

MỤC LỤC

	Trang
PHẦN I. PHẦN MỞ ĐẦU.....	3
I.LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI	3
II.MỤC ĐÍCH SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.....	5
1.Mục đích nghiên cứu.....	5
2.Nhiệm vụ nghiên cứu.....	5
3.Đối tượng nghiên cứu, phạm vi nghiên cứu.....	5
4.Kế hoạch nghiên cứu.....	5
5.Phương pháp nghiên cứu.....	6
6.Phương pháp thực hiện.....	6
III.GIỚI THIỆU VỀ SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.....	8
PHẦN II. NỘI DUNG.....	9
CHƯƠNG I: CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN.....	9
I.CƠ SỞ LÝ LUẬN.....	9
II.CƠ SỞ THỰC TIỄN.....	11
CHƯƠNG II: PHÂN TÍCH THỰC TRẠNG DẠY VÀ HỌC CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ, PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT, NGUYÊN HÀM- TÍCH PHÂN	
I.THỰC TRẠNG DẠY VÀ HỌC	11
II.CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN.....	12
1.Nội dung chương trình về phần ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.....	12
2.Nội dung chương trình về phần phương trình, bất phương trình lôgarit...15	
3.Nội dung chương trình về phần nguyên hàm, tích phân.....	17
CHƯƠNG III: PHÂN TÍCH VÀ SỬA CHỮA SAI LẦM CHO HỌC SINH LỚP 12 TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN	
I.PHÂN TÍCH SAI LẦM CỦA HỌC SINH TRONG CÁC BÀI TOÁN VỀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM.....	20
1.Sai lầm khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.....	20
2.Sai lầm khi xét tính đơn điệu của hàm số.....	23
3.Sai lầm khi chứng minh bất đẳng thức.....	27
4.Sai lầm khi giải các bài toán liên quan đến tính đạo hàm.....	28
5.Sai lầm khi giải các bài toán liên quan đến cực trị của hàm số.....	30
6.Sai lầm khi lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số.....	34

II. PHÂN TÍCH SAI LẦM CỦA HỌC SINH TRONG CÁC BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT.....	37
1.Sai lầm khi không tìm hoặc tìm sai điều kiện.....	37
2.Sai lầm khi hiểu sai công thức.....	38
3.Sai lầm khi vận dụng sai tính đồng biến, nghịch biến.....	40
4.Sai lầm khi biến đổi không tương đương.....	40
III.PHÂN TÍCH SAI LẦM CỦA HỌC SINH TRONG CÁC BÀI TOÁN TÍNH TÍCH PHÂN.....	43
1.Sai lầm khi không chú ý đến cận tích phân.....	43
2.Sai lầm khi đặt ẩn không chính xác.....	44
3.Sai lầm khi biến đổi không tương đương.....	45
4.Sai lầm khi sử dụng các công thức không có trong sách giáo khoa cơ bản.....	47
5. Sai lầm khi đổi cận không hợp lý.....	49
PHẦN III.KẾT QUẢ THỰC HIỆN.....	51
I.ĐỀ KIỂM TRA.....	51
II.KẾT QUẢ KIỂM TRA.....	51
PHẦN IV.KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ.....	55
PHẦN V.TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	58

PHẦN 1: PHẦN MỞ ĐẦU

I.Lý do chọn đề tài:

- Ngày nay, toán học có vị trí rất quan trọng, nó vừa là công cụ hỗ trợ cho các môn học khác đồng thời vừa giúp học sinh nhận thức được thế giới xung quanh để hoạt động có hiệu quả trong thực tiễn.

- Với môn toán, nó có khả năng phát triển tư duy logic, phát triển trí tuệ, đồng thời có vai trò to lớn trong việc rèn luyện phương pháp suy nghĩ, phương pháp suy luận, phương pháp giải quyết vấn đề có suy luận, có khoa học toàn diện, chính xác, có nhiều tác dụng phát triển trí thông minh, tư duy độc lập sáng tạo, linh hoạt,... góp phần giáo dục tính kiên trì của học sinh.

- Từ chức năng, vai trò và nhiệm vụ quan trọng của môn toán, vấn đề đặt ra cho người giáo viên là làm thế nào để đưa ra được phương pháp học toán có hiệu quả để học sinh được phát triển tính tích cực, chủ động sáng tạo trong việc nắm vững các kiến thức toán học.

- Theo tôi để có phương pháp dạy học bao giờ cũng phải xuất phát từ nhiệm vụ, **mục tiêu nhận thức** của môn toán ở bài học nói chung và trong giờ dạy toán nói riêng. Nó không phải là cách thức truyền thụ kiến thức toán học, rèn kỹ năng giải toán mà là sự định hướng để tổ chức hoạt động nhận thức tích cực, độc lập và giáo dục phong cách làm việc một cách có khoa học, có hiệu quả cho học sinh tức là dạy cách học. Vì vậy giáo viên cần phải đổi mới phương pháp và các hình thức dạy học để nâng cao hiệu quả dạy - học.

- Từ đặc điểm tâm sinh lý của học sinh là dễ nhớ nhưng cũng mau quên, sự tập trung chú ý trong giờ học toán chưa cao, thích học nhưng chóng chán vì vậy **dễ gặp sai lầm trong giải toán**. Vì vậy giáo viên phải làm thế nào để giúp học sinh **phát hiện ra sai lầm nhằm khắc sâu kiến thức** cho học sinh và tạo ra không khí sẵn sàng học tập, chủ động tích cực trong việc tiếp thu kiến thức.

- Hiện nay trong toàn ngành giáo dục nói chung và giáo dục phổ thông trung học nói riêng đang thực hiện yêu cầu đổi mới phương pháp dạy học

theo hướng phát huy tính tích cực của học sinh. Để đạt được yêu cầu đó giáo viên phải có những phương pháp và hình thức dạy học để nâng cao hiệu quả cho học sinh, vừa phù hợp với đặc điểm tâm sinh lý và trình độ nhận thức của học sinh.

Trong dạy học toán, luyện tập thực hành đóng vai trò đặc biệt, nhằm giúp học sinh áp dụng các kiến thức đã học và ứng dụng thiết thực trong đời sống. Giải toán góp phần phát triển năng lực tư duy, khả năng suy luận hợp lý và diễn đạt đúng (nói và viết), cách phát hiện, cách giải quyết các vấn đề đơn giản, gần gũi cuộc sống, kích thích trí tưởng tượng, gây hứng thú học tập toán, hình thành phương pháp học tập khoa học, có kế hoạch, chủ động linh hoạt, sáng tạo .

Trong thực tế dạy học hiện nay, tình trạng học sinh lớp 12 còn sai lầm trong giải toán rất phổ biến. Để giúp học sinh nắm vững cách giải toán là một yêu cầu cấp bách đối với tất cả giáo viên trực tiếp giảng dạy. Bằng thực tế và kinh nghiệm giảng dạy, bằng tình thương và trách nhiệm, chúng tôi luôn trăn trở và cùng nhau trao đổi trong sinh hoạt tổ chuyên môn để tìm ra biện pháp khắc phục, giúp học sinh nhận dạng được bài toán, nắm được phương pháp giải cho từng dạng toán, giúp học sinh vận dụng và giải toán theo phương pháp dễ hiểu và hay nhất.

Chính việc **xác định những sai lầm trong giải toán và hướng dẫn học sinh sửa chữa** là cơ hội tốt nhất để bồi dưỡng năng lực chuyên môn và nghiệp vụ sư phạm phục vụ tốt cho yêu cầu đổi mới nội dung và phương pháp dạy học của tôi. Nên tôi đã chọn đề tài **“PHÂN TÍCH VÀ SỬA CHỮA SAI LẦM CHO HỌC SINH LỚP 12 TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN”**.

Nhằm mục đích giúp học sinh lớp 12 khắc phục được những sai lầm trong giải toán, từ đó giải chính xác các bài trọng tâm lớp 12 và đạt kết quả cao trong quá trình học tập, thi tốt nghiệp, thi đại học.

II. MỤC ĐÍCH SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

1. Mục đích nghiên cứu

Phân tích những sai lầm trong việc giải toán lớp 12 và sửa chữa sai lầm là một việc làm quan trọng giúp học sinh định hướng đúng trong việc nhận dạng đề và cách giải nhằm góp phần rèn luyện kỹ năng và phát triển năng lực tư duy cho học sinh.

-Góp phần phát triển tư duy và rèn luyện kỹ năng thực hành qua việc giải toán. Giúp học sinh nhận ra sai sót và biết sửa chữa sai sót sẽ tạo sự hưng phấn trong học tập, tạo sự tự tin cho chủ thể hoạt động, rèn luyện và phát triển trí tuệ, năng lực quan sát, so sánh, phân tích tổng hợp, trừu tượng hóa và khái quát hóa các vấn đề toán học có liên quan.

-Được rèn luyện và sửa chữa sai sót của mình, của bạn, học sinh được rèn luyện nhiều đức tính và phẩm chất tốt như: cẩn thận, cần cù, chính xác, tự tin.... từ đó nâng cao khả năng tư duy, sáng tạo.

2. Nhiệm vụ nghiên cứu

- Đánh giá thực tế quá trình vận dụng giải bài tập toán lên quan đến các bài toán trong chương trình Giải tích 12 (Ban cơ bản) để có được bài giải toán hoàn chỉnh và chính xác.

3. Đối tượng nghiên cứu

- Học sinh lớp 12A12, 12A13 Trường THPT Đồng Đa- Thành phố Hà Nội.

4. Kế hoạch nghiên cứu

- Thời gian nghiên cứu: Năm học 2011- 2012

- Nghiên cứu lý luận: Nghiên cứu sách giáo khoa, sách bài tập, sách dùng cho giáo viên, sách tham khảo, báo toán học và tuổi trẻ, tạp trí toán học.

- Phối hợp nghiên cứu với các đồng nghiệp: Tôi đã dự giờ, quan sát việc giảng dạy của giáo viên và học tập của học sinh trong quá trình học lý thuyết và bài tập về ứng dụng của đạo hàm, bài tập giải các phương trình, bất phương trình loogarit, bài tập tính tích phân, đồng thời học hỏi và tham khảo ý kiến của các đồng nghiệp đã dạy toán 12 nhiều năm và có kinh nghiệm để từ đó xây dựng đề tài của tôi.

- Tổng kết kinh nghiệm: Tôi đã tổng kết lại những kinh nghiệm sau khi nghiên cứu các tài liệu , học hỏi đồng nghiệp và từ thực tiễn giảng dạy của bản thân để viết đề tài.

