

**ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HÈ NĂM 2014 - MÔN TOÁN
DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 10 LÊN 11**

PHẦN I: LƯỢNG GIÁC

CHUYÊN ĐỀ 1: ÔN TẬP CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Cho $\sin a = -2/3$ với $\pi < a < 3\pi/2$. Hãy tính các giá trị lượng giác của $\frac{a}{2}$; $2a$.

Bài 2. CMR các biểu thức sau độc lập đối với x

- 1) $\frac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^4 x - 1}$
- 2) $2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$.
- 3) $(1 + \cot x)\sin^3 x + (1 + \tan x)\cos^3 x - \sin x - \cos x$

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

- 1) $\frac{1 + \cos x}{2 \sin x} \left[1 - \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x} \right] = 2 \cot x$
- 2) $\frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = -1$
- 3) $\tan 50^\circ - \tan 40^\circ = 2 \tan 10^\circ$
- 4) $\frac{\cos 3a + \cos 2a + \cos a + 1}{2 \cos^2 a + \cos a - 1} = 2 \cos a$
- 5) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\tan \frac{\alpha + \beta}{2} + \cot \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{2 \cos \beta}$
- 6) $\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c = \frac{\sin(a + b + c)}{\cos a \cos b \cos c}$.

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

- 1) $\sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} + \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}}$
- 2) $\frac{\sin^2 2a - 4 \sin^2 a}{\sin^2 2a + 4 \sin^2 a - 4}$
- 3) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}$
- 4) $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \tan^2 \frac{x}{2} - \cos^2 x$

Bài 5. 1) Cho $\cos(2a + b) = 1$ CMR: $\tan(a + b) - \tan a = 2 \tan \frac{b}{2}$.

2) Cho $\sin b = \sin a \cos(a + b)$. CMR: $2 \tan a = \tan(a + b)$.

3) Cho $\sin^2 b = \sin a \cos a$. CMR: $\cos 2b = 2 \cos^2\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 6. Rút gọn các tổng và tích sau:

- 1) $S_1 = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n+1)\pi}{n}$
- 2) $S_2 = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x}$.
- 3) $P = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n}$.

Bài 7. Tính

1) $A = \cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4 \cos 15^\circ \cos 21^\circ \cos 24^\circ$.

2) $B = 4 \sin^3 50^\circ + 3 \cos 140^\circ$

3) $C = \cos^4 15^\circ + \sin^4 15^\circ - 6 \cos^2 15^\circ \sin^2 15^\circ$

Bài 8. Tìm điều kiện của p, q để biểu thức sau không phụ thuộc vào x

$$A = p(\sin^6 x + \cos^6 x) - q(\sin^4 x + \cos^4 x).$$

Bài 9. Chứng minh rằng:

1) $|\sin^n x + \cos^n x| \leq 1$ với $(n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$.

2) $\frac{\cos x + \cos y}{2} \leq \cos \frac{x+y}{2}$ với $-\pi \leq x+y \leq \pi$.

3) $4 \sin 3x + 5 \geq 4 \cos 2x + 5 \sin x$.

Bài 10. 1) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $y = \sin^8 x + \cos^8 x$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của $y = \cos x + \sqrt{2 - \cos^2 x}$.

3) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $y = \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 1$.

CHUYÊN ĐỀ 2: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Bài 1. CMR trong mọi tam giác ABC luôn có:

1) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

2) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$

3) $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 2ab \sin C$.

Bài 2. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = 3\sqrt{3}$

b) $\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0$.

c) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$

d) $\tan A + \tan B = 2 \cot \frac{C}{2}$.

Bài 3. CMR tam giác ABC vuông nếu:

a) $\sin 2A + \sin 2B = 4 \sin A \cdot \sin B$

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$

c) $3(\cos B + 2 \sin C) + 4(\sin B + 2 \cos C) = 15$.

Bài 4. CMR tam giác ABC có ít nhất một góc $60^\circ \Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}$.

Bài 5. CMR tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1/8$

Bài 6. CMR tam giác ABC là tam giác cân nếu: $a(\cot \frac{C}{2} - \tan A) = b(\tan B - \cot \frac{C}{2})$

Bài 7. Nhận dạng tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$$1) \begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ \sin B \sin C = \frac{3}{4} \end{cases} \quad 2) a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = c^2 \cot \frac{C}{2}.$$

Bài 8. Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn có bán kính bằng 1. Đặt $T = a^2 + b^2 + c^2$. Chứng minh tam giác này vuông, nhọn hay tù khi và chỉ khi : $T = 8$ hoặc $T > 8$ hoặc $T < 8$.

