

512.0076

B124Đ

NGUYỄN PHÚ KHÁNH

SÁCH
HAY

BẮT ĐẲNG THỨC VÀ BÀI TOÁN MIN - MAX

TRONG CÁC BÀI KIỂM TRA,
THI HỌC KÌ & THI TUYỂN SINH
ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG



DVL.012775



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

512.0076
B 124 Đ

NGUYỄN PHÚ KHÁNH

SÁCH
HAY

BẮT ĐẲNG THỨC VÀ BÀI TOÁN MIN - MAX

TRONG CÁC BÀI KIỂM TRA,
THI HỌC KÌ & THI TUYỂN SINH
ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG

ĐXL

56394

1

2

3

-1

-2

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

DVL / 12775 / 13



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO
Tổng biên tập ĐINH VĂN VANG

Chịu trách nhiệm nội dung và bản quyền:
Nhà sách HỒNG ÂN

Biên tập nội dung:
LƯU THẾ SƠN

Kĩ thuật vi tính:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Trình bày bìa:
TIÊU VĂN ANH

Mã số: 02.02.996/1001.PT2013

**BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BÀI TOÁN MIN-MAX TRONG CÁC BÀI KIỂM TRA,
THI HỌC KÌ VÀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG**

In 1.500 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ty Cổ phần Văn hóa Văn Lang.

Đăng kí KHXB số: 74- 2013/CXB/996-84/ĐHSP ngày 14/01/2013.

QĐXB số: 50/QĐ- ĐHSP ngày 1/2/2013

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2013.

Lời nói đầu

Đại thi hào William A.Ward từng nói: “Người thầy trung bình chỉ biết nói, người thầy giỏi biết cách giải thích, người thầy xuất chúng biết cách minh họa, còn người thầy vĩ đại biết cách truyền cảm hứng”.

Và tác giả thực sự hi vọng cuốn sách này sẽ trở thành nguồn cảm hứng cũng như tư liệu bổ ích cho các bạn thí sinh trong kì thi Đại học sắp tới. Nội dung cuốn sách được trình bày theo từng vấn đề, tương ứng từng chương, bài gần giống sách giáo khoa và cấu trúc đề thi Đại học của Bộ Giáo dục và Đào tạo (theo chương trình giảm tải hiện hành).

“Trọng tâm kiến thức và phương pháp giải toán: Bất đẳng thức và bài toán max – min trong các bài kiểm tra, thi học kì và trong kì thi tuyển sinh Đại học” là một trong những cuốn thuộc bộ sách “Trọng tâm kiến thức và phương pháp giải toán”, do tác giả biên soạn.

Bộ sách gồm 6 tập:

Tập I: Khảo sát hàm số và ứng dụng đạo hàm

Tập II: Hàm số mũ – Logarit, Tích phân, Đại số tổ hợp, Xác suất – Số phức

Tập III: Đại số và Lượng giác

Tập IV: Hình học trong không gian

Tập V: Hình học trong tọa độ

Tập VI: Bất đẳng thức và bài toán max – min trong các bài kiểm tra, thi học kì và trong kì thi tuyển sinh Đại học

Với cách viết khoa học và sinh động giúp bạn đọc tiếp cận với môn Toán một cách tự nhiên, không áp lực, bạn đọc trở nên tự tin và năng động hơn; hiểu rõ bản chất, biết cách phân tích để tìm ra trọng tâm của vấn đề và biết giải thích, lập luận cho từng bài toán. Sự đa dạng của hệ thống bài tập và tình huống giúp bạn đọc luôn hứng thú khi giải toán.

Trong sách, các ví dụ minh họa được chọn lọc, sắp xếp từ dễ đến khó và dẫn dắt đến những bài toán thi Đại học. Tác giả chú trọng gợi mở lời giải để bạn đọc khám phá, bạn đọc sẽ ngạc nhiên với con đường tìm tòi của mình và đưa ra phương pháp giải đầy thú vị, sau mỗi lời giải chúng tôi đều có các lời bình, đúc kết kinh nghiệm.

Những câu hỏi mở trong sách có nội dung cơ bản bám sát sách giáo khoa và cấu trúc đề thi Đại học, đồng thời phân chia bài tập thành các dạng toán có lời giải chi tiết. Hiện nay đề thi Đại học không khó, tổ hợp của nhiều vấn đề đơn giản, nhưng chứa nhiều câu hỏi mở nếu không nắm chắc lý thuyết sẽ lúng túng trong việc tìm lời giải bài toán. Với một bài toán, không nên thỏa mãn ngay với một lời giải mình vừa tìm được mà phải cố gắng tìm nhiều cách giải nhất cho bài toán đó, mỗi một cách giải sẽ có thêm phần kiến thức mới ôn tập.

Khi giải một bài toán, thay vì dùng thời gian để lục lọi trí nhớ, thì ta cần phải suy nghĩ phân tích để tìm ra phương pháp giải quyết bài toán đó. Đối với Toán học, không có trang sách nào là thừa. Từng trang, từng dòng đều phải hiểu. Môn Toán đòi hỏi phải kiên nhẫn và bền bỉ ngay từ những bài tập đơn giản nhất, những kiến thức cơ bản nhất, vì chính những kiến thức cơ bản mới giúp bạn đọc hiểu được những kiến thức nâng cao sau này.

Giờ đây, chúng tôi chợt nhớ tới câu nói của Ludwig Van Beethoven: *"Giọt nước có thể làm mòn tảng đá, không phải vì giọt nước có sức mạnh, mà do nước chảy liên tục ngày đêm. Chỉ có sự phấn đấu không mệt mỏi mới đem lại tài năng. Do đó ta có thể khẳng định, không nhích từng bước thì không bao giờ có thể đi xa ngàn dặm"*.

Mặc dù tác giả đã dành nhiều tâm huyết cho cuốn sách, song sự sai sót là điều khó tránh khỏi. Chúng tôi rất mong nhận được sự phản biện và góp ý quý báu của quý độc giả để những lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Tác giả

○ CHỦ ĐỀ 1

ỨNG DỤNG HÀM SỐ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT

DẠNG 1. ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT

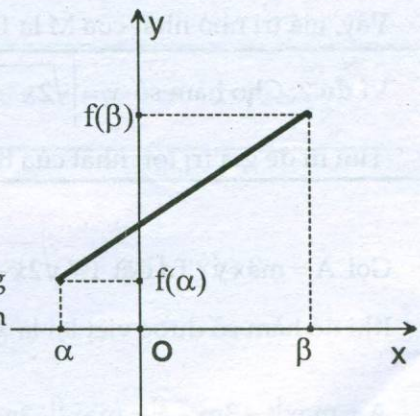
PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cho hàm số $f(x) = ax + b$ và đoạn $[\alpha; \beta] \subset \mathbb{R}$. Khi đó, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên $[\alpha; \beta]$ là một đoạn thẳng nên ta có một số tính chất:

- $\max_{[\alpha; \beta]} f(x) = \max\{f(\alpha); f(\beta)\}$,
- $\min_{[\alpha; \beta]} f(x) = \min\{f(\alpha); f(\beta)\}$,
- $\max_{[\alpha; \beta]} |f(x)| = \max\{|f(\alpha)|; |f(\beta)|\}$.

• Tính chất này không áp dụng cho tìm min

Áp dụng các tính chất đơn giản này cho chúng ta cách giải nhiều bài toán một cách thú vị, ngắn gọn, hiệu quả.



Chú ý:

1. Định nghĩa: $|a| = \begin{cases} a & \text{khi } a \geq 0 \\ -a & \text{khi } a < 0 \end{cases}$.

2. Các tính chất của giá trị tuyệt đối

$$\bullet |a|^2 = a^2, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\bullet |a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = \pm b \end{cases}$$

$$\bullet |a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\bullet |a| < b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ -b < a < b \end{cases}$$

$$\bullet |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ hoặc } a = -b$$

$$\bullet \max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

$$\bullet |a| \geq a \text{ và } |a| \geq -a \text{ với } \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\bullet |a| > b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ a < -b \end{cases}$$

• $|a| + |b| \geq |a + b|$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$

$|a - b| \geq ||a| - |b||$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ab \leq 0$.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = |2x - m|$. Tìm m để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[1; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Nhận thấy $\max_{[1; 2]} f(x)$ chỉ có thể đạt được tại $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Như vậy nếu đặt $M = \max_{[1; 2]} f(x)$ thì $M \geq f(1) = |2 - m|$ và $M \geq f(2) = |4 - m|$.

Ta có: $M \geq \frac{f(1) + f(2)}{2} = \frac{|2 - m| + |4 - m|}{2} \geq \frac{|(2 - m) + (m - 4)|}{2} = 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |2 - m| = |4 - m| \\ (2 - m)(m - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của M là 1, đạt được chỉ khi $m = 3$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2} - 3m + 4$

Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số y là nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $A = \max y$. Ta đặt $t = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$, do đó $0 \leq t \leq 1$.

Khi đó hàm số được viết lại là $y = |t - 3m + 4|$ với $t \in [0; 1]$, suy ra

$A = \max_{[0; 1]} |t - 3m + 4| = \max\{|-3m + 4|, |5 - 3m|\} \geq \frac{|-3m + 4| + |5 - 3m|}{2}$

Áp dụng BĐT giá trị tuyệt đối ta có: $| -3m + 4 | + | 5 - 3m | = | 3m - 4 | + | 5 - 3m | \geq 1$.

Do đó $A \geq \frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Vậy, giá trị cần tìm là $m = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 3: Cho các số thực không âm x, y, z thoả mãn $x + y + z = 3$.

Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4$.

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với $(y + z)^2 - 2yz + x^2 + xyz \geq 4$

$$\Leftrightarrow (3-x)^2 + x^2 + yz(x-2) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow yz(x-2) + 2x^2 - 6x + 5 \geq 0 \quad (*)$$

Đặt $t = yz$, do $yz \geq 0$ và $yz \leq \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \frac{(3-x)^2}{4}$ nên $t \in \left[0; \frac{(3-x)^2}{4}\right]$.

Khi đó vế trái của $(*)$ là hàm số bậc nhất của biến t , $f(t) = (x-2)t + 2x^2 - 6x + 5$,
với $t \in \left[0; \frac{(3-x)^2}{4}\right]$

Để chứng minh bất đẳng thức $(*)$ ta sẽ chứng minh $f(0) \geq 0$ và $f\left(\frac{(3-x)^2}{4}\right) > 0$.

Thật vậy, ta có:

$$f(0) = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{và} \quad f\left(\frac{(3-x)^2}{4}\right) = \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2) \geq 0$$

nên bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Ví dụ 4: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$x, y, z \in [0; 1] \Rightarrow xy + yz + zx - 2xyz = xy + yz(1-x) + zx(1-y) \geq 0.$$

Cũng từ giả thiết ta suy ra $yz \leq \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4}$.

Mặt khác ta lại có

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow f(yz) = (1-2x)yz + x(1-x) - \frac{7}{27} \leq 0 \quad (*).$$

Khi đó ta thấy rằng:

Nếu $x = \frac{1}{2}$ khi đó $(*)$ thành $-\frac{1}{108} \leq 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $x \neq \frac{1}{2}$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất.

Do đó để chứng minh $f(yz) \leq 0$ ta chỉ cần chứng minh $\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f\left[\frac{(1-x)^2}{4}\right] \leq 0 \end{cases}$.

Ta có $f(0) = x(1-x) - \frac{7}{27} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{108} < 0$

và $f\left[\frac{(1-x)^2}{4}\right] = (1-2x) \cdot \frac{(1-x)^2}{4} + x(1-x) - \frac{7}{27} = -\frac{1}{108}(6x+1)(3x-1)^2 \leq 0$.

Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(yz) \leq 0$. Ta đã giải xong bài toán.

Ví dụ 5: Cho $0 \leq a, b, c \leq 1$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1$.

Lời giải

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1 \Leftrightarrow (b-1)a^2 + b^2c + c^2a + 1 - b^2 - c^2 \geq 0$.

Vì $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow a \geq a^2$ nên

$$\begin{aligned} (b-1)a^2 + b^2c + c^2a + 1 - b^2 - c^2 &\geq (b-1)a^2 + b^2c + c^2a^2 + 1 - b^2 - c^2 = \\ &= (c^2 + b - 1)a^2 + b^2c + 1 - b^2 - c^2 = f(a^2). \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh $f(a^2) \geq 0$ (*) là được.

Nếu $c^2 + b - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 - b$ khi đó ĐĐT (*) sẽ trở thành $b^2c + (b - b^2) \geq 0$
(đúng vì $0 \leq b, c \leq 1$).

Nếu $c^2 + b - 1 \neq 0$ thì ta có $f(a^2)$ là hàm số bậc nhất.

Do đó để chứng minh $f(a^2) \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh cho $\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$.

Dễ thấy $f(0) = b^2c + 1 - b^2 - c^2 = (1-c)(1+c-b^2) = (1-c)\left[c + (1-b^2)\right] \geq 0$
(đúng vì $0 \leq b, c \leq 1$)

và $f(1) = b^2c + (b - b^2) \geq 0$ (đúng vì $0 \leq b, c \leq 1$).

Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(a^2) \geq 0$. Ta đã giải xong bài toán.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho $a, b, c \in [0; 2]$. Chứng minh rằng: $2(a+b+c) - (ab+bc+ca) \leq 4$

Bài 2: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x+y+z=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4$.

Bài 3: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4}$.

Bài 4: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}$.

Bài 5: Chứng minh rằng với $\forall m \leq 1$ thì

$$x^2 - 2(3m - 1)x + m + 3 \geq 0 \text{ với } \forall x \in [1; +\infty).$$

DẠNG 2. ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dựa vào đồ thị hoặc (bảng biến thiên) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ta thấy nó đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $[\alpha; \beta]$ tại điểm $x = \alpha$ hoặc $x = \beta$ hoặc $x = -\frac{b}{2a}$.

Cụ thể:

Trường hợp 1: $a > 0$

* Nếu $-\frac{b}{2a} \in [\alpha; \beta] \Rightarrow \min_{[\alpha; \beta]} f(x) = f(-\frac{b}{2a}); \max_{[\alpha; \beta]} f(x) = \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$

* Nếu $-\frac{b}{2a} \notin [\alpha; \beta] \Rightarrow \min_{[\alpha; \beta]} f(x) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}; \max_{[\alpha; \beta]} f(x) = \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$

Trường hợp 2: $a < 0$

* Nếu $-\frac{b}{2a} \in [\alpha; \beta] \Rightarrow \max_{[\alpha; \beta]} f(x) = f(-\frac{b}{2a}); \min_{[\alpha; \beta]} f(x) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$

* Nếu $-\frac{b}{2a} \notin [\alpha; \beta] \Rightarrow \min_{[\alpha; \beta]} f(x) = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}; \max_{[\alpha; \beta]} f(x) = \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1} - 3\sqrt[3]{x^2 + 1} + 1$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, $t \geq 1 \Rightarrow t^2 = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1}$

Khi đó hàm số trở thành $y = t^2 - 3t + 1$ với $t \geq 1$.

Bảng biến thiên

x	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$y = t^2 - 3t + 1$	-1	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1} - 3\sqrt[3]{x^2 + 1} + 1$ là $-\frac{5}{4}$ khi và chỉ khi $t = \frac{3}{2}$ hay $\sqrt[3]{x^2 + 1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{19}{8}}$.

Ví dụ 2: Cho các số thực a, b thoả mãn $ab \neq 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + 1$.

Lời giải

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Ta có $|t| = \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right| \geq 2\sqrt{\left| \frac{a}{b} \right| \cdot \left| \frac{b}{a} \right|} = 2, t^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = t^2 - 2$.

Ta có $P = t^2 - 2 - t + 1 = t^2 - t - 1$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t - 1$ với $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f(t) = t^2 - t - 1$	$+\infty$	$\searrow$	5	1	$\nearrow +\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

$\min P = \min_{(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)} f(t) = 1$ khi $t = 2$ hay $2 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 3: Cho các số x, y thoả mãn: $x^2 + y^2 = 1 + xy$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{9} \leq x^4 + y^4 - x^2y^2 \leq \frac{3}{2}$

Lời giải

Đặt $P = x^4 + y^4 - x^2y^2$

Ta có $P = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = (1 + xy)^2 - 3x^2y^2 = -2x^2y^2 + 2xy + 1$

Đặt $t = xy$, khi đó $P = -2t^2 + 2t + 1$

Vì $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ x^2 + y^2 \geq -2xy \end{cases}$ nên $\begin{cases} 1 + xy \geq 2xy \\ 1 + xy \geq -2xy \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq xy \leq 1$, do đó $-\frac{1}{3} \leq t \leq 1$.

Xét hàm số $f(t) = -2t^2 + 2t + 1$ trên $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$, ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(t) = -2t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{2}$	1

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{\left[-\frac{1}{3}; 1\right]} f(t) = \frac{1}{9} \leq P \leq \max_{\left[-\frac{1}{3}; 1\right]} f(t) = \frac{3}{2}$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4: Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Do } x + y = 1 \text{ nên: } S &= 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 9xy + 25xy \\ &= 16x^2y^2 + 12[(x+y)^3 - 3xy(x+y)] + 34xy = 16x^2y^2 - 2xy + 12. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = xy, \text{ ta được: } S = 16t^2 - 2t + 12; 0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

Xét hàm số $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ ta tìm được:

$$\text{Giá trị lớn nhất của } S \text{ bằng } \frac{25}{2}, \text{ khi } \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Giá trị nhỏ nhất của } S \text{ bằng } \frac{191}{16}, \text{ khi } \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{16} \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}; \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) \text{ hoặc } (x; y) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}; \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right). \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = |x^2 - 2mx + m + 1|$ trên đoạn $[-1; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 2mx + m + 1$ có tọa độ đỉnh $I(m; -m^2 + m + 1)$.

- $|m| > 1$, suy ra: $\max_{[-1;1]} f(x) = \max\{|m-2|, |3m+2|\} \geq \frac{|m-2| + |3m+2|}{2} \geq 2|m| > 2$ (1)

- $|m| \leq 1$, suy ra: $\max_{[-1;1]} f(x) = \max\{|m-2|, |3m+2|, |m^2 - m - 1|\}$.

Mà $|m-2| \geq |m^2 - m - 1| \quad \forall m \in [-1;1]$ vì điều này tương đương với

$$(2-m)^2 - (m^2 - m - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -3m + 5 > 0 \text{ luôn đúng với } \forall m \in [-1;1].$$

Do đó: $\max_{[-1;1]} f(x) = \max\{|m-2|, |3m+2|\} = \begin{cases} 2-m & \text{khi } -1 \leq m < 0 \\ 3m+2 & \text{khi } 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$

Từ đó suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) \geq 2$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có được: $\max_{[-1;1]} f(x) \geq 2$, đẳng thức xảy ra khi $m = 0$.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 6: Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa $|f(x)| \leq 1$ nghiệm đúng với $\forall x \in [-1;1]$. Chứng minh rằng: $|3ax^2 + 2bx + c| \leq 9$ với $\forall x \in [-1;1]$.

Lời giải

Ta có: $A = f(1) = a + b + c + d$, $B = f(-1) = -a + b - c + d$,

$$C = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c + d, \quad D = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}c + d$$

Từ đó $|A|, |B|, |C|, |D| \leq 1$, do $|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [-1;1]$.

Giải hệ gồm bốn phương trình trên ta tìm được:

$$a = -\frac{2}{3}A + \frac{4}{3}B - \frac{4}{3}C + \frac{2}{3}D, \quad b = \frac{2}{3}A - \frac{2}{3}B - \frac{2}{3}C + \frac{2}{3}D, \quad c = \frac{1}{6}A - \frac{4}{3}B + \frac{4}{3}C - \frac{1}{6}D.$$

Suy ra: $g(x) = 3ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{6} \left[D(12x^2 + 8x - 1) - A(12x^2 - 8x - 1) \right. \\ \left. + \frac{4}{3} [B(3x^2 - x - 1) - C(3x^2 + x - 1)] \right]$

Dẫn tới: $|g(x)| \leq \frac{1}{6} [|12x^2 + 8x - 1| + |12x^2 - 8x - 1|] + \frac{4}{3} [|3x^2 - x - 1| + |3x^2 + x - 1|]$
(do $|A|, |B|, |C|, |D| \leq 1$)

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức:

$$|m| + |n| = \max\{|m-n|, |m+n|\} \text{ nên với } \forall x \in [-1;1] \text{ ta có:}$$

$$|12x^2 + 8x - 1| + |12x^2 - 8x - 1| = \max\{|16x|, |24x^2 - 2|\} \leq 22;$$

$$|3x^2 - x - 1| + |3x^2 + x - 1| = \max\{|2x|, |6x^2 - 2|\} \leq 4.$$

Do đó: $|g(x)| \leq \frac{22}{6} + \frac{16}{3} = 9, \forall x \in [-1;1]$ (đpcm).

Ta xét đa thức $f(x) = 4x^3 - 3x$ thì ta có: $\max|g(x)| = 9$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho phương trình $x^2 + 2(m+3)x + m^2 - 3 = 0$, m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $P = 5(x_1 + x_2) - 2x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

1. $y = x^4 - 2x^2$ trên $[-2;1]$.

2. $y = x^4 - 4x^2 - 1$ trên $[-1;2]$.

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 + 2x^3 - x$ trên $[-1;1]$.

Bài 4: Cho x, y là các số thực thoả mãn: $2(x^2 + y^2) = xy + 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{18}{25} \leq 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2 \leq \frac{70}{33}$.

Bài 5: Tìm a, b để độ dài nghiệm của bất phương trình: $|x^2 + ax + b| \leq 2$ lớn nhất.

Bài 6: Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + |x - m|$ lớn hơn 1.

DẠNG 3. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CÓ CHỨA CÁC HỆ SỐ CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI NGHIỆM CỦA NÓ CÓ ĐIỀU KIỆN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để làm xuất hiện điều kiện ràng buộc đối với hệ số phương trình bậc hai ta thường dựa trên:

+ Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thực thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4ac$.

+ Sử dụng định lí Vi-ét và điều kiện nghiệm của đề bài đã cho để suy ra ràng buộc của hệ số a, b, c .

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 \geq 1$.

1. Chứng minh rằng: $b^2 \geq 4$.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3b^2 - 4c + b + 2}{b^2 + 1}$.

Lời giải

1. Ta có: $b^2 = (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 x_2 \geq 4$.

2. Do phương trình đã cho có hai nghiệm dương x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 \geq 1$

nên $b^2 \geq 4c$, và $b \leq -2$ suy ra $P \geq \frac{2b^2 + b + 2}{b^2 + 1}$.

Ta có: $P - \frac{8}{5} = \frac{5(2b^2 + b + 2) - 8(b^2 + 1)}{b^2 + 1} = \frac{2b^2 + 5b + 2}{b^2 + 1} = \frac{(b+2)(2b+1)}{b^2 + 1} \geq 0$

với mọi $b \leq -2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = -2, c = 1$.

Vậy $P_{\min} = \frac{8}{5}$ khi $b = -2, c = 1$.

Ví dụ 2: Cho phương trình bậc hai $ax^2 - x + c = 0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 - c}{a^2 c - a^3}$.

Lời giải

Từ giả thiết của bài toán suy ra: $a \geq 1, 0 < c \leq \frac{1}{4a}$.

Suy ra $P \geq \frac{4a^3 - 1}{a^2 - 4a^4} \Rightarrow P + 1 \geq \frac{4a^3 - 1}{a^2 - 4a^4} + 1 = \frac{4a^4 - 4a^3 - a^2 + 1}{a^2 - 4a^4} = \frac{(a-1)(4a^3 - a - 1)}{a^2(1 - 4a^2)}$.

Vì $a \geq 1$ nên $4a^3 - a - 1 = a(a^2 - 1) + 3a^2 - 1 > 0$.

Do đó $\frac{(a-1)(4a^3 - a - 1)}{a^2(1 - 4a^2)} \geq 0 \Rightarrow P \geq -1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $a = 1, c = \frac{1}{4}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - bx + c = 0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 \leq 1$. Chứng minh rằng:

1. $c \leq \frac{1}{4}$.

2. $b(c+1) \geq 5c$.

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - bx + c = 0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 \geq 1$.

1. Chứng minh rằng: $b^2 - 2c \geq \frac{1}{2}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2bc - b^3 - 3b + 1$.

Bài 3: Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 3]$. Tìm

giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{18a^2 - 9ab + b^2}{9a^2 - 3ab + ac}$.

**DẠNG
4.**

ỨNG DỤNG TAM THỨC BẬC HAI, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Ta đưa bất đẳng thức về một trong các dạng $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0$ rồi đi chứng minh (theo thứ tự)

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}, \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$$

- Nếu BĐT cần chứng minh có dạng: $A^2 \leq 4BC$ (hoặc $A^2 \leq BC$) ta có thể chứng minh tam thức $f(x) = Bx^2 + Ax + C$ (hoặc $f(x) = Bx^2 + 2Ax + C$) luôn cùng dấu với B. Khi đó ta sẽ có $\Delta \leq 0$.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hai số thực x, y . Chứng minh rằng $3x^2 + 5y^2 - 2x - 2xy + 1 > 0$.

Lời giải

Viết bất đẳng thức lại dưới dạng $3x^2 - 2(y+1)x + 5y^2 + 1 > 0$.

Đặt $f(x) = 3x^2 - 2(y+1)x + 5y^2 + 1$, xem y là tham số khi đó $f(x)$ là tam thức bậc hai ẩn x có hệ số $a_x = 3 > 0$ và $\Delta_x' = (y+1)^2 - 3(5y^2 + 1) = -14y^2 + 2y - 2$

Xét tam thức $g(y) = -14y^2 + 2y - 2$ có hệ số $a_y = -14 < 0$ và $\Delta_y' = -27 < 0$

Suy ra $\Delta_x' < 0$, do đó $f(x) < 0$ với mọi x, y .

Nhận xét: * Khi gặp bài toán chứng minh BĐT có dạng: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$ $\forall a_1, a_2, \dots, a_n$ mà $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = g(a_i)$ là một tam thức bậc hai với ẩn a_i có hệ số $a > 0$, ta có thể sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai để chứng minh.

Khi đó $g(a_i) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta_{a_i} \leq 0$.

Ví dụ 2: Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn: $xy + yz + zx + xyz = 4$.

Chứng minh rằng: $x + y + z \geq xy + yz + zx$

Lời giải

Ta giả sử $z = \min\{x, y, z\} \Rightarrow z \leq 1$. Từ giả thiết $\Rightarrow x = \frac{4 - yz}{y + z + yz}$

Nên BĐT đã cho $\Leftrightarrow \frac{4 - yz}{y + z + yz} + y + z \geq (y + z) \frac{4 - yz}{y + z + yz} + yz$

$\Leftrightarrow f(y) = (1 + z - z^2)y^2 + (z^2 + z - 4)y + (z - 2)^2 \geq 0$.

Tam thức $f(y)$ có hệ số $a = 1 + z - z^2 > 0$ (do $z \leq 1$) và có biệt thức:

$$\Delta = z(z - 1)^2(5z - 8) \leq 0 \Rightarrow f(y) \geq 0 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hoặc $(x; y; z) = (2; 2; 0)$ và các hoán vị.

Ví dụ 3: Cho các số thực x, y thỏa mãn bất phương trình $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$.

Lời giải

Do $S = x + 3y \Rightarrow x = S - 3y$, thay vào giả thiết $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$ và viết theo hệ số của biến y ta thu được $50y^2 - 30Sy + 5S^2 - 5S + 8 \leq 0$ (*)

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi y nên ta có $\Delta \geq 0$, tức là

$$900S^2 - 4.50.(5S^2 - 5S + 8) \geq 0$$

Biến đổi tương đương ta thu được $-100S^2 + 1000S - 1600 \leq 0$

$$\text{hay } 100S^2 - 1000S + 1600 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq S \leq 8.$$

Khi $S = 2$ thay vào (*) được $50y^2 - 60y + 18 \leq 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}$ nên $x = S - 3y = 2 - \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$

Khi $S = 8$ thay vào (*) được

$$50y^2 - 240y + 288 \leq 0 \Leftrightarrow y = \frac{12}{5} \Rightarrow x = S - 3y = 8 - \frac{36}{5} = \frac{4}{5}$$

Vậy $\max S = 8, \min S = 2$

Ví dụ 4: Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = 9xy + 10yz + 11zx$.

Lời giải

Để ý rằng, với giả thiết $x + y + z = 1$ thì

$$P = 9xy + 10yz + 11zx = 9xy + z(10y + 11x) = 9xy + (1 - x - y)(10y + 11x)$$

Khai triển và rút gọn, ta thu được: $P = -11x^2 - 10y^2 + 11x + 10y - 12xy$

$$\Leftrightarrow 11x^2 + (12y - 11)x + 10y^2 - 10y + P = 0 \quad (*)$$

Coi đây là tam thức bậc hai ẩn x , do điều kiện tồn tại của x nên suy ra (*) phải có nghiệm, tức $\Delta = (12y - 11)^2 - 44(10y^2 - 10y + P) \geq 0$.

$$\text{Hay } -296y^2 + 176y + 121 - 44P \geq 0 \Leftrightarrow P \leq -\frac{74}{11}\left(y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{296}\right).$$

$$\text{Ta có } y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{296} \geq -\frac{5445}{10952} \Rightarrow P \leq \left(-\frac{74}{11}\right) \cdot \left(-\frac{5445}{10952}\right) = \frac{495}{148}.$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{495}{148}.$$

Ví dụ 5:

Cho $\begin{cases} 0 < a \leq b \leq c \\ 0 < x, y, z \end{cases}$. Chứng minh: $(xa + yb + zc)ac \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \leq \frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2$.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^2 - (a+c)x + ac = 0$ có hai nghiệm a, c .

Mà: $a \leq b \leq c \Rightarrow f(b) \leq 0 \Leftrightarrow b^2 - (a+c)b + ac \leq 0$

$$\Leftrightarrow b + \frac{ac}{b} \leq a + c \Leftrightarrow yb + ac \frac{y}{b} \leq (a+c)y$$

$$\Rightarrow \left(xa + ac \frac{x}{a}\right) + \left(yb + ac \frac{y}{b}\right) + \left(zc + ac \frac{z}{c}\right) \leq (a+c)x + (a+c)y + (a+c)z$$

$$\Rightarrow xa + yb + zc + ac \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \leq (a+c)(x+y+z)$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$2\sqrt{(xa + yb + zc)ac} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \leq (a+c)(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow 4(xa + yb + zc)ac \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \leq (a+c)^2 (x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow (xa + yb + zc)ac \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \leq \frac{(a+c)^2}{4ac} (x+y+z)^2 \quad (\text{đpcm})$$

Ví dụ 6: (Bất đẳng thức Bunhiacôpsky) Cho $2n$ số $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$.

Chứng minh rằng: $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$

Lời giải

* Nếu $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0 \Rightarrow$ Bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

* Nếu $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$. Xét tam thức:

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$$

$$= (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 \geq 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \Delta = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

$$\text{Đẳng thức có} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho x, y, z là các số thực.

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 - 4xyz + y^2z^2 - 2yz + 1 \geq 0$.

Bài 2: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và x, y, z thỏa mãn:

$$a^2x + b^2y + c^2z = 0. \text{ Chứng minh rằng: } xy + yz + zx \leq 0.$$

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị của y sao cho BĐT sau đúng với $\forall x, z \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + 9y^2 + 5z^2 + 6xy - 4xz - 12yz - 2z + 1 \geq 0.$$

Bài 4: Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$xzy + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z).$$

Bài 5: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4a - 3b$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2a + 3b$.

Bài 6: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ và $x - y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+y-2}{z+2}$

Bài 7: Cho a, b, c là số thực.

Chứng minh rằng $2(a+b+c-ab-bc-ca+1)^2 + (ab+bc+ca-2)^2 \geq 3$

Bài 8: Cho a và b là các số thực thỏa mãn $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$.

Chứng minh rằng $7a + 5b + 12ab \leq 9$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT

Bài 1: Viết bất đẳng thức dưới dạng $(2-b-c)a + 2(b+c) - bc - 4 \leq 0$.

Xét hàm số bậc nhất $f(a) = (2-b-c)a + 2(b+c) - bc - 4$ với ẩn $a \in [0; 2]$

Ta có: $f(0) = 2(b+c) - bc - 4 = -(2-b)(2-c) \leq 0$;

$$f(2) = (2-b-c)2 + 2(b+c) - bc - 4 = -bc \leq 0$$

Suy ra $f(a) \leq \max\{f(0); f(2)\} \leq 0$ đpcm.

Bài 2: Từ giả thiết ta có $x, y, z \in [0; 3]$ và $yz \leq \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(3-x)^2}{4}$.

Mặt khác ta thấy $x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4 \Leftrightarrow x^2 + (y+z)^2 - 2yz + xyz - 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3-x)^2 - 2yz + xyz - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(yz) = (x-2)yz + 2x^2 - 6x + 5 \geq 0 \quad (*)$$

Nếu $x = 2$ thì bất đẳng thức $(*)$ trở thành $1 \geq 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $x \neq 2$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất.

Do đó để chứng minh $f(yz) \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh $\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f\left[\frac{(3-x)^2}{4}\right] \geq 0 \end{cases}$.

$$\text{Để thấy } f(0) = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{và } f\left[\frac{(3-x)^2}{4}\right] = (x-2) \cdot \frac{(3-x)^2}{4} + 2x^2 - 6x + 5 = \frac{1}{4}(x+2)(x-1)^2 \geq 0.$$

Vậy trong hai trường hợp ta kết luận $f(yz) \geq 0$.

Bài 3: Từ giả thiết ta có $x, y, z \in [0; 1]$ và $yz \leq \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4}$.

Mặt khác ta thấy

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^3 + (y+z)^3 - 3yz(y+z) + 6xyz - \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + (1-x)^3 - 3yz(1-x) + 6xyz - \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(yz) = (3x-1)yz + x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \quad (*).$$

Nếu $x = \frac{1}{3}$ thì BĐT (*) sẽ thành $\frac{1}{36} \geq 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $x \neq \frac{1}{3}$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất.

Để chứng minh $f(yz) \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh cho $\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f\left[\frac{(1-x)^2}{4}\right] \geq 0 \end{cases}$.

Để thấy $f(0) = x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

$$\text{và } f\left[\frac{(1-x)^2}{4}\right] = (3x-1) \cdot \frac{(1-x)^2}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}x \left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right) \geq 0$$

$$(\text{đúng vì } 0 \leq x \leq 1 \text{ và } x^2 - x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} > 0).$$

Vậy trong hai trường hợp ta kết luận $f(yz) \geq 0$.

Bài 4: Giả sử $x = \min\{x, y, z\}$ thì từ giả thiết của bài toán ta suy ra $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

Mặt khác ta lại có $x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27} \Leftrightarrow yx^2 + y^2z + z^2x - \frac{4}{27} \leq 0$.

Vì $0 \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{3}x$

$$\Rightarrow yx^2 + y^2z + z^2x - \frac{4}{27} \leq \frac{1}{3}yx + y^2z + z^2x - \frac{4}{27} = \left(\frac{1}{3}y + z^2\right)x + y^2z - \frac{4}{27} = f(x) \quad (*)$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $f(x) \leq 0$ (*) là được.

Nếu $\frac{1}{3}y + z^2 = 0 \Rightarrow y = z = 0$ thì BĐT (*) thành $-\frac{4}{27} \leq 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $\frac{1}{3}y + z^2 \neq 0$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất.

Để chứng minh $f(x) \leq 0$ ta chỉ cần chứng minh cho $\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) \leq 0 \end{cases}$.

Dễ thấy $f(0) = y^2z - \frac{4}{27}$; vì $x = 0$ nên từ giả thiết $\Rightarrow y + z = 1$.

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $y^2z = \frac{1}{2} \cdot y \cdot y \cdot (2z) \leq \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2(y+z)}{3} \right]^3 = \frac{4}{27}$

$$\Rightarrow y^2z - \frac{4}{27} \leq 0 \Rightarrow f(0) \leq 0 \text{ và } f\left(\frac{1}{3}\right) = y^2z + \frac{1}{9}y + \frac{1}{3}z^2 - \frac{4}{27}.$$

Vì $x = \frac{1}{3}$ nên từ giả thiết ta suy ra:

$$\begin{aligned} y + z = \frac{2}{3} \Rightarrow z = \frac{2}{3} - y \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) &= y^2\left(\frac{2}{3} - y\right) + \frac{1}{9}y + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} - y\right)^2 - \frac{4}{27} = -y^3 + y^2 - \frac{1}{3}y \\ &= -y\left(y^2 - y + \frac{1}{3}\right) = -y\left[\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right] \leq 0 \text{ (đúng vì } y \geq 0). \end{aligned}$$

Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(x) \leq 0$. Ta đã giải xong bài toán.

Bài 5: Ta có $x^2 - 2(3m - 1)x + m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow f(m) = (-6x + 1)m + x^2 + 2x + 3 \geq 0$.

Ta thấy $f(m)$ là hàm số bậc nhất có hệ số của m là $-6x + 1 < 0$ (do $x \in [1; +\infty)$).

Do đó $f(m)$ là hàm nghịch biến $\Rightarrow f(m) \geq f(1)$ với $\forall m \leq 1$.

Tức là ta có $x^2 - 2(3m - 1)x + m + 3 \geq (x - 2)^2 \geq 0$ (đúng với $\forall x \in [1; +\infty)$).

Vậy ta giải quyết xong bài toán.

DẠNG 2. ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT

Bài 1: Ta có $\Delta' = (m + 3)^2 - (m^2 - 3) = 6m + 12$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6m + 12 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m + 3) \\ x_1 x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$

$$P = -10(m + 3) - 2(m^2 - 3) = -2m^2 - 10m - 24$$

Xét hàm số $y = -2x^2 - 10x - 24$ với $x \in [-2; +\infty)$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{5}{2}$	-2	$+\infty$
$y = -2x^2 - 10x - 24$		12	

Suy ra $\max_{[-2; +\infty)} y = -12$ khi và chỉ khi $x = -2$.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm, khi đó $\max P = 12$.

Bài 2:

1. Đặt $t = x^2$, $x \in [-2; 1] \Rightarrow t \in [0; 4]$. Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t$, $t \in [0; 4]$.

Lập bảng biến thiên của hàm $f(t)$ trên đoạn $[0; 4]$ ta có:

$$\max_{[0; 4]} f(t) = 8 \Leftrightarrow t = 4, \quad \min_{[0; 4]} f(t) = -1 \Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra: $\max_{[-2; 1]} y = 8 \Leftrightarrow x = -2$, $\min_{[-2; 1]} y = -1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

2. Đặt $t = x^2$. Với $x \in [-1; 2]$ ta có $t \in [0; 4]$.

Hàm số trở thành $f(t) = t^2 - 4t - 1$ với $t \in [0; 4]$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$t = x^2 + x$	0	$-\frac{1}{4}$	2

Suy ra

$$\max_{[-1; 2]} y = \max_{[0; 4]} f(t) = -1 \text{ khi } \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\min_{[-1; 2]} y = \min_{[-1; 2]} f(t) = -1 \text{ khi } t = 2 \text{ hay } x = \pm \sqrt{2}.$$

Bài 3: Ta có $y = x^4 + 2x^3 - x = (x^2 + x)^2 - (x^2 + x)$.

Đặt $t = x^2 + x$.

Xét hàm số $t = x^2 + x$ với $x \in [-1; 1]$, ta có $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$t = x^2 + x$	0	$-\frac{1}{4}$	2

Suy ra $\min_{[-1;1]} t = -\frac{1}{4} \leq t \leq \max_{[-1;1]} t = 2$

Khi đó, hàm số được viết lại: $f(t) = t^2 - t$ với $t \in \left[-\frac{1}{4}; 2\right]$.

Bảng biến thiên:

t	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2
$f(t) = t^2 - t$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{4}$	2

Từ bảng biến thiên ta có:

$$\max_{[-1;1]} y = \max_{\left[-\frac{1}{4}; 2\right]} f(t) = 2 \text{ khi } t = 2 \text{ hay } x^2 + x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\min_{[-1;1]} y = \min_{\left[-\frac{1}{4}; 2\right]} f(t) = -\frac{1}{4} \text{ khi } t = \frac{1}{2} \text{ hay } x^2 + x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Bài 4: Ta có: $7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2 = 7\left[(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2\right] + 4x^2y^2$

$$= 7\left[\left(\frac{xy+1}{2}\right)^2 - 2x^2y^2\right] + 4x^2y^2 = \frac{1}{4}\left[-33(xy)^2 + 14xy + 7\right] = \frac{1}{4}(-33t^2 + 14t + 7)$$

Đặt $t = x.y$.

Ta có $xy + 1 = 2(x^2 + y^2) \geq 4xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}$.

Mặt khác $2(x^2 + y^2) = xy + 1 \Leftrightarrow 2(x + y)^2 = 5xy + 1 \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{5}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{4}(-33t^2 + 14t + 7)$, $t \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$.

Ta có $\max_{\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]} f(t) = \frac{70}{33} \Leftrightarrow t = \frac{7}{33}, \min_{\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]} f(t) = \frac{18}{25} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5}.$

Bài 5: Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + b - 2 \leq 0 & (1) \\ x^2 + ax + b + 2 \geq 0 & (2) \end{cases}$

Ta có: $\Delta_1 = a^2 - 4b + 8, \Delta_2 = a^2 - 4b - 8.$

- $\Delta_1 \leq 0$ thì bất phương trình có nhiều nhất một nghiệm.
- $\Delta_1 > 0$ ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\Delta_2 \leq 0$, ta có nghiệm của bất phương trình: $\frac{-a - \sqrt{\Delta_1}}{2} \leq x \leq \frac{-a + \sqrt{\Delta_1}}{2}$

Nên độ dài nghiệm: $l = \sqrt{\Delta_1} = \sqrt{\Delta_2 + 16} \leq 4$

Trường hợp 2: $\Delta_2 > 0$ ta có độ dài nghiệm: $l = \sqrt{\Delta_2 + 16} - \sqrt{\Delta_2} < \sqrt{(\sqrt{\Delta_2} + 4)^2} - \sqrt{\Delta_2} = 4.$

Từ đó ta có được: $l \leq 4$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a^2 - 4b - 8 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4b + 8.$

Vậy $\max l = 4.$

Bài 6: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2 + |x - m| > 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + |x - m| - 1 = \begin{cases} x^2 + x - m - 1 & \text{khi } x \geq m \\ x^2 - x + m - 1 & \text{khi } x < m \end{cases}$

Ta cần tìm $\min f(x) > 0$, từ đó ta tìm được: $|m| > \frac{5}{4}.$

DẠNG 3. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CÓ CHỨA CÁC HỆ SỐ CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI NGHIỆM CỦA NÓ CÓ ĐIỀU KIỆN

Bài 1:

1. Ta có $c = x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}.$

2. Thay $b = x_1 + x_2, c = x_1 x_2$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(x_1 + x_2)(x_1 x_2 + 1) \geq 5x_1 x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1 + x_2 \geq 5.$$

Ta có: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{4x_1} + x_2 + \frac{1}{4x_2} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) \geq 1 + 1 + \frac{3}{4} \frac{4}{x_1 + x_2} \geq 5.$

Bài 2:

1. Thay $b = x_1 + x_2, c = x_1 x_2$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}, \quad x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \geq \frac{1}{2}.$$

2. Theo giả thiết ta có:

$$b \geq 1, c \leq \frac{b^2}{4} \text{ nên } P \leq -\frac{b^3}{2} - 3b + 1 \leq -\frac{1}{2} - 3 + 1 = -\frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = -\frac{5}{2} \text{ khi } b = 1, c = \frac{1}{4}.$$

Bài 3: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } Q = \frac{18 - 9\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{9 - 3\frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{18 + 9(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2}.$$

• Ta tìm max của Q:

Ta đánh giá $(x_1 + x_2)^2$ qua $x_1 x_2$ với điều kiện $x_1, x_2 \in [0; 3]$.

$$\text{Giả sử } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 \leq x_1 x_2 \\ x_2^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \leq 9 + 3x_1 x_2$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{18 + 9(x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 + 9}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2} = 3.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 3 \\ x_1 = 0; x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Hay là: } \begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = -3a \\ c = 0 \end{cases}.$$

• Ta tìm min của Q:

$$\text{Ta có: } Q - 2 = \frac{3(x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2}{9 + 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2} \geq 0 \Rightarrow Q \geq 2.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow b = c = 0.$$

Vậy $\max Q = 3$ và $\min Q = 2$.

**DẠNG
4.**

ỨNG DỤNG TAM THỨC BẬC HAI, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Bài 1: Bất đẳng thức được viết lại $(1+y^2z^2)x^2 - 4xyz + y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1 \geq 0$.

Đặt $f(x) = (1+y^2z^2)x^2 - 4xyz + y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1$, khi đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai ẩn x có hệ số

$$a = 1 + y^2z^2 > 0 \text{ và } \Delta'_x = 4y^2z^2 - (1 + y^2z^2)(y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1) \\ \Rightarrow \Delta'_x = -(1 + y^2 - 2yz + z^2 - 2y^2z^2 + y^4z^2 - 2y^3z^3 + y^2z^4 + y^4z^4).$$

Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ta có:

$$y^4z^2 + y^2z^4 \geq 2y^3z^3, \quad y^4z^4 + 1 \geq 2y^2z^2 \text{ và } y^2 + z^2 \geq 2yz$$

Cộng vế với vế, suy ra $\Delta'_x \leq 0$.

Do đó $f(x) \geq 0, \forall x, y, z$ (đpcm).

Bài 2: * Nếu trong ba số x, y, z có một số bằng 0, chẳng hạn $x = 0 \Rightarrow b^2y = -c^2z$.

$$\Rightarrow xy + yz + zx = yz = -\frac{c^2}{b^2}z^2 \leq 0.$$

$$* x, y, z \neq 0. \text{ Do } a^2x + b^2y + c^2z = 0 \Rightarrow x = -\frac{b^2y + c^2z}{a^2}$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 0 \Leftrightarrow -(y+z) \frac{b^2y + c^2z}{a^2} + yz \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(y) = b^2y^2 + (b^2 + c^2 - a^2)yz + c^2z^2 \geq 0.$$

Tam thức $f(y)$ có $\Delta_y = [(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2]z^2$.

$$\forall i \begin{cases} |b-c| < a \\ b+c > a \end{cases} \Rightarrow -2bc < b^2 + c^2 - a^2 < 2bc$$

$$\Rightarrow (b^2 + c^2 - a^2)^2 < 4c^2b^2 \Rightarrow \Delta_y \leq 0, \forall z \Rightarrow f(y) \geq 0 \quad \forall y, z.$$

Bài 3: Bất đẳng thức đã cho đúng với $\forall x, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ tam thức $f(x) \geq 0 \quad \forall x, z$

(trong đó $f(x) = x^2 + 2(3y - 2z)x + 9y^2 + 5z^2 - 12yz - 2z + 1$)

$$\Leftrightarrow \Delta'_x = (3y - 2z)^2 - (9y^2 + 5z^2 - 12yz - 2z + 1) = -z^2 + 2(3y + 1)z - 1 \leq 0 \quad \forall z$$

$$\Leftrightarrow \Delta'_z = (3y + 1)^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3y(3y + 2) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq y \leq 0.$$

Vậy $-\frac{2}{3} \leq y \leq 0$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4: Trong ba số x, y, z luôn tồn tại hai số cùng không nhỏ hơn 1 hoặc cùng không lớn hơn 1. Ta giả sử hai số đó là x và y . Khi đó ta có:

$$(x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq x+y-1 \Rightarrow xyz \geq xz+yz-z.$$

$$\Rightarrow xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq xz + yz - z + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8.$$

Nên ta chứng minh: $xz + yz - z + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x+y+z)$

$$\Leftrightarrow f(z) = 2z^2 + (x+y-6)z + 2(x^2 + y^2) - 5(x+y) + 8 \geq 0.$$

Tam thức $f(z)$ có $a = 2 > 0$ và $\Delta_z = -15x^2 + 2(y+14)x - 15y^2 + 28y - 28$

Δ_z là tam thức bậc hai ẩn x , có $a = -15 < 0$ và $\Delta_x = -224(y-1)^2 \leq 0$

$$\Rightarrow \Delta_z \leq 0 \Rightarrow f(z) \geq 0 \text{ (đpcm)}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Bài 5: Ta có: $P = 2a + 3b \Rightarrow b = \frac{P-2a}{3}.$

Thay vào biểu thức phía trên ta được:

$$a^2 + \left(\frac{P-2a}{3}\right)^2 = 4a - 3\left(\frac{P-2a}{3}\right) \Leftrightarrow 13a^2 - 2(27+2P)a + 9P + P^2 = 0$$

Ta cần tìm P để phương trình trên tồn tại a .

$$\text{Tức là ta phải có: } \Delta' = -9P^2 - 9P + 729 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-9-45\sqrt{13}}{18} \leq P \leq \frac{-9+45\sqrt{13}}{18}.$$

Bài 6: Từ điều kiện ta có

$$x^2 + y^2 = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2} = 5 - z^2 \Rightarrow (x+y)^2 = 10 - 2z^2 - (3-z)^2$$

$$\text{Do đó } (x+y)^2 = 1 + 6z - 3z^2$$

Để thấy $z \neq -2$. Ta có $P(z+2) + 2 = x+y$

$$\text{Do đó } [P(z+2) + 2]^2 = 1 + 6z - 3z^2$$

$$\Leftrightarrow (z+2)^2 P^2 + 4(z+2)P + 4 = 1 + 6z - 3z^2$$

$$\Leftrightarrow (P^2 + 3)z^2 + (4P^2 + 4P - 6)z + 4P^2 + 8P + 3 = 0$$

Phương trình có nghiệm ẩn z khi và chỉ khi

$$\Delta'_z \geq 0 \Leftrightarrow (2P^2 + 2P - 3)^2 - (P^2 + 3)(4P^2 + 8P + 3) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{36}{23} \leq P \leq 0$$

Suy ra: $P = 0$ khi $x = 2, y = 0, z = 1$

$$P = -\frac{36}{23} \text{ khi } x = \frac{20}{31}, y = -\frac{66}{31}, z = \frac{7}{31}$$

Bài 7:

Nếu $\begin{cases} ab + bc + ca \leq 2 - \sqrt{3} \\ ab + bc + ca \geq 2 + \sqrt{3} \end{cases}$ thì bất đẳng thức dễ dàng được chứng minh.

Xét trường hợp ngược lại $2 - \sqrt{3} \leq ab + bc + ca \leq 2 + \sqrt{3}$.

Ta đặt $x = a + b + c, y = ab + bc + ca$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2(x - y + 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x(y - 1) + 3y^2 - 8y + 3 \geq 0.$$

Đặt $f(x) = 2x^2 - 4x(y - 1) + 3y^2 - 8y + 3$. Ta dễ dàng tính được

$$\Delta'_{f(x)} = 4(y - 1)^2 - 2(3y^2 - 8y + 3) = -2y^2 + 8y - 2 = -2[y - (2 - \sqrt{3})][y - (2 + \sqrt{3})] \leq 0.$$

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì bài toán được chứng minh.

Bài 8:

Xét tam thức bậc hai $f(a) = 9a^2 - (4b + 7)a + 7b^2 - 5b + 3$ với b là tham số

$$\text{Ta có } \Delta_f = (4b + 7)^2 - 36(7b^2 - 5b + 3) = -59(2b - 1)^2 \leq 0$$

$$\text{Suy ra } f(a) \geq 0 \Leftrightarrow 9a^2 - (4b + 7)a + 7b^2 - 5b + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 7a + 5b + 12ab - 9 \leq 9a^2 + 8ab + 7b^2 - 6$$

Theo giả thiết ta có $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$ nên $7a + 5b + 12ab \leq 9$.

○ CHỦ ĐỀ 2

BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho a, b là hai số thực. Các mệnh đề " $a > b$ ", " $a < b$ ", " $a \geq b$ ", " $a \leq b$ " được gọi là những bất đẳng thức.

- Chứng minh bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng (mệnh đề đúng)
- Với A, B là mệnh đề chứa biến thì " $A > B$ " là mệnh đề chứa biến. Chứng minh bất đẳng thức $A > B$ (với điều kiện nào đó) nghĩa là chứng minh mệnh đề chứa biến " $A > B$ " đúng với tất cả các giá trị của biến (thỏa mãn điều kiện đó). Khi nói ta có bất đẳng thức $A > B$ mà không nêu điều kiện đối với các biến thì ta hiểu rằng bất đẳng thức đó xảy ra với mọi giá trị của biến là số thực.

2. Tính chất:

- * $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$
- * $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$
- * $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$
- * Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$
Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$
- * $a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$
- * $a \geq b \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$
- * $a > b \geq 0 \Rightarrow a^n > b^n$

3. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

- * $-|a| \leq a \leq |a|$ với mọi số thực a .
- * $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ (với $a > 0$)
- * $|x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases}$ (với $a > 0$)

4. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức Cauchy)

a) Đối với hai số không âm

Cho $a \geq 0, b \geq 0$, ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Hệ quả:

- * Hai số dương có tổng không đổi thì tích lớn nhất khi hai số đó bằng nhau
- * Hai số dương có tích không đổi thì tổng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau

b) Đối với ba số không âm

Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, ta có $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

DẠNG	SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN
1.	CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

Để chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ ta có thể sử dụng các cách sau:

- Ta đi chứng minh $A - B \geq 0$. Để chứng minh nó ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để phân tích $A - B$ thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.
- Xuất phát từ bất đẳng thức đúng, biến đổi tương đương về bất đẳng thức cần chứng minh.

Loại 1: Biến đổi tương đương về bất đẳng thức đúng

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng.

Nếu $A < B \Leftrightarrow C < D$, với $C < D$ là một bất đẳng thức hiển nhiên, hoặc đã biết là đúng thì có bất đẳng thức $A < B$.

Chú ý: Ta có các hằng đẳng thức sau:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \quad (A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3,$$

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho số thực a, b, c . Chứng minh rằng:

$$1. \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \qquad 2. \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

Lời giải

$$1. \text{ Ta xét hiệu: } \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2(a^2 + b^2)}{4} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0 \text{ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi } a = b.$$

2. Ta xét hiệu:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Chú ý: Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$1. \frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n, \forall a, b \geq 0 \qquad 2. \frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n, \forall a, b, c \geq 0$$

Chứng minh:

1. Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 b^{n-1}a + \dots + C_n^{n-1} b a^{n-1} + C_n^n a^n$$

$$\Rightarrow 2(a+b)^n = C_n^0(a^n + b^n) + C_n^1(a^{n-1}b + b^{n-1}a) + \dots + C_n^{n-1}(a b^{n-1} + b a^{n-1}) + C_n^n(b^n + a^n)$$

$$\forall a, b \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n-1: (a^{n-i} - b^{n-i})(a^i - b^i) \geq 0 \Rightarrow a^n + b^n \geq a^{n-i}b^i - a^i b^{n-i}$$

$$\Rightarrow 2(a+b)^n \leq C_n^0(a^n + b^n) + C_n^1(a^n + b^n) + \dots + C_n^{n-1}(a^n + b^n) + C_n^n(b^n + a^n)$$

$$= (a^n + b^n)(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n) = 2^n(a^n + b^n)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{n}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a = b.$$

2. Đặt $d = \frac{a+b+c}{3} \geq 0$

Theo câu 1 ta có:

$$\frac{a^n + b^n + c^n + d^n}{4} \geq \frac{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n + 2\left(\frac{c+d}{2}\right)^n}{4} = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \left(\frac{c+d}{2}\right)^n}{2} \geq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n \geq d^n$$

$$\Rightarrow a^n + b^n + c^n + d^n \geq 4d^n \Rightarrow a^n + b^n + c^n \geq 3d^n \Rightarrow \frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq d^n = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b ta luôn có:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

Lời giải

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 1) > 2(ab + a + b)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$.

Ví dụ 3: Cho các số thực a, b, c . Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau:

1. $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ 2. $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

3. $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$ 4. $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

Lời giải

1. Ta có $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ (đpcm).

2. Bất đẳng thức tương đương với $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (đúng) đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

3. Bất đẳng thức tương đương $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ (đúng) đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

4. Bất đẳng thức tương đương $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3(ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ (đúng) đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Nhận xét: Các bất đẳng thức trên được vận dụng nhiều, và được xem như là "bổ đề" trong chứng minh các bất đẳng thức khác.

Ví dụ 4: Cho năm số thực a, b, c, d, e . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e)$

$$= \left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2 \right) + \left(\frac{a^2}{4} - ac + c^2 \right) + \left(\frac{a^2}{4} - ad + d^2 \right) + \left(\frac{a^2}{4} - ae + e^2 \right)$$

$$= \left(\frac{a}{2} - b \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e \right)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c = d = e = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 5:

1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 \leq x + y$. Chứng minh rằng $0 \leq x + y \leq 2$

2. Cho $ab \geq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \geq \frac{2}{1 + ab}$

Lời giải

1. Giả thiết: $x^2 + y^2 \leq x + y \Rightarrow 2(x^2 + y^2) = 2[(x+y)^2 - 2xy] \leq 2(x+y)$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)^2 - 4xy - 2(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2(x+y) + (x^2 + y^2 - 2xy) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2(x+y) + (x-y)^2 \leq 0 \Rightarrow (x+y)^2 - 2(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow (x+y-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x+y-1| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x+y-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 2$$

2. Ta có $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} - \frac{2}{1 + ab} = \left(\frac{1}{a^2 + 1} - \frac{1}{1 + ab} \right) + \left(\frac{1}{b^2 + 1} - \frac{1}{1 + ab} \right)$

$$= \frac{ab - a^2}{(a^2 + 1)(1 + ab)} + \frac{ab - b^2}{(b^2 + 1)(1 + ab)} = \frac{a - b}{1 + ab} \left(\frac{b}{1 + b^2} - \frac{a}{1 + a^2} \right) = \frac{a - b}{1 + ab} \cdot \frac{b - a + a^2b - b^2a}{(1 + b^2)(1 + a^2)}$$

$$= \frac{a - b}{1 + ab} \frac{(a - b)(ab - 1)}{(1 + b^2)(1 + a^2)} = \frac{(a - b)^2(ab - 1)}{(1 + ab)(1 + b^2)(1 + a^2)} \geq 0 \text{ (do } ab \geq 1).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Nhận xét: Nếu $-1 < ab \leq 1$ thì BĐT có chiều ngược lại: $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \leq \frac{2}{1 + ab}$.

Ví dụ 6:

1. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y ta có: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$
2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh: $ab + 2bc + 3ac \leq 0$

Lời giải

1. Ta có: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

2. Theo giả thiết thì $c = -a - b$ nên bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$ab + c(2b + 3a) \leq 0 \Leftrightarrow ab + (-a - b)(2b + 3a) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow ab - 2ab - 3a^2 - 2b^2 - 3ab \leq 0 \Leftrightarrow 3a^2 + 4ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2(a + b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$

Ví dụ 7:

1. Chứng minh rằng: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \geq -1$

2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 - xy = 1$.

Chứng minh rằng: $x^4 + y^4 - x^2y^2 \geq \frac{1}{9}$

Lời giải

1. Xét hiệu: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) - (-1) = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 1$

Đặt $x^2 - 5x + 5 = y$, biểu thức trên bằng $(y - 1)(y + 1) + 1 = y^2 \geq 0$

Vậy $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \geq -1$. (Phần còn lại dành cho bạn đọc)

2. Đặt $xy = t, -\frac{1}{3} \leq t \leq 1$. Theo giả thiết $x^2 + y^2 = 1 + t \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = (1 + t)^2$,

ta được $P = x^4 + y^4 - x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2 y^2 = -2t^2 + 2t + 1$, với $t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

$$\text{Khi đó } P = \frac{1}{9} + \frac{10}{3} \left(t + \frac{1}{3}\right) - 2 \left(t + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \left(t + \frac{1}{3}\right) (4 - 3t)$$

Do $-\frac{1}{3} \leq t \leq 1$ nên $t + \frac{1}{3} \geq 0, 4 - 3t > 0$. Suy ra $P = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \left(t + \frac{1}{3}\right) (4 - 3t) \geq \frac{1}{9}$. (đpcm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 8: Cho số thực x . Chứng minh rằng:

$$1. x^4 + 3 \geq 4x \quad 2. x^4 + 5 > x^2 + 4x \quad 3. x^{12} + x^4 + 1 > x^9 + x$$

Lời giải

1. Bất đẳng thức tương đương với $x^4 - 4x + 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (x^2 + 2x + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 [(x+1)^2 + 1] \geq 0 \text{ (đúng với mọi số thực } x)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

2. Bất đẳng thức tương đương với $x^4 - x^2 - 4x + 5 > 0$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + (x - 2)^2 > 0$$

$$\text{Ta có } (x^2 - 1)^2 \geq 0, (x - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 + (x - 2)^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ (không xảy ra)

Suy ra $(x^2 - 1)^2 + (x - 2)^2 > 0$ đpcm.

3. Bất đẳng thức tương đương với $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$

$$+ \text{ Với } x < 1: \text{ Ta có } x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^{12} + x^4(1 - x^5) + (1 - x)$$

Vì $x < 1$ nên $1 - x > 0, 1 - x^5 > 0$ do đó $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$.

$$+ \text{ Với } x \geq 1: \text{ Ta có } x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1$$

Vì $x \geq 1$ nên $x^3 - 1 \geq 0$ do đó $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$.

Vậy ta có $x^{12} + x^4 + 1 > x^9 + x$.

Ví dụ 9:

1. Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta luôn có: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

2. Chứng minh rằng với mọi $a > 0$ ta có: $\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{5(a^2 + 1)}{2a} \geq \frac{11}{2}$

Lời giải

1. Ta có: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c), \forall a, b, c > 0$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 - a^2bc - b^2ac - c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2 - c^2)^2 + 2b^2c^2 + (c^2 - a^2)^2 + 2a^2c^2$$

$$- 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (a^2b^2 + b^2c^2 - 2b^2ac) + (b^2c^2 + c^2a^2 - 2c^2ab) + (a^2b^2 + c^2a^2 - 2a^2ab) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ab - ac)^2 \geq 0$$

đúng với mọi a, b, c .

(Phần còn lại dành cho bạn đọc)

$$2. \text{ Ta có: } \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{5(a^2 + 1)}{2a} \geq \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{a^2 + 1} - \frac{1}{2} + \frac{5(a^2 + 1)}{2a} - 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(a-1)^2}{2(a^2 + 1)} + \frac{5(a-1)^2}{2a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{2} \left(\frac{5}{a} - \frac{1}{a^2 + 1} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{2} \cdot \frac{5a^2 - a + 5}{a(a^2 + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{2} \cdot \frac{(a-1)^2 + 9(a^2 + 1)}{2a(a^2 + 1)} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

Ví dụ 10: Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng:

$$1. a^4 + b^4 - 4ab + 2 \geq 0$$

$$2. 2(a^4 + 1) + (b^2 + 1)^2 \geq 2(ab + 1)^2$$

$$3. 3(a^2 + b^2) - ab + 4 > 2(a\sqrt{b^2 + 1} + b\sqrt{a^2 + 1})$$

Lời giải

1. Bất đẳng thức tương đương với $(a^4 + b^4 - 2a^2b^2) + (2a^2b^2 - 4ab + 2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2(ab - 1)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \pm 1$.

2. Bất đẳng thức tương đương với $2(a^4 + 1) + (b^4 + 2b^2 + 1) - 2(a^2b^2 + 2ab + 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a^4 + b^4 - 2a^2b^2) + (2a^2 - 4ab + 2b^2) + (a^4 - 4a^2 + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2(a - b)^2 + (a^2 - 1)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \pm 1$.

3. Bất đẳng thức tương đương với $6(a^2 + b^2) - 2ab + 8 - 4(a\sqrt{b^2 + 1} + b\sqrt{a^2 + 1}) \geq 0$

$$\Leftrightarrow [a^2 - 4a\sqrt{b^2 + 1} + 4(b^2 + 1)] + [b^2 - 4b\sqrt{a^2 + 1} + 4(a^2 + 1)] + (a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2\sqrt{b^2 + 1})^2 + (b - 2\sqrt{a^2 + 1})^2 + (a - b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Đẳng thức không xảy ra.

Ví dụ 11: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq y$. Chứng minh rằng:

$$1. 4(x^3 - y^3) \geq (x - y)^3 \quad 2. x^3 - 3x + 4 \geq y^3 - 3y$$

Lời giải

1. Bất đẳng thức tương đương với $4(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y)^3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - y)[4(x^2 + xy + y^2) - (x - y)^2] \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)[3x^2 + 3xy + y^2] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x - y)\left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right] \geq 0 \text{ (đúng với } x \geq y) \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

2. Bất đẳng thức tương đương với $x^3 - y^3 \geq 3x - 3y - 4$.

Theo câu a) ta có $x^3 - y^3 \geq \frac{1}{4}(x - y)^3$, do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{4}(x - y)^3 \geq 3x - 3y - 4 \text{ (*).}$$

$$\text{Thật vậy bất đẳng thức (*)} \Leftrightarrow (x - y)^3 - 12(x - y) + 16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left[(x-y)^2+2(x-y)-8\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)^2(x-y+4) \geq 0 \text{ (đúng với } x \geq y)$$

Đẳng thức không xảy ra.

Ví dụ 12:

1. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a^3 > 36$ và $abc = 1$. Chứng minh

$$a^2 + 3(b^2 + c^2) > 3(ab + bc + ca)$$

2. Biết $(x; y)$ là nghiệm của bất phương trình: $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = x + 3y$.

Lời giải

1. Ta có $bc = \frac{1}{a}$. Bất đẳng thức được viết lại $b^2 + c^2 + 2bc - 3bc - a(b+c) + \frac{a^2}{3} > 0$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 - a(b+c) + \frac{a^2}{3} - \frac{3}{a} > 0 \Leftrightarrow \left[(b+c) - \frac{a}{2}\right]^2 + \frac{a^2}{12} - \frac{3}{a} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(b+c) - \frac{a}{2}\right]^2 + \frac{a^3 - 36}{12a} > 0 \text{ (hiển nhiên đúng vì } a^3 > 36)$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

2. Thay $x = F - 3y$ vào bất phương trình ta được: $50y^2 - 30Fy + 5F^2 - 5F + 8 \leq 0$

Vì bất phương trình luôn tồn tại y nên $\Delta_y \geq 0 \Leftrightarrow -25F^2 + 250F - 400 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2 \leq F \leq 8.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $F = x + 3y$ là 8.

Ví dụ 13:

1. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

2. Cho các số thực x, y, z khác 1 và $xyz = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$.

Lời giải

1. Ta có: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} + \frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} + \frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{a-c}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{b-a}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} + \frac{c-b}{a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a-b}{b+c} - \frac{a-b}{c+a} \right) + \left(\frac{b-c}{c+a} - \frac{b-c}{a+b} \right) + \left(\frac{c-a}{a+b} - \frac{c-a}{b+c} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

(Phần còn lại dành cho bạn đọc)

2. Vì $xyz=1$ nên $x, y, z \neq 0$

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ thì ta có: $abc = 1$ và a, b, c khác 1 và khác 0.

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{(1-a)^2} + \frac{1}{(1-b)^2} + \frac{1}{(1-c)^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \right)^2 - 2 \left[\frac{1}{(1-a)(1-b)} + \frac{1}{(1-b)(1-c)} + \frac{1}{(1-c)(1-a)} \right] \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{3-2(a+b+c)+ab+bc+ca}{ab+bc+ca-(a+b+c)} \right]^2 - 2 \left[\frac{3-(a+b+c)}{ab+bc+ca-(a+b+c)} \right] \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left[1 + \frac{3-(a+b+c)}{ab+bc+ca-(a+b+c)} \right]^2 - 2 \left[\frac{3-(a+b+c)}{ab+bc+ca-(a+b+c)} \right] \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left[\frac{3-(a+b+c)}{ab+bc+ca-(a+b+c)} \right]^2 \geq 1. \text{ Đó chính là điều phải chứng minh.}$$

(Phần còn lại dành cho bạn đọc)

Ví dụ 14:

1. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \leq b \leq 3 \leq c; c \geq b+1; a+b \geq c$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$

2. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=xyz$ và $x>1, y>1, z>1$. Chứng minh:

$$\frac{x-1}{y^2} + \frac{y-1}{z^2} + \frac{z-1}{x^2} \geq \sqrt{3} - 1$$

Lời giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có: } Q &= \frac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} = \frac{(a+1).(b+1)+(ab-1).(c+1)}{(a+1).(b+1).(c+1)} \\ &= \frac{1}{c+1} + \frac{ab-1}{(a+1).(b+1)} \geq \frac{1}{a+b+1} + \frac{ab-1}{ab+a+b+1} \end{aligned}$$

$$\text{Do } a+b \geq c \geq b+1 \Rightarrow a \geq 1; b \geq a \geq 1 \Rightarrow (a-1).(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab \geq a+b-1 \geq c-1 \geq 2$$

$$\text{Suy ra: } Q \geq \frac{1}{ab+2} + \frac{ab-1}{2(ab+1)}$$

$$\text{Đặt } ab = x \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow Q \geq \frac{1}{x+2} + \frac{x-1}{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow Q - \frac{5}{12} \geq \frac{1}{x+2} + \frac{x-1}{2(x+1)} - \frac{5}{12} = \frac{(x-2).(x+5)}{12(x+1).(x+2)} \geq 0 \text{ (do } x \geq 2) \Rightarrow Q \geq \frac{5}{12}$$

$$Q = \frac{5}{12} \Leftrightarrow a=1; b=2; c=3.$$

$$\text{Vậy } Q_{\min} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow a=1; b=2; c=3.$$

$$2. \text{ Đặt } P = \frac{x-1}{y^2} + \frac{y-1}{z^2} + \frac{z-1}{x^2}$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{x-1+y-1}{y^2} + \frac{y-1+z-1}{z^2} + \frac{z-1+x-1}{x^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \quad (1)$$

$$\text{Mà } \frac{x-1+y-1}{y^2} + \frac{y-1+z-1}{z^2} + \frac{z-1+x-1}{x^2}$$

$$= (x-1) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + (y-1) \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) + (z-1) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} \right)$$

$$\geq (x-1) \frac{2}{xy} + (y-1) \frac{2}{yz} + (z-1) \frac{2}{zx} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } P \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - 2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \quad (3)$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1 \quad (4), \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1 \quad (5),$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2 \geq 3 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \sqrt{3} \quad (6)$$

$$\text{Từ (3), (4), (5) và (6) suy ra } P \geq \sqrt{3} - 1. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x=y=z=\sqrt{3}.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho các số thực a, b, c là số thực. Chứng minh rằng:

$$1. a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

$$2. a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

$$3. a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$$

$$4. a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc - ca)$$

$$5. a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$$

$$6. \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$$

$$7. (a^5 + b^5)(a + b) \geq (a^4 + b^4)(a^2 + b^2) \text{ với } ab > 0.$$

Bài 2: Cho a, b, c, d là số dương. Chứng minh rằng:

$$1. \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \text{ với } \frac{a}{b} < 1.$$

$$2. \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

$$3. 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

$$4. 2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$$

Bài 3: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$1. (ax + by)(bx + ay) \geq (a + b)^2 xy \text{ (với } a, b > 0; x, y \in \mathbb{R}).$$

$$2. \frac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}} \geq \frac{c+b}{\sqrt{c^2+b^2}} \text{ với } a > b > 0; c > \sqrt{ab}.$$

$$3. \frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} \geq 4 \text{ với } a, b, c > 0 \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$$

4. $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

5. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$$

Bài 4: Cho $x \geq y \geq z \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$1. xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xz^3 + zy^3 + yx^3$$

$$2. \frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq \frac{x^2z}{y} + \frac{y^2x}{z} + \frac{z^2y}{x}.$$

Bài 5: Cho bốn số dương a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}}.$$

Bài 6:

$$1. \text{ Cho } a, b > 0. \text{ Chứng minh: } \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

2. Cho $a, b > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

3. Cho a, b, c không âm. Chứng minh: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$

4. Chứng minh: $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

5. Chứng minh: $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$

6. Cho a, b, c khác không, thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Chứng minh: $\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} = 3$

Bài 7:

1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$. Chứng minh rằng: $-\frac{1}{3} \leq xy \leq 1$

2. Chứng minh: Với $a \geq b \geq 1$ ta có: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$

Bài 8:

1. Chứng minh $\forall m, n, p, q$ ta có: $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + 1 \geq m(n+p+q+1)$

2. Cho các số thực a, b, c . Chứng minh rằng: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$

Bài 9: Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{(x+y)^3} + \frac{1}{(y+z)^3} + \frac{1}{(z+x)^3} \geq \frac{3}{8}$$

Bài 10:

1. Cho các số thực a, b, c . Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

2. Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$$

Bài 11:

1. Cho các số thực dương $x, y, z > 0$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21}$$

2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Bài 12:

1. Cho các số thực a, b, c, d, e . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$$

2. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$.