5. Phương pháp nghiên cứu

- Phương pháp điều tra.
- Phương pháp đối chứng.
- Phương pháp nghiên cứu tài liệu.

6. Phương pháp thực hiện

Để khắc phục những khó khăn mà học sinh thường gặp phải, khi nghiên cứu đề tài tôi đã đưa ra các biện pháp như sau:

6.1. Bổ sung, hệ thống những kiến thức cơ bản mà học sinh thiếu hụt

- Phân tích, mổ xẻ các khái niệm, định nghĩa, định lí để học sinh nắm được bản chất của các khái niệm, định nghĩa, định lí đó.
- Đưa ra các ví dụ, phản ví dụ minh họa cho các khái niệm, định nghĩa, định lí.
- So sánh giữa các khái niệm, các quy tắc để học sinh thấy được sự giống và khác nhau giữa chúng.
- Chỉ ra các sai lầm mà học sinh dễ mắc phải.

6.2. Rèn luyện cho học sinh về mặt tư duy, kĩ năng, phương pháp...

- Thao tác tư duy: phân tích, so sánh, ...

- Kỹ năng: lập luận vấn đề, chọn phương án phù hợp để giải quyết vấn đề.

- Phương pháp: phương pháp giải toán.

6.3. Đổi mới phương pháp dạy học (lấy học sinh làm trung tâm)

- Sử dụng phương pháp dạy học phù hợp với hoàn cảnh thực tế.

- Tạo hứng thú, đam mê, yêu thích môn học cho học sinh.

- Sử dụng phương tiện dạy học, thiết bị dạy học nhằm làm cho bài giảng sinh động hơn, bớt khô khan và học sinh không cảm thấy nhàm chán. Chẳng hạn sử dụng bảng phụ, phiếu học tập, nếu có điều kiện thì sử dụng giáo án điện tử kết hợp với việc trình chiếu đồ thị hàm số, các hình vẽ, hình động liên quan trực tiếp tới bài giảng.

6.4. Đổi mới việc kiểm tra, đánh giá

- Kết hợp giữa tự luận và trắc nghiệm khách quan với 6 mức độ nhận thức: nhận biết - thông hiểu - vận dụng - phân tích - tổng hợp - đánh giá.

- Giáo viên đánh giá học sinh.

- Học sinh đánh giá học sinh.

6.5. Giáo viên có phương pháp dạy học, hình thức dạy học sao cho phù hợp với từng loại đối tượng học sinh, chỉ ra cho học sinh những sai lầm thường mắc phải. Hướng dẫn cho học sinh tự học, tự làm bài tập.

6.6. Phân dạng bài tập và phương pháp giải

- Hệ thống kiến thức cơ bản.

- Phân dạng bài tập và phương pháp giải.

- Đưa ra các bài tập tương tự, bài tập nâng cao.

- Sau mỗi lời giải cần có nhận xét, củng cố và phát triển bài toán, suy ra kết quả mới, bài toán mới. Như vậy học sinh sẽ có tư duy linh hoạt và sáng tạo

- Lựa chọn các ví dụ, các bài tập cụ thể phân tích tỉ mỉ những sai lầm của học sinh, vận dụng hoạt động năng lực tư duy và kỹ năng vận dụng kiến

thức của học sinh để từ đó đưa ra lời giải đúng của bài toán. Nêu các chú ý giúp học sinh không lặp lại các sai lầm sau này.

6.7. Thực nghiệm sư phạm.

III. GIỚI THIỆU VỀ SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

Sáng kiến kinh nghiệm gồm các phần sau:

- Phần mở đầu
 - + Lý do chọn đề tài
 - + Mục đích sáng kiến kinh nghiệm
 - + Giới thiệu về sáng kiến kinh nghiệm
- Phần nội dung gồm ba chương:
 - + Chương I: Cơ sở lý luận và thực tiễn
 - + Chương II: Phân tích thực trạng dạy và học các bài toán liên quan đến ứng dụng của đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, các công thức và các cách giải phương trình, bất phương trình logarit, các công thức và phương pháp tính nguyên hàm- tích phân.
 - + Chương III: Phân tích và sửa chữa sai lầm cho học sinh lớp 12 trong một số bài toán trọng tâm.
- Phần kết quả thực hiện
- Phần kết luận và khuyến nghị
- Phần tài liệu tham khảo

PHẦN 2: NỘI DUNG

CHƯƠNG I: CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ CƠ SỞ THỰC TIỄN CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

I. CƠ SỞ LÝ LUẬN

Nhà toán học George Polya đã từng nói: "Con đường duy nhất để học Toán là làm Toán". Thực tế cho thấy, hầu hết các học sinh vẫn chưa nhận thức rõ điều này, **trong giải toán vẫn còn mắc phải nhiều sai lầm**. Cụ thể các em vẫn còn mắc một số lỗi cơ bản sau:

+ Học công thức toán một cách đại khái, áp dụng một cách máy móc không học kỹ điều kiện để được áp dụng một công thức toán học:

Nhiều học sinh trong quá trình học tập, các công thức được các em học một cách qua loa, máy móc, không đọc kỹ và tìm hiểu kỹ điều kiện để dùng công thức hay áp dụng công thức đó trong trường hợp nào. Vì vậy các em sẽ rất dễ làm bài sai.

+ Mơ ước thấy ngay lời giải khi bắt đầu giải một bài toán:

Nhiều học sinh mất tinh thần khi không thấy phương hướng rõ rệt nào để giải một bài toán. Bản chất việc giải toán là từng bước một tiến gần hơn đến lời giải. Đừng mơ ước vô lý về có một giải pháp toàn cục ngay khi bắt đầu giải một bài toán. Tôi vẫn thường nói với học sinh của tôi như sau: “ Nếu trong hành trình của chúng ta có 10 đoạn đường, thì các em phải đi đến đoạn thứ 9 thì mới có thể nhìn thấy đoạn thứ 10, còn nếu các em vẫn chưa đi thì không bao giờ nhìn thấy đoạn thứ 10 mà ta mong đợi”

Thật ra đa số các bài toán trong chương trình học đều có thể giải từng bước một mà không cần có một khái niệm toàn cục về lời giải khi bắt đầu giải chúng. Đây là tác phong làm toán cần được rèn luyện để chuẩn bị cho việc đương đầu với các bài toán phức tạp trong nghiên cứu khoa học về sau này.

+ Lướt qua các bài toán cơ bản và dành nhiều thì giờ cho các bài toán khó.

Nhiều học sinh coi thường các bài toán cơ bản đơn giản mà không dành thì giờ ôn tập chúng, chỉ cố giải và học thuộc các bài toán khó. Thực ra đa số

các bài toán phức tạp là các bài phối hợp nhiều bài toán cơ bản. Cho nên sẽ chúng ta thấy rõ bản chất của các bài toán loại này và dễ dàng giải chúng nếu chúng ta đã thành thạo các bài toán cơ bản và nhìn ra chúng ngay trong đồng hồ độn của các bài toán phối hợp. Mặc khác thực là buồn cười khi muốn giải các bài toán tổng hợp mà chưa nắm vững các bài toán đơn giản.

Làm một bài toán cơ bản chúng ta có thể học được cách giải cho rất nhiều bài toán khác, còn làm một bài toán khó thì hầu như chúng ta không áp dụng chúng cho bất kỳ bài toán nào khác! Làm các bài toán khó lại rất mất thì giờ. Trong các bài thi thông thường tỉ lệ các bài toán khó ít hơn 15%, vì thế em nào dành nhiều hơn 15% thời gian học tập cho chúng là vô lý!

+ Lười sử dụng giấy nháp và sử dụng bộ óc của mình như một tờ giấy nháp

Thực tế hiện nay, học sinh rất lười sử dụng giấy nháp, khi gặp một bài toán, thường các em sẽ dùng ngay cái đầu của mình để phân tích, tổng hợp rất nhiều bước cùng một lúc, và như vậy nhiều học sinh học toán đến đau đầu. Chúng ta sẽ thấy không phải toán làm học sinh đau đầu mà chính cách làm toán của học sinh đã hại các em. Ví dụ khi học sinh làm nhầm trong đầu bài toán sau và các em thử giải các bài toán đó trên giấy nháp như sau $45+86$ và 75×36

Các em sẽ thấy đầu các em sẽ ê ẩm sau vài lần tính nhầm và nếu dùng giấy nháp để tính toán thì không có gì khó khăn cả. Chính thói quen dùng bộ óc như một tờ giấy nháp mà nhiều học sinh cảm thấy cực kỳ mệt mỏi sau khi làm bài một bài toán hoặc sau khi trải qua kỳ thi tới 120 phút hoặc 180 phút. Nếu tính toán dựa vào các công thức trong đầu, chúng ta bắt bộ óc hoạt động theo cơ chế “song song”, cùng một lúc phải làm nhiều thứ khác nhau, việc này dẫn đến đau đầu và sai sót.

+ Không ghi đầy đủ các chi tiết chứng minh mặc dù các chi tiết này đều đã hiện rõ trong đầu.

Việc này xảy ra khi học sinh cố gắng làm bài ngắn gọn hơn, tuy nhiên việc này rất tai hại. Thật ra cách viết này còn có tác hại lớn hơn nữa: nhiều khi các dòng chữ đó, hiện ra trong đầu mà không được ghi ra, lại rất quan trọng trong việc giúp ta tìm ra cách làm tiếp bài toán và hậu quả là chúng ta bị bí một cách oan uổng.

Cách làm toán tốt nhất là: trong đầu nghĩ sao thì ta viết ra như vậy, không lựa chọn hay tìm cách viết ngắn lại. Chúng ta chỉ trình bày lại cho gọn (nếu thật sự cần thiết) bài giải dựa trên một bài giải chi tiết đã được ghi ra giấy.

II. CƠ SỞ THỰC TIỄN

- Thuận lợi:

- + Môn toán là môn học quan trọng, nên đã được học sinh chú ý tiếp thu kiến thức ngay từ những ngày đầu đi học.
- + Phần lớn học sinh đều yêu thích môn toán.
- + Sách vở, tài liệu hỗ trợ dùng cho môn toán tương đối nhiều.

- Khó khăn:

- + Môn toán là môn học khó, học sinh dễ chán.
- + Trình độ nhận thức học sinh không đồng đều.
- + Một số em tiếp thu bài một cách thụ động, ghi nhớ bài một cách máy móc nên còn **đễ mắc sai lầm khi giải các bài toán vì thế phải có phương pháp khắc sâu kiến thức.**

CHƯƠNG II: PHÂN TÍCH THỰC TRẠNG DẠY VÀ HỌC CÁC BÀI TOÁN VỀ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ, CÁC BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT, CÁC BÀI TOÁN TÍNH TÍCH PHẦN.