Bài 9. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

Từ đó suy ra $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Bài 10. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$1) 2 < \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$2) \frac{3}{4} \leq \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} < 1.$$

CHUYÊN ĐỀ 3 → CHUYÊN ĐỀ 8

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin(2x + \frac{\pi}{12}) = \sin(x + \frac{\pi}{4}). & 2) \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0 \\ 3) \cos 3x + \cos 2x = 0 & 4) \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = 0. \\ 5) \cos(3x + \frac{\pi}{6}) + \sin 2x = 0. & 6) \tan(4x + 1) \cdot \tan(x - 1) = 1. \\ 7) \sin^2(5x + \frac{2\pi}{3}) - \cos^2(2x + \frac{\pi}{3}) = 0. & 8) 2\sin x \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos^2 2x - \sin^2 2x. \\ 9) \tan(3x - 60^\circ) - \cot(30^\circ - 2x) = 0. & 10) \cos(\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ 11) \sin(8\cos x) = 1. & 12) \sin(x^2 - 4x) = 0. \end{array}$$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} 1) 6\sin^2 x - 13\sin x + 5 = 0 & 2) 2\cos 2x + \cos x = 1 \\ 3) 3\cos^2 x = 2\sin^2 x + 4\sin x & 4) \frac{3}{\cos x} = 3 + 2\tan^2 x. \\ 5) \tan x + \cot x = 2 & 6) \cos 4x - 3\sqrt{2} \cos 2x + 2 = 0. \end{array}$$

7) $\cos 3x - \cos 2x + \cos x - 1 = 0$

9) $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = 5/2$

8) $\cos 4x + 6 \sin x \cdot \cos x = 1$

10) $3 \cos 4x - 2 \cos^2 3x = 1$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$

2) $\cos 3x - \sin 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $3 \sin x + 4 \cos x = 5/2$

4) $2 \sin^2 x - 5 \sin 2x = 5$

5) $2\sqrt{2} (\sin x + \cos x) \cos x = 3 + \cos 2x$

6) $2 \cos 3x + \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$

7) $2 \cos \frac{x}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} = \sqrt{7}$

Bài 4: Giải phương trình:

1) $3 \sin^2 x + 8 \sin x \cdot \cos x + 4 \cos^2 x = 0$

2) $4 \sin^2 x + 3 \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4$

3) $4 \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + 3 \sin \frac{x}{2} = 3$

4) $\frac{1}{\cos x} = 4 \sin x + 6 \cos x$

5) $\cos^3 x + \sin x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x = 0$

6) $2 \sin^3 x - \sin^2 x \cdot \cos x + 2 \sin x \cdot \cos^2 x - \cos^3 x = 0$

Bài 5: Giải phương trình:

1) $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

2) $\sin x + \cos x = 1 - 2 \sin 2x$

3) $\sqrt{2} (\sin x + \cos x) - \sin x \cdot \cos x = 1$

4) $(1 + \sqrt{2})(\sin x - \cos x) + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + \sqrt{2}$

Bài 6: Giải các phương trình:

1) $2 \sin 2x - 5 \cos x = 0$

2) $(\tan 2x - 1) \cos 2x = 0$

3) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1} = 0$

4) $\sin x = \sqrt{2} \sin 5x - \cos x$

5) $2 \sin x \cdot \cos 2x - 1 + 2 \cos 2x - \sin x = 0$

6) $3 + 2 \sin x \cdot \sin 3x = 3 \cos 2x$

7) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

8) $\tan x + \tan 2x = \sin 3x \cdot \cos x$

9) $\tan x + \cot 2x = 2 \cot 4x$

10) $2 \sin 2x \cdot \cos 3x - \cos x = 2 \sin 2x \cdot \cos x - \cos 3x$

Bài 7. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình

$$(\sin 3x + \cos 3x)^2 = 2 \cos^2 4x.$$

Bài 8. Tìm các nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$ của phương trình $3 \sin x + 1 = 4 \sin^2 x (\sin x + 2 \cos^2 x)$.

Bài 9. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$: $\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x$.

