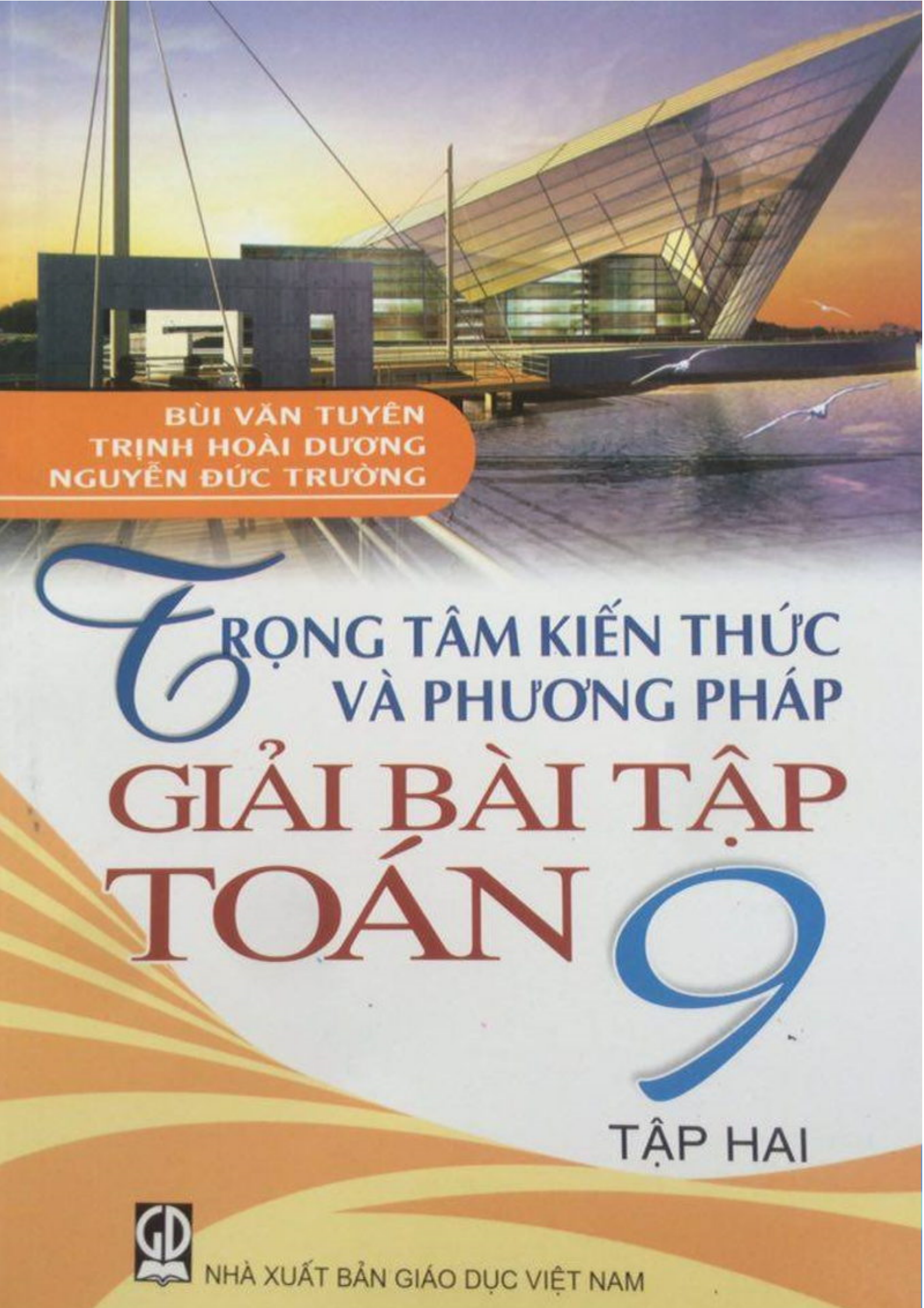




BÙI VĂN TUYỀN
TRỊNH HOÀI DƯƠNG
NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC
VÀ PHƯƠNG PHÁP
GIẢI BÀI TẬP
TOÁN 9
TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BÙI VĂN TUYÊN – TRỊNH HOÀI DƯƠNG – NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

**TRỌNG TÂM KIẾN THỨC
VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**

TOÁN 9

TẬP HAI

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến !

Các em đi học, ai cũng mong muốn mình học giỏi trong đó có môn Toán. Muốn vậy, các em cần nắm vững lí thuyết và biết cách vận dụng để giải bài tập. Lí thuyết thì nhiều và rộng nên cần biết chọn lọc đâu là vấn đề cơ bản, trọng tâm để học cho kĩ và ghi nhớ.

Bài tập có nhiều loại, vô cùng phong phú và đa dạng nên cần phân loại các dạng và đưa ra phương pháp giải của từng dạng ấy. Ngoài ra một điều quan trọng nữa là phải biết cách suy luận khi giải toán.

Cuốn sách này được biên soạn nhằm đáp ứng các yêu cầu trên đây của các em học sinh.

Sách được viết theo sát các chương và bài của sách giáo khoa. Mỗi bài gồm ba phần :

A. Trọng tâm kiến thức

Phần này tóm tắt các kiến thức cơ bản, trọng tâm của bài. Người ta thường nói "Có bột mới gột nên hồ", bột ở đây là các kiến thức cơ bản, trọng tâm của bài. Có nắm vững được thì mới có cơ sở để giải bài tập.

B. Các dạng bài tập và phương pháp giải

Quá trình "gột nên hồ" chính là quá trình luyện tập.

Dựa vào trọng tâm kiến thức đã nêu ở trên, các tác giả đã đưa ra các dạng bài tập để các em luyện giải.

Trong mỗi dạng có nêu ngắn gọn phương pháp giải và nhiều ví dụ minh họa. Điều đó giúp các em kinh nghiệm giải bài tập, định hướng được cách giải, các bước cần làm rồi thực hiện theo các bước đó.

Các bài toán trong mỗi ví dụ được lựa chọn là những bài tập tiêu biểu, đơn giản nhưng không tầm thường, chứa đựng nhiều kiến thức, kĩ năng và phương pháp suy luận mà chương trình đòi hỏi.

C. Bài tập tự luyện

Phần này gồm một số bài tập, có loại trung bình, có loại khó, giúp các em tự kiểm tra, đánh giá mức độ thành thạo của mình. Các em hãy cố gắng tự giải. Nếu gặp khó khăn có thể xem lời giải hoặc hướng dẫn ở cuối bài. Các tác giả mong rằng cuốn sách này là một tài liệu có ích giúp các em tự học, tự đọc có kết quả.

Cuốn sách cũng cung cấp cho các thầy giáo, cô giáo những tư liệu tham khảo để chọn bài cho các tiết luyện tập, bồi dưỡng học sinh.

Các bậc phụ huynh cũng có thể dùng cuốn sách này để hướng dẫn con em học tập.

Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc cho cuốn sách.

Các ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội - Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, quận Đống Đa, Hà Nội.

Xin chân thành cảm ơn.

CÁC TÁC GIẢ

CHƯƠNG III

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức dạng $ax + by = c$ (1), trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).
 - Nếu $x_0 ; y_0$ thoả mãn (1) thì cặp số $(x_0 ; y_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình (1).
2. Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm.
Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$, kí hiệu là (d).
3. Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì đường thẳng (d) chính là đồ thị của hàm số

$$y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b}.$$

- Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì phương trình trở thành $x = \frac{c}{a}$, và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung.
- Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình trở thành $y = \frac{c}{a}$, và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. XÉT CÁC CẶP SỐ $(x_0; y_0)$ CÓ LÀ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH $ax + by = c$ KHÔNG ?

Phương pháp giải

Thay $x = x_0, y = y_0$ vào phương trình $ax + by = c$.

– Nếu $ax_0 + by_0 = c$ thì cặp số $(x_0; y_0)$ gọi là nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

– Nếu $ax_0 + by_0 \neq c$ thì cặp số $(x_0; y_0)$ không là nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

Ví dụ. Xem xét cặp số $(2; -1)$ có là nghiệm của mỗi phương trình sau không ?

a) $2x + 3y = 1$; b) $2x - 3y = 1$; c) $\frac{3}{2}x + 4y = -1$.

Giải.

a) Thay $x = 2, y = -1$ vào phương trình $2x + 3y = 1$ ta được :

$$2.2 + 3.(-1) = 4 - 3 = 1 \text{ nên } (2; -1) \text{ là nghiệm của phương trình } 2x + 3y = 1.$$

b) Thay $x = 2; y = -1$ vào phương trình $2x - 3y = 1$ ta được :

$$2.2 - 3.(-1) = 4 + 3 = 7 \neq 1 \text{ nên } (2; -1) \text{ không là nghiệm của phương trình } 2x - 3y = 1.$$

c) Thay $x = 2; y = -1$ vào phương trình $\frac{3}{2}.x + 4y = -1$ ta được

$$\frac{3}{2}.2 + 4.(-1) = 3 - 4 = -1 \text{ nên } (2; -1) \text{ là nghiệm của phương trình } \frac{3}{2}.x + 4y = -1.$$

Dạng 2. TÌM NGHIỆM TỔNG QUÁT CỦA PHƯƠNG TRÌNH $ax + by = c$ VÀ VẼ ĐƯỜNG THẲNG BIỂU DIỄN TẬP NGHIỆM CỦA NÓ

Phương pháp giải

1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $ax + by = c$

• Nếu $a \neq 0$ thì $x = \frac{c - by}{a}$ và viết công thức nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x = \frac{c - by}{a} \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Nếu $b \neq 0$ thì $y = \frac{c - ax}{b}$ và viết công thức nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \frac{c - ax}{b}. \end{cases}$$

2. Vẽ đường thẳng có phương trình $ax + by = c$.

- Nếu $b \neq 0$ thì vẽ đường thẳng $y = \frac{1}{b} \cdot (c - ax)$.
- Nếu $b = 0$ thì vẽ đường thẳng $x = \frac{c}{a}$ cùng phương với trục tung.

Ví dụ 1. Cho phương trình $5x - 3y = 2$ (1)

- Tìm công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1).
- Tìm nghiệm nguyên của phương trình.

Giải.

- Ta tính y theo x : $5x - 3y = 2 \Leftrightarrow 3y = 5x - 2$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5x - 2}{3}$$

phương trình có vô số nghiệm $\left(x ; \frac{5x - 2}{3} \right)$ với x là một số thực tùy ý.

Chú ý : Ta cũng có thể viết nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \frac{5x - 2}{3}. \end{cases}$

- Ta có $y = \frac{5x - 2}{3} = 2x - 1 + \frac{1 - x}{3}$.

Để $y \in \mathbf{Z}$ thì $\frac{1 - x}{3} \in \mathbf{Z}$.

Đặt $\frac{1 - x}{3} = t$ ($t \in \mathbf{Z}$) $\Rightarrow x = 1 - 3t$, từ đó $y = 2(1 - 3t) - 1 + t$ hay $y = 1 - 5t$.

Vậy nghiệm nguyên tổng quát của phương trình là $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 - 5t \end{cases}, t \in \mathbf{Z}.$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm tổng quát của mỗi phương trình sau và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó :

a) $2x + 3y = 6$;

b) $3x + 0.y = 2$.

Giải.

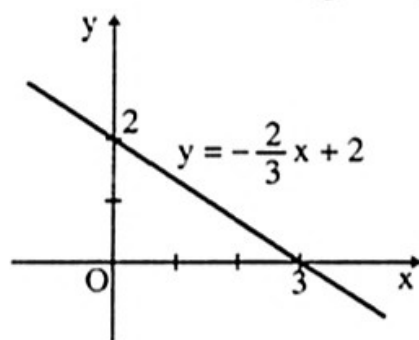
a) $2x + 3y = 6 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Nghiệm tổng quát của phương trình là :

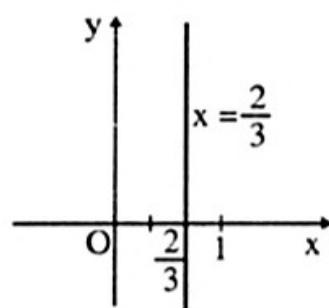
$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 2 \\ x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (\text{h.1})$$

b) Nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (\text{h.2})$$



Hình 1



Hình 2

Dạng 3. XÁC ĐỊNH THAM SỐ m KHI BIẾT $(x_0; y_0)$ LÀ MỘT NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

Thay $x = x_0$; $y = y_0$ vào phương trình đã cho rồi giải phương trình thu được để xác định m .

Ví dụ 1. Nếu cặp số $(1; -2)$ là một nghiệm của phương trình $x - y - m = 0$ thì m có giá trị là bao nhiêu ?

Giải.

Cặp số $(1; -2)$ là một nghiệm của phương trình, nên :

$$1 - (-2) - m = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy giá trị $m = 3$.

Ví dụ 2. Để $(2m; -3)$ là nghiệm của phương trình $3x + 7y - 9 = 0$ thì giá trị của m là bao nhiêu ?

Giải.

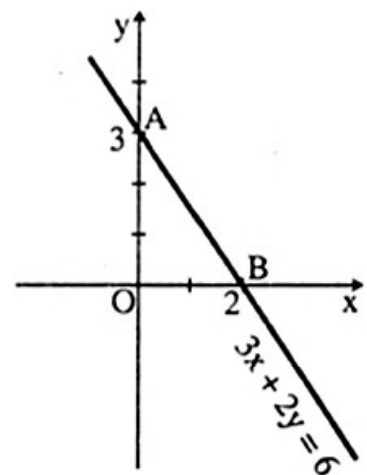
$$\begin{aligned} (2m; -3) \text{ là nghiệm của phương trình nên : } 3.2m + 7.(-3) - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6m - 30 &= 0 \Leftrightarrow m = 5. \end{aligned}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cặp số $(1; -3)$ là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau ?
a) $3x - 2y = -3$; b) $3x + y = 0$;
c) $0.x - 3y = 9$; d) $3x - y = 2$.
- Cho phương trình $3x + 2y = 6$ (1).
a) Hãy biểu diễn tập nghiệm của phương trình (1) trên mặt phẳng tọa độ (gọi là (d)).
b) Tính diện tích tam giác tạo bởi (d) với trục Ox và Oy.
- Tìm m biết $(-1; -1)$ là một nghiệm của phương trình :
$$(m - 1)x - (2m - 1)y = -1 - m.$$
- Tính diện tích tứ giác tạo bởi $(d_1) : 0.x + 2y = 4$; $(d_2) : -3x + 0.y = 3$;
 $(d_3) : -x + y = -1$ và trục Ox.
- Cho phương trình $3x + 5y = 501$. Hỏi phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên dương ?

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

- Cặp $(1; -3)$ là nghiệm của phương trình :
b) $3x + y = 0$;
c) $0.x - 3y = 9$.
- a) Tập nghiệm của phương trình $3x + 2y = 6$ được biểu diễn như hình 3.
b) $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$ (dvdv).
- $m = -\frac{1}{2}$.
- $S = 6$ (đơn vị diện tích).
- Phương trình có 33 nghiệm nguyên dương.



Hình 3

§2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$(I) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- Nếu hai phương trình ấy có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (I).
- Nếu hai phương trình đã cho không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) vô nghiệm.

Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

2. Tập nghiệm của hệ phương trình (I) được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng $(d): ax + by = c$ và $(d'): a'x + b'y = c'$.

Vậy :

- Nếu (d) cắt (d') thì hệ (I) có một nghiệm duy nhất.
 - Nếu $(d) // (d')$ thì hệ (I) vô nghiệm.
 - Nếu (d) trùng với (d') thì hệ (I) vô số nghiệm.
3. Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. ĐOÁN NHẬN SỐ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Gọi (d) là đường thẳng có phương trình $ax + by = c$,

(d') là đường thẳng có phương trình $a'x + b'y = c'$.

Dựa vào hệ số góc và tung độ gốc để biết số nghiệm của hệ, với $a'b'c' \neq 0$:

- Nếu (d) cắt (d') thì hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}\right)$.

- Nếu (d) song song với (d') thì hệ vô nghiệm $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}\right)$.
- Nếu (d) trùng với (d') thì hệ có vô số nghiệm $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$.

Ví dụ. Không cần vẽ hình, hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây và giải thích vì sao ?

a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x = 3y \\ x + 5y = -4 \end{cases}$.

Giải.

a) Đường thẳng $y = 2x - 1$ có hệ số góc $a = 2$ còn đường thẳng $y = -x + 1$ có hệ số góc $a' = -1$; $a \neq a'$ nên hai đường thẳng này cắt nhau tại một điểm, do vậy hệ đã cho có một nghiệm.

b) Hệ tương đương với $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$

Vì $-\frac{3}{2} \neq \frac{1}{2}$ nên hai đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ và $y = \frac{1}{2}x - 1$ cắt nhau tại một điểm, do vậy hệ đã cho có một nghiệm.

c) Hệ tương đương với $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$.

Vì $-1 = -1$; $2 = 2$ nên hai đồ thị trùng nhau. Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm.

d) Hệ tương đương với $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = -\frac{x}{5} - \frac{4}{5} \end{cases}$.

Vì $\frac{2}{3} \neq -\frac{1}{5}$ nên hai đồ thị cắt nhau tại một điểm.

Do đó hệ đã cho có một nghiệm.

Dạng 2. XÁC ĐỊNH NGHIỆM CỦA HỆ BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

Phương pháp giải

- Vẽ các đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của các phương trình trong hệ.
- Số nghiệm của hệ là số giao điểm của các đường thẳng trên.
- Toạ độ của điểm chung là nghiệm của hệ phương trình.

Ví dụ. Xác định nghiệm của hệ phương trình sau bằng phương pháp hình học

a)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Giải.

a) (h.4) * Vẽ (d_1) : $2x - y = 1$.

• Cho $x = 0 \Rightarrow y = -1$ ta được $A(0; -1)$.

• Cho $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ta được $B(\frac{1}{2}; 0)$.

Đường thẳng AB là đồ thị $2x - y = 1$.

* Vẽ (d_2) : $x + y = 2$.

• Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$ ta được $C(0; 2)$.

• Cho $y = 0 \Rightarrow x = 2$ ta được $D(2; 0)$.

Đường thẳng CD là đồ thị $x + y = 2$.

Ta được: (d_1) cắt (d_2) tại $E(1; 1)$.

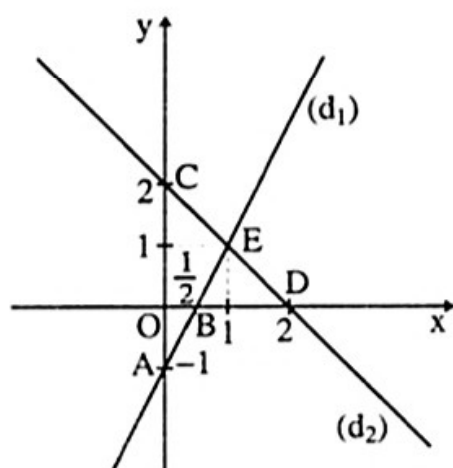
Thử lại $(1; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

b) (h.5) Tương tự, đường thẳng $3x + 2y = 5$ đi qua điểm $A(0; \frac{5}{2})$; $B(\frac{5}{3}; 0)$.

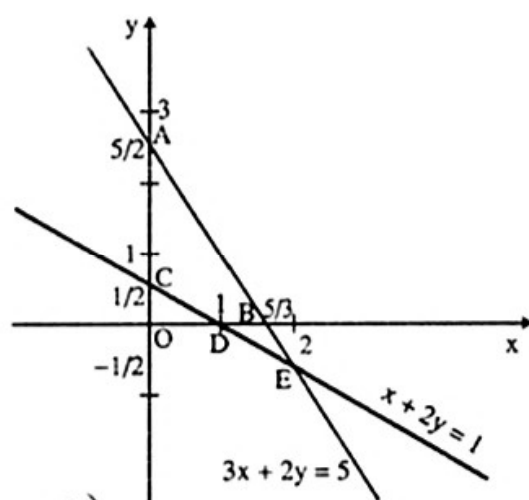
Đường thẳng $x + 2y = 1$ đi qua điểm $C(0; \frac{1}{2})$; $D(1; 0)$.

Toạ độ giao điểm của hai đường thẳng là $E(2; -\frac{1}{2})$.

Thử lại $(2; -\frac{1}{2})$ là nghiệm của hệ phương trình.



Hình 4



Hình 5

Dạng 3. HAI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Phương pháp giải

- Hai hệ phương trình tương đương khi chúng có cùng tập hợp nghiệm.
- Hai hệ phương trình vô nghiệm cũng được coi là tương đương.

Ví dụ. Xác định m để hai hệ phương trình sau tương đương :

$$(I) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad (II) \begin{cases} mx + y = 2 \\ 3x + my = 3. \end{cases}$$

Giải.

- Hệ (I) có nghiệm duy nhất $(1 ; 0)$.
- Để hai hệ đã cho tương đương nhau thì $(1 ; 0)$ phải là nghiệm duy nhất của hệ (II).

Khi đó $\begin{cases} m \cdot 1 + 0 = 2 \\ 3 \cdot 1 + m \cdot 0 = 3 \end{cases}$ hay $m = 2$.

- Thử lại với $m = 2$ ta có (II) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$ có nghiệm $(1 ; 0)$.

Vậy $m = 2$ thì hai hệ phương trình tương đương.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Không vẽ đồ thị, hãy đoán số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 2 ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \cdot x + y \cdot 0 = 4 \\ 3x - y = 5 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 5 ; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}. \end{cases}$

2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 4. \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình bằng đồ thị.

b) Nghiệm của hệ có phải là nghiệm của phương trình $3x - 2y = -1$ hay không ?

3. Tìm a để hai hệ phương trình sau tương đương :

$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} ax + y = 0 \\ 2x - ay = 3 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} ax + 2y = 4 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

4. Xác định a để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -2x + ay = a \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

5. Xét hệ phương trình $\begin{cases} ax - y = b \\ a'x - y = b. \end{cases}$

a) Chứng minh hệ đã cho luôn có nghiệm với mọi a, a', b.

b) Hệ đã cho có thể vô số nghiệm được không ?

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Có một nghiệm duy nhất. b) Có một nghiệm duy nhất.
c) Vô nghiệm. d) Vô số nghiệm.

2. a) Bạn đọc tự vẽ đồ thị.

Hệ có nghiệm duy nhất (1 ; 2).

b) Nghiệm của hệ có là nghiệm của phương trình $3x - 2y = -1$.

3. a) $a = -1$. b) $a = 1$.

4. Xác định nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

ta được nghiệm là (1 ; 2).

Thay vào phương trình $-2x + ay = a$, tìm được $a = 2$.

5. a) Hai đồ thị của hai phương trình luôn cắt nhau tại (0 ; -b) nên hệ đã cho luôn có nghiệm.

b) Hệ đã cho có thể vô số nghiệm khi $a = a'$.

§3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc thế gồm hai bước sau :

Bước 1. Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

Bước 2. Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ (phương trình thứ nhất cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia có được ở bước 1).

2. Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

+ Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.

+ Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

Phương pháp giải

Các bước giải : Xem phần trọng tâm kiến thức.

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases} ; & \text{b) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ -x + 4y = 10. \end{cases} \end{array}$$

Giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 3.(y + 3) - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 3y + 9 - 4y = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (8 ; 5).

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ -x + 4y = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ -x + 4(7 - 2x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ -x + 28 - 8x = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (2 ; 3).

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3} \cdot y = 1 \\ x + \sqrt{3} \cdot y = \sqrt{2}. \end{cases} \end{array}$$

Giải.

a) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y = 2\sqrt{2} - 5x\sqrt{3}$,
thay vào phương trình thứ hai ta được :

$$x\sqrt{6} - (2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} \cdot x) \cdot \sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Từ đó : } y = 2\sqrt{2} - 5 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{-\sqrt{2}}{2} \right)$.

b) Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $x = \sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot y$,
thay vào phương trình thứ nhất ta được :

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot y) - \sqrt{3}y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}.$$

$$\text{Từ đó : } x = \sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} = 1.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(1; \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} \right)$.

Dạng 2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Phương pháp giải

- Đặt điều kiện để hệ có nghĩa.
- Đặt ẩn phụ và điều kiện của ẩn phụ (nếu có).
- Giải hệ theo các ẩn phụ đã đặt.
- Trở lại ẩn đã cho để tìm nghiệm của hệ.

Ví dụ. Giải các hệ phương trình

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -1; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \frac{3}{2x-y} - \frac{6}{x+y} = -1 \\ \frac{1}{2x-y} - \frac{1}{x+y} = 0; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} \frac{5x}{x+1} + \frac{y}{y-3} = 27 \\ \frac{2x}{x+1} - \frac{3y}{y-3} = 4. \end{cases} \end{array}$$

Giải.

a) Điều kiện $x \neq 0$; $y \neq 0$.

Đặt $\frac{1}{x} = u$; $\frac{1}{y} = v$, ta có hệ $\begin{cases} u + v = 2 \\ 3u - 4v = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ 3u - 4(2 - u) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1. \end{cases}$$

Trở lại ẩn x ; y ta có $\begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.

b) Điều kiện $y \neq 2x$; $y \neq -x$.

Đặt $\frac{1}{2x-y} = u$, $\frac{1}{x+y} = v$, ta có hệ $\begin{cases} 3u - 6v = -1 \\ u - v = 0. \end{cases}$

Giải hệ ta được $\begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{3}. \end{cases}$

$$\text{Trở lại ẩn } x, y \text{ ta có: } \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ x+y=3. \end{cases}$$

Giải hệ ta được phương trình có nghiệm duy nhất (2 ; 1).

c) Điều kiện $x \neq -1$; $y \neq 3$.

$$\text{Đặt } \frac{x}{x+1} = u ; \frac{y}{y-3} = v, \text{ ta có hệ } \begin{cases} 5u + v = 27 \\ 2u - 3v = 4. \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ ta được } \begin{cases} u = 5 \\ v = 2. \end{cases}$$

$$\text{Trở lại ẩn } x, y \text{ ta có } \begin{cases} \frac{x}{x+1} = 5 \\ \frac{y}{y-3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ y = 6. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(-\frac{5}{4}; 6\right)$.

Dạng 3. XÁC ĐỊNH TOẠ ĐỘ GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải

Toạ độ giao điểm chính là nghiệm của hệ được tạo bởi hai phương trình hai đường thẳng đã cho.

Ví dụ 1. Xác định toạ độ giao điểm của hai đường thẳng

a) (d) : $2x - y = 3$ và (d') : $x + 2y = 4$;

b) (d) : $2x + y = 2$ và (d') : $x + \frac{1}{2}y = 1$.

Giải.

a) Toạ độ giao điểm M của (d) và (d') là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

Giải hệ bằng phương pháp thế được nghiệm là (2 ; 1).

Vậy toạ độ giao điểm là M(2 ; 1).

$$\begin{aligned} \text{b) Xét hệ } \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x + \frac{1}{2}(2 - 2x) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ 0 \cdot x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x \in \mathbf{R} \end{cases} \end{aligned}$$

hệ đã cho có vô số nghiệm.

Vậy (d) trùng (d'). Toạ độ giao điểm $N(x; 2 - 2x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Ví dụ 2. Tìm m để ba đường thẳng sau đồng quy.

$$(d_1) : 2x - y = 0 ;$$

$$(d_2) : x + y = 3 ;$$

$$(d_3) : 2x - 3y = m.$$

Giải.

- Toạ độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Giải hệ bằng phương pháp thế được nghiệm là $(1; 2)$.

- $(d_1) ; (d_2)$ và (d_3) đồng quy $\Leftrightarrow (d_3)$ đi qua $(1; 2)$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = m \Leftrightarrow m = -4.$$

Vậy với $m = -4$ thì ba đường thẳng đồng quy.

Dạng 4. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

- Từ một phương trình của hệ rút y theo x rồi thay vào phương trình còn lại để được phương trình $ax = b$.
- Biện luận :
 - Nếu $a \neq 0$ thì $x = \frac{b}{a}$, thay vào biểu thức để tìm y , hệ có nghiệm duy nhất.
 - Nếu $a = 0$ thì ta có $0 \cdot x = b$
 - + Nếu $b = 0$ thì hệ có vô số nghiệm.
 - + Nếu $b \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} mx - y = 2m & (1) \\ x - my = m + 1 & (2) \end{cases}$$

Giải.

- Từ (1) ta có $y = mx - 2m$ thay vào phương trình (2) ta được :

$$\begin{aligned} x - m(mx - 2m) &= m + 1 \\ \Leftrightarrow (1 - m).(1 + m)x &= (1 - m).(1 + 2m) \end{aligned} \quad (3)$$

- Nếu $m \neq \pm 1$ thì $x = \frac{(1 - m)(1 + 2m)}{(1 - m)(1 + m)} = \frac{1 + 2m}{1 + m}$.

$$\text{Khi đó } y = m \cdot \frac{1 + 2m}{1 + m} - 2m = \frac{-m}{1 + m}.$$

$$\Rightarrow \text{hệ có nghiệm duy nhất } \left(\frac{1 + 2m}{1 + m}; \frac{-m}{1 + m} \right).$$

- Nếu $m = -1$ thì phương trình (3) có dạng : $0.x = -2 \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = 1$ thì phương trình (3) có dạng : $0.x = 0 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm $(x; x - 2)$.

Vậy : Với $m = -1$ thì hệ vô nghiệm.

Với $m = 1$ thì hệ có vô số nghiệm $(x; x - 2)$.

Với $m \neq \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \frac{1 + 2m}{1 + m} \\ y = \frac{-m}{1 + m} \end{cases}$$

Dạng 5. XÁC ĐỊNH THAM SỐ m ĐỂ HỆ PHƯƠNG TRÌNH THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM SỐ

Phương pháp giải

- Giải hệ phương trình tìm x, y theo tham số m .
- Với điều kiện về nghiệm số của đề bài tìm m .

Ví dụ. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} (a+1)x - ay = 5 & (1) \\ x + ay = a^2 + 4a & (2) \end{cases}$$

Tìm giá trị của $a \in \mathbb{Z}$ để cho hệ có nghiệm $(x; y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$.

Giải.

Từ phương trình (2) ta có $x = a^2 + 4a - ay$.

Thay vào (1) : $(a+1).(a^2 + 4a - ay) - ay = 5$

$$\Leftrightarrow a(a+2)y = a^3 + 5a^2 + 4a - 5 \quad (3)$$

- Nếu $a = 0$ hoặc $a = -2$ thì phương trình (3) vô nghiệm.
- Điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất là $a \neq 0$; $a \neq -2$.

$$\text{Khi đó } y = \frac{a^3 + 5a^2 + 4a - 5}{a(a+2)}.$$

$$\text{Từ đó ta được } x = \frac{a^2 + 4a + 5}{a+2}.$$

- Trước hết ta tìm $a \in \mathbb{Z}$ để $x \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{(a+2)^2 + 1}{a+2} = a+2 + \frac{1}{a+2}.$$

Để $x \in \mathbb{Z}$ thì $a+2 \in U(1)$.

Suy ra $a+2 = \pm 1 \Rightarrow a = -3$; $a = -1$.

- Với $a = -3 \Rightarrow y = \frac{(-3)^3 + 5.(-3)^2 + 4.(-3) - 5}{-3.(-3+2)} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}.$

- Với $a = -1$ thì $y = \frac{(-1)^3 + 5.(-1)^2 + 4.(-1) - 5}{-1.(-1+2)} = 5.$

Vậy với $a = -1$ thì hệ có nghiệm nguyên là $(2; 5)$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 2y = 14 ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - 2 = 0 \\ 5x - y = 11. \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình

a)
$$\begin{cases} 6(x + y) = 8 + 2x - 3y \\ 5(y - x) = 5 + 3x + 2y \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} (x - 2)(y + 1) = xy \\ (x + 8)(y - 2) = xy. \end{cases}$$

3. Giải các hệ phương trình

a)
$$\begin{cases} \frac{7}{x+2} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{4}{x+2} - \frac{1}{y} = \frac{5}{2}; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{3x-1} - \sqrt{2y+1} = 1 \\ 2\sqrt{3x-1} + 3\sqrt{2y+1} = 12. \end{cases}$$

4. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng :

a) (d) : $y = x - 2$ và (d') : $y = 2x + 1$.

b) (d) : $x + y + 1 = 0$ và (d') : $x - 2y + 4 = 0$.

c) (d) : $x - 3y + 5 = 0$ và (d') : $2x + y - 18 = 0$.

5. Cho ba đường thẳng :

(d₁) : $x - 2y = -3$;

(d₂) : $\sqrt{2} \cdot x + y = \sqrt{2} + 2$ và

(d_m) : $mx - (1 - 2m)y = 5 - m$.

a) Xác định m để ba đường thẳng đồng quy.

b) Chứng minh rằng (d_m) luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

6. Giải và biện luận hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + ay = 5 \\ ax + 2y = 2a + 1. \end{cases}$$

7. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4. \end{cases}$$

a) Xác định các giá trị nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) sao cho $x > 0, y > 0$.

b) Tìm giá trị nguyên m để hệ có nghiệm (x ; y) với x ; y là số nguyên dương.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a)
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4. \end{cases}$$

2. a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} 4x + 9y = 8 \\ 8x - 3y = -5. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm $\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$.

- b) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 4y = -8. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm $(12; 5)$.

3. a) Đặt $\frac{1}{x+2} = u; \frac{1}{y} = v$. Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} 7u + 3v = 2 \\ 4u - v = \frac{5}{2}. \end{cases}$

Giải hệ ta được $\begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} x + 2 = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2. \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0; -2)$.

- b) Đặt $\sqrt{3x-1} = u \geq 0; \sqrt{2y+1} = v \geq 0$.

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} u - v = 1 \\ 2u + 3v = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{3x-1} = 3 \\ \sqrt{2y+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{3}{2}. \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(\frac{10}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

4. Tọa độ giao điểm M của d và d' là :

a) $M(-3; -5)$.

b) $M(-2; 1)$.

c) $M(7; 4)$.

5. a) Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ \sqrt{2} \cdot x + y = \sqrt{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $M(1; 2)$.

Để ba đường thẳng đồng quy thì $M \in (d_m)$.

$$\Leftrightarrow m - (1 - 2m) \cdot 2 = 5 - m \Leftrightarrow m = \frac{7}{6}.$$

Vậy với $m = \frac{7}{6}$ thì ba đường thẳng đồng quy.

b) Đặt $E(x_0; y_0)$ là điểm mà (d_m) đi qua với mọi m

$$\Leftrightarrow mx_0 - (1 - 2m)y_0 = 5 - m \text{ đúng với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 2y_0 + 1)m = y_0 + 5 \text{ đúng với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2y_0 + 1 = 0 \\ y_0 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 9 \\ y_0 = -5. \end{cases}$$

Vậy điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua là $E(9; -5)$.

6. • $a = 2 \Rightarrow$ hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \frac{5 - 2x}{2}. \end{cases}$

• $a = -2 \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

• $a \neq \pm 2 \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{5 + 2a}{2 + a}; \frac{1}{2 + a} \right)$.

7. a) Điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất là $m \neq \pm 2$.

Khi đó hệ có nghiệm $\left(\frac{8 - m}{2 + m}; \frac{5}{2 + m} \right)$.

$$\bullet \text{ Điều kiện } x > 0, y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8 - m}{2 + m} > 0 \\ \frac{5}{2 + m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 8.$$

Với $m \in \mathbf{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; \dots; 7\}$.

b) $m = \{-1; 3\}$.

§4. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Quy tắc cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc cộng đại số gồm hai bước sau :

Bước 1 : Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.

Bước 2 : Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia).

2. Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

- Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- Áp dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).
- Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG

Phương pháp giải

Các bước giải : Xem phần trọng tâm kiến thức.

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

$$a) \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 2 ; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 7x + 4y = 74 \\ 3x + 2y = 32. \end{cases}$$

Giải.

a) Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta có :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(1 ; -1)$.

$$b) \begin{cases} 7x + 4y = 74 \\ 3x + 2y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 74 \\ 6x + 4y = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ 3x + 2y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (10 ; 1).

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} (\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1)y = \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \cdot x - 2y = 3\sqrt{3} + 1; \end{cases} \quad b) \begin{cases} x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 1 \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Giải.

$$a) \begin{cases} (\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1)y = \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \cdot x - 2y = 3\sqrt{3} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 + 2\sqrt{3})x + 2y = 3 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \cdot x - 2y = 3\sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4 + 4\sqrt{3})x = 4 + 4\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \cdot x - 2y = 3\sqrt{3} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(1; -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)$.

$$b) \begin{cases} x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 1 \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y\sqrt{6} = \sqrt{3} \\ 2x + y\sqrt{6} = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \sqrt{3} + \sqrt{6} \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{5} \\ y = \frac{3 - \sqrt{2}}{5}. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{5}; \frac{3 - \sqrt{2}}{5}\right)$.

Dạng 2. XÁC ĐỊNH a, b ĐỂ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax + b$ ĐI QUA HAI ĐIỂM A, B ĐÃ CHO

Phương pháp giải

- Lần lượt thay tọa độ của A và B vào $y = ax + b$ ta được hệ phương trình hai ẩn a và b.
- Giải hệ phương trình này ta tìm được các hệ số a ; b.

Ví dụ. Xác định a, b của đồ thị hàm số $y = ax + b$ để đồ thị của nó đi qua :

a) A(2 ; 1) và B(1 ; 2) ;

b) A(3 ; -6) và B(-2 ; 4).

Giải.

a) Hai điểm A(2 ; 1) và B(1 ; 2) thuộc đường thẳng $y = ax + b$ nên ta có hệ phương trình ẩn a ; b

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy với $a = -1$; $b = 3$ thì đồ thị $y = ax + b$ đi qua A(2 ; 1) ; B(1 ; 2).

a) Hai điểm A(3 ; -6) và B(-2 ; 4) thuộc đường thẳng $y = ax + b$ nên ta có hệ phương trình ẩn a ; b

$$\begin{cases} 3a + b = -6 \\ -2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = -10 \\ -2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0. \end{cases}$$

Vậy với $a = -2$; $b = 0$ thì đồ thị $y = ax + b$ đi qua A(3 ; -6) ; B(-2 ; 4).

Dạng 3. XÁC ĐỊNH THAM SỐ m ĐỂ HỆ PHƯƠNG TRÌNH THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM SỐ

Phương pháp giải

- Trước hết giải hệ phương trình tìm x, y theo m.
- Với điều kiện về nghiệm số của đề bài, tìm m.

Ví dụ. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - 2y = 1. \end{cases}$

a) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) mà $x > 0$, $y < 0$.

b) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) mà x, y là các số nguyên.

Giải.

a) • Với $m = 0$ thì hệ có nghiệm $\left(2 ; -\frac{1}{2}\right)$ thoả mãn đề bài.

$$\bullet \text{ Với } m \neq 0 \text{ thì } \begin{cases} mx + m^2y = 2m \\ mx - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 2)y = 2m - 1 \\ mx - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2m - 1}{m^2 + 2} \\ x = \frac{m + 4}{m^2 + 2}. \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-1}{m^2+2} < 0 \\ \frac{m+4}{m^2+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ m+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < \frac{1}{2}.$$

Vì $m \in \mathbf{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Vậy với $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x > 0; y < 0$.

b) • Theo câu a, $m = 0$ không thỏa mãn.

• $m \neq 0$ theo câu a, hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{m+4}{m^2+2}; \frac{2m-1}{m^2+2} \right)$.

Trước hết tìm $m \in \mathbf{Z}$ để $x \in \mathbf{Z}$ thì $m+4 : m^2+2$

$$\Rightarrow m^2 + 4m : m^2 + 2 \Rightarrow 4m - 2 : m^2 + 2$$

$$\Rightarrow 4(m+4) - (4m-2) : m^2 + 2 \Rightarrow 18 : m^2 + 2$$

$$\text{mà } m^2 + 2 > 2 \text{ nên } m^2 + 2 \in \{3; 6; 9; 18\} \Rightarrow m^2 \in \{1; 4; 7; 16\}.$$

Vì $m \in \mathbf{Z}$ nên $m \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$.

Thử trực tiếp để $x \in \mathbf{Z}$ và $y \in \mathbf{Z}$ thì chỉ có $m = -1$ thỏa mãn.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng

a) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases};$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 4x + 3y = -1. \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} (x-1)(y-2) = (x+1)(y-3) \\ (x-5)(y+4) = (x-4)(y+1); \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)(y+3) = \frac{1}{2}xy + 50 \\ \frac{1}{2}(x-2)(y-2) = \frac{1}{2}xy - 32. \end{cases}$

3. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{y-3} = 3 \\ 2\sqrt{x-2} - 3\sqrt{y-3} = -4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3x}{x+1} + \frac{2}{y+4} = 4 \\ \frac{2x}{x+1} - \frac{5}{y+4} = 9; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x^2 - 2x) + \sqrt{y+1} = 0 \\ 3(x^2 - 2x) - 2\sqrt{y+1} + 7 = 0. \end{cases}$

4. Xác định a ; b của đồ thị hàm số $y = ax + b$ để đồ thị của nó đi qua :
- a) $A(1 ; 3)$ và $B(3 ; 2)$;
- b) $A(3 ; 4)$ và $B(-1 ; -2)$.
5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 3 - m \\ 2x + y = 3(m + 2) \end{cases}$.
- a) Giải hệ phương trình khi $m = -1$.
- b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y)$ sao cho $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9 \end{cases}$.
- a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.
- b) Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y)$ sao cho biểu thức $A = 3x - y$ nhận giá trị nguyên.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Đáp số :
- a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$.
2. a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 3x - y = 16 \end{cases}$
- Giải ra ta được nghiệm của hệ là $\left(7\frac{2}{5} ; 6\frac{1}{5}\right)$.
- b) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} 3x + 2y = 94 \\ x + y = 34 \end{cases}$
- Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $\begin{cases} x = 26 \\ y = 8 \end{cases}$.
3. a) Đặt $\sqrt{x - 2} = u \geq 0$; $\sqrt{y - 3} = v \geq 0$.
- Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} u + v = 3 \\ 2u - 3v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$ thoả mãn.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{y-3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là (3 ; 7).

$$\text{b) Đặt } \frac{x}{x+1} = u ; \frac{1}{y+4} = v.$$

$$\text{Hệ phương trình có dạng } \begin{cases} 3u + 2v = 4 \\ 2u - 5v = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = -1. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{1}{y+4} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là (-2 ; -5).

$$\text{c) Đặt } (x-1)^2 = u \geq 0 ; \sqrt{y+1} = v \geq 0.$$

$$\text{Hệ phương trình có dạng } \begin{cases} 2u + v = 2 \\ 3u - 2v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 2. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ \sqrt{y+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là (1 ; 3).

$$4. \text{ a) } a = -\frac{1}{2} ; b = 3\frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } a = \frac{3}{2} ; b = -\frac{1}{2}.$$

$$5. \text{ a) Khi } m = -1 \text{ hệ phương trình có dạng } \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm (2 ; -1).

$$\text{b) • Hệ phương trình luôn có nghiệm } \begin{cases} x = m + 3 \\ y = m. \end{cases}$$

• Ta có $S = (m + 3)^2 + m^2$

$$\Leftrightarrow S = 2 \cdot \left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}.$$

Vậy S nhỏ nhất là $\frac{9}{2}$ khi $m = -\frac{3}{2}$.

6. a) Khi $m = 1$ hệ phương trình có dạng $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(4; 1)$.

b) • Với mọi m hệ luôn có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{3m + 9}{m^2 + 2} \\ y = \frac{9m - 6}{m^2 + 2}. \end{cases}$

• Xét $A = 3x - y = \frac{33}{m^2 + 2}$.

Để $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m^2 + 2 \in U(33)$ mà $m^2 + 2 \geq 2; m \in \mathbb{Z}$.

Suy ra : $m \in \{1; -1; 3; -3\}$.

§5. §6. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Các bước giải toán bằng cách lập hệ phương trình :

Bước 1. Lập hệ phương trình :

- Chọn các ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn số và các đại lượng đã biết.
- Từ đó lập hệ phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ phương trình.

Bước 3. Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không thoả mãn, rồi trả lời.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TOÁN VỀ QUAN HỆ GIỮA CÁC SỐ

Phương pháp giải

- Tổng của a và b là m thì ta có $a + b = m$.
- Số a lớn hơn số b là m thì ta có $a - b = m$.
- Số a bằng k lần số b thì ta có $a = k.b$.

Ví dụ 1. Tỉ số của hai số là 3 : 4. Nếu giảm số lớn đi 100 và tăng số nhỏ thêm 200 thì tỉ số mới là 5 : 3. Tìm hai số đó.

Giải.

- Gọi số bé là x và số lớn là y ($y > x$).

Tỉ số của hai số là 3 : 4 thì ta có $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ (1).

Nếu giảm số lớn đi 100 và tăng số nhỏ thêm 200 thì tỉ số mới là 5 : 3, ta có phương trình:

$$\frac{x + 200}{y - 100} = \frac{5}{3} \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{x + 200}{y - 100} = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x - 5y = -1100. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 300 \\ y = 400. \end{cases}$

Vậy hai số cần tìm là 300 và 400.

Ví dụ 2. Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu tăng chiều dài thêm 2 m, chiều rộng thêm 3 m thì diện tích tăng thêm 100 m^2 . Nếu giảm chiều dài và chiều rộng đi 2 m thì diện tích giảm đi 68 m^2 . Tính diện tích của thửa ruộng đó.

Giải.

Gọi chiều dài thửa ruộng là x (m, $x > 0$) và chiều rộng là y (m, $y > 0$).

Nếu tăng chiều dài thêm 2 m, chiều rộng thêm 3 m thì diện tích tăng thêm 100 m^2 .

Ta có phương trình : $(x + 2).(y + 3) = xy + 100$ (1).

Nếu giảm chiều dài và chiều rộng đi 2 m thì diện tích giảm đi 68 m^2 .

Ta có phương trình : $(x - 2)(y - 2) = xy - 68$ (2).

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x + 2)(y + 3) = xy + 100 \\ (x - 2)(y - 2) = xy - 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 94 \\ -2x - 2y = -72. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được : $\begin{cases} x = 22 \\ y = 14 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy diện tích thửa ruộng là $22.14 = 308 (\text{m}^2)$.

Ví dụ 3. Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% so với tháng thứ nhất. Vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy ?

Giải. Gọi số chi tiết máy của tổ I sản xuất được trong tháng thứ nhất là x (chi tiết, $x \in \mathbb{N}$).

Gọi số chi tiết máy của tổ II sản xuất được trong tháng thứ nhất là y (chi tiết, $y \in \mathbb{N}$).

Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy ta có phương trình :

$$x + y = 900 \quad (1).$$

Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% nên đã sản xuất được 1010 chi tiết máy, ta có phương trình :

$$\frac{115x}{100} + \frac{110y}{100} = 1010 \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta được hệ $\begin{cases} x + y = 900 \\ \frac{115x}{100} + \frac{110y}{100} = 1010 \end{cases}$. Giải ra ta có $\begin{cases} x = 400 \\ y = 500 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy trong tháng thứ nhất tổ I sản xuất được 400 chi tiết máy, tổ II sản xuất được 500 chi tiết máy.

Ví dụ 4. Hai kho chứa 450 tấn hàng. Nếu chuyển 50 tấn từ kho I sang kho II thì số hàng kho II bằng $\frac{4}{5}$ số hàng kho I. Tính số hàng trong mỗi kho.

Giải.

Gọi số hàng trong kho I là x (tấn, $x > 0$) ; số hàng trong kho II là y (tấn, $y > 0$).

Hai kho chứa 450 tấn hàng nên ta có phương trình :

$$x + y = 450 \quad (1).$$

Nếu chuyển 50 tấn từ kho I sang kho II thì số hàng kho II bằng $\frac{4}{5}$ số hàng

kho I ta có phương trình : $y + 50 = \frac{4}{5} \cdot (x - 50)$ (2).

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 450 \\ y + 50 = \frac{4}{5}(x - 50). \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 300 \\ y = 150 \end{cases}$ thoả mãn điều kiện.

Vậy trong kho I có 300 tấn hàng, kho II có 150 tấn hàng.

Dạng 2. TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CHỮ SỐ

Phương pháp giải

Viết số dưới dạng thập phân $\overline{ab} = 10.a + b$;

$$\overline{abc} = 100.a + 10.b + c$$

$$0 < a \leq 9 ; a \in \mathbb{N} ;$$

$$0 \leq b, c \leq 9 ; b, c \in \mathbb{N}.$$

Ví dụ 1. Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 10 và nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được số mới nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Giải.

Gọi chữ số hàng chục là x, chữ số hàng đơn vị là y :

$$0 < x ; y \leq 9 ; x, y \in \mathbb{N}.$$

Theo đề bài ta có hệ phương trình :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 10 \\ \overline{xy} = \overline{yx} + 18 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 10x + y = 10y + x + 18 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \text{ thoả mãn điều kiện.} \end{aligned}$$

Vậy số cần tìm là 64.

Ví dụ 2. Một số tự nhiên có hai chữ số. Tỉ số giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị là $\frac{2}{3}$. Nếu viết thêm chữ số 1 xen vào giữa thì được số mới lớn hơn số đã cho là 370 đơn vị. Tìm số đã cho.

Giải.

Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y :

$$0 < x \leq 9 ; 0 < y \leq 9 ; x, y \in \mathbb{N}.$$

Theo đề bài ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ \overline{xy} = \overline{xy} + 370 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 100x + 10 + y = 10x + y + 370 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy số đã cho là 46.

Dạng 3. TOÁN LÀM CHUNG CÔNG VIỆC

Phương pháp giải

- Toán làm chung công việc có ba đại lượng tham gia là toàn bộ công việc, phần việc trong một đơn vị thời gian ; thời gian.
- Nếu một đội làm xong công việc trong x ngày thì một ngày đội đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc.
- Xem toàn bộ công việc là 1.

Ví dụ 1. Hai công nhân cùng làm một công việc trong 18h thì xong. Nếu người thứ nhất là 6h và người thứ hai làm 12h thì chỉ hoàn thành 50% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu ?

Giải.

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc là x (giờ, $x > 0$) ; người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc là y (giờ, $y > 0$).

Trong 1h người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Hai người làm chung 18h thì xong, ta có phương trình :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \quad (1).$$

Nếu người thứ nhất làm trong 6h và người thứ hai làm trong 12h thì hoàn thành 50% công việc, ta có phương trình :

$$\frac{6}{x} + \frac{12}{y} = 50\% \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \\ \frac{6}{x} + \frac{12}{y} = 50\% \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 36$; $y = 36$ thoả mãn điều kiện.

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong 36h và người thứ hai hoàn thành công việc trong 36h.

Ví dụ 2. Hai vòi nước chảy cùng vào một bể không có nước thì sau 1h 30 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi I chảy trong 15 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ II chảy trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu đầy bể ?

Giải.

Ta có : 1h 30 phút = $\frac{3}{2}$ h ; 15 phút = $\frac{1}{4}$ h ; 20 phút = $\frac{1}{3}$ h.

Gọi thời gian vòi I chảy một mình đầy bể là x (h ; $x > 0$) ;

Thời gian vòi II chảy một mình đầy bể là y (h ; $y > 0$).

Hai vòi cùng chảy thì sau 1h 30 phút đầy bể, ta có phương trình :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \quad (1).$$

Vòi I chảy trong 15 phút và vòi II chảy trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể ta có

phương trình :
$$\frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5} \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được : $x = \frac{15}{4}$; $y = \frac{5}{2}$ thoả mãn điều kiện.

Vậy nếu chảy riêng thì vòi I chảy đầy bể trong $\frac{15}{4}$ h, vòi II chảy đầy bể trong $\frac{5}{2}$ h.

Dạng 4. TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Phương pháp giải

- Toán chuyển động có ba đại lượng tham gia :

vận tốc (v), thời gian (t), quãng đường (S).

$$* v = \frac{S}{t} ; S = v.t ; t = \frac{S}{v}.$$

Ví dụ 1. Một ca nô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Nếu ca nô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì thời gian rút ngắn được 2 giờ. Nếu ca nô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian tăng 3 giờ. Tính vận tốc và thời gian dự định của ca nô.

Giải.

Gọi vận tốc dự định của ca nô là x (km/h ; $x > 3$) và thời gian dự định đi từ A đến B là y (giờ ; $y > 0$).

Nếu ca nô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì thời gian rút ngắn được 2 giờ, ta có phương trình : $(x + 3).(y - 2) = xy$ (1).

Nếu ca nô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian tăng thêm 3 giờ, ta có phương trình : $(x - 3).(y + 3) = xy$ (2).

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x + 3).(y - 2) = xy \\ (x - 3).(y + 3) = xy \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được : $\begin{cases} x = 15 \\ y = 12 \end{cases}$ thoả mãn điều kiện.

Vậy vận tốc dự định của ca nô là 15 km/h.

Và thời gian dự định của ca nô là 12 giờ.

Ví dụ 2. Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ xuôi dòng được 81 km và ngược dòng 105 km. Một lần khác, ca nô chạy trên sông trong 4 giờ xuôi dòng 54 km và ngược dòng 42 km. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.

(Biết vận tốc riêng của ca nô ; vận tốc dòng nước không đổi).

Giải.

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h ; $x > 0$) ;

Vận tốc dòng nước là y (km/h ; $x > y > 0$).

Suy ra vận tốc xuôi dòng của ca nô là : $(x + y)$ (km/h) và vận tốc ngược dòng của ca nô là $(x - y)$ (km/h).

Ca nô chạy trong 8 giờ xuôi dòng được 81 km và ngược dòng được 105 km,

$$\text{ta có phương trình : } \frac{81}{x + y} + \frac{105}{x - y} = 8 \quad (1).$$

Ca nô chạy trong 4 giờ xuôi dòng được 54 km và ngược dòng được 42 km,

$$\text{ta có phương trình : } \frac{54}{x + y} + \frac{42}{x - y} = 4 \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{81}{x + y} + \frac{105}{x - y} = 8 \\ \frac{54}{x + y} + \frac{42}{x - y} = 4. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x + y} = u ; \frac{1}{x - y} = v, \text{ ta có : } \begin{cases} 81u + 105v = 8 \\ 54u + 42v = 4. \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ ta có : } \begin{cases} u = \frac{1}{27} \\ v = \frac{1}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases} \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h ; vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Ví dụ 3. Một xe máy đi từ A đến B trong thời gian đã định. Nếu đi với vận tốc 45 km/h sẽ tới B chậm mất nửa giờ. Nếu đi với vận tốc 60 km/h sẽ tới B sớm 45 phút. Tính quãng đường AB và thời gian dự định.

Giải.

Ta có : 45 phút = $\frac{3}{4}$ giờ.

Gọi quãng đường AB là x (km ; $x > 0$) và thời gian dự định đi từ A đến B là y (h, $y > 0$).

• Nếu đi với vận tốc 45 km/h sẽ tới B chậm nửa giờ, ta có phương trình :

$$x = 45 \cdot \left(y + \frac{1}{2} \right) \quad (1).$$

• Nếu đi với vận tốc 60 km/h sẽ tới B sớm 45 phút, ta có phương trình :

$$x = 60 \cdot \left(y - \frac{3}{4} \right) \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = 45 \cdot \left(y + \frac{1}{2} \right) \\ x = 60 \cdot \left(y - \frac{3}{4} \right) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 225 \\ y = 4,5 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy quãng đường AB dài 225 km và thời gian dự định đi từ A đến B hết 4,5 giờ (= 4 giờ 30 phút).

Dạng 5. TOÁN CÓ NỘI DUNG LÍ, HÓA

Phương pháp giải

• Nắm vững các công thức lí, hóa liên quan.

Ví dụ 1. Có hai loại quặng chứa 75% sắt và 50% sắt. Tính khối lượng của mỗi loại quặng đem trộn để được 25 tấn quặng chứa 66% sắt.

Giải.

Gọi khối lượng loại quặng chứa 75% sắt và 50% sắt lần lượt là x, y (tấn ; $x, y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ \frac{75x}{100} + \frac{50y}{100} = \frac{66}{100} \cdot 25. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được : $\begin{cases} x = 16 \\ y = 9 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy đem trộn 16 tấn loại quặng chứa 75% sắt ; 9 tấn loại quặng chứa 50% sắt.

Ví dụ 2. Người ta cho thêm 1 kg nước vào dung dịch A thì được dung dịch B có nồng độ axit là 20%. Sau đó lại cho thêm 1 kg axit vào dung dịch B thì được dung dịch C có nồng độ axit là $33\frac{1}{3}\%$. Tính nồng độ axit trong dung dịch A.

Giải.

Gọi khối lượng axit trong dung dịch A là x (kg ; $x > 0$) ;

Khối lượng nước trong dung dịch A là y (kg ; $y > 0$).

Cho thêm 1 kg nước vào dung dịch A thì được dung dịch B có nồng độ axit là 20% ta có phương trình : $\frac{x}{x + y + 1} = 20\%$ (1).

Cho thêm 1 kg axit vào dung dịch B thì được dung dịch C có nồng độ axit là $33\frac{1}{3}\%$ ta có phương trình : $\frac{x + 1}{x + y + 2} = 33\frac{1}{3}\%$ (2).

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{x}{x + y + 1} = \frac{1}{5} \\ \frac{x + 1}{x + y + 2} = \frac{1}{3} \end{cases}$

Giải hệ ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy nồng độ axit trong dung dịch A là $\frac{1}{3 + 1} = \frac{1}{4} = 25\%$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho một số gồm hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó ta được số mới hơn số cũ là 45. Tổng của số đã cho và một số mới tạo thành là 77. Tìm số đã cho.
2. Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng là 100 và số lớn hơn số bé là 20.

3. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 15 giờ rồi người thứ hai làm tiếp 6 giờ thì hoàn thành được 75% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình hoàn thành trong bao lâu ?
4. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch ?
5. Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó ?
6. Một ca nô xuôi dòng 81 km và ngược dòng 42 km mất 5 giờ. Một lần khác, ca nô xuôi dòng 9 km và ngược dòng 7 km thì mất 40 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước. (Biết vận tốc riêng của ca nô ; vận tốc của dòng nước không đổi).
7. Một ô tô đi từ Hà Nội và dự định đến Huế lúc 20h 30 phút. Nếu xe đi với vận tốc 45 km/h thì sẽ đến Huế chậm hơn so với dự định là 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 60 km/h thì sẽ đến Huế sớm hơn 2 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường Hà Nội – Huế và thời gian xe xuất phát từ Hà Nội.
8. Một trường tổ chức cho học sinh đi tham quan bằng ô tô. Nếu xếp mỗi xe 40 học sinh thì còn thừa 5 học sinh. Nếu xếp mỗi xe 41 học sinh thì xe cuối cùng còn thiếu 3 học sinh. Hỏi có bao nhiêu học sinh đi tham quan và có bao nhiêu ô tô ?
9. Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh của nó lên 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ tăng thêm 13 cm^2 . Nếu giảm chiều dài đi 2 cm, chiều rộng đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ giảm đi 15 cm^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đã cho.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y : $0 < x, y \leq 9$; $x, y \in \mathbb{N}$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} 10y + x = 10x + y + 45 \\ 10x + y + 10y + x = 77. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy số đã cho là 16.

2. Gọi số lớn x , số bé là y ($x ; y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 20. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 60 \\ y = 40 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy hai số tự nhiên là 60 ; 40.

3. Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc là x (giờ ; $x > 0$) ; người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc là y (giờ ; $y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{15}{x} + \frac{6}{y} = 75\%. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong 24 giờ ; người thứ hai hoàn thành công việc trong 48 giờ.

4. Gọi số sản phẩm tổ I được giao là x (sản phẩm ; $x \in \mathbb{N}$) ;
số sản phẩm tổ II được giao là y (sản phẩm ; $y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x + y = 600 \\ \frac{18x}{100} + \frac{21y}{100} = 120. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 200 \\ y = 400 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy số sản phẩm tổ I được giao là 200 sản phẩm ; tổ II được giao là 400 sản phẩm.

5. Gọi thời gian tổ I làm một mình hoàn thành công việc là x (giờ ; $x > 0$) ;
tổ II làm một mình hoàn thành công việc là y (giờ ; $y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ 2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{10}{x} = 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy nếu làm riêng thì tổ I hoàn thành công việc trong 15 giờ ;

Tổ II hoàn thành công việc trong 10 giờ.

6. Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h ; $x > 0$) ;

Vận tốc dòng nước là y (km/h ; $x > y > 0$).

Theo đầu bài ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{81}{x+y} + \frac{42}{x-y} = 5 \\ \frac{9}{x+y} + \frac{7}{x-y} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Đặt : $\frac{1}{x+y} = u$; $\frac{1}{x-y} = v$, ta có : $\begin{cases} 81u + 42v = 5 \\ 9u + 7v = \frac{2}{3}. \end{cases}$

Giải hệ ta được : $\begin{cases} u = \frac{1}{27} \\ v = \frac{1}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 27 \\ x-y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h.

Vận tốc dòng nước là 3 km/h.

7. Gọi quãng đường Hà Nội – Huế là x (km ; $x > 0$) và thời gian ô tô dự định đi là y (giờ ; $y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} x = 60.(y - 2) \\ x = 45.(y + 2). \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được
$$\begin{cases} x = 720 \\ y = 14 \end{cases} \quad (\text{thoả mãn điều kiện}).$$

Vậy quãng đường Hà Nội – Huế là 720 km.

Và thời gian xe xuất phát từ Hà Nội là : 20h 30 phút – 14h = 6h 30 phút.

8. Gọi số học sinh đi tham quan là x (người, $x \in \mathbb{N}^*$) và số ô tô là y (ô tô ; $y \in \mathbb{N}^*$).

Theo đầu bài ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} x = 40y + 5 \\ x = 41y - 3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được
$$\begin{cases} x = 325 \\ y = 8 \end{cases} \quad (\text{thoả mãn điều kiện}).$$

Vậy số học sinh đi tham quan là 325 em và số ô tô là 8.

9. Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (cm ; $x > 0$) và chiều rộng là y (cm ; $y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = xy + 13 \\ (x - 2)(y - 1) = xy - 15. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được
$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \quad (\text{thoả mãn điều kiện}).$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật là 7 cm ; chiều rộng là 5 cm.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y có dạng $ax + by = c$, trong đó a, b, c là các số và $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$.
2. Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm.
Trong mặt phẳng toạ độ, tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$.
3. Có hai quy tắc biến đổi hệ phương trình đó là quy tắc thế và quy tắc cộng nên có hai phương pháp cơ bản giải hệ phương trình : phương pháp thế, phương pháp cộng.

4. Hệ phương trình : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad (a, b, c, a', b', c' \neq 0)$

- Có vô số nghiệm nếu : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$;
- Vô nghiệm nếu : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$;
- Có một nghiệm duy nhất nếu : $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

5. Giải toán bằng cách lập hệ phương trình gồm ba bước :

- *Bước 1.* Lập hệ phương trình.
- *Bước 2.* Giải hệ phương trình vừa lập.
- *Bước 3.* Nhận xét, trả lời.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

- Phương pháp thế ;
- Phương pháp cộng ;
- Phương pháp đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 2 = 0 \\ 5x - y = 11. \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{3} \\ 4x - 5y - 10 = 0. \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ x + y - 10 = 0. \end{cases} \end{array}$$

Giải.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 2 = 0 \\ 5x - y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 24 \\ y = 5x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3(5x - 11) = 24 \\ y = 5x - 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \cdot 3 - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ là nghiệm của hệ phương trình.}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{3} \\ 4x - 5y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = -5 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 5 \\ 3x + 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ 3 \cdot \frac{5}{7} + 5y = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = -\frac{10}{7} \end{cases} \text{ là nghiệm của hệ phương trình.}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ x + y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 20 \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \text{ là nghiệm của hệ phương trình.}$$

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} + \frac{3}{\sqrt{y+6}} = 2\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} + \frac{5}{y-2x-3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3}{x+y-1} - \frac{1}{y-2x-3} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

Giải.

a) Điều kiện $x > 7$; $y > -6$.

$$\text{Đặt : } \frac{1}{\sqrt{x-7}} = u > 0 ; \frac{1}{\sqrt{y+6}} = v > 0.$$

$$\text{Hệ phương trình có dạng : } \begin{cases} 7u - 4v = \frac{5}{3} \\ 5u + 3v = 2\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình, ta được : } \begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{6} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \sqrt{x-7} = 3 \\ \sqrt{y+6} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 30 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(16 ; 30)$.

b) Đặt : $\frac{1}{x+y-1} = u$; $\frac{1}{y-2x-3} = v$. (Điều kiện $x+y-1 \neq 0$; $y-2x-3 \neq 0$).

Hệ phương trình có dạng :
$$\begin{cases} 4u + 5v = \frac{5}{2} \\ 3u - v = \frac{7}{5} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được
$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases} x+y-1=2 \\ y-2x-3=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ -2x+y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10}{3} \\ y = 6\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(-\frac{10}{3} ; 6\frac{1}{3}\right)$.

Ví dụ 3. Giải các hệ phương trình sau :

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ 4x + y + 2z = 19. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ x + 2y + z = 20 \\ x + y + 2z = 17. \end{cases}$$

Giải.

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 8 & (1) \\ 3x - 2y + z = 1 & (2) \\ 4x + y + 2z = 19 & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta có : $z = 8 - x - y$ thay vào phương trình (2), (3) ta được :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 8 - x - y = 1 \\ 4x + y + 2(8 - x - y) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình hai ẩn, ta được
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 5. \end{cases}$$

Suy ra : $z = 8 - 4 - 5 = -1$.

Vậy hệ có nghiệm là $(x ; y ; z) = (4 ; 5 ; -1)$.

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y + z = 23 & (1) \\ x + 2y + z = 20 & (2) \\ x + y + 2z = 17 & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), (2), (3) cộng vế với vế ta được :

$$4x + 4y + 4z = 60 \Rightarrow x + y + z = 15 \quad (4).$$

$$\bullet \text{ Từ (1), (4)} \Rightarrow x + 15 = 23 \Rightarrow x = 8.$$

$$\bullet \text{ Từ (2), (4)} \Rightarrow y + 15 = 20 \Rightarrow y = 5.$$

$$\bullet \text{ Từ (3), (4)} \Rightarrow z + 15 = 17 \Rightarrow z = 2.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x ; y ; z) = (8 ; 5 ; 2)$.

Dạng 2. XÁC ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ HỆ PHƯƠNG TRÌNH THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM

Phương pháp giải

- Giải hệ phương trình theo tham số.
- Kết hợp với yêu cầu về nghiệm để tìm tham số.

Ví dụ 1. Với giá trị $m \neq 0$ nào thì hệ $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$

có nghiệm thoả mãn $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}$?

Giải.

$$\begin{cases} mx - y = 2 & (1) \\ 3x + my = 5 & (2) \end{cases}$$

- Từ phương trình (1) $\Rightarrow y = mx - 2$ thay vào phương trình (2), ta có :

$$3x + m(mx - 2) = 5 \Rightarrow x = \frac{2m + 5}{m^2 + 3}.$$

$$\text{Suy ra : } y = \frac{5m - 6}{m^2 + 3}.$$

$$\bullet \text{ Ta có } x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3} \Leftrightarrow \frac{2m + 5}{m^2 + 3} + \frac{5m - 6}{m^2 + 3} = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3} \Leftrightarrow m = -\frac{4}{7}.$$

Ví dụ 2. Xác định a để hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = a + 2 \\ x - y = a \end{cases}$

có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x < y$.

Giải.

$$\begin{cases} 2x + y = a + 2 \\ x - y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2a + 2 \\ x - y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2a + 2}{3} \\ y = \frac{2 - a}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } x < y \Leftrightarrow \frac{2a + 2}{3} < \frac{2 - a}{3} \Leftrightarrow a < 0.$$

Vậy với $a < 0$ thì hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x < y$.

**Dạng 3. TÌM GIÁ TRỊ THAM SỐ ĐỂ HỆ CÓ NGHIỆM DUY NHẤT ;
HỆ VÔ NGHIỆM ; HỆ CÓ VÔ SỐ NGHIỆM**

Phương pháp giải

Hệ phương trình : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad (a, b, c, a', b', c' \neq 0).$

• Có một nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$;

• Vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$;

• Có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Ví dụ 1. Xác định m để mỗi hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

a) $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + my = 9 \\ 2mx + 18y = -27. \end{cases}$

Giải.

a) • Với $m = 0$, hệ có dạng : $\begin{cases} x = 1 \\ 0.x - 0y = 3. \end{cases}$ Vô nghiệm (loại).

- Xét $m \neq 0$, điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất là : $\frac{1}{m} \neq \frac{m}{-3m} \Leftrightarrow m \neq -3$.

Vậy với $m \notin \{-3; 0\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

- b) • Với $m = 0$, hệ có dạng : $\begin{cases} 4x = 9 \\ 18y = -27 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Suy ra $m = 0$ thoả mãn.

- Xét $m \neq 0$. Hệ có nghiệm duy nhất khi : $\frac{4}{2m} \neq \frac{m}{18} \Leftrightarrow 2m^2 \neq 72 \Leftrightarrow m \neq \pm 6$.

Vậy với $m \neq \pm 6$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2. Xác định m để mỗi hệ phương trình sau có vô số nghiệm :

- a) $\begin{cases} mx + y = m \\ x + my = 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} (m-1)^2 \cdot x + (m^2-1)y = (m+1)^2 \\ (2m-1)x + (m+1)y = m^2-1. \end{cases}$

Giải.

- a) • Với $m = 0$, hệ có dạng : $\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ là nghiệm duy nhất (loại).

- Xét $m \neq 0$. Hệ có vô số nghiệm khi $\frac{m}{1} = \frac{1}{m} = \frac{m}{1} \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy với $m = \pm 1$ thì hệ có vô số nghiệm.

- b) • Xét $m = -1$, hệ có dạng : $\begin{cases} 4x = 0 \\ 3x = 0 \end{cases}$ hệ có vô số nghiệm là $\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbf{R}. \end{cases}$

$\Rightarrow m = -1$ thoả mãn.

- Xét $m = \frac{1}{2}$, hệ có dạng : $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y = \frac{9}{4} \\ 0 \cdot x + \frac{3}{2}y = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất (loại).

- Xét $m \notin \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$ hệ có vô số nghiệm khi :

$$\frac{(m-1)^2}{2m-1} = \frac{m^2-1}{m+1} = \frac{(m+1)^2}{m^2-1} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy $m \in \{-1; 0\}$ thì hệ có vô số nghiệm.

Ví dụ 3. Tìm m để hệ phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} 2(m+1)x + (m+2)y = m-3 \\ (m+1)x + my = 3m+7. \end{cases}$$

Giải.

- Với $m = -1$, hệ phương trình có dạng : $\begin{cases} y = -4 \\ -y = 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{hệ có vô số nghiệm } \begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -4 \end{cases} \text{ (loại).}$$

- Với $m = 0$, hệ phương trình có dạng : $\begin{cases} 2x + 2y = -3 \\ x = 7 \end{cases}$ hệ có nghiệm duy nhất (loại).

- Với $m = -\frac{7}{3}$, hệ phương trình có dạng : $\begin{cases} -\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}y = -\frac{16}{3} \\ -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3}y = 0 \end{cases}$

hệ phương trình có nghiệm duy nhất (loại).

- Xét $m \notin \left\{-1; 0; -\frac{7}{3}\right\}$ hệ phương trình vô nghiệm khi :

$$\frac{2(m+1)}{m+1} = \frac{m+2}{m} \neq \frac{m-3}{3m+7} \Rightarrow m = 2 \text{ thoả mãn.}$$

Vậy với $m = 2$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

Dạng 4. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

Xem phần trọng tâm kiến thức.

Ví dụ 1. Hai vòi nước cùng chảy thì sau 5h 50 phút sẽ đầy bể. Nếu để hai vòi cùng chảy trong 5 giờ rồi khóa vòi thứ nhất lại thì vòi thứ hai phải chảy trong 2 giờ nữa mới đầy bể. Tính xem nếu để mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể ?

Giải.

$$\text{Đổi } 5 \text{ giờ } 50 \text{ phút} = 5\frac{5}{6} \text{ giờ} = \frac{35}{6} \text{ giờ.}$$

Gọi thời gian vòi một chảy một mình đầy bể hết x (giờ ; $x > 0$) ;

Thời gian vòi hai chảy một mình đầy bể hết y (giờ ; $y > 0$).

Hai vòi chảy thì sau 5 giờ 50 phút $\left(= \frac{35}{6} \text{ giờ} \right)$ sẽ đầy bể, ta có phương trình :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{6}{35} \quad (1).$$

Nếu hai vòi cùng chảy trong 5 giờ rồi khóa một vòi lại thì vòi hai chảy tiếp 2 giờ mới đầy bể, ta có phương trình :

$$5 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{2}{y} = 1 \quad (2).$$

Từ (1), (2), ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{6}{35} \\ 5 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{2}{y} = 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được $\begin{cases} x = 10 \\ y = 14 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy vòi một chảy một mình đầy bể trong 10 giờ, vòi hai chảy đầy bể một mình trong 14 giờ.

Ví dụ 2. Một hợp tác vận tải có 15 xe ô tô nhỏ và 10 xe ô tô lớn thì vận chuyển được 690 khách. Nếu hợp tác vận tải rút bớt 10 xe ô tô nhỏ và tăng thêm 4 xe ô tô lớn thì số khách chuyển được tăng thêm 20 người. Hỏi mỗi loại xe chở được bao nhiêu người ?

Giải.

Gọi số khách mà một ô tô nhỏ chở được là x (khách, $x \in \mathbb{N}$).

Số khách mà một ô tô lớn chở được là y (khách, $y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 15x + 10y = 690 \\ 5x + 14y = 710. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được $\begin{cases} x = 16 \\ y = 45 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy loại xe ô tô nhỏ chở được 16 khách.

Loại xe ô tô lớn chở được 45 khách.

Ví dụ 3. Một hình chữ nhật có chu vi 26 m. Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3 m thì diện tích tăng thêm 40 m^2 . Tìm kích thước của hình chữ nhật.

Giải.

Gọi chiều dài là hình chữ nhật là x (m, $x > 0$) ;

Chiều rộng hình chữ nhật là y (m, $y > 0$).

Chu vi hình chữ nhật là 26 m, ta có phương trình : $(x + y).2 = 26$ (1).

Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3 m thì diện tích tăng thêm 40 m^2 , ta có phương trình : $(x + 2).(y + 3) = xy + 40$ (2).

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x + y).2 = 26 \\ (x + 2).(y + 3) = xy + 40. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được $\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$ thoả mãn điều kiện.

Vậy kích thước hình chữ nhật là 8 m ; 5 m.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x + 3) = 3(y + 1) + 4 \\ 3(x - y + 1) = 2(x - 2) + 3. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{2x + 3y - 1}{x - y + 2} = \frac{12}{13} \\ 2x + 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

2. Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{5x}{x + 4} + \frac{2y}{2y - 3} = 27 \\ \frac{2x}{x + 4} - \frac{6y}{2y - 3} = 4. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{3}{x + 2} - \frac{y}{y + 1} = -1 \\ \frac{x}{x + 2} + \frac{2}{y + 1} = -\frac{5}{3}. \end{cases}$$

3. Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y - 3z = -8 \\ 3x - y + 2z = 46. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + z - x = 6 \\ z + x - y = 4. \end{cases}$$

4. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m+1)x - y = m+1 \\ x + (m-1)y = 2. \end{cases}$$
- Giải hệ phương trình với $m = 2$;
 - Giải và biện luận hệ phương trình ;
 - Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y)$, với x, y có giá trị nguyên ;
 - Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y)$ sao cho $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất.
5. Hai trường THCS có tất cả 300 học sinh dự thi vào lớp 10 THPT. Biết rằng trường thứ nhất có 75% số học sinh đỗ, trường thứ hai có 60% số học sinh đỗ nên cả hai trường có 207 học sinh đỗ vào lớp 10. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh dự thi.
6. Hai tổ sản xuất, tổ I làm trong 6 ngày, tổ II làm trong 8 ngày được tất cả 620 sản phẩm. Biết rằng số sản phẩm tổ I làm trong 4 ngày đúng bằng số sản phẩm tổ II làm trong 5 ngày. Hỏi mỗi ngày, mỗi tổ làm được bao nhiêu sản phẩm ?
7. Một xe tải lớn chở 10 chuyến hàng và một xe nhỏ chở 5 chuyến hàng thì được 60 tấn. Biết rằng 3 chuyến của xe lớn chở nhiều hơn 7 chuyến xe nhỏ là 1 tấn. Hỏi mỗi xe chở được bao nhiêu tấn hàng một chuyến ?
8. Hai phân xưởng của nhà máy theo kế hoạch phải làm 300 sản phẩm. Nhưng phân xưởng I đã thực hiện 110% kế hoạch, phân xưởng II đã thực hiện 120% kế hoạch, do đó đã sản xuất được 340 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi phân xưởng phải làm theo kế hoạch.
9. Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai chỉ làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình trong thời gian bao lâu hoàn thành công việc đó ?
10. Hai địa điểm A và B cách nhau 360 km. Cùng lúc đó một xe tải khởi hành từ A chạy về B và một xe con chạy từ B về A. Sau khi gặp nhau xe tải chạy tiếp 5 giờ nữa thì đến B và xe con chạy tiếp 3 giờ 12 phút thì tới A. Tính vận tốc mỗi xe.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình.
- b) $\begin{cases} x = -\frac{71}{20} \\ y = \frac{17}{10} \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình.

2. a) Đặt : $\frac{x}{x+4} = u$; $\frac{y}{2y-3} = v$, điều kiện $x \neq -4$; $y \neq \frac{3}{2}$.

Hệ phương trình có dạng :
$$\begin{cases} 5u + 2v = 27 \\ 2u - 6v = 4. \end{cases}$$

Giải hệ ta được
$$\begin{cases} u = 5 \\ v = 1. \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(-5 ; 3)$.

b) Biến đổi hệ phương trình dưới dạng :
$$\begin{cases} \frac{3}{x+2} + \frac{1}{y+1} = 0 \\ -\frac{2}{x+2} + \frac{2}{y+1} = -\frac{8}{3}. \end{cases}$$

Đặt : $\frac{1}{x+2} = u$; $\frac{1}{y+1} = v$, điều kiện $x \neq -2$; $y \neq -1$.

Hệ phương trình có dạng :
$$\begin{cases} 3u + v = 0 \\ -2u + 2v = -\frac{8}{3}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = -1. \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(1 ; -2)$.

3. a) Từ phương trình đầu suy ra $z = 6 - x - y$ thay vào hai phương trình sau và thu gọn, ta được :
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 3y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -8. \end{cases}$$

Do đó $z = 6 - 10 + 8 = 4$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x ; y ; z) = (10 ; -8 ; 4)$.

b) Cộng vế với vế của ba phương trình ta được $x + y + z = 12$, sau đó kết hợp với từng phương trình, ta tìm được nghiệm của hệ là :

$$(x ; y ; z) = (3 ; 4 ; 5).$$

4. a) Với $m = 2$, giải hệ ta được nghiệm $\left(\frac{5}{4} ; \frac{3}{4}\right)$.

b) • Với $m = 0 \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

• Với $m \neq 0 \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{m^2 + 1}{m^2} ; \frac{m + 1}{m^2} \right)$.

c) • Với $m \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{m^2 + 1}{m^2} ; \frac{m + 1}{m^2} \right)$.

• Để $\frac{m^2 + 1}{m^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \pm 1$.

Thử lại với $m = \pm 1$ thì $\frac{m^2 + 1}{m^2}, \frac{m + 1}{m^2} \in \mathbb{Z}$.

Vậy với $m = \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$.

d) • Với $m \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{m^2 + 1}{m^2} ; \frac{m + 1}{m^2} \right)$.

• Xét $x + y = \frac{m^2 + m + 2}{m^2} = \frac{7}{8} + \frac{(m + 4)^2}{8m^2} \geq \frac{7}{8}$.

Vậy với $m = -4$ thì $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{7}{8}$.

5. Gọi số học sinh của trường thứ nhất dự thi là x (em ; $x \in \mathbb{N}$).

Số học sinh của trường thứ hai dự thi là y (em ; $y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y = 300 \\ \frac{75x}{100} + \frac{60y}{100} = 207. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 180 \\ y = 120 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số học sinh của trường thứ nhất dự thi là 180 em ;

Số học sinh của trường thứ hai dự thi là 120 em.

6. Gọi số sản phẩm tổ I làm trong một ngày là x (sản phẩm ; $x \in \mathbb{N}$).

Số sản phẩm tổ II làm trong một ngày là y (sản phẩm ; $y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 6x + 8y = 620 \\ 4x = 5y. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy số sản phẩm làm trong một ngày của tổ I là 50 sản phẩm ;
tổ hai là 40 sản phẩm.

7. Gọi lượng hàng xe lớn chở trong một chuyến là x (tấn ; $x \in \mathbf{N}$) ;
Lượng hàng xe nhỏ chở trong một chuyến là y (tấn ; $y \in \mathbf{N}$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 10x + 5y = 60 \\ 3x - 7y = 1. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy xe lớn một chuyến chở được 5 tấn, xe nhỏ chở được 2 tấn.

8. Gọi số sản phẩm phân xưởng I làm theo kế hoạch là x (sản phẩm ; $x > 0$) ;
Số sản phẩm phân xưởng II làm theo kế hoạch là y (sản phẩm ; $y > 0$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x + y = 300 \\ \frac{110x}{100} + \frac{120y}{100} = 340. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 200 \\ y = 100 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy phân xưởng I làm theo kế hoạch là 200 sản phẩm.

Phân xưởng II làm theo kế hoạch là 100 sản phẩm.

9. Ta có 7 giờ 12 phút $= \frac{36}{5}$ giờ.

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc hết x (giờ ; $x \in \mathbf{N}$) ;

Người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc hết y (giờ ; $y \in \mathbf{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4}. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc hết 12 giờ.

Người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc hết 18 giờ.

10. Ta có 3 giờ 12 phút = $\frac{16}{5}$ giờ.

Gọi vận tốc xe tải là x (km/h ; $x > 0$) ;

Vận tốc xe con là y (km/h ; $y > 0$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} 5x + \frac{16}{5}y = 360 \\ \frac{\frac{16}{5}y}{x} = \frac{5x}{y} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được $\begin{cases} x = 40 \\ y = 50 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy vận tốc xe tải là 40 km/h.

Vận tốc xe con là 50 km/h.

CHƯƠNG IV

HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$). PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

§1. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

§2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

- Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.
- Nếu $a > 0$ thì $y > 0$ với mọi $x \neq 0$;
 $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.
- Nếu $a < 0$ thì $y < 0$ với mọi $x \neq 0$;
 $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 0$.

2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

- Đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một Parabol với đỉnh O.
- Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.
- Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH GIÁ TRỊ HÀM SỐ $y = f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$) TẠI $x = x_0$

Phương pháp giải

Để tính $f(x_0)$ ta thay $x = x_0$ vào $f(x)$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Điền vào chỗ trống tương ứng

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x^2$							

Giải.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x^2$	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$

Ví dụ 2. Diện tích S của một hình tròn được tính bởi công thức $S = \pi R^2$, trong đó R là bán kính.

a) Dùng máy tính bỏ túi, tính các giá trị của S rồi điền vào ô trống trong bảng sau (biết $\pi = 3,14$; làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

R (cm)	0,52	1,26	2,65	3,65
$S = \pi R^2$ (cm ²)				

b) Nếu bán kính tăng gấp 5 lần thì diện tích tăng hay giảm mấy lần?

c) Tính bán kính của hình tròn, chính xác tới chữ số thập phân thứ hai, nếu biết diện tích của nó bằng 15,9 (cm²).

Giải.

a)

R (cm)	0,52	1,26	2,65	3,65
$S = \pi R^2$ (cm ²)	0,85	4,99	22,05	41,83

b) Giả sử $R' = 5.R$ thì $S' = \pi R'^2 = \pi(5R)^2 = \pi 25R^2 = 25S$.

Vậy diện tích tăng 25 lần.

c) $S = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{S}{\pi} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{15,9}{3,14}} \approx 2,25(\text{cm})$.

Ví dụ 3. Cho Parabol $y = \frac{1}{4}.x^2$. Xác định giá trị của m để các điểm sau đây thuộc Parabol đó :

a) $A(\sqrt{2}; m)$;

b) $B(-\sqrt{2}; m)$;

c) $C\left(m; \frac{1}{2}\right)$.

Giải.

a) Điểm A thuộc Parabol thì ta có : $m = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}$.

b) Điểm B thuộc Parabol thì ta có : $m = \frac{1}{4} \cdot (-\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}$.

c) Điểm C thuộc Parabol thì ta có : $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot m^2 \Leftrightarrow m \in \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

Nhận xét : Phương pháp để giải dạng toán này là : Những điểm thuộc đồ thị thì toạ độ thoả mãn phương trình hàm số và ngược lại.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là Parabol (P). Biết điểm A nằm trên (P) có hoành độ bằng $-\frac{1}{2}$. Hãy tính tung độ của điểm A.

(TS 10, THPT Tỉnh Lâm Đồng, năm học 2009 - 2010)

Giải.

Điểm A thuộc Parabol (P) và có hoành độ bằng $-\frac{1}{2}$ thì ta có :

$$y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Vậy điểm A nằm trên (P) có hoành độ bằng $-\frac{1}{2}$ thì tung độ của điểm A là $\frac{1}{2}$.

Dạng 2. XÁC ĐỊNH TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Phương pháp giải

Dựa vào tính chất của $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

* $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.

* $a < 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x > 0$ và đồng biến khi $x < 0$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = (3m - 2)x^2$ với $m \neq \frac{2}{3}$.

a) Tìm điều kiện của m để hàm số đồng biến khi $x > 0$;

b) Tìm điều kiện của m để hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

Giải. a) $y = (3m - 2)x^2$ đồng biến khi $x > 0$ có điều kiện là $3m - 2 > 0$
 $\Leftrightarrow m > \frac{2}{3}$.

Vậy với $m > \frac{2}{3}$ thì $y = (3m - 2)x^2$ đồng biến khi $x > 0$.

b) $y = (3m - 2)x^2$ nghịch biến khi $x > 0$ có điều kiện là $3m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{2}{3}$.

Vậy với $m < \frac{2}{3}$ thì $y = (3m - 2)x^2$ nghịch biến khi $x > 0$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = (\sqrt{m+2} - 3)x^2$.

a) Tìm điều kiện của m để hàm số đồng biến khi $x > 0$;

b) Tìm điều kiện của m để hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

Giải.

a) $y = (\sqrt{m+2} - 3)x^2$ đồng biến khi $x > 0$ có điều kiện là :

$$\sqrt{m+2} - 3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{m+2} > 3 \Leftrightarrow m > 7.$$

b) $y = (\sqrt{m+2} - 3)x^2$ nghịch biến khi $x > 0$ có điều kiện là :

$$\sqrt{m+2} - 3 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{m+2} < 3 \Leftrightarrow -2 \leq m < 7.$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = (m^2 - 2m + 3)x^2$. Chứng minh rằng khi $x > 0$ thì hàm số đồng biến.

Giải.

Ta có $m^2 - 2m + 3 = (m - 1)^2 + 2 > 0$ với mọi m .

Suy ra hàm số $y = (m^2 - 2m + 3)x^2$ khi $x > 0$ thì hàm số đồng biến.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khi :

a) $0 \leq x \leq 3$;

b) $-3 \leq x \leq -1$.

Giải.

a) $a = 2 > 0$, nên hàm số $y = f(x) = 2x^2$ đồng biến khi $x > 0$, do đó với $0 \leq x \leq 3$ thì :

$$f(0) \leq f(x) \leq f(3) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 18.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 18 khi $x = 3$; giá trị nhỏ nhất của hàm số là 0 khi $x = 0$;

b) $a = 2 > 0$, nên hàm số $y = f(x) = 2x^2$ nghịch biến khi $x < 0$, do đó với $-3 \leq x \leq -1$ thì :

$$f(-3) \geq f(x) \geq f(-1) \Rightarrow 18 \geq f(x) \geq 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 18 khi $x = -3$; giá trị nhỏ nhất của hàm số là 2 khi $x = -1$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot x^2$.

Không tính giá trị hãy so sánh $f(\sqrt{99} + \sqrt{101})$ và $f(20)$.

Giải.

• Ta có : $\frac{1}{2-\sqrt{3}} > 0 \Rightarrow y = f(x) = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot x^2$ đồng biến khi $x > 0$.

• Ta có : $\frac{1}{\sqrt{101}+10} < \frac{1}{10+\sqrt{99}} \Leftrightarrow \sqrt{101}-10 < 10-\sqrt{99}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{99} + \sqrt{101} < 20 \Rightarrow f(\sqrt{99} + \sqrt{101}) < f(20)$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = f(x) = (m^2 + m + 1)x^2$.

a) Chứng minh rằng khi $x < 0$ thì hàm số nghịch biến ;

b) Với $m = -2$, tìm các trị nguyên của x để $f(x) < 100$.

Giải.

a) Ta có $m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi m .

Suy ra hàm số $y = f(x) = (m^2 + m + 1)x^2$ khi $x < 0$ thì hàm số nghịch biến.

b) Với $m = -2$, hàm số có dạng $y = f(x) = 3x^2$.

$f(x) < 100 \Leftrightarrow 3x^2 < 100$, với $x \in \mathbb{Z}$ thì ta có : $x^2 \in \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$.

Vậy ta có : $x \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5\}$.

Dạng 3. VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Phương pháp giải

- Lập bảng giá trị tương ứng giữa x và y . Cho x lần lượt các giá trị :
..... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; rồi tìm giá trị y tương ứng bằng cách lập bảng.
- Biểu diễn các điểm tương ứng trên mặt phẳng tọa độ.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$. Tính các giá trị tương ứng của y , điền vào ô

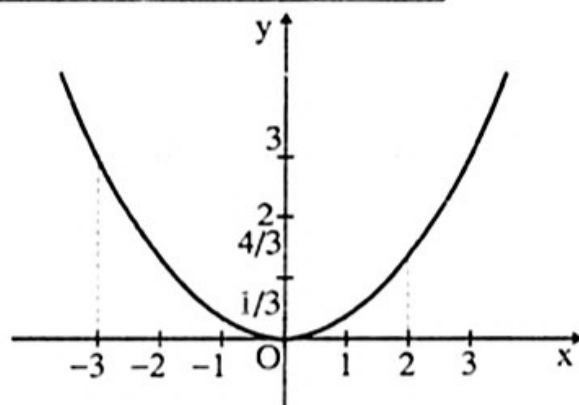
trống tương ứng và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{3}x^2$							

Giải. (h.6)

Bảng giá trị của hàm số là :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{3}x^2$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3



Hình 6

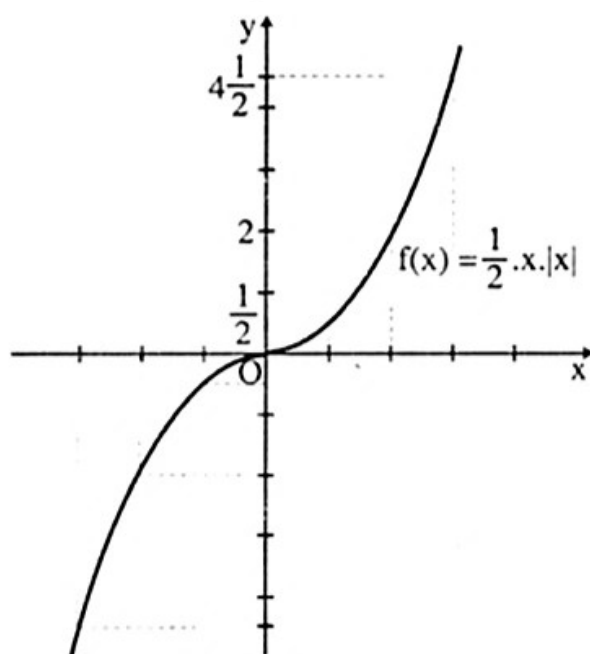
Ví dụ 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2} \cdot x \cdot |x|$.

Giải. (h.7)

Với $x \geq 0$, thì vẽ đồ thị : $y = \frac{1}{2} \cdot x^2$.

Với $x \leq 0$, thì vẽ đồ thị : $y = -\frac{1}{2} \cdot x^2$.

Vậy đồ thị $y = \frac{1}{2} x|x|$ là hai nhánh như hình vẽ.



Hình 7

Dạng 4. XÁC ĐỊNH THAM SỐ

Phương pháp giải

- $y = f(x)$ có đồ thị là (P). Điểm $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

Ví dụ 1. Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2$. Biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm A(10 ; 30).

Giải.

A(10 ; 30) thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2 \Leftrightarrow 30 = a \cdot 10^2 \Leftrightarrow a = 0,3$.

Vậy với $a = 0,3$ thì $y = ax^2$ có đồ thị qua điểm A(10 ; 30).

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = (k+2)x^2$ có đồ thị cắt đường thẳng $y - 2x + 3 = 0$ tại điểm M(1 ; m). Hãy xác định m và k.

Giải.

• $M(1 ; m)$ thuộc đồ thị hàm số $y = (k + 2)x^2 \Leftrightarrow m = (k + 2)1^2 \Leftrightarrow m = k + 2$ (1)

• $M(1 ; m)$ thuộc đường thẳng $y - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow m - 2.1 + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (2)

Từ (1), (2) ta có $m = -1 ; k = -3$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = ax + b$. Tìm a, b biết rằng đồ thị hàm số đã cho song song với đường thẳng $y = -3x + 5$ và đi qua điểm A thuộc Parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$ có hoành độ bằng -2 .

(TS 10, THPT Tỉnh Thừa Thiên Huế, năm học 2009 - 2010)

Giải.

Đồ thị hàm số $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = -3x + 5 \Rightarrow a = -3$.

Điểm $A \in (P)$ có hoành độ bằng -2 , nên $y = \frac{1}{2}(-2)^2 = 2 \Rightarrow A(-2 ; 2)$.

Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm A nên $2 = -3.(-2) + b \Rightarrow b = -4$.

Vậy $a = -3, b = -4$.

Dạng 5. TOẠ ĐỘ GIAO ĐIỂM PARABOL VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải

- Giả sử Parabol (P) là đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + n$.
- Để tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) ta viết phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $ax^2 = mx + n$. (1)
 - + Nếu (1) vô nghiệm thì (d) không cắt (P).
 - + Nếu (1) có nghiệm thì (d) có điểm chung với (P).
- Gọi x_1 là hoành độ giao điểm thì tung độ giao điểm là $y = ax_1^2$ hoặc $y = mx_1 + n$.

Ví dụ 1. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $2x^2 - 1 = m$.

Giải.

$$2x^2 - 1 = m \Leftrightarrow 2x^2 = m + 1.$$

- Vẽ đồ thị (P) : $y = 2x^2$ và đường thẳng $y = m + 1$.

Bảng giá trị

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0,5	0	0,5	2	8

Dựa vào đồ thị ta có kết quả (h.8)

- $m < -1$ phương trình vô nghiệm.
- $m = -1$ phương trình có một nghiệm.
- $m > -1$ phương trình có hai nghiệm.

Ví dụ 2. Cho Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = -x + 2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm A ; B của (P) và (d) bằng phép tính.

c) Tính diện tích ΔAOB (đơn vị trên hai trục là cm).

Giải.

a) Đồ thị (P) và (d) như hình 9.

b) Hoành độ của giao điểm (P) và (d) là nghiệm của phương trình : $x^2 = -x + 2$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1; -2\}.$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = 1^2 = 1 \Rightarrow B(1; 1).$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = (-2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow A(-2; 4)$$

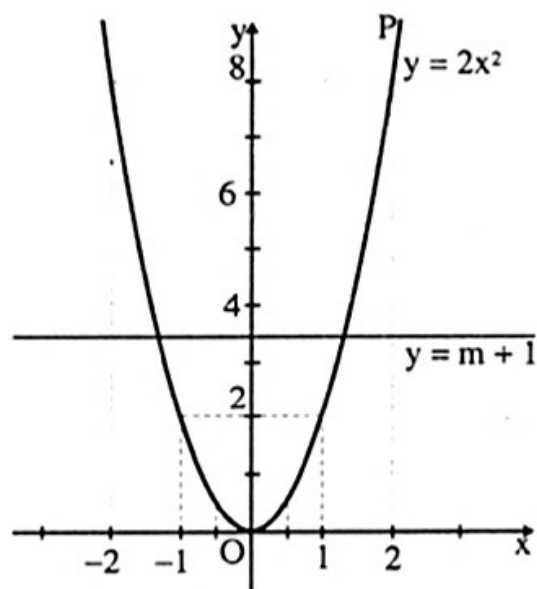
c) Gọi C và D là hình chiếu của A và B trên trục hoành.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } S_{ABDC} &= \frac{BD + AC}{2} \cdot CD = \frac{4 + 1}{2} \cdot 3 \\ &= 7,5 \text{ (cm}^2\text{)}; \end{aligned}$$

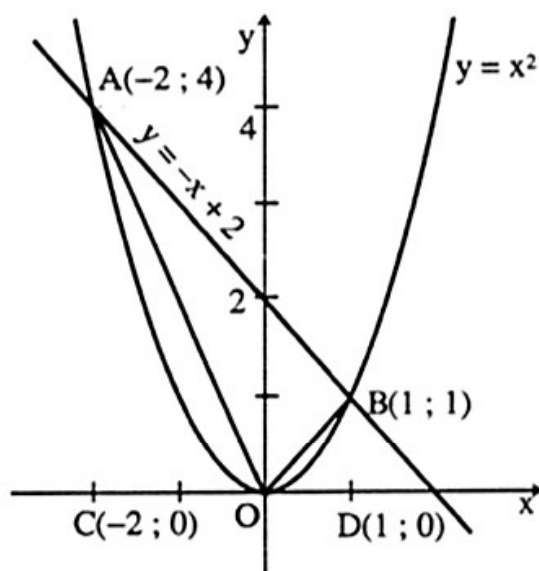
$$S_{OAC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CO = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$S_{OBD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DO = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\Rightarrow S_{OAB} = S_{ABDC} - S_{OBD} - S_{OAC} = 7,5 - 4 - 0,5 = 3 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 8



Hình 9

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho $y = (2m - 3)x^2$ với $2m - 3 \neq 0$.
 - Tìm m để hàm số đồng biến khi $x > 0$.
 - Tìm m để hàm số nghịch biến $x > 0$.
- Trong từng trường hợp hãy xác định hệ số a của hàm $y = ax^2$. Biết điểm M thuộc đồ thị của hàm số đó
 - $M(2; 2)$; b) $M(-2; 4)$; c) $M(2; -4)$.
- Xác định a của hàm số $y = ax^2$ biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(1; -2)$.
 - Vẽ đồ thị của hàm số đó.
 - Tìm điểm thuộc Parabol nói trên có tung độ là -4 .
 - Tìm tọa độ các điểm thuộc Parabol và cách đều hai trục tọa độ.
- Giải các phương trình sau bằng phương pháp đồ thị
 - $x^2 - x - 2 = 0$.
 - $x^2 - 2x + 3 = 0$.
- Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = x + 4$ trên cùng một hệ trục tọa độ.
 - Tìm tọa độ giao điểm (P) và (d) bằng phép tính.
(TS 10, THPT Thành phố Hồ Chí Minh, năm học 2009 - 2010)
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) .
 - Tìm a , biết rằng (P) cắt đường thẳng (d) có phương trình $y = -x - \frac{3}{2}$ tại điểm A có hoành độ bằng 3. Vẽ đồ thị (P) ứng với a vừa tìm được.
 - Tìm tọa độ giao điểm thứ hai B (B khác A) của (P) và (d) .
(TS 10, THPT Thành phố Cần Thơ, năm học 2009 - 2010)
- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2$ và $y = g(x) = 2x$ trên cùng mặt phẳng tọa độ.
 - Nhờ đồ thị, hãy chỉ ra các giá trị của x sao cho $f(x) = g(x)$; $f(x) > g(x)$; $f(x) < g(x)$.
- Cho hàm số $y = (\sqrt{m-2} - 5)x^2$. Tìm m để
 - Hàm số đồng biến với mọi $x > 0$.
 - Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; 12)$.
- Cho hàm số $y = (m^2 + 2m + 5)x^2$.
 - Chứng tỏ hàm số nghịch biến với mọi $x < 0$, đồng biến với mọi $x > 0$.
 - Biết khi $x = -1$ thì $y = 8$. Tìm m .
- Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 6$ và Parabol $y = x^2$.
(TS 10, THPT chuyên Hà Nam, vòng 1, năm học 2009 - 2010)
- Cho Parabol $(P) y = x^2$. Đường thẳng $y = m$ cắt (P) tại A và B . Tìm m để $\triangle AOB$ đều và tính diện tích $\triangle AOB$.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. a) $m > \frac{3}{2}$. b) $m < \frac{3}{2}$.
2. a) $a = 0,5$. b) $a = 1$. c) $a = -1$.
3. a) $a = -2$. b) Bạn đọc tự vẽ đồ thị hàm số $y = -2x^2$.
 c) Điểm thuộc parabol có tung độ -4 là $A(-\sqrt{2}; -4)$, $B(\sqrt{2}; -4)$.
 d) Điểm thuộc parabol và cách đều hai trục tọa độ là

$$O(0; 0), M\left(\frac{-1}{2}; \frac{-1}{2}\right), M'\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right).$$
4. a) Nghiệm của phương trình là hoành độ của giao điểm hai đồ thị $y = x^2$ và $y = x + 2$. Bạn đọc tự vẽ đồ thị, ta được $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
 b) Nghiệm của phương trình là hoành độ của giao điểm hai đồ thị $y = x^2$ và $y = 2x - 3$. Bạn đọc tự vẽ đồ thị, ta thấy hai đồ thị không có điểm chung. Vậy phương trình vô nghiệm.
5. a) Bạn đọc tự vẽ đồ thị.
 b) Hoành độ của giao điểm (P) và (d) là nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{2} = x + 4$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{4; -2\}.$$

 Với $x = 4 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4; 8)$.
 Với $x = -2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(-2; 2)$.
6. a) $a = -\frac{1}{2}$, bạn đọc tự vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$. b) $B\left(-1; \frac{-1}{2}\right)$.
7. a) Bạn đọc tự vẽ đồ thị.
 b) Nhờ đồ thị, ta có các giá trị của x :
 - $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$;
 - $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 0 < x < 2$.
 - $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0. \end{cases}$
8. a) Điều kiện để hàm số đồng biến với mọi $x > 0$ là $\sqrt{m-2} - 5 > 0$ hay $\sqrt{m-2} > 5$, suy ra $m > 27$.
 b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; 12)$ tức là $12 = (\sqrt{m-2} - 5) \cdot (-2)^2$ hay $\sqrt{m-2} - 5 = 3$, suy ra $m = 66$.
9. a) Ta có $m^2 + 2m + 5 = (m+1)^2 + 4 > 0$ với mọi m nên hàm số nghịch biến với mọi $x < 0$, đồng biến với mọi $x > 0$.

b) khi $x = -1, y = 8$ ta có : $8 = (m^2 + 2m + 5).(-1)^2$ hay $m^2 + 2m - 3 = 0$,
 $(m - 1).(m + 3) = 0$ suy ra $m = 1$; $m = -3$.

10. Hoành độ của giao điểm là nghiệm của phương trình

$$x^2 = x + 6 \text{ hay } x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 2).(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

• Với $x = -2$, ta có $y = (-2)^2 = 4$.

• Với $x = 3$, ta có $y = 3^2 = 9$.

Vậy tọa độ giao điểm là $A(-2; 4)$ và $B(3; 9)$.

11. • Điều kiện để $y = m$ cắt (P) là $m > 0$. Khi đó hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $x^2 = m \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m}$. Đặt tọa độ $A(-\sqrt{m}; m)$; $B(\sqrt{m}; m)$.

• Do A và B đối xứng nhau qua Oy nên $OA = OB$.

Vậy điều kiện để $\triangle OAB$ đều là $OA = AB$, tức là : $\sqrt{m + m^2} = 2\sqrt{m}$
 hay $m = 0$ (loại), $m = \sqrt{3}$ (t/m).

• Khi đó diện tích $\triangle AOB$ là : $S = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ (dvdt).

§3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng : $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x : là ẩn số ; a, b, c ($a \neq 0$) : là các hệ số.

2. Ta có thể giải phương trình bậc hai bằng cách đưa về phương trình tích của hai nhân tử bậc nhất, rồi giải các phương trình bậc nhất tương ứng.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. XÁC ĐỊNH CÁC HỆ SỐ a, b, c CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp giải

- Khai triển rồi đưa các số hạng về vế trái, vế phải bằng 0.
- Xác định các hệ số a, b, c của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$.
- Nếu bài toán biết nghiệm, ta thay giá trị của nghiệm vào phương trình rồi biến đổi.

Ví dụ 1. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và chỉ rõ các hệ số a, b, c

a) $2x^2 - 2x = 5 + x$;

b) $x^2 + 2x = mx + m$, m là một hằng số ;

c) $2x^2 + \sqrt{2}(3x - 1) = 1 + \sqrt{2}$.

Giải.

a) $2x^2 - 2x = 5 + x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$: $a = 2$; $b = -3$; $c = -5$.

b) $x^2 + 2x = mx + m \Leftrightarrow x^2 + (2 - m)x - m = 0$: $a = 1$; $b = 2 - m$; $c = -m$.

c) $2x^2 + \sqrt{2}(3x - 1) = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} - 1 = 0$:

$a = 2$; $b = 3\sqrt{2}$; $c = -2\sqrt{2} - 1$.

Ví dụ 2. Lập phương trình bậc hai có các hệ số là các số hữu tỉ có một nghiệm là $\sqrt{2} + 1$. Xác định các hệ số của phương trình.

Giải.

Gọi phương trình bậc hai phải tìm là $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x = \sqrt{2} + 1$

$\Leftrightarrow a(\sqrt{2} + 1)^2 + b(\sqrt{2} + 1) + c = 0 \Leftrightarrow (3a + b + c) + \sqrt{2}(2a + b) = 0$.

Vì $a, b, c \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ nên $\begin{cases} 3a + b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = -a \end{cases}$

Thay vào phương trình ta được : $ax^2 - 2ax - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$.

Vậy hệ số $a = 1$; $b = -2$; $c = -1$.

Dạng 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp giải

Có thể đưa phương trình bậc hai về dạng sau để giải :

• Đưa về dạng tích : $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

• Áp dụng : $a^2 = b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $x^2 - 5 = 0$.

b) $x^2 - 3x = 0$.

c) $2x^2 + 3 = 0$.

Giải.

a) $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow x_1 = \sqrt{5} ; x_2 = -\sqrt{5}$.

$$b) x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3.$$

$$c) 2x^2 + 3 = 0$$

$$\text{Ta có : } 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 3 > 0.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2. Biến đổi về trái thành tích, rồi giải các phương trình sau

$$a) 2x^2 + 5x + 3 = 0; \quad b) x^2 - x - 12 = 0; \quad c) x^2 - 3(x - 1)^2 = 0.$$

Giải.

$$a) 2x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 3x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; -\frac{3}{2}\}.$

$$b) x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; 4\}.$

$$c) x^2 - 3(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - [\sqrt{3}(x - 1)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{3}.x + 1).(x + \sqrt{3}.x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - \sqrt{3}) + 1 = 0 \\ x(1 + \sqrt{3}) - 1 = 0 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3} - 1}; \frac{1}{\sqrt{3} + 1} \right\}.$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng $a.(x + m)^2 = n$

$$a) x^2 + 6x - 16 = 0;$$

$$b) 2x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Giải.

$$a) x^2 + 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 16 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 16 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 5 \\ x + 3 = -5 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-8; 2\}.$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 2x^2 - 6x + 1 &= 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = -\frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} &= \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \\ x - \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases} \\
 \text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S &= \left\{ \frac{3+\sqrt{7}}{2}; \frac{3-\sqrt{7}}{2} \right\}.
 \end{aligned}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Đưa các phương trình sau về dạng về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và rồi xác định các hệ số a, b, c
 a) $x^2 + 4x = 5$; b) $x^2\sqrt{2} + x - 2 + x\sqrt{2} = 0$; c) $(x-3).(x+\sqrt{2}) = 2$.
- Lập phương trình bậc hai có các hệ số là các số hữu tỉ có một nghiệm là $2 - \sqrt{3}$. Xác định các hệ số của phương trình.
- Cho phương trình $(2x + 1)^2 - (x - 2)^2 = 0$. Viết phương trình dưới dạng $ax^2 + bx + c = 0$. Tính giá trị $a^2 + b^2 + c^2$.
- Giải các phương trình sau
 a) $x^2 - 11 = 0$. b) $2x^2 + 3x = 0$. c) $x^2 - 6x = 72$.
- Biến đổi vế trái thành tích, rồi giải các phương trình sau
 a) $x^2 - 7x + 12 = 0$; b) $7x^2 + 12x + 5 = 0$;
 c) $x^2 - 4x + 3 = 0$; d) $x^2 - 2x + 1 - 9(x^2 + 2x + 1) = 0$.
- Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng $a.(x+m)^2 = n$
 a) $x^2 - 4x - 21 = 0$; b) $3x^2 + 6x + 1 = 0$; c) $2x^2 - \sqrt{2}.x - 2 = 0$.
- Xác định hệ số m trong phương trình $3x^2 - mx - 9 = 0$ sao cho phương trình có một nghiệm là 3. Giải phương trình đó.
- Cho $\sqrt{3}$ là một nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{Q}$). Tìm nghiệm còn lại.
- Biết rằng $x = 1 - \sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + 3 = a$. Tính a .
- Biết rằng phương trình $3x^2 - 4x + mx = 0$ có nghiệm nguyên dương bé hơn 3. Tìm m .

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. a) $x^2 + 4x - 5 = 0 : a = 1 ; b = 4 ; c = -5 ;$
 b) $x^2\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})x - 2 = 0 : a = \sqrt{2} ; b = 1 + \sqrt{2} ; c = -2 ;$
 c) $x^2 + (\sqrt{2} - 3)x - 3\sqrt{2} - 2 = 0 : a = 1 ; b = \sqrt{2} - 3 ; c = -3\sqrt{2} - 2.$
2. Đáp số : $x^2 - 4x + 1 = 0 : a = 1 ; b = -4 ; c = 1.$
3. Thu gọn phương trình, ta được : $3x^2 + 8x - 3 = 0.$
 Nên $a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 8^2 + (-3)^2 = 82.$
4. Đáp số
 a) $x_1 = \sqrt{11} ; x_2 = -\sqrt{11}.$ b) $x_1 = 0 ; x_2 = -1,5.$ c) $x_1 = 12 ; x_2 = -6.$
5. Đáp số
 a) $x_1 = 3 ; x_2 = 4.$ b) $x_1 = -1 ; x_2 = -\frac{5}{7}.$
 c) $x_1 = 1 ; x_2 = 3.$ d) $x_1 = -0,5 ; x_2 = -2.$
6. Đáp số
 a) $x_1 = -3 ; x_2 = 7.$ b) $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{6}}{3} ; x_2 = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3}.$
 c) $x_1 = \sqrt{2} ; x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$
7. Đáp số : $m = 6 ; x_1 = 3 ; x_2 = -1 .$
8. Đáp số : $x^2 - 3 = 0 ; x_1 = \sqrt{3} ; x_2 = -\sqrt{3} .$
9. Thay $x = 1 - \sqrt{2}$ vào phương trình, ta được : $a = (1 - \sqrt{2})^2 - 2(1 - \sqrt{2}) + 3 = 4.$
10. Ta có : $x(3x - 4 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4 - m}{3} \end{cases}.$

Để phương trình có nghiệm nguyên dương bé hơn 3 thì :

$$\begin{cases} \frac{4 - m}{3} = 1 \\ \frac{4 - m}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2. \end{cases}$$

§4. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.

§5. CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} .$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý : Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có a và c trái dấu tức là $ac < 0$ thì $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt.

2. Công thức nghiệm thu gọn

Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} ; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} .$$

- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$.

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. XÁC ĐỊNH SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp giải

- Xác định a, b, c của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$)
- Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$)
- + Nếu $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$) $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- + Nếu $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$) $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép.
- + Nếu $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$) $\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 1. Không giải phương trình, hãy xác định hệ số a, b, c, tính biệt thức Δ (hoặc Δ') và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau

a) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 21 = 0$; b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$; c) $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Giải.

a) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 21 = 0$: $a = 1$; $b' = -\sqrt{3}$; $c = 21$;

$\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 1.21 = -18 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

b) $a = 2, b = -2\sqrt{2}, b' = -\sqrt{2}, c = 1$;

$\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 2.1 = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép.

c) $a = 2, b = -5, c = 2$;

$\Delta = (-5)^2 - 4.2.2 = 9 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ (m là tham số).
Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải.

• $a = 1, b' = -2, c = m + 1$;

• $\Delta' = (-2)^2 - (m + 1) = 3 - m$.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là : $\Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow 3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Vậy với $m < 3$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Dạng 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp giải

- Nếu phương trình khuyết b hoặc c thì ta phân tích thành nhân tử rồi giải.
- Nếu phương trình đủ b ; c :
 - Xác định hệ số a, b, c của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.
 - Tính Δ (hoặc Δ').
 - Áp dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $x^2 - 5x - 12 = 0$; b) $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$; c) $\frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{2x+7}{6}$.

Giải.

a) $a = 1; b = -5; c = -12$;

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.(-12) \Rightarrow \Delta = 73 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{73}$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{5 + \sqrt{73}}{2}$ và $x_2 = \frac{5 - \sqrt{73}}{2}$.

b) $a = 1; b = \sqrt{3} + \sqrt{2}; c = \sqrt{6}$;

$$\Delta = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4.1.\sqrt{6} \Rightarrow \Delta = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = \frac{-(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} = -\sqrt{2}$;

$$x_2 = \frac{-(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} = -\sqrt{3}.$$

c) $\frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{2x+7}{6} \Leftrightarrow 3x^2 + 4x = 2x + 7 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 7 = 0.$

Ta có $a = 3; b = 2; b' = 1; c = -7$;

$$\Delta' = 1^2 - 3.(-7) = 22 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{22}.$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{22}}{3}$ và $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{22}}{3}.$

Dạng 3. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $ax^2 + bx + c = 0$

Phương pháp giải

- Với $a = 0$, phương trình trở thành phương trình bậc nhất $bx + c = 0$
- + Nếu $b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -\frac{c}{b}.$
- + Nếu $b = 0; c \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- + Nếu $b = 0; c = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm.
- Với $a \neq 0$, phương trình trở thành phương trình bậc hai có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$)
- + Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- + Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$
- + Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình :

$$x^2 - 4x + m + 1 = 0.$$

Giải.

Xét $\Delta' = 4 - (m + 1) = 3 - m$

- Nếu $m > 3 \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

- Nếu $m = 3 \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$.
- Nếu $m < 3 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = 2 + \sqrt{3 - m}; \quad x_2 = 2 - \sqrt{3 - m}.$$

Kết luận :

- $m > 3 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- $m = 3 \Rightarrow S = \{2\}$.
- $m < 3 \Rightarrow S = \{2 + \sqrt{3 - m}; 2 - \sqrt{3 - m}\}$.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình : $(m + 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 3 = 0$.

Giải.

- Nếu $m = -1$ thì phương trình trở thành $0.x - 4 = 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m \neq -1$. Xét $\Delta' = (m + 1)^2 - (m + 1)(m - 3) = 4(m + 1)$.
- + Nếu $m < -1 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- + Nếu $m > -1 \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{m + 1 + 2\sqrt{m + 1}}{m + 1}; \quad x_2 = \frac{m + 1 - 2\sqrt{m + 1}}{m + 1}.$$

Vậy : + Với $m \leq -1$: phương trình vô nghiệm.

+ Với $m > -1$: phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{m + 1 \pm 2\sqrt{m + 1}}{m + 1}.$$

Dạng 4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN GỒM MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp giải

- Từ phương trình bậc nhất biểu thị ẩn này qua ẩn kia.
- Thế vào phương trình bậc hai của hệ, ta được phương trình bậc hai một ẩn.
- Giải phương trình vừa tìm được, sau đó tìm ẩn còn lại.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - y = 3 & (1) \\ x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Từ (1) $\Rightarrow y = 2x - 3$, thay vào (2) ta được :

$$x^2 - 3x(2x - 3) + (2x - 3)^2 + 2x + 3(2x - 3) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Với $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ ta có $y = 2 + \sqrt{17}$;

Với $x = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ ta có $y = 2 - \sqrt{17}$.

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; 2 + \sqrt{17}\right); \left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}; 2 - \sqrt{17}\right)$.

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = m & (3) \\ x^2 - xy + y^2 = 7 & (4) \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải.

Từ (3) $\Rightarrow y = m - 2x$, thay vào (4) ta được : $x^2 - x(m - 2x) + (m - 2x)^2 = 7$
 $\Leftrightarrow 7x^2 - 5mx + m^2 - 7 = 0$ (5)

Ta có : $\Delta = 25m^2 - 4.7(m^2 - 7) = 196 - 3m^2$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (5) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 196 - 3m^2 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \leq \frac{14\sqrt{3}}{3} .$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi $|m| \leq \frac{14\sqrt{3}}{3}$.

Dạng 5. ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ HAI PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM CHUNG

Phương pháp giải

- Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Thay $x = x_0$ vào hai phương trình ta được hệ với ẩn là các tham số.
- Giải hệ tìm tham số.
- Thử lại, trước khi kết luận.

Ví dụ 1. Xác định m để hai phương trình sau có nghiệm chung

$$x^2 - mx + 2m + 1 = 0 \quad (1) \text{ và } mx^2 - (2m + 1)x - 1 = 0 \quad (2) .$$

Giải.

- Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình thì :

$$\begin{cases} x_0^2 - mx_0 + 2m + 1 = 0 & (3) \\ mx_0^2 - (2m + 1)x_0 - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

- Dễ thấy, từ (4) $\Rightarrow x_0 \neq 0$.
 - Nhân x_0 với (3) rồi cộng với (4) vế với vế ta có : $x_0^3 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$.
- Thay $x_0 = 1$ vào (3) $\Rightarrow m = -2$.

• Với $m = -2$, phương trình (1) trở thành $x^2 + 2x - 3 = 0$ có nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; phương trình (2) trở thành $-2x^2 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Vậy với $m = -2$ thì hai phương trình đã cho có nghiệm chung.

Ví dụ 2. Tìm giá trị nguyên của a để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung $2x^2 + (3a - 1)x - 3 = 0$ (1) và $6x^2 - (2a - 3)x - 1 = 0$ (2).

Giải.

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình thì :

$$\begin{cases} 2x_0^2 + (3a - 1)x_0 - 3 = 0 & (3) \\ 6x_0^2 - (2a - 3)x_0 - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Nhân (3) với 3, rồi trừ vế với vế ta được $(11a - 6)x_0 - 8 = 0$.

Vì $a \in \mathbb{Z}$, nên $a \neq \frac{6}{11}$, thì $x_0 = \frac{8}{11a - 6}$ thay vào phương trình (1) và rút gọn ta được $99a^2 - 164a - 68 = 0$ (5)

Giải phương trình (5) ta được $a_1 = 2$; $a_2 = \frac{-34}{99}$ (loại).

Với $a = 2$, phương trình (1) trở thành $2x^2 + 5x - 3 = 0$ có nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -3$; phương trình (2) trở thành $6x^2 - x - 1 = 0$ có nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Vậy $a = 2$ thỏa mãn.

Dạng 6. CHỨNG MINH TỒN TẠI PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Phương pháp giải

- Xác định a, b, c .
- Xét các biệt thức Δ (Δ').
- Tính tổng các biệt thức Δ . Chứng tỏ tồn tại một $\Delta \geq 0$.

Ví dụ 1. Cho a, b, c khác 0. Chứng tỏ tồn tại ít nhất một trong các phương trình sau có nghiệm :

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$$

$$bx^2 + 2cx + a = 0 \quad (2)$$

$$cx^2 + 2ax + b = 0 \quad (3)$$

Giải.

- Xét biệt thức Δ' của ba phương trình :

$$\Delta'_1 = b^2 - ac ; \Delta'_2 = c^2 - ab ; \Delta'_3 = a^2 - bc .$$

- Xét $\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$$= \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0 .$$

Vậy tồn tại ít nhất một $\Delta'_i \geq 0, (i=1, 2, 3) \Rightarrow$ tồn tại ít nhất một phương trình có nghiệm.