I. THỰC TRẠNG DẠY VÀ HỌC CÁC BÀI TOÁN VỀ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ, CÁC BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT, CÁC BÀI TOÁN TÍNH TÍCH PHẦN Ở TRƯỜNG THPT.

Trong thực tế, khi học sinh học chương trình toán 12 thường gặp phải những khó khăn sau:

- Không nắm vững định nghĩa về tính đơn điệu của hàm số trên một khoảng, không hiểu chính xác về định nghĩa điểm tới hạn của hàm số.
- Không nắm vững điều kiện để hàm số đơn điệu trên một khoảng.
- Không nắm vững điều kiện để hàm số đạt cực trị tại một điểm x_0 .

- Không nắm vững định nghĩa về giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số trên một miền D.

- Không nắm vững bản chất sự khác nhau giữa tiếp tuyến tại một điểm thuộc đồ thị số với tiếp tuyến kẻ từ một điểm đến đồ thị hàm số đã cho.

- Không nắm vững bản chất của sự biến thiên của hàm số mũ, hàm số logarit, các công thức logarit, các công thức nguyên hàm, tích phân, số phức.

Các bài toán về ứng dụng của đạo hàm, ứng dụng các công thức logarit để giải các phương trình, bất phương trình lôgarit, ứng dụng các công thức tích phân để giải quyết các bài toán tích phân, là một trong các mảng kiến thức trọng tâm và rất quan trọng, nó là chìa khoá để giải rất nhiều bài toán ở bậc THPT, chính vì thế nó được giáo viên chú ý ngay từ đầu trong việc truyền thụ kiến thức cho học sinh và từ đó cũng được các em quan tâm và chú ý tiếp thu kiến thức.

- Với rất nhiều học sinh lớp 12 các em đang có tâm lý chủ quan vì kỳ thi tốt nghiệp rất dễ, và không đồ đại học cũng dễ dàng đi học ở các trường trung cấp, cao đẳng, đại học dân lập. Vì vậy, mặc dù được các thầy cô định hướng ngay từ đầu nhưng việc tập trung đầu tư cho học tập nói chung và học toán nói riêng của học sinh lớp 12 còn rất hạn chế.

- Với thời lượng phân phối chương trình, giáo viên không đủ thời gian để dạy hết các dạng toán về ứng dụng của đạo hàm, các dạng phương trình, bất phương trình logarit, các cách đặt ẩn, biến đổi trong tính tích phân, vì vậy chỉ đáp ứng được cho học sinh kiến thức thi tốt nghiệp, còn thi đại học thì các em học sinh phải tự học, tự tìm tòi là chính.

II. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ, VỀ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT, VỀ TÍCH PHÂN

1. Nội dung chương trình về phần ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

Học sinh cần nắm được một số vấn đề sau đây (liên quan đến nội dung và phạm vi nghiên cứu của đề tài)

1.1. Định nghĩa về tính đơn điệu của hàm số:

✦ Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên khoảng K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K , $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

✦ Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K , $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

1.2. Tính chất của các hàm số đồng biến, nghịch biến:

✦ Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số cùng đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D thì tổng $f(x) + g(x)$ cũng là hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D .

Chú ý: Tính chất trên nói chung không đúng với hiệu $f(x) - g(x)$.

✦ Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số dương, cùng đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D thì tích $f(x).g(x)$ cũng là hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D .

Chú ý: Tính chất trên nói chung không đúng với tích $f(x)g(x)$ khi $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số không cùng dương trên D .

1.3. Công thức tính đạo hàm:

Hàm số hợp $y = u^\alpha$ có đạo hàm $y' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$ (*)

✦ Công thức (*) chỉ đúng với số mũ α là hằng số.

✦ Nếu α không nguyên thì công thức (*) chỉ đúng khi u nhận giá trị dương.

1.4. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số dựa trên định lí sau:

✦ Định lí: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng K .

(Kí hiệu K là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng)

a. Nếu $f'(x) > 0$ với $\forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .

b. Nếu $f'(x) < 0$ với $\forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

c. Nếu $f'(x) = 0$ với $\forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên K .

1.5. Quy tắc tìm điểm cực trị của hàm số dựa trên hai định lí sau:

✦ Định lí 1: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

a. Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b. Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

✦ Định lí 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

a. Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu

b. Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Chú ý: Quy tắc 2 để tìm điểm cực trị của hàm số là điều kiện đủ chứ không phải điều kiện cần. Do vậy, điều ngược lại nói chung không đúng.

1.6. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số trên miền D:

$$m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}, \quad M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases}$$

+ Nếu $f(x) \geq m, \forall x \in D$ (hay $f(x) \leq M, \forall x \in D$) nhưng không $\exists x_0 \in D: f(x_0) = m$ (hay $\exists x_0 \in D: f(x_0) = M$) thì dấu "=" không xảy ra. Khi đó, không tồn tại giá trị nhỏ nhất (hay giá trị lớn nhất) của hàm số $f(x)$ trên miền D.

+ Khi tìm giá trị nhỏ nhất (hay giá trị lớn nhất) của hàm số $f(x)$ trên miền D mà chuyển sang xét giá trị nhỏ nhất (hay giá trị lớn nhất) của hàm số $g(t)$ với phép đặt $t = u(x)$ thì cần chuyển đổi điều kiện theo ẩn t để được bài toán tương đương.

1.7. Về phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$:

✦ Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ có phương trình:

$$y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0.$$

✦ Tiếp tuyến với (C) có hệ số góc k, đi qua điểm $M_1(x_1; y_1)$ có phương trình:

$$y = k.(x - x_1) + y_1. \text{ Trong đó hệ số góc } k \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} f(x) = k(x - x_1) + y_1 \\ f'(x) = k \end{cases}$$

(*,*)

Chú ý: Nếu điểm $M_1(x_1; y_1)$ nói trên thuộc (C) thì hệ số góc k vẫn thỏa mãn hệ (*,*). Trong trường hợp này, số tiếp tuyến có thể nhiều hơn 1 tiếp tuyến.

2. Nội dung chương trình về phương trình lôgarit và bất phương trình lôgarit

a) Các công thức lũy thừa và lôgarit cơ bản

+ $a^n = a.a.a...a$ (n thừa số a)

+ Với $a \neq 0$

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$+ \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b} \quad + \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad + (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$+ \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases} \quad + \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

+ Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$), ta có:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

+ Cho $a, b > 0; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có:

$$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha.\beta} \quad (a.b)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

+ Nếu $a > 1$: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$; nếu $0 < a < 1$: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

+ $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$

+ Cho $1 \neq a > 0; b > 0$

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1 \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a (a^\alpha) = \alpha$$

+ Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có:

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

+ Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có:

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

+ Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, với mọi α ta có:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

+ Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1);$$

$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b \quad (\alpha \neq 0)$$

b) Phương trình lôgarit cơ bản:

+ Phương trình lôgarit cơ bản có dạng: $\log_a x = b \quad (a > 0; a \neq 1)$

Cách giải: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

Ví dụ: $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$

+ **Cách giải một số phương trình lôgarit đơn giản:**

➤ Đưa về cùng cơ số:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0; a \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

➤ Đặt ẩn phụ:

➤ Mũ hóa:

d) Bất phương trình lôgarit cơ bản:

Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình có dạng:

$\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b; \log_a x < b; \log_a x \leq b$) với $a > 0; a \neq 1$

Cách giải:

Xét phương trình: $\log_a x > b \quad (1)$

+ Với $a > 1$ ta có $(1) \Leftrightarrow x > a^b$

+ Với $0 < a < 1$ ta có $(1) \Leftrightarrow 0 < x < a^b$

e) Cách giải một số bất phương trình lôgarit đơn giản:

➤ Đưa về cùng cơ số:

+ Với $a > 1$, ta có: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

+ Với $0 < a < 1$, ta có: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > f(x) \end{cases}$

➤ Đặt ẩn phụ:

3. Nội dung chương trình về nguyên hàm, tích phân.

a) Khái niệm nguyên hàm

- Cho hàm số f xác định trên K . Hàm số F đgl **nguyên hàm** của f trên K nếu:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in K$$

- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì **họ nguyên hàm** của $f(x)$ trên K là:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

- Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

b) Tính chất

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0)$

c) Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

• $\int 0dx = C$ • $\int dx = x + C$ • $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$ • $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ • $\int e^x dx = e^x + C$	• $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$ • $\int \cos x dx = \sin x + C$ • $\int \sin x dx = -\cos x + C$ • $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ • $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
• $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$ • $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$	• $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C, \quad (a \neq 0)$ • $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$

d) Phương pháp tính nguyên hàm

- Phương pháp đổi biến số

Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì:

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

- Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

e) Khái niệm tích phân

- Cho hàm số f liên tục trên K và $a, b \in K$. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì:

$F(b) - F(a)$ đgl tích phân của f từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho x , tức là:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots = F(b) - F(a)$$

- **Ý nghĩa hình học:** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của

$y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

d) Tính chất của tích phân

$$+ \int_0^0 f(x)dx = 0 \quad + \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$+ \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (k: \text{const})$$

$$+ \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$+ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$+ \text{Nếu } f(x) \geq 0 \text{ trên } [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$+ \text{Nếu } f(x) \geq g(x) \text{ trên } [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

e) Phương pháp tính tích phân

- **Phương pháp đổi biến số**

$$\int_a^b f[u(x)] \cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

trong đó: $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K , $y = f(u)$ liên tục và hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K , $a, b \in K$.

- **Phương pháp tích phân từng phần**

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K , $a, b \in K$ thì:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

CHƯƠNG 3: PHÂN TÍCH VÀ SỬA CHỮA SAI LẦM CHO HỌC SINH LỚP 12 TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN

I. Phân tích những sai lầm của học sinh trong các bài toán về ứng dụng của đạo hàm

1. Sai lầm khi tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Học sinh thường mắc sai lầm khi không nắm vững định nghĩa giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số trên một miền D .