Bài 10. Giải các phương trình

1) $\sin x - \frac{|2 \cos x - 1|}{2 \cos x - 1} \sin^2 x = \sin^2 x$ với $(0 \leq x \leq 2\pi)$

2) $|\cot x| = \tan x + \frac{1}{\sin x}$

3) $2 \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{1 + 8 \sin 2x \cos^2 2x}$

4) $\sqrt{4 - x^2} (\sin 2\pi x - 3 \cos \pi x) = 0$

Bài 11. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:

1) $m(\sin^6 x + \cos^6 x) = \cos 4x$.

2) $\frac{m}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sin^2 x + m - 3}{\cos 2x}$ với $\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 12. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất $3\cos^2 x + 2|\sin x| = m$.

Bài 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của k để phương trình sau có nghiệm: $2\sin^2 x + 6\cos^2 \frac{x}{2} = 5 - 2k$.

Bài 14. Giải các phương trình sau:

1) $\sin^5 x - \cos^3 x = 1$

2) $\sin 2x + \sin \frac{2x}{5} - 2 = 0$

3) $8\cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$

4) $1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$

Bài 15. Cho phương trình $\sin^4 x + \cos 2x + m\cos^6 x = 0$.

1) Giải phương trình với $m = 2$.

2) Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 16. Cho phương trình $\cos 4x + 6\sin x \cos x = m$.

1) Giải phương trình với $m = 1$.

2) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Bài 17. Tìm m để phương trình sau có đúng 7 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$:

$$\cos 3x - \cos 2x + m \cos x - 1 = 0.$$

Bài 18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$.

Bài 19. Cho hàm số $y_k = \frac{2k \cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}$.

1) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số y_1 ứng với $k = 1$.

2) Xác định tham số k để giá trị lớn nhất của hàm số y_k là nhỏ nhất.

Bài 20. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ với $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

PHẦN 2: HÌNH HỌC

CHUYÊN ĐỀ 1: ÔN TẬP HÌNH GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(3; 1)$, $C(2; 4)$.

1. Chứng minh rằng ba điểm A , B , C tạo thành ba đỉnh của một tam giác.
2. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .
3. Tìm tọa độ trọng tâm G , trực tâm H , tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác. Từ đó chứng minh rằng ba điểm H , G , I thẳng hàng.
4. Tìm tọa độ điểm M sao cho $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
5. Tính độ dài đường trung tuyến AM và độ dài đường phân giác trong AD của tam giác.

Bài 2. Cho hai điểm $A(-3; 2)$ và $B(4; 3)$.

1. Tìm điểm E để tứ giác $AOBE$ là hình thang vuông đáy AO và BE .
2. Tìm điểm M thuộc Ox để tam giác MAB cân tại M .
3. Tìm điểm N thuộc Oy để $(NA + NB)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. Cho tam giác ABC với $A(-2; 1)$, $B(4; 3)$ và $C(2; -3)$.

1. Lập phương trình tham số và tổng quát của cạnh BC .
2. Viết phương trình đường cao AH .
3. Lập phương trình qua A và song song với BC .
4. Viết phương trình đường trung trực của BC .

Bài 4. Cho đường thẳng (d) có phương trình: $3x + 4y - 12 = 0$.

1. Tìm tọa độ hình chiếu H của gốc tọa độ O trên đường thẳng (d) .
2. Tìm điểm M trên đường thẳng (d') : $y - 2x + 3 = 0$ biết M cách (d) một khoảng bằng 2.
3. Viết phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua O .
4. Viết phương trình đường thẳng (d_2) tạo với (d) góc 60° .

Bài 5. Cho đường thẳng (d) : $x + y - 5 = 0$.

1. Viết phương trình đường thẳng đối xứng với (d) qua đường (d') : $2x + y - 1 = 0$.
2. Viết phương trình đường thẳng đối xứng với (d) qua (d') : $x + y + 3 = 0$.

Bài 6. Cho điểm $P(3; 0)$ và hai đường thẳng (d_1) : $2x - y - 2 = 0$; (d_2) : $x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua P và cắt (d_1) , (d_2) lần lượt tại A và B sao cho P là trung điểm của AB .

Bài 7. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết đỉnh $B(2; -1)$, đường cao và phân giác trong qua đỉnh A , C lần lượt có phương trình (d_1) : $3x - 4y + 27 = 0$, (d_2) : $x + 2y - 5 = 0$.