Bài 13:

1. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

2. Cho $a, b, c \geq 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ac} \leq 1.$$

3. Cho các số thực a, b . Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2)(a^8 + b^8)(a^{10} + b^{10}) \leq 4(a^{20} + b^{20}).$$

Bài 14: Cho các số thực a, b . Chứng minh rằng:

1. Nếu $ab \geq 1$ thì ta có: $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \geq \frac{2}{1 + ab}$

2. Nếu $-1 < ab \leq 1$ thì ta có: $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \leq \frac{2}{1 + ab}$

Bài 15:

1. Cho $a, b \geq 0$ và $ab \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$

2. Cho các số thực $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(Trích đề thi Olympic Trung Quốc năm 2004)

3. Cho các số thực $x, y, z \in [1; 4]; x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{x}{2x + 3y} + \frac{y}{y + z} + \frac{z}{z + x}$$

(Trích đề thi Đại học Khối A năm 2011).

4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

(Trích đề thi Học sinh giỏi Quốc gia năm 2008).

Bài 16:

1. Cho hai số thực x, y . Chứng minh: $3(x + y + 1)^2 + 1 \geq 3xy$.

2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

3. Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$.

Bài 17:

1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh: $2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) + abc \geq 0$.

2. Cho $a, b, c \in [0; 2]$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$.

Bài 18:

1. Cho các số thực x, y, z . Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \max \left\{ \frac{3(x-y)^2}{4}, \frac{3(y-z)^2}{4}, \frac{3(z-x)^2}{4} \right\}.$$

2. Gọi S là diện tích tam giác ABC có $a = BC, b = CA, c = AB$

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

Bài 19:

1. Cho các số thực x, y và các số thực dương a, b . Chứng minh bất đẳng thức:

$$(ax + by)(bx + ay) \geq (a + b)^2 xy.$$

2. Cho hai số thực a, b thỏa mãn: $a + b \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$a^n + b^n \leq a^{n+1} + b^{n+1} \text{ với } \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $z \geq y \geq x > 0$. Chứng minh rằng:

$$y \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{y} (x + z) \leq (x + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right).$$

Bài 20:

1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq b > 0; c \geq \sqrt{ab}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}} \geq \frac{c+b}{\sqrt{c^2+b^2}}.$$

2. Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$. Chứng minh:

$$\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} \geq 4.$$

3. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có bất đẳng thức sau:

$$4 \left(\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3} \right) \leq 4c^3 + (a+b)^3.$$

Bài 21:

1. Cho $a, b \in [0; 1]$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a+b} \leq 1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3}$
2. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz} \geq \sqrt{2}$ và $\frac{x^2+y^2+2z^2}{xy+yz} \geq \sqrt{\frac{8}{3}}$.
3. Cho các số thực không âm, đôi một khác nhau x, y, z . Chứng minh rằng:

$$(xy + yz + zx) \left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right] \geq 4$$

Bài 22:

1. Cho các số thực dương đôi một khác nhau a, b, c . Chứng minh

$$\left| \frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} \right| > 1.$$

2. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x).$$

3. Cho các số thực a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4).$$

Bài 23:

1. Cho các số thực dương x, y thỏa $x^3 + y^3 = x - y$. Chứng minh: $x^2 + y^2 < 1$

2. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geq \frac{3}{8}$.

Loại 2: Xuất phát từ một bất đẳng thức đúng ta biến đổi đến bất đẳng thức cần chứng minh

Đối với loại này thường cho lời giải không được tự nhiên và ta thường sử dụng khi các biến có những ràng buộc đặc biệt:

* Chú ý hai mệnh đề sau thường dùng:

$$a \in [\alpha; \beta] \Rightarrow (a - \alpha)(a - \beta) \leq 0 \quad (*)$$

$$a, b, c \in [\alpha; \beta] \Rightarrow (a - \alpha)(b - \alpha)(c - \alpha) + (\beta - a)(\beta - b)(\beta - c) \geq 0 \quad (**)$$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Lời giải

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có: $a + b > c \Rightarrow ac + bc > c^2$.

Tương tự: $bc + ba > b^2$; $ca + cb > c^2$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm.

Nhận xét: * Ở trong bài toán trên ta đã xuất phát từ bất đẳng thức đúng đó là tính chất về độ dài ba cạnh của tam giác. Sau đó vì cần xuất hiện bình phương nên ta nhân hai vế của bất đẳng thức với c .

Ngoài ra nếu xuất phát từ bất đẳng thức $|a - b| < c$ rồi bình phương hai vế ta cũng có được kết quả.

Ví dụ 2: Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

Lời giải

Cách 1: Vì $a, b, c \in [0; 1] \Rightarrow (1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad (*)$$

Ta có: $a^2b^2c^2 \geq 0$; $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a$ nên từ (*) ta suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a \text{ đpcm.}$$

Cách 2: bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2(1 - b) + b^2(1 - c) + c^2(1 - a) \leq 1.$$

Mà $a, b, c \in [0; 1] \Rightarrow a^2 \leq a, b^2 \leq b, c^2 \leq c$, do đó

$$a^2(1 - b) + b^2(1 - c) + c^2(1 - a) \leq a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a)$$

Ta chỉ cần chứng minh $a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) \leq 1$

Thật vậy: vì $a, b, c \in [0; 1]$ nên theo nhận xét (**) ta có

$$abc + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 0 \Leftrightarrow a + b + c - (ab + bc + ca) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) \leq 1$$

Vậy BĐT ban đầu được chứng minh.

Ví dụ 3: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh:

$$2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) + abc \geq 0$$

Lời giải

Vì $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a, b, c \in [-1; 1]$ nên ta có:

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \geq 0 \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{(1 + a + b + c)^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca \geq 0 \quad (**)$$

Cộng (*) và (**) ta có đpcm.

Ví dụ 4:

Chứng minh rằng nếu $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$ thì $a + b + c \geq 16$.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $a < 9, b < 8, c \leq 7$, do đó áp dụng (*) ta có

$(a-4)(a-9) \leq 0, (b-5)(b-8) \leq 0, (c-6)(c-7) \leq 0$. Nhân ra và cộng các bất đẳng thức cùng chiều lại ta được:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 13(a+b+c) + 118 \leq 0$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq \frac{1}{13}(a^2 + b^2 + c^2 + 118) = 16 \text{ vì } a^2 + b^2 + c^2 = 90$$

Vậy $a+b+c \geq 16$, dấu "=" xảy ra khi $a=4, b=5, c=7$.

Ví dụ 5: Cho ba số a, b, c thuộc $[-1;1]$ và không đồng thời bằng không.

Chứng minh rằng: $\frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + 3}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 2$.

Lời giải

Vì ba số a, b, c thuộc $[-1;1]$ nên $0 \leq a^2, b^2, c^2 \leq 1$

Suy ra $(1-b^2)(1+b^2-a^4) \geq 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - a^4b^2 \leq 1$ (*)

Mặt khác $a^4 \geq a^{2012}, b^4 \geq b^{2012}$ đúng với mọi a, b thuộc $[-1;1]$

Suy ra $a^4 + b^4 - a^4b^2 \geq a^{2012} + b^{2012} - a^4b^2$ (**)

Từ (*) và (**) ta có $a^{2012} + b^{2012} \leq a^4b^2 + 1$ hay $\frac{a^4b^2 + c^{2012} + 1}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 1$

Tương tự ta có $\frac{b^4c^2 + a^{2012} + 1}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 1$ và $\frac{c^4a^2 + b^{2012} + 1}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 1$

Cộng vế với ta được $\frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} + 3}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 3$

Hay $\frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + 3}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \geq 2$ đpcm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho $a, b, c \in [1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \leq 14$

Bài 2:

1. Cho các số thực $a, b \in [0; 1]$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a+b} \leq 1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{2}$.
2. Cho $a, b, c \in [-1; 2]$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Chứng minh rằng $a + b + c \geq 0$.

Dạng 2. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Bất đẳng thức Cauchy

Bất đẳng thức này có tên gọi chính xác là bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân. Ở nhiều nước trên thế giới, người ta gọi bất đẳng thức này theo kiểu viết tắt là bất đẳng thức AM – GM (AM là viết tắt của Arithmetic Mean và GM là viết tắt của Geometric Mean)

Chúng ta thường gọi bất đẳng thức này theo tên của nhà Toán học người Pháp Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), tức là bất đẳng thức Cauchy. Thật ra đây là một cách gọi tên không chính xác vì Cauchy không phải là người đề xuất ra bất đẳng thức này mà chỉ là người đưa ra một phép chứng minh đặc sắc cho nó. Tuy nhiên, để cho phù hợp với chương trình Sách giáo khoa, trong tài liệu này chúng ta cũng sẽ gọi nó là Bất đẳng thức Cauchy.

Bất đẳng thức Cauchy

Với hai số không âm: $a, b \geq 0$, ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b$

Bất đẳng thức này còn được viết ở hai dạng khác tương đương là

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ và } a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Bất đẳng thức mở rộng cho n số không âm: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

hoặc $a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n$. Dấu “=” xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Chú ý: ta dùng bất đẳng thức Cauchy khi đề cho biến số không âm.

Trong nhiều bài toán mà biểu thức ở hai vế tương đối phức tạp, việc chứng minh trực tiếp trở nên khó khăn thì ta có thể sử dụng kỹ thuật “Ghép đối xứng” để bài toán trở nên đơn giản.

Ở các bài toán bất đẳng thức, thông thường chúng ta hay gặp phải hai dạng toán sau:

Dạng 1: Chứng minh $X + Y + Z \geq A + B + C$.

Ý tưởng: Nếu ta chứng minh được $X + Y \geq 2A$. Sau đó, tương tự hóa để chỉ ra $Y + Z \geq 2B$ và $Z + X \geq 2C$ (nhờ tính chất đối xứng của bài toán).

Sau đó cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi rút gọn cho 2, ta có ngay điều phải chứng minh.

Dạng 2. Chứng minh $XYZ \geq ABC$ với $X, Y, Z \geq 0$

Ý tưởng: Nếu ta chứng minh được $XY \geq A^2$. Sau đó tương tự hóa để chỉ ra $YZ \geq B^2$ và $ZX \geq C^2$ (nhờ tính chất đối xứng của bài toán). Sau đó nhân ba bất đẳng thức trên vế theo vế rồi lấy căn bậc hai, ta có $XYZ \geq \sqrt{A^2 B^2 C^2} = |ABC| \geq ABC$.

Phương pháp giải

Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy:

- * Khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì các số phải là những số không âm
- * Bất đẳng thức Cauchy thường được áp dụng khi trong bất đẳng thức cần chứng minh có tổng và tích
- * Điều kiện xảy ra dấu "=" là các số bằng nhau
- * Bất đẳng thức Cauchy còn có hình thức khác thường hay sử dụng là:

Đối với hai số không âm: $x^2 + y^2 \geq 2xy$; $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$; $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Đối với ba số không âm: $abc \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$, $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

Loại 1: Vận dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy

Các ví dụ

Ví dụ 1:

1. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$.

Khi nào đẳng thức xảy ra?

2. Cho ba số x, y, z thoả $x + y + z = 0$. Chứng minh:

$$\sqrt{3+4^x} + \sqrt{3+4^y} + \sqrt{3+4^z} \geq 6$$

Lời giải

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^x} \Rightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2 \cdot 3^x \quad (1)$$

Tương tự ta có: $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2 \cdot 4^x \quad (2)$, $\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2 \cdot 5^x \quad (3)$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế rồi chia cả hai vế cho 2, ta được đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

2. Ta có: $3 + 4^x = 1 + 1 + 1 + 4^x \geq 4\sqrt[4]{4^x} \Rightarrow \sqrt{3 + 4^x} \geq 2\sqrt[4]{4^x} = 2\sqrt[8]{4^x}$

Tương tự: $\sqrt{3 + 4^y} \geq 2\sqrt[8]{4^y}$, $\sqrt{3 + 4^z} \geq 2\sqrt[8]{4^z}$

Vậy, $\sqrt{3 + 4^x} + \sqrt{3 + 4^y} + \sqrt{3 + 4^z} \geq 2\left(\sqrt[8]{4^x} + \sqrt[8]{4^y} + \sqrt[8]{4^z}\right) \geq 6\sqrt[8]{4^x \cdot 4^y \cdot 4^z} = 6$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Ví dụ 2: Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Chứng minh rằng:

1. $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \geq 4$

2. $(a + b)^5 \geq 16ab\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}$

Lời giải

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2, \quad \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{a^2}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

Suy ra $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \geq \frac{4}{\sqrt{ab}}$ (1)

Mặt khác ta có $2 = a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2ab \Rightarrow ab \leq 1$ (1)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \geq 4$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

2. Ta có $(a + b)^5 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 2\sqrt{2ab(a^2 + b^2)} = 4\sqrt{ab};$$

$$(a^3 + 3ab^2) + (3a^2b + b^3) \geq 2\sqrt{(a^3 + 3ab^2)(3a^2b + b^3)} = 4\sqrt{ab(1 + b^2)(a^2 + 1)}$$

Suy ra $(a^2 + 2ab + b^2)(a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3) \geq 16ab\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$

Do đó $(a + b)^5 \geq 16ab\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là số dương:

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ac} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{a + b + c}{2abc}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{2}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{a\sqrt{bc}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} \right)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{2}{b^2 + ac} \leq \frac{1}{b\sqrt{ac}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ab} \right) \Rightarrow \frac{2}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{c\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a^2 + bc} + \frac{2}{b^2 + ac} + \frac{2}{c^2 + ab} \leq \frac{a+b+c}{2abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 4: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$1. \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

$$2. a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$$

$$3. (1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$$

$$4. a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \leq a^3 + b^3 + c^3$$

Lời giải

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}, b + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}}, c + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$\text{Suy ra } \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} = 8 \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$1 + a^2 \geq 2\sqrt{a^2} = 2a, \text{ tương tự } 1 + b^2 \geq 2b, 1 + c^2 \geq 2c$$

$$\text{Suy ra } a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq 3\sqrt{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = 3abc.$$

$$\text{Suy ra } a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

$$3. \text{Ta có } (1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + abc$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có:

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} = 3(\sqrt[3]{abc})^2 \text{ và } a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\text{Suy ra } (1+a)(1+b)(1+c) \geq 1 + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + 3\sqrt[3]{abc} + abc = (1 + \sqrt[3]{abc})^3, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

4. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$a^2\sqrt{bc} \leq a^2\left(\frac{b+c}{2}\right), \quad b^2\sqrt{ac} \leq b^2\left(\frac{a+c}{2}\right), \quad c^2\sqrt{ab} \leq c^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \leq \frac{a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b}{2} \quad (1)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có

$$a^2b \leq \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3}, \quad b^2a \leq \frac{b^3 + b^3 + a^3}{3}, \quad a^2c \leq \frac{a^3 + a^3 + c^3}{3},$$

$$c^2a \leq \frac{c^3 + c^3 + a^3}{3}, \quad b^2c \leq \frac{b^3 + b^3 + c^3}{3}, \quad c^2b \leq \frac{c^3 + c^3 + b^3}{3}$$

$$\text{Suy ra } a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b \leq 2(a^3 + b^3 + c^3) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \leq a^3 + b^3 + c^3$, đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 5: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{xy+z} + \sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}} \geq 1$$

Lời giải

Ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh bất đẳng thức cùng bậc là

$$\frac{\sqrt{xy+z(x+y+z)} + \sqrt{2x^2+2y^2}}{x+y+z+\sqrt{xy}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+z)(y+z)} + \sqrt{2x^2+2y^2} \geq x+y+z+\sqrt{xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$2x^2 + 2y^2 = 2(x+y)^2 - 4xy \geq 2(x+y)^2 - (x+y)^2 = (x+y)^2 \Rightarrow \sqrt{2x^2+2y^2} \geq x+y$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh: $\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq z + \sqrt{xy}$

$$\Leftrightarrow z^2 + xy + z(x+y) \geq z^2 + xy + 2z\sqrt{xy} \Leftrightarrow z(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases}$

Ví dụ 6: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2} \geq 3$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$a+1-\frac{a+1}{1+b^2}+b+1-\frac{b+1}{1+c^2}+c+1-\frac{c+1}{1+a^2} \leq a+b+c+3-3=3$$

$$\text{hay } \frac{(a+1).b^2}{1+b^2} + \frac{(b+1).c^2}{1+c^2} + \frac{(c+1).a^2}{1+a^2} \leq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các mẫu thức, ta được:

$$\frac{(a+1)b^2}{1+b^2} + \frac{(b+1)c^2}{1+c^2} + \frac{(c+1)a^2}{1+a^2} \leq \frac{(a+1)b^2}{2b} + \frac{(b+1)c^2}{2c} + \frac{(c+1)a^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+1)b}{2} + \frac{(b+1)c}{2} + \frac{(c+1)a}{2} = \frac{3+ab+bc+ca}{2} \leq 3, \text{ vì } ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Ví dụ 7: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$1. \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a+b+c}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b+c+a}} + \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}} \geq \frac{3}{2}.$$

$$2. \frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

$$1. \text{Đặt } P = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a+b+c}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b+c+a}} + \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}} = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+3}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{b+3}} + \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{c+3}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số thực dương, ta có:

$$\frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{a+3}} + \frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{a+3}} + \frac{a+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{64}} = \frac{3b}{4}$$

$$\text{Tương tự } \frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{b+3}} + \frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{b+3}} + \frac{b+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{64}} = \frac{3c}{4},$$

$$\frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{c+3}} + \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{c+3}} + \frac{c+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{64}} = \frac{3a}{4}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+3}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{b+3}} + \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{c+3}} + \frac{a+b+c+9}{16} \geq \frac{3}{4}(a+b+c) \geq \frac{3}{2} \text{ (điều phải chứng minh)}$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a=b=c=1$

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a}{b^3+ab} = \frac{1}{b} - \frac{b}{a+b^2} \geq \frac{1}{b} - \frac{b}{2\sqrt{ab^2}} = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+1\right)$$

Tương tự: $\frac{b}{c^3+bc} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+1\right), \frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+1\right)$

Cộng ba bất đẳng thức này lại vế theo vế, ta được

$$\frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \frac{3}{4}$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + a\right) + \left(\frac{1}{b} + b\right) + \left(\frac{1}{c} + c\right) \geq 3 + a + b + c = 6$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{a} + a \geq 2, \frac{1}{b} + b \geq 2, \frac{1}{c} + c \geq 2.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 8: Cho a, b là các số dương và thỏa mãn:

1. $ab + a + b = 3$. Chứng minh: $\frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2}$

2. $abc = 1$. Chứng minh rằng: $2(a^2 + b^2 + c^2) + 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 7(a + b + c) - 3$

Lời giải

1. $3 = ab + a + b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + a + b \Leftrightarrow (a+b)^2 + 4(a+b) - 12 \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2 \quad (1)$

$$ab + a + b = 3 \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} + 1 = \frac{3}{a+b} \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{3}{a+b} - 1 \quad (2)$$

$$ab + a + b = 3 \Leftrightarrow (a+1)(b+1) = 4 \quad (3)$$

$$\frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2) + \frac{3}{4}(a+b) + \frac{3}{a+b} - 1$$

$$a^2 + b^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2) + \frac{3}{4}(a+b) + \frac{3}{a+b} - 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 3(a+b) + \frac{12}{a+b} - 10$$

Ta có: $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ ta chứng minh $\frac{(a+b)^2}{2} \geq 3(a+b) + \frac{12}{a+b} - 10$

Đặt $a+b = x (x \geq 2)$ ta được $x^2 - 6x - \frac{24}{x} + 20 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)\left[(x-2)^2 + 8\right] \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$.

2. Đặt $S = a + b + c$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số thức dương ta có:

$$S \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } & 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 7(a + b + c) + 3 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4 \cdot \frac{ab + bc + ca}{abc} - 7(a + b + c) - 3 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + bc + ca) - 7(a + b + c) + 3 = 2(a + b + c)^2 - 7(a + b + c) + 3 \\ &= 2S^2 - 7S + 3 = (2S - 1)(S - 3) \geq 0 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 9: Cho a, b, c, d là số dương. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} 1. & \left(\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{d^3} + \frac{d}{a^3}\right)(a+b)(b+c) \geq 16 \quad 2. \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 4. \\ 3. & 2\sqrt{\frac{3a}{a+b+c}} + 3\sqrt[3]{\frac{bc}{(a+b)(a+b+c+d)}} + 4\sqrt[4]{\frac{2b^3d}{81(a+b)^3(a+b+c+d)}} \leq \frac{25}{6} \end{aligned}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, c + d \geq 2\sqrt{cd} \text{ và } \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = 2\sqrt[4]{abcd}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

$$1. \text{ Ta có: } \frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{d^3} + \frac{d}{a^3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{b^3} \cdot \frac{b}{c^3} \cdot \frac{c}{d^3} \cdot \frac{d}{a^3}} = \frac{4}{\sqrt{abcd}}$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{d^3} + \frac{d}{a^3}\right)(a+b)(b+c) \geq \frac{4}{\sqrt{abcd}} \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{cd} = 16 \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ VT} &= 3 \cdot \frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \cdot \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \\ &= 4\sqrt[4]{\frac{8(a+b+c)^3}{27(a+b)(b+c)(c+a)}}. \end{aligned}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $4\sqrt[4]{\frac{8(a+b+c)^3}{27(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 4$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^3 \geq 27(a+b)(b+c)(c+a) \quad (*)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq \left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3} \right)^3 = \frac{8(a+b+c)^3}{27}$$

Suy ra bất đẳng thức (*) đúng nên bất đẳng thức ban đầu đúng, đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Bất đẳng thức Cauchy cho n số không âm như sau:

Cho n số không âm $a_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Khi đó ta có $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

$$3. \text{ Đặt } P = 2\sqrt{\frac{3a}{a+b+c}} + 3\sqrt[3]{\frac{bc}{(a+b)(a+b+c+d)}} + 4\sqrt[4]{\frac{2b^3d}{81(a+b)^3(a+b+c+d)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $2\sqrt{\frac{2a}{a+b} \cdot \frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}} \leq \frac{2a}{a+b} + \frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}$;

$$\begin{aligned} 3\sqrt[3]{\frac{bc}{(a+b)(a+b+c+d)}} &= 3\sqrt[3]{\frac{b}{a+b} \cdot \frac{3c}{2(a+b+c)} \cdot \frac{2(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}} \\ &\leq \frac{b}{a+b} + \frac{3c}{2(a+b+c)} + \frac{2(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}; \end{aligned}$$

$$4\sqrt[4]{\frac{2b^3d}{81(a+b)^3(a+b+c+d)}} = 4\sqrt[4]{\left(\frac{b}{3(a+b)}\right)^3 \cdot \frac{2d}{3(a+b+c+d)}} \leq 3 \cdot \frac{b}{3(a+b)} + \frac{2d}{3(a+b+c+d)}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$P \leq \frac{2(a+b)}{a+b} + \frac{3(a+b+c)}{2(a+b+c)} + \frac{2(a+b+c+d)}{3(a+b+c+d)} = \frac{25}{6}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Ví dụ 10: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$1. a^2b + b^2c + c^2a \leq 3$$

$$2. \frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} + \frac{ca}{3+b^2} \leq \frac{3}{4}$$

Lời giải

1. Ta có $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 9 \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 = 9$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2, b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2, c^4 + a^4 \geq 2c^2a^2$$

Cộng vế với vế lại ta được $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq 3$ (3)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^2 + a^2b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot a^2b^2} = 2a^2b, \text{ tương tự ta có } b^2 + b^2c^2 \geq 2b^2c, c^2 + c^2a^2 \geq 2c^2a$$

Cộng vế với vế ta được $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$ (4)

Từ giả thiết và (3), (4) suy ra $a^2b + b^2c + c^2a \leq 3$, đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$3 + a^2 = 3 + (3 - b^2 - c^2) = (3 - b^2) + (3 - c^2) \geq 2\sqrt{(3 - b^2)(3 - c^2)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{bc}{3 + a^2} &\leq \frac{bc}{2\sqrt{(3 - b^2)(3 - c^2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{3 - c^2} \cdot \frac{c^2}{3 - b^2}} \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{3 - c^2} + \frac{c^2}{3 - b^2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{b^2 + a^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right) \end{aligned}$$

Tương tự ta có $\frac{ab}{3 + c^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right), \frac{ca}{3 + b^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{c^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right)$

Cộng vế với vế ta được $\frac{ab}{3 + c^2} + \frac{bc}{3 + a^2} + \frac{ca}{3 + b^2} \leq \frac{3}{4}$, đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 11:

1. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c \geq 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c}$.

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ac \geq 12$ và $bc \geq 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể được của biểu thức $P = a + b + c + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc}$.

3. Cho ba số dương x, y, z . Chứng minh: $\frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$

Lời giải

1. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4 \Rightarrow \frac{3}{4}\left(a + \frac{4}{a}\right) \geq 3, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = 2$$

$$b + \frac{9}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{9}{b}} = 6 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(b + \frac{9}{b}\right) \geq 3, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } b = 3$$

$$c + \frac{16}{c} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{16}{c}} = 8 \Rightarrow \frac{1}{4}\left(c + \frac{16}{c}\right) \geq 2, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } c = 4$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, thu được $\frac{3a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 8$ (1)

Mặt khác, $a + 2b + 3c \geq 20$ nên $\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{3c}{4} \geq 5$ (chia hai vế cho 4) (2)

Cộng (1) và (2), ta được $A = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 3, c = 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng 13, đạt được khi $a = 2, b = 3, c = 4$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{6}{ab} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{6}{ab}} = 3, \text{ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{6}{ab} \quad (1)$$

$$\frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{8}{bc} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{2} \cdot \frac{c}{4} \cdot \frac{8}{bc}} = 3, \text{ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \frac{b}{2} = \frac{c}{4} = \frac{8}{bc} \quad (2)$$

$$\frac{c}{4} + \frac{a}{3} + \frac{12}{ca} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c}{4} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{12}{ca}} = 3, \text{ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \frac{c}{4} = \frac{a}{3} = \frac{12}{ca} \quad (3)$$

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{24}{abc} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{4} \cdot \frac{24}{abc}} = 4,$$

dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{4} = \frac{24}{abc} \quad (4)$

$$(1) + 4 \times (2) + 7 \times (3) + (4) \Rightarrow 3(a + b + c) + \frac{6}{ab} + \frac{32}{bc} + \frac{84}{ca} + \frac{24}{abc} \geq 40.$$

Mặt khác, từ giả thiết suy ra $\frac{1}{ca} \leq \frac{1}{12}$ và $\frac{1}{bc} \leq \frac{1}{8}$. Do đó

$$40 \leq 3P + 26 \cdot \frac{1}{bc} + 78 \cdot \frac{1}{ca} \leq 3P + \frac{13}{4} + 39 = 3P + \frac{117}{12} \Rightarrow P \geq \frac{121}{12}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3, b = 2, c = 4$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng $\frac{121}{12}$, đạt được khi

$$a = 3, b = 2, c = 4.$$

3. Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương x^3, y^2 , ta có:

$$x^3 + y^2 \geq 2\sqrt{x^3 y^2} = 2xy\sqrt{x} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} \leq \frac{2\sqrt{x}}{2xy\sqrt{x}} = \frac{1}{xy}$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}$ ta có:

$$\frac{1}{xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right), \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} \right)$

$$\text{Suy ra: } \frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} x^3 = y^2 \\ x = y \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y^3 = z^2 \\ y = z \end{cases} \text{ và } \begin{cases} z^3 = x^2 \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Cách 2: Vì vế trái xuất hiện căn thức và các biến ở mẫu lệch nhau một bậc.

Đồng thời cần đánh giá VT $\leq$ VP. Những điều này gợi ý ta đánh giá ở mẫu.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương ta có:

$$x^3 + y^2 \geq 2xy\sqrt{x} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} \leq \frac{2\sqrt{x}}{2xy\sqrt{x}} = \frac{1}{xy}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} \leq \frac{1}{yz}; \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{zx} \Rightarrow \text{VT} \leq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}.$$

$$\text{Vậy ta cần chứng minh: } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì nó tương đương với

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x} \right)^2 \geq 0.$$

$$\text{Mặt khác: } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Ví dụ 12: Chứng minh với mọi số dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện:

$$a + b + c + d = 4 \text{ ta có: } \frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2.$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b^2c} &= a - \frac{ab^2c}{1+b^2c} \geq a - \frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}} = a - \frac{ab\sqrt{c}}{2} = a - \frac{b\sqrt{a \cdot ac}}{2} \geq a - \frac{b(a+ac)}{4} \\ \Rightarrow \frac{a}{1+b^2c} &\geq a - \frac{1}{4}(ab+abc) \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\frac{b}{1+c^2d} \geq b - \frac{1}{4}(bc+bcd), \quad \frac{c}{1+d^2a} \geq c - \frac{1}{4}(cd+cda), \quad \frac{d}{1+a^2b} \geq d - \frac{1}{4}(da+dab)$$

Cộng vế với vế của bốn bất đẳng thức cùng chiều trên được:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} &\geq a + b + c + d \\ &\quad - \frac{1}{4}(ab+bc+cd+da+abc+bcd+cda+dab) \end{aligned}$$

$$\text{ta có các bất đẳng thức: } ab+bc+cd+da \leq \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2 = 4;$$

$$abc+bcd+cda+dab \leq (a+b+c+d)^2 = 4.$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq a + b + c + d - 2 = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Ví dụ 13:

1. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 2012. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } P = x + y$$

2. Cho ba số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(1 + \frac{a}{2b}\right) \left(1 + \frac{b}{2c}\right) \left(1 + \frac{c}{2a}\right)$$

Lời giải

$$1. \text{ Đặt } t = x + \sqrt{1+x^2} \text{ thì dễ thấy } t > 0 \text{ và } x = \frac{t^2 - 1}{2t} \quad (1)$$

$$\text{Giả thiết ta có } y + \sqrt{1+y^2} = \frac{2012}{t} \Rightarrow y = \frac{2012^2 - t^2}{2 \cdot 2012 \cdot t} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } x+y = \frac{t^2-1}{2t} + \frac{2012^2-t^2}{2.2012.t} = \frac{2011}{2.2012} \left(t + \frac{2012}{t} \right)$$

$$\text{Do đó } x+y \geq \frac{2011}{2.2012} \cdot 2\sqrt{t \cdot \frac{2012}{t}} = \frac{2011}{2.2012} \cdot 2\sqrt{2012} = \frac{2011}{\sqrt{2012}}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } t = \sqrt{2012} \Rightarrow x = y = \frac{2011}{2\sqrt{2012}}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng } \frac{2011}{\sqrt{2012}}, \text{ khi } x = y = \frac{2011}{2\sqrt{2012}}.$$

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$1 + \frac{a}{2b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{a}{2b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2b}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (1)$$

$$1 + \frac{b}{2c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{b}{2c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2c}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{c}} \quad (2)$$

$$1 + \frac{c}{2a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{c}{2a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2a}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{c}{a}} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } P = \left(1 + \frac{a}{2b}\right) \left(1 + \frac{b}{2c}\right) \left(1 + \frac{c}{2a}\right) \geq \frac{27}{8}$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2a} = \frac{1}{2} \\ a, b, c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c > 0$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{27}{8} \text{ khi } a = b = c > 0.$$

Ví dụ 14: Cho hai số thực dương x, y . Chứng minh rằng:

$$\left(1+x\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 256$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương ta có

$$1+x = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{27}} \quad (1)$$

$$1+\frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{3x} + \frac{y}{3x} + \frac{y}{3x} \geq 4\sqrt[4]{\frac{y^3}{27x^3}} \quad (2)$$

$$1+\frac{9}{\sqrt{y}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{y}} \geq 4\sqrt[4]{\frac{27}{(\sqrt{y})^3}} \Leftrightarrow \left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 16\sqrt[4]{\frac{27^2}{y^3}} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{27}} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{y^3}{27x^3}} \cdot 16\sqrt[4]{\frac{27^2}{y^3}} = 256 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$

Ví dụ 15:

1. Cho x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x \geq 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $M = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

2. Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức:

$$P = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2$$

Lời giải

1. Cách 1: $M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(x^2 - 4xy + 4y^2) + 4xy - 3y^2}{xy} = \frac{(x - 2y)^2 + 4xy - 3y^2}{xy}$

$$M = \frac{(x - 2y)^2}{xy} + 4 - \frac{3y}{x}.$$

Vì $(x - 2y)^2 \geq 0$, đẳng thức xảy ra khi $x = 2y$.

Lại có: $x \geq 2y \Rightarrow \frac{y}{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-3y}{x} \geq \frac{-3}{2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 2y$.

Từ đó ta có $M \geq 0 + 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 2y$.

Vậy, nhỏ nhất của biểu thức M bằng $\frac{5}{2}$, đạt được khi $x = 2y$.

Cách 2: Ta có $M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \left(\frac{x}{4y} + \frac{y}{x} \right) + \frac{3x}{4y}$

Vì x, y là các số dương nên có $\frac{x}{4y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y} \cdot \frac{y}{x}} = 1$, đẳng thức xảy ra khi $x = 2y$

Lại có: $x \geq 2y \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{y} \geq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 2y$

Từ đó $M \geq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 2y$

Vậy, nhỏ nhất của biểu thức M bằng $\frac{5}{2}$, đạt được khi $x = 2y$

Cách 3: $M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{\frac{4x^2}{4} + y^2}{xy} = \frac{\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{3x^2}{4}}{xy} = \frac{\frac{x^2}{4} + y^2}{xy} + \frac{3x^2}{4xy} = \frac{\frac{x^2}{4} + y^2}{xy} + \frac{3x}{4y}$

Vì x, y là các số dương nên ta có $\frac{x^2}{4} + y^2 \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4} \cdot y^2} = xy$, đẳng thức xảy ra khi $x = 2y$.

Lại có: $x \geq 2y \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{y} \geq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 2y$.

Từ đó $M \geq \frac{xy}{xy} + \frac{3}{2} \geq 1 + \frac{3}{2} \geq \frac{5}{2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 2y$.

Vậy, nhỏ nhất của biểu thức bằng $\frac{5}{2}$, đạt được khi $x = 2y$

2. Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow P = \frac{81}{a+b+c}$

Vì $a, b, c \in [1; 2] \Rightarrow 3 \leq a+b+c \leq 6 \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{6}$, khi đó $P \geq \frac{27}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 2$

Vậy, $\min P = \frac{27}{2}$ khi $a = b = c = 2$.

$$P = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \left[\frac{(a+b+c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}{3} \right]^3$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{27} \left(a+b+c + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right)^3$$

Hơn nữa $a \in [1; 2] \Leftrightarrow (a-1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a + \frac{2}{a} \leq 3$.

Tương tự: $b + \frac{2}{b} \leq 3, c + \frac{2}{c} \leq 3$. Suy ra $P \leq 27$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy, $\max P = 27$ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 16:

1. Giả sử x, y là hai số thỏa mãn $x > y$ và $xy = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$.

2. Giả sử x, y là các số thực lần lượt thỏa mãn các phương trình $x^2 + 2ax + 9 = 0, (a \geq 3); y^2 - 2by + 9 = 0, (b \geq 3)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3(x-y)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2$.

Lời giải

1. Ta có thể viết: $A = \frac{x^2 + y^2}{x-y} = \frac{x^2 - 2xy + y^2 + 2xy}{x-y} = \frac{(x-y)^2 + 2xy}{x-y}$

Do $x > y$ và $xy = 1$ nên: $A = \frac{(x-y)^2 + 2xy}{x-y} = x-y + \frac{2}{x-y} = \frac{x-y}{2} + \frac{2}{x-y} + \frac{x-y}{2}$

Vì $x > y \Rightarrow x-y > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy với hai số không âm, ta có:

$$A \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x-y}{2} \cdot \frac{2}{x-y}} + \frac{x-y}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = \frac{2}{x-y} \Leftrightarrow (x-y)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-y) = 2$ (do $x-y > 0$)

Từ đó: $A \geq 2 + \frac{2}{2} = 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 3 khi $\begin{cases} x-y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=-1+\sqrt{2} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=-1-\sqrt{2} \end{cases}$

2. Vì $a \geq 3$ nên phương trình $x^2 + 9 = -2ax$ có nghiệm khi $x < 0$;

Vì $b \geq 3$ nên phương trình $y^2 + 9 = 2by$ có nghiệm khi $y > 0$.

Đặt $x = -t, t > 0$, thế thì $A = 3(-t-y)^2 + \left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{y}\right)^2 = 3(t+y)^2 + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{y}\right)^2$

Vì $y > 0, t > 0$ nên có: $\frac{1}{t} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{t+y}$ suy ra $A \geq 3(t+y)^2 + \frac{16}{(t+y)^2} \geq 8\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} t=y \\ 3(t+y)^2 = \frac{16}{(t+y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=y \\ y^4 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^2 + 2a\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) + 9 = 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^2 - 2b\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{9\sqrt{3}+1}{2\sqrt[4]{3}}$
 $\begin{cases} a \geq 3 \\ b \geq 3 \end{cases}$

Vậy, $\min A = 8\sqrt{3}$ đạt được khi $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, y = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, a = b = \frac{9\sqrt{3}+1}{2\sqrt[4]{3}}$.

Ví dụ 17: Cho 3 số dương x, y, z thay đổi và $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\frac{xy}{xy+z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+y}}$

Lời giải

Ta có: $x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y \Rightarrow xy + z = (1-x)(1-y)$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{xy}{xy+z}} = \sqrt{\frac{xy}{(1-x)(1-y)}} = \sqrt{\frac{y}{1-x} \cdot \frac{x}{1-y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{1-x} + \frac{x}{1-y} \right)$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{yz}{yz+x}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1-y} + \frac{y}{1-z} \right), \sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1-x} + \frac{x}{1-z} \right)$

$$\Rightarrow VT \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y+z}{1-x} + \frac{x+z}{1-y} + \frac{x+y}{1-z} \right) = \frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy $\max P = \frac{3}{2}$

Ví dụ 18: Chứng minh rằng với mọi $x, y, z > 0$ thì $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq x^2 + y^2 + z^2$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{x^3}{y} + xy \geq 2\sqrt{\frac{x^3}{y} \cdot xy} = 2x^2 \quad (1)$$

$$\frac{y^3}{z} + yz \geq 2\sqrt{\frac{y^3}{z} \cdot yz} = 2y^2 \quad (2)$$

$$\frac{z^3}{x} + xz \geq 2\sqrt{\frac{z^3}{x} \cdot xz} = 2z^2 \quad (3)$$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} + xy + yz + zx \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (4)$$

Để chứng minh được bất đẳng thức: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (5). Từ (4) và (5) ta có

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} + xy + yz + zx \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx.$$

Suy ra: $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq x^2 + y^2 + z^2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số, ta có:

$$\frac{x^3}{y} + \frac{x^3}{y} + y^2 \geq 3\sqrt{\frac{x^3}{y} \cdot \frac{x^3}{y} \cdot y^2} = 3x^2 \quad (6)$$

$$\frac{y^3}{z} + \frac{y^3}{z} + z^2 \geq 3\sqrt{\frac{y^3}{z} \cdot \frac{y^3}{z} \cdot z^2} = 3y^2 \quad (7)$$

$$\frac{z^3}{x} + \frac{z^3}{x} + x^2 \geq 3\sqrt{\frac{z^3}{x} \cdot \frac{z^3}{x} \cdot x^2} = 3z^2 \quad (8)$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức (7), (8), (9) và rút gọn ta được bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Cách 3: Sử dụng hệ quả của bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ 3 số:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpsky $(\sqrt{a_1}; \sqrt{a_2}; \sqrt{a_3})$ và $(\frac{b_1}{\sqrt{a_1}}; \frac{b_2}{\sqrt{a_2}}; \frac{b_3}{\sqrt{a_3}})$, ta có:

$$\left[(\sqrt{a_1})^2 + (\sqrt{a_2})^2 + (\sqrt{a_3})^2 \right] \left[\left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1}} \right)^2 + \left(\frac{b_2}{\sqrt{a_2}} \right)^2 + \left(\frac{b_3}{\sqrt{a_3}} \right)^2 \right] \geq (b_1 + b_2 + b_3)^2$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + a_3) \left(\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \frac{b_3^2}{a_3} \right) \geq (b_1 + b_2 + b_3)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \frac{b_3^2}{a_3} \geq \frac{(b_1 + b_2 + b_3)^2}{a_1 + a_2 + a_3} \quad (9). \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$$

$$\text{Ta có } \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} = \frac{x^4}{xy} + \frac{y^4}{yz} + \frac{z^4}{zx} \stackrel{\text{theo (9)}}{\geq} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{xy + yz + zx} \geq x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{theo (5)})$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho x, y, z dương. Chứng minh rằng

$$\frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

Bài 2: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}.$$

Bài 3: Với các số dương a, b, c, d sao cho: $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} = 1$.

Chứng minh rằng: $abcd \leq \frac{1}{81}$.

Bài 4: Với các số dương a, b, c sao cho: $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} = 1$.

Chứng minh rằng: $\left(\frac{1+b}{a} - 1\right)\left(\frac{1+c}{b} - 1\right)\left(\frac{1+a}{c} - 1\right) \geq 8$.

Bài 5: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn hệ thức $xyz(x+y+z) = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x+y)(x+z)$.

Bài 6: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$.

Bài 7: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} \leq \frac{1}{2}$.

Bài 8: Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \geq \frac{6}{a+b+c}$.

Bài 9: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{2}$.

Bài 10: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a+b}{2ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{2bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{2ca}} \geq 3$.

Bài 11: Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$.

Bài 12: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}} + \sqrt{\frac{2b}{2c+2a-b}} + \sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}}$

Bài 13:

1. Cho ba số thực a, b, c sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$.

Chứng minh: $40a^2 + 27b^2 + 14c^2 \geq 24$

2. Cho a, b, c dương và $ab + bc + ca \geq 3$. Chứng minh:

$$\sqrt{a+3} + \sqrt{b+3} + \sqrt{c+3} \leq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

3. Cho 3 số dương a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{abc}$. Chứng minh:

$$4(a+b+c) \geq 9\sqrt{abc}$$

4. Cho 3 số dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$\text{a. } \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{b. } \frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$$

5. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a + b = 4ab$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{4b^2+1} + \frac{b}{4a^2+1} \geq \frac{1}{2}$$

6. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a+bc} + \frac{b^3}{b+ca} + \frac{c^3}{c+ab} \geq \frac{3}{2}$$

7. Cho x, y, z là các số thực khác 0. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{x^2}{x^2 + (y+z)^2} + \frac{y^2}{y^2 + (x+z)^2} + \frac{z^2}{z^2 + (y+x)^2} \geq \frac{3}{5}$$

Bài 14:

1. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$

2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$

3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$

4. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

$$\text{Chứng minh: } \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 15:

1. Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}$$

2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$

Bài 16: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{4x}{y(2\sqrt{1+8y^3}+4x-2)} + \frac{4y}{z(2\sqrt{1+8z^3}+4y-2)} + \frac{4z}{x(2\sqrt{1+8x^3}+4z-2)}$$

Bài 17: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời: $a + b + c = 1$ và $ab + bc + ca > 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$

Bài 18: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$2(a^2b + b^2c + c^2a) + 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 19$$

Bài 19: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 3abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3a + 2b + c + \frac{8}{a} + \frac{6}{b} + \frac{4}{c}$.

Loại 2: Kỹ thuật tách, thêm bớt, ghép cặp

- Để chứng minh bất đẳng thức ta thường phải biến đổi (nhân chia, thêm, bớt một biểu thức) để tạo biểu thức có thể giản ước được sau khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

- Khi gặp bất đẳng thức có dạng $x + y + z \geq a + b + c$ (hoặc $xyz \geq abc$), ta thường đi chứng minh $x + y \geq 2a$ (hoặc $ab \leq x^2$), xây dựng các bất đẳng thức tương tự rồi cộng (hoặc nhân) vế với vế ta suy ra điều phải chứng minh.

- Khi tách và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta dựa vào việc đảm bảo dấu bằng xảy ra (thường dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tại các đầu mút).

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$

Lời giải

* Trước hết ta thấy đẳng thức có khi $a = b = c = 1$ (vì khi đó $VT = VP = 1$) nên trong quá trình giải thì các bước đánh giá phải thỏa dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

* Chúng ta cần đánh giá $VT \geq VP$, mà VT là biểu thức có bậc 3 còn VP có bậc 1 nên ta tìm cách làm giảm bậc.

Ta có nhận xét: $a = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{a^3 + 1 + 1}{3} \Leftrightarrow 3a \leq a^3 + 2$ (Các bạn nhớ vì sao ta ghép a^3 với 1?)

Tương tự: $3b \leq b^3 + 2$; $3c \leq c^3 + 2$. Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta có

$$3(a + b + c) \leq a^3 + b^3 + c^3 + 6 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3(a + b + c) - 6 \quad (1)$$

Mà ta cần chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$ nên ta viết:

$$3(a + b + c) = a + b + c + 2(a + b + c)$$

và (1) trở thành: $a^3 + b^3 + c^3 \geq (a + b + c) + 2(a + b + c) - 6$.

Vấn đề còn lại là ta chứng minh: $2(a + b + c) - 6 \geq 0 \Leftrightarrow a + b + c \geq 3$, điều này luôn đúng do: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$. Vậy bài toán được chứng minh.

Nhận xét:

Qua ví dụ trên cho ta thấy được nếu cần làm giảm bậc (tăng bậc) ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá.

Tương tự ta có các bất đẳng thức sau:

1) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $abc = 1$. Chứng minh rằng: $a^m + b^m + c^m \geq a^n + b^n + c^n$

Với $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$.

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho m số gồm n số a^m và $m - n$ số 1, ta có

$$na^m + n - m \geq m \cdot \sqrt[n]{a^{mn}} = ma^n.$$

2) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$16^a + 16^b + 16^c \geq 8^a + 8^b + 8^c.$$

Hướng dẫn: Đặt $x = 2^a, y = 2^b, z = 2^c \Rightarrow x, y, z > 0; xyz = 1$. Ta cần chứng minh

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^3 + y^3 + z^3.$$

3) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3} + \sqrt[4]{c^3} \geq \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2}.$$

Hướng dẫn: Từ giả thiết, suy ra: $3 \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \Rightarrow abc \geq 1$.

Đặt $x = \sqrt[12]{a}, y = \sqrt[12]{b}, z = \sqrt[12]{c} \Rightarrow xyz \geq 1$ và ta cần chứng minh:

$$a^9 + b^9 + c^9 \geq a^8 + b^8 + c^8.$$

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{3a + b} + \sqrt[3]{3b + c} + \sqrt[3]{3c + a} \leq 3$

Lời giải

Ta cần đánh giá vế trái (VT) của bất đẳng thức qua tổng $a + b + c$ và nhận thấy đẳng thức có khi $a = b = c = \frac{1}{4} \Rightarrow 3a + b = 1$

Nên ta có lời giải như sau:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số $3a + b; 1; 1$ ta có:

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức tổng quát trên với $m = n = 1$ ta có:

$$\sqrt[3]{(3a+b) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{3a+b+1+1}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{3a+b} \leq \frac{3a+b+2}{3}$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt[3]{3b+c} \leq \frac{3b+c+2}{3}; \sqrt[3]{3c+a} \leq \frac{3c+a+2}{3}.$$

$$\text{Cộng ba bất đẳng thức trên ta có được: VT} \leq \frac{4(a+b+c)+6}{3} = 3.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Ví dụ 3:

Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng: $9(a^4 + b^4 + c^4) \geq a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

Ta cần đánh giá a^4 qua a^2 nên ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số. Mặt khác dễ thấy đẳng thức có khi $a = b = c = \frac{1}{3} \Rightarrow a^4 = b^4 = c^4 = \frac{1}{81}$. Do đó ta áp dụng bất

đẳng thức Cauchy cho hai số a^4 và $\frac{1}{81}$ ta có: $a^4 + \frac{1}{81} \geq 2\sqrt{a^4 \cdot \frac{1}{81}} = \frac{2}{9} a^2$

$$\text{Tương tự: } b^4 + \frac{1}{81} \geq \frac{2}{9} b^2; c^4 + \frac{1}{81} \geq \frac{2}{9} c^2.$$

$$\text{Cộng ba bất đẳng thức lại với nhau ta được: } a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{27} \geq \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{9}$$

$$\text{Suy ra: } 9(a^4 + b^4 + c^4) + \frac{1}{3} \geq (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\text{Mặt khác: } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{1}{3}, \text{ suy ra đpcm.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Nhận xét:

1) Tương tự ta có bất đẳng thức tổng quát của bài toán trên như sau:

Cho k số thực không âm $a_1, \dots, a_k$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$. Chứng minh

$$\frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}{k^m} \geq \frac{a_1^m + \dots + a_k^m}{k^n}, \quad \forall n \geq m.$$

2) Từ bất đẳng thức tổng quát trên ta có các bài toán sau:

Bài toán 1. Cho k số thực không âm $a_1, \dots, a_k$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$. Chứng minh

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n \geq \frac{1}{k^{n-1}}.$$

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức tổng quát trên với $m = 1$ ta có đpcm.

Bài toán 2. Cho k số thực $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1^n + \dots + a_k^n}{k} \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_k}{k} \right)^n \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

Hướng dẫn: Đặt $b_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \dots + a_k}$ với $i = 1, 2, \dots, k \Rightarrow b_1 + b_2 + \dots + b_k = 1$ và bất

đẳng thức trở thành: $b_1^n + b_2^n + \dots + b_k^n \geq \frac{1}{k^{n-1}}$ đây chính là bài toán 1.

Bài toán 3. Cho các số thực dương x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\left(a + \frac{b}{x} \right)^n + \left(a + \frac{b}{y} \right)^n + \left(a + \frac{b}{z} \right)^n \geq 3(a + 3b)^n.$$

Hướng dẫn: Đặt $u = a + \frac{b}{x}, v = a + \frac{b}{y}, w = a + \frac{b}{z}$.

$$\text{Suy ra: } u + v + w = 3a + b \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 3a + \frac{9b}{x+y+z} = 3(a + 3b)$$

Ta cần chứng minh: $u^n + v^n + w^n \geq 3(a + 3b)^n$

$$\text{Áp dụng bài toán 2 ta có: } \frac{u^n + v^n + w^n}{3} \geq \left(\frac{u + v + w}{3} \right)^n \geq (a + 3b)^n$$

$$\text{Suy ra: } u^n + v^n + w^n \geq 3(a + 3b)^n.$$

Ví dụ 4: Cho các số thực dương a, b, c .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải

Để chứng minh bất đẳng thức ta cần đánh giá vế trái qua vế phải. Ở vế trái có biến ở mẫu, còn vế phải thì không nên ta cần làm mất mẫu. Điều này dẫn tới ta tạo ra tích

$$\frac{a^2}{b+c} (b+c). \text{ Muốn vậy ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số } \frac{a^2}{b+c} \text{ và } b+c.$$

Tuy nhiên chúng lưu ý bất đẳng thức cần chứng minh xảy ra dấu "=" khi $a = b = c$.

Khi đó: $\frac{a^2}{b+c} = \frac{a}{2}$ còn $b+c \in 2a$ nên hai số này không bằng nhau. Do đó ta cần thêm một bội số vào để hai số đó bằng nhau nên ta có lời giải như sau:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số ta có:

$$\frac{4a^2}{b+c} + (b+c) \geq 2\sqrt{\frac{4a^2}{b+c} (b+c)} = 4a \leq \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$$

Tương tự: $\frac{4b^2}{c+a} + (c+a) \geq 4b$; $\frac{4c^2}{a+b} + (a+b) \geq 4c$.

Cộng ba bất đẳng thức trên với nhau ta được:

$$4VT(1) + 2(a+b+c) \geq 4(a+b+c) \Rightarrow VT(1) \geq \frac{a+b+c}{2} \text{ đpcm.}$$

Nhận xét. Việc ghép cặp $\frac{a^2}{b+c}$ và $\frac{b+c}{4}$ mục đích là để làm mất mẫu số và đảm bảo đẳng thức xảy ra các số a, b, c bằng nhau. Kỹ thuật này thường hay được sử dụng trong các bất đẳng thức chứa biến số ở mẫu.

Một số bài toán sau được giải tương tự:

Bài toán 1. Cho các số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn: Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z} \Rightarrow xyz = 1$ và ta cần chứng minh

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Áp dụng kết quả ví dụ trên và kết hợp với $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ ta có:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} = \frac{3}{2}.$$

Bài toán 2. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)} + \frac{b^3}{(b+1)(c+1)} + \frac{c^3}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$$

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số $\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}, \frac{a+1}{8}, \frac{b+1}{8}$ ta có:

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)} + \frac{a+1}{8} + \frac{b+1}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+1)(b+1)} \cdot \frac{a+1}{8} \cdot \frac{b+1}{8}} = \frac{3}{4}a$$

Tương tự: $\frac{b^3}{(c+1)(b+1)} + \frac{c+1}{8} + \frac{b+1}{8} \geq \frac{3}{4}b$; $\frac{c^3}{(c+1)(a+1)} + \frac{c+1}{8} + \frac{a+1}{8} \geq \frac{3}{4}c$

Cộng ba bất đẳng thức trên và kết hợp với $a+b+c = 3$ ta có đpcm.

Ta có thể thay giả thiết $a+b+c = 3$ bằng $a+b+c \geq 3$ hoặc $abc = 1$.

Bài toán 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)} + \frac{b^4}{c^2(a+b)} + \frac{c^4}{a^2(b+c)} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bốn số thực dương ta có:

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c+a}{4} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{a^4}{b^2(c+a)} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c+a}{4}} = 2a$$

hay $\frac{a^4}{b^2(c+a)} + b + \frac{c+a}{4} \geq 2a.$

Tương tự cũng có: $\frac{b^4}{c^2(a+b)} + c + \frac{a+b}{4} \geq 2b$; $\frac{c^4}{a^2(b+c)} + a + \frac{b+c}{4} \geq 2c.$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c.$

Bài toán 4. Cho $a, b, c > 0$ và n là một số tự nhiên khác 0. Chứng minh

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

Hướng dẫn: Áp dụng BĐT Cauchy cho $n-1$ số $\frac{a^n}{b+c}$ và 1 số $\frac{(b+c)^{n-1}}{2^n}$ ta có:

$$(n-1) \frac{a^n}{b+c} + \frac{(b+c)^{n-1}}{2^n} \geq n \sqrt[n]{a^{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2^n}} = \frac{n}{2} a^{n-1}.$$

Tương tự: $(n-1) \frac{b^n}{c+a} + \frac{(c+a)^{n-1}}{2^n} \geq \frac{n}{2} b^{n-1}$; $(n-1) \frac{c^n}{a+b} + \frac{(a+b)^{n-1}}{2^n} \geq \frac{n}{2} c^{n-1}$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được:

$$(n-1) \cdot VT + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{b+c}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{c+a}{2} \right)^{n-1} \right] \geq \frac{n}{2} (a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1})$$

Mặt khác ta lại có:

$$\frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^{n-1}; \quad \frac{b^{n-1} + c^{n-1}}{2} \geq \left(\frac{b+c}{2} \right)^{n-1}; \quad \frac{c^{n-1} + a^{n-1}}{2} \geq \left(\frac{c+a}{2} \right)^{n-1}$$

Nên suy ra: $\frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2} \geq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{b+c}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{c+a}{2} \right)^{n-1} \right]$

Do đó: $(n-1) \cdot VT \geq (n-1) \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2} \geq (n-1) \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{b+c}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{c+a}{2} \right)^{n-1} \right]$, đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c.$

Bài toán 5. Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 8yz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 8zx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 8xy}} \geq 1.$$

Hướng dẫn: Đặt $a = \frac{x}{x+y+z}$; $b = \frac{y}{x+y+z}$; $c = \frac{z}{x+y+z} \Rightarrow a+b+c=1$ và bất đẳng

thức đã cho trở thành: $P = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + a(a^2+8bc) \geq 3a \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{a^2+8bc}} + a(a^2+8bc) \geq 3a.$$

Tương tự: $\frac{2b}{\sqrt{b^2+8ca}} + b(b^2+8ca) \geq 3b$; $\frac{2c}{\sqrt{c^2+8ab}} + c(c^2+8ab) \geq 3c$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta được: $2P + a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \geq 3$

Mặt khác ta lại có:

$$1 = (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

Suy ra: $2P \geq 3 - (a^3 + b^3 + c^3 + 24abc) \geq 3 - 1 = 2 \Rightarrow P \geq 1$ đpcm.

Bài toán 6. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq a^3 + b^3 + c^3$.

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy: $\frac{a^5}{b^2} + ab^2 \geq 2\sqrt{\frac{a^5}{b^2} ab^2} = 2a^3$

Tương tự: $\frac{b^5}{c^2} + bc^2 \geq 2b^3$; $\frac{c^5}{a^2} + ca^2 \geq 2c^3$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta được:

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq a^3 + b^3 + c^3 + (a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 - bc^2 - ca^2)$$

Nên ta cần chứng minh:

$$a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 - bc^2 - ca^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2 (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$a^3 + b^3 + b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3 b^3 b^3} = 3ab^2 \Rightarrow a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2$$

Tương tự: $b^3 + 2c^3 \geq 3bc^2$; $c^3 + 2a^3 \geq 3ca^2$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta có (*).

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 5:

Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \geq 1$

Lời giải

Nhận thấy vế trái chứa ẩn ở mẫu và giả thiết cho $a + b + c = abc$ nên ta nhân vế trái của bất đẳng thức với abc còn vế phải nhân với $a + b + c$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{a^2c}{b^2} + \frac{b^2a}{c^2} + \frac{c^2b}{a^2} \geq a + b + c$ (*)

Ở đây ta cần đánh giá VT $\geq$ VP nên ta tìm cách tìm mối quan hệ tổng, tích của các số hạng ở hai vế. Ta thấy: $\frac{a^2c}{b^2} \cdot \frac{b^2a}{c^2} = \frac{a^3}{c}$ còn vế trong c ở mẫu, hơn nữa ở đây xuất hiện a^3 và vế trái là a nên gợi ý cho ta nhân thêm c , tức là $\frac{a^2c}{b^2} \cdot \frac{b^2a}{c^2} \cdot c = a^3$.

Do đó ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số ta được:

$$\frac{a^2c}{b^2} + \frac{b^2a}{c^2} + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2c}{b^2} \cdot \frac{b^2a}{c^2} \cdot c} = 3a$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2a}{c^2} + \frac{c^2b}{a^2} + a \geq 3b; \quad \frac{c^2b}{a^2} + \frac{a^2c}{b^2} + b \geq 3c.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có được bất đẳng thức (*). Bài toán được chứng minh.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nhận xét: Trong nhiều trường hợp ta cần chứng minh bất đẳng thức có dạng $x + y + z \geq a + b + c$, ta thường ghép cặp: $mx + ny + ka \geq l.b$ (hoặc $\geq l.c$)

Và làm tương tự cho hai bất đẳng thức còn lại rồi lấy tổng của ba bất đẳng thức đó.

Tương tự, ta có bài toán sau:

Bài toán. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3$.

Hướng dẫn: Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right)^2 \geq 9$.

$$\text{Hay } \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geq 3$$
 (*)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số ta có:

$$\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} \geq 2b^2; \quad \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geq 2c^2; \quad \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geq 2a^2$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta có bất đẳng thức (*).

Ví dụ 6: Cho các số thực dương a, b, c .

Chứng minh rằng: $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$

Lời giải.

Vì các số $a+b-c, a+c-b, b+c-a$ có thể nhận giá trị âm nên ta chưa áp dụng được bất đẳng thức Cauchy.

Tuy nhiên nếu ta giả sử $a = \max\{a, b, c\}$ thì $a+b-c > 0, a+c-b > 0$ nên ta chỉ cần chú ý đến dấu của $b+c-a$.

- Giả sử $b+c-a \leq 0$ thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng.
- Xét $b+c-a > 0$. Khi đó cả hai vế của bất đẳng thức đều là tích của ba hạng tử nên việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy gặp nhiều khó khăn (vì bất đẳng thức Cauchy là đánh giá tổng và tích). Chúng ta quan sát các số hạng xuất hiện ở hai vế ta có nhận xét:

$a+b-c+b+c-a=2b$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có được:

$$2b = (a+b-c) + (b+c-a) \geq 2\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}$$

$$\text{hay } b \geq \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}$$

$$\text{Tương tự: } a \geq \sqrt{(c+a-b)(b+a-c)}; c \geq \sqrt{(a+c-b)(b+c-a)}$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên lại với nhau ta được:

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: Bất đẳng thức trên có nhiều ứng dụng trong chứng minh một số bất đẳng thức.

Ta có các bài toán sau:

Bài toán 1. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b-c} + \frac{b}{b+c-a} + \frac{c}{c+a-b} \geq 3.$$

Hướng dẫn: Theo kết quả bài toán trên ta có: $\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \geq 1.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số ta có:

$$\frac{a}{a+b-c} + \frac{b}{b+c-a} + \frac{c}{c+a-b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}} \geq 3 \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 3. Chứng minh rằng:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 13.$$

Hướng dẫn: Vì: $a+b+c=3$ nên

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc \Rightarrow (3-2c)(3-2b)(3-2a) \leq abc$$

$$\Rightarrow 27 - 18(a+b+c) + 12(ab+bc+ca) - 8abc \leq abc$$

$$\Rightarrow 4abc \geq \frac{16}{3}(ab + bc + ca) - 12$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc &\geq 3(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{16}{3}(ab + bc + ca) - 12 \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{8}{3}(a + b + c)^2 - 12 \\ &\geq \frac{(a + b + c)^2}{9} + 12 = 13. \end{aligned}$$

Bài toán 3. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a + \frac{1}{b} - 1\right)\left(b + \frac{1}{c} - 1\right)\left(c + \frac{1}{a} - 1\right) \leq 1.$$

Hướng dẫn: Vì $abc = 1 \Rightarrow$ tồn tại các số thực $x, y, z > 0$ sao cho: $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leq xyz.$$

Ví dụ 7: Cho $a, b > 0$. Chứng minh: $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

Vế phải của bất đẳng thức là một hằng số nên ta tìm cách làm mất a, b .

Nhận thấy $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ nên ta tìm cách đánh giá về tích của hai số $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực không âm ta có:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2\sqrt{\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 4$$

$$\text{Nên } \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2\sqrt{4^n} = 2^{n+1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Nhận xét:

1. Nhận thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$ nên ta có thể giải theo cách sau:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{a}{b} &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n \geq 2^n \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n \\ 1 + \frac{b}{a} &\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^n \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^n \left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n \right]$$

$$\text{mà } \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n \geq 2 \text{ nên suy ra } \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1} \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

2. Ta có các bài toán sau:

Bài toán 1. Cho $x > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = x^3 + \frac{1}{x^5}$.

Hướng dẫn: Vì $(x^3)^5 = (x^5)^3$ nên ta tách $x^3 = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^3$

và $\frac{1}{x^5} = \frac{1}{3x^5} + \frac{1}{3x^5} + \frac{1}{3x^5}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho tám số thực dương gồm

$$\text{năm số } \frac{1}{5}x^3 \text{ và ba số } \frac{1}{3x^5} \text{ ta có: } P \geq 8 \sqrt[8]{\left(\frac{1}{5}x^3\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3x^5}\right)^3} = \frac{8}{\sqrt[8]{84375}}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \frac{x^5}{5} = \frac{1}{3x^3} \Leftrightarrow x = \sqrt[8]{\frac{5}{3}}.$$

Bài toán 2. Cho x, y, z thỏa $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3+4^x} + \sqrt{3+4^y} + \sqrt{3+4^z} \geq 6.$$

Hướng dẫn: Nhận thấy $4^x \cdot 4^y \cdot 4^z = 4^{x+y+z} = 1$ và đẳng thức có được khi $x = y = z = 0$,

hay $4^x = 4^y = 4^z = 1$, nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$3 + 4^x = 1 + 1 + 1 + 4^x \geq 4 \sqrt[4]{4^x} = 4 \cdot 2^{\frac{x}{4}}, \text{ suy ra } \sqrt{3+4^x} \geq 2 \cdot 2^{\frac{x}{4}}$$

Tương tự cho hai bất đẳng thức còn lại, rồi cộng ba bất đẳng thức đó ta có:

$$\sqrt{3+4^x} + \sqrt{3+4^y} + \sqrt{3+4^z} \geq 2 \left(2^{\frac{x}{4}} + 2^{\frac{y}{4}} + 2^{\frac{z}{4}} \right) \geq 6 \sqrt[3]{2^{\frac{x+y+z}{4}}} = 6.$$

Bài toán 3. Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} + ab.$$

Hướng dẫn: Do P là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán $\min P$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$.

Khi đó: $\frac{1}{ab} = 4$, $4ab = 1$ nên ta ghép $\frac{1}{4ab}$ với $4ab$, chúng ta còn lại $\frac{1}{a^2 + b^2}$ và $\frac{3}{4ab}$.

Vì $\frac{1}{a^2 + b^2} = 2$ nên ta ghép với $\frac{1}{2ab}$ nên ta có:

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \left(4ab + \frac{1}{4ab}\right) + \frac{1}{4ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} + 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{2ab}} + \frac{1}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq 7$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ a^2 b^2 = \frac{1}{16} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài toán 4. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}.$$

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$1+x^3+y^3 \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3xy \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}; \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } & \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \\ & \geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) \geq \sqrt{3} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{zx}}} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Ví dụ 8: Cho ba số thực dương a, b, c và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng: $a^3 + 2b^3 + 3c^3 \geq \frac{6}{7}$

Phân tích:

Dự đoán $a = \frac{m}{7}; b = \frac{n}{7}; c = \frac{p}{7}$ ta chọn được bộ (a, b, c) là hoán vị của $\left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right)$

sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a = \frac{6}{7}; b = \frac{3}{7}; c = \frac{2}{7}$.

Khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy đảm bảo dấu bằng phải xảy ra nên ta ghép $a^3, a^3, \left(\frac{6}{7}\right)^3$ và $b^3, b^3, \left(\frac{3}{7}\right)^3$ và $c^3, c^3, \left(\frac{2}{7}\right)^3$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a^3 + a^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^3 \cdot a^3 \cdot \frac{6^3}{7^3}} = \frac{18a^2}{7} \Leftrightarrow 2a^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 \geq \frac{18a^2}{7} \quad (1)$$

$$b^3 + b^3 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{b^3 \cdot b^3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3} = \frac{9b^2}{7} \Leftrightarrow 2b^3 + 2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3 \geq \frac{18b^2}{7} \quad (2)$$

$$c^3 + c^3 + \left(\frac{2}{7}\right)^3 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{c^3 \cdot c^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3} = \frac{6c^2}{7} \Leftrightarrow 6c^3 + 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 \geq \frac{18c^2}{7} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có: $2a^3 + 4b^3 + 6c^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 \geq \frac{18}{7}(a^2 + b^2 + c^2)$

$$\Leftrightarrow 2(a^3 + 2b^3 + 3c^3) + \frac{6}{7} \geq \frac{18}{7} \Leftrightarrow a^3 + 2b^3 + 3c^3 \geq \frac{6}{7} \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c) = \left(\frac{6}{7}; \frac{3}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

Ví dụ 9: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$1. \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq a + b + c$$

$$2. \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Lời giải

1.

Cách 1: Bài toán này có dạng $X + Y + Z \geq A + B + C$.

Với $X = \frac{ab}{c}, Y = \frac{bc}{a}, Z = \frac{ca}{b}, A = a, B = b, C = c$. Để ý rằng hai biểu thức $\frac{ab}{c}$ và $\frac{bc}{a}$ là đối xứng với b (tức vai trò của a và c như nhau). Do đó, sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng, ta sẽ thử chứng minh: $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$

Thật vậy bất đẳng thức này là hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}}$$

Từ đó, bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = 2b$

Tương tự ta có $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c, \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} \geq 2a$.

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}\right) \geq 2(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq a+b+c, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b^2} \cdot \frac{1}{a}} = \frac{2}{b}$

Tương tự ta có $\frac{b}{c^2} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{c}, \frac{c}{a^2} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 10: Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

Lời giải

Ta thấy vế trái xuất hiện căn thức và các biến ở mẫu lệch nhau một bậc.

Đồng thời cần đánh giá $VT \leq VP$, những điều này gợi ý ta đánh giá ở mẫu.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương ta có:

$$x^3 + y^2 \geq 2xy\sqrt{x} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} \leq \frac{2\sqrt{x}}{2xy\sqrt{x}} = \frac{1}{xy}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} \leq \frac{1}{yz}; \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{zx} \Rightarrow VT \leq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}.$$

Vậy ta cần chứng minh: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$, bất đẳng thức này hiển

hiển đúng vì nó tương đương với $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$.

$$\text{Mặt khác: } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét. Trong một số bài toán bất đẳng thức ta cần đánh giá bất đẳng thức $A \leq B$ trong đó A là một biểu thức chứa các tổng của biến ở mẫu thì ta có thể thử đánh giá ở mẫu thông qua các tích. Ta xét một số bài toán sau.

Bài toán 1. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a.b.c = 1$ thì

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

Hướng dẫn: Nhận thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ và $3 = 1 + 2$ nên ta có đánh giá

$$a^2 + 2b^2 + 3 = (a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2 \geq 2ab + 2b + 2$$

Do đó:
$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab + b + 1}$$

Suy ra:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \right)$$

Vậy ta cần chứng minh:
$$\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \leq 1$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì đó là đẳng thức. Để chứng minh ta thay $c = \frac{1}{ab}$ vào vế trái và biến đổi ta có đpcm.

Bài toán 2. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Hướng dẫn: Nhận thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{3}$

Ta có: $\frac{a}{b^2 + c^2} = \frac{a^2}{a(1 - a^2)}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số ta có:

$$a(1 - a^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2a^2(1 - a^2)(1 - a^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{2a^2 + 1 - a^2 + 1 - a^2}{3} \right)^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Do đó: $\frac{a}{b^2 + c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$, tương tự cho hai bất đẳng thức còn lại

$$\frac{b}{c^2 + a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2, \quad \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta có được:

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bài toán 3. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn: Ta có:
$$\frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2) - ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

Do đó:
$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a + b + c - \frac{1}{2}(ab + bc + ca)$$

Mà:
$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = 3$$

Nên suy ra:
$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Bài toán 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Hướng dẫn: Ta có:

$$\frac{a^2}{a+2b^2} = \frac{a(a+2b^2) - 2ab^2}{a+2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a+b^2+b^2} \geq a - \frac{2ab^2}{2\sqrt{2}ab} = a - \frac{1}{\sqrt{2}}b\sqrt{a}$$

Suy ra:
$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq a + b + c - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a}b + \sqrt{b}c + \sqrt{c}a)$$

Mặt khác:
$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{3}{4}$$

Và
$$\sqrt{ab} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{bc} \cdot \sqrt{c} + \sqrt{ca} \cdot \sqrt{a} \leq \sqrt{(ab + bc + ca)(a + b + c)} \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Vậy:
$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ví dụ 11: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a + 4b + 9c = 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^3 + b^3 + c^3$

Lời giải

Trong bài toán này chúng ta chưa biết được đẳng thức xảy ra khi nào, nên việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy gặp khó khăn.

Ta giả sử P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = x, b = y, c = z$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $a^3 + x^3 + x^3 \geq 3x^2a \Rightarrow a^3 + 2x^3 \geq 3x^2a$

Trương tự: $b^3 + 2y^3 \geq 3y^2b$; $c^3 + 2z^3 \geq 3z^2c$

Do đó: $a^3 + b^3 + c^3 + 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq 3(x^2a + y^2b + z^2c)$

Ta chọn x, y, z sao cho:
$$\begin{cases} y^2 = 4x^2 \\ z^2 = 9x^2 \\ x + 4y + 9z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy: $P \geq 3x^2(a + 4b + 9c) - 72x^3 = 18x^2 - 72x^3 = \frac{1}{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{2}$. Vậy $\min P = \frac{1}{6}$.

Nhận xét. Phương pháp trên được gọi là cân bằng hệ số. Khi chúng ta chưa xác định được đẳng thức xảy ra khi nào thì chúng ta đưa vào tham số rồi chọn các tham số một cách phù hợp. Ta xét các bài toán sau:

Bài toán 1. Chứng minh rằng nếu $xy + yz + zx = 5$ thì $3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 10$

Hướng dẫn: $ax^2 + ay^2 \geq 2axy$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

$by^2 + cz^2 \geq 2\sqrt{bc}yz$. Đẳng thức xảy ra khi $by^2 = cz^2$.

$cz^2 + bx^2 \geq 2\sqrt{cb}zx$. Đẳng thức xảy ra khi $cz^2 = bx^2$.

Bây giờ ta chọn a, b, c sao cho:
$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2c = 1 \\ a = \sqrt{bc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra: $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$

$2y^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq 2yz$. Đẳng thức xảy ra khi $2y^2 = \frac{1}{2}z^2$

$\frac{1}{2}z^2 + 2x^2 \geq 2zx$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1}{2}z^2 = 2x^2$

Cộng vế theo vế ta được: $3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 2(xy + yz + zx) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 10$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi:
$$\begin{cases} x = y \\ 2y^2 = \frac{1}{2}z^2 \\ \frac{1}{2}z^2 = 2x^2 \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Bài toán 2. Cho ba số thực dương x, y, z thoả mãn $x + y + z = \frac{47}{12}$. Chứng minh rằng:

$$3x^2 + 4y^2 + 5z^2 \geq \frac{235}{12}.$$

Hướng dẫn: Ta có: $3x^2 + m \geq 2\sqrt{3mx}, m > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $3x^2 = m$.

