

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HÈ MÔN TOÁN 12

(Dành cho học sinh)

PHẦN I : GIẢI TÍCH 12

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

Bài 1: Xét sự biến thiên của các hàm số:

$$1) y = 2x^3 + 3x^2 + 1$$

$$11) y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$$

$$2) y = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

$$12) y = \frac{1}{x+1} - 2x$$

$$3) y = x + \frac{3}{x}$$

$$13) y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$4) y = x - \frac{2}{x}$$

$$14) y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$5) y = x^4 - 2x^2 + 5$$

$$15) y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$6) y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$16) y = \frac{3}{4}x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$$

$$7) y = \frac{x^2 - 8x + 9}{x - 5}$$

$$17) y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

$$8) y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

$$18) y = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2}$$

$$9) y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$$

$$10) y = \sqrt{2x - x^2}$$

Bài 2: Chứng minh rằng các hàm số sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$:

$$1) f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$$

$$2) f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$3) y = 5x - 3\sin x + 4\cos x$$

$$4) y = x + \cos x$$

$$5) y = x^3 + x - \cos x - 4$$

Bài 3: Chứng minh rằng:

1) Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ là đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

2) Hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x+1}$ là nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Bài 4: Tùy theo giá trị của m hãy khảo sát sự biến thiên của các hàm số:

$$1) y = \frac{1}{2}(m^2 - 4)x^2 - (3m - 6)x + \frac{9}{2}$$

$$2) y = mx^3 - 3(m-1)x^2 + 3(m-2)x + 1$$

Bài 5:

- 1) Với giá trị nào của a thì hàm số $y = ax - x^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- 2) Tìm các giá trị của tham số a để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- 3) Tìm m để hàm số $y = \frac{m(1-x)}{x-m}$ luôn nghịch biến trên mỗi khoảng $xđ$ của nó
- 4) Tìm m để hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.
- 5) (ĐH Kiến trúc Hà Nội 97) Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$ đồng biến $\forall x > 1$.
- 6) Tìm a để hàm số $y = \frac{ax^2 + 6x - 2}{x + 2}$ nghịch biến trên $[1; +\infty]$

Bài 6: Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

- 1) $\tan x > x$
- 2) $\sin x + \tan x > 2x$

Bài 7:

- 1) Tìm các nghiệm âm của phương trình: $x^6 - 2x^5 - 3 = 0$
- 2) Tìm các cặp số $(x; y)$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn hệ pt:

$$\begin{cases} \tan x - \tan y = y - x \\ 2x + 7y = 3\pi \end{cases}$$
- 3) Giải PT: $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

Bài 8: (ĐHBK - HN - 94): CMR: Nếu $x + y = 1$ thì $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{8}$

Bài 9: (ĐHSP II - 98) CMR: Trong mọi ΔABC nhọn ta đều có:

$$\frac{2}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) + \frac{1}{3}(\tan A + \tan B + \tan C) > \pi$$

Bài 10: (ĐH Ngoại Thương 99): Giải phương trình :

$$\sqrt{3-x+x^2} - \sqrt{2+x-x^2} = 1$$

2) Viết pt đường cong đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$. Xác định m để:

- 1) Hàm số có cực trị
- 2) Hàm số có cực đại, cực tiểu với hoành độ thỏa mãn: $x_1 + x_2 = 4x_1x_2$
- 3) Hàm số có cực đại, cực tiểu với hoành độ dương

Bài 8: (ĐHBK - Hà Nội - A - 2000)

Xác định các giá trị của m để hàm số $y = f(x) = mx^3 + 3mx^2 - (m - 1)x - 1$ không có cực trị.

Bài 9: (ĐHCSND - A - 2000)

Xác định m để hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

Bài 10: (ĐHAN - A - 1999)

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị

hàm số $y = \frac{x^2 + mx - m + 8}{x - 1}$ ở về 2 phía của đường thẳng $9x - 7y - 1 = 0$

Bài 11 : Tìm m để hàm số :

1) $y = x^3 - 3mx^2 + (m - 1)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

2) $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Bài 12 : Cho hàm số : $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$.