Ví dụ 2. Cho $a + b + c = 6$. Chứng minh ít nhất một trong các phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + bx + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + cx + 1 = 0 \quad (3)$$

(TS10, chuyên Toán, ĐHSP Vinh, năm học 1998–1999)

Giải.

- Xét biệt thức Δ của ba phương trình :

$$\Delta_1 = a^2 - 4 ; \Delta_2 = b^2 - 4 ; \Delta_3 = c^2 - 4 .$$

- Xét $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = a^2 + b^2 + c^2 - 12 = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c) + 12$

$$= (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 \geq 0 .$$

Vậy tồn tại ít nhất một $\Delta_i \geq 0, (i = 1, 2, 3) \Rightarrow$ tồn tại ít nhất một phương trình có nghiệm.

Dạng 7. PHƯƠNG TRÌNH CÓ HAI ẨN SỐ

Phương pháp giải

Trong một phương trình có hai ẩn số, ta xem một ẩn là tham số rồi giải phương trình ấy theo ẩn còn lại.

Ví dụ 1. Giải phương trình :

$$x^2y^4 - 16xy^3 + 68y^2 - 4xy + x^2 = 0 .$$

Giải.

Xem x là ẩn số, y là tham số. Ta có : $(y^4 + 1)x^2 - 4(4y^3 + y)x + 68y^2 = 0$.

$$\text{Xét : } \Delta' = 4.(16y^6 + 8y^4 + y^2) - (y^4 + 1).68y^2 = -4y^6 + 32y^4 - 64y^2$$

$$\Rightarrow \Delta' = -4y^2(y^2 - 4)^2 \leq 0, \text{ nên phương trình chỉ có nghiệm khi } \Delta' = 0$$

$$\Leftrightarrow y \in \{0 ; -2 ; 2\} .$$

Với $y = 0 \Rightarrow x = 0$; với $y = 2 \Rightarrow x = \frac{-b'}{a} = 4$; với $y = -2 \Rightarrow x = -4$.

Vậy phương trình có ba cặp nghiệm là $(0; 0)$, $(2; 4)$, $(-2; -4)$.

Ví dụ 2. Với mỗi cặp $(x; y)$ thoả mãn $x^2 - x^2y - y + 8x + 7 = 0$. Hãy tìm cặp nghiệm mà y lớn nhất.

Giải.

Xem x là ẩn số, y là tham số. Ta có: $(1 - y)x^2 + 8x + 7 - y = 0$.

Xét: $\Delta' = 16 - (1 - y)(7 - y) = (y + 1)(9 - y)$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (y + 1)(9 - y) \geq 0$
 $\Leftrightarrow -1 \leq y \leq 9$.

Giá trị lớn nhất của y là 9, khi đó $x = \frac{-b'}{a} = 0,5$. Cặp số đó là $(0,5; 9)$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải các phương trình

a) $x^2 - 7x - 5 = 0$; b) $x^2 + 3x - 1 = 0$; c) $(1 - \sqrt{2})x^2 + 2x + \sqrt{2} = 0$.

2. Tìm m để mỗi phương trình sau có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó

a) $x^2 - 3x + m = 0$; b) $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$.

3. Xác định m để mỗi phương trình sau vô nghiệm

a) $3x^2 - 2x + m = 0$; b) $mx^2 + 2(m - 1)x + m + 2 = 0$.

4. Xác định m để mỗi phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

a) $x^2 - 2x + 2m - 3 = 0$; b) $mx^2 + 2(m - 1)x + m - 2 = 0$.

5. Cho phương trình $x^2 - 2x + m = 0$

a) Với giá trị nào của m , phương trình có một nghiệm là 3? Tìm nghiệm thứ hai.

b) Với giá trị nào của m , phương trình có nghiệm kép? Tìm nghiệm kép đó.

c) Với giá trị nào của m , phương trình có hai nghiệm phân biệt?

6. Cho phương trình $(m - 4)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$

a) Giải phương trình với $m = 5$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

7. Tìm giá trị nguyên của m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung $2x^2 + (3m + 1)x - 9 = 0$ và $6x^2 + (7m - 1)x - 19 = 0$.

8. Cho hai phương trình ẩn x

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ và } a(1 - x^2) + c(1 - x) - b = 0 \quad (a \neq 0).$$

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.

(TS 10, THPT chuyên Lê khiết, Quảng Ngãi, năm học 2002 - 2003)

9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 - y^2 + 2x + 1 = 8. \end{cases}$
10. Cho phương trình $(x - 1)(x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 2) = 0$. Tìm điều kiện của m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. Đáp số

$$\begin{aligned} \text{a) } x_1 &= \frac{7 - \sqrt{69}}{2}; x_2 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}. & \text{b) } x_1 &= \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}. \\ \text{c) } x_1 &= \frac{-1 - \sqrt{3 - \sqrt{2}}}{1 - \sqrt{2}}; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3 - \sqrt{2}}}{1 - \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2. Đáp số

$$\text{a) } m = \frac{9}{4}; x_1 = x_2 = \frac{3}{2}. \quad \text{b) } m = 1; x_1 = x_2 = 1.$$

$$\text{3. Đáp số: a) } m > \frac{1}{3}. \quad \text{b) } m > \frac{1}{4}.$$

$$\text{4. Đáp số: a) } m < 2. \quad \text{b) } m \neq 0.$$

$$\text{5. a) Phương trình có một nghiệm là 3, ta có: } 3^2 - 2 \cdot 3 + m = 0 \text{ hay } m = -3.$$

Phương trình là: $x^2 - 2x - 3 = 0$. Ta thấy $a - b + c = 0$, phương trình có nghiệm là $x_1 = 3; x_2 = -1$. Do đó có nghiệm thứ hai là -1 .

b) Điều kiện để phương trình có nghiệm kép là $\Delta' = 0$. Hay $\Delta' = 1 - m = 0$ do đó $m = 1$. Khi đó nghiệm kép là $x = 1$.

c) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\Delta' > 0$ hay $\Delta' = 1 - m > 0$. Do đó $m < 1$.

$$\text{6. a) Với } m = 5, \text{ ta có phương trình}$$

$$x^2 - 10x + 7 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 - 3\sqrt{2}; x_2 = 5 + 3\sqrt{2}.$$

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$ hay

$$\begin{cases} m - 4 \neq 0 \\ m^2 - (m - 4) \cdot (m + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m > -4 \end{cases}.$$

Vậy với $\begin{cases} m \neq 4 \\ m > -4 \end{cases}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Điều kiện để phương trình có nghiệm duy nhất là $a = 0$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

• $a = 0$ thì $m - 4 = 0$ hay $m = 4$.

• $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$ thì $\begin{cases} m \neq 4 \\ m = -4. \end{cases}$

Vậy với $m = \pm 4$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

7. Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình thì :

$$\begin{cases} 2x_0^2 + (3m+1)x_0 - 9 = 0 & (1) \\ 6x_0^2 + (7m-1)x_0 - 19 = 0 & (2) \end{cases}$$

Nhân (1) với 3, rồi trừ vế với vế ta được : $2(m+2)x_0 - 8 = 0$

• Với $m = -2$ thì hai phương trình không có nghiệm chung.

• Với $m \neq -2$ thì $x_0 = \frac{4}{m+2}$, thay vào phương trình (1) và rút gọn ta được

$$3m^2 - 8m + 4 = 0. \quad (3)$$

Giải phương trình (3) ta được $m_1 = 2; m_2 = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ (loại).

Với $m = 2$, phương trình : $2x^2 + 7x - 9 = 0$ có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -\frac{9}{2}$.

Phương trình : $6x^2 + 13x - 19 = 0$ có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -\frac{19}{6}$.

Vậy $m = 2$ thoả mãn.

8. Hai phương trình viết gọn là : $ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$

$$ax^2 + cx + b - a - c = 0 \quad (2)$$

Xét biệt thức Δ của hai phương trình :

$$\Delta_1 = b^2 - 4ac ; \Delta_2 = c^2 - 4a(b - a - c).$$

$$\text{Xét } \Delta_1 + \Delta_2 = c^2 + b^2 - 4ab + 4a^2 = c^2 + (b - 2a)^2 \geq 0.$$

Vậy tồn tại ít nhất $\Delta_i \geq 0, i = 1, 2 \Rightarrow$ tồn tại ít nhất một phương trình có nghiệm.

9. Đáp số $(x; y) = (2; 1)$.

$$10. (x-1)(x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 2 = 0. \end{cases}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi : $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 2 = 0$

$$\text{có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1 - 2m + m^2 - 2m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 3 \end{cases}.$$

§6. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Hệ thức Vi-ét

• Nếu $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

• Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = \frac{c}{a}$.

• Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

2. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

• Nếu hai số đó có *tổng* bằng S và *tích* bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$ ($\Delta \geq 0$).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẢM NGHIỆM HOẶC RÚT NGẮN CÁC BƯỚC GIẢI

Phương pháp giải

Khi giải hay biện luận phương trình bậc hai, ta có thể làm ngắn các bước giải dựa vào :

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

* Nếu $a + b + c = 0 \Rightarrow$ có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$.

* Nếu $a - b + c = 0 \Rightarrow$ có hai nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{c}{a}$.

* Nếu $\Delta \geq 0$ ta có thể nhẩm nghiệm dựa vào
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau

a) $-4x^2 + 3x + 1 = 0$; b) $x^2 + (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$; c) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Giải.

a) Ta thấy có dạng $a + b + c = -4 + 3 + 1 = 0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{4}$.

b) Ta thấy có dạng $a - b + c = 1 - (1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = -\sqrt{3}$.

c) Ta có $\Delta = 9 > 0$, theo hệ thức Vi-ét
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 = 2 + 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 10 = 2 \cdot 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$; $x_2 = 5$.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình sau theo m

$$(1 - 2m)x^2 + (2m + 1)x - 2 = 0 \quad (1)$$

Giải.

• Nếu $1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

• Nếu $1 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$.

Phương trình (1) là phương trình bậc hai.

$$\text{Xét } \Delta = (2m + 1)^2 - 4(1 - 2m)(-2) = (2m - 3)^2 \geq 0$$

+ Nếu $m = \frac{3}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$.

+ Nếu $m \neq \frac{3}{2}$ thì phương trình có $a + b + c = 1 - 2m + 2m + 1 - 2 = 0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{-2}{1-2m}$.

• Kết luận

+ Nếu $m \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\}$ thì phương trình (1) có một nghiệm $x = 1$.

+ Nếu $m \notin \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$;

$$x_2 = \frac{-2}{1-2m}.$$

Dạng 2. TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH CỦA CHÚNG

Phương pháp giải

- Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.
- Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ 1. Tìm hai số x và y biết

a) $x + y = 29$ và $x.y = 198$.

b) $x + y = 5$ và $x.y = 9$.

Giải.

a) Ta có: $S^2 - 4P = 29^2 - 4.198 = 49 > 0$ nên x ; y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 29X + 198 = 0$.

Giải ra ta có $X_1 = 11$; $X_2 = 18$.

Vậy ta có hai số x ; y là $\begin{cases} x = 11 \\ y = 18 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 18 \\ y = 11 \end{cases}$.

b) Ta có: $S^2 - 4P = 5^2 - 4.9 = -11 < 0$ nên không tồn tại hai số x ; y thỏa mãn.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$.

Giải.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 25 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x+y=-5 \\ xy=6 \end{cases} & (2) \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình (1), ta có $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.
- Giải hệ phương trình (2), ta có $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Dạng 3. THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp giải

- Với dạng này, chúng ta vận dụng định lý đảo của hệ thức Vi-ét.
- Luôn chú ý điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ 1. Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

Hãy thiết lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{x_1}{x_2 + 1}$ và $\frac{x_2}{x_1 + 1}$.

Giải.

- Phương trình $2x^2 - 5x + 1 = 0$ có $\Delta = 25 - 4.2.1 = 17 > 0$.

Nên có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Theo hệ thức Vi-ét, ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

- Đặt $y_1 = \frac{x_1}{x_2 + 1}; y_2 = \frac{x_2}{x_1 + 1}$.

$$\begin{aligned} \text{Xét } S = y_1 + y_2 &= \frac{x_1}{x_2 + 1} + \frac{x_2}{x_1 + 1} = \frac{x_1(x_1 + 1) + x_2(x_2 + 1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_1 + x_2)}{x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1} = \frac{31}{16} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Xét } P = \frac{x_1}{x_2 + 1} \cdot \frac{x_2}{x_1 + 1} = \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1} = \frac{1}{8} \quad (2)$$

$$\bullet \text{ Thử điều kiện } S^2 - 4P = \left(\frac{31}{16}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{833}{256} > 0.$$

$$\bullet \text{ Vậy } \frac{x_1}{x_2 + 1} \text{ và } \frac{x_2}{x_1 + 1} \text{ là nghiệm của phương trình } y^2 - \frac{31}{16}y + \frac{1}{8} = 0.$$

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 - 4x - (m^2 + 3m) = 0$ (1)

a) Chứng tỏ phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Lập phương trình bậc hai ẩn y có hai nghiệm y_1, y_2 thỏa mãn $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$

và $\frac{y_1}{1 - y_2} + \frac{y_2}{1 - y_1} = 3$. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) và $y_1, y_2 \neq 1$.

Giải.

$$\text{a) Xét } \Delta' = 4 + m^2 + 3m = \left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ với mọi } m \in \mathbf{R}.$$

$\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Vì phương trình (1) luôn có hai nghiệm. Nên theo hệ thức Vi-ét ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = -(m^2 + 3m). \end{cases}$$

$$\text{Do đó } y_1 + y_2 = x_1 + x_2 \Rightarrow y_1 + y_2 = 4 \quad (2)$$

$$\frac{y_1}{1 - y_2} + \frac{y_2}{1 - y_1} = 3 \Leftrightarrow y_1(1 - y_1) + y_2(1 - y_2) = 3(1 - y_1)(1 - y_2)$$

$$\Leftrightarrow y_1 + y_2 + 2y_1y_2 - (y_1 + y_2)^2 = 3 - 3(y_1 + y_2) + 3y_1y_2 \Leftrightarrow y_1y_2 = -3 \quad (3)$$

$$\text{Thử điều kiện } S^2 - 4P = 16 + 12 = 18 > 0.$$

Từ (2) và (3) ta có y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình $y^2 - 4y - 3 = 0$.

Dạng 4. TÌM HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC NGHIỆM KHÔNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

Phương pháp giải

- Điều kiện để phương trình có nghiệm : $\Delta \geq 0$.
- Sử dụng hệ thức Vi-ét, tính tổng và tích hai nghiệm theo tham số.

• Khử tham số bằng một trong các cách :

- 1) Phương pháp thế.
- 2) Phương pháp cộng đại số.
- 3) Phương pháp rút tham số.
- 4) Phương pháp biến đổi.

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc tham số m .

Giải.

• Xét $\Delta = m^2 - 4(2m - 4) = (m - 4)^2 \geq 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có nghiệm.

Theo hệ thức Vi-ét : (*) $\begin{cases} x_1 + x_2 = m & (1) \\ x_1 x_2 = 2m - 4 & (2) \end{cases}$

• Cách khử 1 :

Thế (1) vào (2), ta có hệ thức cần tìm $x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2) - 4$.

• Cách khử 2 :

(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m - 4 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_1 x_2 = 4$ là hệ thức cần tìm.

• Cách khử 3 :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m = x_1 + x_2 \\ m = \frac{x_1 x_2 + 4}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{x_1 x_2 + 4}{2}.$$

Hay $2(x_1 + x_2) = x_1 x_2 + 4$ là hệ thức cần tìm.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 - x \cos \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc α .

Giải.

a) Xét $\Delta = \cos^2 \alpha - 4(\sin \alpha - 1) = \cos^2 \alpha + 4(1 - \sin \alpha) > 0$ với mọi $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Vậy phương trình luôn có nghiệm.

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = \cos \alpha & (1) \\ x_1 x_2 = \sin \alpha - 1 & (2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \cos \alpha \\ x_1 x_2 + 1 = \sin \alpha \end{cases} \text{ mà } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Vậy hệ thức cần tìm là $(x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 + 1)^2 = 1$.

Dạng 5. TÌM ĐIỀU KIỆN THAM SỐ ĐỂ BÀI TOÁN THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

- Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm : $\Delta \geq 0$.
- Sử dụng hệ thức Vi-ét đối với x_1, x_2 và điều kiện đề bài, dùng phương pháp thế để tìm tham số hoặc nghiệm.
- Kiểm tra điều kiện của tham số.

Ví dụ 1. Cho phương trình $2x^2 + 2x + m = 0$. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.

Giải.

- Điều kiện để phương trình có nghiệm là : $\Delta' \geq 0$.

$$\Delta' = 1 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}.$$

- Theo hệ thức Vi-ét :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = \frac{m}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Theo điều kiện đề bài $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta có : $m = -\frac{2}{3}$.

Vậy $m = -\frac{2}{3}$ thoả mãn điều kiện, là số cần tìm.

Ví dụ 2. Cho phương trình $(m + 2)x^2 - (2m - 1)x - 3 + m = 0 \quad (1)$

a) Chứng tỏ phương trình có nghiệm với mọi m .

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó hãy tìm m để nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

(TS 10, Toán - Tin - ĐHQG TPHCM, năm học 1997-1998)

Giải.

a) • Với $m = -2$: $(1) \Leftrightarrow 5x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm.

• Với $m \neq -2$: Xét $\Delta = (2m - 1)^2 - 4(m + 2)(m - 3) = 25 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) • Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt : $m \neq -2$.

- Theo hệ thức Vi-ét :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m+2} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m+2} \end{cases} \quad (2)$$

- Theo đề bài, phương trình có hai nghiệm phân mà nghiệm này gấp đôi nghiệm kia

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 0 \Leftrightarrow 9x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2)^2 = 0.$$

Thay (2) vào ta có : $\frac{9m-27}{m+2} - \frac{2(2m-1)^2}{(m+2)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ m = -7 \end{cases}.$$

- Vậy $m \in \{8; -7\}$ thoả mãn điều kiện, là số cần tìm.

Dạng 6. XÉT DẤU CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp giải

Dựa vào điều kiện sau :

+ Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$.

+ Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

+ Phương trình có hai nghiệm cùng dấu dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = \frac{-b}{a} > 0 \end{cases}$

+ Phương trình có hai nghiệm cùng dấu âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = \frac{-b}{a} < 0 \end{cases}$

+ Phương trình có hai nghiệm trái dấu, mà nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ S = \frac{-b}{a} < 0 \end{cases}$.

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$.

Xác định m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

Giải.

• Xét $\Delta' = (m - 1)^2 - (m - 3) = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ với mọi m .

$\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

• Theo hệ thức Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{cases}.$$

Để phương trình có hai nghiệm cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(m - 1) > 0 \\ m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$

Vậy với $m > 3$ thì phương trình có hai nghiệm dương.

Ví dụ 2. Biện luận dấu các nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$.

Giải.

Xét $\Delta' = m^2 - m - 6 = (m + 2)(m - 3)$

• Nếu $-2 < m < 3 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

• Nếu $m < -2$ hoặc $m > 3 \Rightarrow \Delta' > 0$

+ Theo hệ thức Vi-ét :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m + 6 \end{cases} (*)$$

– Nếu $m < -6 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm trái dấu.

– Nếu $-6 < m < -2 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm âm.

– Nếu $m = -6 \Rightarrow$ phương trình có $x_1 = 0$; $x_2 < 0$.

– Nếu $m > 3 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm dương.

• Nếu $m = -2$, từ (*) $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép âm.

• Nếu $m = 3$, từ (*) $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép dương.

Dạng 7. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG HAI ẨN

Phương pháp giải

Đối với loại toán này, ta thường dùng phương pháp đặt ẩn phụ $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$.

Sau khi tìm được S ; P thì x ; y là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$ với điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases}$.

Giải.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ hệ phương trình có dạng $\begin{cases} S + P = 11 & (1) \\ S^2 - P = 19 & (2) \end{cases}$

Từ (1); (2) $\Rightarrow S^2 + S - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = 5 \\ S_2 = -6 \end{cases}$

• Với $S = 5 \Rightarrow P = 6 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$.

Nên x ; y là nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 2$; $X_2 = 3$.

Vậy $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

• Với $S = -6 \Rightarrow P = 17 \Rightarrow \begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 17 \end{cases}$.

Nên x ; y là nghiệm của phương trình $X^2 + 6X + 17 = 0$ có $S^2 - 4P = -32 < 0$
 $\Rightarrow$ vô nghiệm.

Vậy hệ có hai nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Ví dụ 2. Tìm liên hệ giữa a ; b để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b. \end{cases}$$

Giải.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$, hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} S^2 - 2P = a \\ P = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = a + 2P \\ P = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = a + 2b \\ P = b \end{cases}.$$

Vì $S^2 \geq 0$ nên $a \geq -2b$ (1)

Điều kiện để hệ có nghiệm $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow a + 2b \geq 4b \Leftrightarrow a \geq 2b$ (2)

Kết hợp (1) ; (2) ta được điều kiện hệ có nghiệm là $a \geq 2|b|$.

Dạng 8. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG GIỮA CÁC NGHIỆM

Phương pháp giải

- Xác định điều kiện để phương trình có nghiệm : $\Delta \geq 0$.
- Đặt $\begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 \cdot x_2 \end{cases}$ sau đó biến đổi hợp lí biểu thức để đưa biểu thức về dạng tổng và tích các nghiệm, rồi dùng hệ thức Vi-ét.

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 + 3x + 1 = 0$. Không giải phương trình, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2}{4x_1^2x_2 + 4x_2^2x_1}.$$

Giải.

- Xét $\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

- Theo hệ thức Vi-ét : $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -3 \\ P = x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$.

- Xét $A = \frac{(x_1 + x_2)^2 + 3x_1x_2}{4x_1x_2(x_1 + x_2)} = \frac{9 + 3 \cdot 1}{4 \cdot 1 \cdot (-3)} = -1$.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$.

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm không âm x_1, x_2 .

b) Tính $E = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ theo m.

Giải.

a) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm không âm

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} \geq 0 \\ S = \frac{-b}{a} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 \geq 0 \\ m + 2 \geq 0 \\ 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(m-2) \geq 0 \\ m \geq -2 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Vậy điều kiện để phương trình có hai nghiệm không âm là $m \geq 2$.

b) Theo hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$

$$E = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}, \text{ điều kiện } E \geq 0 \Rightarrow E^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 2m + 2\sqrt{m+2}.$$

Vì $E \geq 0 \Rightarrow E = \sqrt{2m + 2\sqrt{m+2}}$ với điều kiện $m \geq -2$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau :

a) $7x^2 + 6x - 13 = 0$; b) $-0,4x^2 + 0,3x + 0,7 = 0$;

c) $x^2 - 7x + 12 = 0$; d) $(3m-1)x^2 + 6mx + 3m+1 = 0$ với $m \neq \frac{1}{3}$.

2. Tìm hai số x và y biết

a) $x + y = -33$ và $xy = 266$. b) $x + y = 35$ và $x^2 + y^2 = 625$.

3. Cho phương trình bậc hai, x là ẩn, tham số m

$$x^2 - 2(m+1)x + 2m = 0.$$

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Chứng tỏ

$M = x_1 + x_2 - x_1 x_2$ không phụ thuộc vào giá trị m.

(TS 10, THPT chuyên Hùng Vương, Bình Dương, năm học 2009 - 2010)

4. Cho phương trình (ẩn x) : $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$.

a) Giải phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn hệ thức : $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

(TS 10, THPT Hà Nội, năm học 2009 - 2010)

5. Cho phương trình : $x^2 - 2(m+2)x + m+1 = 0$.

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

6. Giả sử $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Tính $x_1^2 + x_2^2; x_1^3 + x_2^3$ và $x_1^5 + x_2^5$ (không sử dụng máy tính cầm tay để tính).

(TS 10, THPT chuyên Tỉnh Gia Lai, năm học 2009 - 2010)

7. Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$.

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m và tính giá

trị của biểu thức $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$ theo m .

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

(TS 10, THPT chuyên Tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2008 - 2009)

8. Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $2011x^2 - (20a - 11)x - 2011 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{3}{2} \cdot (x_1 - x_2)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)^2$.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. Đáp số

$$a) S = \left\{ 1; \frac{-13}{7} \right\}. \quad b) S = \left\{ -1; \frac{7}{4} \right\}. \quad c) S = \{3; 4\}. \quad d) S = \left\{ -1; -\frac{3m+1}{3m-1} \right\}.$$

2. Đáp số

$$a) (x; y) = \{(-14; -19); (-19; -14)\}. \quad b) (x; y) = \{(15; 20); (20; 15)\}.$$

3. a) Xét $\Delta' = m^2 + 2m + 1 - 2m = m^2 + 1 > 0$ với mọi m suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

$$b) \text{ Theo hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = 2m \end{cases}.$$

Ta có $M = x_1 + x_2 - x_1x_2 = 2m + 2 - 2m = 2$ không phụ thuộc vào m .

4. a) Bạn đọc tự giải.

b) - Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\Delta' > 0$ hay $(m+1)^2 - (m^2 + 2) > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

– Theo hệ thức Vi-ét :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 2 \end{cases}.$$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0.$

Giải ra ta có $m_1 = 1; m_2 = -5$ (loại).

Vậy với $m = 1$ thì phương trình có nghiệm thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10.$

5. a) Xét $\Delta' = m^2 + 4m + 4 - m - 1 = m^2 + 3m + 3 = (m + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo hệ thức Vi-ét :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) \\ x_1 x_2 = m+1 \end{cases}.$$

Phương trình có hai nghiệm cùng âm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+2) < 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > -1 \end{cases}$ do đó

không tồn tại m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.

c) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1.$

6. Xét $\Delta' = 4 - 1 = 3 > 0$, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-ét :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

• Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4^2 - 2.1 = 14.$

• Ta có $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 4^3 - 3.1.4 = 52.$

• Ta có $x_1^5 + x_2^5 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^3 + x_2^3) - x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) = 14.52 - 1.4 = 724.$

7. – Xét $\Delta = m^2 - m + 1 = (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, phương trình luôn có hai nghiệm.

Theo hệ thức Vi-ét :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}.$$

– Xét $P = \frac{2x_1 x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}.$

b) – Ta có $P = 1 - \frac{(m-1)^2}{m^2 + 2} \leq 1$ do đó giá trị lớn nhất của P là 1 khi $m = 1.$

– Ta có $P = \frac{(m+2)^2}{2(m^2 + 2)} - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$ do đó giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{2}$ khi $m = -2.$

8. Theo hệ thức Vi-ét :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{20a - 11}{2011} \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$$

Biến đổi biểu thức :

$$T = \frac{3}{2} \cdot (x_1 - x_2)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right)^2 = \frac{3}{2} \cdot (x_1 - x_2)^2 + 2 \cdot \frac{9}{4} \cdot (x_1 - x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow T = 6 \cdot (x_1 - x_2)^2 = 6 \cdot \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \right] = 6 \cdot \left[\left(\frac{20a - 11}{2011} \right)^2 + 4 \right] \geq 24.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 24, khi $a = \frac{11}{20}$.

§7. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Phương trình trùng phương

- Phương trình trùng phương là phương trình có dạng

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

- Để giải phương trình trùng phương, ta đặt ẩn phụ

Đặt $x^2 = t \geq 0$, đưa về phương trình $at^2 + bt + c = 0$ (2)

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta làm như sau :

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình ;

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức ;

Bước 3. Giải phương trình vừa nhận được ;

Bước 4. Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thoả mãn điều kiện xác định, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

3. Phương trình tích

- Phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0.
- Giải phương trình tích.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG

Phương pháp giải

Đặt $x^2 = t \geq 0$, đưa về phương trình $at^2 + bt + c = 0$.

Giải phương trình vừa tìm được, sau đó tìm nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$; b) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$; c) $\frac{4}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+5} = 2$.

Giải.

a) Đặt $x^2 = t \geq 0$, đưa về phương trình $t^2 - 29t + 100 = 0 \Rightarrow t_1 = 4 ; t_2 = 25$ (thoả mãn).

+ Với $t = 4 \Rightarrow x_1 = 2 ; x_2 = -2$.

+ Với $t = 25 \Rightarrow x_3 = 5 ; x_4 = -5$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-5; -2; 2; 5\}$.

b) Đặt $x^2 = t \geq 0$, đưa về phương trình $t^2 + 5t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = -1 ; t_2 = -4$ đều không thoả mãn.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Quy đồng mẫu và rút gọn, ta được phương trình :

$$2x^4 + 9x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 9 = 0 \text{ (vô nghiệm).} \end{cases}$$

Vậy phương đã cho trình có một nghiệm $x = 0$.

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của m để phương trình ẩn số $x : x^4 - 6x^2 + m - 1 = 0$ có 4 nghiệm.

Giải.

Đặt $x^2 = t \geq 0$, ta được $t^2 - 6t + m - 1 = 0$ (1)

Để phương trình đã cho có 4 nghiệm, thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - (m-1) > 0 \\ m-1 > 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 10.$$

Vậy với $1 < m < 10$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Dạng 2. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Phương pháp giải

Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta làm như sau :

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình ;

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức ;

Bước 3. Giải phương trình vừa nhận được ;

Bước 4. Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thoả mãn điều kiện xác định, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

$$a) 1 - \frac{8}{x-4} = \frac{5}{3-x} - \frac{8-x}{x+2} ;$$

$$b) \frac{x-1}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{12}{x^2-4} .$$

Giải.

a) Điều kiện : $x \neq -2$; $x \neq 3$; $x \neq 4$.

Quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu :

$$(3-x)(x-4)(x+2) - 8(3-x)(x+2) = 5(x-4)(x+2) - (8-x)(x-4)(3-x) \\ \Leftrightarrow 7x^2 - 72x + 128 = 0.$$

Giải ra ta được $x_1 = 8$; $x_2 = 2\frac{2}{7}$ thoả mãn.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 8$; $x_2 = 2\frac{2}{7}$.

b) Điều kiện : $x \neq -2$; $x \neq 2$.

Quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu :

$$(x-1)(x-2) + 2(x+2) = 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (t/m)}. \end{cases}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 3$.

Dạng 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Phương pháp giải

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $(2x^2 - 5x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0$; b) $(2x^2 + x)^2 - (2x - 1)^2 = 0$.

Giải.

$$a) (2x^2 - 5x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + 3x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

• Giải (1): $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ta được $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 2$.

• Giải (2): $x^2 + 3x + 1 = 0$ ta được $x_3 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$; $x_4 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{1}{2}; 2; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

b) $(2x^2 + x)^2 - (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x^2 + x - 2x + 1)(2x^2 + x + 2x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - x + 1)(2x^2 + 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 1 = 0 & (1) \\ 2x^2 + 3x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

• Giải (1): $\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

• Giải (2): $2x^2 + 3x - 1 = 0$ ta được $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$; $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0$.

Giải.

$$x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 3)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 3 = 0 & (1) \\ x^2 + x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

• Giải (1): $x^2 - x + 3 = 0$ có $\Delta = -11 < 0 \Rightarrow$ vô nghiệm.

• Giải (2): $x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Dạng 4. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Phương pháp giải

- Đặt điều kiện để phương trình xác định.
- Đặt ẩn phụ và giải phương trình theo ẩn mới.
- Trở về ẩn ban đầu và so sánh với điều kiện.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$;

b) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$;

c) $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$.

Giải.

a) Đặt $x^2 + 5x = y$. Ta được : $y^2 - 2y = 24 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = 6 \end{cases}$

• Với $y = -4 \Rightarrow x^2 + 5x = -4 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4. \end{cases}$

• Với $y = 6 \Rightarrow x^2 + 5x = 6 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{-1; -4; 1; -6\}$.

b) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81 \Leftrightarrow (x^2 - 6x)^2 - 2(x^2 - 6x + 9) - 81 = 0$.

Đặt $x^2 - 6x = y$. Ta được : $y^2 - 2(y + 9) - 81 = 0$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 99 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11 \\ y = -9 \end{cases}$$

• Với $y = 11 \Rightarrow x^2 - 6x = 11 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{20} \\ x = 3 - \sqrt{20}. \end{cases}$

• Với $y = -9 \Rightarrow x^2 - 6x = -9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy tập nghiệm $S = \{3 + \sqrt{20}; 3 - \sqrt{20}; 3\}$.

c) Điều kiện $x \neq 0$; $x^2 + x - 5 \neq 0$.

Đặt $\frac{x^2 + x - 5}{x} = y$.

Ta được $y + \frac{3}{y} + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -3 \end{cases}$.

• Với $y = -1 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 5}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}$.

• Với $y = -3 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 5}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_3 = 1; x_4 = -5$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1 \pm \sqrt{6}; 1; -5\}$.

Dạng 5. PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 DẠNG $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$ VỚI $a + b = c + d$

Phương pháp giải

- Phương trình được viết thành $[x^2 + (a+b)x + ab] \cdot [x^2 + (c+d)x + cd] = m$.
- Đặt $t = x^2 + (a+b)x$, ta được phương trình bậc hai $(t + ab)(t + cd) = m$.
- Giải tìm t , từ đó tìm x .

Ví dụ 1. Giải phương trình $(x + 5)(x + 6)(x + 8)(x + 9) = 40$.

Giải.

Ta có : $(x + 5)(x + 6)(x + 8)(x + 9) = 40$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 14x + 45)(x^2 + 14x + 48) = 40.$$

• Đặt $x^2 + 14x + 45 = y$, ta có : $y(y + 3) = 40 \Leftrightarrow y^2 + 3y - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -8 \end{cases}$

• Với $y = 5 \Rightarrow x^2 + 14x + 45 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 14x + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -10 \end{cases}$.

• Với $y = -8 \Rightarrow x^2 + 14x + 45 = -8 \Leftrightarrow x^2 + 14x + 53 = 0$: vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{-4; -10\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$.

(TS 10, chuyên Ngoại Ngữ - ĐHQG, năm học 2004 - 2005)

Giải.

Ta viết dưới dạng : $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24.$$

Đặt $x^2 + 5x + 4 = y$; ta có $y^2 + 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -6 \end{cases}$.

• Với $y = 4$, ta có: $x^2 + 5x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$.

• Với $y = -6$, ta có: $x^2 + 5x + 4 = -6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$: vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{0; -5\}$.

Dạng 6. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG BẬC BỐN, PHƯƠNG TRÌNH HỒI QUY

Phương pháp giải

1) Phương trình đối xứng bậc bốn có dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$).

• $x = 0$ không phải là nghiệm.

• Chia hai vế cho x^2 , rồi đặt ẩn phụ $x + \frac{1}{x} = y$

• Giải phương trình ẩn y , rồi thay vào tìm x .

2) Phương trình hồi quy có dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($ae \neq 0$)

trong đó $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$.

• $x = 0$ không phải là nghiệm.

• Chia hai vế cho x^2 , ta đặt $x + \frac{d}{bx} = y$.

• Giải phương trình ẩn y , rồi tìm x .

Ví dụ 1. Giải phương trình $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

Giải.

• $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

• $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Ta có phương trình: $2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

- Với $y = -4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$.
- Với $y = \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ -2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}; \frac{1}{2}; 2 \right\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

Giải.

- $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.
- $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được :

$$2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0.$$

Đặt $x + \frac{5}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{25}{x^2} = y^2 - 10$. Ta có phương trình :

$$2(y^2 - 10) - 21y + 74 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 21y + 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

- Với $y = 6 \Rightarrow x + \frac{5}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$.

- Với $y = \frac{9}{2} \Rightarrow x + \frac{5}{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 1; 5; \frac{5}{2}; 2 \right\}$.

Dạng 7. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

Phương pháp giải

- Đặt $x + \frac{a+b}{2} = y$, phương trình trở thành

$$\left(y + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(y - \frac{a-b}{2}\right)^4 = c.$$

- Khai triển và rút gọn, giải phương trình ẩn y.
- Cách giải trên còn áp dụng cho phương trình bậc 6.

Ví dụ 1. Giải phương trình $(x + 4)^4 + (x + 2)^4 = 82$.

Giải.

- Đặt $x + 3 = y$, ta được : $(y + 1)^4 + (y - 1)^4 = 82$

$$\Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

- $y = 2 \Rightarrow x = -1$.
- $y = -2 \Rightarrow x = -5$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{-1 ; -5\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $(x - 2)^6 + (x - 4)^6 = 64$.

Giải.

- Đặt $x - 3 = y$, phương trình có dạng : $(y + 1)^6 + (y - 1)^6 = 64$.

Khai triển và rút gọn ta được : $y^6 + 15y^4 + 15y^2 - 31 = 0$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^4 + 16y^2 + 31) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

- Với $y = 1 \Rightarrow x = 4$.
- Với $y = -1 \Rightarrow x = 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{4 ; 2\}$.

Dạng 8. PHƯƠNG TRÌNH PHÂN THỨC HỮU TỈ

Phương pháp giải

- Trong phần này, chúng ta xét một số dạng sau

$$a) \frac{mx}{ax^2 + bx + d} + \frac{nx}{ax^2 + cx + d} = p.$$

$$b) \frac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \frac{ax^2 + px + c}{ax^2 + qx + c} = d.$$

$$c) \frac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \frac{px}{ax^2 + qx + c} = d.$$

- Chia tử và mẫu cho x của mỗi phân thức, rồi đặt ẩn phụ thích hợp.
- Giải phương trình vừa tìm được.

Ví dụ. Giải các phương trình

$$a) \frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2}; \quad b) \frac{x^2-13x+15}{x^2-14x+15} - \frac{x^2-15x+15}{x^2-16x+15} = -\frac{1}{12};$$

$$c) \frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{4x}{x^2-12x+15}.$$

Giải.

a) • $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

• $x \neq 0$, chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x :

$$\frac{4}{x+1+\frac{3}{x}} + \frac{5}{x-5+\frac{3}{x}} = -\frac{3}{2}.$$

Đặt $x + \frac{3}{x} - 2 = y$, phương trình có dạng: $\frac{4}{y+3} + \frac{5}{y-3} + \frac{3}{2} = 0$. ĐK $y \neq \pm 3$.

Quy đồng, khử mẫu rồi rút gọn ta được: $y^2 + 6y - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -7 \end{cases}$

• Với $y = 1 \Rightarrow x + \frac{3}{x} - 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$: vô nghiệm.

• Với $y = -7 \Rightarrow x + \frac{3}{x} - 2 = -7$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-5+\sqrt{13}}{2} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-5-\sqrt{13}}{2}, \frac{-5+\sqrt{13}}{2} \right\}$.

b) • $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

• $x \neq 0$, chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x :

$$\frac{x-13+\frac{15}{x}}{x-14+\frac{15}{x}} - \frac{x-15+\frac{15}{x}}{x-16+\frac{15}{x}} = -\frac{1}{12}.$$

Đặt $x - 15 + \frac{15}{x} = y$, phương trình có dạng :

$$\frac{y+2}{y+1} - \frac{y}{y-1} = -\frac{1}{12}. \text{ĐK } y \neq \pm 1.$$

Quy đồng, khử mẫu rồi rút gọn ta được : $y^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \end{cases} \text{ (tmdk)}$

• Với $y = 5 \Rightarrow x - 15 + \frac{15}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - \sqrt{85} \\ x = 10 + \sqrt{85} \end{cases}$

• Với $y = -5 \Rightarrow x - 15 + \frac{15}{x} = -5 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - \sqrt{10} \\ x = 5 + \sqrt{10} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{10 - \sqrt{85}; 10 + \sqrt{85}; 5 - \sqrt{10}; 5 + \sqrt{10}\}$.

c) • $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

• $x \neq 0$, chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x :

$$\frac{x - 10 + \frac{15}{x}}{x - 6 + \frac{15}{x}} = \frac{4}{x - 12 + \frac{15}{x}}.$$

Đặt $x - 9 + \frac{15}{x} = y$, phương trình có dạng :

$$\frac{y-1}{y+3} = \frac{4}{y-3}. \text{ĐK } y \neq \pm 3.$$

Quy đồng, khử mẫu rồi rút gọn ta được : $y^2 - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases} \text{ (tmdk)}$

• Với $y = -1 \Rightarrow x - 9 + \frac{15}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 5 \end{cases}$

• Với $y = 9 \Rightarrow x - 9 + \frac{15}{x} = 9 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - \sqrt{66} \\ x = 9 + \sqrt{66} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; 5; 9 - \sqrt{66}; 9 + \sqrt{66}\}$.

Dạng 9. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Phương pháp giải

- Phương trình vô tỉ là phương trình chứa ẩn trong dấu căn. Ta thường làm như sau :
- + Đặt điều kiện cho ẩn.
- + Bình phương hai vế khi hai vế đều dương.
- + Đặt ẩn phụ, giải phương trình ẩn mới.
- + Sau khi tìm được nghiệm cần kiểm tra lại điều kiện của nghiệm.

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $\sqrt{2x-1} = 8-x$;

b) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$.

Giải.

a) Điều kiện : $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$.

Bình phương hai vế, ta được : $2x - 1 = 64 - 16x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 65 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 13 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm $S = \{5\}$.

b) Điều kiện : $x \leq 3$.

Bình phương hai vế, ta được :

$$18 - 2x + 2\sqrt{(15-x)(3-x)} = 36 \Leftrightarrow \sqrt{(15-x)(3-x)} = 9 + x .$$

Điều kiện bổ sung : $x \geq -9$.

Bình phương hai vế, ta được : $(15-x)(3-x) = 81 + 18x + x^2$

$$\Leftrightarrow 36x = -36 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (thoả mãn)} .$$

Vậy tập nghiệm $S = \{-1\}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình

a) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 24} = 18$;

b) $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$.

Giải.

a) Đặt $\sqrt{x^2 - x + 24} = y \geq 0 \Rightarrow x^2 - x = y^2 - 24$.

Ta được phương trình : $y^2 - 24 + y = 18 \Leftrightarrow y^2 + y - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \text{ (loại)} \\ y = 6 \end{cases}$.

$$\text{Với } y = 6 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 24} = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm $S = \{4; -3\}$.

b) Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$.

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = y \geq 0 &\Rightarrow 2-x + 2\sqrt{4-x^2} + 2+x = y^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{y^2-4}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có phương trình : } y + \frac{y^2-4}{2} = 2 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -4 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 2 \Rightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = 2.$$

$$\text{Bình phương hai vế : } 4 + 2\sqrt{4-x^2} = 4 \Leftrightarrow 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm $S = \{2; -2\}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải các phương trình sau

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

b) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

c) $\frac{7}{x+1} + \frac{x-4}{2x-2} = \frac{x^2+15x}{x^2-1}$.

d) $\frac{1}{4-x} = \frac{1}{3x^2+1}$.

2. Giải các phương trình sau

a) $(3x^2 - 2)^2 - 9(x-1)^2 = 0$. b) $3x(2x-1)^2 - 4x^2 + 1 = 0$. c) $x^4 = 8x + 7$.

3. Giải các phương trình sau

a) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$.

b) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 5(x + \frac{1}{x}) - 12 = 0$.

c) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$.

4. Giải các phương trình sau

a) $3x - \sqrt{x+2} = 4$.

b) $\sqrt{x-9} - \sqrt{x-18} = 1$.

c) $x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 18$.

d) $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(x+3)(6-x)} = 3$.

5. Giải các phương trình sau

a) $(x+2)(x+3)(x-7)(x-8) = 144$.

b) $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$.

c) $x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 20x + 16 = 0$.

6. Giải các phương trình sau

a) $(x+4)^4 + (x+6)^4 = 2$;

b) $(x-1)^6 + (x-2)^6 = 1$;

c) $\frac{20x^2}{2x^2 - 10x + 2011} + \frac{11x^2}{2x^2 + 10x + 2011} = -2012$.

7. Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có các nghiệm là -3 ; -1 ; 2 ; 4 .
Tính giá trị $a + b + c + d$.

8. Cho phương trình $x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 = 0$. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. Đặt $x^2 = t \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - 8t - 9 = 0 \Rightarrow t_1 = 9; t_2 = -1$ (loại).

Với $t = 9 \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -3$.

b) $S = \{1; -1; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

c) Điều kiện : $x \notin \{-1; 1\}$.

Quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu :

$$7.2.(x-1) + (x-4)(x+1) = 2(x^2 + 15x) \Leftrightarrow x^2 + 19x + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{(loại)} \\ x = -18 \end{cases}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = -18$.

d) $S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{37}}{6}; \frac{-1 + \sqrt{37}}{6} \right\}$.

2. a) $(3x^2 - 2)^2 - 9(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 3x + 1).(3x^2 + 3x - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3x + 1 = 0 & (1) \\ 3x^2 + 3x - 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Giải (1) ta được $\Delta = -3 < 0$, phương trình vô nghiệm.

– Giải (2) ta được $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{69}}{6}; x_2 = \frac{-3 + \sqrt{69}}{6}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{69}}{6}; \frac{-3 + \sqrt{69}}{6} \right\}$.

b) $3x(2x - 1)^2 - 4x^2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - 1) \cdot (6x^2 - 5x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 & (3) \\ 6x^2 - 5x - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

– Giải (3) ta được $x_1 = \frac{1}{2}$.

– Giải (4) ta được $x_2 = 1; x_3 = \frac{-1}{6}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{-1}{6} \right\}$.

c) $x^4 = 8x + 7 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 8x + 8$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x + 2\sqrt{2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{2}x + 1 - 2\sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 1 + 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x + 1 - 2\sqrt{2} = 0 & (5) \\ x^2 + \sqrt{2}x + 1 + 2\sqrt{2} = 0 & (6) \end{cases}$$

– Giải (5) ta được : $x_1 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}$.

– Giải (6) ta được $\Delta = -2 - 8\sqrt{2} < 0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2} \right\}$.

3. a) Đặt $x^2 + x + 1 = y$, ta được $y(y + 1) = 12 \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -4 \end{cases}$.

– Với $y = -4 \Rightarrow x^2 + x + 1 = -4 \Leftrightarrow x^2 + x + 5 = 0$ (vô nghiệm).

$$- \text{ Với } y = 3 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -2\}$.

$$\text{b) Đặt } x + \frac{1}{x} = y, \text{ ta có : } y^2 - 2 + 5y - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 5y - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -7. \end{cases}$$

$$- \text{ Với } y = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$- \text{ Với } y = -7 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -7 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7 - \sqrt{45}}{2} \\ x = \frac{-7 + \sqrt{45}}{2}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1; \frac{-7 - \sqrt{45}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{45}}{2}\right\}$.

$$\text{c) } (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4)(x + 3)(x + 2) = 24 \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24.$$

$$\text{Đặt } x^2 + 5x + 5 = y, \text{ ta có : } (y - 1)(y + 1) = 24 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ y = 5. \end{cases}$$

$$- \text{ Với } y = -5 \Rightarrow x^2 + 5x + 5 = -5 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0 \text{ có } \Delta = -15 < 0, \text{ vô nghiệm.}$$

$$- \text{ Với } y = 5 \Rightarrow x^2 + 5x + 5 = 5 \Leftrightarrow (x + 5)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; -5\}$.

$$4. \text{ a) } 3x - 4 = \sqrt{x + 2} \text{ có điều kiện } x \geq \frac{4}{3}.$$

$$\text{Bình phương hai vế, thu gọn ta được : } 9x^2 - 25x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{7}{9} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{2\}$.

$$\text{b) Điều kiện } x \geq 18. \text{ Phương trình tương đương với } \sqrt{x - 9} = \sqrt{x - 18} + 1.$$

$$\text{Bình phương hai vế, ta được : } x - 9 = x - 18 + 2\sqrt{x - 18} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x - 18} = 4.$$

Bình phương hai vế, thu gọn ta được $x - 18 = 16 \Leftrightarrow x = 34$ (thỏa mãn).
 Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{34\}$.

c) Đặt $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = y \geq 0$, phương trình có dạng :

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \text{ (loại)} \\ y = 2 \end{cases}$$

- Với $y = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; -5\}$.

d) Điều kiện $-3 \leq x \leq 6$.

Đặt $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} = y \geq 0 \Leftrightarrow x+3 + \sqrt{(x+3)(6-x)} + 6-x = y^2$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+3)(6-x)} = \frac{y^2 - 9}{2}.$$

Phương trình có dạng : $y - \frac{y^2 - 9}{2} = 3 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \text{ (loại)} \\ y = 3 \end{cases}.$

Với $y = 3$ ta được $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} = 3$.

Bình phương hai vế ta được $9 + 2\sqrt{(x+3)(6-x)} = 9$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(6-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; 6\}$.

7. Vì $-3; -1; 2; 4$ là nghiệm, nên phương trình có thể viết thành :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x+3)(x-4)(x+1)(x-2) = (x^2 - x - 12)(x^2 - x - 2).$$

Chọn $x = 1$ thì $1 + a + b + c + d = (-12)(-2) = 24 \Rightarrow a + b + c + d = 23$.

8. Đặt $x^2 = t \geq 0$. Khi đó phương trình có dạng $t^2 - 2(m+1)t + m^2 = 0$ (1).

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt, tức là :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

§8. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Bước 1. Lập phương trình

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp của ẩn.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình vừa lập.

Bước 3. Trả lời : Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán và trả lời.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Phương pháp giải

- Sử dụng các công thức :

$$\text{Quãng đường} = \text{Vận tốc} \times \text{Thời gian.}$$

$$S = V.t.$$

$$\text{Suy ra } V = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{V}.$$

- Nếu chuyển động trong dòng chảy thì :

$$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{riêng}} + V_{\text{dòng nước}}$$

$$V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{riêng}} - V_{\text{dòng nước}}$$

Ví dụ 1. Hai ô tô cùng khởi hành từ A đến B cách nhau 560 km. Vận tốc ô tô (II) hơn vận tốc ô tô (I) là 10 km/h nên đã đến B sớm hơn ô tô (I) là 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

Giải.

Gọi vận tốc ô tô (I) là x (km/h, $x > 0$).

Khi đó vận tốc ô tô (II) là $x + 10$ (km/h).

Thời gian ô tô (I) đi từ A đến B là $\frac{560}{x}$ (giờ).

Thời gian ô tô (II) đi từ A đến B là $\frac{560}{x+10}$ (giờ).

Theo đề bài, xe ô tô (II) đến B sớm hơn xe ô tô (I) là 1 giờ nên ta có phương trình :

$$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1 \Leftrightarrow 560(x+10) - 560x = x(x+10) \Leftrightarrow x^2 + 10x - 5600 = 0 ;$$

$$\Delta' = 25 + 5600 = 5625 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 75 .$$

Phương trình có nghiệm : $x_1 = -5 - 75 = -80$ (loại) ;

$$x_2 = -5 + 75 = 70 \text{ (chọn).}$$

Vậy vận tốc ô tô (I) là 70 (km/h).

Vận tốc ô tô (II) là $70 + 10 = 80$ (km/h).

Ví dụ 2. Một người đi xe đạp quãng đường từ A đến B dài 30 km. Khi từ B về A người đó chọn con đường khác dài hơn 6 km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3 km/h, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Giải.

Gọi vận tốc lúc đi là x (km/h, $x > 0$).

Suy ra thời gian đi quãng đường từ A đến B dài 30 km hết là $\frac{30}{x}$ (h).

Khi về, người đó đi quãng đường dài hơn quãng đường lúc đi 6 km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3 km/h, nên thời gian hết là $\frac{36}{x+3}$ (h).

Theo đầu bài, vì thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút $\left(\frac{1}{3} \text{ giờ}\right)$ nên phương trình là :

$$\frac{30}{x} - \frac{36}{x+3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + 21x - 270 = 0.$$

Giải ra, ta có : $x_1 = 9$ (thỏa mãn), $x_2 = -30$ (không thỏa mãn).

Vậy vận tốc lúc đi là 9 km/h.

Ví dụ 3. Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120 km. Cả đi lẫn về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

(TS10 - THPT Hưng Yên, năm học 2001 - 2002)

Giải.

Gọi vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng là x (km/h, $x > 4$).

Suy ra : Vận tốc của tàu thủy khi xuôi dòng là $x + 4$ (km/h).

Vận tốc của tàu thủy khi ngược dòng là $x - 4$ (km/h).

Thời gian tàu thủy đi xuôi dòng 120 km là $\frac{120}{x+4}$ (giờ).

Thời gian tàu thủy đi ngược dòng 120 km là $\frac{120}{x-4}$ (giờ).

Theo đề bài, thời gian cả đi lẫn về mất 6 giờ 45 phút ($= 6\frac{3}{4}$ giờ).

Ta có phương trình $\frac{120}{x+4} + \frac{120}{x-4} = 6\frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow 120(x-4) + 120(x+4) = \frac{27}{4}(x-4)(x+4) \Leftrightarrow 9x^2 - 320x - 144 = 0$$

$$\Delta' = 25600 + 1296 = 26896 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 164.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm là : } x_1 = \frac{160-164}{9} = -\frac{4}{9} \text{ (loại)} ; x_2 = \frac{160+164}{9} = 36.$$

Vậy vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng là 36 km/h.

Ví dụ 4. Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km ; cũng từ A về B một chiếc bè trôi với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè tại địa điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của ca nô.

Giải.

Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h, $x > 4$).

Suy ra : Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $x + 4$ (km/h) ;

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là $x - 4$ (km/h).

Thời gian ca nô đi xuôi dòng 24 km là $\frac{24}{x+4}$ (giờ).

Thời gian ca nô đi ngược dòng 16 km là $\frac{16}{x-4}$ (giờ).

Theo đề bài, thời gian ca nô đi bằng thời gian bè trôi đến chỗ gặp nhau ta có phương trình :

$$\frac{24}{x+4} + \frac{16}{x-4} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow x^2 - 20x = 0.$$

Giải ra ta có : $x_1 = 20$ (thoả mãn), $x_2 = 0$ (không thoả mãn).

Vậy vận tốc thực của ca nô là 20 km/h.

Ví dụ 5. Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian đã định. Khi đi được nửa quãng đường xe bị chặn bởi xe hoả mất 3 phút. Vì vậy để đến B đúng hạn xe phải tăng tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định.

Giải.

Gọi vận tốc ô tô dự định đi là x (km/h, $x > 0$).

Thời gian dự định đi hết quãng đường AB là $\frac{120}{x}$ (h).

Thời gian đi hết nửa quãng đường đầu là $\frac{60}{x}$ (h).

Thời gian đi hết nửa quãng đường sau là $\frac{60}{x+2}$ (h).

Thời gian dừng lại 3 phút = $\frac{1}{20}$ (h).

Theo đề bài, ta có phương trình : $\frac{60}{x} + \frac{1}{20} + \frac{60}{x+2} = \frac{120}{x}$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2400 = 0.$

Giải ra ta có : $x_1 = 48$ (thoả mãn), $x_2 = -50$ (không thoả mãn).

Vậy vận tốc dự định của ô tô là 48 km/h.

Ví dụ 6. Một bè nửa trôi tự do (với vận tốc bằng vận tốc của dòng nước) và một ca nô cùng rời bến A để xuôi dòng sông. Ca nô xuôi dòng được 144 km thì quay trở về bến A ngay, cả đi lẫn về hết 21 giờ. Trên đường ca nô trở về bến A, khi còn cách bến A là 36 km thì gặp bè nửa nói trên. Tìm vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước.

Giải.

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km / h) ;

Gọi vận tốc dòng nước là y (km/ h, $x > y > 0$).

Theo đề bài, ca nô xuôi dòng 144 km và ngược về A ngay, thời cả đi lẫn về hết 21 giờ, ta có phương trình : $\frac{144}{x+y} + \frac{144}{x-y} = 21$ (1)

Mà trên đường về ca nô gặp bè nửa cách A là 36 km, ta có phương trình :

$$\frac{144}{x+y} + \frac{144-36}{x-y} = \frac{36}{y} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{144}{x+y} + \frac{144}{x-y} = 21 \\ \frac{144}{x+y} + \frac{144-36}{x-y} = \frac{36}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{144}{x+y} + \frac{144}{x-y} = 21 \\ 252xy = 36x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 96x = 7(x^2 - y^2) \\ x = 7y \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

Thay (4) vào (3), ta được phương trình : $48y^2 - 96y = 0$.

Giải ra ta có : $y_1 = 2$ (thoả mãn), $y_2 = 0$ (không thoả mãn).

Với $y = 2$ thì $x = 14$.

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 14 km/h.

Vận tốc dòng nước là 2 km/h.

Dạng 2. TOÁN CÔNG VIỆC LIÊN QUAN ĐẾN NĂNG SUẤT VÀ THỜI GIAN

Phương pháp giải

- Khối lượng công việc = Năng suất x Thời gian.
- Năng suất = Khối lượng công việc : Thời gian.
- Thời gian = Khối lượng công việc : Năng suất.

Ví dụ 1. Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng do áp dụng kĩ thuật nên đã tăng năng suất thêm 5 sản phẩm mỗi giờ. Do đó không những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 40 phút mà còn vượt mức 10 sản phẩm. Tính năng suất dự định.

Giải.

Gọi năng suất dự định là x (sản phẩm/ giờ, $x \in \mathbb{N}^*$) ;

Thời gian dự định làm 70 sản phẩm là $\frac{70}{x}$ (giờ) ;

Thời gian thực tế làm 80 sản phẩm với năng suất $x + 5$ (sản phẩm/ giờ) là $\frac{80}{x+5}$ (giờ).

Theo đề bài, công nhân hoàn thành trước kế hoạch 40 phút ($=\frac{2}{3}$ giờ).

Ta có phương trình $\frac{70}{x} - \frac{80}{x+5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 + 20x - 525 = 0$.

Giải ra, ta có : $x_1 = 15$ (thoả mãn), $x_2 = -35$ (không thoả mãn).

Vậy năng suất dự định là 15 sản phẩm/giờ.

Ví dụ 2. Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Vì vậy mặc dù người đó đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm, song thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến, biết rằng mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

(TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 1997- 1998)

Giải.

Gọi năng suất dự kiến x (sản phẩm/giờ ; $x \in \mathbf{N}$, $0 < x < 20$) ;

Vậy năng suất thực tế là $x + 1$ (sản phẩm/giờ).

Thời gian dự định làm 72 sản phẩm là $\frac{72}{x}$ (giờ).

Thời gian thực tế làm 80 sản phẩm là $\frac{80}{x+1}$ (giờ).

Theo đề bài, thời gian hoàn thành vẫn chậm hơn so với dự định là 12 phút ($=\frac{1}{5}$ giờ) ta có phương trình :

$$\frac{80}{x+1} - \frac{72}{x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 80.5.x - 72.5(x+1) = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 39x + 360 = 0 ;$$

$$\Delta = 39^2 - 4.360 = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 9.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm : } x_1 = \frac{39+9}{2} = 24 \text{ (loại)} ; x_2 = \frac{39-9}{2} = 15 \text{ (thoả mãn).}$$

Vậy năng suất dự kiến là 15 (sản phẩm/giờ).

Ví dụ 3. Một tổ có kế hoạch sản xuất 350 sản phẩm theo năng suất dự định. Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm thì tổ đó hoàn thành sớm 2 ngày so với giảm năng suất 10 sản phẩm mỗi ngày. Tính năng suất dự kiến.

Giải.

Gọi năng suất dự kiến x (sản phẩm/ngày ; $x \in \mathbf{N}$).

Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm thì số ngày hoàn thành 350 sản phẩm là $\frac{350}{x+10}$ (ngày) ;

Nếu giảm năng suất 10 sản phẩm thì số ngày hoàn thành 350 sản phẩm là $\frac{350}{x-10}$ (ngày).

Theo đề bài ta có phương trình :

$$\frac{350}{x-10} - \frac{350}{x+10} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3600.$$

Giải ra ta có : $x_1 = 60$ (thỏa mãn điều kiện) ; $x_2 = -60$ (loại).

Vậy năng suất dự kiến là 60 (sản phẩm/ngày).

Ví dụ 4. Một nhóm thợ phải thực hiện kế hoạch sản xuất 3000 sản phẩm. Trong 8 ngày đầu họ thực hiện đúng mức để ra, những ngày còn lại họ đã vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm ?

Giải.

Gọi số sản phẩm theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất là x (sản phẩm/ ngày, $x \in \mathbb{Z}^+$).

Suy ra số sản phẩm làm trong 8 ngày đầu là $8x$ (sản phẩm) ;

Thời gian làm số sản phẩm còn lại là $\frac{3000-8x}{x+10}$ (ngày).

Thời gian làm theo kế hoạch là $\frac{3000}{x}$ (ngày).

Theo đề bài, nhóm thợ đã hoàn thành sớm 2 ngày so với dự định, ta có phương trình :

$$8 + \frac{3000-8x}{x+10} + 2 = \frac{3000}{x} \Leftrightarrow x^2 + 50x - 15\,000 = 0.$$

Giải ra, ta được : $x_1 = 100$ (thỏa mãn điều kiện) ; $x_2 = -150$ (loại).

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất 100 sản phẩm.

Dạng 3. TOÁN CÔNG VIỆC LIÊN QUAN ĐẾN LÀM CHUNG, LÀM RIÊNG

Phương pháp giải

Coi toàn bộ công việc là 1.

Năng suất = 1 : Thời gian.

Tổng các năng suất riêng = Năng suất chung.

Ví dụ 1. Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 6 giờ 40 phút. Nếu họ làm riêng thì công nhân (I) hoàn thành công việc đó ít

hơn công nhân (II) là 3 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu xong công việc?

Giải.

Gọi thời gian công nhân (I) làm một mình xong công việc là x (giờ, $x > 6\frac{2}{3}$).

Vì thời gian công nhân (I) hoàn thành công việc ít hơn thời gian công nhân (II) là 3 giờ nên thời gian công nhân (II) làm một mình xong công việc là $x + 3$ (giờ).

Mỗi giờ công nhân (I) làm được là $\frac{1}{x}$ (công việc).

Mỗi giờ công nhân (II) làm được là $\frac{1}{x+3}$ (công việc).

Theo đầu bài, hai công nhân cùng làm thì hoàn thành công việc trong 6 giờ 40 phút ($= 6\frac{2}{3}$ giờ). Nên mỗi giờ họ cùng làm được $1 : 6\frac{2}{3} = \frac{3}{20}$ (công việc).

Ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20}$

$$\Leftrightarrow 20(x+3) + 20.x = 3x(x+3) \Leftrightarrow 3x^2 - 31x - 60 = 0 ;$$

$$\Delta = 31^2 - 4.3.(-60) = 1681 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 41.$$

Phương trình có nghiệm là : $x_1 = \frac{31-41}{6} = -\frac{5}{6}$ (loại) ; $x_2 = \frac{31+41}{6} = 12$ (thoả mãn).

Vậy thời gian công nhân (I) làm một mình xong công việc là 12 giờ.

Thời gian công nhân (II) làm một mình xong công việc là 15 giờ.

Ví dụ 2. Hai vòi cùng chảy vào một bể thì đầy sau 7 giờ 12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian là bao lâu?

Giải.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x giờ ($0 < x < 30$).

Thời gian vòi hai chảy riêng đầy bể là $30 - x$ (giờ).

Theo đầu bài, hai vòi cùng chảy mà đầy bể sau 7 giờ 12 phút ($= 7\frac{1}{5}$ giờ).

Ta có phương trình : $7\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{30-x} \right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 30x + 216 = 0.$

Giải phương trình ta có : $x_1 = 12$; $x_2 = 18$ (thoả mãn).

Vậy nếu vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là 12 (giờ) ;

Vòi hai chảy riêng đầy bể là $30 - 12 = 18$ (giờ) và ngược lại.

Dạng 4. TOÁN VỀ QUAN HỆ GIỮA CÁC SỐ

Phương pháp giải

- Biểu diễn : $\overline{ab} = 10.a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$)
 $\overline{abc} = 100.a + 10.b + c$ ($a, b, c \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9$)
- Tỉ số của hai số a và b ($b \neq 0$) là $\frac{a}{b}$.
- Tổng hai số $x ; y$ là : $x + y$.
- Tổng bình phương hai số $x ; y$ là : $x^2 + y^2$.
- Tổng nghịch đảo của hai số $x ; y$ là : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Ví dụ 1. Tìm hai số biết rằng tổng của hai số đó bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

(TS 10 - THPT Tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2003 - 2004)

Giải.

Gọi số thứ nhất là x , số thứ hai là y .

Theo đề bài, tổng của hai số đó bằng 17 đơn vị ta có phương trình : $x + y = 17$ (1)

Số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị ta có phương trình $(x + 3)(y + 2) = 105$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ (x + 3)(y + 2) = 105 \end{cases}$$

Rút y từ phương trình (1) thế vào phương trình (2) và thu gọn ta có :

$$x^2 - 16x + 48 = 0.$$

Giải phương trình ta được $x_1 = 12$ (thoả mãn), $x_2 = 4$ (thoả mãn).

Vậy nếu số thứ nhất là 12 thì số thứ hai là 5 ; nếu số thứ nhất là 4 thì số thứ hai là 13.

Ví dụ 2. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và dư là 3. Còn nếu đem số đó chia cho tích các chữ số của nó thì được thương là 3 và dư là 5.

Giải.

Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y ($x, y \in \mathbb{N}$, $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$).

Theo đề bài, đem số đó chia cho tổng các chữ số thì được thương là 4 và dư 3, ta có phương trình : $10x + y = 4(x + y) + 3$ (1)

Còn đem số đó chia cho tích các chữ số của nó thì được thương là 3 và dư 5, ta có phương trình : $10x + y = 3.xy + 5$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 10x + y = 4(x + y) + 3 \\ 10x + y = 3xy + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 & (3) \\ 10x + y - 3xy = 5 & (4) \end{cases}$$

Rút y từ (3) rồi thế vào (4) ta được : $10x + 2x - 1 - 3x(2x - 1) = 5$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 : \Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3.$$

Phương trình có nghiệm : $x_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{1}{2}$ (loại) ; $x_2 = \frac{5+3}{2} = 2$ (thoả mãn).

Với $x = 2$ thì $y = 3$ (thoả mãn).

Vậy số cần tìm là 23.

Ví dụ 3. Lấy một số tự nhiên có hai chữ số chia cho số viết bởi hai chữ số có thứ tự ngược lại thì được thương là 4 và dư 15. Nếu lấy số đó trừ đi 9 thì được một số bằng tổng bình phương các chữ số của số đó. Tìm số tự nhiên đó.

Giải.

Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y ($x, y \in \mathbb{N}$, $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$).

Theo đề bài, lấy một số tự nhiên có hai chữ số chia cho số viết bởi hai chữ số có thứ tự ngược lại thì được thương là 4 và dư 15 ta có phương trình :

$$10x + y = (10y + x).4 + 15 \quad (1)$$

Nếu lấy số đó trừ đi 9 thì được một số bằng tổng bình phương của mỗi chữ số đó, ta có phương trình : $10x + y - 9 = x^2 + y^2$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 10x + y = (10y + x).4 + 15 \\ 10x + y - 9 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13y + 5}{2} & (3) \\ 10x + y - 9 = x^2 + y^2 & (4) \end{cases}$$

Thay (3) vào (4) và thu gọn ta có : $173y^2 - 134y - 39 = 0$.

Giải phương trình ta có : $y_1 = 1$ (thoả mãn) ; $y_2 = \frac{-39}{173}$ (không thoả mãn).

Với $y = 1$ thì $x = 9$.

Vậy số tự nhiên đó là 91.

Ví dụ 4. Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần. Nếu thêm 25 vào tích của 2 chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho.

Giải.

Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y ($x, y \in \mathbb{N}$, $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$).

Theo đề bài, tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần ta có phương trình :

$$6(x + y) = 10x + y \quad (1)$$

Nếu thêm 25 vào tích của 2 chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho, ta có phương trình : $xy + 25 = 10y + x$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 6(x + y) = 10x + y \\ xy + 25 = 10y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5y}{4} \\ xy + 25 = 10y + x \end{cases} \quad (3)$$

Thay (3) vào (4) và thu gọn ta có : $y^2 - 9y + 20 = 0$.

Giải phương trình ta có : $y_1 = 5$; $y_2 = 4$.

Với $y_1 = 5$ thì $x_1 = 6,25$ (không thoả mãn).

Với $y_2 = 4$ thì $x_2 = 5$ (thoả mãn).

Vậy số phải tìm là 54.

Dạng 5. DẠNG TOÁN CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC

Phương pháp giải

Áp dụng các công thức sau :

- Định lí Py-ta-go : $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Diện tích hình chữ nhật : $S = a.b$; với a : chiều dài, b : chiều rộng.
- Diện tích hình thang : $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ hoặc $S = m.h$.

Trong đó : a, b : độ dài hai đáy ; h : độ dài đường cao ; m : độ dài đường trung bình.

Ví dụ 1. Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật là 5400 cm^2 . Tính chu vi hình chữ nhật.

Giải.

Chiều dài hình chữ nhật là $x \text{ (cm, } x > 0 \text{)}$;

Chiều rộng hình chữ nhật đó là $\frac{2}{3} \cdot x \text{ (cm)}$.

Theo đầu bài, ta có phương trình : $x \cdot \frac{2}{3} \cdot x = 5400 \Leftrightarrow x^2 = 8100$.

Giải ra, ta được : $x_1 = 90$ (thỏa mãn điều kiện) ; $x_2 = -90$ (loại).

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 90 cm , chiều rộng hình chữ nhật là 60 cm . Do đó chu vi hình chữ nhật là : $(90 + 60) \cdot 2 = 300 \text{ cm}$.

Ví dụ 2. Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2 . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 .

Giải.

Chiều dài hình chữ nhật là $x \text{ (m, } x > 0 \text{)}$, thì chiều rộng của hình chữ nhật là : $\frac{100}{x} \text{ (m)}$.

Theo đầu bài, nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 , ta có phương trình :

$$(x - 5) \cdot \left(\frac{100}{x} + 2 \right) = 100 + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 15x - 500 = 0.$$

Giải ra, ta được : $x_1 = 20$ (thỏa mãn điều kiện) ; $x_2 = -12,5$ (loại).

Vậy chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là 20 m và chiều rộng của mảnh đất là 5 m .

Ví dụ 3. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m . Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2 m , diện tích đất còn lại để trồng trọt là 4256 m^2 . Tính các kích thước của vườn.

Giải.

Chiều dài khu vườn hình chữ nhật là $x \text{ (m, } x > 70 \text{)}$;

Thì chiều rộng của khu vườn hình chữ nhật là $280 : 2 - x = 140 - x \text{ (m)}$.

Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2 m thì chiều dài phần đất còn lại để trồng trọt là $x - 4 \text{ (m)}$, chiều rộng phần đất để trồng trọt là $140 - x - 4 = 136 - x \text{ (m)}$.

Theo đầu bài, diện tích đất còn lại để trồng trọt là 4256 m^2 , ta có phương trình :

$$(x - 4).(136 - x) = 4256 \Leftrightarrow x^2 - 140x + 4800 = 0.$$

Giải ra, ta được : $x_1 = 80$ (thỏa mãn điều kiện) ; $x_2 = 60$ (loại).

Vậy chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là 80 m và chiều rộng của mảnh đất là 60 m.

Ví dụ 4. Trên một miếng đất hình thang cân chiều cao 35 m, hai đáy lần lượt bằng 30 m, 50 m người ta làm hai đoạn đường có cùng chiều rộng. Các tìm đường lần lượt là đường trung bình của hình thang và đoạn thẳng nối hai trung điểm của hai đáy. Tính chiều rộng các đoạn đường đó biết rằng diện tích làm đường chiếm 0,25 diện tích hình thang.

Giải. (h.10)

Diện tích hình thang là :

$$(30 + 50).35 : 2 = 1400 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Suy ra diện tích phần làm đường là :

$$1400.0,25 = 350 \text{ (m}^2\text{)} ;$$

Đường trung bình của hình thang là :

$$(30 + 50) : 2 = 40 \text{ (m)}.$$

Gọi chiều rộng các đoạn đường là x (m, $0 < x < 30$).

Theo đề bài, ta có phương trình :

$$40x + 35x - x^2 = 350 \Leftrightarrow x^2 - 75x + 350 = 0.$$

Giải ra, ta được : $x_1 = 5$ (thỏa mãn điều kiện) ; $x_2 = 70$ (loại).

Vậy chiều rộng các đoạn đường đó là 5 m.

Ví dụ 5. Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

(TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2010 - 2011)

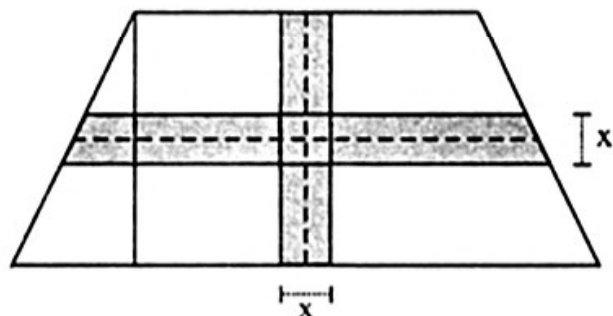
Giải.

Gọi chiều rộng mảnh đất là x (m, $0 < x < 13$), thì chiều dài mảnh đất là $x + 7$ (m).

Theo đầu bài, hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m, áp dụng định lý Py-ta-go ta có phương trình : $x^2 + (x + 7)^2 = 13^2 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$.

Giải ra, ta được : $x_1 = 5$ (thỏa mãn điều kiện) ; $x_2 = -12$ (loại).

Vậy chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là 5 m và chiều dài của mảnh đất là 12 m.



Hình 10

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Hai xe cùng khởi hành từ A đến B cách nhau 30 km. Xe (I) có vận tốc lớn hơn vận tốc xe (II) là 3 km/h nên đến B sớm hơn xe (II) là 30 phút. Tính vận tốc mỗi xe.
2. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km. Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4 km/h so với lúc đi, nên thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

(TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2007-2008)

3. Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông từ bến A đến bến B dài 80 km, sau đó lại ngược dòng đến địa điểm C cách B là 72 km, thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 15 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc dòng nước là 4 km/h.

(TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2006-2007)

4. Một ca nô đi xuôi dòng từ A đến B dài 28 km. Đến B ca nô dừng 40 phút rồi quay trở về A. Biết rằng vận tốc dòng nước chảy là 5 km/h và thời gian cả đi lẫn về là 3 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô.
5. Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần lễ. Do trồng mỗi tuần vượt mức 5 ha so với kế hoạch nên đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm 1 tuần. Hỏi mỗi tuần dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

(TS 10 - THPT Amsterdam, Chu Văn An - Hà Nội, năm học 1996-1997)

6. Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành trong 4 ngày. Biết rằng nếu làm một mình xong công việc thì người thứ nhất làm nhanh hơn người thứ hai là 6 ngày. Tính thời gian mỗi người làm một mình xong công việc trên.
7. Hai vòi cùng chảy vào một bể trong 4 giờ thì được $\frac{2}{3}$ bể. Nếu chảy riêng thì vòi một chảy đầy bể nhanh hơn vòi hai là 5 giờ. Vậy vòi hai chảy một mình đầy bể hết thời gian là bao nhiêu?
8. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước và đầy bể sau 4 h 48 phút. Nếu chảy riêng thì vòi một chảy đầy bể nhanh hơn vòi hai là 4 h. Hỏi nếu chảy một mình thì mỗi vòi chảy đầy bể trong bao lâu?

9. Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài. Nếu bớt mỗi cạnh đi 5 m thì diện tích giảm đi 16%. Tính diện tích của hình chữ nhật lúc đầu.

(TS 10 - Tỉnh Bắc Ninh, năm học 2003-2004)

10. Tìm một số có hai chữ số, chữ số hàng chục kém chữ số hàng đơn vị là 4 đơn vị ; tổng các bình phương hai chữ số đó bằng 80.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. Gọi vận tốc xe thứ hai là x (km/h, $x > 0$), thì vận tốc xe thứ nhất là $x + 3$ (km/h).

Ta có thời gian xe (I) đi là $\frac{30}{x+3}$ (giờ);

Thời gian xe (II) đi là $\frac{30}{x}$ (giờ). Đổi 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ.

Vì xe (I) đến sớm hơn xe (II) là 30 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x+3} = \frac{1}{2}.$$

Giải ra ta được $x_1 = -12$ (loại); $x_2 = 10$ (thoả mãn).

Vậy vận tốc xe (II) là 10 km/h, vận tốc xe (I) là 13 km/h.

2. Gọi vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h, $x > 0$).

Khi đó vận tốc khi đi từ B trở về A là $x + 4$ (km/h).

Thời gian người đó đi từ A đến B hết $\frac{24}{x}$ (h).

Thời gian người đó về từ B đến A hết $\frac{24}{x+4}$ (h).

Theo đề bài thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút ($= \frac{1}{2}$ h) ta có phương trình:

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = \frac{1}{2}.$$

Giải ra ta được $x_1 = -16$ (loại); $x_2 = 12$ (thoả mãn).

Vậy vận tốc xe đạp khi đi từ A đến B là 12 km/h.

3. Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x > 0$).

Suy ra vận tốc ca nô khi xuôi dòng là $x + 4$ (km/h);

Vận tốc ca nô khi ngược dòng là $x - 4$ (km/h).

Thời gian ca nô xuôi dòng 80 km là $\frac{80}{x+4}$ (h);

Thời gian ca nô ngược dòng 72 km là $\frac{72}{x-4}$ (h).

Theo đề bài, thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 15 phút ($=\frac{1}{4}$ h)

ta có phương trình : $\frac{72}{x-4} - \frac{80}{x+4} = \frac{1}{4}$.

Giải ra ta được $x_1 = -68$ (loại) ; $x_2 = 36$ (thoả mãn).

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 36 km/h.

4. Vận tốc riêng ca nô là x (km/h, $x > 5$).

Suy ra vận tốc ca nô xuôi dòng là $x + 5$ (km/h) ; vận tốc ngược dòng $x - 5$ (km/h).

Thời gian xuôi dòng $\frac{28}{x+5}$ (giờ) ; thời gian ngược dòng $\frac{28}{x-5}$ (giờ).

Theo đề bài, ta có phương trình : $\frac{28}{x+5} + \frac{2}{3} + \frac{28}{x-5} = 3$.

Giải ra ta được $x_1 = -1$ (loại) ; $x_2 = 25$ (thoả mãn).

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 25 km/h.

5. Gọi số ha mỗi tuần dự định trồng là x (ha, $x > 0$).

Suy ra thực tế mỗi tuần trồng được $x + 5$ (ha).

Thời gian dự định trồng 75 ha rừng là $\frac{75}{x}$ (tuần).

Thời gian thực tế trồng 80 ha rừng là $\frac{80}{x+5}$ (tuần).

Theo đề bài, thực tế hoàn thành sớm 1 tuần ta có phương trình : $\frac{75}{x} - \frac{80}{x+5} = 1$.

Giải ra ta được : $x_1 = -25$ (loại) ; $x_2 = 15$ (thoả mãn).

Vậy mỗi tuần dự định trồng 15 ha.

6. Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc hết x (ngày, $x > 4$).

Suy ra thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc hết $x + 6$ (ngày).

Theo đề bài, ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$.

Giải ra ta được $x_1 = -4$ (loại) ; $x_2 = 6$ (thoả mãn).

Vậy thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc hết 6 ngày, thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc hết 12 ngày.

7. Gọi thời gian vòi hai chảy một mình đầy bể là x giờ ($x > 5$). Thời gian vòi một chảy đầy bể một mình là $x - 5$ (giờ).

Theo đầu bài, hai vòi cùng chảy trong 4 giờ thì được $\frac{2}{3}$ bể ta có phương trình :

$$4 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} \right) = \frac{2}{3}.$$

Giải phương trình ta có : $x_1 = 2$ (loại), $x_2 = 15$ (thoả mãn).

Vậy thời gian vòi hai chảy một mình đầy bể là 15 giờ.

8. Gọi thời gian vòi 1 chảy một mình đầy bể hết x (h, $x > 0$).

Suy ra thời gian vòi 2 chảy đầy bể một mình hết $x + 4$ (h).

Mỗi giờ vòi 1 chảy được $\frac{1}{x}$ (bể) ; mỗi giờ vòi 2 chảy được $\frac{1}{x+4}$ (bể).

Theo đề bài, hai vòi cùng chảy chung và đầy bể sau 4 h 48 phút ($= 4\frac{4}{5}$ h) ta có phương trình :

$$4\frac{4}{5} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} \right) = 1.$$

Giải ra ta được : $x_1 = \frac{-12}{5}$ (loại) ; $x_2 = 8$ (thoả mãn).

Vậy thời gian vòi 1 chảy đầy bể một mình hết 8 h, vòi 2 chảy đầy bể một mình hết $8 + 4 = 12$ h.

9. Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m, $x > 5$).

Suy ra chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{2}{3}x$ (m).

Diện tích hình chữ nhật là : $\frac{2}{3}x^2$ (m).

Theo đề bài, nếu bớt mỗi cạnh đi 5m thì diện tích giảm đi 16% ta có phương trình :

$$(x-5)\left(\frac{2}{3}x-5\right) = \frac{2}{3}x^2 - 16\% \cdot \frac{2}{3}x^2 \Leftrightarrow \frac{8}{75}x^2 - \frac{25}{3}x + 25 = 0.$$

Giải ra ta có : $x_1 = \frac{25}{8}$ (loại) ; $x_2 = 75$ (thoả mãn).

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 75 m, chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{2}{3} \cdot 75 = 50$ (m).

Do đó diện tích hình chữ nhật lúc đầu là $75 \cdot 50 = 3750$ (m²).

10. Số cần tìm là 48.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV. ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

Ví dụ 1. Rút gọn

$$\text{a) } A = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} ; \quad \text{b) } B = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}.$$

Giải.

$$\text{a) } A = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+1 = 2\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-2\sqrt{5}+3} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5}+1} = 1. \end{aligned}$$

Nhận xét : Khi thực hiện những bài toán có căn “chồng chất”, bạn nên phá căn bằng cách dùng công thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

Ví dụ 2. Thực hiện phép tính $\frac{2}{\sqrt{6}-2} + \frac{2}{\sqrt{6}+2} + \frac{5}{\sqrt{6}}.$

Giải.

$$\text{Ta có } \frac{2(\sqrt{6}+2)}{6-4} + \frac{2(\sqrt{6}-2)}{6-4} + \frac{5\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}+2 + \sqrt{6}-2 + \frac{5\sqrt{6}}{6} = \frac{17\sqrt{6}}{6}.$$

Nhận xét : Biểu thức chứa căn ở mẫu, bạn nên trục căn thức ở mẫu trước khi làm tiếp.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}.$

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

c) Tìm x để biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

(TS 10 - THPT Chu Văn An, Amsterdam, Hà Nội, năm học 2003 - 2004).

Giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \cdot (x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (2\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1) = x - \sqrt{x} + 1. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có : } P = x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$.

$$\text{c) } Q = \frac{2\sqrt{x}}{P} \Rightarrow Q = \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}.$$

$$\text{Ta có : } x > 0; x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ nên } Q > 0.$$

$$\text{Ta có : } Q = \frac{2x - 2\sqrt{x} + 2 - (2x - 4\sqrt{x} + 2)}{x - \sqrt{x} + 1} = 2 - \frac{2(\sqrt{x} - 1)^2}{x - \sqrt{x} + 1} < 2.$$

Do đó $0 < Q < 2$, để $Q \in \mathbb{Z}$ thì $Q = 1$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = 1 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} + 1 = 0.$$

$$\text{Giải phương trình ta được : } x_1 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

Nhận xét :

• Khi rút gọn biểu thức, nếu phân thức có thể rút gọn được bạn nên rút gọn trước, bài toán sẽ đơn giản hơn.

• Câu c, sẽ là sai lầm nếu bạn ngộ nhận x là số nguyên.

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức :

$$\text{a) } A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}; \quad \text{b) } B = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} \\ &= \sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1) = 2. \end{aligned}$$

$$b) \text{ Xét } B^3 = 2 + \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} \cdot (\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}) + 2 - \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow B^3 = 4 - 3B \Leftrightarrow B^3 + 3B - 4 = 0 \Leftrightarrow (B - 1) \cdot (B^2 + B + 4) = 0.$$

$$\text{Mà } B^2 + B + 4 = \left(B + \frac{1}{2}\right)^2 + 3\frac{3}{4} > 0 \text{ nên } B = 1.$$

Nhận xét : Khi rút gọn căn bậc cao, bạn có thể đưa về hằng đẳng thức hoặc nâng lên lũy thừa.

Ví dụ 5. Cho $xy \neq \pm \sqrt[3]{2}$. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc $x ; y$

$$P = \left(\frac{2\sqrt[3]{2} \cdot xy}{x^2 y^2 - \sqrt[3]{4}} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2xy + 2\sqrt[3]{2}} \right) \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}}.$$

(TS 10, chuyên Toán ĐHSPT Hà Nội, năm học 2009 - 2010)

Giải.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{2\sqrt[3]{2} \cdot xy}{(xy - \sqrt[3]{2})(xy + \sqrt[3]{2})} + \frac{xy - \sqrt[3]{2}}{2(xy + \sqrt[3]{2})} \right) \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{4\sqrt[3]{2} \cdot xy + (xy - \sqrt[3]{2})^2}{2 \cdot (xy - \sqrt[3]{2})(xy + \sqrt[3]{2})} \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{(xy + \sqrt[3]{2})^2 \cdot 2xy}{2 \cdot (xy - \sqrt[3]{2}) \cdot (xy + \sqrt[3]{2})^2} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}} = \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{2}} = 0. \end{aligned}$$

Vậy biểu thức của P không phụ thuộc vào $x ; y$.

Dạng 2. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = (m - 2)x + m + 3$.

a) Tìm điều kiện của m để hàm số luôn nghịch biến.

b) Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 3.

c) Tìm m để đồ thị các hàm số $y = -x + 2$; $y = 2x - 1$ và $y = (m - 2)x + m + 3$ đồng quy.

Giải.

a) Điều kiện để hàm số nghịch biến là $m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

b) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 3 tức là $x = 3$; $y = 0$
 thoả mãn : $0 = (m - 2).3 + m + 3 \Leftrightarrow 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

c) Giao điểm A của đồ thị hàm số $y = -x + 2$ và $y = 2x - 1$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Toạ độ giao điểm là $A(1 ; 1)$.

Để ba đồ thị đồng quy thì $x = 1$; $y = 1$ thoả mãn $1 = (m - 2).1 + m + 3 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy với $m = 0$ thì đồ thị ba hàm số đồng quy.

Ví dụ 2. Cho Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm A (1 ; 2) có hệ số góc k.

a) Chứng minh với mọi k đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Với $k = 2$. Chứng minh (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nhận A làm trung điểm.

Giải.

a) Phương trình đường thẳng (d) là $y = kx + 2 - k$.

Xét phương trình : $x^2 - kx + k - 2 = 0$.

Ta có $\Delta = k^2 - 4k + 8 = (k - 2)^2 + 4 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt ; hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) $k = 2$, xét phương trình $x^2 - 2x + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x = 2$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0;0)$.

$x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(2;4)$.

Mà $\frac{0+2}{2} = 1$; $\frac{0+4}{2} = 2$.

Nên A là trung điểm của OB.

Dạng 3. PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2 \quad (1) \\ x + my = 1 \quad (2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình theo tham số m.

b) Gọi nghiệm của hệ phương trình là (x ; y). Tìm các giá trị của m để $x + y = -1$.

c) Tìm đẳng thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m .

(TS 10 - THPT Hải Dương, năm học 1999 - 2000)

Giải.

a) Từ phương trình (1) có $y = mx - 2$, thay vào phương trình (2), ta được

$$x + m(mx - 2) = 1 \Leftrightarrow (1 + m^2)x = 2m + 1 \Leftrightarrow x = \frac{2m + 1}{m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow y = m\left(\frac{2m + 1}{m^2 + 1}\right) - 2 = \frac{m - 2}{m^2 + 1}.$$

Vậy với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{2m + 1}{m^2 + 1} \\ y = \frac{m - 2}{m^2 + 1} \end{cases}$.

$$b) x + y = -1 \Leftrightarrow \frac{2m + 1}{m^2 + 1} + \frac{m - 2}{m^2 + 1} = -1 \Leftrightarrow m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Vậy với $m \in \{0; -3\}$ thì hệ có nghiệm thoả mãn $x + y = -1$.

c) • $m = 0$, ta có $x = 1$; $y = -2$ nên $x + y = -1$ không phụ thuộc m .

• $m \neq 0$, từ hệ phương trình ta có: $\begin{cases} mxy - y^2 = 2y \\ x^2 + mxy = x \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = x - 2y$ là đẳng thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m .

Ví dụ 2. Giải phương trình sau :

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x + 2)^2} = 12.$$

Giải.

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x + 2)^2} = 12 \Leftrightarrow x^2 - \frac{4x^2}{x + 2} + \frac{4x^2}{(x + 2)^2} + \frac{4x^2}{x + 2} = 12$$

$$\left(x - \frac{2x}{x + 2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x + 2} = 12 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x + 2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x + 2} = 12.$$

Đặt $\frac{x^2}{x + 2} = y$, phương trình có dạng $y^2 + 4y = 12$.

Giải ra, ta có $y_1 = 2, y_2 = -6$.

- Với $y_1 = 2$, ta tìm được $x_1 = 1 + \sqrt{5}; x_2 = 1 - \sqrt{5}$.

- Với $y_2 = -6$, không tìm được x .

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 1 + \sqrt{5}, x_2 = 1 - \sqrt{5}$.

Ví dụ 3. Cho phương trình bậc hai, với tham số $m: 2x^2 - (m + 3)x + m = 0$ (1).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn :

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} x_1 x_2.$$

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x_1 - x_2|$.

(TS 10 - THPT Nghệ An, năm học 2009 - 2010)

Giải.

a) Với $m = 2$, phương trình có dạng : $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Giải ra, ta được $x_1 = 2, x_2 = 0,5$.

b) Xét $\Delta = m^2 + 6m + 9 - 8m = (m - 1)^2 + 8 > 0$ với mọi m . Nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt. Theo hệ thức Vi-ét ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+3}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{2} \end{cases}$$

Theo đề bài : $x_1 + x_2 = \frac{5}{2} x_1 x_2 \Leftrightarrow \frac{m+3}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{2} \Leftrightarrow m = 2$.

c) Xét $P^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$

$$\Rightarrow P^2 = \left(\frac{m+3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{m}{2} = \frac{m^2 - 2m + 9}{4} = \frac{(m-1)^2 + 8}{4} \geq 2.$$

$P \geq \sqrt{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{2}$ khi $m = 1$.

Dạng 4. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1. Số học sinh của một trường sau 2 năm tăng từ 500 lên 720 học sinh. Vậy trung bình hàng năm số học sinh của trường đó tăng bao nhiêu phần trăm?

Giải.

– Gọi x là số phần trăm chỉ số học sinh tăng trung bình hàng năm ($x > 0$).

– Số học sinh tăng năm đầu là $500 \cdot \frac{x}{100} = 5x$ (học sinh).

– Số học sinh tăng năm thứ hai là $(500 + 5x) \cdot \frac{x}{100} = 5x + \frac{x^2}{20}$ (học sinh).

Sau hai năm số học sinh tăng là : $720 - 500 = 220$ (học sinh).

Ta có phương trình $5x + 5x + \frac{x^2}{20} = 220 \Leftrightarrow x^2 + 200x - 4400 = 0$.

Giải ra ta có $x_1 = -220$ (loại) ; $x_2 = 20$ (thoả mãn).

Vậy hàng năm trung bình số học sinh tăng 20%.

Ví dụ 2. Một công nhân dự định làm 36 sản phẩm trong thời gian đã định. Sau khi làm được nửa số lượng được giao, người đó dừng lại nghỉ 30 phút. Vì vậy mặc dù làm thêm 2 sản phẩm mỗi giờ với nửa số sản phẩm còn lại song vẫn hoàn thành công việc chậm hơn dự kiến 12 phút. Tính năng suất dự kiến.

Giải.

Gọi năng xuất dự kiến là x (sản phẩm/giờ ; $x \in \mathbb{N}^*$).

Ta có phương trình : $\frac{18}{x} + \frac{1}{2} + \frac{18}{x+2} = \frac{36}{x} + \frac{1}{5}$.

Giải ra ta có : $x_1 = -12$ (loại) $x_2 = 10$ (thoả mãn).

Vậy năng xuất dự kiến là 10 sản phẩm/ giờ.

Ví dụ 3. Một phòng họp có 300 chỗ ngồi được xếp thành các dãy, mỗi dãy có số ghế như nhau. Nhưng người đến họp là 357 người nên phải kê thêm một hàng ghế và mỗi hàng ghế xếp thêm hai ghế . Hỏi lúc đầu có bao nhiêu hàng ghế ?

Giải.

Gọi số hàng ghế lúc đầu có x (hàng, $x \in \mathbb{N}$).

Mỗi hàng lúc đầu có $\frac{300}{x}$ ghế.

Theo đề bài, người đến họp là 357 người nên phải kê thêm một hàng ghế và mỗi hàng ghế xếp thêm hai ghế, ta có phương trình :

$$(x + 1) \cdot \left(\frac{300}{x} + 2 \right) = 357.$$

Giải ra ta có : $x_1 = \frac{15}{2}$ (loại) ; $x_2 = 20$ (thoả mãn).

Vậy lúc đầu có 20 hàng ghế.

Ví dụ 4. Một đội xe cần phải chuyên chở 150 tấn hàng. Hôm làm việc có 5 xe được điều đi làm nhiệm vụ khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 5 tấn. Hỏi đội xe ban đầu có bao nhiêu chiếc ? (Biết rằng mỗi xe chở số hàng như nhau).

(TS 10 - THPT Phú Yên, năm học 2009 - 2010)

Giải.

Gọi số xe ban đầu có x (chiếc, $x \in \mathbb{N}$, $x > 5$).

Lúc đầu, mỗi xe dự định chở là $\frac{150}{x}$ (tấn hàng).

Hôm làm việc mỗi xe phải trở là $\frac{150}{x-5}$ (tấn hàng).

Theo đề bài, mỗi xe phải chở thêm 5 tấn hàng, ta có phương trình :

$$\frac{150}{x-5} - \frac{150}{x} = 5.$$

Giải ra ta có : $x_1 = -10$ (loại) ; $x_2 = 15$ (thoả mãn).

Vậy lúc đầu có 15 chiếc xe.

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Rút gọn biểu thức

$$\text{a) } B = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} ; \quad \text{b) } D = \sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}} + \sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}.$$

2. Thực hiện phép tính

$$\text{a) } A = \frac{\sqrt{7}-5}{2} - \frac{6-2\sqrt{7}}{4} + \frac{6}{\sqrt{7}-2} + \frac{27}{4+\sqrt{7}} ;$$

$$\text{b) } C = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) \cdot (\sqrt{6}+11).$$

3. Rút gọn biểu thức

$$\text{a) } C = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}. \quad \text{b) } D = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}.$$

$$\text{4. Cho biểu thức } B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{3}{2-\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}-2}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-x} \right).$$

a) Rút gọn B.

b) Tính giá trị của B khi $x = 9 - 4\sqrt{5}$.

c) Tìm x sao cho $B \cdot (x-1) = 3\sqrt{x}$.

5. Cho biểu thức

$$A = \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} \right) + \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}.$$

Với $x \neq 8; x \neq -8; x \neq 0$. Chứng minh giá trị của A không phụ thuộc vào x.

(TS 10, chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội, năm học 2009 - 2010)

6. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 334. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình vô nghiệm.

7. Cho hàm số $y = (2m - 1)x + m + 1$ với m là tham số và $m \neq \frac{1}{2}$. Hãy xác định m trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm M (- 1 ; 1).

b) Đồ thị hàm số cắt trục tung, trục hoành lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB cân.

(TS 10 - THPT Quảng Ninh, năm học 2009 - 2010)

8. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx - y = 3 & (1) \\ 2x + my = 9 & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm các giá trị nguyên của m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất (x ; y) sao cho biểu thức $A = 3x - y$ nhận giá trị nguyên.

9. Tìm tọa độ giao điểm A và B của đồ thị hai hàm số $y = 2x + 3$ và $y = x^2$. Gọi D và C lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tính diện tích tứ giác ABCD.

(TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2006 - 2007)

10. Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m+1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -\frac{3}{2}$.

b) Tìm các giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

c) Gọi $x_1 ; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm m để

$$x_1(1-2x_2) + x_2(1-2x_1) = m^2.$$

11. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (1)
- Giải phương trình (1) với $m = 0$.
 - Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1 ; x_2 với mọi m .
 - Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 ; x_2 không phụ thuộc vào m .
 - Xác định giá trị của m sao cho phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau.
12. Giải các phương trình sau
- $x^2 + 2(\sqrt{2} - 1)x + 1 - 2\sqrt{2} = 0$.
 - $\frac{720}{x+10} = \frac{720}{x-20} - 4$.
13. Giải các phương trình sau
- $x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 20x + 16 = 0$.
 - $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$.
14. Một ô tô dự định đi hết quãng đường AB dài 150 km trong thời gian đã định. Sau khi đi được 2 giờ, người lái xe quyết định tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại, do đó đã đến B sớm hơn dự định 30 phút. Tính vận tốc ô tô đi đoạn đường đầu.
15. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể chứa không có nước thì sau 2 giờ 40 phút đầy bể. Tính xem nếu để từng vòi chảy thì mỗi vòi chảy đầy bể cần bao lâu, biết rằng để chảy một mình đầy bể thì vòi một cần nhiều thời gian hơn vòi hai là 4 giờ.
16. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 720 m^2 , nếu tăng chiều dài thêm 6 m và giảm chiều rộng đi 4 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính kích thước (chiều dài và chiều rộng) của mảnh vườn.

(TS 10 - THPT Quảng Trị, năm học 2009 - 2010)

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

- Đáp số: a) $B = -2\sqrt{3}$; b) $D = 2\sqrt{3}$.
- Đáp số: a) $A = 12 - \sqrt{7}$; b) $C = -115$.
- Đáp số: a) $C = 4$; b) $D = 3$.
- Đáp số

a) TXĐ : $x > 0$; $x \neq 4$. Kết quả : $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}$.

b) $\sqrt{x} = \sqrt{5} - 2$. Thay vào ta được $B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$.

c) $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

5. Đáp số $A = 2$.

6. Đáp số

a) Với $m = 1$, nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 2002 \\ y = 2001 \end{cases}$.

b) $m = \frac{2}{3}$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

7. Đáp số : a) $m = 1$; b) $m \in \{1; 0\}$.

8. Đáp số

a) Với $m = 1$, nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x = \frac{3m+9}{m^2+2} \\ y = \frac{9m-6}{m^2+2} \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $A = 3x - y = \frac{33}{m^2+2}$.

Để $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow m^2 + 2 \in U(33)$.

Từ đó tìm được $m \in \{1; -1; 3; -3\}$.

9. Đáp số : $A(-1; 1)$; $B(3; 9)$.

$S_{ABCD} = 20$ (đơn vị diện tích).

10. Đáp số

a) $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm trái dấu là $ac < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

c) $m \in \{0; -2\}$.

11. a) $x_1 = 1$; $x_2 = -3$.

b) $\Delta' = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

c) Hệ thức liên hệ giữa x_1 ; x_2 không phụ thuộc vào m là :
 $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 4$.

d) $m = 1$.

12. a) $x_1 = 1$; $x_2 = 1 - 2\sqrt{2}$.

b) $x_1 = -70$; $x_2 = 80$.

13. a) $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}; -3 - \sqrt{13}; -3 + \sqrt{13} \right\}$.

b) Đặt $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = y > 0$, phương trình có dạng : $y = y^2 - 20$.

Giải ra ta có $y = -4$ (loại), $y = 5$ (thoả mãn).

Với $y = 5$, giải ra ta được $x_1 = 3$ (thoả mãn), $x_2 = 143$ (loại).

14. Gọi vận tốc dự định là x (km/h ; $x > 0$).

Ta có phương trình : $2 + \frac{150 - 2x}{x + 2} + \frac{1}{2} = \frac{150}{x}$.

Giải ra ta có : $x_1 = 20$ (thoả mãn) ; $x_2 = -30$ (loại).

Vậy vận tốc dự định là 20 km/h.

15. Gọi thời gian vùi hai chày một mình đây bể hết x (giờ, $x > 2\frac{2}{3}$).

Ta có phương trình : $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x} = \frac{3}{8}$.

Giải ra ta có $x_1 = 4$ (thoả mãn), $x_2 = -\frac{8}{3}$ (loại).

16. Đáp số

Kích thước hình chữ nhật là 30 m và 24 m.

CHƯƠNG III

GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

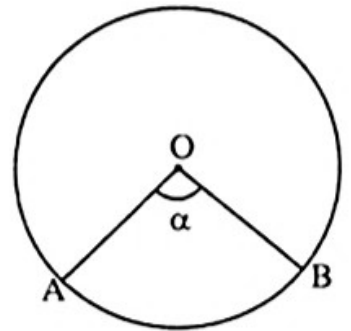
§1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

Ví dụ : $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm (h.11).

- Nếu $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ thì cung nằm bên trong góc được gọi là *cung nhỏ* và cung nằm bên ngoài góc được gọi là *cung lớn*.
- Nếu $\alpha = 180^\circ$ thì mỗi cung là một nửa đường tròn.
- Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn.



Hình 11

2. Số đo cung

- Số đo cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn).
- Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

Chú ý : "Cung không" có số đo bằng 0° và cung cả đường tròn có số đo bằng 360° .

3. So sánh hai cung

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau :

- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.
- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

4. Khi nào thì $\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB}$?

Nếu điểm C là một điểm nằm trên cung AB thì :

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB}.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC Ở TÂM, SỐ ĐO CỦA CUNG TRÒN

Phương pháp giải

- Áp dụng định lý tổng các góc trong của tam giác, tứ giác.
- Để tính số đo của cung nhỏ, ta tính số đo góc ở tâm tương ứng.
- Để tính số đo của cung lớn ta lấy 360° trừ đi số đo của cung nhỏ.

Ví dụ 1. Cho hình vuông ABCD. Gọi O là tâm đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D.

- Tính số đo góc ở tâm $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$.
- Tính số đo cung nhỏ AB, CD.

Giải. (h.12)

- Gọi O giao điểm AC và BD.

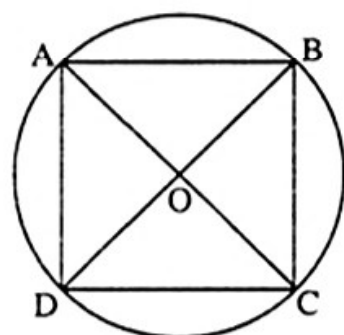
ABCD là hình vuông $\Rightarrow OA = OB = OC = OD$.

Vậy O là tâm đường tròn đi qua A, B, C, D.

ABCD là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ (tính chất) $\Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

- $\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AB} = 90^\circ$;

$$\widehat{COD} = 90^\circ \Rightarrow \text{sđ } \widehat{CD} = 90^\circ.$$



Hình 12

Ví dụ 2. Cho điểm S ở ngoài đường tròn (O ; R) kẻ tiếp tuyến SA. Đoạn thẳng SO cắt đường tròn tại B. Biết rằng góc $\widehat{ASO}$ bằng 35° . Tính số đo cung AB.

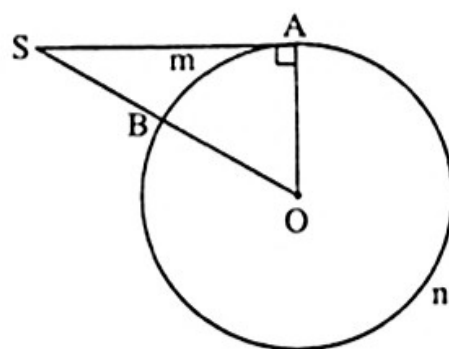
Giải. (h.13)

SA là tiếp tuyến $\Rightarrow \triangle SAO$ vuông tại A

$$\Rightarrow \widehat{ASO} + \widehat{AOS} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOS} = 55^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{AmB} = 55^\circ ; \text{sđ } \widehat{AnB} = 305^\circ.$$



Hình 13

Ví dụ 3. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại S biết $\widehat{ASB} = 60^\circ$.

a) Tính số đo cung lớn AB.

b) Lấy C bất kì thuộc cung nhỏ AB, vẽ tiếp tuyến với đường tròn tại C cắt SA, SB tại D, E ; OD, OE cắt cung nhỏ AB tại I, K. Chứng tỏ số đo $\widehat{IK}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm C.

Giải. (h.14)

a) SA ; SB là hai tiếp tuyến

$$\Rightarrow \widehat{SAO} = 90^\circ ; \widehat{SBO} = 90^\circ .$$

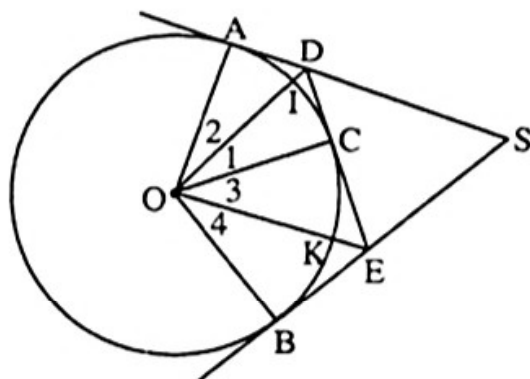
Xét tứ giác SAOB có :

$$\widehat{SAO} + \widehat{SBO} + \widehat{ASB} + \widehat{AOB} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{AB}_{\text{nhỏ}} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{AB}_{\text{lớn}} = 240^\circ .$$



Hình 14

$$\text{b) } DA ; DC \text{ là tiếp tuyến} \Rightarrow \widehat{O_1} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} .$$

$$EB ; EC \text{ là tiếp tuyến} \Rightarrow \widehat{O_3} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} .$$

$$\Rightarrow \widehat{DOE} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \text{sđ } \widehat{IK} = 60^\circ \text{ không phụ thuộc vào vị trí điểm C.}$$

Dạng 2. SO SÁNH CUNG

Phương pháp giải

Để so sánh hai cung của một đường tròn (hoặc hai đường tròn bằng nhau) ta thường :

So sánh hai góc ở tâm tương ứng : Cung nào ứng với góc ở tâm lớn hơn thì cung ấy lớn hơn. Hai cung ứng với hai góc ở tâm bằng nhau thì bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn đồng tâm (O ; R) và (O ; r) với $R > r$. Tiếp tuyến của đường tròn (O ; r) tại M cắt đường tròn (O ; R) tại A ; B. Tia OM cắt đường tròn (O ; R) tại C. So sánh $\widehat{CA}$ và $\widehat{CB}$.

Giải. (h.15)

AB là tiếp tuyến của (O ; r) tại M $\Rightarrow OM \perp AB$.

Xét $\triangle AOB$ có $OA = OB = R$;

$OM \perp AB \Rightarrow OM$ là đường cao
 $\Rightarrow OM$ là phân giác.

$$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BOM} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{CB}.$$

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD có bốn đỉnh A, B, C, D cùng thuộc $(O; R)$ biết rằng $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$; $AB = R$; $AD = R\sqrt{2}$. So sánh $\widehat{BC}$ và $\widehat{CD}$.

Giải. (h.16)

$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow A, B, C, D$ cùng thuộc $(O; R)$ có đường kính AC.

$$AB = R \Rightarrow AB = BO = AO (= R)$$

$$\Rightarrow \triangle AOB \text{ đều} \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ \quad (1).$$

$$AO^2 + DO^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

$$AD^2 = 2R^2 \Rightarrow AO^2 + DO^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow \triangle AOD \text{ vuông} \Rightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 90^\circ \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \widehat{BOC} > \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{BC} > \widehat{CD}.$$

Ví dụ 3. Cho dây $AB < 2R$ của đường tròn $(O; R)$. Trên AB lấy điểm M, N sao cho $AM = MN = NB$. Tia OM, ON cắt cung nhỏ AB tại C, D.

a) Chứng minh cung AC bằng cung BD.

b) So sánh cung AC và cung CD.

Giải. (h.17)

$$a) OA = OB; AM = BN; \widehat{OAM} = \widehat{OBN}$$

$$\text{nên } \triangle AOM = \triangle BON \text{ suy ra } \widehat{AOM} = \widehat{BON}$$

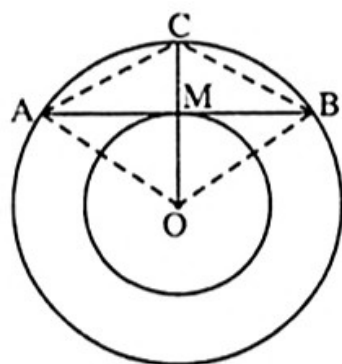
$$\text{hay } \widehat{AC} = \widehat{BD}.$$

b) Kẻ OI là phân giác $\widehat{AON}$, ta có:

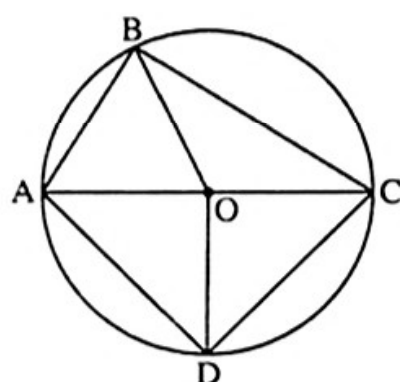
$$\frac{IN}{IA} = \frac{ON}{OA} < 1 \Rightarrow \frac{IN}{AN} < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Mà } \frac{MN}{AN} = \frac{1}{2} \text{ nên I nằm giữa M, N.}$$

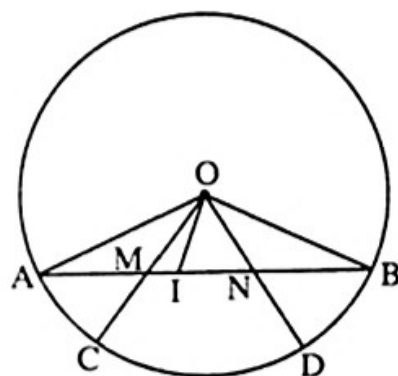
$$\text{Suy ra } \widehat{NOI} < \widehat{NOM} \text{ hay } \widehat{AOM} < \widehat{AOI} < \widehat{COD} \text{ do đó } \widehat{AC} < \widehat{CD}.$$



Hình 15



Hình 16



Hình 17

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho đường tròn $(O; R)$ và $(O; \frac{R\sqrt{3}}{2})$ đồng tâm. Tiếp tuyến của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tính số đo cung nhỏ AB của đường tròn $(O; R)$.
2. Cho đường tròn $(O; R)$ và một dây AB sao cho số đo cung lớn AB gấp đôi số đo cung nhỏ AB. Tính độ dài dây AB.
3. Cho tam giác ABC đều. Vẽ nửa đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB và AC tại D và E. Chứng minh rằng $\widehat{BD} = \widehat{DE} = \widehat{EC}$.
4. Cho dây AB của $(O; R)$. Tính số đo các cung nhỏ và cung lớn AB trong các trường hợp sau :
 a) $AB = R$; b) $AB = R\sqrt{2}$; c) $AB = R\sqrt{3}$.
5. Gọi M, N, P, Q là bốn điểm nằm trên đường tròn (O) . Các tiếp tuyến ở bốn điểm trên cắt nhau tạo thành tứ giác ABCD. Chứng minh rằng $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^\circ$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.18) AB tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại I, nên $AB \perp OI$, mà $\triangle AOB$ cân tại O suy ra $\widehat{AOB} = 2.\widehat{IOB}$.

$$\text{Mà } \cos \widehat{IOB} = \frac{OI}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ suy ra } \widehat{IOB} = 30^\circ.$$

$$\text{Do vậy } \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AB} = 60^\circ.$$

2. (h.19) $\text{sđ } \widehat{AB}_{\text{lớn}} + \text{sđ } \widehat{AB}_{\text{nhỏ}} = 360^\circ$.

$$\text{Mà } \text{sđ } \widehat{AB}_{\text{lớn}} = 2.\text{sđ } \widehat{AB}_{\text{nhỏ}} \text{ nên } \text{sđ } \widehat{AB}_{\text{nhỏ}} = 120^\circ.$$

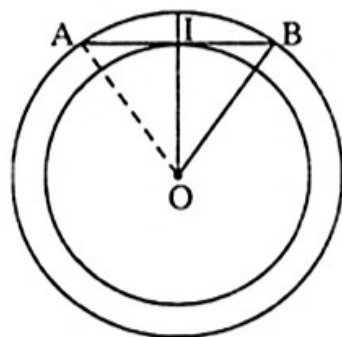
$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ.$$

$$\text{Vẽ } OH \perp AB, \text{ ta có } \widehat{AOH} = \widehat{HOB} = 60^\circ$$

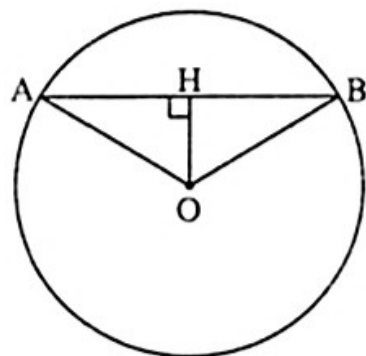
$$\text{và } AH = HB = \frac{1}{2} AB.$$

$$\text{Tam giác } AOH \text{ có } \widehat{AHO} = 90^\circ ;$$

$$\widehat{AOH} = 60^\circ \text{ nên } OH = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} R.$$



Hình 18



Hình 19

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có :

$$AH^2 = AO^2 - OH^2 = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $AB = 2.AH = R\sqrt{3}.$

3. (h.20) Tam giác BOD có $OB = OC$; $\widehat{OBD} = 60^\circ$ nên tam giác BOD đều, suy ra $\widehat{BOD} = 60^\circ$.

Tương tự , ta có : tam giác COE đều nên $\widehat{COE} = 60^\circ$.

Từ đó ta có : $\widehat{DOE} = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{BOD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOC} (= 60^\circ)$.

Vậy $\widehat{BD} = \widehat{DE} = \widehat{EC}.$

4. Đáp số :

- a) 60° ; 300° .
- b) 90° ; 270° .
- c) 120° ; 240° .

5. (h.21) AM, AN là tiếp tuyến nên $\widehat{AON} = \frac{1}{2}\widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{sdMN}.$

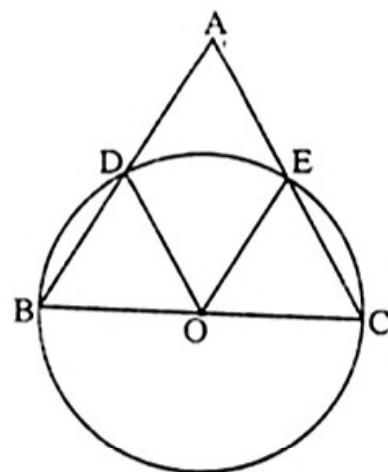
Tương tự , ta có : $\widehat{BON} = \frac{1}{2}\widehat{NOP} = \frac{1}{2}\widehat{sdNP}$;

$\widehat{COQ} = \frac{1}{2}\widehat{sdPQ}$; $\widehat{DOQ} = \frac{1}{2}\widehat{sdMQ}.$

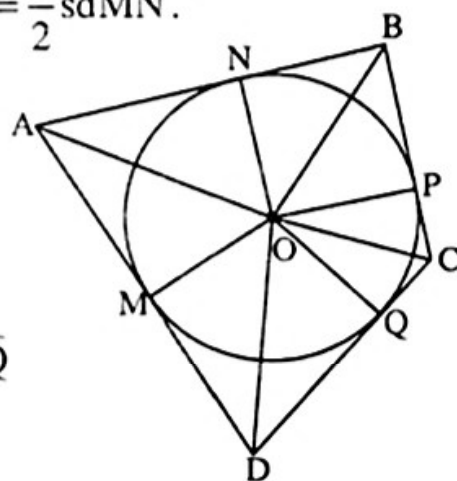
Ta có : $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = \widehat{AON} + \widehat{NOB} + \widehat{COQ} + \widehat{DOQ}$

$$= \frac{1}{2}(\widehat{sdMN} + \widehat{sdNP} + \widehat{sdPQ} + \widehat{sdMQ})$$

$$= \frac{1}{2}.360^\circ = 180^\circ.$$



Hình 20



Hình 21

§2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

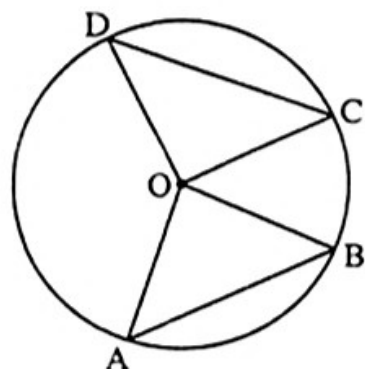
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lí 1

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :

- a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
- b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

Trong hình 22 : $\widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow AB = CD$.



Hình 22

2. Định lí 2

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :

- a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
- b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

Trong hình 22 : $\widehat{AB} > \widehat{CD} \Leftrightarrow AB > CD$.

3. Định lí bổ sung

- (Bài 13 SGK). Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
- (Bài 14 SGK). Trong một đường tròn :
 - a) Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì chia đôi dây căng cung. Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì qua điểm chính giữa cung căng dây đó.
 - b) Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

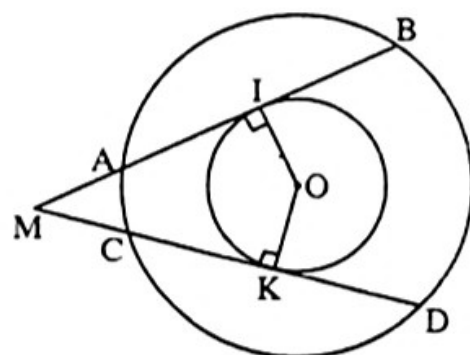
Dạng 1. CHỨNG MINH HAI CUNG BẰNG NHAU

Phương pháp giải

Vận dụng định lí 1. Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :

- a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
- b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $(O; r)$ (với $R > r$). Điểm M ở ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ tiếp tuyến MI, MK với đường tròn $(O; r)$ cắt $(O; R)$ tại $A; B$ và C, D . Chứng minh $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.



Hình 23

Giải. (h.23)

Ta có : $OI \perp AB$; $OK \perp CD$ mà $OI = OK$
nên $AB = CD$. Vậy $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Qua A và B vẽ hai dây AC và BD song song với nhau. So sánh $\widehat{AC}$ và $\widehat{BD}$.

Giải. (h.24)

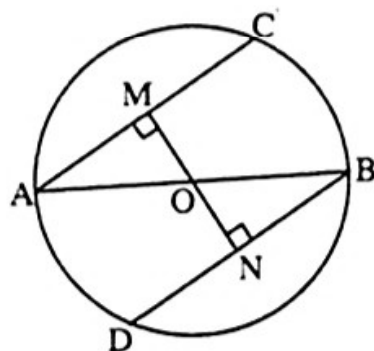
Vẽ $OM \perp AC$ và $ON \perp BD$.

Xét tam giác AMO và tam giác BNO có
 $\widehat{OMA} = \widehat{ONB} = 90^\circ$;

$\widehat{MAO} = \widehat{NBO}$ (so le trong) ; $OA = OB$

nên $\triangle OAM = \triangle ONB$ suy ra $OM = ON$

$\Rightarrow AC = BD$. Vậy $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.



Hình 24

Dạng 2. CHỨNG MINH HAI CUNG KHÔNG BẰNG NHAU

Phương pháp giải

- Chứng minh hai dây căng cung (cung nhỏ) không bằng nhau, dây nào lớn hơn thì căng cung lớn hơn.
- Hoặc chứng minh hai góc ở tâm tương ứng không bằng nhau, góc nào lớn hơn thì có cung bị chắn lớn hơn.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi M, N, P là trung điểm các cạnh AB, BC, CA . Biết rằng $OM < ON < OP$. So sánh các cung AB, BC, CA .

Giải. (h.25)

M, N, P là trung điểm các cạnh AB, BC, CA nên $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$.

Mà $OM < ON < OP \Rightarrow AB > BC > AC$.

Vậy : $\widehat{AB} > \widehat{BC} > \widehat{AC}$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng góc A bằng 60° , góc B bằng 70° . So sánh các góc AOB, BOC, COA.

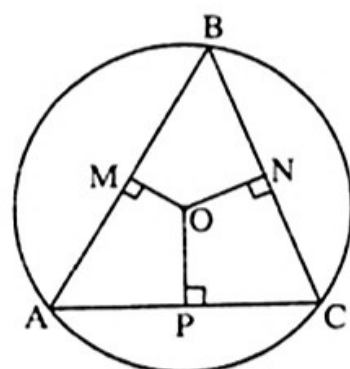
Giải. (h.26)

Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\widehat{C} = 50^\circ$.

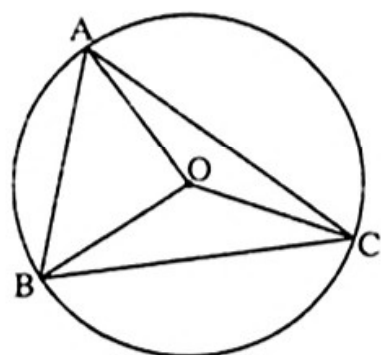
Suy ra $\widehat{C} < \widehat{A} < \widehat{B}$ do đó $AB < BC < AC$

$\Rightarrow \widehat{AB} < \widehat{BC} < \widehat{AC}$.

Vậy $\widehat{AOB} < \widehat{BOC} < \widehat{COA}$.



Hình 25



Hình 26

Dạng 3. TÍNH ĐỘ DÀI DÂY CUNG

Phương pháp giải

Để tính độ dài dây cung, chúng ta dựa vào :

- Đường kính vuông góc với dây cung thì chia đôi dây cung ấy.
- Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
- Định lí Py-ta-go, hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông.

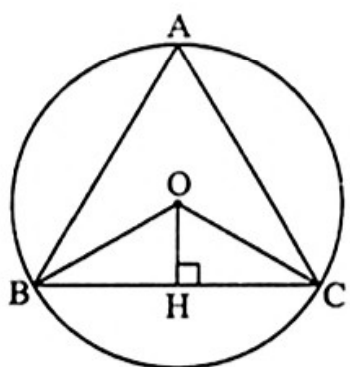
Ví dụ 1. Trên đường tròn (O ; R) lấy ba điểm A, B, C sao cho $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CA}$. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC theo R.

Giải. (h.27)

Ta có : $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CA} \Rightarrow AB = BC = CA$
 $\Rightarrow \triangle ABC$ đều.

Mặt khác $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CA} \Rightarrow \widehat{BC} = 120^\circ$.

Vẽ $OH \perp BC$.



Hình 27

Xét $\triangle BOC$ có $BO = CO (= R) \Rightarrow \triangle BOC$ cân $\Rightarrow OH$ là đường cao đồng thời là phân giác $\Rightarrow \widehat{BOH} = 60^\circ$.

Xét $\triangle BOH$ có $\widehat{BHO} = 90^\circ \Rightarrow HB = OB \cdot \sin \widehat{BOH}$.

$$\Rightarrow HB = R \cdot \sin 60^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = R \cdot \sqrt{3}.$$

Vậy $AB = BC = CA = R\sqrt{3}$.

Ví dụ 2. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = R\sqrt{2}$. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AB . Tính độ dài AM .

Giải. (h.28)

Xét $\triangle OAB$ có $OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$;

$AB^2 = 2R^2 \Rightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$, vậy $\triangle OAB$ vuông tại O .

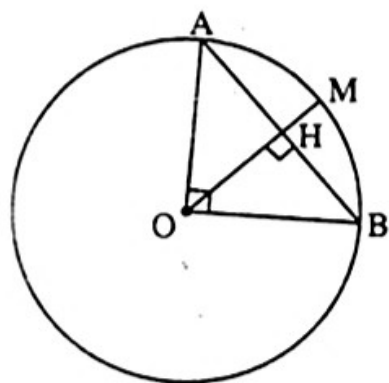
Gọi giao điểm OM và AB là H , ta có $OH \perp AB$,

$$HA = HB \Rightarrow HA = HB = HO = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow HM = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{2R - R\sqrt{2}}{2}.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác AHM , ta có :

$$AM^2 = \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2R - R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow AM = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$



Hình 28

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trên đường tròn (O) có hai cung AB và CD sao cho $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$. Chứng minh $AB < 2CD$.
2. Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD vuông góc với nhau. Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AD$.

3. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB < 2R$. Lấy M, N thuộc dây AB sao cho $AM = MN = NB$. Các tia OM, ON cắt đường tròn tại C và D .
- a) Chứng minh $AC = BD$. b) So sánh AC và CD .
4. Trên đường tròn (O) lấy bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự đó sao cho $AB > CD$ và tia BA và tia CD cắt nhau tại M . Vẽ đường tròn $(O; OM)$ cắt tia MB, MC tại N, P . So sánh $\widehat{MN}$ và $\widehat{MP}$ của $(O; OM)$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.29) Gọi I là điểm chính giữa của cung AB ,

ta có $\widehat{AI} = \widehat{BI} = \widehat{CD}$ nên $AI = BI = CD$.

Xét tam giác ABI có $AB < AI + BI$
(bất đẳng thức tam giác).

Vậy $AB < 2CD$.

2. (h.30) Kẻ đường kính CE , ta có $\widehat{CBE} = \widehat{CDE} = 90^\circ$.

Có OM là đường trung bình của $\triangle CBE$

suy ra $OM = \frac{1}{2} BE$.

Mặt khác $AB \parallel DE$ ($\perp CD$) nên $\widehat{AD} = \widehat{BE}$.

Hay $AD = BE$ do đó $OM = \frac{1}{2} AD$.

3. (h.31) a) $\triangle AOM = \triangle BON$ (c.c.c) nên $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$.

Do đó $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ nên $AC = BD$.

b) Lấy E sao cho M là trung điểm OE

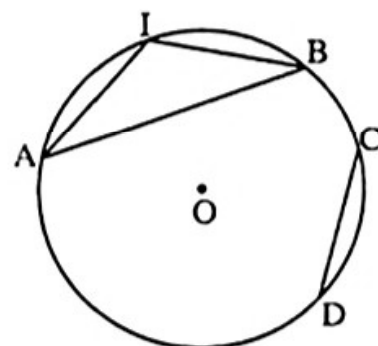
thì $AONE$ là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{OEN}$; $AO = EN$

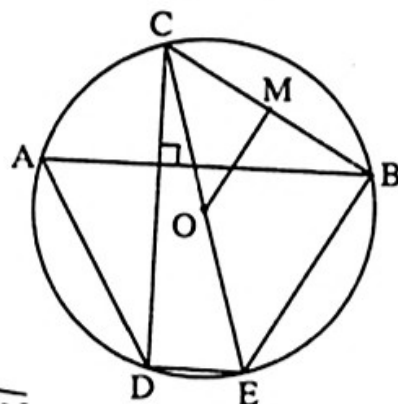
mà $AO > ON$ nên $EN > ON \Rightarrow \widehat{EON} > \widehat{OEN}$

$\Rightarrow \widehat{EON} > \widehat{AOE}$.

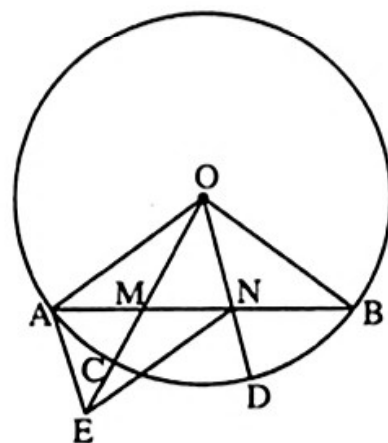
Hay $\widehat{CD} > \widehat{AC} \Rightarrow AC < CD$.



Hình 29



Hình 30

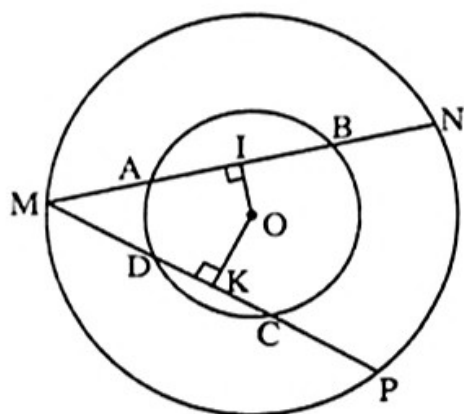


Hình 31

4. (h.32) Vẽ $OI \perp AB$; $OK \perp CD$.

Xét (O) có $AB > CD$ nên $OI < OK$

Xét (O ; OM) có $OI < OK$ nên $MN > MP$,
do đó $\widehat{MN} > \widehat{MP}$.



Hình 32

§3. GÓC NỘI TIẾP

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

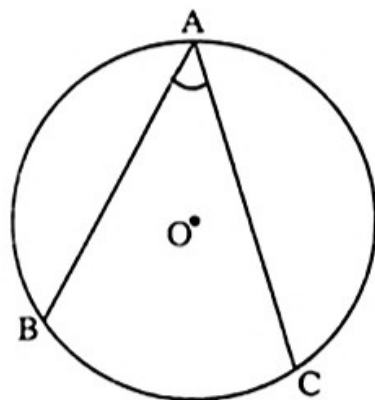
1. **Định nghĩa.** Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Trong hình 33 thì :

$\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp ;

$\widehat{BC}$ là cung bị chắn.



Hình 33

2. **Định lí.** Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.
3. **Hệ quả.** Trong một đường tròn :
- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
 - Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
 - Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
 - Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.
4. **Hệ thức lượng trong đường tròn**

Bài 23 (SGK). Cho đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M kẻ hai đường thẳng. Đường thẳng thứ nhất cắt (O) tại A và B. Đường thẳng thứ hai cắt (O) tại C và D thì ta có hệ thức $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

(Hệ thức đúng cả hai trường hợp điểm M nằm bên trong và bên ngoài đường tròn)

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU HOẶC SO SÁNH CÁC GÓC

Phương pháp giải

Ta có thể dựa vào :

- Định lí và hệ quả của góc nội tiếp.
- Hai góc cùng bằng góc thứ ba.
- Hai góc cùng phụ với một góc.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH. Kẻ đường kính AD.

a) Tính góc $\widehat{ACD}$.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Giải. (h.34)

a) AD là đường kính của (O) nên $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

b) $\widehat{ACD} = 90^\circ$ nên $\triangle ACD$ vuông tại C do đó :
 $\widehat{DAC} + \widehat{ADC} = 90^\circ$ (1)

AH là đường cao nên $\triangle ABH$ vuông tại H do đó

$$\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^\circ \quad (2)$$

Mặt khác $\widehat{ABH} = \widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$).

Từ (1) và (2) ta có : $\widehat{DAC} = \widehat{BAH}$.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một dây cung AP. Tia AP cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn ở T. Chứng minh :

a) $\widehat{AOP} = 2.\widehat{ATB}$.

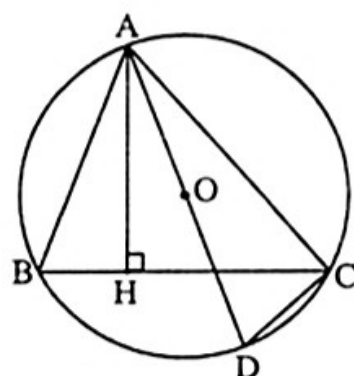
b) $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$.

Giải. (h.35)

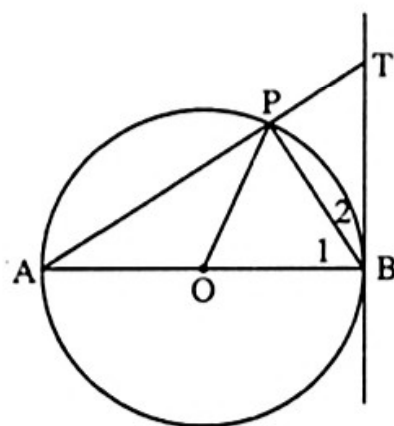
Ta có $\widehat{ATB} = \widehat{B_1}$ (cùng phụ với $\widehat{B_2}$).

Mà $\widehat{B_1} = \frac{1}{2}.\widehat{AOP}$ (hệ quả).

Nên $\widehat{ATB} = \frac{1}{2}.\widehat{AOP}$ hay $\widehat{AOP} = 2.\widehat{ATB}$.



Hình 34



Hình 35

b) $AO = PO$ nên ΔAOP cân tại O suy ra : $\widehat{PAO} = \widehat{OPA}$.

Mà $\widehat{PAO} = \widehat{PBT}$ (cùng phụ với $\widehat{B_1}$) suy ra $\widehat{OPA} = \widehat{PBT}$.

Dạng 2. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

Bạn có thể dùng hệ quả của góc nội tiếp.

Ví dụ 1. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) . Các cung nhỏ AB, BC, AC có số đo lần lượt là $x + 10^\circ, x + 20^\circ, x + 30^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

Giải.

Ta có $sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{BC} + sđ\widehat{AC} = 360^\circ$

nên $x + 10^\circ + x + 20^\circ + x + 30^\circ = 360^\circ$

$$\Rightarrow x = 100^\circ$$

do đó $sđ\widehat{AB} = 110^\circ, sđ\widehat{BC} = 120^\circ, sđ\widehat{AC} = 130^\circ$.

Vậy $\widehat{C} = 55^\circ, \widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} = 65^\circ$.

Ví dụ 2. Cho hình 36, biết BD là đường kính của (O) , $\widehat{BAC} = 40^\circ$. Tính số đo của góc $\widehat{CBD}$.

Giải. (h.36)

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (hệ quả góc nội tiếp) nên $\widehat{BDC} = 40^\circ$;

BD là đường kính, nên $\widehat{BCD} = 90^\circ$ nên ΔBCD vuông.

Do đó $\widehat{CBD} + \widehat{BDC} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{CBD} = 50^\circ$.

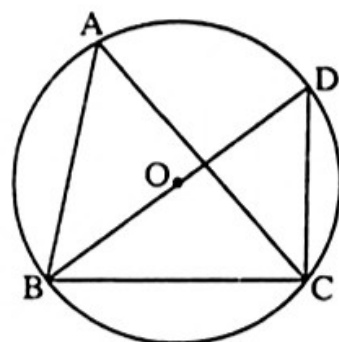
Ví dụ 3. Cho ΔABC nhọn có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính BC tâm O cắt AB ; AC tại D ; E . Chứng minh $\widehat{ODE} = 60^\circ$.

Giải. (h.37)

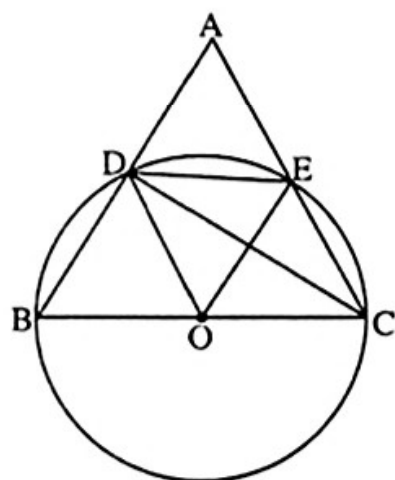
$\widehat{BDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

nên $\widehat{ADC} = 90^\circ$ do đó ΔADC vuông tại D .

Ta có $\widehat{DAC} + \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 30^\circ$.



Hình 36



Hình 37

Mặt khác $\widehat{DCE} = \frac{1}{2} \widehat{DOE}$ (hệ quả góc nội tiếp) nên $\widehat{DOE} = 60^\circ$.

Ta có $OD = OE$ (bán kính) do đó $\triangle ODE$ đều.

Vậy $\widehat{ODE} = 60^\circ$.

Dạng 3. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Phương pháp giải

Dựa vào : – Góc nội tiếp bằng 90° thì chắn nửa đường tròn.
– Hai đầu đường kính và tâm đường tròn thẳng hàng.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BH, CK cắt đường tròn (O) tại D ; E. Chứng minh D, O, E thẳng hàng.

Giải. (h.38)

BH $\perp$ AC nên $\triangle ABH$ vuông tại H.

Mà $\widehat{BAH} = 45^\circ$ nên $\widehat{ABH} = 45^\circ$

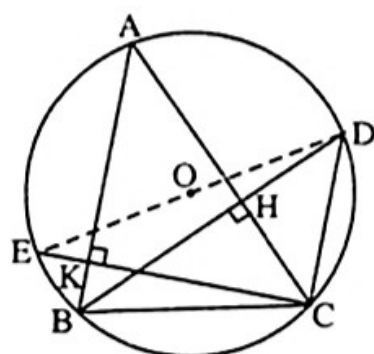
Mặt khác $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AD}$)
nên $\widehat{ACD} = 45^\circ$. (1)

CK $\perp$ AB nên $\triangle ACK$ vuông tại K.

Mà $\widehat{CAK} = 45^\circ$ nên $\widehat{ACK} = 45^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\widehat{DCE} = 90^\circ$ nên DE là đường kính.

Vậy D, O, E thẳng hàng.



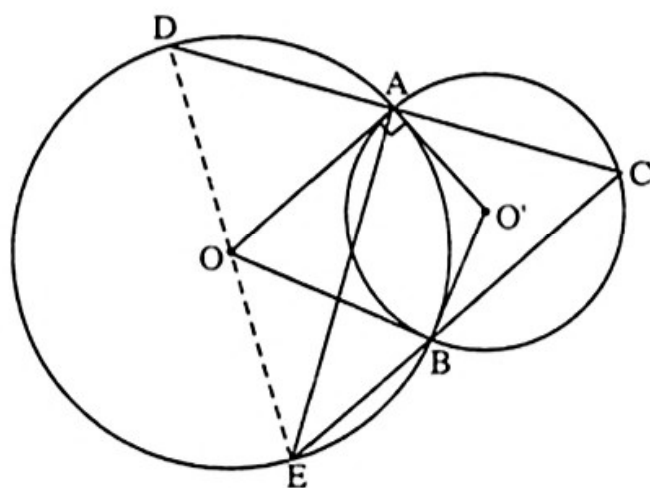
Hình 38

Ví dụ 2. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho $\widehat{AOO'} = 90^\circ$, lấy điểm C thuộc (O') và ở bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tia CA, CB cắt đường tròn (O) tại D, E. Chứng minh rằng D ; O ; E thẳng hàng.

Giải. (h.39)

Xét (O), ta có $\widehat{AEB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ (1)

Xét (O'), ta có : $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AO'B}$ (2)



Hình 39

Từ (1) và (2) ta có : $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot (\widehat{AOB} + \widehat{AO'B}) = 90^\circ$.

Nên $\widehat{EAC} = 90^\circ$, do đó $\widehat{DAE} = 90^\circ$.

Vậy D, O, E thẳng hàng.

Dạng 4. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Phương pháp giải

- Sử dụng định lý và hệ quả góc nội tiếp.
- Sử dụng tính chất tam giác vuông.

Ví dụ 1. Trong đường tròn (O) có dây AC và BD vuông góc với nhau tại I. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh $IM \perp AD$.

Giải. (h.40)

Gọi N là giao điểm của MI và AD ;

$AC \perp BD$ tại I nên $\triangle BCI$ vuông tại I.

Mà $MB = MC \Rightarrow MI = MB$ (tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông) nên $\triangle MBI$ cân.

Do đó $\widehat{MIB} = \widehat{MBI}$ mà $\widehat{NID} = \widehat{BIM}$ (đối đỉnh)
do đó $\widehat{MBI} = \widehat{NID}$.

Ta có : $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$).

Mà $\widehat{BCA} + \widehat{MBI} = 90^\circ$ ($\triangle BCI$ vuông tại I)

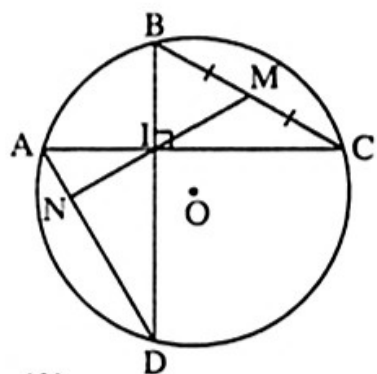
nên từ (1), (2) ta có $\widehat{NID} + \widehat{BDA} = 90^\circ$ hay $\triangle IND$ vuông tại N. Vậy $MN \perp AD$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc BAC cắt đường tròn (O) tại D. Đường tròn tâm D, bán kính DB cắt đường thẳng AB tại Q (khác B), cắt đường thẳng AC tại P (khác C). Chứng minh $AO \perp PQ$.

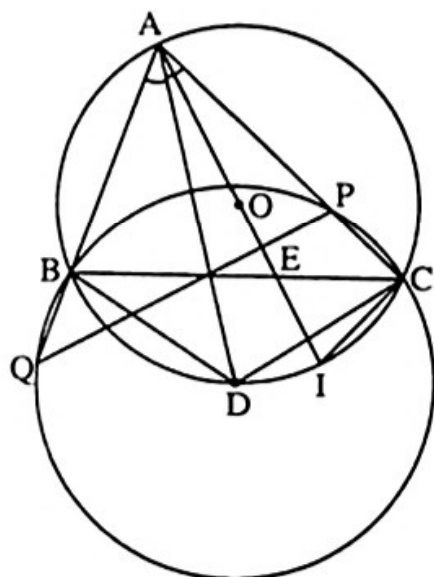
Giải. (h.41)

Gọi I và E là giao điểm của AO với đường tròn tâm O và PQ.

Ta có : $\widehat{QBC} = \widehat{CPQ}$ suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{APQ}$ mà



(1) Hình 40



Hình 41

$$\widehat{ABC} = \widehat{AIC} \text{ nên } \widehat{APQ} = \widehat{AIC}.$$

$$\text{Do } \widehat{AIC} + \widehat{EAC} = 90^\circ \text{ nên } \widehat{AEP} = 90^\circ.$$

Vậy $AO \perp PQ$.

Dạng 5. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU HOẶC MỘT ĐOẠN THẲNG BẰNG TỔNG HAI ĐOẠN KHÁC

Phương pháp giải

- Chứng minh hai đoạn thẳng đó là hai cạnh của một tam giác cân
- Chứng minh một đoạn thẳng bằng tổng hai đoạn khác : Ta chia đoạn thẳng đó thành hai phần và chứng minh hai phần này lần lượt bằng hai đoạn thẳng đã cho.

Ví dụ 1. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AD, BE của ΔABC cắt nhau tại H. AD cắt đường tròn tại I. Chứng minh $DH = DI$.

Giải. (h.42)

$$\widehat{IAC} = \widehat{CBI} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{CI} \text{)};$$

$$\widehat{IAC} = \widehat{EBC} \text{ (phụ với góc } C \text{)}.$$

$$\text{Do đó } \widehat{IBC} = \widehat{EBC}.$$

Xét ΔHBI có BD là đường phân giác ;

BD là đường cao ($AD \perp BC$).

Nên ΔHBI cân tại B, do đó BD là trung tuyến.

Vậy $DH = DI$.

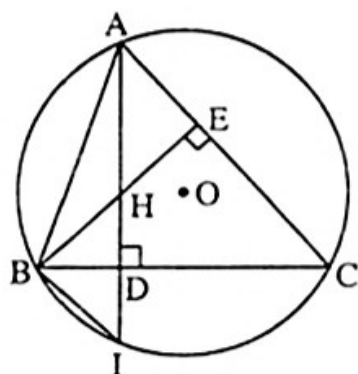
Ví dụ 2. Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O). Lấy M nằm trên cung BC. Chứng minh rằng : $AM = BM + CM$.

Giải. (h.43)

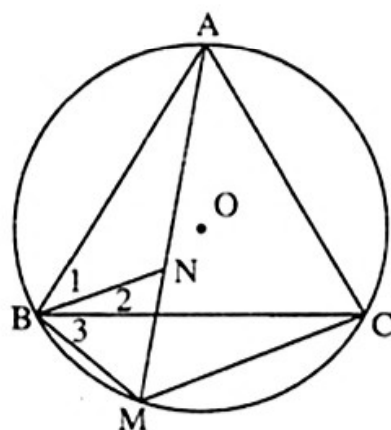
Trên dây MA lấy N sao cho $MN = BM$ (1)

$$\text{Ta có } \widehat{BMN} = \widehat{BCA} \text{ (góc nội tiếp chắn } \widehat{AB} \text{)}$$

$$\text{nên } \widehat{BMN} = 60^\circ \text{ (do } \widehat{BCA} = 60^\circ \text{)}.$$



Hình 42



Hình 43

ΔBMN có $MN = BM$; $\widehat{BMN} = 60^\circ$.

Nên ΔBMN đều, do đó $BN = BM$; $\widehat{MBN} = 60^\circ$.

Ta có $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 60^\circ$ (do ΔABC đều) ;

$\widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 60^\circ$ (do ΔBMN đều), nên $\widehat{B_1} = \widehat{B_3}$.

Xét ΔABN và ΔCBM có :

$NB = MB$ (chứng minh trên) ; (1)

$\widehat{B_1} = \widehat{B_3}$ (chứng minh trên) ;

$AB = CB$ (ΔABC đều) ;

Nên $\Delta ABN = \Delta CBM$ (c.g.c) do đó $AN = CM$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AM = BM + CM$.

Dạng 6. CHỨNG MINH BIỂU THỨC TÍCH BẰNG NHAU

Phương pháp giải

- Chứng minh tam giác đồng dạng, sau đó sử dụng tính chất tam giác đồng dạng.
- Sử dụng hệ thức lượng tam giác vuông, hệ thức lượng trong đường tròn.

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn (O) ; (O') cắt nhau tại A, B . Trên đoạn AB lấy điểm I . Qua I kẻ dây MN của đường tròn (O) , kẻ dây CD của đường tròn (O') . Chứng minh $IM.IN = IC.ID$.

Giải. (h.44)

ΔAIM và ΔNIB có :

$\widehat{AMI} = \widehat{NBI}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AN}$) ;

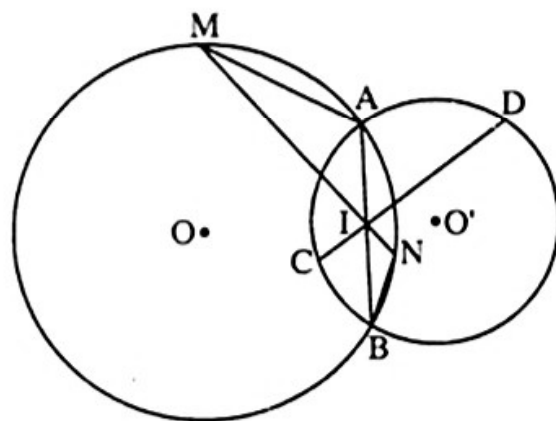
$\widehat{AIM} = \widehat{BIN}$ (đối đỉnh).

Do đó ΔAIM đồng dạng với ΔNIB (g.g).

Suy ra $\frac{AI}{NI} = \frac{MI}{BI}$ do đó $AI.BI = MI.NI$.

Chứng minh tương tự, ta có : $AI.BI = CI.DI$.

Vậy $MI.NI = CI.DI$.



Hình 44

– Tam giác ADI và tam giác ACB có $\widehat{ADI} = \widehat{ACB}$; $\widehat{DAI} = \widehat{CAB}$.

Vậy tam giác ADI đồng dạng với tam giác ACB suy ra

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DI}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DI \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BI + AC \cdot DI$

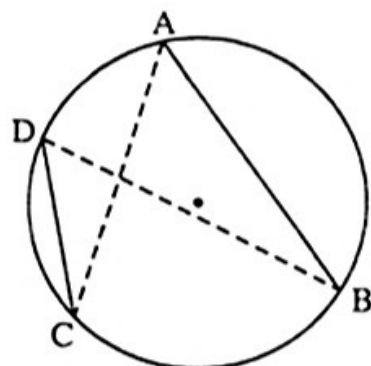
$$\Rightarrow AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD .$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R) có $AB = 8\text{cm}$, $AC = 15\text{cm}$; đường cao $AH = 5\text{cm}$ và $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Tính bán kính R.
- Cho lục giác ABCDEF có các đỉnh thuộc đường tròn (O). Biết $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$. Chứng tỏ CD song song với AF.
- Cho $\triangle ABC$. Đường tròn (O) đường kính AB cắt đường tròn (O') đường kính AC tại giao điểm thứ hai là H. Một đường thẳng (d) quay quanh A cắt đường tròn (O) và (O') tại M ; N sao cho A nằm giữa M và N.
 - Chứng minh H thuộc cạnh BC và BCNM là hình thang vuông.
 - Chứng minh tỉ số $\frac{HM}{HN}$ không đổi.
- Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn tại I. Gọi AD là đường kính của đường tròn (O). Tia phân giác góc BAC cắt đường tròn tại M. Chứng minh rằng :
 - $OM \perp BC$.
 - AM là tia phân giác của góc IAD.
 - $ID \parallel BC$.
- Hai dây AB và CD cắt nhau tại G nằm trong đường tròn (O). Đường thẳng chứa tia phân giác của góc AGD cắt AD tại M và BC tại N.

Chứng minh : $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB}$.
- Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$) có AM là đường trung tuyến ; AD là đường phân giác. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB, AC tại E và F. Chứng minh rằng $BE = CF$.

7. **Đố.** Một chiếc hồ to hình tròn có bốn điểm A, B, C, D (như hình 47). Một chiếc ca nô xuất phát từ A chạy thẳng đến B. Đồng thời cùng lúc đó có một chiếc thuyền máy chạy thẳng từ D đến C. Biết rằng ca nô và thuyền cùng đến đích một lúc và có vận tốc không đổi. Điều gì xảy ra nếu ca nô chạy từ A đến C và thuyền chạy từ D đến B?



Hình 47

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.48) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O ; R).

Xét tam giác AHB và ACD có $\widehat{AHB} = \widehat{ACD} (= 90^\circ)$;
 $\widehat{ABH} = \widehat{ADC}$.

Vậy $\triangle AHB \sim \triangle ACD$ (g.g) nên

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{5}{15} = \frac{8}{AD}$$

$$\Rightarrow AD = 24\text{cm} \Rightarrow R = 12\text{cm}.$$

2. $AB \parallel DE$ nên $\widehat{BCD} = \widehat{AFE}$ suy ra $\widehat{BFD} = \widehat{ACE}$.

$BC \parallel EF$ nên $\widehat{CDE} = \widehat{BAF}$ suy ra $\widehat{BDF} = \widehat{EAC}$.

Do đó $\triangle BFD \sim \triangle ECA$ (g.g).

Vậy $\widehat{DBF} = \widehat{AEC} \Rightarrow \widehat{DEF} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{DAF} \Rightarrow CD \parallel AF$.

3. (h.49) a) Sử dụng góc nội tiếp chắn nửa đường tròn bằng 90° , ta có :

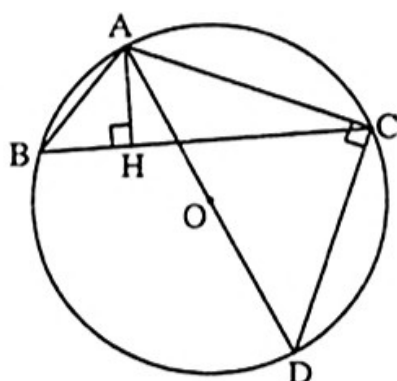
- $\widehat{AHB} = 90^\circ$; $\widehat{AHC} = 90^\circ$ suy ra B, H, C thẳng hàng, hay H thuộc BC.

- $\widehat{BMA} = 90^\circ$, $\widehat{CNA} = 90^\circ$ suy ra $BM \parallel CN$ hay BMNC là hình thang vuông.

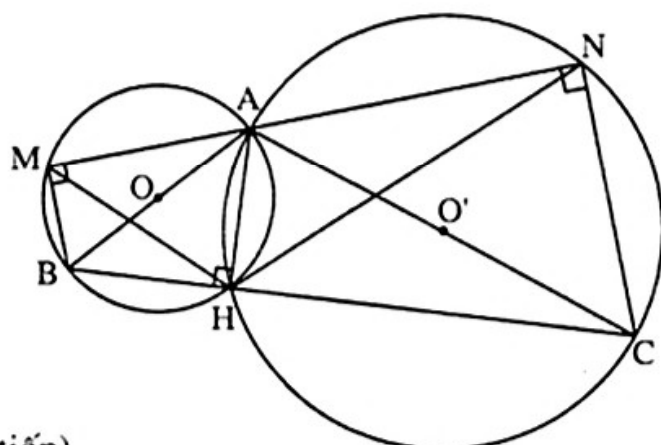
b) Xét (O) có : $\widehat{ABH} = \widehat{AMH}$ (góc nội tiếp).

Xét (O') có : $\widehat{ACH} = \widehat{ANH}$ (góc nội tiếp).

Suy ra $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle HMN$ nên $\frac{HM}{HN} = \frac{AB}{AC}$ không đổi.



Hình 48



Hình 49

4. (h.50) Gợi ý

a) $\widehat{BM} = \widehat{CM}$, suy ra điều phải chứng minh.

b) $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{DAC}$, suy ra điều phải chứng minh.

c) ID và BC cùng vuông góc với AI.

5. (h.51) Áp dụng hệ thức lượng trong đường tròn, ta có $AG \cdot GB = CG \cdot GD$ nên

$$\frac{AG}{GD} = \frac{GC}{GB}.$$

Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác ta có :

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AG}{GD}; \frac{CN}{NB} = \frac{CG}{GB}. \text{ Vậy } \frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB}.$$

6. (h.52) Áp dụng hệ thức lượng trong đường tròn, ta có :

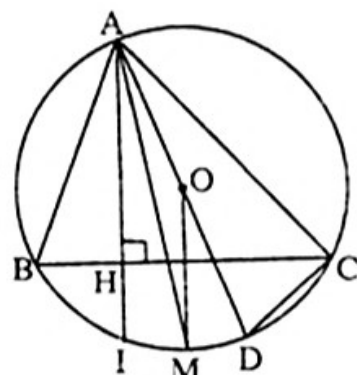
$$BE \cdot BA = BD \cdot BM; CF \cdot CA = CD \cdot CM.$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{CF} \cdot \frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD}.$$

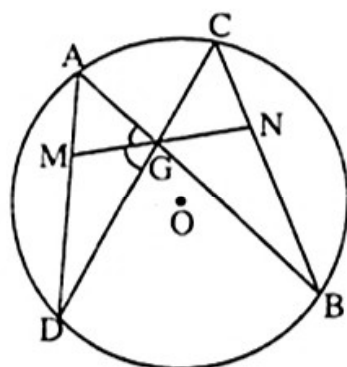
Mà AD là đường phân giác nên $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$

$$\text{Do đó } \frac{BE}{CF} = 1 \text{ hay } BE = CF.$$

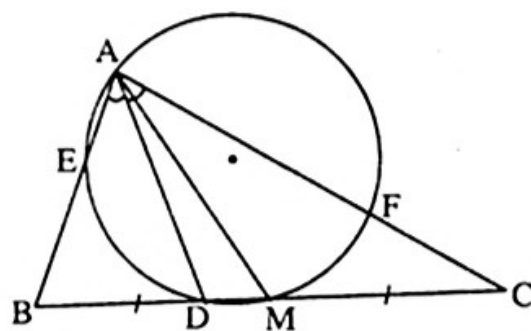
7. Sẽ va vào nhau.



Hình 50



Hình 51



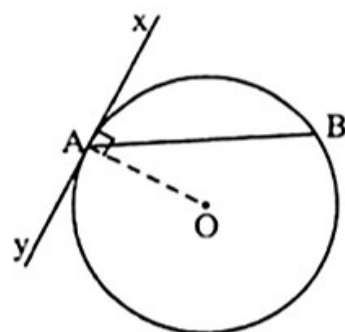
Hình 52

§4. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

- Định nghĩa :** Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và một cạnh là một tia tiếp tuyến còn cạnh kia chứa dây cung của đường tròn đó.

Theo hình 53 $\widehat{BAx}$ và $\widehat{BAy}$ là hai góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.



Hình 53

2. **Định lí :** Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo góc của cung bị chắn.

3. **Hệ quả :** Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

4. **Định lí đảo**

Bài 30 (SGK). Nếu góc BAx (với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn (hình 53).

5. **Hệ thức lượng trong đường tròn**

Bài 34 (SGK). Cho đường tròn (O) và điểm M nằm bên ngoài đường tròn đó. Qua điểm M kẻ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB, thì ta có $MT^2 = MA.MB$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU HOẶC SO SÁNH CÁC GÓC

Phương pháp giải

Ta có thể dựa vào :

- Định lí và hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.
- Hai góc cùng bằng góc thứ ba.
- Hai góc cùng phụ với một góc.

Ví dụ. Cho nửa đường tròn đường kính AB trên tia đối của tia AB lấy điểm M. Kẻ tiếp tuyến MN với nửa đường tròn (N là tiếp điểm). Vẽ NH vuông góc với AB. Chứng minh $\widehat{MNA} = \widehat{ANH}$.

Giải. (h.54)

$\widehat{ANB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

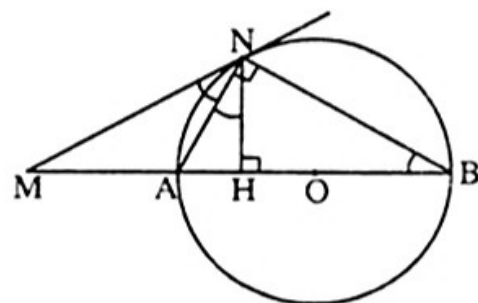
Nên $\triangle ANB$ vuông tại N do đó :
 $\widehat{NBA} + \widehat{NAB} = 90^\circ$.

Ta có $NH \perp AB$ nên $\widehat{ANH} + \widehat{NAH} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{ANH} = \widehat{NBA}$ (cùng phụ với $\widehat{NAH}$).

Mặt khác : $\widehat{MNA} = \widehat{NBA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Vậy $\widehat{MNA} = \widehat{ANH}$.



Hình 54

Dạng 2. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

Ta sử dụng :

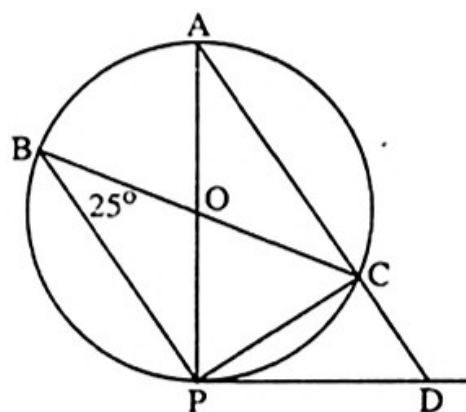
Tính chất và hệ quả của góc tạo bởi giữa tia tiếp tuyến và dây cung.

Ví dụ 1. Cho hình 55 : PD là tiếp tuyến, AP, BC là đường kính, khi đó số đo $\widehat{PDA}$ là bao nhiêu?

Giải. (h.55)

$\widehat{PBC} = \widehat{CPD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung), nên $\widehat{CPD} = 25^\circ$.

PA là đường kính, nên $\widehat{ACP} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{DCP} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{PDA} = 65^\circ$.



Hình 55

Ví dụ 2. Cho hình 56 có Ax, By là tiếp tuyến. Tính số đo góc $\widehat{ACO}$.

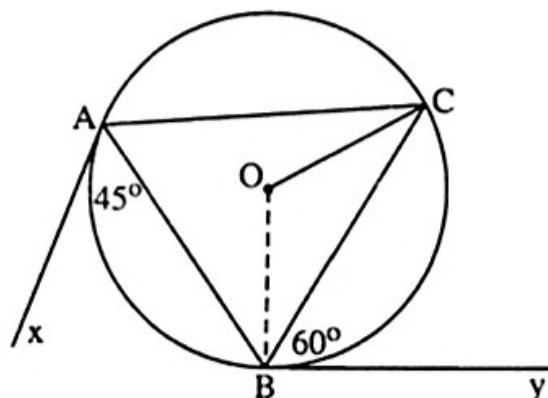
Giải.

$\widehat{ACB} = \widehat{BAx}$ (hệ quả) nên $\widehat{ACB} = 45^\circ$.

By là tiếp tuyến, nên $\widehat{OBy} = 90^\circ$, do đó
 $\widehat{OBC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

$OB = OC$, nên $\triangle OBC$ cân tại O, do đó :
 $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} \Rightarrow \widehat{OCB} = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{ACO} = \widehat{ACB} - \widehat{OCB} = 15^\circ$.



Hình 56

Dạng 3. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Phương pháp giải

Dựa vào dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song : Hai đường thẳng tạo với đường thẳng thứ ba

- Một cặp góc so le trong bằng nhau thì hai đường thẳng đó song song
- Một cặp góc đồng vị bằng nhau thì hai đường thẳng đó song song.

Ví dụ. Cho hai đường tròn (O) ; (O') tiếp xúc trong tại A . Qua A vẽ dây AB ; AC của đường tròn (O) và chúng cắt (O') theo thứ tự tại D ; E . Chứng minh $BC \parallel DE$.

Giải. (h.57)

Qua A vẽ tiếp tuyến chung xy của hai đường tròn.

Xét đường tròn (O) có :

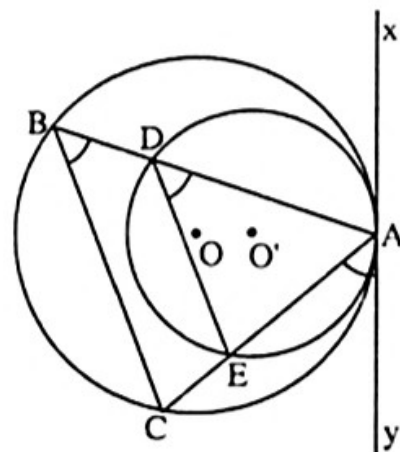
$$\widehat{ABC} = \widehat{CAy} \text{ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung).}$$

Xét đường tròn (O') có : $\widehat{ADE} = \widehat{CAy}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Do đó $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$, hai góc này ở vị trí đồng vị. Vậy $BC \parallel DE$.

Nhận xét.

- Kết luận trên vẫn đúng trong trường hợp hai đường tròn tiếp xúc ngoài.
- Nếu bài toán có hai đường tròn tiếp xúc nhau thì việc kẻ tiếp tuyến chung là điều cần thiết để tạo sự liên kết giữa các góc với nhau.



Hình 57

Dạng 4. CHỨNG MINH MỘT TIA LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp giải

- Chứng minh tia này vuông góc với bán kính tại mút của bán kính.
- Dùng phương pháp phản chứng.

Ví dụ. Cho đường tròn $(O ; R)$ và dây AB ($AB < 2R$). Gọi P là điểm chính giữa cung nhỏ AB . Gọi C là điểm bất kỳ thuộc dây AB . PC cắt đường tròn tại D . Chứng minh PA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACD$.

Giải. (h.58)

$$\widehat{AP} = \widehat{BP} \text{ nên } \widehat{ADP} = \widehat{BAP} \text{ (hệ quả góc nội tiếp)} \quad (1)$$

Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa P vẽ tia Ax là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔACD

nên $\widehat{CAx} = \widehat{CDA}$ (2) (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây).

Từ (1) và (2) ta có : $\widehat{CAx} = \widehat{CAP}$.

Do đó hai tia AP, Ax trùng nhau.

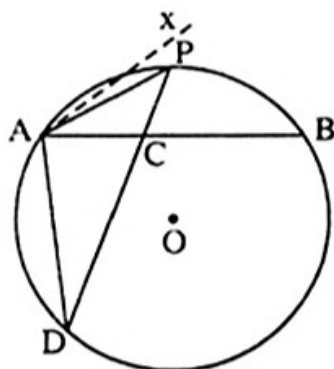
Vậy AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔACD .

Nhận xét.

Qua bài này, bạn có thể nhận biết được một tia là tiếp tuyến của đường tròn thông qua bài sau : Cho tam giác ACD. Trên tia đối của tia CD lấy điểm P. Tia AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD nếu thoả mãn một trong hai điều kiện sau :

a) góc ADC bằng góc PAC ;

b) $PA^2 = PC.PD$.



Hình 58

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho đường thẳng (d) không cắt đường tròn (O) vẽ đường kính CD vuông góc với (d) tại I. Kẻ tiếp tuyến IA với đường tròn (O). Đường thẳng CA cắt (d) tại B. Chứng minh $IA = IB$.
2. Cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{B} = 60^\circ$. Qua D vẽ một đường thẳng nằm ngoài hình thoi nhưng cắt các đường thẳng AB và BC tại E và F. Gọi K là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KDF.
3. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) tiếp xúc trong tại A. Dây BC của đường tròn (O ; R) tiếp xúc với (O' ; r) tại M. Chứng minh rằng AM là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.
4. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Vẽ các đường tròn đường kính AB, AC. Gọi D là giao điểm của đường tròn đường kính AC với đường vuông góc với AC tại B. Từ C kẻ tiếp tuyến CK với đường tròn đường kính AB. Chứng minh $CD = CK$.
5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại C và D. Một đường thẳng tiếp xúc với (O) và (O') tại A và B. Đường thẳng CD cắt AB tại M. Chứng minh $MA = MB$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.59) Hướng dẫn

Ta có $\widehat{B_2} = \widehat{D_1}$ (cùng phụ với góc C).

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$, $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{B_2} = \widehat{A_2}$.

Ta có điều phải chứng minh.

2. (h.60) Tam giác ADE đồng dạng với tam giác CFD (g.g), suy ra

$$\frac{AD}{CF} = \frac{AE}{CD} \Leftrightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{CF} \quad (1)$$

Mặt khác $\widehat{ACF} = \widehat{CAE} = 120^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tam giác ACE đồng dạng với tam giác CFA (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CFA} = \widehat{ACE}$.

Xét tam giác ACK và tam giác AFC có $\widehat{CAF}$ chung và $\widehat{CFA} = \widehat{ACK}$.

Do đó tam giác ACK đồng dạng với tam giác AFC.

$$\text{Suy ra } \frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow AC^2 = AK \cdot AF.$$

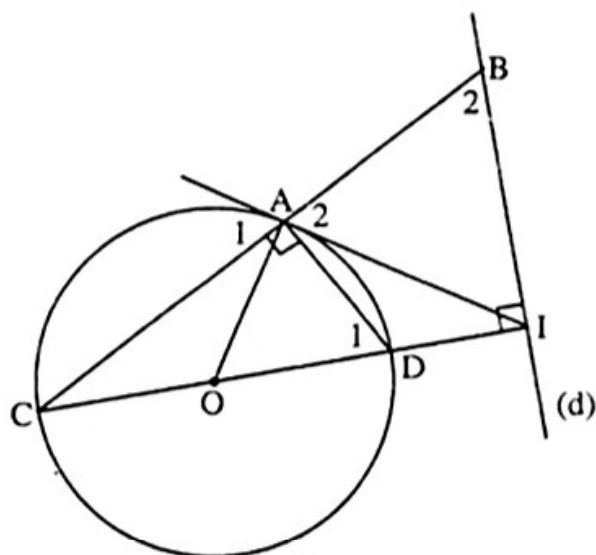
Hay $AD^2 = AK \cdot AF$. Chứng tỏ AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KDF.

3. (h.61) Kẻ tiếp tuyến chung Ax cắt đường thẳng BC tại F.

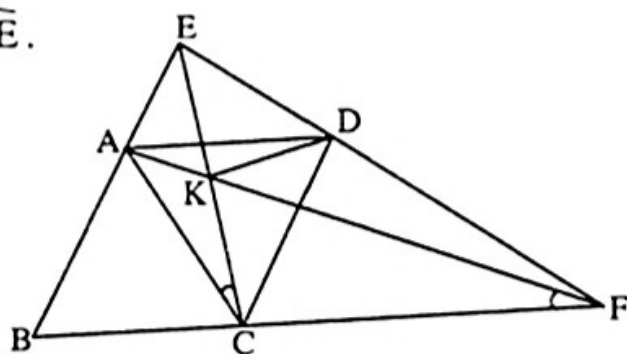
Ta có : $\widehat{FAC} = \widehat{ABC}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Mà $\widehat{FMA} = \widehat{A_1} + \widehat{ABM}$ (tính chất góc ngoài tam giác)

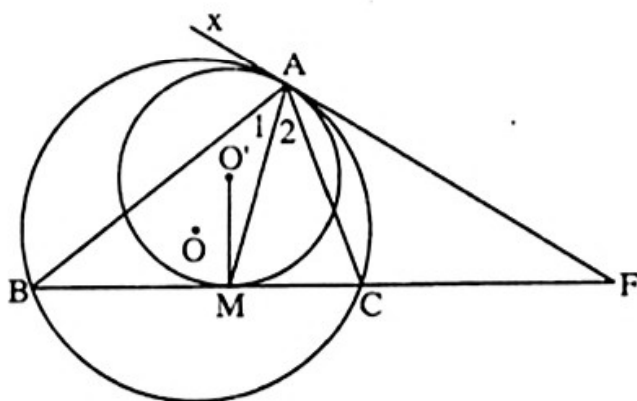
$$\Rightarrow \widehat{FAM} = \widehat{A_2} + \widehat{FAC}.$$



Hình 59



Hình 60



Hình 61

Mặt khác $\widehat{FMA} = \widehat{FAM}$ (vì tam giác FAM cân tại F).

Nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ hay AM là tia phân giác góc BAC.

4. (h.62) Hướng dẫn

Áp dụng hệ thức lượng trong đường tròn ta có :

$$CK^2 = CB.CA \quad (1)$$

Tam giác ADC vuông tại D, có $DB \perp AC$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có :

$$CD^2 = CB.CA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CK = CD$.

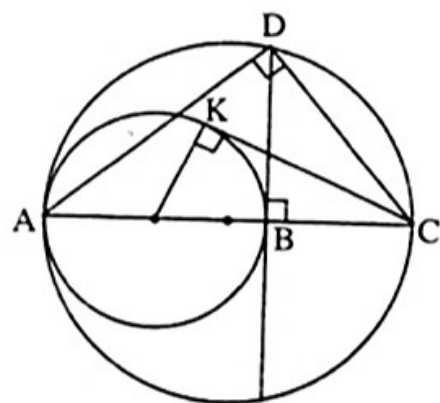
5. (h.63) Hướng dẫn

Áp dụng hệ thức lượng trong đường tròn, ta có :

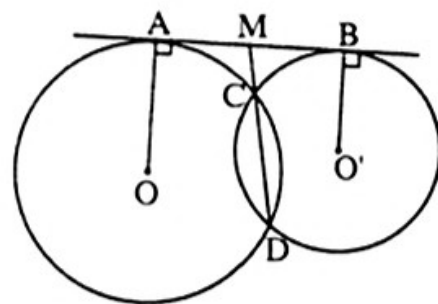
$$MA^2 = MC.MD ;$$

$$MB^2 = MC.MD.$$

Nên $MA = MB$.



Hình 62



Hình 63

§5. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

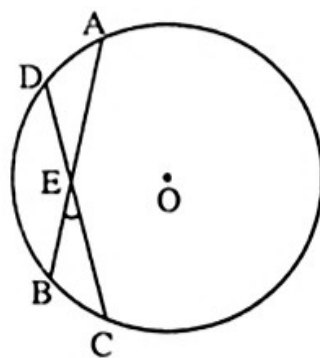
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn

Trong hình 64 thì :

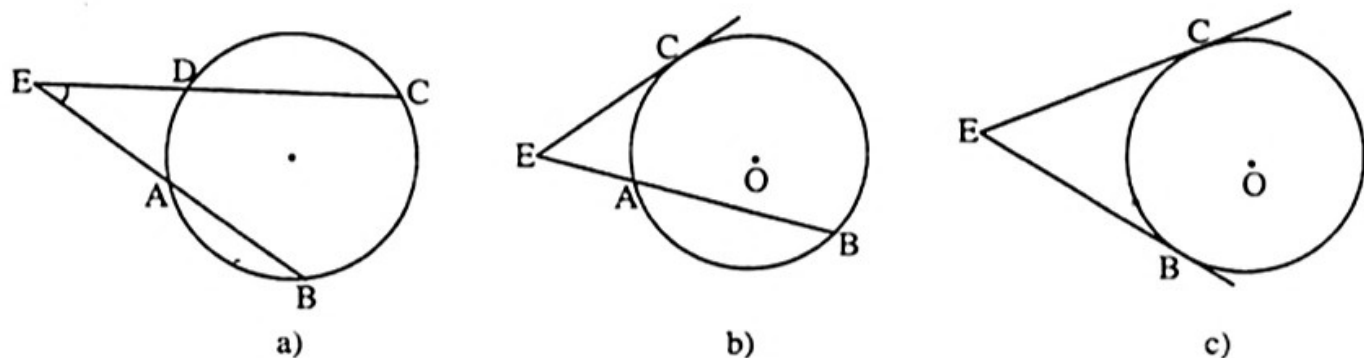
$\widehat{BEC}$ có đỉnh E nằm bên trong đường tròn (O), gọi là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

Định lí. Số đo góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.



Hình 64

2. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn



Hình 65

Trong hình 65 (a, b, c) thì :

$\widehat{BEC}$ gọi là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.

Định lý. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC, SỐ ĐO CUNG

Phương pháp giải

Biểu diễn số đo các góc theo số đo của các cung bị chắn rồi tính các số đo góc hoặc cung đó.

Ví dụ 1. Cho hình 66. Biết số đo cung AC là 30° . Tìm số đo của cung BD.

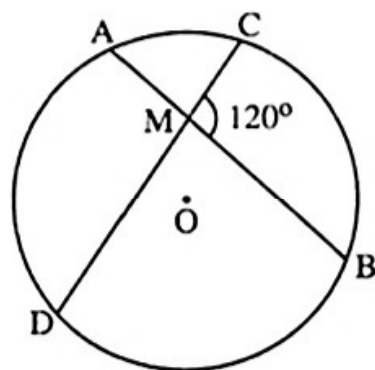
Giải.

$$\widehat{AMC} = 60^\circ \text{ (do } \widehat{CMB} = 120^\circ \text{),}$$

$$\text{mà } \widehat{AMC} = \frac{\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{BD}}{2}$$

$$\text{nên } \text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{BD} = 120^\circ.$$

$$\text{Do đó } \text{sđ}\widehat{BD} = 90^\circ.$$



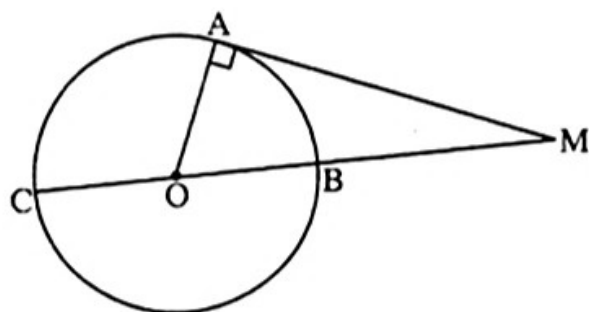
Hình 66

Ví dụ 2. Cho hình 67. Biết BC là đường kính, và số đo cung AC là 120° . Tính số đo của $\widehat{AMC}$.

Giải.

$$\text{sd}\widehat{AC} = 120^\circ, \text{ nên } \text{sd}\widehat{AB} = 60^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } \widehat{AMC} &= \frac{\text{sd}\widehat{AC} - \text{sd}\widehat{AB}}{2} \\ &= \frac{120^\circ - 60^\circ}{2} = 30^\circ. \end{aligned}$$



Hình 67

Dạng 2. CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU HOẶC MỘT HỆ THỨC GIỮA CÁC GÓC

Phương pháp giải

Tính số đo các góc theo số đo của các cung bị chắn rồi so sánh các số đo đó.

Ví dụ 1. Từ điểm A ở bên ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD. Vẽ dây BM vuông góc với tia phân giác góc BAC tại H cắt CD tại E. Chứng minh BM là đường phân giác góc CBD.

Giải. (h.68)

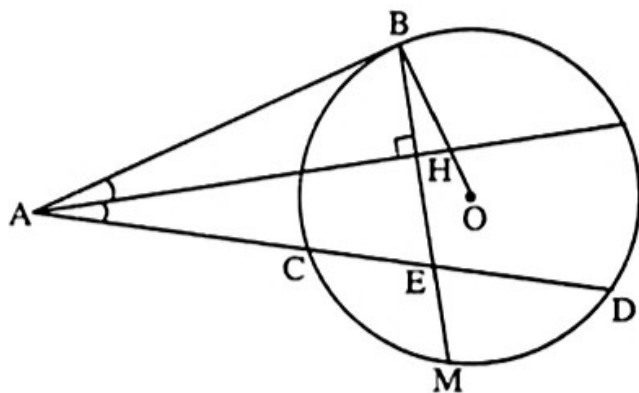
Tam giác ABE có AH là đường phân giác, đồng thời là đường cao, nên tam giác ABE cân tại đỉnh A.

$$\text{Do đó } \widehat{ABE} = \widehat{AEB}.$$

$$\text{Mà } \widehat{ABE} = \frac{\text{sd}\widehat{BM}}{2} = \frac{\text{sd}\widehat{BC} + \text{sd}\widehat{CM}}{2};$$

$$\widehat{AEB} = \frac{\text{sd}\widehat{BC} + \text{sd}\widehat{MD}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \text{sd}\widehat{CM} = \text{sd}\widehat{MD}. \text{ Vậy } \widehat{CBM} = \widehat{MBD}.$$



Hình 68

Ví dụ 2. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O), kẻ tiếp tuyến PA. Từ trung điểm B của PA kẻ cát tuyến BCD. Các đường thẳng PC, PD cắt đường tròn theo thứ tự tại E; F. Chứng minh $\widehat{DCE} = \widehat{DPE} + \widehat{CAF}$.

Giải. (h.69)

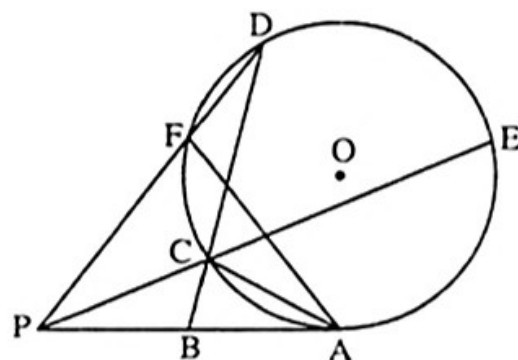
$$\widehat{DCE} = \frac{sd\widehat{DE}}{2} \text{ (góc nội tiếp)} \quad (1)$$

$$\widehat{DPE} = \frac{sd\widehat{ED} - sd\widehat{FC}}{2} \text{ (góc có đỉnh ngoài đường tròn);}$$

$$\widehat{CAF} = \frac{sd\widehat{CF}}{2} \text{ (góc nội tiếp).}$$

$$\text{Do đó } \widehat{CAF} + \widehat{DPE} = \frac{sd\widehat{ED} - sd\widehat{FC} + sd\widehat{CF}}{2} = sd\frac{\widehat{DE}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DCE} = \widehat{DPE} + \widehat{CAF}$.



Hình 69

Dạng 3. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

Phương pháp giải

Chứng minh hai đoạn thẳng đó là hai cạnh của tam giác cân.

Ví dụ. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Vẽ đường kính CD $\perp$ AB (D $\in$ $\widehat{AB}$ nhỏ). Trên cung nhỏ $\widehat{BC}$ lấy điểm N. Các đường thẳng CN, DN cắt cạnh AB tại E, F. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt cạnh AB tại I. Chứng minh $IF = IN = IE$.

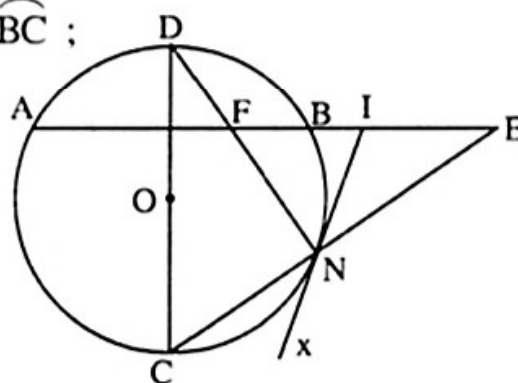
Giải. (h.70)

Đường kính CD $\perp$ AB nên $\widehat{AD} = \widehat{DB}$, $\widehat{AC} = \widehat{BC}$;

$$\widehat{DNI} = \frac{sd\widehat{DN}}{2} = \frac{sd\widehat{DB} + sd\widehat{BN}}{2} \text{ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).}$$

$$\widehat{BFN} = \frac{sd\widehat{AD} + sd\widehat{BN}}{2} \text{ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn).}$$

Mà $\widehat{AD} = \widehat{DB}$ nên $\widehat{DNI} = \widehat{BFN}$, do đó $\triangle INF$ cân tại I
 $\Rightarrow IN = IF \quad (1)$



Hình 70

$\widehat{AEC} = \frac{\widehat{sdAC} - \widehat{sdBN}}{2} = \frac{\widehat{sdBC} - \widehat{sdBN}}{2} = \frac{\widehat{sdCN}}{2}$ (góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn).

Mà $\widehat{CNx} = \frac{\widehat{sdCN}}{2}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

nên $\widehat{CNx} = \widehat{AEC}$, do đó $\widehat{INE} = \widehat{IEN} \Rightarrow \Delta INE$ cân tại I.

Suy ra $IE = IN$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $IN = IE = IF$.

Dạng 4. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Phương pháp giải

Biến đổi số đo góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đó theo số đo các cung bị chắn.

Ví dụ. Từ điểm E ở bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai cát tuyến EAB, EDC sao cho $AB < CD$. Tia DA và CB cắt nhau tại F. Tia phân giác của góc $\widehat{CEB}$ và $\widehat{CFD}$ cắt nhau tại I. Chứng minh $EI \perp IF$.

Giải. (h.71)

Gọi giao điểm của tia phân giác của $\widehat{CEB}$ với đường tròn là M ; N.

Gọi giao điểm của tia phân giác của $\widehat{DFC}$ với đường tròn là P ; Q.

Áp dụng định lí góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, ta có :

$\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ nên :

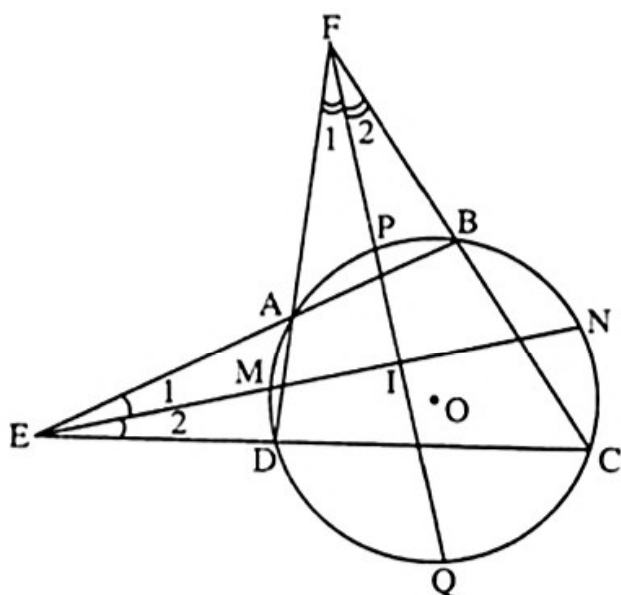
$$\widehat{BN} - \widehat{AM} = \widehat{CN} - \widehat{DM} \quad (1)$$

$\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ nên :

$$\widehat{DQ} - \widehat{AP} = \widehat{CQ} - \widehat{BP} \quad (2)$$

Cộng từng vế của (1), (2) ta có :

$$\widehat{BN} + \widehat{DQ} - \widehat{AM} - \widehat{AP} = \widehat{CN} + \widehat{CQ} - \widehat{DM} - \widehat{BP}.$$



Hình 71

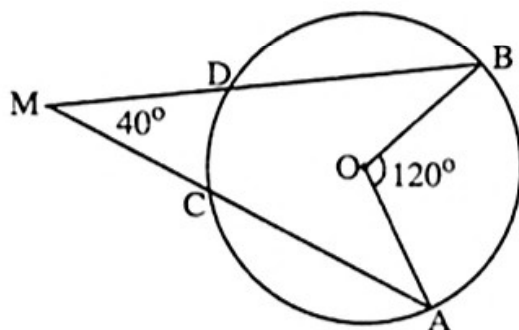
Hay : $\widehat{BN} + \widehat{DQ} + \widehat{DM} + \widehat{BP} = \widehat{CN} + \widehat{CQ} + \widehat{AM} + \widehat{AP}$.

Do đó : $\widehat{PN} + \widehat{MQ} = \widehat{NQ} + \widehat{MP}$. Vậy $sd(\widehat{NQ} + \widehat{MP}) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

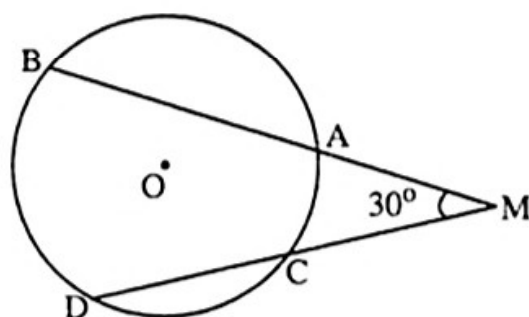
Mặt khác : $\widehat{QIN} = \frac{sd(\widehat{NQ} + \widehat{MP})}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ do đó $EI \perp IF$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hình 72. Tìm số đo cung CD.



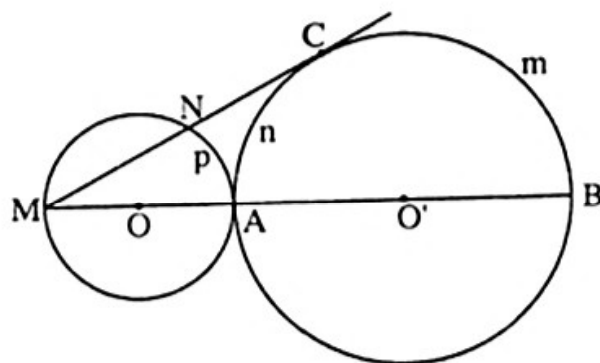
Hình 72



Hình 73

2. Cho hình 73. Biết số đo cung BD là 100° . Tìm số đo cung AC.
3. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Trên nửa đường tròn đường kính AB lấy dây $CD = R$. Gọi M là giao điểm của AC và BD, N là giao điểm AD và BC. Tính $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$.
4. Cho đường tròn (O) ; (O') tiếp xúc ngoài tại A (hình 74). Đường thẳng OO' cắt đường tròn (O) ; (O') tại M, B. Kẻ một tiếp tuyến MC tới đường tròn (O') . MC cắt đường tròn (O) tại N. Chứng minh :

$$sd\widehat{BmC} = sd\widehat{AnC} + sd\widehat{ApN}.$$



Hình 74

5. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N là điểm chính giữa cung AB, cung BC; AN cắt CM tại I.
- a) Chứng minh ΔBNI cân.
- b) Gọi NM cắt AB tại K. Chứng minh $IK \parallel BC$.

6. Cho tứ giác ABCD có 4 đỉnh thuộc đường tròn (O). Gọi P là điểm chính giữa cung AB (phần không chứa C, D). Các dây AD, PC kéo dài cắt nhau tại I, các dây BC, PD kéo dài cắt nhau tại K. Dây AC cắt PD tại M, dây PC cắt BD tại N. Chứng minh : $\widehat{CID} = \widehat{CKD}$ và $\widehat{CMD} = \widehat{CND}$.
7. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Trên tia đối của tia CB ta lấy điểm D. Gọi AD cắt đường tròn tại E. Chứng tỏ $\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$.
8. Trên đường tròn (O) lấy các điểm A, C₁; B; A₁; C; B₁ theo thứ tự đó. Chứng minh rằng nếu AA₁; BB₁; CC₁ là đường phân giác của các góc trong tam giác ABC thì chúng là đường cao của tam giác A₁B₁C₁.
9. Cho đường tròn (O) có ba dây AB, AC, BD bằng nhau sao cho hai dây AC, BD cắt nhau tại M tạo thành $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tính số đo cung nhỏ AB.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. $\widehat{AOB} = 120^\circ$, nên $sd\widehat{AB} = 120^\circ$. Mà $\widehat{AMB} = \frac{sd\widehat{AB} - sd\widehat{CD}}{2}$.

Nên $sd\widehat{AB} - sd\widehat{CD} = 80^\circ$, do đó $sd\widehat{CD} = 40^\circ$.

2. $\widehat{BMD} = \frac{sd\widehat{BD} - sd\widehat{AC}}{2}$ nên $sd\widehat{BD} - sd\widehat{AC} = 60^\circ$.

Do đó $sd\widehat{AC} = 40^\circ$.

3. (h.75) Ta có $OC = OD = CD (= R)$ nên $\triangle OCD$ đều.

Suy ra $\widehat{COD} = 60^\circ \Rightarrow sd\widehat{CD} = 60^\circ$.

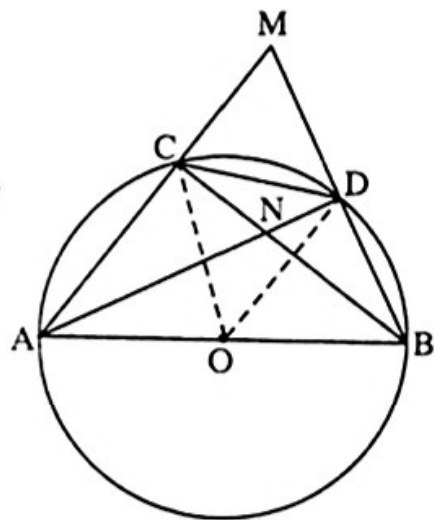
$$\widehat{AMB} = \frac{sd\widehat{AB} - sd\widehat{CD}}{2} = 60^\circ.$$

$$\widehat{ANB} = \frac{sd\widehat{AB} + sd\widehat{CD}}{2} = 120^\circ.$$

4. Xét (O') ta có : $\widehat{BMC} = \frac{sd\widehat{BmC} - sd\widehat{AnC}}{2}$.

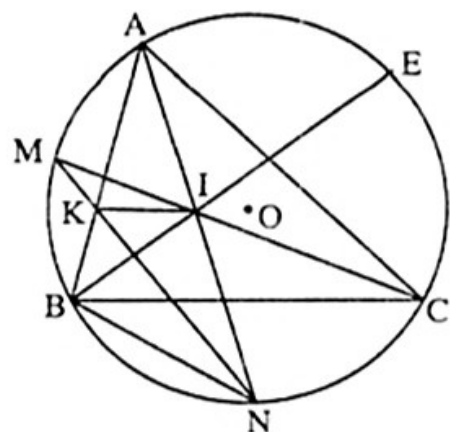
Xét (O) ta có : $\widehat{BMC} = \frac{sd\widehat{ApN}}{2}$.

Suy ra $sd\widehat{BmC} - sd\widehat{AnC} = sd\widehat{ApN}$ hay $sd\widehat{BmC} = sd\widehat{AnC} + sd\widehat{ApN}$.



Hình 75

5. (h.76) a) ΔABC có AN , CM là đường phân giác nên I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC suy ra BI là đường phân giác góc ABC . Gọi BI cắt đường tròn tại E ta có $\widehat{AE} = \widehat{EC}$.



Hình 76

$$\text{Ta có: } \widehat{BIN} = \frac{\widehat{sdBN} + \widehat{sdAE}}{2};$$

$$\widehat{IBN} = \frac{\widehat{sdECN}}{2} = \frac{\widehat{sdEC} + \widehat{sdCN}}{2}.$$

Mà $\widehat{BN} = \widehat{CN}$, $\widehat{AE} = \widehat{CE}$ suy ra $\widehat{BIN} = \widehat{IBN}$ hay ΔBNI cân.

b) $\widehat{AM} = \widehat{MB} \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{BNM}$ hay NM là đường phân giác của $\widehat{BNI}$ mà ΔBNI cân tại N suy ra NM là đường trung trực của BI . Mặt khác $K \in MN$ nên ΔKBI cân tại K suy ra $\widehat{KIB} = \widehat{KBI}$.

$\widehat{AE} = \widehat{EC}$ nên $\widehat{ABE} = \widehat{EBC}$ do đó $\widehat{KIB} = \widehat{CBE}$. Vậy $KI \parallel BC$.

6. (h.77) Áp dụng góc có đỉnh bên ngoài đường tròn, ta có:

$$\widehat{CID} = \frac{\widehat{sdCD} - \widehat{sdAP}}{2}$$

$$\widehat{CKD} = \frac{\widehat{sdCD} - \widehat{sdPB}}{2}.$$

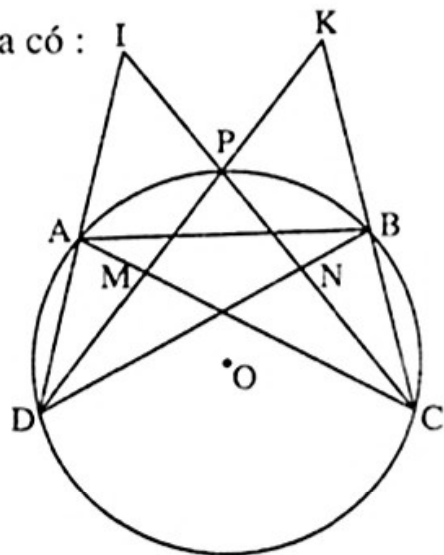
Mà $\widehat{AP} = \widehat{PB}$ nên $\widehat{CID} = \widehat{CKD}$.

Áp dụng góc có đỉnh bên trong đường tròn, ta có:

$$\widehat{CMD} = \frac{\widehat{sdCD} + \widehat{sdAP}}{2};$$

$$\widehat{CND} = \frac{\widehat{sdCD} + \widehat{sdBP}}{2}.$$

Mà $\widehat{AP} = \widehat{BP}$ nên $\widehat{CMD} = \widehat{CND}$.



Hình 77

7. (h.78) $AB = AC$ nên $\widehat{AB} = \widehat{AC}$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } \widehat{ABE} &= \text{sd} \frac{\widehat{AE}}{2} \\ &= \frac{\text{sd} \widehat{AC} - \text{sd} \widehat{CE}}{2}\end{aligned}$$

(góc nội tiếp).

$$\widehat{ADC} = \frac{\text{sd} \widehat{AB} - \text{sd} \widehat{CE}}{2} \quad (\text{góc có đỉnh nằm bên ngoài đường tròn}).$$

Suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$.

8. (h.79) Gọi giao điểm AA_1 và B_1C_1 là M . Ta có :

$$\begin{aligned}\widehat{AMB_1} &= \frac{\text{sd} \widehat{AB_1} + \text{sd} \widehat{BC_1} + \text{sd} \widehat{BA_1}}{2} \\ &= \frac{\text{sd} \widehat{AC} + \text{sd} \widehat{AB} + \text{sd} \widehat{BC}}{4} = 90^\circ.\end{aligned}$$

Do đó $AA_1 \perp B_1C_1$.

Tương tự ta có : $BB_1 \perp A_1C_1$; $CC_1 \perp A_1B_1$.

Nhận xét : Ta có thể chứng minh được bài toán đảo sau : Nếu AA_1 ; BB_1 ; CC_1 là các đường cao của tam giác ABC thì chúng là các đường phân giác của tam giác $A_1B_1C_1$.

9. (h.80) $AC = BD$ nên $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$.

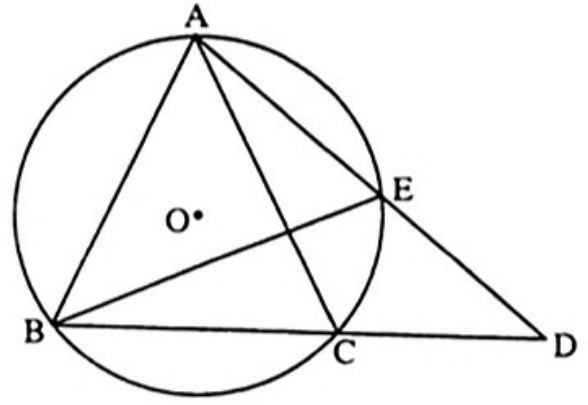
Đặt $\text{sd} \widehat{AD} = \text{sd} \widehat{BC} = x$; $\text{sd} \widehat{CD} = y$.

Thì ta có : $\text{sd} \widehat{AB} = \text{sd} \widehat{AC} = x + y$.

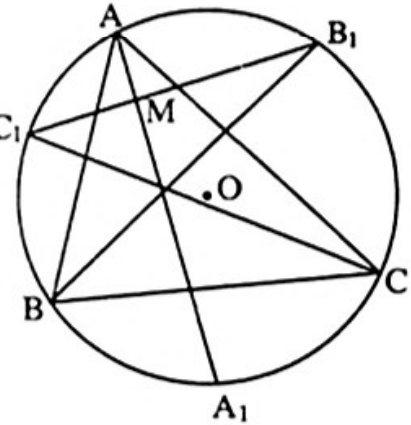
Mà $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên $\frac{x + y + y}{2} = 90^\circ$

$$\Rightarrow x + 2y = 180^\circ \quad (1)$$

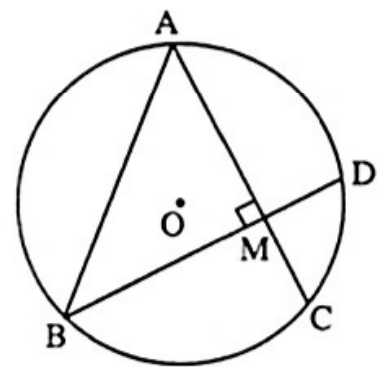
Mặt khác $\text{sd} \widehat{AB} + \text{sd} \widehat{BC} + \text{sd} \widehat{CD} + \text{sd} \widehat{AD} = 360^\circ$.



Hình 78



Hình 79



Hình 80

Nên $x + y + x + y + x = 360^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + 2y = 180^\circ \\ 3x + 2y = 360^\circ. \end{cases}$$

Giải ra ta có
$$\begin{cases} x = 90^\circ \\ y = 45^\circ. \end{cases}$$

Nên $\widehat{sdAB} = 135^\circ$.

§6. CUNG CHỨA GÓC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Bài toán quỹ tích cung chứa góc

Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) cho trước thì quỹ tích các điểm M thoả mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB.

Chú ý :

- Hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB.
- Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích
- Khi $\alpha = 90^\circ$ thì quỹ tích các điểm nhìn đoạn AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

2. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn tính chất τ là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần :

Phần thuận : Mọi điểm có tính chất τ đều thuộc hình H.

Phần đảo : Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất τ .

Kết luận : Quỹ tích (tập hợp) các điểm M có tính chất τ là hình H.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. QUỸ TÍCH LÀ CUNG CHỨA GÓC α

Phương pháp giải

- Tìm đoạn thẳng cố định trong hình vẽ.
- Nối điểm phải tìm quỹ tích với hai đầu của đoạn thẳng cố định đó, xác định góc α tạo thành.
- Khẳng định điểm phải tìm quỹ tích thuộc cung chứa góc α vẽ trên đoạn thẳng cố định.

Ví dụ. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB cố định. Điểm C chuyển động trên nửa đường tròn. Ở phía ngoài $\triangle ABC$ vẽ $\triangle BCD$ vuông cân tại C. Tìm quỹ tích điểm D.

Giải. (h.81)

Phân thuận :

$\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) ;

$\widehat{DCB} = 90^\circ$ ($\triangle BCD$ vuông cân tại C)

nên $\widehat{ACB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$.

Do đó A, C, D thẳng hàng.

Suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{CDB} = 45^\circ$ ($\triangle BCD$ vuông cân).

Vì AB cố định nên D nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn AB. Nếu $C \equiv A$ thì $D \equiv I$.

Phân đảo :

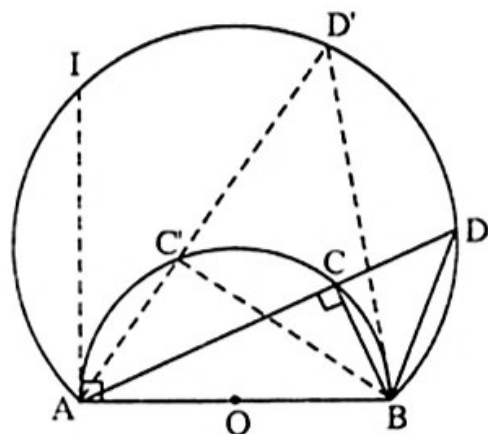
Lấy điểm D' bất kì trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn AB (D' thuộc cung IB). Nối AD' cắt nửa đường tròn (O) tại C' . Ta phải chứng minh $\triangle BC'D'$ vuông cân tại C' .

Ta có $\widehat{AC'B} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

nên $\widehat{BC'D'} = 90^\circ$ (kề bù).

Mà $\widehat{C'D'B} = 45^\circ$ do đó $\triangle BC'D'$ vuông cân tại C' .

Kết luận : Quỹ tích của điểm D là cung BI của cung chứa góc 45° dựng trên đoạn AB.



Hình 81

Dạng 2. CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG THUỘC MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp giải

Chứng minh các điểm này cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB và cùng nhìn AB dưới một góc bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Một dây DE song song với BC cắt AC ở F. Tiếp tuyến tại B cắt DE ở I. Chứng minh A, I, B, F cùng thuộc một đường tròn.

Giải. (h.82)

$\widehat{IBA} = \widehat{ACB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) ;

$\widehat{AFI} = \widehat{ACB}$ (đồng vị)

nên $\widehat{IBA} = \widehat{IFA}$.

Suy ra B ; F cùng nằm trên một cung chứa góc dựng trên đoạn AI.

Vậy A ; I ; B ; F cùng thuộc một đường tròn.

Ví dụ 2. Từ điểm S ở ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến SA, SB và cát tuyến SCD với đường tròn. Gọi I là trung điểm CD. Chứng minh 5 điểm A, I, O, B, S cùng thuộc một đường tròn.

Giải. (h.83)

SA ; SB là tiếp tuyến $\Rightarrow \widehat{SAO} = \widehat{SBO} = 90^\circ$.

Do đó A ; B cùng thuộc đường tròn

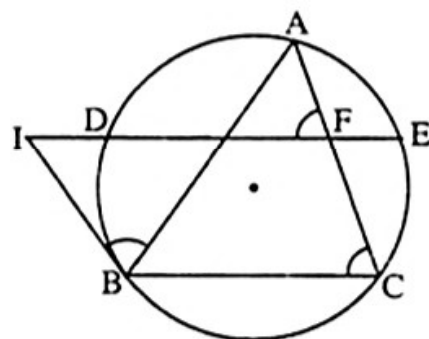
đường kính SO (1)

IC = ID suy ra $OI \perp CD$ (tính chất).

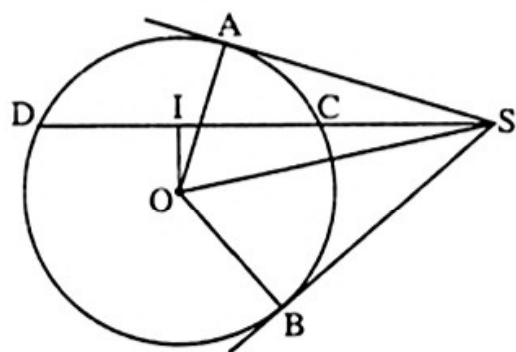
Hay $\widehat{OIS} = 90^\circ$ nên I thuộc đường tròn đường kính SO (2)

Từ (1), (2) ta có : A, B, I cùng thuộc đường tròn đường kính SO.

Do vậy A, I, O, B, S cùng thuộc một đường tròn.



Hình 82



Hình 83

Dạng 3. DỰNG TAM GIÁC BIẾT MỘT CẠNH, GÓC α ĐỐI DIỆN VỚI CẠNH ĐÓ VÀ MỘT YẾU TỐ KHÁC

Phương pháp giải

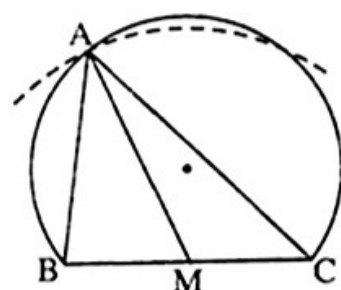
- Dụng đoạn thẳng có độ dài bằng cạnh đã cho.
- Dụng cung chứa góc α trên đoạn thẳng đó.
- Dụng tiếp điều kiện còn lại.

Ví dụ 1. Dụng $\triangle ABC$ biết $BC = 3\text{cm}$, $\widehat{BAC} = 50^\circ$ và trung tuyến $AM = 2,5\text{cm}$.

Giải. (h.84)

Cách dựng

- Dụng đoạn thẳng $BC = 3\text{cm}$;
- Dụng cung chứa góc 50° trên đoạn BC ;
- Dụng M là trung điểm của đoạn BC ;
- Vẽ cung tròn ($M ; 2,5\text{cm}$) cắt cung chứa góc tại A ;
- Nối AB, AC ta được $\triangle ABC$ phải dựng.



Hình 84

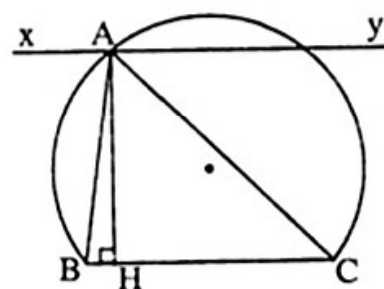
Bạn đọc tự trình bày phần chứng minh và biện luận.

Ví dụ 2. Dụng $\triangle ABC$ biết $BC = 3\text{cm}$, $\widehat{A} = 40^\circ$, đường cao $AH = 2,5\text{ cm}$.

Giải. (h.85)

Cách dựng :

- Dụng đoạn thẳng $BC = 3\text{cm}$.
- Dụng cung chứa góc 40° trên đoạn BC ;
- Dụng đường thẳng xy song song với BC và cách BC là $2,5\text{ cm}$.
- xy cắt cung chứa góc tại A .
- Nối AB, AC ta được $\triangle ABC$ phải dựng.



Hình 85

Bạn đọc tự trình bày phần chứng minh và biện luận.

Dạng 4. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

Phương pháp giải

- Xác định hai điểm cố định, sau đó tìm tập hợp điểm còn lại.
- Dùng bất đẳng thức trong đường tròn.

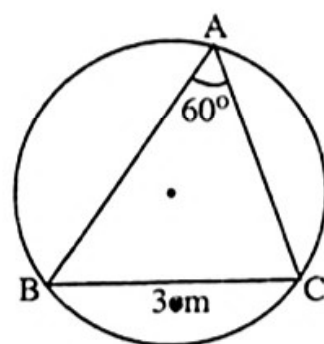
Ví dụ. Cho tam giác ABC có $BC = 3\text{cm}$, $\widehat{A} = 60^\circ$.

Tìm độ dài lớn nhất của cạnh AC.

Giải. (h.86)

$BC = 3\text{cm}$; $\widehat{BAC} = 60^\circ$, nên A thuộc cung chứa góc 60° dựng trên BC. AC lớn nhất khi AC là đường kính của cung chứa góc. Khi đó $\widehat{ABC} = 90^\circ$, nên ta có: $\sin A = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC = \frac{BC}{\sin A}$.

$$AC = \frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$



Hình 86

Dạng 5. CHỨNG MINH ĐIỂM NẪM BÊN NGOÀI, BÊN TRONG VÀ TRÊN CUNG CHỨA GÓC α

Phương pháp giải

- Nếu $\widehat{AMB} = \alpha$ thì điểm M nằm trên cung chứa góc α dựng trên đoạn AB.
- Góc ngoài của tam giác lớn hơn góc trong không kề với nó.
- Phương pháp phản chứng.

Ví dụ 1. Gọi một cung chứa góc 50° dựng trên đoạn AB là $\widehat{AmB}$. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa $\widehat{AmB}$ lấy hai điểm M, N sao cho $\widehat{AMB} > 50^\circ$, $\widehat{ANB} < 50^\circ$. Chứng minh rằng

- M nằm bên trong đường tròn chứa $\widehat{AmB}$;
- N nằm bên ngoài đường tròn chứa $\widehat{AmB}$.

Giải. (h.87)

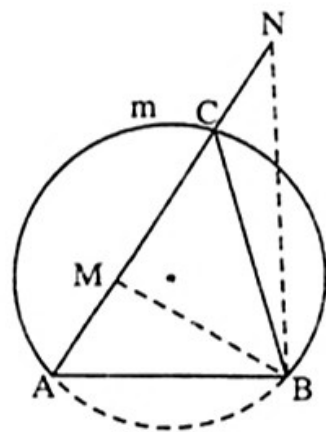
a) Đường thẳng AM cắt $\widehat{AmB}$ tại C.

Nếu M nằm bên ngoài $\widehat{AmB}$ thì

$$\widehat{AMB} < \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{AMB} < 50^\circ \text{ (loại) ;}$$

Nếu $M \equiv C$ thì $\widehat{AMB} = 50^\circ$ (loại).

Vậy M nằm bên trong đường tròn chứa $\widehat{AmB}$



Hình 87

b) Chứng minh tương tự ta có N nằm bên ngoài đường tròn chứa $\widehat{AmB}$.

Ví dụ 2. Cho 103 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, không có bốn điểm nào cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm trong số các điểm nói trên chứa đúng 50 điểm ở bên trong nó.

Giải. (h.88)

Xét hai điểm A ; B trong 103 điểm sao cho 101 điểm còn lại nằm cùng phía có bờ là đường thẳng AB.

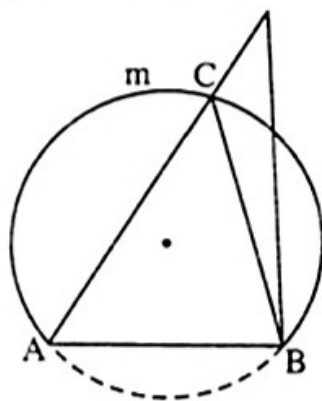
Giả sử 101 điểm còn lại $M_1; M_2; \dots; M_{101}$ thoả mãn : $\widehat{AM_1B} > \widehat{AM_2B} > \dots > \widehat{AM_{101}B}$

(không có dấu bằng vì không có bốn điểm thuộc cùng một đường tròn).

Vẽ đường tròn ngoại tiếp $\triangle AM_{51}B$ thì đường tròn này có đúng 50 điểm $M_1; M_2; \dots; M_{50}$ nằm bên trong (theo ví dụ 1).

Nhận xét. Dựa vào kĩ thuật của ví dụ này bạn có thể chứng tỏ được :

- Tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm trong số các điểm nói trên chứa tất cả các điểm còn lại.
- Tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm trong số các điểm nói trên không chứa điểm nào trong các điểm còn lại.



Hình 88

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trên đường tròn (O ; R) lấy hai điểm B ; C cố định sao cho số đo cung BC là 128° . Lấy A di động trên cung lớn BC. Gọi M là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng M nằm trên một cung tròn cố định.

- Cho đường tròn $(O; R)$ có dây $BC < 2R$. Cho A là điểm chuyển động trên cung lớn BC. Xác định vị trí điểm A để chu vi tam giác ABC lớn nhất.
- Cho tam giác ABC có góc B, góc C nhọn. AH là đường cao, AM là đường trung tuyến, biết rằng $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Gọi E là trung điểm AB.
 - Chứng minh A, M, H, E cùng thuộc một đường tròn.
 - Chứng minh $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
- Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} < 90^\circ$. Đường tròn $(A; AB)$ cắt đường thẳng BC tại E. Đường tròn $(C; CB)$ cắt đường thẳng AB tại K. Chứng minh:
 - $DE = DK$.
 - A, D, C, K, E cùng thuộc một đường tròn.
- Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi H và I là trực tâm và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng năm điểm B, C, O, I, H cùng thuộc một đường tròn.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

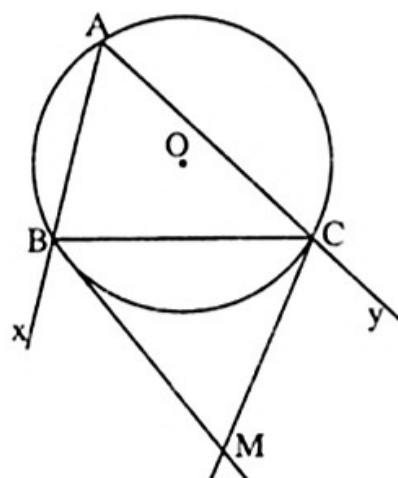
- (h.89) Số đo cung BC là 128° , nên $\widehat{BAC} = 64^\circ$ do đó $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 116^\circ$.

$$\text{Suy ra: } \widehat{xBC} + \widehat{yCB} = 180^\circ - \widehat{ABC} + 180^\circ - \widehat{BCA} = 244^\circ.$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{MBC} + \widehat{MCB} = \frac{1}{2} \cdot (\widehat{xBC} + \widehat{yCB}) = 122^\circ.$$

$$\text{Do đó: } \widehat{BMC} = 180^\circ - (\widehat{MBC} + \widehat{MCB}) = 58^\circ.$$

Vì B, C cố định nên quỹ tích điểm M là cung chứa góc 58° dựng trên đoạn BC.



Hình 89

- Gợi ý.

Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$.

Ta có chu vi tam giác ABC bằng $BC + AB + AC = BC + BD$.

Chu vi tam giác ABC lớn nhất khi BD lớn nhất.

Mà góc BDC bằng nửa góc BAC không đổi, nên D thuộc cung chứa góc $\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ dựng trên đoạn BC.

Do đó BD lớn nhất khi BD là đường kính của cung chứa góc hay A là điểm chính giữa của đường tròn.

3. (h.90) a) $\triangle ABC$ có ME là đường trung bình nên

$$ME \parallel AC \text{ suy ra } \widehat{MAC} = \widehat{AME} \quad (1)$$

$\triangle AHB$ có $\widehat{AHB} = 90^\circ$, $AE = EB$
nên $AE = HE$

$$\text{Do đó } \triangle AHE \text{ cân, suy ra } \widehat{EHA} = \widehat{EAH} \quad (2)$$

Mà $\widehat{EAH} = \widehat{MAC}$, từ (1) và (2) suy ra

$\widehat{AME} = \widehat{AHE}$ do đó H ; M ; A ; E cùng thuộc một đường tròn.

b) A, M, H, E cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{AHM} = \widehat{AEM}$. Suy ra $\widehat{AEM} = 90^\circ$, mặt khác $AC \parallel EM$ nên $AC \perp AB$. Vậy $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

4. (h.91) a) $\triangle ABE$ cân tại A, $\triangle CBK$ cân tại C.

Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{CBK}$ nên $\widehat{EAB} = \widehat{KCB}$.

Mặt khác $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$

suy ra $\widehat{DAE} = \widehat{KCD}$.

Từ đó ta có $\triangle DAE = \triangle KCD$ (c.g.c)

hay $DE = DK$.

b) Ta có $\widehat{DKA} = \widehat{KDC}$, mà $\widehat{KDC} = \widehat{AED}$
nên $\widehat{DKA} = \widehat{DEA}$.

Suy ra K, E, A, D cùng thuộc một cung chứa góc dựng trên đoạn AD (1).

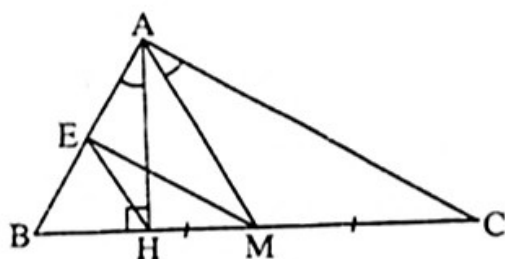
Ta có $\widehat{EAK} = \widehat{ECK}$ suy ra E, A, K, C cùng thuộc một cung chứa góc dựng trên đoạn EK (2).

Từ (1) và (2) suy ra A, D, C, K, E cùng thuộc một đường tròn đi qua E ; K ; A.

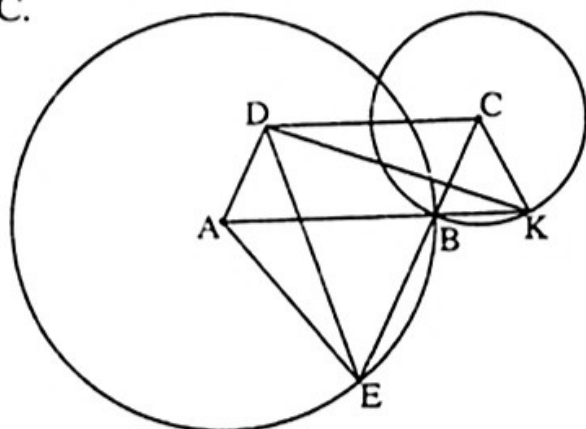
5. Gợi ý.

Tính được số đo các góc : $\widehat{BOC} = 120^\circ$, $\widehat{BIC} = 120^\circ$, $\widehat{BHC} = 120^\circ$.

Suy ra năm điểm B, C, O, I, H cùng thuộc một đường tròn.



Hình 90

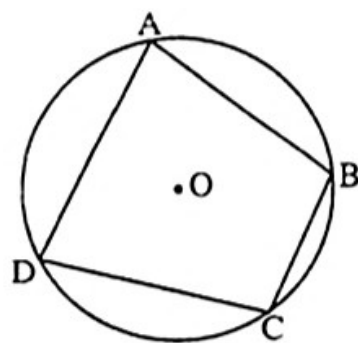


Hình 91

§7. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

- Định nghĩa.** Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).
Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp (h.92).
- Định lí.** Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .
- Định lí đảo.** Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.



Hình 92

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC, CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

Vận dụng tính chất tứ giác nội tiếp : Tổng hai góc đối của tứ giác nội tiếp bằng 180° , mỗi góc trong bằng góc ngoài ở đỉnh đối diện.

Ví dụ. Cho hình bên. Biết $\widehat{E} = 28^\circ$, $\widehat{F} = 44^\circ$. Tính $\widehat{BCD}$.

Giải. (h.93)

Đặt $\widehat{BCD} = x$.

Tứ giác ABCD nội tiếp nên $\widehat{DAE} = \widehat{BAF} = x$.

Áp dụng tính chất góc ngoài tam giác, ta có :

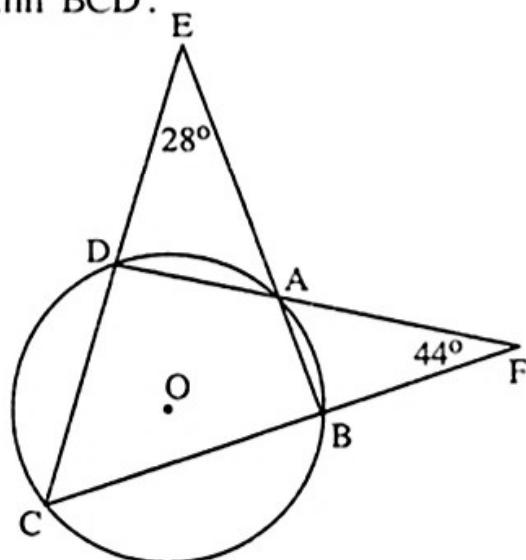
$$\widehat{ADC} = 28^\circ + x ; \quad \widehat{ABC} = 44^\circ + x.$$

Tứ giác ABCD nội tiếp nên

$$\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 28^\circ + x + 44^\circ + x = 180^\circ.$$

$$\text{Hay } x = 54^\circ \text{ vậy } \widehat{BCD} = 54^\circ.$$



Hình 93

Dạng 2. NHẬN BIẾT TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Phương pháp giải

Dựa vào các cách sau :

- Áp dụng định nghĩa một tứ giác nội tiếp ;
- Chứng minh tổng hai góc đối diện bằng 180° ;
- Dùng cung chứa góc.

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và dây AB. Gọi P là điểm chính giữa $\widehat{AB}$. Trên dây AB lấy hai điểm E ; F. Các đường thẳng PE ; PF cắt đường tròn tại C ; D. Chứng minh tứ giác EFDC nội tiếp.

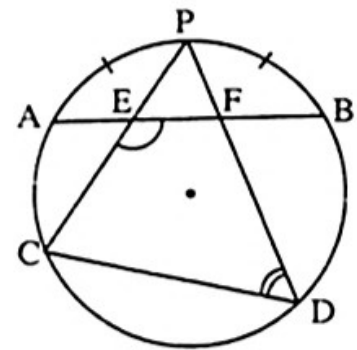
Giải. (h.94)

$$\widehat{CEF} = \frac{sđ\widehat{BDC} + sđ\widehat{AP}}{2} \text{ (góc có đỉnh ở bên trong}$$

đường tròn) ;

$$\widehat{CDF} = \frac{sđ\widehat{AP} + sđ\widehat{AC}}{2} \text{ (góc nội tiếp).}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \widehat{CEF} + \widehat{CDF} &= \frac{sđ\widehat{BDC} + sđ\widehat{AP} + sđ\widehat{AP} + sđ\widehat{AC}}{2} \\ &= \frac{sđ\widehat{BDC} + sđ\widehat{PB} + sđ\widehat{AP} + sđ\widehat{AC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ. \end{aligned}$$



Hình 94

Vậy tứ giác EFDC nội tiếp.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A vẽ nửa đường tròn tâm O đường kính BH cắt AB tại E và nửa đường tròn tâm O' đường kính CH cắt AC tại F. Chứng minh :

- Tứ giác AEHF là hình chữ nhật.
- EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').
- Tứ giác BCFE nội tiếp.

Gọi giao điểm O_1O_2 với MO ; MP là I, K , ta có $O_1O_2 \perp MP$ và $IM = IO$; $KM = KP$ do đó IK là đường trung bình của tam giác MOP suy ra $IK \parallel OP$
 $\Rightarrow OP \perp MH$ mà $MP = PH \Rightarrow OP$ là đường trung trực của $MH \Rightarrow OM = OH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OM = OA = OH = OB$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MAHB$ nội tiếp.

Dạng 3. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Phương pháp giải

Có thể chứng minh một cặp góc so le trong bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) có BD, CE là hai đường cao. Chứng minh rằng DE song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) .

Giải. (h.97)

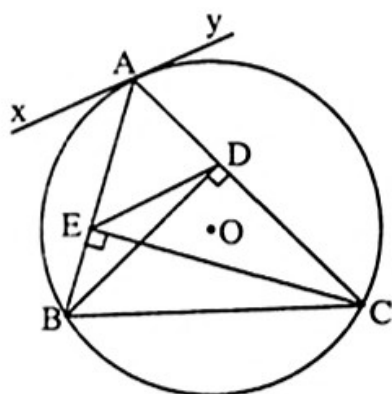
$\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên $BCDE$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{EBC} = \widehat{ADE}$ (cùng bù với $\widehat{EDC}$).

Mặt khác $\widehat{EBC} = \widehat{yAC}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Do đó $\widehat{ADE} = \widehat{yAC}$ vậy $xy \parallel DE$

(vì có cặp góc so le trong bằng nhau).



Hình 97

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn (O) ; (O') cắt nhau tại A và B . Đường thẳng (d) qua A cắt (O) ; (O') tại C, D (A nằm giữa C và D). Đường thẳng d' qua B cắt (O) ; (O') tại E, F (B nằm giữa E và F).

Chứng minh: $CE \parallel DF$.

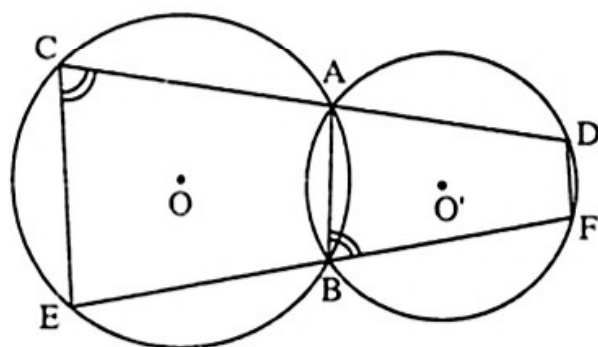
Giải. (h.98)

Tứ giác $ACEB$ nội tiếp nên $\widehat{ACE} = \widehat{ABF}$.

Tứ giác $ABFD$ nội tiếp nên

$$\widehat{ABF} + \widehat{ADF} = 180^\circ$$

Do đó $\widehat{ACE} + \widehat{ADF} = 180^\circ$, mà $\widehat{ACE}$; $\widehat{ADF}$ ở vị trí trong cùng phía nên $CE \parallel DF$.



Hình 98

Dạng 3. CHỨNG MINH TÂM ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC NẰM TRÊN ĐƯỜNG THẲNG CỐ ĐỊNH

Phương pháp giải

- Lấy thêm một điểm cố định, sau đó chứng minh tứ giác nội tiếp có hai điểm cố định.
- Tâm đường tròn ngoại tiếp luôn nằm trên đường trung trực của hai điểm cố định đó.

Ví dụ. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AO, đường thẳng Cx vuông góc với AB, Cx cắt nửa đường tròn tại I; K là điểm bất kì nằm giữa C, I. Tia AK cắt nửa đường tròn tại M. Tia BM cắt Cx tại D. Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm A, C, M, D cùng thuộc một đường tròn.

b) Khi K di động trên đoạn thẳng CI thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD nằm trên một đường thẳng cố định.

Giải. (h.99)

a) $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên $\widehat{AMD} = 90^\circ$ mà $\widehat{ACD} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ACD} \Rightarrow M$ và D là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn AD dưới một góc bằng nhau $\Rightarrow ACMD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ Bốn điểm A, C, M, D cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi E là điểm đối xứng với B qua C $\Rightarrow$ tam giác DBE cân tại D

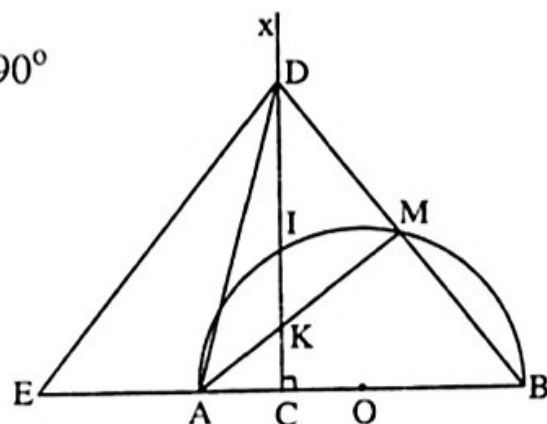
$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{MAC}$.

Mặt khác $\widehat{MAC} + \widehat{MAE} = 180^\circ$

nên $\widehat{EDC} + \widehat{MAE} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác AKDE nội tiếp.

Hay ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK đi qua A và E.

Mặt khác A và E là hai điểm cố định nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD luôn nằm trên đường trung trực của AE cố định.



Hình 99

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho đường tròn (O), điểm A ở bên ngoài đường tròn vẽ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE. Gọi H là trung điểm của DE.
 - Chứng minh A, B, H, O, C cùng thuộc một đường tròn.
 - Chứng minh HA là tia phân giác $\widehat{BHC}$.
 - Gọi I là giao điểm của BC và DE. Chứng minh $AB^2 = AI \cdot AH$.
 - BH cắt đường tròn (O) tại K. Chứng minh $AE \parallel CK$.
- Trên nửa đường tròn đường kính BC lấy điểm A sao cho $AB < AC$. Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$) gọi D là điểm thuộc tia HC sao cho $HD = HA$. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E.
 - Chứng minh tam giác ABE vuông cân.
 - Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh tam giác BMH đồng dạng với tam giác BCE.
- Từ điểm M bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB. Kẻ đường kính BC của đường tròn (O). Đường trung trực của BC cắt đường thẳng AC tại D. Chứng minh năm điểm A, O, B, M, D cùng thuộc một đường tròn.
- Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có AC vuông góc với BD tại H. Gọi M, N là chân đường vuông góc hạ từ H xuống đường thẳng AB và BC; P và Q là giao điểm của MH và NH với các đường thẳng CD và DA. Chứng minh:
 - $PQ \parallel AC$.
 - M, N, P, Q nằm trên cùng một đường tròn.

(TS 10, TH PT chuyên, ĐHKHTN Hà Nội, năm học 2004 – 2005)
- Cho tam giác ABC vuông tại C. Trên cạnh AB lấy điểm M (M khác A và B). Gọi O, O_1, O_2 lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMC và BMC.
 - Chứng minh bốn điểm C, O_1 , M, O_2 cùng nằm trên một đường tròn (T).
 - Chứng minh rằng đường tròn (T) đi qua O.
 - Xác định vị trí của M trên đoạn AB sao cho đường tròn (T) có bán kính nhỏ nhất.

(TS 10, chuyên Toán ĐHSPT Hà Nội, năm học 2008 – 2009)
- Cho tam giác ABC có $AB > AC$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Gọi E là hình chiếu của B trên AD, H là hình chiếu của A trên BC.
 - Chứng minh tứ giác ABEH nội tiếp.
 - Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tam giác MEH cân.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.100) a) Ta có : $\widehat{OHA} = \widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^\circ$.

Nên A, B, H, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính OA.

- b) Xét đường tròn đường kính OA, ta có :

$AB = AC$ nên $\widehat{AB} = \widehat{AC}$.

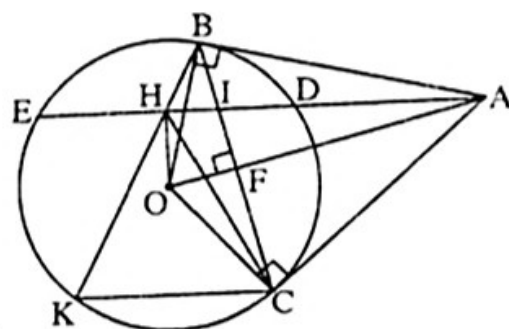
Suy ra $\widehat{BHA} = \widehat{CHA}$ hay HA là phân giác $\widehat{BHC}$.

- c) Dễ thấy $OA \perp BC$ tại F nên $AO.AF = AH.AI$.

Mặt khác $AB^2 = AO.AF$ suy ra $AB^2 = AH.AI$.

- d) Xét đường tròn (O) ta có $\widehat{BKC} = \widehat{BCA}$, nên $\widehat{BKC} = \widehat{BHA}$.

Mà $\widehat{BKC}; \widehat{BHA}$ ở vị trí đồng vị suy ra $AE \parallel CK$.

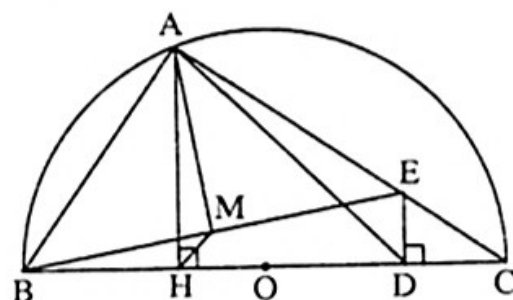


Hình 100

2. (h.101) a) $\widehat{BAE} = 90^\circ$; $\widehat{BDE} = 90^\circ$ nên tứ giác ABDE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ADB}$.

Tam giác AHD vuông cân $\Rightarrow \widehat{ADB} = 45^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{AEB} = 45^\circ$.

Vậy tam giác ABE vuông cân.



Hình 101

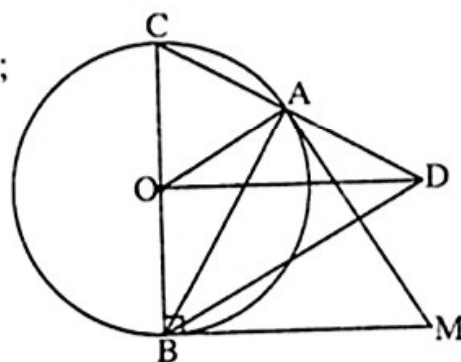
- b) Tam giác ABE vuông cân nên $AM \perp BE$ suy ra tứ giác ABHM nội tiếp, do đó $\widehat{BAH} = \widehat{BMH}$. Mặt khác $\widehat{BAH} = \widehat{BCA}$ nên $\widehat{BMH} = \widehat{BCA}$. Vậy tam giác BMH đồng dạng với tam giác BCE.

3. (h.102) MA, MB là tiếp tuyến nên $\widehat{MAO} = 90^\circ$;
 $\widehat{MBO} = 90^\circ$.

$\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ$ do đó tứ giác MBOA nội tiếp (1)

$\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn của đường tròn)
 $\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$ (kề bù).

Xét tứ giác BOAD có $\widehat{BOD} = 90^\circ$; $\widehat{BAD} = 90^\circ$.



Hình 102

$\Rightarrow \widehat{BOD} = \widehat{BAD}$ do đó O và A là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn BD dưới một góc bằng nhau.

$\Rightarrow BOAD$ nội tiếp (2)

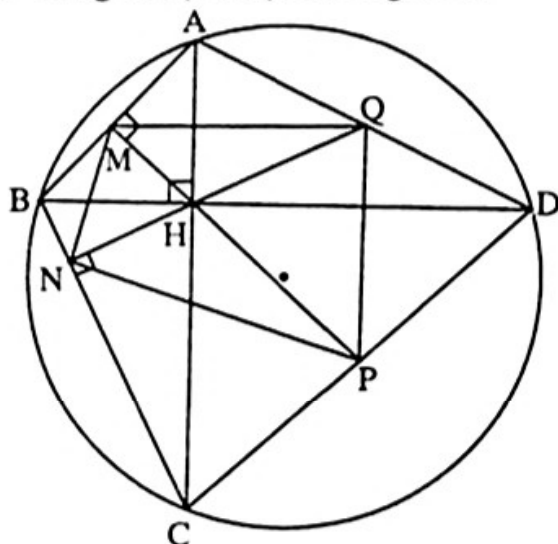
Từ (1) và (2), suy ra năm điểm M, B, O, A, D cùng thuộc một đường tròn.

4. (h.103) a) Tam giác BHC có $HN \perp BC$ nên $\widehat{CBH} = \widehat{NHC} = \widehat{AHQ}$ mà tứ giác ABCD nội tiếp nên $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$ hay $\widehat{CBH} = \widehat{HAQ}$. Do đó $\widehat{AHQ} = \widehat{HAQ} \Rightarrow AQ = HQ$ và $\widehat{QHD} = 90^\circ - \widehat{AHQ}$

$$= 90^\circ - \widehat{HAQ} = \widehat{HDQ}$$

$\Rightarrow HQ = QD$. Vậy $AQ = QD$.

Tương tự ta có : $CP = PD \Rightarrow PQ \parallel AC$.



Hình 103

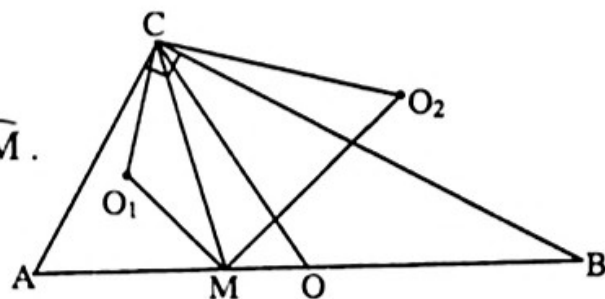
b) Do $PQ \parallel AC$ nên $\widehat{NQP} = \widehat{QHA} = \widehat{HAQ} \equiv \widehat{CAD} = \widehat{CBD} \equiv \widehat{NBH} = \widehat{NMH} \equiv \widehat{NMP}$ (BMHN là tứ giác nội tiếp). Suy ra tứ giác MNPQ nội tiếp hay N, M, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

5. (h.104) a) Sử dụng tính chất góc ở tâm đường tròn, ta có : $\widehat{CO_1M} = 2\widehat{CAM}$; $\widehat{CO_2M} = 2\widehat{CBM}$.

Do tam giác ABC vuông nên

$$\widehat{CAM} + \widehat{CBM} = 90^\circ.$$

Suy ra $\widehat{CO_1M} + \widehat{CO_2M} = 180^\circ$.



Hình 104

Vậy bốn điểm C, O₁, M, O₂ cùng thuộc một đường tròn (T).

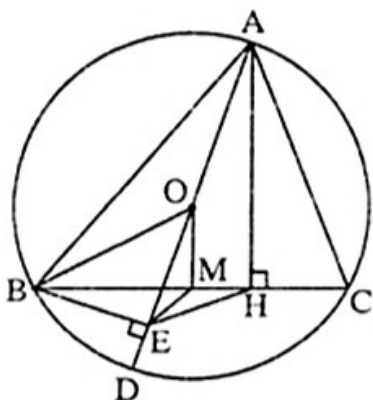
b) Do tam giác ABC vuông tại C nên O là trung điểm của AB. Giả sử M thuộc đoạn OA. Do tam giác COB cân tại O nên $\widehat{COM} = 2\widehat{CBO} = \widehat{CO_2M}$.

Vậy O thuộc đường tròn (T).

c) Gọi R là bán kính của đường tròn (T). Do (T) đi qua C và O nên $CO \leq 2R$ hay $R \geq \frac{1}{2}CO$. Dấu bằng đạt được khi M là hình chiếu của C trên AB.

6. (h.105) a) $\widehat{AHB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ nên H, E là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn AB dưới một góc bằng nhau suy ra ABEH nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{OMB} = \widehat{OEB} = 90^\circ$ nên M, E là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn OB dưới một góc bằng nhau suy ra OMEB nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{BOE} = \widehat{BME}$. Mà ABEH nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{BHE}$. Mặt khác $\widehat{BOE} = 2.\widehat{BAO}$
 nên $\widehat{BME} = 2.\widehat{BHE}$. Vậy tam giác MEH cân tại M.



Hình 105

§8. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định nghĩa

- Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.
- Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.

2. Định lí. Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH ĐỘ DÀI CẠNH ĐA GIÁC ĐỀU

Phương pháp giải

Ta có thể áp dụng công thức $a = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} = 2r \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$

a : độ dài cạnh đa giác đều ;

R : bán kính đường tròn ngoại tiếp ;

n : số cạnh đa giác đều ;

r : bán kính đường tròn nội tiếp.

Ví dụ.

a) Một hình vuông nội tiếp đường tròn (O ; R). Tính mỗi cạnh hình vuông theo R.

b) Một lục giác đều ngoại tiếp đường tròn (O ; r). Tính mỗi cạnh lục giác theo r.

Giải.

a) Cạnh của hình vuông là : $a = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$.

b) Cạnh của lục giác đều là : $a = 2r \cdot \tan \frac{180^\circ}{n} = 2r \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Dạng 2. TÍNH R, r THEO CẠNH CỦA MỘT ĐA GIÁC ĐỀU NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP

Phương pháp giải

Áp dụng công thức $R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$; $r = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$.

Ví dụ. Cho ngũ giác đều có cạnh bằng a. Tính bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đó.

Giải.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều là :

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{5}} = \frac{a}{2 \sin 36^\circ} \approx \frac{a}{2.0,5878} \approx 0,85a.$$

Bán kính đường tròn nội tiếp ngũ giác đều là :

$$r = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{5}} = \frac{a}{2 \tan 36^\circ} \approx \frac{a}{2.0,7265} \approx 0,69a.$$

Dạng 3. TÍNH ĐỘ DÀI DÂY CĂNG CUNG

Phương pháp giải

- Áp dụng định lí Py-ta-go.
 - Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông.

Ví dụ. Cho đường tròn $(O ; R)$. Cho dây $BC = R\sqrt{3}$. Lấy A thuộc cung nhỏ BC sao cho $BA = R\sqrt{2}$. Vẽ $AH \perp BC$. Tính $AH ; AC$.

Giải. (h.106)

Vẽ $OI \perp BC$, ta có $BI = IC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng định lí Py-ta-go : $OI^2 = OB^2 - BI^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4}$.

Hay $OI^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow OI = \frac{R}{2}$.

Suy ra $OI = \frac{1}{2}BO$ vậy $\widehat{IBO} = 30^\circ$.

Ta có : $BO^2 + OA^2 = 2R^2 = AB^2$

nên $\triangle OAB$ vuông, do đó $\widehat{BOA} = 90^\circ$.

Mà $OA = OB$ nên $\triangle OAB$ vuông cân, do đó $\widehat{OAB} = \widehat{ABO} = 45^\circ$;

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABO} - \widehat{CBO} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

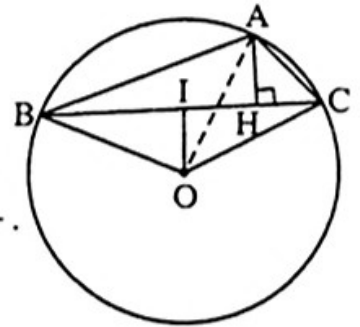
Xét $\triangle ABH$, có $AH = AB \cdot \sin \widehat{ABC} = R\sqrt{2} \sin 15^\circ$.

Mà $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (hệ quả góc nội tiếp)

$= 45^\circ$ nên $\triangle AHC$ vuông cân, do đó $AH = HC$.

Xét $\triangle AHC$, áp dụng định lí Py-ta-go : $AC^2 = AH^2 + HC^2$

$$\Rightarrow AC = AH \cdot \sqrt{2} = R\sqrt{2} \sin 15^\circ \cdot \sqrt{2} = 2R \cdot \sin 15^\circ.$$



Hình 106

Dạng 4. TÍNH SỐ CẠNH CỦA ĐA GIÁC ĐỀU

Phương pháp giải

- Áp dụng công thức $\sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2R}$; $\tan \frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2r}$.
- Suy ra n để tìm số cạnh.

Ví dụ. Một đa giác đều nội tiếp đường tròn (O ; R). Biết độ dài mỗi cạnh của nó là $R\sqrt{2}$. Hỏi đa giác đó là hình gì ?

Giải.

Áp dụng công thức : $\sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2R} = \frac{R\sqrt{2}}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$.

Nên $\frac{180^\circ}{n} = 45^\circ$ suy ra $n = 4$.

Vậy đa giác đều đó là hình vuông.

Dạng 5. TÍNH DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Phương pháp giải

Dựa vào tính chất : Nếu một đa giác được chia thành những đa giác nhỏ không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác nhỏ.

Ví dụ. Tính diện tích hình bát giác đều nội tiếp đường tròn (O ; R)

Giải.

Kí hiệu như hình 107.

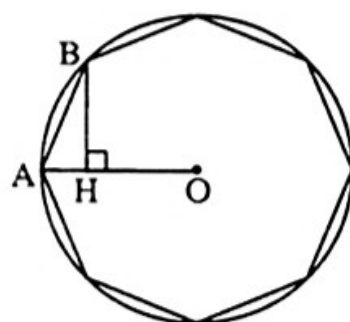
Ta có : $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

$\triangle OBH$ vuông cân tại H nên $BH = HO = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Gọi diện tích bát giác là S thì :

$S = 8 \cdot S_{AOB} = 8 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot BH = 4R \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S = 2R^2\sqrt{2}$.



Hình 107

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 120^\circ$; $BC = 6\text{cm}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ; r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính tỉ số $\frac{r}{R}$.

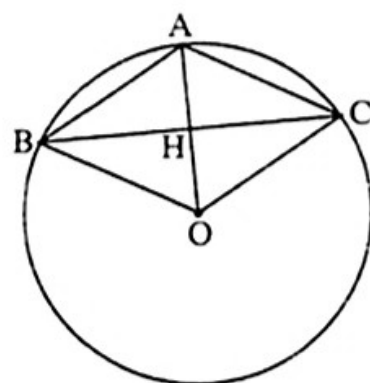
3. Gọi a, b, d lần lượt là độ dài cạnh, đường chéo ngắn nhất và đường chéo dài nhất của đa giác đều chín cạnh. Chứng minh $d = a + b$.
4. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng $AB + CD = BC + AD$.
5. Cho đường tròn tâm O nội tiếp trong hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) tiếp xúc với cạnh AB tại E với cạnh CD tại F.
 - a) Chứng minh $\frac{BE}{AE} = \frac{DF}{CF}$.
 - b) Cho biết $AB = a, CB = b$ ($a < b$), $BE = 2.AE$. Tính diện tích hình thang ABCD.

(TS 10, THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội, năm học 2000 – 2001)

6. Thập giác đều $A_1A_2\dots A_{10}$ nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng :
 $A_1A_4 - A_1A_2 = R$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.108) Ta có $\triangle ABO = \triangle ACO$ (c.c.c) suy ra $\widehat{BAO} = \widehat{CAO} = 60^\circ$ và $AO \perp BC$ nên $\triangle ACO$ đều.
 Gọi AO cắt BC tại H ta có $BH = HC = 3\text{cm}$.
 $\triangle ACO$ đều, mà $AO \perp CH$ nên $HA = HO$.
 Theo định lí Py-ta-go, ta có : $CH^2 + OH^2 = OC^2$.
 Hay $9 + \frac{OC^2}{4} = OC^2$.
 Suy ra $OC = 2\sqrt{3}\text{ cm}$.



Hình 108

2. Tam giác ABC vuông tại A, nên $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lí Py-ta-go)
 $\Rightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5\text{ (cm)}$.

Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}\text{ (cm)}$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{1}{2}.3.4 = 6\text{ (cm}^2\text{)}$.

Mặt khác ta có : $S = p.r = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).r$

$$\Rightarrow 6 = \frac{1}{2} \cdot (3 + 4 + 5) \cdot r \text{ do đó } r = 1 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Vậy tỉ số } \frac{r}{R} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = 0,4.$$

3. (h.109) Gọi PQ, QS, PT là cạnh, đường chéo ngắn nhất, đường chéo dài nhất của đa giác đều 9 cạnh, PQ và ST có giao điểm là R.

Mỗi cạnh căng một cung có số đo là $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$.

Ta có $\widehat{QPT} = \widehat{STP} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 40^\circ = 60^\circ$ nên $\triangle RPT$ đều.

Mà $PT \parallel QS$ do đó tam giác RQS đều.

Vậy $d = PT = PR = PQ + QR = a + b$.

4. (h.110) Gọi M, N, P, Q lần lượt là tiếp điểm của cạnh AB, BC, CD, DA với đường tròn (O).

Theo tính chất tiếp tuyến ta có :

$$AM = AQ ; BM = BN ; CP = CN ; DP = DQ.$$

$$\text{Ta có } AB + CD = AM + BM + CP + DP \quad (1).$$

$$BC + AD = BN + CN + DQ + AQ \quad (2).$$

So sánh vế phải của (1) và (2), ta có $AB + CD = BC + AD$.

Nhận xét. Đây là một tính chất cơ bản của tứ giác ngoại tiếp đường tròn. Đảo lại bài toán vẫn đúng : Nếu một tứ giác có tổng các cặp cạnh đối bằng nhau thì tứ giác đó ngoại tiếp đường tròn.

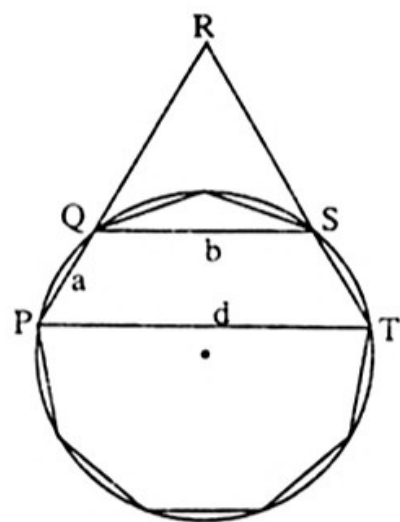
5. (h.111) Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc với AD, BC tại P và Q và có bán kính r.

$$\text{a) Vì } AB \parallel CD \text{ nên } \widehat{DAB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$$

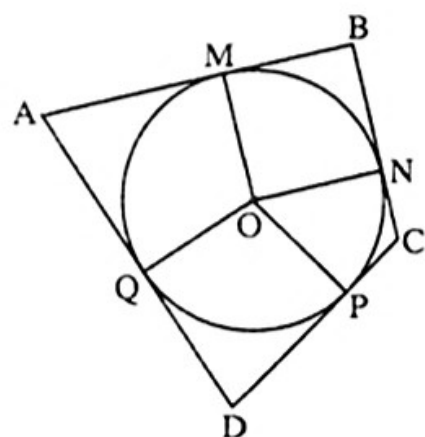
$$\begin{aligned} \text{do đó } \widehat{AOD} &= 180^\circ - (\widehat{OAD} + \widehat{ODA}) \\ &= 180^\circ - \frac{\widehat{DAB} + \widehat{ADC}}{2} = 90^\circ. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ tam giác AOD vuông tại O.

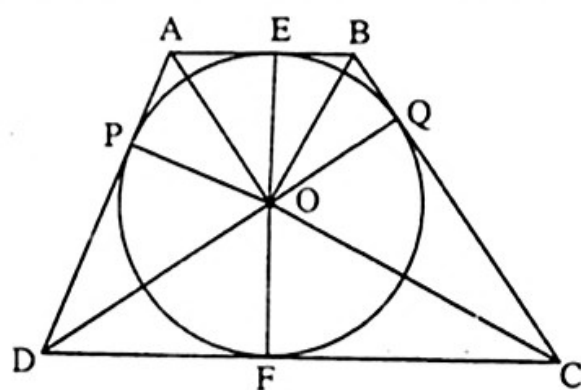
Tương tự tam giác BOC vuông tại O.



Hình 109



Hình 110



Hình 111

Áp dụng hệ thức lượng tam giác vuông ta có :

$$PA.PD = OP^2 = OQ^2 = QB.QC$$

$$\Rightarrow PA.PD = QB.QC \Rightarrow \frac{BQ}{AP} = \frac{PD}{QC} \text{ hay } \frac{BE}{AE} = \frac{DF}{CF}.$$

b) Ta có $S = \frac{1}{2}.r.(AB + BC + CD + DA)$

mà $AB + CD = AD + BC$ nên $S = r.(AB + CD).$

Ta có $\frac{DF}{CF} = \frac{BE}{AE} = 2 \Rightarrow CF = \frac{1}{3}.CD = CQ$

mà $BQ = BE = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}.$

Từ đó ta có $BC = CQ + BQ \Rightarrow b = \frac{1}{3}.CD + \frac{2a}{3} \Rightarrow CD = 3b - 2a$

$$\Rightarrow AB + CD = 3b - a \quad (1)$$

Mặt khác $OQ^2 = BQ.CQ = \frac{2a}{3} \cdot \frac{3b-2a}{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2a(3b-2a)}}{3}.$

Vậy $S = \frac{\sqrt{2a(3b-2a)}}{3} \cdot (3b - a).$

6. Gợi ý.

Gọi giao điểm A_1A_4 và A_2A_7 là P. Chứng minh được OPA_4A_5 là hình bình hành và tam giác A_1A_2P cân tại A_1 . Suy ra điều phải chứng minh.

§9. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

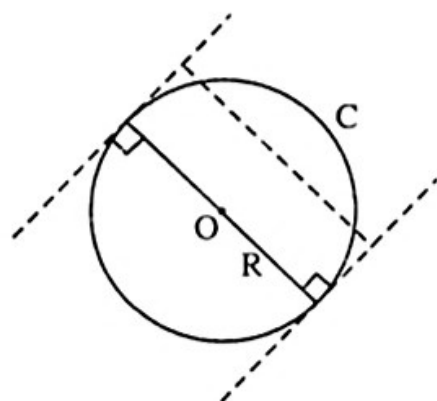
1. Công thức tính độ dài đường tròn

"Độ dài đường tròn" (còn gọi là "chu vi hình tròn") được kí hiệu là C.

Độ dài C của một đường tròn có bán kính R (hình 112) được tính theo công thức : $C = 2\pi R.$

Nếu gọi d là đường kính đường tròn ($d = 2R$)

thì $C = \pi d.$

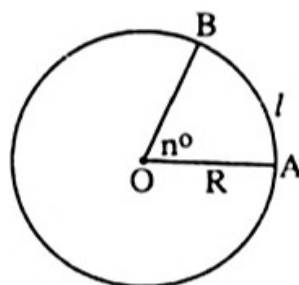


Hình 112

2. Công thức tính độ dài cung tròn

Trên đường tròn bán kính R , độ dài l của một cung tròn n° (hình 113) được tính

theo công thức $l = \frac{\pi R n}{180}$.



Hình 113

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN HOẶC CÁC ĐẠI LƯỢNG LIÊN QUAN

Phương pháp giải

Dựa vào các công thức :

$$C = 2\pi R ; l = \frac{\pi R n}{180} ; R = \frac{C}{2\pi} ; R = \frac{180l}{\pi n} ; n = \frac{180l}{\pi R}$$

Ví dụ 1. a) Tính chu vi đường tròn biết đường kính là 5cm.

b) Tính độ dài cung 120° của đường tròn bán kính 4cm.

Giải.

a) Chu vi đường tròn $C = 2\pi R = 5\pi$ (cm).

b) Độ dài cung 120° của đường tròn bán kính 4cm là :

$$l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 120}{180} = \frac{8\pi}{3} \text{ (cm)}.$$

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O ; R)$ độ dài $\widehat{AB}$ là $\frac{\pi R}{4}$. Tính số đo $\widehat{AB}$.

Giải.

Gọi n là số đo cung nhỏ $\widehat{AB}$. Ta có $l = \frac{\pi R n}{180}$

$$\text{nên } \frac{\pi R}{4} = \frac{\pi R n}{180} \text{ hay } n = 45^\circ.$$

Dạng 2. SO SÁNH ĐỘ DÀI HAI CUNG

Phương pháp giải

- Tính độ dài mỗi cung theo R và số đo độ của cung.
- So sánh kết quả.

Ví dụ. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Trong đoạn thẳng AB lấy hai điểm M, N (M nằm giữa A và N). Vẽ các nửa đường tròn đường kính AM, MN, NB. Chứng minh tổng độ dài của ba nửa đường tròn đường kính AM, MN, NB bằng độ dài nửa đường tròn đường kính AB.

Giải. (h.114)

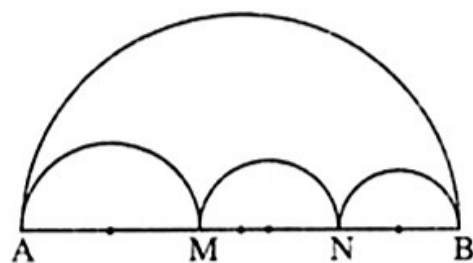
Gọi C_1, C_2, C_3, C lần lượt là độ dài của nửa đường tròn đường kính AM, MN, NB, AB.

$$\text{Ta có : } C_1 = \frac{1}{2} \pi \cdot AM, C_2 = \frac{1}{2} \pi \cdot MN ;$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \pi \cdot NB, C = \frac{1}{2} \pi \cdot AB ;$$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= \frac{1}{2} \pi \cdot AM + \frac{1}{2} \pi \cdot MN + \frac{1}{2} \pi \cdot NB \\ &= \frac{1}{2} \pi \cdot (AM + MN + NB) \\ &= \frac{1}{2} \pi \cdot AB. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } C_1 + C_2 + C_3 = C.$$



Hình 114

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho đường tròn $(O; R)$ và một dây cung AB.

a) Nếu biết $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Tính chu vi hình viên phân giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AB.

b) Nếu độ dài cung AB là $\frac{5\pi R}{6}$. Tính số đo góc $\widehat{AOB}$.

2. Cho đường tròn $(O; R)$.

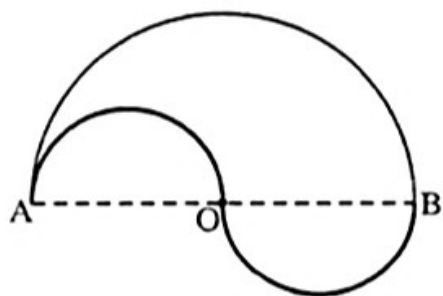
a) Tính $\widehat{AOB}$ biết độ dài cung AB là $\frac{\pi R}{3}$.

b) Trên cung lớn AB lấy điểm C sao cho $\triangle AOC$ vuông cân tại O. Tính độ dài $\widehat{AC}$; $\widehat{BC}$ lớn.

3. Cho đường tròn đường kính AB. Vẽ dây CD vuông góc với AB tại M. Giả sử $AM = 1\text{ cm}$, $CD = 2\sqrt{3}\text{ cm}$.

a) Tính độ dài đường tròn.

b) Tính độ dài cung $\widehat{CAD}$.



Hình 115

4. Tính chu vi hình 115, biết rằng $AO = 4\text{ cm}$.

5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Biết rằng $\frac{sd\widehat{BC}}{1} = \frac{sd\widehat{CA}}{2} = \frac{sd\widehat{AB}}{3}$. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các đường tròn đường

kính BC ; CA ; AB. Chứng minh rằng $\frac{a}{1} = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2}$.

6. Tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(O; 6\text{ cm})$. Vẽ bên ngoài tam giác ABD vuông cân tại D. Các đường thẳng DA, DB lần lượt cắt đường tròn (O) tại M, N.

Tính độ dài cung nhỏ AM, BN, MN, và MC.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Đáp số

a) $\frac{R(2\sqrt{2} + \pi)}{2}$; b) 150° .

2. a) Theo công thức $l = \frac{\pi R n}{180}$ nên $\frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi R}{3}$.

Ta có : $n^\circ = 60^\circ$ hay $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

b) Độ dài cung AC là : $\frac{\pi R 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{2}$.

Số đo cung BC lớn là : $360^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 210^\circ$.

Độ dài cung BC lớn là : $\frac{\pi R 210^\circ}{180^\circ} = \frac{7\pi R}{6}$.

3. a) Áp dụng hệ thức lượng cho ΔABC vuông :
 $CM^2 = AM.MB$ ta có : $MB = 3\text{cm} \Rightarrow AB = 4\text{cm}$.
 Độ dài đường tròn là : $2\pi R = 4.\pi(\text{cm})$.
- b) Áp dụng định lí Py-ta-go cho ΔACM vuông :
 $AC^2 = AM^2 + CM^2 = 4 \Rightarrow AC = 2\text{cm}$.
 Do đó ΔACO đều hay $\widehat{COA} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{COD} = 120^\circ$.
 Độ dài cung $\widehat{CAD}$ là : $\frac{\pi R n}{180^\circ} = \frac{\pi R.120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi R}{3}$.
4. Đáp số : $8\pi(\text{cm})$.
5. Ta tính được $\widehat{BC} = 60^\circ$; $\widehat{CA} = 120^\circ$; $\widehat{AB} = 180^\circ$.
 Nên tam giác ABC có $\hat{A} = 30^\circ$; $\hat{B} = 60^\circ$; $\hat{C} = 90^\circ$.
 Suy ra $AB = 2R$; $CB = R$; $AC = R\sqrt{3}$
 $\Rightarrow a = 2\pi R$, $b = \pi R\sqrt{3}$, $c = 2\pi R \Rightarrow \text{đpcm}$.
6. Đáp số :
 Độ dài các cung AM , BN , MN , và MC tính bằng cm lần lượt là π , π ; 3π , 5π .

§10. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Công thức tính diện tích hình tròn

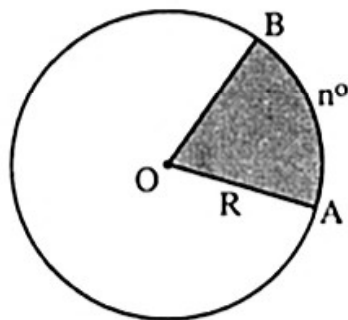
Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức :

$$S = \pi R^2.$$

2. Cách tính diện tích hình quạt tròn

Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung n° (hình 116)

được tính theo công thức $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$ hay $S = \frac{lR}{2}$.



Hình 116

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN HOẶC CÁC ĐẠI LƯỢNG LIÊN QUAN

Phương pháp giải

Dựa vào công thức : $S = \pi R^2$; $S_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$;

$$R = \frac{C}{2\pi} ; \quad R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} ;$$

$$n = \frac{S_{\text{quạt}} \cdot 360}{\pi R^2} .$$

Ví dụ. a) Tính diện tích hình tròn bán kính 5cm.

b) Tính diện tích hình quạt tròn bán kính 6cm có số đo cung là 60° .

Giải.

a) Diện tích hình tròn bán kính 5cm là : $S = \pi R^2 = 25\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

b) Diện tích hình quạt tròn là : $S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60}{360} = 6\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Dạng 2. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH VIÊN PHÂN, HÌNH VÀNH KHĂN VÀ NHỮNG HÌNH KHÁC CÓ LIÊN QUAN ĐẾN CUNG TRÒN

Phương pháp giải

Dựa vào tính chất : Nếu hình H được chia thành hai hình H_1 và H_2 không có điểm chung thì :

$$S_H = S_{H_1} + S_{H_2}$$

hay

$$S_{H_1} = S_H - S_{H_2} .$$

Ví dụ 1. Cho lục giác đều ABCDEF nội tiếp đường tròn (O ; 2cm). Tính diện tích phần hình tròn nằm bên ngoài hình lục giác.

Giải. (h.117)

Số đo cung AB là : $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Diện tích hình quạt OAB là :

$$S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 60}{360} = \frac{2\pi}{3}.$$

ΔAOB có $OA = OB$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$

nên ΔAOB đều, do đó $AB = OA = OB = R$.

Vẽ $AH \perp AB$, ta có : $OH = HB = \frac{R}{2}$.

Áp dụng định lí Py-ta-go ta có : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$ hay

$$AH = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Vậy diện tích ΔAOB là : $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Do đó ta có diện tích hình viên phân cung AB là :

$$S_{VP(\widehat{AB})} = S_q - S_{AOB} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích phần hình tròn (kí hiệu S) nằm bên ngoài hình lục giác là :

$$S = 6 \cdot S_{VP(\widehat{AB})} = 6 \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right).$$

Hay $S = 4\pi - 6\sqrt{3}$ (cm²).

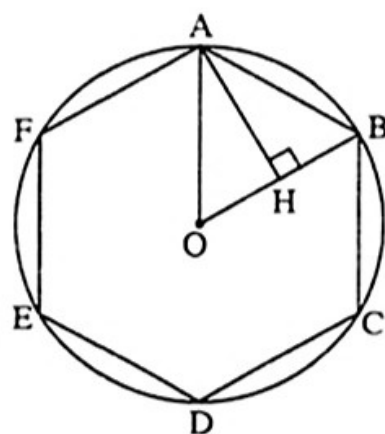
Ví dụ 2. Cho hai đường tròn đồng tâm (O ; 2cm) ; (O ; 3cm). Tính diện tích miền tô đen trong hình 118.

Giải. (h.118)

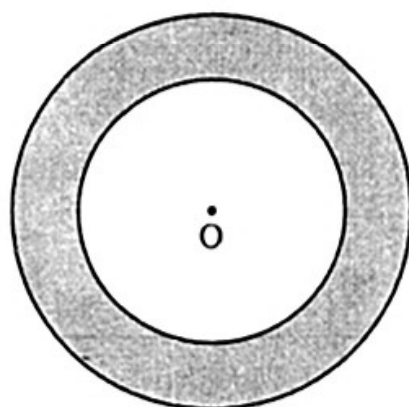
Gọi S_1 ; S_2 ; S là diện tích hình tròn (O ; 2cm), (O ; 3cm) và miền tô đen.

Thì ta có : $S = S_2 - S_1$

$$\Rightarrow S = \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 2^2 = 5\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 117



Hình 118

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O; R)$ nội tiếp hình vuông $ABCD$ và ngoại tiếp hình vuông $MNPQ$. Biết rằng $BD = 12$ cm. Tính diện tích phần tô đen.

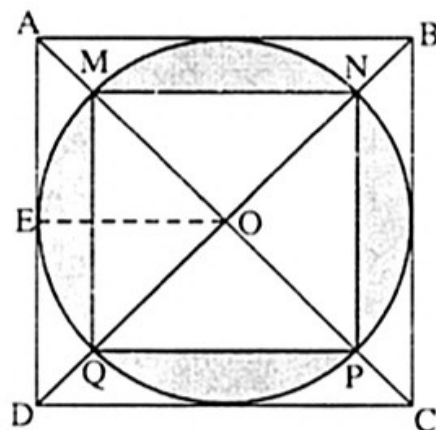
Giải. (h.119)

Để tính diện tích phần tô đen, ta chỉ cần tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung MQ và dây MQ .

$BD = 12$ cm thì $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $OE = 3\sqrt{2}$ cm.

Diện tích hình quạt $OMEQO$ là :

$$S_1 = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi (3\sqrt{2})^2 90}{360} = \frac{9\pi}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 119

Diện tích tam giác MOQ là : $S_2 = \frac{1}{2} OM.OQ = 9 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Do đó diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung MQ và dây MQ .

$$S_3 = S_1 - S_2 = \frac{9\pi}{2} - 9 = \frac{9(\pi - 2)}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

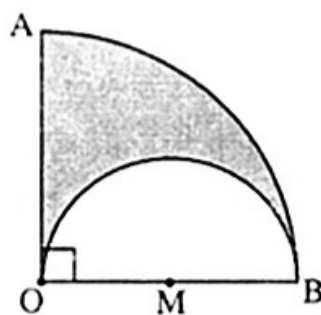
Vậy diện tích phần tô đen là $S = 4.S_3 = 18(\pi - 2) \text{ (cm}^2\text{)}.$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hình tròn $(O; 3\text{cm})$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn. Biết $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tính diện tích hình giới hạn bởi MA, MB và cung nhỏ AB .

2. Cho hình 120. Biết rằng $\widehat{AOB} = 90^\circ$;
 $OA = OB = 6\text{cm}.$

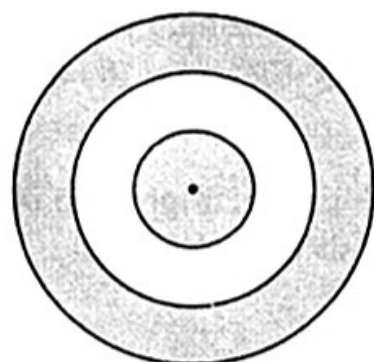
Tính diện tích phần tô đen.



Hình 120

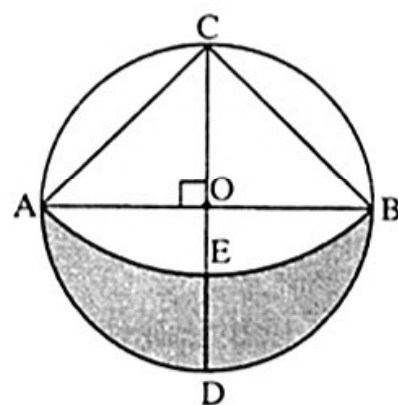
3. Trên đường tròn $(O; R)$ có hai điểm A, B sao cho $\widehat{AB} = 60^\circ$; Trên $(O'; R')$ có hai điểm C, D sao cho $\widehat{CD} = 45^\circ$. Biết rằng hai cung nhỏ AB và CD có độ dài bằng nhau. Tính tỉ số diện tích của hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$.

4. Một mục tiêu bắn súng hình tròn gồm các vành có bề rộng 1cm như hình 121. Bán kính đường tròn trong cùng là 1cm. Vậy diện tích vòng ngoài cùng lớn gấp mấy lần diện tích hình tròn trong cùng ?



Hình 121

5. Cho đường tròn $(O; R)$. Kẻ hai đường kính vuông góc với nhau AB và CD . Lấy C làm tâm, vẽ cung AB ở trong đường tròn (O) , cung này cắt CD ở E (hình 122).



Hình 122

- a) Tính diện tích hình lồi liềm $ADBEA$.
b) So sánh diện tích hình $ADBEA$ và diện tích $\triangle ABC$.
6. Cho tam giác đều, hình vuông và hình tròn có cùng chu vi. Hỏi diện tích hình nào lớn nhất?

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.123) $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Ta có : $MA = AO \cdot \tan \widehat{AOM} = 3\sqrt{3}$ (cm).

Diện tích tứ giác $MAOB$ là

$$S_1 = 2.S_{MAO} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot MA \cdot AO$$

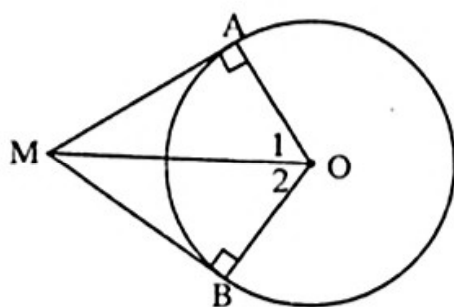
$$= 3\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích hình quạt OAB là :

$$S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi 9 \cdot 120}{360} = 3\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích hình giới hạn bởi MA, MB và cung nhỏ AB là

$$S = S_1 - S_q = 9\sqrt{3} - 3\pi = 3(3\sqrt{3} - \pi) \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 123

2. Diện tích hình quạt (OAB) là :

$$S_1 = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 90}{360} = 9\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích nửa hình tròn đường kính OB là :

$$S_2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2} \pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích phần tô đen là $S_1 - S_2 = 9\pi - \frac{9}{2}\pi = 4,5\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

3. Từ đề bài, ta có : $\frac{\pi R \cdot 60}{180} = \frac{\pi R' \cdot 45}{180}$ nên $\frac{R}{3} = \frac{R'}{4} \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{3}{4}.$

$$\text{Ta có : } \frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

4. Diện tích hình tròn ngoài cùng là : $S_1 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

Diện tích hình tròn thứ hai là : $S_2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

Do đó diện tích vành ngoài cùng là : $S_3 = S_1 - S_2 = 5\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

Diện tích hình tròn trong cùng là : $S_4 = \pi \cdot 1^2 = \pi \text{ (cm}^2\text{)}.$ Vậy ta có $S_3 = 5 \cdot S_4.$

5. a) Diện tích hình quạt ACB là : $S_q = \frac{\pi AC^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{2}.$

Diện tích ΔABC là : $S_\Delta = \frac{1}{2} AB \cdot OC = R^2.$

Diện tích nửa đường tròn đường kính AB là : $S_1 = \frac{\pi R^2}{2}.$

Do đó diện tích hình lưỡi liềm ADBEA là :

$$S = S_1 + S_\Delta - S_q = R^2.$$

b) Diện tích hình ADBEA và diện tích ΔABC bằng nhau.

6. Đặt chu vi mỗi hình là c.

Độ dài cạnh tam giác đều là $\frac{c}{3}.$ Do đó diện tích tam giác đều là :

$$S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{c^2 \sqrt{3}}{36}.$$

Độ dài cạnh hình vuông là $\frac{c}{4}.$ Do đó diện tích hình vuông là :

$$S_2 = a^2 = \frac{c^2}{16}.$$

Bán kính hình tròn là $R = \frac{c}{2\pi}$. Do đó diện tích hình tròn là :

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{c^2}{4\pi^2} = \frac{c^2}{4\pi}.$$

Ta có : $\frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{36} < \frac{c^2}{16} < \frac{c^2}{4\pi}.$

Vậy hình tròn có diện tích lớn nhất.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Các khái niệm cơ bản : Góc ở tâm, cung tròn, số đo cung.

2. Một số định lý cơ bản

- Liên hệ giữa cung và dây cung.
- Định lý và hệ quả về góc nội tiếp.
- Định lý và hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.
- Định lý về góc có đỉnh ở bên trong và bên ngoài đường tròn.
- Tính chất và dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp.
- Cung chứa góc.
- Công thức tính chu vi hình tròn và độ dài cung tròn.
- Công thức tính diện tích hình tròn, hình quạt tròn.

3. Bổ sung hệ thức lượng trong đường tròn

- Cho đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M kẻ hai đường thẳng. Đường thẳng thứ nhất cắt (O) tại A và B. Đường thẳng thứ hai cắt (O) tại C và D thì ta có hệ thức $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. (Hệ thức đúng cả hai trường hợp điểm M nằm bên trong và bên ngoài đường tròn).
- Cho đường tròn (O) và điểm M nằm bên ngoài đường tròn đó. Qua điểm M kẻ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB, thì ta có $MT^2 = MA \cdot MB$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

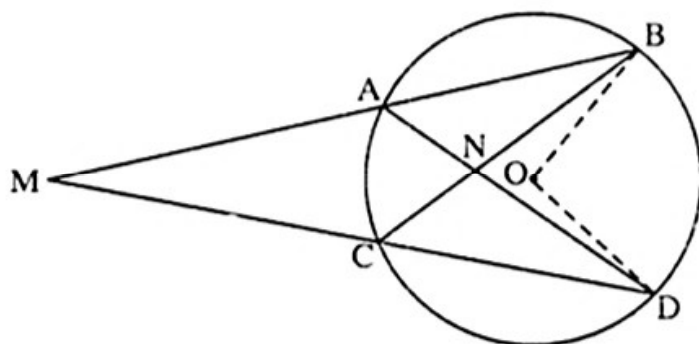
Dạng 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

Đối với những bài liên quan đến góc và đường tròn, bạn nên biểu diễn góc dưới dạng cung và ngược lại.

Ví dụ. Cho hình 124. Biết $\widehat{BMD} = 23^\circ$; $\widehat{CND} = 130^\circ$. Tính số đo $\widehat{BOD}$?

Giải.



Hình 124

Ta có $\widehat{CND} = 130^\circ$ thì $\widehat{BND} = 50^\circ$.

Áp dụng tính chất góc có đỉnh ở bên trong và bên ngoài đường tròn, ta có :

$$\widehat{BMD} + \widehat{BND} = \frac{\text{sd}\widehat{BD} - \text{sd}\widehat{AC} + \text{sd}\widehat{BD} + \text{sd}\widehat{AC}}{2}.$$

$$\text{Hay } 23^\circ + 50^\circ = \text{sd}\widehat{BD} \Rightarrow \text{sd}\widehat{BD} = 73^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{BOD} = 73^\circ.$$

Nhận xét. Bài toán này cho mối liên hệ giữa góc và cung :

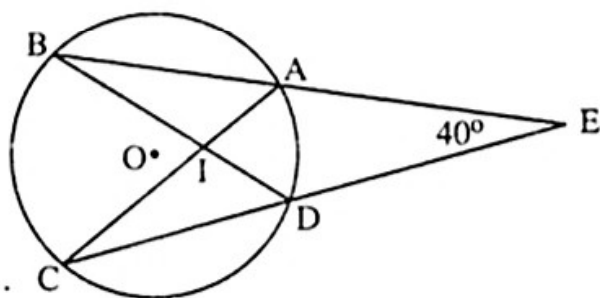
$$\widehat{BMD} + \widehat{BND} = \text{sd}\widehat{BD}, \quad \widehat{BND} - \widehat{BMD} = \text{sd}\widehat{AC}.$$

Ví dụ 2. Cho hình 125 biết $\widehat{E} = 40^\circ$ và các dây AB, BC, CD có cùng độ dài.

Tính số đo $\widehat{BIC}$?

Giải.

$$\text{Đặt } \text{sd}\widehat{AD} = x, \text{sd}\widehat{AB} = \text{sd}\widehat{BC} = \text{sd}\widehat{CD} = y.$$



Hình 125

$$\text{Ta có : } \begin{cases} 3y + x = 360^\circ \\ y - x = 80^\circ. \end{cases}$$

Giải ra ta có $y = 110^\circ$; $x = 30^\circ$.

$$\text{Vậy } \widehat{BIC} = \frac{110^\circ + 30^\circ}{2} = 70^\circ.$$

Dạng 2. BÀI TOÁN CÓ YẾU TỐ TIẾP TUYẾN

Phương pháp giải

Bài toán liên quan đến tiếp tuyến và cát tuyến, bạn lưu ý bài toán xuất hiện nhiều góc vuông, nhiều tứ giác nội tiếp do đó vận dụng khá nhiều kiến thức về tam giác đồng dạng và hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Ví dụ. Cho đường tròn $(O ; R)$ và điểm S ở ngoài đường tròn. Từ S vẽ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Vẽ đường thẳng a đi qua S cắt đường tròn tại M, N , với M nằm giữa hai điểm S và N (đường thẳng a không đi qua tâm O).

a) Chứng minh SO vuông góc với AB .

b) Gọi H là giao điểm của SO và AB . Gọi I là trung điểm của MN . Hai đường thẳng OI và AB cắt nhau tại E . Chứng minh tứ giác $IHSE$ nội tiếp.

c) Chứng minh $OI.OE = R^2$.

d) Cho biết $SO = 2R$ và $MN = R\sqrt{3}$. Tính diện tích ΔESM theo R .

Giải. (h.126)

a) Bạn đọc tự chứng minh.

b) Ta có : $\widehat{SHE} = 90^\circ$; $\widehat{SIE} = 90^\circ$

suy ra tứ giác $SHIE$ nội tiếp.

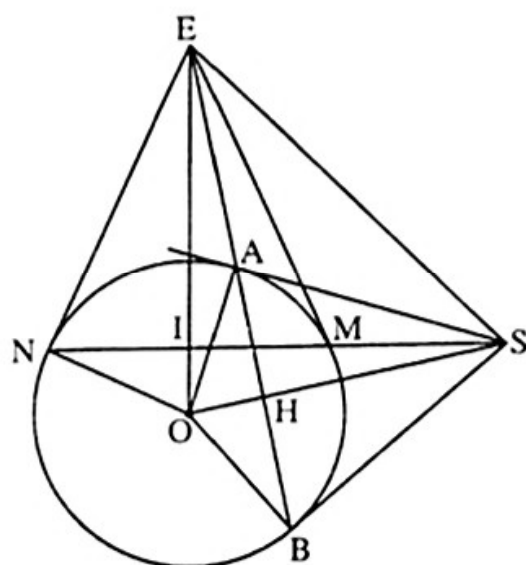
c) Ta chứng minh được :

$OI.OE = OH.OS$ (vì tứ giác $SEIH$ nội tiếp).

$OH.OS = OB^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Suy ra $OI.OE = OB^2$.

Hay $OI.OE = R^2$.



Hình 126

d) Vận dụng định lí Py-ta-go ta tính được : $OI^2 + IN^2 = ON^2$ nên $OI = \frac{R}{2}$.

Mà $OI.OE = R^2$ suy ra $OE = 2R \Rightarrow EI = \frac{3R}{2}$.

$$SI^2 + OI^2 = OS^2 \text{ nên } SI = \frac{R\sqrt{15}}{2} \Rightarrow SM = \frac{R(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{2}.$$

Vậy diện tích tam giác ESM là :

$$S = \frac{1}{2} SM.EI = \frac{3R^2(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{4}.$$

Nhận xét.

* Dựa vào câu c, bạn có thể chứng minh được EM là tiếp tuyến của đường tròn.

* Nếu đề bài có thêm yếu tố di động, ta có thêm câu hay và khó :

• Cho N, M, S cố định. Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi AB luôn đi qua điểm cố định.

• Cho N, M, (O) cố định. Chứng minh khi S di động trên tia đối của tia MN thì độ lớn góc MHN không đổi.

Dạng 3. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Phương pháp giải

- Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng, bạn có thể chứng minh ba điểm đó tạo thành một góc 180° .
- Muốn chứng minh ba đường thẳng đồng quy, bạn có thể chứng minh chúng là ba đường cao của một tam giác.

Ví dụ . Cho $\triangle ABC$ ($AC > AB$, $\widehat{BAC} > 90^\circ$). Gọi I, K thứ tự là trung điểm của AB, AC. Các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D ; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E ; tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp.

c) Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.

d) Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Hãy so sánh DH và DE.

Giải. (h.127)

a) Áp dụng góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, ta có :

$$\widehat{ADB} = 90^\circ ; \widehat{ADC} = 90^\circ$$

$$\text{Nên } \widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^\circ.$$

Vậy B, D, C thẳng hàng.

b) Áp dụng góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, ta có :

$$\widehat{BFA} = 90^\circ ; \widehat{CEA} = 90^\circ.$$

Nên $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} (= 90^\circ)$ suy ra E ; F là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau.

Vậy tứ giác BFEC nội tiếp.

c) Xét tam giác ABC có $AD \perp BC$; $BF \perp AC$; $CE \perp AB$, suy ra AD, BF, CE là ba đường cao. Vậy chúng cắt nhau (đồng quy) tại một điểm S.

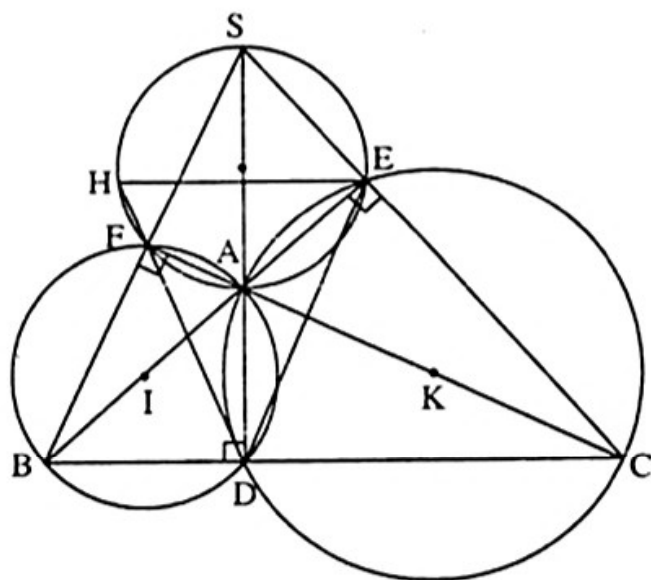
d) Ta có AEHF nội tiếp nên $\widehat{EHF} = \widehat{FAB}$ mặt khác $\widehat{FAB} = \widehat{FDB} \Rightarrow \widehat{EHF} = \widehat{FDB} \Rightarrow HE \parallel BC \Rightarrow AD \perp HE$ (1)

Vận dụng góc nội tiếp, tứ giác nội tiếp ta có :

$$\widehat{FDA} = \widehat{FBA} = \widehat{FCE} = \widehat{ADE}$$

$\Rightarrow DA$ là đường phân giác $\widehat{EDF}$ (2)

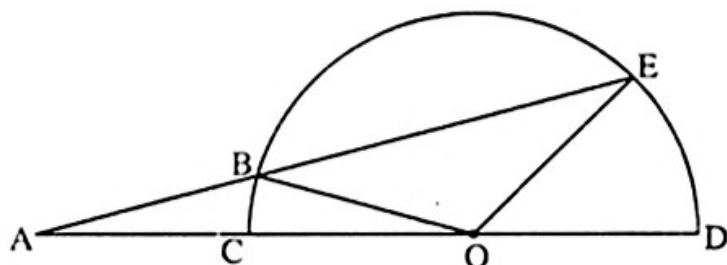
Từ (1) và (2) suy ra DEH cân tại D suy ra $DE = DH$.



Hình 127

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho hình 128. CD là đường kính của đường tròn tâm O. Biết $\widehat{EOD} = 45^\circ$ và $AB = OD$. Tính số đo góc BAO.

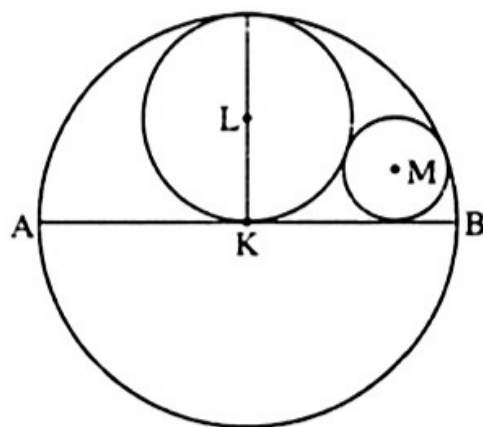


Hình 128

2. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây AC và BD vuông góc với nhau tại P khác O .
- Tính $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$ theo R .
 - Từ A và B kẻ các đường thẳng vuông góc xuống CD , cắt các dây BD, AC lần lượt tại K, M . Chứng minh tứ giác $AKMB$ là hình thoi.
3. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn tại M, N, P . Chứng minh $\frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF} = 4$.
4. Cho tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp tâm O . Cho P là một điểm bất kì trên đoạn BC sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác OBP cắt đoạn AB tại N khác B và đường tròn ngoại tiếp tam giác OCP cắt đoạn AC tại M khác C .
- Chứng minh rằng $\widehat{OPM} = \widehat{OAC}$.
 - Chứng minh rằng $\widehat{MPN} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{OBC} + \widehat{BAC} = 90^\circ$.
 - Chứng minh O là trực tâm tam giác PMN .

(TS 10, THPT chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội, năm học 2011 - 2012)

5. Trong hình 129, đường tròn (K) có đường tròn đường kính AB , đường tròn (L) tiếp xúc với đường tròn (K) và tiếp xúc với AB tại K ; đường tròn (M) tiếp xúc với đường tròn (K) , (L) và đoạn AB . Tỷ số diện tích hình tròn (K) và hình tròn (M) là bao nhiêu?



Hình 129

6. Cho tam giác ABM cân tại M nội tiếp đường tròn tâm O . Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho $MC = MB$. Nối AC cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D . Gọi E là điểm đối xứng của D qua A .
- Chứng minh rằng: $\widehat{BEC} = 2\widehat{ACB}$;
 - Chứng minh rằng: $CD \cdot CA = \frac{BC^2}{2}$.
 - Các tia BE và MA cắt nhau tại F . Chứng minh $AE = EF$ và $BF = AC$.

- d) Tam giác ABM cần có thêm điều kiện gì để tứ giác MDFE là hình bình hành ?
7. Cho góc vuông xOy và hai điểm A, B trên cạnh Ox (A nằm giữa O và B), điểm M bất kì trên cạnh Oy. Đường tròn (T) đường kính AB cắt tia MA, MB lần lượt tại điểm thứ hai là C, E. Tia OE cắt đường tròn (T) tại điểm thứ hai F.
- a) Chứng minh rằng bốn điểm O, A, E, M nằm trên một đường tròn, xác định tâm của đường tròn đó.
- b) Tứ giác OCFM là hình gì? Tại sao?
- c) Chứng minh hệ thức : $OE \cdot OF + BE \cdot BM = OB^2$.
- d) Xác định vị trí của điểm M để tứ giác OCFM là hình bình hành, tìm mối quan hệ giữa OA và AB để tứ giác là hình thoi.

(TS 10, THPT Chu Văn An và Hà Nội – Amsterdam, năm học 2004 – 2005)

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Đặt $\widehat{BAO} = x$ ta có $\widehat{EBO} = \widehat{BEO} = 2x$.

$$\text{Mà } \widehat{EAO} + \widehat{AEO} = \widehat{EOD} \Rightarrow \widehat{BAO} = 15^\circ.$$

2. (h.130) a) Áp dụng định lí Py-ta-go ta có :

$$AP^2 + BP^2 = AB^2 ;$$

$$CP^2 + PD^2 = CD^2 ;$$

– Vẽ CE là đường kính của đường tròn (O).

$$\text{Ta có } \widehat{CAE} = 90^\circ \Rightarrow AE \parallel BD \Rightarrow AB = ED.$$

$$\text{Suy ra } AB^2 + CD^2 = ED^2 + CD^2 = EC^2 = 4R^2.$$

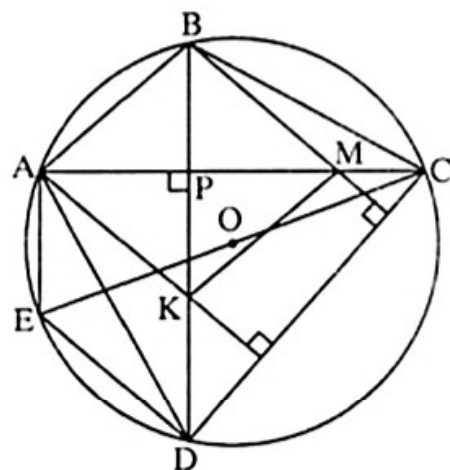
$$\text{Vậy } AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2.$$

b) Ta có $AK \perp CD$ nên $\widehat{CAK} = \widehat{PDC}$ (cùng phụ $\widehat{ACD}$) ;

$$\widehat{BAC} = \widehat{PDC} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{BC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{PAK} \text{ suy ra tam giác ABK cân tại A}$$

$$\Rightarrow BP = PK \quad (1)$$



Hình 130

– Tương tự ta có $AP = PM$ (2)

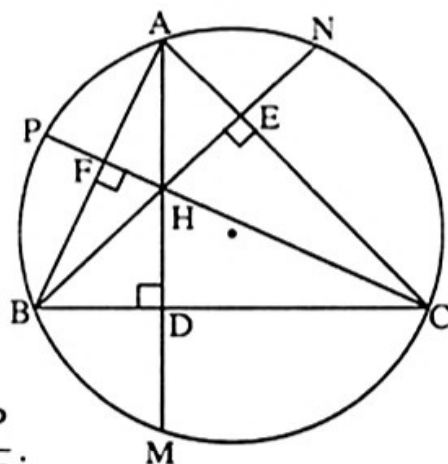
Từ (1) và (2) và $AM \perp BK$ nên $ABMK$ là hình thoi.

3. (h.131) Ta chứng minh được $HD = DM$;
 $FH = FP$; $EH = EN$.

Áp dụng tỉ số diện tích hai tam giác chung đáy, ta có :

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra : } \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF} &= 1 + \frac{DM}{AD} + 1 + \frac{EN}{BE} + 1 + \frac{FP}{CF} \\ &= 3 + \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 4. \end{aligned}$$



Hình 131

4. (h.132) a) Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác OPC, ta có $\widehat{OPM} = \widehat{OCM}$.

Tam giác OAC cân, nên $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$

suy ra $\widehat{OAC} = \widehat{OPM}$.

b) Tương tự câu trên ta có :

$$\widehat{OAB} = \widehat{OPN}.$$

$$\Rightarrow \widehat{MPN} = \widehat{OPM} + \widehat{OPN} = \widehat{OAC} + \widehat{OAB}$$

$$\text{hay } \widehat{MPN} = \widehat{BAC}.$$

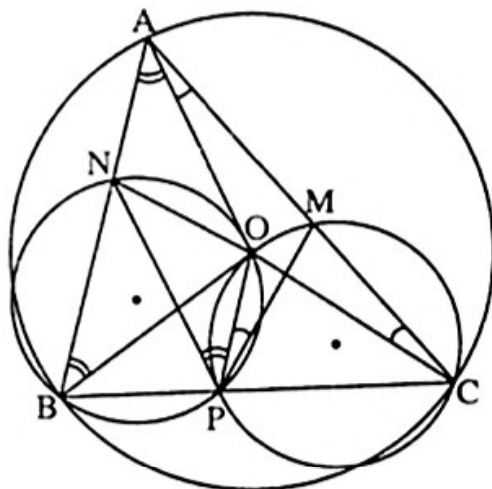
Tam giác OBC có $\widehat{BOC} + \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180^\circ$.

$$\text{Hay } 2.\widehat{BAC} + 2.\widehat{OBC} = 180^\circ.$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{OBC} = 90^\circ.$$

c) Ta có : $\widehat{ONP} = \widehat{OBP}$, $\widehat{NPM} = \widehat{BAC}$

$$\Rightarrow \widehat{ONP} + \widehat{NPM} = \widehat{OBP} + \widehat{BAC} = 90^\circ.$$



Hình 132

Hay $NO \perp PM$ (1)

Tương tự ta có : $\widehat{OMP} + \widehat{MPN} = 90^\circ$.

Hay $MO \perp NP$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra O là trực tâm của tam giác MNP.

5. Đáp số : 16.

6. (h.133) a) $MA = MB = MC$ nên tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow$ BD là đường kính của đường tròn (O).

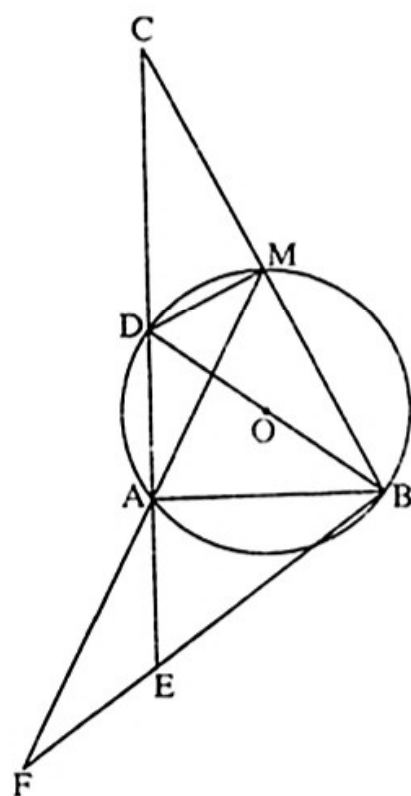
D, E đối xứng qua A mà $AB \perp DE$ nên tam giác BDE cân tại B $\Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{BDA}$ (1).

Mặt khác $\widehat{BAE} = 90^\circ$; $MC = MB$ nên tam giác BDC cân tại D $\Rightarrow \widehat{BDA} = 2.\widehat{BCD}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BEC} = 2.\widehat{ACB}$.

b) Ta có : tam giác CAM đồng dạng với tam giác CBD nên

$$CD.CA = CM.CB = \frac{BC^2}{2}.$$



Hình 133

c) Tam giác MAC cân tại M nên $\widehat{MCA} = \widehat{MAC}$; $\widehat{MAC} = \widehat{EAF}$

$\Rightarrow \widehat{BEC} = 2\widehat{EAF} \Rightarrow$ tam giác EAF cân tại E $\Rightarrow EA = EF$.

Ta có : $BD = BE$ nên $CD = BE$.

Mà $EF = AE$ nên $AD = EF$.

Suy ra $CD + AD = BE + EF$. Vậy $AC = BF$.

d) $AE = AD$.

MDFE là hình bình hành $\Leftrightarrow AM = AF \Leftrightarrow DM = DA$

$\Leftrightarrow$ tam giác ABM cân tại B.

Vậy tam giác ABM đều thì MDFE là hình bình hành.

7. (h.134) a) Bạn đọc tự giải.

b) Ta có : $\widehat{ACF} = \widehat{AEO} = \widehat{AMO}$
suy ra $CF \parallel MO$.

Vậy tứ giác OCFM là hình thang.

c) Ta có : $OE.OF = OA.OB$;

$$BE.BM = BA.BO.$$

Từ đó suy ra đpcm.

d) Gọi H là hình chiếu của C trên AB. Tứ giác OCFM là hình bình hành khi và chỉ khi $OM = 2.CH \Leftrightarrow OA = 2.AH$. Vị trí của điểm H hoàn toàn xác định nên vị trí của điểm M cũng hoàn toàn xác định.

Để OCFM là hình thoi thì điều kiện cần và đủ là $OA = 2AH$ và $OC = 2.CH$.

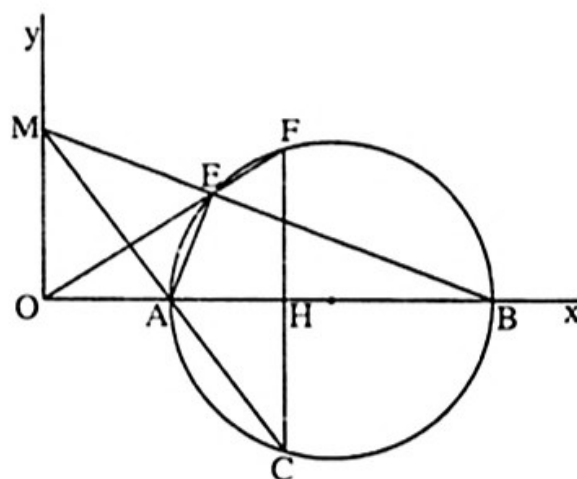
Ta có :

$$OC = 2 CH \Leftrightarrow OH^2 = 3CH^2$$

$$\Leftrightarrow OH^2 = 3.AH.HB$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}OA^2 = \frac{3}{2}.OA.\left(AB - \frac{1}{2}.OA\right)$$

$$\Leftrightarrow AB = 2.OA.$$



Hình 134

HÌNH TRỤ. HÌNH NÓN. HÌNH CẦU

§1. HÌNH TRỤ

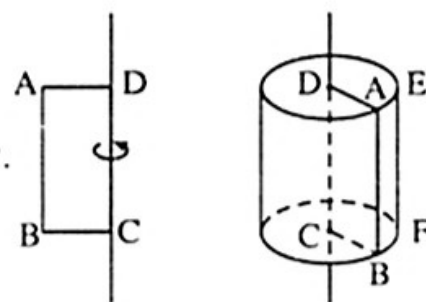
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Khi quay hình chữ nhật ABCD, một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một hình trụ, CD gọi là trục của hình trụ (h.135).

* Hai hình tròn (D) và (C) bằng nhau gọi là hai đáy.

* Cạnh AB quét nên mặt xung quanh của hình trụ. Mỗi vị trí của AB gọi là một đường sinh.

* Mỗi đường sinh đều vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài của đường sinh là chiều cao của hình trụ.



Hình 135

2. Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với đáy thì mặt cắt là một hình tròn bằng đáy.

Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục thì mặt cắt là một hình chữ nhật.

3. Diện tích xung quanh :

$$S_{xq} = 2\pi Rh ;$$

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2.$$

(R là bán kính đáy ; h là chiều cao).

4. Thể tích hình trụ : $V = S.h = \pi R^2 h.$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN BIẾT HÌNH TRỤ VÀ CÁC YẾU TỐ CỦA NÓ

Phương pháp giải

Xem trọng tâm kiến thức, phân cách tạo ra hình trụ.

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật ABCD, $AB = a$; $BC = b$. Hãy cho biết hai đáy và chiều cao của hình trụ khi cho hình chữ nhật này quay một vòng quanh :

- a) cạnh BC cố định ; b) cạnh CD cố định.

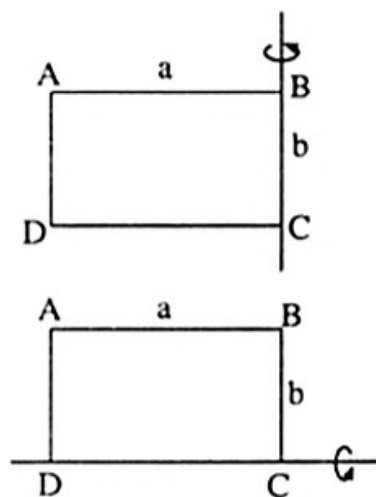
Giải. (h.136)

a) Khi hình chữ nhật ABCD, quay một vòng quanh cạnh BC cố định thì :

- Hai đáy là hai hình tròn ($B ; a$) và ($C ; a$).
- Chiều cao của hình trụ là b .

b) Khi hình chữ nhật ABCD quay một vòng quanh cạnh CD cố định thì :

- Hai đáy là hai hình tròn ($C ; b$) và ($D ; b$).
- Chiều cao của hình trụ là a .



Hình 136

Ví dụ 2. Một hình trụ có bán kính đáy là 4 cm và chiều cao là 10 cm. Nếu ta cắt bỏ hai đáy đi rồi cắt dọc theo một đường sinh của mặt xung quanh rồi trải phẳng ra, khi đó ta được một hình gì ? Cho biết kích thước của hình đó ?

Giải.

Sau khi cắt bỏ hai đáy và cắt dọc theo một đường sinh của mặt xung quanh rồi trải phẳng ra, ta được một hình chữ nhật có kích thước là :

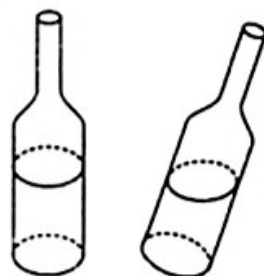
$$10 \text{ cm} \times 2\pi \cdot 4 \text{ cm hay } 10 \text{ cm} \times 8\pi \text{ cm}.$$

Ví dụ 3. Hình bên là một chai đựng nước đến lưng chừng. Hỏi :

- a) Cái chai có phải là một vật thể hình trụ không ?
b) Phần nước ở trong chai có dạng hình trụ không trong trường hợp chai để thẳng đứng và trong trường hợp chai để nghiêng ?

Giải. (h.137)

- a) Cái chai không phải là một vật thể hình trụ.



Hình 137

b) Trong trường hợp chai để thẳng đứng thì phần nước bên trong chai có dạng hình trụ.

Trong trường hợp, chai để nghiêng thì phần nước bên trong không có dạng hình trụ.

Dạng 2. TÍNH BÁN KÍNH, TÍNH CHIỀU CAO CỦA HÌNH TRỤ

Phương pháp giải

* Từ công thức : $S_{xq} = 2\pi Rh$ suy ra :

$$R = \frac{S_{xq}}{2\pi h} ; h = \frac{S_{xq}}{2\pi R}.$$

* Từ công thức $V = \pi R^2 h$ suy ra :

$$R = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} ; h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Ví dụ 1. Một thùng đựng nước hình trụ có chu vi đáy là 94,2 cm và thể tích bằng 18 369 cm³. Tính bán kính đáy và chiều cao của thùng.

Giải.

Chu vi đáy của thùng được tính theo công thức :

$$C = 2\pi R \text{ suy ra : } R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{94,2}{2.3,14} = 15 \text{ (cm).}$$

Vậy bán kính đáy thùng là 15 cm.

Từ công thức : $V = \pi R^2 h$.

$$\text{Suy ra : } h = \frac{V}{\pi R^2} \approx \frac{18369}{3,14.15^2} = 26 \text{ (cm).}$$

Vậy chiều cao của thùng là 26 cm.

Ví dụ 2. Một hộp bánh kẹo hình trụ có chiều cao 6 cm và diện tích toàn phần bằng 3 lần diện tích xung quanh. Tính bán kính đáy của hộp này.

Giải.

Ta có : $S_{tp} = 3.S_{xq}$

$$\Leftrightarrow 2\pi R(h + R) = 3.2\pi Rh \Leftrightarrow 6 + R = 3.6 \Leftrightarrow R = 12 \text{ (cm).}$$

Vậy bán kính của hộp này là 12 cm.

Ví dụ 3. Số đo diện tích xung quanh của một hình trụ (tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình trụ này.

Giải.

Theo đề bài ta có $2\pi Rh = \pi R^2 h$.

Chia hai vế cho πRh ta được : $R = 2$.

Vậy bán kính đáy của hình trụ là 2 cm.

Dạng 3. TÍNH DIỆN TÍCH XUNG QUANH, DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

Phương pháp giải

$$S_{xq} = 2\pi Rh ;$$

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 ;$$

$$V = \pi R^2 h.$$

Ví dụ 1. Mặt cắt qua trục của một hình trụ là một hình vuông có diện tích là 100 cm^2 . Hãy tính :

a) Diện tích xung quanh của hình trụ ;

b) Thể tích của hình trụ.

Giải.

a) Đường kính của hình tròn đáy cũng là chiều cao của hình trụ là :

$$h = 2R = \sqrt{100} = 10 \text{ (cm)}.$$

Bán kính đáy là : $R = 10 : 2 = 5 \text{ (cm)}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là :

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10 = 100\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) Thể tích của hình trụ là :

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Ví dụ 2. Một hộp sữa bột có dạng hình trụ, bán kính đáy bằng $\frac{2}{5}$ chiều cao. Biết thể tích của hộp sữa là $540\pi \text{ cm}^3$. Tính diện tích vỏ hộp (kể cả nắp).

Giải.

$$\text{Vì } R = \frac{2}{5}h \text{ nên } h = \frac{5}{2}R.$$

$$\text{Ta có : } V = \pi R^2 h \Leftrightarrow \pi \cdot R^2 \cdot \frac{5}{2}R = 540\pi \Leftrightarrow 5R^3 = 1080 \Leftrightarrow R^3 = 216$$

$$\Leftrightarrow R = 6 \text{ (cm).}$$

Diện tích toàn bộ vỏ hộp là :

$$S_{tp} = 2\pi R(h + R) = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot (15 + 6) = 252\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 3. Một cây nến hình trụ cao 20 cm và có đường kính đáy 24 mm. Hỏi cây nến này có thể thắp sáng được bao lâu nếu mỗi phút cháy hết $3,0144 \text{ cm}^3$ nến ?

Giải.

$$24 \text{ mm} = 2,4 \text{ cm.}$$

$$\text{Bán kính đáy của cây nến là : } 2,4 : 2 = 1,2 \text{ (cm).}$$

Thể tích của cây nến là :

$$V = \pi R^2 h \approx 3,14 \cdot (1,2)^2 \cdot 20 = 90,432 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thời gian thắp sáng của cây nến là :

$$90,432 : 3,0144 = 30 \text{ (phút).}$$

Ví dụ 4. Một hình chữ nhật có chu vi 50 cm và diện tích 150 cm^2 . Cho hình chữ nhật này quay một vòng quanh một cạnh cố định. Tính thể tích lớn nhất của hình trụ được tạo thành.

Giải.

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật này là x và y ($x \geq y$, tính bằng cm).

$$\text{Theo đề bài, ta có hệ phương trình : } \begin{cases} x + y = 50 \\ xy = 150. \end{cases}$$

$$\text{Giải ra ta được : } x = 15 ; y = 10.$$

Nếu cho hình chữ nhật này quay một vòng quanh cạnh 15 cm thì được hình trụ có thể tích là :

$$V_1 = \pi R_1^2 h_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Nếu cho hình chữ nhật này quay một vòng quanh cạnh 10 cm thì được một hình trụ có thể tích là :

$$V_2 = \pi R_2^2 h_2 = \pi \cdot 15^2 \cdot 10 = 2250\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vậy thể tích lớn nhất của hình trụ được tạo thành là $2250\pi \text{ cm}^3$.

Dạng 4. TÍNH THỂ TÍCH CỦA NHỮNG HÌNH HỖN HỢP TRONG ĐÓ CÓ MỘT BỘ PHẬN LÀ HÌNH TRỤ

Phương pháp giải

Tách hình hỗn hợp thành các bộ phận riêng biệt, tính thể tích của những bộ phận ấy rồi cộng hoặc trừ các số đo đó.

Ví dụ 1. Một viên than "tổ ong" hình trụ, có bán kính đáy là 6 cm, chiều cao 10 cm. Trên mỗi mặt đáy có 12 lỗ "tổ ong" ở vòng ngoài, có 6 lỗ "tổ ong" ở vòng trong và một lỗ ở chính tâm của đáy. Chiều cao của mỗi lỗ đúng bằng chiều cao của viên than, đường kính mỗi lỗ là 1 cm. Tính thể tích nhiên liệu của mỗi viên than.

Giải.

Thể tích của viên than (kể cả các "tổ ong") là :

$$V_1 = \pi R_1^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 10 = 360\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích của 19 lỗ "tổ ong" là :

$$V_2 = 19 \cdot \pi R_2^2 \cdot h = 19 \cdot \pi \cdot (0,5)^2 \cdot 10 = 47,5\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích nhiên liệu của mỗi viên than là :

$$V = 360\pi - 47,5\pi = 312,5\pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 981 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Ví dụ 2. Trong xây dựng người ta thường dùng gạch lỗ để xây tường cho nhẹ. Mỗi viên gạch dài 20 cm, rộng 10 cm và cao 5,5 cm. Dọc theo chiều dài mỗi viên, có hai lỗ hình trụ, mỗi lỗ có đường kính 3,6 cm. Tính thể tích đất để làm mỗi viên gạch (không kể đến độ co của đất khi nung).

Giải.

Thể tích của mỗi viên gạch là :

$$V_1 = 20 \cdot 10 \cdot 5,5 = 1100 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích của hai lỗ hình trụ là :

$$V_2 = 2 \cdot \pi R^2 h = 2 \cdot \pi \cdot (1,8)^2 \cdot 20 \approx 407 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích đất để làm mỗi viên gạch là :

$$V = 1100 - 407 = 693 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Một hình trụ có diện tích xung quanh là $80\pi \text{ cm}^2$ và thể tích là $160\pi \text{ cm}^3$. Tính bán kính đáy và chiều cao của hình trụ này.

2. Một hình trụ có chiều cao là 15 cm, và diện tích toàn phần là $252\pi \text{ cm}^2$. Tính bán kính đáy hình trụ.
3. Một bình đựng nước hình trụ có bán kính đáy là 12 cm, chiều cao của cột nước trong bình là 18 cm. Người ta cho một hòn đá vào trong bình và ngập hoàn toàn trong nước, chiều cao của cột nước bây giờ là 20 cm. Tính thể tích hòn đá.
4. Một chậu hình trụ, chiều cao 7 cm. Biết diện tích đáy của chậu bằng diện tích xung quanh. Hỏi chậu này có thể chứa được bao nhiêu lít nước ?
- 5.* Một lọ thuốc hình trụ đặt khít trong một hộp giấy hình hộp chữ nhật có thể tích là 200 cm^3 . Tính thể tích của lọ thuốc hình trụ.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. $S_{xq} = 2\pi Rh$; $V = \pi R^2 h$.

$$\frac{S_{xq}}{V} = \frac{2\pi Rh}{\pi R^2 h} \Rightarrow \frac{80\pi}{160\pi} = \frac{2}{R} \Rightarrow R = 4 \text{ (cm)}.$$

Từ đó tính được $h = 10 \text{ cm}$.

2. $2\pi Rh + 2\pi R^2 = 252\pi \Rightarrow R^2 + 15R - 126 = 0 \Rightarrow R_1 = 6$; $R_2 = -21$ (loại).

3. $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 12^2 \cdot 2 = 288\pi \approx 904,32 \text{ (cm}^3\text{)}.$

4. $\pi R^2 = 2\pi Rh \Rightarrow R = 2 \cdot h = 14 \text{ (cm)}.$

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 14^2 \cdot 7 \approx 4300 \text{ (cm}^3\text{)} = 4,3 \text{ (lít)}.$$

5.* Gọi bán kính đáy hình trụ là R , chiều cao là h .

Ta có $V_{\text{trụ}} = \pi R^2 h$; $V_{\text{hộp}} = (2R)^2 \cdot h = 4R^2 h$.

$$\frac{V_{\text{trụ}}}{V_{\text{hộp}}} = \frac{\pi R^2 h}{4R^2 h} = \frac{\pi}{4}.$$

Do đó : $\frac{V_{\text{trụ}}}{200} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow V_{\text{trụ}} = 50\pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 157 \text{ (cm}^3\text{)}.$

§2. HÌNH NÓN. HÌNH NÓN CỤT. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

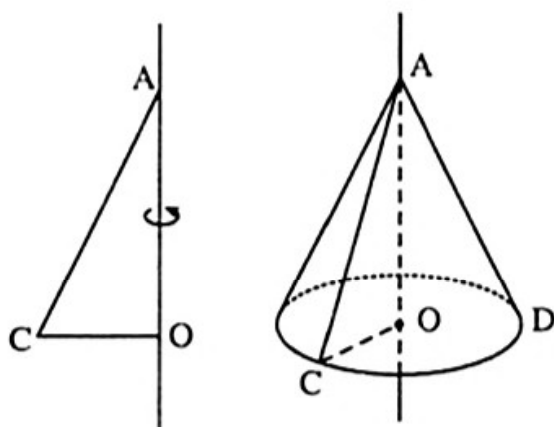
1. Khi quay tam giác vuông AOC một vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định thì được một hình nón (h.138).

* Hình tròn (O) gọi là đáy.

* Cạnh AC quét nên mặt xung quanh của hình nón.

Mỗi vị trí của AC gọi là một đường sinh.

* A gọi là đỉnh, AO gọi là đường cao của hình nón.



Hình 138

2. Diện tích xung quanh. Thể tích của hình nón

$$S_{xq} = \pi Rl ; S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 ; V = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

(R là bán kính đáy ; l là đường sinh ; h là chiều cao).

3. Hình nón cụt. Diện tích xung quanh và thể tích

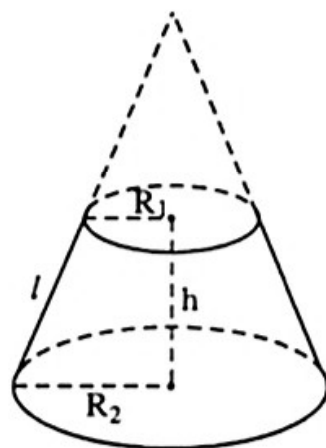
Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn.

Phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt đáy gọi là một hình nón cụt (h.139) :

$$S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)l ;$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$$

(R_1, R_2 là các bán kính đáy ; l là đường sinh, h là chiều cao).



Hình 139

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN BIẾT HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT VÀ CÁC YẾU TỐ CỦA NÓ

Phương pháp giải

Xem trong tâm kiến thức, phần cách tạo ra hình nón, hình nón cắt.

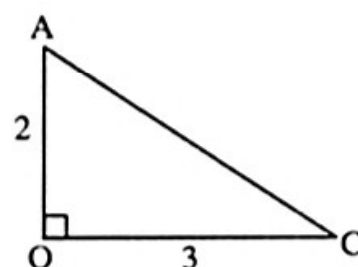
Ví dụ 1. Tam giác AOC vuông tại O, OA = 2 cm ; OC = 3 cm. Hãy cho biết đáy, đường cao của hình nón tạo thành khi quay tam giác này một vòng quanh cạnh :

- a) OA ; b) OC.

Giải. (h.140)

a) Khi quay tam giác AOC một vòng quanh cạnh OA, ta được một hình nón có đáy là hình tròn ($O ; 3\text{ cm}$), có đường cao là AO.

b) Khi quay tam giác AOC một vòng quanh cạnh OC, ta được một hình nón có đáy là hình tròn ($O ; 2\text{ cm}$), có đường cao là CO.



Hình 140

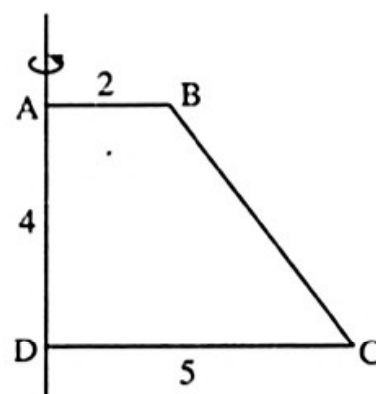
Ví dụ 2. Hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có AB = 2 cm ; CD = 5 cm và AD = 4 cm. Cho hình thang vuông này quay một vòng quanh cạnh AD cố định. Hãy cho biết :

- a) Hình tạo thành có dạng như thế nào ?
b) Độ dài của một số yếu tố của hình này.

Giải. (h.141)

a) Hình tạo thành là một hình nón cut.

b) Đáy nhỏ là hình tròn (A ; 2cm), đáy lớn là hình tròn (D ; 5cm), chiều cao 4cm. Dùng định lí Py-ta-go ta tính được đường sinh $BC \approx 5\text{cm}$.



Hình 141

Ví dụ 3. Từ một tấm bìa, một bạn cắt ra một hình quạt tròn có bán kính 50 cm và cung hình quạt có độ dài 20π cm. Bạn đó cuộn tròn hình quạt này theo góc ở tâm, rồi dán hai mép của hình quạt lại để thành một chiếc mũ. Hãy cho biết :

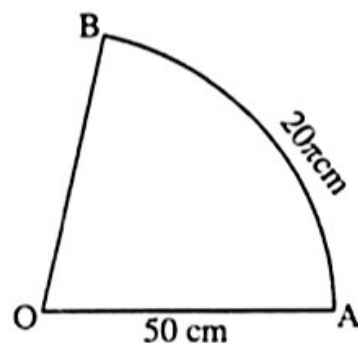
- a) Hình dạng của chiếc mũ này.
b) Đâu là một số yếu tố của chiếc mũ đó.

Giải. (h.142)

a) Chiếc mũ này là mặt xung quanh của một hình nón ;

b) Đường sinh của hình nón này dài 50 cm, đường tròn đáy có độ dài 20π cm, bán kính 10 cm.

Dùng định lí Py-ta-go có thể tính được chiều cao của mũ gần bằng 49 cm.



Hình 142

Dạng 2. TÍNH BÁN KÍNH, TÍNH CHIỀU CAO, TÍNH ĐƯỜNG SINH CỦA HÌNH NÓN

Phương pháp giải

* Từ công thức $S_{xq} = \pi Rl$ suy ra :

$$R = \frac{S_{xq}}{\pi l} ; l = \frac{S_{xq}}{\pi R}.$$

* Từ định lí Py-ta-go suy ra :

$$R = \sqrt{l^2 - h^2} ; l = \sqrt{R^2 + h^2} ; h = \sqrt{l^2 - R^2}.$$

* Từ công thức $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ suy ra :

$$R = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} ; h = \frac{3V}{\pi R^2}.$$

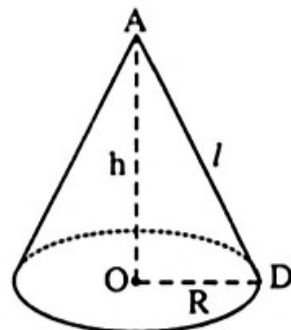
Ví dụ 1. Một hình nón có diện tích xung quanh là $80\pi \text{ cm}^2$, đường sinh là 10 cm. Tính bán kính đáy và chiều cao của hình nón.

Giải. (h.143)

* Từ công thức $S_{xq} = \pi Rl$, suy ra $R = \frac{S_{xq}}{\pi l}$.

Do đó $R = \frac{80\pi}{\pi \cdot 10} = 8 \text{ (cm)}.$

Vậy bán kính đáy của hình nón là 8 cm.



Hình 143

* Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có :

$$\begin{aligned}h^2 &= l^2 - R^2 \\ \Rightarrow h^2 &= 10^2 - 8^2 = 36 \\ \Rightarrow h &= 6 \text{ (cm)}.\end{aligned}$$

Vậy chiều cao của hình nón là 6 cm.

Ví dụ 2. Một hình nón có độ dài của vành nón là 36π cm và thể tích là 2592π cm³. Tính độ dài đường sinh và số đo nửa góc ở đỉnh của hình nón.

Giải. (h.144)

* Từ công thức $C = 2\pi R$ suy ra $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{36\pi}{2\pi} = 18$ (cm).

Vậy bán kính đáy của hình nón là 18 cm.

* Từ công thức $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ suy ra $h = \frac{3V}{\pi R^2}$.

Chiều cao của hình nón là $h = \frac{3 \cdot 2592\pi}{\pi \cdot 18^2} = 24$ (cm).

Độ dài của đường sinh là :

$$\begin{aligned}l &= \sqrt{h^2 + R^2} \\ \Rightarrow l &= \sqrt{24^2 + 18^2} = 30 \text{ (cm)}.\end{aligned}$$

* Gọi α là số đo nửa góc ở đỉnh của hình nón. Ta có :

$$\sin \alpha = \frac{R}{l} = \frac{18}{30} = 0,6 \approx \sin 36^\circ 52'.$$

Do đó $\alpha \approx 36^\circ 52'$.

Ví dụ 3. Một hình nón có chiều cao là $3\sqrt{3}$ cm và diện tích xung quanh bằng hai lần diện tích đáy. Tính bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón này.

Giải. (h.145)

Theo đề bài $S_{xq} = 2S_{\text{đáy}}$

suy ra $\pi R l = 2\pi R^2$.

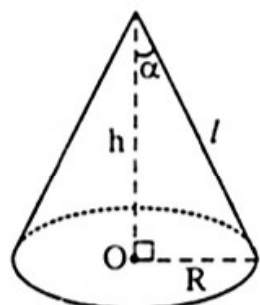
Do đó $l = 2R$.

Mặt khác $l^2 - R^2 = h^2$

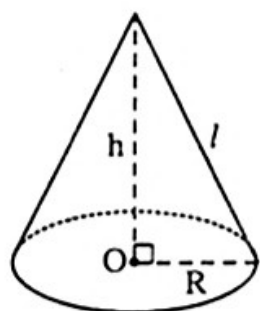
$$(2R)^2 - R^2 = (3\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow 3R^2 = 27 \Rightarrow R = 3 \text{ (cm)}.$$

Do đó $l = 2R = 6$ cm.



Hình 144



Hình 145

Dạng 3. TÍNH DIỆN TÍCH XUNG QUANH, DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN, TÍNH THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN VÀ HÌNH NÓN CỤT

Phương pháp giải

$$* \text{ Hình nón : } S_{xq} = \pi Rl ; S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 ; V = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

$$* \text{ Hình nón cụt : } S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)l ; V = \frac{1}{3} \pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2).$$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 15 cm ; AC = 8 cm. Quay tam giác này một vòng quanh cạnh AB cố định. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình tạo thành.

Giải. (h.146)

Hình tạo thành là một hình nón có bán kính đáy $R = 8$ cm ;

chiều cao $h = 15$ cm và độ dài đường sinh là : $l = \sqrt{h^2 + R^2}$

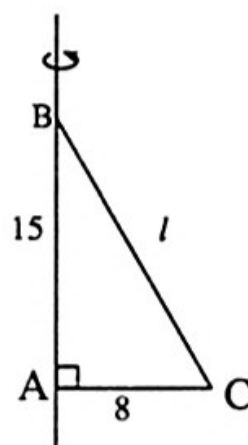
$$\Rightarrow l = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \text{ (cm)}.$$

Diện tích toàn phần của hình nón là :

$$\begin{aligned} S_{tp} &= \pi Rl + \pi R^2 \\ &= \pi \cdot 8 \cdot 17 + \pi \cdot 8^2 = 200\pi \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Thể tích của hình nón là :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 320\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Hình 146

Ví dụ 2. Một đồng cát hình nón có chu vi đáy là 10 m và chiều cao là 1,5 m. Tính thể tích đồng cát.

Giải.

$$\text{Từ công thức } C = 2\pi R \text{ suy ra } R = \frac{C}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \text{ (m)}.$$

$$\text{Vậy bán kính đáy đồng cát là : } \frac{5}{\pi} \text{ m.}$$

Thể tích đồng cát là :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 1,5 \approx 4 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Ví dụ 3. Một hình nón có bán kính đáy là 5 cm và thể tích là $100\pi \text{ cm}^3$. Tính diện tích toàn phần của hình nón này.

Giải.

Từ công thức $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ suy ra $h = \frac{3V}{\pi R^2}$.

Chiều cao của hình nón là : $h = \frac{3 \cdot 100\pi}{\pi \cdot 5^2} = 12 \text{ (cm)}.$

Độ dài của đường sinh là : $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (cm)}.$

Diện tích toàn phần của hình nón là :

$$S_{tp} = \pi R l + \pi R^2 = \pi \cdot 5 \cdot 13 + \pi \cdot 5^2 = 90\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 4. Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn có bán kính đường tròn miệng xô là 14 cm, bán kính đáy xô là 9 cm và đường sinh là 25 cm.

a) Hôì xô này có thể chứa được 10 lít nước không ?

b) Tính diện tích tôn để làm chiếc xô này.

Giải. (h.147)

Trong mặt phẳng $OABO'$ ta vẽ :

$BH \perp OA$ ta được : $OH = O'B = 9 \text{ cm}$;

$AH = 14 - 9 = 5 \text{ (cm)}$ và $OO' = BH$.

Ta có : $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 25^2 - 5^2 = 600.$

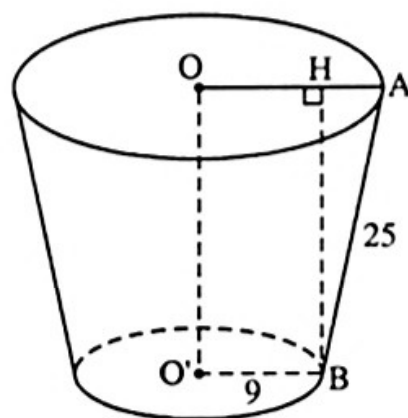
$\Rightarrow BH = 10\sqrt{6} \text{ (cm)}.$

a) Thể tích của xô là :

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot 10\sqrt{6} (14^2 + 9^2 + 14 \cdot 9) \approx 10\,332 \text{ (cm}^3\text{)} = 10,332 \text{ (dm}^3\text{)} = 10,332 \text{ (l)}.$$

Vậy xô này có thể chứa được 10 lít nước.



Hình 147

b) Diện tích xung quanh của chiếc xô là :

$$S_{xq} = \pi(R_1 + R_2).l = \pi(14 + 9).25 = 575\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích đáy xô là :

$$S_{\text{đáy}} = \pi R_2^2 = \pi.9^2 = 81\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích tôn để làm xô là :

$$S = 575\pi + 81\pi = 656\pi \text{ (cm}^2\text{)} \approx 2060 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Dạng 4. TÍNH DIỆN TÍCH, TÍNH THỂ TÍCH CỦA NHỮNG HÌNH HỖN HỢP TRONG ĐÓ CÓ MỘT BỘ PHẬN LÀ HÌNH NÓN

Phương pháp giải

Tách hình hỗn hợp thành các bộ phận riêng biệt, tính diện tích hoặc thể tích của những bộ phận ấy rồi cộng hoặc trừ các số đo đó.

Ví dụ 1. Một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy là 15 cm, chiều cao là 16 cm. Từ khúc gỗ này người ta tiện bỏ đi một hình nón có đáy là đáy của hình trụ và đỉnh là trung điểm của trục hình trụ.

a) Tính thể tích của phần còn lại của hình trụ ;

b) Tính diện tích mặt ngoài của phần còn lại của hình trụ.

Giải. (h.148)

a) Thể tích hình trụ là :

$$V_1 = \pi R^2 h = \pi.15^2.16 = 3600\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích hình nón là :

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.15^2.8 = 600\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích phần còn lại là :

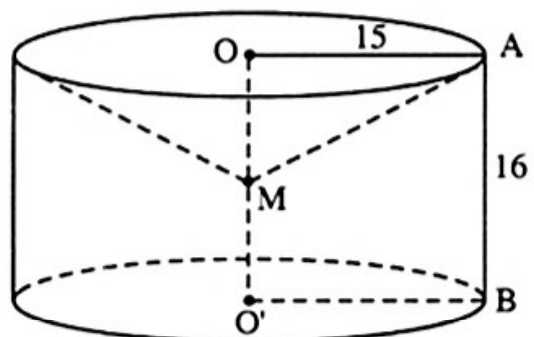
$$V = V_1 - V_2 = 3600\pi - 600\pi = 3000\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

b) Diện tích xung quanh của hình trụ là :

$$S_1 = 2\pi R.h = 2\pi.15.16 = 480\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích một đáy của hình trụ :

$$S_2 = \pi R^2 = \pi.15^2 = 225\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 148

Diện tích xung quanh của hình nón :

$$S_3 = \pi Rl = \pi.15\sqrt{15^2 + 8^2} = 255\pi (\text{cm}^2).$$

Tổng diện tích mặt ngoài là :

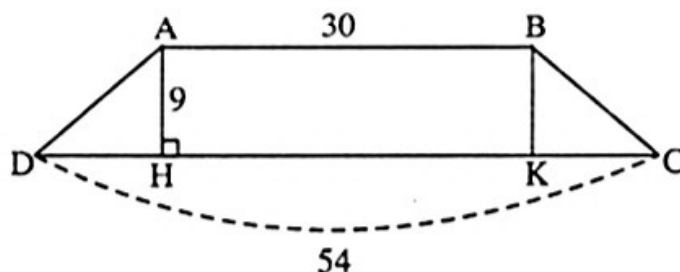
$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 480\pi + 225\pi + 255\pi = 960\pi (\text{cm}^2).$$

Ví dụ 2. Hình thang cân ABCD (AB // CD) có AB = 30 cm ; CD = 54 cm và đường cao AH = 9 cm. Cho hình thang này quay một vòng quanh cạnh đáy CD. Hãy tính :

a) Thể tích của hình tạo thành.

b) Diện tích mặt ngoài của hình tạo thành.

Giải. (h.149)



Hình 149

a) Vẽ thêm BK ⊥ CD ta tính được HD = KC = 12 cm ;

$$AD = BC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 (\text{cm}).$$

Khi quay hình thang một vòng quanh cạnh CD thì hình tạo thành gồm một hình trụ, hai đầu là hai hình nón cùng đáy với đáy hình trụ.

Thể tích phần hình trụ là :

$$V_1 = \pi R^2 h_1 = \pi.9^2.30 = 2430\pi (\text{cm}^3).$$

Thể tích hai hình nón ở hai đầu là :

$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h_2 = \frac{2}{3} \pi.9^2.12 = 648\pi (\text{cm}^3).$$

Thể tích của hình tạo thành là :

$$V = V_1 + V_2 = 2430\pi + 648\pi = 3078\pi (\text{cm}^3).$$

b) Diện tích xung quanh của phần hình trụ là :

$$S_1 = 2\pi R h_1 = 2 \cdot \pi.9.30 = 540\pi (\text{cm}^2).$$

Diện tích xung quanh của hai hình nón là :

$$S_2 = 2.\pi Rl = 2\pi.9.15 = 270\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích mặt ngoài của hình tạo thành là :

$$S = S_1 + S_2 = 540\pi + 270\pi = 810\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Người ta cuộn một tấm bìa hình quạt có bán kính 24 cm và số đo của cung tròn là 270° được một hình nón rồi dán hai mép lại với nhau. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.
- 2.* Một hình nón có bán kính đáy là 40 cm. Cắt hình nón này bằng một mặt phẳng song song với đáy ta được một hình nón cắt có bán kính đáy nhỏ là 24 cm và đường cao là 30 cm. Hãy tính :
 - a) Độ dài đường sinh của hình nón cắt.
 - b) Diện tích xung quanh của hình nón cắt.
 - c) Thể tích của hình nón nhỏ bị cắt ra.
3. Một hình nón có thể tích là 24 dm^3 . Cắt hình nón này bằng một mặt phẳng song song với đáy, đi qua trung điểm của đường cao. Tính thể tích của hình nón cắt được tạo thành.
4. Một hình nón có số đo nửa góc ở đỉnh là 30° . Chứng minh rằng hình nón này có diện tích xung quanh bằng hai lần diện tích đáy.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Diện tích xung quanh của hình nón chính là diện tích hình quạt :

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi.24^2.270}{360} = 423\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Độ dài cung hình quạt hay chu vi đáy của hình nón là :

$$l = \frac{\pi.R.n}{180} = \frac{\pi.24.270}{180} = 36\pi \text{ (cm)}.$$

Bán kính đường tròn đáy là : $R = 36\pi : 2\pi = 18 \text{ (cm)}$.

Chiều cao của hình nón là : $h = \sqrt{24^2 - 18^2} = 6\sqrt{7}$ (cm).

Thể tích hình nón tạo thành là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 18^2 \cdot 6\sqrt{7} = 648\sqrt{7}\pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 5383 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

2.* (h.150) a) Trong mặt phẳng AOB vẽ $CH \perp OB$

ta được : $HB = 40 - 24 = 16$ (cm) ;

$$CB = \sqrt{CH^2 + HB^2} = \sqrt{30^2 + 16^2} = 34 \text{ (cm)}.$$

Vậy đường sinh của hình nón cắt là 34 cm.

b) Diện tích xung quanh của hình nón cắt là :

$$\begin{aligned} S &= \pi(R + R') \cdot l \\ &= \pi(40 + 24) \cdot 34 = 2176\pi \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

c) Gọi x là chiều cao của hình nón nhỏ. Ta có :

$$\frac{x}{x + 30} = \frac{24}{40} \Rightarrow x = 45 \text{ (cm)}.$$

Thể tích của hình nón nhỏ là :

$$V = \frac{1}{3} \pi R'^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 24^2 \cdot 45 = 8640\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

3. Bạn đọc tự chứng minh $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h}{\frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 2h} = \frac{r^2}{2R^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} \cdot 24 = 3 \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Từ đó suy ra thể tích hình nón cắt được tạo thành là :

$$V_2 = V - V_1 = 21 \text{ (dm}^3\text{)}.$$

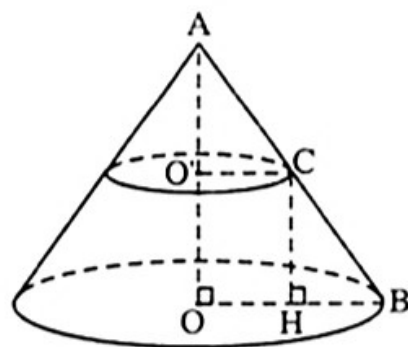
4. (h.151) Gọi bán kính đáy là R suy ra độ dài đường sinh là :

$$l = \frac{R}{\sin 30^\circ} = 2R.$$

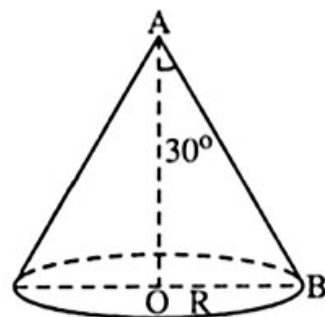
$$\text{Ta có : } S_{\text{đáy}} = \pi R^2 \quad (1).$$

$$S_{\text{xq}} = \pi R l = \pi \cdot R \cdot 2R = 2\pi R^2. \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.



Hình 150



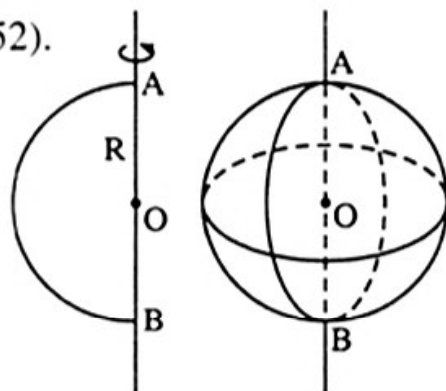
Hình 151

§3. HÌNH CẦU.

DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Khi quay nửa hình tròn (O ; R) một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu (h.152).
* Nửa hình tròn khi quay quét nên mặt cầu.
* Điểm O gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu hay mặt cầu.
2. Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng thì mặt cắt là một hình tròn.
3. Diện tích mặt cầu : $S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$.
(R là bán kính ; d là đường kính).
4. Thể tích hình cầu : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.



Hình 152

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH BÁN KÍNH HÌNH CẦU

Phương pháp giải

$$* \text{ Từ công thức } S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}.$$

$$* \text{ Từ công thức } V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Ví dụ 1. Một "phao cơ" hình cầu tự động đóng nước chảy vào bể khi bể đầy. Biết diện tích bề mặt của phao là 804 cm^2 , tính bán kính của phao.

Giải.

$$\text{Từ công thức : } S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}.$$

$$\text{Bán kính của phao là : } R = \sqrt{\frac{804}{4\pi}} \approx 8 \text{ (cm)}.$$

Ví dụ 2. Phần trên của một chiếc cốc chân cao có dạng nửa hình cầu. Biết cốc này có thể chứa được 56,5 ml nước. Tính đường kính của miệng cốc.

Giải.

Vì dung tích của cốc là 56,5 ml nên thể tích của cốc là 56,5 cm³.

Ta có $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ do đó có thể tích của nửa hình cầu là $\frac{2}{3}\pi R^3$.

Theo đề bài ta có : $\frac{2}{3}\pi R^3 = 56,5 \Rightarrow R^3 = \frac{3.56,5}{2\pi} \approx 27 \text{ (cm}^3\text{)}.$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ (cm)}.$$

Vậy đường kính của miệng cốc là $3.2 = 6 \text{ (cm)}.$

Dạng 2. TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

Phương pháp giải

Vận dụng công thức :

$$S = 4\pi R^2 ; \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ví dụ 1. Một trái dưa có dạng hình cầu. Bỏ đôi trái dưa này ra thì mặt cắt có diện tích là 314 cm². Tính thể tích của trái dưa đó.

Giải.

Khi bỏ đôi trái dưa thì mặt cắt là một hình tròn.

Ta có : $S = \pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{314}{3,14}} = 10 \text{ (cm)}.$

Vậy bán kính của trái dưa là 10 cm.

Thể tích của trái dưa là :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.10^3 \approx 4187 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Ví dụ 2. Trái đất có bán kính 6400 km. Diện tích biển và đại dương chiếm $\frac{3}{4}$ bề mặt trái đất. Hãy tính diện tích biển và đại dương của trái đất (làm tròn đến triệu km²).

Giải.

Diện tích bề mặt trái đất là :

$$S = 4\pi R^2 = 4.\pi.6400^2 \approx 514\,457\,600 \text{ (km}^2\text{)}.$$

Diện tích biển và các đại dương là :

$$514\,457\,600.\frac{3}{4} \approx 386\,000\,000 \text{ (km}^2\text{)}.$$

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD $\perp$ AB tại H. Cho biết CD = 12 cm và AH = 4 cm. Quay đường tròn này một vòng quanh AB. Tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu được tạo thành.

Giải. (h.153)

Vẽ các đoạn thẳng CA, CB ta được : $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

Vì AB $\perp$ CD nên HC = HD = 6 cm.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông,

ta có : $CH^2 = HA.HB$.

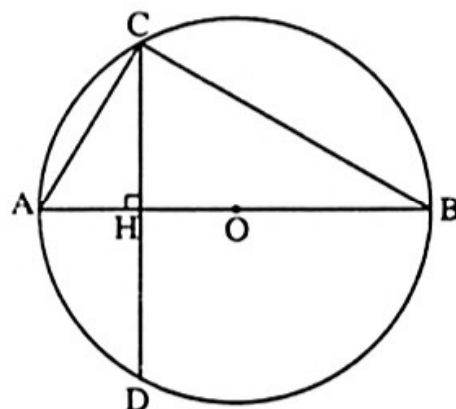
$$\text{Suy ra : } HB = \frac{CH^2}{HA} = \frac{6^2}{4} = 9 \text{ (cm)}.$$

Do đó bán kính của đường tròn là : $(4 + 9) : 2 = 6,5 \text{ (cm)}$,

bán kính của hình cầu là 6,5 cm.

Diện tích mặt cầu là : $S = 4\pi R^2 = 4.\pi.(6,5)^2 \approx 531 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Thể tích hình cầu là : $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}.\pi.(6,5)^3 \approx 1150 \text{ (cm}^3\text{)}.$



Hình 153

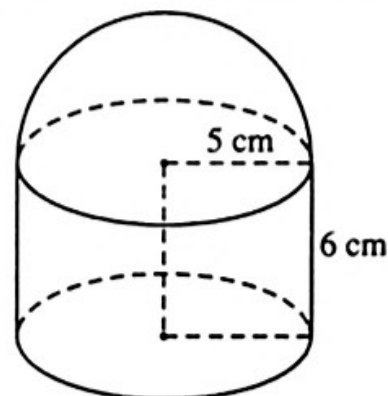
Dạng 3. TÍNH DIỆN TÍCH, TÍNH THỂ TÍCH CỦA NHỮNG HÌNH HỖN HỢP TRONG ĐÓ CÓ MỘT BỘ PHẬN LÀ HÌNH CẦU

Phương pháp giải

Tách hình hỗn hợp thành các bộ phận riêng biệt, tính diện tích hoặc thể tích của những bộ phận ấy rồi cộng hoặc trừ các số đo đó.

Ví dụ 1. Hình bên minh họa bộ phận lọc của một bình lọc nước. Bộ phận này gồm một hình trụ và một nửa hình cầu với kích thước ghi trên hình. Hãy tính :

- Thể tích của bộ phận đó ;
- Diện tích mặt ngoài của bộ phận này.



Hình 154

Giải. (h.154)

a) Thể tích phần hình trụ là : $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 150\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

Thể tích nửa hình cầu :

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 5^3 = \frac{250}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích của bộ phận lọc là :

$$V = V_1 + V_2 = 150\pi + \frac{250}{3} \pi = \frac{700}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 733 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

b) Diện tích xung quanh hình trụ là :

$$S_1 = 2\pi R h = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 = 60\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích đáy hình trụ là :

$$S_2 = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích nửa mặt cầu là :

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 50\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích mặt ngoài của bộ phận lọc :

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 60\pi + 25\pi + 50\pi = 135\pi \text{ (cm}^2\text{)} \approx 424 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O ; R) ngoại tiếp tam giác đều ABC. Quay đường tròn này một vòng quanh đường kính AOD ta được một hình cầu ngoại tiếp một hình nón. Tính thể tích phần bên trong hình cầu và bên ngoài hình nón.

Giải. (h.155)

Độ dài cạnh của tam giác đều là : $AB = R\sqrt{3}.$

Bán kính đáy hình nón là : $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$

Chiều cao của hình nón là : $h = \frac{R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}.$

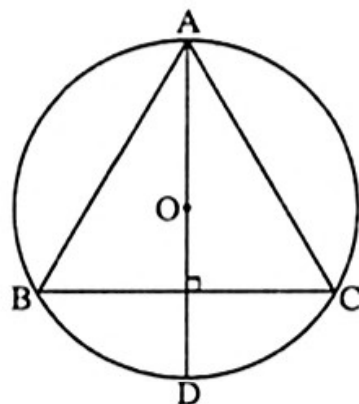
Thể tích hình cầu là : $V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3.$

Thể tích của hình nón là :

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3}{2} R = \frac{3}{8} \pi R^3.$$

Thể tích phần cần tìm là :

$$V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{3}{8} \pi R^3 = \frac{23}{24} \pi R^3.$$



Hình 155

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Bạn An lấy thước dây đo vòng theo đường xích đạo của quả địa cầu trong thư viện được độ dài 94,2 cm. Hãy tính :
 - a) Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu.
 - b) Thể tích của quả địa cầu.
2. Quả bóng bàn có số đo diện tích bề mặt (tính bằng cm^2) gấp 1,5 lần số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính, diện tích và thể tích của quả bóng bàn.
3. Một hình cầu đặt vừa khít trong một hình trụ có chiều cao là 18 cm. Tính thể tích phần không gian nằm trong hình trụ nhưng nằm ngoài hình cầu.
- 4.* Một trái bưởi hình cầu, có đường kính 18 cm. Lớp vỏ dày 1 cm. Tính thể tích của lớp vỏ bưởi.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Bán kính của đường tròn xích đạo là :

$$R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{94,2}{2.3,14} = 15(\text{cm}).$$

Đáp số: a) $900\pi \text{ cm}^2$; b) $4500\pi \text{ cm}^3$.

2. $4\pi R^2 = 1,5 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = 2(\text{cm}).$

Đáp số: $16\pi \text{ cm}^2$; $\frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$.

3. Vì hình cầu đặt vừa khít trong hình trụ nên chiều cao của hình trụ bằng đường kính đáy và bằng đường kính của hình cầu.

Bán kính hình cầu là 9 cm.

Tính thể tích hình trụ, hình cầu rồi tính hiệu.

Đáp số: $486\pi \text{ cm}^3 \approx 1526 \text{ cm}^3$.

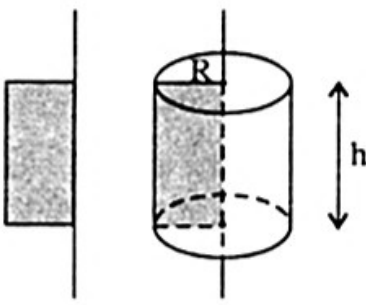
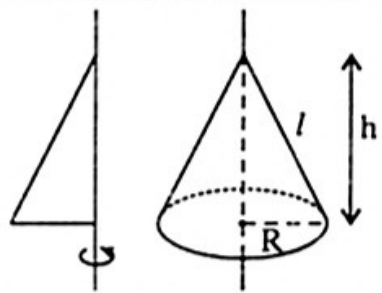
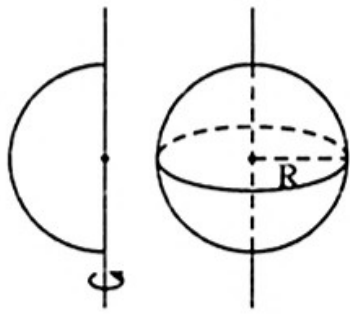
- 4.* Bán kính trái bưởi là 9 cm. Bán kính trái bưởi sau khi gọt hết vỏ là $9 - 1 = 8 \text{ cm}$.

Thể tích của lớp vỏ bưởi là :

$$V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = \frac{4}{3}\pi \cdot (9^3 - 8^3) \approx 909 (\text{cm}^3).$$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Hình	Hình vẽ	Diện tích xung quanh	Thể tích
Hình trụ		$S_{xq} = 2\pi Rh$	$V = \pi R^2 h$
Hình nón		$S_{xq} = \pi R l$	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$
Hình cầu		$S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH ĐỘ DÀI MỘT SỐ YẾU TỐ CỦA HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN, HÌNH CẦU

Phương pháp giải

Từ các công thức tính S , tính V của các hình suy ra độ dài cần tìm.

Ví dụ 1. Hình 156 minh họa một chi tiết máy gồm một hình trụ và một hình nón chung đáy. Các kích thước được ghi trong hình. Biết diện tích xung quanh phần hình nón bằng diện tích xung quanh phần hình trụ. Tính bán kính đáy hình trụ.

Giải. (h.156)

Gọi bán kính đáy hình nón là R .

Độ dài đường sinh của hình nón là :

$$l = \sqrt{R^2 + 100}.$$

Diện tích xung quanh hình nón là :

$$S_1 = \pi R \cdot \sqrt{R^2 + 100}.$$

Diện tích xung quanh hình trụ là :

$$S_2 = 2\pi R \cdot 10 = 20\pi R.$$

Vì $S_1 = S_2$ nên

$$\begin{aligned} \pi R \sqrt{R^2 + 100} &= 20\pi R \\ \Rightarrow \sqrt{R^2 + 100} &= 20 \Rightarrow R^2 + 100 = 400 \\ \Rightarrow R^2 &= 300 \Rightarrow R = 10\sqrt{3} \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

Vậy bán kính đáy hình trụ là $10\sqrt{3}$ cm.

Ví dụ 2. Đường sinh của một hình trụ và đường sinh của một hình nón cùng có độ dài là $6\sqrt{2}$ cm. Đường kính đáy hình trụ bằng chiều cao của hình nón. Biết diện tích xung quanh của hai hình này bằng nhau. Tính bán kính đáy và chiều cao hình nón.

Giải. (h.157)

Gọi bán kính đáy của hình trụ là x ,

gọi bán kính đáy của hình nón là y .

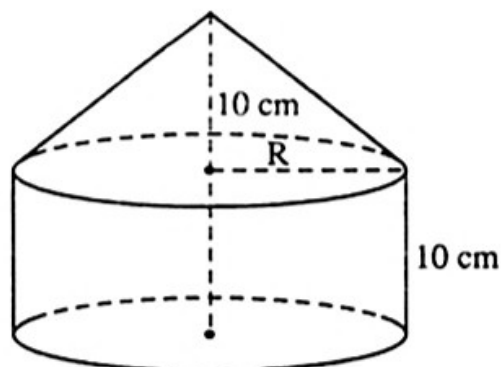
Ta có chiều cao của hình nón là $2x$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là :

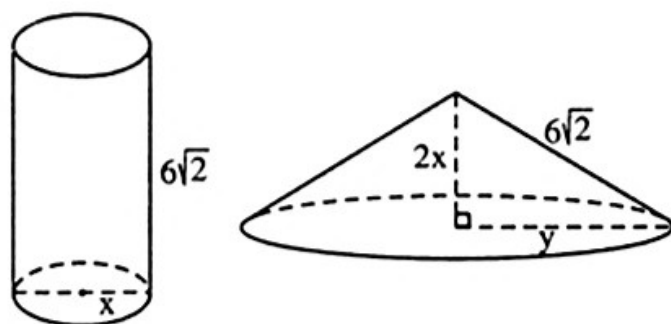
$$S_1 = 2\pi x \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\pi x.$$

Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_2 = \pi \cdot y \cdot 6\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\pi y.$$



Hình 156



Hình 157

Vì $S_1 = S_2$ nên $12\sqrt{2}\pi x = 6\sqrt{2}\pi y \Rightarrow y = 2x$.

Áp dụng định lí Py-ta-go ta có :

$$\begin{aligned}(2x)^2 + (2x)^2 &= (6\sqrt{2})^2 \\ \Rightarrow 8x^2 &= 72 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ (cm)}.\end{aligned}$$

Vậy bán kính đáy hình nón là 6 cm.

Chiều cao của hình nón là 6 cm.

Ví dụ 3. Ba vật thể có dạng hình cầu, hình trụ, hình nón. Hình trụ, hình nón cùng có bán kính đáy là 6 cm và bán kính hình cầu cũng là 6 cm. Biết ba vật thể này có cùng thể tích. Hãy tính :

- a) Chiều cao của hình trụ, chiều cao của hình nón ;
- b) Độ dài đường sinh của hình nón.

Giải.

- a) Thể tích hình cầu (cũng là thể tích của hình trụ, hình nón) :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

* Xét hình trụ có $V = \pi R^2 h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{288\pi}{\pi \cdot 6^2} = 8 \text{ (cm)}.$

* Xét hình nón có $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{3V}{\pi R^2} = \frac{3 \cdot 288\pi}{\pi \cdot 6^2} = 24 \text{ (cm)}.$

- b) Độ dài đường sinh của hình nón là :

$$l = \sqrt{24^2 + 6^2} = 6\sqrt{17} \approx 24,74 \text{ (cm)}.$$

Dạng 2. TÍNH DIỆN TÍCH, TÍNH THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN, HÌNH CẦU

Phương pháp giải

Xác định dạng của hình rồi vận dụng các công thức tính diện tích, tính thể tích của hình đó.

Ví dụ 1. Từ một khối gỗ hình lập phương, người ta tiện thành một hình cầu lớn nhất. Biết thể tích của hình lập phương là 1728 cm^3 . Tính thể tích phần gỗ bị tiện bỏ đi.

Giải.

Muốn cho hình cầu lớn nhất thì đường kính của nó phải bằng cạnh của hình lập phương.

Độ dài mỗi cạnh của hình lập phương là : $a = \sqrt[3]{1728} = 12 \text{ (cm)}$.

Bán kính hình cầu là : $R = 12 : 2 = 6 \text{ (cm)}$.

Thể tích hình cầu là : $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích phần gỗ bị tiện bỏ đi là : $1728 - 288\pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 823 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Ví dụ 2. Một hình cầu nội tiếp trong một hình trụ. Cho biết diện tích toàn phần của hình trụ là 120 cm^2 . Tính :

a) Diện tích mặt cầu ;

b) Thể tích hình trụ.

Giải.

a) Gọi bán kính hình cầu là R thì bán kính đáy hình trụ là R và chiều cao hình trụ là $2R$.

Ta có : $2\pi Rh + 2\pi R^2 = 120$

$$\Rightarrow 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 120 \text{ (vì } h = 2R\text{)}$$

$$\Rightarrow 6\pi R^2 = 120 \Rightarrow \pi R^2 = 20 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Do đó diện tích mặt cầu là : $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot 20 = 80 \text{ (cm}^2\text{)}$.

$$\text{b) Ta có : } \pi R^2 = 20 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{20}{\pi}} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Vậy thể tích hình trụ là : } V = \pi R^2 h = 20 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{20}{\pi}} \approx 101 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Ví dụ 3. Một hình trụ nội tiếp trong một hình nón. Chiều cao của hình trụ bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của hình nón. Tính tỉ số thể tích của hình trụ và hình nón.

Giải. (h.158)

Hình 158 vẽ mặt cắt đi qua trục của hình nón.

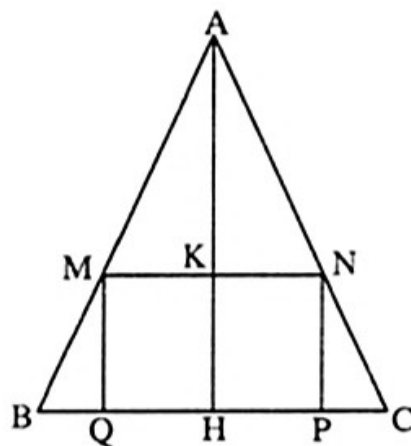
Gọi h là chiều cao của hình trụ thì chiều cao của hình nón là $3h$.

$$\text{Ta có : } \frac{KN}{HC} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{2}{3}.$$

Thể tích hình trụ là $V_1 = \pi r^2 h$.

Thể tích hình nón là : $V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 3h = \pi R^2 h$.

$$\text{Do đó : } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi R^2 h} = \frac{r^2}{R^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$



Hình 158

Ví dụ 4. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 15$ cm. Vẽ các dây CA và CB sao cho $CA = 9$ cm. Quay nửa đường tròn này một vòng quanh cạnh BC cố định ta được một hình cầu và hai hình nón nội tiếp. Hãy tính :

- Diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu.
- Tổng thể tích của hai hình nón.
- Thể tích phần không gian bên trong hình cầu và bên ngoài hai hình nón.

Giải. (h.159)

a) Bán kính hình cầu là : $R = 15 : 2 = 7,5$ (cm).

Diện tích mặt cầu là :

$$S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 7,5^2 = 225\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thể tích hình cầu là :

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 7,5^3 = 562,5\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

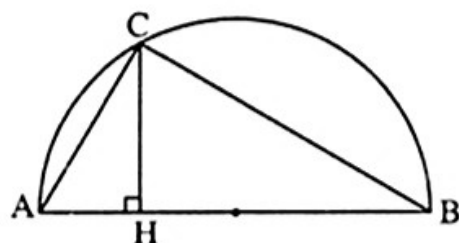
b) Vẽ $CH \perp AB$. Tam giác CAB vuông tại C .

$$\text{Ta có : } AC^2 = AH \cdot AB \Rightarrow AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{9^2}{15} = 5,4 \text{ (cm)}.$$

Do đó $BH = 15 - 5,4 = 9,6$ (cm).

$$CH^2 = AH \cdot BH = 5,4 \cdot 9,6 = 51,84.$$

$$CH = \sqrt{51,84} = 7,2 \text{ (cm)}.$$



Hình 159

Tổng thể tích hai hình nón là :

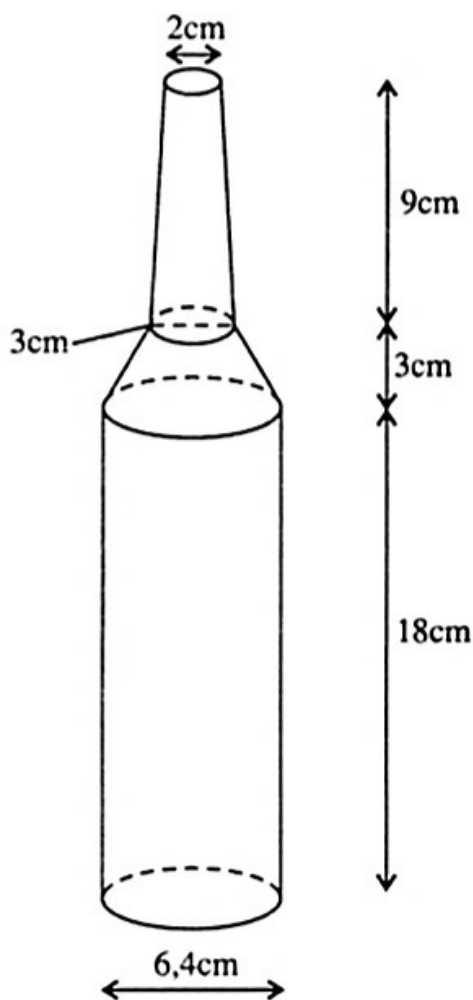
$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 (AH + BH) = \frac{1}{3} \pi \cdot 7,2^2 \cdot 15 = 259,2\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thể tích cần tìm là :

$$V = V_1 - V_2 = 562,5\pi - 259,2\pi = 303,3\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

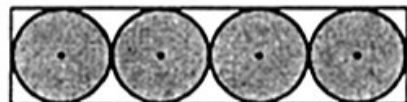
1. Một hình hộp hình trụ chứa vừa khít 4 quả ten-nít. Biết diện tích toàn phần của hộp là 597 cm^2 . Tính đường kính và thể tích của mỗi quả ten-nít.
2. Một cái chai có kích thước bên trong (tính bằng cm) như hình 160. Hỏi chai này có thể chứa được bao nhiêu lít chất lỏng.
3. Một vật bằng bê tông hình nón cắt có các bán kính đáy là 15 cm và 24 cm, đường sinh 41 cm. Dọc theo trục của hình nón cắt có một lỗ hình trụ, bán kính 3 cm. Tính thể tích bê tông.
4. Một hình nón có đỉnh là tâm một hình cầu và có đáy là hình tròn tạo bởi một mặt phẳng cắt hình cầu. Biết diện tích đáy hình nón là $144\pi \text{ cm}^2$ và diện tích xung quanh của nó là $180\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích phần không gian bên trong hình cầu và bên ngoài hình nón.
- 5.* Một mặt phẳng song song với đáy của một hình nón, chia mặt xung quanh của hình nón này thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính tỉ số diện tích giữa hai đáy của hình nón cắt.



Hình 160

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.161) Gọi R là bán kính mỗi quả ten-nít thì bán kính đáy hộp là R , chiều cao của hộp là $8R$.



$$\text{Ta có: } 2\pi R(R + 8R) = 597 \Rightarrow R \approx 3,25 \text{ (cm)} \\ = 32,5 \text{ (mm).}$$

Hình 161

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (32,5)^3 \approx 143720 \text{ (mm}^3\text{)} \approx 144 \text{ cm}^3.$$

2. $V = \pi \cdot 3,2^2 \cdot 18 + \frac{1}{3}\pi \cdot 3(3,2^2 + 1,5^2 + 3,2 \cdot 1,5) + \frac{1}{3}\pi \cdot 9(1,5^2 + 1^2 + 1,5)$
 $= 215,86\pi \approx 680 \text{ cm}^3 \approx 0,68 \text{ (lít).}$

3. Trước hết tính chiều cao của hình nón cụt được 40 cm.

Tính thể tích của hình nón cụt, trừ đi thể tích của hình trụ được:

$$V \approx 47\,476 \text{ cm}^3.$$

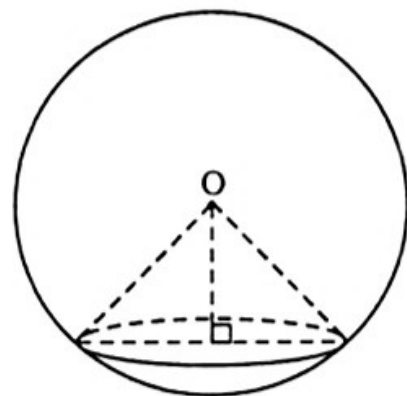
4. (h.162) Tính bán kính đáy hình nón là $r = 12 \text{ cm}$.

Tính đường sinh hình nón là 15 cm.

Chiều cao hình nón là 9 cm.

Tính hiệu thể tích giữa hình cầu và hình nón được

$$V = 4068\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Hình 162

- 5.* (h.163) Gọi bán kính đáy nhỏ, bán kính đáy lớn của hình nón cụt lần lượt là r , R .

Gọi độ dài đường sinh của các hình nón nhỏ và hình nón lớn lần lượt là l_1 và l .

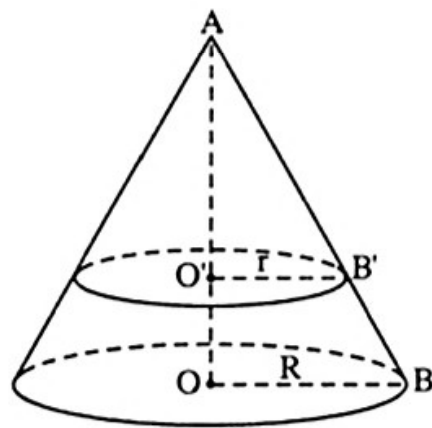
$$\text{Ta có: } \frac{\pi r l_1}{\pi R l} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{l_1}{l} = \frac{R}{2r} \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{r}{R} = \frac{l_1}{l} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{R}{2r} = \frac{r}{R} \Rightarrow R^2 = 2r^2.$$

Tỉ số diện tích giữa hai đáy là:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow \frac{\pi r^2}{\pi \cdot 2r^2} = \frac{1}{2}.$$



Hình 163

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	3
Chương III. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	5
§1. Phương trình bậc nhất hai ẩn	5
§2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	10
§3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế	14
§4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số	24
§5, 6. Giải toán bằng cách lập hệ phương trình	31
Ôn tập chương III	44
Chương IV. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$). PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN	59
§1. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)	59
§3. Phương trình bậc hai một ẩn	69
§4. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai	74
§5. Công thức nghiệm thu gọn	74
§6. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng	84
§7. Phương trình quy về phương trình bậc hai	98
§8. Giải toán bằng cách lập phương trình	115
Ôn tập chương IV. Ôn tập cuối năm	132
Chương III. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN	144
§1. Góc ở tâm. Số đo cung	144
§2. Liên hệ giữa cung và dây	150
§3. Góc nội tiếp	155
§4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung	165
§5. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn	171
§6. Cung chứa góc	180
§7. Tứ giác nội tiếp	188
§8. Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp	196
§9. Độ dài đường tròn, cung tròn	202
§10. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn	206
Ôn tập chương III	212
Chương IV. HÌNH TRỤ. HÌNH NÓN. HÌNH CẦU	222
§1. Hình trụ	222
§2. Hình nón. Hình nón cụt. Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón, hình nón cụt	229
§3. Hình cầu. Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu	239
Ôn tập chương IV	244

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc **NGUYỄN QUÝ THAO**

Tổ chức bản thảo

và chịu trách nhiệm nội dung : Phó Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội **PHAN KẾ THÁI**

Biên tập nội dung và sửa bản in : **NGUYỄN NGỌC TÚ**

Trình bày bìa : **LƯƠNG QUỐC HIỆP**

Thiết kế sách : **NGUYỄN THANH THUÝ**

Chế bản : **PHÒNG CHẾ BẢN CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
HÀ NỘI**

Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TOÁN 9 - TẬP HAI

Mã số : T9T79h3 - NBE

Số ĐKKH xuất bản: 11-2013/CXB/131-1947/GD
In 3.000 bản, (QĐ:01) khổ 17x24cm.
In tại Nhà in Báo Hà Nam. Đình Trảng - Lam Hạ -
TP. Phủ Lý - Hà Nam. Số in: 37
In xong và nộp lưu chiểu tháng 01 năm 2013.