Bài 8. Cho hai đường thẳng (d_1) : $2x + y + 1 = 0$ và (d_2) : $x + 2y - 7 = 0$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ sao cho đường thẳng (d) tạo với (d_1) , (d_2) một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của chúng. Tính diện tích tam giác cân đó.

Bài 9. Cho đường thẳng (d_m) : $x \cos m + y \sin m + 2 \cos m + 1 = 0$ với m là tham số.

1. Tìm những điểm trên mặt phẳng toạ độ mà (d_m) không bao giờ đi qua cho dù m nhận bất kì giá trị nào.
2. Chứng minh rằng các đường thẳng (d_m) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.
3. Cho điểm $I(-2; 1)$. Dựng IH vuông góc với (d_m) và kéo dài IH sao cho $HN = 2HI$. Xác định toạ độ của N theo tham số m .

Bài 10. Lập phương trình đường tròn trong các trường hợp sau:

1. Đường tròn đi qua điểm $A(3; 1)$, $B(5; 5)$ và có tâm nằm trên trục tung.
2. Đường tròn có tâm $I(-1; 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng có phương trình: $x - 2y - 2 = 0$.
3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(-2; 4)$, $B(6; -2)$, $C(5; 5)$.
4. Đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng $(d): 2x - y = 0$, $(d'): x - 2y + 2 = 0$ và có tâm thuộc đường thẳng có phương trình: $x + y - 1 = 0$.
5. Đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ và đi qua điểm $A(4; 2)$.

Bài 11. Cho tam giác ABC có phương trình các cạnh $AB: 2x - y + 4 = 0$, $BC: x + y - 1 = 0$ và $AC: x + 2y + 2 = 0$.

1. Xác định toạ độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
2. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Bài 12. Cho họ đường conic (C_m) có phương trình: $x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0$.

1. Chứng minh rằng (C_m) là họ đường tròn. Tìm quỹ tích tâm của các đường tròn đó.
2. Chứng minh rằng khi m thay đổi các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.
3. Cho $a = 2$ và điểm $Q(3; 0)$. Viết phương trình của tiếp tuyến của đường tròn (C_2) kẻ từ Q .

Bài 13. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ và một điểm $M(2; 4)$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 với đường tròn trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm.

1. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 .
2. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với T_1T_2 .

Bài 14. Cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2; 1)$ và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB .

Bài 15. Cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và đường thẳng $(d): x - y - 1 = 0$.

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng có phương trình $y = 3x - 1$.
2. Viết phương trình đường tròn đối xứng với đường tròn (C) qua (d) .
3. Tìm toạ độ các giao điểm của (C) và (C') .
4. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C) và (C') .

Bài 16. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ và một điểm $A(2; 0)$. Giả sử M là một điểm di động trên (C) . Gọi H là hình chiếu của M trên Oy . Tìm quỹ tích giao điểm I của AH và OM .

CHUYÊN ĐỀ 2: PHÉP BIẾN HÌNH VÀ PHÉP TỊNH TIẾN.

Bài 1. Cho $\vec{v} \neq 0$. Phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' . Khi nào thì:

- a) d' trùng d . b) d' song song với d c) d' cắt d .

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD tâm O.

1. Dựng ảnh của tam giác ABD qua phép tịnh tiến theo véc tơ BC.
2. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và CA. Hãy chỉ ra một phép tịnh tiến biến hình bình hành AMOQ thành hình bình hành ONCP.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(3; -1)$, đường thẳng $(d): 2x - y + 4 = 0$, đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 5y + 2 = 0$ và véc tơ $\vec{v}(2; -1)$. Tìm ảnh của A, (d), (C) qua các phép tịnh tiến :

- a) $T_{\vec{v}}$ b) $T_{-\vec{v}}$ c) $T_{\frac{3\vec{v}}{2}}$

Bài 4. a) Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $(d): x - 5y - 1 = 0$. Tìm phép tịnh tiến theo véc tơ có phương song song với trục Ox biến d thành đường thẳng d' đi qua gốc toạ độ. Viết phương trình đường thẳng (d') .

b) Vho phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v}(2; -3)$. Tìm m biết rằng qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ đường thẳng $(d): (m + 1)x - my + 3 = 0$ biến thành chính nó.