1)Viết PT đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số.

2) Tìm m để hàm số có cực đại ,cực tiểu và các điểm cực đại ,cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Bài 13 : (HVQHQT – 97)

Cho hàm số : $y = x^4 - 24mx^2 + 2m + m^4$. Tìm m để hàm số có cực đại ,cực tiểu lập thành ba đỉnh của tam giác đều .

Bài 14 : Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 3m^2}{x - 2m}$.

1) Viết PT đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số.

2) Tìm m để hàm số có cực đại ,cực tiểu nằm về hai phía của trục Ox.

Bài 15 : Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m + 1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$.

1) Tìm m để hàm số có cực trị .

2) Tìm m để hàm số có $y_{CD} \cdot y_{CT}$ nhỏ nhất .

Bài 16 : (Khối A -2012 Cho hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$

Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Bài 17 : (Khối B-2013)

Cho hàm số : $y = 2x^3 - 3(m + 1)x^2 + 6mx$.

Tìm m để hàm số có hai điểm cực đại ,cực tiểu A ,B và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

§2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1: Áp dụng quy tắc 1, tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

6) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$

2) $y = x^4 + 2x^2 - 3$

7) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$

3) $y = x + \frac{1}{x}$

8) $y = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$

4) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

9) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

5) $y = x^3(1 - x)^2$

10) $y = \sqrt{8 - x^2}$

Bài 2: Áp dụng quy tắc 2, tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 1$

4) $y = x - \sin 2x + 2$

2) $y = x\sqrt{4 - x^2}$

5) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$

3) $y = \sin 2x - x$

Bài 3:

1) Xét hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm a, b, c, d, sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; $f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1$; $f(1) = 1$.

2) Xác định các hệ số a, b, c, sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm A (1; 0).

3) Chứng minh rằng: Với mọi giá trị của m, hàm số $y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$

luôn có cực đại và cực tiểu.

Bài 4:

1) Với giá trị nào của a thì hàm số $f(x) = \sin 3x + a \sin x$ đạt cực trị tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$?

Hãy cho biết tại điểm đó hàm số đạt cực đại hay cực tiểu?

2) Tìm m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 5x + 2$ đạt cực trị tại $x = 2$.

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$

1) Tìm m để: a/ Hàm số có cực trị.

b/ Hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 + 2x_2 = 1$

c/ Hàm số có cực đại, cực tiểu tại điểm có hoành độ dương

d/ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $x_{CD} < x_{CT}$

e/ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$

2) Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và viết pt đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị.

Bài 6: Cho hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 + 1$

1) Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu

§ 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Bài 1: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 5$ trên đoạn $[-2; 3]$

2) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4; 0]$

3) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

4) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ trên đoạn $[2; 4]$

5) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ trên đoạn $[0; 1]$

6) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $(0; 2]$

7) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 18x$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

8) $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$

9) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$

10) $f(x) = x + \sqrt{2 - x^2}$

Bài 2: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số:

1) $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$

4) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

2) $y = \cos^2 2x - \sin x \cdot \cos x + 4$

5) $y = \sin^{20} x + \cos^{20} x$

3) $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ với $x \in [0; \pi]$

6) $y = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^2 - 3\sin 2x + 1$

Bài 3: (ĐHKT Hà Nội - 1998)

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức: $A = \frac{2\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$

Bài 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$

1) Khảo sát sự biến thiên và tìm các điểm cực trị của hàm số.

2) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = -\sin 3x - 3\sin^3 x$

Bài 5: Giả sử x, y thay đổi thỏa mãn $x \geq 0; y \geq 0$ và $x + y = 1$.

Hãy tìm GTLN, GTNN của biểu thức:

Bài 18:(Khối D- 2012)

Cho hàm số : $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$.

Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho : $x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

Bài 19 : (Khối B -2012)

Cho hàm số : $y = 2x^3 - 3mx^2 + 3m^3$.