$4y^2 + n \geq 2\sqrt{4ny}, n > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $4y^2 = n$.

$5z^2 + p \geq 2\sqrt{5pz}, p > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $5z^2 = p$.

Bây giờ ta chọn x, y, z sao cho:

$$\begin{cases} 3x^2 = m \\ 4y^2 = n \\ 5z^2 = p \\ \sqrt{3m} = \sqrt{4n} = \sqrt{5p} \\ x + y + z = \frac{47}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{4} \\ z = 1 \\ m = \frac{25}{3} \\ n = \frac{25}{4} \\ p = 5 \end{cases}$$

Suy ra: $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 \geq 10(x + y + z) - \frac{235}{12} = \frac{235}{12}$ (dpcm).

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{5}{3}, y = \frac{5}{4}, z = 1$.

Ví dụ 12: Cho các số thực dương x, y, z .

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$

Lời giải

Chúng ta cần đánh giá: $\frac{1}{2x+y+z}, \frac{1}{x+2y+z}, \frac{1}{x+y+2z}$ qua $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ và đẳng thức

xảy ra khi $x = y = z$ nên ta tìm cách tách: $\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{k}{x} + \frac{m}{y} + \frac{n}{z}$.

Với $m + n + k = 4$, hơn nữa giá trị x xuất hiện 2 lần còn y, z chỉ xuất hiện 1 lần nên ta có $k = 2m = 2n$. Tức là ta cần đánh giá: $\frac{1}{2x+y+z} \leq n \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z \Rightarrow \frac{1}{4x} = \frac{4n}{x} \Rightarrow n = \frac{1}{16}$

Vậy ta cần chứng minh: $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{16}{2x+y+z} = \frac{4^2}{2x+y+z}$

Điều này gợi ý ta sử dụng bất đẳng thức: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức (*) với $n=4$ ta có:

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{16}{x+x+y+z} = \frac{16}{2x+y+z} \Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Tương tự: $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right)$; $\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$.

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

Nhận xét. Khi chứng minh bất đẳng thức có dạng:

$$\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2} + \dots + \frac{k_n}{a_n} \geq \frac{m}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \text{ ta thường áp dụng bất đẳng thức (*)}$$

Ta xét các bài toán sau :

Bài toán 1. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi của tam giác đó.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức (*) (với $n=2$) ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{4}{c}.$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}$; $\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}$.

Cộng ba bất đẳng thức này ta có đpcm.

Bài toán 2. Cho $a, b > 0$ và $a+b=1$. Chứng minh: $\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn: Ta có: VT = $\frac{a^2-1}{a+1} + \frac{1}{a+1} + \frac{b^2-1}{b+1} + \frac{1}{b+1} = -1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức (*) ta có: $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{4}{a+b+2} = \frac{4}{3}$.

Do đó: VT $\geq -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$, đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Bài toán 3. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c}.$$

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{a+b+2c} \geq \frac{4}{2a+4b+2c} = \frac{2}{a+2b+c}.$$

Tương tự $\frac{1}{b+3c} + \frac{1}{2a+b+c} \geq \frac{2}{a+b+2c}$; $\frac{1}{c+3a} + \frac{1}{a+2b+c} \geq \frac{2}{2a+b+c}$.

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài toán 4. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \leq \frac{3}{4}$

Hướng dẫn: Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a+1-1}{a+1} + \frac{b+1-1}{b+1} + \frac{c+1-1}{c+1} \leq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có: $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{a+b+c+3} = \frac{9}{4}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài toán 5. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

Hướng dẫn: Ta có $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có: $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca+3} \geq \frac{3}{2}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 6. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30$$

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca}$$

Mặt khác: $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{7}{ab+bc+ca} \geq 21$

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)} = 9$$

Suy ra: $\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 9 + 21 = 30$, đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài toán 7. Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \text{ (BĐT Nesbit)}.$$

Hướng dẫn: Cộng hai vế của bất đẳng thức với 3 thì bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+b+c+c+a} = \frac{9}{2(a+b+c)}$

$$\Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq (a+b+c) \cdot \frac{9}{2(a+b+c)} = \frac{9}{2}, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 13: Cho a, b, c dương sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

1. $\frac{a^3b^3}{c} + \frac{b^3c^3}{a} + \frac{c^3a^3}{b} \geq 3abc$

2. $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3$

Lời giải

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a^3b^3}{c} + \frac{b^3c^3}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a^3b^3}{c} \cdot \frac{b^3c^3}{a}} = 2b^3ac$

Tương tự ta có $\frac{b^3c^3}{a} + \frac{c^3a^3}{b} \geq 2abc^3$, $\frac{c^3a^3}{b} + \frac{a^3b^3}{c} \geq 2a^3bc$

Cộng vế với vế ta có $2\left(\frac{a^3b^3}{c} + \frac{b^3c^3}{a} + \frac{c^3a^3}{b}\right) \geq 2abc(a^2 + b^2 + c^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3b^3}{c} + \frac{b^3c^3}{a} + \frac{c^3a^3}{b} \geq 3abc, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

2. Bất đẳng thức tương đương với $\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)^2 \geq 9$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 \geq 2\sqrt{\left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{bc}{a}\right)^2} = 2b^2$

Tương tự ta có $\left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 2c^2, \left(\frac{ca}{b}\right)^2 + \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \geq 2a^2$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được $\left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3$ đpcm

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 14: Cho x, y, z là các số dương thoả mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{1+y}{8} + \frac{1+z}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \cdot \frac{1+y}{8} \cdot \frac{1+z}{8}} = \frac{3}{4}x$$

Tương tự: $\frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{1+z}{8} + \frac{1+x}{8} \geq \frac{3}{4}y, \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+y}{8} \geq \frac{3}{4}z$

Cộng vế theo vế, ta được:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{3}{4} + \frac{2(x+y+z)}{8} \geq \frac{3}{4}(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{1}{2}(x+y+z) - \frac{3}{4}$$

Vì $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ nên ta có $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$

Ví dụ 15: Cho a, b, c là các số dương thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

1. $8(a+b)(b+c)(c+a) \leq (3+a)(3+b)(3+c)$ 2. $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq abc$

Lời giải

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(a+b)(b+c) \leq \left(\frac{(a+b)+(b+c)}{2}\right)^2 = \frac{(3+a)^2}{4}$$

Tương tự ta có $(b+c)(c+a) \leq \frac{(3+c)^2}{4}, (c+a)(a+b) \leq \frac{(3+a)^2}{4}$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được

$$[(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \leq 64[(3+a)(3+b)(3+c)]^2$$

Suy ra $8(a+b)(b+c)(c+a) \leq (3+a)(3+b)(3+c)$, đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

2.

* Trường hợp 1: Với $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq 0$: bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

* Trường hợp 2: Với $(3-2a)(3-2b)(3-2c) > 0$:

+ Nếu cả ba số $(3-2a)$, $(3-2b)$, $(3-2c)$ đều dương.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $(3-2a)(3-2b) \leq \left(\frac{(3-2a)+(3-2b)}{2} \right)^2 = c^2$,

tương tự ta có $(3-2b)(3-2c) \leq a^2$, $(3-2c)(3-2a) \leq b^2$

Nhân vế với vế ta được $[(3-2a)(3-2b)(3-2c)]^2 \leq a^2 b^2 c^2$

hay $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq abc$.

+ Nếu trong ba số $(3-2a)$, $(3-2b)$, $(3-2c)$ có hai số âm và một số dương

Không mất tính tổng quát giả sử $3-2a < 0$, $3-2b < 0$ suy ra $6-2a-2b < 0 \Leftrightarrow c < 0$

(không xảy ra)

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 16: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương ta có:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = a.$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b$; $\frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c$.

Cộng ba bất đẳng thức này lại với nhau ta được:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \geq a+b+c \Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Lưu ý: Việc ta ghép $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4}$ và đánh giá như trên là vì những lí do sau:

Thứ nhất là ta cần làm mất mẫu số ở các đại lượng về trái (vì vế phải không có phân số), chẳng hạn đại lượng $\frac{a^2}{b+c}$, khi đó ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho đại lượng đó với một đại lượng chứa $b+c$.

Thứ hai là ta cần lưu ý tới điều kiện xảy ra đẳng thức ở bất đẳng thức Cauchy là khi hai số đó bằng nhau. Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$ khi đó $\frac{a^2}{b+c} = \frac{a}{2}$ và $b+c=2a$ do đó ta ghép như trên.

Ví dụ 17: Cho a, b, c các là số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$1. \frac{a}{\sqrt{b+1}} + \frac{b}{\sqrt{c+1}} + \frac{c}{\sqrt{a+1}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad 2. \sqrt{\frac{a^3}{b+3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c+3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a+3}} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

1. Đặt $P = \frac{a}{\sqrt{b+1}} + \frac{b}{\sqrt{c+1}} + \frac{c}{\sqrt{a+1}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b+1}} + \frac{a}{\sqrt{b+1}} + \frac{\sqrt{2a(b+1)}}{4} \geq 3\sqrt{\frac{a}{\sqrt{b+1}} \cdot \frac{a}{\sqrt{b+1}} \cdot \frac{\sqrt{2a(b+1)}}{4}} = \frac{3\sqrt{2a}}{2}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b}{\sqrt{c+1}} + \frac{b}{\sqrt{c+1}} + \frac{\sqrt{2b(c+1)}}{4} \geq \frac{3\sqrt{2b}}{2}, \quad \frac{c}{\sqrt{a+1}} + \frac{c}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{2c(a+1)}}{4} \geq \frac{3\sqrt{2c}}{2}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$2P + \frac{\sqrt{2}}{4}(ab+bc+ca+a+b+c) \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{15\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}(ab+bc+ca) \quad (\text{vì } a+b+c=3)$$

Mặt khác ta có $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ (theo ví dụ 1)

Do đó $ab+bc+ca \leq 3$.

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{15\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

2. Đặt $Q = \sqrt{\frac{a^3}{b+3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c+3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a+3}}$.

$$\text{Ta có } Q = \frac{a^2}{\sqrt{a(b+3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{b(c+3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{c(a+3)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $4\sqrt{a(b+3)} = 2\sqrt{4a(b+3)} \leq 4a + b + 3$

Suy ra $\frac{a^2}{\sqrt{a(b+3)}} \geq \frac{4a^2}{4a + b + 3}$, tương tự ta có

$$\frac{b^2}{\sqrt{b(c+3)}} \geq \frac{4b^2}{4b + c + 3}, \quad \frac{c^2}{\sqrt{c(a+3)}} \geq \frac{4c^2}{4c + a + 3}$$

Cộng vế với vế ta được $Q \geq \frac{4a^2}{4a + b + 3} + \frac{4b^2}{4b + c + 3} + \frac{4c^2}{4c + a + 3} = L$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{4a^2}{4a + b + 3} + \frac{1}{16}(4a + b + 3) \geq 2\sqrt{\frac{4a^2}{4a + b + 3} \cdot \frac{1}{16}(4a + b + 3)} = a$$

Tương tự ta có $\frac{4b^2}{4b + c + 3} + \frac{1}{16}(4b + c + 3) \geq b, \quad \frac{4c^2}{4c + a + 3} + \frac{1}{16}(4c + a + 3) \geq c$

Cộng vế với vế ta được $L + \frac{1}{16}[5(a + b + c) + 9] \geq a + b + c$

Vì $a + b + c = 3$ nên $L \geq \frac{3}{2}$ suy ra $Q \geq \frac{3}{2}$, đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 18: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a + b + c)$$

Lời giải

Ta có $[(a-1)(b-1)][(b-1)(c-1)][(c-1)(a-1)] = (a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2 \geq 0$

Do đó không mất tính tổng quát giả sử

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b \Leftrightarrow 2(ab + c + 1) \geq 2(a + b + c)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(ab + c + 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 1 \geq 2(ab + c)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} = 2c, \quad \frac{1}{c^2} + 1 \geq \frac{2}{c} = 2ab$ (do $abc = 1$)

Cộng vế với vế ta được $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 1 \geq 2(ab + c)$, đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 19: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

1. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ với $x > 2$

2. $g(x) = 2x + \frac{1}{(x+1)^2}$ với $x > -1$

3. $h(x) = x + \frac{3}{x}$ với $x \geq 2$

4. $k(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ với $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

1. Ta có $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = x - 2 + \frac{1}{x - 2} + 2$

Do $x > 2$ nên $x - 2 > 0$, $\frac{1}{x - 2} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$x - 2 + \frac{1}{x - 2} \geq 2\sqrt{(x - 2) \cdot \frac{1}{x - 2}} = 2$$

Suy ra $f(x) \geq 4$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x - 2 = \frac{1}{x - 2} \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (loại) hoặc $x = 3$ (thỏa mãn)

Vậy $\min f(x) = 4$ khi và chỉ khi $x = 3$.

2. Do $x > -1$ nên $x + 1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$g(x) = (x + 1) + (x + 1) + \frac{1}{(x + 1)^2} - 2 \geq 3\sqrt{(x + 1) \cdot (x + 1) \cdot \frac{1}{(x + 1)^2}} - 2 = 1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{(x + 1)^2} \Leftrightarrow (x + 1)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Vậy $\min g(x) = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$.

3. Ta có $h(x) = \left(\frac{3}{x} + \frac{3x}{4}\right) + \frac{x}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{3}{x} + \frac{3x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{3}{x} \cdot \frac{3x}{4}} = 3$

Mặt khác $x \geq 2$ suy ra $h(x) = \left(\frac{3}{x} + \frac{3x}{4}\right) + \frac{x}{4} \geq 3 + \frac{2}{4} = \frac{7}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} = \frac{3x}{4} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Vậy $\min h(x) = \frac{7}{2}$ khi và chỉ khi $x = 2$.

4. Ta có $k(x) = x + x + \frac{1}{8x^2} + \frac{7}{8x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x + x + \frac{1}{8x^2} \geq 3\sqrt[3]{x \cdot x \cdot \frac{1}{8x^2}} = \frac{3}{2}$

Mặt khác $0 < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7}{8x^2} \geq \frac{7}{2}$, suy ra $k(x) \geq \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8x^2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy $\min k(x) = 5$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Với các số dương a, b, c , chứng minh rằng:

1. $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$

2. $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$

3. $\frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3} \geq \frac{a^4}{c} + \frac{b^4}{a} + \frac{c^4}{b}$

Bài 2: Với các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 3: Với các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $4(a + b + c) = 3abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq \frac{3}{8}$

Bài 4: Với các số dương a, b, c . Chứng minh rằng:

1. $\frac{a^3}{b(b+c)} + \frac{b^3}{c(c+a)} + \frac{c^3}{a(a+b)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$

2. $\frac{a^3}{(b+2c)^2} + \frac{b^3}{(c+2a)^2} + \frac{c^3}{(a+2b)^2} \geq \frac{2}{9}(a+b+c)$

Bài 5: Cho x, y, z dương thỏa mãn và $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z$.

Bài 6: Cho a, b, c dương và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$9(a^4 + b^4 + c^4) \geq a^2 + b^2 + c^2$.

Bài 7: Cho x, y, z dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{y}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{z}\right)^4 \geq 768.$$

Bài 8: Cho a, b dương thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng:

$$1. \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 6$$

$$2. \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab} + 4ab \geq 11$$

$$3. \left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \left(b^2 + \frac{1}{a^2}\right) \geq \frac{289}{16}$$

Bài 9: Cho hai số thực dương a, b . Chứng minh rằng

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right) \left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(2a + \frac{1}{2}\right) \left(2b + \frac{1}{2}\right).$$

Bài 10: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 11: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{y^3 + 8} + \frac{y^3}{z^3 + 8} + \frac{z^3}{x^3 + 8} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy + yz + zx)$$

Bài 12:

1. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{a}}{2 + b\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{2 + c\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{c}}{2 + a\sqrt{c}} \geq 1$$

2. Cho ba số thực dương a, b, c sao cho $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức:
$$P = \frac{a^4}{a + 2b} + \frac{b^4}{b + 2c} + \frac{c^4}{c + 2a}$$

3. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$

4. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $ab = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = (a + b + 1)(a^2 + b^2) + \frac{4}{a + b}.$$

5. Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn $\frac{1}{2m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của $B = mn$.

Bài 13:

1. Cho $x, y, z > 2$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh rằng: $(x-2)(y-2)(z-2) \leq 1$

2. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $ab = cd = 1$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(c+d) + 4 \geq 2(a+b+c+d)$$

3. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^2+3} + \frac{b^3}{c^2+3} + \frac{c^3}{a^2+3} \geq \frac{3}{4}.$$

Bài 14:

1. Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$a) \frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \dots + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}$$

$$b) \frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{a_2+1} + \dots + \frac{a_n}{a_n+1} \leq \frac{n}{n+1}$$

2. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b không âm ta luôn có:

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

Bài 15:

1. Cho x, y là các số thực dương khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} \right) + \frac{1}{4} (x^{16} + y^{16}) - (1 + x^2 y^2)^2.$$

2. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 \geq 12.$$

Bài 16:

1. Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện:

$$(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}.$$

2. Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{2ab}.$$

Bài 17:

1. Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right)$$

2. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 2 \left(\sqrt{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} \right)$$

Bài 18:

1. Chứng minh rằng mỗi số thực dương a, b, c ta luôn có:

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

2. Cho các số không âm a, b, x, y thỏa mãn các điều kiện $\begin{cases} a^5 + b^5 \leq 1 \\ x^5 + y^5 \leq 1 \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $a^3 \cdot x^2 + b^3 \cdot y^2 \leq 1$.

Bài 19:

1. Cho ba số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(1 + \sqrt[3]{abc})^3 \leq (1+a)(1+b)(1+c).$$

2. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geq 8.$$

Bài 20:

1. Cho bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \geq 3$.

Chứng minh rằng: $abcd \leq \frac{1}{81}$.

2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $S = \frac{x^5}{y^3 + z^3} + \frac{y^5}{z^3 + x^3} + \frac{z^5}{x^3 + y^3} + x^4 + y^4 + z^4$

Bài 21:

1. Cho ba số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x^2}{(2y+3z)(2z+3y)} + \frac{y^2}{(2z+3x)(2x+3z)} + \frac{z^2}{(2x+3y)(2y+3x)}.$$

2. Cho $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh rằng: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) < \frac{81}{8}$.

Bài 22:

1. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^3 + b^3 + a^2c + b^2c} + \frac{bc}{b^3 + c^3 + b^2a + c^2a} + \frac{ca}{c^3 + a^3 + c^2b + a^2b} \leq \frac{3}{4}$$

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện:

$$15\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 10\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + 2007$$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}}$

Bài 23:

1. Cho $0 \leq x \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $F = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}$.

2. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$

Bài 24:

1. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2}.$$

2. Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

Bài 25:

1. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}$$

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời: $a + b + c = 1$ và $ab + bc + ca > 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$

Bài 26:

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{c+ab} + \frac{3bc}{a+bc} + \frac{2ca}{b+ca} \geq \frac{5}{3}.$$

2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x(y+z)}{4-9yz} + \frac{y(z+x)}{4-9zx} + \frac{z(x+y)}{4-9xy} \geq 6xyz.$$

Bài 27:

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^5 - a^2 + 3ab + 6}} + \frac{1}{\sqrt{b^5 - b^2 + 3bc + 6}} + \frac{1}{\sqrt{c^5 - c^2 + 3ca + 6}} \leq 1.$$

2. Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b(1+a^2)} + \frac{b}{c(1+b^2)} + \frac{c}{a(1+c^2)}.$

Bài 28:

1. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + 2ca \leq \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3xyz$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{y^2}{xy^2 + 2z^2} + \frac{x^2}{zx^2 + 2z^2} + \frac{z^2}{yz^2 + 2y^2} \geq 1.$$

Bài 29:

1. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$2(a^2b + b^2c + c^2a) + 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 19$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = \frac{a^2 + b}{b + c} + \frac{b^2 + c}{c + a} + \frac{c^2 + a}{a + b}$$

Bài 30:

1. Cho các số $x, y > 0$ thay đổi thỏa mãn $2x + 3y = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} - 1}{2y} + \frac{\sqrt{1+x^3}\sqrt{1+y^3} - 1}{3x^2}.$$

2. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 3abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của:
$$P = 3a + 2b + c + \frac{8}{a} + \frac{6}{b} + \frac{4}{c}.$$

Bài 31:

1. Cho a, b là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = \frac{(a^2 + 1)^4 (b^2 + 1)^5}{(a + b)^6}.$$

2. Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$(x + y + z) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq 3\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Bài 32:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = \frac{3a + 2b + c}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

Trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $3bc + 4ca + 5ab \leq 6abc$.

Loại 3: Kỹ thuật tham số hóa

Nhiều khi không dự đoán được dấu bằng xảy ra (để tách ghép cho hợp lý) chúng ta cần đưa tham số vào rồi chọn sao cho dấu bằng xảy ra.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của $A = (1 + 2a)(1 + 2b)$

Phân tích:

Rõ ràng ta sẽ đánh giá biểu thức A để làm xuất hiện $a^2 + b^2 + c^2$.

Trước tiên ta sẽ đánh giá a qua a^2 bởi $a^2 + m^2 \geq 2ma \Rightarrow 2a \leq \frac{a^2}{m} + m$ (với $m > 0$)

Do b, c bình đẳng nên dự đoán dấu bằng A đạt giá trị nhỏ nhất khi $b = c$.

Ta đánh giá $2bc \leq b^2 + c^2$. Suy ra $A \leq \left(\frac{a^2}{m} + m + 1\right)(1 + b^2 + c^2) = B$.

Tiếp theo ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Cauchy dưới dạng $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ để làm xuất hiện $a^2 + b^2 + c^2$. Ta sẽ tách như sau

$$B = \frac{1}{m}(a^2 + m^2 + m)(1 + b^2 + c^2) \leq \frac{1}{m} \left(\frac{(a^2 + m^2 + m) + (1 + b^2 + c^2)}{2} \right)^2$$

$$\text{Suy ra } A \leq \frac{1}{4m}(m^2 + m + 2)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = m, b = c, a^2 + m^2 + m = 1 + b^2 + c^2$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Từ đây ta có $m = \frac{2}{3}$. Do đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a^2 + \frac{4}{9} \geq \frac{4}{3}a \Rightarrow 2a \leq \frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3}$ và $2bc \leq b^2 + c^2$

$$\text{Suy ra } A \leq \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} + 1\right)(b^2 + c^2 + 1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} + 1\right)(b^2 + c^2 + 1) = \frac{3}{2}\left(a^2 + \frac{10}{9}\right)(b^2 + c^2 + 1) \leq \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 + \frac{10}{9} + b^2 + c^2 + 1}{2} \right)^2 = \frac{9}{2}$$

Suy ra $A \leq \frac{98}{27}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c \\ a^2 + \frac{10}{9} = b^2 + c^2 + 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c = \sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases}$$

Vậy $\max A = \frac{98}{27}$ khi và chỉ khi $a = \frac{2}{3}$ và $b = c = \sqrt{\frac{5}{18}}$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $2a + 4b + 3c^2 = 68$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = a^2 + b^2 + c^3$.

Phân tích

Ta cần đánh giá biểu thức A qua biểu thức $2a + 4b + 3c^2$. Do đó ta sẽ cho thêm các tham số vào và đánh giá như sau (m, n, p dương)

$$a^2 + m^2 \geq 2am, b^2 + n^2 \geq 2bn \text{ và } \frac{c^3}{2} + \frac{c^3}{2} + 4p^3 \geq 3pc^2$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^3 + m^2 + n^2 + 4p^3 \geq 2am + 2bn + 3pc^2$ (*)

Để $2am + 2bn + 3pc^2$ có thể là bội số của $2a + 4b + 3c^2$ thì

$$\frac{2m}{2} = \frac{2n}{4} = \frac{3p}{3} \Leftrightarrow m = \frac{n}{2} = p$$

Mặt khác dấu bằng ở bất đẳng thức (*) xảy ra khi $a = m, b = n, c = 2p$

Hay $a = m, b = 2m, c = 2m \Rightarrow 2m + 4 \cdot (2m) + 3(2m)^2 = 68$

$$\Leftrightarrow 12m^2 + 10m - 68 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (nhận) hoặc } m = -\frac{17}{6} \text{ (loại)}$$

Suy ra $p = 2, n = 4$ do đó ta có lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a^2 + 4 \geq 4a, b^2 + 16 \geq 8b$ và $\frac{c^3}{2} + \frac{c^3}{2} + 32 \geq 6c^2$

Cộng vế với vế ta được

$$a^2 + b^2 + c^3 + 52 \geq 4a + 8b + 6c^2, \text{ kết hợp với } 2a + 4b + 3c^2 = 68$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^3 \geq 84$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 4, c = 4$

Vậy $\min A = 84 \Leftrightarrow a = 2, b = 4, c = 4$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

1. $A = \frac{x^2 - x + 3}{\sqrt{1-x^3}}$ với $x < 1$ 2. $B = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$ với $-2 \leq x \leq 5$.

Lời giải

1. Ta có $A = \frac{x^2 - x + 3}{\sqrt{(1-x)(x^2+x+1)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có

$$\sqrt{(1-x)(x^2+x+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2(1-x) \cdot (x^2+x+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2(1-x) + x^2 + x + 1}{2} = \frac{x^2 - x + 3}{2\sqrt{2}}$$

Suy ra $A \geq \frac{x^2 - x + 3}{\frac{x^2 - x + 3}{2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$2(1-x) = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Vậy $\min_{x < 1} A = 2\sqrt{2}$ khi $x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$

2. Ta có $B = \frac{x+11}{\sqrt{-x^2+4x+21} + \sqrt{-x^2+3x+10}} = \frac{x+11}{\sqrt{(x+3)(7-x)} + \sqrt{(x+2)(5-x)}}$

Với $-2 \leq x \leq 5$ thì $x+11$; $x+3$; $7-x$; $x+2$; $5-x$ là các số không âm, nên theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{(x+3)(7-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2x+6)(7-x)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{(2x+6) + (7-x)}{2} \right) = \frac{x+13}{2\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{(x+2)(5-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2x+4)(5-x)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{(2x+4) + (5-x)}{2} \right) = \frac{x+9}{2\sqrt{2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{(x+3)(7-x)} + \sqrt{(x+2)(5-x)} \leq \frac{x+11}{\sqrt{2}}$, từ đó ta có $B \geq \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ (1) và (2) đồng thời xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Vậy $\min_{-2 \leq x \leq 5} B = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $M = a^3 + 64b^3 + c^3$

Bài 2: Cho x, y, z dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

Bài 3: Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + 2b^3 + 3c^3 \geq \frac{6}{7}$$

Bài 4: Cho x, y, z dương thỏa mãn $x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz} = \frac{4}{3}$. Chứng minh rằng:

$$x + y + z \geq 1$$

Bài 5: Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} \geq \frac{1}{9}(64c - a - b)$

Bài 6: Cho x, y, z dương thỏa mãn $y^2 + yz + z^2 = 1 - \frac{3x^2}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + y + z$.

Bài 7: Cho x, y, z dương thỏa mãn $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$T = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$$

Bài 8: Cho x, y, z dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = \frac{x^2}{x+y^2} + \frac{y^2}{y+z^2} + \frac{z^2}{z+x^2}$$

Loại 4: Kỹ thuật Cauchy ngược dấu

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{a+2\sqrt{bc}} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{a+b+c} \right)$

Tương tự ta có $\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{a+b+c} \right), \frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c}{a+b+c} \right)$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P \leq \frac{1}{2} \left(3 - \frac{a}{a+b+c} - \frac{b}{a+b+c} - \frac{c}{a+b+c} \right) = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow a = b = c$

Ví dụ 2: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$1. \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

$$2. \frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq 1$$

Lời giải

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2-b^2)}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2} \text{ và } \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a + b + c - \frac{ab + bc + ca}{2} = 3 - \frac{ab + bc + ca}{2}$$

$$\text{Mặt khác ta có } (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca \leq 3.$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

2. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^2}{a+2b^3} = \frac{a(a+2b^3) - 2ab^3}{a+2b^3} \geq a - \frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}} = a - \frac{2b\sqrt[3]{a^2}}{3}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{b^2}{b+2c^3} \geq b - \frac{2c\sqrt[3]{b}}{3}, \frac{c^2}{c+2a^3} \geq c - \frac{2a\sqrt[3]{c}}{3}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq a + b + c - \frac{2}{3} \left(b\sqrt[3]{a^2} + a\sqrt[3]{c^2} + c\sqrt[3]{b^2} \right)$$

$$\text{Mặt khác } a + b + c = 3 \text{ do đó ta chỉ cần chứng minh: } b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \leq 3.$$

$$\text{Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta có: } b\sqrt[3]{a^2} \leq \frac{1}{3}b.(a + a + 1) = \frac{2ab + b}{3}$$

Tương tự ta có $c\sqrt[3]{b^2} \leq \frac{2bc+c}{3}$, $a\sqrt[3]{c^2} \leq \frac{2ca+a}{3}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \leq \frac{2ab+b}{3} + \frac{2bc+c}{3} + \frac{2ca+a}{3} = \frac{2}{3}(ab+bc+ca) + \frac{1}{3}(a+b+c)$$

Từ đó suy ra: $b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \leq \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 3$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{c}{1+ab} + \frac{b}{1+ac} + \frac{a}{1+bc} \geq 1$

Lời giải

Đặt $P = \frac{c}{1+ab} + \frac{b}{1+ac} + \frac{a}{1+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{c}{1+ab} = c - \frac{abc}{1+ab} \geq c - \frac{abc}{2\sqrt{ab}} = c - \frac{\sqrt{(ca)(cb)}}{2} \geq c - \frac{ca+cb}{4}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{1+ac} \geq b - \frac{ba+bc}{4}$, $\frac{a}{1+bc} \geq a - \frac{ab+ac}{4}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được: $P \geq a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2}$.

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 1 + 2(ab+bc+ca)$ (*)

$$\text{hay } ab+bc+ca = \frac{(a+b+c)^2 - 1}{2}$$

Suy ra $P \geq a+b+c - \frac{(a+b+c)^2 - 1}{4} = \frac{(a+b+c-1)(3-a-b-c)}{4} + 1$ (1)

Từ giả thiết ta có $a, b, c \in [0;1] \Rightarrow 3-a-b-c \geq 0$ (2)

Và từ (*) suy ra $a+b+c \geq 1$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $P \geq 1$ đpcm

Đấu bằng xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 1 và hai số còn lại bằng 0.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca}} \geq \frac{1}{5}(a + b + c)$$

Bài 2: Cho ba số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1 + \frac{16x}{y+z}} + \sqrt{1 + \frac{16y}{z+x}} + \sqrt{1 + \frac{16z}{x+y}} \geq 9$$

Bài 3: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq \sqrt{2}(a + b + c)$$

Bài 4: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng :

$$1. \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \geq (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$2. \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1$$

Bài 5: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

Chứng minh rằng: $xy + yz + zx - xyz \leq 2$.

Bài 6:

$$1. \text{ Cho } a, b > 0. \text{ Chứng minh: } \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + c^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$2. \text{ Cho } x, y > 0. \text{ Chứng minh: } \frac{x^2}{1 + 16x^4} + \frac{y^2}{1 + 16y^4} \leq \frac{1}{4}$$

$$3. \text{ Cho } x, y \geq 0. \text{ Chứng minh: } \frac{x^6 + y^9}{4} \geq 3x^2y^3 - 16$$

Bài 7: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$1. \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$$

$$2. \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}$$

Phương pháp giải

Điều quan trọng trong kĩ thuật này là phát hiện ra ẩn phụ (ẩn phụ có thể là $x = f(a, b, c)$, $y = g(a, b, c)$, $z = h(a, b, c)$ hoặc là chỉ một ẩn phụ $t = f(a, b, c)$). Ẩn phụ có thể có ngay trong biểu thức của bất đẳng hoặc qua một số phép biến đổi, đánh giá.

Các ví dụ

Ví dụ 1:

1. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thoả mãn điều kiện: $a + b + c = 1$ thì

$$\frac{1}{3^a} + \frac{1}{3^b} + \frac{1}{3^c} \geq 3 \left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c} \right)$$

2. Cho $0 \leq x, y, z \leq 1$. Chứng minh rằng: $(2^x + 2^y + 2^z)(2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z}) \leq \frac{81}{8}$

3. Cho x, y, z là ba số thực thoả mãn: $5^{-x} + 5^{-y} + 5^{-z} = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{25^x}{5^x + 5^{y+z}} + \frac{25^y}{5^y + 5^{z+x}} + \frac{25^z}{5^z + 5^{x+y}} \geq \frac{5^x + 5^y + 5^z}{4}$$

Lời giải

1. Vì hàm số $f(x) = \frac{1}{3^x}$ là hàm nghịch biến nên: $(a - b) \left(\frac{1}{3^a} - \frac{1}{3^b} \right) \leq 0, \forall a, b$.

$$\Rightarrow \frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} \leq \frac{b}{3^a} + \frac{a}{3^b}, \forall a, b \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c} \leq \frac{b}{3^c} + \frac{c}{3^b} \quad (2), \quad \frac{c}{3^c} + \frac{a}{3^a} \leq \frac{a}{3^c} + \frac{c}{3^a} \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c} = \frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c} \quad (4)$$

Cộng (1), (2), (3) và (4) theo vế, ta được:

$$3 \left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c} \right) \leq (a + b + c) \left(\frac{1}{3^a} + \frac{1}{3^b} + \frac{1}{3^c} \right) \text{ hay } 3 \left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c} \right) \leq \frac{1}{3^a} + \frac{1}{3^b} + \frac{1}{3^c}$$

(vì $a + b + c = 1$). Đẳng thức xảy ra khi: $a = b = c = \frac{1}{3}$

2. Đặt $a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z$ ($1 \leq a, b, c \leq 2$).

$$1 \leq a \leq 2 \Rightarrow (a-1)(a-2) \leq 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 \leq 0 \Rightarrow a + \frac{2}{a} \leq 3 \quad (1)$$

Chứng minh tương tự: $b + \frac{2}{b} \leq 3$ (2), $c + \frac{2}{c} \leq 3$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$9 \geq (a+b+c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 2\sqrt{(a+b+c)2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{81}{8} \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \text{ suy ra điều phải chứng minh.}$$

Chú ý: Cho n số $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ và số $c > 1$.

$$\text{Ta luôn có: } \left(c^{x_1} + c^{x_2} + \dots + c^{x_n}\right)\left(c^{-x_1} + c^{-x_2} + \dots + c^{-x_n}\right) \leq \frac{\left[n(c^a + c^b)\right]^2}{4c^{a+b}}$$

3. Đặt $5^x = a$; $5^y = b$; $5^z = c$. Từ giả thiết ta có: $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = abc$

$$\text{Bất đẳng thức đã cho trở thành: } \frac{a^2}{a+bc} + \frac{b^2}{b+ca} + \frac{c^2}{c+ab} \geq \frac{a+b+c}{4} \quad (*)$$

$$\text{Từ } (*) \Leftrightarrow \frac{a^3}{a^2+abc} + \frac{b^3}{b^2+abc} + \frac{c^3}{c^2+abc} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: } \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{a+b}{8} + \frac{a+c}{8} \geq \frac{3}{4}a \quad (1)$$

$$\frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{b+c}{8} + \frac{b+a}{8} \geq \frac{3}{4}b \quad (2) \text{ và } \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} + \frac{c+a}{8} + \frac{c+b}{8} \geq \frac{3}{4}c \quad (3)$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2:

1. Cho a, b, c là các số dương thỏa $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} \geq 1$$

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa: $a + 4b + 9c = 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^3 + b^3 + c^3$

Lời giải

1. Đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{2\frac{x}{y}+1} + \frac{1}{2\frac{y}{z}+1} + \frac{1}{2\frac{z}{x}+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \geq 1$$

Hơn nữa:
$$\frac{y}{2x+y} = \frac{y(2z+y)}{(2x+y)(2z+y)} \geq \frac{y(2z+y)}{\frac{[(2x+y)+(2z+y)]^2}{4}} = \frac{y(2z+y)}{(x+y+z)^2}$$

Tương tự:
$$\frac{z}{2x+y} \geq \frac{z(2x+z)}{(x+y+z)^2}, \frac{x}{2z+x} \geq \frac{x(2y+x)}{(x+y+z)^2}$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại về theo về, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} &\geq \frac{y(2z+y) + z(2x+z) + x(2y+x)}{(x+y+z)^2} \\ &= \frac{2(xy + yz + zx) + x^2 + y^2 + z^2}{(x+y+z)^2} = 1 \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=2z+y \\ 2y+z=2x+z \\ 2z+x=2y+x \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=1$

2. Trong bài toán này chúng ta chưa biết được đẳng thức xảy ra khi nào? Nên việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy gặp khó khăn. Ta giả sử P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=x, b=y, c=z$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $a^3 + x^3 + x^3 \geq 3x^2a \Rightarrow a^3 + 2x^3 \geq 3x^2a$

Tương tự: $b^3 + 2y^3 \geq 3y^2b$; $c^3 + 2z^3 \geq 3z^2c$

Do đó: $a^3 + b^3 + c^3 + 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq 3(x^2a + y^2b + z^2c)$

Ta chọn x, y, z sao cho:
$$\begin{cases} y^2 = 4x^2 \\ z^2 = 9x^2 \\ x + 4y + 9z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy: $P \geq 3x^2(a + 4b + 9c) - 72x^3 = 18x^2 - 72x^3 = \frac{1}{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{2}$. Vậy $\min P = \frac{1}{6}$.

Nhận xét. Phương pháp trên được gọi là cân bằng hệ số. Khi chúng ta chưa xác định được đẳng thức xảy ra khi nào thì chúng ta đưa vào tham số rồi chọn các tham số một cách phù hợp.

Ví dụ 3: Cho các số dương a, b, c .

1. Chứng minh rằng $\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{6b+8c}{2a+b} + \frac{3a+2b+c}{b+c} \geq 7$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+4a} + \frac{c+a}{c+a+16b}$.

Lời giải

1. Đặt $x = a + b + c, y = 2a + b, z = b + c$

Suy ra $a = x - z, b = -2x + y + 2z, c = 2x - y - z$

Bất đẳng thức trở thành $\frac{-x+y+z}{x} + \frac{4x-2y+4z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 7$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{4x}{y} - 2 + \frac{4z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 7$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{4x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq 10 \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 4, \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2, \frac{4z}{y} + \frac{y}{z} \geq 4$

Suy ra bất đẳng thức (*) đúng, đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = z \\ 2z = y \end{cases} \Leftrightarrow 2x = y = 2z$ suy ra không tồn tại a, b, c .

Dấu đẳng thức không xảy ra.

2. Đặt $x = a + b + c, y = b + c + 4a, z = c + a + 16b$

Suy ra $a = \frac{y-x}{3}, b = \frac{z-x}{15}, c = \frac{21x-5y-z}{15}$

Khi đó ta có $P = \frac{-6x+5y+z}{15x} + \frac{4x-y}{3y} + \frac{16x-z}{15z}$

$$\Rightarrow P = \frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} + \frac{z}{15y} + \frac{16x}{15z} - \frac{4}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} \geq \frac{4}{3}, \frac{z}{15y} + \frac{16x}{15z} \geq \frac{8}{15}$

Suy ra $P \geq \frac{4}{3} + \frac{8}{15} - \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4x = 2y = z \Leftrightarrow a = \frac{5b}{3} = \frac{5c}{7}$

Vậy $\min P = \frac{16}{15}$ khi và chỉ khi $a = \frac{5b}{3} = \frac{5c}{7}$.

Ví dụ 4: Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác có chu vi là $2p$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \geq \sqrt{\frac{b+c}{p-a}} + \sqrt{\frac{c+a}{p-b}} + \sqrt{\frac{a+b}{p-c}}$$

Lời giải

Đặt $x = p - a$; $y = p - b$; $z = p - c$, suy ra $a = y + z$; $b = z + x$; $c = x + y$.

Do a, b, c là ba cạnh của tam giác nên x, y, z dương

Bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng:

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq \sqrt{2 + \frac{y+z}{x}} + \sqrt{2 + \frac{z+x}{y}} + \sqrt{2 + \frac{x+y}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $4\sqrt{2 + \frac{y+z}{x}} \leq \left(2 + \frac{y+z}{x}\right) + 4 = \frac{y+z}{x} + 6$

Tương tự ta có $4\sqrt{2 + \frac{z+x}{y}} \leq \frac{z+x}{y} + 6$, $4\sqrt{2 + \frac{x+y}{z}} \leq \frac{x+y}{z} + 6$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$4\left(\sqrt{2 + \frac{y+z}{x}} + \sqrt{2 + \frac{z+x}{y}} + \sqrt{2 + \frac{x+y}{z}}\right) \leq \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} + 18$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} + 18\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6.$$

Ta có $\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} = \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 2$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$, $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$

Suy ra $\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hay tam giác đều.

Nhận xét: Đối với bất đẳng thức có giả thiết a, b, c là ba cạnh của tam giác thì ta

thực hiện phép đặt ẩn phụ $x = \frac{a+b-c}{2}$, $y = \frac{a-b+c}{2}$, $z = \frac{-a+b+c}{2}$ thì khi đó

$a = y + z$; $b = z + x$; $c = x + y$ và x, y, z dương. Ta chuyển về bài toán với giả thiết x, y, z dương không còn ràng buộc là ba cạnh của tam giác.

Ví dụ 5: Cho x, y, z là số dương. Chứng minh rằng:

$$x^3 + 2y^3 + 3z^3 \geq \frac{1590}{1331}(x + y + z)^3$$

Lời giải

Ta có bất đẳng thức $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + 2\left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 + 3\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3 \geq \frac{1590}{1331}$

Đặt $a = \frac{x}{x+y+z}$, $b = \frac{y}{x+y+z}$, $c = \frac{z}{x+y+z} \Rightarrow a, b, c$ dương và $a + b + c = 1$

Bất đẳng thức trở thành $a^3 + 2b^3 + 3c^3 \geq \frac{1590}{1331}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3 + \left(\frac{6}{11}\right)^3 + \left(\frac{6}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}a, \quad 2b^3 + 2\left(\frac{3}{11}\right)^3 + 2\left(\frac{3}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}b,$$

$$3c^3 + 3\left(\frac{2}{11}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}c$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a^3 + 2b^3 + 3c^3 + \frac{588}{1331} \geq \frac{18}{11}(a + b + c) = \frac{18}{11}$$

$$\text{Suy ra } a^3 + 2b^3 + 3c^3 \geq \frac{1590}{1331}.$$

Nhận xét: Phương pháp đặt ẩn phụ trên được áp dụng khi bất đẳng thức là đồng bậc (người ta thường gọi là phương pháp chuẩn hóa)

Ví dụ 6: Cho x, y, z là số dương thỏa mãn $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{15}{2}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \quad \text{và} \quad x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \quad \text{nên} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$$

$$\text{Suy ra } x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z + \frac{9}{x + y + z}$$

$$\text{Đặt } t = x + y + z \Rightarrow 0 < t \leq \frac{3}{2}$$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh $x + y + z + \frac{9}{x+y+z} = t + \frac{9}{t} \geq \frac{15}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$t + \frac{9}{t} = t + \frac{9}{4t} + \frac{27}{4t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{9}{4t}} + \frac{27}{4 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{15}{2}, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 7: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + b + c + \frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1 \Leftrightarrow 4 = abc + ab + bc + ca$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

Suy ra $4 = abc + ab + bc + ca \geq abc + 3\sqrt[3]{(abc)^2} = t^3 + 3t^2$, với $t = \sqrt[3]{abc}$.

$$\Rightarrow t^3 + 3t^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$P = a + b + c + \frac{4}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3\sqrt[3]{abc} + \frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$$

Suy ra $P \geq 3t + \frac{4}{t} = \left(3t + \frac{3}{t}\right) + \frac{1}{t}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $3t + \frac{3}{t} \geq 2\sqrt{3t \cdot \frac{3}{t}} = 6$, mặt khác $t \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{t} \geq 1$

Do đó $P \geq 3t + \frac{4}{t} \geq 7$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$ hay $a = b = c = 1$

Vậy $\min P = 7 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Ví dụ 8: Cho x, y, z dương thỏa mãn $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 14xyz}{4(x+y+z)^2 + 15xyz}$.

Lời giải

Ta có $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 8 \Leftrightarrow 8xyz = 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 14xyz = (x + y + z)^2 + 2(x + y + z) + 2 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$8 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{8}{\sqrt{xyz}} \Rightarrow xyz \geq 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $P \leq \frac{(x + y + z)^2 + 2(x + y + z) + 2}{4(x + y + z)^2 + 15} = \frac{t^2 + 2t + 2}{4t^2 + 15}$, với $x + y + z = t > 0$.

$$\text{Xét } \frac{t^2 + 2t + 2}{4t^2 + 15} - \frac{1}{3} = \frac{-t^2 + 6t - 9}{12t^2 + 45} = -\frac{(t - 3)^2}{12t^2 + 45} \leq 0$$

$$\text{Suy ra } \frac{t^2 + 2t + 2}{4t^2 + 15} \leq \frac{1}{3}, \text{ do đó } P \leq \frac{1}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 3$ hay $x = y = z = 1$

Vậy $\max P = \frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho x, y, z dương. Chứng minh rằng: $\frac{25x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{9z}{x+y} > 12$

Bài 2: Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{4a}{a+b+2c} + \frac{b+3c}{2a+b+c} - \frac{8c}{a+b+3c} \geq 12\sqrt{2} - 17$$

Bài 3: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xyz \geq x + y + z + 2$. Chứng minh rằng $x + y + z \geq 6$.

Bài 4: Cho a, b, c là các số thực dương.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a^{11}}{bc} + \frac{b^{11}}{ca} + \frac{c^{11}}{ab} + \frac{3}{a^2b^2c^2} \geq \frac{a^6 + b^6 + c^6 + 9}{2}$$

Bài 5: Cho x, y, z là số không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$. Chứng minh rằng $x + y + z \leq 3$.

Bài 6: Cho x, y, z là số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Bài 7: Cho $x, y, z \in (0; 1)$ và $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}$

Bài 8: Cho các số thực x, y thỏa $x \neq -2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(2x^2 + 13y^2 - xy)^2 - 6xy + 9}{(x + 2y)^2}.$$

Bài 9:

1. Cho x, y, z là ba số dương sao cho $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)}$$

2. Cho $a, b, c \geq 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{b^3}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{c^3}{\sqrt{1+a^2}}.$$

3. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn: $2x - y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

4. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c \geq 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức: $L = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c}.$

5. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{1}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{1}{(c+1)^2 + a^2 + 1}$$

6. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{\sqrt{bc(1+a^2)}} + \frac{b}{\sqrt{ca(1+b^2)}} + \frac{c}{\sqrt{ab(1+c^2)}}$$

7. Cho x, y, z là các số thực thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $A = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2}}{x^2 + y^2 + z^2}.$

Phương pháp giải

Điều quan trọng dạng toán này là cần phát hiện ra được bất đẳng thức phụ. Bất đẳng thức phụ có thể là những bất đẳng thức cơ bản đã có hoặc là chúng ta từ đặc điểm của bất đẳng thức cần chứng minh chúng ta dự đoán và đưa ra bất đẳng thức phụ từ đó vận dụng vào bài toán.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng:

$$1. \frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \geq \frac{a+b+c}{abc} \quad 2. \frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$.

Bất đẳng thức tương đương với $a^3 + b^3 - a^2b - b^2a \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-b) + b^2(b-a) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0 \text{ (đúng với mọi } a > 0, b > 0)$$

$\Rightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

$$1. \text{ Ta có } a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a \Leftrightarrow \frac{a}{b^3} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{b}{c^3} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{c^2} + \frac{1}{bc}$, $\frac{c}{a^3} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ac}$

Cộng vế với vế rút gọn ta được $\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Hay $\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \geq \frac{a+b+c}{abc}$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

2. Theo bài toán trên ta có: $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a = ab(a+b)$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c) \Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{b^3+c^3+abc} \leq \frac{a}{abc(a+b+c)}; \quad \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{b}{abc(a+b+c)}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 2: Cho a, b là các số thực. Chứng minh rằng:

1. $3(a+b+1)^2 + 1 \geq 3ab$

2. $64a^3b^3(a^2+b^2)^2 \leq (a+b)^6$

Lời giải

1. Áp dụng bất đẳng thức $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ nên ta chứng minh

$$3(a+b+1)^2 + 1 \geq \frac{3}{4}(a+b)^2 \quad (*)$$

Thật vậy: $(*) \Leftrightarrow 12(a+b)^2 + 24(a+b) + 16 \geq 3(a+b)^2$

$$\Leftrightarrow 9(a+b)^2 + 24(a+b) + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (3a+3b+4)^2 \geq 0 \text{ (đúng) đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = -\frac{2}{3}$.

2. Dễ thấy bất đẳng thức đúng khi $ab \leq 0$.

Xét $ab > 0$. Áp dụng BĐT $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, ta có:

$$64a^3b^3(a^2+b^2)^2 = 16ab[2ab(a^2+b^2)]^2 \leq 16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \left[\frac{2ab+(a^2+b^2)}{2}\right]^2 = (a+b)^6$$

Suy ra $64a^3b^3(a^2+b^2)^2 \leq (a+b)^6$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 3: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2013}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2013}{2}}$.

Lời giải

Ta có $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$.

$$\text{Suy ra } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}}$$

Đặt $x = \sqrt{b^2+c^2}$, $y = \sqrt{c^2+a^2}$, $z = \sqrt{a^2+b^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Vì thế VT} &\geq \frac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x} + \frac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y} + \frac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z} \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} - x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} - y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} - z \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} + 2x - 3x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} + 2y - 3y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} + 2z - 3z \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} + 2x - 3x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} + 2y - 3y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} + 2z - 3z \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} [(2(y+z) - 3x) + (2(z+x) - 3y) + (2(x+y) - 3z)]
\end{aligned}$$

Suy ra $VT \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2013}{2}}$

Ví dụ 4: Một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c thỏa mãn:

$$(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 = a^3 + b^3 + c^3.$$

Chứng minh tam giác đó là tam giác đều.

Lời giải

Bổ đề: Với mọi $x, y > 0$, ta có $x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$.

Chứng minh: Do $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ nên bất đẳng thức tương đương với

$$x^2 - xy + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy hai số dạng $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, ta được

$$x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy \geq (x+y)^2 - 3 \cdot \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(x+y)^2}{4}.$$

Bổ đề được chứng minh.

Để ý rằng a, b, c là tam giác thì hiển nhiên ta có:

$$a+b-c > 0, b+c-a > 0, c+a-b > 0$$

Áp dụng bổ đề, ta có:

$$(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 \geq \frac{[(a+b-c) + (b+c-a)]^3}{4} = 2b^3$$

$$(b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 \geq \frac{[(b+c-a) + (c+a-b)]^3}{4} = 2c^3$$

$$(c+a-b)^3 + (a+b-c)^3 \geq \frac{[(c+a-b) + (a+b-c)]^3}{4} = 2a^3$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại vế theo vế và rút gọn cả hai vế của bất đẳng thức thu được cho 2, ta có: $(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 = a^3 + b^3 + c^3$.

Theo giả thiết thì dấu bằng xảy ra, do vậy ta phải có:
$$\begin{cases} a+b-c=b+c-a \\ b+c-a=c+a-b \Leftrightarrow a=b=c \\ c+a-b=a+b-c \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ tam giác đã cho là tam giác đều.

Ví dụ 5: Cho a, b, c không âm thoả mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+2b+3} + \frac{b}{b^2+2c+3} + \frac{c}{c^2+2a+3} \leq \frac{1}{2}$$

Lời giải

Chứng minh bổ đề: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ và $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, với $x, y > 0$.

Thật vậy: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$

Áp dụng 2 lần bất đẳng thức trên, ta được $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Bổ đề được chứng minh.

Ta có: $a^2 + 2b + 3 = a^2 + 2b + 1 + 2 \geq 2a + 2b + 2$, từ đó ta cũng có:

$$A = \frac{a}{a^2+2b+3} + \frac{b}{b^2+2c+3} + \frac{c}{c^2+2a+3} \leq \frac{a}{2a+2b+2} + \frac{b}{2b+2c+2} + \frac{c}{2c+2a+2}$$

$$\text{Hay } A \leq \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{c+a+1} \right)}_B \quad (1)$$

Ta chứng minh: $\frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{c+a+1} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b+1} - 1 + \frac{b}{b+c+1} - 1 + \frac{c}{c+a+1} - 1 \leq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-b-1}{a+b+1} + \frac{-c-1}{b+c+1} + \frac{-a-1}{c+a+1} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{b+1}{a+b+1} + \frac{c+1}{b+c+1} + \frac{a+1}{c+a+1} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{(b+1)^2}{(a+b+1)(b+1)} + \frac{(c+1)^2}{(b+c+1)(c+1)} + \frac{(a+1)^2}{(c+a+1)(a+1)}}_{3-B} \geq 2 \quad (2)$$

Áp dụng bổ đề trên, ta được:

$$3 - B \geq \frac{(a+b+c+3)^2}{(a+b+1)(b+1) + (b+c+1)(c+1) + (c+a+1)(a+1)}$$

$$\Leftrightarrow 3 - B \geq \frac{(a+b+c+3)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca + 3(a+b+c) + 3} \quad (3)$$

Lại có: $2 \left[a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca + 3(a+b+c) + 3 \right]$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + 6a + 6b + 6c + 6$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + 6a + 6b + 6c + 6$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + 6a + 6b + 6c + 9 = (a+b+c+3)^2,$$

do $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c+3)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca + 3(a+b+c) + 3} = 2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) rồi kết hợp (1), ta được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 6:

1. Cho a là số dương và b là số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{2a^3 + a + 1}{a^2} - 2b$$

2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{3a+2b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. Trong đó a, b, c là

các số thực dương thỏa mãn: $3bc + 4ca + 5ab \leq 6abc$.

Lời giải

1. Áp dụng bất đẳng thức $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ (*), dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad = bc$.

$$\text{Ta có } (a^2 + b^2)(1 + 4) = 25 \geq (a + 2b)^2 \Leftrightarrow a + 2b \leq 5$$

$$\text{Suy ra } -2b \geq a - 5$$

$$\text{Do đó } P = \frac{2a^3 + a + 1}{a^2} - 2b \geq \frac{2a^3 + a + 1}{a^2} + a - 5 = 3a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 5 \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có } a + \frac{1}{a} \geq 2, a + a + \frac{1}{a^2} \geq 3.$$

Do đó $3a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \geq 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a = 1, b = 2$.

Vậy $\min P = 0 \Leftrightarrow a = 1, b = 2$.

Nhận xét: Bất đẳng thức (*) là bất đẳng thức Bunhiacopxki cho bốn số. Ta có thể tổng quát bất đẳng thức cho $2n$ số $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Đấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

2. Do $a, b, c > 0$ nên $3bc + 4ca + 5ab \leq 6abc \Leftrightarrow \frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c} \leq 6$ (1).

Trước tiên ta nhắc lại bất đẳng thức quen thuộc sau:

Với $x, y > 0$ ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (2).

Áp dụng bất đẳng thức (2) liên tiếp ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2(a+b) + (a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{b+c} \left(\frac{2}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) \leq \frac{1}{b+c} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4(b+c)} \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{c} + \frac{1}{b} \right) \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{c} + \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{1}{48} \left(\frac{3}{b} + \frac{3}{c} \right) \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{c} + \frac{1}{b} \right) \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \frac{1}{48} \left(\frac{\frac{3}{b} + \frac{3}{c} + \frac{3}{a} + \frac{2}{c} + \frac{1}{b}}{2} \right)^2 \leq \frac{3}{16} \text{ (theo (1))} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 2$. Vậy $\max P = \frac{3}{16}$.

Ví dụ 7: Cho a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

1. $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq 3$

2. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

1. Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ hai lần ta có:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \\ &\geq ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab = abc(a + b + c) = 3abc \text{ (vì } a + b + c = 3) \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc} \geq 3$ hay $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq 3$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

2. Áp dụng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{3}{abc}$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{3}{abc} \geq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3$ (*)

Lại áp dụng $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ (ví dụ 1) ta có

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) \Rightarrow abc \leq \frac{(ab + bc + ca)^2}{9} \quad (**)$$

Áp dụng bất đẳng thức $abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3$ và (**) ta có

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{(ab + bc + ca)^2(a^2 + b^2 + c^2)}{9} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{(a + b + c)^2}{3}\right)^3 = 3$$

Vậy bất đẳng thức (*) đúng nên bất đẳng thức ban đầu đúng đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 8: Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$1. \frac{1}{2a + b + c} + \frac{1}{2a + 2b + c} + \frac{1}{a + b + 2c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$2. \frac{1}{a + 3b} + \frac{1}{b + 3c} + \frac{1}{c + 3a} \geq \frac{1}{2a + b + c} + \frac{1}{a + 2b + c} + \frac{1}{a + b + 2c}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực không âm ta có:

$$\left. \begin{aligned} a + b &\geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = 4$$

Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$ (*). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

1. Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{1}{2a + b + c} = \frac{1}{(a + b) + (a + c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + c}\right) \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{1}{a + 2b + c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right); \quad \frac{1}{a + b + 2c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right)$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

2. Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có: $\frac{1}{a + 3b} + \frac{1}{a + b + 2c} \geq \frac{4}{2a + 4b + 2c} = \frac{2}{a + 2b + c}$.

Tương tự $\frac{1}{b+3c} + \frac{1}{2a+b+c} \geq \frac{2}{a+b+2c}$; $\frac{1}{c+3a} + \frac{1}{a+2b+c} \geq \frac{2}{2a+b+c}$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 9: Cho a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

1. $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \leq \frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số thực dương ta có:

$$\left. \begin{array}{l} a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \end{array} \right\} \Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3 \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} = 9$$

Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (*). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

1. Ta có bất đẳng thức $\Leftrightarrow \frac{a+1-1}{a+1} + \frac{b+1-1}{b+1} + \frac{c+1-1}{c+1} \leq \frac{3}{4}$
 $\Leftrightarrow 3 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{a+b+c+3} = \frac{9}{4}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

2. Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca}$$

Mặt khác: $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{7}{ab+bc+ca} \geq 21$

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 9$$

Suy ra: $\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 9 + 21 = 30$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 10: Cho a, b, c là các số thuộc $[0;1]$ thỏa mãn $\frac{1}{4a^4+5} + \frac{2}{4b^4+5} + \frac{3}{4c^4+5} = \frac{6}{7}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = ab^2c^3$.

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

Với x, y thuộc $[0;1]$, ta luôn có $\frac{1}{4x^4+5} + \frac{1}{4y^4+5} \leq \frac{2}{4x^2y^2+5}$ (*)

Thật vậy, bất đẳng thức (*)

$$\Leftrightarrow (2x^4 + 2y^4 + 5)(4x^2y^2 + 5) \leq (4x^4 + 5)(4y^4 + 5)$$

$$\Leftrightarrow 8x^4y^4 - 10x^2y^2 + (x^4 + y^4)(5 - 4x^2y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (5 - 4x^2y^2)(x^2 - y^2)^2 \geq 0 \text{ (đúng với } x, y \in [0;1])$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{1}{4a^4+5} + \frac{1}{4c^4+5} \leq \frac{2}{4a^2c^2+5}, \quad \frac{1}{4b^4+5} + \frac{1}{4c^4+5} \leq \frac{2}{4b^2c^2+5}$$

Suy ra $\frac{1}{4a^4+5} + \frac{1}{4b^4+5} + \frac{2}{4c^4+5} \leq \frac{2}{4a^2c^2+5} + \frac{2}{4b^2c^2+5} \leq \frac{4}{4abc^2+5}$ (1)

và $\frac{1}{4b^4+5} + \frac{1}{7} \leq \frac{2}{4 \cdot \frac{b^2}{\sqrt{2}} + 5}, \quad \frac{1}{c^4+5} + \frac{1}{7} \leq \frac{2}{4 \cdot \frac{c^2}{\sqrt{2}} + 5}$

Suy ra $\frac{1}{4b^4+5} + \frac{1}{4c^4+5} + \frac{2}{7} \leq \frac{2}{4 \cdot \frac{b^2}{\sqrt{2}} + 5} + \frac{2}{4 \cdot \frac{c^2}{\sqrt{2}} + 5} \leq \frac{4}{4 \cdot \frac{bc}{\sqrt{2}} + 5}$ (2)

Ta lại có $\frac{4}{4abc^2+5} + \frac{4}{4 \cdot \frac{bc}{\sqrt{2}} + 5} \leq \frac{8}{4 \cdot \sqrt{\frac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}} + 5}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\frac{1}{4a^4+5} + \frac{2}{4b^4+5} + \frac{3}{4c^4+5} + \frac{2}{7} \leq \frac{8}{4 \cdot \sqrt{\frac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}} + 5}$

Kết hợp giả thiết suy ra $\frac{8}{4 \cdot \sqrt{\frac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}} + 5} \geq \frac{8}{7} \Rightarrow ab^2c^3 \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

Vậy $\max P = \frac{1}{16}$ khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2}$$

Áp dụng (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. Cho $a, b \geq 0$ thoả mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} \geq \sqrt{5}$.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{a^2}}$.

3. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

4. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x + y + z = \sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{223 + x^2} + \sqrt{223 + y^2} + \sqrt{223 + z^2}.$$

Bài 2: Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (1).

Áp dụng (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$; với $a, b, c > 0$.

2. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 2 \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right)$; với $a, b, c > 0$.

3. Cho $a, b, c > 0$ thoả $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq 1$$

4. $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$; với $a, b, c > 0$.

5. Cho x, y, z dương thoả mãn $x + 2y + 4z = 12$. Chứng minh:

$$\frac{2xy}{x+2y} + \frac{8yz}{2y+4z} + \frac{4xz}{4z+x} \leq 6.$$

6. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Bài 3: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (1).

Áp dụng (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$ với a, b, c dương.

2. $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{3}{4}$. Với a, b, c dương thỏa $a+b+c=1$.

3. $\frac{1}{a^2+2bc} + \frac{1}{b^2+2ac} + \frac{1}{c^2+2ab} \geq 9$. Với a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c \leq 1$

4. $\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2009}{ab+bc+ca} \geq 670$. Với a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=3$

Bài 4: Cho $a, b, c \geq 0$ và $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ac} \leq 1.$$

Bài 5: Cho ba số thực không âm a, b, c và không có hai số đồng thời bằng không.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng
1.

SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Loại 1: Biến đổi tương đương về bất đẳng thức đúng

Bài 1:

1. BĐT $\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \geq 0$

2. BĐT $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$

3. BĐT $\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$

4. BĐT $\Leftrightarrow (a-b+c)^2 \geq 0$

5. BĐT $\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (a-c)^2 + (a-1)^2 \geq 0$.

$$6. BDT \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - (b-c)\right)^2 \geq 0$$

$$7. BDT \Leftrightarrow ab(a-b)(a^3-b^3) \geq 0$$

Bài 2:

$$1. BDT \Leftrightarrow (a-b)c < 0$$

$$2. \text{ Sử dụng câu 1, ta được: } \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}, \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}, \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}.$$

Cộng các bất đẳng thức vế theo vế, ta được đpcm.

$$3. \text{ Sử dụng tính chất phân số, ta có: } \frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}$$

$$\text{ Tương tự ta có } \frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}, \frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{a+c};$$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b}. \text{ Cộng các bất đẳng thức vế theo vế ta được đpcm.}$$

$$4. \text{ Chứng minh tương tự câu 3. Ta có: } \frac{a+b}{a+b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$$

Cùng với ba bất đẳng thức tương tự, ta suy ra đpcm.

Bài 3:

$$1. BDT \Leftrightarrow abx^2 + (a^2 + b^2)xy + aby^2 \geq (a+b)^2 xy \Leftrightarrow ab(x-y)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

$$2. \text{ Bình phương hai vế, ta phải chứng minh: } \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2} \geq \frac{(c+b)^2}{c^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(c^2-ab) \geq 0. \text{ Điều này hiển nhiên đúng do giả thiết.}$$

$$3. \text{ Ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2c}, \frac{c}{b} = \frac{1}{2} + \frac{c}{2a}$$

$$BDT \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{b}+1}{2\frac{a}{b}-1} + \frac{\frac{c}{b}+1}{2\frac{c}{b}-1} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2c}+1}{1+\frac{a}{c}-1} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{c}{2a}+1}{1+\frac{c}{a}-1} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3c}{2a} + \frac{1}{2} + \frac{3a}{2c} + \frac{1}{2} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \frac{a^2+c^2}{ac} \geq 3 \Leftrightarrow (a-c)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

$$4. BDT \Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0 \text{ (đúng)}$$

$$5. BDT \text{ tương đương với } \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1-c}{c} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq 8$$

$$\text{ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: } \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ca}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8 \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 4:

$$1. \text{BĐT} \Leftrightarrow -x^3y + xy^3 + x^3z - y^3z - xz^3 + yz^3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \leq 0 \text{ (đúng vì } x \geq y \geq z \geq 0)$$

$$2. \text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{1}{xyz}(x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+zx) \geq 0 \text{ (đúng vì } x \geq y \geq z \geq 0)$$

Bài 5: Ta có:
$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a+b}{ab}} + \frac{1}{\frac{c+d}{cd}} \leq \frac{1}{\frac{a+b+c+d}{(a+c)(b+d)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} \Leftrightarrow \frac{ab(c+d) + cd(a+b)}{(a+b)(c+d)} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{abc + abd + acd + bcd}{ac + ad + bc + bd} \leq \frac{ab + ad + bc + cd}{a + b + c + d}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+d)(abc + abd + acd + bcd) \leq (ab + ad + bc + cd)(ac + ad + bc + bd)$$

$$\Leftrightarrow 2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2 \Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0.$$

Do bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức cần chứng minh cũng đúng.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ad = bc$.

Bài 6:

$$1. \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

$$2. \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \Leftrightarrow (a-b)\sqrt{a} - (a-b)\sqrt{b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 0$$

$$3. a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}{9} \geq \frac{ab + bc + ca}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}}$$

$$4. 3(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a+b+c)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

$$5. a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$$

$$6. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c} \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3 = \left(-\frac{1}{c}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -\frac{1}{c^3} \Rightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} - \frac{3}{abc} = -\frac{1}{c^3} \Rightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} = \frac{abc}{c^3} + \frac{abc}{a^3} + \frac{abc}{b^3} = abc\left(\frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2), ta được: } \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} = abc\left(\frac{3}{abc}\right) = 3$$

Bài 7:

$$1. \text{ Do } (x-y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ nên } x^2 + y^2 \geq 2xy, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{Suy ra } 1 = x^2 + y^2 - xy \geq 2xy - xy = xy, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{Mặt khác } 1 = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy \geq -3xy, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = -y.$$

$$\text{Suy ra } -\frac{1}{3} \leq xy \leq 1; xy = 1 \Leftrightarrow x = y = \pm 1; xy = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$2. \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} - \frac{1}{1+ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(1+b^2)(1+ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b-a}{1+ab} \left(\frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{1+ab} \left(\frac{a+ab^2-b-ba^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0$$

Bài 8:

$$1. \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{4} - mn + n^2\right) + \left(\frac{m^2}{4} - mp + p^2\right) + \left(\frac{m^2}{4} - mq + q^2\right) + \left(\frac{m^2}{4} - m + 1\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m}{2} - n\right)^2 + \left(\frac{m}{2} - p\right)^2 + \left(\frac{m}{2} - q\right)^2 + \left(\frac{m}{2} - 1\right)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi: } \begin{cases} \frac{m}{2} - n = 0 \\ \frac{m}{2} - p = 0 \\ \frac{m}{2} - q = 0 \\ \frac{m}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{m}{2} \\ p = \frac{m}{2} \\ q = \frac{m}{2} \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = p = q = 1 \end{cases}$$

2. Tìm cách đưa bất đẳng thức về dạng

$$(ma^2 + nb^2 + pc^2 + qab + rbc + sca)^2$$

$$+ (mb^2 + nc^2 + pa^2 + qbc + rca + sab)^2 + (mc^2 + na^2 + pb^2 + qca + rab + sbc)^2 \geq 0$$

Dấu đó áp dụng hằng đẳng thức

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a)$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + 2bc - ab - ac)^2 + \frac{1}{2}(b^2 - c^2 + 2ca - bc - ba)^2 + \frac{1}{2}(c^2 - a^2 + 2ab - ca - cb)^2$$

Bài 9: Chứng minh $\frac{1}{(x+y)^3} + \frac{1}{(y+z)^3} + \frac{1}{(x+z)^3} \geq \frac{3}{2(x+y)^2}$. Tương tự ta có được:

$$2VT \geq \frac{3}{2} \left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} \right] - \frac{3}{8}.$$

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} \geq \frac{3}{4} (*)$

Thật vậy, ta có $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$

$$\Rightarrow VT(*) \geq \frac{1}{2(x+y)^2} + \frac{1}{2(y+z)^2} + \frac{1}{2(z+x)^2}, \text{ vì } 2(1+x^2) \geq (1+x)^2$$

$$\Rightarrow VT(*) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+xy} \right) + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{z}} + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{z}{z+1} + \frac{1}{(1+z)^2}$$

$$= \frac{z^2 + z + 1}{(z+1)^2} = \frac{4z^2 + 4z + 4}{4(z+1)^2} = \frac{3(z+1)^2 + (z-1)^2}{4(z+1)^2} = \frac{3}{4} + \frac{(z-1)^2}{4(z+1)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Bài 10.

1.

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-b)^2 + (c-a)^2 \geq 0, \text{ bất đẳng thức này luôn đúng.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

Cách 2: Ta có: $(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

Tương tự: $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ca$.

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta có:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \text{ đpcm.}$$

Nhận xét:

• Cả hai cách làm trên về bản chất là một. Tuy nhiên con đường đi khác nhau. Với cách 1 cho ta lời giải tự nhiên hơn. Việc nhân hai vế bất đẳng thức thêm 2 là để thuật tiện trong việc tạo ra hằng đẳng thức. Ta cần nắm các tỉ lệ trong hằng đẳng thức.

• Từ hằng đẳng thức $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2cb + 2ca$ và kết hợp với bất đẳng thức ta có các hệ quả sau

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \quad (1.1)$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \quad (1.2)$$

Ba bất đẳng thức trên ta thường hay sử dụng trong chứng minh các bất đẳng thức.

2. Bất đẳng thức đã cho $\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

Áp dụng bất đẳng thức câu 1 hai lần ta có:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab = abc(a + b + c) \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

Bài 11:

1. Áp dụng bất đẳng thức $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ với

$$a = \sqrt{4x+1}, b = \sqrt{4y+1}, c = \sqrt{4z+1}.$$

$$\text{Ta có: } VT^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3(4x+1 + 4y+1 + 4z+1) = 21 \Rightarrow VT \leq \sqrt{21}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

2.

$$a^8 + b^8 + c^8 \geq a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 \geq a^2b^2b^2c^2 + b^2c^2c^2a^2 + c^2a^2a^2b^2 = a^3b^3c^3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Bài 12:

1. Ta có: $(a - 2b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 4b^2 \geq 4ab.$

Tương tự: $a^2 + 4b^2 \geq 4ab$; $a^2 + 4c^2 \geq 4ac$; $a^2 + 4d^2 \geq 4ad$; $a^2 + 4e^2 \geq 4ae$.
 Cộng 5 bất đẳng thức trên lại với nhau ta có được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c = d = e = \frac{a}{2}$.

Nhận xét:

Bất đẳng thức ở trên cũng đúng với n số thực $1 \leq n \leq 5$, còn $n \geq 6$ thì không còn đúng nữa, tức là bất đẳng thức sau đúng với n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n \Leftrightarrow n \leq 5$.

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_i (a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n).$$

2.

Ta

$$a^3 + b^3 - a^2b - b^2a = a^2(a-b) + b^2(b-a) = (a-b)(a^2 - b^2) = (a-b)^2(a+b) \geq 0$$

$\Rightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Nhận xét:

• Qua chứng minh trên ta thấy chỉ cần điều kiện $a + b \geq 0$ thì bất đẳng thức luôn đúng và ta còn có kết quả tổng quát như sau:

$$a^{m+n} + b^{m+n} \geq a^m b^n + a^n b^m \quad (3) \text{ với } \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 13:

1. Theo bài toán trên ta có: $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a = ab(a+b)$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{a}{abc(a+b+c)}; \quad \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{b}{abc(a+b+c)}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta có đpcm.

2. Ta có: $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + b^3a^2 = a^2b^2(a+b) \Rightarrow a^5 + b^5 + ab \geq ab \frac{a+b+c}{c}$

$$\text{Suy ra } \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{ab \frac{a+b+c}{c}} = \frac{c}{a+b+c}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq \frac{a}{a+b+c}; \quad \frac{ca}{c^5 + a^5 + ac} \leq \frac{b}{a+b+c}$$

Cộng ba bất đẳng thức này ta có đpcm.

3. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{a^8 + b^8}{2} \cdot \frac{a^{10} + b^{10}}{2} \leq \frac{a^{2+8+10} + b^{2+8+10}}{2}$$

Điều này gợi ý ta sử dụng bổ đề sau:

Với mọi số thực a, b thỏa $a + b \geq 0$ ta luôn có:

$$\frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2} \geq \frac{a^m + b^m}{2} \frac{a^n + b^n}{2} \quad (*) \text{ với } \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Thật vậy $(*) \Leftrightarrow a^{m+n} + b^{m+n} \geq a^m b^n + a^n b^m$ đây chính là bất đẳng thức trong nhận xét của câu 2 bài 12.