Ví dụ 1 : Tìm Max, Min của $y = \sin^{2006} x + \cos^{2006} x$

Lời giải sai:

Ta có :

$$y = \sin^{2006} x + \cos^{2006} x \geq 0 \Rightarrow y_{\min} = 0$$

$$y = \sin^{2006} x + \cos^{2006} x \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow y_{\max} = 2$$

Phân tích sai lầm:

- $y_{\min} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$, Vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 = 1 \rightarrow$ dấu bằng không xảy ra $\Rightarrow$ điều kiện (2) không thỏa.
- $y_{\max} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^{2006} x = 1 \\ \cos^{2006} x = 1 \end{cases}$, Vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 = 1$

Lời giải đúng:

$$y = (\sin^2 x)^{1003} + (\cos^2 x)^{1003}$$

$$\Leftrightarrow y = (1 - \cos^2 x)^{1003} + (\cos^2 x)^{1003}$$

$$\Leftrightarrow y = (1 - t)^{1003} + t^{1003}, \text{ Với } 0 \leq t = \cos^2 x \leq 1$$

$$\bullet \quad y' = -1003(1-t)^{1002} + 1003t^{1002} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)^{1002} = t^{1002}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-t = t \\ 1-t = -t \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \quad y(0) = 1$$

$$y(1) = 1$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1002}}$$

$$\text{Vậy : } \max y = 1; \min y = \frac{1}{2^{1002}}$$

Ví dụ 2 : Tìm Max, Min của $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x + 2}$

Lời giải sai:

$$y = \frac{(1 + \cos x) + 1}{\sin x + \cos x + 2} \geq \frac{1}{1+1+2} \Rightarrow y_{\min} = \frac{1}{4}$$

Phân tích sai lầm:

$$y_{\min} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}, \text{ Vô lí vì dấu bằng không xảy ra.}$$

Lời giải đúng:

TXĐ : D=R

$$y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x + 2}$$

$$\Leftrightarrow y \sin x + (y-1) \cos x + 2y - 2 = 0, (*)$$

Để có Max, Min thì (*) phải có nghiệm x, điều này tương đương với :

$$y^2 + (y-1)^2 \geq (2y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 6y + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow y_{\min} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}; y_{\max} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

Chú ý :

$$A \sin x + B \cos x = C, \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow A^2 + B^2 \geq C^2$$

Ví dụ 3

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} \right) - 1$.

Lời giải sai:

$$\text{Đặt } t = \cos x + \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = t^2 - 2.$$

Ta được hàm số: $g(t) = t^2 + 2t - 3 = (t+1)^2 - 4 \geq -4, \forall t \in \mathbb{R}$

Vậy $\min f(x) = -4$, khi $t = -1$.

Phân tích sai lầm : Sai lầm ở đây là chuyển bài toán không tương đương. Giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x)$ không trùng với giá trị nhỏ nhất của hàm $g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Có thể thấy ngay khi $t = -1$ thì không tồn tại giá trị của x để $\cos x + \frac{1}{\cos x} = -1$ (!)

Nhớ rằng, số $m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}$

Lời giải đúng :

Đặt $t = \cos x + \frac{1}{\cos x}$, với $x \in D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\Rightarrow |t| = \left| \cos x + \frac{1}{\cos x} \right| = |\cos x| + \left| \frac{1}{\cos x} \right| \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$|\cos x| = 1$$

Khi đó: $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = t^2 - 2$. Ta được hàm số: $g(t) = t^2 + 2t - 3$.

Lập bảng biến thiên hàm số $g(t)$ (với $|t| \geq 2$):

t	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
$g'(t)$	-	-	0	+	+
G(t)	$+\infty$ ↘ -3			5 ↗ $+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra: $m = \min_D f(x) = \min_{|t| \geq 2} g(t) = -3$

Đạt được khi $t = -2 \Leftrightarrow \cos x + \frac{1}{\cos x} = -2 \Leftrightarrow \cos x = -1$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Sai lầm khi xét tính đơn điệu của hàm số

Học sinh thường mắc phải sai lầm khi không nắm chính xác định nghĩa về tính đơn điệu của hàm số.

Ví dụ 1 : (ĐH khối A, 2003)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải sai:

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t}$ với $t \neq 0$

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$$

$\Rightarrow f(t)$ tăng với $t \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

Phân tích sai lầm:

Vì hàm $f(t)$ gián đoạn tại $t = 0$, nên không thể dùng tính đơn điệu.

Lời giải đúng

$$\begin{aligned} \text{Hệ} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=0 \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \neq 0 \vee xy=-1 \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \neq 0 \\ 2y=x^3+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \neq 0 \\ x^3-2x+1=0 \\ xy=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=y=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$\left[\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 0 \right] \text{ VN}$

Ví dụ 2 : Tìm m để hàm số $y = \frac{x+m}{x-m}$ đồng biến trên $(1, +\infty)$

Lời giải sai:

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow y' = \frac{-2m}{(x-m)^2} \geq 0, \forall x \in (1, +\infty) \Leftrightarrow -2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$$

Phân tích sai lầm:

Không giải $x \neq m, \forall x \in (1, +\infty)$

Lời giải đúng:

$$\begin{aligned} \text{YCBT} &\Leftrightarrow y' = \frac{-2m}{(x-m)^2} \geq 0, \forall x \in (1, +\infty) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2m \geq 0 \\ x \neq m, \forall x \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \end{aligned}$$

Chú ý :

$$\boxed{\frac{A}{B^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}}$$

Ví dụ 3

Xét tính đơn điệu của hàm số: $y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Lời giải sai:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus -1$

Ta có: $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

Bảng biến thiên:

X	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
Y	1 	$+\infty$	 1

Suy ra: Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

Phân tích sai lầm:

Lời giải trên có vẻ như đúng rồi, nếu ta không chú ý đến kết luận của bài toán ! Chú ý rằng: nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên tập D thì với mọi x_1, x_2 thuộc D,

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Trong kết luận của bài toán, nếu ta lấy $x_1 = -2 \in D$ và

$x_2 = 0 \in D$ thì $x_1 < x_2$ nhưng $f(x_1) = 3 > -1 = f(x_2)$???

Lời giải đúng :

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus -1$

Ta có: $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

Bảng biến thiên:

X	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
Y	1	$+\infty$	1

Suy ra: Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

➤ Nhiều khi các em không chú ý đến các điểm tới hạn của hàm số, vì vậy việc xét dấu của đạo hàm y' sẽ bị sai.

Ví dụ 4:

Xét tính đơn điệu của hàm số: $y = f(x) = x - 1 + \sqrt{4 - x^2}$

Lời giải sai:

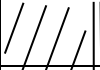
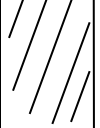
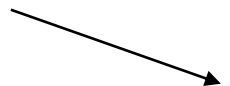
Tập xác định: $D = -2; 2$

Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow 4 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Trên từng khoảng giữa hai điểm tới hạn liên tiếp nhau, $f'(x)$ luôn giữ nguyên một dấu, vì $f'(0) > 0$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

X	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
---	----	-------------	------------	---

y'		-	0	+	0	-	
Y		-3		-1		$2\sqrt{2}-1$	
						1	

Suy ra: hàm số đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ và nghịch biến trên các khoảng $(-2; -\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2}; 2)$.

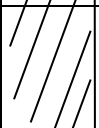
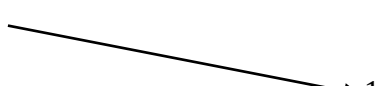
Phân tích sai lầm: Nếu để ý ở bảng biến thiên ta thấy ngay một điều vô lý là trên đoạn $[-2; -\sqrt{2}]$ giá trị của hàm số giảm từ -3 xuống -1 ??? Thực ra ở đây $-\sqrt{2}$ không phải là điểm tới hạn của hàm số.

Lời giải đúng:

Tập xác định: $D = -2; 2$. Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Trên từng khoảng giữa hai điểm tới hạn liên tiếp nhau, $f'(x)$ luôn giữ nguyên một dấu, vì $f'(0) > 0$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

X	-2	$\sqrt{2}$			2
y'		+	0	-	
Y		-3		$2\sqrt{2}-1$	 1 

Suy ra: hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; \sqrt{2})$ và nghịch biến trên khoảng $(\sqrt{2}; 2)$.

3. Sai lầm khi chứng minh bất đẳng thức

Khi sử dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh bất đẳng thức, học sinh thường mắc phải sai lầm là không nhớ chính xác định nghĩa tính đơn điệu của hàm số, vận dụng sai tính chất của các hàm đồng biến, nghịch biến.

Ví dụ 1

Chứng minh rằng: $\tan x > x$, với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải sai:

Xét hàm số $f(x) = \tan x - x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x > 0$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Từ $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow \tan x - x > \tan 0 - 0$ hay $\tan x > x$, với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Phân tích sai lầm: Lời giải trên có vẻ đúng, nhưng sai lầm ở đây khá tinh vi (?!). Sau khi kết luận $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì vì sao từ $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$???

Sai lầm ở đây là $0 \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Nhớ rằng: nếu $f(x)$ đồng biến trên đoạn $a; b$ (tức là $f(x)$ liên tục trên $a; b$ và $f'(x) > 0$ với $\forall x \in a; b$) thì với $\forall x_1, x_2 \in a; b$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Lời giải đúng :

Xét hàm số $f(x) = \tan x - x$, với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geq 0$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, dấu "=" xảy ra chỉ tại $x = 0$,

suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Từ $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow \tan x - x > \tan 0 - 0$ hay $\tan x > x$, với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 2:

Chứng minh rằng nếu với $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ thì $x.e^x > -\frac{1}{e}$.

Lời giải sai:

Xét các hàm số $f(x) = x$, $g(x) = e^x$ là các hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $h(x) = x.e^x$ là tích của hai hàm đồng biến nên cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra, từ $x > -1 \Rightarrow f(x) > f(-1)$ hay $x.e^x > -\frac{1}{e}$.

Phân tích sai lầm:

Lời giải trên sai lầm ở chỗ: tích của hai hàm đồng biến là một hàm đồng biến chỉ đúng khi hai hàm đó dương (!).

Lời giải đúng:

Xét hàm số $f(x) = x.e^x$, ta có $f'(x) = e^x(x+1) \geq 0$, $\forall x \geq -1$, dấu "=" xảy ra chỉ tại $x = -1$. Suy ra, hàm số đồng biến trên nửa khoảng $-1; +\infty$. Từ $x > -1 \Rightarrow f(x) > f(-1)$ hay $x.e^x > -\frac{1}{e}$.

4. Sai lầm khi giải các bài toán liên quan tới tính đạo hàm

Sai lầm khi vận dụng các công thức tính đạo hàm.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x+1)^x$.

Lời giải sai:

Ta có $y' = x(2x+1)^{x-1}(2x+1)' = 2x.(2x+1)^{x-1}$.

Phân tích sai lầm:

Lời giải trên đã vận dụng công thức $u^\alpha' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$. Vận dụng như vậy là sai, vì công thức này chỉ áp dụng cho số mũ α là một hằng số.

Lời giải đúng :

Điều kiện: $x > -\frac{1}{2}$, $x \neq 0$ (khi đó $y > 0$)

$$\text{Từ } y = (2x+1)^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln(2x+1)$$

$$\Rightarrow (\ln y)' = x \cdot \ln(2x+1)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1}$$

$$\Rightarrow y' = (2x+1)^x \cdot \left[\ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1} \right]$$

Sai lầm khi tính đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Các em hay mắc phải sai lầm ở dạng này là áp dụng công thức $u^\alpha' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha \in \mathbb{R}$, nhưng quên rằng nếu như α không nguyên thì công thức này chỉ đúng khi u nhận giá trị dương.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$.

Lời giải sai:

$$\text{Với } x = -1 \text{ ta có } y = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$$

$$\text{Ta có } y = x^{\frac{2}{3}} \text{ suy ra } y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'(-1) = \frac{2}{3}(-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}(-1)^{-\frac{2}{6}} = \frac{2}{3} \left[(-1)^2 \right]^{-\frac{1}{6}} = \frac{2}{3} \cdot 1^{-\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = \frac{2}{3}(x+1)+1 \text{ hay } y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Phân tích sai lầm: Sai lầm ở đây là các em không chú ý đến điều kiện lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương. Vì vậy, viết $(-1)^{-\frac{1}{3}}$ là không đúng (!).

Lời giải đúng:

Với $x = -1$ ta có $y = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$

$$\text{Ta có } y^3 = x^2 \Rightarrow (y^3)' = (x^2)' \Rightarrow 3.y^2 y' = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{3y^2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y'(-1) = -\frac{2}{3}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{2}{3}(x+1)+1$ hay $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

5. Sai lầm khi giải các bài toán liên quan tới cực trị của hàm số

Khi sử dụng quy tắc I để xét tính đơn điệu của hàm số các em quên rằng đó là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần.

Quy tắc:

- $y' > 0, \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$
- $y' < 0, \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$

Điều ngược lại nói chung là không đúng (!).

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải sai:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 2mx + 1. \text{ Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ m^2 - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}.$$

Phân tích sai lầm : Chẳng hạn, hàm số $y = x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nhưng $y' = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, dấu "=" xảy ra chỉ tại $x = 0$ (!). Nhớ rằng: nếu hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a;b)$ và dấu "=" xảy ra chỉ tại hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

Lời giải đúng :

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ m^2 - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}.$$

Khi sử dụng quy tắc II để xác định cực trị của hàm số các em cũng quên rằng đó chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần.

Quy tắc:

- $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu
- $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại

Điều ngược lại nói chung là không đúng (!).

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x) = mx^4$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$?

Lời giải sai:

$$f'(x) = 4mx^3, f''(x) = 12mx^2.$$

Điều kiện để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ là: $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m \cdot 0 = 0 \\ 12m \cdot 0 < 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm m .

Vậy không tồn tại giá trị nào của m để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Phân tích sai lầm:

Ta thấy, với $m = -1$, hàm số $y = -x^4$ có $y' = -4x^3, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

X	$-\infty$	0	$+\infty$
Y'	+	0	-
y		0	

$-\infty \swarrow \searrow$

	$-\infty$
--	-----------

Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ (!)

Vậy lời giải trên sai ở đâu ???

Nhớ rằng, nếu x_0 thỏa mãn $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại của hàm số, còn

điều ngược lại thì chưa chắc đúng (!) Vì nếu x_0 là điểm cực đại thì vẫn có thể $f''(x_0) = 0$. Lí do là điều kiện $f''(x_0) < 0$ chỉ là điều kiện đủ để hàm số $g(x) = f'(x)$ nghịch biến trong lân cận $(x_0 - h; x_0 + h)$ (với $h > 0$), khi đó:

$$\begin{cases} f'(x) > f'(x_0) = 0, \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) < f'(x_0) = 0, \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực đại của hàm số.}$$

Lời giải đúng :

① Cách 1:

Ta có $y' = 4mx^3$. Để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ thì $y'(x) > 0, \forall x \in (-h; 0)$,

$$\text{với } h > 0. \text{ Tức là: } \begin{cases} 4mx^3 > 0 \\ -h < x < 0 \end{cases} \Rightarrow m < 0.$$

Thử lại, ta thấy với $m < 0$ là điều kiện cần tìm.

② Cách 2: xét 3 trường hợp ($m = 0, m > 0, m < 0$)

❖ $m = 0$: Ta có $y = f(x) = 0$ là hàm hằng nên hàm số không có cực trị.

❖ $m > 0$: Ta có $y' = 4mx^3, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Lập bảng biến thiên ta thấy x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

❖ $m < 0$: Ta có $y' = 4mx^3, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Lập bảng biến thiên ta thấy x_0 là điểm cực đại của hàm số.

Kết luận: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ khi và chỉ khi $m < 0$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + mx^3 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$?

Lời giải sai:

$$f'(x) = 4x^3 + 3mx^2, f''(x) = 12x^2 + 6mx.$$

Điều kiện để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ là: $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4.0^3 + 3m.0^2 = 0 \\ 12m.0^2 + 6m.0 > 0 \end{cases}$

hệ vô nghiệm m .

Vậy không tồn tại giá trị nào của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Phân tích sai lầm:

Ta thấy, với $m = 0$, hàm số $y = x^4 + 1$

$$y' = 4x^3, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên:

X	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
Y	$+\infty$	1	$+\infty$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ (!)

Lời giải đúng :

① Cách 1:

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì $\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (-h; 0) \text{ (1)} \\ f'(x) > 0, \forall x \in (0; h) \text{ (2)} \end{cases}$ (với $h > 0$)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (-h; 0) \\ 4x^3 + 3mx^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (-h; 0) \\ 4x + 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (-h; 0) \\ x < -\frac{3m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3m}{4} \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$$

(1')

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (0; h) \\ 4x^3 + 3mx^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (0; h) \\ 4x + 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in (0; h) \\ x > -\frac{3m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3m}{4} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$$

(2')

Từ (1') và (2') suy ra $m = 0$

Vậy với $m = 0$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$.

② Cách 2: xét 3 trường hợp ($m = 0, m > 0, m < 0$)

❖ $m = 0$: Ta có $y = x^4 + 1$ có $y' = 4x^3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

X	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
Y	$+\infty$	1	$+\infty$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

❖ $m > 0$: Ta có $y' = x^2(4x + 3m)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\frac{3m}{4}$. Lập bảng biến thiên ta thấy y' không đổi dấu qua $x = 0$ (nghiệm bội bậc chẵn). Do đó hàm số không có cực trị tại $x = 0$.

❖ $m < 0$: Ta có $y' = x^2(4x + 3m)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\frac{3m}{4}$. Lập bảng biến thiên ta thấy y' không đổi dấu qua $x = 0$ (nghiệm bội bậc chẵn). Do đó hàm số không có cực trị tại $x = 0$.

Kết luận: với $\boxed{m = 0}$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$.

6. Sai lầm khi viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Ví dụ 1:

Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2$, có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(-1;4)$

Lời giải sai:

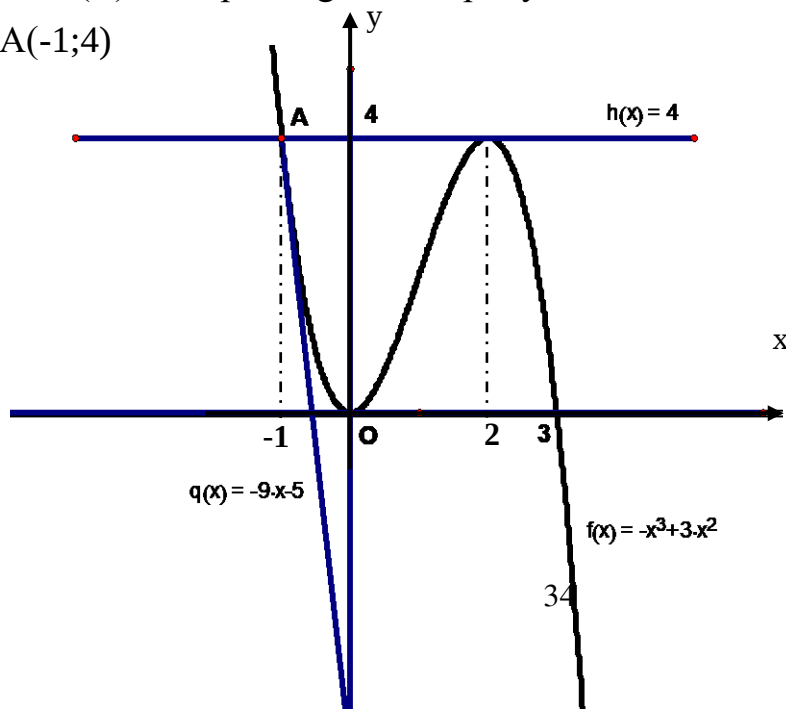
$$f'(x) = -3x^2 + 6x.$$

Ta có điểm $A(-1;4) \in$ đồ thị (C).

suy ra phương trình tiếp tuyến là:

$$y = f'(-1) \cdot (x+1) + 4 \Leftrightarrow y = -9(x+1) + 4$$

$$\Leftrightarrow y = -9x - 5.$$



Phân tích sai lầm:

Phương trình tiếp tuyến $y = -9x - 5$ là

tiếp tuyến tại A (nhận A làm tiếp điểm)

tất nhiên là kẻ từ A. Nhưng vẫn có thể có

tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua A mà không nhận A làm tiếp điểm⁻⁵.

Lời giải đúng :

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(-1;4)

và có hệ số góc k là: $y = k(x + 1) + 4$

Điều kiện để đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đồ thị (C) là hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} -x^3 + 3x^2 = k(x+1) + 4 \\ k = -3x^2 + 6x \end{cases} \quad (I).$$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x - 2 = 0 \\ k = -3x^2 + 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, k = 0 \\ x = -1, k = -9 \end{cases}$$

Từ đó ta có hai tiếp tuyến có phương trình: $y = 4$ và $y = -9x - 5$.

2. Bài tập tương tự

Bài tập 1: Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a. $y = \frac{2x+3}{1-x}$

b. $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$

c. $y = \cos x - \sin x$

Bài tập 2: Xác định m để hàm số sau không có cực trị:

$$y = \frac{x^2 + 2mx - 3}{x - m}$$

Bài tập 3: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a. $y = (7-x)\sqrt[3]{x+5}$

b. $y = \cos x - \sin x$

c. $y = \sin^2 x$

Bài tập 4: Xác định m để hàm số sau đạt cực trị tại $x = 1$:

$$y = x^3 - mx^2 + \left(m - \frac{2}{3}\right)x + 5$$

Bài tập 5: Xác định a để hàm số sau luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$:

$$y = \frac{(a-1)x^3}{3} + ax^2 + 3a - 2x$$

Bài tập 6: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $y = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|$ trên đoạn $[-5; 5]$

b. $y = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

c. $y = \cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + 5$

Bài tập 7: Cho hàm số $y = (x + 1)^2 (2 - x)$, có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(2; 0)$

Bài tập 8: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $e^x + \cos x \geq 2 + x - \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

b. $e^x - e^{-x} \geq 2\ln x + \sqrt{1+x^2}, \forall x \geq 0$

c. $8\sin^2 \frac{x}{2} + \sin 2x > 2x, \forall x \in [0; \pi]$

Bài tập 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + m - 3x + 4\frac{1}{2}$ (m là tham số)

Xác định m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -3x + 4\frac{1}{2}$ tại ba điểm phân biệt.

Bài tập 10: Với các giá trị nào của tham số m thì phương trình:

$x^2 - 2|x| = m(|x| - 1)$ có 4 nghiệm thực phân biệt ?

II. Phân tích những sai lầm của học sinh trong các bài toán về giải phương trình và bất phương trình lôgarit.

1. Sai lầm khi không tìm điều kiện hoặc tìm sai điều kiện

Ví dụ 1 :

Giải phương trình :

$$\text{Log}_9(x^2 - 5x + 6)^2 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \frac{x-1}{2} + \log_3 |x-3|$$

Lời giải sai :

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ \frac{x-1}{2} > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \text{Log}_3(x^2 - 5x + 6) = \log_3 \frac{x-1}{2} + \log_3 |x-3|$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = \frac{x-1}{2} |x-3|$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = \frac{x-1}{2} |x-3|, \text{ Vì } x > 3$$

$$\Leftrightarrow x-2 = \frac{x-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3, \text{ Pt vô nghiệm}$$

Phân tích sai lầm:

- **Sai lầm 1 :** Đặt điều kiện không đúng
- **Sai lầm 2 :** Sử dụng công thức không đúng

Chú ý :

$$A^{2n} > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$$

$$|A| > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$$

$$\text{Log}_{a^n} (f(x))^k = \frac{k}{n} \log_a |f(x)|$$

Lời giải đúng:

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} (x^2 - 5x + 6)^2 > 0 \\ \frac{x-1}{2} > 0 \\ |x-3| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \neq 0 \\ x > 1 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_3 |x^2 - 5x + 6| = \log_3 \frac{x-1}{2} |x-3|$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 5x + 6| = \frac{x-1}{2} |x-3| \Leftrightarrow |x-2| |x-3| = \frac{x-1}{2} |x-3|$$

$$\Leftrightarrow |x-2| = \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{x-1}{2} \\ x-2 = -\frac{x-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = \frac{5}{3}$

Ví dụ 2 Giải phương trình : $\log_2 (x+1) + \log_2 (x+2) = 1$

Lời giải sai:

$$\text{PT} \Leftrightarrow \log_2 (x+1).(x+2) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1).(x+2) = 2 \Leftrightarrow x = 0; .x = -3$$

Phân tích sai lầm :

HS không đặt điều kiện ($x > -1$) của bài toán để loại nghiệm $x = -3$

* **Lưu ý:** hs đặt điều kiện khi giải PT, BPT lôgarit.

Lời giải đúng

Điều kiện: $x > -1$, nên phương trình chỉ có duy nhất nghiệm $x = 0$.

2. Sai lầm khi hiểu sai công thức lôgarit

Ví dụ 1 :

Giải phương trình :

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)^3$$

Lời giải sai:

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} (x+2)^2 > 0 \\ (4-x)^3 > 0 \\ (x+6)^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ -6 < x < 4 \end{cases}$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(x+2)^3 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left((x+2)^3 : \left(\frac{1}{4}\right)^3\right) = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3(x+6)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^3 \cdot 4^3 = (4-x)^3(x+6)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \cdot 4 = (4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 2 \end{cases}, \text{Vậy nghiệm: } x = 2$$

Phân tích sai lầm

Công thức $m \log_a x = \log_a x^m$, chỉ đúng khi m nguyên, bài trên giải sai, bởi vì $m = \frac{3}{2}$ không phải là số nguyên.

Lời giải đúng:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 2 \\ -6 < x < 4 \end{cases}$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 3 \log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 3 = 3 \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3 \log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}|x+2| \cdot 4 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow |x+2| \cdot 4 = (4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2) = (4-x)(x+6) \\ 4(x+2) = -(4-x)(x+6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x - 16 = 0 \\ x^2 - 2x - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -8 \\ x = 1 - \sqrt{33} \vee x = 1 + \sqrt{33} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = 2 \vee x = 1 - \sqrt{33}$

Ví dụ 2: **Giải phương trình :** $\log_2(x-1)^2 = 2$

Lời giải sai : Với $x \neq 1$ ta có PT $\Leftrightarrow 2 \log_2(x-1) = 2$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$$

Phân tích sai lầm : HS biến đổi không tương đương làm thay đổi tập xác định của phương trình dẫn đến mất nghiệm $x = -1$

Lời giải đúng : PT $\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x=3; x=-1$

* **Lưu ý**: Học sinh vận dụng tính chất của lôgarit cần chính xác hơn.

3. Sai lầm khi vận dụng sai tính chất đồng biến, nghịch biến

Ví dụ 1 Giải Bất phương trình : $(0,5)^{x+1} > (0,5)^{x^2-x-2}$

Lời giải sai : BPT $\Leftrightarrow x + 1 > x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 3$$

Phân tích sai lầm : HS vận dụng sai tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm số mũ

Lời giải đúng BPT $\Leftrightarrow x + 1 < x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow x < -1 \text{ hoặc } x > 3$$

* **Lưu ý học sinh** : chú ý cơ sở $a > 1$ và $0 < a < 1$

4. Sai lầm khi biến đổi không tương đương

Ví dụ: Giải bất phương trình: $\log_2 x + \log_x 4 \geq 3$

Lời giải sai:

+Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} (1)$

+Với điều kiện đó, bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 4}{\log_2 x} \geq 3 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{2}{\log_2 x} \geq 3$$

+ Đặt $t = \log_2 x$, phương trình đã cho tương đương với:

$$t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

+ Kết hợp điều kiện suy ra: $\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \neq 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$

Phân tích sai lầm:

Lời giải sai do biến đổi tương đương sai vì không chú ý đến dấu của mẫu số trong một bất phương trình có chứa mẫu.

Lời giải đúng:

$$+\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} (1)$$

+Với điều kiện đó, bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 4}{\log_2 x} \geq 3 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{2}{\log_2 x} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2}{\log_2 x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 2 \\ 0 < \log_2 x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $\sqrt{5-x^2} \cdot \log_2(x^2-3) \leq 0$. (*)

Lời giải sai:

$$\text{Điều kiện xác định là } \begin{cases} 5-x^2 \geq 0 \\ x^2-3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in D = [-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{5}]$$

Một số học sinh thường mắc sai lầm khi biến đổi như sau:

$$\text{Với } x \in D \text{ thì } \sqrt{5-x^2} \geq 0 \text{ nên } (*) \Leftrightarrow \log_2(x^2-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3 \leq 2^0 = 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Kết luận tập nghiệm của (*) là:

$$S = [-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2].$$

Phân tích sai lầm:

Vì trong (*) có dấu “=”, và $\sqrt{5-x^2} \geq 0$ với mọi $x \in D$ nên trường hợp $\sqrt{5-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ cũng là nghiệm của (*) vì nó thuộc $x \in D$.

Vậy ta cần xét thêm trường hợp đó !
Phải trình bày thế nào cho logic và chặt chẽ ?

Lời giải đúng:

Trường hợp 1: $\sqrt{5-x^2} \cdot \log_2(x^2-3) = 0$
 $\Leftrightarrow \sqrt{5-x^2} = 0$ hoặc $\log_2(x^2-3) = 0, (x \in D)$
 $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ hoặc $x^2-3 = 1, (x \in D)$
 $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ hoặc $x = \pm 2$.

Trường hợp 2: $\sqrt{5-x^2} \cdot \log_2(x^2-3) < 0, (*a)$
 Vì $\sqrt{5-x^2} \geq 0$ với mọi $x \in D$ nên $(*a) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \\ \log_2(x^2-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \\ x^2-3 < 1 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \\ x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \\ -2 < x < 2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow -2 < x < -\sqrt{3}$ hoặc $\sqrt{3} < x < 2$.

Trường hợp này tập nghiệm của $(*a)$ là $(-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$.

Kết luận: Kết hợp cả hai trường hợp trên ta có tập nghiệm của $(*)$ là:
 $S = [-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2] \cup \{\pm\sqrt{5}\}$.

Chú ý: Đối với các bất phương trình dạng này, nếu không chắc chắn trong phép biến đổi tương đương, học sinh nên xét hai trường hợp “có dấu =” và “không có dấu =” để đảm bảo độ an toàn, đồng thời trong quá trình biến đổi phải luôn kèm theo “điều kiện xác định” của bất phương trình.

Bài tập tương tự:

Giải các bất phương trình

1) $(\sqrt{2}-1)^{\sqrt{x}} - 6(\sqrt{2}+1)^{\sqrt{x}} = 1$

2) $3 \cdot 25^x + 2 \cdot 49^x = 5 \cdot 35^x$

3) $\log_2(9-2^x) = 3-x$

4) $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = \log_2(4x)$

5) $\frac{1}{4} \log_{\sqrt{2}}^2(2-x) - 8 \log_{1/4}(2-x) = 5$

6) $\sqrt{x^2-2} \cdot \log_{0,5}(4-x^2) \leq 0$.

7) $\sqrt{x^2-2} \cdot \log_{0,5}(x^2-3) \geq 0$

III. Phân tích sai lầm của học sinh trong các bài toán tính tích phân

Trong thực tế đa số học sinh tính tích phân một cách hết sức máy móc đó là: tìm một nguyên hàm của hàm số cần tính tích phân rồi dùng định nghĩa của tích phân hoặc phương pháp đổi biến số, phương pháp tính tích phân từng phần mà rất ít học sinh để ý đến nguyên hàm của hàm số tìm được có phải là nguyên hàm của hàm số đó trên đoạn lấy tích phân hay không? phép đặt biến mới trong phương pháp đổi biến số có nghĩa không? Phép biến đổi hàm số có tương đương không? vì thế trong quá trình tính tích phân học sinh thường mắc phải những sai lầm dẫn đến lời giải sai .

1. Sai lầm khi không chú ý đến cận tích phân

Ví dụ 1: Tính tích phân: $I = \int_{-2}^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$

Lời giải sai: $I = \int_{-2}^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_{-2}^2 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} \Big|_{-2}^2 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$

Phân tích sai lầm: Hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ không xác định tại $x = -1 \in [-2; 2]$ suy ra hàm số không liên tục trên $[-2; 2]$ nên không sử dụng được công thức Newton – Leibnitz như cách giải trên.

Lời giải đúng :

Hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ không xác định tại $x = -1 \in [-2; 2]$ suy ra hàm số không liên tục trên $[-2; 2]$ do đó tích phân trên không tồn tại.

*** Chú ý đối với học sinh:**

Khi tính $\int_a^b f(x)dx$ cần chú ý xem hàm số $y=f(x)$ có liên tục trên $[a;b]$ không?

nếu có thì áp dụng phương pháp đã học để tính tích phân đã cho còn nếu không thì kết luận ngay tích phân này không tồn tại.

* **Một số bài tập tương tự:**

Tính các tích phân sau:

$$1/ \int_0^5 \frac{dx}{(x-4)^4}.$$

$$2/ \int_{-2}^3 x(x^2-1)^{\frac{1}{2}} dx.$$

$$3/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

$$4/ \int_{-1}^1 \frac{-x^3 \cdot e^x + x^2}{x^3} dx$$

2. Sai lầm khi đặt ẩn không chính xác

Ví dụ 1 : Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x}$

Lời giải sai: Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ thì $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; $\frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1+t^2}{(1+t)^2}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t)^2} = \int 2(t+1)^{-2} d(t+1) = -\frac{2}{t+1} + c$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} = \left. \frac{-2}{\tan \frac{x}{2} + 1} \right|_0^{\pi} = \frac{-2}{\tan \frac{\pi}{2} + 1} - \frac{2}{\tan 0 + 1}$$

do $\tan \frac{\pi}{2}$ không xác định nên tích phân trên không tồn tại

Phân tích sai lầm:

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ $x \in [0; \pi]$ tại $x = \pi$ thì $\tan \frac{x}{2}$ không có nghĩa.

Lời giải đúng:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \int_0^{\pi} \frac{d\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\pi} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

*** Chú ý đối với học sinh:**

Đối với phương pháp đổi biến số khi đặt $t = u(x)$ thì $u(x)$ phải là một hàm số liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$.

*** Một số bài tập tương tự:**

Tính các tích phân sau:

$$1/ \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin x}$$

$$2/ \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$$

3. Sai lầm khi biến đổi không tương đương

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} \, dx$

Lời giải sai:

$$I = \int_0^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} \, dx = \int_0^4 \sqrt{(x-3)^2} \, dx = \int_0^4 (x-3) \, dx = \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

Phân tích sai lầm:

Phép biến đổi $\sqrt{(x-3)^2} = x-3$ với $x \in [0; 4]$ là không tương đương.

Lời giải đúng:

$$I = \int_0^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} \, dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^4 \sqrt{(x-3)^2} dx = \int_0^4 |x-3| d(x-3) = \int_0^3 -(x-3) d(x-3) + \int_3^4 (x-3) d(x-3) \\
 &= -\frac{(x-3)^2}{2} \Big|_0^3 + \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_3^4 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5
 \end{aligned}$$

*** Chú ý đối với học sinh:**

$$\sqrt[2n]{(f(x))^{2n}} = |f(x)| \quad (n \geq 1, n \in \mathbb{N})$$

$$I = \int_a^b \sqrt[2n]{(f(x))^{2n}} = \int_a^b |f(x)| dx \text{ ta phải xét dấu hàm số } f(x) \text{ trên } [a; b] \text{ rồi dùng tính}$$

chất tích phân tách I thành tổng các phân không chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{1 + x^4} dx$

Lời giải sai:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + x^2} = \int_{-1}^1 \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} dx$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Đổi cận với $x = -1$ thì $t = -2$; với $x=1$ thì $t=2$;

$$I = \int_{-2}^2 \frac{dt}{t^2 - 2} = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{t + \sqrt{2}} - \frac{1}{t - \sqrt{2}} \right) dt = (\ln|t + \sqrt{2}| - \ln|t - \sqrt{2}|) \Big|_{-2}^2 = \ln \left| \frac{t + \sqrt{2}}{t - \sqrt{2}} \right| \Big|_{-2}^2$$

$$= \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} - \ln \left| \frac{-2 + \sqrt{2}}{-2 - \sqrt{2}} \right| = 2 \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

Phân tích sai lầm: $\frac{x^2 - 1}{1 + x^4} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + x^2}$ là sai vì trong $[-1;1]$ chứa $x = 0$ nên

không thể chia cả tử cả mẫu cho $x = 0$ được

Lời giải đúng:

$$\text{xét hàm số } F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right)' = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$$

$$\text{Do đó } I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

***Chú ý đối với học sinh:** Khi tính tích phân cần chia cả tử cả mẫu của hàm số cho x cần để ý rằng trong đoạn lấy tích phân phải không chứa điểm $x = 0$

Một số bài tập tương tự:

$$1/ I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx ;$$

$$2/ I = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} \, dx$$

$$3/ I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right)} \, dx$$

$$4/ I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} \, dx$$

4. Sai lầm khi sử dụng các công thức trong sách giáo khoa cũ

$$\text{Ví dụ 1: Tính } I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

Lời giải sai:

$$I = \int_{-1}^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} = \arctg(x+1) \Big|_{-1}^0 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$$

Phân tích sai lầm :

Học sinh không học khái niệm hàm số lượng giác ngược $\arctan x$ trong sách giáo khoa phân ban hiện thời.

Lời giải đúng:

$$\text{Đặt } x+1 = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)dt$$

với $x=-1$ thì $t = 0$

$$\text{với } x = 0 \text{ thì } t = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 t)dt}{\tan t + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

*** Chú ý đối với học sinh:**

Các khái niệm $\arcsin x$, $\arctan x$... không trình bày trong sách giáo khoa phân ban như khái niệm hàm số ngược mà chỉ đơn thuần là ký hiệu nghiệm của phương trình lượng giác. Học sinh có thể đọc thấy một số bài tập áp dụng khái niệm này trong một sách tham khảo, vì các sách này viết theo sách giáo khoa cũ (trước năm 2000). Từ năm 2000 đến nay do các khái niệm này không có trong sách giáo khoa nên học sinh không được áp dụng phương pháp này nữa. Vì vậy khi gặp tích phân dạng $\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx$ ta dùng

phương pháp đổi biến số đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$;

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ thì đặt } x = \sin t \text{ hoặc } x = \cos t$$

Một số bài tập tương tự:

$$1/ I = \int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx$$

$$2/ I = \int_0^1 \frac{2x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1} dx$$

$$3/ I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$$

5. Sai lầm khi đổi cận không hợp lý

Ví dụ 1

Tính : $I = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Lời giải sai: Đặt $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin^3 t}{|\cos t|} dt$$

Đổi cận: với $x = 0$ thì $t = 0$

với $x = \frac{1}{4}$ thì $t = ?$

Phân tích sai lầm:

Khi gặp tích phân của hàm số có chứa $\sqrt{1-x^2}$ thì thường đặt $x = \sin t$ nhưng đối với tích phân này sẽ gặp khó khăn khi đổi cận cụ thể với $x = \frac{1}{4}$ không tìm được chính xác $t = ?$

Lời giải đúng:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow dt = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow t dt = -x dx$$

Đổi cận: với $x = 0$ thì $t = 1$; với $x = \frac{1}{4}$ thì $t = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}} \frac{(1-t^2)t dt}{t} = \int_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}} (1-t^2) dt = \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{15\sqrt{15}}{192} \right) - \frac{2}{3} = \frac{33\sqrt{15}}{192} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

* **Chú ý đối với học sinh:** Khi gặp tích phân của hàm số có chứa $\sqrt{1-x^2}$ thì thường đặt $x = \sin t$ hoặc gặp tích phân của hàm số có chứa $1+x^2$ thì đặt $x = \tan t$ nhưng cần chú ý đến cận của tích phân đó nếu cận là giá trị lượng giác

của góc đặc biệt thì mới làm được theo phương pháp này còn nếu không thì phải nghĩ đến phương pháp khác.

Một số bài tập tương tự:

$$1/\text{tính } I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$2/\text{tính } I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

Ban đầu học sinh gặp khó khăn nhất định trong việc giải những dạng tích phân, PT và BPT như đã nêu. Tuy nhiên giáo viên cần hướng dẫn học sinh tỉ mỉ cách phân tích một bài toán tích phân từ hàm số dưới dấu tích phân, cần của tích phân để lựa chọn phương pháp phù hợp trên cơ sở giáo viên đưa ra những sai lầm mà học sinh thường mắc phải trong quá trình suy luận, trong các bước tính tích phân này rồi từ đó hướng các em đi đến lời giải đúng.

Sau khi hướng dẫn học sinh như trên và yêu cầu học sinh giải một số bài tập tích phân, PT và BPT trong sách giáo khoa Giải Tích Lớp 12 và một số bài trong các đề thi tuyển sinh vào đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp của các năm trước thì các em đã thận trọng trong khi tìm và trình bày lời giải và đã giải được một lượng lớn bài tập đó đồng thời tránh được những sai lầm thường gặp.

PHẦN III. KẾT QUẢ THỰC HIỆN**I. ĐỀ KIỂM TRA****1. ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1****ĐỀ KIỂM TRA : 45'****Câu 1 (2.5 điểm)**Xác định m để hàm số sau đạt cực trị tại $x = 1$:

$$y = x^3 - mx^2 + \left(m - \frac{2}{3}\right)x + 5$$

Câu 2(2.5 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$y = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90| \text{ trên đoạn } -5; 5$$

Câu 3 (2.5 điểm)

Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx ;$$

$$\text{b) } \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Câu 4 (2.5 điểm)

$$\log_2(x-3) + \log_2(x-4) = \log_4(x-5)^2$$

II.ĐỀ KIỂM TRA SỐ 2**ĐỀ KIỂM TRA : 45'****Câu 1 (2.5 điểm)**

Xác định a để hàm số sau luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$:

$$y = \frac{(a-1)x^3}{3} + ax^2 + 3a - 2x$$

Câu 2(2.5 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$y = 2\sin x + \sin 2x \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$$

Câu 3 (2.5 điểm)

Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} ; \quad \text{b) } \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$$

Câu 4 (2.5 điểm)

$$\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = \log_2(4x)$$

II. KẾT QUẢ KIỂM TRA

Trong năm học 2011- 2012 tôi được phân công giảng dạy tại hai lớp 12A12 và 12A13, sau khi đã dạy lý thuyết và rèn kỹ năng cho học sinh trong một số tiết bài tập, tôi nghĩ học sinh đã nắm thật vững các kiến thức được học, tôi đã ra đề kiểm tra số 1. Kết quả bài kiểm tra một tiết trong tiết tự chọn của hai lớp như sau:

Tổng số học sinh hai lớp 12A12 và 12A13 (năm học 2011 - 2012) là 89 học sinh

Điểm	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Số học sinh	4	9	6	15	10	27	13	4	1	0	0

Qua bảng số liệu trên ta thấy, số học sinh đạt điểm giỏi (từ 8 đến 10 điểm) là 19 học sinh, chiếm tỷ lệ 21.35%, số học sinh đạt điểm khá (7 điểm) là 15 học sinh, chiếm tỷ lệ 16.85%, số học sinh đạt điểm trung bình (từ 5 đến 6 điểm) là 37 học sinh, chiếm tỷ lệ 41.57%, số học sinh đạt điểm yếu kém (từ 2 đến 4 điểm) là 18 học sinh, chiếm tỷ lệ 20.22%, không có học sinh bị điểm 0 hoặc 1.

- Sau khi chấm xong, thấy học sinh còn sai nhiều kiến thức, còn nhầm lẫn trong việc sử dụng các công thức cơ bản, rút kinh nghiệm tôi đã cho học sinh làm lại bài sau khi đã chỉ ra các sai lầm cho học sinh trong một số bài toán trọng tâm. Kết quả bài kiểm tra của hai lớp như sau:

Điểm	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Số học sinh	6	12	9	20	19	17	6	0	0	0	0

Qua bảng số liệu trên ta thấy, số học sinh đạt điểm giỏi (từ 8 đến 10 điểm) là 27 học sinh, chiếm tỷ lệ 30.34%, số học sinh đạt điểm khá (7 điểm) là 20 học sinh, chiếm tỷ lệ 22.47%, số học sinh đạt điểm trung bình (từ 5 đến 6 điểm) là 36 học sinh, chiếm tỷ lệ 40.45%, số học sinh đạt điểm yếu (4 điểm) là 6 học sinh, chiếm tỷ lệ 6.7%, không có học sinh bị điểm dưới 4.

Qua hai bảng số liệu trên ta thấy, sau khi chỉ ra các sai lầm cho học sinh, kết quả bài kiểm tra của học sinh đã được nâng cao, tỷ lệ học sinh đạt điểm giỏi tăng lên 8.99%, đạt điểm khá tăng lên 5.62%, đạt điểm yếu kém giảm 13.52%.

Qua đó ta thấy việc chỉ ra một số lỗi thường gặp của học sinh khi làm bài tập sẽ giúp học sinh nâng cao khả năng tư duy logic, rõ ràng, không bị nhầm lẫn các dạng bài tập. Sau khi phân loại và nắm chắc cách giải của từng dạng bài, học sinh sẽ tránh được tối đa việc nhầm lẫn và bỏ ngõ khi làm các bài tập dạng tổng hợp.

PHẦN IV. KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ

I. KẾT LUẬN

Môn toán lớp 12 có tầm quan trọng và vị trí đặc biệt vì nó vừa củng cố, hệ thống các kiến thức ở lớp dưới và bổ sung , nâng cao các kiến thức toán để học lên cấp học trên. Giải toán ở lớp 12, học sinh vừa thực hiện nhiệm vụ củng cố kiến thức toán học đã được lĩnh hội vừa rèn luyện kỹ năng qua việc áp dụng kiến thức để giải toán.

Trên cơ sở giải toán, việc phát hiện sai sót của học sinh và cách hướng dẫn khắc phục những sai lầm, giáo viên đã từng bước xây dựng cho các em một cách làm việc khoa học, biết phân tích, tổng hợp, liên kết các kiến thức khi giải toán.

Thông qua việc khắc phục sai lầm, giáo viên đã rèn cho học sinh tính cẩn thận, kiên trì, tự tin, chính xác trong học toán tạo tiền đề để học tiếp bậc học trên cũng như áp dụng vào thực tiễn cuộc sống.

Để thực hiện tốt vấn đề trên đòi hỏi phải có sự nỗ lực phấn đấu của giáo viên và học sinh.

+Giáo viên phải:

Qua giảng dạy phải tổ chức cho học sinh nắm chắc các quy tắc, công thức, cách giải, cấu trúc phép tính, các thuật ngữ toán học ...

- Nghiên cứu kỹ tài liệu, sách giáo khoa và tình hình của học sinh lớp để thiết kế bài dạy phù hợp.

- Người giáo viên phải làm việc với tinh thần trách nhiệm và lòng yêu nghề .

- Lựa chọn, kết hợp nhuần nhuyễn các phương pháp và hình thức dạy học giải toán theo hướng phát huy tính tích cực, tự giác của học sinh.

- Thường xuyên tổ chức luyện tập thực hành để rèn kỹ năng giải toán cho học sinh. Chấm, chữa bài, sửa chữa sai sót của học sinh một cách chu đáo.

+ Học sinh cần:

Xác định thái độ học tập đúng đắn, tự giác học tập, tự làm việc để chiếm lĩnh tri thức và rèn luyện kỹ năng. Biết rút kinh nghiệm qua những sai sót của bản thân và của bạn. Biết tự đánh giá kết quả học tập của mình và người khác.

+ Nhà trường cần:

Thường xuyên tổ chức các cuộc họp chuyên môn, mở chuyên đề, hội thảo để giáo viên trao đổi kinh nghiệm, học hỏi điều hay phục vụ cho công việc giảng dạy của mình.

II – Kiến nghị

Trong thời gian qua phương pháp giảng dạy của giáo viên nói chung và của tôi nói riêng còn nhiều hạn chế trong việc phát huy tiềm ẩn trong học sinh.

Polya đã viết "con người phải biết học những sai lầm và những thiếu sót của mình". Thông qua những sai lầm, nếu ta biết cách nhìn nhận ra nó, kịp thời uốn nắn và sửa chữa nó thì sẽ giúp ta ghi nhớ lâu hơn tri thức đã được học, đồng thời sẽ giúp ta tránh được những sai lầm tương tự; bồi dưỡng thêm về mặt tư duy.

Trước hết, đề tài này nhằm cung cấp cho các thầy cô giáo và các em học sinh như một tài liệu tham khảo. Với lượng kiến thức nhất định về các mảng toán trọng tâm lớp 12, người học sẽ có cái nhìn sâu sắc hơn về những sai lầm thường mắc phải khi giải toán. Đồng thời, qua những sai lầm ấy mà rút ra cho mình những kinh nghiệm và phương pháp giải toán cho riêng

mình ; người học có thể quay trở lại để kiểm chứng những lí thuyết đã được trang bị để làm toán, từ đó thấy được sự lôgic của toán học

Ở cấp độ trường trung học phổ thông Đồng Đa, đề tài có thể áp dụng để cải thiện phần nào chất lượng bộ môn, củng cố phương pháp giải toán, góp phần nâng cao chất lượng dạy và học ; giúp học sinh hiểu rõ hơn bản chất của các khái niệm, định nghĩa, định lí cũng như những kiến thức liên quan đã được học, giúp các em tránh khỏi lúng túng trước một bài toán đặt ra và không mắc phải những sai lầm thường gặp.

Trong khuôn khổ của bài viết này, tôi không có tham vọng sẽ phân tích được hết những sai lầm của học sinh và cũng sẽ không tránh khỏi những sai sót. Vì vậy, tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của Hội đồng khoa học trường Trung học phổ thông Đồng Đa, của Hội đồng khoa học Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội và của quý thầy cô.

Tôi hi vọng đề tài sẽ đóng góp một phần nhỏ bé vào việc giải các dạng toán trọng tâm của lớp 12 ; là tài liệu tham khảo cho các em học sinh trong quá trình học toán cũng như ôn thi tốt nghiệp và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng và Trung học chuyên nghiệp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1. Phương pháp giải toán Tích phân và Giải tích tổ hợp** (*Nguyễn Cam – NXB Trẻ*)
- 2. Phương pháp giải toán Tích phân** (*Trần Đức Huyền – Trần Chí Trung – NXB Giáo Dục*)
- 3. Phương pháp giải toán Tích phân** (*Lê Hồng Đức – Lê Bích Ngọc – NXB Hà Nội*)
- 4. Sai lầm thường gặp và các sáng tạo khi giải toán** (*Trần Phương và Nguyễn Đức Tấn – NXB Hà Nội*)
- 5. Các bài giảng luyện thi môn toán Tập 1 và Tập 2** (*Phan Đức Chính – Vũ Dương Thụy- Đào Tam – Lê Thống Nhất, NXB Giáo Dục*)
- 6. Giải tích 12 (Ban cơ bản)**
- 7. Bài giảng trọng tâm chương trình chuẩn toán 12** (*Ths. Lê Hồng Đức- Vương Ngọc- NXB Đại học quốc gia Hà Nội*)
- 8. Tuyển tập 33 vấn đề tích phân 12** (*Huỳnh Công Thái- NXB Đại học quốc gia Hà Nội*)
- 9. Hàm số và đồ thị** (*Nguyễn Văn Quý- NXB Đà Nẵng*)
- 10. Phương pháp giải phương trình, bất phương trình mũ và logarit** (*Lê Hồng Đức- NXB Giáo Dục*)

ĐÁNH GIÁ, XẾP LOẠI CỦA TỔ CHUYÊN MÔN

[illegible]

ĐÁNH GIÁ, XẾP LOẠI CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC TRƯỜNG THPT ĐỒNG ĐA

[illegible]

ĐÁNH GIÁ, XẾP LOẠI CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

[illegible]