Tìm m để hàm số có hai điểm cực đại ,cực tiểu A ,B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

§ 4: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$$1) y = \frac{x-2}{3x+2}$$

$$4) y = \frac{x^2-3x+4}{2x+1}$$

$$2) y = \frac{-2x-2}{x-3}$$

$$5) y = \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$3) y = x+2 - \frac{1}{x-3}$$

$$6) y = \frac{x}{x^3+1}$$

Bài 2: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$$1) y = \frac{2x-1}{x^2} + x-3$$

$$5) y = \frac{x^3+x+1}{x^2-1}$$

$$2) y = \frac{x^3+2}{x^2-2x}$$

$$6) y = \frac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$$

$$3) y = \sqrt{x^2-1}$$

$$7) y = 2x + \sqrt{x^2-1}$$

$$4) y = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$8) y = \sqrt{x^2+x+1}$$

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + (2a+1)x + a+3}{x+2}$ với $a \neq -1$ và $a \neq 0$.

CMR: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số luôn đi qua 1 điểm cố định.

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{(m-1)(x^2-2x)+m+4}{mx+m}$ với $m \neq -\frac{1}{4}$; $m \neq 0$

CMR: Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận cố định, còn đường tiệm cận thứ hai luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{x^2+x+1}$

Bài 6: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Bài 7: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = x \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Bài 8: Cho hàm số $y = \frac{x^2 \sin \alpha + 2x \cos \alpha + 1}{x+2}$. Xác định phương trình tiệm cận

xiên của đồ thị hàm số. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến tiệm cận xiên.

Hãy tính giá trị của α để khoảng cách trên là lớn nhất.

Bài 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2+mx-1}{x-1}$. Tìm m để tiệm cận xiên của hàm số tạo với các trục tọa độ tam giác có diện tích bằng 18.

Bài 10: Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2-m^2}{x-m}$. CMR: Với mọi giá trị $m \neq 0$ tiệm cận xiên của đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

$$1) P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$$

$$2) M = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$$

Bài 6: Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của pt: $12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0$.

Tìm m sao cho: $S = x_1^3 + x_2^3$ đạt GTLN, GTNN.

Bài 7: Giả sử $(x; y)$ là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Tìm a để $P = x \cdot y$ nhỏ nhất.

Bài 8: Tìm m để bất phương trình $mx - \sqrt{x-3} \leq m+1$ có nghiệm?

Bài 9: Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình:

$$mx^4 - 4x + m \geq 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x.$$

Bài 10: Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3mx - 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất

phương trình $f(x) \leq \frac{1}{x^3}$ được thỏa mãn $\forall x \geq 1$.

§6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1: Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 - 4$

- Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn.
- Chứng minh rằng điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị

Bài 2: a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

- Tùy theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình:
 $-x^3 + 3x^2 - 1 = m.$

Bài 3: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số sau:

- | | |
|---|------------------------------|
| a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}$ | b) $y = -x^3 - 3x + 1$ |
| c) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - \frac{2}{3}$ | d) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ |
| e) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ | f) $y = -x^4 - 2x^2 + 1$ |
| g) $y = -\frac{x^4}{2} + 3x^2 + \frac{5}{2}$ | h) $y = x^4 + x^2 + 2$ |

Bài 4: a) Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số: $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

- Tùy theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình:
 $-x^4 + 2x^2 - 2 = m$

- Viết phương trình tiếp tuyến tại các điểm uốn của đồ thị.

Bài 5: a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 1$

- Tùy theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình:
 $x^3 - 3x^2 + m + 2 = 0$

Bài 6: Cho hàm số $y = (x + 1)(x^2 + 2mx + m + 2)$

- Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.
- Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với $m = -1$.

Bài 7: Cho hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + m$

- Khảo sát và vẽ đồ thị với $m = 2$.
- CMR : đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua 2 điểm cố định với mọi m.