Đặt $x = a^2, y = b^2 \Rightarrow x, y \geq 0$ và bất đẳng thức trở thành:

$$(x+y)(x^4+y^4)(x^5+y^5) \leq 4(x^{10}+y^{10})$$

Áp dụng $(*)$ ta có: $\frac{x+y}{2} \frac{x^4+y^4}{2} \frac{x^5+y^5}{2} \leq \frac{x^5+y^5}{2} \frac{x^5+y^5}{2} \leq \frac{x^{10}+y^{10}}{2}$ (đpcm).

Bài 14:

Ta có:
$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} - \frac{2}{1+ab} &= \left(\frac{1}{a^2+1} - \frac{1}{1+ab} \right) + \left(\frac{1}{b^2+1} - \frac{1}{1+ab} \right) \\ &= \frac{ab-a^2}{(a^2+1)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(b^2+1)(1+ab)} = \frac{a-b}{1+ab} \left(\frac{b}{1+b^2} - \frac{a}{1+a^2} \right) \\ &= \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b-a+a^2b-b^2a}{(1+b^2)(1+a^2)} = \frac{a-b}{1+ab} \frac{(a-b)(ab-1)}{(1+b^2)(1+a^2)} \\ &= \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+b^2)(1+a^2)}. \end{aligned}$$
 Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Bài 15:

1. Ta có:
$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \right)^2 = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$$

Do $ab \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$

$(1+a^2)(1+b^2) = 1 + (a^2+b^2) + a^2b^2 \geq 1 + 2ab + a^2b^2 = (1+ab)^2$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} \leq \frac{2}{1+ab} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \right)^2 \leq \frac{4}{1+ab}$$

Hay $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

2. Đặt $x = \frac{b}{a}; y = \frac{c}{b}; z = \frac{a}{c} \Rightarrow x, y, z > 0$ và $xyz = 1$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

• Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $z = \max\{x, y, z\}$

$\Rightarrow z \geq 1; xy \leq 1$. Áp dụng bất đẳng thức trong câu 1, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}} = \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{1+z}} \text{ và } \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{z+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{1+z}} + \frac{\sqrt{2}}{1+z}$$

Ta chứng minh: $\frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{1+z}} + \frac{\sqrt{2}}{1+z} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{2z(1+z)} + 1) \leq 3(1+z) \Leftrightarrow 2z - 2\sqrt{2z(z+1)} + (z+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2z} - \sqrt{z+1})^2 \geq 0. \text{ Bất đẳng thức này luôn đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

• Chứng minh: $1 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

Giả sử $z = \min\{x, y, z\} \Rightarrow xy \geq 1$

Do $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \right)^2 > \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} = \frac{2z}{z+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \geq \sqrt{\frac{2z}{z+1}}$$

$$\Rightarrow VT(a) \geq \sqrt{\frac{2z}{z+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \geq \frac{\sqrt{2z+1}}{\sqrt{z+1}} \geq 1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

3. Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z} \Rightarrow abc = 1$. Khi đó: $P = \frac{1}{2+3a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$

Do $bc = \frac{x}{y} \geq 1$ nên áp dụng bất đẳng thức (4.1) ta có: $\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{2}{1+\sqrt{bc}}$

Đặt $t = \sqrt{bc} = \sqrt{\frac{x}{y}} \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$ và $a = \frac{1}{t^2}$. Do đó: $P = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$

Ta chứng minh: $P \geq \frac{34}{33}, \forall t \in [1; 2]$. Thật vậy, với $\forall t \in [1; 2]$ ta có:

$$P \geq \frac{34}{33} \Leftrightarrow \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t} \geq \frac{34}{33} \text{ quy đồng và khai triển ta có được:}$$

$$35t^3 - 64t^2 + 69t - 162 \leq 0 \Leftrightarrow (t-2)(35t^2 + 6t + 81) \leq 0, \text{ bất đẳng thức này đúng.}$$

Vậy $P \geq \frac{34}{33}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = 2y \\ x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Vậy $\min P = \frac{34}{33}$.

4. Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sqrt{2}x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq \sqrt{2}y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq (\sqrt{2}x)(\sqrt{2}y) \leq \frac{1}{2}$

Nên áp dụng Bất đẳng thức trong câu 1, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{2}x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{2}y)^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}. \text{ Đẳng thức có } \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{2}y \Leftrightarrow x = y$$

Do đó, hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x(1-2x)} = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{81 \pm \sqrt{5913}}{324}.$$

Bài 16.

1. Cách 1: Vì ta có: $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$ nên ta chứng minh:

$$3(x+y+1)^2 + 1 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 (*)$$

$$\text{Thật vậy: } (*) \Leftrightarrow 12(x+y)^2 + 24(x+y) + 16 \geq 3(x+y)^2 \\ \Leftrightarrow 9(x+y)^2 + 24(x+y) + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (3x+3y+4)^2 \geq 0, \text{ đpcm.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } x = y = -\frac{2}{3}.$$

Cách 2: Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$3x^2 + 3y^2 + 3xy + 6x + 6y + 4 \geq 0$$

$$f(x) = 3x^2 + 3x(y+2) + 3y^2 + 6y + 4 \geq 0. \text{ Xét tam thức } f(x) \text{ có } a = 3 > 0,$$

$$\Delta = 9(y+2)^2 - 12(3y^2 + 6y + 4) = -3(3y+2)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x, y. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x = y = -\frac{2}{3}.$$

2. Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có:

$$a + b > c \Rightarrow ac + bc > c^2. \text{ Tương tự } bc + ba > b^2; ca + cb > a^2.$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại với nhau ta có đpcm.

Nhận xét:

• Ở trong bài toán trên ta đã xuất phát từ bất đẳng thức đúng, đó là tính chất về độ dài ba cạnh của tam giác. Sau đó vì cần xuất hiện bình phương nên ta nhân hai vế của bất đẳng thức với c . Tương tự, xuất phát từ bất đẳng thức $|a - b| < c$ rồi bình phương hai vế ta cũng có được kết quả.

$$\bullet \text{ Nếu giả thiết các biến } a \in (-1; 1) \text{ thì ta có: } (1-a), (1+a) > 0 \dots$$

$$3. \text{ Vì } a, b, c \in [0; 1] \Rightarrow (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } a^2b^2c^2 \geq 0; a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a$$

Nên từ (*) ta suy ra được:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a, \text{ đpcm.}$$

Bài 17:

$$1. \text{ Vì } a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a, b, c \in [-1; 1] \text{ nên ta có:}$$

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \geq 0 \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{(1+a+b+c)^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca \geq 0 \quad (**).$$

Cộng (*) và (**) ta có đpcm.

$$2. \text{ Đặt } x = a-1, y = b-1, z = c-1 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x, y, z \in [-1; 1] \end{cases}$$

Ta cần chứng minh: $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ (*)

Giả sử $x \geq y \geq z \Rightarrow x \geq 0 \geq z \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq x \\ z^2 \leq -z \end{cases}$

Do đó ta chỉ cần chứng minh: $y^2 + x - z \leq 2$ (**)

- $y \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq y$, suy ra: $y^2 + x - z \leq y + x - z = -2z \leq 2$
- $y < 0 \Rightarrow y^2 \leq -y$, suy ra: $y^2 + x - z \leq -y + x - z = 2x \leq 2$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 18:

1. Giả sử $\frac{3(x-y)^2}{4} = \max \left\{ \frac{3(x-y)^2}{4}, \frac{3(y-z)^2}{4}, \frac{3(z-x)^2}{4} \right\}$

Ta chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{3(x-y)^2}{4}$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 4yz - 4zx \geq 3x^2 - 6xy + 3y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4yz - 4zx \geq 0 \Leftrightarrow (x+y-2z)^2 \geq 0, \text{ bất đẳng thức này đúng.}$$

2. Bất đẳng thức $\Leftrightarrow a^2 - (b-c)^2 + b^2 - (a-c)^2 + c^2 - (a-b)^2 \geq 4\sqrt{3}S$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)(a+c-b) + (b+a-c)(b+c-a) + (c+a-b)(c+b-a) \geq \sqrt{3(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

Đặt $x = a+b-c, y = c+a-b, z = b+c-a \Rightarrow x, y, z > 0$ và $x+y+z = a+b+c$

Ta cần chứng minh: $xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$

Hay $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(xy-yz)^2 + \frac{1}{2}(zx-xy)^2 + \frac{1}{2}(yz-zx)^2 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Bài 19:

1. Bất đẳng thức $\Leftrightarrow abx^2 + aby^2 + (a^2 + b^2)xy \geq (a^2 + b^2)xy + 2abxy$

$$\Leftrightarrow abx^2 + aby^2 - 2abxy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

2. Ta chứng minh: $a^{n+1} + b^{n+1} \geq \frac{(a+b)(a^n + b^n)}{2}$

$$\Leftrightarrow a^{n+1} + b^{n+1} - a^n b - ab^n \geq 0 \Leftrightarrow a(a^n - b^n) + b(b^n - a^n) \geq 0$$

$\Leftrightarrow (a^n - b^n)(a - b) \geq 0$ bất đẳng thức này đúng.

3. Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \frac{y(x+z)}{xz} + \frac{(x+z)}{y} - \frac{(x+z)^2}{xz} \leq 0$

$\Leftrightarrow y^2 + xz - xy - yz \leq 0 \Leftrightarrow z(x-y) + y(y-x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)(z-y) \leq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $\begin{cases} x-y \leq 0 \\ z-y \geq 0 \end{cases}$.

Bài 20:

1. Bất đẳng thức $\Leftrightarrow (c+a)^2(c^2+b^2) \geq (c+b)^2(c^2+a^2)$

$\Leftrightarrow (c^2+2ca+a^2)(c^2+b^2) \geq (c^2+2cb+b^2)(c^2+a^2) \Leftrightarrow a(c^2+b^2) \geq b(c^2+a^2)$

$\Leftrightarrow ac^2+ab^2-bc^2-ba^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab(b-a)+c^2(a-b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(c^2-ab) \geq 0$, bất đẳng thức này đúng vì $\begin{cases} a-b \geq 0 \\ c^2-ab \geq 0 \end{cases}$

2. Từ giả thiết ta suy ra: $b = \frac{2ac}{a+c}$, nên ta cần chứng minh:

$\frac{a(a+c)+2ac}{2a(a+c)-2ac} + \frac{c(a+c)+2ac}{2c(a+c)-2ac} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a^2+3ac}{2a^2} + \frac{c^2+3ac}{2c^2} \geq 4$

$\Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2 \Leftrightarrow (a-c)^2 \geq 0$ (đúng).

3. Ta có: $4c^3 + (a+b)^3 - 4(\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3})$

$= (\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} - 2\sqrt{c^3})^2 + 3ab(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

Bài 21:

1. Bất đẳng thức $\Leftrightarrow 3(1-a)(1-b)(a+b) + ab(2-a-b) \geq 0$ đúng.

2. Ta có: $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 + \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 \geq 0$;

$\frac{x^2+y^2+2z^2}{xy+yz} \geq \sqrt{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}y\right)^2 + \frac{1}{3}(y - \sqrt{6}z)^2 \geq 0$

3. Giả sử $z = \min\{x, y, z\}$ ta có:

$xy + yz + zx \geq xy$ và $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}$

Nên ta chứng minh: $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{4}{xy} \Leftrightarrow \frac{(x^2 + y^2 - 3xy)^2}{x^2 y^2 (x-y)^2} \geq 0$ đúng.

Bài 22:

1. Giả sử: $a > b > c$. Đặt $a = c + x, b = c + y \Rightarrow x > y > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \left| \frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} \right| &= \frac{2c+x+y}{x-y} + \frac{2c+y}{y} - \frac{2c+x}{x} \\ &= 2c \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) + \frac{x+y}{x-y} = 2c \left(\frac{1}{x-y} + \frac{x-y}{xy} \right) + \frac{x+y}{x-y} > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Bất đẳng thức } &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z) \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x) \\ &\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + xy^2 + yz^2 + yz^2 \geq 2(x^2y + y^2z + z^2x) \\ &\Leftrightarrow x(x-y)^2 + y(y-z)^2 + z(z-x)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$

$$3. \text{ Đặt } \begin{cases} x = a+b \\ y = b+c \\ z = c+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+z-y}{2} \\ b = \frac{x+y-z}{2} \\ c = \frac{z+y-x}{2} \end{cases}$$

Ta cần chứng minh: $28(x^4 + y^4 + z^4) \geq (x+y-z)^4 + (z+x-y)^4 + (y+z-x)^4$

$$\text{Ta có: } (a+b)^4 + (a-b)^4 = 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2)$$

$$\text{Nên: } (x+y+z)^4 + (x+y-z)^4 = 2 \left[(x+y)^4 + z^4 + 6(x+y)^2 z^2 \right];$$

$$(x+z-y)^4 + (y+z-x)^4 = 2 \left[(x-y)^4 + z^4 + 6(x-y)^2 z^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } &(x+y+z)^4 + (x+y-z)^4 + (x+z-y)^4 + (y+z-x)^4 \\ &= 4(x^4 + y^4 + z^4 + 6x^2y^2 + 6y^2z^2 + 6z^2x^2) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \leq x^4 + y^4 + z^4$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } 28(x^4 + y^4 + z^4) &\geq (x+y+z)^4 + (x+y-z)^4 + (z+x-y)^4 + (y+z-x)^4 \\ &\geq (x+y-z)^4 + (z+x-y)^4 + (y+z-x)^4. \end{aligned}$$

Bài 23:

1. Ta chứng minh: $(x^2 + y^2)(x - y) < x^3 + y^3$

$$\Leftrightarrow x^2 - xy + 2y^2 > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} > 0 \text{ (đúng)}.$$

2. Ta có: $a^3b + b^3c + c^3a - a^2bc - b^2ca - c^2ab$

$$\begin{aligned} &= (a^3b - 2a^2bc + c^2ab) + (b^3c - 2b^2ca + a^2bc) + (c^3a - 2c^2ab + b^2ca) \\ &= ab(a - c)^2 + bc(b - a)^2 + ca(c - a)^2 \geq 0 \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

3. Trước hết, ta có bất đẳng thức sau: Với $x, y \geq 0$. Ta có: $\frac{x^3 + y^3}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^3$ (*).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Đặt $x = \sqrt{\frac{b}{a}}; y = \sqrt{\frac{c}{b}}; z = \sqrt{\frac{c}{a}} \Rightarrow x, y, z > 0$ và $xyz = 1$

Ta cần chứng minh: $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+y^2}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+z^2}\right)^3 \geq \frac{3}{8}$ (**).

Giả sử $z = \min\{x, y, z\} \Rightarrow xy \geq 1 \geq z$.

Áp dụng Bất đẳng thức (*) ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+y^2}\right)^3 &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}\right)^3 \geq \frac{2}{(1+xy)^3} = \frac{2z^3}{(1+z)^3} \\ \Rightarrow VT(c) &\geq \frac{2z^3}{(1+z)^3} + \frac{1}{(1+z^2)^3}. \end{aligned}$$

Tiếp theo ta chứng minh: $\frac{2z^3}{(1+z)^3} + \frac{1}{(1+z^2)^3} \geq \frac{3}{8} \Leftrightarrow (z-1)^2 A \geq 0$ (***)

Trong đó: $A = 13z^7 + 17z^6 + 51z^5 + 55z^4 + 71z^3 + 51z^2 + 25z + 5 > 0$.

Nên (***) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Loại 2: Xuất phát từ một bất đẳng thức đúng ta biến đổi đến bất đẳng thức cần chứng minh

Bài 1: Vì $a, b, c \in [1, 3]$ nên ta có: $(a-1)(b-1)(c-1) + (3-a)(3-b)(3-c) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) - 8(a + b + c) + 26 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 - 8(a + b + c) + 26 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Mà $a + b + c = 6$ suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \leq 14$.

Bài 2:

1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$3(1-a)(1-b)(a+b) + ab(2-a-b) \geq 0$$

Vì $a, b \in [0, 1]$ nên $1 - a \geq 0, 1 - b \geq 0, 2 - a - b \geq 0$, do đó ta có điều phải chứng minh.

2. Ta có $a, b, c \in [-1, 2]$ nên $(a+1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2 \leq a$

Tương tự $b^2 - 2 \leq b; c^2 - 2 \leq c$ nên $a + b + c \geq a^2 + b^2 + c^2 - 6$ hay $a + b + c \geq 0$

Dạng 2. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Loại 1: Vận dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy

Bài 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $1 + x^3 + y^3 \geq 3xy \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$

Chứng minh tương tự, ta được: $\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}, \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = 3 \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 3:
$$\frac{1}{1+a} = 1 - \frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \geq 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự rồi nhân vế với vế ta được $abcd \leq \frac{1}{81}$.

Bài 4: $1 - \frac{a}{1+b} = \frac{1+b-a}{1+b} = \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+c)(1+a)}}$

Chứng minh tương tự, ta thu được:

$$(1+b-a)(1+c-b)(1+a-c) \geq 8abc \Leftrightarrow \left(\frac{1+b}{a} - 1\right)\left(\frac{1+c}{b} - 1\right)\left(\frac{1+a}{c} - 1\right) \geq 8$$

Bài 5: Ta có $1 = xyz(x+y+z) = yz(x^2 + xy + xz)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$P = (x+y)(x+z) = yz + (x^2 + xy + xz) \geq 2\sqrt{yz \cdot (x^2 + xy + xz)} = 2$$

Suy ra $\min P = 2$.

Bài 6: Ta có $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{ab+cb+ca+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\right)$

Tương tự $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c}\right), \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c}\right)$.

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên suy ra điều phải chứng minh.

Bài 7: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{ab}{\sqrt{c+ab}} = \frac{ab}{\sqrt{c(a+b+c)+ab}} = \frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a} + \frac{ab}{c+b}\right)$$

Tương tự ta có $\frac{bc}{\sqrt{a+bc}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c}\right), \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b+a} + \frac{ca}{b+c}\right)$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} \leq \frac{1}{2}$.

Bài 8: Bất đẳng thức $\Leftrightarrow a+b+c + \frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca} \geq 6$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a+b+c + \frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca} \geq 2\sqrt{\frac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}}$

Do đó ta cần chứng minh $2\sqrt{\frac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}} \geq 6 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ (đúng).

Bài 9: Ta có $(1+abc)\left(\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)}\right) + 3$
 $= \left(\frac{1+abc}{a(1+b)} + 1\right) + \left(\frac{1+abc}{b(1+c)} + 1\right) + \left(\frac{1+abc}{c(1+a)} + 1\right)$
 $= \frac{1+a+ab+abc}{a(1+b)} + \frac{1+b+bc+abc}{b(1+c)} + \frac{1+c+ca+abc}{c(1+a)}$

$$= \frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{a(1+b)} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{c(1+b)}{b(1+c)} + \frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{c(1+a)}$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{1+c}{c(1+a)} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1+a}{a(1+b)} \cdot \frac{1+b}{b(1+c)} \cdot \frac{1+c}{c(1+a)}} = 3$$

$$\frac{b(1+c)}{a(1+b)} + \frac{c(1+b)}{b(1+c)} + \frac{a(1+b)}{c(1+a)} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b(1+c)}{a(1+b)} \cdot \frac{c(1+b)}{b(1+c)} \cdot \frac{a(1+b)}{c(1+a)}} = 3$$

$$\text{Suy ra } (1+abc) \left(\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \right) + 3 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{2}, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 10: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{\frac{a+b}{2ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{2bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{2ca}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{2ab}} \cdot \sqrt{\frac{b+c}{2bc}} \cdot \sqrt{\frac{c+a}{2ca}}}$$

$$\text{Do đó ta chỉ cần chứng minh } \frac{a+b}{2ab} \cdot \frac{b+c}{2bc} \cdot \frac{c+a}{2ca} \geq 1 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \frac{a+b}{2ab} \cdot \frac{b+c}{2bc} \cdot \frac{c+a}{2ca} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{2ab} \cdot \frac{2\sqrt{bc}}{2bc} \cdot \frac{2\sqrt{ca}}{2ca} = \frac{2}{abc} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } 3 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra (*) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

$$\text{Bài 11: Ta có bất đẳng thức } \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 2 \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có } \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{a}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b} \geq \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}, \quad \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{c} \geq \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3 \geq 3 \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\text{Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có } \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 2 \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 12: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{3a(2b+2c-a)}} \geq \frac{a\sqrt{6}}{a+b+c}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{2b}{2c+2a-b}} \geq \frac{b\sqrt{6}}{a+b+c}; \sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}} \geq \frac{c\sqrt{6}}{a+b+c}$

Cộng ba bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$P \geq \frac{\sqrt{6}(a+b+c)}{a+b+c} = \sqrt{6}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c.$$

Vậy $\min P = \sqrt{6}.$

Bài 13:

$$1. (24a^2 + 6b^2) + (16a^2 + 9b^2) + (18b^2 + 8c^2) \geq 24(ab + bc + ca) = 24$$

$$2. (a+3) + 4 \geq 4\sqrt{a+3} \Leftrightarrow \sqrt{a+3} \leq \frac{a+7}{4}. \text{ Tương tự: } \sqrt{b+3} \leq \frac{b+7}{4}, \sqrt{c+3} \leq \frac{c+7}{4}$$

$$\sqrt{a+3} + \sqrt{b+3} + \sqrt{c+3} \leq \frac{a+b+c+21}{4} = \frac{2a+2b+2c+42}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{2a+2b+2c+42}{8} \leq \frac{a^2+b^2+c^2+45}{8}.$$

Ta chỉ cần chứng minh: $\frac{a^2+b^2+c^2+45}{8} \leq 2(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 3$

Luôn đúng vì $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \geq 3$. Dấu "=" xảy ra $a=b=c=1$

$$3. \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Từ giả thiết, suy ra: $4\sqrt{abc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$

Mà $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow (a+b+c)^3 \geq 27abc = \frac{27}{4}\sqrt{abc}4\sqrt{abc} \geq \frac{27}{4}\sqrt{abc} \frac{(a+b+c)^2}{3}$

4. a. Để ý rằng theo bất đẳng thức Cauchy thì:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có: $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}, \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại vế theo vế, suy ra

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2} = 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ được rằng: $ab+bc+ca \leq 3$

Điều này hiển nhiên đúng vì $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

b. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geq a+1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a+1 - \frac{b+ab}{2}$$

$$\text{Tương tự } \frac{b+1}{c^2+1} \geq b+1 - \frac{c+bc}{2}, \frac{c+1}{a^2+1} \geq c+1 - \frac{a+ca}{2}$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại vế theo vế, ta được

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} &\geq \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \\ &= \frac{9}{2} - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{9}{2} - \frac{(a+b+c)^2}{6} = 3 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

5. Cách 1:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $4ab = a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 2\sqrt{ab} \geq 1 \Rightarrow 4ab \geq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{a}{4b^2+1} + \frac{b}{4a^2+1} &\geq \frac{a}{4b^2+4ab} + \frac{b}{4a^2+4ab} = \frac{a}{4b(a+b)} + \frac{b}{4a(a+b)} \\ &= \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{16b^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \geq \frac{a^2+b^2}{2(a^2+b^2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=4ab \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Cách 2: $(a+b)^2 \geq 4ab = a+b \Leftrightarrow a+b \leq (a+b)^2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai dãy:

$$\sqrt{a(4b^2+1)}, \sqrt{b(4a^2+1)} \text{ và } \sqrt{\frac{a}{4b^2+1}}, \sqrt{\frac{b}{4a^2+1}}, \text{ ta được}$$

$$(4ab^2+a+4a^2b+b) \left(\frac{a}{4b^2+1} + \frac{b}{4a^2+1} \right) \geq (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4b^2+1} + \frac{b}{4a^2+1} \geq \frac{(a+b)}{4ab(a+b)+(a+b)} \geq \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+(a+b)^2} = \frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=4ab \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Cách 3: $(a+b)^2 \geq 4ab = a+b \Rightarrow (a+b) \geq 1$

Đặt $Q = \frac{a^2}{4ab^2+a} + \frac{b^2}{4a^2b+b}$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai dãy

$$\sqrt{4ab^2+a}, \sqrt{4ba^2+b} \text{ và } \sqrt{\frac{a^2}{4ab^2+a}}, \sqrt{\frac{b^2}{4ba^2+b}}, \text{ ta được}$$

$$(4ab^2+a+4ab^2+b).Q \geq (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow Q \geq \frac{(a+b)^2}{4ab(a+b)+(a+b).1} \geq \frac{16a^2b^2}{16a^2b^2+(a+b)(a+b)} \geq \frac{16a^2b^2}{16a^2b^2+16a^2b^2} = \frac{1}{2}$$

6. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^3}{a+bc} + \frac{a+bc}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}a, \quad \frac{b^3}{b+ca} + \frac{b+ca}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}b, \quad \frac{c^3}{c+ab} + \frac{c+ab}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}c$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^3}{a+bc} + \frac{b^3}{b+ca} + \frac{c^3}{c+ab} + \frac{ab+bc+ca}{4} \geq \frac{5}{4}(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{a+bc} + \frac{b^3}{b+ca} + \frac{c^3}{c+ab} \geq \frac{15}{4} - \frac{ab+bc+ca}{4}$$

$$\text{Mặt khác: } 9 = (a+b+c)^2 \geq ab+bc+ca, \text{ do đó } \frac{a^3}{a+bc} + \frac{b^3}{b+ca} + \frac{c^3}{c+ab} \geq \frac{15}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

7. $(y+z)^2 \leq 2(y^2+z^2), \forall y, z > 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2+(y+z)^2} + 1 \geq \frac{x^2}{x^2+2(y^2+z^2)} + 1 = \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x^2+2y^2+2z^2}.$$

$$VT + 3 \geq 2(x^2+y^2+z^2) \left(\frac{1}{x^2+2y^2+2z^2} + \frac{1}{y^2+2x^2+2z^2} + \frac{1}{z^2+2x^2+2y^2} \right)$$

$$\Rightarrow VT + 3 \geq \frac{2}{5}(5x^2+5y^2+5z^2) \left(\frac{1}{x^2+2y^2+2z^2} + \frac{1}{y^2+2x^2+2z^2} + \frac{1}{z^2+2x^2+2y^2} \right) \geq \frac{18}{5}$$

$$\Rightarrow VT \geq \frac{3}{5} \Rightarrow VT = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x=y=z>0.$$

$$\text{Vậy } \frac{x^2}{x^2+(y+z)^2} + \frac{y^2}{y^2+(x+z)^2} + \frac{z^2}{z^2+(y+x)^2} \geq \frac{3}{5} \text{ (đpcm).}$$

Bài 14:

$$1. (1+a)(1+b)(1+c) = 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc.$$

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \quad ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + abc = (1 + \sqrt[3]{abc})^3$$

$$2. a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{ab}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}, \quad \frac{bc}{b+c} \leq \frac{bc}{2\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{bc}}{2}, \quad \frac{ac}{a+c} \leq \frac{ac}{2\sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{ac}}{2}$$

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \quad \text{và} \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{2} \leq \frac{a+b+c}{2}$$

$$3. a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a+b)ab$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + abc \geq (a+b)ab + abc = ab(a+b+c)$$

$$b^3 + c^3 + abc \geq (b+c)bc + abc = bc(a+b+c)$$

$$c^3 + a^3 + abc \geq (c+a)ca + abc = ca(a+b+c)$$

$$VT \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} + \frac{1}{bc(a+b+c)} + \frac{1}{ca(a+b+c)} = \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{a+b+c}{abc} \right)$$

$$4. \frac{a}{b^2+c^2} = \frac{a}{1-a^2} = \frac{a^2}{a(1-a^2)}, \quad \text{mà} \quad 2a^2(1-a^2)^2 \leq \left[\frac{2a^2 + (1-a^2) + (1+a^2)}{3} \right]^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^3$$

$$\Rightarrow a^2(1-a^2)^2 \leq \frac{4}{27} \Rightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad \text{suy ra:} \quad \frac{a}{b^2+c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\text{Tương tự:} \quad \frac{b}{c^2+a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2, \quad \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$$

$$\text{Do đó:} \quad \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi} \quad \begin{cases} 2a^2 = 1 - a^2 \\ 2b^2 = 1 - b^2 \\ 2c^2 = 1 - c^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài 15:

$$1. \text{Do } (x-1)^2 \geq 0 \text{ nên } x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{2y}{1+y^2} \leq 1, \frac{2z}{1+z^2} \leq 1$

$$\text{Do đó: } \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{2z}{1+z^2} \leq 3 \text{ hay } \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)}} \\ \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}} &\leq \sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)} \leq \frac{(1+x) + (1+y) + (1+z)}{3} \leq 2 \\ \Rightarrow \frac{3}{2} &\leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} &\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \\ &= \frac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)} + \frac{b^4}{b(b^2+bc+c^2)} + \frac{c^4}{c(c^2+ca+a^2)} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{(a+b+c)^2} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a+b+c}{3}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a=b=c \end{aligned}$$

Bài 16. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1+8y^3} &= 2\sqrt{(1+2y)(1-2y+4y^2)} \leq 1+2y+1-2y+4y^2 = 2+4y^2 \\ \Rightarrow 2\sqrt{1+8y^3} - 2 &\leq 4y^2 \Rightarrow \frac{4x}{y(2\sqrt{1+8y^3}+4x-2)} \geq \frac{4x}{y(4y^2+4x)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x+y^2} \end{aligned}$$

Tương tự cho hai hạng tử còn lại, ta được:

$$A \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \left(\frac{x}{z+x^2} + \frac{y}{x+y^2} + \frac{z}{y+z^2} \right)$$

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \left(\frac{x}{z+x^2} + \frac{y}{x+y^2} + \frac{z}{y+z^2} \right) \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \left(\frac{x}{2\sqrt{zx^2}} + \frac{y}{2\sqrt{xy^2}} + \frac{z}{2\sqrt{yz^2}} \right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Hơn nữa: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3 = \left(\frac{1}{x} + 1 \right) + \left(\frac{1}{y} + 1 \right) + \left(\frac{1}{z} + 1 \right) \geq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } A &\geq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) - 3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) - 3 \\ &\geq \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} - 3 \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{\frac{x+y+z}{3}}} - 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy, } \min A = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Bài 17. Giả sử $a > b > c$ khi đó $P = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ với } x, y > 0.$$

Từ đó ta có

$$P = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{8}{a-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$P \geq \frac{10}{a-c} + \frac{10}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ca)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2 + 4b(a+c)}}$$

$$\text{hay } P \geq \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}} \Rightarrow P \geq \frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{(3-3b)(1+3b)}}$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{(3-3b)(1+3b)} \leq \frac{3-3b+1+3b}{2} = 2 \text{ nên } P \geq 10\sqrt{6}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} 3-3b=1+3b \\ a-c=b-c \\ a+b+c=1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=\frac{2+\sqrt{6}}{6} \\ b=\frac{1}{3} \\ c=\frac{2-\sqrt{6}}{6} \end{cases}.$$

Bài 18. Ta có: $19 = 27 - 8 = 3(a+b+c)^2 - 8 = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca) - 8$.

Khi đó, bất đẳng thức tương đương với: $a^2b + b^2c + c^2a + 2abc + 4 \geq 3(ab + bc + ca)$

$$3(ab + bc + ca) = (a + b + c)(ab + bc + ca) = (a^2b + b^2c + c^2a) + (ab^2 + bc^2 + ca^2) + 3abc$$

Nên bất đẳng thức trở thành: $4 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc$.

Không mất tính tổng quát giả sử b nằm giữa a và c , suy ra $a(b-a)(b-c) \leq 0$,
hay $ab^2 + ca^2 \leq abc + a^2b$.

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq a^2b + c^2b + 2abc = b(a+c)^2 = 4b \left(\frac{a+c}{2} \right)^2$$

$$\leq 4 \left(\frac{b + \frac{a+c}{2} + \frac{a+c}{2}}{3} \right)^3 = 4. \text{ Ta có điều phải chứng minh.}$$

Bài 19. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$P = a + \frac{b}{2} + 2 \left(a + \frac{4}{a} \right) + \frac{3}{2} \left(b + \frac{4}{b} \right) + \left(c + \frac{4}{c} \right) \geq a + \frac{b}{2} + 2 \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot 4 + 4 = \frac{2a+b}{2} + 18, \quad (1)$$

$$\text{và } 3abc = (a^2 + c^2) + 2(b^2 + c^2) \geq 2ac + 4bc. \quad (2)$$

$$\text{Từ (2), ta có: } 3ab \geq 2(a + 2b) \text{ hay là } \frac{3}{2} \geq \frac{2}{a} + \frac{1}{b}.$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{2a+b}. \text{ Do đó, kết hợp với trên, ta thu được: } 2a+b \geq 6. \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (3), ta suy ra: } P \geq \frac{2a+b}{2} + 18 \geq \frac{6}{2} + 18 = 21.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Loại 2: Kỹ thuật tách, thêm bớt, ghép cặp

Bài 1:

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a^3 + b^3 + b^3 \geq 3ab^2, \quad b^3 + c^3 + c^3 \geq 3bc^2, \quad c^3 + a^3 + a^3 \geq 3ca^2$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(ab^2 + bc^2 + ca^2) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $\frac{a^3}{b} + ab \geq 2a^2$, $\frac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2$, $\frac{c^3}{a} + ca \geq 2c^2$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + ab + bc + ca \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1)$$

Lại có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + ab + bc + ca \geq 2(ab + bc + ca)$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

3. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy $\frac{a^6}{b^3} + \frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} \geq \frac{3a^4}{c}$

Chứng minh tương tự, ta thu được: $\frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3} \geq \frac{a^4}{c} + \frac{b^4}{a} + \frac{c^4}{b}$

Bài 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $a^3 + b^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geq ab\sqrt{3}$;

$$b^3 + c^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geq bc\sqrt{3}, \quad c^3 + a^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geq ca\sqrt{3}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{1}{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3}(ab + bc + ca) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 3: Ta có: $4(a + b + c) = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{3}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{8} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{ab}$,

$$\frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{8} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{bc}, \quad \frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{8} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{ca}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) + \frac{3}{8} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq \frac{3}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$

Bài 4:

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{a^3}{b(b+c)} + \frac{b}{2} + \frac{b+c}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b(b+c)} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b+c}{4}} = \frac{3}{2}a$$

Tương tự, ta có: $\frac{b^3}{c(c+a)} + \frac{c}{2} + \frac{c+a}{4} \geq \frac{3}{2}b$, $\frac{c^3}{a(a+b)} + \frac{a}{2} + \frac{a+b}{4} \geq \frac{3}{2}c$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b(b+c)} + \frac{b^3}{c(c+a)} + \frac{c^3}{a(a+b)} + a + b + c &\geq \frac{3}{2}(a+b+c) \\ \Leftrightarrow \frac{a^3}{b(b+c)} + \frac{b^3}{c(c+a)} + \frac{c^3}{a(a+b)} &\geq \frac{1}{2}(a+b+c) \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{a^3}{(b+2c)^2} + \frac{b+2c}{27} + \frac{b+2c}{27} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(b+c)^2} \cdot \frac{b+2c}{27} \cdot \frac{b+2c}{27}} = \frac{a}{3}$$

Tương tự, ta có: $\frac{b^3}{(c+2a)^2} + \frac{c+2a}{27} + \frac{c+2a}{27} \geq \frac{b}{3}$, $\frac{c^3}{(a+2b)^2} + \frac{a+2b}{27} + \frac{a+2b}{27} \geq \frac{c}{3}$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{(b+2c)^2} + \frac{b^3}{(c+2a)^2} + \frac{c^3}{(a+2b)^2} + \frac{a+b+c}{9} &\geq \frac{a+b+c}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{a^3}{(b+2c)^2} + \frac{b^3}{(c+2a)^2} + \frac{c^3}{(a+2b)^2} &\geq \frac{2(a+b+c)}{9} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 5: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số thực không âm ta có:

$$x^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot 1 \cdot 1} = 3x \Leftrightarrow x^3 + 2 \geq 3x. \text{ Tương tự: } y^3 + 2 \geq 3y; z^3 + 2 \geq 3y$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta được: $x^3 + y^3 + z^3 + 6 \geq 3(x+y+z)$

Mặt khác: $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 6$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 6 \geq (x+y+z) + 2(x+y+z) \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq x+y+z, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 6: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a^4 + \frac{1}{81} \geq \frac{2}{9} a^2; b^4 + \frac{1}{81} \geq \frac{2}{9} b^2; c^4 + \frac{1}{81} \geq \frac{2}{9} c^2$$

Cộng ba bất đẳng thức lại với nhau

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{27} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

$$\text{Mặt khác: } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 9(a^4 + b^4 + c^4) \geq a^2 + b^2 + c^2 \text{ đpcm.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Bài 7: Đặt $a=1+\frac{1}{x}$; $b=1+\frac{1}{y}$; $c=1+\frac{1}{z} \Rightarrow a+b+c \geq 12$.

$$\text{Ta có: } a^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 \geq 4\sqrt[4]{4^{12}a^4} = 4^4 a \Leftrightarrow a^4 + 3 \cdot 4^4 \geq 4^4 a.$$

$$\text{Tương tự: } b^4 + 3 \cdot 4^4 \geq 4^4 b; c^4 + 3 \cdot 4^4 \geq 4^4 c$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta được

$$a^4 + b^4 + c^4 + 9 \cdot 4^4 \geq 4^4(a+b+c) \geq 12 \cdot 4^4 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq 3 \cdot 4^4 = 768, \text{ đpcm}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c=4 \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Bài 8:

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2ab} + \left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \right) \geq \frac{1}{2ab} + 2\sqrt{\frac{1}{2ab(a^2 + b^2)}} \geq \frac{2}{(a+b)^2} + 2\sqrt{\frac{4}{(a+b)^2}} = 6$$

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab} + 4ab = \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \right) + \frac{5}{4ab} + \left(\frac{1}{4ab} + 4ab \right).$$

$$A \geq \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{5}{(a+b)^2} + 4\sqrt{\frac{1}{4ab}} \cdot 4ab = 4 + 5 + 4 = 11.$$

$$3. \text{ Ta có } \left(a^2 + \frac{1}{b^2} \right) \left(b^2 + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{a^2 b^2 + 1}{b^2} \cdot \frac{a^2 b^2 + 1}{a^2} = \left(ab + \frac{1}{ab} \right)^2$$

$$\text{Ta có: } ab + \frac{1}{ab} = \left(ab + \frac{1}{16ab} \right) + \frac{15}{16ab} \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: } ab + \frac{1}{16ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{16ab}} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{mà } \frac{1}{2} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ nên } ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq 4 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow ab + \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{2} + \frac{15}{16} \cdot 4 = \frac{17}{4} \Rightarrow \left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \left(b^2 + \frac{1}{a^2}\right) \geq \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$$

$$\text{Bài 9: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có } a^2 + \frac{1}{4} \geq a \Rightarrow a^2 + b + \frac{3}{4} \geq a + b + \frac{1}{2}$$

$$b^2 + \frac{1}{4} \geq b \Rightarrow b^2 + a + \frac{3}{4} \geq a + b + \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } \left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right) \left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\left(2a + \frac{1}{2}\right) \left(2b + \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{2a + 2b + 1}{2}\right)^2 = \left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 10: Trước tiên, ta dễ dàng có $xyz \leq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} &= \frac{1}{2xyz} + \left[\frac{1}{2xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \right] \\ &\geq \frac{1}{2xyz} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}} = \frac{1}{2xyz} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(xy+xz)(yz+yx)(zx+zy)}} \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{xy+xz+yz+yx+zx+zy}{3}\right)^3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Bài 11: Ta có } \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{(y+2)}{27} + \frac{(y^2-2y+4)}{27} \geq \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{x^3}{y^3+8} \geq \frac{9x+y-y^2-6}{27}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{y^3}{z^3+8} \geq \frac{9y+z-z^2-6}{27}, \frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{9z+x-x^2-6}{27} \text{ nên}$$

$$\text{VT} \geq \frac{10(x+y+z) - (x^2+y^2+z^2) - 18}{27} = \frac{12 - (x^2+y^2+z^2)}{27}$$

mà ta lại có

$$\frac{12 - (x^2 + y^2 + z^2)}{27} = \frac{3 + (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{27} = \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy + yz + zx)$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài 12:

1. Ta có: $1 + a \geq 2\sqrt{a}$ và $\frac{\sqrt{a}}{2 + b\sqrt{a}} = \frac{a}{2\sqrt{a} + ab}$;

$$\frac{a}{2\sqrt{a} + ab} \geq \frac{a}{1 + a + ab} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{2 + b\sqrt{a}} \geq \frac{a}{1 + a + ab}$$

Tương tự: $\frac{\sqrt{b}}{2 + c\sqrt{b}} \geq \frac{b}{1 + b + bc}$, $\frac{\sqrt{c}}{2 + a\sqrt{c}} \geq \frac{c}{1 + c + ac}$

Suy ra $\frac{\sqrt{a}}{2 + b\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{2 + c\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{c}}{2 + a\sqrt{c}} \geq \frac{a}{1 + a + ab} + \frac{b}{1 + b + bc} + \frac{c}{1 + c + ac}$

Ta cần chứng minh: $\frac{a}{1 + a + ab} + \frac{b}{1 + b + bc} + \frac{c}{1 + c + ac} = 1$

Thật vậy

$$\begin{aligned} \frac{a}{1 + a + ab} + \frac{b}{1 + b + bc} + \frac{c}{1 + c + ac} &= \frac{abc}{bc + abc + abbc} + \frac{b}{1 + b + bc} + \frac{bc}{b + bc + abc} \\ &= \frac{1}{bc + 1 + b} + \frac{b}{1 + b + bc} + \frac{bc}{b + bc + 1} = 1 \end{aligned}$$

2. $\frac{9a^4}{a + 2b} + a^2(a + 2b) \geq 6a^3 \Leftrightarrow \frac{9a^4}{a + 2b} \geq 5a^3 - 2a^2b$

$9P \geq 5(a^3 + b^3 + c^3) - 2(a^2b + b^2c + c^2a)$, để ý: $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$ và

$a^3 + a^3 + b^3 \geq 3a^2b, \dots$

Tương tự $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2 = 1 \Rightarrow 9P \geq 3 \Leftrightarrow P \geq \frac{1}{3}$

3. $P = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) = 3 - Q$

Theo bất đẳng thức Cauchy, nếu $a, b, c > 0$ thì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \Rightarrow (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$$

Suy ra $Q = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{4} \Rightarrow P \leq \frac{3}{4}$

Vậy $\max P = \frac{3}{4}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

4. Theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương a^2 và b^2 , ta có:

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2ab = 2 \quad (\text{vì } ab = 1)$$

$$\Rightarrow A = (a + b + 1)(a^2 + b^2) + \frac{4}{a + b} \geq 2(a + b + 1) + \frac{4}{a + b} = 2 + (a + b + \frac{4}{a + b}) + (a + b)$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $a + b$ và $\frac{4}{a + b}$, ta có:

$$(a + b) + \frac{4}{a + b} \geq 2\sqrt{(a + b) \cdot \frac{4}{a + b}} = 4.$$

Mặt khác: $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2$

$$\text{Suy ra: } A \geq 2 + (a + b + \frac{4}{a + b}) + (a + b) \geq 2 + 4 + 2 = 8$$

Với $a = b = 1$ thì $A = 8$

Vậy GTNN của A là 8 khi $a = b = 1$.

5. Vì $\frac{1}{2m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$ nên trong hai số m, n phải có ít nhất một số dương. Nếu có một

trong hai số là âm thì $B < 0$. Vì ta tìm GTLN của $B = mn$ nên ta chỉ xét trường hợp cả hai số m, n cùng dương.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(2m + n) = 2mn \Leftrightarrow (2m - 3)(n - 3) = 9$$

Vì $m, n \in \mathbb{N}^*$ nên $n - 3 \geq -2$ và $2m - 3 \geq -1$.

Ta có: $9 = 1.9 = 3.3 = 9.1$. Do đó xảy ra:

$$+ \begin{cases} 2m - 3 = 1 \\ n - 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 12 \end{cases} \text{ và } B = mn = 2.12 = 24$$

$$+ \begin{cases} 2m - 3 = 1 \\ n - 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 6 \end{cases} \text{ và } B = mn = 2.6 = 12$$

$$+ \begin{cases} 2m - 3 = 9 \\ n - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 4 \end{cases} \text{ và } B = mn = 6.4 = 24$$

$$\text{Vậy GTLN của } B = 24 \text{ khi } \begin{cases} m = 2 \\ n = 12 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m = 6 \\ n = 4 \end{cases}$$

Bài 13:

1. Cách 1: Với giả thiết x, y, z đều lớn hơn 2, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa bài toán về dạng đơn giản và quen thuộc hơn. Hãy xét lời giải sau:

Đặt $x = a + 2, y = b + 2, z = c + 2$ với $a > 0, b > 0, c > 0$.

Bài toán quy về chứng minh $abc \leq 1$ với $a, b, c > 0$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} = 1$$

Đến đây ta đặt tiếp: $m = \frac{a}{a+2}, n = \frac{b}{b+2}, p = \frac{c}{c+2} \Rightarrow m+n+p=1$

Ta có: $\frac{1}{m} = \frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{m} - 1 = \frac{n+p}{m} \Rightarrow a = \frac{2m}{n+p}$

Tương tự: $b = \frac{2n}{p+m}, c = \frac{2p}{m+n}$.

Do đó bất đẳng thức trở thành: $\frac{2m}{n+p} \cdot \frac{2n}{p+m} \cdot \frac{2p}{m+n} \leq 1$

$$\Leftrightarrow (m+n)(n+p)(p+m) \geq 8mnp$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(m+n)(n+p)(p+m) \geq 2\sqrt{mn} \cdot 2\sqrt{np} \cdot 2\sqrt{pm} = 8mnp$$

Bài toán được giải quyết xong.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m=n=p \Leftrightarrow a=b=c=1 \Leftrightarrow x=y=z=3$.

Cách 2: Sử dụng kĩ thuật ghép đôi xứng:

$$\frac{1}{c+2} = 1 - \frac{1}{a+2} - \frac{1}{b+2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b+2}\right) = \frac{a}{2(a+2)} + \frac{b}{2(b+2)} \geq \sqrt{\frac{ab}{(b+2)(c+2)}}$$

Tương tự: $\frac{1}{b+2} \geq \sqrt{\frac{ca}{(c+2)(a+2)}}, \frac{1}{a+2} \geq \sqrt{\frac{bc}{(b+2)(c+2)}}$

Nhân ba bất đẳng thức trên lại vế theo vế, ta được:

$$\frac{1}{(a+2)(b+2)(c+2)} \geq \frac{abc}{(a+2)(b+2)(c+2)} \Rightarrow abc < 1$$

2. Để ý rằng nếu đặt $x=a+b, y=c+d$, thì bất đẳng thức bốn biến cần chứng minh tương đương đã được quy về dạng hai biến đơn giản hơn là:

$$xy+4 \geq 2(x+y) \Leftrightarrow x(y-2)+2(2-y) \geq 0 \Leftrightarrow (y-2)(x-2) \geq 0$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy kết hợp với giả thiết ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}=2, c+d \geq 2\sqrt{cd}=2$$

Suy ra $x-2 \geq 0$ và $y-2 \geq 0$. Từ đó ta có $(y-2)(x-2) \geq 0$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=1$

$$3. VT = \frac{a^3}{b^2+ab+bc+ca} + \frac{b^3}{c^2+ab+bc+ca} + \frac{c^3}{a^2+ab+bc+ca}$$

$$= \frac{a^3}{(b+c)(a+b)} + \frac{b^3}{(c+a)(b+c)} + \frac{c^3}{(a+b)(c+a)}$$

$$\text{Lại có: } \frac{a^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{b+c}{8} + \frac{a+b}{8} \geq \frac{3a}{4} \Rightarrow \frac{a^3}{(b+c)(c+a)} \geq \frac{5a-2b-c}{8} \quad (1)$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được:

$$\frac{b^3}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{5b-2c-a}{8} \quad (2), \quad \frac{c^3}{(a+b)(c+a)} \geq \frac{5c-2a-b}{8} \quad (3)$$

Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được: $a+b+c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)} = 3$.

Bài 14:

1.

$$\text{a) BĐT} \Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{2-a_1} + 1 \right) + \left(\frac{a_2}{2-a_2} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{a_n}{2-a_n} + 1 \right) \geq \frac{n}{2n-1} + n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2-a_1} + \frac{1}{2-a_2} + \dots + \frac{1}{2-a_n} \geq \frac{n^2}{2n-1} \quad (*)$$

$$\text{Ta có: VT} (*) \geq \frac{n^2}{2n - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)} = \frac{n^2}{2n-1}, \text{ đpcm.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}.$$

$$\text{b) BĐT} \Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{1+a_1} - 1 \right) + \left(\frac{a_2}{1+a_2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{a_n}{1+a_n} - 1 \right) \leq \frac{n}{n+1} - n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \geq \frac{n^2}{n+1} \quad (**)$$

$$\text{Ta có: VT} (**) \geq \frac{n^2}{n + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)} = \frac{n^2}{n+1}, \text{ đpcm.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}.$$

$$2. \text{ Ta có: } \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} = \frac{a+b}{2} \left(a+b + \frac{1}{2} \right) \geq \sqrt{ab} \left(a+b + \frac{1}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu: } & \sqrt{ab} \left(a+b + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{ab} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{ab} \left(a+b + \frac{1}{2} - \sqrt{a} - \sqrt{b} \right) \\ & = \sqrt{ab} \left(\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \geq 0 \text{ đúng.} \end{aligned}$$

Vậy: $\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

Bài 15:

1. Ta có: $\frac{1}{2} \left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} \right) \geq x^4 y^4$. Đẳng thức xảy ra khi $x^{12} = y^{12}$

$\frac{1}{4} (x^{16} + y^{16}) \geq \frac{1}{2} x^8 y^8$. Đẳng thức xảy ra khi $x^{16} = y^{16}$.

Suy ra $Q \geq \frac{1}{2} x^8 y^8 + x^4 y^4 - (1 + x^2 y^2)^2 = \frac{1}{2} (x^8 y^8 + 2x^4 y^4 + 1) - (1 + x^2 y^2)^2 - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2} (x^4 y^4 + 1)^2 - (x^2 y^2 + 1)^2 - \frac{1}{2}$.

Mặt khác: $(1^2 + 1^2) \left[(x^2 y^2)^2 + 1^2 \right] \geq (x^2 y^2 + 1)^2$ hay $2(x^4 y^4 + 1) \geq (x^2 y^2 + 1)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi $x^2 y^2 = 1$.

$\Rightarrow \frac{1}{2} (x^4 y^4 + 1)^2 \geq \frac{1}{8} (x^2 y^2 + 1)^4 \Rightarrow Q \geq \frac{1}{8} (x^2 y^2 + 1)^4 - (x^2 y^2 + 1)^2 - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{8} \left[(x^2 y^2 + 1)^2 - 4 \right]^2 - \frac{5}{2} \geq -\frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x^2 y^2 = 1$. Vậy: $\min Q = -\frac{5}{2}$ khi $x^2 = y^2 = 1$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 2 \sqrt{\frac{xz}{y\sqrt[3]{xyz}}}$; $\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 2 \sqrt{\frac{yx}{z\sqrt[3]{xyz}}}$; $\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 2 \sqrt{\frac{zy}{x\sqrt[3]{xyz}}}$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 \geq 4 \left(\frac{xz}{y\sqrt[3]{xyz}} + \frac{yx}{z\sqrt[3]{xyz}} + \frac{zy}{x\sqrt[3]{xyz}} \right)$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân:

$4 \left(\frac{xz}{y\sqrt[3]{xyz}} + \frac{yx}{z\sqrt[3]{xyz}} + \frac{zy}{x\sqrt[3]{xyz}} \right) \geq 4 \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{xz}{y\sqrt[3]{xyz}} \cdot \frac{yx}{z\sqrt[3]{xyz}} \cdot \frac{zy}{x\sqrt[3]{xyz}}} = 12$.

Vậy: $\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 \geq 12$.

Bài 16:

1. Xét $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$ (*). Chia cả hai vế cho x^2y^2 , ta được

Đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$. Ta được

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy} \Rightarrow u + v = u^2 + v^2 - uv \Rightarrow (u+v)^2 - (u+v) = 3uv \leq \frac{3(u+v)^2}{4}$$

$$\Rightarrow (u+v)^2 - 4(u+v) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq u+v \leq 4$$

Khi đó: $A = \frac{x^3 + y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x+y)xy}{x^3y^3} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2y^2}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = (u+v)^2 \leq 16.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $u = v = 2$ hay $x = y = \frac{1}{2}$.

2. Ta có:

$$P = \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab} \geq \frac{4}{a^2+6ab+b^2+1} + \frac{1}{3ab} = \frac{4}{(a+b)^2+1+4ab} + \frac{1}{3ab}$$

Mặt khác $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Vậy $P \geq \frac{4}{2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{6\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{8}{3}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^2+b^2=3ab \\ a=b \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 17:

1. Ta có:

$$P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy};$$

$$P = (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xyz}\right) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\left(1 + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyz}\right);$$

$$P \geq \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}} = \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{9}{2}$

2. Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, ta có:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \geq \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &\geq \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{2(b+c)}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{2(a+c)}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{2(a+b)}} \\ &= 2 \left(\sqrt{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} \right). \end{aligned}$$

Bài 18:

1. Ta có: $\frac{ab}{a+3b+2c} = \frac{ab}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq \frac{ab}{9} \cdot \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right).$

Tương tự:

$$\frac{bc}{b+3c+2a} \leq \frac{bc}{9} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{2c} \right), \quad \frac{ac}{c+3a+2b} \leq \frac{ac}{9} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a} \right).$$

Cộng vế theo vế ta được

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{bc+ac}{a+b} + \frac{bc+ab}{a+c} + \frac{ab+ac}{b+c} \right) + \frac{1}{18} (a+b+c)$$

Hay $\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{9} (a+b+c) + \frac{1}{18} (a+b+c) = \frac{a+b+c}{6}.$

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a^5 + a^5 + a^5 + x^5 + x^5 \geq 5a^3x^2 \Rightarrow 3a^5 + 2x^5 \geq 5a^3x^2. \text{ Tương tự: } 3b^5 + 2y^5 \geq 5b^3y^2$$

Suy ra: $5(a^3x^2 + b^3y^2) \leq 3(a^5 + b^5) + 2(x^5 + y^5) \leq 5 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 19:

1. Bất đẳng thức cần chứng minh

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1$$

Đặt: $T = \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$

$$T \leq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \right]$$

$$T \leq \frac{1}{3} \left[\frac{a+1}{1+a} + \frac{b+1}{1+b} + \frac{c+1}{1+c} \right] = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \geq 0$.

2. Ta có: $VT = \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \left(\frac{1}{b} - 1 \right) \left(\frac{1}{c} - 1 \right) = \left(\frac{1-a}{a} \right) \cdot \left(\frac{1-b}{b} \right) \cdot \left(\frac{1-c}{c} \right)$

$$= \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ca}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8 \text{ (đpcm)}$$

Bài 20:

1. Ta có: $\frac{1}{1+a} \geq \left(1 - \frac{1}{1+b} \right) + \left(1 - \frac{1}{1+c} \right) + \left(1 - \frac{1}{1+d} \right) = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d}$

Suy ra: $\frac{1}{1+a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$

Tương tự, ta có được

$$\begin{cases} \frac{1}{1+a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}} \\ \frac{1}{1+b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{cda}{(1+c)(1+d)(1+a)}} \\ \frac{1}{1+c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{dca}{(1+d)(1+c)(1+a)}} \\ \frac{1}{1+d} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geq 81 \frac{abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \Rightarrow abcd \leq \frac{1}{81}$$

2. Áp dụng bất đẳng thức bất đẳng thức Cauchy cho ba số ta có:

$$\frac{x^5}{y^3+z^2} + \frac{y^3+z^2}{4} + \frac{x^4}{2} \geq \frac{3}{2}x^3$$

Tương tự $\frac{y^5}{z^3+x^2} + \frac{z^3+x^2}{4} + \frac{y^4}{2} \geq \frac{3}{2}y^3, \frac{z^5}{x^3+y^2} + \frac{x^3+y^2}{4} + \frac{z^4}{2} \geq \frac{3}{2}z^3$

Mặt khác, ta dễ có được $\frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} \geq x^2, \frac{y^4}{2} + \frac{1}{2} \geq y^2, \frac{z^4}{2} + \frac{1}{2} \geq z^2$.

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$S = \frac{x^5}{y^3+z^2} + \frac{y^5}{z^3+x^2} + \frac{z^5}{x^3+y^2} + x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{5}{4}(x^3+y^3+z^3) + \frac{3}{4}(x^2+y^2+z^2) - \frac{3}{2}$$

Mà $x^3+x^3+1 \geq 3x^2$ hay $2x^3+1 \geq 3x^2$. Tương tự $2y^3+1 \geq 3y^2, 2z^3+1 \geq 3z^2$

Do đó $2(x^3+y^3+z^3) \geq 3(x^2+y^2+z^2) - 3 = 6 \Rightarrow x^3+y^3+z^3 \geq 3 \Rightarrow S \geq \frac{9}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 21:

1. Ta có:

$$(2y+3z)(2z+3y) = 6(y^2+z^2) + 13yz \leq 6(y^2+z^2) + \frac{13}{2}(y^2+z^2) = \frac{25}{2}(y^2+z^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(2y+3z)(2z+3y)} \geq \frac{2x^2}{25(y^2+z^2)}$$

Tương tự: $\frac{y^2}{(2z+3x)(2x+3z)} \geq \frac{2y^2}{25(z^2+x^2)}, \frac{z^2}{(2x+3y)(2y+3x)} \geq \frac{2z^2}{25(x^2+y^2)}$.

Vậy $M \geq \frac{2x^2}{25(y^2+z^2)} + \frac{2y^2}{25(z^2+x^2)} + \frac{2z^2}{25(x^2+y^2)} \Rightarrow f(x;y;z) \geq \frac{1}{25} \Rightarrow \min M = \frac{1}{25}$.

2. Ta có:

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) < \frac{81}{8} \Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) < \frac{81}{4} \Leftrightarrow \sqrt{(a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right)} < \frac{9}{2}$$

$$1 \leq a \leq 2 \Leftrightarrow (a-1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2 \leq 3a \Leftrightarrow a + \frac{2}{a} \leq 3$$

Tương tự: $b + \frac{2}{b} \leq 3, c + \frac{2}{c} \leq 3 \Rightarrow (a+b+c) + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) \leq 9 \quad (1)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$(a+b+c) + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) \geq 2\sqrt{(a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right)} \leq 9 \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right) \leq \frac{81}{4} \quad (3)$$

Đẳng thức không xảy ra nên $(3) \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) < \frac{81}{8}$ (đpcm).

Bài 22:

1. Ta có: $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

Với $a, b > 0$ ta luôn có $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$, $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

và với mọi a, b ta luôn có $a^2+b^2 \geq 2ab$.

$$\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c} \leq \frac{ab}{ab(a+b)+(a^2+b^2)c} \leq \frac{ab}{4} \left(\frac{1}{ab(a+b)} + \frac{1}{(a^2+b^2)c} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{ab(a+b)+(a^2+b^2)c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{ab}{(a^2+b^2)c} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{2c} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a^2+b^2+a^2c+b^2c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{c} \quad (1)$$

Tương tự: $\frac{bc}{b^3+c^3+b^2a+c^2a} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a} \quad (2)$

$$\frac{ca}{c^3+a^3+c^2b+a^2b} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{b} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế đẳng thức (1), (2) và (3) ta được đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

2. Áp dụng đẳng thức: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

$$5a^2+2ab+2b^2=(2a+b)^2+(a-b)^2 \geq (2a+b)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} \leq \frac{1}{2a+b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

$$\text{Tương tự: } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} \leq \frac{1}{2b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{1}{2c+a} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \end{cases} \cdot \text{Do đó } P \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 \\ \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 \end{cases}$$

$$\text{Mà giả thiết: } 15 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = 10 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) + 2007$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \sqrt{\frac{6021}{5}}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} a = b = c \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{6021}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6021}{5}}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6021}{5}}, \text{ khi } a = b = c = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6021}{5}}.$$

Bài 23:

$$1. \text{ Ta có: } F = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} = 13\sqrt{x^2(1-x^2)} + 9\sqrt{x^2(1+x^2)}$$

$$F = 13\sqrt{\frac{x^2 \cdot 4(1-x^2)}{4}} + 9\sqrt{\frac{9x^2 \cdot 4(1+x^2)}{36}} = \frac{13}{2}\sqrt{x^2 \cdot 4(1-x^2)} + \frac{3}{2}\sqrt{9x^2 \cdot 4(1+x^2)}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \sqrt{x^2 \cdot 4(1-x^2)} \leq \frac{x^2 + 4(1-x^2)}{2} = \frac{4-3x^2}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sqrt{9x^2 \cdot 4(1+x^2)} \leq \frac{9x^2 + 4(1+x^2)}{2} = \frac{4+13x^2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$F \leq \frac{13}{2} \cdot \frac{4-3x^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4+13x^2}{2} = \frac{52-39x^2+12+39x^2}{4} = 16$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 = 4(1-x^2) \\ 9x^2 = 4(1+x^2) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $\max F = 16$ khi $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2. Ta có:

$$\begin{cases} \frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab}{2} \\ \frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2} \\ \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq (a+b+c) - \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

Và: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3$.

Do đó: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq (a+b+c) - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

Vậy $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi: $a = b = c = 1$.

Bài 24:

$$1. \text{ Ta có: } \begin{cases} \frac{a^3}{a^2+b^2} = \frac{a(a^2+b^2)-ab^2}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \geq a - \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{b}{2} = a - \frac{b}{2} \\ \frac{b^3}{b^2+c^2} \geq b - \frac{c}{2}, \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq c - \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$N = \frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq (a+b+c) - \frac{(a+b+c)}{2} = \frac{(a+b+c)}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=1 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \\ a=b=c \end{cases}$$

Vậy $\min A = \frac{1}{2}$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

2. Không mất tính tổng quát, giả sử $b = \min\{a, b, c\}$. Khi đó, ta có hai trường hợp xảy ra.

Nếu $a \geq b \geq c$, thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng do $VT \geq 0 \geq VP$.

Xét trường hợp $c \geq b \geq a$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) = 4(c-a)(c-b)(b-a)(a+b+c) \leq [(c-a)(c-b) + (b-a)(a+b+c)]^2.$$

Mặt khác, lại thấy:

$$(c-a)(c-b) + (b-a)(a+b+c) - (a^2 + b^2 + c^2) = -a(2a+2c-b) \leq 0.$$

Nên ta có đpcm.

Bài 25:

$$1. \text{Ta có: } \sqrt[3]{xyz(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{3} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{xyz}{2} \leq \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\Rightarrow VT \geq \frac{1}{xyz} + \frac{xyz}{2} \geq \frac{1}{2xyz} + \frac{xyz}{2} + \frac{1}{2xyz} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ (đpcm)}$$

$$2. \text{Giả sử } a > b > c \text{ khi đó } P = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ với } x, y > 0.$$

Từ đó ta có

$$P = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{8}{a-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$P \geq \frac{10}{a-c} + \frac{10}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ca)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2 + 4b(a+c)}}$$

$$\text{Hay } P \geq \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}$$

$$\text{Ta có } P \geq \frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{(3-3b)(1+3b)}}$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{(3-3b)(1+3b)} \leq \frac{3-3b+1+3b}{2} = 2 \text{ nên } P \geq 10\sqrt{6}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} 3-3b=1+3b \\ a-c=b-c \\ a+b+c=1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a = \frac{2+\sqrt{6}}{6} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{2-\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Bài 26:

$$1. \text{Bất đẳng thức } \Leftrightarrow \frac{2ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{3bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{2ca}{(b+c)(b+a)} \geq \frac{5}{3}.$$

Quy đồng nhân chéo, ta được:

$$2ab(1-c) + 3bc(1-a) + 2ca(1-b) \geq \frac{5}{3}(1-a)(1-b)(1-c).$$

Nhân ra rồi rút gọn, khi đó ta cần chứng minh:

$$ab + 4bc + ca \geq 16abc \Leftrightarrow \frac{1}{c} + \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \geq 16.$$

Ta có: $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a} + \frac{4}{b+c} \geq \frac{16}{a+b+c} = 16.$

Vậy $\min P = \frac{5}{3}$ đạt được khi $a = \frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{4}.$

2. Chia hai vế của bất đẳng thức cho xyz ta được bất đẳng thức cần chứng minh là

$$\frac{y+z}{yz(4-9yz)} + \frac{z+x}{zx(4-9zx)} + \frac{x+y}{xy(4-9xy)} \geq 6$$

Do $x, y, z > 0; x+y+z=1$ nên $4-9xy \geq 4-9\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} > 0$, tương tự

$$4-9yz > 0, 4-9xz > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{xy(4-9xy)} &\geq \frac{2\sqrt{xy}}{xy(4-9xy)} = \frac{2}{\sqrt{xy}(2-3\sqrt{xy})(2+3\sqrt{xy})} \\ &\geq \frac{6}{\left(\frac{3\sqrt{xy}+2-3\sqrt{xy}}{2}\right)^2(2+3\sqrt{xy})} = \frac{6}{2+3\sqrt{xy}}. \end{aligned}$$

Tương tự có hai bất đẳng thức nữa và ta đưa về chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2+3\sqrt{xy}} + \frac{1}{2+3\sqrt{yz}} + \frac{1}{2+3\sqrt{zx}} \geq 1$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$\frac{1}{2+3\sqrt{xy}} + \frac{1}{2+3\sqrt{yz}} + \frac{1}{2+3\sqrt{zx}} \geq \frac{9}{6+3(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})} \geq 1.$$

Bài 27:

1. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a^5 + a + 1 \geq 3a^2, a^2 + 1 \geq 2a. \text{ Suy ra: } a^5 - a^2 + 3ab + 6 \geq 3a + 3ab + 3 = 3(a + ab + 1).$$

Thực hiện tương tự với hai biểu thức còn lại, sau đó ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{3(a+ab+1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(b+bc+1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(c+ca+1)}} \leq \frac{1}{3}. (*)$$

$$VT(*) \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a+ab+1} + \frac{1}{b+bc+1} + \frac{1}{c+ca+1} \right).$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh được: $\frac{1}{a+ab+1} + \frac{1}{b+bc+1} + \frac{1}{c+ca+1} \leq 1$.

Với điều kiện $abc = 1$ thì bất đẳng thức trên thực ra là một đẳng thức.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức đạt được khi $a = b = c = 1$.

2. Ta có $\frac{a}{b(1+a^2)} = \frac{ac}{(ab+bc)(bc+ca)}$

Đặt $ab = x, bc = y, ca = z$. khi đó bài toán trở thành cho x, y, z dương thỏa mãn

$x+y+z=1$. Chứng minh rằng: $\frac{z}{(x+y)(z+y)} + \frac{x}{(x+z)(y+z)} + \frac{y}{(x+y)(x+z)} \geq \frac{9}{4}$

Điều này có được bằng cách quy đồng và kết hợp bất đẳng thức Cauchy.

Bài 28:

1. Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= b(a+c) + 2ca \leq \frac{(1+\sqrt{3})b^2 + \frac{(a+c)^2}{1+\sqrt{3}}}{2} + a^2 + c^2 \leq \frac{(1+\sqrt{3})b^2}{2} + \frac{a^2+c^2}{1+\sqrt{3}} + a^2 + c^2 \\ &= \frac{(1+\sqrt{3})b^2}{2} + \frac{(1+\sqrt{3})(a^2+c^2)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

2. Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Đặt $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c \Rightarrow a+b+c=3$

(Dành cho bạn đọc)

Vậy $VT \geq 3 - 2 = 1$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 29:

1. Ta có: $19 = 27 - 8 = 3(a+b+c)^2 - 8 = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab+bc+ca) - 8$.

Khi đó, bất đẳng thức tương đương với:

$$a^2b + b^2c + c^2a + 2abc + 4 \geq 3(ab+bc+ca).$$

Lại có:

$$3(ab+bc+ca) = (a+b+c)(ab+bc+ca) = (a^2b + b^2c + c^2a) + (ab^2 + bc^2 + ca^2) + 3abc$$

Nên bất đẳng thức trở thành: $4 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc$.

Không mất tính tổng quát, giả sử b nằm giữa a và c , suy ra $a(b-a)(b-c) \leq 0$,

hay $ab^2 + ca^2 \leq abc + a^2b$.

Như vậy: $ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq a^2b + c^2b + 2abc = b(a+c)^2 = 4b \left(\frac{a+c}{2} \right)^2$

$$\leq 4 \left(\frac{b + \frac{a+c}{2} + \frac{a+c}{2}}{3} \right)^3 = 4. \text{ Ta có điều phải chứng minh.}$$

2. Ta có: $\frac{a^2+b}{b+c} = \frac{a(1-b-c)+b}{b+c} = \frac{a+b}{b+c} - a$

Tương tự cho hai biểu thức còn lại, ta có:

$$P = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} - (a+b+c) \geq 3 - 1 = 2. \text{ Đẳng thức có } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Bài 30:

1. $\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} \geq 1+xy; \sqrt{(1+x^3)(1+y^3)} \geq 1+xy\sqrt{xy}.$

Do đó mà có được: $P \geq \frac{xy}{2y} + \frac{xy\sqrt{xy}}{3x^2} = \frac{1}{6} \left(3x + 2y\sqrt{\frac{y}{x}} \right).$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy thì: $x + y\sqrt{\frac{y}{x}} + y\sqrt{\frac{y}{x}} \geq 3\sqrt{x \cdot y \cdot \frac{y}{x}} = 3y.$

Kết hợp với trên, ta được: $P \geq \frac{3x + (3y - x)}{6} = \frac{2x + 3y}{6} = \frac{5}{6}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1.$

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là: $\min P = \frac{5}{6}$

2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$P = a + \frac{b}{2} + 2 \left(a + \frac{4}{a} \right) + \frac{3}{2} \left(b + \frac{4}{b} \right) + \left(c + \frac{4}{c} \right) \geq a + \frac{b}{2} + 2 \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot 4 + 4 = \frac{2a+b}{2} + 18, \quad (1)$$

và $3abc = (a^2 + c^2) + 2(b^2 + c^2) \geq 2ac + 4bc. \quad (2)$

Từ (2), ta có: $3ab \geq 2(a+2b)$ hay là $\frac{3}{2} \geq \frac{2}{a} + \frac{1}{b}.$

Mặt khác: $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{2a+b}.$ Do đó, kết hợp với trên, ta thu được: $2a+b \geq 6. \quad (3)$

Từ (1) và (3), ta suy ra: $P \geq \frac{2a+b}{2} + 18 \geq \frac{6}{2} + 18 = 21.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2.$

Bài 31:

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy có:

$$(a^2 + 1)^4 = \left(\frac{2a^2 + 1}{6} + \frac{2a^2 + 1}{6} + \frac{2a^2 + 1}{6} + \frac{1}{2} \right)^4 \geq \frac{16(2a^2 + 1)^3}{27}$$

Tương tự, tách: $b^2 + 1 = \frac{2b^2 + 1}{6} + \frac{2b^2 + 1}{6} + \frac{2b^2 + 1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

Do đó $(b^2 + 1)^5 \geq \frac{5^5(2b^2 + 1)^3}{2^7 \cdot 3^3}$

Mà $(2a^2 + 1)(1 + 2b^2) \geq 2(1 + 2b^2)^2$. Nên $(a^2 + 1)^4(b^2 + 1)^5 \geq \frac{5^5(a + b)^6}{3^6}$

Suy ra $P \geq \frac{5^5}{3^6}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 1; b = \frac{1}{2}$.

2. Ta có: $(x + y + z) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq (x + y + z) \cdot \frac{(x + y + z)^2}{xy + yz + zx}$.

Khi đó, ta cần chứng minh: $(x + y + z)^3 \geq 3(xy + yz + zx) \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ta:

$$\sqrt{xy + yz + zx} \cdot \sqrt{xy + yz + zx} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{(x + y + z)^3}{3\sqrt{3}}, \text{ đpcm.}$$

Từ đó ta được $\min P = 9 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 32:

Do $a, b, c > 0$ nên $3bc + 4ca + 5ab \leq 6abc \Leftrightarrow \frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c} \leq 6$ (1).

Trước tiên ta nhắc lại bất đẳng thức quen thuộc sau:

Với $x, y > 0$ ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức (2) liên tiếp ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2(a + b) + (a + c)}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \frac{1}{b + c} \left(\frac{2}{a + c} + \frac{1}{a + b} \right) \leq \frac{1}{b + c} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4(b + c)} \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{c} + \frac{1}{b} \right) \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{c} + \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{48} \left(\frac{3}{b} + \frac{3}{c} \right) \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{c} + \frac{1}{b} \right) \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \frac{1}{48} \left(\frac{\frac{3}{b} + \frac{3}{c} + \frac{3}{a} + \frac{2}{c} + \frac{1}{b}}{2} \right)^2 \leq \frac{3}{16} \quad (\text{theo (1)})$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 2$. Vậy $\max P = \frac{3}{16}$.