Bài 5. a) Cho điểm $M(\sqrt{2}; -1)$ và véc tơ $\vec{u}(1; -2\sqrt{2})$. Tìm toạ độ điểm N sao cho M là ảnh của N qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$.

b) Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $(d_1): 3x - 2y + 1 = 0$ và $(d_2): 3x - 2y - 5 = 0$. Tìm toạ độ của véc tơ $\vec{v}$ có giá vuông góc với đường thẳng (d_1) để (d_2) là ảnh của (d_1) qua $T_{\vec{v}}$.

Bài 6. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R trong $AD = R$. Dựng các hình bình hành DABM và DACN. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN nằm trên đường tròn tâm O bán kính R.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Vẽ hình chữ nhật BCDE bên ngoài tam giác. Gọi d_1, d_2 lần lượt là các đường thẳng qua D và E và vuông góc với AB, AC. Gọi K là giao điểm của d_1, d_2 .

- 1) Phép tịnh tiến $T_{\vec{EB}}$ biến d_1, d_2 thành hai đường nào, biến K thành điểm nào?
- 2) Từ trên chứng minh rằng AK vuông góc với BC.

Bài 8. Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn tâm O bán kính R và A là một điểm thay đổi trên đường tròn đó. Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC.

Bài 9. Trong mặt phẳng Oxy cho phép biến hình f biến điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x'; y')$ thoả mãn

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}y \end{cases} \quad (\text{biểu thức toạ độ của phép biến hình } f)$$

- 1) Chứng minh rằng f là một phép dời hình.
- 2) Tìm ảnh của đường thẳng $(d): x - y = 0$ qua f .

CHUYÊN ĐỀ 4: PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM.

Bài 1. Cho tam giác đều ABC, trực tâm H. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC, AB. Tìm ảnh của tam giác HMC qua phép quay tâm H với:

- Góc quay 120° .
- Góc quay -120° .

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho điểm $M(x; y)$. Gọi $M' = Q(M)$ trong đó Q là phép quay quanh tâm O góc 90° . Chứng minh rằng $M' = (-y; x)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O, góc quay 90° .

Bài 4. Cho đường tròn (O; R), A là một điểm cố định không trùng tâm O, BC là một dây cung của (O), BC di động nhưng số đo của cung BC luôn bằng 120° . Gọi I là trung điểm của BC, vẽ tam giác đều AIJ. Tìm tập hợp điểm J.

Bài 5. Cho hai đường thẳng (d) và (d') song song và một điểm A không nằm trên (d) và (d'). Hãy dựng điểm B trên (d) và C trên (d') sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 6. Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C với B nằm giữa A và C. Dựng về một phía đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF.

- Chứng minh rằng $AF = EC$ và góc giữa hai đường thẳng (AF, EC) $= 60^\circ$.
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC. Chứng minh rằng tam giác BMN đều.

Bài 7. Cho tam giác MNP có $M(1; -2)$, $N(1; 2)$, $P(5; 2)$

- Tìm tọa độ tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.
- Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác $M'N'P'$ qua phép đối xứng tâm I.
- Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $M'N'P'$.

Bài 8. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) , hai điểm A, G không thuộc (d_1) , (d_2) . Hãy dựng tam giác ABC có trọng tâm G và hai đỉnh B và C lần lượt thuộc (d_1) và (d_2) .

Bài 9. Cho hình (H) trên mặt phẳng xOy gồm hai đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$. Chứng minh rằng tồn tại một phép đối xứng tâm A biến (C) thành (C'). Xác định tọa độ điểm A.

Bài 10. Trên các cạnh của hình bình hành ABCD dựng các tam giác đều ở ngoài hình bình hành đó: ABM, BCN, CDP, ADQ. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ cũng là hình bình hành.

Bài 10. a) Cho $T_v(M) = M'$ và $T_u(M') = M''$. Tìm phép dời hình biến M thành M'' .

b) Chứng minh rằng hợp thành của hai hay nhiều phép dời hình là một phép dời hình.

CHUYÊN ĐỀ 3: PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

Bài 1. Tìm ảnh của điểm $A(2\sqrt{2}; -1)$ và đường thẳng có phương trình: $x + 3y = 1$ qua phép đối xứng trục Ox, Oy .

Bài 2. Tìm trục của phép đối xứng biết:

a) Điểm $M'(2; 3)$ là ảnh của điểm $M(-4; 5)$.

b) Đường thẳng $x - y + 2 = 0$ là ảnh của đường thẳng $x - y + 6 = 0$.

c) Đường tròn $x^2 + y^2 - 4x = 0$ là ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$.