Bài 8: Cho hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$

- Tìm các giá trị của m sao cho hàm số có ba cực trị
- Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với $m = \frac{1}{2}$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm uốn

Bài 9: a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{x-2}{2x+1}$

- Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của nó.

Bài 10: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số sau:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $y = \frac{x+1}{x-1}$ | b) $y = \frac{2x+1}{1-3x}$ |
| c) $y = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ | d) $y = \frac{2x^2-x+1}{1-x}$ |

§5. ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ - PHÉP TÍNH TIẾN HỆ TỌA ĐỘ

Bài 1: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

- 1) CMR: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn I làm tâm đối xứng
- 2) CMR: Tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số có hệ số nhỏ nhất nếu $a > 0$ và hệ số góc lớn nhất nếu $a < 0$ trong các tiếp tuyến của đồ thị.
- 3) CMR: Nếu đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm cách đều nhau thì điểm uốn nằm trên trục hoành.

Bài 2: Cho hàm số: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

- 1) CMR: Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- 2) CMR: Không có bất cứ tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua I.

Bài 3: CMR: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ nhận giao điểm I của 2 đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Bài 4: Tìm a, b để :

- 1) đồ thị của hàm số $y = x^3 - ax^2 + x + b$ nhận điểm (1;1) là điểm uốn.
- 2) đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + x + 1$ nhận I(1; -2) làm điểm uốn của đồ thị.

Bài 5: Tìm a để đồ thị của hàm số $y = x^4 - ax^2 + 3$

- a) Có 2 điểm uốn
- b) Không có điểm uốn

Bài 6: CMR đường cong $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ có 3 điểm uốn cùng nằm trên một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm uốn.

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 3m^2}{x - 2m}$

- 1) Khảo sát sự biến thiên và tìm các điểm cực trị của hàm số khi $m = 2$
- 2) Tìm m để đồ thị hàm số nhận điểm I(1;1) làm tâm đối xứng.

Bài 8: CMR: Đồ thị hàm số sau có 3 điểm uốn thẳng hàng.

$$1) y = \frac{x-1}{x^2-2x+2} \quad 2) y = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Bài 9: Tìm điểm uốn của đồ thị các hàm số sau:

$$\begin{array}{ll} 1) y = x^3 - 9x^2 + 2x - 3 & 4) y = \sqrt{1+x^2} \\ 2) y = 2x^4 - 6x^2 + 5 & 5) y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1} \\ 3) y = 3x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 2 & \end{array}$$

Bài 10: CMR Các điểm uốn của đồ thị hàm số $y = x \sin x$ nằm trên đường cong (C) có phương trình: $y^2(4+x^2) = 4x^2$.

b) Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện tạo bởi mặt phẳng (A'BM) cắt hình hộp trong trường hợp M là trung điểm của cạnh AD.

c) Giả sử $AA' = AB$ và MB vuông góc với AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (A'BM) vuông góc với AC' và điểm H là trực tâm của tam giác A'BM.

Bài 3: Cho hình chóp SABC, $SA = x$, $BC = y$, các cạnh còn lại đều bằng 1.

a) Tính thể tích khối chóp theo x, y.

b) Tìm x, y để thể tích khối chóp lớn nhất?

Bài 4: Trên ba cạnh Ox, Oy, Oz của tam diện ba góc vuông Oxyz ta lần lượt lấy các điểm A, B, C với $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ ($a, b, c > 0$). Gọi H là hình chiếu của O xuống mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh rằng tam giác ABC có các góc đều nhọn và H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng $S_{ABC}^2 = S_{OAB}^2 + S_{OBC}^2 + S_{OAC}^2$

c) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Chứng minh rằng bốn mặt của tứ diện OMNP là các tam giác bằng nhau. Tính thể tích tứ diện OMNP theo a, b, c.

d) Giả sử a, b, c thay đổi nhưng luôn luôn thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = k$, với $k > 0$ cho trước. Khi nào thì tam giác ABC có diện tích lớn nhất? Chứng minh rằng khi đó đoạn OH cũng có độ dài lớn nhất.