Loại 3: Kỹ thuật tham số hóa

Bài 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a^3 + m^3 + m^3 \geq 3m^2a$, $c^3 + m^3 + m^3 \geq 3m^2c$, $64b^3 + n^3 + n^3 \geq 12n^2b$ (m, n dương)

Do đó ta cần chọn tham số m, n sao cho $3m^2 = 12n^2$, $a = c = m$, $4b = n$ và $a + b + c = 3$

Từ đó ta tìm được $m = \frac{24}{17}$, $n = \frac{12}{17}$. Ta dễ dàng có được lời giải bài toán.

Bài 2: Ta đưa vào tham số và đánh giá như sau:

$$\frac{x^2}{2} + my^2 \geq 2\sqrt{\frac{m}{2}}xy; \quad \frac{x^2}{2} + nz^2 \geq 2\sqrt{\frac{n}{2}}xz; \quad (2-m)y^2 + (3-n)z^2 \geq 2\sqrt{(2-m)(3-n)}yz$$

$$\text{Cần chọn } m, n \text{ sao cho } \sqrt{(2-m)(3-n)} = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \quad (0 < m, n \leq 2)$$

$$\text{Ta có } m = n = \frac{3}{2}$$

Chú ý: Đối với bài toán tổng quát là: Tìm GTNN của $P = mx^2 + ny^2 + pz^2$, ta biến đổi $P = m \left(x^2 + \frac{n}{m}y^2 + \frac{p}{m}z^2 \right)$ và làm tương tự như trên.

Bài 3: Đặt $P = a^3 + 2b^3 + 3c^3$.

Với các số thực dương α, β, γ chọn sau ta có

$$\begin{aligned} 2P &= (a^3 + \alpha^3 + \alpha^3) + 2(b^3 + \beta^3 + \beta^3) + 3(c^3 + \gamma^3 + \gamma^3) - (\alpha^3 + 2\beta^3 + 3\gamma^3) \\ &\geq 3\alpha a^2 + 6\beta b^2 + 9\gamma c^2 - (\alpha^3 + 2\beta^3 + 3\gamma^3) \end{aligned}$$

Cần chọn $\alpha = 2\beta = 3\gamma = t$ và kết hợp với dấu đẳng thức xảy ra khi

$$a = \alpha, b = \beta, c = \gamma, a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ ta được } \alpha = \frac{6}{7}, \beta = \frac{6}{14}, \gamma = \frac{6}{21}.$$

$$\text{Vậy } 2P \geq 3 \cdot \frac{6}{7} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{6}{7} \Rightarrow P \geq \frac{6}{7}.$$

Bài 4: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x + \frac{1}{2}\sqrt{x \cdot 4y} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x \cdot 4y \cdot 16z} \leq \frac{4}{3}(x + y + z)$.

Bài 5: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2}{b+c} + \frac{4}{9}(b+c) &\geq \frac{4}{3}a \\ \frac{b^2}{c+a} + \frac{4}{9}(a+c) &\geq \frac{4}{3}b \\ \frac{16c^2}{a+b} + (a+b) &\geq 8c \end{aligned} \right| \Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} \geq \frac{1}{9}(64c - a - b)$$

Bài 6: $y^2 + yz + z^2 = 1 - \frac{3x^2}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2\right) + yz + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Ta có $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq xy, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq yz$

Suy ra $\frac{1}{2}(x+y+z)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |P| \leq \sqrt{2}.$

Bài 7: Ta có: $\frac{x^2}{x+y} = \frac{x(x+y) - xy}{x+y} = x - \frac{xy}{x+y} \geq x - \frac{\sqrt{xy}}{2}$

Chứng minh tương tự: $\frac{y^2}{y+z} \geq y - \frac{\sqrt{yz}}{2}; \frac{z^2}{z+x} \geq z - \frac{\sqrt{zx}}{2}$

Suy ra: $T \geq x + y + z - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{2} = x + y + z - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(vì $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$)

Vậy min $T = \frac{1}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}.$

Bài 8: Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$A = x + y + z - \left(\frac{xy^2}{x+y^2} + \frac{yz^2}{y+z^2} + \frac{zx^2}{z+x^2} \right) \geq 3 - \frac{1}{2}(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} &\leq \frac{1}{2}[(x+1)y + (y+1)z + (z+1)x] = \frac{1}{2}(x+y+z+xy+yz+zx) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{3}(x+y+z)^2\right) = 3 \Rightarrow A \geq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$

Vậy min $A = \frac{3}{2}$

Loại 4: Kỹ thuật Cauchy ngược dấu

Bài 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab} = \sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \leq \frac{1}{2}(4a+6b) = 2a+3b$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} \geq \frac{a^2}{2a+3b}$$

Mặt khác $\frac{a^2}{2a+3b} + \frac{2a+3b}{25} \geq \frac{2a}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{2a+3b} \geq \frac{8a-3b}{25}$

Do đó $\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} \geq \frac{8a-3b}{25}$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc}} \geq \frac{8b-3c}{25}, \frac{c^2}{\sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca}} \geq \frac{8c-3a}{25}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 2: Áp dụng bất đẳng thức bất đẳng thức Cauchy ta có

$$6\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} \leq \left(1+\frac{16x}{y+z}\right) + 9 = \frac{2(8x+5y+5z)}{y+z}$$

Suy ra $\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} \leq \frac{8x+5y+5z}{3(y+z)}$ (*). Sử dụng (*), ta có

$$\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} = \left(\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} - 1\right) + 1 = \frac{\frac{16x}{y+z}}{\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} + 1} + 1 \geq \frac{\frac{16x}{y+z}}{\frac{8x+5y+5z}{3(y+z)} + 1} + 1 = \frac{6x}{x+y+z}$$

Tương tự, ta cũng có $\sqrt{1+\frac{16y}{z+x}} \geq \frac{6y}{x+y+z} + 1, \sqrt{1+\frac{16z}{x+y}} \geq \frac{6z}{x+y+z} + 1.$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3: Ta có $\sqrt{a^2+1} = \sqrt{(a+1)^2 - 2a} = \sqrt{(a+1-\sqrt{2a})(a+1+\sqrt{2a})}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2a})(2-\sqrt{2})(a+1+\sqrt{2a})}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{a^2+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(2+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2a}) + (2-\sqrt{2})(a+1+\sqrt{2a})}{2} = \sqrt{2}(a-\sqrt{a}+1)$$

Tương tự ta có $\sqrt{b^2+1} \leq \sqrt{2}(b-\sqrt{b}+1), \sqrt{c^2+1} \leq \sqrt{2}(c-\sqrt{c}+1)$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức ta có

$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \leq \sqrt{2}(a+b+c - \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} + 3) \quad (1)$$

Mặt khác theo BĐT Cauchy ta có $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}} \geq 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \leq \sqrt{2}(a+b+c)$

Bài 4:

$$1. \text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^2}{b^2} + 1 \geq \frac{2a}{b}; \quad \frac{b^2}{c^2} + 1 \geq \frac{2b}{c}; \quad \frac{a^2}{b^2} + 1 \geq \frac{2a}{b}; \quad \frac{b^2}{c^2} + 1 \geq \frac{2b}{c}; \quad \frac{c^2}{a^2} + 1 \geq \frac{2c}{a}$$

Mặt khác $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 6$

Cộng các vế các bất đẳng thức trên lại ta có đpcm.

$$2. \text{Ta có } \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} = \sqrt{\frac{1}{1+x^3}} \text{ với } x = \frac{b+c}{a}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{\frac{1}{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{x^2-x+1}} \geq \frac{2}{x^2+2} = \frac{2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 1} = \frac{2a^2}{(b+c)^2 + 2a^2}$$

$$\text{Mặt khác ta có } (b+c)^2 \leq 2(b^2+c^2) \Rightarrow \frac{2a^2}{(b+c)^2 + 2a^2} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{Do đó ta có } \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{Tương tự ta có } \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} \geq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 5: Không mất tính tổng quát giả sử $(1-x)(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow x+y-xy \leq 1$

$$\text{Suy ra } z(x+y-xy) \leq z \Rightarrow xy + yz + zx - xyz \leq xy + z$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$xy = \sqrt[3]{x^3 \cdot y^3 \cdot 1} \leq \frac{x^3 + y^3 + 1}{3}; \quad z = \sqrt[3]{z^3 \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{z^3 + 1 + 1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } xy + z \leq \frac{x^3 + y^3 + z^3 + 3}{3} = 2 \text{ đpcm.}$$

Bài 6:

$$1. \frac{a}{a^2 + b^2} \leq \frac{a}{2ab} = \frac{1}{2b}, \quad \frac{b}{b^2 + c^2} \leq \frac{b}{2bc} = \frac{1}{2c}, \quad \frac{c}{a^2 + c^2} \leq \frac{c}{2ac} = \frac{1}{2a}$$

$$\text{Vậy: } \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + c^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$2. \frac{x^2}{1 + 16x^4} = \frac{x^2}{1 + (4x)^2} \leq \frac{x^2}{2 \cdot 4x^2} = \frac{1}{8}, \quad \frac{y^2}{1 + 16y^4} = \frac{y^2}{1 + (4y)^2} \leq \frac{y^2}{2 \cdot 4y^2} = \frac{1}{8}$$

$$3. \frac{x^6 + y^9}{4} \geq 3x^2y^3 - 16 \Leftrightarrow x^6 + y^9 + 64 \geq 12x^2y^3 \Leftrightarrow (x^2)^3 + (y^3)^3 + 4^3 \geq 12x^2y^3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm:

$$(x^2)^3 + (y^3)^3 + 4^3 \geq 3x^2y^3 \cdot 4 = 12x^2y^3$$

Bài 7:

$$1. \text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có: } \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}, \quad \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$$

$$\text{Hơn nữa: } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} \geq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} \geq 3\sqrt{3}$$

$$2. \frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{1+y} \cdot \frac{1+y}{4}} = x, \quad \frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{y^2}{1+z} \cdot \frac{1+z}{4}} = y,$$

$$\frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z^2}{1+x} \cdot \frac{1+x}{4}} = z$$

Cộng ba bất đẳng thức trên vế theo vế, ta có:

$$\left(\frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4} \right) + \left(\frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4} \right) + \left(\frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4} \right) \geq x + y + z$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq -\frac{3}{4} - \frac{x+y+z}{4} + x+y+z \geq \frac{3(x+y+z)}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\geq \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Dạng
3.

ĐẶT ẨN PHỤ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1: Đặt $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ (với a, b, c dương)

$$\Rightarrow x = \frac{b+c-a}{2}, y = \frac{c+a-b}{2}, z = \frac{a+b-c}{2}$$

$$2VT = \frac{25(b+c-a)}{a} + \frac{4(c+a-b)}{b} + \frac{9(a+b-c)}{c}$$

$$= \left(\frac{25b}{a} + \frac{4a}{b} \right) + \left(\frac{25c}{a} + \frac{9a}{c} \right) + \left(\frac{4c}{b} + \frac{9b}{c} \right) - 38$$

$$\geq 20 + 30 + 12 = 24 \Rightarrow VT \geq 12.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 25b^2 = 4a^2 \\ 25c^2 = 9a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b = 2a \\ 5c = 3a \end{cases} \Rightarrow 5b + 5c = 5a \Rightarrow x = 0$ (vô lí)

Bài 2: Đặt $x = a + b + 2c, y = 2a + b + c, z = a + b + 3c$

Suy ra $a = -2x + y + z, b = 5x - y - 3z, c = z - x$

Bất phương trình trở thành $\frac{-8x+4y+4z}{x} + \frac{2x-y}{y} - \frac{-8x+8z}{z} \geq 12\sqrt{2} - 17$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4y}{x} + \frac{2x}{y} \right) + \left(\frac{4z}{x} + \frac{8x}{z} \right) \geq 12\sqrt{2} \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{4y}{x} + \frac{2x}{y} \geq 4\sqrt{2}, \frac{4z}{x} + \frac{8x}{z} \geq 8\sqrt{2}$

Cộng vế với vế lại suy ra bất đẳng thức (*) đúng, đpcm.

Bài 3: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \frac{(x+y+z)^3}{27} \geq xyz$$

Mặt khác $xyz \geq x+y+z$ suy ra $\frac{(x+y+z)^3}{27} \geq x+y+z+2$

Đặt $t = x + y + z$, $t > 0$, ta có

$$\frac{t^3}{27} \geq t + 2 \Leftrightarrow t^3 - 27t - 54 \geq 0 \Leftrightarrow (t-6)(t+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 6.$$

Suy ra $x + y + z \geq 6$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Bài 4: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a^{11}}{bc} + abc \geq 2\sqrt{\frac{a^{11}}{bc} \cdot abc} = 2a^6$

Tương tự ta có $\frac{b^{11}}{ca} + abc \geq 2b^6$, $\frac{c^{11}}{ab} + abc \geq 2c^6$

Từ đó suy ra $\frac{a^{11}}{bc} + \frac{b^{11}}{ca} + \frac{c^{11}}{ab} \geq 2(a^6 + b^6 + c^6) - 3abc$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $2(a^6 + b^6 + c^6) - 3abc + \frac{3}{a^2b^2c^2} \geq \frac{a^6 + b^6 + c^6 + 9}{2}$.

Hay là $3(a^6 + b^6 + c^6) + \frac{6}{a^2b^2c^2} - 6abc \geq 9$.

Bây giờ lại sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^6 + b^6 + c^6 \geq 3a^2b^2c^2$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $9a^2b^2c^2 + \frac{6}{a^2b^2c^2} - 6abc \geq 9$

Đặt $t = abc$, $t > 0$. Bất đẳng thức trở thành $9t^2 + \frac{6}{t^2} - 6t \geq 9$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$9t^2 + \frac{6}{t^2} - 6t \geq 9t^2 + \frac{6}{t^2} - 3(t^2 + 1) = 6t^2 + \frac{6}{t^2} - 3 \geq 12 - 3 = 9, \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 5: Từ điều kiện suy ra $x, y, z \in [0; 2]$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$27(2-x)(2-y)(2-z) \leq (2-x+2-y+2-z)^3$$

$$\Leftrightarrow 27[8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - xyz] \leq (8-x-y-z)^3$$

$$\Leftrightarrow 27[8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + (x^2+y^2+z^2) - 4] \leq (8-x-y-z)^3$$

$$\Leftrightarrow 27[4 - 4(x+y+z) + (x+y+z)^2] \leq (8-x-y-z)^3$$

Đặt $t = x + y + z$, $t \geq 0$ ta có

$$\Leftrightarrow 27(t^2 - 4t + 4) \leq (6-t)^3 \Leftrightarrow t^3 + 9t^2 - 108 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t+6)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 3$$

Suy ra $x + y + z \leq 3$.

Bài 6: Từ giả thiết của bài toán và P là những đa thức đối xứng ba biến nên ta biểu diễn các đa thức này qua ba đa thức đối xứng cơ bản $x + y + z$, $xy + yz + zx$, xyz .

Ta có:
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Suy ra:
$$|P| = \left| (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \right| = \left| (x + y + z) \left(2 - \frac{(x + y + z)^2 - 2}{2} \right) \right|$$

Đặt $t = |x + y + z|, t \geq 0$ suy ra $|P| = t \left(2 - \frac{t^2 - 2}{2} \right) = -\frac{t^3}{2} + 3t.$

Ta sẽ đi chứng minh
$$-\frac{t^3}{2} + 3t \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t^3 + 4\sqrt{2} \geq 6t$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta có
$$t^3 + 4\sqrt{2} = t^3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \geq 3\sqrt{t^3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = 6t$$

Do đó $|P| \leq 2\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = \sqrt{2}$.

Ta có $P = 2\sqrt{2}$ chẳng hạn khi $x = \sqrt{2}, y = z = 0$,
 $P = -2\sqrt{2}$ chẳng hạn khi $x = -\sqrt{2}, y = z = 0$.

Vậy $\min P = -2\sqrt{2}, \max P = 2\sqrt{2}$.

Nhận xét:

1) Việc ta phải đi chứng minh $-\frac{t^3}{2} + 3t \leq 2\sqrt{2}$ là do chúng ta dự đoán được dấu bằng xảy ra tại biên.

2) Ta có mọi đa thức đối xứng ba ẩn luôn biểu diễn qua được các đa thức đối xứng sơ cấp $a = x + y + z; b = xy + yz + zx; c = xyz$. Hơn nữa giữa ba đa thức đối xứng sơ cấp này luôn có sự đánh giá qua lại giữa chúng, cụ thể $a^2 \geq 3b \geq 9\sqrt[3]{c^2}$. Với bài toán trên từ giả thiết ta có: $a^2 - 2b = 2 \Leftrightarrow b = \frac{a^2 - 2}{2}$ tức là ta đã thay thế b bởi a, do đó khi biểu diễn $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ thì chỉ còn hai biến là a và c. Mặt khác ta luôn đánh giá được c qua a (hoặc a qua c) và lúc đó trong P chỉ còn một biến là a hoặc c.

Bài 7: Ta có $xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z) \Leftrightarrow 1 - (x + y + z) + xy + yz + zx = 2xyz$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2 - 2(x + y + z) + (x + y + z)^2 - 4xyz$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\left(\frac{x + y + z}{3} \right)^3 \geq xyz$ nên

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2 - 2(x+y+z) + (x+y+z)^2 - 4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

Đặt $t = x+y+z$ thì $0 < t < 3$. Khi đó:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq -\frac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2 = \frac{1}{27}(2t-3)^2\left(\frac{15}{4}-t\right) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $t = \frac{3}{2}$ hay $x = y = z = \frac{1}{2}$, đpcm.

Bài 8: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$P \geq \frac{6(2x^2 + 13y^2 - xy) - 6xy}{(x+2y)^2} = 6 \cdot \frac{2x^2 + 13y^2 - 2xy}{(x+2y)^2} = 6Q$$

$$\text{Rõ ràng } y \neq 0 \text{ ta có } Q = \frac{2t^2 - 2t + 13}{(t+2)^2}, t = \frac{x}{y}$$

$$\text{Xét } Q-1 = \frac{(t-3)^2}{(t+2)^2} \geq 0 \Rightarrow Q \geq 1 \Rightarrow P \geq 6$$

$$\text{Suy ra } \min P = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3\sqrt{\frac{3}{28}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{3}{28}} \end{cases}$$

Bài 9:

$$1. \text{ Đặt: } a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$$

$$S = \frac{c^2}{a+b} + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} = \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} - \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$2. P+3 = \frac{a^3}{\sqrt{1+b^2}} + b^2 + \frac{b^3}{\sqrt{1+c^2}} + c^2 + \frac{c^3}{\sqrt{1+a^2}} + a^2$$

$$\Leftrightarrow P + \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{a^3}{2\sqrt{1+b^2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{1+b^2}} + \frac{1+b^2}{4\sqrt{2}} + \frac{b^3}{2\sqrt{1+c^2}} + \frac{b^2}{2\sqrt{1+c^2}} + \frac{1+c^2}{4\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{c^3}{2\sqrt{1+a^2}} + \frac{c^2}{2\sqrt{1+a^2}} + \frac{1+a^2}{4\sqrt{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^6}{16\sqrt{2}}} + 3\sqrt[3]{\frac{b^6}{16\sqrt{2}}} + 3\sqrt[3]{\frac{c^6}{16\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow P + \frac{3}{2\sqrt{2}} \geq \frac{3}{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{9}{2\sqrt[6]{8}} \Rightarrow P \geq \frac{9}{2\sqrt[6]{2^3}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$3. \text{ Ta có } f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \cdot \sqrt{x^2 + (3-y)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2x + y + 1) + \frac{1}{5\sqrt{5}} \cdot (2x + 33 - 11y) = \frac{6(2x - y) + 38}{5\sqrt{5}} = \frac{50}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Do đó $\min f(x, y) = 2\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = -\frac{2}{3}$

4. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4 \Rightarrow \frac{3}{4} \left(a + \frac{4}{a} \right) \geq 3, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = 2$$

$$b + \frac{9}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{9}{b}} = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(b + \frac{9}{b} \right) \geq 3, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } b = 3$$

$$c + \frac{16}{c} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{16}{c}} = 8 \Rightarrow \frac{1}{4} \left(c + \frac{16}{c} \right) \geq 2, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } c = 4$$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều, ta thu được $\frac{3a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 8$ (1)

Mặt khác, do $a + 2b + 3c \geq 20$ nên $\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{3c}{4} \geq 5$ (chia hai vế cho 4) (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được $L = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 3, c = 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức L bằng 13, đạt được khi $a = 2, b = 3, c = 4$.

$$5. \text{ Ta có } (a+1)^2 + b^2 + 1 = (a^2 + b^2) + 2a + 2 \geq 2ab + 2a + 2;$$

$$\text{ Tương tự } (b+1)^2 + c^2 + 1 = (b^2 + c^2) + 2b + 2 \geq 2bc + 2b + 2;$$

$$(c+1)^2 + a^2 + 1 = (c^2 + a^2) + 2c + 2 \geq 2ac + 2c + 2$$

$$S \leq \frac{1}{2(ab+a+1)} + \frac{1}{2(bc+b+1)} + \frac{1}{2(ca+c+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{abcb+abc+bc} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{abc+bc+b} \right)$$

$$S \leq \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{bc+b+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{bc+b+1} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \max(S) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

$$6. \sqrt{bc(1+a^2)} = \sqrt{bc+a^2bc} = \sqrt{bc+a(a+b+c)} = \sqrt{bc+a^2+ab+ac} = \sqrt{(a+b)(a+c)}$$

$$\text{ Tương tự } \sqrt{ca(1+b^2)} = \sqrt{(a+b)(b+c)}, \sqrt{ba(1+c^2)} = \sqrt{(a+c)(b+c)}$$

$$S = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c} \cdot \frac{b}{a+b}} + \sqrt{\frac{c}{c+b} \cdot \frac{c}{a+c}}$$

$$S \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \max(S) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}$$

7. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxky, ta có:

$$\sqrt{\frac{1+x^2}{2}} + \sqrt{x} \leq \sqrt{(1+1) \left(\frac{1+x^2}{2} + x \right)} = x+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2} \cdot (x - \sqrt{x} + 1). \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x=1.$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{1+y^2} \leq \sqrt{2} \cdot (y - \sqrt{y} + 1); \sqrt{1+z^2} \leq \sqrt{2} \cdot (z - \sqrt{z} + 1)$$

$$\text{Do đó } A = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{\sqrt{2}(x+y+z - \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z} + 3)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{Mặt khác: } x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + xz)$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\text{Lại có: } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 3; x + y + z \geq 3 \text{ (theo bất đẳng thức Cauchy).}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Bởi vậy } A \leq \frac{(x+y+z)\sqrt{2}}{\frac{(x+y+z)^2}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{x+y+z} \leq \sqrt{2}. \text{ Vậy } \max A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

**Dạng
4.**

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ

Bài 1: Bình phương 2 vế ta được: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ab + xy \quad (*)$

• Nếu $ab + xy < 0$ thì $(*)$ hiển nhiên đúng.

• Nếu $ab + xy \geq 0$ thì bình phương hai vế ta được: $(*) \Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0$ (đúng).

1. Sử dụng (1) $\Rightarrow \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} \geq \sqrt{(1+1)^2 + (a+b)^2} = \sqrt{5}$.

2. Sử dụng (1) $\Rightarrow P \geq \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{4}{a+b}\right)^2} = \sqrt{17}$

Chú ý: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (với $a, b > 0$).

3. Áp dụng (1) liên tiếp hai lần ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} &\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{9}{x+y+z}\right)^2} = \sqrt{82}. \end{aligned}$$

Chú ý: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ (với $x, y, z > 0$).

4. Tương tự câu 3. Ta có: $P \geq \sqrt{(3\sqrt{223})^2 + (x+y+z)^2} = \sqrt{2010}$.

Bài 2:

1. Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}; \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c}; \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{c+a}$.

Cộng các bất đẳng thức vế theo vế ta được đpcm.

2. Tương tự câu 1.

3. Áp dụng câu 1 và 2 ta được: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4 \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right)$.

4. Theo câu 1: $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{4}(a+b)$.

Cùng với các bất đẳng thức tương tự, cộng vế theo vế ta được đpcm.

5. Áp dụng câu 4 với $a = x, b = 2y, c = 4z$ thì $a+b+c = 12 \Rightarrow$ đpcm.

6. Nhận xét: $(p-a) + (p-b) = 2p - (a+b) = c$.

Áp dụng (1) ta được: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a)+(p-b)} = \frac{4}{c}$.

Cùng với 2 bất đẳng thức tương tự, cộng vế theo vế ta được đpcm.

Bài 3: Ta có: $(1) \Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$. Dễ dàng suy từ bất đẳng thức Cô-si.

1. Áp dụng (1) ta được: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$.

$$\Rightarrow VT \geq \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c} \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$$

Chú ý: $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

2. Để áp dụng (1), ta biến đổi P như sau:

$$P = \frac{x+1-1}{x+1} + \frac{y+1-1}{y+1} + \frac{z+1-1}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$$

Ta có: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{x+y+z+3} = \frac{9}{4}$. Suy ra: $P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

3. Ta có: $P \geq \frac{9}{a^2 + 2bc + b^2 + 2ca + c^2 + 2ab} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq 9$.

4. Ta có

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)}$$

$$= \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq 1$$

và $3(ab + bc + ca) \leq (a+b+c)^2$ nên $\frac{2007}{ab + bc + ca} \geq \frac{3 \cdot 2007}{(a+b+c)^2} \geq 669$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 4: Ta có: $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + b^3a^2 = a^2b^2(a+b) \Rightarrow a^5 + b^5 + ab \geq ab \frac{a+b+c}{c}$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{ab \frac{a+b+c}{c}} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Tương tự: $\frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq \frac{a}{a+b+c}; \quad \frac{ca}{c^5 + a^5 + ac} \leq \frac{b}{a+b+c}$

Cộng ba bất đẳng thức này lại với nhau ta có đpcm.

Bài 5:

* Trước tiên, ta sẽ chứng minh kết quả sau: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$ (1)

Nhân hai vế của (1) với $ab + bc + ca$, và để ý rằng

$$\frac{a}{b+c} \cdot (ab + bc + ca) = \frac{a}{b+c} [a(b+c) + bc] = a^2 + \frac{abc}{b+c}$$

Để thấy khi đó, (1) trở thành

$$a^2 + \frac{abc}{b+c} + b^2 + \frac{abc}{c+a} + c^2 + \frac{abc}{a+b} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Hay $abc \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 0$ (hiển nhiên đúng), đpcm

* Quay trở lại bài toán, sử dụng kết quả trên, ta suy ra

$$P \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}} = t^2 + \frac{4\sqrt{2}}{t}, \text{ với } t = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}}$$

Với cách đặt trên, dễ dàng suy ra $t \geq 1$.

Vậy ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của $f(t) = t^2 + \frac{4\sqrt{2}}{t}$ với $t \geq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $f(t) = t^2 + \frac{2\sqrt{2}}{t} + \frac{2\sqrt{2}}{t} \geq 3\sqrt[3]{t^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{t} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{t}} = 6$

Đẳng thức xảy ra khi $t = \sqrt{2}$ hay $a = b > 0, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Vậy $\min P = 6$ khi và chỉ khi $a = b > 0, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Bài đọc thêm

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp 1: Bất đẳng thức Bunhiacopski

Bất đẳng thức Bunhiacopski (Bunyakovesky) được nhà Toán học Augustin Louis Cauchy đề xuất đầu tiên vào năm 1821. Sau đó, vào năm 1859, học trò của ông là Viktor Yakovlevich Bunyakovesky (1804 – 1889, nhà Toán học người Nga) đã mở rộng được kết quả cho tích phân. Và đến năm 1885, nhà Toán học người Đức Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921) đã chứng minh được kết quả tổng quát của bất đẳng thức này trong trường hợp không gian tích trong. Do vậy, cũng như bất đẳng thức Cauchy, cụm từ “Bất đẳng thức Bunyakovesky” mà ta vẫn thường dùng thật ra là một cách gọi tên không chính xác mà phải gọi là bất đẳng thức Cauchy – Bunyakovesky – Schwarz. Tuy nhiên, để phù hợp với chương trình sách giáo khoa của nước ta, trong xuyên suốt tài liệu này, ta vẫn sẽ gọi tên bất đẳng thức trên là bất đẳng thức Bunyakovesky.

Trong lĩnh vực Toán sơ cấp, cùng với bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunyakovsky là hai bất đẳng thức thông dụng và phổ biến nhất bởi tính đơn giản và hiệu quả của chúng.

Bất đẳng thức này được phát biểu như sau:

Với hai bộ số thực bất kì $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ hay $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n}$.

Chứng minh:

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \\ b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \end{cases}$$

- Nếu $a = 0$ hay $b = 0$: Bất đẳng thức luôn đúng.
- Nếu $a, b > 0$:

$$\text{Đặt: } \alpha_i = \frac{a_i}{a}, \beta_i = \frac{b_i}{b} (i = 1, 2, \dots, n). \text{ Thế thì: } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2$$

$$\text{Mặt khác: } |\alpha_i \beta_i| \leq \frac{1}{2} (\alpha_i^2 + \beta_i^2).$$

$$\text{Suy ra: } |\alpha_1 \beta_1| + |\alpha_2 \beta_2| + \dots + |\alpha_n \beta_n| \leq \frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) + \frac{1}{2} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2) \leq 1$$

$$\Rightarrow |a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \dots + |a_n b_n| \leq a \cdot b.$$

$$\text{Lại có: } |a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq |a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \dots + |a_n b_n|$$

$$\text{Suy ra: } (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i = \beta_i (\forall i = 1, 2, \dots, n) \\ \alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n \text{ cùng dấu} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

Cho $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ là hai dãy số thực với $b_i > 0, \forall i$ khi đó

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

* Bất đẳng thức Bunhiacôpski mở rộng

Cho m bộ số, mỗi bộ số gồm n số không âm: $(a_i, b_i, \dots, c_i) (i = 1, 2, \dots, m)$

Thế thì:

$$(a_1 a_2 \dots a_m + b_1 b_2 \dots b_m + \dots + c_1 c_2 \dots c_m)^2 \leq (a_1^m + b_1^m + \dots + c_1^m)(a_2^m + b_2^m + \dots + c_2^m) \dots (a_m^m + b_m^m + \dots + c_m^m)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \exists$ bộ số $(a, b, \dots, c)$ sao cho: với mỗi $i = 1, 2, \dots, m$ thì $\exists t_i$ sao cho: $a = t_i a_i, b = t_i b_i, \dots, c = t_i c_i$, hay $a_1 : b_1 : \dots : c_1 = a_2 : b_2 : \dots : c_2 = \dots = a_m : b_m : \dots : c_m$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có:

$$(1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 = 1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$$

Ví dụ 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\text{a. } \frac{a^2}{b+3c} + \frac{b^2}{c+3a} + \frac{c^2}{a+3b} \geq \frac{a+b+c}{4} \quad \text{b. } \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geq \frac{36}{a+b+c}$$

Lời giải

a. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski dạng phân thức, ta có:

$$\frac{a^2}{b+3c} + \frac{b^2}{c+3a} + \frac{c^2}{a+3b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(b+3c)+(c+3a)+(a+3b)} = \frac{a+b+c}{4}$$

Bài toán được chứng minh xong.

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{a}{b+3c} = \frac{b}{c+3a} = \frac{c}{a+3b} \Leftrightarrow a=b=c$$

b. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski dạng phân thức ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = \frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{b} + \frac{3^2}{c} \geq \frac{(1+2+3)^2}{a+b+c} = \frac{36}{a+b+c}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c}$$

$$\text{Ví dụ 3: Cho } x, y, z > 0. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{x^2}{x^2+2yz} + \frac{y^2}{y^2+2zx} + \frac{z^2}{z^2+2xy} \geq 1.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski dạng phân thức, ta có:

$$VT \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x^2+2yz)+(y^2+2zx)+(z^2+2xy)} = 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x^2+2yz} = \frac{y}{y^2+2zx} = \frac{z}{z^2+2xy} \Leftrightarrow x=y=z$$

Ví dụ 4: Cho x là số thực thay đổi trên đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$A = \sqrt{13} \cdot \sqrt{13(x^2 - x^4)} + \sqrt{27} \cdot \sqrt{3(x^2 + x^4)} \leq \sqrt{(13+27)[13(x^2 - x^4) + 3(x^2 + x^4)]}.$$

$$\text{Hay: } A \leq \sqrt{80(8x^2 - 5x^4)} = \sqrt{80 \left[\frac{16}{5} - 5 \left(x^2 - \frac{4}{5} \right)^2 \right]} \leq 16.$$

Hơn nữa, $A = 16$ khi và chỉ khi $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Vậy, giá trị lớn nhất của A bằng 16.

Ví dụ 5: Cho $\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 3 \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\left| \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} \right| < \sqrt{2}$

Lời giải

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \text{ ta có: } \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{k^2} &< \frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \left(\frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}} \right) + \left(\frac{1}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{7}{2}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski:

$$\left| \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} \right| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}} < \sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt{2} \text{ (đpcm)}$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho các số thực x, y thỏa $2x + y \geq 5$. Chứng minh rằng: $3x^2 + 4y^2 \geq \frac{300}{19}$.

2. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 6$. Chứng minh rằng:

$$3a + 2b + c \leq 2\sqrt{17}.$$

Bài 2:

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 9a + b + 4c$.

2. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq 1.$$

Bài 3:

1. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}} \quad (\text{Đề thi Đại học Khối A - 2007}).$$

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq 1.$$

Bài 4:

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} = 1$.

Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq 3$.

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

Bài 5:

1. Cho các số x, y thỏa mãn $3x^2 + 2y^2 \leq 5$. Chứng minh rằng: $|3x + 2y| \leq 5$.

2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21}.$$

Bài 6:

1. Cho các số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \leq 1.$$

2. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Bài 7:

1. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{4z^2 + \frac{1}{z^2}}.$$

2. Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 16 \\ y^2 + yz + z^2 = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $xy + yz + zx \leq 8$.

Bài 8:

1. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $(4\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(3\sqrt{a} + 4\sqrt{b}) \leq 25(a + b)$.

2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+2b}\right)^2 \geq \frac{1}{3}$.

Bài 9:

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2 + c^2 + 7}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^2 + a^2 + 7}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + 7}} \geq 1.$$

2. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + 1}{2}}.$$

Phương pháp 2: Bất đẳng thức Trebusep

a. Nếu $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ thì

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$

b. Nếu $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ thì

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$

Ví dụ: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn bán kính $R = 1$ và

$$\frac{\sin A \cdot \sin 2A + \sin B \cdot \sin 2B + \sin C \cdot \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2S}{3}, \quad S \text{ là diện tích tam giác. Chứng minh}$$

rằng ΔABC là tam giác đều.

Lời giải

Không giảm tính tổng quát ta giả sử $0 < A \leq B \leq C < \frac{\pi}{2}$.

Suy ra:
$$\begin{cases} \sin A \leq \sin B \leq \sin C \\ \sin 2A \leq \sin 2B \leq \sin 2C \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Trebusep ta được:

$$\begin{aligned} & (\sin A + \sin B + \sin C)(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \\ & \geq 3(\sin A \cdot \sin 2A + \sin B \cdot \sin 2B + \sin C \cdot \sin 2C) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A \cdot \sin 2A + \sin B \cdot \sin 2B + \sin C \cdot \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} \leq \frac{1}{3}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \sin B = \sin C \\ \sin 2A = \sin 2B = \sin 2C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$

Mặt khác:
$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \sin(A+B) \cdot \cos(A-B) + \sin 2C \\ &= 2 \sin C [\cos(A-B) + \cos C] = 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ &= 2 \sin C \cdot 2 \sin A \cdot \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C \\ &= (2R \sin A)(2R \sin B) \cdot \sin C = a \cdot b \cdot \sin C = 2S \end{aligned}$$

Khi đó:
$$\frac{\sin A \cdot \sin 2A + \sin B \cdot \sin 2B + \sin C \cdot \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} \leq \frac{2S}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Phương pháp 3: Bất đẳng thức Bernouli

a. Dạng nguyên thủy: Cho $a \geq -1, 1 \leq n \in \mathbb{N}$ thì $(1+a)^n \geq 1+na$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $n = 1$.

b. Dạng mở rộng:

- Cho $a > -1, \alpha \geq 1$ thì $(1+a)^\alpha \geq 1+\alpha a$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$.

- Cho $a \geq -1, 0 < \alpha < 1$ thì $(1+a)^\alpha \leq 1+\alpha a$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$

hoặc $\alpha = 1$.

Ví dụ: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5 \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernouli:

$$\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5 = \left(1 + \frac{b+c-2a}{a+b+c}\right)^5 \geq 1 + \frac{5(b+c-2a)}{a+b+c} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta được: $\left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5 \geq 1 + \frac{5(c+a-2b)}{a+b+c} \quad (2)$

$$\left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5 \geq 1 + \frac{5(a+b-2c)}{a+b+c} \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được: $\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5 \geq 3$

Phương pháp 4: Phương pháp phản chứng

Giả sử phải chứng minh bất đẳng thức nào đó đúng, ta hãy giả sử bất đẳng thức đó sai và kết hợp với các giả thiết để suy ra điều vô lí. Điều vô lí có thể là điều trái với giả thiết, có thể là điều trái ngược nhau. Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.

Giả sử ta phải chứng minh luận đề $p \Rightarrow q$.

Muốn chứng minh $p \Rightarrow q$ (với p : giả thiết đúng, q : kết luận đúng) phép chứng minh phản chứng được thực hiện như sau:

Giả sử không có q (hoặc q sai) suy ra điều vô lí hoặc p sai. Vậy phải có q (hay q đúng).

Như vậy để phủ định luận đề, ta ghép tất cả giả thiết của luận đề với phủ định kết luận của nó.

Ta thường dùng 5 hình thức chứng minh phản chứng sau:

A – Dùng mệnh đề phản đảo: " $P \Rightarrow Q$ "

B – Phủ định rồi suy trái giả thiết

C – Phủ định rồi suy trái với điều đúng

D – Phủ định rồi suy ra hai điều trái ngược nhau

E – Phủ định rồi suy ra kết luận.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho các số thực $a, b, c \in (0; 2)$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau sai: $a(2-b) > 1, b(2-c) > 1, c(2-a) > 1$

Lời giải

Giả sử ba bất đẳng thức đã cho đều đúng, nhân chúng với nhau theo vế với vế ta được

$$a(2-b).b(2-c).c(2-a) > 1 \Leftrightarrow a(2-a).b(2-b).c(2-c) > 1$$

Mặt khác, do $a, b, c \in (0; 2) \Rightarrow a, 2-a > 0$, nên có: $0 < a(2-a) = 1 - (a-1)^2 \leq 1$

Tương tự, ta cũng có: $0 < b(2-b) \leq 1, 0 < c(2-c) \leq 1$.

Do đó: $a(2-a).b(2-b).c(2-c) \leq 1$ (mâu thuẫn).

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$.

Chứng minh: $a^2 + b^2 < c^2$.

Lời giải

Giả sử $a^2 + b^2 \geq c^2$, khi đó

$$a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 2(ab + bc + ca) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \geq (a + b + c)^2$$

Kết hợp với giả thiết ta có:

$$0 > 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow (a + b + c)^2 \leq 0 \text{ (mâu thuẫn)}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một trong các số $9ab, 9bc, 9ca$ nhỏ hơn $(a + b + c)^2$

Bài 2: Cho bốn số thực dương a, b, c, d . Chứng minh rằng ba bất đẳng thức sau không thể cùng xảy ra:

$$(1) a + b < c + d, (2) (a + b)(c + d) < ab + cd, (3) (a + b)cd < (c + d)ab$$

Phương pháp 5: Dùng tính chất của tỉ số

1. Cho a, b, c là các số dương thì

a. Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

b. Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

2. Nếu $b, d > 0$ thì từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Chú ý:

- Một số tổng sai phân thường dùng:

$$+) \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$+) \frac{1}{x(x+d)} + \frac{1}{(x+d)(x+2d)} + \dots + \frac{1}{[x+(n-1)d](x+nd)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+nd} \right) = \frac{n}{x(x+nd)}$$

$$+) \frac{1}{1.2 \dots k} + \frac{1}{2.3 \dots (k+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k-1)} =$$

$$= \frac{1}{k-1} \left[\frac{1}{1.2 \dots (k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+k-1)} \right], \forall m > 0, d \neq 0$$

Các đẳng thức trên được chứng minh dựa vào chú ý:

$$+) \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}, \forall m > 0$$

$$+) \frac{d}{(x+md)(x+md+d)} = \frac{1}{x+md} - \frac{1}{x+(m+1)d}, \forall m > 0, d \neq 0$$

$$+) \frac{k-1}{m(m+1) \dots (m+k-1)} = \frac{(m+k-1) - m}{m(m+1) \dots (m+k-1)}$$

$$= \frac{1}{m(m+1) \dots (m+k-2)} - \frac{1}{(m+1) \dots (m+k-1)}, \forall m > 0, k \in \mathbb{N}^*$$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Lời giải

Vì $a, b, c > 0$ nên $\frac{a}{a+b} < 1$, vì thế $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$

Tương tự ta có: $\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{a+c} < \frac{c+b}{a+b+c}.$

Cộng các vế bất đẳng thức ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b+a}{a+b+c} + \frac{c+b}{a+b+c}$$

$$\text{Hay } 1 = \frac{a+b+c}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Vậy, bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} < 2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a+b < a+b+c \Rightarrow \frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c} \quad (2), \quad \frac{c}{a+c} > \frac{c}{a+b+c} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3), ta được:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} > 1 \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } a < a+b \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c} \quad (4)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c} \quad (5), \quad \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c} \quad (6)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (4), (5), (6), ta được:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} < 2 \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**), \text{ ta được: } 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} < 2 \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 3: Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

Lời giải

$$\text{Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có: } \frac{a}{a+b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$

$$\text{Hơn nữa: } \frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$ (3)

Tương tự ta có: $\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}$ (4)

$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{b+c}{a+b+c+d}$ (5), $\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$ (6)

Cộng vế với vế của (3), (4), (5) và (6) ta được:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2, \text{ điều phải chứng minh.}$$

Phương pháp 6: Phương pháp làm trội

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức: $A < B$.

Ý tưởng của phương pháp là làm trội $A < C$ rồi chứng minh $C < B$

Đôi khi để chứng minh một bất đẳng thức dạng: $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq M$

Ta có thể làm trội $f(x_i) \leq G(y_{i+1}) - G(y_i)$ để thu được:

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq G(y_n) - G(y_1)$$

Sau đó ta chỉ còn phải chứng minh một bất đẳng thức đơn giản hơn là:

$$G(y_n) - G(y_1) \leq M$$

Dùng các tính bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

Phương pháp chung để tính tổng hữu hạn: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

Ta cố gắng biến đổi số hạng tổng quát u_k về hiệu của hai số hạng liên tiếp nhau:

$$u_k = a_k - a_{k+1}$$

Khi đó: $S = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$

Phương pháp chung về tính tích hữu hạn: $P = u_1 u_2 \dots u_n$

Biến đổi các số hạng u_k về thương của hai số hạng liên tiếp nhau: $u_k = \frac{a_k}{a_{k+1}}$

Khi đó $P = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$

Các ví dụ

Ví dụ 1:

1. Với mọi số tự nhiên $n > 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$.

2. Với n là số nguyên. Chứng minh rằng: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$

Lời giải

1. Ta có $\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ với $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$

Do đó: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

2. Ta có $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

Khi cho k chạy từ 1 đến n ta được:
$$\begin{cases} 1 > 2(\sqrt{2} - 1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} > 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

Ví dụ 2:

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$1 \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}$$

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Lời giải

1. Vì n là số nguyên dương nên: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{1^2} = 1$ (1)

Mặt khác, với mọi $k \geq 1$ ta có $\frac{1}{k^2} = \frac{4}{4k^2} < \frac{4}{4k^2 - 1} = 2\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

Cho $k = 2, 3, 4, \dots, n$ ta có:

$$\frac{1}{2^2} = \frac{4}{4 \cdot 2^2} < \frac{4}{4 \cdot 2^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot 2 - 1} - \frac{2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{3^2} = \frac{4}{4 \cdot 3^2} < \frac{4}{4 \cdot 3^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot 3 - 1} - \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{2}{5} - \frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{4^2} = \frac{4}{4 \cdot 4^2} < \frac{4}{4 \cdot 4^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot 4 - 1} - \frac{2}{2 \cdot 4 + 1} = \frac{2}{7} - \frac{2}{9}$$

.....

$$\frac{1}{n^2} = \frac{4}{4 \cdot n^2} < \frac{4}{4 \cdot n^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot n - 1} - \frac{2}{2 \cdot n + 1} = \frac{2}{2n - 1} - \frac{2}{2n + 1}$$

Cộng vế theo vế, ta được: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{2n+1} < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

2. Để giải bài toán này ta cần có bổ đề sau:

Bổ đề: Với mọi số thực dương x, y ta có: $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$

Chứng minh: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \Leftrightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + y(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0. \text{ Bổ đề được chứng minh.}$$

Áp dụng bổ đề ta có:

$$(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n} > n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

Vì thế

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} \\ & < \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(Tự chứng minh)

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 2\sqrt{2}$$

Lời giải

Bổ đề. Với mọi $x, y > 0$, ta có $(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2}xy(x + y)$

Chứng minh: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương:

$$(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2}xy(x + y)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy)\sqrt{x^2 + y^2} + xy[2\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}(x + y)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2\sqrt{x^2 + y^2} + xy \frac{4(x^2 + y^2) - 2(x + y)^2}{2\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2}(x + y)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2\sqrt{x^2 + y^2} + xy \frac{2(x - y)^2}{2\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2}(x + y)} \geq 0$$

Do $x, y > 0$ nên bất đẳng thức cuối cùng đúng, bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề với $x = \sqrt{k + \frac{1}{2}}, y = \sqrt{k - \frac{1}{2}}$ ta được:

$$\left(k + \frac{1}{2} + k - \frac{1}{2}\right)\sqrt{k + \frac{1}{2} + k - \frac{1}{2}} > \sqrt{2\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{1}{2}\right)}\left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} + \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2k\sqrt{k} > \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{1}{2}\right)}\left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} + \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đây suy ra: } \frac{1}{k\sqrt{k}} &< \frac{2}{\sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{1}{2}\right)}\left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} + \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} - \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{1}{2}\right)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{k - \frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{k + \frac{1}{2}}}, \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

Cho $k = 1, 2, \dots, n$ rồi cộng vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \\ &< \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{\frac{7}{2}}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{n - \frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} < \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Đó là điều phải chứng minh.

Phương pháp 7: Phương pháp quy nạp

Bất đẳng thức phụ thuộc vào số nguyên dương n được xem là đúng nếu thỏa mãn hai điều kiện:

- Bất đẳng thức đúng với giá trị đầu tiên n_0 của n .
- Từ giả thiết bất đẳng thức đúng với $n = k \geq n_0$ ($k \in \mathbb{N}$) suy ra được bất đẳng thức đúng với $n = k+1$

Các bước chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp quy nạp:

Bước 1: Chứng minh bất đẳng thức với giá trị đầu tiên n_0 của n .

Bước 2: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq n_0$ (gọi là giả thiết quy nạp), sau đó chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$.

Bước 3: Kết luận bất đẳng thức đã cho đúng.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 5$ ta có: $2^n > n^2$

Lời giải

Với $n = 5$, bất đẳng thức trở thành $2^5 > 5^2 \Leftrightarrow 32 > 25$ (đúng)

Bất đẳng thức đúng với $n = 5$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 5$), tức là $2^k > k^2$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, hay $2^{k+1} > (k+1)^2$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2$ (1).

Vì $k \geq 5$ nên

$$\begin{aligned} 2k^2 &= k^2 + 2k + 1 + k^2 - 2k - 1 = (k+1)^2 + k(k-5) + 3k - 1 > (k+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 2k^2 > (k+1)^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, nên theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2: Cho $x \geq -1$ là một số thực cho trước. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n , ta có $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Lời giải

Với $n = 1$, bất đẳng thức trở thành: $1+x \geq 1+x$ (đúng)

Bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$), tức là $(1+x)^k \geq 1+kx$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, hay $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

Thật vậy, vì $x \geq -1 \Rightarrow x+1 \geq 0$ nên theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x) \geq (1+x)(1+kx)$$

$$(1+x)(1+kx) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

$$\text{Nên } (1+x)^{k+1} \geq (1+x)(1+kx) \geq 1 + (k+1)x$$

Hay bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, nên theo nguyên lý quy nạp suy ra điều phải chứng minh.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$

2. Cho $n \in \mathbb{N}$ và $a+b > 0$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$

Bài 2:

1. Cho $a \geq -1, 1 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng: $(1+a)^n \geq 1 + na$

2. Chứng minh rằng: $n^n > (n+1)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$

Bài 3:

1. Cho $1 \leq n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ thoả mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng: $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \geq \frac{1}{2}$

2. Cho $1 \leq n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh rằng: $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$

Phương pháp 8: Sử dụng biến đổi lượng giác

1. Nếu $|x| \leq R$ thì đặt $x = R \cos \alpha, \alpha \in [0; \pi]$; hoặc $x = R \sin \alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

2. Nếu $|x| \geq R$ thì đặt $x = \frac{R}{\cos \alpha}, \alpha \in [0; c) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

3. Nếu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ thì đặt $\begin{cases} x = a + R \cos \alpha \\ y = b + R \sin \alpha \end{cases}, (\alpha = 2\pi)$

4. Nếu $\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{b}\right)^2 = R^2$ và $a, b > 0$ thì đặt $\begin{cases} x = a + aR \cos \alpha \\ y = b + bR \sin \alpha \end{cases}, (\alpha = 2\pi)$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh với $\forall a, b \in [-1; 1]$, ta luôn có:

$$\left| a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} + \sqrt{3} \left(ab - \sqrt{(1-b^2)(1-a^2)} \right) \right| \leq 2$$

Lời giải

Điều kiện: $|a| \leq 1, |b| \leq 1$, đặt: $\begin{cases} a = \cos \alpha \\ b = \cos \beta \end{cases} (\alpha, \beta \in [0; \pi])$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } & a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} + \sqrt{3} \left(ab - \sqrt{(1-b^2)(1-a^2)} \right) \\ &= \cos \alpha \cdot \sin \beta + \cos \beta \cdot \sin \alpha + \sqrt{3} (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) \\ &= \sin(\alpha + \beta) + \sqrt{3} \cdot \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{6} \right) \in [-2, 2] \Rightarrow \text{đpcm} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho $ab \neq 0$. Chứng minh rằng: $-2\sqrt{2} - 2 \leq \frac{a^2 - (a-4b)^2}{a^2 + 4b^2} \leq 2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt: } & a = 2b \tan \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \\ \Rightarrow & \frac{a^2 - (a-4b)^2}{a^2 + 4b^2} = \frac{\tan^2 \alpha - (\tan \alpha - 2)^2}{1 + \tan^2 \alpha} = 4(\tan \alpha - 1) \cdot \cos^2 \alpha \\ &= 2 \sin 2\alpha - 2(1 + \cos 2\alpha) = 2(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha) - 2 \\ &= 2\sqrt{2} \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) - 2 \in [-2\sqrt{2} - 2, 2\sqrt{2} - 2] \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Cho $a, b \geq 1$. Chứng minh rằng: $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt: } & a = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, b = \frac{1}{\cos^2 \beta} \left(\alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right) \\ \Rightarrow & a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \sqrt{\tan^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \sqrt{\tan^2 \alpha} = \frac{\tan \beta}{\cos^2 \alpha} + \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \beta} \\ &= \frac{(\tan \beta \cdot \cos^2 \beta + \tan \alpha \cdot \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\sin 2\beta + \sin 2\alpha)}{\cos^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\cos^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha} \leq \frac{1}{\cos^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha} = ab \end{aligned}$$

Phương pháp 9: Đối biến số

Ví dụ:

Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c < 1$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$

Lời giải

Đặt $x = a^2 + 2bc$, $y = b^2 + 2ac$, $z = c^2 + 2ab$. Ta có: $x + y + z = (a + b + c)^2 < 1$

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$ với $x, y, z > 0$ và

$$x + y + z < 1$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ và: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$, suy ra:

$$(x + y + z) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \quad (*)$$

Với $x + y + z < 1$ thì $(*)$ suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$ điều phải chứng minh.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Phương pháp 1: Bất đẳng thức Bunhiacôpski

Bài 1:

1. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai bộ số $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \right)$ và $(\sqrt{3}x, 2y)$ ta có:

$$5^2 = (2x + y)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}x) + \frac{1}{2} \cdot (2y) \right)^2 \leq \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] (3x^2 + 4y^2)$$

$$\text{Suy ra: } 3x^2 + 4y^2 \geq \frac{300}{19}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x = 4y \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{40}{19} \\ y = \frac{15}{19} \end{cases}$$

Nhận xét

Bất đẳng thức Bunhiacôpski cho chúng ta sự đánh giá giữa hai đại lượng tổng các biến bậc nhất và tổng các biến bậc hai. Do đó khi gặp các bất đẳng thức mà trong điều kiện của bài toán và bất đẳng thức cần chứng minh là tổng bậc nhất các biến và tổng bậc hai các biến thì ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski.

2. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai bộ số $\left(3; \sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ và $(a; \sqrt{2b}; \sqrt{3c})$

ta có:

$$3a + 2b + c = 3.a + \sqrt{2}.\sqrt{2b} + \frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3c} \leq \sqrt{\left(9 + 2 + \frac{1}{3}\right)(a^2 + 2b^2 + 3c^2)} = 2\sqrt{17}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 6 \\ \frac{a}{3} = b = 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9\sqrt{17}}{17} \\ b = \frac{3\sqrt{17}}{17} \\ c = \frac{\sqrt{17}}{17} \end{cases}.$$

Bài 2:

$$1. \text{ Ta có: } (3+2+6)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{a}}\sqrt{9a} + \sqrt{\frac{4}{b}}\sqrt{b} + \sqrt{\frac{9}{c}}\sqrt{4c}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}\right)(9a + b + 4c)$$

Suy ra: $9a + b + 4c \geq 121$.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1 \\ 3a = \frac{b}{2} = \frac{2}{3}c \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{11}{3}; b = 22; c = \frac{33}{2}$$

Vậy min $(9a + b + 4c) = 121$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$\sqrt{(a+b)(c+a)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} \Rightarrow a + \sqrt{(a+b)(c+a)} \geq a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(c+a)}} \leq \frac{a}{a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b}{b + \sqrt{(b+a)(b+c)}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}; \quad \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 3:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có: } P &\geq \frac{2x^2\sqrt{yz}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{2y^2\sqrt{zx}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{2z^2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}} \\ &= \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

Đặt $a = x\sqrt{x}, b = y\sqrt{y}, c = z\sqrt{z} \Rightarrow abc = 1$

$$P \geq 2 \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1$$

Suy ra $P \geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Vậy $\min P = 2$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} &= \frac{a^4}{a(b+2c)} + \frac{b^4}{b(c+2a)} + \frac{c^4}{c(a+2b)} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} = 1 \end{aligned}$$

(do $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$)

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 4:

$$1. \text{ Từ giả thiết suy ra: } 1 = \frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}$$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 + 6 \geq (a+b+c)^2 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3$ (đpcm).

2. Từ giả thiết, suy ra: $a, b, c \in (0; \sqrt{3})$

$$\text{Bất đẳng thức cần chứng minh} \Leftrightarrow \frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$\frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} = \frac{a^2}{a(2-a)} + \frac{b^2}{b(2-b)} + \frac{c^2}{c(2-c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3}$$

$$\text{Ta chỉ cần chứng minh: } \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3} \geq 3 \Leftrightarrow (a+b+c-3)^2 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Bài 5:

1. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$(3x+2y)^2 = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}y)^2 \leq (3+2)(3x^2+2y^2) = 25. \text{ Suy ra } |3x+2y| \leq 5.$$

2. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{(1+1+1)(4x+1+4y+1+4z+1)} = \sqrt{21}$$

Bài 6:

1. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$(a^3 + b^3 + 1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + c^2 \right) \geq (a + b + c)^2$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + c^2}{(a^3 + b^3 + 1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + c^2 \right)} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + c^2}{(a + b + c)^2}.$$

Tương tự cho hai bất đẳng thức đẳng thức còn lại và lấy tổng ba bất đẳng thức đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} &\leq \frac{2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} \\ &= \frac{2(ab + bc + ca) + a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} = 1. \end{aligned}$$

2. Ta có:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - a - b - c = \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{(|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\text{Mà: } |a-c| + |b-c| \geq |a-b|, \text{ suy ra: } \frac{(|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2}{a+b+c} \geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Bài 7:

1. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$\sqrt{(8^2 + 9^2) \left(4x^2 + \frac{1}{x^2} \right)} \geq 16x + \frac{9}{x} = 81 \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{9x} \right) - \frac{17x}{4} \geq 27 - \frac{17}{4}x$$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left(27 - \frac{17}{4}x \right)$$

$$\text{Do đó: } P \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left(81 - \frac{17}{4}(x+y+z) \right) = \frac{\sqrt{145}}{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x = y = z = \frac{2}{3}.$$

$$2. \text{ Ta có: } x^2 + xy + y^2 = \left(y + \frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)^2; \quad y^2 + yz + z^2 = \left(y + \frac{z}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z \right)^2$$

Nên áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{48} &= \sqrt{\left[\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2\right]\left[\left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2\right]} \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\left(y + \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(y + \frac{z}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(xy + \frac{xz}{2} + yz + \frac{xz}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(xy + yz + xz) \Rightarrow xy + yz + zx \leq 8.\end{aligned}$$

Bài 8:

1. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$4\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \leq \sqrt{(4^2 + 3^2)(a + b)} = 5\sqrt{a + b};$$

$$3\sqrt{a} + 4\sqrt{b} \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(a + b)} = 5\sqrt{a + b}$$

$$\text{Suy ra: } (4\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(3\sqrt{a} + 4\sqrt{b}) \leq 25(a + b).$$

2. Áp dụng bất đẳng thức Bunhicopsky ta có:

$$(b + 2c)^2 = (1 \cdot b + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}c)^2 \leq 3(b^2 + 2c^2) \Rightarrow \left(\frac{a}{b + 2c}\right)^2 \geq \frac{a^2}{3(b^2 + 2c^2)}$$

$$\text{Do đó: } \left(\frac{a}{b + 2c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c + 2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a + 2b}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{b^2 + 2c^2} + \frac{b^2}{c^2 + 2a^2} + \frac{c^2}{a^2 + 2b^2}\right)$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b^2 + 2c^2} + \frac{b^2}{c^2 + 2a^2} + \frac{c^2}{a^2 + 2b^2} &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2(b^2 + 2c^2) + b^2(c^2 + 2a^2) + c^2(a^2 + 2b^2)} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \geq 1\end{aligned}$$

Nên ta có đpcm.

Bài 9:

1. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski:

$$\begin{aligned}VT &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a\sqrt{b^2 + c^2 + 7} + b\sqrt{c^2 + a^2 + 7} + c\sqrt{a^2 + b^2 + 7}} \\ &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)[2(a^2 + b^2 + c^2) + 21]}}.\end{aligned}$$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Ta chứng minh: $t^4 \geq t(2t + 21)$

$$\Leftrightarrow t^3 - 2t - 21 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t^2 + 3t + 7) \geq 0.$$

2. Bạn đọc tự giải

Phương pháp 4: Phương pháp phản chứng

Bài 1: Giả sử ngược lại: $9ab \geq (a + b + c)^2$, $9bc(a + b + c)^2$, $9ca(a + b + c)^2$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức ta có:

$$\begin{aligned} 3(a + b + c)^2 &\leq 9(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \leq 3(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\leq ab + bc + ca \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Theo đề bài ra a, b, c khác nhau đôi một nên: $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 > 0$ (2)

Vì (1) và (2) mâu thuẫn với nhau nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 2: Giả sử tồn tại bốn số dương a, b, c, d thỏa mãn tất cả bất đẳng thức đã cho.

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &< (a + b)(c + d) < ab + cd \Rightarrow cd > (a + b)^2 - ab = (a - b)^2 + 3ab \geq 3ab \\ \Rightarrow cd &> 3ab \quad (4) \end{aligned}$$

Mặt khác $(a + b)cd < (c + d)ab \Rightarrow (a + b)^2 cd < (c + d)(a + b)ab < (ab + cd)ab$

$$\Rightarrow ab(ab + cd) > (a + b)^2 cd \geq 4ab.cd \Rightarrow ab(ab + cd) > 4ab.cd \Rightarrow ab > 3cd \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có mâu thuẫn. Vậy khẳng định của bài toán được chứng minh.

Phương pháp 7: Phương pháp quy nạp

Bài 1:

1. Với $n = 2$ ta có $1 + \frac{1}{4} < 2 - \frac{1}{2}$ (đúng). Vậy bất đẳng thức cho đúng với $n = 2$

Giả sử bất đẳng thức cho đúng với $n = k$ ($k \geq 2$) ta phải chứng minh bất đẳng thức cho đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy khi $n = k + 1$ thì bất đẳng thức cho tương đương với

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$\text{Theo giả thiết quy nạp } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1+1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} \Leftrightarrow k(k+2) < (k+1)^2 \Leftrightarrow k^2 + 2k < k^2 + 2k + 1. \text{ Điều này đúng.}$$

Vậy bất đẳng thức cho được chứng minh.

2. Ta thấy bất đẳng thức cho đúng với $n = 1$

Giả sử bất đẳng thức (1) đúng với $n = k, k \geq 1$ ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$

Thật vậy với $n = k + 1$ ta có

$$\text{bất đẳng thức cho} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \cdot \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \quad (*)$$

$$\text{Vế trái } (*) \leq \frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{4} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} - \frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (a^k - b^k) \cdot (a - b) \geq 0 \quad (**)$$

Ta chứng minh (**)

Giả sử $a \geq b$ và giả thiết cho $a \geq -b \Leftrightarrow a \geq |b|$

$$\Leftrightarrow a^k \geq |b|^k \geq b^k \Rightarrow (a^k - b^k) \cdot (a - b) \geq 0$$

Giả sử $a < b$ và theo giả thiết $-a < b \Leftrightarrow |a|^k < b^k \Leftrightarrow a^k < b^k \Leftrightarrow (a^k - b^k) \cdot (a - b) \geq 0$

Vậy bất đẳng thức (**) luôn đúng ta có (đpcm).

Bài 2:

1. $n = 0$ hoặc 1: Bất đẳng thức luôn đúng

Với $n = k \geq 1$: giả sử bất đẳng thức đúng, tức là: $(1+a)^k \geq 1 + k.a$

Ta cần chứng minh: $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1).a$

Ta có: $(1+a)^{k+1} = (1+a).(1+a)^k \geq (1+a).(1+k.a) \geq 1 + (k+1)a + k.a^2 \geq 1 + (k+1)a$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Vậy, theo nguyên lí quy nạp: $(1+a)^n \geq 1 + n.a, \forall n \in \mathbb{N}$

$$2. \text{ Với } n = 2 \Rightarrow \begin{cases} n^n = 4 \\ (n+1)^{n-1} = 3 \end{cases} \Rightarrow n^n > (n+1)^{n-1}$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$, tức là: $k^k > (k+1)^{k-1}$

Ta có: $k^k(k+1)^{k+1}$
 $\geq (k+1)^{k-1}(k+1)^{k+1} = (k+1)^{2k-2}(k+1)^2 = [(k+1)^2]^{k-1}(k+1)^2 > (k^2+2k)^{k-1}(k^2+2k)$
 (vì $(k+1)^2 = k^2+2k+1 > k^2+2k$) $\geq k^k(k+2)^k \Rightarrow (k+1)^{k+1} > (k+2)^k$
 $\Rightarrow$ Bất đẳng thức đúng với $n = k+1$

Vậy, theo nguyên lý quy nạp: $n^n > (n+1)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$

Bài 3:

1. $n = 1$: $a_1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - a_1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ Bài toán đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là: $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_k) \geq \frac{1}{2}$

Ta cần chứng minh: $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_{k+1}) \geq \frac{1}{2}$

Ta có:

$$\begin{aligned} (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_{k+1}) &= (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_{k-1})[1-(a_k+a_{k+1})+a_ka_{k+1}] \\ &\geq (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_{k-1})[1-(a_k+a_{k+1})] \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(\text{vì } a_1+a_2+\dots+a_{k-1}+(a_k+a_{k+1}) \leq \frac{1}{2})$$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức đúng với $n = k+1$

Vậy, theo nguyên lý quy nạp: $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \geq \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$.

2. Với $n = 1$: Bất đẳng thức luôn đúng

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_kb_k)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\dots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_k^2)$$

Ta cần chứng minh:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_{k+1}b_{k+1})^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\dots+a_{k+1}^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_{k+1}^2)$$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy: } VP(1) &= (a_1^2+a_2^2+\dots+a_k^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_k^2) + (a_1^2+\dots+a_k^2).b_{k+1}^2 \\ &\quad + a^2(b_1^2+b_2^2+\dots+b_k^2) + a_{k+1}^2.b_{k+1}^2 \\ &\geq (a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_kb_k) + 2a_1b_1a_{k+1}b_{k+1} + 2a_2b_2a_{k+1}b_{k+1} \\ &\quad + \dots + 2a_kb_ka_{k+1}b_{k+1} + a_{k+1}^2.b_{k+1}^2 \\ &\geq (a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_kb_k)^2 + 2(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_kb_k)a_{k+1}b_{k+1} + a_{k+1}^2.b_{k+1}^2 \\ &\geq (a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_{k+1}b_{k+1})^2 \end{aligned}$$

Vậy (1) được chứng minh.

ỨNG DỤNG HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

Dạng 1. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Phương pháp giải

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $|\sin \alpha| \leq 1$, $|\cos \alpha| \leq 1$ với mọi số thực α

Chú ý: Ta chứng minh có đẳng thức sau: $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$

Trong đó $\alpha \in [0; 2\pi]$ và a, b không đồng thời bằng 0.

Chứng minh: Do a, b không đồng thời bằng 0 nên $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$

$$\text{Suy ra: } a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$$

$$\text{Vì } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1 \text{ nên tồn tại số thức } \alpha \in [0; 2\pi] \text{ sao cho}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha; \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$$

$$\text{Khi đó: } a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha).$$

Nhận xét: Từ kết quả trên, ta có

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = a \sin x + b \cos x$ bằng $-\sqrt{a^2 + b^2}$
- Giá trị lớn nhất của hàm số $y = a \sin x + b \cos x$ bằng $\sqrt{a^2 + b^2}$
- $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = 1 + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

2. $y = \frac{4}{1 + 2\sin^2 x}$

Lời giải

1. Ta có: $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq y \leq 4$

• $y = -2 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \Rightarrow \min y = -2$

• $y = 4 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \Rightarrow \max y = 4$

2. Ta có: $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow \frac{4}{3} \leq y \leq 4$

• $y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \min y = \frac{4}{3}$

• $y = 4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \Rightarrow \max y = 4$

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $B = \cos 2x + \sqrt{1 + 2\sin^2 x}$

Lời giải

Ta có $B = \cos 2x + \sqrt{1 + 1 - \cos 2x} = \cos 2x + \sqrt{2 - \cos 2x}$

Đặt $t = \sqrt{2 - \cos 2x} \Rightarrow \cos 2x = 2 - t^2$, vì $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{3}$

Biểu thức trở thành $B = 2 - t^2 + t$.

Xét hàm số $y = -t^2 + t + 2$, với $1 \leq t \leq \sqrt{3}$.

Bảng biến thiên:

t	1	$\sqrt{3}$
y	2	$\sqrt{3} - 1$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max B = 2$ khi $t = 1$ hay $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\min A = \sqrt{3} - 1$ khi $t = \sqrt{3}$ hay $\cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$

Lời giải

Điều kiện: $\sin x \geq 0, \cos x \geq 0$

Ta có: $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x} \leq \sqrt[4]{\sin x} \leq 1$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Mặt khác: $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x} \geq -\sqrt{\cos x} \geq -1$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy $\begin{cases} y_{\max} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ y_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vi dụ 4: Chứng minh rằng: $\frac{1 - \sin \frac{\pi}{14}}{2 \sin \frac{\pi}{14}} > \sqrt{3 \cos \frac{\pi}{7}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} 1 - \sin \frac{\pi}{14} &= \sin \frac{3\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{14} + \sin \frac{5\pi}{14} - \sin \frac{3\pi}{14} + \sin \frac{7\pi}{14} - \sin \frac{5\pi}{14} \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{14} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right) \Rightarrow \frac{1 - \sin \frac{\pi}{14}}{2 \sin \frac{\pi}{14}} = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có: } \cos \frac{\pi}{7} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } x = \cos \frac{\pi}{7}; y = \cos \frac{2\pi}{7}; z = \cos \frac{3\pi}{7}.$$

Khi đó từ (1), (2) ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$x + y + z > \sqrt{3(xy + yz + zx)} \quad (3)$$

$$\text{Vì } x, y, z > 0 \text{ nên: } (3) \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 > 0 \quad (4)$$

Vì x, y, z đôi một khác nhau nên (4) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của y trên miền xác định của nó.

Lời giải

Vì $\sin x$ và $\cos x$ không đồng thời bằng 1 nên y xác định trên $\mathbb{R}$.

Y_0 thuộc miền giá trị của hàm số khi và chỉ khi $Y_0 = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow Y_0 \sin x + (Y_0 - 1) \cos x = 2Y_0 + 2 \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow (2Y_0 + 2)^2 \leq Y_0^2 + (Y_0 - 1)^2 \Leftrightarrow 2Y_0^2 + 10Y_0 + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5 - \sqrt{19}}{2} \leq Y_0 \leq \frac{-5 + \sqrt{19}}{2}$$

$$\text{Vậy } y_{\max} = \frac{-5 + \sqrt{19}}{2}.$$

Ví dụ 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x, y) = \frac{a \sin^4 x + b \cos^4 y}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{a \cos^4 x + b \sin^4 y}{c \cos^2 x + d \sin^2 y} \text{ với } a, b, c, d \text{ là các hằng số dương.}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } f(x, y) = af_1 + bf_2 \text{ với } f_1 = \frac{\sin^4 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y}$$

$$f_2 = \frac{\cos^4 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{\sin^4 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y}$$

$$\text{Ta có: } c + d = c(\sin^2 x + \cos^2 x) + d(\sin^2 y + \cos^2 y)$$

$$(c + d)f_1$$

$$= \left[(c \sin^2 x + d \cos^2 y) + (c \cos^2 x + d \sin^2 y) \right] \left[\frac{\sin^4 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y} \right]$$

$$\geq \left(\sqrt{c \sin^2 x + d \cos^2 y} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{c \sin^2 x + d \cos^2 y}} + \sqrt{c \cos^2 x + d \sin^2 y} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{c \cos^2 x + d \sin^2 y}} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow f_1 \geq \frac{1}{c + d}. \text{ Tương tự: } f_2 \geq \frac{1}{c + d}. \text{ Vậy } f(x, y) = af_1 + bf_2 \geq \frac{a + b}{c + d}$$

Ví dụ 7: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$1. y = 6 \cos^2 x + \cos^2 2x$$

$$2. y = (4 \sin x - 3 \cos x)^2 - 4(4 \sin x - 3 \cos x) + 1$$

Lời giải

1. Ta có: $y = 6\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)^2 = 4\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1$

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow t \in [0; 1]$. Khi đó $y = 4t^2 + 2t + 1 = f(t)$

t	0	1
f(t)	1	7

Vậy $\min y = 1$ đạt được khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, ;$

$\max y = 1$ đạt được khi $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

2. Đặt $t = 4\sin x - 3\cos x \Rightarrow -5 \leq t \leq 5 \forall x \in \mathbb{R}.$

Khi đó: $y = t^2 - 4t + 1 = (t - 2)^2 - 3.$

Vì $t \in [-5; 5] \Rightarrow -7 \leq t - 2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq (t - 2)^2 \leq 49$, do đó $-3 \leq y \leq 46.$

Vậy $\min y = -3; \max y = 46.$

Ví dụ 8: Cho các số thực a, b. Chứng minh rằng: $(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4).$

Lời giải

Nếu $a = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $a \neq 0$ thì $(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{b}{a}\right)^4 \leq 8\left(1 + \frac{b^4}{a^4}\right),$

đặt $\frac{b}{a} = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, bất đẳng thức tương đương:

$$(1 + \tan t)^4 \leq 8(1 + \tan^4 t) \Leftrightarrow (\cos t + \sin t)^4 \leq 8(\cos^4 t + \sin^4 t),$$

cần chứng minh: $8(\cos^4 t + \sin^4 t) - (\cos t + \sin t)^4 \geq 0.$

Thật vậy, ta có: $8(\cos^4 t + \sin^4 t) - (\cos t + \sin t)^4 = \frac{9}{2} + \frac{5}{2}\cos 4x - 2\sin 2x \geq 0,$

(hiển nhiên vì $\cos 4t \geq -1$ và $-2\sin 2t \geq -2$).