Bài 3. Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Tìm hai điểm B và C lần lượt nằm trên hai tia Ox, Oy sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

Bài 4. Cho tam giác ABC là tam giác đều. Xác định phép đối xứng trục biến tam giác ABC thành chính nó. Từ đó chỉ ra các trục đối xứng của tam giác.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Chứng minh rằng các điểm đối xứng của H qua các cạnh của tam giác ABC nằm trên đường tròn $(O; R)$. Từ đó suy ra các đường tròn (HBC) , (HCA) , (HAB) và $(O; R)$ bằng nhau.

b) Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn (HBC) , (HCA) , (HAB) . Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác $O_1O_2O_3$ bằng nhau.

c) Giả sử B, C là hai điểm cố định và A là điểm thay đổi trên đường tròn $(O; R)$. Dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng H chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 6. Cho đường thẳng xx' và hai điểm P, Q cùng nằm một phía đối với xx' . Dựng điểm A thuộc xx' sao cho $\overline{PAx} = \overline{QAx}$.

Bài 7. Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng khoảng cách từ P tới các điểm A và B là nhỏ nhất biết $A(1; 1), B(3; 3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 8. Cho tam giác ABC biết phương trình cạnh $BC: 4x - y + 3 = 0$ và hai đường phân giác trong của các góc B, C có phương trình $(d_B): x - 2y + 1 = 0$ và $(d_C): x + y + 3 = 0$. Lập phương trình các cạnh AB, AC .

Bài 9. Cho $A(-1; 3)$, đường thẳng $(d): x - 3y + 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$.

a) Tìm ảnh của $A, d, (C)$ qua phép đối xứng $\overline{D}_{Ox}$.

b) Tìm ảnh của A qua $\overline{D}_d$.

c) Tìm ảnh của (C) qua $\overline{D}_d$.

Bài 10. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Chứng minh rằng đường thẳng $y = x + 2$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

CHUYÊN ĐỀ 5: PHÉP VỊ TỰ

Bài 1. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Dựng ảnh của tam giác ABC qua các phép vị tự sau:

- Phép vị tự tâm G tỉ số 1.
- Phép vị tự tâm A tỉ số 2.
- Phép vị tự tâm G tỉ số -1.

Bài 2. Cho đường tròn tâm (O; R) đường kính AB. Một đường tròn (O') tiếp xúc với (O) và đoạn AB lần lượt tại C, D, đường thẳng CD cắt đường tròn (O; R) tại I. Chứng minh rằng cung AI = BI.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính lần lượt là R và 3R tiếp xúc trong với nhau tại A. Tìm tỉ số k của phép vị tự tâm A biến đường tròn (O) thành (O').

Bài 4. Cho điểm A và đường thẳng d cố định. M là một điểm di động trên d. Tìm tập hợp trung điểm của đoạn AM.

Bài 5. Cho đường tròn (O; R) và A là một điểm cố định trên đường tròn; BC là một dây cung di động của đường tròn này và BC có độ dài không đổi bằng $2d$ ($d < R$). Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 6. Trên cạnh BC của tam giác ANC, lấy hai điểm M, N sao cho $BM = CN$. Qua M và N lần lượt vẽ các đường thẳng song song với AB, AC. Chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này nằm trên đường trung tuyến qua A của tam giác ABC.

Bài 7. Cho đường tròn (O) trên đó có điểm M di động. Một đoạn thẳng AB bên ngoài đường tròn (O), các tia AM, BM lần lượt cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai A', B'. Dựng điểm M sao cho $A'B' \parallel AB$.

Bài 8. Gọi M, N, P là trung điểm ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

a) Chứng minh rằng tam giác MNP là ảnh của tam giác ABC trong phép vị tự tâm G, tỉ số $-\frac{1}{2}$. Từ đó suy ra 4 điểm O, G, I, H thẳng hàng và I là trung điểm đoạn OH.

b) Chứng minh rằng phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$ biến đường tròn (ABC) thành đường tròn (MNP). Từ đó suy ra trong một tam giác trung điểm 3 cạnh, chân 3 đường cao, trung điểm các đoạn nối trực tâm với 3 đỉnh là 9 điểm cùng thuộc một đường tròn.