Bài 5: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = h$ và $SA \perp (ABCD)$, M là một điểm thay đổi trên cạnh CD. Đặt $CM = x$.

a) Hạ $SH \perp BM$. Tính SH theo a, h và x.

b) Xác định vị trí của M để thể tích tứ diện SABH đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Giới thiệu một số đề thi đại học gần đây

Bài 1 (Khối A-2013). Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A và góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tam giác SBC đều cạnh a và mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

Bài 2 (Khối B-20103). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

Bài 3 (Khối D-2013). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$, M là trung điểm của BC, góc $\widehat{SMA} = 45^\circ$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

Bài 4 (Khối A-2012). Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a?

Bài 5 (Khối B-2012). Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH). Tính thể tích khối chóp S.ABH theo a.

Bài 7: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng $2a$.

- Tính thể tích của khối chóp
- Tính diện tích xung quanh (S_{xq} = tổng diện tích mặt bên)

Bài 8: Cho hình chóp tam giác đều SABC. Cạnh đáy bằng $2a$ góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Hãy tính thể tích của khối chóp.

Bài 9: Cho khối tứ diện đều ABCD và M là điểm trong của nó. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ M đến các mặt của khối tứ diện không phụ thuộc vào vị trí của M bên trong khối tứ diện đó.

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD. Đáy ABCD là hình vuông cạnh bên $SA \perp (ABC)$; $SA = a$

- CMR: SAC, SBC là các tam giác vuông bằng nhau
- Tính diện tích tam giác SAC; thể tích khối tứ diện SBCE.

Bài 11: Cho hình chóp đều SABCD có cạnh đáy $AB = a$ và góc $\widehat{SAB} = \alpha$. Hãy tính thể tích của khối chóp theo a và α .

Bài 12: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. I là trung điểm B'C'. Tính thể tích khối lập phương biết $AI = 7$.

Bài 13: Cho lăng trụ tam giác ABC.C'B'C'. Đáy ABC là tam giác đều cạnh a góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30° . Hình chiếu H của A lên mặt (A'B'C') trùng với trung điểm của B'C'.

- Tính thể tích của khối lăng trụ.
- Tính diện tích mặt trên BCC'B'

Bài 14: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều các điểm ABC. Cạnh bên AA' tạo với đáy góc 60°

- Tính thể tích của khối lăng trụ
- Chứng minh mặt bên BCC'B' là một hình chữ nhật.
- Tính tổng diện tích các mặt bên của khối lăng trụ.

Bài 15: Cho chóp cắt tam giác đều ABC.A'B'C' cạnh đáy lớn $2a$ cạnh đáy nhỏ là a góc giữa đường cao với mặt bên là 30°

- Tính tổng diện tích các mặt của hình chóp cắt.
- Tính thể tích khối chóp cắt.

Bài 16: Một khối chóp cắt tứ giác đều cạnh đáy lớn là a cạnh đáy nhỏ là b ($a > b$). Tính thể tích của khối chóp cắt biết diện tích xung quang của hình chóp cắt bằng tổng diện tích của hai đáy.

III. Giới thiệu một số đề thi đại học (1997 - 2000)

Bài 1: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm AB. Qua I dựng đường vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và trên đó lấy điểm S sao cho $SI = a\sqrt{3}$.

- Chứng minh rằng tam giác SAD là tam giác vuông.
- Tính thể tích khối chóp SADC rồi suy ra khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD).

Bài 2: Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' và điểm M trên cạnh AD. Mặt phẳng (A'BM) cắt đường chéo AC' và hình hộp tại điểm H.

- Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh AD thì đường thẳng MH cắt đường thẳng A'B tại một điểm cố định.

e) $y = \frac{x-2}{2x+1}$

f) $y = y = \frac{x+2}{x+3}$

Bài 11: a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x+2}$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của đồ thị.

c) Tùy theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình:

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x+2} + m = 0$$

Bài 12: a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số: $y = \frac{x+2}{2x+1}$

b) CMR: đường thẳng $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định của đường cong (H) khi m biến thiên.

c) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng đã cho cắt đường cong (H) tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của (H).

