứ tự ngược.

385. a) (h.254). Đặt $BC = a$. Trước hết tính a theo p và r được $a = p - r$. Dụng $BC = a$. Sau đó dụng I.



Hình 254



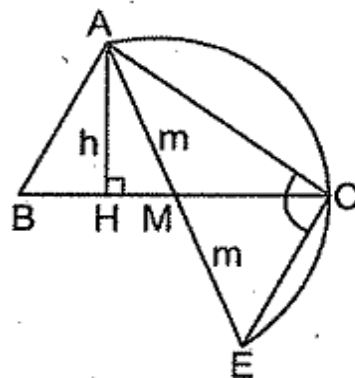
Hình 255

b) (h.255) Giả sử $BC = a$. Ta có $ID = r$, ta tính được $AD = p - a$, do đó dựng được góc IAD , nên dựng được $\widehat{BIC} = 90^\circ + \widehat{IAD}$. Hãy dựng $\triangle BIC$, sau đó dựng A.

386. (h.256) Dụng $\triangle AHM$. Dụng E đối xứng với A qua M.

Dựng cung chứa góc $180^\circ - \widehat{A}$ dựng trên AE.

Điểm C là giao điểm của HM với cung chứa góc trên.



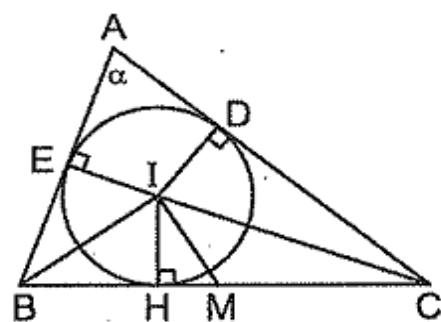
Hình 256

387. (h.257) Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC , M là trung điểm của BC. Kẻ $IH \perp BC$, $ID \perp AC$, $IE \perp AB$. Ta có

$$\begin{aligned} AC - AB &= CD - BE = CH - BH \\ &= (CM + MH) - (BM - MH) = 2MH \end{aligned}$$

Do đó $HM = \frac{d}{2}$. Dựng được ΔIHM .

Ta có $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Dựng được ΔBIC theo cách dựng ở bài 386. Sau đó dựng A.



Hình 257

388. (h.258) Để chứng minh giao điểm K của đường tròn ngoại tiếp và đoạn nối tâm I của đường tròn nội tiếp với tâm P của đường tròn bàng tiếp là trung điểm của IP.

Cách dựng

- Dựng trung điểm K của IP.
- Dựng đường tròn $(O; OK)$ cắt KI ở A.
- Dựng đường tròn $(K; KI)$ cắt (O) ở B, C.

Điều kiện có nghiệm hình là

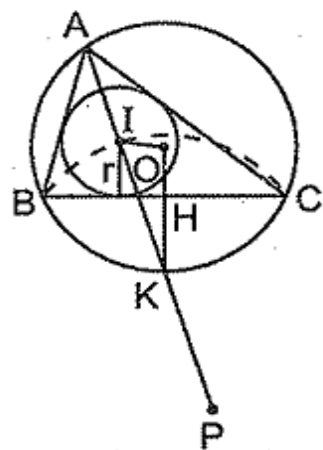
$$\begin{cases} (O; OK) \text{ cắt } (K; KI) & (1) \\ I \text{ ở bên trong } (O; OK) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow KI - OK < OK < KI + OK$$

$$\Leftrightarrow KI - OK < OK$$

$$(2) \Leftrightarrow OI < OK.$$

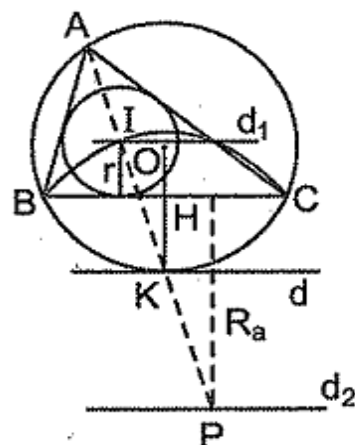
Gộp (1) và (2) ta có $OI < OK$.



Hình 258

389. (h.259)

- Dựng $BC = a$.
- Dựng d_1, d_2 song song với BC (nằm về hai phía của BC) cách BC khoảng cách r, R_a .
- Dựng đường thẳng d song song cách đều d_1, d_2 .
- Dựng giao điểm K của d với đường trung trực của BC.
- Dựng đường tròn $(K; KB)$, cắt d_1 ở I.
- KI cắt đường tròn ngoại tiếp ΔBKC ở A.



Hình 259

Gọi H là trung điểm của BC. Điều kiện có nghiệm hình là đường tròn (K ; KB) có giao điểm với d_1 , tức là KB lớn hơn hoặc bằng khoảng cách từ K đến d_1 .

Ta có
$$KH = \frac{R_a - r}{2},$$

(chú ý rằng K, H là trung điểm hai đường chéo của hình thang có hai đáy bằng R_a và r)

$$KB^2 = BH^2 + KH^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{R_a - r}{2}\right)^2.$$

Khoảng cách từ K đến d_1 bằng $\frac{R_a + r}{2}$. Do đó điều kiện có nghiệm hình là

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{R_a - r}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{R_a + r}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a \geq 2\sqrt{rR_a}, \text{ trong đó } R_a > r.$$

390. Lấy $D \in AB$, $E \in AC$ sao cho $BD = CE = BC$. Thế thì $AD = m$, $AE = n$, $\triangle ADE$ xác định ngay.

Cách 1. (h.260) Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, ta có

$$\widehat{CIE} = \widehat{CIB} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}; \quad \widehat{BID} = \widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

suy ra $\widehat{DIE} = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2}.$

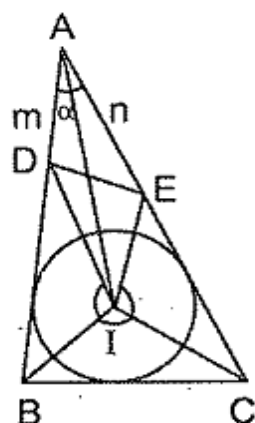
Điểm I thỏa mãn hai điều kiện :

- I thuộc tia phân giác của góc A.
- I thuộc cung chứa góc $90^\circ - \frac{3\alpha}{2}$ dựng trên DE (khác phía với A đối với DE).

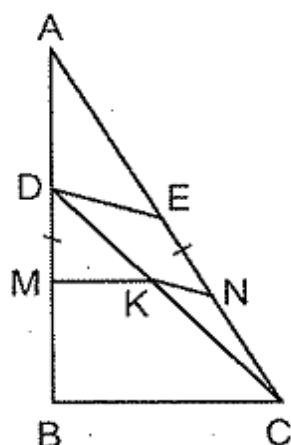
Điều kiện có nghiệm hình : $\alpha < 60^\circ$.

Cách 2. (h.261) Lấy D, E trên AB, AC như cách 1. Lấy $M \in BD$, $N \in CE$ sao cho $DM = EN$. Kẻ MK song song với BC, cắt DC ở K. Ta có :

$$\frac{DK}{DC} = \frac{DM}{DB} = \frac{EN}{EC} \text{ nên } KN \parallel DE.$$



Hình 260.



Hình 261

Mặt khác, $\frac{DM}{DB} = \frac{MK}{BC}$ nên $DM = MK$.

Điểm K thỏa mãn hai điều kiện :

- K thuộc đường thẳng đi qua N và song song với DE.
- K thuộc đường tròn (M ; MD).

Giao điểm của DK và AE cho ta điểm C, từ đó dựng được B.

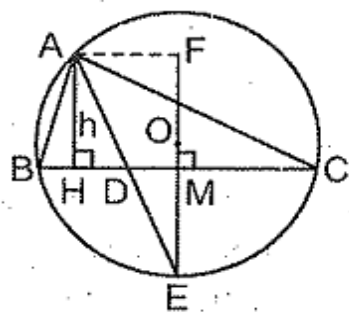
391. (h.262) *Phân tích.* Gọi E là giao điểm của AD với đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có

$$AD \cdot DE = BD \cdot DC = AD^2 \text{ nên } DE = AD.$$

Gọi M là giao điểm của OE và BC, ta có $ME = AH = h$.

Cách dựng

- Dựng $BC = a$.
- Trên đường vuông góc với BC tại trung điểm M của BC, lấy E và F sao cho $ME = MF = h$.
- Dựng đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle BEC$.
- Đường thẳng đi qua F và song song với BC cắt (O) ở A.



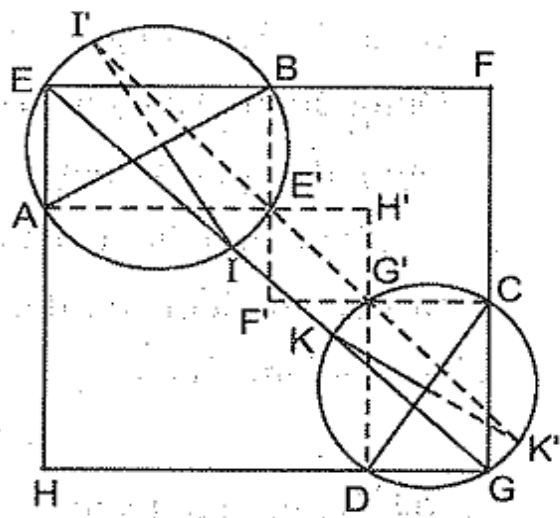
Hình 262

392. (h.263) Xét A và B thuộc hai cạnh kề của hình vuông :

- Dựng đường tròn đường kính AB rồi dựng điểm chính giữa I của cung AB.
- Dựng đường tròn đường kính CD rồi dựng điểm chính giữa K của cung CD.
- Đường thẳng IK cắt các đường tròn trên tại E và G. Từ đó dựng được F và H.

Biện luận

Trong cách dựng trên (ứng với A và B thuộc hai cạnh kề của hình vuông), có hai cách chọn điểm I, có hai cách chọn điểm K, ta được bốn nghiệm hình.



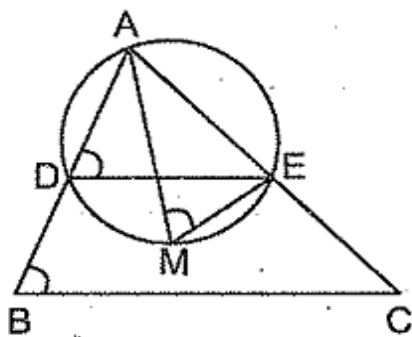
Hình 263

Xét A và C thuộc hai cạnh kề của hình vuông, ta cũng được bốn nghiệm hình. Cũng vậy với A và D thuộc hai cạnh kề của hình vuông.

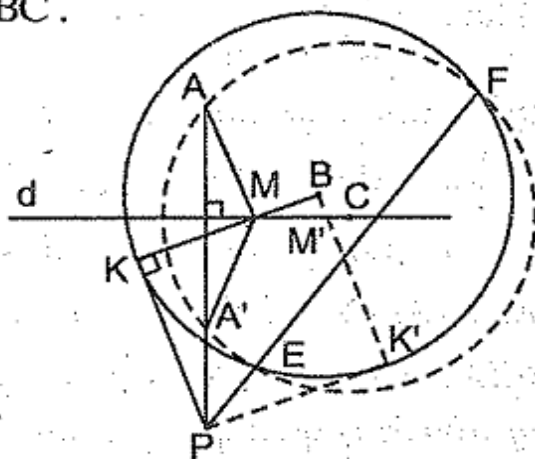
Vì mỗi nghiệm hình nói trên được tính trùng nhau hai lần nên nếu I không trùng K thì bài toán có sáu nghiệm hình.

Riêng trường hợp I trùng K, bài toán có vô số nghiệm hình.

393. (h.264) Chứng minh rằng $\widehat{AME} = \widehat{ABC}$.



Hình 264



Hình 265

394. (h.265) *Phân tích.* Lấy A' đối xứng với A qua d . Trên tia đối của tia MB lấy K sao cho $MK = MA$. Ta có $BK = a$. Dựng đường tròn $(B; a)$, đường tròn này và A' là cố định.

Kẻ tiếp tuyến của (B) tại K , cắt AA' ở P . Để dựng M , cần dựng K , muốn vậy cần dựng P .

Vẽ đường thẳng bất kì đi qua P , cắt (B) ở E và F . Ta có

$$PA'.PA = PK^2 = PE.PF$$

nên A, A', E, F thuộc cùng một đường tròn. Suy ra cách dựng như sau :

Cách dựng

- Dựng A' đối xứng với A qua d .
- Dựng đường tròn $(B; a)$.
- Dựng đường tròn phụ (C) bất kì đi qua A và A' , cắt (B) ở E, F .
- Gọi P là giao điểm của AA' và EF , dựng tiếp tuyến PK với (B) .
- M là giao điểm của BK và d .

Chứng minh. Ta có

$$PA'.PA = PE.PF = PK^2,$$

từ đó PK là tiếp tuyến của đường tròn đi qua A, A', K . Tâm của đường tròn này chính là M (vì $MK \perp PK$ tại K và $M \in d$ là trung trực của AA'). Vậy $MA = MK$, do đó

$$BM + MA = BM + MK = BK = a.$$

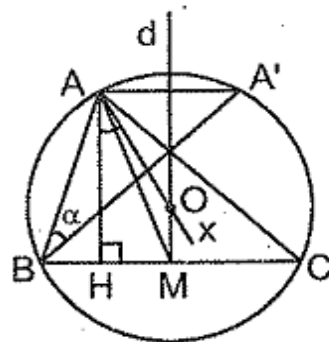
Biện luận

Nếu $BA' < a$ thì bài toán có hai nghiệm hình (dựng được hai tiếp tuyến từ P với (B) , trên hình vẽ là PK và PK').

Nếu $BA' = a$ thì bài toán có một nghiệm hình.

Nếu $BA' > a$ thì bài toán không có nghiệm hình.

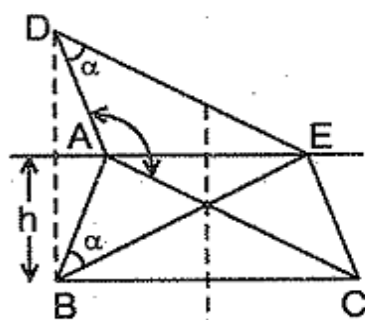
395. (h.266) *Cách 1.* Dựng $\triangle AHM$ vuông tại H. Qua M dựng $d \parallel AH$. Dựng A' đối xứng với A qua d. Ta có $\widehat{ABA'} = \widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$ nên dựng B là giao điểm của HM với cung chứa góc α dựng trên AA' .



Hình 266

Cách 2. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta chứng minh được $\widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{HAO}$ sau đó ta dựng $\triangle AHM$ vuông tại H. Dựng $\widehat{HAX} = \alpha$ (Ax và AM cùng phía đối với AH). Dựng đường vuông góc với HM tại M, cắt Ax ở O. Từ đó dựng được tam giác.

396. (h.267) Lấy E đối xứng với A qua đường trung trực của BC thì $\widehat{ABE} = \widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$. Lấy D đối xứng với B qua AE thì B, C, D xác định và $\widehat{ADE} = \alpha$.



Hình 267

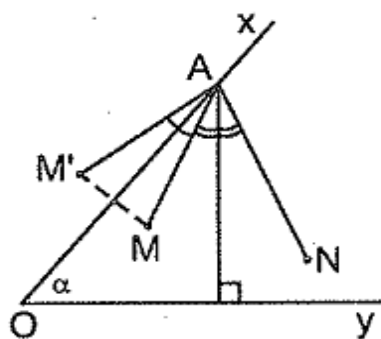
Ta có ADEC là hình bình hành nên

$$\widehat{DAC} = 180^\circ - \widehat{ADE} = 180^\circ - \alpha.$$

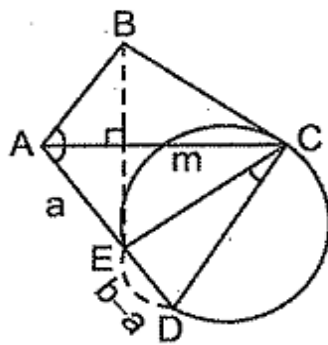
Từ đó dựng được đỉnh A.

397. (h.268) Lấy M' đối xứng với M qua Ox. Chứng minh rằng

$$\widehat{M'AN} = 2(90^\circ - \alpha) \text{ với } \widehat{xOy} = \alpha.$$



Hình 268



Hình 269

398. (h.269) Lấy E đối xứng với B qua AC. Chứng minh rằng $\widehat{DCE} = \alpha$. Suy ra cách dựng :

- Dựng $ED = b - a$. Dựng cung chứa góc α dựng trên ED.
- Trên tia DE lấy A sao cho $EA = a$.

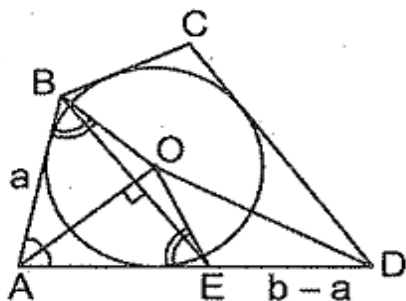
– Dựng đường tròn $(A; m)$ cắt cung chứa góc α ở C .

– Dựng B đối xứng với E qua AC .

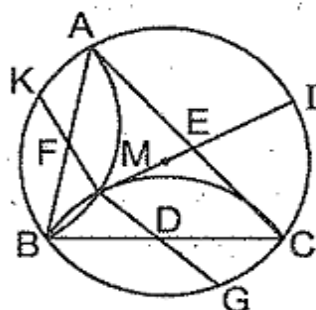
399. (h.270) Gọi O là tâm của đường tròn nội tiếp tứ giác.

Giả sử $b \geq a$. Lấy E đối xứng với B qua AO . Thế thì $ED = b - a$,

$\widehat{OEA} = \widehat{OBA} = \frac{\alpha}{2}$. Trước hết dựng $\triangle OED$ (g.c.g).



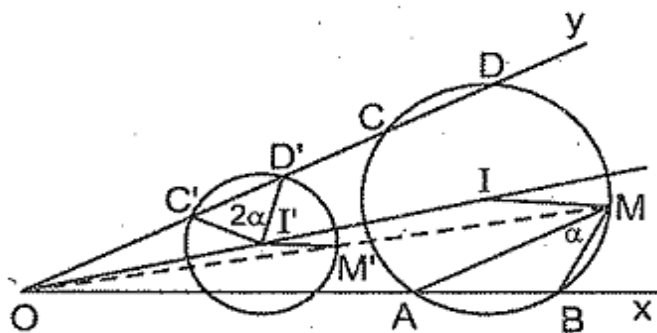
Hình 270



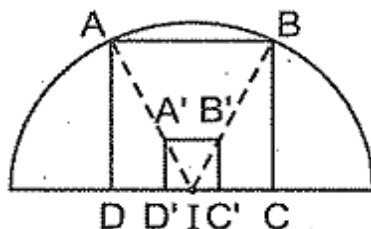
Hình 271

400. (h.271) Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB . Điểm M phải thuộc các cung đối xứng với cung BC qua D , đối xứng với cung AC qua E , đối xứng với cung AB qua F . Điểm M là trực tâm của $\triangle ABC$.

401. (h.272) Đặt $\widehat{xOy} = \alpha$. Lấy I' bất' kì thuộc tia phân giác của góc xOy . Dễ dàng dựng được đường tròn phụ (I') cắt Oy ở $C'D'$ sao cho $\widehat{C'I'D'} = 2\alpha$. Bạn đọc tự giải tiếp bài toán.



Hình 272



Hình 273

402. Cách dựng được thể hiện trên hình 273.

403. (h.274) Ta có $\widehat{AMD} = \widehat{ABD}$, $\widehat{AND} = \widehat{ACD}$ nên

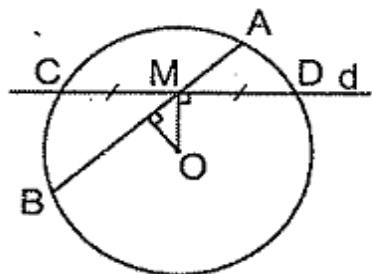
$$\triangle MDN \sim \triangle BAC \text{ (g.g.)}.$$

Để $S_{MDN} = 2S_{BAC}$ thì tỉ số các đường cao tương ứng DA và AH phải bằng $\sqrt{2}$.

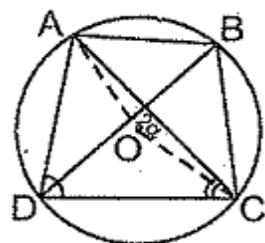
Như vậy D thuộc đoạn thẳng HC sao cho $HD = AH$.

TOÁN CỰC TRỊ

406. (h.277) Gọi M là giao điểm của AB và d. Ta có tích MC.MD không đổi nên $CD = MC + MD$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $MC = MD$. Từ đó suy ra cách dựng : O là giao điểm của đường trung trực của AB và đường vuông góc với d tại M.



Hình 277



Hình 278

407. (h.278) Xét các hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{D} = \alpha$ nội tiếp đường tròn (O), đó là các hình thang cân có độ dài AC không đổi. Đặt $AC = a$.

Ta có $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2} AC \cdot BD$ (dễ chứng minh) nên

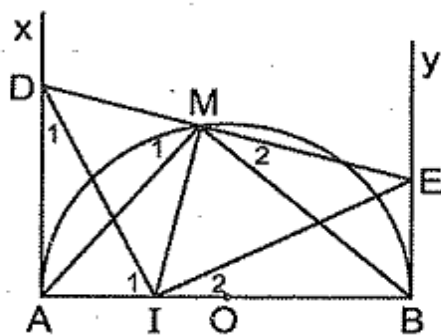
$$\max S = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow BD \perp AC \Leftrightarrow \widehat{ACD} = 45^\circ.$$

Cách dựng như sau : Dựng $\widehat{AOC} = 2\alpha$. Dựng dây CD sao cho $\widehat{ACD} = 45^\circ$. Dựng dây DB vuông góc với AC.

408. (h.279) a) Do các tứ giác nội tiếp, ta có $\widehat{M}_1 = \widehat{I}_1$, $\widehat{M}_2 = \widehat{I}_2$. Do $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 90^\circ$ nên $\widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 = 90^\circ$, suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{I}_2$.

$\triangle ADI \sim \triangle BIE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{BI} = \frac{AI}{BE} \Rightarrow AD \cdot BE = AI \cdot BI.$$

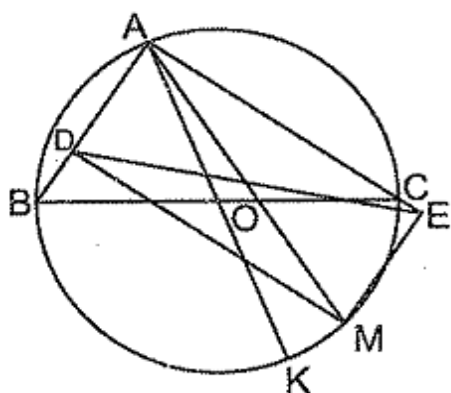


Hình 279

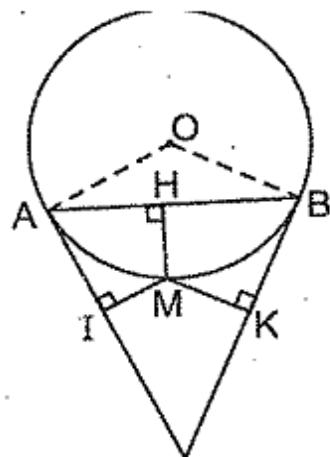
- b) Do AB không đổi nên diện tích hình thang ABED nhỏ nhất khi và chỉ khi $AD + BE$ nhỏ nhất. Tích $AD \cdot BE$ không đổi nên $AD + BE$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $AD = BE$, khi đó $IM \perp AB$.

409. (h.280) ADME là hình chữ nhật. Kẻ đường kính AK, ta có $DE = AM \leq AK$.

Do đó $\max DE = AK \Leftrightarrow M \equiv K$. Khi đó $DE \equiv BC$.



Hình 280



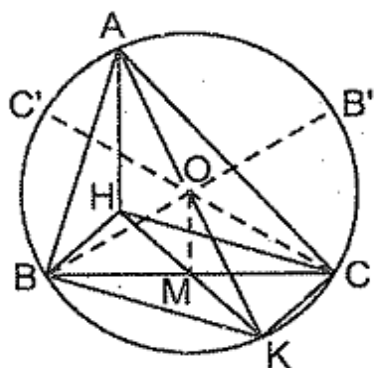
Hình 281

410. (h.281) Chứng minh rằng $MI \cdot MK = MH^2$ với H là hình chiếu của M trên AB (xem bài 282). Do đó điểm M phải tìm là điểm chính giữa của cung AB.

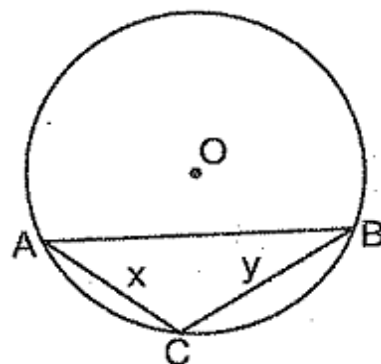
411. (h.282) Vẽ đường kính AOK, gọi M là giao điểm của HK và BC. Ta có $HA = 2 OM$ không đổi, $HB + HC = KB + KC$. Do đó

$HA + HB + HC$ lớn nhất $\Leftrightarrow KB + KC$ lớn nhất.

Vẽ các đường kính BB' , CC' . Khi điểm A di chuyển trên cung $B'C'$ thì điểm K di chuyển trên cung BC. Tổng $KB + KC$ lớn nhất khi và chỉ khi K là điểm chính giữa của cung BC (xem ví dụ 61). Khi đó A là điểm chính giữa của cung lớn BC.



Hình 282



Hình 283

412. (h.283) Đặt $CA = x$, $CB = y$. Ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y}.$$

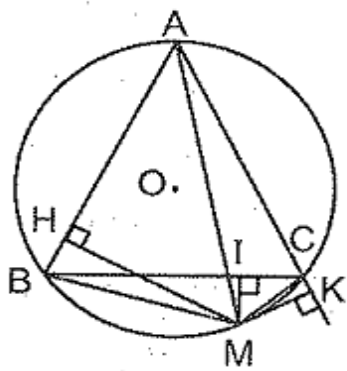
Do đó $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x + y$ lớn nhất $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa của cung AB (xem ví dụ 61).

413. (h.284) Đặt $MA + MB + MC = d_1$, $MH + MI + MK = d_2$, $d = d_1 + d_2$. Chứng minh rằng

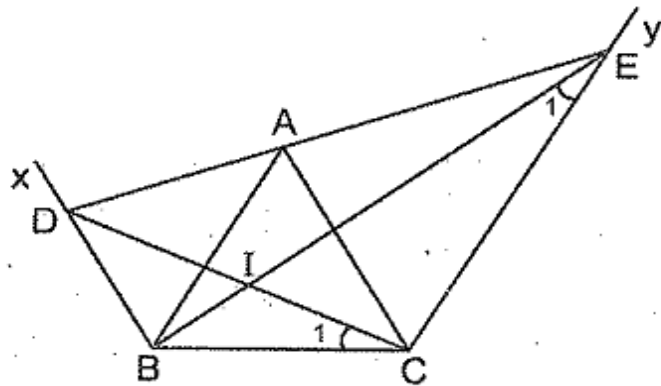
$$d_1 = 2MA, d_2 = \frac{1}{a}(2S_{ABC} + 4S_{MBC}) \text{ với } AB = BC = CA = a.$$

d nhỏ nhất khi $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$ (khi đó cả d_1 và d_2 đều nhỏ nhất).

d lớn nhất khi M ở chính giữa cung BC (khi đó cả d_1 và d_2 đều lớn nhất).



Hình 284



Hình 285

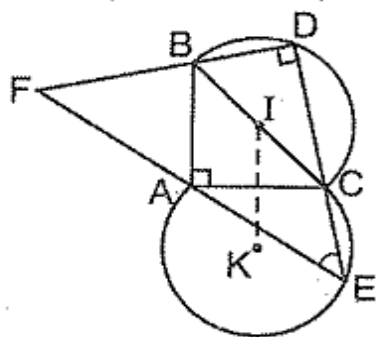
414. (h.285) Ta có $\frac{DB}{BA} = \frac{AC}{CE}$ nên $\frac{DB}{BC} = \frac{BC}{CE}$.

Từ đó $\triangle DBC \sim \triangle BCE$ (c.g.c) suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{E}_1$. Do đó

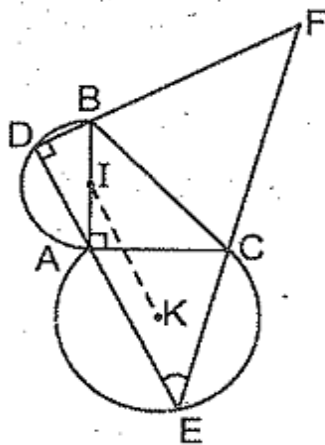
$$\widehat{BIC} = \widehat{ICE} + \widehat{E}_1 = \widehat{ICE} + \widehat{C}_1 = 120^\circ.$$

Tam giác BIC có BC cố định, $\widehat{BIC}$ không đổi nên chu vi $\triangle BIC$ lớn nhất khi và chỉ khi $\triangle BIC$ cân tại I (xem ví dụ 61). Khi đó $d \parallel BC$.

415. a) Gọi D là đỉnh góc vuông. Giả sử cạnh huyền EF đi qua A. Ta thấy D thuộc cung chứa góc 90° dựng trên BC, E thuộc cung chứa góc 45° dựng trên AC (h.286a). Dễ dàng giải tiếp bài toán.



a)



b)

Hình 286

b) Xét hai trường hợp :

– Cạnh huyền EF đi qua đỉnh góc vuông A (h. 286a). Gọi I, K là tâm của các cung chứa góc 90° và 45° nói trên. Ta tính được $IK = 10 \text{ cm}$, $DE \leq 2IK = 20 \text{ cm}$ (xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $DE \parallel IK$).

– Cạnh huyền EF đi qua đỉnh góc nhọn, chẳng hạn đi qua C (h.286b). Ta tính được $IK = 5\sqrt{5} \text{ cm}$, $DE \leq 2IK = 10\sqrt{5}$.

Ta thấy $10\sqrt{5} > 20$. Do đó diện tích lớn nhất của ΔDEF bằng

$$\frac{1}{2}(10\sqrt{5})^2 = 250 \text{ cm}^2.$$

416. (h.287) a) ΔEMC cân tại E nên

$$\widehat{ECM} = 90^\circ - \frac{\widehat{CEM}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

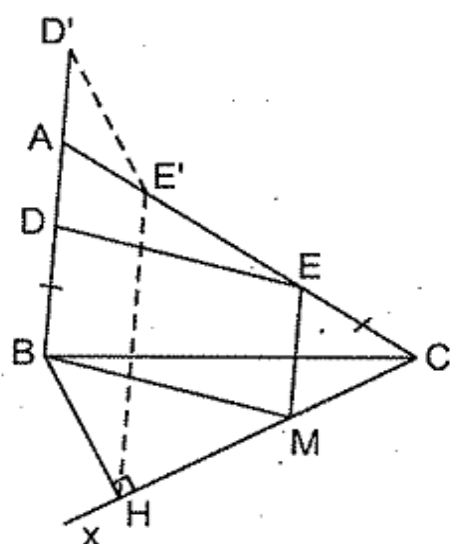
Quỹ tích của M là tia Cx, trong đó $\widehat{ACx} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$,

Cx và B nằm cùng phía đối với AC.

b) DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ BM nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow M \equiv H \text{ (BH} \perp \text{Cx)}.$$

Khi đó E ở vị trí E', D ở vị trí D' với BHE'D' là hình bình hành.



Hình 287

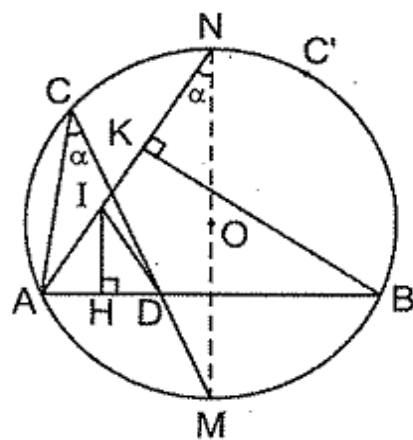
417. (h.288) a) Gọi MN là đường kính của đường tròn (O).

Đường trung trực của AD cắt AN ở I. Ta sẽ chứng minh rằng I là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔACD .

Thật vậy, đặt $\widehat{ACM} = \widehat{ANM} = \alpha$ thì $\widehat{AIH} = \alpha$ (H là trung điểm của AD) nên $\widehat{AID} = 2\alpha$. Do $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{AID}$ nên đường tròn tâm I (có bán kính IA, ID) đi qua C, tức là I là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔACD .

Quỹ tích của I là đoạn thẳng AN, trừ các điểm A và N.

b) BI nhỏ nhất $\Leftrightarrow I \equiv K$ ($BK \perp AN$). Vẽ đường tròn (K, KA), cắt (O) ở C', đó là vị trí phải tìm của điểm C.



Hình 288

418. (h.289)

$$a) \widehat{BNC} = \widehat{BNM} + \widehat{MNC} = \widehat{ABM} + \widehat{ACM}$$

$$\text{nên } \widehat{BNC} + \widehat{BAC} = 180^\circ,$$

suy ra ABNC là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của NM và đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có

$$\widehat{KAC} = \widehat{KNC} = \widehat{ACM}$$

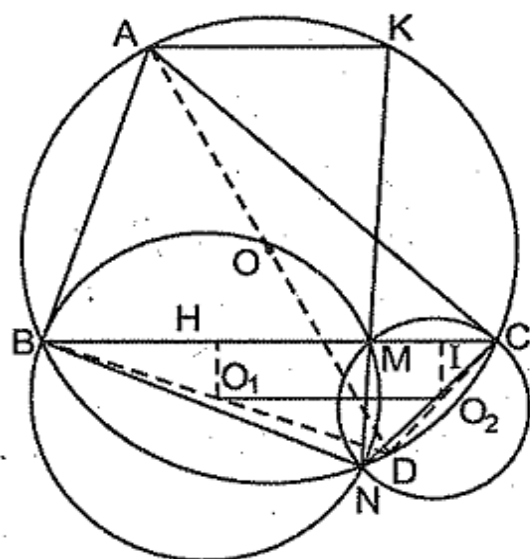
nên $AK \parallel BC$. Điểm K là điểm cố định.

c) Kẻ O_1H và O_2I vuông góc với BC. Ta có

$$O_1O_2 \geq HI = \frac{BC}{2}.$$

Xảy ra $O_1O_2 = HI$ khi và chỉ khi $O_1O_2 \parallel BC$. Gọi D là giao điểm của BO_1 và CO_2 thì AD là đường kính của đường tròn (O) nên D là điểm cố định.

Do $O_1O_2 \parallel BC$ và $O_1O_2 = \frac{BC}{2}$ nên O_1O_2 là đường trung bình của $\triangle BDC$, dễ thấy khi đó M là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BC.



Hình 289

419. (h.290) a) Đặt $OI = d$ (hằng số). Ta có :

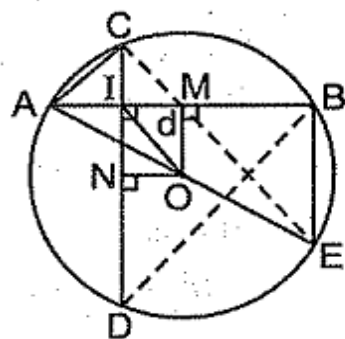
$$OM^2 + ON^2 = OM^2 + MI^2 = OI^2 = d^2,$$

$$AB^2 + CD^2 = 4BM^2 + 4DN^2 =$$

$$= 4(R^2 - OM^2) + 4(R^2 - ON^2)$$

$$= 8R^2 - 4(OM^2 + ON^2)$$

$$= 8R^2 - 4d^2 = 4(2R^2 - d^2).$$



Hình 290

Vẽ đường kính AE. Để chứng minh CBED là hình thang cân, $BD = CE$. Do đó

$$AC^2 + BD^2 = AC^2 + CE^2 = AE^2 = 4R^2.$$

b) Bạn đọc tự chứng minh hình chữ nhật OMIN có diện tích (chu vi) lớn nhất khi nó là hình vuông. Khi đó các tia IB, ID tạo với tia IO các góc bằng 45° (h.291a).

418. (h.289)

$$a) \widehat{BNC} = \widehat{BNM} + \widehat{MNC} = \widehat{ABM} + \widehat{ACM}$$

$$\text{nên } \widehat{BNC} + \widehat{BAC} = 180^\circ,$$

suy ra ABNC là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của NM và đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có

$$\widehat{KAC} = \widehat{KNC} = \widehat{ACM}$$

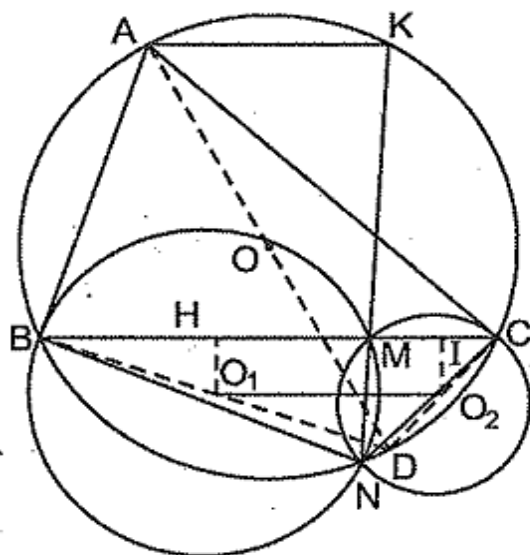
nên $AK \parallel BC$. Điểm K là điểm cố định.

c) Kẻ O_1H và O_2I vuông góc với BC. Ta có

$$O_1O_2 \geq HI = \frac{BC}{2}.$$

Xảy ra $O_1O_2 = HI$ khi và chỉ khi $O_1O_2 \parallel BC$. Gọi D là giao điểm của BO_1 và CO_2 thì AD là đường kính của đường tròn (O) nên D là điểm cố định.

Do $O_1O_2 \parallel BC$ và $O_1O_2 = \frac{BC}{2}$ nên O_1O_2 là đường trung bình của $\triangle BDC$, dễ thấy khi đó M là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BC.



Hình 289

419. (h.290) a) Đặt $OI = d$ (hằng số). Ta có :

$$OM^2 + ON^2 = OM^2 + MI^2 = OI^2 = d^2,$$

$$AB^2 + CD^2 = 4BM^2 + 4DN^2 =$$

$$= 4(R^2 - OM^2) + 4(R^2 - ON^2)$$

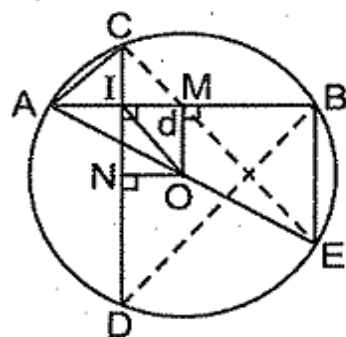
$$= 8R^2 - 4(OM^2 + ON^2)$$

$$= 8R^2 - 4d^2 = 4(2R^2 - d^2).$$

Vẽ đường kính AE. Để chứng minh CBED là hình thang cân, $BD = CE$. Do đó

$$AC^2 + BD^2 = AC^2 + CE^2 = AE^2 = 4R^2.$$

b) Bạn đọc tự chứng minh hình chữ nhật OMIN có diện tích (chu vi) lớn nhất khi nó là hình vuông. Khi đó các tia IB, ID tạo với tia IO các góc bằng 45° (h.291a).



Hình 290

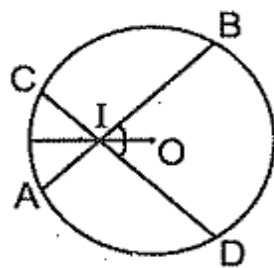
c) Ta có

$$\begin{aligned} & (AB + CD)^2 + (AB - CD)^2 \\ &= 2(AB^2 + CD^2) \\ &= 8(2R^2 - d^2), \text{ là hằng số.} \end{aligned}$$

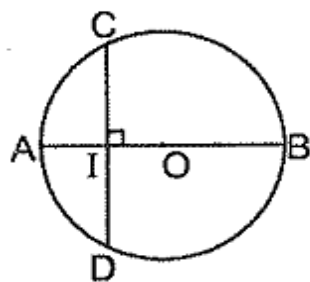
Do đó $AB + CD$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow (AB + CD)^2 \text{ lớn nhất}$$

$$\Leftrightarrow (AB - CD)^2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow AB = CD.$$



a)



b)

Hình 291

Khi đó OMIN là hình vuông, các tia IB và ID tạo với tia IO các góc bằng 45° (h.291a).

$AB + CD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (AB + CD)^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (AB - CD)^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow AB - CD$ lớn nhất (giả sử $AB \geq CD$). Có khả năng xảy ra đồng thời AB lớn nhất và CD nhỏ nhất, đó là khi AB là đường kính, CD là dây vuông góc với AB tại I (h.291b).

d) Có thể chứng minh dựa vào câu c. Sau đây là chứng minh trực tiếp :

$$\text{Ta có} \quad S_{ACBD} = \frac{1}{2} AB \cdot CD \Rightarrow 4S^2 = AB^2 \cdot CD^2.$$

Do đó S^2 lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow AB^2 \cdot CD^2$ lớn nhất (nhỏ nhất).

Xét hằng đẳng thức :

$$4AB^2 \cdot CD^2 = (AB^2 + CD^2)^2 - (AB^2 - CD^2)^2$$

Do $AB^2 + CD^2$ là hằng số (câu a) nên $AB^2 \cdot CD^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow (AB^2 - CD^2)^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB = CD$. Khi đó các tia IB, ID tạo với tia IO các góc bằng 45° (h.291a).

$AB^2 \cdot CD^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (AB^2 - CD^2)^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow AB^2 - CD^2$ lớn nhất (giả sử $AB \geq CD$). Xảy ra được đồng thời AB lớn nhất và CD nhỏ nhất (h.291b).

420. Ta biết rằng dây DE nhỏ nhất khi và chỉ khi góc nội tiếp chắn cung DE là nhỏ nhất. Xét ba trường hợp :

a) D nằm giữa M và A (h. 292a) : Ta có $\widehat{DAE} = 90^\circ - \widehat{AMB}$ nên

$$DE \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \widehat{DAE} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \widehat{AMB} \text{ lớn nhất.}$$

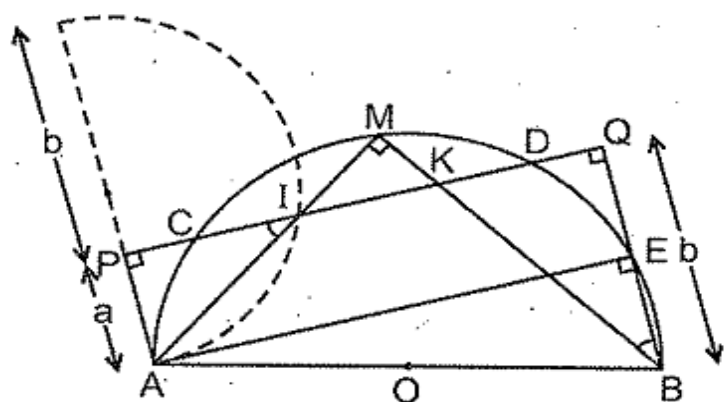
b) D trùng A (h. 292b) : Ta có DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow \widehat{DBE}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \widehat{AMB}$ lớn nhất.

Cách 2. (h. 294) Gọi P, Q theo thứ tự là hình chiếu của A, B trên CD, ta có P và Q cố định.

Do $PI + IK + KQ = PQ$ (hằng số) nên :

IK lớn nhất $\Leftrightarrow PI + KQ$ nhỏ nhất.

Đặt $AP = a$, $BQ = b$. Đặt $PI = x$, $KQ = y$.



Hình 294

$$\triangle AIP \sim \triangle KBQ \Rightarrow \frac{PI}{BQ} = \frac{AP}{KQ} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{a}{y} \Rightarrow xy = ab.$$

Do đó $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y = \sqrt{ab}$.

Cách dựng độ dài PI được thể hiện trên hình 294.

MỘT SỐ BÀI TOÁN NỔI TIẾNG

422. (h.295) a) $\triangle CEK$ có $CE = CK$ nên là tam giác cân, suy ra

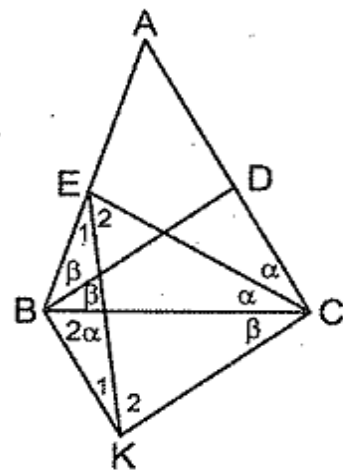
$$\widehat{E}_2 = \widehat{K}_2 = \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Ta có $\widehat{BEC} = 180^\circ - \alpha - 2\beta$ nên

$$\widehat{E}_1 = \widehat{BEC} - \widehat{E}_2 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{3\beta}{2}.$$

Ta có $\widehat{BKC} = 180^\circ - 2\alpha - \beta$ nên

$$\widehat{K}_1 = \widehat{BKC} - \widehat{K}_2 = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$



Hình 295

$$\text{b) } \widehat{E}_1 = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) - \beta$$

$$\widehat{K}_1 = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) - \alpha.$$

Nếu $\alpha < \beta$ thì $\widehat{E}_1 < \widehat{K}_1$ nên

$$BK < BE$$

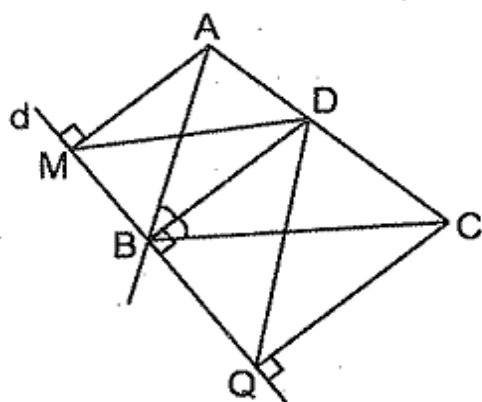
(1)

Mặt khác, $\triangle ECB$ và $\triangle DBC$ có cạnh BC chung, $CE = BD$, $\widehat{ECB} < \widehat{DBC}$ nên $BE < CD = BK$, mâu thuẫn với (1).

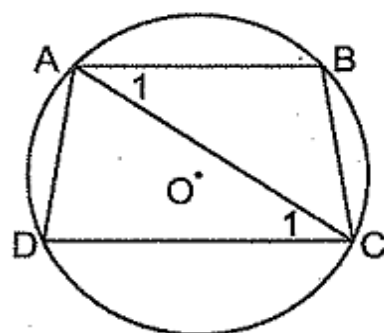
Nếu $\alpha > \beta$, tương tự cũng dẫn đến điều vô lí.

Vậy $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned} 423. \text{ (h.296) } BD \cdot MQ &= BD \cdot BM + BD \cdot BQ = 2S_{ABD} + 2S_{CBD} \\ &= 2(S_{ABD} + S_{CBD}) = 2S_{ABC}. \end{aligned}$$



Hình 296

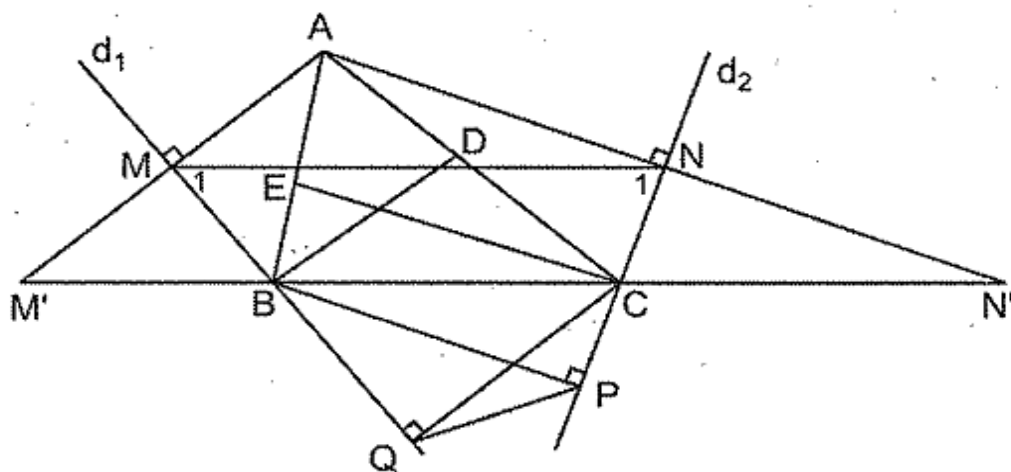


Hình 297

424. (h.297) Xét tứ giác nội tiếp $ABCD$ có $AD = BC$. Ta có $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ nên $\widehat{C}_1 = \widehat{A}_1$, suy ra $AB \parallel CD$.

Hình thang $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên là hình thang cân.

425. (h.298) a) Gọi M' , N' theo thứ tự là giao điểm của AM , AN với BC . Để thấy MN là đường trung bình của $\triangle AM'N'$ nên $MN \parallel BC$.



Hình 298

b) $BCPQ$ là tứ giác nội tiếp, mà $MN \parallel BC$ nên dễ dàng chứng minh được $MNPQ$ là tứ giác nội tiếp.

c) Theo bài 423, $BD.MQ = 2S_{ABC}$, $CE.NP = 2S_{ABC}$ suy ra

$$BD.MQ = CE.NP.$$

d) Nếu $BD = CE$ thì từ câu c suy ra $MQ = NP$.

Tứ giác nội tiếp $MNPQ$ có $MQ = NP$ nên $MN \parallel PQ$ và $MNPQ$ là hình thang cân (xem bài 424), suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$. Do đó $\widehat{CBQ} = \widehat{BCP}$ (do $MN \parallel BC$). Từ đó $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Vậy $\triangle ABC$ cân tại A.

426. (h.299) a) $\triangle NBD = \triangle AEC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BND} = \widehat{EAC} \Rightarrow ANBD$ là tứ giác nội tiếp.

b) AI là tia phân giác của góc BAC, dễ thấy $\widehat{A}_1 = \widehat{N}_1$. Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{AIK} + \widehat{ANK} &= (\widehat{A}_1 + \widehat{ADI}) + (\widehat{ANB} - \widehat{N}_1) \\ &= \widehat{ADI} + \widehat{ANB} = 180^\circ\end{aligned}$$

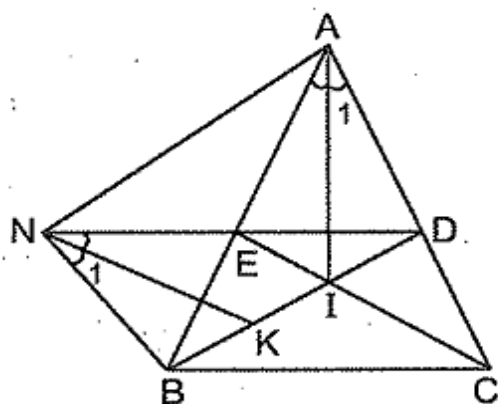
(vì $ANBD$ là tứ giác nội tiếp). Do đó $ANKI$ là tứ giác nội tiếp.

c) $\triangle NBD = \triangle AEC$ (câu a) nên các đường phân giác tương ứng NK , AI bằng nhau.

Tứ giác nội tiếp $ANKI$ có $NK = AI$ nên $AN \parallel IK$ (xem bài 424). Suy ra $AN \parallel BD$.

Hình thang $ANBD$ lại là tứ giác nội tiếp (câu a) nên là hình thang cân.

d) $ANBD$ là hình thang cân nên $ND = AB$. Ta lại có $ND = AC$ (giả thiết) nên $AB = AC$. Vậy $\triangle ABC$ cân tại A.

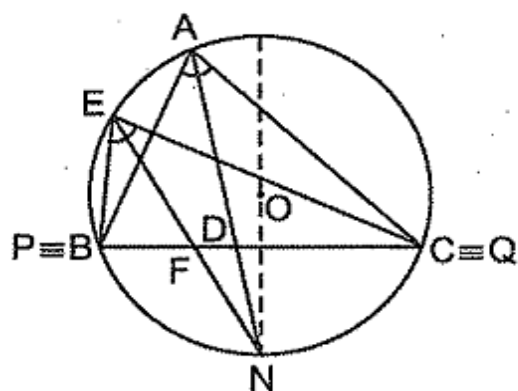


Hình 299

427. (h.300) Đặt các tam giác ABC và EPQ như hướng dẫn. Do $\widehat{BEC} = \widehat{BAC}$ nên bốn điểm B, E, A, C thuộc cùng một đường tròn.

Gọi N là điểm chính giữa của cung BC, các đường thẳng AD, EF đều đi qua N. Ta sẽ chứng minh rằng E trùng A. Giả sử E không trùng A. Không mất tính tổng quát, giả sử $E \in \widehat{AB}$. Thế thì $\widehat{NE} < \widehat{NA}$ nên $NE < NA$. Ta lại có $EF = AD$ nên $NF < ND$, vô lí.

Vậy E trùng A, tức là $\triangle ABC = \triangle EPQ$.



Hình 300

Chú ý

a) Bài 427 là một bài toán thi học sinh giỏi Toán toàn quốc năm 1979.

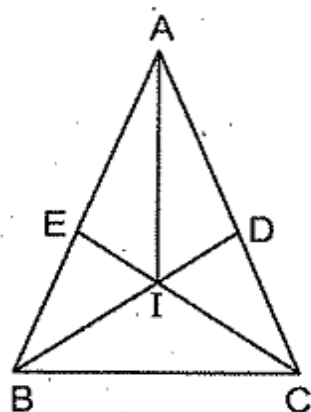
b) Từ kết quả của bài 427, ta có một cách giải cho bài toán "Tam giác có hai đường phân giác bằng nhau là tam giác cân".

Thật vậy, xét $\triangle ABC$ có các đường phân giác BD và CE bằng nhau, chúng cắt nhau tại I (h.301). Ta có AI là tia phân giác của góc A . $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có $BD = CE$,

$\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$, AI là đường phân giác chung của hai tam giác nên

$$\triangle ABD = \triangle ACE \text{ (theo bài 427).}$$

Suy ra $AB = AC$. Vậy $\triangle ABC$ là tam giác cân.



Hình 301

428. Cách 1. (h.302) Giả sử $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy K sao cho $AK = AB$, ta chứng minh được $BD = KD$. Ta cũng chứng minh được $\widehat{K_1} > \widehat{C_2}$ nên $DC > DK$. Suy ra $DC > DB$, do đó $\widehat{B_1} > \widehat{C_1}$.

$\triangle MBC$ và $\triangle NCB$ có cạnh BC chung, $BM = CN$, $\widehat{B_1} > \widehat{C_1}$ nên $MC > NB$.

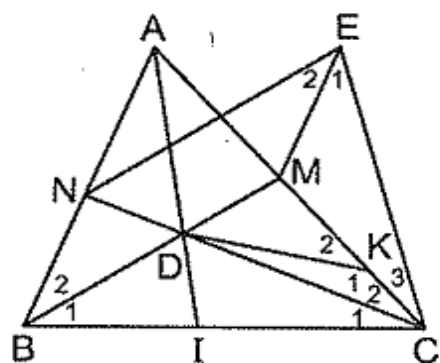
Vẽ hình bình hành $MBNE$, ta có $MC > NB = ME$ nên $\widehat{E_1} > \widehat{C_3}$. Ta lại có $\widehat{E_2} = \widehat{B_2} = \widehat{K_2} > \widehat{C_2}$ nên $\widehat{NEC} > \widehat{NCE}$, suy ra $CN > EN$. Do đó $CN > BM$, trái với giả thiết.

Giả sử $AB > AC$ cũng dẫn đến điều trái với giả thiết.

Vậy $AB = AC$.

Cách 2. Sử dụng kết quả của bài 427.

Chú ý : Bài 428 tổng quát hơn so với ví dụ 63.



Hình 302

429. (h.303) a) $\widehat{CKM} = \widehat{CEM} = \widehat{CED}$, có số đo không đổi nên K là điểm cố định.

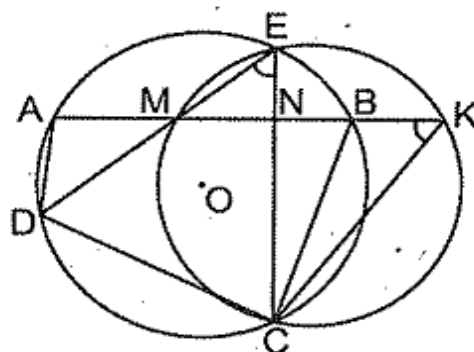
b) Xét đường tròn (O) ta có

$$AN \cdot NB = EN \cdot NC.$$

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MEKC$, ta có

$$MN \cdot NK = EN \cdot NC.$$

Suy ra



Hình 303

$$AN.NB = MN.NK \Rightarrow (a+b)c = b(c+BK)$$

$$\Rightarrow ac = b.BK \Rightarrow \frac{ac}{b} = BK \text{ (hằng số).}$$

430. (h.304) Đặt $AM = a$, $MI = b$, $IN = c$, $NB = d$.

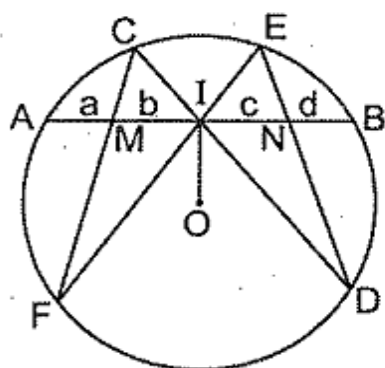
Theo kết quả của bài 429, ta có các tỉ số $\frac{a(c+d)}{b}$

và $\frac{(a+b)d}{c}$ bằng nhau.

Ta lại có $a+b = c+d$ (vì I là trung điểm của AB).

Suy ra $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$. Do đó $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{c}$. Ta lại có

$a+b = c+d$ nên $b = c$.



Hình 304

431. (h.305) Theo kết quả của bài 429 và bài 430, ta có

$$\frac{AM.IB}{MI} = \frac{AI.NB}{IN}$$

Đặt $IA = a$, $IM = m$, $IN = n$, $IB = b$ ta có

$$\frac{(a-m)b}{m} = \frac{a(b-n)}{n}$$

$$\Rightarrow bn(a-m) = am(b-n)$$

$$\Rightarrow abn - bmn = abm - amn.$$

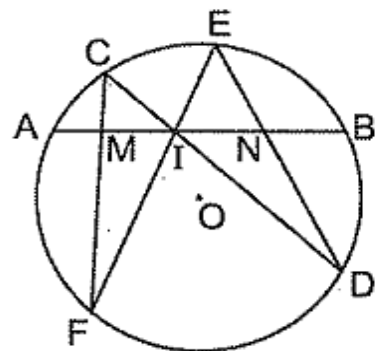
Chia hai vế cho $abmn$ được

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{a} = \frac{1}{n} - \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{n} = \frac{1}{b} + \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{IA} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{IB} + \frac{1}{IM}.$$

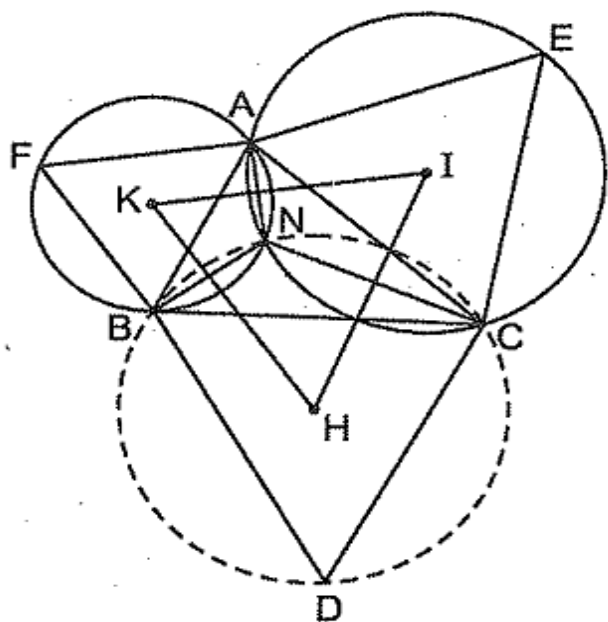
Chú ý: Bài toán 431 tổng quát hơn so với bài toán "con bướm".

432. Cách 1. Ta vẽ hình trong trường hợp góc lớn nhất của $\triangle ABC$ nhỏ hơn 120° . Trường hợp còn lại, bạn đọc tự chứng minh. (h.306) Vẽ các đường tròn tâm I , K ngoại tiếp các tam giác ACE , ABF , chúng cắt nhau tại N (khác A). Ta có $\widehat{ANB} = 120^\circ$, $\widehat{ANC} = 120^\circ$ nên $\widehat{BNC} = 120^\circ$. Suy ra N nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$.

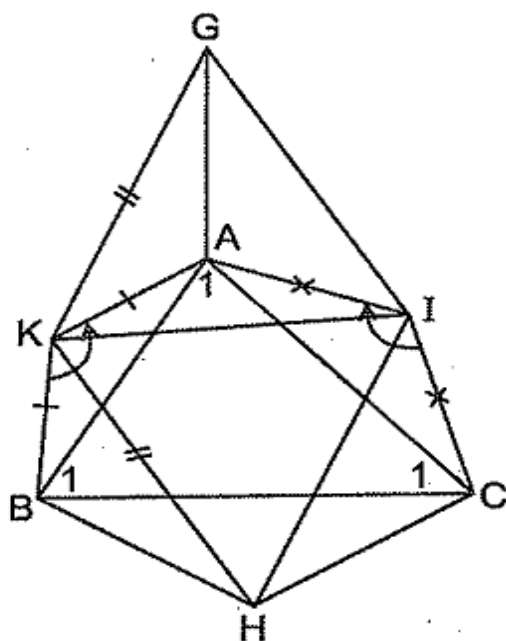
Ta có $NA \perp IK$, $NB \perp KH$ và $\widehat{ANB} = 120^\circ$ nên $\widehat{K} = 60^\circ$. Tương tự $\widehat{I} = 60^\circ$. Do đó $\triangle HIK$ đều.



Hình 305



Hình 306



Hình 307

Cách 2. (h.307) Vẽ điểm G sao cho $\widehat{AKG} = \widehat{BKH}$ và $KG = KH$ (G và H nằm khác phía đối với AK). Ta có $\triangle AKG = \triangle BKH$ (c.g.c), suy ra

$$AG = BH \text{ và } \widehat{KAG} = \widehat{KBH} = \hat{B}_1 + 60^\circ.$$

Ta lại có $\widehat{KAI} = \hat{A}_1 + 60^\circ$ nên

$$\begin{aligned}\widehat{IAG} &= 360^\circ - (\hat{B}_1 + 60^\circ + \hat{A}_1 + 60^\circ) = 240^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) \\ &= 240^\circ - (180^\circ - \hat{C}_1) = 60^\circ + \hat{C}_1 = \widehat{ICH}.\end{aligned}$$

Do đó $\triangle IAG = \triangle ICH$ (c.g.c), suy ra $IG = IH$.