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

1. $y = 3 - 2\cos^2 3x$

2. $y = 1 + \sqrt{2 + \sin 2x}$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các biểu thức sau:

$$A = \sin x + \cos x$$

$$B = \sin^4 x + \cos^4 x$$

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các biểu thức sau:

$$A = 2 - 2\sin x - \cos 2x$$

$$P = 2\sin x + \sin 2x$$

Bài 4: Chứng minh rằng:

$$1. \frac{1}{3 + \sin x} + \frac{1}{3 - \sin x} \leq \frac{2}{2 + \cos x}$$

$$2. \frac{\pi}{3} \leq \alpha; \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ ta có: } \frac{2}{\cos \alpha + \cos \beta} - 1 \leq \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \left(\frac{1}{\cos \beta} - 1 \right)$$

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 3\sin x + 4\cos x - 1$

Bài 6: Cho các góc nhọn a và b thỏa mãn $\sin^2 a + \sin^2 b < 1$. Chứng minh rằng:

$$\sin^2 a + \sin^2 b < \sin^2(a + b)$$

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 3\sin 2x - 4\cos^2 x$

Bài 8: Cho $\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ là ba góc thỏa mãn $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(\frac{\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha}{3} \right)^2 \leq 1 - 2 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta \tan^2 \gamma.$$

Dạng

ỨNG DỤNG LƯỢNG GIÁC

2.

TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x + y) = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{\sin^4 x}{y} + \frac{\cos^4 y}{x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x + y) = 2 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = \sin(x + y),$$

$$\text{suy ra: } x + y = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức: } \frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} \geq \frac{(a + b)^2}{m + n}$$

Suy ra: $P \geq \frac{(\sin^2 x + \sin^2 y)^2}{x + y} = \frac{2}{\pi}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{\pi}{4}$.

Do đó: $\min P = \frac{2}{\pi}$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $\frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1} \leq \frac{10}{3}$, với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc + a + c = b$.

Lời giải

Gọi P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh.

Từ giả thiết suy ra: $ac + a + \frac{1}{b} + c \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow$ Tồn tại tam giác ABC sao cho

$$a = \tan \frac{A}{2}, \frac{1}{b} = \tan \frac{B}{2}, c = \tan \frac{C}{2}$$

$$\text{Khi đó: } P = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \sin^2 \frac{B}{2} + 3 \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$= \cos A + \cos B + 3 - 3 \sin^2 \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 3 - 3 \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= \frac{10}{3} - 3 \left(\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq \frac{10}{3} \quad (\text{đpcm})$$

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

Lời giải

Đặt $a = \sqrt{2} \tan \alpha, b = \sqrt{2} \tan \beta, c = \sqrt{2} \tan \gamma$, với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

Ta cần chứng minh bất đẳng thức:

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha) \leq \frac{4}{9} \quad (*)$$

$$\text{Do } \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$= \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha.$$

$$\text{Và } \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \right)^3 \leq \cos^3 t, \text{ với } t = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

$$\text{Khi đó VT} (*) \leq \cos^3 t (\cos^3 t - \cos 3t) = 3 \cos^4 t (1 - \cos^2 t)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2\cos^4 t \sin^2 t = \cos^2 t \cdot \cos^2 t \cdot 2\sin^2 t \leq \left(\frac{2\cos^2 t + 2\sin^2 t}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}$$

Do đó $VT(*) \leq 3 \cdot \frac{4}{27} = \frac{4}{9}$. Từ đó ta có đpcm.

Ví dụ 4: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{x+y+z+4xyz}{1+4(xy+yz+zx)}$ trong đó $x, y, z > 0$

thỏa mãn điều kiện: $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16xyz = 1$.

Lời giải

Ta viết lại giả thiết như sau: $(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2 + 2(2x)(2y)(2z) = 1$

Từ đó suy ra tồn tại tam giác nhọn ABC sao cho:
$$\begin{cases} 2x = \cos A \\ 2y = \cos B \\ 2z = \cos C \end{cases}$$

Vì $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

nên suy ra: $\tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \tan^2 \frac{C}{2} \leq \frac{1}{27}$

$$\Rightarrow \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \geq 27 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1+2x)(1+2y)(1+2z) \geq 27(1-2x)(1-2y)(1-2z)$$

$$\Leftrightarrow 28(x+y+z+4xyz) \geq 13(1+4xy+4yz+4zx) \Rightarrow Q = \frac{x+y+z+xyz}{1+4(xy+yz+zx)} \geq \frac{13}{28}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{4}$. Vậy $\min Q = \frac{13}{28}$.

Ví dụ 5: Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{z(x-z)} + \sqrt{z(y-z)} \leq \sqrt{xy}$$

Lời giải

Vì $x, y > 0$ suy ra: $\sqrt{xy} > 0$, do đó: $\sqrt{z(x-z)} + \sqrt{z(y-z)} \leq \sqrt{xy}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{z(x-z)}{xy}} + \sqrt{\frac{z(y-z)}{xy}} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{z}{y}} \sqrt{\frac{x-z}{x}} + \sqrt{\frac{z}{x}} \sqrt{\frac{y-z}{y}} \leq 1$$

Ta cần chứng minh: $\sqrt{\frac{z}{y}} \sqrt{\frac{x-z}{x}} + \sqrt{\frac{z}{x}} \sqrt{\frac{y-z}{y}} \leq 1$.

Nhận xét: $\left(\sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{y-z}{y}}\right)^2 = 1$ và $\left(\sqrt{\frac{z}{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x-z}{x}}\right)^2 = 1$

Nên ta có thể đặt: $\begin{cases} \cos u = \sqrt{\frac{z}{y}} \\ \sin u = \sqrt{\frac{y-z}{y}} \end{cases}, u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và $\begin{cases} \cos v = \sqrt{\frac{z}{x}} \\ \sin v = \sqrt{\frac{x-z}{x}} \end{cases}, v \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Khi đó: $\sqrt{\frac{z}{y}}\sqrt{\frac{x-z}{x}} + \sqrt{\frac{z}{x}}\sqrt{\frac{y-z}{y}} = \cos u \cdot \sin v + \cos v \cdot \sin u = \sin(u+v)$, hiển nhiên.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $\left|(2a)^n + (1-a^2)^n\right| \leq (1+a^2)^n, \forall n \geq 2$

2. $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ với $x, y, z \in (0;1)$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$

Bài 2: Cho $a, b, c > 0$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \leq \frac{3}{2}$$

Bài 3: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c+1=4abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Bài 4: Cho $a, b, c \in (0;1)$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1-a^2}{a} + \frac{1-b^2}{b} + \frac{1-c^2}{c} \right)$$

Bài 5: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng:

$$xy + yz + zx \geq 3 + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}$$

Bài 6: Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab}$, trong đó $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=1$.

Bài 7: Cho các số thực x, y, z, t thỏa:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0 \\ t^2 + z^2 - 2t - 143 = 0 \\ xt + yz - x + t + 2z - 61 \geq 0 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{y^2}{25} + \frac{t^2}{144}$.

Bài 8: Cho phương trình $x^3 - px^2 + qx - p = 0$ có ba nghiệm thực không nhỏ hơn 1 và $p, q > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = \frac{q+3}{p}$.

Bài 9: Cho hai số thực x, y dương thỏa: $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = xy + \frac{1}{xy}$

Bài 10: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2xy + y^2}{2xy + 2x^2 + 1}$, với x khác y và thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 1$

Bài 11: Cho hai số thực x, y dương thỏa: $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$

Bài 12: Cho các số thực x, y thay đổi thỏa: $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$

Bài 13: Cho hai số thực x, y dương thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh rằng: $x^3 y^3 (x^3 + y^3) \leq 2$

Bài 14: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$.

Bài 15: Cho hệ:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 & (1) \\ u^2 + v^2 = 9 & (2) \\ xu + yv \geq 12 & (3) \end{cases}$$
 Tìm nghiệm của hệ để biểu thức $P = x + u$ và

$F = x \cdot u$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 16: Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn: $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = 3\sqrt{1+2x^2} + 2\sqrt{40+9y^2}$

Bài 17: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x\sqrt{2+y} + y\sqrt{2+x}$.

**Dạng
3.**

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

Phương pháp giải

Trong mọi tam giác ABC ta đều có:

- $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

Trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có:

- $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$
- $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

Các ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: tam giác nhọn ABC cân tại A khi nó thỏa điều kiện $\tan^2 A + \tan^2 B = 2 \tan^2 \frac{A+B}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{2 \sin(A+B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)} = \frac{2 \sin C}{\cos(A-B) - \cos C}$$

$$\text{Vì } \cos(A-B) \leq 1 \Rightarrow \cos(A-B) - \cos C \leq 1 - \cos C = 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin C}{\cos(A-B) - \cos C} \geq \frac{2 \sin C}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = 2 \cot \frac{C}{2} = 2 \tan \frac{A+B}{2}$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B \geq 2 \tan \frac{A+B}{2}$$

$$\text{Từ giả thiết: } \tan^2 A + \tan^2 B = 2 \tan^2 \frac{A+B}{2} \leq 2 \left(\frac{\tan A + \tan B}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(\tan^2 A + \tan^2 B) \leq \tan^2 A + \tan^2 B + 2 \tan A \tan B$$

$$\Leftrightarrow (\tan A - \tan B)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \tan A = \tan B \Leftrightarrow A = B \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\cos \frac{A}{2} \cos(B-C) + \cos A \cos \frac{B-C}{2} = 0$.

Chứng minh rằng: $\cos 2B + \cos 2C \leq 1$.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \cos \frac{A}{2} \left(2\cos^2 \frac{B-C}{2} - 1 \right) + \cos \frac{B-C}{2} \left(2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{A}{2} \right) - \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \left(2\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{B-C}{2} > 0 \text{ và } \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2} \text{ nên } (1) \Leftrightarrow 2\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ suy ra

$$\sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{(\sin B + \sin C)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } \cos 2y + \cos 2z = 2 - 2(\sin^2 y + \sin^2 z) \leq 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$$

Lời giải

$$P = \frac{3}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} - 1 = \frac{3}{3 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)} - 1 \leq \frac{3}{3 - \frac{9}{4}} - 1 = 3$$

Do đó: $P_{\max} = 3 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \cos 3A + \cos 3B - \cos 3C.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos 3C = \cos 3[\pi - (A+B)] = \cos [3\pi - 3(A+B)] = -\cos 3(A+B) \text{ nên}$$

$$P = \cos 3A + \cos 3B + \cos 3(A+B) = 2 \cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2 \cos^2 3\left(\frac{A+B}{2}\right) - 1$$

$$\Rightarrow P + \frac{3}{2} = 2 \cos^2 3\left(\frac{A+B}{2}\right) + 2 \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{1}{2} = f(x, y)$$

$$\Delta' = \cos^2 3\left(\frac{A-B}{2}\right) - 1 \leq 0 \Rightarrow P \geq -\frac{3}{2}$$

$$P = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ \cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 3\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1 \\ \cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \cos 3A = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = \frac{2\pi}{9} \\ A = \frac{4\pi}{9} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = \frac{2\pi}{9}, C = \frac{5\pi}{9} \\ A = B = \frac{4\pi}{9}, C = \frac{\pi}{9} \end{cases}$$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sin \frac{A}{2} \sqrt{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{A+C}{2} - \cos \frac{A-C}{2} \right) = \frac{1}{2} \cos \frac{A-C}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{A+C}{2}$$

$$\text{Vì } \cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2} \text{ và } \cos \frac{A-C}{2} \leq 1 \text{ nên } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$\text{Do đó } P \leq \frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{B}{2} \right) \sqrt{\sin \frac{B}{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \left(1 - \sin \frac{B}{2} \right) \sqrt{\sin \frac{B}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(1 - \sin \frac{B}{2} \right) \left(1 - \sin \frac{B}{2} \right) 2 \sin \frac{B}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{1 - \sin \frac{B}{2} + 1 - \sin \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{B}{2}}{3} \right)^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \cos \frac{A-C}{2} = 1 \\ 1 - \sin \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \\ \sin \frac{B}{2} = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có:

$$1. \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

$$2. \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3 \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)$$

Bài 2:

$$1. \text{ Chứng minh rằng tam giác ABC cân khi } h_a = \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}.$$

$$2. \text{ Chứng minh rằng tam giác ABC khi } S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \text{ thì } \triangle ABC \text{ cân.}$$

$$3. \text{ Chứng minh rằng tam giác ABC cân khi } 2\cos A + \cos B + \cos C = \frac{9}{4}.$$

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ không vuông. Chứng minh rằng:

$$3\tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C - 5(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C)$$

$$\leq 9 + \tan^2 A \tan^2 B + \tan^2 B \tan^2 C + \tan^2 C \tan^2 A.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng

1.

ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

Bài 1:

$$1. \text{ Ta có: } 0 \leq \cos^2 3x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq y \leq 3.$$

$$\bullet y = 1 \Leftrightarrow \cos^2 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \min y = 1$$

$$\bullet y = 3 \Leftrightarrow \cos^2 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \max y = 3$$

2. Ta có: $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow 2 \leq y \leq 1 + \sqrt{3}$

$$\bullet y = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \min y = 2$$

$$\bullet y = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \max y = 1 + \sqrt{3}$$

Bài 2:

1. Ta có $A^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

Vì $\sin 2x \leq 1$ nên $A^2 = 1 + \sin 2x \leq 1 + 1 = 2$ suy ra $-\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}$.

Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $A = \sqrt{2}$, $x = -\frac{3\pi}{4}$ thì $A = -\sqrt{2}$

Do đó $\max A = \sqrt{2}$ và $\min A = -\sqrt{2}$.

2. Ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} + \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \\ &= \frac{2 + 2\cos^2 2x}{4} = \frac{2 + 1 + \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x \end{aligned}$$

Vì $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x \leq 1$ suy ra $\frac{1}{2} \leq B \leq 1$.

Vậy $\max B = 1$ khi $\cos 4x = 1$ và $\min B = \frac{1}{2}$ khi $\cos 4x = -1$.

Bài 3:

1. Ta có $A = 2 - 2\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x - 2\sin x + 1$

Đặt $t = \sin x$, $|t| \leq 1$ khi đó biểu thức trở thành $A = 2t^2 - 2t + 1$

Xét hàm số $y = 2t^2 - 2t + 1$ với $|t| \leq 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
y	5	$\frac{1}{2}$	1

Từ bảng biến thiên suy ra $\max A = 5$ khi $t = -1$ hay $\sin x = 1$;

$$\min A = \frac{1}{2} \text{ khi } t = \frac{1}{2} \text{ hay } \sin x = \frac{1}{2}.$$

2. Ta có $P = 2 \sin x + 2 \sin x \cos x = 2 \sin x (1 + \cos x)$

$$\text{Suy ra } P^2 = 4 \sin^2 x (1 + \cos x)^2 = \sin^2 x (1 + 2 \cos x + \cos^2 x)$$

$$\text{Ta có } \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow \cos^2 x + \frac{1}{4} \geq \cos x \text{ suy ra}$$

$$P \leq \sin^2 x \left(1 + 2 \cos^2 x + \frac{1}{2} + \cos^2 x \right) = \sin^2 x \left(\frac{3}{2} + 3 \cos^2 x \right)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức $xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$\sin^2 x \left(\frac{5}{4} + 3 \cos^2 x \right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \sin^2 x \left(\frac{3}{2} + 3 \cos^2 x \right) \leq \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{3 \sin^2 x + \left(\frac{3}{2} + 3 \cos^2 x \right)}{2} \right]^2 = \frac{27}{16}$$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Bài 4:

1. Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ và $\cos x \geq -1$ nên: $3 + \sin x > 0$; $3 - \sin x > 0$ và $2 + \cos x > 0$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$6(2 + \cos x) \leq 2(9 - \sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 12 + 6 \cos x \leq 18 - 2(1 - \cos^2 x) \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 6 \cos x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(\cos x - 2) \geq 0$$

Do $\cos x \leq 1$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng $\Rightarrow$ đpcm.

2. Từ $\frac{\pi}{3} \leq \alpha; \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos \alpha; \cos \beta \leq \frac{1}{2}$, suy ra $\begin{cases} 0 < \cos \alpha + \cos \beta \leq 1 \\ 0 < \cos \alpha \cos \beta \leq \frac{1}{4} \end{cases}$

Đặt $a = \cos \alpha + \cos \beta$; $b = \cos \alpha \cos \beta$

Bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$\frac{2-a}{a} \leq \sqrt{\frac{1-a+b}{b}} \Leftrightarrow \left(\frac{2-a}{a} \right)^2 \leq \frac{1-a+b}{b} \Leftrightarrow (2-a)^2 b \leq a^2 (1-a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^3 - a^2 - 4ab + 4b \leq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a^2 - 4b) \leq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $a \leq 1$ và $a^2 - 4b = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 5: Ta có: $y = 5\sin(x + \alpha) - 1$, trong đó $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = \frac{3}{5} \end{cases}$

Suy ra $\min y = -6$; $\max y = 4$.

Bài 6: Ta có: $\sin^2 a + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 1$ nên từ điều kiện $\sin^2 a + \sin^2 b < 1$ suy ra:

$$b < \frac{\pi}{2} - a; \quad 0 < a + b < \frac{\pi}{2}.$$

Mặt khác ta có: $\sin^2(a + b) = \sin^2 a \cdot \cos^2 b + \sin^2 b \cdot \cos^2 a + 2\sin a \cdot \sin b \cdot \cos a \cdot \cos b$ (*)

Thay $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$ vào (*), ta được: $\sin^2 a \cdot \sin^2 b < 2\sin a \cdot \sin b \cdot \cos a \cdot \cos b$

$$\Leftrightarrow \sin a \cdot \sin b < \cos a \cdot \cos b \Leftrightarrow 0 < \cos(a + b)$$

Do $2\sin a \sin b > 0$ nên ta có thể chia hai vế cho $2\sin a \sin b$

Bất đẳng thức sau cùng hiển nhiên đúng do $0 < a + b < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 7: Ta có: $y = 1 - \cos 2x + 3\sin 2x - 2(1 + \cos 2x)$

$$= 3\sin 2x - 3\cos 2x - 1 = 3\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

Suy ra $\min y = -3\sqrt{2} - 1$; $\max y = 3\sqrt{2} - 1$.

Bài 8: $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \tan^2 \beta} + \frac{1}{1 + \tan^2 \gamma} = 2$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha \tan^2 \beta + \tan^2 \beta \tan^2 \gamma + \tan^2 \gamma \tan^2 \alpha = 1 - 2\tan^2 \alpha \tan^2 \beta \tan^2 \gamma$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\frac{\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha}{3}\right)^2 \leq \tan^2 \alpha \tan^2 \beta + \tan^2 \beta \tan^2 \gamma + \tan^2 \gamma \tan^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow (\tan \alpha \tan \beta - \tan \beta \tan \gamma)^2 + (\tan \beta \tan \gamma - \tan \gamma \tan \alpha)^2 + (\tan \gamma \tan \alpha - \tan \alpha \tan \beta)^2 \geq 0$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha \tan \beta = \tan \beta \tan \gamma \\ \tan \beta \tan \gamma = \tan \gamma \tan \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha = \tan \beta = \tan \gamma \\ \tan \gamma \tan \alpha = \tan \alpha \tan \beta \end{cases}$$

Dạng 2. ỨNG DỤNG LƯỢNG GIÁC TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

Bài 1:

1. Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow \left| \left(\frac{2a}{1+a^2} \right)^n + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} \right)^n \right| \leq 1$ (1)

Đặt $a = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$. Khi đó (1) trở thành $|\sin^n 2t + \cos^n 2t| \leq 1$ (2)

Do $-1 \leq \sin 2t, \cos 2t \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} |\sin 2t|^n \leq \sin^2 2t \\ |\cos 2t|^n \leq \cos^2 2t \end{cases}, \forall n \geq 2$

Suy ra: $|\sin^n 2t + \cos^n 2t| \leq |\sin 2t|^n + |\cos 2t|^n \leq \sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$

Suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm

2. Từ giả thiết ta suy ra tồn tại một tam giác nhọn ABC sao cho

$$x = \tan \frac{A}{2}, y = \tan \frac{B}{2}, z = \tan \frac{C}{2}.$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$ (*)

Do tam giác ABC nhọn $\Rightarrow \tan A, \tan B, \tan C > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{\tan A \tan B \tan C}$

Mà: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

Nên suy ra: $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{\tan A + \tan B + \tan C}$.

Suy ra: $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$ đúng.

Từ đó ta có đpcm.

Bài 2: Từ $a + b + c = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{c}} \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \sqrt{\frac{ab}{c}} = 1$

Nên tồn tại tam giác ABC sao cho $\sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan \frac{A}{2}; \sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan \frac{B}{2}; \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan \frac{C}{2}$

Ta cần chứng minh: $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$.

Bài 3: Ta có $a + b + c + 1 = 4abc \Leftrightarrow \frac{1}{4bc} + \frac{1}{4ca} + \frac{1}{4ab} + \frac{2}{8abc} = 1$

Nên tồn tại tam giác ABC sao cho $\frac{1}{ab} = \sin^2 \frac{A}{2}; \frac{1}{bc} = \sin^2 \frac{B}{2}; \frac{1}{ca} = \sin^2 \frac{C}{2}$

Và ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \geq \frac{3}{2} \geq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$$

Bài 4: Từ giả thiết suy ra tồn tại tam giác nhọn ABC sao cho

$$a = \tan \frac{A}{2}, b = \tan \frac{B}{2}, c = \tan \frac{C}{2}.$$

Khi đó ta cần chứng minh: $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3 \left(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} \right)$ (*)

Sử dụng đẳng thức: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

Và bất đẳng thức: $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$.

Ta có được bất đẳng thức (*).

Bài 5: Từ giả thiết suy ra tồn tại tam giác ABC nhọn sao cho

$$x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C.$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A \geq 3 + \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B \geq 3 \cos A \cos B \cos C + \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C - \cos(A + B + C) \geq 3 \cos A \cos B \cos C + \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 2 \cos A \cos B \cos C + \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \quad (*)$$

$$\text{Vì } \cos A \cos B \cos C \leq \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \right)^3 \leq \frac{1}{8}$$

$$\text{Và } \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \leq \frac{1}{3} (\cos A + \cos B + \cos C)^2 = \frac{3}{4}$$

nên ta có (*).

$$\text{Bài 6: Ta có: } a + b + c = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{c}} \sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{ac}{b}} \sqrt{\frac{cb}{a}} + \sqrt{\frac{cb}{a}} \sqrt{\frac{ab}{c}} = 1$$

$$\text{Suy ra tồn tại tam giác ABC sao cho: } \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan \frac{A}{2}, \sqrt{\frac{ac}{b}} = \tan \frac{B}{2}, \sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned}\text{Khi đó: } P &= \frac{1}{1+\frac{bc}{a}} + \frac{1}{1+\frac{ca}{b}} + \frac{\sqrt{\frac{ab}{c}}}{1+\frac{ab}{c}} = \frac{1}{1+\tan^2 \frac{C}{2}} + \frac{1}{1+\tan^2 \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{A}{2}}{1+\tan^2 \frac{A}{2}} \\ &= \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 1 + \frac{1}{2}(\sin A + \cos B + \cos C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Mặt khác: } \cos B + \cos C + \sin A + \sin \frac{\pi}{3} &= 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} + 2 \sin \frac{A+\frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{A-\frac{\pi}{3}}{2} \\ &\leq 2 \cos \frac{B+C}{2} + 2 \cos \frac{A-\frac{\pi}{3}}{2} \\ &= 4 \cos \frac{B+C+A-\frac{\pi}{3}}{4} \cos \frac{B+C-A+\frac{\pi}{3}}{4} \leq 4 \cos \frac{\pi-\frac{\pi}{3}}{4} = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \sin A + \cos B + \cos C \leq 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ nên } P \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} B=C=\frac{\pi}{6} \\ A=\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a=2\sqrt{3}-3 \\ c=7-4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max P = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Bài 7: Ta viết lại giả thiết: } \begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 = 25 & (1) \\ (t-1)^2 + z^2 = 144 & (2) \\ (x+1)(t-1) + z(y+2) \geq 60 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra tồn tại hai góc $\alpha, \beta \in [0; 2\pi)$ sao cho

$$x+1=5\cos\alpha, y+2=5\sin\alpha, t-1=12\cos\beta, z=12\sin\beta$$

Thay vào (3) ta có: $60\cos\alpha\cos\beta + 60\sin\alpha\sin\beta \geq 60$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) \geq 1 \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{25}(5\sin\alpha - 2)^2 + \frac{1}{144}(12\cos\alpha + 1) = \frac{4201}{3600} - \frac{4}{5}\sin\alpha + \frac{1}{6}\cos\alpha;$$

$$-\frac{\sqrt{601}}{30} \leq -\frac{4}{5}\sin\alpha + \frac{1}{6}\cos\alpha \leq \frac{\sqrt{601}}{30}$$

$$\text{Suy ra } \frac{4201}{3600} - \frac{\sqrt{601}}{30} \leq A \leq \frac{4201}{3600} + \frac{\sqrt{601}}{30}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow -\frac{5}{4}\sin\alpha = 6\cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{601}} \\ \sin\alpha = \mp \frac{24}{\sqrt{601}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min A = \frac{4201}{3600} - \frac{\sqrt{601}}{30}; \quad \max A = \frac{4201}{3600} + \frac{\sqrt{601}}{30}.$$

Bài 8: Gọi $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$ là ba nghiệm của phương trình đã cho. Khi đó theo định lý

$$\text{Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x_1 x_2 x_3 = p & (1) \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = q & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow$ tồn tại tam giác ABC để $x_1 = \tan A$; $x_2 = \tan B$; $x_3 = \tan C$,

$$\text{với } \frac{\pi}{4} \leq A \leq B \leq C < \frac{\pi}{2} \Rightarrow F = \cot A + \cot B + \cot C + 3 \cot A \cot B \cot C$$

$$\begin{aligned} &= \cot A + \frac{2 \sin A}{\cos(B-C) + \cos A} + 3 \cot A \frac{\cos(B-C) - \cos A}{\cos(B-C) + \cos A} \\ \Rightarrow F &\leq \frac{1}{2 \tan \frac{A}{2}} + 3 \tan \frac{A}{2} - \frac{3}{2} \tan^3 \frac{A}{2} = \frac{1}{2t} + 3t - \frac{3}{2} t^3 = f(t). \end{aligned}$$

$$\text{Trong đó } t = \tan \frac{A}{2} \text{ và } t \in \left[\sqrt{2} - 1; \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \text{ do } \frac{A}{2} \in \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{6} \right]$$

$$\text{Ta chứng minh được: } f(t) \leq f(\sqrt{2} - 1) = 8 - 4\sqrt{2}, \quad \forall t \in \left[\sqrt{2} - 1; \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\text{Vậy } \max F = 8 - 4\sqrt{2}, \text{ đạt được khi } A = \frac{\pi}{4}; B = C = \frac{3\pi}{8}.$$

$$\text{Bài 9: Từ giả thiết: } \begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ nên ta có thể đặt: } \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } T = \sin^2 t \cdot \cos^2 t + \frac{1}{\sin^2 t \cdot \cos^2 t} = \frac{1}{4} \sin^2 2t + \frac{4}{\sin^2 t}$$

$$\text{Đặt } u = \sin 2t, 0 < u \leq 1, \text{ khi đó: } T = \frac{1}{4} u^2 + \frac{4}{u^2} = f(u)$$

$$\text{Ta có: } f'(u) = \frac{1}{2} u - \frac{8}{u^3}, \quad f'(u) = 0 \Rightarrow u = \pm 2.$$

Bài 10:

$$\text{Với giả thiết: } \begin{cases} x \neq y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ ta có thể đặt: } \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, t \in [0; 2\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} \right\} \end{cases}, \text{ khi đó, ta có:}$$

$$P = \frac{2 \sin t \cdot \cos t + \cos^2 t}{2 \sin t \cdot \cos t + 2 \sin^2 t + 1} = \frac{2 \sin 2t + \cos 2t + 1}{2 \sin 2t - 2 \cos 2t + 4}$$

$$\Leftrightarrow (2P - 2) \sin 2t - (2P + 1) \cos 2t = 1 - 4P$$

$$(\text{vì } 2 \sin 2t - 2 \cos 2t + 4 \neq 0, \forall t)$$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow (2P - 2)^2 + (2P + 1)^2 \geq (1 - 4P)^2$$

$$\Leftrightarrow 8P^2 - 4P - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq P \leq 1$$

$$\text{Vậy: } \text{Max } P = 1 \Leftrightarrow \cos 2t = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = 0 = x \\ \sin t = \pm 1 = y \end{cases}$$

$$\text{Min } P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \sin 2t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = x \\ \sin t = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} = y \end{cases}$$

$$\text{Bài 11: } 0 < x, y < 1 \text{ đặt: } \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^2 t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$Q = \frac{\cos^2 t}{\sin t} + \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{\cos^3 t + \sin^3 t}{\sin t \cdot \cos t} = \frac{(\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cdot \cos t)}{\sin t \cdot \cos t},$$

$$\text{Đặt } u = \sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), 1 < u \leq \sqrt{2}.$$

$$Q = \frac{3u - u^3}{u^2 - 1} = f(u), \text{ ta có: } f'(u) = \frac{-(u^4 + 3)}{(u^2 - 1)^2} < 0, \forall u \text{ suy ra hàm số } f(u) \text{ nghịch biến}$$

trên $(1; \sqrt{2}]$.

$$\text{Do đó: } \text{Min } Q = f(\sqrt{2}) = 2 \Leftrightarrow u = 2 \Rightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Bài 12: Từ giả thiết ta có thể đặt: } \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases}$$

$$P = 4\sqrt{2}(\cos t + \sin t)(1 - \sin t \cdot \cos t) - 6 \sin t \cdot \cos t.$$

$$\text{Đặt } u = \sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}, \text{ ta có:}$$

$$P = -2\sqrt{2}u^3 - 3u^2 + 6\sqrt{2}u + 3 = f(u)$$

$$f'(u) = -6\sqrt{2}u^2 - 6u + 6\sqrt{2}, f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ hoặc } u = -\sqrt{2}.$$

$$f(-\sqrt{2})=7, \quad f(\sqrt{2})=1, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{13}{2}.$$

Bài 13: Từ giả thiết: $\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$, nên ta có thể đặt: $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 2\sin^2 t, \quad t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Ta có: $x^3 y^3 (x^3 + y^3) = 512 (\sin t \cdot \cos t)^6 (\cos^6 t + \sin^6 t) = 8 \sin^6 2t \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 t\right)$

Bài 14: Vì $(\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{4-x})^2 = 3$, nên đặt: $\begin{cases} \sqrt{x-1} = \sqrt{3} \cos t \\ \sqrt{4-x} = \sqrt{3} \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Ta có: $A = \sqrt{3} (\cos t + \sin t) = \sqrt{6} \sin \left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Mặt khác, vì: $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{6} \sin \left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{6}$

Vậy: $\max A = \sqrt{6}$, $\min A = \sqrt{3}$.

Bài 15: Đặt: $\begin{cases} x = 4 \cos a \\ y = 4 \sin a, \quad a \in [0; 2\pi] \end{cases}$ và $\begin{cases} u = 3 \cos b \\ v = 3 \sin b, \quad b \in [0; 2\pi] \end{cases}$

thay vào (3) ta được: $x \cdot u + y \cdot v = 12 (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b) \geq 12 \Leftrightarrow \cos(a-b) \geq 1$.

Nhưng vì $\cos(a-b) \leq 1$, nên suy ra: $\cos(a-b) = 1$ khi $a = b$. Do đó:

• $P = x + u = 4 \cos a + 3 \cos a = 7 \cos a \leq 7$.

Vậy $\max P = 7 \Leftrightarrow a = b = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow a = b = 0$ hoặc $a = b = 2\pi$, tương ứng với nghiệm của hệ là: $x = 4, y = 0, u = 3, v = 0$.

• $F = x \cdot u = 4 \cos a \cdot 3 \cos a = 12 \cos^2 a \leq 12$.

Vậy $\max F = 12 \Leftrightarrow \cos a = \pm 1 \Leftrightarrow a = k\pi$

$\Rightarrow a = b = 0$, $a = b = \pi$ hoặc $a = b = 2\pi$, suy ra tương ứng với nghiệm của hệ là:

$x = 4, y = 0, u = 3, v = 0$ và $x = -4, y = 0, u = -3, v = 0$.

Bài 1:

1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$1 - \cos^2 A + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \cos^2 A + \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A - \cos A \cos(B - C) + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\cos A - \frac{\cos(B - C)}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2(B - C) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

$$2. \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

$$\text{Đặt } x = \cot \frac{A}{2}; y = \cot \frac{B}{2}; z = \cot \frac{C}{2} \text{ thì } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = xyz \end{cases}$$

Lúc này bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $x + y + z \geq 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$

$$\Leftrightarrow (x + y + z) \geq \frac{3(xy + yz + zx)}{xyz} \Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cot A = \cot B = \cot C \Leftrightarrow A = B = C$

Bài 2:

1. Trong mọi tam giác ta luôn có: $h_a \leq l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$, mà $b + c \geq 2\sqrt{bc}$

$$\Rightarrow \frac{2bc}{b+c} \leq \frac{bc}{\sqrt{bc}} = \sqrt{bc} \Rightarrow \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2} \Rightarrow h_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2} \text{ đpcm.}$$

2. Ta có: $a^2 + b^2 \leq 2ab \Rightarrow \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \geq \frac{1}{2}ab \geq \frac{1}{2}ab \sin C = S$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \geq S \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân nếu nó thỏa mãn điều kiện đề bài.}$$

3. Ta có: $2 \cos A + \cos B + \cos C = 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} \right) + 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}$

$$\begin{aligned}
&= -4\sin^2 \frac{A}{2} + 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \\
&= -\left(2\sin \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{B-C}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{B-C}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \\
&= -\left(2\sin \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{B-C}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{B-C}{2} + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $B = C \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 3: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$4\tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C - 4(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C) - 8 \leq (1 + \tan^2 A)(1 + \tan^2 B)(1 + \tan^2 C)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\cos^2 A} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 B} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 C} - 1\right) - 4\left(\frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} - 3\right) - 8 \\
&\leq \frac{1}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{4}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} - \left(\frac{1}{\cos^2 A \cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 B \cos^2 C} + \frac{1}{\cos^2 C \cos^2 A}\right) \\
&\leq \frac{1}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos 2A + \cos 2B) + 4\cos^2 C + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(A+B)\cos(A-B) + 4\cos^2 C + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 C - 4\cos C \cos(A-B) + 1 \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

○ CHỦ ĐỀ 4

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Dạng

1.

PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y = \frac{5}{4}$. Chứng minh rằng: $\frac{4}{x} + \frac{1}{4y} \geq 5$

Lời giải

Cách 1: Từ $x + y = \frac{5}{4}$ và $\frac{4}{x} + \frac{1}{4y} \geq 5$, ta cần chứng minh: $\frac{4}{x} + \frac{1}{5-4x} \geq 5$ (*)

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow 4(5-4x) + x \geq 5x(5-4x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1, y = \frac{1}{4}$

Cách 2: Nhận thấy: $(x+y)\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{4y}\right) = 4 + \frac{1}{4} + \frac{4y}{x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{17}{4} + 2 = \frac{25}{4}$, suy ra

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{4y} \geq 5$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1, y = \frac{1}{4}$

Ví dụ 2: Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

Đề thi Đại học khối D năm 2009

Lời giải

Cách 1: Nhận xét: Vai trò của x, y giống nhau (đối xứng).

$$S = 12(x^3 + y^3) + 16x^2y^2 + 34xy = 12(x+y)(x^2 + y^2 - xy) + 16x^2y^2 + 34xy$$

$$\text{Hay } S = 12(x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) + 16x^2y^2 + 34xy = \left(4xy - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16}$$

$$\text{Vì } x, y \text{ không âm và thỏa mãn } x+y=1 \text{ suy ra: } 0 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq 4xy - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \leq \left(4xy - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16} \leq \frac{25}{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } S = \frac{25}{2} \text{ khi } x=y=\frac{1}{2}$$

$$\text{và giá trị nhỏ nhất của } S=0 \text{ khi } x=0, y=1.$$

$$\text{Cách 2: Do } x+y=1 \text{ nên: } S = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 9xy + 25xy$$

$$= 16x^2y^2 + 12\left[(x+y)^3 - 3xy(x+y)\right] + 34xy = 26x^2y^2 - 2xy + 12.$$

$$\text{Đặt } t = xy, \text{ ta được: } S = 16t^2 - 2t + 12; 0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 16t^2 - 2t + 12 \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{1}{4}\right]$$

$$f'(t) = 32t - 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{16}; f(0) = 12, f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}, f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}.$$

$$\text{Vậy } \max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}; \min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f(0) = 12.$$

$$\text{Giá trị lớn nhất của } S \text{ bằng } \frac{25}{2} \text{ khi } \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của } S = 12 \text{ khi } x=0; y=1.$$

Ví dụ 3: Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$. Chứng minh rằng:

$$\cos x + \cos y \leq 1 + \cos(xy)$$

Lời giải

$$\text{Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: } 0 \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \sqrt{xy} \geq \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq 2 \cos \frac{x+y}{2} \leq 2 \cos \sqrt{xy}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh: $1 + \cos(xy) \geq 2 \cos \sqrt{xy} \Leftrightarrow 1 + \cos(xy) - 2 \cos \sqrt{xy} \geq 0$
 $\Leftrightarrow 1 + \cos t^2 - 2 \cos t \geq 0$ (1), với $t = \sqrt{xy}$, $t \in [0; \frac{\pi}{3}]$.

Xét hàm số $f(t) = 1 + \cos t^2 - 2 \cos t$, $t \in [0; \frac{\pi}{3}]$

Ta có: $f'(t) = -2t \sin t^2 + 2 \sin t = 2(\sin t - t \sin t^2)$; $f'(1) = 0$

* Nếu $t \in [0; 1) \Rightarrow t > t^2 \Rightarrow \sin t > \sin t^2 > t \sin t^2 \Rightarrow f'(t) > 0$

* Nếu $t \in (1; \frac{\pi}{3}] \Rightarrow t < t^2 \Rightarrow \sin t < \sin t^2 < t \sin t^2 \Rightarrow f'(t) < 0$.

$$f(0) = 0; f(1) = 1 - \cos 1 > 0; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi^2}{9}\right) > 0$$

Lập bảng biến thiên $\Rightarrow f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \text{đpcm.}$

**Dạng
2.**

PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐẠO HÀM

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một đại lượng biến thiên A ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Chọn biến số, x chẳng hạn.

Bước 2: Giới hạn biến x: $x \in [a; b], (a; b), (-\infty; a), (b; +\infty)$

Bước 3: Khảo sát $f(x)$ với x thỏa điều kiện bước 2.

Bạn đọc có thể xem lại dạng toán này, những bài tập cơ bản trong cuốn: Khảo sát hàm số và ứng dụng đạo hàm - cùng tác giả.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $2x - y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$

Lời giải

Ta có: $y = 2x - 2$, khi đó $P = \sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$f'(x) = \frac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}} + \frac{5x-10}{\sqrt{5x^2-20x+25}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (5x-2)(5x-10) \leq 0 \\ \left(\frac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}} \right)^2 = \left(\frac{5x-10}{\sqrt{5x^2-20x+25}} \right)^2 \quad (*) \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (*) về dạng $\begin{cases} \frac{2}{5} \leq x \leq 2 \\ 24x^2 - 16x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\min f(x) = 2\sqrt{5}$ khi $x = \frac{2}{3}$

Vậy, $\min P = 2\sqrt{5}$ xảy ra khi và chỉ khi $(x; y) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Ví dụ 2: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^3 \leq y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 8x + 16$.

Lời giải

Nếu $x > 0$ thì $y \geq x^3 > 0 \Rightarrow y^2 \geq x^6$ khi đó $P \geq x^6 + x^2 - 8x + 16$.

Xét hàm số $f(x) = x^6 + x^2 - 8x + 16$ với $x > 0$

Ta có: $f'(x) = 6x^5 + 2x - 8 = (x-1) \cdot 2 \cdot (3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4)$

$\forall x \in (0; +\infty)$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ vì $3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4 > 0$ với

$\forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = 10$.

Giá trị nhỏ nhất của P là 10 đạt được khi $x = 1, y = 1$.

Nếu $x \leq 0$ thì $-x \geq 0, x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ nên $P \geq 16$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là 10 đạt được khi $x = 1, y = 1$.

Ví dụ 3: Cho $x > 0$ và số thực y thỏa mãn: $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y \leq 14 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất và

nhỏ nhất của biểu thức: $Q = 3x^2y - xy^2 - 2x(x^2 - 1)$

Lời giải

Từ giả thiết $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y \leq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + 3}{x} \\ 2x + 3 \cdot \frac{x^2 + 3}{x} \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + 3}{x} \\ 1 \leq x \leq \frac{9}{5} \end{cases}$

$$\text{Khi đó } Q = 3x^2 \left(\frac{x^2+3}{x} \right) - x \left(\frac{x^2+3}{x} \right)^2 - 2x(x^2-1) = 5x - \frac{9}{x}.$$

Xét hàm số: $f(x) = 5x - \frac{9}{x}$, xác định và liên tục trên đoạn $\left[1; \frac{9}{5}\right]$.

Ta có: $f'(x) = 5 + \frac{9}{x^2} > 0, \forall x \in \left(1; \frac{9}{5}\right)$, do đó trên đoạn $\left[1; \frac{9}{5}\right]$ hàm số $f(x)$ luôn đồng biến và $f(1) = -4, f\left(\frac{9}{5}\right) = 4$.

$$\text{Do đó } \max Q = \max_{x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]} f(x) = 4 \text{ khi } x = \frac{9}{5} \text{ và } \min Q = \min_{x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]} f(x) = -4 \text{ khi } x = 1.$$

Ví dụ 4: Cho bốn số nguyên a, b, c, d thay đổi thỏa: $1 \leq a < b < c < d \leq 50$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

Lời giải

Vì $1 \leq a < b < c < d \leq 50$ và a, b, c, d là các số nguyên nên $c \geq b+1$.

$$\text{Suy ra: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq \frac{1}{b} + \frac{b+1}{50} = f(b).$$

Ta thấy $2 \leq b \leq 48$ nên ta xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x+1}{50}, x \in [2; 48]$

$$\text{Ta có } f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{50} \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$$

Lập bảng biến thiên ta được $\min_{x \in [2; 48]} f(x) = f(5\sqrt{2})$

Do 7 và 8 là hai số nguyên gần $5\sqrt{2}$ nhất vì vậy:

$$\min_{\substack{x \in [2; 48] \\ x \in \mathbb{Z}}} f(b) = \min \{f(7); f(8)\} = \min \left\{ \frac{53}{175}; \frac{61}{200} \right\} = \frac{53}{175}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P = \frac{53}{175}.$$

Ví dụ 5: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau

$$y = \frac{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{3-x} + 2}{2\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} + 1} \text{ trên } [-1; 3].$$

Lời giải

$$\text{Vì } (\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{3-x})^2 = 4 \Rightarrow \text{tồn tại số thực } t \in [0;1] \text{ sao cho } \sqrt{x+1} = \frac{4t}{1+t^2},$$

$$\sqrt{3-x} = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}.$$

$$\text{Khi đó: } y = \frac{2t^2 - 4t - 6}{t^2 - 8t - 3} = f(t), \text{ xét } f(t) = \frac{2t^2 - 4t - 6}{t^2 - 8t - 3} \text{ với } t \in [0;1]$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-12t^2 - 36}{(t^2 - 8t - 3)^2} < 0 \quad \forall t \in [0;1] \text{ nên } f(t) \text{ nghịch biến trên đoạn } [0;1]$$

$$\text{Hơn nữa: } f(0) = 2, f(1) = \frac{4}{5}$$

$$\text{Vậy } \min y = \min_{t \in [0;1]} f(t) = f(1) = \frac{4}{5} \text{ khi } x = 1, \max y = \max_{t \in [0;1]} f(t) = f(0) = 2 \text{ khi } x = 0.$$

Ví dụ 6: Cho hai số thực $a, b \geq 0$. Chứng minh: $a^4 + b^4 \geq a^3b + b^3a$ (1)

Lời giải

* Nếu một trong hai số a, b bằng 0 thì (1) luôn đúng.

* Với $a \neq 0$, đặt $b = ta$.

$$\text{Khi đó (1) trở thành: } a^4(1+t^4) \geq a^4(t+t^3) \Leftrightarrow t^4 - t^3 - t + 1 \geq 0.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^4 - t^3 - t + 1, \text{ có: } f'(t) = 4t^3 - 3t^2 - 1 = (t-1)(4t^2 + t + 1)$$

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1. \text{ Lập bảng biến thiên, từ đó suy ra } f(t) \geq f(0) = 0 \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 7: Cho các số thực dương x, y .

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } P = \frac{4xy^2}{\left(x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right)^3}.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } x = ty, t > 0, \text{ ta có } P = \frac{4t}{\left(t + \sqrt{t^2 + 4}\right)^3}. \text{ Xét } f(t) = \frac{4t}{\left(t + \sqrt{t^2 + 4}\right)^3}, t > 0$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{4(\sqrt{t^2 + 4} - 3t)}{\sqrt{t^2 + 4}(t + \sqrt{t^2 + 4})^3} \text{ và } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 4} = 3t \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta được } \max_{(0;+\infty)} f(t) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{8}.$$

Ví dụ 8: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y - 1 = \sqrt{2x - 4} + \sqrt{y + 1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = (x + y)^2 - \sqrt{9 - x - y} + \frac{1}{\sqrt{x + y}}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 2; y \geq -1; 0 < x + y \leq 9$

Ta có $0 \leq x + y - 1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x - 2} + 1 \cdot \sqrt{y + 1} \leq \sqrt{3(x + y - 1)} \Rightarrow (x + y - 1)^2 \leq 3(x + y - 1)$
 $\Rightarrow 0 \leq x + y - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x + y \leq 4$.

Đặt $t = x + y, t \in [1; 4]$, ta có $S = t^2 - \sqrt{9 - t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$

$$S'(t) = 2t + \frac{1}{2\sqrt{9 - t}} - \frac{1}{2t\sqrt{t}} > 0, \forall t \in [1; 4].$$

Vậy $S(t)$ đồng biến trên $[1; 4]$.

$$\text{Suy ra } S_{\max} = S(4) = 4^2 - \sqrt{9 - 4} + \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{33 - 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 4; y = 0;$$

$$S_{\min} = S(1) = 2 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2; y = -1.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$ trên miền xác định của nó

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y = |x^3 - 3x^2 + 1|$ với $x \in [-2; 1]$

Bài 3: Cho a, b, c là ba số thực dương và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4: Xét các số thực không âm thay đổi x, y, z thỏa điều kiện: $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của: $S = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$.

Bài 5:

1. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Tìm giá trị p, q để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + px + q|$ trên đoạn $[-1; 1]$ là bé nhất.

3. Tìm các giá trị a, b sao cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và có

giá trị nhỏ nhất bằng -1.

4. Tùy theo các giá trị của tham số a , hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:
 $y = -2x^2 - 2(a+1)x + a - 3$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Bài 6: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn:

$$1. 2(x^2 + y^2) = xy + 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2$.

$$2. (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y^2 + x^2 + 2 = 3(x^2 + y^2).$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2$.

3. $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$C = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$$

$$D = \frac{2xy + y^2}{2x^2 + 2xy + 1}$$

$$E = \frac{x^2 - xy + y^2}{2x^2 + xy + y^2 - 1}$$

4. Cho x, y là hai số thực dương và thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + xy$.

Bài 7: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$1. F = \frac{xy}{x + y + 3}$$

$$2. K = (1+x)\left(1 + \frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Bài 8:

1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $0 < x, y \leq 1$ và $x + y = 4xy$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = x^2 + y^2 - xy$.

2. Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^2 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

3. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $x + y \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{x^2 + y^2 + xy}{x + y} + \frac{x + y + 3}{xy}$.

Bài 9:

1. Cho $x > 0, y > 0$ thỏa mãn $x + y + 1 = 3xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = \frac{3x}{y(x+1)} + \frac{3y}{x(y+1)} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$.

2. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $1 - y^2 = x(x - y)$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^6 + y^6 - 1}{x^3y + xy^3}$.

3. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = xy + 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{8}{17} \leq 2(x^4 + y^4) + 12x^2y^2 \leq \frac{16}{9}$

4. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $ab + a + b = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} - a^2 - b^2$.

5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $ab + a + b = 3$.

Chứng minh: $\frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2}$

Bài 10:

1. Cho x, y là hai số thực thay đổi thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của: $Q = (x^3 + 1)(y^3 + 1)$

2. Cho x, y là hai số thực thay đổi thỏa mãn:

a. $y \leq 0, x^2 + x = y + 12$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = xy + x + 2y + 17$.

b. $x^2 + y^2 = x + y$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$.

c. $x, y \neq 0$ và $xy(x + y) = x^2 + y^2 - x - y + 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $N = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Dạng PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

3. KẾT HỢP VỚI ĐẠO HÀM

Bạn đọc có thể xem lại dạng toán này, những bài tập cơ bản trong cuốn: Khảo sát hàm số và ứng dụng đạo hàm - cùng tác giả.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $Q = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

Lời giải

$$x^2 + y^2 + xy = 3 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 3 = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow (x+y)^2 \leq 4$$

$$\text{Đặt } t = x+y, \quad t \in [-2; 2]$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Q &= x^3 + y^3 - 3x - 3y = (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3x - 3y \\ &= t^3 - 3(t^2 - 3)t - 3t = -2t^3 + 6t \end{aligned}$$

$$\text{Xét } f(t) = -2t^3 + 6t \text{ với } t \in [-2; 2]$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = -6t^2 + 6, \text{ trong khoảng } (-2; 2): f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

$$f(-2) = -2, \quad f(-1) = -4, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = 2$$

$$\max_{t \in [-2; 2]} f(t) = 4 \text{ khi } t = 1, \text{ suy ra } \max P = 4 \text{ khi } \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1; y = 2 \text{ hoặc } x = 2; y = -1;$$

$$\min_{t \in [-2; 2]} f(t) = -4 \text{ khi } t = -1, \text{ suy ra } \min P = -4 \text{ khi } \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1; y = -2 \text{ hoặc } x = -2; y = 1.$$

$$\text{Vậy, } \max P = 4 \text{ khi } (x; y) = (-1; 2), (2; -1) \text{ và } \min P = -4 \text{ khi } (x; y) = (1; -2), (-2; 1).$$

Ví dụ 2: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$

Lời giải

$$P = 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy = 2(x+y)(2 - xy) - 3xy \text{ vì } x^2 + y^2 = 2.$$

$$\text{Hơn nữa } (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 2 + 2xy \Rightarrow xy = \frac{(x+y)^2 - 2}{2}$$

$$\text{và } (x-y)^2 \geq 0 \text{ tức } 2(x^2 + y^2) \geq x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$$

$$\text{Hay } (x+y)^2 \leq 4, \text{ nếu đặt } t = x+y \text{ thì } -2 \leq t \leq 2$$

$$\text{Khi đó } P = 2t \left(2 - \frac{t^2 - 2}{2} \right) - 3 \left(\frac{t^2 - 2}{2} \right) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3 \text{ với } t \in [-2; 2].$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = -3t^2 - 3t + 6, \text{ với } \forall t \in (-2; 2): f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$f(-2) = -7, \quad f(1) = \frac{13}{2}, \quad f(2) = 1$$

$$\max_{t \in [-2; 2]} f(t) = \frac{13}{2} \text{ khi } t = 1, \quad \min_{t \in [-2; 2]} f(t) = -7 \text{ khi } t = -2. \text{ Suy ra:}$$

$$\max P = \frac{13}{2} \text{ khi } (x; y) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$\min P = -7 \text{ khi } (x; y) = (1; 1).$$

Ví dụ 3: Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn $x + y = 1$. Chứng minh rằng:

$$0 \leq \frac{2(x^2y + xy^2)}{x^2 + y^2 - xy} \leq 2.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } P = \frac{2(x^2y + xy^2)}{x^2 + y^2 - xy} = \frac{2xy(x+y)}{(x+y)^2 - 3xy} = \frac{2xy}{1-3xy} \text{ vì } x+y=1$$

$$\text{Mà } x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \text{ suy ra } 0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Đặt } t = xy, \quad t \in \left[0; \frac{1}{4}\right], \text{ xét hàm số } f(t) = \frac{2t}{1-3t} \text{ với } t \in \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{2}{(1-3t)^2} > 0, \quad \forall t \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \text{hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên đoạn } \left[0; \frac{1}{4}\right]$$

$$\text{và } f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = 2, \text{ suy ra } 0 \leq f(t) \leq 2 \text{ hay } 0 \leq P \leq 2.$$

Đẳng thức xảy ra $P = 0$ khi $(x; y) = (0; 1), (1; 0)$ và $P = 2$ khi $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 4: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện: $2x^2 + 2y^2 - xy = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 1 = 2x^2 + 2y^2 - xy = 2(x+y)^2 - 5xy \geq -5xy \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{5}$$

$$1 = 2x^2 + 2y^2 - xy = 2(x-y)^2 + 3xy \geq 3xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{5} \leq xy \leq \frac{1}{3}$$

$$P = 7[(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2] + 4x^2y^2 = 7(x^2 + y^2)^2 - 10x^2y^2$$

$$= 7\left(\frac{1+xy}{2}\right)^2 - 10x^2y^2 = -\frac{33}{4}x^2y^2 + \frac{7}{2}xy + \frac{7}{4}$$

$$\text{Đặt } t = xy, \quad t \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right] \Rightarrow P = -\frac{33}{4}t^2 + \frac{7}{2}t + \frac{7}{4}$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = -\frac{33}{4}t^2 + \frac{7}{2}t + \frac{7}{4} \text{ trên đoạn } \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$$

$$\max P = \frac{70}{33} \Leftrightarrow xy = \frac{7}{33}, \quad \min P = \frac{18}{25} \Leftrightarrow xy = -\frac{1}{5}$$

Ví dụ 5: Cho các số thực dương a, b và thỏa mãn $a + b + 1 = 3ab$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{3a}{b(1+a)} + \frac{3b}{a(1+b)} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$.

Lời giải

Từ giả thiết, suy ra $(1+a)(1+b) = 4ab$.

Theo bất đẳng thức trung bình cộng - trung bình nhân, ta có:

$$4ab = (1+a)(1+b) \geq 4\sqrt{ab} \text{ suy ra } ab \geq 1.$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{3a^2(1+b) + 3b^2(1+a)}{ab(1+a)(1+b)} - \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{3ab(3ab-1) - (a^2 + b^2)}{4a^2b^2}$$

$$\text{Hay } P = \frac{5ab-1}{4a^2b^2}. \text{ Ta cần chứng minh } P \leq 1.$$

$$\text{Thật vậy, } \frac{5ab-1}{4a^2b^2} \leq 1 \Leftrightarrow (ab-1)(4ab-1) \geq 0 \text{ đúng với } ab \geq 1.$$

Vậy, giá trị lớn nhất của P bằng 1 đạt được khi $a = b = 1$.

Chú ý:

$P = \frac{5ab-1}{4a^2b^2}$, đặt $t = ab \Rightarrow t \geq 1$, khi đó $P = f(t)$ với $f(t) = \frac{5t-1}{4t^2}$ với $t \geq 1$. Bài toán trở thành “tìm giá trị lớn nhất của $f(t) = \frac{5t-1}{4t^2}$ với $t \geq 1$ ”.

Ví dụ 6: Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$.

Đề thi Đại học Khối D – năm 2012

Lời giải

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 8$$

$$4xy \leq (x+y)^2 \Rightarrow -6xy \geq -\frac{3}{2}(x+y)^2$$

$$A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2) = (x+y)^3 - 6xy - 3(x+y) + 6$$

$$A \geq (x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6. \text{ Đặt } t = x+y, 0 \leq t \leq 8$$

$$\text{Xét } f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6 \text{ với } 0 \leq t \leq 8$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 3t^2 - 3t - 3 \text{ và } \forall t \in (0; 8): f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$f(0) = 6, f(8) = 398, f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Vậy, giá trị nhỏ nhất của } f(t) \text{ là } \frac{17-5\sqrt{5}}{4} \text{ xảy ra khi } t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$A \geq f(t) \geq \frac{17-5\sqrt{5}}{4}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi } x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Ví dụ 7: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = ab + bc + ca \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow 1 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca);$$

$$3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (ab+bc+ca)^2 = t^2;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 1 - 2t$$

Cách 1:

$$\text{Do đó: } P \geq t^2 + 3t + 2\sqrt{1-2t} = t^2 + 3t + 2(\sqrt{1-2t} - 1) + 2$$

$$= t \left(t + 3 - \frac{4}{\sqrt{1-2t} + 1} \right) + 2 = \frac{t \left[(t+3)\sqrt{1-2t} + t - 1 \right]}{1 + \sqrt{1-2t}} + 2$$

$$\text{Do } (t+3)\sqrt{1-2t} \geq 3\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \sqrt{3} > 1 \Rightarrow \frac{t \left[(t+3)\sqrt{1-2t} + t - 1 \right]}{1 + \sqrt{1-2t}} > 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{3} \right].$$

$$\text{Suy ra } P \geq 2 \quad \forall t \in \left[0; \frac{1}{3} \right].$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=0 \\ ab=bc=ca \end{cases} \Leftrightarrow \text{trong ba số } a, b, c \text{ có hai số bằng 0, một}$$

số bằng 1.

Vậy $\min P = 2$.

Cách 2: Xét hàm số $f(t)$ với $t \in \left[0; \frac{1}{3} \right]$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 2t + 3 - \frac{2}{\sqrt{1-2t}} \text{ và } f''(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}} < 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{3} \right]$$

$$\text{Suy ra } f'(t) \text{ là hàm nghịch biến trên } \left[0; \frac{1}{3} \right] \text{ nên } f'(t) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right) > 0$$

$$\Rightarrow f \text{ tăng} \Rightarrow f(t) \geq f(0) = 2, \forall t \in \left[0; \frac{1}{3} \right]$$

Từ đó ta có được $\min P = 2$.

Ví dụ 8: Tìm tất cả các giá trị của a và b thỏa mãn điều kiện: $a \geq -\frac{1}{2}$ và $\frac{a}{b} > 1$ sao

cho biểu thức $P = \frac{2a^3 + 1}{b(a-b)}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Từ giả thiết, ta suy ra $a \neq 0$ và $b(a-b) > 0$.

Ta có: $0 < b(a-b) \leq \frac{a^2}{4}$ và $2a^3 + 1 > 0$ nên $P \geq \frac{2a^3 + 1}{a^2} = f(a)$.

Xét hàm số $f(a)$, $a \geq -\frac{1}{2}$, có $f'(a) = \frac{2a^3 - 2}{a^3} \Rightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Bảng biến thiên:

a	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
$f'(a)$	+	-	0	+
$f(a)$	3	$+\infty$	3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow f(a) \geq 3 \quad \forall a \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow P \geq -\frac{1}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy $\min P = 3$ khi $(a; b) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right), \left(1; \frac{1}{2}\right)$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $xy \leq y - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 9\frac{y^3}{x^3} + 8\frac{x}{y}.$$

2. Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn $(a+b)ab = 2$. Chứng minh rằng:

$$3(a^3 + b^3) - 2(a^2 + b^2) + a + b \geq 4.$$

3. Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $x(y-z)^4 + y(y-z)^4 + z(x-y)^4 \leq \frac{1}{12}$.

4. Cho là ba số thực dương x, y, z có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz.$$

5. Cho x, y, z là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{\sqrt[3]{xyz}}{x+y+z}$.

Bài 2:

- Với mọi số thực x, y thỏa mãn điều kiện $2(x^2 + y^2) = xy + 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^4 + y^4}{2xy + 1}$.
- Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $x + 3y + 5z \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$3xy\sqrt{625z^4 + 4} + 15yz\sqrt{x^4 + 4} + 5zx\sqrt{81y^4 + 4} \geq 45\sqrt{5}xyz.$$
- Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 + xy}{5 - z^2} + \frac{y^2 + yz}{5 - x^2} + \frac{z^2 + zx}{5 - y^2}$.
- Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = \frac{11}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{378}{a + b + c} + (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$
- Cho $0 < x < y \leq z \leq 1$ thỏa mãn $3x + 2y + z \leq 4$. Chứng minh rằng:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq \frac{16}{3}$$

Bài 3:

- Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + (a + b + c)^2 \geq 4\sqrt{3abc(a + b + c)}$$
- Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = xy + yz + zx + \frac{5}{x + y + z}$.
- Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx + \frac{4}{xy + yz + zx + 2}$
- Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 2 = 2(x + y) + \sqrt{xy}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = 2xy + \sqrt{xy} - \frac{4}{x + y}$
- Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x^4 + y^4 = 2xy$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $B = xy + 3x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) - (x + y)^2$

Bài 4:

- Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn: $a + b + c = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$

2. Cho các số thực x, y thay đổi trong đoạn $[1; 2]$. Tìm tất cả giá trị của số thực z

để biểu thức $P = \frac{(x + yz)(x - y) + xyz}{x^2 - xy + y^2}$ có giá trị lớn nhất là M thỏa mãn $M \geq 2$.

3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c}$$

4. Cho ba số $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c \leq 1,5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b^2c} + \frac{b}{c^2a} + \frac{c}{a^2b} + \frac{c^5}{b} + \frac{b^5}{c} + \frac{c^5}{a}$$

5. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $xy + x + y = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+1} + \frac{xy}{x+y}$$

Bài 5:

1. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^3 + y^3 - 9xy$$

2. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1 + xy$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $T = x^4 + y^4 - x^2y^2$.

3. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2}{x + y + z}$

4. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H = x + y + \frac{4}{x + y}$$

5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $F = x^6 + y^6 - 2x^2y^2 - xy$

Bài 6:

1. Cho x, y là các số dương. Chứng minh rằng: $4xy(x^2 + y^2) + x + y \geq 6xy$

2. Cho $x, y \geq 0$ thỏa $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 9x^3 + 4y^3.$$

3. Cho các số dương a, b, c với $a + b + c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$3(a + b + c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 21.$$

4. Cho các số thực a, b, c không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn:

$$(a + b + c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a + b + c)(ab + bc + ca)}$

5. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b - ab \leq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} + \frac{12}{ab} + 12ab$$

6. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (9 + 2yz)(y^2 z^2 - 4yz + 8)$

7. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4a - 3b$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2a + 3b$

Bài 7:

1. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} + \frac{z}{x + y} \geq \frac{33}{4}$$

2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = xy(x + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^3 + y^3 - 6xy$

3. Cho $x \neq 0, y \neq 0$ là các số thực thỏa mãn $x^4 + y^4 + 2 = 2(x^2 + y^2) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = 2x^2 y^2 + xy - \frac{4}{x^2 + y^2}$

4. Cho $x \neq 0, y \neq 0$ là các số thực thỏa mãn $2(x^3 + y^3) + x^3 y^3 = 6x^2 y^2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{3}{xy}$

Bài 8:

1. Cho các số dương a, b, c với $a + b + c \leq 1$.

Chứng minh rằng: $3(a + b + c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 21$.

2. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - (a + b + c) \geq 2\sqrt{3}$.

3. Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn: $a^2 + b^2 = 1$; $c - d = 3$.

Chứng minh rằng: $F = ac + bd - cd \leq \frac{9+6\sqrt{2}}{4}$.

4. Cho $x, y \geq 0$ thỏa $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 9x^3 + 4y^3.$$

5. Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$-1 - 2\sqrt{7} \leq x^2 + xy - 2y^2 \leq -1 + 2\sqrt{7}.$$

Bài 9:

1. Cho các số dương a, b, c với $a + b + c \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 3(a + b + c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

3. Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a + b + \sqrt{5 - ab}$

4. Cho các số $x, y > 0$ thỏa mãn $8(x + 2y)xy = 5x + 2y(5 + 16x)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + 4y^2 + \frac{(1 + 2xy)^2 + 7xy - 6}{xy}$

Bài 10:

1. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{3}{4}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (a + b)(b + c)(c + a) + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^3}$.

2. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - (a + b + c).$$

3. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 2xyz.$$

Bài 11:

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a + b + c)^3 = 32abc$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a + b + c)^4}$.

3. Cho các số thực dương a, b thỏa: $(a^2 + 4b^2)^2 + 3a^2b^2 = 2(a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2)$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = \frac{a^3 + b^3}{b^3} + \frac{8b^3}{a^3} + \frac{[(a + b)^2 + 2a^2 + 5b^2][(a - b)^2 + 2a^2 + 5b^2]}{ab(a^2 + 2b^2)}$$

4. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 16$
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2 + 2b^2}{ab}$.

Bài 12:

1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

2. Cho x, y, z thuộc $[0; 2]$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của
$$A = x^2 + y^2 + z^2$$

3. Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 12(x + y + z) - 10(xy + yz + zx) + 2011$

4. Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$F = \sqrt{3x^2 + 7y} + \sqrt{5y + 5z} + \sqrt{7z + 3x^2}$$

5. Cho $x, y, z > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{x + yz} + \frac{y}{y + xz} + \frac{\sqrt{xyz}}{z + xy}$

6. Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 6xy}{1 + 2xy + 2y^2}$

7. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 - xy + 2y^2$.

8. Cho bốn số nguyên a, b, c, d thay đổi thỏa mãn: $1 \leq a < b < c < d \leq 50$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

Bài 13:

1. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}$.

2. Cho hai số $x, y \neq 0$ thay đổi thỏa mãn $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

3. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 2xyz.$$

Bài 14:

1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $F = x^6 + y^6 - 2x^2y^2 - xy$.

2. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{c^2}{(c+a)^2}$$

Bài 15: Tùy theo giá trị của tham số m , hãy tìm trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (x + my - 2)^2 + [2x + (m - 2)y - 1]^2.$$

Dạng**4.****PHƯƠNG PHÁP SUY BIẾN****PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

Để tìm GTLN và GTNN của một hàm đa biến ta có thể dùng đẳng thức hoặc bất đẳng thức để làm giảm số biến, phương pháp này gọi là phương pháp suy biến.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $ab + a + b = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2}$$

Lời giải

Nhận thấy các biểu thức có trong bài toán là các biểu thức đối xứng hai biến a, b nên ta đặt $t = a + b \Rightarrow ab = 3 - t$ và $a^2 + b^2 = t^2 - 2(3 - t) = t^2 + 2t - 6$

$$\text{Vì } (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow t^2 \geq 4(3-t) \Leftrightarrow t^2 + 4t - 12 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2 \text{ (do } t > 0)$$

$$\text{Khi đó, điều cần chứng minh } \Leftrightarrow \frac{3(a^2+b^2)+3(a+b)}{(a+1)(b+1)} + \frac{ab}{a+b} - (a^2+b^2) \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3t^2+6t-18+3t}{4} + \frac{3-t}{t} - t^2 - 2t + 6 \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -t^2 + t + \frac{12}{t} \leq 4 \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = -t^2 + t + \frac{12}{t} \text{ với } t \geq 2. \text{ Ta có: } f'(t) = -2t + 1 - \frac{12}{t^2} < 0 \quad \forall t \geq 2$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(2) = 4 \quad \forall t \geq 2 \Rightarrow (*) \text{ đúng} \Rightarrow \text{đpcm. Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Ví dụ 2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^5 + y^5 + z^5$

Đề thi Đại học Khối B – năm 2012

Lời giải

Cách 1:

Với $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$, ta có:

$$0 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x(y+z) + 2yz = 1 - 2x^2 + 2yz, \text{ nên } yz = x^2 - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } yz \leq \frac{y^2+z^2}{2} = \frac{1-x^2}{2}, \text{ suy ra } x^2 - \frac{1}{2} \leq \frac{1-x^2}{2}, \text{ do đó } -\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (*)$$

$$\text{Khi đó: } P = x^5 + (y^2 + z^2)(y^3 + z^3) - y^2 z^2 (y + z)$$

$$= x^5 + (1-x^2) \left[(y^2 + z^2)(y+z) - yz(y+z) \right] + \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 x$$

$$= x^5 + (1-x^2) \left[-x(1-x^2) + x \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \right] + \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 x = \frac{5}{4} (2x^3 - x).$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = 2x^3 - x \text{ trên } \left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3} \right]$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 6x^2 - 1 \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Ta có: } f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{9}, f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}. \text{ Do đó } f(x) \leq \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{5\sqrt{6}}{36}.$$

$$\text{Vậy, giá trị lớn nhất của } P \text{ là } \frac{5\sqrt{6}}{36} \text{ khi } x = \frac{\sqrt{6}}{3}, y = z = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Cách 2:

Ta có $z = -(x+y)$, suy ra $x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + xy = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - xy = \frac{1}{2}. \text{ Đặt } t = x+y \Rightarrow xy = t^2 - \frac{1}{2}$$

$$\text{Vì } (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow t^2 \geq 4\left(t^2 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow t^2 \leq \frac{2}{3} \Rightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}} \leq t \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} P &= x^5 + y^5 - (x+y)^5 = -(5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4) \\ &= -5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) = -5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

$$\text{Hay } P = -\frac{5}{2}t\left(t^2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}t^3 + \frac{5}{4}t \text{ với } -\sqrt{\frac{2}{3}} \leq t \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Dùng đạo hàm tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t) = -\frac{5}{2}t^3 + \frac{5}{4}t$ trên đoạn

$$\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right], \text{ ta tìm được } \max P = \max_{t \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]} f(t) = \frac{5\sqrt{6}}{36} \text{ khi } x = \frac{\sqrt{6}}{3}, y = z = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ví dụ 3.

Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn: $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$.

Đề thi Đại học khối B – năm 2011

Lời giải

Theo giả thiết ta có $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$. Từ đây suy ra

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(ab+2) \text{ hay } 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = a + \frac{2}{b} + b + \frac{2}{a}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $a + \frac{2}{b} + b + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, ta suy ra: $2t + 1 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t+2} \Rightarrow 4t^2 - 4t - 15 \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{5}{2}$

$$\text{Mặt khác: } P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2)$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$ trên nửa khoảng $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$

Ta có: $f'(t) = 12t^2 - 18t - 12 = 6[t(2t-5) + 2(t-1)] > 0, \forall t \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$

Vậy $f(t)$ luôn đồng biến trên nửa khoảng $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$, suy ra

$$P = f(t) \geq f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4} \text{ và đẳng thức xảy ra khi } t = \frac{5}{2} \text{ tức là } a = 1 \text{ và } b = 2.$$

Vậy $\min P = -\frac{23}{4}$ khi $a = 1$ và $b = 2$ hoặc $a = 2$ và $b = 1$.

Để ý: Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $ab + 2 \geq 2\sqrt{2ab}$.

Khi đó $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2) \geq 2\sqrt{2ab}(a+b)$

Bình phương hai vế ta được $[2(a^2 + b^2) + ab]^2 \geq 8ab(a+b)$

Tức là $\left[2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1\right]^2 \geq 8\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) (*)$

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Khi đó $(*)$ trở thành $(2t+1)^2 \geq 8(t+2)$, từ đây ta tìm được $t \geq \frac{5}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hai số thực dương x, y và thỏa mãn:

1. $x^2 + xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^2 + y^2$

2. $x + y \neq -1$ và $x^2 + xy + y^2 = x + y + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $B = \frac{xy}{x+y+1}$

3. $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = \frac{xy(x+y-2) + (x+y)^2}{xy(xy+x+y+1)}$.

4. $x + y + 1 = 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $D = \frac{x^2(x^2+1) + y^2(y^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)}$

Bài 2: Cho hai số thực x, y và thỏa mãn:

1. $x^2(2x^2-1) + y^2(2y^2-1) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^2(x^2-4) + y^2(y^2-4) + 2(x^2y^2-4).$$

2. $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^3 + y^3 - 3x - 3y.$$

3. Cho $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

4. Cho $0 \leq c \leq b \leq a \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a^2(b - c) + b^2(c - b) + c^2(1 - c)$$

Bài 3:

1. Cho $0 < x < y \leq z \leq 1$ thỏa mãn $3x + 2y + z \leq 4$. Chứng minh rằng:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq \frac{16}{3}.$$

2. Cho các số thực dương a, b, c . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{a + b + c + 1} - \frac{54}{(a + b + c + 3)^3}$$

3. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $(a + b + c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{abc}{(a + b + c)(ab + bc + ca)}$

4. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2 + xy + 4y^2 = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^3 + 8y^3 - 9xy$.

6. Cho các số thực x, y thỏa điều kiện $x^2 + 9y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{(x+1)^2 + 3(2xy+1) + (3y+1)^2}{x+3y+1}$.

7. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{4}{a^2 + b^2} + 1\right) \left(\frac{4}{c^2 + b^2} + 1\right) \left(\frac{4}{a^2 + c^2} + 1\right) \geq 3(a + b + c)^2$$

Bài 4:

1. Cho x, y là các số thực không âm thay đổi và thỏa mãn

$$4(x^2 + y^2 + xy) \leq 1 + 2(x + y).$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = xy + \sqrt{x + y} - x^2 - y^2$

2. Cho $x, y, z \in [1; 3]$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \leq \frac{26}{3}$

3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} + 8\sqrt[3]{abc} \leq 9.$$

4. Cho x, y là hai số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4 + y^4}{(x+y)^4} + \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^2} + \frac{5\sqrt{xy}}{x+y}$$

5. Cho $x, y, z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z)^2$$

Bài 5:

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

Biết x, y thỏa mãn điều kiện $1 \leq x \leq y \leq 2$.

2. Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a + b^2 + c^3$.

3. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = a + b + c - abc.$$

4. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$

5. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 1 \leq a, b, c \leq 4 \\ a + b + 2c = 8 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức: $P = a^3 + b^3 + 5c^3$.

Bài 6:

1. Cho $x, y \in [-3; 2]$ thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^3 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2$

2. Cho x, y, z là ba số không âm thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

3. Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^2 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$

(Đề thi Đại học khối B năm 2009).

Bài 7:

1. Cho a, b, c là ba số thực dương và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca - 2abc$.

2. Cho x, y, z là ba số thực dương có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz$$

3. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x + y + z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x + y + z)^3}$

Bài 8:

1. Cho các số thực dương a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $2a \leq c$ và $ab + bc = 2c^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}$.

2. Cho $xyz + x + z = y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{x^2 + 1} - \frac{2}{y^2 + 1} + \frac{3}{z^2 + 1}$$

Bài 9:

1. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 3(x + y + z) + \frac{4}{x + y + z}$.

2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

3. Cho x, y, z là số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

4. Cho số thực dương a, b thỏa mãn: $6(a^2 + b^2) + 20ab = 5(a + b)(ab + 3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 9\left(\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4}\right) - 16\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) + 25\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$

5. Cho $a, b \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$ và $c \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a\left(3 + \frac{2}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right) + b\left(3 + \frac{2}{2\sqrt{b} - \sqrt{a}}\right) + 2\sqrt{c}(3\sqrt{c} + \sqrt{2}) + 5}{2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{2c} + 1}$$

Bài 10:

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{4}{5}b \geq a - c \geq \frac{3}{5}b$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức: $P = \frac{12(a-b)}{c} + \frac{12(b-c)}{a} + \frac{25(c-a)}{b}$

2. Cho hai số thực không âm a, b thỏa mãn: $a^2 + b^3 = 80$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a + b$

3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc(a+b+c)^2 = (ab+bc+ca)^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức: $P = \frac{4a^3+1}{b} + \frac{4b^3+1}{c} + \frac{4c^3+1}{a}$.

4. Cho ba số $x, y, z \in (0; 1]$ thỏa mãn: $x + y \geq 1 + z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{xy+z^2}$$

5. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $2(x-y)^2 + (x+1)(y+1) + 7xy = 1 + 4\sqrt{xy}$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức: $F = \frac{1}{\sqrt{x}}(3y+1) + \frac{1}{\sqrt{y}}(3x+1) + x + y$

Bài 11:

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn:

$$9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0.$$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geq 1$.

2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Bạn đọc có thể xem lại dạng toán này, những bài tập cơ bản trong cuốn: Khảo sát hàm số và ứng dụng đạo hàm - cùng tác giả

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện: $x \geq 1, y \geq 1$ và $3(x+y) = 4xy$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^3 + y^3 + 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$

Lời giải

Đặt $S = x + y, P = xy$. Theo giả thiết ta có: $3S = 4P$ hay $P = \frac{3S}{4}$ (1)

Lại có: $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow S^2 - 4 \cdot \frac{3S}{4} \geq 0 \Leftrightarrow S \leq 0$ hoặc $S \geq 3$

Hơn nữa: $x \geq 1, y \geq 1$ suy ra $\begin{cases} x+y \geq 2 \\ (x-1)(y-1) \geq 0 \end{cases}$ tức $\begin{cases} S \geq 2 \\ S - \frac{3S}{4} + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq S \leq 4$.

$$P = x^3 + y^3 + 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 3\left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{2}{xy}\right] \quad (2)$$

Giả thiết $3(x+y) = 4xy$ suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $P = S^3 - \frac{9}{4}S - \frac{8}{S} + \frac{16}{3}$

Xét hàm số: $f(S) = S^3 - \frac{9}{4}S - \frac{8}{S} + \frac{16}{3}$ với $3 \leq S \leq 4$

Ta có: $f'(S) = 3S\left(S - \frac{3}{2}\right) + \frac{8}{S^2} > 0$ với $\forall S \in (3; 4)$, do đó $f(S)$ là hàm số đồng biến trên đoạn $[3; 4]$ và $f(3) = \frac{113}{12}, f(4) = \frac{94}{3}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{113}{12}$ khi $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{94}{3}$ khi $(x; y) = (1; 3), (3; 1)$

Ví dụ 2: Cho hai số $x, y \neq 0$ thay đổi thỏa mãn $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị

lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$

Lời giải

Cách 1:

Đặt: $u = x + y, v = xy \Rightarrow (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow uv = u^2 - 3v$

$$\Leftrightarrow (u+3)v = u^2 \Leftrightarrow v = \frac{u^2}{u+3} \text{ (do } u \neq -3).$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{(xy)^3} = \frac{u^3 - 3uv}{v^3} = \frac{u(u^2 - 3v)}{v^3} = \frac{u^2}{v^2} = \left(\frac{u+3}{u}\right)^2$$

$$\text{Vì } u^2 \geq 4v \Rightarrow u^2 \geq \frac{4u^2}{u+3} \Leftrightarrow \frac{4}{u+3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{u-1}{u+3} \geq 0 \text{ (lưu ý } u \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow u \geq 1 \vee u < -3 \Rightarrow \frac{u+3}{u} > 0.$$

$$\text{Xét hàm } f(u) = \frac{u+3}{u} \Rightarrow f'(u) = \frac{-3}{u^2} < 0 \Rightarrow f(u) \leq f(1) = 4 \Rightarrow A \leq 16.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của $A = 16$.

Cách 2: Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}$. Khi đó giả thiết của bài toán trở thành

$$a + b = a^2 + b^2 - ab \geq \frac{1}{4}(a+b)^2 \Leftrightarrow 0 \leq a+b \leq 4 \Rightarrow A \leq 16$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Cách 3: Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{(xy)^3} = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{(x+y)^2 xy}{(xy)^3} = A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)xy = (x+y)^2 - 3xy \\ \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = S^2 - 3P \\ \left(\frac{S}{P}\right)^2 = A \end{cases}; \begin{cases} S = x+y \\ P = xy \end{cases} \text{ với } S^2 \geq 4P$$

Giả thiết suy ra $\left(\frac{S}{P}\right)^2 = A$ thỏa điều kiện $A > 0$, do đó $S = \sqrt{AP}$

Thay $S = \sqrt{AP}$ vào phương trình $SP = S^2 - 3P$ rồi rút gọn ta được $(A - \sqrt{A})P = 3$, để phương trình này có nghiệm thì $A - \sqrt{A} \neq 0$ tức $0 < A \neq 1$.

Với $0 < A \neq 1$ suy ra $P = \frac{3}{A - \sqrt{A}}$ và $S = \frac{3}{\sqrt{A} - 1}$

$$S^2 \geq 4P \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{A} - 1}\right)^2 \geq 4\left(\frac{3}{A - \sqrt{A}}\right) \Leftrightarrow \sqrt{A} \leq 4 \Leftrightarrow 0 < A \leq 16, A \neq 1$$

Vậy, giá trị lớn nhất của $A = 16$.

Ví dụ 3: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn: $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$

Lời giải

Đặt: $x = \frac{1}{a}, y = \frac{2}{b}, z = \frac{3}{c} \Rightarrow x, y, z > 0$.

Khi đó: $21ab + 2bc + 8ca \leq 12 \Leftrightarrow \frac{2}{a} + 4\frac{2}{b} + 7\frac{3}{c} \leq 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3}{c} \Leftrightarrow 2x + 4y + 7z \leq 2xyz$
và $P = x + y + z$.

Từ: $2x + 4y + 7z \leq 2xyz \Rightarrow z(2xy - 7) \geq 2x + 4y \Rightarrow z \geq \frac{2x + 4y}{2xy - 7}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x + y + z &\geq x + y + \frac{2x + 4y}{2xy - 7} = x + \frac{2xy - 7}{2x} + \frac{7}{2x} + \frac{2x + \frac{2}{x}(2xy - 7) + \frac{14}{x}}{2xy - 7} \\ &= x + \frac{2xy - 7}{2x} + \frac{7}{2x} + \frac{2x + \frac{2}{x}(2xy - 7) + \frac{14}{x}}{2xy - 7} = x + \frac{11}{2x} + \frac{2xy - 7}{2x} + \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{2xy - 7}{2x} + \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7} \geq 2\sqrt{\frac{2xy - 7}{2x} \cdot \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7}} = 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}$$

Do đó: $P \geq x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} = f(x)$.

Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{11}{2x^2} - \frac{14}{x^3 \sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}}$.

Ta thấy $f'(x)$ tăng khi $x > 0$ và $f'(3) = 0 \Rightarrow x + y + z \geq f(3) = \frac{15}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi:
$$\begin{cases} x=3 \\ \frac{2xy-7}{2x} = \frac{2x+\frac{14}{x}}{2xy-7} \\ z = \frac{2x+4y}{2xy-7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{5}{2} \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{4}{5} \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy $\min P = \frac{15}{2}$.

Ví dụ 4. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 4]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$.

Đề thi Đại học khối A – năm 2011.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x} \Rightarrow abc = 1, a, b, c \in [1; 4]$

Bài toán trở thành: Cho $a, b, c \in [1; 4]$ và $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3a+2} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ với a và b dương, $ab \geq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$ hoặc $ab \geq 1$.

Khi đó $P = \frac{a}{2a+3} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+ab} \geq \frac{a}{2a+3} + \frac{2}{1+\sqrt{a \cdot abc}}$

hay $P \geq \frac{a}{2a+3} + \frac{2}{1+\sqrt{a}}$ do $abc = 1$.

Xét $f(a) = \frac{a}{2a+3} + \frac{2}{1+\sqrt{a}}, a \in [1; 4]$. Đặt $t = \sqrt{a} \Rightarrow t \in [1; 2]$.

Suy ra: $P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{t+1} = f(t)$ với $t \in [1;2]$

Để tìm tại giá trị nhỏ nhất của P khi tìm tại giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ trên đoạn $[1;2]$ với $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{t+1}$

Ta có $f'(t) = 2 \left[\frac{3t}{(2t^2+3)^2} - \frac{1}{(t+1)^2} \right] < 0, \forall t \in (1;2) \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[1;2]$.

Suy ra $P \geq f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=4, y=1, z=2$.

Vậy $\min P = \frac{34}{33}$, khi $x=4, y=1, z=2$.

Cách 2: $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$

Lấy đạo hàm theo z ta có: $P'(z) = 0 + \frac{-y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(z+x)^2} = \frac{(x-y)(z^2-xy)}{(y+z)^2(z+x)^2}$

* Nếu $x=y$ thì $P = \frac{6}{5}$

* Ta xét $x > y$ thì $P \geq P(\sqrt{xy}) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}$

Khảo sát hàm P theo z , ta có P nhỏ nhất khi $z = \sqrt{xy}$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}} \Rightarrow P = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t} = f(t)$ với $t \in (1;2]$

$\Rightarrow f'(t) = \frac{-2[4t^3(t-1)+3(2t^2-t+3)]}{(2t^2+3)^2(t+1)^2} < 0, \forall t \in (1;2)$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên nửa khoảng $(1;2]$

Vậy $P \geq f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=4, y=1, z=2$.

Vậy $\min P = \frac{34}{33}$, khi $x=4, y=1, z=2$.

Cách 3: Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z} \Rightarrow abc = 1$. Khi đó: $P = \frac{1}{2+3a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$

Do $bc = \frac{x}{y} \geq 1$ nên áp dụng bất đẳng thức (*) (xem chú ý) $\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{2}{1+\sqrt{bc}}$

Đặt $t = \sqrt{bc} = \sqrt{\frac{x}{y}} \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$ và $a = \frac{1}{t^2}$. Do đó: $P = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$

Ta chứng minh: $P \geq \frac{34}{33}, \forall t \in [1; 2]$. Thật vậy, với $\forall t \in [1; 2]$ ta có:

$$P \geq \frac{34}{33} \Leftrightarrow \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t} \geq \frac{34}{33}, \text{ quy đồng và khai triển ta có được:}$$

$$35t^3 - 64t^2 + 69t - 162 \leq 0 \Leftrightarrow (t-2)(35t^2 + 6t + 81) \leq 0 \text{ bất đẳng thức đúng.}$$

$$\text{Vậy } P \geq \frac{34}{33}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{34}{33}.$$

Cách 4: Đặt $y = ax, z = bx \Rightarrow a, b \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

$$\text{Khi đó: } P = \frac{1}{2+3a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(a) = \frac{1}{2+3a} + \frac{a}{a+b}, f'(a) = -\frac{3}{(2+3a)^2} + \frac{b}{(a+b)^2}$$

$$\text{Xét } b(2+3a)^2 - 3(a+b)^2 = 9a^2b + 6ab + 4b - 3a^2 - 3b^2$$

$$\geq 15a^2b + 4b - 3a^2 - 3b^2 = 3a^2(5b-1) + b(4-3b) > 0$$

$$\text{Nên } f(a) \text{ là hàm đồng biến trên } \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Rightarrow f(a) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{11} + \frac{1}{1+4b}$$

$$\text{Do đó: } P \geq \frac{4}{11} + \frac{1}{1+4b} + \frac{b}{b+1} = g(b)$$

$$\text{Ta có: } g'(b) = \frac{-4}{(1+4b)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \Rightarrow g'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } g(b) \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{34}{33} \text{ hay } P \geq \frac{34}{33}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x = 2z \end{cases}, \text{ mà } x, y, z \in [1; 4] \Rightarrow \begin{cases} x = 4, y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Vậy $\min P = \frac{34}{33}$.

Chú ý: Cho các số thực a, b và nếu $ab \geq 1$ thì ta có: $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geq \frac{2}{1+ab}$ (*)

Thật vậy
$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} - \frac{2}{1+ab} &= \left(\frac{1}{a^2+1} - \frac{1}{1+ab} \right) + \left(\frac{1}{b^2+1} - \frac{2}{1+ab} \right) \\ &= \frac{ab-a^2}{(a^2+1)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(b^2+1)(1+ab)} = \frac{a-b}{1+ab} \left(\frac{b}{1+b^2} - \frac{a}{1+a^2} \right) \\ &= \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b-a+a^2b-b^2a}{(1+b^2)(1+a^2)} = \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{(a-b)(ab-1)}{(1+b^2)(1+a^2)} \\ &= \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+b^2)(1+a^2)} \geq 0, \text{ với } ab \geq 1. \end{aligned}$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

- Cho hai số thực $a, b \geq 0$. Chứng minh: $a^4 + b^4 \geq a^3b + b^3a$
- Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^5 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

Bài 2:

1. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

2. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$.

3. Cho $4b \geq a \geq 0$ và $b > 0$ thỏa mãn $b(\sqrt{5b-a} + \sqrt{4b-a}) = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a\sqrt{a} + b\sqrt{a+12b}$.

Bài 3:

1. Cho x, y thỏa $x^3 + y^3 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2$.

2. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn: $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức: $Q = \frac{a}{b+3c} + \frac{b}{a+3c} + \frac{ab}{bc+ca}$

Bài 4:

1. Cho $a, b, c \in [1;3]$. Chứng minh rằng: $5\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 12$

2. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$.

Chứng minh rằng: $4(x+y+z)^2 - (xy+yz+zx+1)^2 \geq xy+yz+zx$

3. Cho các số thực $a, b, c \in [1;2]$ thỏa mãn $4a+2b+c=11$. Chứng minh rằng:

$$\frac{33}{10} \leq \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \leq \frac{11}{2}.$$

4. Với x, y, z là số dương và $xyz \geq 1$.

Chứng minh: $\frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{yz}}} + \frac{y}{\sqrt{y+\sqrt{xz}}} + \frac{z}{\sqrt{z+\sqrt{xy}}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$

Bài 5:

1. Cho $x \geq y \geq z \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

2. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)$$

3. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x+y+z) = 3yz$ (*),

ta luôn có: $(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \leq 5(y+z)^3$

(Đề thi Đại học Khối A năm 2009)

Bài 6:

1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2}$.

2. Cho $0 < a \leq b \leq c$. Chứng minh rằng: $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \leq 3 + \frac{(c-a)^2}{a(c+a)}$.

Bài 7:

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $21ab + 2bc + 8ac \leq 12$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

2. Cho ba số x, y, z thuộc khoảng $(0;1)$. Chứng minh rằng:

$$2(y^3 + z^3) - y^2z - z^2 - y \leq 1$$

Bài 8:

1. Cho $x, y, z \in [1;3]$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \leq \frac{26}{3}$.

2. Cho các số x, y, z thỏa mãn $x, y, z \in [1;9]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{x+z}$.

3. Cho các số x, y, z thỏa mãn $x, y, z \in [1;4]$ và $x \geq y \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{x+z}$.

Bài 9: Cho $a, b, c \in [1;2]$. Chứng minh rằng: $\frac{10a}{bc} + \frac{11b}{ca} + \frac{12c}{ab} \leq \frac{69}{2}$

Dạng
6.

PHƯƠNG PHÁP CÂN BẰNG

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$-\frac{\sqrt{3}}{18} \leq (a-b)(b-c)(c-a) \leq \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Lời giải

Kí hiệu: $F(a; b; c) = (a-b)(b-c)(c-a)$

Vì $F(a; c; b) = (a-c)(c-b)(b-a) = -F(a; b; c)$ suy ra miền giá trị của F là tập đối xứng

vì vậy ta chỉ cần chứng minh: $F(a; b; c) \leq \frac{\sqrt{3}}{18}$.

* Nếu trong ba số a, b, c có hai số bằng nhau thì $F(a; b; c) = 0 < \frac{\sqrt{3}}{18}$

* Nếu a, b, c đôi một khác nhau thì không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a; b; c\}$.

Khi đó nếu $b > c$ thì $F(a; b; c) < 0 < \frac{\sqrt{3}}{18}$ do vậy ta chỉ cần xét $a > c > b$.

Đặt $x = a + b \Rightarrow c = 1 - x$.

Ta có: $F(a; b; c) = (a-b)(c-b)(a-c) \leq (a+b)c(a+b-c) = x(1-x)(2x-1) = h(x)$

Xét $h(x) = x(1-x)(2x-1)$, $\frac{1}{2} < x \leq 1$, $h'(x) = -6x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

Lập bảng biến thiên ta được: $h(x) \leq h\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}$ với mọi $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $b=0$, $c = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 2. Cho ba số thực $a, b, c \in [0; 2]$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$M = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$$

Lời giải

Cách 1: Vì $a, b, c \in [0; 2]$ nên

$$(a-2)(b-2)(c-2) \leq 0 \Leftrightarrow abc - 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) - 8 \leq 0$$

$$\text{Hay } ab+bc+ca \geq \frac{abc + 4(a+b+c) - 8}{2} \geq \frac{12-8}{2} = 2$$

Lại có:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 2(ab+bc+ca)$$

$$\text{Khi đó: } M = \frac{9}{ab+bc+ca} - 2 \leq \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } (a; b; c) = (0; 1; 2) \text{ và}$$

các hoán vị.

Cách 2: Đặt $A = ab + bc + ca = a(b+c) + bc = a(3-a) + bc$

Xét $f(a) = a(3-a) + bc$ với $a \in [0; 2]$. Ta có: $f'(a) = -2a + 3$ và $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

Ta thấy, A đạt min khi $a=0$ hoặc $a=2$.

Với $a=0 \Rightarrow b+c=3 \Rightarrow b \in [1; 2]$, khi đó $A = bc = b(3-b) = g(b)$.

Ta có: $g'(b) = -2b + 3$ và $g'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$. Ta thấy A đạt min bằng 2 khi $b=1$

hoặc $b=2$.

Với $a=2 \Rightarrow b+c=1 \Rightarrow b \in [0; 1]$, tương tự. Ta thấy A đạt min bằng 2 khi $b=0$

hoặc $b=1$.

Vậy, $\max M = \frac{5}{2}$ xảy ra khi $(a; b; c) = (0; 1; 2)$ và các hoán vị.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho bốn số thực a, b, c, d thoả mãn: $a^2 + b^2 = 1$; $c - d = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $F = ac + bd - cd$.

2. Cho a, b, c là các số thực thuộc $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 + 2}{b^2 + 1} + \frac{b^3 + 2}{c^2 + 1} + \frac{c^3 + 2}{a^2 + 1}.$$

Bài 2:

1. Cho $a, b, c \geq 0$, thoả mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^3 + b^3 + 4c^3$

2. Cho các số a, b, c thoả mãn $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^3 + b^3 + c^3$.

3. Cho $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = (a^2 - b^2)(b - c) + c^2(1 - c)$$

Bài 3:

1. Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$-\frac{\sqrt{3}}{18} \leq (a - b)(b - c)(c - a) \leq \frac{\sqrt{3}}{18}$$

2. Cho x, y, z là các số thực khác 0 thoả mãn $x + y + z = 5$ và $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

3. Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 1.$$

4. Cho a, b, c là ba số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$a + ab + 2abc \leq \frac{9}{2}$$

Bài 4: Cho các số thực $m, n, p, a, b > 0$ sao cho: $m + n + p = mnp = \frac{1}{a}$ và

$$mn + np + pm = \frac{b}{a}. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } P = \frac{5a^2 - 3ab + 2}{a^2(b - a)}.$$

Bài 5:

1. Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2ab + bc + ca.$$

2. Cho các số thực không âm a, b, c có tổng khác 0. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị

nhỏ nhất của: $P = \frac{a^3 + b^3 + 16c^3}{(a + b + c)^3}$.

3. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F(a; b; c) = (a - b)(b - c)(c - a)$

Bài 6:

1. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn: $abc + a + c = b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}$

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 2c = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a + b + c$.

Dạng 7. XÁC ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ CÓ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

Bước 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Bước 2. Áp đặt các giá trị này thỏa điều kiện đã cho.

Chú ý: Ta có thể khai thác tính chất sau để giải bài toán gọn hơn.

“ Điều kiện cần để $M = \max_{x \in D} f(x)$ ($m = \min_{x \in D} f(x)$) là $f(x_0) \leq M$ ($f(x_0) \geq m$),

trong đó x_0 là một giá trị được chọn thuộc D hoặc là phương trình

$f(x) = M$ ($f(x) = m$) có nghiệm thuộc D .”

Ví dụ: Tìm m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{m}{2}x + 1, \forall x \in [-1; 1] \text{ bằng } 2.$$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

Ta có: $y' = -x + \frac{m}{2}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$.

* $\frac{m}{2} \leq -1$ hay $m \leq -2$. Khi đó $y' \leq 0$ và hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$.

Lúc này ta tìm được, $\max_{x \in [-1; 1]} y = y(-1) = \frac{1-m}{2}$, $\max_{x \in [-1; 1]} y = 2 \Leftrightarrow m = -3$.

* $\frac{m}{2} \geq 1$ hay $m \geq 2$. Khi đó $y' \geq 0$ và hàm số đồng biến trên đoạn $[-1; 1]$.

Lúc này ta tìm được, $\max_{x \in [-1; 1]} y = y(1) = \frac{1+m}{2}$, $\max_{x \in [-1; 1]} y = 2 \Leftrightarrow m = 3$.

* $-1 < \frac{m}{2} < 1$ hay $-2 < m < 2$.

$$y(-1) = \frac{1-m}{2}, y(1) = \frac{1+m}{2}, y\left(\frac{m}{2}\right) = 1 + \frac{m^2}{8}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{x \in [-1; 1]} y = 1 + \frac{m^2}{8}$$

$$\max_{x \in [-1; 1]} y = 2 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2} \text{ (không thỏa mãn).}$$

Vậy, $\max_{x \in [-1; 1]} y = 2$ khi $m = -3$ hoặc $m = 3$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Xác định tham số a để giá trị nhỏ nhất hàm số: $y = 4ax + |x^2 - 4x + 3|$ lớn hơn 2.

2. Tìm các giá trị của tham số để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2} \text{ nhỏ hơn } -1.$$

3. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m \text{ trên } [-2; 0] \text{ bằng } 2.$$

4. Tìm các giá trị của các tham số a, b sao cho hàm số:

$$y = \frac{ax + b}{x^2 + 1} \text{ có giá trị lớn nhất bằng } 4 \text{ và giá trị nhỏ nhất bằng } -1.$$

Bài 2:

1. Xác định tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 4 + m|$ trên đoạn $[0; 4]$ là nhỏ nhất.

2. Xác định tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \left| \frac{x^2 - (m+1)x + 2m + 2}{x - 2} \right| \text{ trên } [-1; 1] \text{ là nhỏ nhất.}$$

Bài 3: Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC , hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng
2.

PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐẠO HÀM

Bài 1: Điều kiện: $\begin{cases} -x^2 + 4x + 21 \geq 0 \\ -x^2 + 3x + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 5$

Cách 1: Xét $-2 < x < 5$, ta có: $y = \sqrt{25 - (x-2)^2} - \sqrt{\frac{49}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}$,

$$\text{nên } y' = \frac{-(x-2)}{\sqrt{25 - (x-2)^2}} + \frac{x - \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{49}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{\frac{49}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{25 - (x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 5 \\ (x-2)\left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0 \\ (x-2)^2\left(\frac{49}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2\right) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2(25 - (x-2)^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-2; \frac{3}{2}\right] \cup [2; 5) \\ 25\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}(x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Ta có $y(-2) = 3$; $y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{2}$; $y(5) = 4$. Vậy $\max_{-2 \leq x \leq 5} y = y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{2}$.

Cách 2: Điều kiện: $-2 \leq x \leq 5$.

Vì $(-x^2 + 4x + 21) - (-x^2 + 3x + 10) = x + 11 > 0 \Rightarrow y > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y^2 &= (x+3)(7-x) + (x+2)(5-x) - 2\sqrt{(x+3)(7-x)(x+2)(5-x)} \\ &= \left(\sqrt{(x+3)(5-x)} - \sqrt{(x+2)(7-x)}\right)^2 + 2 \geq 2, \text{ suy ra } y \geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{(x+3)(5-x)} \cdot \sqrt{(x+2)(7-x)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Bài 2: Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 1]$.

Đặt $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1, x \in [-2; 1]$

$g'(x) = 3x^2 - 6x$. Ta tìm nghiệm của phương trình $g'(x)$ trên khoảng $(-2;1)$.

$$g'(x) = 0, x \in (-2;1) \Leftrightarrow x = 0.$$

$$g(-2) = -19, g(0) = 1, g(1) = -1, \text{ suy ra } \max_{[-2;1]} g(x) = 1, \min_{[-2;1]} g(x) = -19.$$

$$x \in [-2;1] \Rightarrow g(x) \in [-19;1] \Rightarrow f(x) = |g(x)| \in [0;19].$$

$$g(0) \cdot g(1) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (0;1) \text{ sao cho } g(x_1) = 0.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2;1]} f(x) = 19, \min_{[-2;1]} f(x) = 0.$$

Bài 3: Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \leq b \leq c$ và thỏa mãn hệ thức

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \text{ Do đó } 0 < a \leq b \leq c \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} &= \frac{a}{1 - a^2} + \frac{b}{1 - b^2} + \frac{c}{1 - c^2} \\ &= \frac{a^2}{a(1 - a^2)} + \frac{b^2}{b(1 - b^2)} + \frac{c^2}{c(1 - c^2)} \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(x) = -x^3 + x$ liên tục trên nửa khoảng $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = -3x^2 + 1 > 0, x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ liên tục và đồng biến trên nửa khoảng } \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - x^2) = 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ hay } 0 < x(1 - x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{x(1 - x^2)} \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{1 - x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2, \forall x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{1 - a^2} + \frac{b}{1 - b^2} + \frac{c}{1 - c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \text{ Xảy ra khi } a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chú ý: Để không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \leq b \leq c$ và thỏa mãn hệ thức $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Ta có thể suy ra $0 < a \leq b \leq c < 1$.

Khi đó xét hàm số: $f(x) = x(1-x^2)$ liên tục trên khoảng $(0;1)$.

- $f'(x) > 0, x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow f(x)$ liên tục và đồng biến trên $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- $f'(x) < 0, x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right) \Rightarrow f(x)$ liên tục và nghịch biến trên $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right)$.

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Phần còn lại tương tự như trên.

Bài 4: Tìm minS: Không mất tính tổng quát, giả sử: $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$.

$$\text{Với } \begin{cases} x+y+z=1 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x, y, z \in [0;1].$$

$$\text{Vì } (1-x)(1+x) = 1-x^2 \leq 1 \text{ nên: } \frac{1-x}{1+x} \geq (1-x)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq 1-x.$$

Dấu đẳng thức xảy ra trong trường hợp $x=0$ hoặc $x=1$.

$$\text{Khi đó } S = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \geq 1-x+1-y+1-z \text{ hay } S \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=0, z=1$ thì $S=2$.

Vậy: $\min S = 2$.

Tìm maxS: Không mất tính tổng quát giả sử: $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$.

$$\text{Lúc đó: } z \geq \frac{1}{3}; x+y \leq \frac{2}{3} < \frac{4}{5}.$$

$$S = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \leq 1 + \sqrt{\frac{1-(x+y)}{1+x+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = 1 + \sqrt{\frac{z}{2-z}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$

$$\text{Đặt } h(z) = \sqrt{\frac{z}{2-z}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}. \text{ Bài toán trở thành việc tìm giá trị lớn nhất của } h(z)$$

trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

$$h'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \Rightarrow \max h(z) = \max \left\{ h\left(\frac{1}{3}\right); h(1); h\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó: } S = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=0, y=z=\frac{1}{2}$ thì $S=1+\frac{2}{\sqrt{3}}$

Bài 5:

1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;1]$.

$$y = |x^2 + 2x + a - 4| = |(x+1)^2 + a - 5|$$

$$\text{Đặt } t = (x+1)^2, x \in [-2;1] \Rightarrow t \in [0;4]$$

$$\text{Ta có } f(t) = |t + a - 5|, t \in [0;4]$$

$$\max_{x \in [-2;1]} y = \max_{t \in [0;4]} f(t) = \max_{t \in [0;4]} \{f(0), f(4)\} = \max_{t \in [0;4]} \{|a-5|, |a-1|\}$$

$$\bullet |a-5| \geq |a-1| \Leftrightarrow a \leq 3 \Rightarrow \max_{t \in [0;4]} f(t) = |a-5| = 5-a$$

$$\bullet |a-5| \leq |a-1| \Leftrightarrow a \geq 3 \Rightarrow \max_{t \in [0;4]} f(t) = |a-1| = a-1$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} 5-a \geq 5-3=2, \forall a \leq 3 \\ a-1 \geq 3-1=2, \forall a \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \max_{t \in [0;4]} f(t) \geq 2, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } \max_{t \in [0;4]} f(t) = 2 \text{ khi } a = 3$$

2. Xét hàm số $f(x) = x^2 + px + q$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1] \Rightarrow y = |f(x)|$;

$$f(-1) = 1 - p + q, f(0) = q, f(1) = 1 + p + q$$

Giả sử $\max y = f(\alpha)$

$$\Rightarrow |f(1)| + |f(0)| \geq |f(1) - f(0)| = |1+p|, |f(-1)| + |f(0)| \geq |f(-1) - f(0)| = |1-p|$$

$$* p > 0 \Rightarrow |1+p| > 1 \Rightarrow \begin{cases} |f(1)| > \frac{1}{2} \\ |f(0)| > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2}$$

$$* p < 0 \Rightarrow |1-p| > 1 \Rightarrow \begin{cases} |f(-1)| > \frac{1}{2} \\ |f(0)| > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2}$$

$$* p = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + q, f(0) = f\left(-\frac{p}{2}\right) = q, f(-1) = f(1) = 1+q$$

$$\max_{x \in [-1;1]} y = \max \left\{ \left| f\left(-\frac{p}{2}\right) \right|; |f(-1)|; |f(1)| \right\}$$

$$* q > -\frac{1}{2} \Rightarrow |1+q| > \frac{1}{2} \Rightarrow |f(\pm 1)| > \frac{1}{2} \Rightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2}$$

$$* q < -\frac{1}{2} \Rightarrow |q| > \frac{1}{2} \Rightarrow |f(0)| > \frac{1}{2} \Rightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2}$$

$$* q = -\frac{1}{2} \Rightarrow |f(x)| = \left| x^2 - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \max f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$$

Giá trị lớn nhất của y là một trong hai giá trị $|q|; |1+q|$ cũng là giá trị nhỏ nhất của $f(\alpha)$. Vậy $p=0, q=-\frac{1}{2}$ thoả mãn bài toán.

3. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{ax+b}{x^2+1} \leq 4, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R} : \frac{ax_0+b}{x_0^2+1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - ax + 4 - b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 4x_0^2 - ax_0 + 4 - b = 0 : \text{có nghiệm } x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 16(4-b) \leq 0 \\ \Delta = a^2 - 16(4-b) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + 16b - 64 = 0 \quad (*)$$

* Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{ax+b}{x^2+1} \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R} : \frac{ax_0+b}{x_0^2+1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + b + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x_0^2 + ax_0 + b + 1 = 0 : \text{có nghiệm } x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 4(b+1) \leq 0 \\ \Delta = a^2 - 4(b+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 4b - 4 = 0 \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ ta có hệ } \begin{cases} a^2 + 16b - 64 = 0 \quad (*) \\ a^2 - 4b - 4 = 0 \quad (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy giá trị } a, b \text{ cần tìm là: } \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}.$$

$$4. y' = -4x - 2(a+1), y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a+1}{2}.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{a+1}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{a+1}{2}; +\infty\right)$.

* Nếu: $-\frac{a+1}{2} \leq -1 \Leftrightarrow a \geq 1$, hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 1]$.

Khi đó: $\max y = y(-1); \min y = y(1)$.

Nếu $-1 < -\frac{a+1}{2} < 1 \Leftrightarrow -3 < a < 1$, lập bảng biến thiên ta thấy $\max y = y\left(-\frac{a+1}{2}\right)$,
 $x \in [1; 1]$

như vậy hàm số chỉ có thể đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong hai điểm $x = -1$ hoặc $x = 1$.

Khi đó ta xét hiệu: $y(-1) - y(1)$

Nếu $y(-1) - y(1) \geq 0 \Rightarrow \min y = y(1)$ và nếu $y(-1) - y(1) < 0 \Rightarrow \min y = y(-1)$.
 $x \in [1; 1]$ $x \in [1; 1]$

* Nếu $-\frac{a+1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow a \leq -3$, hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 1]$.

Khi đó: $\max y = y(1); \min y = y(-1)$.
 $x \in [1; 1]$ $x \in [1; 1]$

Bài 6:

1. Đặt $t = x^2 + y^2$, từ giả thiết suy ra $xy = 2t - 1 \Rightarrow \frac{2}{5} \leq t \leq \frac{2}{3}$.

$$A = 7(x^2 + y^2)^2 - 10x^2y^2 = -33t^2 + 40t - 10, \text{ với } \frac{2}{5} \leq t \leq \frac{2}{3}.$$

2. Từ giả thiết, suy ra $(x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 2 = -(3x^2y^2 + x^2) \leq 0$, khi đó

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 2. \text{ Đặt } t = x^2 + y^2 \Rightarrow 1 \leq t \leq 2.$$

3. Cách 1: Ta có: $C = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2}$.

Nếu $y = 0 \Rightarrow C = 1$.

Nếu $y \neq 0$, $\max C = 3$ và $\min C = -6$.

$$\text{Cách 2: } C = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{2x^2 + 12xy}{x^2 + 2xy + 3y^2}$$

$$\Rightarrow C - 3 = \frac{2x^2 + 12xy}{x^2 + 2xy + 3y^2} - 3 = \frac{-(x - 3y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} \leq 0;$$

$$C+6=\frac{2x^2+12xy}{x^2+2xy+3y^2}+6=\frac{2(2x+3y)^2}{x^2+2xy+3y^2}\geq 0.$$

Vậy $\max C = 3$; $\min C = -6$.

Bạn đọc hãy giải thích tại sao chúng ta biết cách đánh giá $C-3$ và $C+6$?

4. **Cách 1:** $P = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{xy} + xy = \left(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \left(\frac{1}{16xy} + xy \right) + \frac{7}{16xy}.$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2} \geq 4 \\ \frac{1}{16xy} + xy \geq 2\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \\ \frac{7}{16xy} \geq \frac{7}{4(x+y)^2} \geq \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{xy} + xy \geq 4 + \frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{25}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$, $\min P = \frac{25}{4}$.

Cách 2: $P = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{xy} + xy = \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy} + \frac{1}{xy} + xy \geq \frac{1}{1-2xy} + \frac{1}{xy} + xy$

$$1 \geq x+y \geq 2\sqrt{xy} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq xy > 0 \Rightarrow \text{Đặt } t = xy, t \in \left(0; \frac{1}{4}\right], P = \frac{1}{1-2t} + \frac{1}{t} + t, t \in \left(0; \frac{1}{4}\right].$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t) = \frac{1}{1-2t} + \frac{1}{t} + t$ liên tục trên nửa khoảng $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Bài 7: Đặt $t = x + y$.

Từ giả thiết suy ra $xy = 3 - t$ và kết hợp $(x+y)^2 \geq 4xy$ thì $t \geq 2$.

1. $F = \frac{-t+3}{t+3}$

2. $K = 4 \frac{t}{-t+3}.$

Bài 8:

1. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết suy ra $xy = \frac{t}{4}$ thì $1 \leq t \leq 2$, khi đó:

$$F = (x+y)^2 - 3xy = t^2 - \frac{3}{4}t. \text{ Xét hàm số } f(t) = t^2 - \frac{3}{4}t, \text{ với } t \in [1; 2].$$

$$f'(t) = 2t - \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } t \in (1; 2), \text{ do vậy } f(t) \text{ là hàm số đồng biến trên đoạn } [1; 2].$$

$$2. \begin{cases} (x+y)^3 + 4xy \geq 2 \\ (x+y)^2 - 4xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 1.$$

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ \geq 3 \left[(x^2 + y^2)^2 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} \right] - 2(x^2 + y^2) + 1 = \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow t \geq \frac{1}{2} \text{ và } A \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1.$$

$$3. \text{Đặt } t = x+y \text{ thì } 0 < t \leq 1. \text{ Áp dụng } (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow xy \leq \frac{t^2}{4}.$$

$$\text{Khi đó } Q = \frac{3t}{4} + \frac{4(t+3)}{t^2}, \text{ với } 0 < t \leq 1. \text{ Ta tìm được min } Q = \frac{67}{4} \text{ khi } (x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Bài 9:

$$1. \text{Ta có: } 3xy - 1 = x + y \geq 2\sqrt{xy}. \text{ Đặt } t = xy \Rightarrow 3t - 2\sqrt{t} - 1 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cauchy: } \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{2\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow M \leq \frac{5t-1}{4t^2} + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{5t-1}{4t^2} + \frac{1}{2} \text{ trên nửa khoảng } [1; +\infty) \text{ và suy ra}$$

$$\max M = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = y = 1.$$

$$2. \text{Ta có: } 1 = x^2 + y^2 - xy \geq 2xy - xy \Leftrightarrow xy \leq 1.$$

$$1 = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy \geq -3xy \Leftrightarrow xy \geq \frac{-1}{3}, P = \frac{-2t^2+3}{t+1}, t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right] \setminus \{0\}$$

$$3. -\frac{1}{5} \leq t \leq \frac{1}{3}, t = xy, 2(x^4 + y^4) + 12x^2y^2 = f(t) = \frac{17}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}.$$

$$4. \text{Từ } ab + a + b = 3 \Rightarrow 3 - (a+b) = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow a+b \geq 2.$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{3a(a+1) + 3b(b+1)}{(b+1)(1+a)} + \frac{ab}{a+b} - (a+b)^2 + 2ab.$$

$$P = 3 \frac{(a+b)^2 - 2ab + (a+b)}{ab + a + b + 1} + \frac{ab}{a+b} - (a+b)^2 + 2ab$$

$$P = \frac{3}{4} \left[(a+b)^2 + 3(a+b) - 6 \right] + \frac{3-(a+b)}{a+b} - (a+b)^2 + 6 - 2(a+b)$$

$$P = \frac{1}{4} \left[-(a+b)^2 + (a+b) + \frac{12}{a+b} + 2 \right].$$

Đặt $t = a + b \geq 2$. Xét hàm số $g(t) = -t^2 + t + \frac{12}{t} + 2$ với $t \geq 2$.

Vậy $\max P = \frac{3}{2}$ đạt được khi $a = b = 1$.

5. Nhận thấy các biểu thức có trong bài toán là các biểu thức đối xứng hai biến a, b nên ta đặt $t = a + b \Rightarrow ab = 3 - t$ và $a^2 + b^2 = t^2 - 2(3 - t) = t^2 + 2t - 6$

Vì $(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow t^2 \geq 4(3-t) \Leftrightarrow t^2 + 4t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$ (do $t > 0$)

Bất đẳng thức cho $\Leftrightarrow \frac{3(a^2 + b^2) + 3(a+b)}{(a+1)(b+1)} + \frac{ab}{a+b} - (a^2 + b^2) \leq \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3t^2 + 6t - 18 + 3t}{4} + \frac{3-t}{t} - t^2 - 2t + 6 \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -t^2 + t + \frac{12}{t} \leq 4.$$

Xét hàm số: $f(t) = -t^2 + t + \frac{12}{t}$ với $t \geq 2$.

Bài 10:

1. Đặt $S = x + y = 1$, $P = xy$, $S^2 - 4P \geq 0 \Rightarrow P \leq \frac{1}{4}$ và $Q = P^3 - 3P + 2$.

2a. $x^2 + x - 12 = y \leq 0$ hay $-4 \leq x \leq 3$. Khi đó: $T = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$, với $-4 \leq x \leq 3$.

$\min T = -12$ khi $(x; y) = (1; -10)$, $\max T = 20$

Khi $(x; y) = (-3; -6)$ hoặc $(x; y) = (3; 0)$.

b. Đặt $t = x + y$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ và giả thiết suy ra:

$$(x+y)^2 \leq 2(x+y) \Rightarrow t^2 \leq 2t \text{ suy ra } 0 \leq t \leq 2.$$

$$M = (x+y)^3 - 2xy(x+y), \text{ từ giả thiết suy ra } 2xy = (x+y)^2 - (x+y).$$

Khi đó $M = t^2$, với $0 \leq t \leq 2$.

Do đó $\min M = 0$ khi $(x; y) = (0; 0)$ và $\max M = 4$ khi $(x; y) = (1; 1)$.

c. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết suy ra $xy = \frac{t^2 - t + 2}{t + 2}$ kết hợp $(x + y)^2 \geq 4xy$

Suy ra $t < -2$ hoặc $t \geq 2$ và $\min N = 2$ khi $(x; y) = (1; 1)$

Dạng 3. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC KẾT HỢP VỚI ĐẠO HÀM

Bài 1:

1. Từ giả thiết suy ra: $1 \geq \frac{1}{y} + x \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}} \Rightarrow \frac{y}{x} \geq 4$. Đặt $t = \frac{y}{x} \geq 4$

Ta có: $P = 9t^3 + \frac{8}{t} = f(t)$, $f'(t) = 27t^2 - \frac{8}{t^2} > 0$, $\forall t \geq 4$

Suy ra: $P \geq f(4) = 578$. Đẳng thức xảy ra khi: $x = \frac{1}{2}, y = 2$

Vậy $\min P = 578$.

2. Đặt $t = a + b \Rightarrow ab = \frac{2}{t}$. Do $(a + b)^2 \geq 4ab \Rightarrow t^2 \geq \frac{8}{t} \Rightarrow t \geq 2$

Khi đó:

$$\begin{aligned} 3(a^3 + b^3) - 2(a^2 + b^2) + a + b &= 3(a + b)^3 - 3ab(a + b) - 2(a + b)^2 + 4ab + a + b \\ &= 3t^3 - 2t^2 + t + \frac{8}{t} - 18 = f(t), t \geq 2. \end{aligned}$$

Ta có: $f'(t) = 9t^2 - 4t + 1 - \frac{8}{t^2} = 4t^2 - 4t + 1 + \frac{5t^4 - 8}{t^2} > 0$, $\forall t \geq 2$

Suy ra: $f(t) \geq f(2) = 4$ (đpcm).

3. Giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$, đặt $t = x(y + z)$ ta chứng minh được:

$x(y - z)^4 + y(z - x)^4 + z(x - y)^4 \leq t(1 - 3t) = f(t)$. Khảo sát hàm $f(t)$ ta có đpcm.

$$\begin{aligned} 4. P &= 3[(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)] - 2xyz = 3[9 - 2(xy + yz + zx)] - 2xyz \\ &= 27 - 6x(y + z) - 2yz(x + 3) \geq 27 - 6x(3 - x) - \frac{(y + z)^2}{2}(x + 3) = \frac{1}{2}(-x^3 + 15x^2 - 27x + 27) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 27x + 27$ với $0 < x < 3$

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 30x - 27 = 0$

$\forall x \in (0; 3): f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Từ đây suy ra: $\min P = 7 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

5. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có: $t = \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{xyz}} = 3$.

Do đó bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $P(t) = t + \frac{1}{t}$ trên khoảng $[3; +\infty)$.

Vì $P'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2} > 0, \forall t > 3$ nên hàm số $P(t)$ đồng biến trên khoảng $[3; +\infty)$

Từ đó có $\min_{[3; +\infty)} P(t) = P(3) = \frac{10}{3}$ khi $x = y = z$

Bài 2:

1. Đặt $t = xy$. Ta có: $xy + 1 = 2((x+y)^2 - 2xy) \geq -4xy \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{5}$

Và $xy + 1 = 2((x-y)^2 + 2xy) \geq 4xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}$. ĐK: $-\frac{1}{5} \leq t \leq \frac{1}{3}$.

Suy ra: $P = \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2}{2xy + 1} = \frac{-7t^2 + 2t + 1}{4(2t + 1)}$.

Do đó: $P' = \frac{7(-t^2 - t)}{2(2t + 1)^2}$, $P' = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Từ đó ta tìm được: $\min P = \frac{2}{15}$, $\max P = \frac{1}{4}$

2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} + \sqrt{9y^2 + \frac{4}{9y^2}} + \sqrt{25z^2 + \frac{4}{25z^2}} \geq 3\sqrt{5} \quad (1)$$

Ta có: $VT(1) \geq \sqrt{(x+3y+5z)^2 + \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} + \frac{2}{5z}\right)^2} \geq \sqrt{9 \cdot (\sqrt[3]{x \cdot 3y \cdot 5z})^2 + \frac{36}{\sqrt[3]{(x \cdot 3y \cdot 5z)^2}}}$

Đặt $t = \sqrt[3]{(x \cdot 3y \cdot 5z)^2} \leq \left(\frac{x+3y+5z}{3}\right)^2 \leq 1$

Xét hàm số $f(t) = 9t + \frac{36}{t}$, $f'(t) = 9 - \frac{36}{t^2} < 0$, suy ra $f(t) \geq f(1) = 45$

Suy ra (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{5}$.

3. Ta có: $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = \sqrt{2(3 - z^2)}$

Mặt khác: $\frac{\sqrt{2(3-t^2)}}{5-t^2} \leq \frac{1}{2}, \forall t \in (0; \sqrt{3})$. Đẳng thức có khi $t = 1$

Nên $P \leq \frac{1}{2}(x+y+z) \leq \frac{1}{2}\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} = \frac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$

Vậy $\max P = \frac{3}{2}$.

4. Đặt $t = a + b + c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)} = \frac{\sqrt{33}}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 + \frac{49}{4} \geq 7(a^2 + b^2 + c^2) = 7\left(t^2 - \frac{11}{2}\right)$$

Suy ra: $P \geq \frac{378}{t} + 7t^2 - \frac{203}{4} = f(t)$

Ta có: $f'(t) = 14t - \frac{378}{t^2} = \frac{14(t^3 - 27)}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Từ đó ta tìm được $P \geq f(3) = \frac{553}{4}$. Khi $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3}{2}$ và các hoán vị thì đẳng thức xảy ra. Vậy $\min P = \frac{553}{4}$.

5. Đặt $F = 3x^2 + 2y^2 + z^2$. Từ giả thiết, ta có: $x \leq \frac{4-2y-z}{3}$ thay vào F ta được:

$F \leq \frac{1}{3}(4z^2 + 4z(y-2) + 10y^2 - 16y + 16) = \frac{1}{3}f(z)$. Xét hàm số $f(z)$ với $y \leq z \leq 1$.

Ta có: $f'(z) = 8z + 4(y-2) \Rightarrow f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2-y}{2}$.

• Nếu $y < \frac{2}{3} \Rightarrow y < \frac{2-y}{2} \Rightarrow f(z) \leq \max\{f(y), f(1)\}$

Mà $f(1) = 10y^2 - 12y + 12 < 12$ và $f(y) = 18y^2 - 24y + 16 < 16 \Rightarrow F < \frac{16}{3}$

• Nếu $\frac{2}{3} \leq y \leq 1 \Rightarrow y \geq \frac{2-y}{2} \Rightarrow f(z) \leq f(1) \leq 16 \Rightarrow F \leq \frac{16}{3}$.

Bài 3:

1. Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 1$. Khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + 1 \geq 4\sqrt{3abc} \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{abc}} \geq 4\sqrt{3} \quad (1).$$

Đặt $t = \sqrt[6]{abc} \Rightarrow 0 < t \leq \sqrt{\frac{a+b+c}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Khi đó:

$$VT(1) \geq 3\sqrt[6]{abc} + \frac{1}{\sqrt{abc}} = 3t + \frac{1}{t^3} = f(t).$$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trên $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ta có đpcm.

2. Đặt $t = x + y + z \geq 0 \Rightarrow t^2 = 3 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx = \frac{t^2 - 3}{2}$

Ta có: $0 \leq xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 = 3$ nên $3 \leq t^2 \leq 9 \Rightarrow \sqrt{3} \leq t \leq 3$

Khi đó: $A = \frac{t^2 - 3}{2} + \frac{5}{t}$ với $\sqrt{3} \leq t \leq 3$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{5}{t} - \frac{3}{2}$, $\sqrt{3} \leq t \leq 3$.

Ta có: $f'(t) = t - \frac{5}{t^2} = \frac{t^3 - 5}{t^2} > 0$ với $t \in (\sqrt{3}; 3) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên đoạn $[\sqrt{3}; 3]$.

Do đó: $f(t) \leq f(3) = \frac{14}{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy, giá trị lớn nhất của A là $\frac{14}{3}$ khi $x = y = z = 1$

3. $t = xy + yz + zx$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq xy + yz + zx \leq 1$ hay $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$P = f(t) = t + \frac{4}{t+2}$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

Ta có: $f'(t) = 1 - \frac{4}{(t+2)^2} = \frac{t^2 + 4t}{(t+2)^2}$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$f(0) = 2$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{6}$, $f(1) = \frac{7}{3}$.

Suy ra $P_{\max} = f(1) = \frac{7}{3}$ khi $t = 1$ hay $x = y = z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$P_{\min} = f(0) = 2$ khi $t = 0$

4. $(x+y)^2 + 4 \leq 2(x^2 + y^2) + 4 = 4(x+y) + 2\sqrt{xy} \leq 5(x+y)$

$\Rightarrow (x+y)^2 - 5(x+y) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x+y \leq 4$, $2xy + \sqrt{xy} = (x+y)^2 - 2(x+y) + 2$

Suy ra $A = (x+y)^2 - 2(x+y) + 2 - \frac{4}{x+y}$. Đặt $t = x+y$ với $t \in [1;4]$

Khi đó: $A = f(t) = t^2 - 2t + 2 - \frac{4}{t}$ với $t \in [1;4]$

Ta có: $f'(t) = 2t - 2 + \frac{4}{t^2} = \frac{2t^3 - 2t^2 + 4}{t^2} = \frac{2(t+1)(t^2 - 2t + 2)}{t^2} > 0$ với $t \in (1;4)$

$\Rightarrow \max A = f(4) = 8$ khi $x = y = 2$ và $\min A = f(1) = 5$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

$$5. \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy = x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \geq \frac{(x+y)^4}{8}$$

$$\Rightarrow 4(x+y)^2 - (x+y)^4 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq (x+y)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x+y \leq 2$$

$2A = (x+y)^4 - 2(x+y)^2$. Đặt $t = x+y$, với $t \in [-2;2]$

Khi đó: $2A = f(t) = t^4 - 2t^2$, với $t \in [-2;2]$

$$f'(t) = 4t^3 - 4t, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = \pm 1; f(0) = 0, f(\pm 1) = -1, f(\pm 2) = 8$$

Vậy $\max A = 4$ khi $x = y = \pm 1$;

$$\min A = -\frac{1}{2} \text{ khi } x = \frac{1 + \sqrt{2\sqrt{7} - 5}}{2}, y = \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{7} - 5}}{2}$$

$$\text{hoặc } x = \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{7} - 5}}{2}, y = \frac{1 + \sqrt{2\sqrt{7} - 5}}{2}$$

$$\text{hoặc } x = \frac{-1 + \sqrt{2\sqrt{7} - 1}}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{2\sqrt{7} - 1}}{2}$$

$$\text{hoặc } x = \frac{-1 - \sqrt{2\sqrt{7} - 1}}{2}, y = \frac{-1 + \sqrt{2\sqrt{7} - 1}}{2}$$

Bài 4:

$$1. a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$$

Theo bất đẳng thức Cauchy: $a^3 + ab^2 \geq 2a^2b$, $b^3 + bc^2 \geq 2b^2c$, $c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$

Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$

$$\text{Khi đó: } P \geq 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{Đặt } t = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P \geq 14t + \frac{3(1-t)}{2t} = \frac{t}{2} + \frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} - \frac{3}{2}, \text{ với } t \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \frac{t}{2} + \frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} - \frac{3}{2}, \text{ với } t \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{Từ đây suy ra } \min P = \frac{23}{3} \text{ khi } a = b = c = \frac{1}{3}$$

$$\text{Chú ý: } P \geq 14t + \frac{3(1-t)}{2t} = \frac{t}{2} + \frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{27t}{2} \cdot \frac{3}{2t}} - \frac{3}{2} = \frac{23}{3}$$

$$\text{Suy ra } \min P = \frac{23}{3} \text{ khi } a = b = c = \frac{1}{3}$$

$$2. \text{ Ta có: } P = \frac{\frac{x^2}{y^2} + (2z-1)\frac{x}{y} - z}{\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1} = \frac{t^2 + (2z-1)t - z}{t^2 - t + 1} \text{ với } t = \frac{x}{y} \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \frac{t^2 + (2z-1)t - z}{t^2 - t + 1} \text{ với } t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

$$\text{Theo bài toán, ta có: } \max_{t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(t) = M$$

$$\text{Ta có: } M \geq 2 \Leftrightarrow \frac{t^2 + (2z-1)t - z}{t^2 - t + 1} \geq 2 \Leftrightarrow z \geq \frac{t^2 - t + 2}{2t - 1} \text{ với } t \in \left(\frac{1}{2}; 2\right]$$

$$\text{Xét } g(t) = \frac{t^2 - t + 2}{2t - 1} \text{ với } t \in \left(\frac{1}{2}; 2\right] \Rightarrow \min_{t \in \left(\frac{1}{2}; 2\right]} g(t) = \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow z \geq \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$3. P = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 3(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2 + 3} \\ = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 5(a^2 + b^2 + c^2) + 9}{2(a^2 + b^2 + c^2 + 3)}$$

$$\text{Ta thấy: } 9 = (a+b+c)^2 > a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3, \text{ vì thế nếu } t = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{thì } t \in [3; 9). \text{ Xét hàm số: } f(t) = \frac{2t^2 + 5t + 9}{2t + 6} \text{ với } t \in [3; 9).$$

Ta có: $f'(t) = \frac{4(t^2 + 6t + 3)}{(2t + 6)^2} > 0, \forall t \in (3; 6)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến với $\forall t \in [3; 9]$ và $P \geq f(3) = \frac{7}{2}$.

Vậy $\min P = \frac{7}{2}$

4. $\frac{a}{b^2c} + \frac{b}{c^2a} + \frac{c}{a^2b} \geq 3 \frac{\sqrt[3]{abc}}{abc}, \frac{c^5}{b} + \frac{b^5}{c} + \frac{c^5}{a} \geq 3\sqrt[3]{(abc)^4}, 1,5 \geq a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
 $\Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt[3]{abc}$ thì $0 < t \leq \frac{1}{2}$

Khi đó: $P \geq \frac{3}{t^2} + 3t^4$ với $0 < t \leq \frac{1}{2}$, tìm được $\min P = \frac{195}{16}$ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$

5. $3 = xy + x + y \leq \frac{(x+y)^2}{4} + x + y \Rightarrow x + y \geq 2$

$P \geq \frac{(x+y)^2}{x+y+2} + \frac{3-(x+y)}{x+y} = \frac{t^2}{t+2} + \frac{3-t}{t}$ với $t = x+y$ và $t \geq 2$

Bài 5:

1. $P = (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] - 9xy = (x+y)^3 - 3(x+y)^2 - 9(x+y)$

Đặt $t = x+y$ và với $x+y = xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 \Rightarrow x+y \geq 4 \Rightarrow t \geq 4$

Vậy $P = t^3 - 3t^2 - 9t$ với $t \geq 4$

2. $x^2 + y^2 = 1 + xy \geq 2xy, x^2 + y^2 = 1 + xy \geq -2xy \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq xy \leq 1$

$T = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = (1 + xy)^2 - 3x^2y^2 = -2x^2y^2 + 2xy + 1$. Đặt $t = xy$

$\max T = \frac{3}{2}, \min T = \frac{1}{9}$

3. Đặt $t = x+y+z, t \in \left(0; \frac{3}{2}\right], \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{t}$

4. Đặt $t = x+y$. Với $\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 5$, ta có: $(x+y)\left(\frac{4}{x} + \frac{9}{y}\right) \geq 25 \Rightarrow x+y \geq 5 \Rightarrow t \geq 5$

5. Ta có $F = (x^2 + y^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 - xy = -2(xy)^3 - 2(xy)^2 + 2xy + 1$

Đặt $xy = t$. Ta có $f(t) = -2t^3 - 2t^2 + 2t + 1$

$$x^2 + y^2 - xy = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 3xy = 1 \Rightarrow xy \geq \frac{-1}{3};$$

$$x^2 + y^2 - xy = 1 \Leftrightarrow (x-y)^2 + xy = 1 \Rightarrow xy \leq 1. \text{ Suy ra } t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$$

Bài 6:

$$1. 4xy(x^2 + y^2) + x + y \geq 6xy \Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 6,$$

$$4(x^2 + y^2) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2(x+y)^2 + \frac{4}{x+y}. \text{ Đặt } t = x+y > 0$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2t^2 + \frac{4}{t}, \text{ với } t > 0$$

$$2. \text{ Ta có: } \begin{cases} x = 2-y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \text{ thay vào P ta được: } P = 9(2-y)^3 + 4y^3 = f(y)$$

$$f'(y) = 3[4y^2 - 9(2-y)^2] \Rightarrow f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y = 3(2-y) \Leftrightarrow y = \frac{6}{5}$$

$$\text{Từ đó ta tìm được } \max P = f(2) = 64 \text{ đạt được khi } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\min P = f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{384}{25} \text{ đạt được khi } \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$3. \text{ Ta có: } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \left(3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right) = 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

$$3(a+b+c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3(a+b+c) + \frac{18}{a+b+c} = 3\left(t + \frac{6}{t}\right) = 3f(t)$$

$$\text{Trong đó } 0 < t = a+b+c \leq 1 \text{ và } f(t) = t + \frac{6}{t}.$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 1 - \frac{6}{t^2} = \frac{t^2 - 6}{t^2} < 0, \forall t \in (0; 1], \text{ nên hàm số nghịch biến trên } (0; 1]$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(1) = 7, \forall t \in (0; 1].$$

$$4. (a+b+c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow ab + bc + ca = \frac{1}{4}(a+b+c)^2$$

$$P = \frac{4(a^3 + b^3 + c^3)}{(a+b+c)^3} = 4\left[\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^3 + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3\right]$$

$$\text{Đặt } x = \frac{a}{a+b+c}, y = \frac{b}{a+b+c}, z = \frac{c}{a+b+c}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+zx=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=1-x \\ yz=x^2-x+\frac{1}{4} \end{cases} \text{ và } (y+z)^2 \geq 4yz \Rightarrow 3x^2-2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

$$P = 4(x^3 + y^3 + z^3) = 4 \left[x^3 + (1-x)^3 - (1-x) \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) \right] = 4x^3 + 4x^2 - 7x + 3$$

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 7x + 3 \text{ với } x \in \left[0; \frac{2}{3} \right]$$

$$5. \text{ Từ điều kiện bài toán ta có } (a+b)^2 \leq a^2b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq a^2b^2 - 2ab$$

$$\text{Hơn nữa } a^2b^2 - 2ab \geq a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab \geq 4. \text{ Đặt } t = ab, \text{ ta có } t \geq 4$$

$$\text{Ta có: } P \geq \frac{a^2b^2}{a^2b^2 - 2ab} + \frac{12}{ab} + 12ab \text{ hay } P \geq \frac{t^2}{t^2 - 2t} + \frac{12}{t} + 12t$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2}{t^2 - 2t} + \frac{12}{t} + 12t \text{ với } t \geq 4$$

$$6. \text{ Không mất tính tổng quát, giả sử } |x| \geq |y| \geq |z| \Rightarrow x^2 \geq 3$$

$$\text{Đặt } t = yz \Rightarrow |t| = |yz| \leq \frac{y^2 + z^2}{2} = \frac{9 - x^2}{2} \leq 3, \text{ khi đó } P = 2t^3 + t^2 - 20t + 72$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = 2t^3 + t^2 - 20t + 72 \text{ với } |t| \leq 3 \text{ có } f'(t) = 2(t+2)(3t-5)$$

$$7. \text{ Nếu } a=0, b=0 \Rightarrow P=0$$

$$\text{Nếu } a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow P = 2a + 3b = (2a + 3b) \frac{4a - 3b}{a^2 + b^2} = \frac{8a^2 + 6ab - 9b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{Đặt } a = tb, (t \neq 0) \text{ thì } P = \frac{8t^2 + 6t - 9}{t^2 + 1}, \text{ xét hàm số } f(t) = \frac{8t^2 + 6t - 9}{t^2 + 1}, \text{ với } (t \neq 0)$$

Bài 7:

$$1. \frac{x^2 + y^2}{z^2} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{(x+y)^2}{2z^2} + \frac{z}{x+y}. \text{ Đặt } t = \frac{x+y}{z} \text{ với } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{x+y}{z} \geq 4$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} \text{ với } t \geq 4$$

$$2. P = (x+y)^3 - 3(x+y)^2. \text{ Đặt } t = x+y \text{ với } x^2 + y^2 = xy(x+y),$$

Ta có: $xy(x+y) \leq \frac{(x+y)^3}{4}$ và $\frac{(x+y)^2}{2} \leq x^2 + y^2$, suy ra $\frac{(x+y)^2}{2} \leq \frac{(x+y)^3}{4}$

hay $x+y \geq 2$. Vậy, $P = t^3 - 3t^2$ với $t \geq 2$

$$3. \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + 2 \leq x^4 + y^4 + 2 = 2(x^2 + y^2) + xy \leq \frac{5}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 5(x^2 + y^2) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

$$A = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 2 - \frac{4}{x^2 + y^2}. \text{ Đặt } t = x^2 + y^2 \text{ với } t \in [1; 4]$$

$$4. 2(x^3 + y^3) + x^3y^3 = 6x^2y^2 \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}\right) + 2 = \frac{12}{xy}$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 + 2 \leq 4\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}\right) + 2 = \frac{12}{xy} \leq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2$$

$$\text{Suy ra: } \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 + 2 \leq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ với } t \in [1; 1 + \sqrt{3}]$$

$$\text{Ta có: } A = 4t + t^2 - t + 1 - \frac{1}{2t+2} = t^2 + 3t + 1 - \frac{1}{2t+2}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = t^2 + 3t + 1 - \frac{1}{2t+2} \text{ với } t \in [1; 1 + \sqrt{3}]$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 2t + 3 + \frac{2}{(2t+2)^2} > 0 \text{ với } t \in (1; 1 + \sqrt{3})$$

$$\min A = f(1) = \frac{19}{4} \text{ khi } x = y = 2, \max A = f(1 + \sqrt{3}) \text{ khi } x = y = \sqrt{3} - 1$$

Bài 8:

$$1. \text{ Ta có: } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \left(3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right) = 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

$$\text{Do đó: } 3(a+b+c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3(a+b+c) + \frac{18}{a+b+c} = 3\left(t + \frac{6}{t}\right) = 3f(t)$$

$$\text{Trong đó } 0 < t = a+b+c \leq 1 \text{ và } f(t) = t + \frac{6}{t}.$$

Ta có: $f'(t) = 1 - \frac{6}{t^2} = \frac{t^2 - 6}{t^2} < 0, \forall t \in (0; 1]$, nên hàm số nghịch biến trên $(0; 1]$
 $\Rightarrow f(t) \geq f(1) = 7, \forall t \in (0; 1]$.

2. Đặt $t = a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \Rightarrow 0 < t \leq \sqrt{3}$.

Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - (a+b+c) \geq \frac{9}{a+b+c} - (a+b+c) = \frac{9}{t} - t = f(t).$$

Xét: $f(t) = \frac{9}{t} - t, t \in (0; \sqrt{3}] \Rightarrow f'(t) = -\frac{9}{t^2} - 1 < 0$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0; \sqrt{3}] \Rightarrow f(t) \geq f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}, \forall t \in (0; \sqrt{3}]$.

3. Ta có: $F \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} - cd = \sqrt{2d^2 + 6d + 9} - d^2 - 3d = f(d)$

Ta có $f'(d) = (2d+3) \frac{1 - \sqrt{2(d+\frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2}}}{\sqrt{2d^2 + 6d + 9}}$.

Vì $\frac{1 - \sqrt{2(d+\frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2}}}{\sqrt{2d^2 + 6d + 9}} < 0$ nên $f(d) \leq f(-\frac{3}{2}) = \frac{9+6\sqrt{2}}{4}$ ta có đpcm.

4. Ta có: $\begin{cases} x = 2 - y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ thay vào P ta được: $P = 9(2-y)^3 + 4y^3 = f(y)$

$$f'(y) = 3[4y^2 - 9(2-y)^2] \Rightarrow f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y = 3(2-y) \Leftrightarrow y = \frac{6}{5}$$

Từ đó ta tìm được $\max P = f(2) = 64$ đạt được khi $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

$$\min P = f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{384}{25} \text{ đạt được khi } \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}.$$

5. Nếu $x^2 - xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ thì thỏa mãn.

Nếu $x^2 - xy + y^2 > 0$ thì đặt $a = x^2 - xy + y^2, b = x^2 + xy - 2y^2$ suy ra $0 < a \leq 3$

Ta có: $\frac{b}{a} = \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - xy + y^2}$ có tử và mẫu đẳng cấp.

Nếu $y = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow 0 < b = a \leq 3 < -1 + 2\sqrt{7}$

Nếu $y \neq 0$, đặt $x = ty \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{(t^2 + t - 2)y^2}{(t^2 - t + 1)y^2} = \frac{t^2 + t - 2}{t^2 - t + 1} = f(t)$

Khảo sát hàm số: $f(t) = \frac{t^2 + t - 2}{t^2 - t + 1}$, $t \in \mathbb{R}$, ta được: $\frac{-1 - 2\sqrt{7}}{3} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{-1 + 2\sqrt{7}}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{a(-1 - 2\sqrt{7})}{3} \leq b \leq \frac{(-1 + 2\sqrt{7})a}{3}$$

Lại có $0 < a \leq 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{a}{3} \leq 1$,

$$\text{nên } -1 - 2\sqrt{7} \leq \frac{a(-1 - 2\sqrt{7})}{3} \leq b \leq \frac{(-1 + 2\sqrt{7})a}{3} \leq -1 + 2\sqrt{7}.$$

Bài 9:

$$1. (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \left(3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \right) = 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}.$$

$$\text{Do đó: } P \geq 3(a + b + c) + \frac{18}{a + b + c} = 3 \left(t + \frac{6}{t} \right) = 3f(t)$$

Trong đó $0 < t = a + b + c \leq 1$ và $f(t) = t + \frac{6}{t}$

Ta có: $f'(t) = 1 - \frac{6}{t^2} = \frac{t^2 - 6}{t^2} < 0, \forall t \in (0; 1)$, nên hàm số nghịch biến trên $(0; 1]$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(1) = 7, \forall t \in (0; 1].$$

Vậy $\min P = 21$ đạt được khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{(a+b+c+1)^2}{4}$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) \leq \frac{(a+b+c+3)^3}{27}$$

Lúc đó, biểu thức đã cho trở thành: $P \leq \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3}$

Đặt $t = a + b + c + 1$ nên có $t > 1$. Lúc này, $P \leq \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}$ với $t > 1$

Ta có: $f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$, vì $t > 1$

Từ đây, ta có $f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$ hay $P \leq \frac{1}{8}$.

Do đó giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{8}$ đạt được khi $a = b = c = 1$.