Bài 13: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 - bx}{x-1}$

a) Tìm a và b biết rằng đồ thị (C) của hàm số đã cho đi qua điểm $A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại điểm O (0;0) có hệ số góc bằng -3

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với các giá trị của a và b đã tìm được.

Bài 14: a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x-1}$

b) Với các giá trị nào của m đường thẳng $y = m - x$ cắt đồ thị của hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt?

c) Gọi A và B là hai giao điểm đó. Tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m biến thiên.

Bài 15: Chứng minh rằng các đồ thị của hai hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x$ và $g(x) = \frac{3x}{x+2}$

tiếp xúc với nhau. Xác định tiếp điểm của hai đường cong trên và viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại điểm đó.

PHẦN II : BÀI TẬP HÌNH HỌC 12

I-QUAN HỆ SONG SONG VÀ VUÔNG GÓC

Bài 1. Cho chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC , AM cắt NI tại F

- Tính độ dài đường cao của hình chóp.
- Tính số đo góc giữa SB và mặt phẳng (SAM) .
- Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SI và BC .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng NI và SM .

Bài 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA , M là trung điểm của AE , N là trung điểm của BC .

- Tính $d(AB, SC)$.
- Chứng minh rằng $MN \perp BD$.
- Tính $d(MN, AC)$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$.

- Tính khoảng cách từ A và B đến mp (SCD) .
- Tính khoảng cách giữa đt AD và mp (SBC) .

Bài 4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ, tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

II- HÌNH KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH

Bài 1:

- Hãy chia một khối tứ diện thành hai khối tứ diện
- Hãy chia một khối tứ diện thành bốn khối tứ diện bằng hai mặt phẳng.

Bài 2: Hãy chia một khối hộp thành:

- năm khối tứ diện
- sáu khối tứ diện

Bài 3: Cho ba đường thẳng đôi một song song nhưng không đồng phẳng a, b, c trên a, b, c lần lượt lấy các đoạn AA', BB', CC' thỏa mãn $AA' < BB' < CC'$. Hãy chia hình đa diện $ABCA'B'C'$ thành một chóp và một hình lăng trụ.

Bài 4: Nếu các cạnh của khối tứ diện đều có trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều

Bài 5: Nếu các cạnh của khối tứ diện tăng lên k lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần.

Bài 6: Ba kích thước của khối hộp tăng lên k lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần.

Bài 6 (Khối D-2012). Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

Bài 7 (Khối A-2011). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Bài 8 (Khối B-2011). Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Bài 9 (Khối D-2011). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Bài 10 (Khối A-2010). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Bài 11 (Khối B-2010). Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$; góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Bài 12 (Khối D-2010). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC; $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SABC theo a.

Bài 13 (Khối A-2009). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D $AB = AD = 2a$; $CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Bài 14 (Khối B-2009). Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa BB' và mặt phẳng ABC bằng 60° , tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích tứ diện $A'ABC$?

Bài 15 (Khối D-2009). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B $AB = a$; $AA' = 2a$; $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn $A'C'$, I là giao

điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Bài 16 (Khối A-2008). Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a. Đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.

Bài 17 (Khối B-2008). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a. $SA = a$; $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính theo a thể tích khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Bài 18 (Khối D-2008). Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C'.

Bài 19 (Khối A-2007). Cho hình chóp S.ABC biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° , ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ đỉnh B đến mặt phẳng (SAC).

Bài 20 (Khối B-2007). Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với BD và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Bài 21 (Khối D-2007). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Bài 22 (Khối B-2006). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = a\sqrt{2}$; $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Bài 23 (Khối D-2006). Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. $SA = 2a$ và SA vuông góc với phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB, SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

Bài 24 (Khối B-2004). Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a; góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ . Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ .