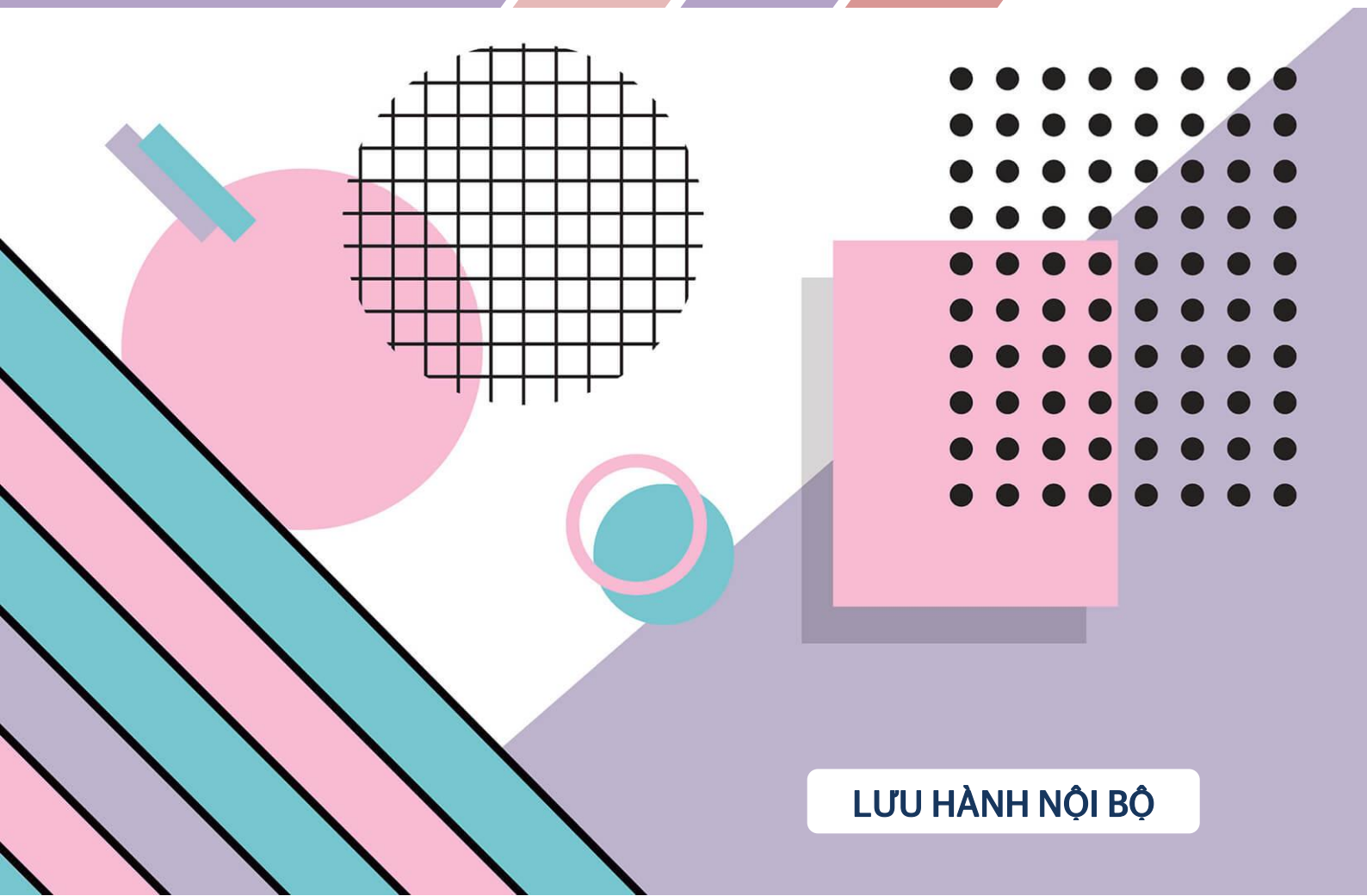


SÁCH CÓ BÁN TẠI
VPP-PHOTOCOPY
TÂM PHÚC

Trọng tâm kiến thức
và phương pháp giải bài tập

môn **TOÁN**

Quyển 1 **LƯỢNG GIÁC**



LƯU HÀNH NỘI BỘ

Chu ã

1

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

PHẦN 1. TỔ LƯAN

BÀI 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ:

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ:

- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu: với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu: với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.
- Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

2. Hàm số đơn điệu:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $(a; b) \subset \mathbb{R}$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (hay hàm số tăng) trên $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (hay hàm số giảm) trên $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

3. Hàm số tuần hoàn:

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D , được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có $(x+T) \in D$ và $(x-T) \in D$ và $f(x+T) = f(x)$.

Nếu có số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì T gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn f .

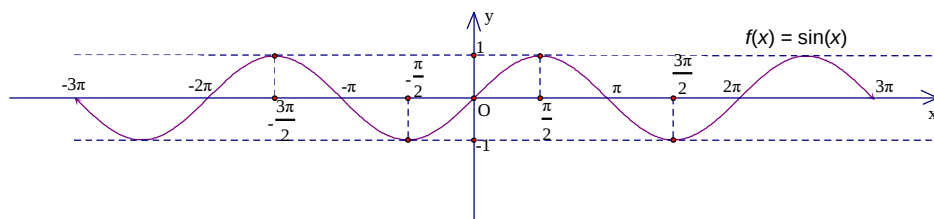
II. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC:

1. Hàm số sin: $y = \sin x$

- ✓ Tập xác định $\mathbb{R}$.
- ✓ Tập giá trị: $[-1; 1]$, có nghĩa là $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- ✓ Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π , có nghĩa $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- ✓ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng

$$\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right), k \in \mathbb{Z}.$$

✓ Đồ thị: $y = \sin x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O là tâm đối xứng.

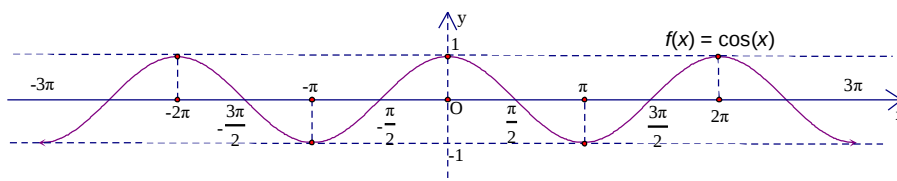


✓ Một số giá trị đặc biệt:

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

2. Hàm số cosin: $y = \cos x$:

- ✓ Tính chất:
- ✓ Tập xác định $\mathbb{R}$.
- ✓ Tập giá trị: $[-1; 1]$, có nghĩa là $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- ✓ Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π , có nghĩa $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- ✓ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- ✓ Đồ thị: $y = \cos x$ là hàm số chẵn, đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.



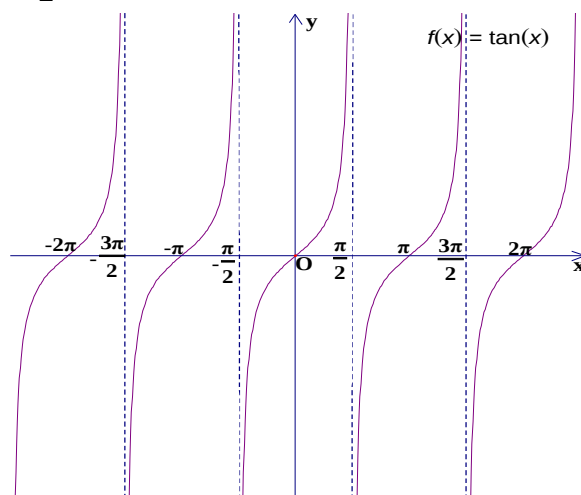
✓ Một số giá trị đặc biệt:

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

3. Hàm số tang: $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

- ✓ Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
- ✓ Tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- ✓ Hàm số tuần hoàn với chu kỳ π , có nghĩa $\tan(x + k\pi) = \tan x, (k \in \mathbb{Z})$.
- ✓ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), (k \in \mathbb{Z})$.
- ✓ Đồ thị: $y = \tan x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận

mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận.



✓ Một số giá trị đặc biệt :

- $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4. Hàm số cotang: $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$:

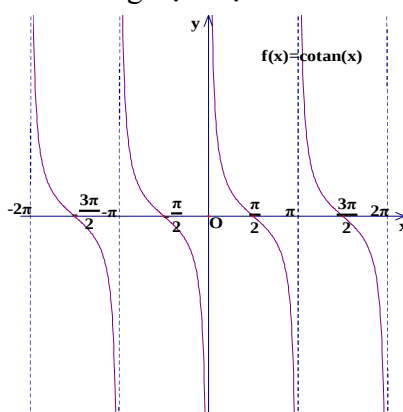
✓ Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

✓ Tập giá trị: $\mathbb{R}.$

✓ Hàm số tuần hoàn với chu kỳ π , có nghĩa $\cot(x + k\pi) = \cot x, (k \in \mathbb{Z}).$

✓ Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}.$

✓ Đồ thị: $y = \cot x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận.



✓ Một số giá trị đặc biệt :

- $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

MỘT SỐ DẠNG TOÁN**VẤN ĐỀ 01. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ****A- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**

Để tìm tập xác định của các hàm số ta dựa vào khái niệm sau:

- Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$.
- Tập xác định của các hàm số cơ bản:
 - ✓ $y = \sin[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
 - ✓ $y = \cos[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
 - ✓ $y = \tan[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định và $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
 - ✓ $y = \cot[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định và $f(x) \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
- ✎ Chú ý:
 - ✓ $\frac{A}{B}$ có nghĩa khi $B \neq 0$ và A có nghĩa.
 - ✓ $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$ và A có nghĩa.

B- CÁC VÍ DỤ

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \sin\left(\frac{2x}{x-1}\right).$

b) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Hàm số xác định khi $x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos x\right).$

b) $y = \sqrt{\sin x - 1} + 2 - \cos^2 x.$

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\frac{\pi}{2} \cdot \cos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos x \neq 1 + 2k \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 1 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq l\pi, (l \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$.

b) Hàm số xác định khi $\sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{\cos x + \sin x}$.

b) $y = \frac{\tan x + \cot x}{\cos 2x}$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\cos x + \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow k2\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \pi + k2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k2\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{4} + k2\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1}$.

b) $y = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{2 - \sin x}}$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} \sin x - 1 \geq 0 \\ \cos x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 1 \\ \cos x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} : \text{vô lý.}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \emptyset$.

b) Hàm số xác định khi $2 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Bài 5. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x - 2\cos x + 4}$.

b) $y = \sqrt{1 - \sin(x^2 + 2x - 1)}$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} \tan x \geq 0 \\ \cos^2 x - 2\cos x + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số xác định khi

$$1 - \sin(x^2 + 2x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \sin(x^2 + 2x - 1) \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

VẤN ĐỀ 02. XÉT TÍNH CHẴN, LẼ CỦA HÀM SỐ

A- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để xét tính chẵn, lẻ của các hàm số ta dựa vào khái niệm sau:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu
 - Tập xác định của các hàm số có tính đối xứng, nghĩa là $\forall x \in D$ suy ra $-x \in D$.
 - $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.
 - Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu
 - Tập xác định của các hàm số có tính đối xứng, nghĩa là $\forall x \in D$ suy ra $-x \in D$.
 - $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.
- 🔍 **Chú ý:** Nếu hàm số $f(x)$ vi phạm một trong hai điều kiện thì ta kết luận hàm số $f(x)$ không chẵn, không lẻ.

B- CÁC VÍ DỤ

Bài 6. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

a) $y = 3x^2 - \cos 2x$.

b) $y = x^2 \sin x + \tan x$.

Lời giải

a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có $f(-x) = 3(-x)^2 - \cos(-2x) = 3x^2 - \cos 2x = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ta thấy $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có $f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) + \tan(-x) = -x^2 \sin x - \tan x = -(x^2 \sin x + \tan x) = -f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Bài 7. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

a) $y = 5 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$.

b) $y = \frac{1}{x-1} - \cos^2 x$.

Lời giải

a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có
$$\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 5 \cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) = 5 \cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 5 \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) = 5 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{12}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{12}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$$

Do đó hàm số đã cho không chẵn, không lẻ.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $x = -1 \in D$ nhưng $-x = 1 \notin D$ nên D không có tính đối xứng.

Do đó hàm số đã cho không chẵn, không lẻ.

Bài 8. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

a) $y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$.

b) $y = \frac{\cos^3 x + \sin^2 x}{\cos 2x}$.

Lời giải

$$\text{a) Hàm số xác định khi } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x + \cot x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin^2 x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2},$$

$$(k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ suy ra } \forall x \in D \text{ thì } -x \in D.$$

$$\text{Ta có } f(-x) = \frac{\sin(-x) - \tan(-x)}{\sin(-x) + \cot(-x)} = \frac{-\sin x + \tan x}{-\sin x - \cot x} = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x} = f(x).$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

$$\text{b) Hàm số xác định khi } \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ suy ra } \forall x \in D \text{ thì } -x \in D.$$

$$\text{Ta có } f(-x) = \frac{\cos^3(-x) + \sin^2(-x)}{\cos(-2x)} = \frac{\cos^3 x + \sin^2 x}{\cos 2x} = f(x).$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

VẤN ĐỀ 03. XÉT TÍNH TUẦN HOÀN VÀ TÌM CHU KỲ CỦA HÀM SỐ**A- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**

Để xét tính tuần hoàn của các hàm số ta dựa vào khái niệm sau:

- Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu

$$\exists T \neq 0 \text{ sao cho } \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow x \pm T \in D \\ f(x+T) = f(x), \forall x \in D \end{cases}.$$

- Nếu tồn tại số $T > 0$ nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì T được gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

➤ **Chú ý:** • $y = \sin(ax+b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.

• $y = \cos(ax+b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.

• $y = \tan(ax+b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.

• $y = \cot(ax+b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.

• $y = f_1(x)$ có chu kỳ T_1 và $y = f_2(x)$ có chu kỳ T_2 thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

B- CÁC VÍ DỤ

Bài 9. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của các hàm số sau

a) $y = 1 + \sin^2 2x$.

b) $y = \frac{1}{\sin 2x}$.

Lời giải

a) Ta có $y = f(x) = 1 + \sin^2 2x = 1 + \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Giả sử $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos 4(x+T) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow \cos(4x + 4T) = \cos 4x, \forall x \in D. (*)$$

Khi cho $x = 0$ thì $(*)$ cũng phải đúng, tức là

$$\cos 4T = \cos 0 \Leftrightarrow \cos 4T = 1 \Leftrightarrow 4T = k2\pi \Leftrightarrow T = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ngược lại, dễ thấy

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x + k2\pi) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x, \forall x \in D.$$

Vậy khi $T = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ thì ta có $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow x \pm T \in D \\ f(x+T) = f(x), \forall x \in D \end{cases}$.

Tức là $y = f(x) = 1 + \sin^2 2x$ làm hàm số tuần hoàn.

Mặt khác trong các số $T = k\frac{\pi}{2}$ thì số dương nhỏ nhất là $T = \frac{\pi}{2}$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn có chu kỳ $T = \frac{\pi}{2}$.

b) Hàm số xác định khi $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Giả sử $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin 2(x+T)} = \frac{1}{\sin 2x}, \forall x \in D \Leftrightarrow \sin(2x + 2T) = \sin 2x, \forall x \in D. (*)$$

Khi cho $x = \frac{\pi}{4}$ thì $(*)$ cũng phải đúng, tức là

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2T\right) = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2T\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2T = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow T = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ngược lại, dễ thấy $\frac{1}{\sin 2(x+k\pi)} = \frac{1}{\sin(2x+2k\pi)} = \frac{1}{\sin 2x}, \forall x \in D$.

Vậy khi $T = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ thì ta có $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow x \pm T \in D \\ f(x+T) = f(x), \forall x \in D \end{cases}$.

Tức là $y = f(x) = \frac{1}{\sin 2x}$ là hàm số tuần hoàn.

Mặt khác trong các số $T = k\pi$ thì số dương nhỏ nhất là $T = \pi$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn có chu kỳ $T = \pi$.

Bài 10. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của các hàm số sau

a) $y = x + \sin x$.

b) $y = \sin^2 2x + \cos^2 2x$.

Lời giải

a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Giả sử $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow (x+T) + \sin(x+T) = x + \sin x, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow T + \sin(x+T) = \sin x, \forall x \in D. \quad (*)$$

Cho $x = 0$ và $x = \pi$, ta được

$$\begin{cases} T + \sin x = \sin 0 = 0 \\ T + \sin(\pi + T) = \sin \pi = 0 \end{cases} \text{ suy ra } 2T + \sin T + \sin(\pi + T) = 0 \Leftrightarrow T = 0.$$

Điều này trái với định nghĩa là $T > 0$. Vậy hàm số $y = x + \sin x$ không phải là hàm số tuần hoàn.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\sin^2 2(x+T) + \cos^2 2(x+T) = 1 = \sin^2 2x + \cos^2 2x, \forall x \in D$

hay $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn. Nhưng trong các số thực T dương không có số nhỏ nhất nên hàm số đã cho tuần hoàn nhưng không có chu kỳ.

VẤN ĐỀ 04. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

- Nếu phải tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên một khoảng, đoạn (nhỏ hơn một chu kỳ của hàm số đó) ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng, đoạn đó rồi dựa vào bảng biến thiên suy ra kết quả.
- Nếu phải tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên toàn bộ tập xác định của nó ta có thể biến đổi hàm số về dạng đơn giản nhất rồi dựa vào miền giá trị của hàm số đã cho để suy ra kết quả.

✎ **Chú ý:** ♦ Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên X nếu

$$\begin{cases} \forall x \in X : f(x) \leq M \\ \exists x_0 \in X : f(x_0) = M \end{cases} \text{ Kí hiệu: } M = \max_x f(x).$$

♦ Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên X nếu

$$\begin{cases} \forall x \in X : f(x) \geq m \\ \exists x_0 \in X : f(x_0) = m \end{cases} \text{ Kí hiệu: } m = \min_x f(x).$$

B- CÁC VÍ DỤ

Bài 11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$. b) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ trên $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$.

Lời giải

a) Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

x	$-\frac{\pi}{3}$	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

$$\max_{\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{và} \quad \min_{\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) Ta có $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -2\sin 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin 2x$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = -\sqrt{2} \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$
$2x$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{3}$
$-\sqrt{2} \sin 2x$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{2}$	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

$$\max_{\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \quad \text{và} \quad \min_{\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Bài 12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = 3 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. b) $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x$.
c) $y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1$. d) $y = \tan x + \cot x$.

Lời giải

a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq 3 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 2 \Leftrightarrow 4 \geq y \geq 2.$$

$$\bullet y = 2 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = 2$ khi $x = \frac{\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\bullet y = 4 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = 4$ khi $x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

b) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x = 5 + 2\sin 4x$.

$$\text{Do } -1 \leq \sin 4x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin 4x \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 5 + 2\sin 4x \leq 7 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 7.$$

$$\bullet y = 3 \Leftrightarrow \sin 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = 3$ khi $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\bullet y = 7 \Leftrightarrow \sin 4x = 1 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = 7$ khi $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

c) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin(x^2) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin(x^2) \geq -1 \Leftrightarrow 2 \geq 1 - \sin(x^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \geq \sqrt{1 - \sin(x^2)} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \geq y \geq -1.$$

$$\bullet y = -1 \Leftrightarrow \sin(x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k2\pi}, (k \in \mathbb{Z}^+).$$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = -1$ khi $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k2\pi}, (k \in \mathbb{Z}^+)$.

$$\bullet y = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \sin x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \sqrt{-\frac{\pi}{2} + k2\pi}, (k \in \mathbb{Z}^+).$$

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = \sqrt{2} - 1$ khi $x = \sqrt{-\frac{\pi}{2} + k2\pi}, (k \in \mathbb{Z}^+)$.

d) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\text{Ta có } y = \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Với $x \in D$ thì $-1 \leq \sin 2x < 0$ hoặc $0 < \sin 2x \leq 1$.

$$\bullet \text{Trường hợp } -1 \leq \sin 2x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 2x} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} \leq -2 \text{ hay } y \in (-\infty; -2].$$

$$\bullet \text{Trường hợp } 0 < \sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 2x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} \geq 2 \text{ hay } y \in [2; +\infty).$$

Vậy hàm số $y = \tan x + \cot x$ không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Bài 13. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$.

b) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$.

c) $y = 3\sin^4 x + \cos 4x$.

d) $y = 2\sin^4 x + \cos^4 x$.

Lời giải

a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có

$$y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 2 = -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4.$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq -(\sin x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4.$$

$$\bullet y = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy } \min_{\mathbb{R}} y = 0 \text{ khi } x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet y = 4 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy } \max_{\mathbb{R}} y = 4 \text{ khi } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y = (1 - \cos^2 x)^2 - 2 \cos^2 x + 1 = \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 2 = (\cos^2 x - 2)^2 - 2.$$

$$\text{Do } 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \cos^2 x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow 4 \geq (\cos^2 x - 2)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq (\cos^2 x - 2)^2 - 2 \geq -1 \Leftrightarrow 2 \geq y \geq -1.$$

$$\bullet y = -1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy } \min_{\mathbb{R}} y = -1 \text{ khi } x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet y = 2 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy } \max_{\mathbb{R}} y = 2 \text{ khi } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y = 3 \sin^4 x + \cos 4x = 3 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + 2 \cos^2 2x - 1$$

$$= \frac{11}{4} \cos^2 2x - \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \left(\cos 2x - \frac{3}{11} \right)^2 - \frac{5}{11}.$$

$$\text{Do } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{14}{11} \leq \cos 2x - \frac{3}{11} \leq \frac{8}{11} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\cos 2x - \frac{3}{11} \right)^2 \leq \frac{196}{121}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{11}{4} \left(\cos 2x - \frac{3}{11} \right)^2 \leq \frac{49}{11} \Leftrightarrow -\frac{5}{11} \leq \frac{11}{4} \left(\cos 2x - \frac{3}{11} \right)^2 - \frac{5}{11} \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{5}{11} \leq y \leq 4.$$

$$\bullet y = -\frac{5}{11} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{3}{11} \Leftrightarrow 2x = \pm \arccos \frac{3}{11} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{11} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy } \min_{\mathbb{R}} y = -\frac{5}{11} \text{ khi } x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{11} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet y = 4 \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = 4$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

d) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= 2\sin^4 x + \cos^4 x = 2\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\cos 2x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do } -1 \leq \cos 2x \leq 1 &\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq \cos 2x - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\cos 2x - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{16}{9} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{3}{4}\left(\cos 2x - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{3}{4}\left(\cos 2x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq y \leq 2. \end{aligned}$$

$$\bullet y = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm \arccos \frac{1}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{2}{3}$ khi $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\bullet y = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = 2$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 14. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$

b) $y = \sin^6 x + \cos^6 x.$

Lời giải

a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2(1 - \cos 2x) + \sin 2x + \cos 2x \\ &= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2. \end{aligned}$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq 2 + \sqrt{2}.$$

$$\bullet y = 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = 2 - \sqrt{2}$ khi $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\bullet y = 2 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = 2 + \sqrt{2}$ khi $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

b) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$.

Do $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \geq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 \geq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq y \geq \frac{1}{4}$.

• $y = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{4}$ khi $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

• $y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = 1$ khi $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 15. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = a \sin x + b \cos x + c$.

b) $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$.

Lời giải

a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = a \sin x + b \cos x + c \Leftrightarrow a \sin x + b \cos x + c - y = 0$.

(*)

Nhận xét. Ta xem phương trình (*) như phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ nên để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$(c - y)^2 \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq y - c \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow c - \sqrt{a^2 + b^2} \leq y \leq c + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

• $y = c - \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow c - \sqrt{a^2 + b^2} = a \sin x + b \cos x + c = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = -1 \Leftrightarrow x + \alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\alpha - \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

với α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $c - \sqrt{a^2 + b^2}$ khi $x = -\alpha - \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

• $y = c + \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow c + \sqrt{a^2 + b^2} = a \sin x + b \cos x + c = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

với α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $c + \sqrt{a^2 + b^2}$ khi $x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

b) **Cách 1.** Tương tự như câu a.

Cách 2. Ta có $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3 = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) + 3 = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3$.

Do $-1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$.

• $y = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = 1$ khi $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

• $y = 5 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = 5$ khi $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 16. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = A \sin^2 x + B \sin x \cos x + C \cos^2 x$. b) $y = 2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x$.

Lời giải

a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= A \sin^2 x + B \sin x \cos x + C \cos^2 x = A \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + B \frac{\sin 2x}{2} + C \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) \\ &= \frac{B}{2} \sin 2x + \left(\frac{C - A}{2} \right) \cos 2x + \frac{A + C}{2}. \end{aligned}$$

Đến đây bạn đọc giải hoàn toàn như bài 14 a).

b) **Cách 1.** Tương tự như câu a.

Cách 2. Ta có $y = 2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = (1 - \cos 2x) + \frac{3}{2} \sin 2x + 5 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)$

$$= \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x + \frac{7}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{7}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do } -1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 &\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{7 - 3\sqrt{2}}{2} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{7}{2} \leq \frac{7 + 3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

• $y = \frac{7 - 3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{7 - 3\sqrt{2}}{2}$ khi $x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

• $y = \frac{7 + 3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{7 + 3\sqrt{2}}{2}$ khi $x = \frac{\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = \frac{a \sin x + b \cos x + c}{A \sin x + B \cos x + C}$. b) $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $A \sin x + B \cos x + C \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= \frac{a \sin x + b \cos x + c}{A \sin x + B \cos x + C} \Leftrightarrow y(A \sin x + B \cos x + C) = a \sin x + b \cos x + c \\ &\Leftrightarrow (Ay - a) \sin x + (By - b) \cos x + Cy - c = 0. \end{aligned}$$

Đến đây các em giải hoàn toàn như bài 14 a).

b) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow y(\sin x + \cos x + 2) = \sin x + 2 \cos x + 1 \\ &\Leftrightarrow (1 - y) \sin x + (2 - y) \cos x + 1 - 2y = 0. (*) \end{aligned}$$

Nhận xét. Ta xem phương trình (*) như phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ nên để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$(1 - 2y)^2 \leq (1 - y)^2 + (2 - y)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1.$$

- $y = -2$. Thay vào (*), ta được $3 \sin x + 4 \cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = -1$
 $\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = -1 \Leftrightarrow x = -\alpha - \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ với α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}; \sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = -2$ khi $x = -\alpha - \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- $y = 1$. Thay vào (*), ta được $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$.

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = 1$ khi $x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

VẤN ĐỀ 05: VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT HÀM SỐ SUY RA TỪ MỘT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ ĐÃ BIẾT

A- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C) .

- Đồ thị (C') của hàm số $y = k.f(x), k \in \mathbb{R}$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x; y)$ của (C) thành điểm $(x; ky)$ của (C') .
- Đồ thị (C') của hàm số $y = f(kx), k \in \mathbb{R}$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x; y)$ của (C) thành điểm $\left(\frac{1}{|k|}x; y\right)$ của (C') nếu $k > 0$ hoặc thành điểm $\left(\frac{1}{|k|}x; -y\right)$ của (C') nếu $k < 0$.
- Đồ thị (C') của hàm số $y = f(x + k), k \in \mathbb{R}$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x; y)$ của (C) thành điểm $(x - k; y)$ của (C') hoặc thực hiện phép tịnh tiến đồ thị (C) theo véc tơ $\vec{u} = (-k; 0)$.
- Đồ thị (C') của hàm số $y = f(x) + k, k \in \mathbb{R}$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x; y)$ của (C) thành điểm $(x; y + k)$ của (C') hoặc thực hiện phép tịnh tiến đồ thị (C) theo véc tơ $\vec{u} = (0; k)$.
- Đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = -f(x)$ đối xứng với nhau qua trục hoành.
- Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

B- CÁC VÍ DỤ

Bài 18. Từ đồ thị hàm số $y = \sin x$ hãy suy ra đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2\sin x$

b) $y = -\frac{1}{2}\sin x$

c) $y = \sin 3x$

d) $y = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$

e) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

f) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

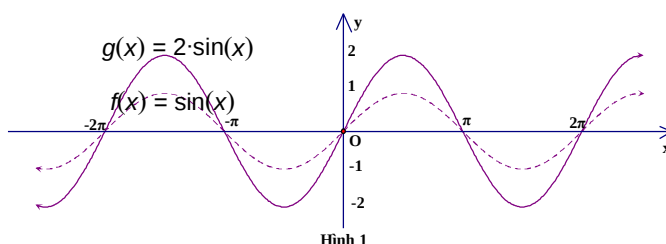
g) $y = \sin x + 2$

h) $y = 2\cos^2 x + 1$.

Lời giải

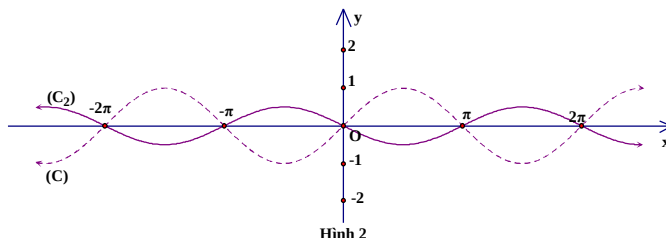
Gọi đồ thị của hàm số $y = \sin x$ là (C)

a) Đồ thị (C_1) của hàm số $y = 2\sin x$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x; y)$ của (C) thành điểm $(x; 2y)$ của (C_1) , hay nói cách khác đồ thị (C_1) nhận được bằng cách thực hiện phép giãn đồ thị (C) theo phương trục tung hai lần (hình 1).



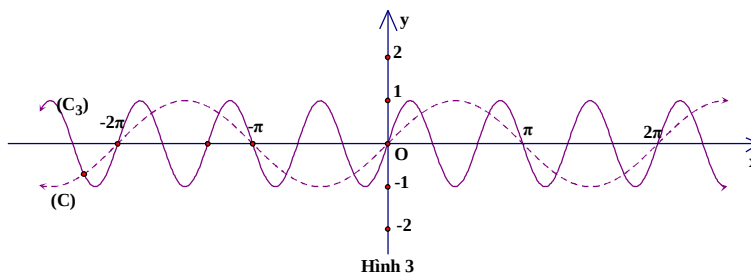
Hình 1

b) Đồ thị (C_2) của hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin x$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x; y)$ của (C) thành điểm $\left(x; -\frac{1}{2}y\right)$ của (C_2) , hay nói cách khác đồ thị (C_2) nhận được bằng cách thực hiện phép giãn đồ thị (C) theo phương trục tung hai lần (hình 2).



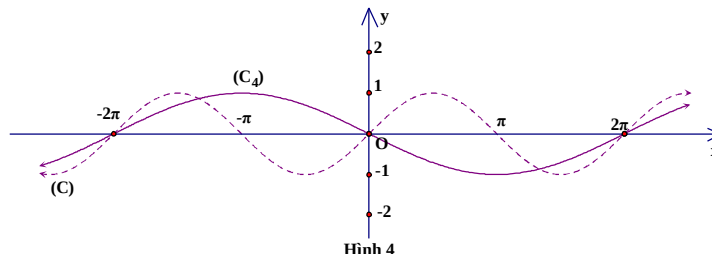
Hình 2

c) Đồ thị (C_3) của hàm số $y = \sin 3x$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x; y)$ của (C) thành điểm $\left(\frac{x}{3}; y\right)$ của (C_3) , hay nói cách khác đồ thị (C_3) nhận được bằng cách thực hiện phép co đồ thị (C) theo phương trục hoành ba lần (hình 3).

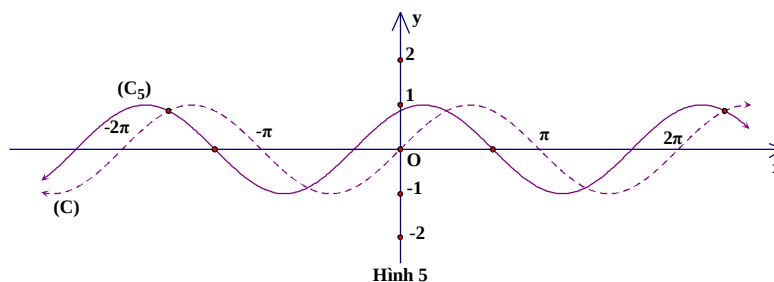


Hình 3

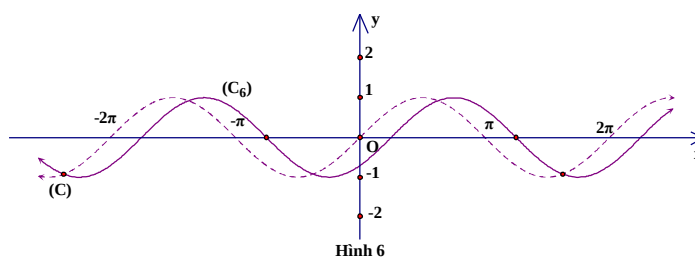
- d) Đồ thị (C_4) của hàm số $y = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x; y)$ của (C) thành điểm $(2x; -y)$ của (C_4) , hay nói cách khác đồ thị (C_4) nhận được bằng cách thực hiện phép giãn đồ thị (C) theo phương trục hoành hai lần để được đồ thị (C') và sau đó thực hiện phép đối xứng (C') qua trục hoành được (C_4) (hình 4).



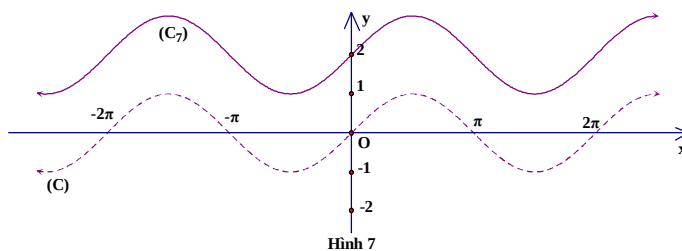
- e) Đồ thị (C_5) của hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x; y)$ của (C) thành điểm $\left(x - \frac{\pi}{3}; y\right)$ của (C_5) , hay nói cách khác đồ thị (C_5) nhận được bằng cách thực hiện phép tịnh tiến (C) theo vectơ $\vec{u} = \left(-\frac{\pi}{3}; 0\right)$ tức là tịnh tiến (C) theo phương trục hoành sang trái một đoạn $\frac{\pi}{3}$ đơn vị (hình 5).



- f) Đồ thị (C_6) của hàm số $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x; y)$ của (C) thành điểm $\left(x + \frac{\pi}{4}; y\right)$ của (C_6) , hay nói cách khác đồ thị (C_6) nhận được bằng cách thực hiện phép tịnh tiến (C) theo vectơ $\vec{u} = \left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ tức là tịnh tiến (C) theo phương trục hoành sang phải một đoạn $\frac{\pi}{4}$ đơn vị (hình 6).



g) Đồ thị (C_7) của hàm số $y = \sin x + 2$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x; y)$ của (C) thành điểm $(x; y + 2)$ của (C_7) , hay nói cách khác đồ thị (C_7) nhận được bằng cách thực hiện phép tịnh tiến (C) theo vectơ $\vec{u} = (0; 2)$ tức là tịnh tiến (C) theo phương trục tung lên trên một đoạn 2 đơn vị (hình 7).



Hình 7

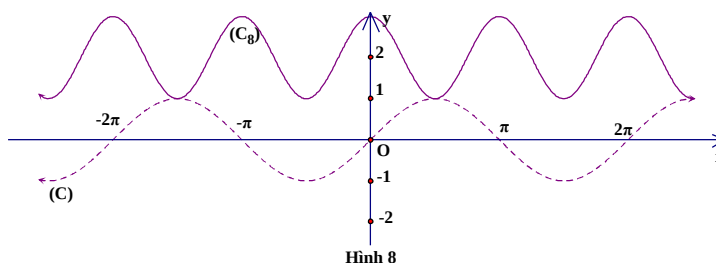
h) Ta có $y = 2 \cos^2 x + 1 = \cos 2x + 2 = \sin \left(-2x + \frac{\pi}{2} \right) + 2$.

Đồ thị (C_8) của hàm số $y = 2 \cos^2 x + 1$ được suy ra từ đồ thị (C) bằng cách thực hiện các phép biến đổi sau:

Phép co đồ thị (C) hai lần theo phương trục hoành được đồ thị (C') và lấy đối xứng (C') qua trục hoành được (C'') .

Tịnh tiến (C'') theo phương trục hoành sang trái một đoạn $\frac{\pi}{4}$ đơn vị được (C''') .

Tịnh tiến (C''') theo phương trục tung lên trên một đoạn 2 đơn vị được đồ thị (C_8) cần tìm (Hình 8).



Hình 8

Bài 19. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = |\sin x|$ b) $y = \tan 2x$ c) $y = \cot \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ d) $y = |\cos x|$ e). $y = \tan \frac{x}{3}$

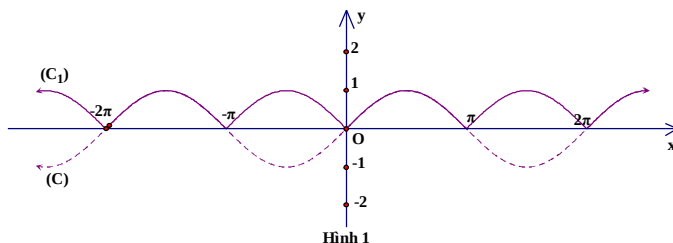
Lời giải

a) $y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{khi } \sin x \geq 0 \\ -\sin x & \text{khi } \sin x < 0 \end{cases}$, do đó đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ được vẽ dựa vào đồ thị

$y = \sin x$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ nằm phía trên trục Ox được đồ thị (C'_1) .
- Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ nằm phía dưới trục Ox được đồ thị (C''_1) .

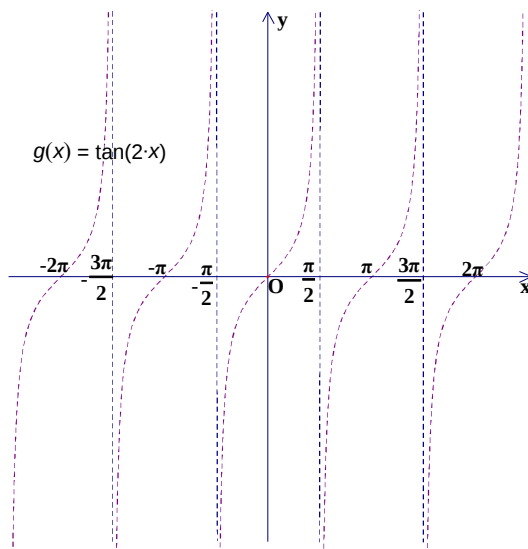
Đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ là hợp của hai đồ thị (C'_1) và (C''_1) .



Hình 1

b) $y = \tan 2x$

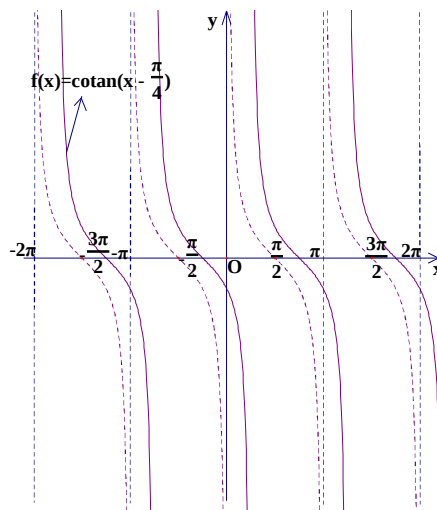
Hàm số $y = \tan 2x$ có chu kì $\frac{\pi}{2}$, do đó trước tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \tan 2x$ trên một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, rồi tịnh tiến phần đồ thị ấy dọc theo trục Ox các đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$ thì sẽ được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \tan 2x$ (Hình 2).



Hình 2.

c) $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Đồ thị hàm số $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = \cot x$ bằng cách tịnh tiến sang phải dọc theo trục Ox một đoạn bằng $\frac{\pi}{4}$ (Hình 3).



Hình 3.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

VẤN ĐỀ 01. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Dạng 1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

A- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ có dạng $a \sin x + b = 0$ ($a \neq 0$).

❖ **Cách giải.** Phương trình $\Leftrightarrow a \sin x = -b \Leftrightarrow \sin x = -\frac{b}{a}$.

✓ Nếu $-\frac{b}{a} \notin [-1; 1]$. Kết luận phương trình vô nghiệm.

✓ Nếu $-\frac{b}{a} \in [-1; 1]$. Xét hai trường hợp sau

▪ $-\frac{b}{a} = \left\{ 0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1 \right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\sin x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

▪ $-\frac{b}{a} \neq \left\{ 0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1 \right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\sin x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin\left(-\frac{b}{a}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{b}{a}\right) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Phương trình bậc nhất đối với $\cos x$ có dạng $a \cos x + b = 0$ ($a \neq 0$).

❖ **Cách giải.** Phương trình $\Leftrightarrow a \cos x = -b \Leftrightarrow \cos x = -\frac{b}{a}$.

✓ Nếu $-\frac{b}{a} \notin [-1; 1]$. Kết luận phương trình vô nghiệm.

✓ Nếu $-\frac{b}{a} \in [-1; 1]$. Xét hai trường hợp sau

▪ $-\frac{b}{a} = \left\{ 0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1 \right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\cos x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

▪ $-\frac{b}{a} \neq \left\{ 0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1 \right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\cos x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + k2\pi \\ x = -\arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

3. Phương trình bậc nhất đối với $\tan x$ có dạng $a \tan x + b = 0$ ($a \neq 0$).

❖ **Cách giải.** Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow a \tan x = -b \Leftrightarrow \tan x = -\frac{b}{a}.$$

✓ Nếu $-\frac{b}{a} = \left\{0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\tan x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

✓ Nếu $-\frac{b}{a} \neq \left\{0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\tan x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

⚠ **Lưu ý:** nếu đề bài cho đơn vị là độ thì không được đổi sang rad và trong các công thức trên thay π thành 180° và 2π thành 360° .

B- CÁC VÍ DỤ

Bài 1. Giải phương trình

a) $\sin x = \frac{1}{2}$.

b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\sin(3x + 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right)$.

e) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

f) $\sin(x + 30^\circ) = \cos(2x + 60^\circ)$

g) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$

h) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

i) $\sin(2x + 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

$$\text{a) } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{b) } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{c) } \sin(3x + 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(3x + 15^\circ) = \sin 45^\circ \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 15^\circ = 45^\circ + k.360^\circ \\ 3x + 15^\circ = 180^\circ - 45^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^\circ + k.120^\circ \\ x = 40^\circ + k.120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{d) } \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{5} = x - \frac{2\pi}{5} + k.2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{5} = \pi - x + \frac{2\pi}{5} + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{3\pi}{5} + k.2\pi \\ 4x = \frac{6\pi}{5} + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{10} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{10} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

e) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - x + k.2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + x + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

f) $\sin(x + 30^\circ) = \cos(2x + 60^\circ) \Leftrightarrow \sin(x + 30^\circ) = \sin(90^\circ - (2x + 60^\circ))$

$$\Leftrightarrow \sin(x + 30^\circ) = \sin(30^\circ - 2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 30^\circ = 30^\circ - 2x + k.360^\circ \\ x + 30^\circ = 180^\circ - (30^\circ - 2x) + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = k.360^\circ \\ -x = 120^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k.120^\circ \\ x = -120^\circ - k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) .$$

g) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ nên phương trình vô nghiệm.

h) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3} + k.2\pi \\ x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3} + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) .$

i) $\sin(2x + 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x + 1) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = -\frac{\pi}{4} + k.2\pi \\ 2x + 1 = \pi + \frac{\pi}{4} + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{4} - 1 + k.2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{4} - 1 + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + k.\pi \\ x = \frac{5\pi}{8} - \frac{1}{2} + k.\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) .$$

Bài 2. Tìm nghiệm âm lớn nhất của phương trình: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Lời giải

Ta có $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Xét bất phương trình $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} < 0$ với $(k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} + \frac{k}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3k-1}{6} < 0 \Leftrightarrow 3k-1 < 0 \Leftrightarrow k < \frac{1}{3}$ mà $(k \in \mathbb{Z})$.

Suy ra nghiệm âm lớn nhất ứng với $k = 0$ và nghiệm âm lớn nhất là $x = -\frac{\pi}{6}$.

Bài 3. Giải phương trình

a) $\cos x + \frac{1}{2} = 0.$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

c) $\cos(3x - 30^\circ) = \frac{1}{2}.$

d) $\cos\left(2x + \frac{3\pi}{5}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}.$

e) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}.$

f) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

g) $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

Lời giải

a) $\cos x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{6} + k.2\pi (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k.2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\cos(3x - 30^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3x - 30^\circ) = \cos 60^\circ \Leftrightarrow 3x - 30^\circ = \pm 60^\circ + k.360^\circ$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 90^\circ + k.360^\circ \\ 3x = -30^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

d) $\cos\left(2x + \frac{3\pi}{5}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{3\pi}{5}\right) = \cos \frac{5\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{3\pi}{5} = \pm \frac{5\pi}{6} + k.2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{60} + k.\pi \\ x = \frac{-43\pi}{60} + k.\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$e) \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \pm \arccos \frac{1}{3} + k.2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\arccos \frac{1}{3} - \frac{\pi}{3} + k.\pi}{2} \\ x = \frac{-\arccos \frac{1}{3} - \frac{\pi}{3} + k.\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$f) \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + k.2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k.\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k.\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

g) $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \left(x - \frac{\pi}{5}\right)\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{2\pi}{5} = \left(\frac{6\pi}{5} - x\right) + k.2\pi \\ 2x + \frac{2\pi}{5} = -\left(\frac{6\pi}{5} - x\right) + k.2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{4\pi}{5} + k.2\pi \\ x = \frac{-8\pi}{5} + k.2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{15} + k.\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{-8\pi}{5} + k.2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 4. Tìm tất cả các nghiệm $x \in (-15^\circ; 30^\circ)$ của phương trình: $\cos(15x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

$$\cos(15x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(15x + 45^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 45^\circ = 30^\circ + k.360^\circ \\ 15x + 45^\circ = -30^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \begin{cases} x = -1^\circ + k.24^\circ \\ x = -5^\circ + k.24^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Xét các bất phương trình

$$\checkmark \quad -15^\circ < -1^\circ + k.24^\circ < 30^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow k = 0; 1; 2 \Rightarrow x = -1^\circ; x = 13^\circ; x = 27^\circ \text{ và}$$

$$\checkmark \quad -15^\circ < -5^\circ + k.24^\circ < 30^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow k = 0; 1 \Rightarrow x = -5^\circ; x = 19^\circ$$

Vậy các nghiệm $x \in (-15^\circ; 30^\circ)$ của phương trình là

$$x = -1^\circ; x = 13^\circ; x = 27^\circ; x = -5^\circ; x = 19^\circ$$

Bài 5. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình: $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Lời giải

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k.\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + k.\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Xét bất phương trình:

$$\frac{\pi}{9} + k.\frac{\pi}{3} > 0 (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \frac{k}{3} > 0 (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k+1}{9} > 0 (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow k > -\frac{1}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$, suy ra nghiệm dương nhỏ nhất ứng với $k = 0$. Khi đó nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \frac{\pi}{9}$.

Bài 6. Giải phương trình

a) $2\sin 3x - \sqrt{3} = 0$.

b) $\cos(x + 30^\circ) + 2\cos^2 15^\circ = 1$.

c) $\tan \frac{x}{2} + 2 = 0$.

d) $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$.

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi \\ 3x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k.\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{9} + k.\frac{2\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{9} + k.\frac{2\pi}{3}; x = \frac{2\pi}{9} + k.\frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$.

b) Phương trình $\Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = 1 - 2\cos^2 15^\circ \Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = -\cos 30^\circ$

$$\Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = \cos 210^\circ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 30^\circ = 210^\circ + k360^\circ \\ x + 30^\circ = -210^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 180^\circ + k360^\circ \\ x = -240^\circ + k360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 180^\circ + k360^\circ$; $x = -240^\circ + k360^\circ$, $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Điều kiện: $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = -2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \arctan(-2) + k\pi \Leftrightarrow x = 2\arctan(-2) + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = 2\arctan(-2) + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

d) Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} < -1$. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Dạng 2. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

A- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

$$a \sin x + b \cos x = c$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $c^2 \leq a^2 + b^2$.

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được phương trình

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ nên ta đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$ suy ra $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$.

Khi đó phương trình trở thành $\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

B- CÁC VÍ DỤ

Bài 7. Giải phương trình

a) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

b) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$.

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi$; $x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 8.

Giải phương trình

a) $3\sin x + 4\cos x = 3$. b) $3\sin x + 4\cos x = 4$. c) $3\sin x + 4\cos x = 5$. d) $3\sin x + 4\cos x = 6$.

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{3}{5}$.

Đặt $\frac{3}{5} = \cos \alpha$; $\frac{4}{5} = \sin \alpha$.

Ta được phương trình $\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \cos \alpha$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi \\ x + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Phương trình $\Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{4}{5}$.

Đặt $\frac{3}{5} = \cos \alpha$; $\frac{4}{5} = \sin \alpha$. Ta được phương trình $\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x = \sin \alpha$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha = \alpha + k2\pi \\ x + \alpha = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pi - 2\alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k2\pi$; $x = \pi - 2\alpha + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

c) Phương trình $\Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1$.

Đặt $\frac{3}{5} = \cos \alpha$; $\frac{4}{5} = \sin \alpha$. Ta được phương trình $\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

d) Phương trình $\Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{6}{5} > 1$. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 9.

Giải phương trình

a) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 2\cos 2x$.

b) $\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin 2x$.

Lời giải

$$a) \text{ Phương trình } \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x + \frac{1}{2} \cos 3x = \cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - 3x = 2x + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - 3x = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{15} - k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{3} - k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{30} - k\frac{2\pi}{5}; x = \frac{\pi}{6} - k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

b) Phương trình

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin 2x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - x - \frac{\pi}{2} = 2x + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - x - \frac{\pi}{2} = \pi - 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} - k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{18} - k\frac{2\pi}{3}; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 10. Giải phương trình

a) $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3} \cos x - \sin x$.

b) $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$.

c) $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} \sin x - \cos x = 4$.

d) $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2$

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$.

b) Phương trình

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \cos x - \sqrt{3} \sin x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k2\pi; x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = 1 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} : \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

$$\text{Đặt } t = x - \frac{\pi}{6} \text{ suy ra } \frac{\pi}{6} + 2x = 2t + \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành } \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin t = 1 \Leftrightarrow \cos 2t + \sin t = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 t + \sin t = 1 \Leftrightarrow \sin t(1 - 2\sin t) = 0.$$

$$\bullet \sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \text{ suy ra } x - \frac{\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet 1 - 2\sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin t = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \text{ suy ra}$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm } x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Dạng 3. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

A- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ có dạng $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0 \quad (a \neq 0)$

$$\bullet \text{ Nếu } a + b + c = 0. \text{ Kết luận phương trình } \Leftrightarrow \sin x = 1 \text{ hoặc } \sin x = \frac{c}{a}.$$

$$\bullet \text{ Nếu } a - b + c = 0. \text{ Kết luận phương trình } \Leftrightarrow \sin x = -1 \text{ hoặc } \sin x = -\frac{c}{a}.$$

$$\bullet \text{ Nếu } a \pm b + c \neq 0. \text{ Ta đặt } t = \sin x, \text{ điều kiện } -1 \leq t \leq 1.$$

$$\text{Khi đó ta được phương trình } at^2 + bt + c = 0.$$

$$\text{Giải phương trình bậc hai theo } t \text{ và chọn } t, \text{ thay } t = \sin x \text{ để tìm } x.$$

2. Phương trình bậc hai đối với $\cos x$ có dạng $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0 \quad (a \neq 0)$

$$\bullet \text{ Nếu } a + b + c = 0. \text{ Kết luận phương trình } \Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ hoặc } \cos x = \frac{c}{a}.$$

$$\bullet \text{ Nếu } a - b + c = 0. \text{ Kết luận phương trình } \Leftrightarrow \cos x = -1 \text{ hoặc } \cos x = -\frac{c}{a}.$$

- Nếu $a \pm b + c \neq 0$. Ta đặt $t = \cos x$, điều kiện $-1 \leq t \leq 1$.
Khi đó ta được phương trình $at^2 + bt + c = 0$.
Giải phương trình bậc hai theo t và chọn t , thay $t = \cos x$ để tìm x .

3. Phương trình bậc hai đối với $\tan x$ có dạng $a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$ ($a \neq 0$)

- Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- Đặt $t = \tan x$. Khi đó ta được phương trình $at^2 + bt + c = 0$.
Giải phương trình bậc hai theo t , thay $t = \tan x$ để tìm x .

B- CÁC VÍ DỤ

Bài 11. Giải phương trình

- a) $2 \sin^2 \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) - 7 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 3 = 0$. b) $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) - 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + 2 = 0$.
- c) $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$. d) $4(\sin^6 x + \cos^6 x) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = 0$.

Lời giải

- a) Ta có $2 \sin^2 \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) - 7 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 3$ hoặc $\sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$.

- $\sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 3$: vô nghiệm.

- $\sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

- b) Ta có $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) - 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \sqrt{2}$ hoặc $\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- $\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \sqrt{2}$: vô nghiệm.

- $\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} - k2\pi \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{12} - k2\pi$; $x = \frac{7\pi}{12} - k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

- c) Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Ta có $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1$ hoặc $\tan x = \sqrt{3}$.

- $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

- $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Đổi chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

d) Ta có $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$
 $= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$

Do đó phương trình

$$\Leftrightarrow 4\left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x\right) - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \text{ hoặc } \sin 2x = -\frac{4}{3}.$$

- $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- $\sin 2x = -\frac{4}{3}$: vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Dạng 4. Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

A- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad (1).$$

❖ **Cách giải:**

- Kiểm tra $\cos x = 0$ có là nghiệm của phương trình không ?
- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta thu được phương trình

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai đối với $\tan x$ mà ta đã biết ở dạng 3.

❖ **Đặc biệt:** Phương trình dạng $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d \quad (2)$ để đưa về dạng (1), ta làm như sau:

$$(2) \Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d.1$$

$$\Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (a - d) \sin^2 x + b \sin x \cos x + (c - d) \cos^2 x = 0.$$

❖ **Chú ý:** Đối với một số dạng đẳng cấp bậc cao hơn ta làm tương tự.

B- CÁC VÍ DỤ

Bài 12. Giải phương trình

a) $\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$ b) $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x - 4\sin 2x = 0.$

Lời giải

a) Ta thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Với $\cos x \neq 0$, phương trình

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - (\sqrt{3} + 1) \tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

b) Ta có $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x - 4\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 5\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0.$

Ta thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

$$\text{Với } \cos x \neq 0, \text{ phương trình } \Leftrightarrow 5 \tan^2 x - 8 \tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan \frac{3}{5} + k\pi \end{cases},$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \arctan \frac{3}{5} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 13. Giải phương trình

- a) $\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 1$.
 b) $\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}$.
 c) $2 \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x + (1 - \sqrt{3}) \cos^2 x = 1$.
 d) $\sqrt{3} \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = 1$.

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\Leftrightarrow -(\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x \left[(\sqrt{3} - 1) \cos x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \right] = 0.$$

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

- $(\sqrt{3} - 1) \cos x - (\sqrt{3} + 1) \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \Leftrightarrow \tan x = 2 - \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow x = \arctan(2 - \sqrt{3}) + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \arctan(2 - \sqrt{3}) + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3} (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{3}) \sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \left[(1 - \sqrt{3}) \sin x - (\sqrt{3} + 1) \cos x \right] = 0.$$

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

- $(1 - \sqrt{3}) \sin x - (\sqrt{3} + 1) \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = -2 - \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow x = \arctan(-2 - \sqrt{3}) + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k\pi$; $x = \arctan(-2 - \sqrt{3}) + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

c) Phương trình $\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x + (1 - \sqrt{3}) \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

Ta thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Với $\cos x \neq 0$, phương trình

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

d) Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$.

$$\Leftrightarrow -(\sqrt{3} + 1)\sin^2 x + 2\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = 0.$$

Ta thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Với $\cos x \neq 0$, phương trình $\Leftrightarrow -(\sqrt{3} + 1)\tan^2 x + 2\tan x + (\sqrt{3} - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-2 + \sqrt{3}) + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \arctan(-2 + \sqrt{3}) + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Cách 2. Phương trình

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x - \sqrt{3}\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

✎ Nhận xét. Việc biến đổi lượng giác thành thạo giúp cho chúng ta tìm được nghiệm đẹp trong việc giải phương trình.

Dạng 5. Phương trình đối xứng giữa $\sin x$ và $\cos x$

A- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x \cos x + c = 0$$

❖ Cách giải:

- Kiểm tra $\cos x = 0$ có là nghiệm của phương trình không ?
- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta thu được phương trình

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Suy ra $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ nên $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó phương trình trở thành $at + b\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right) + c = 0 \Leftrightarrow bt^2 + 2at + 2c - b = 0$.

Giải phương trình bậc hai theo t và chọn t , thay $t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ để tìm x .

❖ **Chú ý: Một số dạng tương tự và cách đặt:**

- Dạng $a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$ thì ta đặt $t = \sin x - \cos x$.
Với điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$
- Dạng $a|\sin x \pm \cos x| + b \sin x \cos x + c = 0$ thì ta đặt $t = |\sin x - \cos x|$.
Với điều kiện $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

B- CÁC VÍ DỤ

Bài 14. Giải phương trình

- a) $(2 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - 2 \sin x \cos x - 2\sqrt{2} - 1 = 0$. b) $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$.
c) $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = 4$. d) $|\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1$.

Lời giải

- a) Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Suy ra $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ nên $2 \sin x \cos x = t^2 - 1$.

Khi đó phương trình trở thành

$$(2 + \sqrt{2})t - (t^2 - 1) - 2\sqrt{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - (2 + \sqrt{2})t + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \text{ hoặc } t = 2 \text{ (loại)}.$$

Với $t = \sqrt{2}$ suy ra

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- b) Phương trình $\Leftrightarrow 1 + (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 3 \sin x \cos x$
 $\Leftrightarrow 1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 3 \sin x \cos x$.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Suy ra $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ nên $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó phương trình trở thành

$$1 + t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 3\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = -1 \pm \sqrt{6} \text{ (loại)}.$$

Với $t = -1$ suy ra $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- c) Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Suy ra $t^2 = (\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$ nên $2 \sin x \cos x = 1 - t^2$.

Khi đó phương trình trở thành

$$1 - t^2 + 4t = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 3 \text{ (loại)}.$$

Với $t = 1$ suy ra

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

d) Đặt $t = |\sin x - \cos x| = |\cos x - \sin x| = \sqrt{2} \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right|$. Điều kiện: $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Suy ra $t^2 = (\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$ nên $2\sin x \cos x = 1 - t^2$.

Khi đó phương trình trở thành

$$t + 4(1 - t^2) = 1 \Leftrightarrow 4t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -\frac{3}{4} \text{ (loại)}.$$

Với $t = 1$ suy ra $\sqrt{2} \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases},$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k\frac{\pi}{2}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

VẤN ĐỀ 02. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương pháp biến đổi đưa về dạng cơ bản

Bài 15. Giải phương trình

a) $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$.

b) $(2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 1$.

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow 1 + \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Phương trình $\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 1 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - (\sin x + \cos x) = 1$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + 1 + \cos 2x - (\sin x + \cos x) = 1 \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k2\pi$; $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$.

2. Phương pháp biến đổi về dạng tích

$$A.B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ hoặc } B = 0.$$

Bài 16. Giải phương trình

a) $\sin 3x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 + \cos 2x + 3\sin 2x$. b) $\sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1$.

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow \sin 3x + 3(\sin x + \cos x) = 2 + \cos 2x + 3\sin 2x$

$$\Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + 2\sin x - 3\sin 2x - (\cos 2x - 3\cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(2\cos^2 x - 3\cos x + 1) - (2\cos^2 x - 3\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0.$$

- $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

- $\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

- $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos x \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, x = k2\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x \cos x + 1 - \cos 2x - 2\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\cos x + \sin x - 1) = 0.$$

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

- $\cos x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

3. Phương pháp biến đổi đưa về tổng hai bình phương

$$A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Bài 17. Giải phương trình

a) $3 \tan^2 x + 4 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 4 \sin x + 2 = 0.$

b) $4 \cos^3 x + 3 \tan^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 2\sqrt{3} \tan x + 4 = 0.$

Lời giải

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Phương trình $\Leftrightarrow 3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 1 + 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} \tan x - 1)^2 + (2 \sin x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi.$$

Đổi chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

b) Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Phương trình $\Leftrightarrow (4 \cos^3 x - 4\sqrt{3} \cos x + 3) + (3 \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} \tan x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3} \tan x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đổi chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

4. Phương pháp đánh giá hai vế

- Phương pháp đối lập $\begin{cases} A = B \\ A \geq M \\ B \leq M \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} A = M \\ B = M \end{cases}.$
- Phương pháp phản chứng $\begin{cases} A + B = M + N \\ A \leq M \\ B \leq N \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} A = M \\ B = N \end{cases}.$

Bài 18. Giải phương trình

a) $\sin 3x(\cos x - 2 \sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2 \cos 3x) = 0.$

$$b) (\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x.$$

Lời giải

$$a) \text{ Phương trình } \Leftrightarrow (\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x) + \cos 3x - 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \cos 3x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 3x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} & (1) \\ x = k\frac{2\pi}{3} & (2) \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Khi biểu diễn các họ nghiệm (1) và (2) trên đường tròn lượng giác, ta thấy không có điểm nào chung. Tức là phương trình đã cho vô nghiệm.

$$b) \text{ Phương trình } \Leftrightarrow (2\sin 3x \sin x)^2 = 6 + 2\sin 3x \Leftrightarrow 4\sin^2 3x \sin^2 x = 6 + 2\sin 3x. (*)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 4\sin^2 3x \sin^2 x \leq 4 \\ 6 + 2\sin 3x \geq 4 \end{cases} \text{ suy ra}$$

$$(*) \Leftrightarrow 4\sin^2 3x \sin^2 x = 6 + 2\sin 3x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 3x \sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ 3\sin x - 4\sin^3 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \sin x = 1 \vee \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 19. Giải phương trình

$$a) \sin^{2010} x + \cos^{2010} x = 1.$$

$$b) \sin^8 x + \cos^{11} x = 1.$$

Lời giải

a) Phương trình

$$\Leftrightarrow \sin^{2010} x + \cos^{2010} x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x (\sin^{2008} x - 1) = \cos^2 x (1 - \cos^{2008} x).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin^2 x \geq 0 \\ \sin^{2008} x \leq 1 \end{cases} \text{ suy ra } \sin^2 x (\sin^{2008} x - 1) \leq 0; \begin{cases} \cos^2 x \geq 0 \\ \cos^{2008} x \leq 1 \end{cases} \text{ suy ra}$$

$$\cos^2 x (1 - \cos^{2008} x) \geq 0.$$

$$\text{Do đó phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x (\sin^{2008} x - 1) = 0 \\ \cos^2 x (1 - \cos^{2008} x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm } x = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$b) \text{ Do } \begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \text{ nên phương trình } \sin^8 x + \cos^{11} x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^8 x \leq \sin^2 x \\ \sin^{11} x \leq \cos^2 x \\ \sin^8 x + \cos^{11} x = \sin^2 x + \cos^2 x \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^8 x = \sin^2 x \\ \cos^{11} x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 1 \vee \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \vee \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 20. Giải phương trình

a) $\cos x - 3\sqrt{3} \sin x = \cos 7x$.

b) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2 \sin^5 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow \cos x - \cos 7x - 3\sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 3x \sin 4x - 3\sqrt{3} \sin x = 0$.

$\Leftrightarrow 2 \sin x (3 - 4 \sin^2 x) \sin 4x - 3\sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x [2 \sin 4x (1 + 2 \cos 2x) - 3\sqrt{3}] = 0$.

• $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

• $2 \sin 4x (1 + 2 \cos 2x) - 3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 4x \cos 2x + \sin 4x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow 4 \sin 2x \cos^2 2x + \sin 4x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. (*)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số: $\sin^2 2x$, $\frac{\cos^2 2x}{2}$, $\frac{\cos^2 2x}{2}$ ta được

$$1 = \sin^2 2x + \frac{\cos^2 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(\sin 2x \cos^2 2x)^2}{4}}.$$

Suy ra $\sin 2x \cos^2 2x \leq |\sin 2x \cos^2 2x| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ nên

$$4 \sin 2x \cos^2 2x + \sin 4x \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} + 1 < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có $\tan^2 x + \cot^2 x \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\tan x = \cot x$.

Mặt khác, ta có $2 \sin^5 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$.

Do đó phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \cot x \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\tan x} \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \pm 1 \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 21. Giải phương trình

a) $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$.

b) $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} = 3$.

Lời giải

a) Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$1 \cdot \cos 3x + 1 \cdot \sqrt{2 - \cos^2 3x} \leq \sqrt{2} \sqrt{\cos^2 3x + (2 - \cos^2 3x)} = 2.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: } \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \geq 0 \\ \cos^2 3x = 2 - \cos^2 3x \end{cases}$$

Mặt khác, ta có $2(1 + \sin^2 2x) \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\sin 2x = 0$.

$$\text{Do đó phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \geq 0 \\ \cos^2 3x = 2 - \cos^2 3x \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \frac{2\pi}{3} \\ x = k \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\text{b) Đặt } \begin{cases} \vec{a} = (\sin x; 1; \sqrt{2 - \sin^2 x}) \\ \vec{b} = (1; \sqrt{2 - \sin^2 x}; \sin x) \end{cases}. \text{ Ta có } \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} \\ |\vec{a}| = \sqrt{3}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Áp dụng bất đẳng thức vector, ta có

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} \leq 3.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \frac{\sin x}{1} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{2 - \sin^2 x}}{\sin x} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

5. Phương pháp đặt ẩn phụ

Bài 22. Giải phương trình

a) $(6 \sin x - 2 \sin 3x + 1)^3 = 162 \sin x - 27.$

b) $\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cot x + \cot^2 x + \cot^3 x = 6.$

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow [6 \sin x - 2(3 \sin x - 4 \sin^3 x) + 1]^3 = 162 \sin x - 27$

$$\Leftrightarrow (8 \sin^3 x + 1)^3 = 27(6 \sin x - 1) \Leftrightarrow 8 \sin^3 x + 1 = 3 \sqrt[3]{6 \sin x - 1}.$$

Đặt $2 \sin x = t$, với $|t| \leq 2$. Khi đó phương trình trở thành $t^3 + 1 = 3 \sqrt[3]{3t - 1}$.

Đặt $u = \sqrt[3]{3t - 1}$ ta được hệ $\begin{cases} u^3 + 1 = 3t \\ t^3 + 1 = 3u \end{cases}$. Giải ra ta được $t = u$.

Với $t = u$ ta có phương trình $t^3 - 3t + 1 = 0$. Khi đó theo cách đặt, ta được

$$8 \sin^3 x - 6 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2 \sin 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{7\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Đặt $t = \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$. Điều kiện $|t| \geq 2$.

Suy ra $\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x = t^2 - 2$;

$\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)^3 - 3 \tan x \cot x (\tan x + \cot x) = t^3 - 3t$.

Khi đó phương trình trở thành $t^3 - 3t + t^2 - 2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Với $t = 2$ suy ra $\frac{2}{\sin 2x} = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Đổi chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 23. Giải phương trình

a) $3 \cot^2 x + 2\sqrt{2} \sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2}) \cos x$. b) $\sin 2x + \cos 2x + \tan x = 2$.

Lời giải

a) Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Chia hai vế phương trình cho $\sin^2 x$, ta được $3 \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} \right)^2 + 2\sqrt{2} = (2 + 3\sqrt{2}) \frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

Đặt $t = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, ta được phương trình

$3t^2 + 2\sqrt{2} = (2 + 3\sqrt{2})t \Leftrightarrow 3t^2 - (2 + 3\sqrt{2})t + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \text{ hoặc } t = \frac{2}{3}$.

• Với $t = \sqrt{2}$ suy ra

$$\cos x = \sqrt{2} \sin^2 x \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

• Với $t = \frac{2}{3}$ suy ra $3 \cos x = 2 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Đổi chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình

$x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Đặt $t = \tan x$. Suy ra $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Khi đó phương trình trở thành $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + t = 2 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

- Với $t = 1$ suy ra $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

6. Phương pháp đổi biến số

Bài 24. Giải phương trình

a) $2\sqrt{2} \cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0.$ b) $8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x.$

Lời giải

a) Đặt $t = x - \frac{\pi}{4}$. Khi đó phương trình trở thành $2\sqrt{2} \cos^3 t - 3\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 3(\cos t - \sin t) - (\sin t + \cos t) = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 t - 4\cos t + 2\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t(\cos^2 t - 1) + \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t(-2\cos t \sin t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 0 \\ \sin 2t = 1 \end{cases}$$

- Với $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$ suy ra $x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- Với $\sin 2t = 1 \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi$ suy ra $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

b) Đặt $t = x + \frac{\pi}{3}$. Khi đó phương trình trở thành

$$8\cos^3 t = -\cos 3t \Leftrightarrow 8\cos^3 t = -(4\cos^3 t - 3\cos t)$$

$$\Leftrightarrow 12\cos^3 t - 3\cos t = 0 \Leftrightarrow 3\cos t(4\cos^2 t - 1) = 0.$$

- Với $\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ suy ra $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- Với $4\cos^2 t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos t = \pm \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \cos \frac{\pi}{3} \\ \cos t = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ t = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, \text{ suy ra } \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = -\pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = k\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 25. Giải phương trình

a) $\sqrt{3}(\sin 2x - \cos x) + \sin x - \cos 2x = 2.$ b) $\sin 3x - 4\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0.$

Lời giải

a) Phương trình

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x) + (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 2 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Đặt $t = x - \frac{\pi}{3}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin t = 1 \Leftrightarrow \cos 2t + \sin t = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 t + \sin t = 1 \Leftrightarrow \sin t(2\sin t - 1) = 0.$$

- Với $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$ suy ra $x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- Với $2\sin t - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin t = \sin \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

b) Đặt $t = x - \frac{\pi}{6}$. Khi đó phương trình trở thành

$$\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos t - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 3t - 4\cos t - 3 = 0 \Leftrightarrow (4\cos^3 t - 3\cos t) - 4\cos t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 7\cos t - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos t = -1 \text{ hoặc } \cos t = -\frac{1}{2} \text{ hoặc } \cos t = \frac{3}{2} \text{ (loại)}.$$

- Với $\cos t = -1 \Leftrightarrow t = \pi + k2\pi$ suy ra $x - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- Với $\cos t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos t = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow t = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$$\text{Suy ra } x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

7. Phương pháp nhân - chia thêm bớt

Bài 26. Giải phương trình

a) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = -\frac{1}{2}$. b) $\sin 3x(1 - 4\sin^2 x) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Kiểm tra $\sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = l\pi \Leftrightarrow x = l2\pi$ không là nghiệm của phương trình.

Nhân hai vế của phương trình với $\sin \frac{x}{2}$, ta được

$$\sin \frac{x}{2} (\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{11x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{11}.$$

Vì nghiệm khác 12π , $l \in \mathbb{Z}$ nên phương trình có nghiệm $x = \frac{2k\pi}{11}$ với $k \neq 11l$ và $k, l \in \mathbb{Z}$.

b) Kiểm tra $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + l\pi$ không phải là nghiệm của phương trình.

Nhân hai vế của phương trình với $\cos x$, ta được

$$\sin 3x (\cos x - 4 \sin^2 x \cos x) = \frac{1}{2} \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 3x (4 \cos^3 x - 3 \cos x) = \cos x \Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos 3x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 6x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 6x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + k \frac{2\pi}{7} \\ x = \frac{\pi}{10} + k \frac{2\pi}{5} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{14} + k \frac{2\pi}{7}$; $x = \frac{\pi}{10} + k \frac{2\pi}{5}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 27. Giải phương trình

a) $\sin \frac{5x}{2} = 5 \cos^3 x \sin \frac{x}{2}.$

b) $2 \cos 3x (2 \cos 2x + 1) = 1.$

Lời giải

a) Kiểm tra $\cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + l\pi \Leftrightarrow x = \pi + l2\pi$ không phải là nghiệm của phương trình.

Nhân hai vế của phương trình với $\cos \frac{x}{2}$, ta được

$$\sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 5 \cos^3 x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\sin 3x + \sin 2x) = \frac{5}{2} \cos^3 x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sin 2x = 5 \cos^3 x \sin x \Leftrightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2 \sin x \cos x = 5 \cos^3 x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x (3 - 4 \sin^2 x + 2 \cos x - 5 \cos^3 x) = 0 \Leftrightarrow \sin x (5 \cos^3 x - 4 \cos^2 x - 2 \cos x + 1) = 0.$$

• $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

• $5 \cos^3 x - 4 \cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \arccos \left(\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10} \right) + k2\pi \end{cases}.$

Vì nghiệm khác $\pi + l2\pi$, $l \in \mathbb{Z}$ nên phương trình có nghiệm

$$x = k2\pi; x = \pm \arccos \left(\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10} \right) + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Phương trình

$$\Leftrightarrow 4 \cos 3x \cos 2x + 2 \cos 3x = 1 \Leftrightarrow 2 [\cos (3x + 2x) + \cos (3x - 2x)] + 2 \cos 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 5x + 2 \cos x + 2 \cos 3x = 1 \Leftrightarrow 2 \cos x + 2 \cos 3x + 2 \cos 5x = 1.$$

Kiểm tra $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ không phải là nghiệm của phương trình.

Nhân hai vế của phương trình với $\sin x$, ta được

$$2 \cos x \sin x + 2 \cos 3x \sin x + 2 \cos 5x \sin x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + (\sin 4x - \sin 2x) + (\sin 6x - \sin 4x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 6x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = x + k2\pi \\ 6x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k\frac{2\pi}{5}; x = \frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7}, (k \in \mathbb{Z})$.

VẤN ĐỀ 03. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 28. Giải phương trình $\cos 2x + \sqrt{3} \cos x + 5 \sin x = \sqrt{3} \sin 2x + 3$.

Lời giải

Phương trình

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 5 \sin x - 3 = \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \cos x \Leftrightarrow -2 \sin^2 x + 5 \sin x - 2 = \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \cos x$$

$$\Leftrightarrow -(\sin x - 2)(2 \sin x - 1) = \sqrt{3} \cos x (2 \sin x - 1) \Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\sin x + \sqrt{3} \cos x - 2) = 0.$$

$$\bullet \quad 2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \quad \sin x + \sqrt{3} \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 29. Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x + 2 \cos^2 x = 1$.

Lời giải

Phương trình

$$\Leftrightarrow (\sin^3 x + \cos^3 x) + (2 \cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x + \cos x - \sin x) = 0.$$

$$\bullet \quad \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \quad 1 - \sin x \cos x + \cos x - \sin x = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \text{ Điều kiện: } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra } t^2 = (\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \text{ nên } \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}.$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành } 1 - \frac{1 - t^2}{2} + t = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Với $t = -1$ suy ra

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = -\pi + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 30. Giải phương trình $\sin^2 2x + \frac{1}{4} \sin^2 x = \sin 2x \sin^2 x$.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sin^2 x \left(4\cos^2 x + \frac{1}{4} - \sin 2x \right) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x \left(4 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1}{4} - \sin 2x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (8\cos 2x - 4\sin 2x + 9) = 0.$$

$$\bullet \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet 8\cos 2x - 4\sin 2x + 9 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin 2x = -\frac{9}{4\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + \alpha) = -\frac{9}{4\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = -\frac{\alpha}{2} \pm \arccos\left(-\frac{9}{4\sqrt{5}}\right) + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{với } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k\pi$; $x = -\frac{\alpha}{2} \pm \arccos\left(-\frac{9}{4\sqrt{5}}\right) + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 31. Giải phương trình $4\sin^2 x + 1 = 8\sin^2 x \cos x + 4\cos^2 2x$.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 4(1 - \cos^2 x) + 1 = 8(1 - \cos^2 x)\cos x + 4(2\cos^2 x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 16\cos^4 x - 8\cos^3 x - 12\cos^2 x + 8\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(8\cos^3 x - 6\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\cos 3x + 1) = 0.$$

$$\bullet 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet 2\cos 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$; $x = \pm \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 32. Giải phương trình $\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3} \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x) + \sqrt{3} \left(\frac{1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(x + \frac{7\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = x + \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - \left(x + \frac{7\pi}{6} \right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \pi + k2\pi$; $x = k\frac{2\pi}{3}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 33. Giải phương trình $\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải

Đặt $t = x + \frac{\pi}{4}$, suy ra $2x = 2t - \frac{\pi}{2}$ và $3x - \frac{\pi}{4} = 3t - \pi$.

Khi đó phương trình trở thành $\sin(3t - \pi) = \sin \left(2t - \frac{\pi}{2} \right) \sin t$

$$\Leftrightarrow -\sin 3t = -\cos 2t \sin t \Leftrightarrow -\sin 3t + \cos 2t \sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin t (4\sin^2 t - 3 + 1 - 2\sin^2 t) = 0 \Leftrightarrow 2\sin t (\sin^2 t - 1) = 0.$$

- $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$ suy ra $x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).
- $\sin^2 t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ suy ra $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 34. Bài 29. Giải phương trình $\sin 3x + \sin 2x + \sin x + 1 = \cos 3x + \cos 2x - \cos x$.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + (\sin 2x + 1) = (\cos 3x - \cos x) + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x + (\sin x + \cos x)^2 = -2\sin 2x \sin x + (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x (\cos x + \sin x) + (\sin x + \cos x)^2 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x) [2\sin 2x + (\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos x + \sin x)(\sin 2x + \sin x) = 0$$

- $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

- $\sin 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\sin x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(\pi + x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi + x + k2\pi \\ 2x = \pi - (\pi + x) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \pi + k2\pi$; $x = k\frac{2\pi}{3}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 35. Giải phương trình $\sin 7x + \sin 9x = 2 \left[\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \right]$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow \sin 7x + \sin 9x = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \\ &\Leftrightarrow \sin 7x + \sin 9x = 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) - 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + 4x \right) \\ &\Leftrightarrow \sin 7x + \sin 9x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} + 4x \right) \Leftrightarrow \sin 7x + \sin 9x = \sin 2x + \sin 4x \\ &\Leftrightarrow \sin 8x \cos x = \sin 3x \cos x \Leftrightarrow \cos x (\sin 8x - \sin 3x) = 0. \end{aligned}$$

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- $\sin 8x - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 8x = \sin 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 3x + k2\pi \\ 8x = \pi - 3x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{11} + k\frac{2\pi}{11} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = k\frac{2\pi}{5}; x = \frac{\pi}{11} + k\frac{2\pi}{11}, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 36. Giải phương trình $\cos 3x - 2 \sin 2x - \cos x - \sin x - 1 = 0.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) - 2 \sin 2x - (\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin 2x \sin x - 2 \sin 2x - (\sin x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2 \sin 2x (\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)(2 \sin 2x + 1) = 0. \end{aligned}$$

- $\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- $2 \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 37. Giải phương trình $1 + \sin x + \cos x = 2 \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \left(1 + \sin 2 \frac{x}{2} \right) + \cos 2 \frac{x}{2} = 2 \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) 2 \cos \frac{x}{2} = 2 \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \cos \frac{x}{2} = \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{x}{2} = \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} - 1 \right) = 0.$$

- $\cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- $\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + k4\pi.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{2} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 38. Giải phương trình $3\sin^2 x \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \cos x = \sin x \cos^2 x - 3\sin^2 x \cos x.$

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 3\sin^2 x \sin x - \cos^2 x \cos x = \sin x \cos^2 x - 3\sin^2 x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^3 x + 3\sin^2 x \cos x - \cos^3 x - \sin x \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x (\sin x + \cos x) - \cos^2 x (\cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) (3\sin^2 x - \cos^2 x) = 0.$$

- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$
- $3\sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan \left(\pm \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 39. Giải phương trình $4\sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + 4\sqrt{3} \cos x \cos \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) \cos \left(\frac{4\pi}{3} + x \right) = 2..$

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 2\sin x \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi}{3} \right) + 2\sqrt{3} \cos x \left(\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3} \right) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos 2x + \sin x + 2\sqrt{3} \cos x \cos 2x - \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow (\sin 3x - \sin x) + \sin x + \sqrt{3} (\cos 3x + \cos x) - \sqrt{3} \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 40. Giải phương trình $6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x \cos x.$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Phương trình } &\Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x \cos^2 x \Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x(1 - \sin^2 x) \\
 &\Leftrightarrow 10\sin^3 x - 4\sin x - 2\cos^3 x = 0 \Leftrightarrow 10\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - 4\frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 10\tan^3 x - 4\tan x(1 + \tan^2 x) - 2 = 0 \Leftrightarrow 6\tan^3 x - 4\tan x - 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 41. Giải phương trình $5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 9$.

Lời giải

Đặt $t = \frac{5\pi}{6} - x$, suy ra $2x + \frac{\pi}{3} = 2\pi - 2t$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
 5\cos(2\pi - 2t) &= 4\sin t - 9 \Leftrightarrow 5\cos 2t = 4\sin t - 9 \Leftrightarrow 5(1 - 2\sin^2 t) = 4\sin t - 9 \\
 &\Leftrightarrow 10\sin^2 t + 4\sin t - 14 = 0 \Leftrightarrow \sin t = 1 \text{ hoặc } \sin t = -\frac{7}{5} \text{ (loại)}.
 \end{aligned}$$

Với $\sin t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ suy ra $\frac{5\pi}{6} - x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} - k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{3} - k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 42. Giải phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 4x\right) + \cos x = 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Phương trình } &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 4x\right) = 1 - \cos x \\
 &\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\sin \frac{x}{2}\cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin^2 \frac{x}{2} \\
 &\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2}\left[\cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \sin \frac{x}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2}\left[\cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right] = 0.
 \end{aligned}$$

- $\sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
- $\cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + k2\pi \\ \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{6} = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k2\pi$; $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$; $x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 43. Giải phương trình $\sin 4x + \cos 3x + \cos x = 4 \sin x + 2$.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 4 \sin x \cos x \cos 2x + \cos 3x + \cos x = 4 \sin x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x (\cos 3x + \cos x) + \cos 3x + \cos x = 2(2 \sin x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x)(2 \sin x + 1) = 2(2 \sin x + 1) \Leftrightarrow (2 \sin x + 1)(\cos 3x + \cos x - 2) = 0.$$

$$\bullet 2 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \cos 3x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x + \cos x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi; x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 44. Giải phương trình $2 \cos 6x + 2 \cos 4x - \sqrt{3} \cos 2x = \sin 2x + \sqrt{3}$.

Lời giải

Phương trình

$$\Leftrightarrow 4 \cos 5x \cos x - \sqrt{3} \cos 2x - \sqrt{3} - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 4 \cos 5x \cos x - \sqrt{3}(\cos 2x + 1) - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos 5x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x (2 \cos 5x - \sqrt{3} \cos x - \sin x) = 0.$$

$$\bullet \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet 2 \cos 5x - \sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \sin 5x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin 5x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - x = 5x + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - x = \pi - 5x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} - k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm } x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{18} - k\frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 45. Giải phương trình $1 + 3 \cos x + \cos 2x - 2 \cos 3x = 4 \sin x \sin 2x$.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 1 + 3 \cos x + (2 \cos^2 x - 1) - 2(4 \cos^3 x - 3 \cos x) = 8 \sin^2 x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3 \cos x + (2 \cos^2 x - 1) - 2(4 \cos^3 x - 3 \cos x) = 8(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2 \cos x + 1) = 0.$$

$$\bullet \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet 2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm } x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 46. Giải phương trình $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 = 3\sin x + 3\sqrt{3}\cos x$.

Lời giải

Phương trình

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 2 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 1 = 3\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Đặt $t = x + \frac{\pi}{3}$, suy ra $2x + \frac{\pi}{6} = 2t - \frac{\pi}{2}$. Khi đó phương trình trở thành $\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 3\sin t$

$$\Leftrightarrow -\cos 2t + 1 = 3\sin t \Leftrightarrow 2\sin^2 t = 3\sin t \Leftrightarrow \sin t(2\sin t - 3) = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \text{ hoặc } \sin t = \frac{3}{2}$$

(loại).

Với $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$ suy ra $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 47. Giải phương trình $4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x \cos 2x = 0$.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow 4\sin 3x + \sin 5x - (\sin 3x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow 3\sin 3x + \sin 5x + \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 3\sin 3x + 2\sin 3x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x(3 + 2\cos 2x) = 0.$$

- $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$.
- $3 + 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{3}{2}$: vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k\frac{\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 48. Giải phương trình $\cot\left[\frac{\pi}{4}(\sqrt{3}\cos x + \sin x)\right] - 1 = 0$.

Lời giải

Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \cot\left[\frac{\pi}{4}(\sqrt{3}\cos x + \sin x)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}(\sqrt{3}\cos x + \sin x) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = 1 + 4k, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta xem đây như phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$. Vì vậy nên để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $(1 + 4k)^2 \leq (\sqrt{3})^2 + 1^2 \Leftrightarrow 16k^2 + 8k - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}$. Do $k \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn $k = 0$.

Khi đó phương trình trở thành $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + l2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + l2\pi \end{cases}, (l \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + l2\pi$; $x = -\frac{\pi}{6} + l2\pi$, ($l \in \mathbb{Z}$).

Bài 49. Giải phương trình $\frac{1}{4}\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = (3\cos x - 2)(\sin^2 x + 2)$.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x = (3\cos x - 2)(\sin^2 x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x (\sin^2 x + 2) = (3\cos x - 2)(\sin^2 x + 2) \Leftrightarrow (\sin^2 x + 2)(\cos^2 x - 3\cos x + 2) = 0.$$

• $\sin^2 x + 2 = 0$: vô nghiệm.

$$\bullet \cos^2 x - 3\cos x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 50. Giải phương trình $2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 = 3(\cos x - \sqrt{3}\sin x)$.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x = 3(\cos x - \sqrt{3}\sin x)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\sin x - \cos x)^2 = 3(\cos x - \sqrt{3}\sin x) \Leftrightarrow (\sqrt{3}\sin x - \cos x)(\sqrt{3}\sin x - \cos x + 3) = 0.$$

$$\bullet \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \sqrt{3}\sin x - \cos x + 3 = 0: \text{ vô nghiệm do } 3^2 < (\sqrt{3})^2 + 1^2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 51. Giải phương trình $\sqrt{2}(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{2}(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2} = 4(\sin x - 1) - \sqrt{2}\cos 2x \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2} = 4(\sin x - 1) - \sqrt{2}(1 - 2\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + (2\sqrt{2} - 2)\sin x - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 52. Giải phương trình $\sqrt{2} \cos 3x + 2 \sin^2 x = 1 + \sin 2x$.

Lời giải

Phương trình

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos 3x = 1 - 2 \sin^2 x + \sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos 3x = \cos 2x + \sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos 3x = \sqrt{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x = -\left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 53. Giải phương trình $2 \sin^2 x + \sin 2x = 2\sqrt{2} \sin x \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow 2 \sin x (\sin x + \cos x) = 2 \sin x (\sin 3x + \cos 3x)$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x [(\sin x + \cos x) - (\sin 3x + \cos 3x)] = 0.$$

• $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

• $(\sin x + \cos x) - (\sin 3x + \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \sin 3x + \cos 3x = \sin x + \cos x$

$$\Leftrightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k\pi$; $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 54. Giải phương trình $2\sqrt{2} \cos \left(\frac{5\pi}{12} - x \right) \sin x = 1$.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot 2 \cos \left(\frac{5\pi}{12} - x \right) \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \left[\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \left(2x - \frac{5\pi}{12} \right) \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \left(2x - \frac{5\pi}{12} \right) \right] = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{5\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{5\pi}{12} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{5\pi}{12} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{5\pi}{12} = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ 2x - \frac{5\pi}{12} = \pi + \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 55. Giải phương trình $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x + (\sin 3x - 3\sin x) + \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow -2\sin x + \sin 3x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x - \sin x + \cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x + \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)[2(\cos x + \sin x)\sin x + 1] = 0.$$

$$\bullet \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet 2(\cos x + \sin x)\sin x + 1 \Leftrightarrow 3\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0: \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 56. Giải phương trình $\frac{\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x}{\sin^2 x - 3\cos^2 x} = 1$.

Lời giải

Điều kiện: $\sin^2 x - 3\cos^2 x \neq 0$. Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sin^2 x - 3\cos^2 x \Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^2 x - 3\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{3})\sin^2 x - 2\sin x \cos x - (\sqrt{3} + 3)\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{3})\tan^2 x - 2\tan x - (\sqrt{3} + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 57. Giải phương trình $\frac{2\cos 2x - \sin 2x - 1}{\sin x + \cos x} - 1 = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin x + \cos x$.

Lời giải

Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 0$.

Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x - (1 + \sin 2x)}{\sin x + \cos x} - 1 = 2\left[\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x\right] + \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow [2(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)] - 1 = (\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x) + \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow -1 - 4\sin x = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x \Leftrightarrow -2\sin^2 x - 4\sin x = \sqrt{3} \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(\sqrt{3} \cos x + \sin x + 2) = 0.$$

$$\bullet \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \sqrt{3} \cos x + \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi.$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình } x = k\pi; x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 58. Giải phương trình $\cot \frac{x}{2} - \frac{1 + \cos 3x}{\sin 2x - \sin x} = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right).$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin \frac{x}{2} \neq 0 \\ \sin 2x - \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x - \sin x \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cot \frac{x}{2} &= \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos x + 1}{\sin x}. \text{ Suy ra } \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{1 + \cos 3x}{\sin 2x - \sin x} \\ &= \frac{\cos x + 1}{\sin x} - \frac{1 + \cos 3x}{\sin 2x - \sin x} = \frac{(\cos x + 1)(2 \cos x - 1) - (1 + \cos 3x)}{\sin 2x - \sin x} \\ &= \frac{2 \cos^2 x + \cos x - 2 - \cos 3x}{\sin 2x - \sin x} = \frac{(2 \cos^2 x - 2) + (\cos x - \cos 3x)}{\sin 2x - \sin x} \\ &= \frac{-2 \sin^2 x + 2 \sin 2x \sin x}{\sin 2x - \sin x} = \frac{2 \sin x (\sin 2x - \sin x)}{\sin 2x - \sin x} = 2 \sin x. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó phương trình } \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} - k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases},$$

$$(k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình } x = -\frac{\pi}{6} - k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 59. Giải phương trình $\sin^2 x + \frac{1 + \sin x}{\cos x} - \frac{1}{2} \sin 2x = \cos x.$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \cos x \neq 0.$$

$$\text{Với điều kiện trên phương trình } \Leftrightarrow \sin^2 x \cos x + 1 + \sin x - \sin x \cos^2 x = \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x \cos x + (1 - \cos^2 x) + \sin x(1 - \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x(\cos x + 1 + \sin x) = 0.$$

$$\bullet \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \cos x + 1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 60. Giải phương trình $7 \tan x + \cot x = 2\left(3\sqrt{3} + \frac{1}{\sin 2x}\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow 7 \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2\left(3\sqrt{3} + \frac{1}{\sin 2x}\right) \Leftrightarrow 14 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 6\sqrt{3} \sin 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow 12 \sin^2 x = 6\sqrt{3} \sin 2x \Leftrightarrow 12 \sin x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0.$$

$$\bullet \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 61. Giải phương trình $(\tan x \cot 2x - 1) \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin x \cos 2x}{\cos x \sin 2x} - 1\right) \cos 4x = -\frac{1}{2} \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x}{\cos x \sin 2x}\right) \cos 4x = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-\sin x}{\cos x \sin 2x}\right) \cos 4x = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \cos^2 2x}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{2 \cos^2 x}\right) \cos 4x = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \cos^2 2x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos^2 2x - 1) = \cos^2 x \left(\frac{1 + \cos^2 2x}{2}\right) \Leftrightarrow (2 \cos^2 2x - 1) = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \left(\frac{1 + \cos^2 2x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 2x - 7 \cos^2 2x + \cos 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow (\cos 2x - 1)(\cos^2 2x - 6 \cos 2x - 5) = 0.$$

$$\bullet \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \cos^2 2x - 6 \cos 2x - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 3 + \sqrt{14} \\ \cos 2x = 3 - \sqrt{14} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 3 - \sqrt{14} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \arccos(3 - \sqrt{14}) + k\pi$$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(3 - \sqrt{14}) + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 62. Giải phương trình $\frac{\tan x \cos 3x + 2 \cos 2x - 1}{1 - 2 \sin x} = \sqrt{3}(\sin 2x + \cos x)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sin x \cos 3x + 2 \cos 2x \cos x - \cos x}{\cos x - \sin 2x} = \sqrt{3}(\sin 2x + \cos x)$

$\Leftrightarrow \sin x \cos 3x + \cos 3x + \cos x - \cos x = \sqrt{3}(\sin 2x + \cos x)(\cos x - \sin 2x)$

$\Leftrightarrow \sin x \cos 3x + \cos 3x = \sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 2x) \Leftrightarrow \cos 3x(\sin x + 1) = \sqrt{3} \cos^2 x(1 - 4 \sin^2 x)$

$\Leftrightarrow \cos 3x(\sin x + 1) = \sqrt{3} \cos^2 x(4 \cos^2 x - 3) \Leftrightarrow \cos 3x(\sin x + 1) = \sqrt{3} \cos x(4 \cos^3 x - 3 \cos x)$

$\Leftrightarrow \cos 3x(\sin x + 1) = \sqrt{3} \cos x \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x(\sin x - \sqrt{3} \cos x + 1) = 0$.

• $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$.

• $\sin x - \sqrt{3} \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 63. Giải phương trình $(\sin 2x - \cos 2x) \tan x + \frac{\sin 3x}{\cos x} = \sin x + \cos x$.

Lời giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow \frac{(\sin 2x - \cos 2x) \sin x + \sin 3x}{\cos x} = \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow \frac{(\sin 2x \sin x - \cos 2x \sin x) + \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x}{\cos x} = \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x(\sin x + \cos x)}{\cos x} = \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 2 \sin x(\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \sin x - 1) = 0$.

• $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

• $2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 64. Giải phương trình $\tan^2 3x \tan 5x + 2 \tan 3x - \tan 5x = 0$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos 5x \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Với điều kiện trên phương trình} \Leftrightarrow \tan^2 3x \tan 5x + \tan 3x - (\tan 5x - \tan 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan 3x (\tan 3x \tan 5x + 1) - (\tan 5x - \tan 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x} \frac{\sin 5x}{\cos 5x} + 1 \right) - \left(\frac{\sin 5x}{\cos 5x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \frac{\cos 2x}{\cos 3x \cos 5x} - \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos 5x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x \cos 2x - \sin 2x \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 65. Giải phương trình $\sin^2 x (1 + \tan x) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \cos x \neq 0.$$

$$\text{Với điều kiện trên phương trình} \Leftrightarrow \sin^2 x \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x} \right) = 3 \sin x \cos x - 3 \sin^2 x + 3$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \right) = 3 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \right) = 3 \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\sin x + \cos x) = 3 \cos^2 x (\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) (\sin^2 x - 3 \cos^2 x) = 0.$$

$$\bullet \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \left(\pm \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 66. Giải phương trình $\sin \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) \cot 3x + \sin (\pi + 2x) - \sqrt{2} \cos 5x = 0$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \sin 3x \neq 0.$$

$$\text{Với điều kiện trên phương trình} \Leftrightarrow \cos 2x \frac{\cos 3x}{\sin 3x} - \sin 2x - \sqrt{2} \cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x}{\sin 3x} - \sqrt{2} \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 5x}{\sin 3x} - \sqrt{2} \cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x - \sqrt{2} \cos 5x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x (1 - \sqrt{2} \sin 3x) = 0.$$

$$\bullet \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet 1 - \sqrt{2} \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình

$$x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}; x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 67. Giải phương trình $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + 2 \tan 2x + \cos 2x = 0$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0.$$

Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + 2 \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow -(\sin x + \cos x)^2 + 2 \sin 2x + \cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1 + \sin 2x) + 2 \sin 2x + 1 - \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x (\sin 2x - 1) = 0.$$

$$\bullet \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 68. Giải phương trình $2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin^2 x - \tan x$.

Lời giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow 1 - \cos \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2 \sin^2 x \cos x - \sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = \frac{\sin x (2 \sin x \cos x - 1)}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin 2x = \tan x (\sin 2x - 1) \Leftrightarrow (1 - \sin 2x)(1 + \tan x) = 0.$$

$$\bullet 1 - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet 1 + \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 69. Giải phương trình $\cos 3x + \frac{1}{\cos x} = 1 + 4 \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right)$.

Lời giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow \cos 3x + \frac{1}{\cos x} = 1 + 2 \left(\cos 2x - \cos \frac{4\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \cos 3x + \frac{1}{\cos x} = 2 \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos x (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 1 = 2 \cos x (2 \cos^2 x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^4 x - 4 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(4 \cos^3 x - 3 \cos x - 1) = 0.$$

$$\bullet \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet 4 \cos^3 x - 3 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow 3x = k2\pi \Leftrightarrow x = k \frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = k2\pi; x = k \frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 70. Giải phương trình $16(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3 \sin 4x \left[2 + \sqrt{2}(1 + \tan x \tan 2x) \right] = 10.$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}.$$

Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow 16(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x) - 3 \sin 4x \left[2 + \sqrt{2} \frac{(\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x)}{\cos x \cos 2x} \right] = 10$$

$$\Leftrightarrow 6 - 12 \sin^2 2x - 3 \sin 4x \left[2 + \sqrt{2} \frac{1}{\cos 2x} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(1 - 2 \sin^2 2x) - 6 \sin 4x - 6\sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x - \sin 4x = \sqrt{2} \sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 4x \right) = \sqrt{2} \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{4} - 4x \right) = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 4x = 2x + k2\pi \\ \frac{\pi}{4} - 4x = \pi - 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{24} - k \frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{3\pi}{8} - k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{24} - k \frac{\pi}{3}; x = -\frac{3\pi}{8} - k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 71. Giải phương trình $(\tan x \cot 2x - 1) \sin \left(4x + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x).$

Lời giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0.$

$$\text{Với điều kiện trên phương trình} \Leftrightarrow \left(\frac{\sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x}{\cos x \sin 2x} \right) \cos 4x = -\frac{1}{2}(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-\sin x}{\cos x \sin 2x} \right) \cos 4x = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{2 \cos^2 x} \right) \cos 4x = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos^2 x \left(\frac{1 + \cos^2 2x}{2} \right) \Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - 1 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos^2 2x}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 2x - 7 \cos^2 2x + \cos 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = 3 + \sqrt{14} \\ \cos 2x = 3 - \sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = 3 - \sqrt{14} \end{cases}.$$

• $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

• $\cos 2x = 3 - \sqrt{14} \Leftrightarrow 2x = \pm \arccos(3 - \sqrt{14}) + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \arccos(3 - \sqrt{14}) + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(3 - \sqrt{14}) + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 72. Giải phương trình $\frac{(\sqrt{3}-2)\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4\sin^2\frac{x}{2} - 1} = 1.$

Lời giải

Điều kiện: $\sin^2\frac{x}{2} \neq \frac{1}{4}.$

Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{3}-2)\cos x - 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 4\sin^2\frac{x}{2} - 1$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}-2)\cos x - 1 + \sin x = 2(1 - \cos x) - 1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 73. Giải phương trình $7\left(\frac{\sin 3x - \cos 3x}{2\sin 2x - 1} - \cos x\right) = 4 - \cos 2x.$

Lời giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq \frac{1}{2}.$ Với điều kiện trên phương trình

$$\Leftrightarrow 7\left(\frac{3\sin x - 4\sin^3 x - 4\cos^3 x + 3\cos x}{2\sin 2x - 1} - \cos x\right) = 4 - (1 - 2\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 7\left(\frac{3(\sin x + \cos x) - 4(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}{2\sin 2x - 1} - \cos x\right) = 2\sin^2 x + 3$$

$$\Leftrightarrow 7\left(\frac{(\sin x + \cos x)(3 - 4(1 - \sin x \cos x))}{2\sin 2x - 1} - \cos x\right) = 2\sin^2 x + 3$$

$$\Leftrightarrow 7\left(\frac{(\sin x + \cos x)(2\sin 2x - 1)}{2\sin 2x - 1} - \cos x\right) = 2\sin^2 x + 3 \Leftrightarrow 7\sin x = 2\sin^2 x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 74. Giải phương trình $\frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{\sqrt{2} \tan x} = 2 \cos x$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin x + \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Với điều kiện trên phương trình} \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x}{\sqrt{2} \sin x} = 2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin x \sin 2x + \cos x (\sin x + \cos x) = 2\sqrt{2} \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x (\sin x + \cos x) = 2\sqrt{2} \sin x \cos^2 x \Leftrightarrow \cos x (\sin x + \cos x - 2\sqrt{2} \sin x \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x - 2\sqrt{2} \sin x \cos x = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \text{ Điều kiện: } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra } t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \text{ nên } 2 \sin x \cos x = t^2 - 1.$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành } t - \sqrt{2}(t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \text{ hoặc } t = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\bullet t = \sqrt{2}, \text{ suy ra } \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$$

$$\bullet t = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ suy ra } \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình

$$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi; x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 75. Giải phương trình $\frac{3(\tan x + \sin x)}{\tan x - \sin x} - 2 \cos x(1 + \cos x) = 2 \sin^2 x$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x - \sin x \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Với điều kiện trên phương trình} \Leftrightarrow \frac{3(1 + \cos x)}{1 - \cos x} - 2 \cos x(1 + \cos x) = 2 \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 3(1 + \cos x) - 2 \cos x(1 + \cos x)(1 - \cos x) = 2 \sin^2 x(1 - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x) \left[3 - 2 \cos x(1 - \cos x) - 2(1 - \cos x)^2 \right] = 0 \Leftrightarrow (1 + \cos x)(2 \cos x + 1) = 0.$$

$$\bullet 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet 2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 76. Cho phương trình $(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$.

Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm trên $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow (\cos x + 1)(2\cos^2 x - 1 - m \cos x) = m(1 - \cos^2 x) \\ &\Leftrightarrow (\cos x + 1)[2\cos^2 x - 1 - m \cos x - m(1 - \cos x)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos x + 1)[2\cos^2 x - 1 - m] = 0. \end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán tương đương $2\cos^2 x - 1 - m = 0$ có đúng hai nghiệm trên $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Đặt $t = \cos x$. Khi $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ thì $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Nhận xét: Với mỗi t trên $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ ta chỉ tìm được duy nhất một x trên $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Do đó bài toán $\Leftrightarrow f(t) = 2t^2 - 1 - m = 0$ có đúng hai nghiệm trên $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 2.f\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ 2.f(1) \geq 0 \\ -\frac{1}{2} < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(1+m) > 0 \\ 2\left(-\frac{1}{2} - m\right) \geq 0 \\ 2(1-m) \geq 0 \\ -\frac{1}{2} < 0 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq -\frac{1}{2}.$$

Vậy $-1 < m \leq -\frac{1}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 77. Tìm m để phương trình $(m+2)\sin x + m \cos x = 2$ có nghiệm.

Lời giải

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow (m+2)^2 + m^2 \geq 2^2 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 0 \end{cases}.$$

Vậy $m \leq -2$ hoặc $m \geq 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 78. Tìm m để phương trình $(3m-2)\sin^2 x - (5m-2)\sin 2x + 3(2m+1)\cos^2 x = 0$ vô nghiệm.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow (3m-2)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) - (5m-2)\sin 2x + 3(2m+1)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (4-10m)\sin 2x + (3m+5)\cos 2x + (9m+1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình có nghiệm} &\Leftrightarrow (4-10m)^2 + (3m+5)^2 \geq (9m+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 28m^2 - 68m + 40 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1 \text{ hoặc } m \geq \frac{10}{7}. \end{aligned}$$

Vậy $m \leq 1$ hoặc $m \geq \frac{10}{7}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 79. Cho phương trình $m(\sin x + \cos x + 1) = 1 + \sin 2x$.

Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Suy ra $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ nên $2 \sin x \cos x = t^2 - 1$.

Khi đó phương trình trở thành $m(t+1) = 1 + (t^2 - 1) \Leftrightarrow t^2 - mt - m = 0$.

Nếu $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ thì $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$. Do đó $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ suy ra $1 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(t) = t^2 - mt - m = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $\begin{cases} 1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \sqrt{2} \\ t_1 \leq 1 \leq t_2 \leq \sqrt{2} \\ 1 \leq t_1 \leq \sqrt{2} \leq t_2 \end{cases}$.

Trường hợp: $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \\ f(\sqrt{2}) \geq 0 \\ 1 \leq -\frac{b}{2a} \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m \geq 0 \\ 1 - 2m \geq 0 \\ 2 - (\sqrt{2} + 1)m \geq 0 \\ 1 \leq \frac{m}{2} \leq \sqrt{2} \end{cases} : \text{vô nghiệm.}$

Trường hợp: $t_1 \leq 1 \leq t_2 \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) \leq 0 \\ f(\sqrt{2}) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m > 0 \\ 1 - 2m \leq 0 \\ 2 - (\sqrt{2} + 1)m \geq 0 \\ \frac{m}{2} \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \vee m > 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq \frac{2}{\sqrt{2} + 1} \\ m \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{2}{\sqrt{2} + 1}$.

Trường hợp: $1 \leq t_1 \leq \sqrt{2} \leq t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) \geq 0 \\ f(\sqrt{2}) \leq 0 \\ 1 \leq -\frac{b}{2a} \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m > 0 \\ 1 - 2m \geq 0 \\ 2 - (\sqrt{2} + 1)m \leq 0 \\ 1 \leq \frac{m}{2} \end{cases} : \text{vô nghiệm.}$

Vậy $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{2}{\sqrt{2} + 1}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 80. Giải phương trình $\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$ và tính tổng các nghiệm trên đoạn $[2000; 2015]$ của phương trình đó.

Lời giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow \cos 2x - \tan^2 x = 1 - \cos x - (1 + \tan^2 x)$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}).$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \in [2000; 2015] \\ x = \frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2000 \leq \frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3} \leq 2015 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 954 \leq k \leq 962 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Gọi tổng các nghiệm cần tính là } S, \text{ ta có } S = \sum_{k=954}^{962} \frac{\pi}{3} (2k+1) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(1909+1925) \cdot 9}{2} = 5751\pi.$$

Bài 81. Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình

$$\sin 2x (\cos x + 3) - 2\sqrt{3} \cos^3 x - 3\sqrt{3} \cos 2x + 8(\sqrt{3} \cos x - \sin x) = 3\sqrt{3}.$$

Lời giải

Phương trình

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2 \sin x \cos^2 x + 6 \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^3 x - 6\sqrt{3} \cos^2 x + 3\sqrt{3} + 8(\sqrt{3} \cos x - \sin x) &= 3\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) + 6 \cos x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) - 8(\sin x - \sqrt{3} \cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sin x - \sqrt{3} \cos x) (2 \cos^2 x + 6 \cos x - 8) &= 0. \end{aligned}$$

$$\bullet \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } x \in (0; 2\pi) \text{ nên } 0 < \frac{\pi}{3} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{5}{3}.$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên ta chọn } k = \{0; 1\} \text{ suy ra } x = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

$$\bullet 2 \cos^2 x + 6 \cos x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = l2\pi, (l \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } x \in (0; 2\pi) \text{ nên } 0 < l2\pi < 2\pi \Leftrightarrow 0 < l < 1. \text{ Vì } l \in \mathbb{Z} \text{ nên không tồn tại giá trị của } l.$$

$$\text{Vậy có hai nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán } x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{4\pi}{3}.$$

Bài 82. Tìm nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x.$

Lời giải

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \cos 2x + 3 \sin x = 1 + 2 \sin x \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ hoặc } \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}). \text{ Do } x \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \text{ nên } \frac{\pi}{2} \leq k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq k \leq 2.$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên ta chọn } k = \{1; 2\} \text{ suy ra } x = \{\pi; 2\pi\}.$$

$$\bullet \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + m2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases}, (m, n \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } x \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \text{ nên } \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + m2\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq m \leq \frac{11}{12}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên không tồn tại giá trị của m ;

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + n2\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq n \leq \frac{7}{12}. \text{ Vì } n \in \mathbb{Z} \text{ nên ta chọn } n = 0 \text{ suy ra } x = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Vậy có ba nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán } x = \frac{5\pi}{6}; x = \pi; x = 2\pi.$$

Bài 83. Tìm nghiệm thuộc nửa khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \pi\right]$ của phương trình

$$\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x \sin^2 x + \sin x = 0.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } &\Leftrightarrow 1 - 4\tan^2 x - 3\tan^2 x + \tan x(1 + \tan^2 x) = 0 \Leftrightarrow 3\tan^3 x + 3\tan^2 x - \tan x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\tan x + 1)(3\tan^2 x - 1) = 0. \end{aligned}$$

$$\bullet \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } x \in \left(\frac{\pi}{6}; \pi\right] \text{ nên } \frac{\pi}{6} < -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \pi \Leftrightarrow \frac{5}{12} < k \leq \frac{5}{4}.$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên ta chọn } k = 1 \text{ suy ra } x = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\bullet 3\tan^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + m\pi \text{ hoặc}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + n\pi, (m, n \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } x \in \left(\frac{\pi}{6}; \pi\right] \text{ nên } \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} + m\pi \leq \pi \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{5}{6}. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên không tồn tại giá trị của } m;$$

$$\frac{\pi}{6} < -\frac{\pi}{6} + n\pi \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{3} < n \leq \frac{7}{6}. \text{ Vì } n \in \mathbb{Z} \text{ nên ta chọn } n = 1 \text{ suy ra } x = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Vậy có hai nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán } x = \frac{3\pi}{4}; x = \frac{5\pi}{6}.$$

Bài 84. Tìm nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[-\pi; \frac{2\pi}{3}\right)$ của phương trình $2\tan x + \cot 2x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0. \text{ Với điều kiện trên phương trình}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow 4\sin^2 x + \cos 2x = 2\sin^2 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x + (1 - 2\sin^2 x) = 8\sin^2 x \cos^2 x + 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x(1 - 4\cos^2 x) = 0.$$

$$\bullet \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0: \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

$$\bullet 1 - 4\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + l\pi \end{cases}, (k, l \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } x \in \left[-\pi; \frac{2\pi}{3}\right) \text{ nên } -\pi \leq \frac{\pi}{3} + k\pi < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq k < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên ta chọn } k = \{-1; 0\} \text{ suy ra } x = \left\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}.$$

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{3} + l\pi < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq l < 1. \text{ Vì } l \in \mathbb{Z} \text{ nên ta chọn } l = 0 \text{ suy ra } x = -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Vậy có ba nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán } x = -\frac{2\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{3}.$$

BÀI 3. BÀI TẬP TRONG ĐỀ ĐH – CĐ CÁC NĂM TRƯỚC**Dạng 1. Công thức lượng giác**

- Bài 1.** Tính giá trị của biểu thức $P = (1 - 3\cos 2\alpha)(2 + 3\cos 2\alpha)$ biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.
THPT Quốc gia 2015 ĐS: $P = 14/9$
- Bài 2.** Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ biết $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$.
THPT Quốc gia 2015 – Đề dự bị ĐS: $P = 7/9$
- Bài 3.** Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.
THPT Quốc gia 2015 – Đề minh họa ĐS: $A = -12/25$
- Bài 4.** Cho góc α thỏa mãn $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\cot \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$.
THPT Quốc gia 2015 – Đề minh họa ĐS: $A = -2\sqrt{5}/9$
- Bài 5.** Cho $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.
Thi thử THPTQG 2015 – THPT Thủ Đức ĐS: $A = -49/50$
- Bài 6.** Cho $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.
Thi thử THPTQG 2015 – SGDDT Cần Thơ ĐS: $A = (3 - 4\sqrt{3})/10$
- Bài 7.** Cho $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$, $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$. Tính giá trị của biểu thức $A = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$.
Thi thử THPTQG 2015 – THPT Hai Bà Trưng, Huế ĐS: $A = -2\sqrt{2}$
- Bài 8.** Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha$.
Thi thử THPTQG 2015 – THPT Hùng Vương, Phú Thọ ĐS: $A = -\sqrt{3}/2$
- Bài 9.** Biết rằng số thực $\alpha \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn $\sin 2\alpha = \frac{7}{9}$.
 Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha + 4} + \sqrt{\sin^2 \alpha - 4\sin \alpha + 4}$.
Thi thử THPTQG 2015 – THPT chuyên ĐH Vinh lần 3 ĐS: $A = 16/3$
- Bài 10.** Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $\sin \alpha - \cos \alpha$.
Thi thử THPTQG 2015 – SGDDT Quảng Nam ĐS: $A = -\sqrt{3}/2$
- Bài 11.** Cho $0 < x < \frac{\pi}{4}$ và $x - y = \frac{3\pi}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = (1 - \tan x)(1 + \tan y)$.
Thi thử THPTQG 2015 – SGDDT Vĩnh Long ĐS: $A = 2$
- Bài 12.** Cho $\tan \alpha = -2$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{2\sin \alpha + 3\cos \alpha}{5\cos \alpha - 7\sin \alpha}$.
Thi thử THPTQG 2015 – THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 2 ĐS: $A = -1/19$

Dạng 2. Đưa về phương trình tích

Bài 13. Giải phương trình: $\sin 2x = \sqrt{3} \sin x$

ĐH Mở TpHCM

$$\underline{DS}: x = k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 14. Giải phương trình: $2 \tan x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$

ĐH Ngoại Thương - 97

$$\underline{DS}: x = \pi/3 + k\pi$$

Bài 15. Giải phương trình: $(2 \sin x - 1)(2 \sin 2x + 1) = 3 - 4 \cos^2 x$

THKT Y Tế - 97

$$\underline{DS}: x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 16. Giải phương trình: $\tan x + \cot x = 4$

ĐH An Ninh - 97

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Bài 17. Giải phương trình: $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = \cos 2x$

ĐH DL NN TH TpHCM - 98

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi$$

Bài 18. Giải phương trình: $\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin 2x - 3 = 0$

ĐH Quốc gia TpHCM khối A - 99

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi$$

Bài 19. Giải phương trình: $(\cos x + 1)(\cos 2x - 2 \cos x) = -2 \sin^2 x$

ĐH Quốc gia TpHCM khối D - 99

$$\underline{DS}: x = \pi + k2\pi$$

Bài 20. Giải phương trình: $\sin 5x + \sin 9x + 2 \sin^2 x = 1$

ĐH DL NN TH TpHCM - 99

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \vee x = \frac{5\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}$$

Bài 21. Giải phương trình: $\frac{\sin x \cdot \cot 5x}{\cos 9x} = 1$

ĐH Huế - 99

$$\underline{DS}: x = \pi/20 + k\pi/10$$

Bài 22. Giải phương trình: $\sin 2x(\cot x + \tan 2x) = 4 \cos^2 x$

ĐH Mỏ - Địa chất HN - 00

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$$

Bài 23. Giải phương trình: $(2 \sin x + 1)(3 \cos 4x + 2 \sin x - 4) + 4 \cos^2 x = 3$

ĐH Hàng Hải - 00

$$\underline{DS}: x = k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 24. Giải phương trình: $\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{\cos x}$

ĐH Đà Nẵng - 01

$$\underline{DS}: x = \pi + k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 25. Giải phương trình: $\sin 2x \cdot \sin x = \sqrt{3} \sin 2x \cdot \cos x$

ĐH DL Duy Tân - 01

$$\underline{DS}: x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Bài 26. Giải phương trình: $3\sin x + 2\cos x = 2 + 3\tan x$

HV Quân Y - 01

$$\underline{DS}: x = k2\pi \vee x = -\arctan \frac{2}{3} + k\pi$$

Bài 27. Tìm nghiệm thuộc đoạn $[0;14]$ của phương trình: $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

ĐH Khối D - 02

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{2} \vee x = \frac{7\pi}{2}$$

Bài 28. Giải phương trình: $\tan x + \cos x - \cos^2 x = \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2} \right)$

Dự bị ĐH Khối B - 02

$$\underline{DS}: x = k2\pi$$

Bài 29. Giải phương trình: $\tan^4 x + 1 = \frac{(2 - \sin^2 2x)\sin 3x}{\cos^4 x}$

Dự bị ĐH Khối B - 02

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$$

Bài 30. Giải phương trình: $3 - \tan x (\tan x + 2\sin x) + 6\cos x = 0$

Dự bị ĐH Khối A - 03

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Bài 31. Giải phương trình: $\frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$

Dự bị ĐH Khối D - 03

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$$

Bài 32. Giải phương trình: $2\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$

Dự bị ĐH Khối B - 04

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 33. Giải phương trình: $(2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x) = \sin 2x - \cos x$

CD Điều Dưỡng - 04

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 34. Giải phương trình: $4\cos^2 x - 2\cos^2 2x = 1 + \cos 4x$

CD SP Ninh Bình - 04

$$\underline{DS}: x = \pi + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$$

Bài 35. Giải phương trình: $2\sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 2\sin^2 x - \tan x$

CD SP Bắc Ninh - 04

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Bài 36. Giải phương trình: $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 3) = 4\sin^2 x - 1$

CD GTVT III - 04

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Bài 37. Giải phương trình: $\cos^2 x \cdot \sin^4 x + \cos 2x = 2\cos x (\sin x + \cos x) - 1$

CD KTKH Đà Nẵng - 04

$$\underline{DS}: x = k\pi/2$$

Bài 38. Giải phương trình: $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

ĐH Khối D - 04

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 39. Giải phương trình: $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$

Dự bị ĐH Khối D - 05

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Bài 40. Giải phương trình: $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

Dự bị ĐH Khối D - 05

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Bài 41. Giải phương trình: $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) = 4$

ĐH Khối B - 06

ĐS: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

Bài 42. Giải phương trình: $(2\sin^2 x - 1)\tan^2 2x + 3(2\cos^2 x - 1) = 0$

Dự bị ĐH Khối B - 06

ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

Bài 43. Giải phương trình: $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

Dự bị ĐH Khối B - 06

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$

Bài 44. Giải phương trình: $\cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = 1$

Dự bị ĐH Khối D - 06

ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

Bài 45. Giải phương trình: $\frac{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin 2x} = \frac{1 + \sin 2x}{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

CD Xây Dựng số 3 - 06

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Bài 46. Giải phương trình: $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 2x$

CD Tài Chính Hải Quan - 07

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k\frac{\pi}{5}$

Bài 47. Giải phương trình: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

CD Công Nghệ Thực Phẩm - 07

ĐS: $x = -\pi/4 + k\pi$

Bài 48. Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos x + \tan x = 0$

Hệ CD - ĐH Sài Gòn Khối B - 07

ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pi + k2\pi$

Bài 49. Giải phương trình: $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

Dự bị ĐH Khối D - 07

ĐS: $x = k\pi \vee x = -\pi/4 + k\pi$

Bài 50. Giải phương trình: $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

CDSP TW - 07

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$

Bài 51. Giải phương trình: $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

ĐH Khối D - 08

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

Bài 52. Giải phương trình: $3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4\sin x \cos^2 \frac{x}{2}$

Dự bị ĐH Khối B - 08

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 53. Giải phương trình: $\tan x = \cot x + 4\cos^2 2x$

Dự bị ĐH Khối A - 08

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

Bài 54. Giải phương trình: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dự bị ĐH Khối A - 08

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 55. Giải phương trình: $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Dự bị ĐH Khối B - 08

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Bài 56. Giải phương trình: $\frac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Dự bị ĐH Khối D - 08

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 57. Giải phương trình: $(1 + 2\sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$

CD Khối A,B,D - 09

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Bài 58. Giải phương trình: $(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$

ĐH Khối B - 10

$$\underline{DS}: x = \pi/4 + k\pi/2$$

Bài 59. Giải phương trình: $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

ĐH Khối D - 10

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 60. Giải phương trình: $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x$

ĐH Khối A - 11

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

Bài 61. Giải phương trình: $\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$

ĐH Khối B - 11

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$$

Bài 62. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$

ĐH Khối D - 11

$$\underline{DS}: x = \pi/3 + k2\pi$$

Bài 63. Giải phương trình: $2 \cos 2x + \sin x = \sin 3x$.

CD Khối A, A1, B, D - 12

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Bài 64. Giải phương trình: $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ĐH Khối A, A1 - 13

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 65. Giải phương trình: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$

CD Khối A, A1, B, D - 13

$$\underline{DS}: x = \pi + k2\pi \vee x = k\frac{2\pi}{3}$$

Bài 66. Giải phương trình: $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$

ĐH Khối A, A1 - 14

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 67. Giải phương trình: $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$

ĐH Khối B - 14

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

Dạng 3. Biến đổi tổng thành tích - tích thành tổng



Bài 68. Giải phương trình: $\sin(2x + 50\pi) + \cos\left(3x + \frac{51\pi}{2}\right) = \sin x$

CDSP Thái Bình Khối D - 99

$$\underline{DS}: x = k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 69. Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

ĐH Ngoại Thương - 99

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 70. Giải phương trình: $1 + \cos 2x + \cos 3x = 2\cos x \cdot \cos 2x$

ĐH Đà Nẵng - 99

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 71. Giải phương trình: $3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \cdot \sin 2x$

ĐH Tây Nguyên - 99

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + k2\pi$$

Bài 72. Giải phương trình: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$

ĐH Lâm Nghiệp - 99

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5}$$

Bài 73. Giải phương trình: $\sin x + \cos 2x - \cos 4x = 0$

ĐH Mỹ Thuật CN - 99

$$\underline{DS}: x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$$

Bài 74. Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

PV Ngân Hàng TpHCM - 01

$$\underline{DS}: x = k\frac{\pi}{2} \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 75. Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$

ĐH Ngoại Thương - 01

$$\underline{DS}: x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 76. Giải phương trình: $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

ĐH Nông Lâm TpHCM - 01

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pi + k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 77. Giải phương trình: $2\sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos x = \sin 4x \cdot \cos x$

Dự bị ĐH Khối D - 04

$$\underline{DS}: x = k\pi/3$$

Bài 78. Giải phương trình: $\sin 4x \cdot \sin 2x + \sin 9x \cdot \sin 3x = \cos^2 x$

CD Lương Thực Thực Phẩm - 04

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}$$

Bài 79. Giải phương trình: $\cos x \cdot \cos 7x = \cos 3x \cdot \cos 5x$

CD KT Kỹ Thuật 1 - 04

$$\underline{DS}: x = k\pi/4$$

Bài 80. Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

ĐH Khối B - 05

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 81. Giải phương trình: $\cos x + \cos 3x = \sin 4x$

CD Kinh Tế CN - 06

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Bài 82. Giải phương trình: $\sin \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2} + \sin 2x \cdot \cos 7x = 0$

CD Bán công Hoa Sen - 06

$$\underline{DS}: x = k\frac{\pi}{6}$$

Bài 83. Giải phương trình: $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

ĐH Khối D - 06

$$\underline{DS}: x = k\pi \vee x = k\frac{2\pi}{3}$$

Bài 84. Giải phương trình: $\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$

Dự bị ĐH Khối B - 07

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$$

Bài 85. Giải phương trình: $2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \cos x = 1$

Dự bị ĐH Khối D - 07

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Bài 86. Giải phương trình: $\sin 2x \cdot \sin x + \cos 5x \cdot \cos 2x = \frac{1 + \cos 8x}{2}$

CD Kinh Tế TpHCM - 07

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \vee x = k2\pi \vee x = k\frac{2\pi}{7}$$

Bài 87. Giải phương trình: $\cos 3x \cdot \tan 5x = \sin 7x$

CD Kinh Tế Công Nghệ TpHCM - 07

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10} \vee x = k\pi$$

Bài 88. Giải phương trình: $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

ĐH Khối B - 07

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$$

Bài 89. Giải phương trình: $2\cos 2x + \sin x = \sin 3x$.

CD Khối A, A1, B, D - 12

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Bài 90. Giải phương trình: $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$

ĐH Khối D - 13

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

Dạng 4. Phương trình bậc 2 - bậc 3



Bài 91. Giải phương trình: $\frac{\cos x(2 \sin x + 3\sqrt{2}) - 2 \cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$

ĐH Quốc gia TpHCM khối D - 96

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

Bài 92. Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x = 2$

HV Hàng không - 97

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Bài 93. Giải phương trình: $4 \cos^5 x \cdot \sin x - 4 \sin^5 x \cdot \cos x = \sin^2 4x + m$ (1)

a. Biết rằng $x = \pi$ là một nghiệm của (1). Hãy giải phương trình (1) trong trường hợp đó.

b. Cho biết $x = -\frac{\pi}{8}$ là một nghiệm của (1). Hãy tìm tất cả các nghiệm của phương trình (1)

thỏa mãn: $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$

ĐH QG TpHCM - 97

ĐS: a. $x = k\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$; b. $x = \frac{3\pi}{8}$

Bài 94. Giải phương trình: $\sin^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin x$

ĐH Quốc gia TpHCM khối A - 98. ĐHSPT Hải Phòng - 01

ĐS: $x = -\pi/4 + k\pi$

Bài 95. Giải phương trình: $\cos x \cdot \cos 4x + \cos 2x \cdot \cos 3x = 0$

ĐH Ngoại Thương - 98

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} + k\pi$

Bài 96. Giải phương trình: $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$

ĐH Hàng Hải - 98

ĐS: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \vee x = \pm \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$

Bài 97. Giải phương trình: $3 \cos^4 x - 4 \cos^2 x \cdot \sin^2 x + \sin^4 x = 0$

ĐH QG - 98

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

Bài 98. Giải phương trình: $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

CĐBC Marketing - 99

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Bài 99. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình: $1 - 5 \sin x + 2 \cos^2 x = 0$ thỏa điều kiện $\cos x \geq 0$.

ĐH Cảnh sát Nhân Dân - 99

ĐS: $x = \pi/6 + k2\pi$

Bài 100. Giải phương trình: $\cos^2 x - 2 \sin x + \frac{1}{4} = 0$

ĐHDL Duy Tân - 99

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Bài 101. Giải phương trình: $\cos 4x + 5 \sin 2x - 3 = 0$

CĐBC Marketing - 99

ĐS: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

Bài 102. Giải phương trình: $\frac{4}{1+\tan^2 x} + 13\cos x + 9 = 0$

CĐSP Quảng Ninh - 99

ĐS: $x = \pi + k2\pi$

Bài 103. Giải phương trình: $3(\tan x + \cot x) = 2(2 + \sin 2x)$

ĐH Cần Thơ - 99

ĐS: $x = \pi/4 + k\pi$

Bài 104. Giải phương trình: $\sin 3x + \sin 2x = 5\sin x$

ĐHDL Hồng Đức - 99

ĐS: $x = k\pi$

Bài 105. Giải phương trình: $4(\sin 3x - \cos 2x) = 5(\sin x - 1)$

ĐH Luật HN - 99

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = -\arcsin \frac{1}{4} + k2\pi \vee x = \pi + \arcsin \frac{1}{4} + k2\pi$

Bài 106. Giải phương trình: $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

ĐH Huế Khối D - 99

ĐS: $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

Bài 107. Giải phương trình: $\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$

a) Giải phương trình trên.

b) Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình thỏa mãn: $0 \leq x \leq 99$

ĐH Thái Nguyên - 99

ĐS: a. $x = \pi + k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$; b. $\frac{2209\pi}{3}$

Bài 108. Giải phương trình: $\tan 2x + \sin 2x = \frac{3}{2}\cot x$

ĐH Thủy Lợi - 99

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

Bài 109. Giải phương trình: $4\sin^2 x + 3\tan^2 x = 1$

ĐHDL Hồng Đức - 99

ĐS: $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(\sqrt{3}-1) + k\pi$

Bài 110. Giải phương trình: $\sin\left(\frac{3\pi}{5} + x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{2}\right)$

HV Quân Y - 99

ĐS: $x = \frac{2\pi}{5} + k2\pi$

Bài 111. Giải phương trình: $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = 5(\sin x + 3\cos x)$

ĐH QG - 99

ĐS: $x = \arctan 3 + k\pi$

Bài 112. Giải phương trình: $8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$

ĐHQG HN - 99

ĐS: $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi$

Bài 113. Giải phương trình: $\tan^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$

HV CN BCVT - 99

ĐS: $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Bài 114. Giải phương trình: $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

HV CN BCVT - 00

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Bài 115. Giải phương trình: $\tan^2 x + \cot^2 x + \cot^2 2x = \frac{11}{3}$

PV Ngân Hàng TpHCM - 00

ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

Bài 116. Giải phương trình: $\frac{\sin 3x}{3} = \frac{\sin 5x}{5}$

ĐH Thủy Lợi HN - 00

ĐS: $x = k\pi \vee x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi$

Bài 117. Giải phương trình: $\sin 3x + \cos 3x + 2 \cos x = 0$
HV Ngân Hàng - 00

ĐS: $x = \pm \pi/3 + k\pi \vee x = -\pi/4 + k\pi$

Bài 118. Giải phương trình: $1 + 3 \tan x = 2 \sin 2x$
ĐHQG HN Khối D - 00

ĐS: $x = -\pi/4 + k\pi$

Bài 119. Giải phương trình: $6 \sin^2 x - \sin^2 2x = 3 \cos^2 2x$
ĐHQG TpHCM khối D - 00

ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

Bài 120. Giải phương trình: $\sin \frac{x}{2} \sin x - \cos \frac{x}{2} \sin^2 x + 1 = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

ĐHSP TpHCM - 00

ĐS: $x = k\pi$

Bài 121. Giải phương trình: $4 \cos^3 2x + 6 \sin^2 x = 3$
ĐHDL Hải Phòng - 00

ĐS: $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}$

Bài 122. Giải phương trình: $4 \cos^3 x + 3\sqrt{2} \sin 2x = 8 \cos x$
ĐH SP Hà Nội - 00

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

Bài 123. Giải phương trình: $2 \cos^3 x + \sin x \cos x + 1 = 2(\sin x + \cos x)$
ĐHDL Phương Đông - 00

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Bài 124. Giải phương trình: $\frac{3(\sin x + \tan x)}{\tan x - \sin x} - 2 \cos x = 2$

ĐH Tài Chính Kế Toán HN - 00

ĐS: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

Bài 125. Giải phương trình: $2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$

ĐH Ngoại Ngữ - 00; CĐSP Nha Trang - 02

ĐS: $x = k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Bài 126. Giải phương trình: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4 \sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$

ĐH Hàng Hải - 01

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Bài 127. Giải phương trình: $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x$

HV Kỹ Thuật Quân sự - 01

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 128. Giải phương trình: $\tan x + 2\cot 2x = \sin 2x$

ĐH SP Hà Nội - 01

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Bài 129. Giải phương trình: $\frac{\cos x(\cos x + 2\sin x) + 3\sin x(\sin x + \sqrt{2})}{\sin 2x - 1} = 1$

ĐH Thủy Sản - 01

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

Bài 130. Giải phương trình: $\frac{2}{\sin^2 x} + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0$

ĐH Thương Mại - 01

$$\underline{DS}: x = -\pi/4 + k\pi$$

Bài 131. Giải phương trình: $\sin 2x + 2\tan x = 3$

ĐH Bách Khoa - 01

$$\underline{DS}: x = \pi/4 + k\pi$$

Bài 132. Giải phương trình: $\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right)$

ĐH Thủy Lợi - 01

$$\underline{DS}: x = \frac{3\pi}{5} + k2\pi \vee x = \frac{4\pi}{15} + k2\pi \vee x = \frac{14\pi}{15} + k2\pi$$

Bài 133. Tìm nghiệm thuộc $(0 ; 2\pi)$ của phương trình: $5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$

ĐH Khối A - 02

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$$

Bài 134. Giải phương trình: $\frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$

CD KTKT Hải Dương - 02

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Bài 135. Giải phương trình: $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{8\sin 2x}$

Dự bị ĐH Khối A - 02

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Bài 136. Giải phương trình: $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$

Dự bị ĐH Khối B - 03

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = k\pi$$

Bài 137. Giải phương trình: $\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

Dự bị ĐH Khối D - 03

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Bài 138. Giải phương trình: $\cos 2x + \cos x(2\tan^2 x - 1) = 2$

Dự bị ĐH Khối A - 03

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$$

Bài 139. Giải phương trình: $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

ĐH Khối B - 03

ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$

Bài 140. Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$

ĐH Khối B - 04

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Bài 141. Giải phương trình: $3\cos 2x + 4\cos^2 x - \cos 3x = 0$

CDSP Nhà Trẻ - Mẫu Giáo TW 1 - 04

ĐS: $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$

Bài 142. Giải phương trình: $\cos 3x + 2\cos 2x = 1 - 2\sin x \sin 2x$

Hệ CD – ĐH Hùng Vương - 04

ĐS: $x = \pi + k2\pi \vee x = \pm \arccos \frac{3}{4} + k2\pi$

Bài 143. Giải phương trình: $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\tan^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$

Dự bị ĐH Khối B - 05

ĐS: $x = -\pi/4 + k\pi$

Bài 144. Giải phương trình: $\sin x \cos 2x + \cos^2 x (\tan^2 x - 1) + 2\sin^3 x = 0$

Dự bị ĐH Khối B - 05

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Bài 145. Giải phương trình: $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$

ĐH Khối A - 05

ĐS: $x = k\pi/2$

Bài 146. Giải phương trình: $\frac{\cos 2x - 3\cos x + 2}{\sin x} = 0$

CDKT Y Tế - 05

ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Bài 147. Giải phương trình: $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$

Dự bị ĐH Khối D - 06

ĐS: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

Bài 148. Giải phương trình: $\cos 2x + \cos^4 x - 2 = 0$

CD Tài Chính Kế Toán - 06

ĐS: $x = k\pi$

Bài 149. Giải phương trình: $3\tan^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{1 - \sin x}{\sin x}\right)$

Hệ CD – ĐH Sài Gòn Khối A - 07

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Bài 150. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \tan x - \cot x$

Dự bị ĐH Khối B - 07

ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Bài 151. Giải phương trình: $\sin 2x + \sin x - \frac{1}{2\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x$

Dự bị ĐH Khối A - 07

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Bài 152. Giải phương trình: $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0$

Dự bị ĐH Khối D - 08

ĐS: $x = -\pi/4 + k\pi$

Bài 153. Giải phương trình: $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$

ĐH Khối A - 10

ĐS: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Bài 154. Giải phương trình: $4\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2(8\sin x - 1)\cos x = 5$

CĐ Khối A, B, D - 10

ĐS: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

Bài 155. Giải phương trình: $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$

CĐ Khối A, B, D - 11

ĐS: $x = k\pi$

Dạng 5. Phương trình bậc nhất theo $\sin x, \cos x$

Bài 156. Giải phương trình: $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = \cos 2x$

ĐHDL NN- Tin Học - 98

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Bài 157. Giải phương trình: $\cos x + \sin x = \cos 2x$

ĐH Đà Lạt - 99

ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

Bài 158. Giải phương trình: $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x$

ĐH Đà Nẵng - 99

ĐS: $x = \pi/4 + k\pi$

Bài 159. Giải phương trình: $\sin 2x - \cos 2x = 1 + 2\cos x$

ĐH Hồng Đức - 99

ĐS: $x = \pi/2 + k\pi \vee x = \pi + k2\pi$

Bài 160. Giải phương trình: $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$

ĐH GTVT Tp.HCM - 99

ĐS: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$

Bài 161. Giải phương trình: $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$

ĐH Hàng Hải Tp.HCM - 99

ĐS: $x = \pi + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Bài 162. Giải phương trình: $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$

HV Ngân Hàng Khối D - 99

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi$

Bài 163. Giải phương trình: $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x$

HV KT Quân sự - 99

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$

Bài 164. Giải phương trình: $3\tan^3 x - \tan x + \frac{3(1 + \sin x)}{\cos^2 x} - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0$

ĐH Kiến Trúc - 99

ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + k2\pi$

Bài 165. Giải phương trình: $2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$

ĐH Thương Mại - 99

ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$

Bài 166. Giải phương trình sau: a. $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$ b. $\sin 4x = \tan x$

ĐH Y Hà Nội - 00

ĐS: a. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ b. $x = k\pi \vee x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2} + k2\pi$

Bài 167. Giải phương trình: $\sin x \cdot \cos x + 2\sin x + 2\cos x = 2$

ĐH Huế - 00

ĐS: $x = \pi/2 + k2\pi \vee x = k2\pi$

Bài 168. Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$

ĐH Cảnh Sát Nhân Dân - 00

ĐS: $x = k\frac{\pi}{2}$

Bài 169. Giải phương trình: $1 + \cos^3 x - \sin^3 x = \sin 2x$

ĐH Nông Nghiệp 1 - 00

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pi + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Bài 170. Giải phương trình: $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$

HV Ngân Hàng - 00

ĐS: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + k2\pi$

Bài 171. Giải phương trình: $2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1$

ĐH QG Hà Nội Khối A - 00

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad x = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} + k2\pi$

Bài 172. Giải phương trình: $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 1$

PV Ngân Hàng TpHCM - 00

ĐS: $x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$

Bài 173. Giải phương trình: $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x$

ĐH An Ninh Khối D - 01

ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Bài 174. Giải phương trình: $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

ĐH QG Hà Nội Khối A - 01

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Bài 175. Giải phương trình: $\sin x + 2\cos x + \cos 2x - 2\sin x \cdot \cos x = 0$

ĐH Văn Hóa HN Khối D - 01 ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + k2\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + k2\pi$

Bài 176. Giải phương trình:

$$2\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3} + 4\left[\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right]$$

ĐH Y Thái Bình - 01

ĐS: $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$

Bài 177. Giải phương trình: $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

ĐH Đà Lạt - 01

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Bài 178. Giải phương trình: $\frac{(2 - \sqrt{3})\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$

Dự bị ĐH Khối B - 03

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi$$

Bài 179. Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x + \cos 2x)$

Dự bị ĐH Khối D - 04

$$\underline{DS}: x = \pi + k2\pi \vee x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$$

Bài 180. Giải phương trình: $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$

CĐSP Hà Nam Khối A - 04

$$\underline{DS}: x = \pi/2 + k\pi$$

Bài 181. Giải phương trình: $\frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x} = \sqrt{3}$

CĐ Khối A - 04

$$\underline{DS}: x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$$

Bài 182. Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 4x + \sin 4x - 2\cos 3x = 0$

CĐ Công Nghiệp IV - 04

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}$$

Bài 183. Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình: $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

Dự bị ĐH Khối A - 05

$$\underline{DS}: \frac{5\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{5\pi}{6}$$

Bài 184. Giải phương trình: $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0$

Dự bị ĐH Khối A - 06

$$\underline{DS}: x = k\pi \vee x = 7\pi/6 + k2\pi$$

Bài 185. Giải phương trình: $\tan x - \sqrt{3} = \frac{1}{\cos x}$

CĐ KTKT Cần Thơ - 06

$$\underline{DS}: x = 7\pi/6 + k2\pi$$

Bài 186. Giải phương trình: $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3}\cos 4x = 4\cos^2 x - 1$

CĐ GTVT số 3 - 07

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3}$$

Bài 187. Giải phương trình: $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$

ĐH Khối D - 07

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 188. Giải phương trình: $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$

ĐH Khối A - 07

$$\underline{DS}: x = -\pi/4 + k2\pi \vee x = \pi/2 + k2\pi \vee x = k2\pi$$

Bài 189. Giải phương trình: $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

Dự bị ĐH Khối A - 07

ĐS: $x = 2\pi/3 + k\pi$

Bài 190. Giải phương trình: $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$

CD Khối A, B, D - 08

ĐS: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{4\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5}$

Bài 191. Giải phương trình: $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cdot \cos x$

ĐH Khối B - 08

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

Bài 192. Giải phương trình: $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$

ĐH Khối A - 08

ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$

Bài 193. Giải phương trình: $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$

ĐH Khối A - 09

ĐS: $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$

Bài 194. Giải phương trình: $\sin x + \cos x \cdot \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$

ĐH Khối B - 09

ĐS: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}$

Bài 195. Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cdot \cos 2x - \sin x = 0$

ĐH Khối D - 09

ĐS: $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

Bài 196. Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$

ĐH Khối A, A1 - 12

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hay $x = k2\pi$ hay $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

Bài 197. Giải phương trình: $2(\cos x + \sqrt{3}\sin x)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1$

ĐH Khối B - 12

ĐS: $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = k\frac{2\pi}{3}$

Bài 198. Giải phương trình: $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x$

ĐH Khối D - 12

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$

Dạng 6. Phương trình đẳng cấp



Bài 199. Giải phương trình: $\sin x \sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$

ĐH Y dược TPHCM - 97

ĐS: $x = \arctan 2 + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$

Bài 200. Giải phương trình: $3\cos^4 x - 4\cos^2 x \sin^2 x - \sin^4 x = 0$

ĐH Quốc gia TpHCM khối A - 98

ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$

Bài 201. Giải phương trình: $\tan x \cdot \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cdot \cos x)$

ĐH Mỏ - Địa Chất - 99

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Bài 202. Giải phương trình: $\sin x - 4 \sin^3 x + \cos x = 0$

ĐH Y Hà Nội - 99

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 203. Giải phương trình: $\sin^2 x (\tan x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$

ĐH Nông Nghiệp 1 - 99

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Bài 204. Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$

ĐH An Ninh - 00

$$\underline{DS}: x = \pi/2 + k\pi$$

Bài 205. Giải phương trình: $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \cos x = 3 + \cos 2x$

ĐH GTVT Hà Nội - 00

$$\underline{DS}: \text{vn}$$

Bài 206. Giải phương trình: $4 \cos^3 x + 2 \sin^3 x - 3 \sin x = 0$

CDSP Mẫu Giáo TƯ 1 - 01; CD Kỹ Thuật Cao Thắng - 07

$$\underline{DS}: x = \pi/4 + k\pi$$

Bài 207. Giải phương trình: $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$

ĐH Khối A - 03

$$\underline{DS}: x = \pi/4 + k\pi$$

Bài 208. Giải phương trình: $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3 \sin x$

Dự bị ĐH Khối A - 04

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 209. Giải phương trình: $\sqrt{3} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \cos^2 x + 1 - \sqrt{3} = 0$

CD Kỹ Thuật Cao Thắng - 06

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Dạng 7. Phương trình đối xứng

Bài 210. Giải phương trình: $2 \sin 2x - 2\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = 5$

HV Hàng không - 99

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2} + k2\pi$$

Bài 211. Giải phương trình: $\cos^3 x - \sin^3 x + 1 = 0$

ĐH Quốc gia TpHCM khối A - 00

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$$

Dạng 8. Phương pháp hạ bậc

Bài 212. Giải phương trình: $\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2} = \sin 2x$

ĐH Thủy Sản - 97

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 213. Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$

ĐH KT Quốc Dân - 99

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}$$

Bài 214. Giải phương trình: $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin\left(\frac{21\pi}{2} + 10x\right)$

ĐH Dược Hà Nội - 99

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10}$

Bài 215. Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x$

CDSP Thái Bình Khối A - 99

ĐS: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Bài 216. Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

ĐH GTVT - 99

ĐS: $x = \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$

Bài 217. Giải phương trình: $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$

HV Kỹ Thuật Mật Mã - 99

ĐS: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$

Bài 218. Giải phương trình: $\frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(\tan x + \cot x)$

ĐH BK Hà Nội - 00

ĐS: vn

Bài 219. Giải phương trình: $\sin x \cdot \cos 4x - \sin^2 2x = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{7}{2}$

ĐH SP Hà Nội - 00

ĐS: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Bài 220. Giải phương trình: $2 \cos^2 2x + \cos 2x = 4 \sin^2 2x \cdot \cos^2 x$

ĐH Công Đoàn - 00

ĐS: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$

Bài 221. Giải phương trình: $2 \cos^2 x + 2 \cos^2 2x + 2 \cos^2 3x - 3 = \cos 4x(2 \sin 2x + 1)$

ĐH SP TpHCM - 00

ĐS: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$

Bài 222. Giải phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 + \sin 4x$

ĐHDL Hùng Vương - 00

ĐS: $x = k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{1}{2} \arctan \frac{8}{3} + k\frac{\pi}{2}$

Bài 223. Giải phương trình: $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4} \cos 2x$

ĐH Ngoại Thương Khối D - 00

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Bài 224. Giải phương trình: $\sin^8 x + \cos^8 x + \frac{1}{8} \cos 4x = 0$

TTĐT BDCB Y Tế TpHCM - 01

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Bài 225. Giải phương trình: $\cos^4 \frac{x}{2} + \sin^4 \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin x$

ĐH Công Đoàn - 01

ĐS: $x = k\pi$

Bài 226. Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$

ĐH SPKT TpHCM - 01

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$

Bài 227. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình: $\sin x \cdot \cos 4x + 2\sin^2 2x = 1 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ thỏa mãn

$$\text{hệ bất phương trình } \begin{cases} |x-1| < 3 \\ x^2 + 3 > -x \end{cases}$$

ĐH Cảnh Sát Nhân Dân - 01

$$\underline{DS}: x = \pi/2$$

Bài 228. Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 3x - 3\cos^2 2x = 0$

ĐH TC Kế Toán - 01

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + k\pi$$

Bài 229. Giải phương trình: $3\sin^4 x + 5\cos^4 x - 3 = 0$

ĐH An Ninh Nhân Dân - 01

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Bài 230. Giải phương trình: $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$

DHSP TpHCM - 01

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$$

Bài 231. Giải phương trình: $48 - \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{2}{\sin^2 x} (1 + \cot 2x \cdot \cot x) = 0$

ĐH Mở - Địa Chất - 01

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$$

Bài 232. Giải phương trình: $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$

ĐH GTVT - 01

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{6}-2}{2} + k\pi$$

Bài 233. Giải phương trình: $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

ĐH Khối B - 02

$$\underline{DS}: x = k\frac{\pi}{2} \vee x = k\frac{\pi}{9}$$

Bài 234. Giải phương trình: $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$

ĐH Khối D - 03

$$\underline{DS}: x = \pi + k2\pi \vee x = -\pi/4 + k\pi$$

Bài 235. Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$

ĐH Khối D - 05

$$\underline{DS}: x = \pi/4 + k\pi$$

Bài 236. Giải phương trình: $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6}$

CD KTKT Công Nghiệp I - 06

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Bài 237. Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$

CD KTKT Công Nghiệp II - 07

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k\frac{\pi}{5}$$

Bài 238. Giải phương trình: $\frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$

ĐH Khối A - 06

$$\underline{DS}: x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$$

Bài 239. Giải phương trình: $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$

ĐH Khối B - 13

$$\underline{DS}: x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}$$

Dạng 9. Công thức nhân ba



Bài 240. Giải phương trình: $4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$

CD Hải quan TpHCM - 98

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$$

Bài 241. Giải phương trình: $\sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cdot \cos 3x = 1$

ĐH Y Hải Phòng - 99

$$\underline{DS}: x = k\pi$$

Bài 242. Giải phương trình:

$$8\sqrt{2}\cos^6 x + 2\sqrt{2}\sin^3 x \cdot \sin 3x - 6\sqrt{2}\cos^4 x - 1 = 0$$

HV Chính Trị QG TpHCM - 99

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{8} + k\pi$$

Bài 243. Giải phương trình: $\sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x = \sin^3 4x$

ĐH Ngoại Thương - 99

$$\underline{DS}: x = k\frac{\pi}{12}$$

Bài 244. Giải phương trình: $\cos^3 x \cdot \cos 3x + \sin^3 x \cdot \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

ĐH Mở Hà Nội - 00

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{8} + k\pi$$

Bài 245. Giải phương trình:

Bài 246. $4\sin^3 x \cdot \cos 3x + 4\cos^3 x \cdot \sin 3x + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3$

HV CN BCVT - 01

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$$

Bài 247. Giải phương trình: $\cos^3 x \cdot \cos 3x - \sin^3 x \cdot \sin 3x = \cos^3 4x + \frac{1}{4}$

ĐH Ngoại Ngữ Hà Nội - 01

$$\underline{DS}: x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{12}$$

Bài 248. Giải phương trình: $\cos^3 x \cdot \cos 3x - \sin^3 x \cdot \sin 3x = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$

Dự bị ĐH Khối A - 06

$$\underline{DS}: x = \pm \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$$

Dạng 10. Phương trình có chứa giá trị tuyệt đối

Phương trình có chứa căn thức



Bài 249. Giải phương trình: $\frac{\tan^2 x}{|\tan x - 1|} = \left| \frac{\tan x}{\tan x - 1} \right| + |\tan x|$

ĐH Thủy Sản - 98

$$\underline{DS}: x = k\pi \vee \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Bài 250. Giải phương trình: $\frac{\tan^2 x}{|\tan x - 1|} = |\tan x + 1| + \left| \frac{1}{\tan x - 1} \right|$

ĐH Thủy Sản - 99

$$\underline{DS}: \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Bài 251. Giải phương trình: $\frac{\cos 2x - 2 \cos 3x + 1}{\sqrt{\cos x}} = 0$

ĐH Mở Hà Nội Khối D - 99

ĐS: $x = k2\pi$

Bài 252. Giải phương trình: $|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x| = 2$

ĐH QG Hà Nội Khối D - 99

ĐS: $x = k\frac{\pi}{2}$

Bài 253. Giải phương trình: $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$

ĐHDL Phương Đông - 99

ĐS: $x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Bài 254. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{1 + \cos 2x} + \sqrt{1 - \cos 2x}}{\cos x} = 4 \sin x$

HV Khoa học Quân Sự Khối D - 99

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Bài 255. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}}{\sin x} = 4 \cos x$

ĐH Xây Dựng HN - 00

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

Bài 256. Giải phương trình: $3 \sin x + 2|\cos x| - 2 = 0$

ĐH Thủy Sản - 00

ĐS: $x = k\pi$

Bài 257. Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x - \sin^3 x \cdot \cot x + \cos^3 x \cdot \tan x = \sqrt{2 \sin 2x}$

ĐH Kiến Trúc Hà Nội - 00

ĐS: $x = \pi/4 + k2\pi$

Bài 258. Giải phương trình: $\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2 \cos 2x}$

ĐH Thương Mại - 00

ĐS: $x = \pi/2 + k\pi$

Bài 259. Giải phương trình: $2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8 \sin 2x \cdot \cos^2 2x}$

ĐH Kinh Tế Quốc Dân - 00

ĐS: $x = \pi/12 + k2\pi \vee x = 5\pi/12 + (2k+1)\pi$

Bài 260. Giải phương trình: $\sqrt{3 + 4\sqrt{6} - (16\sqrt{3} - 8\sqrt{2}) \cos x} = 4 \cos x - \sqrt{3}$

ĐH Kinh Tế Quốc Dân - 01

ĐS: $x = \pm\pi/4 + k2\pi$

Bài 261. Tìm các nghiệm thuộc $(0 ; 2\pi)$ của phương trình: $\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x$

ĐH Quốc gia TpHCM khối A - 96

ĐS: $\frac{\pi}{16}; \frac{9\pi}{16}; \frac{21\pi}{16}; \frac{29\pi}{16}$

Bài 262. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1}{8\cos^2 x}} = \sin x$

Dự bị ĐH Khối D - 02

ĐS: $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi \vee x = \frac{3\pi}{8} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{8} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{8} + k2\pi$

Bài 263. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$

CDSP Hà Tĩnh - 02

ĐS: $x = (2k+1)\pi \vee x = -\pi/2 + k2\pi$

Bài 264. Giải phương trình: $3\cos x(1-\sqrt{\sin x}) - \cos 2x = 2\sqrt{\sin x} \cdot \sin^2 x - 1$

CD Khí Tượng Thủy Văn - 03

ĐS: $x = \pi/2 + k2\pi \vee x = 2\pi/3 + k2\pi$

Bài 265. Giải phương trình: $\cos 3x \cdot \sin 2x - \cos 4x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 3x + \sqrt{1+\cos x}$

CD GTVT - 04

ĐS: $x = \pi + k2\pi$

Bài 266. Giải phương trình: $\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{1-\cos x} = 1$

Dự bị ĐH Khối A - 04

ĐS: $x = k2\pi \vee x = \pi/2 + k2\pi$

Bài 267. Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} |\sin 2x|$

Hệ CD - ĐH Sài Gòn Khối D - 07

ĐS: $x = \pm\pi/4 + k\pi$

Dạng 11. Phương trình có chứa tham số



Bài 268. Xác định m để phương trình: $2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2\sin 2x - m = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Dự bị ĐH Khối A - 02

ĐS: $-10/3 \leq m \leq -2$

Bài 269. Cho phương trình: $\frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} = a$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $a = \frac{1}{3}$

b) Tìm a để phương trình (1) có nghiệm.

Dự bị ĐH Khối D - 02

ĐS: a. $x = -\pi/4 + k\pi$; b. $-1/2 \leq a \leq 2$

Bài 270. Cho phương trình: $\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = m \tan 2x$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = \frac{13}{8}$

b) Tìm m để phương trình (1) vô nghiệm.

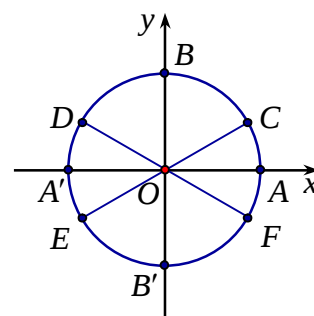
CD Xây Dựng III - 04

ĐS: a. $x = \pi/12 + k\pi \vee x = 5\pi/12 + k\pi$; b. $-1/4 \leq m \leq 1/4$

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?

- A. Điểm E, điểm D.
B. Điểm C, điểm F.
C. Điểm D, điểm C.
D. Điểm E, điểm F.



Câu 2. Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.
B. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
D. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ là

- A. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm?

- A. $-2 \leq m \leq 0$.
B. $m \leq 0$.
C. $m \geq 1$.
D. $0 \leq m \leq 1$.

Câu 5. Giải phương trình $\sin \frac{x}{2} = 1$.

- A. $x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Trong các hàm số sau hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = 1 - \sin x$.
B. $y = |\sin x|$.
C. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
D. $y = \sin x + \cos x$.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ là

- A. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.
B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.
C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.
D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 8. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = x + 1$.
B. $y = x^2$.
C. $y = \frac{x-1}{x+2}$.
D. $y = \sin x$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ là

- A. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.
B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.
C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.
D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 10. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = x + 1$.
B. $y = x^2$.
C. $y = \frac{x-1}{x+2}$.
D. $y = \sin x$.

Câu 11. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{5\cos 2x + 1}{2}$ là

- A. 1 và 2.
B. 3 và 2.
C. 3 và -2.
D. -3 và 1.

Câu 12. Tập xác định của hàm số $f(x) = \cot x$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
B. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
D. $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Câu 13.** Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x}$ là
- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x \neq k2\pi$. C. $x \neq k\frac{\pi}{2}$. D. $x \neq k\pi$.
- Câu 14.** Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?
- A. Phương trình $\cos x = a$ có nghiệm với mọi số thực a .
 B. Phương trình $\tan x = a$ và phương trình $\cot x = a$ có nghiệm với mọi số thực a .
 C. Phương trình $\sin x = a$ có nghiệm với mọi số thực a .
 D. Cả ba đáp án trên đều sai.
- Câu 15.** Trong các hàm số sau hàm số nào tuần hoàn với chu kỳ π ?
- A. $y = \sin 2x$. B. $y = \tan 2x$. C. $y = \cos x$. D. $y = \cot \frac{x}{2}$.
- Câu 16.** Phương trình $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ có nghiệm là
- A. $-\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $-\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 17.** Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ:
- A. $T = k\pi$. B. $T = 2\pi$. C. $T = k2\pi$. D. $T = \pi$.
- Câu 18.** Trong các hàm số sau đây, hàm nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?
- A. $y = \cos x - \sin^2 x$. B. $y = \tan x$. C. $y = \sin^3 x \cos x$. D. $y = \sin x$.
- Câu 19.** Xét bốn mệnh đề sau:
- (1): Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. (2): Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
 (3): Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$. (4): Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
 Tìm số phát biểu đúng.
- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.
- Câu 20.** Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + 3x + 1$ (m là tham số thực). Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- A. $m = 3$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.
- Câu 21.** Trong các hàm số sau, hàm số nào tuần hoàn với chu kỳ 2π ?
- A. $y = \cos 2x$. B. $y = \sin x$. C. $y = \tan x$. D. $y = \cot x$.
- Câu 22.** Nghiệm phương trình $2\sin x = 1$ có dạng nào dưới đây?
- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{R})$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k3\pi \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
- Câu 23.** Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là
- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 24. Phương trình $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ có tập nghiệm là

- A. $\{k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\{k60^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$. C. $\{k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\{k90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 25. Nghiệm của phương trình $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$ là

- A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$
C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 26. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\tan x - 1}{\sin x} + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 27. Phương trình $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 28. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

- A. $x = \frac{-\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$. B. $x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi$. C. $x = -\pi + k2\pi$. D. $x = \frac{-\pi}{2} + k\pi$.

Câu 29. Chu kì tuần hoàn của hàm số $y = \sin 2x$ là

- A. 3π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. 2π . D. π .

Câu 30. Phương trình $\tan x = \sqrt{3}$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\emptyset$. C. $\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 31. Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có một nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{6}$. B. $x = \frac{2\pi}{3}$. C. $x = \frac{\pi}{3}$. D. $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 32. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $5\sin x - 12\cos x = m$ có nghiệm?

- A. 13. B. Vô số. C. 26. D. 27.

Câu 33. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\tan x = m$, ($m \in \mathbb{R}$).

- A. $x = \arctan m + k\pi$ hoặc $x = \pi - \arctan m + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$). B. $x = \pm \arctan m + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).
C. $x = \arctan m + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$). D. $x = \arctan m + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 34. Tập xác định của hàm số $y = -\tan x$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 35. Phương án nào sau đây là sai?

A. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi.$

B. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

C. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

D. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi.$

Câu 36. Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 37. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Câu 38. Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là

A. $-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 39. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

A. $[-2; 2].$

B. $[0; 2].$

C. $[-1; 1].$

D. $[0; 1].$

Câu 40. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $\pi.$

B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $\pi.$

C. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $\pi.$

D. Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $\pi.$

Câu 41. Số nghiệm thực của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$ là

A. 12.

B. 11.

C. 20.

D. 21.

Câu 42. Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

A. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\left\{ x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 43. Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ có tập nghiệm là

A. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\left\{ x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 44. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin 2x - 5$ lần lượt là

- A. 3 ; -5. B. -2 ; -8. C. 2 ; -5. D. 8 ; 2.

Câu 45. Tìm nghiệm của phương trình $2\sin x - 3 = 0$.

- A. $x \in \emptyset$.
- B.
$$\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$
- C.
$$\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \\ x = -\arcsin\left(\frac{3}{2}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$
- D. $x \in \mathbb{R}$.

Câu 46. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $y = \tan x$ nghịch biến trong $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- B. $y = \cos x$ đồng biến trong $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
- C. $y = \sin x$ đồng biến trong $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
- D. $y = \cot x$ nghịch biến trong $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 47. Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$.
- B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$.
- D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 48. Phương trình $(\sqrt{3}\tan x + 1)(\sin^2 x + 1) = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.
- B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.
- C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.
- D. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 49. Phương trình $\cos x = 1$ có nghiệm là

- A. $x = k2\pi$.
- B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- C. $x = k\pi$.
- D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

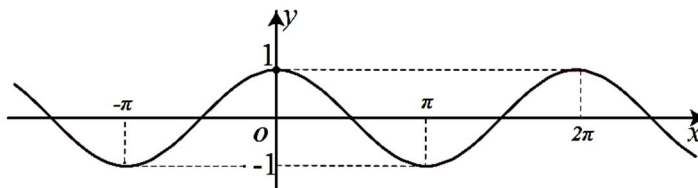
Câu 50. Phương trình $2\cos x - \sqrt{2} = 0$ có tất cả các nghiệm là

- A.
$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$
- B.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$
- C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$
- D.
$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 51. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$.

- A. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- B. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $x \in \mathbb{R}$.
- D. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 52. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D . Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A.** $y = 1 + \sin x$. **B.** $y = 1 - \sin x$. **C.** $y = \sin x$. **D.** $y = \cos x$.

Câu 53. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn. **B.** Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn. **D.** Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Câu 54. Giải phương trình $\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0$.

- A.** $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 55. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là?

- A.** $\mathbb{R}$. **B.** $(-\infty; 0]$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $[-1; 1]$.

Câu 56. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A.** Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
C. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
D. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 57. Tập nghiệm của phương trình $2 \sin 2x + 1 = 0$ là

- A.** $S = \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $S = \left\{-\frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 58. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ là

- A.** $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 59. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A.** $y = \tan^2 x$. **B.** $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$. **C.** $y = \cot 4x$. **D.** $y = |\cot x|$.

Câu 60. Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 61. Cho phương trình: $3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2 \sin x \cdot \sin 2x$. Gọi α là nghiệm lớn nhất thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình. Tính $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. 0. D. 1.

Câu 62. Xét bốn mệnh đề sau:

- (1) Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
 (2) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
 (3) Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (4) Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 63. Phương trình $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$. C. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi$.

Câu 64. Phương trình $\sin x = 1$ có một nghiệm là

- A. $x = \pi$. B. $x = -\frac{\pi}{2}$. C. $x = \frac{\pi}{2}$. D. $x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 65. Tìm nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$.

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$. D. $x = \frac{k\pi}{2}$.

Câu 66. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 67. Giải phương trình $2\cos x - 1 = 0$

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 68. Cho các mệnh đề sau

- Hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ là hàm số chẵn.
 Hàm số $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ có giá trị lớn nhất là 5.
 Hàm số $f(x) = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
 Hàm số $f(x) = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.
 Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 69. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng nào dưới đây.

- A. $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$ B. $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$
 C. $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}.$ D. $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}.$

Câu 70. Phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}.$ B. $-1 \leq m \leq 1.$ C. $m < -1.$ D. $m > 1.$

Câu 71. Nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$ B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$ C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$ D. $x = \frac{k\pi}{2}.$

Câu 72. Trong các phương trình sau phương trình nào vô nghiệm?

- A. $\tan x = 2018.$ B. $\sin x = \pi.$ C. $\cos x = \frac{2017}{2018}.$ D. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$

Câu 73. (Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định - năm 2017-) Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là?

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Câu 74. Phương trình $\sin x = \sin \alpha$ (hằng số $\alpha \in \mathbb{R}$) có nghiệm là

- A. $x = \alpha + k\pi, x = \pi - \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$ B. $x = \alpha + k2\pi, x = -\alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$
 C. $x = \alpha + k2\pi, x = \pi - \alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$ D. $x = \alpha + k\pi, x = -\alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 75. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ B. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
 C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 76. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = \sin x$ là

- A. $S = \left\{k2\pi; \frac{\pi}{3} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}.$ B. $S = \left\{k2\pi; \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}.$
 C. $S = \left\{k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}.$ D. $S = \{k2\pi; \pi + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 77. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\tan x - 5}{1 - \sin^2 x}.$

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$ B. $D = \mathbb{R}.$
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 78. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $2\cos x = 3.$ B. $2\sin x = 3.$ C. $3\tan x = 2.$ D. $2\cot x = 3.$

Câu 79. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm thực.

- A. $m \geq 0.$ B. $-1 \leq m \leq 1.$ C. $-1 < m < 1.$ D. $m > 0.$

- Câu 80.** Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x = m$ có nghiệm?
A. $m \leq 1$. **B.** $m \geq -1$. **C.** $m \leq -1$. **D.** $-1 \leq m \leq 1$.
- Câu 81.** Chu kì tuần hoàn của hàm số $y = \cot x$ là
A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** 2π . **C.** π . **D.** $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- Câu 82.** Phương trình $2 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là
A. $x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). **B.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$). **D.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- Câu 83.** Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là
A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Câu 84.** Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ bằng
A. π . **B.** 2π . **C.** $-\pi$. **D.** -2π .
- Câu 85.** Phương trình nào trong số các phương trình sau có nghiệm?
A. $\sin x + 3 \cos x = 6$. **B.** $2 \sin x - 3 \cos x = 1$.
C. $\sin x = \sqrt{2}$. **D.** $\cos x + 3 = 0$.
- Câu 86.** Phương trình $\sin 2x + 3 \cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 87.** Cho phương trình $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$. Khi đặt $t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?
A. $4t^2 - 8t + 3 = 0$. **B.** $4t^2 - 8t - 3 = 0$. **C.** $4t^2 + 8t - 5 = 0$. **D.** $4t^2 - 8t + 5 = 0$.
- Câu 88.** Nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là
A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$). **B.** $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$).
C. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$). **D.** $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- Câu 89.** Tìm tập xác định D của hàm số $y = \tan 2x$
A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Câu 90.** Chọn phát biểu đúng:
A. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \cot x$ đều là hàm số chẵn.
B. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \cot x$ đều là hàm số lẻ.
C. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cot x$, $y = \tan x$ đều là hàm số chẵn.
D. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cot x$, $y = \tan x$ đều là hàm số lẻ.

Câu 91. Phương trình $\cos 2x + 4 \sin x + 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 10\pi)$?

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 92. Tìm góc $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\}$ để phương trình $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos x = 0$ tương đương với phương trình $\cos(2x - \alpha) = \cos x$.

- A. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. B. $\alpha = \frac{\pi}{4}$. C. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. D. $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Câu 93. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 94. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x - 2$.

- A. $[-2; \sqrt{3}]$. B. $[-\sqrt{3} - 3; \sqrt{3} - 1]$. C. $[-4; 0]$. D. $[-2; 0]$

Câu 95. Trong bốn hàm số: (1) $y = \cos 2x$, (2) $y = \sin x$; (3) $y = \tan 2x$; (4) $y = \cot 4x$ có mấy hàm số tuần hoàn với chu kỳ π ?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 96. Giải phương trình $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$.

- A. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \frac{4\pi}{3} + k\pi$. D. $x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$.

Câu 97. Tính tổng S của các nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

- A. $S = \frac{5\pi}{6}$. B. $S = \frac{\pi}{3}$. C. $S = \frac{\pi}{2}$. D. $S = \frac{\pi}{6}$.

Câu 98. Giải phương trình $\sin 3x - 4 \sin x \cos 2x = 0$.

- A. $\begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$

Câu 99. Phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ có tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ bằng

- A. $\frac{7\pi}{2}$. B. π . C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 100. Chu kỳ của hàm số $y = 3 \sin \frac{x}{2}$ là số nào sau đây?

- A. 0. B. 2π . C. 4π . D. π .

Câu 101. Tập $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ là tập xác định của hàm số nào sau đây?

- A. $y = \cot x$. B. $y = \cot 2x$. C. $y = \tan x$. D. $y = \tan 2x$

Câu 102. Khi x thay đổi trong khoảng $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ thì $y = \sin x$ lấy mọi giá trị thuộc

- A. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. B. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$ C. $[-1; 1]$. D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

Câu 103. Tìm số điểm phân biệt biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ trên đường tròn lượng giác.

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 104. Giải phương trình $\frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{2 \sin x - 1} = 0$.

- A. $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 105. Phương trình $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$ có tất cả các nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.
C. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 106. Nghiệm của phương trình $8 \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x = \sqrt{2}$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 107. Phương trình $\tan x = \cot x$ có tất cả các nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 108. Tìm m để phương trình $2 \sin^2 x + m \cdot \sin 2x = 2m$ vô nghiệm.

- A. $m < 0; m \geq \frac{4}{3}$. B. $m \leq 0; m \geq \frac{4}{3}$. C. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$. D. $m < 0$ hoặc $m > \frac{4}{3}$.

Câu 109. Tìm nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin x = 0$ thỏa mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = \pi$. C. $x = 0$. D. $x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 110. Tìm m để phương trình $2\sin^2 x + m\sin 2x = 2m$ vô nghiệm.

- A. $m < 0; m \geq \frac{4}{3}$. B. $m \leq 0; m \geq \frac{4}{3}$. C. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$. D. $m < 0$ hoặc $m > \frac{4}{3}$.

Câu 111. Tìm nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin x = 0$ thỏa mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = \pi$. C. $x = 0$. D. $x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 112. Phương trình $\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 2018\pi)$?

- A. 2017. B. 2018. C. 2019. D. 1009.

Câu 113. Hãy nêu tất cả các hàm số trong các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ thỏa mãn điều kiện đồng biến và nhận giá trị âm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

- A. $y = \tan x$. B. $y = \sin x, y = \cot x$.
C. $y = \sin x, y = \tan x$. D. $y = \tan x, y = \cos x$.

Câu 114. Trên đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$, đồ thị hai hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

- A. 2. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 115. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2\sin x + 3}$.

- A. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 1$. B. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 2\sqrt{5}$.
C. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 2$. D. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 3$.

Câu 116. Tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của hàm số $f(x) = \tan 2x$.

- A. $T_0 = 2\pi$. B. $T_0 = \frac{\pi}{2}$. C. $T_0 = \pi$. D. $T_0 = \frac{\pi}{3}$.

Câu 117. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng:

- A. $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $\left(-\frac{3\pi}{2} + k2\pi; \frac{5\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
C. $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{5\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 118. Phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ chỉ có các nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 119. Phương trình $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$ có tập nghiệm trùng với nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $\cos x = 0$. B. $\cot x = 1$. C. $\tan x = 3$. D. $\begin{cases} \tan x = 1 \\ \cot x = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Câu 120. Giải phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

A.
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

D.
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 121. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos^2 x = m - 1$ có nghiệm.

A. $1 < m < 2$.

B. $m \leq 2$.

C. $1 \leq m \leq 2$.

D. $m \geq 1$.

Câu 122. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $3\sin x + m\cos x = 5$ vô nghiệm

A. $m \in (-4; 4)$.

B. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -4)$.

D. $m \in (4; +\infty)$.

Câu 123. Cho các hàm số $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$. Trong các hàm số trên, có bao nhiêu hàm số chẵn?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 124. Giải phương trình $\sin 3x = \sin x$ ta được tập nghiệm của phương trình là

A. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\left\{k\pi, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}, l \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 125. Gọi X là tập nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $290^\circ \in X$.

B. $220^\circ \in X$.

C. $240^\circ \in X$.

D. $200^\circ \in X$.

Câu 126. Phương trình lượng giác: $2\cos x + \sqrt{2} = 0$ có nghiệm là

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 127. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 128. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right)$?

A. $y = \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

D. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Câu 129. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{1 - \cos^2 x}$

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 130. Cho phương trình $(\sin x + 1)(\sin 2x - m \sin x) = m \cos^2 x$. Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $S = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. B. $S = (0; 1)$. C. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right)$. D. $S = \left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Câu 131. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \cos x + \sin x = -2$ là

- A. $\begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 132. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$. B. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
C. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$. D. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 133. Giải phương trình $\cos 2x + 5 \sin x - 4 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$. C. $x = k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 134. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\cos 2x + m \sin 2x = 1 - 2m$ vô nghiệm, kết quả là

- A. $0 < m < \frac{4}{3}$. B. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$.
C. $m \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$. D. $m \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Câu 135. Phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$ tương đương với phương trình

- A. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 5x = 0$. B. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x = 0$.
C. $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x = 0$. D. $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 0$.

Câu 136. Phương trình $\sin 5x + \sin 9x + 2 \sin^2 x - 1 = 0$ có một họ nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7}$. B. $x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{3}$. C. $x = \frac{\pi}{5} + k2\pi$. D. $x = \frac{3\pi}{7} + k\pi$.

Câu 137. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin x \cos 3x$. B. $y = \cos 2x$. C. $y = \sin x$. D. $y = \sin x + \cos x$.

Câu 138. Phương trình $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 139. Tìm tập xác định của hàm số sau $y = \frac{\cot x}{2 \sin x - 1}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi, -\frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 140. Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ là

- A. $m = -\frac{1}{2}; M = 1$. B. $m = 1; M = 2$. C. $m = -2; M = 1$. D. $m = -1; M = 2$.

Câu 141. Tất cả các họ nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = 1$ là

- A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 142. Tất cả các họ nghiệm của phương trình $2 \cos 2x + 9 \sin x - 7 = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- C. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 143. Gọi S là tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $3 \cos x - 1 = 0$. Tính giá trị của S .

- A. $S = 0$. B. $S = 4\pi$. C. $S = 3\pi$. D. $S = 2\pi$.

Câu 144. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- B. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $x = k\frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- D. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 145. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$. Chọn khẳng định đúng?

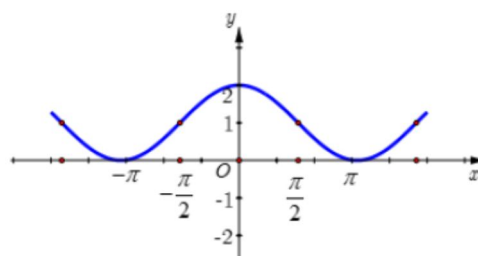
- A. $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. B. $x_0 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. C. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. D. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 146. Tìm số nghiệm của phương trình $\cos 2x - \cos x - 2 = 0, x \in [0; 2\pi]$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 147. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

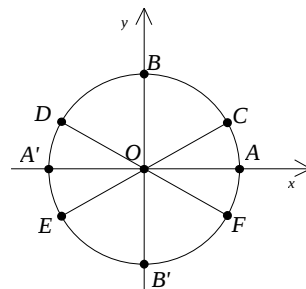
- A. $y = \cos x + 1$. B. $y = 2 - \sin x$.
- C. $y = 2 \cos x$. D. $y = \cos^2 x + 1$.



Câu 148. Nghiệm của phương trình $\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ được biểu diễn trên

đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?

- A. Điểm F , điểm D .
- B. Điểm C , điểm F .
- C. Điểm C , điểm D , điểm E , điểm F .
- D. Điểm E , điểm F .



Câu 149. Nghiệm của phương trình $\sin x \cos x \cos 2x = 0$ là

- A. $k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- B. $k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.
- C. $k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.
- D. $k\frac{\pi}{8} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 150. Phương trình $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có hai công thức nghiệm dạng $\alpha + k\pi, \beta + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ với α, β thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó, $\alpha + \beta$ bằng

- A. $-\frac{\pi}{3}$.
- B. $-\frac{\pi}{2}$.
- C. $\frac{\pi}{2}$.
- D. π .

Câu 151. Phương trình nào trong số các phương trình sau có nghiệm?

- A. $\cos x + 3 = 0$.
- B. $\sin x = 2$.
- C. $2\sin x - 3\cos x = 1$.
- D. $\sin x + 3\cos x = 6$.

Câu 152. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m \sin x - 3\cos x = 5$ có nghiệm.

- A. $m \geq 4$.
- B. $-4 \leq m \leq 4$.
- C. $m \geq \sqrt{34}$.
- D. $\begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}$.

Câu 153. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{\cos x - 1}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$.
- B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.
- C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k2\pi\right\}$.
- D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi; x \neq k\pi\right\}$.

Câu 154. Phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.
- B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.
- C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$.
- D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$.

Câu 155. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

- A. $T = \frac{7\pi}{8}$.
- B. $T = \frac{21\pi}{8}$.
- C. $T = \frac{11\pi}{4}$.
- D. $T = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 156. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 5x \cos 7x = \cos 4x \sin 8x$ trên $(0; 2\pi)$ bằng

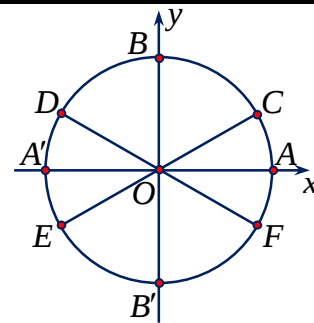
- A. $\frac{19\pi}{3}$.
- B. $\frac{9\pi}{2}$.
- C. 5π .
- D. 7π .

Câu 157. Phương trình $\sin 2x + 3\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 158. Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?

- A. Điểm D, điểm C.
- B. Điểm E, điểm F.
- C. Điểm C, điểm F.
- D. Điểm E, điểm D.



Câu 159. Cho phương trình: $(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$.

Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ khi?

- A. $m > -1$.
- B. $m \geq -1$.
- C. $-1 \leq m \leq 1$.
- D. $-1 < m \leq -\frac{1}{2}$.

Câu 160. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
- B. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
- C. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
- D. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 161. Cho hai phương trình $\cos 3x - 1 = 0$ (1); $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ (2). Tập các nghiệm của phương trình (1) đồng thời là nghiệm của phương trình (2) là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- D. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 162. Phương trình $\cos 3x \cdot \tan 5x = \sin 7x$ nhận những giá trị sau của x làm nghiệm

- A. $x = \frac{\pi}{2}$.
- B. $x = 10\pi; x = \frac{\pi}{10}$.
- C. $x = 5\pi; x = \frac{\pi}{10}$.
- D. $x = 5\pi; x = \frac{\pi}{20}$.

Câu 163. Tìm số đo ba góc của một tam giác cân biết rằng có số đo của một góc là nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

- A. $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.
- B. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}; \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.
- C. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}; \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
- D. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$.

Câu 164. Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$ của phương trình $\cos^2 x + \frac{5}{2}\cos x + 1 = 0$ là

- A. 4.
- B. 3.
- C. 1.
- D. 2.

Câu 165. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sqrt{5}$ có nghiệm.

- A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$.
- B. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.
- C. $-2 \leq m \leq 2$.
- D. $-2 < m < 2$.

Câu 166. Tập giá trị của hàm số $y = \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1}$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

- A. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.
- B. $\left(\frac{1}{2}; 2\right]$.
- C. $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$.
- D. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 167. Phương trình $\sin 2x \cos x = \sin 7x \cos 4x$ có các họ nghiệm là

- A. $x = \frac{k2\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$.
 B. $x = \frac{k\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = \frac{k\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$.
 D. $x = \frac{k2\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 168. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng

- A. 0. B. π . C. 2π . D. 3π .

Câu 169. Xét phương trình $\sin 3x - 3\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x + 3\cos x = 2$. Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình đã cho?

- A. $(2\sin x - 1)(2\cos^2 x + 3\cos x + 1) = 0$. B. $(2\sin x - \cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$.
 C. $(2\sin x - 1)(2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$. D. $(2\sin x - 1)(\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$.

Câu 170. Phương trình $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 171. Trong các hàm số $y = \tan x$; $y = \sin 2x$; $y = \sin x$; $y = \cot x$, có bao nhiêu hàm số thỏa mãn tính chất $f(x + k\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 172. Gọi S là tổng các nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$ của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$. Tính S .

- A. $S = 0$. B. $S = \frac{\pi}{3}$. C. $S = \pi$. D. $S = \frac{\pi}{6}$.

Câu 173. Cho phương trình $\tan x + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Diện tích của đa giác tạo bởi các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các họ nghiệm của phương trình gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

- A. 0,948. B. 0,949. C. 0,946. D. 0,947.

Câu 174. Tìm chu kì của hàm số $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2\cos \frac{3x}{2}$.

- A. 5π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. 4π . D. 2π .

Câu 175. Tính tổng tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình: $\sqrt{2}\cos 3x = \sin x + \cos x$.

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. 3π . C. $\frac{3\pi}{2}$. D. π .

Câu 176. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $2\sin x - 1 = 0$ là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 177. Tính tổng tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{5}{8}$.

- A. $\frac{9\pi}{8}$. B. $\frac{12\pi}{3}$. C. $\frac{9\pi}{4}$. D. 2π .

Câu 178. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 179. Cho hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ có đồ thị (C) . Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị không thể thu được bằng cách tịnh tiến đồ thị (C) ?

A. $y = \sin x - \cos x$. B. $y = \left|\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2}\right|$. C. $y = -\sin x - \cos x$. D. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 180. Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{0; \pi\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{k \frac{\pi}{2}\right\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

Câu 181. Giải phương trình $2\sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$.

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

C. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 182. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$ lần lượt là

A. $-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}; -1$.

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}; -2$.

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 183. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 184. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{2 \sin x - 1} = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 185. Nghiệm của phương trình $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ có dạng $x = -\frac{\pi}{m} + \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{k}{n}$ là phân số tối giản. Khi đó $m - n$ bằng

A. 5.

B. -3.

C. -5.

D. 3.

Câu 186. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$ trên đường tròn lượng giác là

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 4.

Câu 187. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $(2m-1)\sin 3x + m \cos 3x = 3m-1$ có nghiệm.

- A. $m \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
 B. $m \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
 C. $m \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
 D. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 188. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ là

- A. $T = 2\pi$.
 B. $T = \frac{\pi}{2}$.
 C. $T = \pi$.
 D. $T = 4\pi$.

Câu 189. Phương trình lượng giác: $\cos 3x - \cos 2x + 9 \sin x - 4 = 0$ trên khoảng $(0; 3\pi)$. Tổng số nghiệm của phương trình trên là

- A. $\frac{25\pi}{6}$.
 B. 6π .
 C. Kết quả khác.
 D. $\frac{11\pi}{3}$.

Câu 190. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ thuộc đoạn $[\pi; 2\pi]$ là

- A. 3.
 B. 2.
 C. 0.
 D. 1.

Câu 191. Cho phương trình $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$. Khi đặt $t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

- A. $4t^2 + 8t - 5 = 0$.
 B. $4t^2 - 8t - 3 = 0$.
 C. $4t^2 - 8t + 3 = 0$.
 D. $4t^2 - 8t + 5 = 0$.

Câu 192. Số vị trí điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ trên đường tròn lượng giác là

- A. 4.
 B. 1.
 C. 2.
 D. 3.

Câu 193. Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{(2 \cos x - 1)(\sin 2x - \cos x)}{\sin x - 1} = 0$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ta được kết quả là

- A. $T = \frac{2\pi}{3}$.
 B. $T = \frac{\pi}{2}$.
 C. $T = \pi$.
 D. $T = \frac{\pi}{3}$.

Câu 194. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + 4$ bằng.

- A. 7.
 B. 1.
 C. 3.
 D. 4.

Câu 195. Giải phương trình $3 \sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 196. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\tan x + \sqrt{3} \cot x - \sqrt{3} - 1 = 0$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 197. Phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\left\{\frac{7\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 198. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$ là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = -\frac{7\pi}{3} + k\pi$.
 B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{3} + k2\pi$.
 C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \frac{7\pi}{3} + k\pi$.
 D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Câu 199. Cho phương trình $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$. Tổng các nghiệm thuộc $[0; \pi]$ của phương trình là

- A. π .
 B. $\frac{\pi}{3}$.
 C. $\frac{2\pi}{3}$.
 D. $\frac{4\pi}{3}$.

Câu 200. Phương trình $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2\pi; 2\pi]$.

- A. 5.
 B. 2.
 C. 3.
 D. 4.

Câu 201. Phương trình $m \cos 2x + \sin 2x = m - 2$ có nghiệm khi và chỉ khi:

- A. $m \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.
 B. $m \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.
 C. $m \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$.
 D. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$.

Câu 202. Tìm số nghiệm của phương trình $\sin x = \cos 2x$ thuộc đoạn $[0; 20\pi]$.

- A. 40.
 B. 30.
 C. 60.
 D. 20.

Câu 203. Cho phương trình $m \sin x + 4 \cos x = 2m - 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm?

- A. 4.
 B. 7.
 C. 6.
 D. 5.

Câu 204. Số nghiệm thuộc $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ của phương trình $\sqrt{3} \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$ là

- A. 3.
 B. 1.
 C. 2.
 D. 0.

Câu 205. Biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $P = 0$.
 B. $P = -1$.
 C. $P = \frac{1}{2}$.
 D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 206. Phương trình $2 \cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 207. Tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ là

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Câu 208.** Cho phương trình $2m \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = m + 5$, với m là một phần tử của tập hợp $E = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$. Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm?
A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.
- Câu 209.** Phương trình $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$ tương đương với phương trình nào sau đây?
A. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. **B.** $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$. **C.** $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$. **D.** $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
- Câu 210.** Số nghiệm của phương trình $2 \sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$ trong $[0; 2018\pi]$ là
A. 1008. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** 1009.
- Câu 211.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.
A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Câu 212.** Giải phương trình $\cos 2x + 2 \cos x - 3 = 0$.
A. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 213.** Nghiệm của phương trình $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin 3x$ là
A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 214.** Phương trình $\sqrt{3} \cos x + \sin x = -2$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[0; 4035\pi]$?
A. 2016. **B.** 2017. **C.** 2011. **D.** 2018.
- Câu 215.** Phương trình $2 \sin x - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm $x \in (0; 2\pi)$?
A. 2 nghiệm. **B.** 1 nghiệm. **C.** 4 nghiệm. **D.** Vô số nghiệm.
- Câu 216.** Cho phương trình: $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ (*). Bằng cách đặt $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$) thì phương trình (*) trở thành phương trình nào sau đây?
A. $-2t^2 + t = 0$. **B.** $t^2 + t - 2 = 0$. **C.** $-2t^2 + t - 2 = 0$. **D.** $-t^2 + t = 0$.
- Câu 217.** Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $4\sqrt{3} \cos x + \sin x + 2m - 1 = 0$ có nghiệm là
A. 6. **B.** 5 **C.** 4 **D.** 3
- Câu 218.** Tập nghiệm của phương trình $2 \cos 2x + 1 = 0$ là
A. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Câu 219.** Cho x_0 là nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ thì giá trị của $P = 3 + \sin 2x_0$ là
A. $P = 3$. **B.** $P = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $P = 0$. **D.** $P = 2$.

Câu 220. Nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \pi$ là

- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = -\frac{\pi}{2}$. C. $x = \frac{\pi}{6}$. D. $x = \frac{\pi}{4}$.

Câu 221. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ là

- A. 2π . B. 4π . C. 3π . D. π .

Câu 222. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\cos x}$ là tập nào sau đây?

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 223. Tìm giá trị nhỏ nhất M của hàm số $y = 1 - 2\cos x$.

- A. $M = -3$. B. $M = 1$. C. $M = 3$. D. $M = -1$.

Câu 224. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $4\sin x + (m-4)\cos x - 2m + 5 = 0$ có nghiệm là

- A. 5. B. 6. C. 10. D. 3.

Câu 225. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$ với $x \in [0; 2\pi]$ là

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 4.

Câu 226. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$. B. $\left(\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right)$. C. $\left(\frac{7\pi}{4}; 3\pi\right)$. D. $\left(\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$.

Câu 227. Giải phương trình: $\cos 3x \cdot \tan 4x = \sin 5x$.

- A. $x = k\frac{2}{3}\pi, x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8}$. B. $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{16} + k\frac{3\pi}{8}$.
C. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8}$. D. $x = k\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{16} + k\frac{3\pi}{8}$.

Câu 228. Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\sin x = 0$?

- A. $\cos x = -1$. B. $\cos x = 1$. C. $\tan x = 0$. D. $\cot x = 1$.

Câu 229. Số nghiệm của phương trình $2\cos x = \sqrt{3}$ trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 230. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x - \sin 2x + 5$.

- A. $\sqrt{2}$. B. $-\sqrt{2}$. C. $6 - \sqrt{2}$. D. $6 + \sqrt{2}$.

Câu 231. Phương trình $\sqrt{3}\sin x + \cos x = m$, với m là tham số có nghiệm khi giá trị của m bằng

- A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases}$. C. $-2 \leq m \leq 2$. D. $-1 \leq m \leq 1$.

Câu 232. Phương trình $\sin 2x = \cos x$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$.

Câu 233. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $3\sin^2 x + m\sin 2x - 4\cos^2 x = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \emptyset$. B. $m \geq 4$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m = 4$.

Câu 234. Với giá trị lớn nhất của a bằng bao nhiêu để phương trình $a\sin^2 x + 2\sin 2x + 3a\cos^2 x = 2$ có nghiệm?

- A. 2. B. $\frac{11}{3}$. C. 4. D. $\frac{8}{3}$.

Câu 235. Cho phương trình $\cos 2x - (2m - 3)\cos x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

- A. $1 \leq m < 2$. B. $m < 2$. C. $m \geq 1$. D. $m \leq 1$.

Câu 236. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$ trên $[0; 2\pi]$.

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{11\pi}{6}$. C. $\frac{5\pi}{3}$. D. $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 237. Điều kiện của tham số thực m để phương trình $\sin x + (m + 1)\cos x = \sqrt{2}$ vô nghiệm là

- A. $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -2 \end{cases}$. B. $m < -2$. C. $-2 < m < 0$. D. $m > 0$.

Câu 238. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos^2 x = m - 1$ có nghiệm.

- A. $m \leq 2$. B. $1 < m < 2$. C. $m \geq 1$. D. $1 \leq m \leq 2$.

Câu 239. Tập tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 2\sin^2 x - 6\sin x - 2\cos x + 4 = 0$ là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 240. Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos x) = 0$ trên đoạn $x \in [0; 2\pi]$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 241. Giả sử M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (2 + \sqrt{3})\sin x - \cos x$. Khi đó $M + m$ bằng

- A. $3 + \sqrt{3}$. B. 0. C. $1 + \sqrt{3}$. D. 1.

Câu 242. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$. B. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn. D. Đồ thị hàm số $y = \sin x$ có tiệm cận ngang.

Câu 243. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^3 2x - \cos^2 2x = m\sin^2 x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 244. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của a để phương trình $a\sin^2 x + 2\sin 2x + 3a\cos^2 x = 2$ có nghiệm

- A. $a = 3$. B. $a = 2$. C. $a = 1$. D. $a = -1$.

Câu 245. Phương trình $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 246. Tổng các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$ trên $\left(0; \frac{5\pi}{2}\right]$ là

- A. $\frac{7\pi}{6}$. B. $\frac{7\pi}{3}$. C. $\frac{7\pi}{2}$. D. 2π .

Câu 247. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2\cos x + 1}{\cos x - 2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $M + 9m = 0$. B. $9M - m = 0$. C. $9M + m = 0$. D. $M + m = 0$.

Câu 248. Phương trình $4\sin^2 2x - 3\sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 249. Số nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$ của phương trình $\cos x - \cos 2x - \cos 3x + 1 = 0$ là

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 250. Số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình: $2\sin x = 1$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 251. Nghiệm của phương trình $2\cos 2x + 9\sin x - 7 = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 252. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3\cos x - 1 = 0$ trên đoạn $[0; 4\pi]$ là

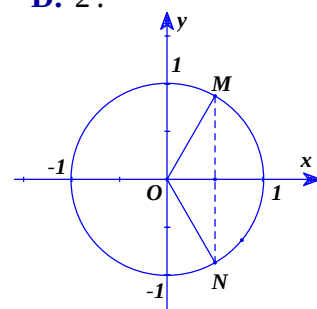
- A. $\frac{15\pi}{2}$. B. 6π . C. $\frac{17\pi}{2}$. D. 8π .

Câu 253. Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là

- A. 6. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 254. Một phương trình có tập nghiệm được biểu diễn trên đường tròn lượng giác là hai điểm M và N trong hình dưới. Phương trình đó là

- A. $2\cos x - 1 = 0$. B. $2\cos x - \sqrt{3} = 0$.
C. $2\sin x - \sqrt{3} = 0$. D. $2\sin x - 1 = 0$.



Câu 255. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2\sin^2 x - \sin 2x + 10$ là

- A. 10. B. $11 - \sqrt{2}$. C. $11 + \sqrt{2}$. D. $9 + \sqrt{2}$.

Câu 256. Giá trị lớn nhất của m để phương trình $\cos x + \sin^{2018} 5x + m = 0$ có nghiệm là

- A. -1. B. 0. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 257. Giải phương trình $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$ trên đoạn $[\pi; 2018\pi]$ ta được số nghiệm là

- A. 2016 nghiệm. B. 2017 nghiệm. C. 2018 nghiệm. D. 2019 nghiệm.

Câu 258. Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

- A. 20179. B. 20181. C. 16144. D. 16145.

Câu 259. Phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ có tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ bằng

- A. $\frac{7\pi}{2}$. B. π . C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 260. Tìm tập nghiệm của phương trình: $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$

- A. $\left\{-\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}; \frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\left\{\pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\left\{\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}; -\frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\left\{\frac{7\pi}{36} + k2\pi; -\frac{13\pi}{36} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 261. Cho phương trình $\sin^2 x \cdot \tan x + \cos^2 x \cdot \cot x + 2\sin x \cos x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Tính hiệu nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình.

- A. $-\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{5\pi}{6}$. C. $-\frac{5\pi}{6}$. D. π .

Câu 262. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{\sin 2x + 2}{1 - \cos x}}$.

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$. C. $D = \{k2\pi\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

Câu 263. Số nghiệm của phương trình $3\cos 2x = 2$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 264. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.

- A. $S = \frac{11\pi}{6}$. B. $S = 4\pi$. C. $S = 5\pi$. D. $S = \frac{7\pi}{6}$.

Câu 265. Nghiệm của phương trình $\frac{\cos 2x + 3\sin x - 2}{\cos x} = 0$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 266. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + 1$ là đoạn $[a; b]$. Tính tổng $T = a + b$.

- A. $T = 1$. B. $T = 2$. C. $T = 0$. D. $T = -1$.

Câu 267. Gọi K là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 = m$

có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$. Hỏi K là tập con của tập hợp nào dưới đây?

- A. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. B. $(1 - \sqrt{2}; \sqrt{2})$. C. $\left(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. D. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$.

Câu 268. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $m \cdot \cos x + 1 = 0$ có nghiệm?

- A. 2018. B. 2019. C. 4037. D. 4036.

Câu 269. Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (h) được cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$.

Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- A. $t = 22$ (h). B. $t = 15$ (h). C. $t = 14$ (h). D. $t = 10$ (h).

Câu 270. Cho phương trình $\cos 5x = 3m - 5$. Gọi đoạn $[a; b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Tính $3a + b$.

- A. 5. B. -2. C. $\frac{19}{3}$. D. 6.

Câu 271. Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. $y = \cot x$. B. $y = -\tan x$. C. $y = \cos x$. D. $y = \sin x$.

Câu 272. Phương trình $2 \cos^2 x = 1$ có số nghiệm trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ là

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Câu 273. Để giải phương trình: $\tan x \tan 2x = 1$ có ba bạn An, Lộc, Sơn giải tóm tắt ba cách khác nhau như sau:

- **An:** Điều kiện $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Phương trình } \tan x \tan 2x = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

$$\text{Nên nghiệm phương trình là } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

- **Lộc:** Điều kiện $\tan x \neq \pm 1$.

$$\text{Phương trình } \tan x \tan 2x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ là nghiệm.}$$

- **Sơn:** Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin^2 x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$.

$$\text{Ta có } \tan x \tan 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x \cdot \cos x = \cos x \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x = \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ là nghiệm.}$$

Hỏi, bạn nào sau đây giải đúng?

- A. An. B. Lộc. C. Sơn. D. An, Lộc, Sơn.

Câu 274. Tập nghiệm S của phương trình $\cos 2x + 5 \cos 5x + 3 = 10 \cos 2x \cos 3x$ là

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $S = \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 275. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x + 2 \cos 3x \cdot \sin x - 2 = 0$ trong khoảng $(0; \pi)$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 276. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực a để hàm số $y = \frac{\cos x + a \sin x + 1}{\cos x + 2}$ có giá trị lớn nhất $y = 1$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 277. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 4 \sin x - 2 \cos x - 4 = 0$ trong đoạn $[0; 100\pi]$ của phương trình.

- A. 100π . B. 2476π . C. 25π . D. 2475π .

Câu 278. Giá trị nhỏ nhất của hàm số của hàm số $y = 1 + 2 \sin x \cos x - \cos^2 2x$ là

- A. $-\frac{5}{4}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. -1 . D. 0 .

Câu 279. Tìm m để hàm số $y = 3m \sin^3 x - \sin^2 x + \sin x + m - 2$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$?

- A. $m \leq -3$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq \frac{1}{3}$. D. $m \geq -\frac{1}{3}$.

Câu 280. Phương trình $(\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x) = \sin^2 3x$ tương đương với phương trình nào sau đây:

- A. $(\sin x - \sin 2x - \sin 3x)(\cos x + \cos 2x) = 0$. B. $(\sin x - \sin 3x) \sin x = 0$.
 C. $(\sin x - \sin 2x - \sin 3x)(\sin x + \sin 2x) = 0$. D. $(\sin x + \sin 3x) \sin 3x = 0$.

Câu 281. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4-x^2} \cdot \cos 3x = 0$ là

- A. 7. B. 2. C. 4. D. 6.

Câu 282. Gọi M và N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -1 + 2 \cos x \left[(2 - \sqrt{3}) \sin x + \cos x \right]$ trên $\mathbb{R}$. Biểu thức $M + N + 2$ có giá trị bằng

- A. 0. B. $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$. C. 2. D. $\sqrt{2+\sqrt{3}} + 2$.

Câu 283. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos 4x = \cos^2 3x + m \sin^2 x$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{12}\right)$.

- A. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $m \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. C. $m \in (0; 1)$. D. $m \in \left(-1; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 284. Tìm số nghiệm thuộc $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$ của phương trình $\sqrt{3} \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 285. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 3}$ bằng

- A. 3. B. -1 . C. $-\frac{1}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 286. Số nghiệm nằm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ của phương trình $\sin 5x + \sin 3x = \sin 4x$ là

- A. 5. B. 7. C. 9. D. 3.

Câu 287. Hàm số $y = |\cos x|$ là hoàn tuần hoàn với chu kì là

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. 0. D. π .

Câu 288. Tất cả các giá trị của m để phương trình $\cos 2x - (2m-1)\cos x - m + 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là

- A. $-1 \leq m \leq 1$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $0 \leq m < 1$. D. $0 \leq m \leq 1$.

Câu 289. Hàm số $y = 2 \cos 3x + 3 \sin 3x - 2$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 7. B. 3. C. 5. D. 6.

Câu 290. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình

$$(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$$

- A. 4037. B. 4036. C. 2019. D. 2020.

Câu 291. Phương trình $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. Vô số nghiệm. B. Vô nghiệm. C. 3 nghiệm. D. 2 nghiệm.

Câu 292. Phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0$ có bao nhiêu nghiệm $x \in (-2\pi; 7\pi)$?

- A. 16. B. 20. C. 18. D. 19.

Câu 293. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $m = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$:

- A. $-2 \leq m \leq 0$. B. $-2 \leq m \leq -1$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $\frac{2}{11} \leq m \leq 2$.

Câu 294. Cho phương trình $\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} + 1 = 0$. Khẳng định nào dưới đây là đúng:

- A. Phương trình đã cho vô nghiệm.
B. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\frac{\pi}{2}$.
C. Phương trình tương đương với phương trình $(\sin x - 1)(2 \sin x - 1) = 0$.
D. Điều kiện xác định của phương trình là $\cos x(3 + 4 \cos^2 x) \neq 0$.

Câu 295. Phương trình $\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 296. Số nghiệm thuộc khoảng $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình $\cos(\pi + x) + \sqrt{3} \sin x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ là

- A. 4. B. 3. C. 6. D. 2.

Câu 297. Số nghiệm trên khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $27 \cos^4 x + 8 \sin x = 12$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 298. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{5 - m \sin x - (m+1) \cos x}$ xác định trên $\mathbb{R}$?

- A. 6. B. 8. C. 7. D. 5.

Câu 299. Số các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\sin x - 1)(2 \cos^2 x - (2m+1) \cos x + m) = 0$ có đúng 4 nghiệm thực thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. vô số.

Câu 300. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$.

- A. $M = -2$. B. $M = -3$. C. $M = 3$. D. $M = 1$.

Câu 301. Số nghiệm của phương trình $\cos 2x + 3|\cos x| - 1 = 0$ trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 302. Phương trình: $2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$ có mấy nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$.

- A. 6. B. 2. C. 4. D. 8.

Câu 303. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin x \sin 2x + 2 \sin x \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 304. Tổng S các nghiệm của phương trình: $2 \cos^2 2x + 5 \cos 2x - 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ là

- A. $S = 5\pi$. B. $S = \frac{7\pi}{6}$. C. $S = 4\pi$. D. $S = \frac{11\pi}{6}$.

Câu 305. Nghiệm lớn nhất của phương trình $2 \cos 2x - 1 = 0$ trong đoạn $[0; \pi]$ là

- A. $x = \pi$. B. $x = \frac{11\pi}{12}$. C. $x = \frac{2\pi}{3}$. D. $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 306. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin x - \cos x + 3}$ lần lượt là

- A. $m = -1$; $M = \frac{1}{2}$. B. $m = -1$; $M = 2$. C. $m = -\frac{1}{2}$; $M = 1$. D. $m = 1$; $M = 2$.

Câu 307. Cho phương trình $m \sin x + (m+1) \cos x = \frac{m}{\cos x}$. Số các giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 10 để phương trình có nghiệm là

- A. 9. B. 8. C. 10. D. 7.

Câu 308. Cho x_0 là nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ thì giá trị của $P = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right)$ là

- A. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $P = 1$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 309. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4\sqrt{3} \cos x + \sin x + 2m - 1 = 0$ có nghiệm là

- A. 8. B. 6. C. 9. D. 7.

Câu 310. Để phương trình $\frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}$ có nghiệm, tham số a phải thỏa mãn điều kiện:

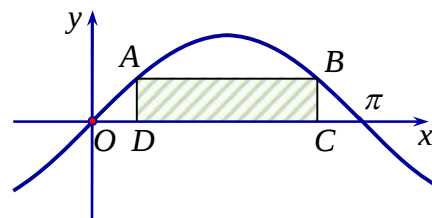
- A. $a \neq \pm\sqrt{3}$. B. $\begin{cases} |a| > 1 \\ |a| \neq \sqrt{3} \end{cases}$. C. $|a| \geq 4$. D. $|a| \geq 1$.

Câu 311. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của hàm số $y = \frac{3 \sin x - \cos x - 4}{2 \sin x + \cos x - 3}$.

- A. 8. B. 5. C. 6. D. 9.

- Câu 312.** Cho phương trình $\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x)$. Tính tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2018)$
- A. $\left(\frac{1285}{4}\right)^2 \pi$. B. $(643)^2 \pi$. C. $(642)^2 \pi$. D. $\left(\frac{1285}{2}\right)^2 \pi$.
- Câu 313.** Biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm cuối là
- A. 6. B. 5. C. 4. D. 2.
- Câu 314.** Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ là
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.
- Câu 315.** Số nghiệm chung của hai phương trình $4\cos^2 x - 3 = 0$ và $2\sin x + 1 = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ bằng
- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.
- Câu 316.** Số giờ có ánh sáng của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số: $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ ánh sáng nhất?
- A. 262. B. 353. C. 80. D. 171.
- Câu 317.** Cho phương trình $4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = a^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$ (1). Gọi n là số giá trị nguyên của tham số a để phương trình (1) có nghiệm. Tính n .
- A. $n = 5$. B. $n = 3$. C. $n = 2$. D. $n = 1$.
- Câu 318.** Giả sử M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ trên $\mathbb{R}$. Tìm $M + m$.
- A. $1 + \sqrt{2}$. B. 0. C. 1. D. -1.
- Câu 319.** Tìm m để phương trình $\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} = m$ có nghiệm.
- A. $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $0 \leq m \leq 1$. C. $0 \leq m \leq \sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2} \leq m \leq \sqrt{3}$.
- Câu 320.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2}\cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tính $M - m$.
- A. $\frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}$. B. $\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$. C. $1 - \frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{4} - 1 + \sqrt{2}$.
- Câu 321.** Tìm tổng tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0; 10\pi]$ của phương trình $\sin^2 2x + 3\sin 2x + 2 = 0$.
- A. $\frac{105\pi}{2}$. B. $\frac{295\pi}{4}$. C. $\frac{297\pi}{4}$. D. $\frac{299\pi}{4}$.
- Câu 322.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0$ có nghiệm thực?
- A. 13. B. 15. C. 7. D. 9.

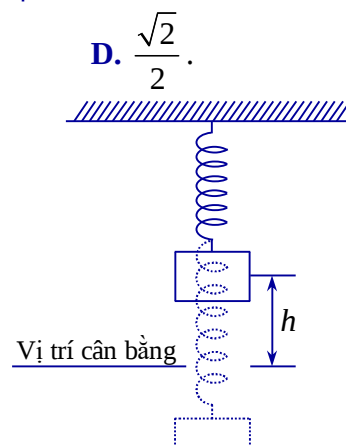
Câu 323. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$. Các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$. Độ dài cạnh BC bằng



- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. 1. C. $\frac{1}{2}$.

- D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 324. Một vật nặng treo bởi một chiếc lò xo, chuyển động lên xuống qua vị trí cân bằng (hình vẽ). Khoảng cách h từ vật đến vị trí cân bằng ở thời điểm t giây được tính theo công thức $h = |d|$ trong đó $d = 5\sin 6t - 4\cos 6t$ với d được tính bằng centimet. Ta quy ước rằng $d > 0$ khi vật ở trên vị trí cân bằng, $d < 0$ khi vật ở dưới vị trí cân bằng. Hỏi trong giây đầu tiên, có bao nhiêu thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất?



- A. 0. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 325. Cho phương trình $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình trên có nghiệm duy nhất $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. 2018. B. 2015. C. 4036. D. 2016.

Câu 326. Phương trình $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

- A. $\sqrt{2} \leq m \leq 2$. B. $1 \leq m \leq \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. C. $1 \leq m \leq 2$. D. $0 \leq m \leq 1$.

Câu 327. Phương trình $\cos 2x \cdot \sin 5x + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 328. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm thuộc $[0; 20\pi]$ của phương trình $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$. Khi đó, giá trị của S bằng

- A. $S = 570\pi$. B. $S = 295\pi$. C. $S = 590\pi$. D. $S = \frac{200}{3}\pi$.

Câu 329. Gọi S là tập hợp các nghiệm thuộc khoảng $(0; 100\pi)$ của phương trình

$$\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 3. \text{ Tổng các phần tử của } S \text{ là}$$

- A. $\frac{7400\pi}{3}$. B. $\frac{7525\pi}{3}$. C. $\frac{7375\pi}{3}$. D. $\frac{7550\pi}{3}$.

Câu 330. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2018)$ của phương trình sau:

$$\sqrt{3}(1 - \cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3} + 1)\sin x. \text{ Tính tổng tất cả các phần tử của } S.$$

- A. 103255π . B. $\frac{310408\pi}{3}$. C. $\frac{312341\pi}{3}$. D. 102827π .

Câu 331. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình

$$2(m+1-\sin^2 x) - (4m+1)\cos x = 0 \text{ có nghiệm thuộc khoảng } \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right).$$

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. B. $\left[-\frac{1}{2}; 0\right)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right]$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 332. Cho hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1 .

- A. 6. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 333. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $\sin 2x + 2 \sin x - \cos x - \cos^2 x = m \sin^2 x$ có nhiều hơn một nghiệm trong khoảng $[0; 2\pi]$?

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 5.

Câu 334. Tìm số tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $2 \sin^3 2x + m \sin 2x + 2m + 4 = 4 \cos^2 2x$ có nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 6.

Câu 335. Phương trình $(\sin x - \cos x)(\sin x + 2 \cos x - 3) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực thuộc khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 336. Cho phương trình $\sqrt[3]{(\sin x + m)^2} + \sqrt[3]{\sin^2 x - m^2} = 2\sqrt[3]{(\sin x - m)^2}$. Gọi $S = [a; b]$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình trên có nghiệm thực. Tính giá trị của $P = a^2 + b^2$

- A. $P = \frac{162}{49}$. B. $P = \frac{49}{162}$. C. $P = 4$. D. $P = 2$.

Câu 337. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3} \sqrt[3]{m+3 \cos x} = \cos x$ có nghiệm thực?

- A. 2. B. 7. C. 5. D. 3.

Câu 338. Tổng các nghiệm của phương trình $2 \cos 3x (2 \cos 2x + 1) = 1$ trên đoạn $[-4\pi; 6\pi]$ là

- A. 61π . B. 72π . C. 50π . D. 56π .

Câu 339. Cho $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $\cos 2x + \cos 2y + 2 \sin(x+y) = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{\sin^4 x}{y} + \frac{\cos^4 y}{x}$$

- A. $\min P = \frac{3}{\pi}$. B. $\min P = \frac{2}{\pi}$. C. $\min P = \frac{2}{3\pi}$. D. $\min P = \frac{5}{\pi}$.

Câu 340. Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2017]$ của phương trình $\frac{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = 4 \cos x$ là

- A. 1283. B. 1285. C. 1284. D. 1287.

Câu 341. Gọi M, m lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$ trên $\mathbb{R}$.

Khi đó:

- A. $M = 2, m = \frac{1}{2^{1008}}$. B. $M = 1, m = \frac{1}{2^{1009}}$. C. $M = 1, m = 0$. D. $M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}$.

Câu 342. Tìm m để phương trình $2\sin^2 x - (2m+1)\sin x + 2m-1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

- A. $-1 < m < 0$. B. $0 < m < 1$. C. $1 < m < 2$. D. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$.

Câu 343. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + xyz = z$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{x^2(1+\sqrt{yz})^2}{(y+z)(x^2+1)}$$
 thuộc khoảng nào trong các khoảng sau:

- A. $(1, 3; 1, 4)$. B. $(0, 8; 0, 9)$. C. $(1, 7; 1, 8)$. D. $(1, 4; 1, 5)$.

Câu 344. Số các giá trị nguyên của m để phương trình $\cos^2 x + \sqrt{\cos x + m} = m$ có nghiệm là

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 345. Số nghiệm của phương trình: $\sin^{2015} x - \cos^{2016} x = 2(\sin^{2017} x - \cos^{2018} x) + \cos 2x$ trên $[-10; 30]$ là

- A. 46. B. 51. C. 50. D. 44.

Câu 346. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{\sin x + 2} + \sqrt[3]{m - \sin x} = 2$ có nghiệm.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 347. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 = m$ có đúng một

nghiệm thực thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 348. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $(8\sin^3 x - m)^3 = 162\sin x + 27m$ có nghiệm thỏa

mãn $0 < x < \frac{\pi}{3}$?

- A. 2. B. 3. C. Vô số. D. 1.

Câu 349. Cho phương trình $(1 + \cos x)(\cos 4x - m \cos x) = m \sin^2 x$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương

trình có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

- A. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. B. $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

- C. $m \in (-1; 1)$. D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Câu 350. Khẳng định nào sau đây là đúng về phương trình $\sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{80}{x^2+32x+332}\right) = 0$?

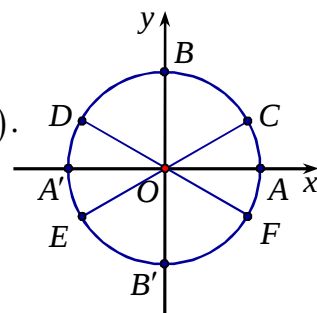
- A. Số nghiệm của phương trình là 8. B. Tổng các nghiệm của phương trình là 8.
C. Tổng các nghiệm của phương trình là 48. D. Phương trình có vô số nghiệm thuộc $\mathbb{R}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	B	A	A	B	A	D	A	D	C	A	A	B	A	D	D	A	A	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	C	B	B	A	B	B	B	D	A	C	D	D	A	B	C	B	D	C	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	B	C	B	A	A	A	B	A	B	A	D	B	C	D	C	A	D	C	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	A	C	C	B	C	C	A	A	A	B	B	B	C	C	B	A	A	B	D
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
C	A	B	B	B	B	A	D	D	D	A	D	C	C	A	B	D	D	B	C
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
B	A	C	A	C	D	B	D	C	D	C	B	C	B	A	B	A	A	D	A
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
C	A	B	B	A	B	B	C	C	A	B	D	D	C	C	A	B	C	C	C
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
A	D	D	B	D	C	A	A	C	B	C	D	C	D	C	D	B	B	D	A
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
D	D	B	B	A	A	C	B	C	C	C	C	B	C	C	B	B	A	D	D
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
B	B	C	B	A	A	A	C	B	D	C	C	B	A	C	A	B	D	A	D
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
A	B	C	C	B	B	B	A	A	B	A	B	D	B	A	A	C	C	A	A
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
C	D	D	C	B	D	C	C	D	C	C	A	C	D	A	C	C	D	C	C
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
B	B	D	B	D	C	C	D	B	B	D	D	C	A	C	C	B	B	B	C
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
C	B	A	B	D	B	C	D	D	D	D	D	B	D	A	C	D	B	D	D
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
D	C	C	B	D	A	D	C	A	D	D	C	D	A	D	C	D	B	B	D
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
C	A	A	C	D	B	A	A	A	B	C	D	A	B	A	D	A	D	D	A
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
A	A	C	D	A	B	B	B	C	B	B	A	B	C	C	A	C	C	B	C
341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
D	D	D	A	D	A	B	A	D	C										

PHẦN III. HỒN DẠNG GIAI

- Câu 1. Chọn D.** Ta có: $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$
- Vậy chỉ có hai điểm E và F thỏa mãn.
- Câu 2. Chọn A.** Ta có các kết quả sau:
- + Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
 - + Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
 - + Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
 - + Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.
- Câu 3. Chọn B.** ĐK: $\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (*)$
- Ta có $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Kết hợp điều kiện $(*)$ suy ra $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Câu 4. Chọn A.** Ta có $\sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1$.
 Khi đó YCBT $\Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$.
- Câu 5. Chọn A.** Ta có $\sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 6. Chọn B.** TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
 $\forall x \in D: x \in D \Rightarrow -x \in D (1)$
 Ta có $f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)| = f(x) (2)$.
 Từ (1) và (2) suy ra hàm số $y = |\sin x|$ là hàm chẵn.
- Câu 7. Chọn A.** $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 8. Chọn D.** Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- Câu 9. Chọn A.** $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 10. Chọn D.** Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- Câu 11. Chọn C.** $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 5\cos 2x \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq 5\cos 2x + 1 \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{5\cos 2x + 1}{2} \leq 3$.
 Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -2.
- Câu 12. Chọn A.** $f(x)$ xác định khi và chỉ khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- Câu 13. Chọn A.** Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.



Câu 14. Chọn B. Cách 1: Ta có hàm $y = \cos x$ và $y = \sin x$ nhận giá trị trên đoạn $[-1; 1]$ nên A và C sai suy ra D cũng sai.

Cách 2: Hàm $y = \tan x$ và $y = \cot x$ nhận giá trị trên tập số thực nên B đúng.

Câu 15. Chọn A. $\sin[2(x + \pi)] = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x$; Giả sử có số T sao cho $0 < T < \pi$ và $\sin[2(x + T)] = \sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn $x = \frac{\pi}{4}$, ta được $\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} + T\right)\right] = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 2T = 1$.

Điều này trái giả thiết $0 < T < \pi$. Vậy π là chu kỳ của hàm số $y = \sin 2x$.

Câu 16. Chọn D. ĐK: $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$

Ta có $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 17. Chọn D. Theo tính chất trong sgk 11 thì hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 18. Chọn A. Trong 4 hàm số trên chỉ có hàm số $y = \cos x - \sin^2 x$ là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

Thật vậy:

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Và $y(-x) = \cos(-x) - \sin^2(-x) = \cos x - \sin^2 x = y(x)$

Nên hàm số $y = \cos x - \sin^2 x$ là hàm số chẵn.

Câu 19. Chọn A. Dễ thấy các phát biểu (1); (2); (3) đúng.

Xét (4): $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$ ĐKXĐ: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 20. Chọn D. Ta có: $D = \mathbb{R}, y' = mx^2 - 2mx + 3$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow y' = 3 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m = 0$ thỏa yêu cầu.

Trường hợp 2: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3$.

Kết hợp hai trường hợp ta có $0 \leq m \leq 3$ nên $m = 0$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 21. Chọn B. Theo định nghĩa, hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π , các hàm số lượng giác còn lại $y = \tan x, y = \cot x, y = \cos 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Xét $y = \cos 2x$: ta có $y(x + \pi) = \cos 2(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) = \cos 2x = y(x)$ nên $y = \cos 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 22. Chọn C. Ta có: $2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 23. Chọn B. Hàm số xác định khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 24. Chọn B. $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(3x - 30^\circ) = \tan(-30^\circ)$
 $\Leftrightarrow 3x - 30^\circ = -30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 25. Chọn A. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} (n) \\ \sin x = -2 (l) \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 26. Chọn B. Hàm số $y = \frac{\tan x - 1}{\sin x} + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi:
 $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 27. Chọn B. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$

Câu 28. Chọn B. Ta có: $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 29. Chọn D. Ta có $y = \sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2(x + \pi)$. Suy ra chu kì của hàm số là $T = \pi$.
 Giải nhanh: Hàm số $y = \sin(ax + b)$ là $T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Câu 30. Chọn A. Ta có $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 31. Chọn C. Phương trình $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.
 Vậy các nghiệm của phương trình là $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 32. Chọn D. Phương trình $5\sin x - 12\cos x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $5^2 + (-12)^2 \geq m^2 \Leftrightarrow m^2 \leq 169 \Leftrightarrow -13 \leq m \leq 13$.
 Suy ra có 27 số nguyên m để phương trình $5\sin x - 12\cos x = m$ có nghiệm.

Câu 33. Chọn D. Ta có: $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 34. Chọn A. Hàm số $y = -\tan x$ xác định khi: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
 Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 35. Chọn B. Ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Do đó đáp án B sai.

Câu 36. Chọn C. Phương trình $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 37. Chọn B. B sai vì hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 38. Chọn D. Ta có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 39. Chọn C. Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy tập giá trị của hàm số đã cho là $[-1; 1]$.

Câu 40. Chọn B. Hàm số $y = \tan x; y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π

Hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π

Hàm số $y = \sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin[2(x + \pi)]$. Vậy hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Vậy đáp án B sai.

Câu 41. Chọn A. Phương trình tương đương: $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

+ Với $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ta có $-\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{61}{12}, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 0 \leq k \leq 5, k \in \mathbb{Z}$. Do đó phương trình có 6 nghiệm.

+ Với $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ta có $-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \leq 10\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq k \leq \frac{53}{12}, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow -1 \leq k \leq 4, k \in \mathbb{Z}$. Do đó, phương trình có 6 nghiệm.

+ Rõ ràng các nghiệm này khác nhau từng đôi một, vì nếu

$$-\frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{7\pi}{6} + k'2\pi \Leftrightarrow k - k' = \frac{2}{3} \text{ (vô lí, do } k, k' \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 12 nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$.

Câu 42. Chọn B. Ta có $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 43. Chọn C. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 44. Chọn B. Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -8 \leq 3\sin 2x - 5 \leq -2 \Rightarrow -8 \leq y \leq -2$.

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lần lượt là $-2; -8$.

Câu 45. Chọn A. Ta có: $2\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{2} > 1$ nên phương trình vô nghiệm.

Câu 46. Chọn A. Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số $y = \tan x$ đồng biến.

Câu 47. Chọn A. Hàm số đã cho xác định khi $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},$

$k \in \mathbb{Z}$. Vậy TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 48. Chọn B. Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Do $\sin^2 x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (nhận).

Câu 49. Chọn A. Phương trình $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 50. Chọn B. $2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 51. Chọn A. Điều kiện: $\sin x \cdot \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 52. Chọn D. Dựa vào lý thuyết đây là đồ thị của hàm $y = \cos x$.

Câu 53. Chọn B. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ là hàm số lẻ, hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 54. Chọn C. $\sqrt{3}\tan 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 55. Chọn D. Với $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $\cos x \in [-1; 1]$.

Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là $[-1; 1]$.

Câu 56. Chọn C. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $\pi \Rightarrow$ đáp án A sai.

Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $2\pi \Rightarrow$ đáp án B sai.

Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ đáp án D sai.

Câu 57. Chọn A. a có: $2\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Câu 58. Chọn D. Hàm số xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 59. Chọn C. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Trong các hàm số trên, chỉ có hàm số $y = \cot 4x$ là hàm số lẻ.

Vậy, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ là $y = \cot 4x$.

Câu 60. Chọn A. Hàm số $y = \tan 2x$ xác định khi $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 61. Chọn A. Phương trình tương đương:

$$3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = \cos x - \cos 3x \Leftrightarrow 2\cos x + \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}.$$

Vì $x \in (0; 2\pi)$ nên $x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Nghiệm lớn nhất của phương là $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

$$\text{Vậy } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 62. Chọn A. Các mệnh đề đúng là

(1) Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(2) Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(3) Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 63. Chọn C. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 64. Chọn C. Ta có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Do đó $x = \frac{\pi}{2}$ là một nghiệm của phương trình $\sin x = 1$.

Câu 65. Chọn B. Ta có: $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 66. Chọn C. Ta có $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 67. Chọn C. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 68. Chọn A. * Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\forall x \in D, \text{ ta có: } -x \in D \text{ và } f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-\sin x}{x^2 + 1} = -f(x).$$

Vậy hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ là hàm số lẻ.

Do đó (I) sai.

* Xét hàm số $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f(x) = 3\sin x + 4\cos x = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right)$$

$$\text{Đặt } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}. \text{ Ta có } f(x) = 5\sin(x + \alpha) \leq |5|$$

$$\Rightarrow \max f(x) = 5 \text{ khi } \sin(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy hàm số $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ có giá trị lớn nhất là 5.

Do đó (II) đúng.

* Xét hàm số $f(x) = \tan x$. Ta có hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Do đó (III) sai.

* Xét hàm số $f(x) = \cos x$. Ta có $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Do đó (IV) sai.

Vậy trong bốn mệnh đề đã cho có một mệnh đề đúng.

Câu 69. Chọn A.

Câu 70. Chọn A. Do $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 71. Chọn B. Ta có: $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 72. Chọn B. * $\tan x = 2018 \Leftrightarrow x = \arctan 2018 + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

* $\sin x = \pi$ (vô nghiệm do $\pi > 1$).

* $\cos x = \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{2017}{2018} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

* $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 73. Chọn B. Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 74. Chọn C.

Câu 75. Chọn C. $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = 3 \end{cases}$.

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Với $\sin x = 3$ phương trình vô nghiệm.

Câu 76. Chọn B. Ta có $\sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 77. Chọn A. Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin^2 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 78. Chọn A. $2\cos x = 3 \Leftrightarrow \cos x = \frac{3}{2}$, phương trình vô nghiệm.

Câu 79. Chọn B. Do $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.

Câu 80. Chọn D. Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.

Câu 81. Chọn C. Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \cot x$ là π .

Câu 82. Chọn A. Ta có $2\cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Câu 83. Chọn B. Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 84. Chọn B. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ bằng 2π .

Câu 85. Chọn B. Ta có $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$ nên hai phương trình ở C và D vô nghiệm.

Phương trình lượng giác dạng $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Đáp án A: $1^2 + 3^2 < 6^2$ nên phương trình vô nghiệm.

Đáp án B: $2^2 + (-3)^2 > 1$ nên phương trình có nghiệm.

Câu 86. Chọn B. $\sin 2x + 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot (2 \sin x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin x = -\frac{3}{2} \quad (\text{loại vì } \sin x \in [-1; 1]) \end{cases}. \text{ Theo đề: } x \in (0; \pi) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 87. Chọn A. Phương trình tương đương với: $-\cos 2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{5}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow -4 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 8 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 3 = 0, \text{ nên nếu đặt } t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \text{ phương trình trở thành}$$

$$-4t^2 + 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 8t + 3 = 0.$$

Câu 88. Chọn D. Phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 89. Chọn D. Hàm số xác định khi $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 90. Chọn D. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, hàm số $y = \sin x, y = \cot x, y = \tan x$ là các hàm số lẻ.

Câu 91. Chọn A. PT đã cho $\Leftrightarrow -2 \sin^2 x + 4 \sin x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = 3 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

$$\text{Theo đề: } x \in (0; 10\pi) \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + k2\pi < 10\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} < k < \frac{21}{4}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy PT đã cho có 5 nghiệm trên khoảng $(0; 10\pi)$.

Câu 92. Chọn D. $\cos(2x - \alpha) = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \alpha = x + k2\pi \\ 2x - \alpha = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \alpha + k2\pi \end{cases}$

$$\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Để hai phương trình tương đương cần có } \begin{cases} \frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{9} \\ \alpha = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Câu 93. Chọn C. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 94. Chọn C. Xét $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x - 2 = 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) - 2 = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq y \leq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $[-4; 0]$.

Câu 95. Chọn A. Do hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên hàm số (1) $y = \cos 2x$ tuần hoàn chu kỳ π .

Hàm số (2) $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Do hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên hàm số (3) $y = \tan 2x$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{2}$.

Do hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên hàm số (4) $y = \cot 4x$ tuần hoàn chu kỳ $\frac{\pi}{4}$.

Câu 96. Chọn B. Cách 1: Xét $\cos x = 0$: Phương trình tương đương $2 = 3(k\pi)$

Xét $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta có:

$$2 \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x = 3(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Cách 2: } pt \Leftrightarrow -(1 - 2 \sin^2 x) + \sqrt{3} \sin 2x = 2 \Leftrightarrow 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Câu 97. Chọn D. Ta có: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

$$\text{Vì } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ nên } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow S = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 98. Chọn D. Cách 1: ĐK: $x \in \mathbb{R} (*)$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \sin x (3 - 4 \sin^2 x) - 4 \sin x \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \left(3 - 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 4 \cos 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x (1 - 2 \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ thỏa mãn } (*).$$

Cách 2: Phương trình $\Leftrightarrow \sin 3x - 2(\sin 3x - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow -\sin 3x + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(4\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(1 - 2\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

Câu 99. Chọn B.

$$\text{Ta có } \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Họ nghiệm $x = \pi + k2\pi$ không có nghiệm nào thuộc khoảng $(0; \pi)$.

$$x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow l \in \{0; 1\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$. Từ đó suy ra tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình này bằng π .

Câu 100. Chọn C. Chu kì của hàm số $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

Câu 101. Chọn B. Hàm số $y = \cot 2x$ xác định khi $2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Câu 102. Chọn A. ✓ Trong nửa khoảng $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$:

$$\text{Hàm số } y = \sin x \text{ giảm nên } \sin \frac{3\pi}{2} \leq \sin x < \sin \frac{5\pi}{4} \Rightarrow -1 \leq \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

✓ Trong nửa khoảng $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$:

$$\text{Hàm số } y = \sin x \text{ tăng nên } \sin \frac{3\pi}{2} \leq \sin x < \sin \frac{7\pi}{4} \Rightarrow -1 \leq \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

✓ Vậy khi x thay đổi trong khoảng $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ thì $y = \sin x$ lấy mọi giá trị thuộc $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Câu 103. Chọn C.

$$\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -2 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy có hai điểm phân biệt biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

Câu 104. Chọn A. Điều kiện $\sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned} \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + l\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 105. Chọn C. Ta có $2\cos x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 106. Chọn D.

Cách 1: $8 \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 4 \sin 4x \cdot \cos 4x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 \sin 8x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 8x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 8x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Cách 2: Hàm số $y = 8 \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x = 4 \sin 4x \cdot \cos 4x = 2 \sin 8x$ có chu kỳ $T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

nên trong công thức nghiệm có $k\frac{\pi}{4}$. Do vậy, **Chọn D.**

Câu 107. Chọn B. ĐK: $x \neq k\frac{\pi}{2}$ ta có: $\tan x = \cot x \Rightarrow \tan^2 x - 1 = 0$

Do đó (1) $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

Kết hợp điều kiện vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 108. Chọn D. Xét phương trình $a \sin x + b \cos x + c = 0$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$. Vậy để phương trình vô nghiệm thì $a^2 + b^2 < c^2$.

Ta có: $2 \sin^2 x + m \cdot \sin 2x = 2m \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + m \cdot \sin 2x = 2m$
 $\Leftrightarrow m \cdot \sin 2x - \cos 2x - 2m + 1 = 0 (*)$.

Để phương trình (*) vô nghiệm thì $m^2 + (-1)^2 < (-2m + 1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases}.$

Câu 109. Chọn C. Ta có $\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$

Đối chiếu với điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Ta được nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Câu 110. Chọn D. Xét phương trình $a \sin x + b \cos x + c = 0$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$. Vậy để phương trình vô nghiệm thì $a^2 + b^2 < c^2$.

Ta có: $2 \sin^2 x + m \sin 2x = 2m \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + m \sin 2x = 2m$

$\Leftrightarrow m \sin 2x - \cos 2x - 2m + 1 = 0 (*)$.

Để phương trình (*) vô nghiệm thì $m^2 + (-1)^2 < (-2m + 1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases}$.

Câu 111. Chọn C. Ta có $\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$

Đối chiếu với điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Ta được nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Câu 112. Chọn B. Ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. Nghiệm thuộc khoảng $(0; 2018\pi)$ thì

$0 < \frac{\pi}{2} + k\pi < 2018\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{4035}{2} \Leftrightarrow k \in \{0, 1, 2, \dots, 2017\}$.

Vậy phương trình có 2018 nghiệm thuộc khoảng $(0; 2018\pi)$.

Câu 113. Chọn C. Vì hàm số $y = \cot x$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định nên loại ngay đáp án **B**.

Dựa vào đồ thị của các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ và $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ ta thấy hàm $y = \sin x$ và $y = \tan x$ thỏa.

Câu 114. Chọn B. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là

$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Do $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \in \left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ nên $-2\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} \leq k \leq \frac{9}{4} \Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại 5 điểm trên đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 115. Chọn A. Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 \leq 2 \sin x + 3 \leq 5; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \leq y \leq \sqrt{5}; \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 116. Chọn B. Ta có $f\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \tan(2x + k\pi) = \tan(2x) = f(x); \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow T_0 = \frac{\pi}{2}$

Câu 117. Chọn A. Nhìn vào đồ thị hàm số $y = \sin x$ ta thấy đồ thị hàm số là đường cong đi lên từ trái qua phải trong các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$ nên đáp án là **A**.

Câu 118. Chọn A. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1 = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

Câu 119. Chọn D. Dễ thấy với $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình đầu.

Với $\cos x \neq 0$, chia 2 vế cho $\cos^2 x$, ta có: $\tan^2 x - 4 \tan x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \cot x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 120. Chọn A. Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 121. Chọn C. Ta có: $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ nên $0 \leq m - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$ thì phương trình có nghiệm.

Câu 122. Chọn A. Để phương trình đã cho vô nghiệm thì $3^2 + m^2 < 5^2 \Leftrightarrow m^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Câu 123. Chọn B. • $y = f(x) = \cos x$ là hàm số chẵn vì:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, nên $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.

• $y = g(x) = \sin x$ là hàm số lẻ vì:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, nên $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $g(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -g(x)$.

• $y = h(x) = \tan x$ là hàm số lẻ vì:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, nên

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $h(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -h(x)$.

• $y = k(x) = \cot x$ là hàm số lẻ vì:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, nên

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $k(-x) = \cot(-x) = -\cot x = -k(x)$.

Câu 124. Chọn B. $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{ k\pi, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}, l \in \mathbb{Z} \right\}$

Câu 125. Chọn A. Xét phương trình: $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \cos(90^\circ - x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + 15^\circ = 90^\circ - x + k360^\circ \\ \frac{x}{2} + 15^\circ = -90^\circ + x + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = 75^\circ + k360^\circ \\ \frac{x}{2} = 105^\circ - k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50^\circ + k120^\circ \\ x = 210^\circ - k720^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy $290^\circ = 50^\circ + 2.120^\circ \in X$.

Câu 126. Chọn B. Phương trình tương đương với $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

Câu 127. Chọn B. Ta có: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Do $x \in (0; \pi) \Leftrightarrow 0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{3}{4}$. Mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$
 $\Rightarrow$ Phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$.

Câu 128. Chọn C. Ta có $x \in \left(0; \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ đồng biến.

Câu 129. Chọn C.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 - \cos^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Vậy tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 130. Chọn A. Ta có: $(\sin x + 1)(\sin 2x - m \sin x) = m \cos^2 x$ (*)

$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(\sin 2x - m \sin x - m + m \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 2x = m \end{cases}$ (2)

Để phương trình (*) có nghiệm trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ khi phương trình (2) có nghiệm trên

khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ hay $0 < x < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 < 2x < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 131. Chọn B. Ta có $\sqrt{3} \cos x + \sin x = -2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Câu 132. Chọn D. Ta có: $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Suy ra **A.** đúng.

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Suy ra **B.** đúng.

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Suy ra **C.** đúng.

Câu 133. Chọn D. Ta có $\cos 2x + 5 \sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow -2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x - 3)(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$ (vì $-1 \leq \sin x \leq 1$).

Vậy phương trình có họ nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 134. Chọn C. Phương trình $\cos 2x + m \sin 2x = 1 - 2m$ vô nghiệm khi:

$1 + m^2 < (1 - 2m)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}$. Vậy $m \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Câu 135. Chọn C. Ta có: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2$

$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 2x + \cos 6x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 5x \cos 3x + 2 \cos 5x \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos 5x(\cos 3x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 5x \cdot 2\cos 2x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x = 0.$$

Câu 136. Chọn A. $\sin 5x + \sin 9x + 2\sin^2 x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin 7x \cos 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow (2\sin 7x - 1)\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 7x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7} \\ x = \frac{5\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

Câu 137. Chọn B. Hàm số $y = \sin x \cos 3x$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$, nên $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ và có

$$y(-x) = \sin(-x)\cos(-3x) = -\sin x \cos 3x = -y(x) \text{ suy ra hàm số } y = \sin x \cos 3x \text{ là hàm số lẻ.}$$

Hàm số $y = \cos 2x$ là hàm số chẵn vì TXĐ: $D = \mathbb{R}$, nên $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ và $y(-x) = \cos(-2x) = \cos 2x = y(x)$.

Xét tương tự ta có hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, hàm số $y = \sin x + \cos x$ không chẵn cũng không lẻ.

Câu 138. Chọn C. Ta có $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{8} + l\pi \end{cases}$ với $k, l \in \mathbb{Z}$.

Trên khoảng $(0; \pi)$ ta có 2 nghiệm thỏa mãn tương ứng $k = 1$ và $l = 0$.

Câu 139. Chọn C. Hàm số $y = \frac{\cot x}{2\sin x - 1}$ xác định khi:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ 2\sin x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 140. Chọn C. Ta có $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1-2y$ (*)

$$\text{Phương trình (*) có nghiệm} \Leftrightarrow (y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1.$$

Vậy $m = -2$; $M = 1$.

Câu 141. Chọn A.

$$\text{Ta có: } \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 142. Chọn D. Ta có $2\cos 2x + 9\sin x - 7 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - 2\sin^2 x) + 9\sin x - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow -4\sin^2 x + 9\sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1, \sin x = \frac{5}{4} \text{ (vô nghiệm)} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Câu 143. Chọn D. Ta có: $3\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{1}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Trong khoảng $(0; 2\pi)$ phương trình $3\cos x - 1 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = -\arccos \frac{1}{3}$ và $x_2 = \arccos \frac{1}{3}$. Vậy tổng các nghiệm là $S = x_1 + x_2 = -\arccos \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{3} = 0$.

Câu 144. Chọn B.

Ta có: $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - 2\cos 3x \cdot \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x(1 - 2\sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \\ 1 - 2\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 145. Chọn D. Ta thấy $\cos x = 0$ không thỏa phương trình. Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$

$$\text{ta được: } 3\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan \frac{1}{3} + l\pi \end{cases}, (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $\arctan \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

Câu 146. Chọn C.

$$\cos 2x - \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \text{ (VN)} \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Với $x \in [0; 2\pi]$, ta có $0 \leq \pi + k2\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow k = 0$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 147. Chọn A. Do đồ thị đi qua ba điểm $(-\pi; 0)$, $(0; 2)$, $(\pi; 0)$ nên chọn phương án **A**.

Câu 148. Chọn A. $\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Với $0 < x < 2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3}.$

Câu 149. Chọn C. Ta có $\sin x \cos x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{4} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$

Câu 150. Chọn B.

$$\text{Ta có: } \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \alpha = -\frac{\pi}{6} \text{ và } \beta = -\frac{\pi}{3}. \text{ Khi đó } \alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}.$$

Câu 151. Chọn C. Ta có $2\sin x - 3\cos x = 1$ có $a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13 > c^2 = 1$ nên phương trình có nghiệm.

Câu 152. Chọn D. Phương trình $m\sin x - 3\cos x = 5$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 3^2 \geq 5^2 \Leftrightarrow m^2 \geq 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}.$

Câu 153. Chọn C. Hàm số $y = \frac{\tan x}{\cos x - 1}$ xác định khi: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{Vậy tập xác định là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 154. Chọn D. Ta có $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$

Câu 155. Chọn C. Ta có $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } 0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < -\frac{\pi}{8} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{17}{8}$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{1; 2\} \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{8}; x_2 = \frac{15\pi}{8}$$

$$\text{Vậy } x_1 + x_2 = \frac{11\pi}{4}.$$

Câu 156. Chọn D.

$$\text{Ta có phương trình } \sin 5x \cos 7x = \cos 4x \sin 8x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 12x - \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 12x + \sin 4x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 3x \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (I).$$

$$\text{Vì } x \in (0; 2\pi) \text{ nên từ (I) suy ra } x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

$$\text{Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là } \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 7\pi.$$

Câu 157. Chọn B. Phương trình tương đương với $\cos x(2\sin x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases} (L)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất $x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 158. Chọn B. Ta có $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Với $k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$ hoặc $x = \frac{7\pi}{6}$.

Điểm biểu diễn của $x = -\frac{\pi}{6}$ là F , điểm biểu diễn $x = \frac{7\pi}{6}$ là E .

Câu 159. Chọn D.

Ta có $(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x \Leftrightarrow (\cos x + 1)[\cos 2x - m \cos x + m(\cos x - 1)] = 0$

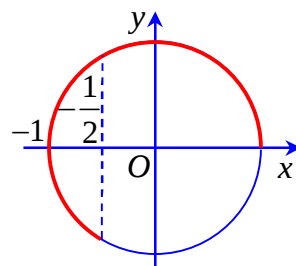
$\Leftrightarrow (\cos x + 1)[\cos 2x - m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = m & (1) \\ \cos x = -1 & (2) \end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vì $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

Theo đề phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ nên phương trình (1) có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Ta có $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ nên $2x \in \left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$.

Do đó (1) có hai nghiệm phân biệt khi $m \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.



Câu 160. Chọn A. Mệnh đề A. đúng vì $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

B. sai vì $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

C. sai vì $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

D. sai vì $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 161. Chọn D. Ta có $\cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow x = k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác ta có tập các nghiệm của phương trình (1)

đồng thời là nghiệm của phương trình (2) là $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 162. Chọn D. Điều kiện $5x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} (*)$

Phương trình tương đương $\cos 3x \cdot \sin 5x - \sin 7x \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$.

Ta thấy $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{10}$ không thỏa mãn điều kiện (*) nên loại đáp án A, B, C.

Vậy đáp án đúng là D.

Câu 163. Chọn B. Ta có: $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Do số đo một góc là nghiệm nên $x = \frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3}$ thỏa mãn.

Vậy tam giác có số đo ba góc là $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ hoặc $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.

Câu 164. Chọn B. + Ta có: $\cos^2 x + \frac{5}{2}\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} & (n) \\ \cos x = -2 & (l) \end{cases}$.

Suy ra: $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

+ Với $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vì $x \in (0; 3\pi)$ nên $0 < \frac{2\pi}{3} + k2\pi < 3\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{7}{6}, k \in \mathbb{Z}$. Suy ra: $k \in \{0; 1\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right\}$.

+ Với $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vì $x \in (0; 3\pi)$ nên $0 < -\frac{2\pi}{3} + k2\pi < 3\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{11}{6}, k \in \mathbb{Z}$. Suy ra: $k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$.

Do đó $x \in \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right\}$.

Vậy số nghiệm của phương trình là 3.

Câu 165. Chọn A. Điều kiện có nghiệm của phương trình là $m^2 + 1^2 \geq \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow m^2 \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

Câu 166. Chọn A. $y = \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1}$.

Vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\sin x \in [0; 1]$. Do đó hàm số đã cho xác định trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$y = \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1} \Rightarrow y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x + 1)^2} = \frac{-1}{(\sin x + 1)^2} < 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra hàm số luôn nghịch biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Do đó: $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = y(0) = 2; \min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{1}{2}$. Vậy tập giá trị của hàm số đã cho là $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 167. Chọn C. $\sin 2x \cos x = \sin 7x \cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin x + \sin 3x) = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin 11x)$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin 11x \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = x + k2\pi \\ 11x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 168. Chọn B. Ta có $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow \sin x \in [-1; 1]$

Khi đó: $\cos(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \sin x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ với $-1 \leq k2\pi \leq 1 \Leftrightarrow k = 0$.

Phương trình trở thành $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z}).$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng π .

Câu 169. Chọn C. Ta có: $\sin 3x - 3\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x + 3\cos x = 2$

$$\Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x - 2\sin 2x) + (-\sin 2x + 2\sin x) + (-\cos 2x + 3\cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x(\cos x - 1) - 2\sin x(\cos x - 1) - (\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0.$$

Câu 170. Chọn C. Ta có: $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 171. Chọn C. $\square$ Ta có hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ và hàm số $y = \cot x$

có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ nên cả hai hàm số này đều không thỏa yêu cầu.

$\square$ Xét hàm số $y = \sin 2x$: Ta có $\sin 2(x + k\pi) = \sin(2x + k2\pi) = \sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

$\square$ Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π nên không thỏa yêu cầu.

Câu 172. Chọn C. Ta có: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Với điều kiện } x \in (0; \pi).$

Ta có:

$$0 < \frac{\pi}{6} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{5}{6} \Rightarrow k = 0, \text{ khi đó: } x = \frac{\pi}{6}.$$

$$0 < \frac{5\pi}{6} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} < k < \frac{1}{6} \Rightarrow k = 0, \text{ khi đó: } x = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi.$$

Câu 173. Chọn B. Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

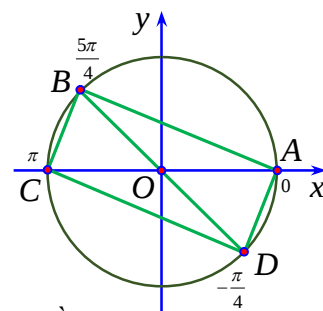
Với điều kiện trên, phương trình trở thành $\tan x + \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = 1$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + \tan x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + m\pi \end{cases}, m \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Gọi $A(1;0)$, $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(-1;0)$ và $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ là các điểm biểu diễn tập nghiệm của

phương trình đã cho. Ta có tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$; $AD = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Khi đó $S_{ABCD} = AB \cdot AD = \sqrt{2} \approx 1,41$.



Câu 174. Chọn C. Chu kỳ của $\sin \frac{x}{2}$ là $T_1 = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$ và Chu kỳ của $\cos \frac{3x}{2}$ là $T_2 = \frac{2\pi}{\left|\frac{3}{2}\right|} = \frac{4\pi}{3}$

Chu kỳ của hàm ban đầu là bội chung nhỏ nhất của hai chu kỳ T_1 và T_2 vừa tìm được ở trên.

Chu kỳ của hàm ban đầu $T = 4\pi$

Câu 175. Chọn C. Ta có: $\sqrt{2} \cos 3x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vì $x \in (0; \pi)$ nên nhận $x = \frac{7\pi}{8}$, $x = \frac{\pi}{16}$, $x = \frac{9\pi}{16}$.

Câu 176. Chọn B. + Phương trình tương đương $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

+ Với $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ nên $0 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq \frac{5\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{7}{6}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1\}$.

Suy ra: $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$.

+ Với $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ nên $0 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq \frac{5\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{5}{6}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0$.

Suy ra: $x = \frac{5\pi}{6}$.

Do đó $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$. Vậy số nghiệm của phương trình là 3.

Câu 177. Chọn B. $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right)^2 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{5}{8}$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 2x) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Mà $x \in (0; 2\pi)$ nên $x \in \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$.

Khi đó tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình là $x > 0$.

Câu 178. Chọn A. Hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Suy ra $x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 179. Chọn D. Ta có $\max_{x \in \mathbb{R}} (\sin x + \cos x) = \sqrt{2} = M$, $\min_{x \in \mathbb{R}} (\sin x + \cos x) = -\sqrt{2} = m$, $M - m = 2\sqrt{2}$. Vì phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất nên chọn đáp án D (chênh lệch giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất bằng 2).

Câu 180. Chọn D. Hàm số xác định:

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \cos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos x \neq 1 + 2k \Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 181. Chọn B. $2\sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 182. Chọn B. Cách 1: Ta có: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq \sin x \leq \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\max_{\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]} y = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\min_{\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]} y = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Cách 2: Xét hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$

+ Ta có: $y' = \cos x \geq 0, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]; y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right)$.

Vậy $\max_{\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]} y = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\min_{\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]} y = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Câu 183. Chọn C. Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sin x \geq 0 \\ 1 + \sin x \geq 0 \end{cases}$.

Hàm số xác định khi $1 + \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 184. Chọn B. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Phương trình trở thành: $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 185. Chọn A.

Ta có $\cot \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $\begin{cases} m=6 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow m-n=5$.

Câu 186. Chọn A. Ta có $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} & (L) \\ \cos x = -\frac{1}{2} & (N) \end{cases}$.

Với $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là 2.

Câu 187. Chọn A. Phương trình $(2m-1)\sin 3x + m\cos 3x = 3m-1$ có nghiệm khi

$$(2m-1)^2 + m^2 \geq (3m-1)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$$

Câu 188. Chọn C. Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Câu 189. Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ với $|t| \leq \sqrt{2}$.

Khi đó $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow 2\sin x \cos x = 1 - t^2$;

Phương trình (2) trở thành $t - 1 + t^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 4 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy tổng các nghiệm là $\frac{\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{17\pi}{6} = 6\pi$.

Câu 190. Chọn D. Ta có $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Suy ra số nghiệm thuộc $[\pi; 2\pi]$ của phương trình là 1.

Câu 191. Chọn C. Ta có: $\cos 2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 4\cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 4\cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = \frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + 4\cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = \frac{5}{2}.$$

Đặt $t = \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right), |t| \leq 1$ ta được phương trình: $1 - 2t^2 + 4t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4t^2 - 8t + 3 = 0$.

Câu 192. Chọn C. Điều kiện xác định: $\tan x \neq -\sqrt{3}$.

Phương trình tương đương: $2 \sin x \cos x + 2 \cos x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \text{ Do } \tan x \neq -\sqrt{3} \text{ nên } x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ loại.}$$

$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác có 1 điểm.

$x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác có 1 điểm.

Vậy có 2 vị trí biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

Câu 193. Chọn B. Điều kiện xác định $\sin x \neq 1$.

$$\text{Phương trình tương đương } (2 \cos x - 1) \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ và } \sin x \neq 1 \text{ nên } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ Do đó } T = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 194. Chọn A. Ta có $\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12}\right) \leq 1 \Rightarrow 3 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12}\right) \leq 3 \Rightarrow 3 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12}\right) + 4 \leq 7$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 7.

Câu 195. Chọn C.

Ta có $3 \sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 196. Chọn A. ĐK $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Phương trình tương đương

$$\tan^2 x - (\sqrt{3} + 1) \tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 197. Chọn B.

Ta có $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 198. Chọn D.

$$\text{Ta có: } \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 199. Chọn A. $2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}.$

Các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; \pi]$ là $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$ nên có tổng là $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$.

Câu 200. Chọn D.

$$\text{Ta có } \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } x \in [-2\pi; 2\pi] \text{ nên } -2\pi \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{3} \leq k \leq \frac{5}{3}.$$

Do đó có 4 giá trị k , tương ứng có bốn nghiệm x .

Câu 201. Chọn B. Điều kiện để phương trình có nghiệm là $m^2 + 1 \geq (m - 2)^2 \Leftrightarrow m^2 + 1 \geq m^2 - 4m + 4$

$$\Leftrightarrow 4m \geq 3 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{4}.$$

Câu 202. Chọn B. Ta có $\sin x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{cases}.$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Xét $x \in [0; 20\pi]$:

$$\text{Với } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \text{ ta có } 0 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{119}{12}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên (có 10 giá trị } k).$$

$$\text{Với } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \text{ ta có } 0 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{115}{12}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên (có 10 giá trị } k).$$

$$\text{Với } x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \text{ ta có } 0 \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 20\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{41}{4}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên (có 10 giá trị } k).$$

Vậy phương trình đã cho có 30 nghiệm thuộc đoạn $[0; 20\pi]$.

Câu 203. Chọn C. Điều kiện để phương trình $m \sin x + 4 \cos x = 2m - 5$ có nghiệm là

$$m^2 + 16 \geq (2m - 5)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 20m + 9 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{10 - \sqrt{73}}{3} \leq m \leq \frac{10 + \sqrt{73}}{3}.$$

Câu 204. Chọn C. Ta có $\sqrt{3} \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x = \sin(2x - \pi)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x = -\sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x = -2 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài ra $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ nên $k\pi \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right] \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = -\pi$.

$$\frac{5\pi}{6} + k2\pi \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right] \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = -\frac{7\pi}{6}.$$

$$-\frac{5\pi}{6} + k2\pi \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right] \Rightarrow k \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Do đó số nghiệm thuộc $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ của phương trình đã cho là 2.

Câu 205. Chọn B. Ta có $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$.

Từ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$ nên $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

Do đó $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3}$

$$= (2\cos^2 \alpha - 1) \cdot \frac{1}{2} + 2\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha = -1.$$

Câu 206. Chọn B. Phương trình $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 207. Chọn B. Ta có $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 208. Chọn A. Ta có $2m \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = m + 5 \Leftrightarrow m \sin 2x + 4 \frac{1 + \cos 2x}{2} = m + 5$

$$\Leftrightarrow m \sin 2x + 2 \cos 2x = m + 3.$$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $m^2 + 4 \geq (m + 3)^2 \Leftrightarrow m \leq \frac{-5}{9}$.

Vậy có ba giá trị của $m \in E$ để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 209. Chọn A. Ta có $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Câu 210. Chọn B. Ta có $2\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 8\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x(4\sin^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài ra $x \in [0; 2018\pi]$ nên $\frac{\pi}{2} + k\pi \in [0; 2018\pi] \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 2017\}$.

Do đó số nghiệm của phương trình $2\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$ trong $[0; 2018\pi]$ là 2018.

Câu 211. Chọn A. Hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 212. Chọn B. Ta có $\cos 2x + 2\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -2 \end{cases}. \text{ Vì } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ nên } \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 213. Chọn D. Ta có $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sin 3x \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3}\sin x - \sin \frac{\pi}{3}\cos x = \sin 3x \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = 3x + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - 3x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} - k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 214. Chọn B. Ta có $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Trên đoạn $[0; 4035\pi]$, các giá trị $k \in \mathbb{Z}$ thỏa bài toán thuộc tập $\{0; 1; 2; \dots; 2016\}$.

Do đó có 2017 nghiệm của phương trình thuộc đoạn $[0; 4035\pi]$.

Câu 215. Chọn A. Ta có: $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Do $x \in (0; 2\pi)$ nên ta có $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 216. Chọn A. $\cos 2x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x = 0 \Rightarrow -2t^2 + t = 0$.

Câu 217. Chọn C. Phương trình $4\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2m - 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$(4\sqrt{3})^2 + 1^2 \geq (2m - 1)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 48 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 4.$$

Vì m là số nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 218. Chọn C.

Ta có $2\cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 219. Chọn A. Đặt $t = \sin x + \cos x$, $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$. Khi đó: $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$, phương trình đã cho

trở thành: $\frac{t^2 - 1}{2} + 2t = 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -5 \end{cases}$.

Với $t = -5$ loại do $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Với $t = 1$ ta có: $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$. Với $x_0 = 2k\pi$ thì $P = 3 + \sin 2(2k\pi) = 3$.

Với $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ thì $P = 3 + \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 3$. Vậy $P = 3$.

Cách khác: Khi $t = 1$ thì x_0 là nghiệm của pt $\sin x + \cos x = 1$. Suy ra $\sin x_0 + \cos x_0 = 1 \Rightarrow 1 + \sin 2x_0 = 1 \Rightarrow \sin 2x_0 = 0 \Rightarrow P = 3$.

Câu 220. Chọn A. Ta có $\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Do $0 < x < \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 221. Chọn C. Đặt $t = |\sin x + \cos x|$, $(0 \leq t \leq \sqrt{2})$

$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Phương trình đã cho trở thành:

$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (thỏa mãn) hoặc $t = -3$ (loại).

Với $t = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$.

Trong khoảng $(0; 2\pi)$ các nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Suy ra tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2\pi)$ là 3π .

Câu 222. Chọn D. Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 223. Chọn A. Ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2\cos x \leq 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $M = -1$ tại $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 224. Chọn C.

$4\sin x + (m - 4)\cos x - 2m + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\sin x + (m - 4)\cos x = 2m - 5$.

Phương trình có nghiệm khi $4^2 + (m-4)^2 - (2m-5)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m + 7 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{57}}{3} \leq m \leq \frac{6+\sqrt{57}}{3}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm là 10.

Câu 225. Chọn B. $\sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x \Leftrightarrow \cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Do $x \in [0; 2\pi]$ nên $x = \left\{0; \pi; 2\pi; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$. Vậy có 5 nghiệm.

Câu 226. Chọn D. Dựa vào định nghĩa đường tròn lượng giác ta thấy hàm số lượng giác cơ bản $y = \sin x$ đồng biến ở góc phần tư thứ nhất và góc phần tư thứ tư.

Dễ thấy khoảng $\left(\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$ là phần thuộc góc phần tư thứ tư và thứ nhất nên hàm số đồng biến.

Câu 227. Chọn C. Điều kiện xác định: $\cos 4x \neq 0$.

$$\cos 3x \cdot \tan 4x = \sin 5x \Leftrightarrow \cos 3x \cdot \sin 4x = \sin 5x \cdot \cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 9x + \sin x)$$

$$\sin 9x = \sin 7x \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 7x + k2\pi \\ 9x = \pi - 7x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

Thử qua điều kiện xác định ta thấy $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8}$ thỏa mãn.

$$\text{Vậy nghiệm phương trình là } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

Câu 228. Chọn C.

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi; (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi; (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 229. Chọn D. $2\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Mà } x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right] \text{ và } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}.$$

Câu 230. Chọn C. Ta có $y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5 = \cos 2x - \sin 2x + 6 = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 6$.

Do $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ nên $-\sqrt{2} + 6 \leq \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \leq \sqrt{2} + 6$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5$ là $6 - \sqrt{2}$.

Câu 231. Chọn C. Phương trình $\sqrt{3} \sin x + \cos x = m$ có nghiệm khi

$$(\sqrt{3})^2 + 1 \geq m^2 \Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Câu 232. Chọn A. $\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 233. Chọn B.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 3 \sin^2 x + 2m \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x = 0 \quad (1)$$

Với $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1$, thay vào (1) ta có $3.1 + m.0 - 4.0 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$ (vô lý).

Do đó $\cos x = 0$ không thỏa mãn.

Với $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ ta được $3 \tan^2 x + 2m \tan x - 4 = 0$.

$$\text{Đặt } t = \tan x, \text{ ta có } 3t^2 + 2mt - 4 = 0 \quad (2)$$

Phương trình bài ra có nghiệm khi (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 12 \geq 0$ luôn đúng với $\forall m \in \mathbb{R}$ vì $m^2 + 12 \geq 12 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì phương trình bài ra có nghiệm.

Câu 234. Chọn D. Ta có: $a \sin^2 x + 2 \sin 2x + 3a \cos^2 x = 2 \Leftrightarrow a \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2 \sin 2x + 3a \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2$
 $\Leftrightarrow 4 \sin 2x + 2a \cos 2x = 4 - 4a (*)$.

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow 16 + 4a^2 \geq (4 - 4a)^2 \Leftrightarrow 12a^2 - 32a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{8}{3}.$$

Câu 235. Chọn A. $\cos 2x - (2m - 3) \cos x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - (2m - 3) \cos x + m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 2 - m) = 0 \Leftrightarrow \cos x + 2 - m = 0, \text{ vì } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos x = m - 2$$

$$\text{Ycbt } \Leftrightarrow -1 \leq m - 2 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq m < 2$$

Câu 236. Chọn C. Ta có $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Do đó các nghiệm trên $[0; 2\pi]$ của phương trình là $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{2}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình trên $[0; 2\pi]$ bằng $\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{3}$.

Câu 237. Chọn C.

$$\text{Để phương trình } \sin x + (m + 1) \cos x = \sqrt{2} \text{ vô nghiệm thì } 1^2 + (m + 1)^2 < (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow -2 < m < 0.$$

Câu 238. Chọn D.

Do $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình có nghiệm khi $0 \leq m-1 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$

Câu 239. Chọn C. Cách 1: Ta có: $\sin 2x + 2\sin^2 x - 6\sin x - 2\cos x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (2\sin x \cos x - 2\cos x) + (2\sin^2 x - 6\sin x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - 1) + 2(\sin x - 2)(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(\sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x + \cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Cách 2: Dùng MTCT thử lần lượt các đáp án, thấy C là đáp án đúng.

Câu 240. Chọn C. Ta có: $\sin(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Vì $|\cos x| \leq 1$ nên $k = 0$. Do đó phương trình $\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$

Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$.

Câu 241. Chọn B. Ta có: $-\sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1} \leq (2+\sqrt{3})\sin x - \cos x \leq \sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1}$.

Vậy $M + m = 0$.

Câu 242. Chọn B. Mệnh đề A sai vì hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Mệnh đề C sai vì hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

Mệnh đề D sai vì hàm số $y = \sin x$ không có tiệm cận ngang.

Mệnh đề B đúng vì hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$.

Câu 243. Chọn D. Ta có:

$$\cos^3 2x - \cos^2 2x = m \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 2x(\cos 2x - 1) = m \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x(2\cos^2 2x + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + m = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -m - 1.$$

$$\text{Có } x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 4x \in \left(0; \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos 4x < 1$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm } x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \text{ thì } -\frac{1}{2} < -m - 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{1}{2}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -1$.

Câu 244. Chọn B. $a \sin^2 x + 2\sin 2x + 3a \cos^2 x = 2 \Leftrightarrow a \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2\sin 2x + 3a \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2$

$$\Leftrightarrow a - a \cos 2x + 4\sin 2x + 3a + 3a \cos 2x = 4 \Leftrightarrow 4\sin 2x + 2a \cos 2x = 4 - 4a \quad (*)$$

$$(*) \text{ có nghiệm khi } 4^2 + 4a^2 \geq (4 - 4a)^2 \Leftrightarrow 12a^2 - 32a \leq 0 \Leftrightarrow 12a^2 - 32a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{8}{3}.$$

Do $a \in \mathbb{Z}$ và là số lớn nhất nên $a = 2$.

Câu 245. Chọn D. Ta có: $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{9}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 246. Chọn C. $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3 \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét } 0 < x \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow k = 0, k = 1, k = 2.$$

$$\text{Với } k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}; k = 1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}; k = 2 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{6}.$$

Vậy tổng các nghiệm bằng $\frac{7\pi}{2}$.

Câu 247. Chọn C. Ta có $y = \frac{2\cos x + 1}{\cos x - 2} = 2 + \frac{5}{\cos x - 2}$,

$$\text{mà } -1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq \cos x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \geq \frac{5}{\cos x - 2} \geq -5 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq 2 + \frac{5}{\cos x - 2} \geq -3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3} \geq y \geq -3. \text{ Vậy } M = \frac{1}{3} \text{ và } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 9M + m = 0.$$

Câu 248. Chọn D. Dễ thấy $\cos 2x = 0$ không thỏa mãn phương trình. Do đó, phương trình đã cho tương đương với:

$$4\tan^2 2x - 3\tan 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 2x = 1 \\ \tan 2x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{Xét (1), vì } x \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow k \in \{1\} \text{ (do } k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét (2), vì } x \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow k \in \{1; 2\} \text{ (do } k \in \mathbb{Z}).$$

Do đó, trong khoảng $(0; \pi)$ thì phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 249. Chọn B. Ta có $\cos x - \cos 2x - \cos 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x - (2\cos^2 x - 1) - (4\cos^3 x - 3\cos x) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 4\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{x \in [0; \pi]} \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2\pi}{3} \\ x = \pi \end{cases}.$$

Câu 250. Chọn B. Ta có: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$.

Mà $x \in (-\pi; \pi) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}$. Vậy phương trình có hai nghiệm thỏa mãn đề bài.

Câu 251. Chọn D.

$$2\cos 2x + 9\sin x - 7 = 0 \Leftrightarrow -4\sin^2 x + 9\sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{5}{4} \text{ (VN)} \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 252. Chọn D. Ta có: $3\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \text{ (với } \alpha \in (0; \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z} \text{)}.$

Mà $x \in [0; 4\pi]$ nên $x \in \{\alpha; -\alpha + 2\pi; \alpha + 2\pi; -\alpha + 4\pi\}$.

Vậy tổng các nghiệm thỏa mãn đề bài là $\alpha + (-\alpha) + 2\pi + \alpha + 2\pi + (-\alpha) + 4\pi = 8\pi$.

Câu 253. Chọn C. Ta có $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Mỗi họ nghiệm biểu diễn trên đường tròn lượng giác 2 điểm và các điểm khác nhau nên số điểm biểu diễn các nghiệm là 4.

Câu 254. Chọn A. Hai điểm M, N đối xứng qua trục Ox nên loại đáp án C, D.

MN cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.

Ta có $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$, suy đáp án A đúng.

Câu 255. Chọn C. Ta có $f(x) = 2\sin^2 x - \sin 2x + 10 = 11 - \sin 2x - \cos 2x = 11 - \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Do $-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ nên $11 - \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 11 + \sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. Vậy $\max f(x) = 11 + \sqrt{2}$.

Câu 256. Chọn C. Phương trình tương đương: $\cos x + \sin^{2018} 5x = -m$.

Ta có: $\begin{cases} \cos x \geq -1 \\ \sin^{2018} 5x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x + \sin^{2018} 5x \geq -1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin 5x = 0 \end{cases}$.

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$. Khi đó $\sin 5x = \sin[5(\pi + k2\pi)] = \sin 5\pi = 0$ thỏa mãn.

Phương trình có nghiệm thì $-m \geq -1 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của m là $m = 1$.

Câu 257. Chọn B. Ta có $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Khi đó $\pi \leq x \leq 2018\pi \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq k \leq \frac{8071}{4} \Leftrightarrow 1 \leq k \leq 2017$ (Do k là số nguyên).

Vậy trên đoạn $[\pi; 2018\pi]$ phương trình đã cho có 2017 nghiệm.

Câu 258. Chọn B. Ta có $\sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vì $x \in [-2018\pi; 2018\pi]$ nên

+ Với $x = \frac{k\pi}{2}$ ta có $-2018\pi \leq \frac{k\pi}{2} \leq 2018\pi \Leftrightarrow -4036 \leq k \leq 4036$. Suy ra có 8073 nghiệm.

+ Với $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ ta có $-2018\pi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \leq 2018\pi \Leftrightarrow -\frac{12109}{2} \leq k \leq \frac{12107}{2}$. Suy ra có 12108 nghiệm.

Vậy có $8073 + 12108 = 20181$ nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$.

Câu 259. Chọn B.

Ta có $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

Họ nghiệm $x = \pi + k2\pi$ không có nghiệm nào thuộc khoảng $(0; \pi)$.

$$x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow l \in \{0; 1\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$. Từ đó suy ra tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình này bằng π .

Câu 260. Chọn C. Ta có: $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

Câu 261. Chọn C. Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} + 2\sin x \cos x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin x \cos x \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Suy ra nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình lần lượt là $-\frac{2\pi}{3}$ và $\frac{\pi}{6}$.

Ta có: $-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$.

Câu 262. Chọn B. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{\sin 2x + 2}{1 - \cos x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 263. Chọn A. Cách 1:

$$3\cos 2x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \arccos \frac{2}{3} + k2\pi \\ 2x = -\arccos \frac{2}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{3} + k\pi \\ x = -\frac{1}{2} \arccos \frac{2}{3} + k\pi \end{cases}.$$

Xét trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ta có

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{3} + \pi \\ x = -\frac{1}{2} \arccos \frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{2} \arccos \frac{2}{3} + \pi \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Câu 264. Chọn B. Ta có: $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0 \Leftrightarrow (2\cos 2x + 5)(\sin^2 x - \cos^2 x) + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -(2\cos 2x + 5)\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2(2x) - 5\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}.$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

Do đó: $S = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = 4\pi$.

Câu 265. Chọn D. Cách 1: Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$ với $l \in \mathbb{Z}$.

Khi đó phương trình trở thành

$$\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \quad (1) \text{ hoặc } \sin x = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Đối chiếu điều kiện ta loại phương trình (1). Giải phương trình (2) được

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 266. Chọn B. Cách 1: $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1 \Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = y - 1$

Để phương trình trên có nghiệm thì $1^2 + (\sqrt{3})^2 \geq (y-1)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3$.

Suy ra $y \in [-1; 3]$. Vậy $T = -1 + 3 = 2$.

Cách 2: Ta có $y - 1 = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$. Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopskii ta có

$$(y-1)^2 = (\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x)^2 \leq (1+3)(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 4 \Leftrightarrow -2 \leq y-1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3.$$

Vậy $T = -1 + 3 = 2$.

Cách 3: $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1 = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1$

Do $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \in [-1; 1]$ nên $2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1 \in [-1; 3]$.

Vậy $-1 \leq y \leq 3$. (Ta thấy $y = -1$ khi $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -1$, $y = 3$ khi $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$).

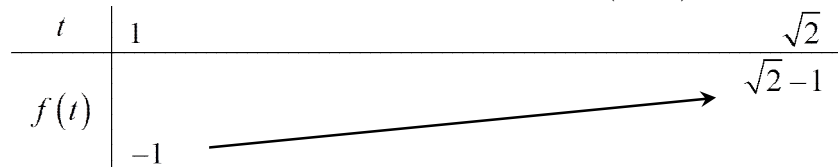
Câu 267. Chọn C. Đặt $t = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin x + \cos x$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Suy ra $t^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow t^2 + t - 3 = m$

Xét hàm số $y = f(t) = t^2 + t - 3$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Ta có bảng biến thiên:

Phương trình $\sin 2x + \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 2 = m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{4} \right)$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $t^2 + t - 3 = m$ có đúng một nghiệm $t \in (1; \sqrt{2})$



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $K = (-1; \sqrt{2}-1) \subset \left(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

Câu 268. Chọn D. Dễ thấy với $m = 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $m \neq 0$, ta có: $m \cdot \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{m}$ (1).

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$

$\left| -\frac{1}{m} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|m|} \leq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq 0$).

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ nên $m \in \{-2018; -2017; \dots; -1; 1; 2; \dots; 2018\}$.

$\Rightarrow$ có 4036 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 269. Chọn D. Ta có: $-1 \leq \cos \left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Leftrightarrow 9 \leq h \leq 15$. Do đó mực nước cao nhất của kênh là 15m

đạt được khi $\cos \left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = -2 + 12k$

Vì $t > 0 \Leftrightarrow -2 + 12k > 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{6}$

Chọn số k nguyên dương nhỏ nhất thỏa $k > \frac{1}{6}$ là $k = 1 \Rightarrow t = 10$.

Câu 270. Chọn D. Phương trình đã cho có nghiệm khi $-1 \leq 3m - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq 3m \leq 6 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq m \leq 2$.

Khi đó tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm là $\left[\frac{4}{3}; 2 \right]$.

Ta được $a = \frac{4}{3}$; $b = 2$. Suy ra $3a + b = 6$.

Câu 271. Chọn D. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn $k = 0$, ta được hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét A: Hàm số $y = \cot x$ không xác định tại $x = 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên không thể đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Xét B: Ta thấy $\begin{cases} \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} \\ -\tan \frac{\pi}{4} < -\tan \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số $y = -\tan x$ không thể đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Xét C: Ta thấy $\begin{cases} \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} \\ \cos \frac{\pi}{4} > \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số $y = \cos x$ không thể đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Thực hiện chuyển đơn vị: Shift mode 4.Rad.

Vào mode 7, nhập hàm $y = \cot x$, START $-\frac{\pi}{2}$, END $\frac{\pi}{2}$, STEP $\frac{\pi}{19}$. Nhìn bảng thấy giá trị hàm số luôn giảm nên sai.

Tương tự với các hàm còn lại, chọn kết quả $y = \sin x$ có giá trị hàm số luôn tăng.

Câu 272. Chọn D. Ta có $2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in [-2\pi; 2\pi]$ nên ta có $-2\pi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leq k \leq \frac{7}{2}$.

Mặt khác $k \in \mathbb{Z}$ nên k nhận các giá trị $-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$.

Vậy phương trình đã cho có tám nghiệm trên $[-2\pi; 2\pi]$.

Câu 273. Sai ở bước biến đổi: $\sin^2 x = \frac{1}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Do đó chọn đáp án **B**.

Câu 274. Chọn D. Ta có $\cos 2x + 5\cos 5x + 3 = 10\cos 2x \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 5\cos 5x + 3 = 10 \cdot \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 5\cos 5x + 3 = 5\cos 5x + 5\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 > 1 \text{ (L)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 275. Chọn A. Ta có $\cos^2 x + 2\cos 3x \cdot \sin x - 2 = 0, x \in (0; \pi)$.

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x \cdot \sin x = 1 + \sin^2 x \Leftrightarrow 2\cos 3x = \sin x + \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

Do $x \in (0; \pi)$ nên $\sin x > 0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\sin x$ và $\frac{1}{\sin x}$ ta

$$\text{có } \sin x + \frac{1}{\sin x} \geq 2\sqrt{\sin x \cdot \frac{1}{\sin x}} = 2.$$

Mặt khác, ta có $2\cos 3x \leq 2$ với mọi x . Vậy (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases}$

Từ $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ (do $x \in (0; \pi)$); lúc đó $\cos 3x = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$. Hệ trên vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

Câu 276. Chọn C. Do $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $\cos x + 2 \geq 1$ với mọi giá trị thực của x , vậy hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{\cos x + a \sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow a \sin x + (1 - y) \cos x = 2y - 1 \quad (1).$$

Điều kiện để (1) có nghiệm là

$$a^2 + (1 - y)^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 2y - a^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \leq y \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của y bằng $\frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}$. Theo giả thiết, ta có

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 3a^2} = 2 \Leftrightarrow 3a^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}.$$

Vậy có hai giá trị thực của tham số a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 277. Chọn D. Ta có $\sin 2x + 4\sin x - 2\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x + 4\sin x - 2\cos x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x + 2) - 2(\cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 2)(\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = -2 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Cách 1: Trong đoạn $[0; 100\pi]$, phương trình có các nghiệm

$$\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi; \frac{\pi}{2} + 4\pi; \frac{\pi}{2} + 6\pi; \dots; \frac{\pi}{2} + 98\pi$$

Tổng các nghiệm bằng

$$S = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2\pi + \frac{\pi}{2} + 4\pi + \frac{\pi}{2} + 6\pi + \dots + \frac{\pi}{2} + 98\pi = 50 \cdot \frac{\pi}{2} + (2 + 4 + 6 + \dots + 98) \cdot \pi$$

$$S = 25\pi + \frac{(2 + 98) \cdot 49}{2} \cdot \pi = 2475\pi.$$

Cách 2: Tìm k thỏa mãn $0 \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 100\pi \Rightarrow 0 \leq k \leq 49$

$$\text{Bấm máy } S = \sum_{k=0}^{49} \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi \right) = 2475\pi.$$

Câu 278. Chọn B. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y = 1 + 2\sin x \cos x - \cos^2 2x = 1 + \sin 2x - \cos^2 2x = \sin 2x + \sin^2 2x$$

$$y = \left(\frac{1}{2} + \sin 2x \right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$ đạt được khi $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 279. Chọn D. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sin x$, vì $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ nên $t \in (-1; 0)$.

Khi đó hàm số trở thành $y = 3mt^3 - t^2 + t + m - 2, \quad t \in (-1; 0) \quad (1)$

$$y' = 9mt^2 - 2t + 1$$

Để hàm số (1) đồng biến thì $y' \geq 0 \quad \forall t \in (-1; 0)$

$$\Leftrightarrow 9mt^2 - 2t + 1 \geq 0 \quad \forall t \in (-1; 0) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{2t-1}{9t^2} \text{ đặt } f(t) = \frac{2t-1}{9t^2}$$

Ta có $f'(t) = \frac{-2t+2}{9t^3} < 0 \quad \forall t \in (-1; 0)$

$$\text{Do đó } m \geq f(-1) = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } m \geq -\frac{1}{3}.$$

Câu 280. Chọn D. Ta có $(\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x) = \sin^2 3x \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin^2 2x = \sin^2 3x$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 4x}{2} = \sin^2 3x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x) = \sin^2 3x$$

$$\Leftrightarrow -\sin 3x \cdot \sin x = \sin^2 3x \Leftrightarrow \sin 3x(\sin x + \sin 3x) = 0.$$

Câu 281. Chọn D. Điều kiện $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

$$\text{Khi đó } \sqrt{4-x^2} \cdot \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2=0 \\ \cos 3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

So với điều kiện, ta thấy $x = \pm 2$ (thỏa điều kiện).

Với $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, ta có $-2 \leq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \leq 2$, vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = -2; k = -1; k = 0; k = 1$.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 282. Chọn C. Ta có $y = -1 + 2 \cos x \left[(2 - \sqrt{3}) \sin x + \cos x \right] = -1 + 2(2 - \sqrt{3}) \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$

$$= (2 - \sqrt{3}) \sin 2x + (2 \cos^2 x - 1) = (2 - \sqrt{3}) \sin 2x + \cos 2x$$

$$= (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cos 2x \right] = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(2x + \alpha)$$

$$(\text{với } \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \cos \alpha; \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \sin \alpha)$$

Suy ra $-\sqrt{6} + \sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Do đó $\max_{\mathbb{R}} y = \sqrt{6} - \sqrt{2} = M$; $\min_{\mathbb{R}} y = -\sqrt{6} + \sqrt{2} = N$.

Vậy $M + N + 2 = 2$.

Câu 283. Chọn C. Ta có $\cos 4x = \cos^2 3x + m \sin^2 x \Leftrightarrow 2(2\cos^2 2x - 1) = 1 + \cos 6x + m - m \cos 2x$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 2 = 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + m - m \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - (m+3)\cos 2x + m+3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x(\cos 2x - 1) - (m+3)(\cos 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)(4\cos^2 2x - m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ 4\cos^2 2x = m + 3 \end{cases}$$

Với $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Phương trình có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{12}\right)$ suy ra $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos 2x < 1$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} < \frac{m+3}{4} < 1 \Leftrightarrow 3 < m+3 < 4 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Câu 284. Chọn B. Ta có $\sqrt{3} \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \cos \frac{3\pi}{2} \cos 2x + \sin \frac{3\pi}{2} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pm 5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$ ta nhận được nghiệm duy nhất $x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi = \frac{-7\pi}{6}$.

Câu 285. Chọn D. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 3}$$

$$\Leftrightarrow y(\sin x - \cos x + 3) = \sin x + \cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow (y-1)\sin x - (y+1)\cos x = -1-3y \quad (*)$$

$$\text{Để } (*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow (y-1)^2 + (y+1)^2 \geq (-1-3y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 2 \geq 1 + 6y + 9y^2$$

$$\Leftrightarrow 7y^2 + 6y - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{7}.$$

$$\text{Vậy } \max_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{7}.$$

Câu 286. Chọn A.

$$\sin 5x + \sin 3x = \sin 4x \Leftrightarrow 2\sin 4x \cos x = \sin 4x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Trường hợp 1: $x = \frac{k\pi}{4}$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ta được $x \in \left\{-\frac{\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{4}\right\}$.

Trường hợp 2: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ta được $x \in \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.

Trường hợp 3: $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ta được $x \in \left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm nằm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 287. Chọn D.

Ta có $y = |\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$ nên hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

Câu 288. Chọn C. Ta có

$$\cos 2x - (2m-1)\cos x - m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m-1)\cos x - m = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{cases}$$

Phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $0 \leq \cos x < 1$ nên loại

$\cos x = -\frac{1}{2}$. Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $0 \leq m < 1$.

Câu 289. Chọn A. TXD: $D = \mathbb{R}$

$$y = 2\cos 3x + 3\sin 3x - 2 = \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \cos 3x + \frac{3}{\sqrt{13}} \sin 3x \right) - 2$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{13} \sin \left(3x + \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} \right) - 2$$

Để hàm số y có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{13} \sin \left(3x + \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$ nguyên

$$\Leftrightarrow \sin \left(3x + \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} \right) = \frac{n}{\sqrt{13}} \text{ (với } n \text{ là một số nguyên)}$$

$$\text{Mà: } \sin \left(3x + \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} \right) \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{n}{\sqrt{13}} \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{13} \leq n \leq \sqrt{13}$$

Mà: $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$. Vậy y có 7 giá trị nguyên.

Câu 290. Chọn D. $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow (m+1) \frac{1-\cos 2x}{2} - \sin 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1-m}{2} \right) \cos 2x - \sin 2x = -\frac{m+1}{2}$$

$$\text{Điều kiện có nghiệm của phương trình } \left(\frac{1-m}{2} \right)^2 + (-1)^2 \geq \left(-\frac{m+1}{2} \right)^2 \Leftrightarrow m \leq 1$$

Suy ra $-2018 \leq m \leq 1$

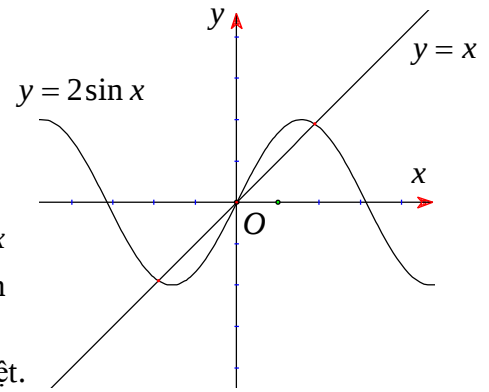
Suy ra có 2020 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 291. Chọn D. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Phương trình tương đương với $2 \sin x = x$ (1).

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = 2 \sin x$ và $y = x$.

Trên hệ trục Oxy vẽ đồ thị các hàm số $y = 2 \sin x$ và $y = x$. Từ đồ thị ta thấy, đồ thị hai hàm số chỉ cắt nhau tại ba điểm trong đó có một điểm có hoành độ $x = 0$ không thỏa mãn phương trình. Do vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.



Câu 292. Chọn C. Ta có: $\cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$ hoặc $\cos 2x = -\frac{3}{2}$ (loại).

$$\text{Với } \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Phương trình có nghiệm $x \in (-2\pi; 7\pi)$ khi và chỉ khi $-2\pi < \pm \frac{\pi}{6} + k\pi < 7\pi$.

+ Trường hợp 1: $-2\pi < \frac{\pi}{6} + k\pi < 7\pi \Leftrightarrow -\frac{13}{6} < k < \frac{41}{6}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên

$k \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ do đó có 9 nghiệm thuộc khoảng $(-2\pi; 7\pi)$.

+ Trường hợp 2: $-2\pi < -\frac{\pi}{6} + k\pi < 7\pi \Leftrightarrow -\frac{11}{6} < k < \frac{43}{6}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên

$k \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ do đó có 9 nghiệm thuộc khoảng $(-2\pi; 7\pi)$. Vậy có tất cả 18 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Câu 293. Chọn D. Có $2 \cos x - \sin x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$PT \Leftrightarrow m(2 \cos x - \sin x + 4) = \cos x + 2 \sin x + 3 \Leftrightarrow (2m-1) \cos x - (m+2) \sin x + 4m-3 = 0.$$

Phương trình trên có nghiệm khi $(2m-1)^2 + (m+2)^2 \geq (4m-3)^2$

$$\Leftrightarrow -11m^2 + 24m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq m \leq 2.$$

Câu 294. Chọn A. Điều kiện: $\cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Ta có } \frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x + \sin 2x + \cos 3x}{\cos 3x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x(1 + 2 \sin x + 4 \cos^2 x - 3)}{\cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 + 2 \sin x + 4 \cos^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \cos x(-4 \sin^2 x + 2 \sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có $\cos 3x = \cos x(4 \cos^2 x - 3)$ nên ta loại $\cos x = 0$ và $\sin x = 1$.

Ngoài ra $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4 \cos^2 x - 3 = 0$ nên ta loại tiếp $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 295. Chọn D. Điều kiện $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Phương trình tương đương với } \cos 4x = \sin 2x \Leftrightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 & (L) \\ \sin 2x = \frac{1}{2} & (N) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên phương trình chỉ có hai nghiệm là $x = \frac{\pi}{12}$ và $x = \frac{5\pi}{12}$.

Câu 296. Chọn C. Ta có: $\cos(\pi + x) + \sqrt{3} \sin x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\cos x + \sqrt{3} \sin x = -\cos 3x$

$$\Leftrightarrow -2\sin 2x \sin x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(-2\sin 2x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

- Với $x = k\pi$, trên nửa khoảng $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có: $-\frac{4\pi}{3} \leq k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq k < \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow k \in \{-1; 0\}$. Suy ra các nghiệm là $x = -\pi, x = 0$.
- Với $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, trên nửa khoảng $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có: $-\frac{4\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6} + k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq k < \frac{1}{3}$
 $\Rightarrow k \in \{-1; 0\}$. Suy ra các nghiệm là $x = -\frac{5\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}$.
- Với $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, trên nửa khoảng $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có: $-\frac{4\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} + k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq k < \frac{1}{6}$
 $\Rightarrow k \in \{-1; 0\}$. Suy ra các nghiệm là $x = -\frac{2\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3}$.

Suy ra số nghiệm trên nửa khoảng $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình là 6.

Câu 297. Chọn D. Ta có: $27\cos^4 x + 8\sin x = 12 \Leftrightarrow 27\sin^4 x - 54\sin^2 x + 8\sin x + 15 = 0$

$$\Leftrightarrow (3\sin^2 x + 2\sin x - 3)(9\sin^2 x - 6\sin x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0 \\ 9\sin^2 x - 6\sin x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\bigcirc 3\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-1+\sqrt{10}}{3} \in (-1; 1) \\ \sin x = \frac{-1-\sqrt{10}}{3} \notin (-1; 1) \end{cases}$$

Với $\sin x = \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ phương trình có 2 nghiệm. (dựa vào số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sin x$ và đường thẳng $y = \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$).

$$\bigcirc 9\sin^2 x - 6\sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1-\sqrt{6}}{3} \in (-1; 1) \\ \sin x = \frac{1+\sqrt{6}}{3} \notin (-1; 1) \end{cases}$$

Với $\sin x = \frac{1-\sqrt{6}}{3}$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ phương trình có 2 nghiệm. (dựa vào số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sin x$ và đường thẳng $y = \frac{1-\sqrt{6}}{3}$).

Vậy trên khoảng $(0; 2\pi)$ phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 298. Chọn B. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 5 - m\sin x - (m+1)\cos x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m\sin x + (m+1)\cos x \leq 5 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} (m\sin x + (m+1)\cos x) \leq 5. \Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 \leq 25 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-4; 3].$$

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 299. Chọn B. Ta có phương trình tương đương $\begin{cases} \sin x = 1 \\ 2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ (2\cos x - 1)(\cos x - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{cases}$$

Với $x \in [0; 2\pi]$. Ta có:

$$\square \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ vì } x \in [0; 2\pi] \text{ nên } x = \frac{\pi}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\square \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \text{ vì } x \in [0; 2\pi] \text{ nên } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\square \text{ Với } -1 \leq m \leq 1, \text{ đặt } m = \cos \alpha, \alpha \in [0; \pi].$$

Nhận xét: Với $x \in [0; 2\pi]$ thì phương trình

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ x = -\alpha + 2\pi \end{cases} (*).$$

Do đó, phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có

đúng một nghiệm hoặc có 2 nghiệm phân biệt và một nghiệm bằng $\frac{\pi}{2}$.

Trường hợp 1: $\alpha = -\alpha + 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \pi$ (thỏa vì khác $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$). Suy ra $m = \cos \pi = -1$.

Trường hợp 3: $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\alpha + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ (thỏa). Suy ra $m = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Vậy $m \in \{0; -1\}$ nên có 2 giá trị m .

Câu 300. Chọn D. Ta có $\sin x + \cos x + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Biến đổi hàm số về dạng phương trình ta được:

$$y(\sin x + \cos x + 2) = \sin x + 2\cos x + 1 \Leftrightarrow (y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1-2y. \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi: $(y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất $M = 1$.

Câu 301. Chọn C. Ta có: $\cos 2x + 3|\cos x| - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3|\cos x| - 2 = 0$.

Đặt $t = |\cos x|, 0 \leq t \leq 1$, ta được phương trình:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}. \text{ (vì } 0 \leq t \leq 1)$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2}, \text{ ta có: } |\cos x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm là $x = \pm \frac{\pi}{3}$.

Câu 302. Chọn A.

$$\text{Ta có } 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } x \in (0; 3\pi) \text{ nên } x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right\}.$$

Câu 303. Chọn A. Điều kiện $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Ta có: } \frac{\sin x \sin 2x + 2\sin x \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x(\sin x + \cos x) + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin 2x + 1)(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Thử lại điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Trên $(-\pi; \pi)$ phương trình đã cho có các nghiệm là $\frac{\pi}{12}; -\frac{11\pi}{12}$.

Câu 304. Chọn C. Ta có $2\cos^2 2x + 5\cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -3 < -1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Do $x \in (0; 2\pi)$ nên ta có các nghiệm $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$.

Tổng các nghiệm của phương trình $S = \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = 4\pi$.

Câu 305. Chọn D. Phương trình $2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$.

Xét $x \in [0; \pi] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \\ 0 \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \end{cases}$ mà $k \in \mathbb{Z}$ suy ra $\begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$.

Vậy nghiệm lớn nhất của phương trình $2\cos 2x - 1 = 0$ trong đoạn $[0; \pi]$ là $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 306. Chọn B. Ta có: $2\sin x - \cos x + 3 \neq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x + 3} \Leftrightarrow y(2\sin x - \cos x + 3) = \sin x + \cos x.$$

$$\Leftrightarrow (2y - 1)\sin x + (-y - 1)\cos x = -3y \quad (*).$$

Hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x + 3}$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên (*) có nghiệm.

$$\Leftrightarrow (2y - 1)^2 + (-y - 1)^2 \geq (-3y)^2 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 2.$$

Nên giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x + 3}$ lần lượt là

$$m = -1; M = 2.$$

Câu 307. Chọn A.

$$m \sin x + (m+1) \cos x = \frac{m}{\cos x} \Leftrightarrow m \sin x \cos x + (m+1) \cos^2 x = m \Leftrightarrow$$

$$\frac{m}{2} \sin 2x + \frac{m+1}{2} (1 - \cos 2x) = m \Leftrightarrow m \sin 2x - (m+1) \cos 2x - m + 1 = 0 \text{ có nghiệm khi và chỉ}$$

$$\text{khi } m^2 + (m+1)^2 \geq (1-m)^2 \Leftrightarrow m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 0 \end{cases}.$$

Do đó số các giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 10 là 9.

Câu 308. Chọn A. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

$$\text{Ta có } t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x, \text{ suy ra } \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{t^2 - 1}{2} + 2t = 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -5 \notin [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó ta có } \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Nhu vậy } P = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 309. Chọn A. Ta có: $4\sqrt{3} \cos x + \sin x + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x + 4\sqrt{3} \cos x = 1 - 2m$.

$$\text{Phương trình có nghiệm khi } a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 1 + (4\sqrt{3})^2 \geq (1 - 2m)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 48 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq m \leq 4 \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Vậy có 8 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 310. Chọn B. * ĐKXĐ: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x \neq 1 \\ \sin^2 x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$$* \text{ Ta có: } \frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow a^2 \cos^2 x = \sin^2 x + a^2 - 2 \Leftrightarrow -a^2 \sin^2 x = \sin^2 x - 2 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{2}{1 + a^2}$$

Để phương trình đã cho có nghiệm điều kiện là

$$\begin{cases} \frac{2}{1+a^2} \in [0; 1] \\ \frac{2}{1+a^2} \neq 1 \\ \frac{2}{1+a^2} \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1+a^2} \in (0; 1) \\ \frac{2}{1+a^2} \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^2 > 2 \\ 1+a^2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1 \\ |a| \neq \sqrt{3} \end{cases}.$$

Câu 311. Chọn C. $y = \frac{3 \sin x - \cos x - 4}{2 \sin x + \cos x - 3} \Leftrightarrow (2 \sin x + \cos x - 3)y = 3 \sin x - \cos x - 4$

$$\Leftrightarrow (2y - 3) \sin x + (y + 1) \cos x - 3y + 4 = 0$$

$$\text{Điều kiện phương trình có nghiệm: } (2y - 3)^2 + (y + 1)^2 \geq (4 - 3y)^2$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 + y^2 + 2y + 1 \geq 16 - 24y + 9y^2 \Leftrightarrow -4y^2 + 14y - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 3.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của hàm số bằng 6.

Câu 312. Chọn D.

$$\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x) \Leftrightarrow \sin^{2018} x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^{2018} x(1 - 2\cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^{2018} x \cdot \cos 2x - \cos^{2018} x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin^{2018} x = \cos^{2018} x \end{cases}$$

$$\bullet \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

$$\bullet \sin^{2018} x = \cos^{2018} x \Leftrightarrow \tan^{2018} x = 1 \quad (x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ không là nghiệm}) \Leftrightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) ta có } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \text{ là nghiệm của pt.}$$

$$\text{Do } x \in (0; 2018) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 2018 \Rightarrow 0 \leq k \leq 1284, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; 2018)$ bằng

$$\frac{\pi}{4} \cdot 1285 + (1 + 2 + \dots + 1284) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot 1285 + \frac{1284 \cdot 1285}{4} \pi = \left(\frac{1285}{2}\right)^2 \pi.$$

Câu 313. Chọn A. Ta có $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x) + \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm cuối là 6.

Câu 314. Chọn B.

$$\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x \Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Trên } (0; 3\pi) \Rightarrow x = \frac{7\pi}{8}, x = \frac{15\pi}{8}, x = \frac{23\pi}{8}.$$

Câu 315. Chọn A.

$$\square \text{ Trên khoảng } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \text{ phương trình } 2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \text{ có hai nghiệm là } -\frac{\pi}{6} \text{ và } \frac{7\pi}{6}.$$

$$\square \text{ Cả hai nghiệm này đều thỏa phương trình } 4\cos^2 x - 3 = 0.$$

$$\square \text{ Vậy hai phương trình có 2 nghiệm chung.}$$

Câu 316. Chọn D. Ta có: $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \leq 3 + 12 = 15$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = 171 + 364k$.

Mặt khác $t \in (0; 365]$ nên $0 < 171 + 364k \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{171}{364} < k \leq \frac{194}{364}$.

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$. Vậy $t = 171$.

Câu 317. Chọn A. Ta có (1) $\Leftrightarrow 2\left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1\right) = a^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{a^2}{2} + \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{a^2}{2} - 1.$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \left|\frac{a^2}{2} - 1\right| \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$, Do $a \in \mathbb{Z}$ nên $a = 0; a = \pm 1; a = \pm 2$

Vậy $n = 5$.

Câu 318. Chọn D. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1-2y$ (*).

Hàm số đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất khi (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow (1-2y)^2 \leq (y-1)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1.$$

Do đó $m = -2, M = 1$.

Câu 319. Chọn D. Đặt $t = \sin x \left(-\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right)$, phương trình trở thành $\sqrt{1-t} + \sqrt{t+\frac{1}{2}} = m$

Nhận xét phương trình ban đầu có nghiệm x khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm

$t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$. Xét hàm $f(t) = \sqrt{1-t} + \sqrt{t+\frac{1}{2}}$, với $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$\text{Ta có: } f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} + \frac{1}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{1-t} - \sqrt{t+\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-t}\sqrt{t+\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} - 2t}{2\sqrt{1-t}\sqrt{t+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-t} + \sqrt{t+\frac{1}{2}}\right)}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}.$$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1		
$f'(t)$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$
$f(t)$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{2} \leq m \leq \sqrt{3}$.

Câu 320. Chọn A. Xét hàm $y = x + \sqrt{2} \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$y' = 1 - \sqrt{2} \sin x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}.$$

$$\text{Do } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Ta có } y(0) = \sqrt{2}; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 1; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Vậy } M = \max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 1; m = \min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = y(0) = \sqrt{2}.$$

$$\text{Nên } M - m = \frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}.$$

Câu 321. Chọn A. Ta có: $\sin^2 2x + 3\sin 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{Theo đề bài: } 0 \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq 10\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{41}{4} \Rightarrow k = 1, 2, \dots, 10.$$

$$\text{Vậy tổng các nghiệm là } S = \frac{3\pi}{4} + \left(\frac{3\pi}{4} + \pi\right) + \dots + \left(\frac{3\pi}{4} + 9\pi\right) = \frac{105\pi}{2}.$$

Câu 322. Chọn A. Ta có $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$1 - 3\sin^2 x \cos^2 x + 3\sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0$$

Đặt $t = \sin 2x, -1 \leq t \leq 1.$

PT trở thành $-3t^2 + 6t + 12 = m.$

Xét hàm số $f(t) = -3t^2 + 6t + 12, -1 \leq t \leq 1.$ Ta có bảng biến thiên:

t	-1	1
$f(t)$	3	15

Phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin x \cos x - \frac{m}{4} + 2 = 0$ có nghiệm thực khi $3 \leq m \leq 15.$

Vậy có 13 giá trị nguyên của tham số $m.$

Câu 323. Chọn C. Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B).$ Ta có: $\begin{cases} x_B - x_A = \frac{2\pi}{3} \\ y_B = y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = x_A + \frac{2\pi}{3} \\ \sin x_B = \sin x_A \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Thay (1) vào (2), ta được:

$$\sin\left(x_A + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin x_A \Leftrightarrow x_A + \frac{2\pi}{3} = \pi - x_A + k2\pi \Leftrightarrow x_A = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } x \in [0; \pi] \text{ nên } x_A = \frac{\pi}{6} \Rightarrow BC = AD = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Câu 324. Chọn D. Ta có $h = |d| = |5\sin 6t - 4\cos 6t| = \sqrt{41} |\sin(6t + \alpha)| \leq \sqrt{41}$, với
$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}} \\ \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}} \end{cases}.$$

Do đó vật ở xa vị trí cân bằng nhất $h_{\max} = \sqrt{41}$ khi $|\sin(6t + \alpha)| = 1 \Leftrightarrow \cos(6t + \alpha) = 0$

$$\Leftrightarrow 6t + \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = -\frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}.$$

Trong giây đầu tiên, $0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{6}{\pi} + \frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2} \Rightarrow k \in \{0; 1\}.$

Vậy có 2 lần vật ở xa vị trí cân bằng nhất.

Câu 325. Chọn A. Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x > 0$, chia hai vế cho $\cos x$, ta được:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) &= m(\sin x + 3\cos x) \Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x + 1}(\tan x + 2) = m(\tan x + 3) \\ \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{\tan x + 1}(\tan x + 2)}{\tan x + 3} &= m. (1) \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{\tan x + 1}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; +\infty)$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow g(t) = \frac{3t(t^2 + 1)}{t^2 + 2} = m. (2)$

Xét hàm $g(t) = \frac{3t(t^2 + 1)}{t^2 + 2}$ trên $(0; +\infty)$. $g'(t) = \frac{3t^4 + 15t^2 + 6}{(t^2 + 2)^2} > 0, \forall t > 0.$

Suy ra để thỏa yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m > g(0) = 0$. Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2018; 2018] \end{cases}$

Suy ra $m \in \{1; 2; 3; \dots; 2018\}.$

Câu 326. Chọn B. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đặt $P = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$, $P \geq 0$. Suy ra

$$P^2 = 2 + \sin x + \cos x + 2\sqrt{1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x}.$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$

Khi đó $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$

Do đó $P^2 = 2 + t + 2\sqrt{1 + t + \frac{t^2 - 1}{2}} = 2 + t + \sqrt{2}|t + 1|.$

TH1: $-\sqrt{2} \leq t \leq -1$ thì $P^2 = (1 - \sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}$. Khi đó $1 \leq P^2 \leq 4 - 2\sqrt{2}.$

TH2: $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ thì $P^2 = (1 + \sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}$. Khi đó $1 \leq P^2 \leq 4 + 2\sqrt{2}.$

Do đó $1 \leq P^2 \leq 4 + 2\sqrt{2}$ mà $P \geq 0$ nên $1 \leq P \leq \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$

Phương trình có nghiệm khi $1 \leq m \leq \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$

Câu 327. Chọn B.

$$\cos 2x \cdot \sin 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 7x + \sin 3x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x = -1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \\ x = -\frac{\pi}{6} + h\frac{2\pi}{3} \end{cases} (h, k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow h \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

$$\text{Ta có } -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} = -\frac{\pi}{6} + h\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow k = \frac{28h-4}{12}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên chỉ có } h=1 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 328. Chọn B.

$$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi \end{cases}$$

$$(k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } x \in [0; 20\pi] \text{ nên: } \begin{cases} 0 \leq -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi \leq 20\pi \\ 0 \leq \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi \leq 20\pi \\ 0 \leq \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi \leq 20\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} \leq k_1 \leq \frac{41}{4} \\ -\frac{1}{12} \leq k_2 \leq \frac{119}{12} \\ -\frac{5}{12} \leq k_3 \leq \frac{115}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 \in \{1; 2; 3; \dots; 10\} \\ k_2 \in \{0; 1; 2; \dots; 9\} \\ k_3 \in \{0; 1; 2; \dots; 9\} \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; 20\pi]$ là:

$$S = \sum_{k_1=1}^{10} \left(-\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi\right) + \sum_{k_2=0}^9 \left(\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi\right) + \sum_{k_3=0}^9 \left(\frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi\right) = 295\pi.$$

Câu 329. Chọn C.

$$\text{Ta có } \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 3 \Leftrightarrow 1 + \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Theo đề bài cho ta có } 0 < x < 100\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k2\pi < 100\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{599}{12}$$

$$\text{Mà } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; 4; \dots; 48; 49\}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi + \frac{\pi}{6} + 2 \times 2\pi + \dots + \frac{\pi}{6} + 49 \times 2\pi = \frac{50\pi}{6} + 2\pi(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49) \\ &= \frac{50\pi}{6} + 2\pi \frac{49(49+1)}{2} = \frac{7375\pi}{3}. \end{aligned}$$

Câu 330. Chọn B. Ta có $\sqrt{3}(1 - \cos 2x) + \sin 2x - 4 \cos x + 8 = 4(\sqrt{3} + 1) \sin x$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 4 \cos x - 4\sqrt{3} \sin x - 4 \sin x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x (\sqrt{3} \sin x + \cos x - 2) - 4(\sqrt{3} \sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x - 2)(\sqrt{3} \sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in (0; 2018)$ nên $0 < \frac{\pi}{3} + k2\pi < 2018 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{1009}{\pi} - \frac{1}{6} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; \dots; 321\}$.

Suy ra $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{\pi}{3} + 2.2\pi; \dots; \frac{\pi}{3} + 321.2\pi \right\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là $T = 322 \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi(1 + 2 + 3 + \dots + 321) = \frac{310408\pi}{3}$.

Câu 331. Chọn B. Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1; 0)$ thì phương trình đã cho trở thành $2(m + t^2) - (4m + 1)t = 0$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - t = m(4t - 2) \Leftrightarrow t(2t - 1) = 2m(2t - 1) \Leftrightarrow t = 2m \text{ (do } t \neq \frac{1}{2})$$

Phương trình có nghiệm khi $2m \in [-1; 0) \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{1}{2}; 0 \right)$.

Câu 332. Chọn A. Do $\cos x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow m \sin x - y \cos x = 2y - 1$.

Do phương trình có nghiệm nên

$$m^2 + y^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{3m^2 + 1}}{3}.$$

Vậy GTNN của y bằng $\frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3}$.

$$\text{Do đó yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3} < -1 \Leftrightarrow 3m^2 + 1 > 25 \Leftrightarrow m^2 > 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{2} \\ m < -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Do m thuộc đoạn $[-5; 5]$ nên $m \in \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$.

Câu 333. (2): $2 \sin x + (m - 1) \cos x - m = 0$.

Để phương trình đã cho có nhiều hơn một nghiệm trong khoảng $[0; 2\pi]$ thì

$$2 \sin x + (m - 1) \cos x - m = 0 \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow 2^2 + (m - 1)^2 \geq m^2 \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$$

Vậy có hai giá trị nguyên dương $m = 1, m = 2$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 334. Chọn C. $2 \sin^3 2x + m \sin 2x + 2m + 4 = 4 \cos^2 2x \Leftrightarrow 2 \sin^3 2x + 4 \sin^2 2x + m \sin 2x + 2m = 0$.

Đặt $\sin 2x = t$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow t \in \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Khi đó, bài toán trở thành:

Tìm m để $2t^3 + 4t^2 + mt + 2m = 0$ có nghiệm trên khoảng $t \in \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$2t^3 + 4t^2 + mt + 2m = 0 \Leftrightarrow m = -2t^2, \forall t \in \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y(t) = -2t^2$ trên khoảng $t \in \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

x	$-\infty$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
y'		$+$	0
y		0	$-\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

Vậy có 1 giá trị nguyên.

Câu 335. (2): $\sin x + 2\cos x = 3$ vô nghiệm vì $1^2 + 2^2 < 3^2$

Vậy phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$.

Câu 336. Chọn A.

TH1: $\sin x = m$ thì ta có $\sqrt[3]{(2m)^2} = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Khi đó phương trình có nghiệm $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

TH2: $\sin x \neq m$ thì phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\sin x + m}{\sin x - m}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{\sin x + m}{\sin x - m}} - 2 = 0.$$

$$\text{Giải ra ta được } \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{\sin x + m}{\sin x - m}} = 1 \\ \sqrt[3]{\frac{\sin x + m}{\sin x - m}} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x + m}{\sin x - m} = 1 \\ \frac{\sin x + m}{\sin x - m} = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 9\sin x = 7m \end{cases}.$$

$$\text{Do đó để phương trình có nghiệm thực thì } \begin{cases} \frac{7m}{9} \neq m \\ -\frac{9}{7} \leq m \leq \frac{9}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{9}{7} \leq m \leq \frac{9}{7} \end{cases}$$

KL: Hợp hai trường hợp suy ra tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m cần tìm là

$$S = \left[-\frac{9}{7}; \frac{9}{7}\right] \Rightarrow P = a^2 + b^2 = \left(\frac{-9}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2 = \frac{162}{49}.$$

Câu 337. Chọn C. Ta có $\sqrt[3]{m+3\sqrt{m+3\cos x}} = \cos x \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{m+3\cos x} = \cos^3 x - m$ (1)

Đặt $\cos x = u$. Điều kiện $-1 \leq u \leq 1$ và $\sqrt[3]{m+3\cos x} = v \Rightarrow v^3 = m+3u$ (2)

(1) trở thành $u^3 = m+3v$ (3)

Từ (3) và (2) suy ra $u^3 - 3v = v^3 - 3u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow u = v$

$$\text{Do } u^2 + uv + v^2 + 3 = \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3v^2}{4} + 3 > 0, \forall u, v \in \mathbb{R}$$

Suy ra: $\sqrt[3]{m+3u} = u \Leftrightarrow m = u^3 - 3u$ với $u \in [-1; 1]$.

Xét hàm số $f(u) = u^3 - 3u$ với $u \in [-1; 1]$. Ta có $f'(u) = 3u^2 - 3$; $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \pm 1$ do $u \in [-1; 1]$.

Suy ra $\max_{[-1;1]} f(u) = 2$; $\min_{[-1;1]} f(u) = -2$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-2 \leq m \leq 2$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$.

Câu 338. Chọn C. Xét $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi$: Thay vào phương trình thấy không thỏa mãn

Xét $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m\pi$

$$2 \cos 3x (2 \cos 2x + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2[\cos 5x + \cos x] + 2 \cos 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos 5x + 2 \sin x \cos 3x + 2 \sin x \cos x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow (\sin 6x - \sin 4x) + (\sin 4x - \sin 2x) + \sin 2x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 6x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{7} + \frac{l2\pi}{7} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \\ x \neq m\pi \end{cases}$$

Trước tiên ta cần chỉ ra giữa hai họ nghiệm $x = \frac{k2\pi}{5}$ và $x = \frac{\pi}{7} + \frac{l2\pi}{7}$ không có giá trị trùng

nhau. Thật vậy: Giả sử $\frac{\pi}{7} + \frac{l2\pi}{7} = \frac{k2\pi}{5} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 14k = 5 + 10l: \text{ Vô lí vì } 14k \text{ là số nguyên chẵn và } 5 + 10l \text{ là số nguyên lẻ.}$$

$$\text{Với } \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{5} \\ x \neq m\pi \\ x \in [-4\pi; 6\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \in \{-10; -9; -8; \dots; 14; 15\} \\ k \notin \{-10; -5; 0; 5; 10; 15\} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ các giá trị x cần loại bỏ là $-4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$. Tổng các giá trị này là 6π

$$\text{Với } \begin{cases} x = \frac{\pi}{7} + \frac{l2\pi}{7} \\ x \neq m\pi \\ x \in [-4\pi; 6\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l \in \{-14; -13; -12; \dots; 19; 20\} \\ l \notin \{-4; -11; 3; 10; 17\} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ các giá trị x cần loại bỏ là $-\pi, -3\pi, \pi, 3\pi, 5\pi$. Tổng các giá trị này là 5π

$$\text{Vậy tổng nghiệm } S = \left[\sum_{k=-10}^{15} \left(\frac{k2\pi}{5} \right) - (6\pi) \right] + \left[\sum_{l=-14}^{20} \left(\frac{\pi}{7} + \frac{l2\pi}{7} \right) - 5\pi \right] = 50\pi.$$

Câu 339. Chọn B. Ta có: $\cos 2x + \cos 2y + 2 \sin(x+y) = 2 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = \sin(x+y)$

$$\text{Suy ra: } x+y = \frac{\pi}{2}. \text{ Áp dụng bất: } \frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} \geq \frac{(a+b)^2}{m+n}$$

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{(\sin^2 x + \sin^2 y)}{x+y} = \frac{2}{\pi}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x = y = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó: } \min P = \frac{2}{\pi}.$$

Câu 340. Chọn C. Điều kiện $\sin x \neq 0$; $\sin x \cdot \cos x \geq 0$

$$\frac{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = 4 \cos x \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x} = 4 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)} = 16 \sin^2 x \cos^2 x \Leftrightarrow 1 + |\sin x| = 8 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \quad (1)$$

TH1: $\sin x \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (1 + \sin x)(8 \sin^3 x - 8 \sin^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{cases} \xrightarrow{\sin x \geq 0} \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$* \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad \text{vì } \sin x \cdot \cos x \geq 0 \text{ nên } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi.$$

$$* \sin x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi \end{cases} \quad \text{vì } \sin x \cdot \cos x \geq 0 \text{ nên}$$

$$x = \arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi.$$

TH2: $\sin x < 0$

$$(1) \Leftrightarrow (1 - \sin x)(-8 \sin^3 x - 8 \sin^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{cases} \xrightarrow{\sin x < 0} \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$* \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad \text{vì } \sin x \cdot \cos x \geq 0 \text{ nên } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$$

$$* \sin x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{vì } \sin x \cdot \cos x \geq 0 \text{ nên } x = \pi - \arcsin\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi.$$

Xét nghiệm thuộc đoạn $[0; 2017]$:

$$* \text{Với } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 2017 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 320 \text{ có } 321 \text{ nghiệm.}$$

$$* \text{Với } x = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi = \frac{3\pi}{10} + k2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{3\pi}{10} + k2\pi \leq 2017 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 320 \text{ có } 321$$

nghiệm.

$$* \text{Với } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{7\pi}{6} + k2\pi \leq 2017 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 320 \text{ có } 321 \text{ nghiệm.}$$

$$* \text{Với } x = \pi - \arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + k2\pi = \frac{13\pi}{10} + k2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{13\pi}{10} + k2\pi \leq 2017 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 320 \text{ có}$$

321 nghiệm.

*Vậy có tổng cộng $321.4 = 1284$ nghiệm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 341. Chọn D. Ta có: $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x = (\sin^2 x)^{1009} + (1 - \sin^2 x)^{1009}$.

Đặt $t = \sin^2 x$, $0 \leq t \leq 1$ thì hàm số đã cho trở thành $y = t^{1009} + (1-t)^{1009}$.

Xét hàm số $f(t) = t^{1009} + (1-t)^{1009}$ trên đoạn $[0;1]$.

$$\text{Ta có: } f'(t) = 1009t^{1008} - 1009(1-t)^{1008}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1009t^{1008} - 1009(1-t)^{1008} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1008} = 1 \Leftrightarrow \frac{1-t}{t} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mà } f(1) = f(0) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1008}}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0;1]} f(t) = f(0) = f(1) = 1, \min_{[0;1]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1008}}$$

$$\text{Vậy } M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}.$$

Câu 342. Chọn D. Đặt $t = \sin x$, $t \in (-1;0)$, phương trình trở thành: $2t^2 - (2m+1)t + 2m - 1 = 0$

Theo yêu cầu bài toán ta tìm m để phương trình $2t^2 - (2m+1)t + 2m - 1 = 0$ có nghiệm $t \in (-1;0)$

$$2t^2 - (2m+1)t + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 + m(-2t+2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2t^2 - t - 1}{2t - 2} = \frac{2t+1}{2}$$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{2t+1}{2}, t \in (-1;0), f(t) \text{ là hàm đồng biến nên } f(-1) < m < f(0) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}.$$

Câu 343. Chọn D. Từ giả thiết $x + y + xyz = z \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{z} + y \cdot \frac{1}{z} + xy = 1$.

Đặt $x = \tan \frac{A}{2}$, $y = \tan \frac{B}{2}$ và $\frac{1}{z} = \tan \frac{C}{2}$ thay vào hệ thức trên ta được

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1, \text{ suy ra } A, B, C \text{ là ba góc của tam giác.}$$

$$\text{Từ đó ta có } \frac{2x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} \text{ và } \frac{x^2}{(x^2+1)} = \sin^2 \frac{A}{2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{(1+\sqrt{yz})^2}{(y+z)} &= \frac{\left(\sqrt{\tan \frac{C}{2}} + \sqrt{\tan \frac{B}{2}}\right)^2}{\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + 1} = \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + 2\sqrt{\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}\right)}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left(\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + 1\right)} \\ &= \frac{\sin \frac{B+C}{2} + \sqrt{\sin B \sin C}}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\cos \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}[\cos(B-C) - \cos(B+C)]}}{\cos \frac{B-C}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{A}{2} + \sqrt{\cos^2 \frac{B-C}{2} - 1 + \cos^2 \frac{A}{2}}}{\cos \frac{B-C}{2}} \leq \frac{\cos \frac{A}{2} + \sqrt{1 - 1 + \cos^2 \frac{A}{2}}}{1} = 2 \cos \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $P \leq 2 \sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} + 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \sin A \left(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \right) = \sqrt{2} \sin A \cdot \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}.$

Dấu bằng đạt được khi $\begin{cases} B=C \\ \sin A=1 \\ \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{\pi}{2} \\ B=C=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{2}-1 \\ z=\sqrt{2}+1 \end{cases}$

Câu 344. Chọn A. Ta có: $\cos^2 x + \sqrt{\cos x + m} = m$ suy ra $m \geq 0$.

Đặt $\sqrt{\cos x + m} = t, t \geq 0$. Phương trình trở thành: $\begin{cases} \cos^2 x + t = m \\ t^2 - \cos x = m \end{cases}$

$\Rightarrow (\cos^2 x - t^2) + (t + \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\cos x + t)(\cos x - t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -t \\ \cos x - t + 1 = 0 \end{cases}$

□ □ Trường hợp 1: $\cos x = -t \Rightarrow \sqrt{\cos x + m} = -\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \cos^2 x - \cos x = m \end{cases}$

Đặt $u = \cos x (-1 \leq u \leq 0)$.

Xét $f(u) = u^2 - u$, ta có $f'(u) = 2u - 1; f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$.

Do đó với $-1 \leq u \leq 0$ suy ra $f'(u) < 0$ với mọi $u \in [-1; 0]$.

Suy ra $f(-1) \geq f(u) \geq f(0) \Rightarrow 2 \geq f(u) \geq 0$.

Để phương trình có nghiệm thì $m \in [0; 2]$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

□ □ Trường hợp 2: $\cos x - t + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\cos x + m} = 1 + \cos x \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x + 1 = m$.

Đặt $v = \cos x, -1 \leq v \leq 1$. Ta có $m = v^2 + v + 1 = g(v), g'(v) = 2v + 1 = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{1}{2}$.

Vẽ bảng biến thiên ta được:

v	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$g'(v)$		-	0
$g(v)$	1	$\frac{3}{4}$	3

Để phương trình có nghiệm thì $m \in \left[\frac{3}{4}; 3\right]$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy có tất cả 4 số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 345. Chọn D.

Ta có: $\sin^{2015} x - \cos^{2016} x = 2(\sin^{2017} x - \cos^{2018} x) + \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin^{2015} x (1 - 2 \sin^2 x) + \cos^{2016} x (2 \cos^2 x - 1) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^{2015} x \cdot \cos 2x + \cos^{2016} x \cdot \cos 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin^{2015} x + \cos^{2016} x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } x \in [-10; 30] \Rightarrow -10 \leq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \leq 30 \Leftrightarrow -\frac{20}{\pi} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{60}{\pi} - \frac{1}{2} \Rightarrow -6 \leq k \leq 18.$$

Với $\sin^{2015} x + \cos^{2016} x = 1$. Ta có $\sin^{2015} x \leq \sin^2 x$; $\cos^{2016} x \leq \cos^2 x$.

$$\text{Do đó } 1 = \sin^{2015} x + \cos^{2016} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ suy ra } \begin{cases} \sin x = 0, \cos x = \pm 1 \\ \sin x = 1, \cos x = 0 \end{cases}$$

Nếu $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Vì } x \in [-10; 30] \Rightarrow -10 \leq k\pi \leq 30 \Leftrightarrow \frac{-10}{\pi} \leq \pi \leq \frac{30}{\pi} \Rightarrow -3 \leq k \leq 9.$$

$$\text{Nếu } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } x \in [-10; 30] \Rightarrow -10 \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 30 \Leftrightarrow -\frac{5}{\pi} - \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{15}{\pi} - \frac{1}{4} \Rightarrow -1 \leq k \leq 4.$$

Vậy số nghiệm của phương trình đã cho là $13 + 6 + 25 = 44$.

Câu 346. Chọn A. Ta có $\sqrt{\sin x + 2} + \sqrt[3]{m - \sin x} = 2$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{\sin x + 2} \\ v = \sqrt[3]{m - \sin x} \end{cases} \quad (1 \leq u \leq \sqrt{3}). \text{ Khi đó } \begin{cases} u^2 = \sin x + 2 \\ v^3 = m - \sin x \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^3 = m + 2 (*).$$

Ta lại có $u + v = 2 \Rightarrow v = 2 - u$.

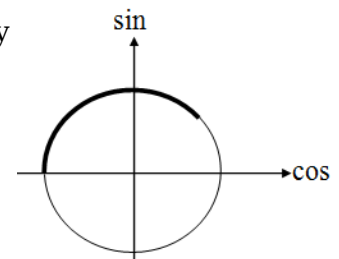
$$(*) \text{ trở thành } u^2 + (u - 2)^3 = m + 2 \quad (1) \Leftrightarrow m = u^3 - 5u^2 + 12u - 10 = f(u), \quad (1 \leq u \leq \sqrt{3}).$$

$$\text{Trên } \mathbb{R}, \text{ ta có } f'(u) = -3u^2 + 14u - 12, \quad f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{7 - \sqrt{13}}{3} \in [1; \sqrt{3}]$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì (1) có nghiệm $1 \leq u \leq \sqrt{3}$ hay

$$f\left(\frac{7 - \sqrt{13}}{3}\right) \leq m \leq f(\sqrt{3}) \Rightarrow m \in \{0; 1\} \text{ (Vì } m \text{ nguyên)}.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa đề bài.



Câu 347. Chọn B.

$$\text{Ta có } x \in \left(0; \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \pi \Rightarrow 0 < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x.$$

Đặt $\sin x + \cos x = t$ với $t \in (0; \sqrt{2}] \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = t^2 \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 1 + t - 2 = m \Leftrightarrow t^2 + t - 3 = m$ (*).

Xét $f(t) = t^2 + t - 3$ với $t \in (0; \sqrt{2}]$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1$. Do đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$ (loại).

Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình (*) có nhiều nhất một nghiệm t . Do đó để phương

trình đã cho có đúng một nghiệm thực x thuộc khoảng $(0; \frac{3\pi}{4})$ thì $\begin{cases} t = \sqrt{2} \\ 0 < t \leq 1 \end{cases}$.

Với $t = \sqrt{2}$ thay vào phương trình (*): $2 + \sqrt{2} - 3 = m \Leftrightarrow m = \sqrt{2} - 1 \notin \mathbb{Z}$.

Với $0 < t \leq 1$ ta có bảng biến thiên

Vậy $-3 < m \leq -1 \Rightarrow$ có 2 giá trị nguyên của m là -2 và -1 .

t	0	$\sqrt{2}$
f'		+
f	-3	$\sqrt{2} - 1$

Câu 348. Chọn A. Đặt $t = 2 \sin x$, với $0 < x < \frac{\pi}{3}$ thì $t \in (0; \sqrt{3})$.

Phương trình đã cho trở thành $(t^3 - m)^3 = 81t + 27m$.

Đặt $u = t^3 - m \Rightarrow t^3 = u + m$.

Khi đó ta được $\begin{cases} u^3 = 27(3t + m) \\ (3t)^3 = 27(u + m) \end{cases} \Rightarrow u^3 - (3t)^3 = 27(3t - u) \Leftrightarrow u^3 + 27u = (3t)^3 + 27.3t$ (*)

Xét hàm số $f(v) = v^3 + 27v$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có nên hàm số đồng biến.

Do đó (*) $\Leftrightarrow u = 3t \Rightarrow t^3 - 3t = m$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên khoảng $(0; \sqrt{3})$.

có $f'(t) = 3t^2 - 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (vì $t > 0$).

Bảng biến thiên

t	0	1	$\sqrt{3}$	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	0		-2	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nghiệm khi.

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 349. Chọn D.

Ta có: $(1 + \cos x)(\cos 4x - m \cos x) = m \sin^2 x \Leftrightarrow (1 + \cos x)(\cos 4x - m \cos x) - m(1 - \cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \cos x)[\cos 4x - m \cos x - m(1 - \cos x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 4x = m \end{cases}$.

➤ Xét phương trình $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Phương trình $\cos x = -1$ không có nghiệm trong đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

➤ Xét $\cos 4x = m$. Ta có $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow 4x \in \left[0; \frac{8\pi}{3}\right]$.

Với $4x \in [0; 2\pi] \setminus \{\pi\}$ và $m \in (-1; 1]$ phương trình $\cos 4x = m$ có 2 nghiệm.

Với $4x \in \left(2\pi; \frac{8\pi}{3}\right]$ và $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$ phương trình $\cos 4x = m$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ khi $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 350. Chọn C.

Phương trình đã cho tương đương với $\sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right) = \sin\left(\frac{80}{x^2+32x+332}\right)$ (*).

Ta biết rằng hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta chỉ ra rằng các hàm số

$f(x) = \frac{x}{x^2+6}$ và $g(x) = \frac{80}{x^2+32x+332}$ nhận giá trị trong khoảng này.

Thật vậy, ta có $\left|\frac{x}{x^2+6}\right| \leq \left|\frac{x}{2\sqrt{6x^2}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{6}}$

và $0 < \frac{80}{x^2+32x+332} = \frac{80}{(x+16)^2+76} \leq \frac{80}{76} < \frac{\pi}{2}$.

Từ các đánh giá trên, (*) xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x^2+6} = \frac{80}{x^2+32x+332} \Leftrightarrow x^3 - 48x^2 + 332x - 480 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \\ x = 40 \end{cases}.$$

Tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $2 + 6 + 40 = 48$.

MỤC LỤC

PHẦN 1. TỰ LUẬN	1
BÀI 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	1
VẤN ĐỀ 01. Tìm tập xác định của hàm số	4
VẤN ĐỀ 02. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số	6
VẤN ĐỀ 03. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của hàm số	7
VẤN ĐỀ 04. Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số	9
VẤN ĐỀ 05: Vẽ đồ thị của một hàm số suy ra từ một đồ thị của hàm số đã biết	16
BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	21
VẤN ĐỀ 01. Phương trình lượng giác cơ bản	21
VẤN ĐỀ 02. Một số phương pháp giải phương trình lượng giác	35
VẤN ĐỀ 03. Bài tập tổng hợp	45
BÀI 3. BÀI TẬP TRONG ĐỀ ĐH – CĐ CÁC NĂM TRƯỚC	68
Dạng 1. Công thức lượng giác	68
Dạng 2. Đưa về phương trình tích	69
Dạng 3. Biến đổi tổng thành tích - tích thành tổng	73
Dạng 4. Phương trình bậc 2 - bậc 3	75
Dạng 5. Phương trình bậc nhất theo $\sin x, \cos x$	80
Dạng 6. Phương trình đẳng cấp	83
Dạng 7. Phương trình đối xứng	84
Dạng 8. Phương pháp hạ bậc	84
Dạng 9. Công thức nhân ba	89
Dạng 10. Phương trình có chứa giá trị tuyệt đối. Phương trình có chứa căn thức	87
Dạng 11. Phương trình có chứa tham số	89
PHẦN II. TRẮC NGHIỆM	90
A – ĐỀ BÀI	90
B - BẢNG ĐÁP ÁN	124
C – HƯỚNG DẪN GIẢI	125
MỤC LỤC	191

GV: TRẦN QUỐC NGHĨA - 098 373 4349

Chuyên: TOÁN

- LỚP 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
- LUYỆN THI LỚP 10
- LUYỆN THI THPT QUỐC GIA

Bộ Tài liệu học tập và Tài liệu tham khảo

TOÁN 11



**SÁCH CÓ BÁN TẠI VPP – PHOTOCOPY
TÂM PHÚC**

Năm học 2021 - 2022

Lưu hành nội bộ

MS:CDLG11-40