$\triangle IKG = \triangle IKH$ (c.c.c), suy ra $\widehat{IKG} = \widehat{IKH}$. Ta lại có

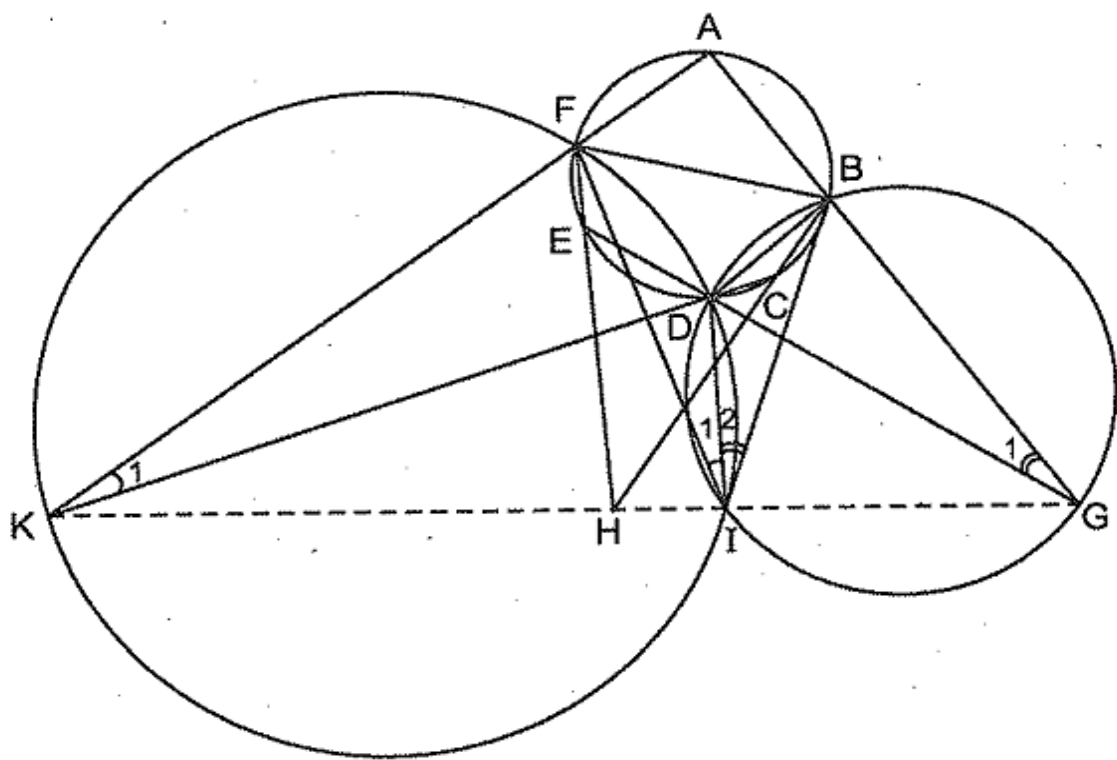
$$\widehat{IKG} + \widehat{IKH} = \widehat{HKG} = \widehat{BKA} = 120^\circ \text{ nên } \widehat{IKH} = 60^\circ.$$

Chứng minh tương tự, $\widehat{KIH} = 60^\circ$. Suy ra $\triangle HIK$ đều.

Chú ý : Có thể trình bày cách 2 dưới dạng một bài toán "cắt giấy". Ta cắt riêng lục giác AKBHCI. Cắt tờ giấy theo HK rồi quay $\triangle KBH$ quanh K một góc 120° ngược chiều kim đồng hồ thì B trùng A, còn H đến vị trí G. Cắt tờ giấy theo HI rồi quay $\triangle ICH$ quanh I một góc 120° theo chiều kim đồng hồ thì C trùng A, còn H trùng G (vì $IA = IC$, $\widehat{IAG} = \widehat{ICH}$ và $AG = CH$).

Bạn đọc tự chứng minh tiếp.

433. Xét lục giác nội tiếp ABCDEF có G là giao điểm của AB và DE, H là giao điểm của BC và EF, K là giao điểm của CD và FA (h.308). Ta phải chứng minh ba điểm K, H, G thẳng hàng.



Hình 308

Vẽ đường tròn ngoại tiếp $\triangle BGD$ và đường tròn ngoại tiếp $\triangle DFK$, chúng cắt nhau ở I (khác D). Trước hết, ta chứng minh bốn điểm B, I, H, F thuộc cùng một đường tròn.

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \quad \widehat{BIF} &= \widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 = \widehat{K}_1 + \widehat{G}_1, \\ 2\widehat{K}_1 &= \text{sd}(\widehat{AB} + \widehat{BC} - \widehat{FE} - \widehat{ED}) \\ 2\widehat{G}_1 &= \text{sd}(\widehat{EF} + \widehat{FA} - \widehat{BC} - \widehat{CD}) \\ 2\widehat{FHB} &= \text{sd}(\widehat{FA} + \widehat{AB} - \widehat{CD} - \widehat{DE}) \end{aligned}$$

nên $\widehat{FHB} = \widehat{K}_1 + \widehat{G}_1 = \widehat{BIF}$. Vậy bốn điểm B, I, H, F thuộc cùng một đường tròn.

Ta có $\widehat{BIG} = \widehat{BDG}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BG),

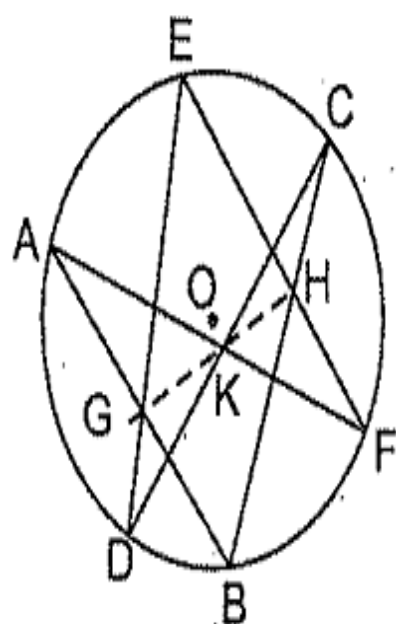
$\widehat{BDG} = \widehat{BFE}$ (vì BFED là tứ giác nội tiếp) nên $\widehat{BIG} = \widehat{BFE}$.

Ta lại có $\widehat{BFE} + \widehat{BIH} = 180^\circ$ (vì BIHF là tứ giác nội tiếp) nên $\widehat{BIG} + \widehat{BIH} = 180^\circ$, suy ra ba điểm H, I, G thẳng hàng.

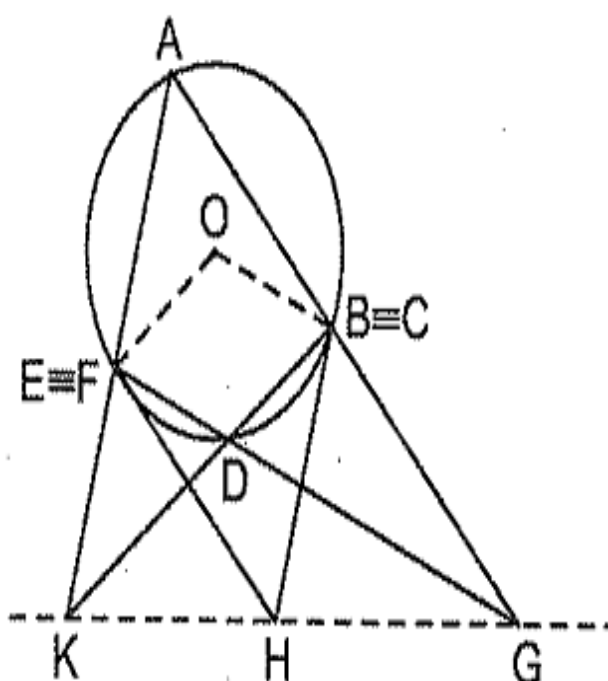
Chứng minh tương tự, ba điểm H, I, K thẳng hàng. Do đó các điểm K, H, I, G thẳng hàng.

Chú ý

a) Bài toán 433 vẫn đúng nếu thay lục giác nội tiếp ABCDEF bởi sáu điểm A, B, C, D, E, F thuộc cùng một đường tròn : Nếu sáu điểm A, B, C, D, E, F thuộc cùng một đường tròn và G, H, K theo thứ tự là giao điểm của AB và DE, BC và EF, CD và FA (h.309) thì ba điểm G, H, K thuộc cùng một đường thẳng (gọi là *đường thẳng Pa-xcan*).



Hình 309



Hình 310

b) Đặc biệt hóa bài toán 433 khi $B \equiv C$, $E \equiv F$, ta có bài toán : Nếu ABDE là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) có các đường thẳng chứa cạnh đối cắt nhau tại G và K, các tiếp tuyến tại B và E cắt nhau tại H thì ba điểm G, H, K thẳng hàng (h.310).