3. Đặt $t = a + b \Rightarrow t^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4 + 2ab \Rightarrow ab = \frac{t^2 - 4}{2}$

Từ giả thiết, suy ra $a, b \in [0; 2]$ nên có: $\begin{cases} a(2-a) \geq 0 \\ b(2-b) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2(a+b) \geq a^2 + b^2 \Rightarrow t \geq 2$

Lại có: $t = a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ hay $t \leq 2\sqrt{2}$

Ta có: $P = t + \frac{\sqrt{14-t^2}}{\sqrt{2}}$. Xét $f(t) = t + \frac{\sqrt{14-t^2}}{\sqrt{2}}$ với $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

4. $8(x+2y)xy = 5x + 2y(5+16x) \Leftrightarrow 8(x+2y)xy = 5(x+2y) + 32xy$

$$\Leftrightarrow 8(x+2y-4)xy = 5(x+2y) \Leftrightarrow \frac{5}{xy} = 8\left(1 - \frac{4}{x+2y}\right) (*)$$

Mặt khác: $P = (x+2y)^2 - \frac{5}{xy} + 11 = (x+2y)^2 + \frac{32}{x+2y} + 3$ do (*)

Đặt $t = x + 2y$ thì $t \geq 5$, khi đó $P = t^2 + \frac{32}{t} + 3$

Xét hàm số: $f(t) = t^2 + \frac{32}{t} + 3$ với $t \geq 5$

Bài 10:

1. Từ giả thiết $\frac{3}{4} \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc; \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq \frac{3}{abc} \Rightarrow P \geq 8abc + \frac{3}{abc}.$$

Đặt $t = abc \Rightarrow 0 < t \leq \frac{1}{8}$ và $P \geq 8t + \frac{3}{t} = f(t)$

Xét hàm $f(t)$ có $f'(t) = 8 - \frac{3}{t^2} < 0 \Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{8}\right) = 25 \quad \forall t \in \left(0; \frac{1}{8}\right]$

$$\Rightarrow P \geq 25. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}.$$

2. Đặt $t = a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \Rightarrow 0 < t \leq \sqrt{3}.$

Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow P \geq \frac{9}{a+b+c} - (a+b+c) = \frac{9}{t} - t = f(t).$

Xét: $f(t) = \frac{9}{t} - t, t \in (0; \sqrt{3}] \Rightarrow f'(t) = -\frac{9}{t^2} - 1 < 0$

$$\Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên } (0; \sqrt{3}] \Rightarrow f(t) \geq f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}, \forall t \in (0; \sqrt{3}].$$

Vậy $\min P = 2\sqrt{3}$ đạt được khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

3. Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \Rightarrow P \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} + 2xyz = \frac{3}{t} + 2t^3 = f(t)$

Trong đó, ta đặt $t = \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow 0 < t \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Xét hàm số $f(t)$, ta có: $f'(t) = 6t - \frac{3}{t^2} = \frac{6t^3 - 3}{t^2} < 0 \quad \forall t \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{29\sqrt{3}}{9}. \text{ Vậy } \min P = \frac{29\sqrt{3}}{9}.$$

Bài 11:

1. Không mất tính tổng quát, ta giả sử: $a + b + c = 4 \Rightarrow abc = 2$

Khi đó: $P = \frac{1}{256}(a^4 + b^4 + c^4) = \frac{1}{256}Q.$

Đặt $t = ab + bc + ca$. Ta có: $Q = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

$$= \left[(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \right]^2 - 2 \left[(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) \right]$$

$$= (4^2 - 2t)^2 - 2(t^2 - 16) = 2(t^2 - 32t + 144).$$

Đặt $t = ab + bc + ca = a(b+c) + bc = a(4-a) + \frac{2}{a} = -a^2 + 4a + \frac{2}{a}$

Mà $(b+c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (4-a)^2 \geq \frac{8}{a} \Leftrightarrow (a-2)(a^2 - 6a + 4) \geq 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \leq a \leq 2$

Xét $t = -a^2 + 4a + \frac{2}{a}, a \in [3 - \sqrt{5}; 2] \Rightarrow 5 \leq t \leq \frac{5\sqrt{5}-1}{2}$

Xét $f(t) = 2(t^2 - 32t + 144), t \in \left[5; \frac{5\sqrt{5}-1}{2} \right]$

$\max_D f(t) = f(5) = 18; \min_D f(t) = f\left(\frac{5\sqrt{5}-1}{2}\right) = 383 - 165\sqrt{5}$

Vậy $\max P = \frac{9}{128}$ đạt được chẳng hạn khi $x = 2; y = z = 1;$

$\min P = \frac{383 - 165\sqrt{5}}{256}$ đạt được chẳng hạn khi $x = 3 - \sqrt{5}; y = z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$

2. Ta có: $(a^2 + 4b^2)^2 + 3a^2b^2 = 2(a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2) \geq 4ab(a^2 + 2b^2)$

Suy ra: $\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right)^2 + 3 \geq 4\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 3.$ Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 3$

Khi đó: $P = \frac{a^3}{b^3} + \frac{8b^3}{a^3} + 1 + \frac{9(a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2}{ab(a^2 + 2b^2)}$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right)^3 - 6\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) + 1 + 9\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) - \frac{4}{\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}} = t^3 + 3t + 1 - \frac{4}{t} = f(t)$$

Trong đó $t = \frac{a}{b} + \frac{2b}{a}$

Vì $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\forall t \geq 3 \Rightarrow P \geq f(3) = \frac{107}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1.$ Vậy $\min P = \frac{107}{3}.$

3. Đặt $a = xb; b = yc; x > 0, y > 0.$ Suy ra $P = \frac{a^2 + 2b^2}{ab} = x + \frac{2}{x} = f(x)$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=16 \Leftrightarrow (xy+y+1)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{y}+1\right)=16$$

$$\Leftrightarrow x+xy+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y}=13 \Leftrightarrow xy+xy^2+\frac{y}{x}+y^2+\frac{1}{x}+1=13y$$

$$\Leftrightarrow (x+1)y^2+\left(x+\frac{1}{x}-13\right)y+\frac{1}{x}+1=0(*)$$

Phương trình (*) có ít nhất một nghiệm dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = \left(x+\frac{1}{x}-13\right)^2 - 4(x+1)\left(\frac{1}{x}+1\right) \geq 0 \\ S = -\frac{x+\frac{1}{x}-13}{x+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x} \leq 13 \\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 30\left(x+\frac{1}{x}\right) + 161 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x} \leq 7 \Leftrightarrow \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

Từ đó ta tìm được $\max P = f\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{21+3\sqrt{5}}{2}$ đạt được khi $\begin{cases} a = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}b \\ b = (3+\sqrt{5})c \end{cases}$

$\min P = f\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{21-3\sqrt{5}}{2}$ đạt được khi $\begin{cases} a = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}b \\ b = (3-\sqrt{5})c \end{cases}$

Bài 12:

1. Đặt $t = x+y \Rightarrow t \in [-2; 2]$

Ta có $P = (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3x - 3y = t^3 - 3(t^2 - 3)t - 3t = -2t^3 + 6t$

Xét $f(t) = -2t^3 + 6t$ với $t \in [-2; 2] \Rightarrow f'(t) = -6t^2 + 6; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

$$\max P = 4 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, y=2 \\ x=2, y=-1 \end{cases}$$

$$\min P = -4 \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=-2 \\ x=-2, y=1 \end{cases}$$

2. Giả sử: $x \leq y \leq z \Rightarrow 3 = x+y+z \leq 3z \Rightarrow z \geq 1 \Rightarrow z \in [1; 2]$

Lại có: $x^2 + y^2 \leq (x+y)^2 \Rightarrow A \leq (3-z)^2 + z^2 = 2z^2 - 6z + 9$

Xét $f(z) = 2z^2 - 6z + 9, z \in [1; 2] \Rightarrow f'(z) = 4z - 6$ và $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3}{2}$

Với $f(1)=5$, $f(2)=5$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2} \Rightarrow \max A=5$ khi $x=0, y=1, z=2$

3. Đặt $t = x + y + z \Rightarrow |t| \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{3}$

Xét hàm số $P(t) = -5t^2 + 12t + 2016$ trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

4. $F^2 \leq 3[6x^2 + 12(y+z)] \leq 18\left[x^2 + 2\sqrt{2(y^2 + z^2)}\right] = 18\left[x^2 + 2\sqrt{2(3-x^2)}\right]$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2(3-x^2)}$, với $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

Ta có: $f'(x) = 2x - \frac{4x}{\sqrt{2(3-x^2)}}$, $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

$\max F = 3\sqrt{10}$ khi $x = y = z = 1$

5.
$$\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+xz} = \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} = \frac{(x+y) - (x^2 + y^2)}{(x+y)(1-x)(1-y)}$$

$$= \frac{(x+y) - (x+y)^2 + 2xy}{(x+y)[1 - (x+y) + xy]} \leq \frac{(x+y) - (x+y)^2 + \frac{(x+y)^2}{2}}{(x+y)\left[1 - (x+y) + \frac{(x+y)^2}{4}\right]} = \frac{2}{z+1}$$

Bài toán áp dụng: $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

Nếu cho $A, B > 0$, $m \geq n > 0$ và $A < 2B$ thì $\frac{A+2n}{B+n} \leq \frac{A+2m}{B+m}$.

Lại có:
$$\frac{\sqrt{z} \cdot \sqrt{xy}}{z+xy} \leq \frac{\sqrt{z}(x+y)}{2\left[z + \frac{(x+y)^2}{4}\right]} = \frac{2\sqrt{z}(1-z)}{(z+1)^2}$$

Bài toán áp dụng: Nếu cho $m \geq n > 0$, $A > \sqrt{mn}$ thì $\frac{\sqrt{A} \cdot \sqrt{n}}{A+n} \leq \frac{\sqrt{A} \cdot \sqrt{m}}{A+m}$.

Khi đó: $P \leq \frac{2}{z+1} + \frac{2\sqrt{z}(1-z)}{(z+1)^2}$, đặt $t = \sqrt{z}, 0 < t < 1$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{2(-t^3 + t^2 + t + 1)}{(t^2 + 1)^2}$. Ta có: $f'(t) = \frac{2(t^4 - 2t^3 - 6t^2 - 2t + 1)}{(t^2 + 1)^3}$

và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2\left(t + \frac{1}{t}\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 - \sqrt{3}$

$$f(t) \leq f(2 - \sqrt{3}) \Rightarrow \max P = \max_{t \in (0;1)} f(t) = f(2 - \sqrt{3})$$

$$6. \text{ Ta có: } P = \frac{x^2 + 6xy}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{x^2 + 6xy}{x^2 + 2xy + 3y^2}$$

$$* \text{ Nếu } y = 0 \Rightarrow P = 1.$$

$$* \text{ Nếu } y \neq 0 \text{ thì đặt: } x = ty \Rightarrow P = \frac{t^2 y^2 + 6ty^2}{t^2 y^2 + 2ty^2 + 3y^2} = \frac{t^2 + 6t}{t^2 + 2t + 3} = f(t)$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-4t^2 + 6t + 18}{(t^2 + 2t + 3)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3, t_2 = -\frac{3}{2}, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 1$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta được: } f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq f(t) \leq f(3), \forall t \Rightarrow -3 \leq f(t) \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min P = -3 \text{ đạt được khi } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = -\frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} \\ x = \pm \frac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

$$\max P = \frac{3}{2} \text{ đạt được khi } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \\ x = \pm \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$7. \text{ Đặt } a = x^2 + xy + y^2 \Rightarrow 0 \leq a \leq 2$$

$$* \text{ Nếu } a = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow P = 0.$$

$$* \text{ Nếu } a \neq 0, \text{ ta giả sử } y \neq 0. \text{ Đặt } \Rightarrow \frac{P}{a} = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + t + 1} = f(t)$$

$$8. \text{ Vì } 1 \leq a < b < c < d \leq 50 \text{ và } a, b, c, d \text{ là các số nguyên nên } c \geq b + 1$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq \frac{1}{b} + \frac{b+1}{50} = f(b).$$

$$\text{Dễ thấy } 2 \leq b \leq 48 \text{ nên ta xét hàm số: } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x+1}{50}, x \in [2; 48]$$

$$\text{Ta có } f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{50} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta được } \min_{[2; 48]} f(x) = f(5\sqrt{2})$$

Do 7 và 8 là hai số nguyên gần $5\sqrt{2}$ nhất vì vậy:

$$\min_{[2;48]} f(b) = \min \{f(7); f(8)\} = \min \left\{ \frac{53}{175}; \frac{61}{200} \right\} = \frac{53}{175}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{53}{175}$.

Bài 13:

$$1. a(b+c) + (1-2a)bc = a(1-a) + (1-2a)bc = a(1-a) + (1-2a)u = f(u)$$

$$\text{Đồ thị } y = f(u) = (1-2a)u + a(1-a)$$

với $0 \leq u = bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{4}$ là một đoạn thẳng với hai giá trị đầu mút

$$f(0) = a(1-a) \leq \left[\frac{a+1-a}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} < \frac{7}{27}$$

$$\text{và } f\left(\frac{1}{4}(1-a)^2\right) = \frac{1}{4}(-2a^3 + a^2 + 1) = \frac{7}{27} - \frac{1}{4}\left(2a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3}\right) \leq \frac{7}{27}$$

Do đồ thị $y = f(u)$ là một đoạn thẳng với $u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-a)^2\right]$ và $f(0) < \frac{7}{27}$;

$$f\left(\frac{1}{4}(1-a)^2\right) \leq \frac{7}{27} \text{ nên } f(u) \leq \frac{7}{27}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

2. Cách 1:

$$\text{Đặt: } u = x + y, v = xy \Rightarrow (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow uv = u^2 - 3v$$

$$\Leftrightarrow (u+3)v = u^2 \Leftrightarrow v = \frac{u^2}{u+3} \text{ (do } u \neq -3).$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{(xy)^3} = \frac{u^3 - 3uv}{v^3} = \frac{u(u^2 - 3v)}{v^3} = \frac{u^2}{v^2} = \left(\frac{u+3}{u}\right)^2$$

$$\text{Vì } u^2 \geq 4v \Rightarrow u^2 \geq \frac{4u^2}{u+3} \Leftrightarrow \frac{4}{u+3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{u-1}{u+3} \geq 0 \text{ (lưu ý } u \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow u \geq 1 \vee u < -3 \Rightarrow \frac{u+3}{u} > 0.$$

$$\text{Xét hàm } f(u) = \frac{u+3}{u} \Rightarrow f'(u) = \frac{-3}{u^2} < 0 \Rightarrow f(u) \leq f(1) = 4 \Rightarrow A \leq 16.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của $A = 16$.

Cách 2: Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}$. Khi đó giả thiết của bài toán trở thành

$$a+b=a^2+b^2-ab \geq \frac{1}{4}(a+b)^2 \Leftrightarrow 0 \leq a+b \leq 4 \Rightarrow A \leq 16$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a=b=2 \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$$

$$\text{Cách 3: Xét hệ phương trình: } \begin{cases} (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{(xy)^3} = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{(x+y)^2 xy}{(xy)^3} = A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)xy = (x+y)^2 - 3xy \\ \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = S^2 - 3P \\ \left(\frac{S}{P}\right)^2 = A \end{cases}; \begin{cases} S = x+y \\ P = xy \end{cases} \text{ với } S^2 \geq 4P$$

$$\text{Giả thiết suy ra } \left(\frac{S}{P}\right)^2 = A \text{ thỏa điều kiện } A > 0, \text{ do đó } S = \sqrt{AP}$$

Thay $S = \sqrt{AP}$ vào phương trình $SP = S^2 - 3P$ rồi rút gọn ta được $(A - \sqrt{A})P = 3$, để phương trình này có nghiệm thì $A - \sqrt{A} \neq 0$ tức $0 < A \neq 1$.

$$\text{Với } 0 < A \neq 1 \text{ suy ra } P = \frac{3}{A - \sqrt{A}} \text{ và } S = \frac{3}{\sqrt{A} - 1}$$

$$S^2 \geq 4P \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{A} - 1}\right)^2 \geq 4\left(\frac{3}{A - \sqrt{A}}\right) \Leftrightarrow \sqrt{A} \leq 4 \Leftrightarrow 0 < A \leq 16, A \neq 1$$

Vậy, giá trị lớn nhất của $A = 16$.

$$3. \text{ Ta có: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \Rightarrow P \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} + 2xyz = \frac{3}{t} + 2t^3 = f(t)$$

$$\text{Trong đó, ta đặt } t = \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow 0 < t \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t), \text{ ta có: } f'(t) = 6t - \frac{3}{t^2} = \frac{6t^3 - 3}{t^2} < 0 \quad \forall t \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{29\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{29\sqrt{3}}{9}.$$

Bài 14:

$$1. F = (x^2 + y^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 - xy = -2(xy)^3 - 2(xy)^2 + 2xy + 1$$

Đặt $xy = t$. Ta có $f(t) = -2t^3 - 2t^2 + 2t + 1$

$$x^2 + y^2 - xy = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 3xy = 1 \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{3}$$

$$x^2 + y^2 - xy = 1 \Leftrightarrow (x-y)^2 + xy = 1 \Rightarrow xy \leq 1 \text{ suy ra } t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$$

Ta tìm max, min của $f(t)$ trên $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$, ta có: $f'(t) = -6t^2 - 4t + 2$

$$\text{Với } \forall t \in \left(-\frac{1}{3}; 1\right): f(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } \max f(t) = \frac{37}{27} \text{ khi } t = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\min f(t) = -1 \text{ khi } t = 1 \Rightarrow x = y = 1$$

$$2. P = \frac{1}{(1+\frac{b}{a})^2} + \frac{1}{(1+\frac{c}{b})^2} + \frac{1}{(1+\frac{a}{c})^2}, \text{ đặt } x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2}$$

$$\text{Giả sử } x = \max\{x; y; z\} \Rightarrow 1 = xyz \leq x^3 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\text{Ta chứng minh: } \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz} \quad \forall y, z > 0$$

$$\Leftrightarrow (1+zy)(2+2z+2y+z^2+y^2) \geq (1+zy+z+y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(z+y)(1+zy) + 2 + 2zy + (1+zy)(y-z)^2 + 2zy(1+yz)$$

$$\geq (1+zy)^2 + 2(z+y)(1+zy) + (z+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (1+zy)(y-z)^2 + 2 + 4yz + 2y^2z^2 - (1+yz)^2 - (y-z)^2 - 4yz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow yz(y-z)^2 + (1-yz)^2 \geq 0 \text{ dấu "=" xảy ra khi } z = y = 1$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+zy} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x^2+x+1}{(1+x)^2}$$

Xét $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(1+x)^2}$ ($x \in [1; +\infty)$), ta có: $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+1)^4} \geq 0, \forall x \geq 1$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [1; +\infty) \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } [1; +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(1) = \frac{3}{4}, \forall x \geq 1$$

$$\Rightarrow P \geq f(x) \geq \frac{3}{4} \text{ khi } a = b = c \text{ thì } P = \frac{3}{4} \text{ nên giá trị nhỏ nhất của } P \text{ bằng } \frac{3}{4}$$

Bài 15: Xét hệ: $\begin{cases} x + my - 2 = 0 \\ 2x + (m-2)x - 1 = 0 \end{cases}$ (*) có $D = -m - 2$.

- Nếu $m \neq -2 \Rightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$

$$\text{Khi đó } P \geq 0, P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow \min P = 0.$$

- $m = -2$ ta có: $P = (x - 2y - 2)^2 + (2x - 4y - 1)^2$

$$\text{Đặt } t = x - 2y - 2, \text{ ta có: } P = t^2 + (2t + 3)^2 = 5t^2 + 12t + 9$$

$$\text{Suy ra } \min P = \frac{9}{5}.$$

**Dạng
4.**

PHƯƠNG PHÁP SUY BIẾN

Bài 1:

1. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết suy ra $xy = t^2 - 1$.

$$\text{Hơn nữa } (x+y)^2 \geq 4xy \text{ suy ra } 0 < t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết suy ra $xy = t^2 - t - 1$.

$$\text{Hơn nữa } (x+y)^2 \geq 4xy \text{ suy ra } -\frac{2}{3} \leq t \leq 2.$$

3. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết suy ra $2xy = t^2 - 1$.

$$\text{Hơn nữa } (x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \text{ suy ra } 1 < t \leq \sqrt{2}.$$

4. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết suy ra $3xy = t + 1$.

$$\text{Hơn nữa } (x+y)^2 \geq 4xy \text{ suy ra } t \geq 2.$$

Bài 2:

1. Đặt $t = x^2 + y^2$, từ giả thiết suy ra $x^2 \cdot y^2 = \frac{2t^2 - t}{4}$

Hơn nữa $x^2 + y^2 \geq 2xy$ suy ra $0 \leq t \leq 1$. Khi đó $A = t^2 - 4t - 8$, với $0 \leq t \leq 1$.

2. Đặt $t = x + y$, $-2 \leq t \leq 2$, $\min P = -4$, $\max P = 4$

3. $P \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{9}{a+b+c}$. Đặt $t = a+b+c$ với $0 < t \leq 3$.

4. Do $b \geq c$ và $a^2 \leq 1$, nên có: $P \leq b - c + b^2(c - b) + c^2(1 - c)$ hay

$$P \leq (b - c)(1 - b)(1 + b) + c^2(1 - c)$$

Ta có: $(b - c)(1 - b)(1 + b) = 2(b - c) \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{2}(1 - b) \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 + b)$

$$\leq 2 \left[\frac{(b - c) + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}(1 - b) + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 + b)}{3} \right]^3 = \frac{2}{27}(\sqrt{3} - c)^3$$

Suy ra $P \leq \frac{2}{27}(\sqrt{3} - c)^3 + c^2(1 - c)$, đặt $f(c) = \frac{2}{27}(\sqrt{3} - c)^3 + c^2(1 - c)$ với $c \in [0; 1]$

Vậy, $\max P = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $(a; b; c) = \left(1; \frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$.

Bài 3:

1. Đặt $F = 3x^2 + 2y^2 + z^2$. Từ giả thiết, ta có: $x \leq \frac{4 - 2y - z}{3}$ và thay vào F ta được:

$$F \leq \frac{1}{3}(4z^2 + 4z(y - 2) + 10y^2 - 16y + 16) = \frac{1}{3}f(z).$$

Xét hàm số $f(z)$ với $y \leq z \leq 1$.

Ta có: $f'(z) = 8z + 4(y - 2) \Rightarrow f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 - y}{2}$.

• Nếu $y < \frac{2}{3} \Rightarrow y < \frac{2 - y}{2} \Rightarrow f(z) \leq \max\{f(y), f(1)\}$

Mà $f(1) = 10y^2 - 12y + 12 < 12$ và $f(y) = 18y^2 - 24y + 16 < 16 \Rightarrow F < \frac{16}{3}$

• Nếu $\frac{2}{3} \leq y \leq 1 \Rightarrow y \geq \frac{2 - y}{2} \Rightarrow f(z) \leq f(1) \leq 16 \Rightarrow F \leq \frac{16}{3}$.

2. Đặt $t = a + b + c + 1$ với $t > 1$. Khảo sát $f(t) = \frac{2}{t} - \frac{54}{(t + 2)^3}$ với $t > 1$.

Tìm được $\max P = \frac{1}{4}$, đạt được khi $a = b = c = 1$

3. Giả thiết suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$.

Đặt $x = a + b$, suy ra $(a + b)^2 + c^2 = 4ab + 2cx \Rightarrow (x - c)^2 = 4ab \leq (a + b)^2 = x^2$

$$\Rightarrow 0 \leq c \leq 2x. \text{ Khi đó: } Q = \frac{c(x-c)^2}{(x+c)^3}$$

Nếu $c = 0$ thì $Q = 0$.

Nếu $c > 0$, bằng cách đặt $t = \frac{x}{c} \geq \frac{1}{2}$ thì $Q = \frac{(t-1)^2}{(t+1)^3}$.

Xét $f(t) = \frac{(t-1)^2}{(t+1)^3}$, với $t \geq \frac{1}{2}$, ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 5$

4. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)a^2b^2c^2$$

Hơn nữa: với $a, b, c > 0$ luôn có $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$

Ta cần chứng minh: $abc(a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)a^2b^2c^2$

hay $a + b + c \geq (a^2 + b^2 + c^2)abc$, nghĩa là $(a^2 + b^2 + c^2)abc \leq 3$.

$$\text{Ta xét hiệu } M = \left[a^2 + \frac{(b+c)^2}{2} \right] a \cdot \frac{(b+c)^2}{4} - (a^2 + b^2 + c^2)abc$$

$$= a^3 \left[\frac{(b+c)^2}{4} - bc \right] + a \left[\frac{(b+c)^4}{8} - bc(b^2 + c^2) \right] = \frac{a^3(b-c)^2}{4} + \frac{a(b-c)^4}{8} \geq 0$$

$$\Rightarrow \left[a^2 + \frac{(b+c)^2}{2} \right] a \cdot \frac{(b+c)^2}{4} \geq (a^2 + b^2 + c^2)abc$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } \left[a^2 + \frac{(b+c)^2}{2} \right] a \cdot \frac{(b+c)^2}{4} \leq 3 \text{ hay } \left[a^2 + \frac{(3-a)^2}{2} \right] a \cdot \frac{(3-a)^2}{4} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}a^5 - 3a^4 + 9a^3 - \frac{27}{2}a^2 + \frac{81}{8}a \leq 3.$$

Xét hàm số $f(a) = \frac{3}{8}a^5 - 3a^4 + 9a^3 - \frac{27}{2}a^2 + \frac{81}{8}a$ với $a \in (0; 3]$.

$$5. (x+2y)^2 = 10 + 3xy \leq 10 + \frac{3(x+2y)^2}{8} \Rightarrow \frac{5(x+2y)^2}{8} \leq 10 \text{ hay } -4 \leq x+2y \leq 4.$$

$$A = x^3 + 8y^3 - 9xy = (x+2y)^3 - 6xy(x+2y) - 9xy$$

kết hợp với điều kiện $(x+2y)^2 - 10 = 3xy$, sau đó đặt $t = x+2y$, với $-4 \leq t \leq 4$.

$$6. B = \frac{(x+3y)^2 + 2(x+3y) + 5}{x+3y+1} = x+3y+1 + \frac{4}{x+3y+1} = t + \frac{4}{t} \text{ với } t = x+3y+1$$

$$\text{Từ giả thiết, ta có: } 2 = (x+3y)^2 - 6xy \geq (x+3y)^2 - \frac{(x+3y)^2}{2} = \frac{(x+3y)^2}{2}$$

$$\Rightarrow (x+3y)^2 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x+3y+1 \leq 3, \text{ khi đó } -1 \leq t \leq 3$$

$$7. \text{Đặt } x = a^2 + b^2, y = b^2 + c^2, z = a^2 + c^2 \text{ thì } x, y, z > 0 \text{ và } x+y+z=6$$

$$\text{Từ đó } 6 = x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } \frac{4}{x} + 1 = \frac{2}{x} + \frac{2}{x} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}. \text{ Tương tự } \frac{4}{y} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{4}{y^2}}, \frac{4}{z} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{4}{z^2}}.$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{4}{x} + 1\right) \left(\frac{4}{y} + 1\right) \left(\frac{4}{z} + 1\right) \geq 27\sqrt[3]{\frac{4^3}{x^2y^2z^2}} \geq 27.$$

$$\text{Hay } \left(\frac{4}{a^2+b^2} + 1\right) \left(\frac{4}{c^2+b^2} + 1\right) \left(\frac{4}{a^2+c^2} + 1\right) \geq 27$$

$$\Rightarrow 3(a+b+c)^2 = 3[a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)]$$

$$\leq 3[a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)] = 27$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{a^2+b^2} + 1\right) \left(\frac{4}{c^2+b^2} + 1\right) \left(\frac{4}{a^2+c^2} + 1\right) \geq 3(a+b+c)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài 4:

$$1. \text{Từ: } 4(x^2 + y^2 + xy) \leq 1 + 2(x+y) \Leftrightarrow 3(x+y)^2 + (x-y)^2 \leq 1 + 2(x+y)$$

$$\Rightarrow 1 + 2(x+y) \geq 3(x+y)^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x+y \leq 1$$

Vì x, y không âm nên có $0 \leq x+y \leq 1$

Khi đó:

$$P = xy + \sqrt{x+y} - (x^2 + y^2) \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \sqrt{x+y} - \frac{1}{2}(x+y)^2 = \sqrt{x+y} - \frac{1}{4}(x+y)^2.$$

Đặt $t = x+y$.

$$\text{Vì } xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \text{ và } 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$$

$$P \leq f(t) \text{ với } f(t) = \sqrt{t} - \frac{1}{4}t^2, \forall t \in [0;1]$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-t\sqrt{t}}{\sqrt{t}} > 0, \forall t \in (0;1),$$

suy ra $f(t)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

$$\text{Suy ra } \max_{t \in [0;1]} f(t) = f(1) = \frac{3}{4} \Rightarrow \max P = \frac{3}{4} \text{ khi và chỉ khi } x = y = \frac{1}{2}.$$

2. Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$

$$\text{Đặt } P(x) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)x + \frac{y+z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}, \text{ với } x \in [y;3].$$

$$\text{Ta có: } P'(x) = \frac{(y+z)(x^2 - yz)}{x^2 yz} > 0. \text{ Suy ra } P(x) \text{ là hàm số đồng biến trên } [y;3].$$

$$\text{Từ đó, ta được } P(x) \leq P(3) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{y}\right)z + \frac{3+y}{z} + \frac{3}{y} + \frac{y}{3}$$

$$\text{Đặt } Q(z) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{y}\right)z + \frac{3+y}{z} + \frac{3}{y} + \frac{y}{3}, \text{ với } z \in [1;y].$$

$$\text{Ta có: } Q'(z) = \frac{(y+3)(z^2 - 3y)}{3yz^2} < 0. \text{ Suy ra hàm số } Q(z) \text{ nghịch biến trên } [1;y]$$

$$\text{Từ đó, ta được } Q(z) \leq Q(1) = \frac{4(y-1)(y-3)}{3y} + \frac{26}{3} \leq \frac{26}{3}.$$

$$3. \text{ Ta có: } a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) \leq 27 - 24abc$$

$$\text{Khi đó: } \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} + 8\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{\frac{27 - 24abc}{3}} + 8\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{9 - 8abc} + 8\sqrt[3]{abc}$$

$$\text{Đặt } t = abc, \text{ ta có } 0 < t \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \Rightarrow 0 < t \leq 1$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \sqrt[3]{9 - 8t} + 8\sqrt[3]{t} \text{ với } t \in (0;1]$$

Ta có: $f'(t) = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(9-8t)^2}} \right]$

Nhận thấy, $(9-8t)^2 - t^2 = 9(1-t)(9-7t) \geq 0 \Rightarrow f'(t) < 0$ với mọi $t \in (0;1)$

suy ra $f(t)$ nghịch biến với mọi $t \in (0;1]$ và $f(t) \leq f(1) = 9$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

4. $P = 2 + 2 \frac{x^2 y^2}{(x+y)^4} - \frac{6xy}{(x+y)^2} + \frac{5\sqrt{xy}}{x+y}$. Đặt $t = \frac{\sqrt{xy}}{x+y}$ thì $0 < t \leq \frac{1}{2}$

Khi đó $P = f(t)$, xét $f(t) = 2t^4 - 6t^2 + 5t + 2$ với $0 < t \leq \frac{1}{2}$.

5. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử: $x \geq y \geq z$

Xét hàm số: $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) (x+y+z)^2$.

Ta có: $f'(x) = (x+y+z) \left(\frac{xyz + (2x^2 - yz)(y+z)}{x^2 yz} \right) > 0$, do $x^2 \geq yz$,

suy ra $f(x)$ đồng biến và $f(x) \leq f(1) = \left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) (1+y+z)^2$.

Xét $f(y) = \left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) (1+y+z)^2$, chứng minh được $f(y) \leq f(1) = \left(2 + \frac{1}{z} \right) (2+z)^2$

Xét $f(z) = \left(2 + \frac{1}{z} \right) (2+z)^2$, chứng minh được $f(z) \leq 27$

Bài 5:

1. $Q = (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

Từ giả thiết $1 \leq x \leq y \leq 2$, ta suy ra: $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 1$, do đó nếu đặt $t = \frac{x}{y}$ thì $t \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $Q = 2 + t + \frac{1}{t}$

Xét $Q(t) = 2 + t + \frac{1}{t}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

Ta có: $Q'(t) = \frac{1-t^2}{t^2} < 0 \quad \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, suy ra $Q(t)$ là hàm số nghịch biến trên đoạn

$\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Từ đó ta có: giá trị lớn nhất của $Q(t)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ là $\frac{9}{2}$ khi: $t = \frac{1}{2}$, giá trị

nhỏ nhất trên đoạn này của $Q(t)$ bằng 4 khi $t = 1$.

Vậy, $\max Q = \frac{9}{2}$ khi $(x; y) = (1; 2)$ và $\min Q = 4$ khi $x = y$ với $1 \leq x, y \leq 2$.

2. $a + b + c = 3 \Rightarrow a = 3 - b - c$, khi đó $P = 3 - b - c + b^2 + c^3$

Đặt $P(b) = 3 - b - c + b^2 + c^3$ với $b \in [0; 3]$.

Ta có: $P'(b) = 2b - 1$ và $P'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$.

Từ đó, ta được $P \geq \min P(c) = c^3 - c + \frac{11}{4}$

Xét $P(c) = c^3 - c + \frac{11}{4}$ với $c \in [0; 3]$. Ta có: $P'(c) = 3c^2 - 1$ và $P'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Từ đó, ta được $P \geq \min P(c) = \frac{11}{4} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Vậy, $(a; b; c) = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ thì $\min P = \frac{11}{4} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$

3. Ta có: $(a + b + c - abc)^2 = [a + b + c(1 - ab)]^2 \leq [(a + b)^2 + c^2][1 + (1 - ab)^2]$
 $= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab)(2 - 2ab + a^2b^2) = (3 + 2ab)(2 - 2ab + a^2b^2)$

Đặt $t = ab$ thì $|t| = |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{3}{2}$

Xét hàm số: $f(t) = (3 + 2t)(2 - 2t + t^2)$ với $|t| \leq \frac{3}{2}$

4. $B = a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3) - 3abc[(b - c) + (c - a) + (a - b)]$
 $= ab(b^2 - a^2) + bc(c^2 - b^2) + ca(a^2 - c^2) = (b - c)(c - a)(a - b)$

Bài toán trở về tìm giá trị lớn nhất của $|B| = |(b - c)(c - a)(a - b)|$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ và $a + b + c = 1$, $c \geq 0$

nên $a \leq 1 - b$, $b \leq \frac{1}{2}$

Khi đó $|B| \leq ab(a - b) \leq (1 - b)b(1 - 2b) = 2b^3 - 3b^2 + b = f(b)$.

Xét $f(b)$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

$$5. P = a^3 + b^3 + 5c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + 5c^3 = (8-2c)^3 - 3ab(8-2c) + 5c^3$$

$$\Leftrightarrow P = -3c^3 + 96c^2 - 384c + 512 - 3ab(8-2c)$$

Ta có $(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab - (a+b) + 1 \geq 0 \Rightarrow ab \geq a+b-1 = 8-2c-1 = 7-2c$

$$\Rightarrow ab(8-2c) \geq (7-2c)(8-2c) \Rightarrow -3ab(8-2c) \leq -3(7-2c)(8-2c).$$

Do $c \leq 4 \Rightarrow 8-2c \geq 0$

$$P = -3c^3 + 96c^2 - 384c + 512 - 3ab(8-2c)$$

$$P \leq -3c^3 + 96c^2 - 384c + 512 - 3(7-2c)(8-2c) \Rightarrow P \leq -3c^3 + 84c^2 - 294c + 344$$

Từ giả thiết suy ra $2c \leq 6 \Rightarrow c \leq 3 \Rightarrow 1 \leq c \leq 3$

Xét hàm số $f(c) = -3c^3 + 84c^2 - 294c + 344$ với $c \in [1; 3]$

$$f'(c) = -9c^2 + 168c - 294, f'(c) = 0 \Leftrightarrow -9c^2 + 168c - 294 = 0 \Leftrightarrow 3c^2 - 56c + 98 = 0$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{28 + 7\sqrt{10}}{3} \notin [1; 3] \text{ hoặc } c = \frac{28 - 7\sqrt{10}}{3} \in [1; 3]$$

Ta có $f(1) = 131, f\left(\frac{28-7\sqrt{10}}{3}\right) < f(3) = 137$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 137, đạt được khi $c = 3, a = 1, b = 1$.

Bài 6:

1. Từ giả thiết ta suy ra được $x = \sqrt[3]{2-y^3}$ thay vào P ta được:

$$P = \sqrt[3]{(2-y^3)^2} + \sqrt[3]{(y^3)^2} = \sqrt[3]{(2-t)^2} + \sqrt[3]{t^2} = f(t)$$

Trong đó ta đã đặt $t = y^3$.

Vì $x \in [-3; 2] \Rightarrow x^3 \in [-27; 8] \Rightarrow -27 \leq 2 - y^3 \leq 8 \Leftrightarrow -6 \leq y^3 \leq 29, t \in [-6; 29]$.

Xét hàm số $f(t)$ trên $D = [-6; 29]$, ta có:

$$f'(t) = \frac{2}{3\sqrt[3]{t}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{2-t}} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2-t} = \sqrt[3]{t} \Leftrightarrow t = 1.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có được:

$$\min P = \min_D f(t) = f(0) = f(2) = \sqrt[3]{4} \text{ đạt được khi } (x; y) = (0; \sqrt[3]{2}), (\sqrt[3]{2}; 0)$$

$$\max P = f(-6) = 4 + \sqrt[3]{36} \text{ đạt được khi } (x, y) = (-\sqrt[3]{3}; 2), (2; -\sqrt[3]{3}).$$

2. Giả sử $z = \min\{x, y, z\}$, ta có: $0 \leq z \leq \frac{1}{3}$.

Đặt $S = xy + yz + zx - 2xyz = xy(1-2z) + z(x+y) \geq \frac{1}{3}xy + z(x+y) \geq 0$

Hơn nữa $S = xy(1-2z) + z(x+y) \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 (1-2z) + z(x+y)$

Hay $S \leq \frac{1}{4}(-2z^3 + z^2 + 1) = f(z)$. Xét hàm số: $f(z) = \frac{1}{4}(-2z^3 + z^2 + 1)$, $0 \leq z \leq \frac{1}{3}$

$f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ hoặc $z = \frac{1}{3}$, từ bảng biến thiên suy ra $S \leq f(z) \leq \frac{7}{27}$

3. Ta có: $\begin{cases} (x+y)^3 + 4xy \geq 2 \\ (x+y)^2 - 4xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 1.$

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 = 3[(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2] - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\geq 3\left[(x^2 + y^2)^2 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{4}\right] - 2(x^2 + y^2) + 1 = \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

Đặt $t = x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow t \geq \frac{1}{2}$ và $A \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$.

Xét hàm số: $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1, t \geq \frac{1}{2}$ có $f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0, \forall t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$

$\Rightarrow A \geq \frac{9}{16}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{9}{16}$.

Bài 7:

1. Để ý: $bc \leq \frac{1}{4}(b+c)^2 = \frac{1}{4}(1-a)^2, ab+ac = a-a^2$.

Khi đó $P \leq -\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}, 0 \leq a \leq \frac{1}{3}$.

2. $P = 3[(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)] - 2xyz = 27 - 6x(y+z) - 2yz(x+3)$

$$\geq 27 - 6x(3-x) - \frac{(y+z)^2}{2}(x+3) = \frac{1}{2}(-x^3 + 15x^2 - 27x + 27)$$

Xét $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 27x + 27, x \in (0; 3)$

3. Trước hết ta có: $x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4} \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0$ đúng.

Đặt $a = x+y+z$, sau đó đặt $t = \frac{z}{a}, 0 \leq t \leq 1$.

Xét hàm số: $f(t) = (1-t)^3 + 64t^3$, với $t \in [0; 1]$, $\min P = \frac{64}{81}$

Bài 8:

1. Giả thiết: $2a \leq c$ nên ta có $\frac{a}{c} \leq \frac{1}{2}$.

Hơn nữa, theo giả thiết ta cũng có: $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b}{c} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{2c}{b} - 1$

Vì $\frac{a}{c} \leq \frac{1}{2}$ nên $\frac{b}{c} \geq \frac{4}{3}$. Đặt $t = \frac{b}{c}$ thì $0 < t \leq \frac{4}{3}$. Khi đó

$$P = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{a}{c} - \frac{b}{c}} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{c} - 1} + \frac{1}{1 - \frac{a}{c}} = \frac{2t^2 - t}{2t^2 - t - 1} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2(1-t)} = 1 - \frac{2}{2t+1} + \frac{7}{6(1-t)}$$

$$\text{Xét } f(t) = 1 - \frac{2}{2t+1} + \frac{7}{6(1-t)} \text{ với } t \in \left(0; \frac{3}{4}\right]$$

Ta có: $f'(t) > 0$ với $\forall t \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$, do đó $f(t)$ đồng biến trên $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số đạt tại $t = \frac{3}{4}$ hay $\max P = \frac{27}{5}$, đẳng thức xảy ra

khi $\begin{cases} ab + bc = 2c^2 \\ 2a = c \end{cases} \Leftrightarrow 8a = 3b = 4c$, chẳng hạn ta chọn $(a, b, c) = (3, 8, 6)$

Vậy, giá trị lớn nhất của $P = \frac{27}{5}$

$$2. xyz + x + z = y \Leftrightarrow y(1 - xz) = x + z > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{z} \text{ và } y = \frac{x+z}{1-xz}$$

$$P = \frac{2}{x^2+1} + \frac{2y^2}{y^2+1} + \frac{3}{z^2+1} - 2 = \frac{2}{x^2+1} + \frac{2(x+z)^2}{(x^2+1)(z^2+1)} + \frac{3}{z^2+1} - 2$$

$$P = 2f(x) + \frac{3}{z^2+1}. \text{ Trong đó } f(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{(x+z)^2}{(x^2+1)(z^2+1)} - 1 \text{ với } x \in \left(0; \frac{1}{z}\right)$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \text{ có nghiệm duy nhất } x_0 = \sqrt{z^2+1} - z \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$\text{Khi đó } P \leq \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3}{z^2+1}, \text{ xét } f(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3}{z^2+1} \text{ với } z > 0$$

Ta có: $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{8}} \Rightarrow P \leq \frac{10}{3}$.

Bài 9:

1. Đặt $t = x + y + z$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \leq t^2 \leq 4 \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq t \leq 2$$

Dễ thấy $P = 3t + \frac{4}{t}$ đồng biến trên đoạn $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2\right]$.

Từ đây, ta tìm được $\max P = 8$ khi $\begin{cases} (x + y + z)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$

2. Ta có: $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$.

$$P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z + \frac{9}{x + y + z}$$

Đặt $t = x + y + z \Rightarrow 0 < t \leq \frac{3}{2}$. Khi đó $P \geq t + \frac{9}{t}$, $0 < t \leq \frac{3}{2}$

Xét $f(t) = t + \frac{9}{t}$, $t \in \left(0; \frac{3}{2}\right]$. Ta có $f'(t) = 1 - \frac{9}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{3}{2}\right]$

Vậy $\min_{0 < t \leq \frac{3}{2}} f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{2} \Rightarrow P \geq \frac{15}{2} \Rightarrow \min P = \frac{15}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

3. Ta có: $P = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x + y + z) \left[2 - \frac{(x + y + z)^2 - 2}{2} \right]$

Đặt $t = x + y + z \Rightarrow -\sqrt{6} \leq t \leq \sqrt{6}$

Vậy $\max P = 2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = \sqrt{2}; y = z = 0$

$\min P = -2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = -\sqrt{2}; y = z = 0$.

4. Từ giả thiết, chia cả hai vế cho ab , ta được:

$$6\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 20 = 5(a + b) + 15\frac{a + b}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{75(a + b)^2}{ab}} (*)$$

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, thì (*) $6t + 20 \geq 10\sqrt{3(t+2)} \Leftrightarrow t \geq \frac{10}{3}$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2, \quad \frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 3\right],$$

$$\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} = \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2\right]^2 - 2.$$

Do đó: $P = 9t^4 - 16t^3 - 11t^2 + 48t - 32$

Xét hàm số $f(t) = 9t^4 - 16t^3 - 11t^2 + 48t - 32$, với $t \geq \frac{10}{3}$

$f'(t) = 36t^3 - 48t^2 - 22t + 48$ và $f'(t) > 0$, với $\forall t > \frac{10}{3}$,

suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên nửa khoảng $\left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$

$$\Rightarrow P \geq f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{14156}{27}, \text{ suy ra } \min P = \frac{14156}{27}$$

Vậy, $(a;b) = (1;3), (3;1)$ thì $\min P = \frac{14156}{27}$

$$5. P = \frac{a\left(3 + \frac{2}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right) + b\left(3 + \frac{2}{2\sqrt{b} - \sqrt{a}}\right) + 2\sqrt{c}(3\sqrt{c} + \sqrt{2}) + 5}{2^4\sqrt{ab} + \sqrt{2c} + 1}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{3(a+b+2c) + \frac{2a}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{2b}{2\sqrt{b} - \sqrt{a}} + 2\sqrt{2c} + 5}{2^4\sqrt{ab} + \sqrt{2c} + 1}$$

Ta có: $a, b \in \left[1; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}} \geq \sqrt{b}$ và $\frac{b}{2\sqrt{b} - \sqrt{a}} \geq \sqrt{a}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Hơn nữa: $3(a+b+2c) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c})^2$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 2c$.

$2^4\sqrt{ab} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Vì thế $P \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c})^2 + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c}) + 5}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c} + 1}$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c} \Rightarrow t \in \left[3; \frac{3\sqrt{6}}{2} \right]$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \frac{t^2 + 2t + 5}{t+1} \text{ với } t \in \left[3; \frac{3\sqrt{6}}{2} \right]$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 1 - \frac{4}{(t+1)^2} > 0 \text{ với } \forall t \in \left(3; \frac{3\sqrt{6}}{2} \right).$$

$$\text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên đoạn } \left[3; \frac{3\sqrt{6}}{2} \right] \text{ và } f(3) = 5, f\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{34 + 99\sqrt{6}}{50}$$

$$\text{Vậy, min } P = 5 \text{ khi } a = b = 1, c = \frac{1}{2}.$$

Bài 10:

$$1. \text{ Ta có: } Q = 49 - P = \frac{12(b+c-a)}{c} + \frac{12(c+a-b)}{a} + \frac{25(a+b-c)}{b}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} 2x = b+c-a \\ 2y = c+a-b \\ 2z = a+b-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y+z \\ b = z+x \\ c = x+y \end{cases}$$

$$\text{Vì } \frac{4}{5}b \geq a-c \geq \frac{3}{5}b \text{ hay } a \leq \frac{4}{5}b + c < b+c \text{ nên } 0 < 4x \leq z \leq 9x.$$

$$Q = \frac{24x}{x+y} = \frac{24z}{y+z} + \frac{50x}{z+x} \text{ và xét } Q(y) = \frac{24x}{x+y} = \frac{24z}{y+z} + \frac{50x}{z+x}$$

$$\text{Ta có: } Q'(y) = \frac{24(z-x)(y^2 - zx)}{(x+y)^2(y+z)^2} \text{ và } Q'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{zx}$$

$$\text{Để thấy khi } y \rightarrow -\infty \text{ thì } \begin{cases} \frac{24x}{x+y} > 0 \\ \frac{24z}{y+z} \rightarrow 24^+ \\ \frac{50x}{z+x} = \frac{50}{1+\frac{z}{x}} \geq 40 \end{cases} \Rightarrow Q > 64$$

$$Q(-\sqrt{zx}) = \frac{48\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{z}} + \frac{50z}{z+x} \text{ và } Q(\sqrt{zx}) = \frac{48\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{z}} + \frac{50z}{z+x} = \frac{48t}{t+1} + \frac{50}{t^2+1}$$

$$\text{với } t = \sqrt{\frac{x}{z}}, t \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right] \text{ và } f(t) = \frac{48t}{t+1} + \frac{50}{t^2+1}$$

Ta có: $f'(t) = \frac{48t^4 - 100t^3 - 104t^2 - 100t + 48}{(t+1)^2(t^2+1)^2}$ và $f'(t) = 0$

$$\Leftrightarrow 48t^4 - 100t^3 - 104t^2 - 100t + 48 = 0 \Leftrightarrow 12\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 25\left(t + \frac{1}{t}\right) - 50 = 0$$

$$\Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}. \text{ Ta thấy, } f\left(\frac{1}{2}\right) = 56, f\left(\frac{1}{3}\right) = 57$$

Suy ra $Q \geq Q(\sqrt{zx}) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 56$ hay $49 - P \geq 56 \Leftrightarrow P \leq -7$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = 2c, 3b = 5c$

Vậy, $\max P = -7$ khi $a = 2c, 3b = 5c$

2. $P = b + \sqrt{80 - b^3}$ với $b \in [0; \sqrt[3]{80}]$. Ta có: $P' = 1 - \frac{3b^2}{\sqrt{80 - b^3}}$

3. $abc(a+b+c)^2 = (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) \Leftrightarrow a+b+c \geq 3$

$$P = 4\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{9}{a+b+c}$$

$$P \geq 4\left(a^2+b^2+c^2\right) + \frac{9}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}(a+b+c)^2 + \frac{9}{a+b+c}. \text{ Đặt } t = a+b+c, t \geq 3$$

4. Nhận xét do $x, y \in (0; 1] \Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy + 1 \geq x + y$

Từ giả thiết suy ra $xy \geq z$.

Ta có $P = \frac{\frac{x}{z}}{\frac{y}{z}+1} + \frac{\frac{y}{x}}{\frac{x}{z}+1} + \frac{\frac{1}{z}}{\frac{xy}{z^2}+1}$. Đặt $a = \frac{x}{z}, b = \frac{y}{x}, c = \frac{1}{z}$

Ta có $xy \geq z \Leftrightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{z} \geq \frac{1}{z} \geq 1$. Khi đó $P = \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + \frac{c}{ab+1}, ab \geq c \geq 1$

Ta có $\frac{1}{b+1} + \frac{1}{a+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ luôn đúng do $ab \geq 1$

Lại có $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = \left(\frac{a}{b+1} + 1\right) + \left(\frac{b}{a+1} + 1\right) - 2$

$$= (a+b+1)\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{a+1}\right) - 2 \geq (2\sqrt{ab}+1) \cdot \frac{2}{1+\sqrt{ab}} - 2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}$$

Từ đó suy ra $P = \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + \frac{c}{ab+1} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+ab}$. Đặt $t = \sqrt{ab} \geq 1$

Ta có $P \geq \frac{2t}{1+t} + \frac{1}{1+t^2} = f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t}{1+t} + \frac{1}{1+t^2}$ liên tục trên $[1; +\infty)$

Có $f'(t) = \frac{2(t-1)^2(t^2+t+1)}{(1+t)^2(t^2+1)} > 0, \forall t \in (1; +\infty)$

Do đó hàm số đồng biến trên $[1; +\infty) \Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1 \Rightarrow x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$

5. Giả thiết suy ra: $2(x+y)^2 + x + y = 4\sqrt{xy} \leq 2(x+y)$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)^2 - (x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x+y \leq \frac{1}{2}$$

Khi đó: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 2(x+y) \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1$

Ta có: $F = 3\left(\frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{y}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) + (x+y)$

$$\text{Vì } \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{y}} \geq \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, \quad x+y \geq \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

$$\text{nên } F \geq 3(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow 0 < t \leq 1$ và $F \geq f(t) = 3t + \frac{4}{t} + \frac{1}{2}t^2$ với $0 < t \leq 1$

Ta có: $f'(t) = 3 - \frac{4}{t^2} + t = \frac{t^3 + 3t^2 - 4}{t^2} = \frac{(t-1)(t+2)^2}{t^2} < 0$ với $\forall t \in (0; 1)$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{15}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{4}$$

Bài 11:

1. Giả thiết được viết lại: $25(a^2 + b^2 + c^2) = 48 + 9(a^4 + b^4 + c^4)$ và kết hợp với đẳng thức $a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2$, từ đó suy ra:

$$3(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 \leq 0, \text{ nghĩa là } 3 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{16}{3} \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^2}{b+2c} + \frac{(b+2c)a^2}{9} \geq \frac{2a^2}{3}, \quad \frac{b^2}{c+2a} + \frac{(c+2a)b^2}{9} \geq \frac{2b^2}{3}, \quad \frac{c^2}{a+2b} + \frac{(a+2b)c^2}{9} \geq \frac{2c^2}{3}$$

$$\text{Đặt } P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}$$

$$P \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}[a^2(b+2c) + b^2(c+2a) + c^2(a+2b)]$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a^2c + b^2a + c^2b \leq \frac{a^3 + a^3 + c^3}{3} + \frac{b^3 + b^3 + a^3}{3} + \frac{c^3 + c^3 + b^3}{3} = a^3 + b^3 + c^3$$

$$\text{Khi đó } P \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{hay } P \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \text{ thì } 3 \leq t \leq 4 \text{ do } (*)$$

$$\text{Do đó } P \geq -\frac{1}{27}t^3 + \frac{2}{9}t^2 \text{ với } 3 \leq t \leq 4.$$

$$2. x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 + 3(x+y)z(x+y+z) + 3xy(x+y)$$

$$= (x+y+z)[(x+y+z)^2 + 3(x+y)z] + 3xy(x+y)$$

$$= (x+y+z)[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 5xz + 5yz] + 3xy(x+y)$$

$$= (x+y+z)[2 + 2xy + 5xz + 5yz] + 3xy(x+y)$$

$$\text{Khi đó: } P = (x+y+z)[2 + 2xy + 5xz + 5yz] + 3xy(x+y) - 3xyz$$

$$= (x+y+z)[2 + 2xy + 5xz + 5yz] + 3xy(x+y) + 3xyz - 6xyz$$

$$= (x+y+z)[2 + 2xy + 5xz + 5yz] + 3xy(x+y+z) - 6xyz$$

$$= (x+y+z)[2 + 2xy + 5xz + 5yz + 3xy] - 6xyz$$

$$= (x+y+z)[2 + 5(xy + xz + yz)] - 6xyz$$

$$\begin{aligned}
&= (x+y+z) \left[2 + 5 \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2 + (x+y+z)^2}{2} \right] - 6xyz \\
&= (x+y+z) \left[2 + 5 \cdot \frac{2 + (x+y+z)^2}{2} \right] - 6xyz \\
&\geq (x+y+z) \left[7 + \frac{(x+y+z)^2}{2} \right] - 6 \cdot \frac{(x+y+z)^3}{27} \geq \frac{5}{18} (x+y+z)^3 + 7(x+y+z).
\end{aligned}$$

Đặt $t = x + y + z; \forall t \in (0; \sqrt{6}]$, khi đó $P \geq \frac{5}{18}t^3 + 7t$, xét $f(t) = \frac{5}{18}t^3 + 7t, \forall t \in (0; \sqrt{6}]$.

Ta có $f'(t) = \frac{5}{6}t^2 + 7 > 0, \forall t \in (0; \sqrt{6}]$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; \sqrt{6}]$

$$\Rightarrow \max_{t \in (0; \sqrt{6}]} f(t) = f(\sqrt{6}) = \frac{26\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \max P = \frac{26\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Dạng 5. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Bài 1:

1.

* Nếu một trong hai số a, b bằng 0 thì bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

* Với $a \neq 0$, đặt $b = ta$.

Khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành: $a^4(1+t^4) \geq a^4(t+t^3) \Leftrightarrow t^4 - t^3 - t + 1 \geq 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^4 - t^3 - t + 1$, ta có:

$$f'(t) = 4t^3 - 3t^2 - 1 = (t-1)(4t^2 + t + 1) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Lập bảng biến thiên, từ đó suy ra $f(t) \geq f(0) = 0$ đpcm.

Nhận xét:

• Bài toán trên ta chỉ cần biến đổi trực tiếp như sau:

$$a^4 + b^4 \geq a^3b + b^3a \Leftrightarrow a^3(a-b) + b^3(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^3 - b^3) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

• Khi gặp biểu thức đẳng cấp ba biến a, b, c ta có thể đặt $b = xa, c = ya$ và chuyển về Bài toán hai biến.

2. Đặt $x = a + b - c, y = b + c - a, z = c + a - b \Rightarrow xyz = 1$

Điều cần chứng minh trở thành: $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^5 \geq \frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6}$

$$\text{Mà } \frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6} = \frac{(x+y+z)^2}{6} - \frac{xy+yz+zx}{6}$$

$$\text{Vì } xyz=1 \text{ nên } xy+yz+zx \geq 3, \text{ do đó } \frac{(x+y+z)^2}{6} - \frac{xy+yz+zx}{6} \leq \frac{(x+y+z)^2}{6} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^5 \geq \frac{(x+y+z)^2}{6} - \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x+y+z}{3}, t \geq 1. \text{ Khi đó } (*) \text{ trở thành } t^5 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2} \geq 0 \text{ với } t \geq 1$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = t^5 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2} \text{ với } t \geq 1$$

Ta có: $f'(t) = 5t^4 - 3t$, với $\forall t \geq 1$ thì $f'(t) > 0$ do đó $f(t)$ đồng biến với $t \geq 1$

Từ đó, ta được $f(t) \geq f(1) = 0$

Bài 2:

$$1. \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{2(b+c)} = \sqrt{2(3-a)}$$

Khi đó $P \leq a + \sqrt{2(3-a)}, f(a) = a + \sqrt{2(3-a)}$ với $a \in [0;3]$

$$\max P = \frac{7}{2} \text{ khi } a = \frac{5}{2}, b = c = \frac{1}{4}$$

Xét $g(a) = a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ với $a \in [0;3]$. Ta có: $g'(a) = 1 > 0$, suy ra $g(a)$ đồng biến với mọi $a \in [0;3]$ và $g(a) \geq g(0) = \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{b} + \sqrt{3-b}$

$$\text{Xét } g(b) = \sqrt{b} + \sqrt{3-b} \text{ với } b \in [0;3]$$

$$\min P = \sqrt{3} \text{ khi } a = b = 0, c = 3 \text{ chẳng hạn.}$$

$$2. \text{Giả thiết viết thành: } \frac{16(xy+yz+zx)}{(x+y+z)^2} = 5.$$

$$\text{Đặt } a = \frac{4x}{x+y+z}, b = \frac{4y}{x+y+z}, c = \frac{4z}{x+y+z}, \text{ khi đó ta có:}$$

$$a+b+c=4, ab+bc+ca=5$$

$$\text{Lại có: } (b+c)^2 \geq 4bc \Rightarrow (4-a)^2 \geq 4(a^2-4a+5) \Rightarrow \frac{2}{3} \leq a \leq 2$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{20}{a(a^2 - 4a + 5)} = f(a) \text{ với } \frac{2}{3} \leq a \leq 2.$$

3. Đặt $t = \frac{a}{b}$ thì $0 \leq t \leq 4$.

$$\text{Ta có: } \frac{P}{2} = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{a+12b}}{b(\sqrt{5b-a} + \sqrt{4b-a})} = \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t+12}}{\sqrt{5-t} + \sqrt{4-t}} = \frac{f(t)}{g(t)}$$

Xét $f(t) = t\sqrt{t} + \sqrt{t+12}$ với $t \in [0; 4]$, ta thấy $f(t)$ đồng biến và $\sqrt{12} \leq f(t) \leq 12$

Xét $g(t) = \sqrt{5-t} + \sqrt{4-t}$ với $t \in [0; 4]$, ta thấy $g(t)$ nghịch biến và

$$1 \leq g(t) \leq 2 + \sqrt{5}, \text{ suy ra } \max P = 24 \text{ khi } a = 4b$$

Bài 3:

$$1. \text{ Đặt } \begin{cases} a = x + y \\ b = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab = 2 \\ a^2 \geq 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^3 - 2}{3a} \\ a^2 \geq 4 \frac{a^3 - 2}{3a} \end{cases} \Rightarrow \frac{a^3 - 8}{3a} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq 2$$

$$\text{Khi đó: } P = a^2 - 2b = a^2 - \frac{2a^3 - 4}{3a} = \frac{a^2}{3} + \frac{4}{3a} = f(a)$$

Xét hàm số $f(a)$ với $0 < a \leq 2$.

$$\text{Ta có: } f'(a) = \frac{2a}{3} - \frac{4}{3a^2} = \frac{2a^3 - 4}{3a^2} \text{ và } f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{2}$$

Lập bảng biến thiên ta có ngay $\min P = f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$, đạt được khi $(x; y) = (0; \sqrt[3]{2})$.

$$2. \text{ Đặt } x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c} \text{ thì } x, y > 0.$$

Từ giả thiết, ta có: $(x+1)(y+1) = 4 \Leftrightarrow x + y + xy = 3$

$$\text{Khi đó, } Q = \frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} + \frac{xy}{x+y}$$

Do tính đối xứng của x, y ta đặt $S = x + y$, $P = xy \Rightarrow S + P = 3 \Rightarrow P = 3 - S > 0$ hay

$$S < 3. \text{ Để tồn tại } S, P \text{ ta có: } S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow S^2 - 4(3-S) \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 2$$

$$\text{Tóm lại, với } 2 \leq S < 3, \text{ luôn có } Q = \frac{S^2 - 2(3-S) + 3S}{3S + (3-S) + 9} + \frac{3-S}{S} = \frac{S}{2} + \frac{3}{S} - \frac{3}{2}$$

$$\text{Đặt } f(S) = \frac{S}{2} + \frac{3}{S} - \frac{3}{2} \text{ với } 2 \leq S < 3$$

Ta có: $f'(S) = \frac{1}{2} - \frac{3}{S^2}$ và $f'(S) = 0 \Leftrightarrow S = \sqrt{6}$

$\max_{2 \leq S < 3} f(S) = f(2) = 1$ khi $(S; P) = (2; 1)$, suy ra $\max Q = 1$ khi $a = b = c = 1$

Bài 4:

1. $f(a) = 5\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)$. Ta có: $f'(a) = \frac{(5c-b)(a^2-bc)}{a^2bc}$

Vì $a, b, c \in [1; 3]$ nên $5c \geq 5 > 3 \geq b$ và $f'(a) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{bc}$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(a) \geq f(\sqrt{bc}) = 10\sqrt{\frac{c}{b}} - \frac{c}{b} + 5\frac{b}{c} - 2\sqrt{\frac{b}{c}}$

Đặt $t = \sqrt{\frac{c}{b}}$ thì $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$, từ đây ta có: $f(a) \geq f(t) = 10t - t^2 + \frac{5}{t^2} - \frac{2}{t}$

Xét hàm số $f(t) = 10t - t^2 + \frac{5}{t^2} - \frac{2}{t}$ với $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$ và $f'(t) = 2\frac{(t^3-1)(5-t)}{t^3}$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f(1) = 12$

2. Đặt $T = 4(x+y+z)^2 - (xy+yz+zx+1)^2 - xy - yz - zx$
 $= 4(x+y+z)^2 - (xy+yz+zx)^2 - 3(xy+yz+zx) - 1$

Ta có: $3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2$ nên $T \geq \frac{-(x+y+z)^4}{9} + 3(x+y+z)^2 - 1$

Từ $x+y+z = xyz$ ta có $xyz \geq 3\sqrt{3}$, vì thế nếu $t = (x+y+z)^2$ thì $t \geq 27$.

Xét hàm số: $f(t) = -\frac{t^2}{9} + 3t - 1$ với $t \geq 27$.

3. $P = \frac{11-c}{2ab} + \frac{3}{c}$

Từ giả thiết, suy ra $(a-1)(b-2) \leq 0 \Rightarrow ab \leq 2a+b-2 = \frac{7-c}{2}$,

$P \geq \frac{11-c}{7-c} + \frac{3}{c}$. Khảo sát $f(c) = \frac{11-c}{7-c} + \frac{3}{c}$ với $c \in [1; 2]$, thu được $f(c) \geq f(2) = \frac{33}{10}$

Từ giả thiết, suy ra $(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab \geq a+b-2 \geq 2a+b-3 = \frac{5-c}{2}$,

$P \leq \frac{11-c}{5-c} + \frac{3}{c}$, khảo sát $g(c) = \frac{11-c}{5-c} + \frac{3}{c}$ với $c \in [1; 2]$, thu được $g(c) \leq g(1) = \frac{11}{2}$

4. Đặt $a = \sqrt{x}; b = \sqrt{y}; c = \sqrt{z} \Rightarrow a, b, c > 0$ và $abc \geq 1$. Khi đó ta cần chứng minh:

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + bc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + ac}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } VT^2(1) &\geq \left[\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ac} + \sqrt{c^2 + ab}} \right]^2 \\ &= \frac{(a+b+c)^4}{\left[\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ac} + \sqrt{c^2 + ab} \right]^2} \geq \frac{(a+b+c)^4}{3(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^4}{3[(a+b+c)^2 - (ab + bc + ca)]} \geq \frac{(a+b+c)^4}{3[(a+b+c)^2 - 3]} = \frac{t^2}{3(t-3)} = f(t). \end{aligned}$$

Trong đó, $t = (a+b+c)^2 \geq 9$.

Khảo sát hàm $f(t)$ trên $[9; +\infty)$ ta có đpcm.

Bài 5:

1. $x \geq y \geq z \geq 0$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right)$.

Ta có: $f'(x) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right) - \left(\frac{y}{x^2} - \frac{z}{x^2} \right) = (y-z) \left(\frac{1}{yz} - \frac{1}{x^2} \right) \geq 0, \forall x \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến $\forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

2. Không mất tính tổng quát ta giả sử: $x \geq y \geq z > 0$.

Xét hàm số:

$$f(x) = x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)$$

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 3x^2(y+z) + xyz + yz(x+y+z) - (y^3 + z^3)$

$$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 6x(y+z) + 2yz$$

$$\Rightarrow f''(x) > 0 \text{ (do } x \geq y \geq z) \Rightarrow f'(x) \geq f'(y) = z^2y - z^3 = z^2(y-z) \geq 0$$

nên $f(x)$ là hàm số đồng biến.

$$\Rightarrow f(x) \geq f(y) = z^4 - 2z^3y + y^2z^2 = z^2(z-y)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

3. Vì giả thiết và bất đẳng thức đã cho là những biểu thức đẳng cấp đồng thời giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh đối xứng đối với y và z nên ta nghĩ tới cách đặt $y = ax; z = bx$.

Khi đó (*) trở thành: $x(x+ax+bx) = 3abx^2 \Leftrightarrow 1+a+b = 3ab$ (**) và bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$(x+ax)^3 + (x+bx)^3 + 3(x+ax)(ax+bx)(bx+x) \leq 5(ax+bx)^3$$

$$\Leftrightarrow (1+a)^3 + (1+b)^3 + 3(1+a)(1+b)(a+b) \leq (a+b)^3 \quad (2).$$

Vì (**) và (2) là những biểu thức đối xứng đối với a, b nên ta nghĩ tới cách đặt $S = a+b; P = ab$.

$$\text{Mối quan hệ giữa } S \text{ và } P \text{ là } \begin{cases} S^2 \geq 4P \\ 1+S = 3P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1+S}{3} \\ 3S^2 - 4S - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1+S}{3} \\ S \geq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } (1+a)(1+b) = 1+a+b+ab = 1+S + \frac{1+S}{3} = \frac{4(1+S)}{3}$$

$$(1+a)^3 + (1+b)^3 = (2+a+b)^3 - 3(1+a)(1+b)(2+a+b) = (2+S)^3 - 4(1+S)(2+S)$$

$$\text{Nên } (2) \Leftrightarrow (2+S)^3 - 4(S^2 + 3S + 2) + 4S(1+S) \leq 5S^3$$

$$\Leftrightarrow 2S^2 - 3S - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (2S+1)(S-2) \geq 0 \text{ luôn đúng do } S \geq 2.$$

Vậy bài toán đã được chứng minh.

Bài 6:

1. Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c} \Rightarrow xyz = 1$, bất đẳng thức đã cho

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Giả sử } z \leq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \text{ nên có: } \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} + \frac{1}{1+z} = \frac{2t}{1+t} + \frac{1}{1+t^2} = f(t) \text{ với } t = \sqrt{z} \leq 1.$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{2t}{(1+t^2)^2} < 0 \Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{3}{2}, \forall t \leq 1 \Rightarrow \text{đpcm}$$

2. Đặt $\frac{b}{a} = \alpha, \frac{c}{a} = x, 1 \leq \alpha \leq x$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{2}{\alpha+x} + \frac{2\alpha}{1+x} + \frac{2x}{1+\alpha} \leq \frac{x^2+x+4}{x+1} \Leftrightarrow x^2+x+1 \geq 2\frac{x+1}{\alpha+x} + 2\alpha + \frac{2x(x+1)}{1+\alpha}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x + 1 - \left(2 \frac{x+1}{\alpha+x} + 2\alpha + \frac{2x(x+1)}{1+\alpha} \right), 1 \leq \alpha \leq x$

Ta có: $f'(x) = 2x + 1 - \frac{2(2x+1)}{\alpha+1} - 2 \frac{\alpha-1}{(x+\alpha)^2}$

$$f'(x) = (\alpha-1) \left[\frac{2x+1}{\alpha+1} - \frac{2}{(x+\alpha)^2} \right] \geq 0, 1 \leq \alpha \leq x$$

Như vậy hàm $f(x)$ là đồng biến, do đó $f(x) \geq f(\alpha) = \alpha^2 - 3\alpha + 3 - \frac{1}{\alpha}$

$$\text{Nhưng } f'(\alpha) = 2\alpha - 3 + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha + \alpha + \frac{1}{\alpha^2} - 3 \geq 3\sqrt{\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha^2}} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(\alpha) \geq f(1) = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 7:

$$1. \text{Đặt } x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow 2x + 8y + 21z \leq 12xyz \Rightarrow z \geq \frac{2x+8y}{12xy-21} \text{ và } P = x + 2y + 3z \geq x + 2y + \frac{2x+8y}{4xy-7}.$$

$$\text{Xét } f(x) = x + 2y + \frac{2x+8y}{4xy-7}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 + \sqrt{14 + 32y^2}}{3}, \text{ đặt } y_0 = \frac{7 + \sqrt{14 + 32y^2}}{3}$$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \geq f(y_0)$ tức là $f(x) \geq h(y)$ với

$$h(y) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{14 + 32y^2}}{2y}, y > 0 \text{ và } h'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow h(y) \geq h\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\text{Vậy } P \geq f(x) \geq h(y) \geq h\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$$

$$2. \text{Đặt } g(y) = 2(y^3 + z^3) - y^2z - z^2 - y.$$

$$\text{Ta có: } g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1 \text{ và } g'(y) = 0 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{6} \left(z - \sqrt{z^2 + 6} \right) < 0$$

$$\text{hoặc } y_2 = \frac{1}{6} \left(z + \sqrt{z^2 + 6} \right)$$

Vì $y_1 < 0$ nên $y_1 \in [0; 1]$. Qua y_2 đạo hàm $g'(y)$ đổi dấu từ âm sang dương nên y_2 là điểm cực tiểu.

Nếu $y_2 \in [0;1]$ thì $g(y_2) < g(0)$ và $g(y_2) < g(1)$

Nếu $y_2 \notin [0;1]$ thì $g(y)$ đơn điệu tăng trên đoạn $[0;1]$

Cả hai trường hợp trên thì $\max_{y \in [0;1]} g(y) = g(0)$ hoặc $\max_{y \in [0;1]} g(y) = g(1)$

Ta có: $g(0) = 2z^3 - z^2$, $g(1) = 2z^3 - z^2 - z + 1$

Vì $z \leq 1$ nên $g(1) \geq g(0)$, suy ra $\max_{y \in [0;1]} g(y) = g(1)$

Ta cần chứng minh $g(1) \leq 1$ tức $2z^3 - z^2 - z + 1 \leq 1 \Leftrightarrow z(z-1)(2z+1) \leq 0$ đúng.

Bài 8:

1. Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \leq 3$, suy ra $\frac{y}{z}; \frac{x}{y} \leq 1$.

Do đó $\left(\frac{y}{z} - 1\right)\left(\frac{x}{y} - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{z} - \frac{x}{y} - \frac{y}{z} \geq 0$ (1)

Mặt khác $\left(\frac{y}{x} - 1\right)\left(\frac{z}{y} - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{z}{x} - \frac{z}{y} - \frac{y}{x} \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2 + 2\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}$

Đặt $t = \frac{z}{x}$ suy ra $1 \leq t \leq 3$. Khi đó $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq 2 + 2f(t)$ với $f(t) = t + \frac{1}{t}$, $1 \leq t \leq 3$.

Khảo sát hàm số $f(t)$ với $1 \leq t \leq 3$, dễ thấy hàm $f(t)$ đồng biến với $1 \leq t \leq 3$, suy

ra $\max_{t \in [1;3]} f(t) = \frac{10}{3}$.

$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq 2 + 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{26}{3}$, đẳng thức xảy ra khi $(x; y; z) = (1; 1; 3)$ và các hoán vị.

2. Đặt $f(x, y, z) = \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{x+z}$, $f(x, y, \sqrt{xy}) = \frac{x}{x+2y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

Ta xét hiệu: $f(x, y, z) - f(x, y, \sqrt{xy}) = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{xy} - z)^2}{(y+z)(z+x)(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \geq 0$

Khi đó $P = f(x, y, z) \geq \frac{x}{x+2y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y} + 2} + \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{y}} + 1}$

Vì $x = \max\{x; y; z\}$ nên đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ với $1 \leq t \leq 3$

Xét $f(t) = \frac{t^2}{t^2+2} + \frac{2}{t+1}$ với $t \in [1; 3]$.

Ta có: $f'(t) = \frac{-2(t^3-2)(t-2)}{(t^2+2)^2(t+1)^2}$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ thỏa mãn.

Vậy, $\min P = \frac{7}{6}$, $\max P = \frac{4}{3}$

3. Đặt $P(z) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{x+z}$, $z \in \left[\frac{x}{4}; y\right]$. Ta có: $P'(z) = \frac{(x-y)(z^2-xy)}{(y+z)^2(x+z)^2}$

Nếu $x = y$ thì $P = \frac{6}{5}$

Nếu $x > y$ thì $z^2 \leq y^2 < xy$ và $P'(z) < 0 \Rightarrow P(z)$ là hàm nghịch biến:

$$P(z) \geq P(y) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+y} + \frac{y}{x+y} = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{x+y} + \frac{1}{2}$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{x+y} + \frac{1}{2}$

Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow t \in [1; 4]$, khi đó $Q = Q(t) = \frac{t}{2t+3} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}$ với $t \in [1; 4]$

$Q'(t) = \frac{-t^2-6t-6}{(2t+3)^2(t+1)^2} < 0 \Rightarrow Q(t)$ là hàm nghịch biến, suy ra $Q(t) \geq Q(4)$

Vậy, $\min Q = \frac{117}{110}$ khi $a = 4, b = c = 1$.

Bài 9: Đặt $f(a) = \frac{10}{bc}a + \left(\frac{11b}{c} + \frac{12c}{b}\right) \cdot \frac{1}{a}$

Xét $f(a) = \alpha \cdot a + \beta \cdot \frac{1}{a}$ và $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.

Lập bảng biến thiên suy ra $f(a) \leq \max\{f(1); f(2)\}$

Xét $\left. \begin{array}{l} h(b) = f(1) \Rightarrow h(b) \leq \max\{h(1); h(2)\} \\ k(b) = f(2) \Rightarrow k(b) \leq \max\{k(1); k(2)\} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{đpcm.}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1, c = 2$.

Bài 1:

$$1. F \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} - cd = \sqrt{2d^2 + 6d + 9} - d^2 - 3d = f(d)$$

$$\text{Ta có } f'(d) = (2d + 3) \frac{1 - \sqrt{2\left(d + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}}}{\sqrt{2d^2 + 6d + 9}}.$$

$$\text{Vì } \frac{1 - \sqrt{2\left(d + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}}}{\sqrt{2d^2 + 6d + 9}} < 0 \text{ nên } f(d) \leq f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9 + 6\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Vậy } \min F = \frac{9 + 6\sqrt{2}}{4} \text{ đạt được chẳng hạn khi}$$

$$d = -\frac{3}{2}, c = \frac{3}{2}, a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$2. f(a, b, c) - f(0, b, c) = a^2 \left(\frac{a}{b^2 + 1} - \frac{c^3 + 2}{a^2 + 1} \right) \leq 0, \text{ ta được } \max P = 6$$

Bài 2:

$$1. a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a + b)^3$$

$$\text{Khi đó: } P \geq \frac{1}{4}(a + b)^3 + 4c^3 = \frac{1}{4}(15c^3 + 9c^2 - 27c + 27)$$

Xét hàm số: $f(c) = 15c^3 + 9c^2 - 27c + 27$ với $0 \leq c \leq 3$. Ta được:

$$\min P = \frac{108}{25} \text{ khi } a = b = \frac{6}{5}, c = \frac{3}{5}; \max P = 108 \text{ khi } a = b = 0, c = 3$$

2. Từ điều kiện bài toán ta có: $-1 \leq a, b, c \leq 1$.

Với điều kiện $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Bài toán quy về: "Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 3abc$ "

$$\text{Ta có: } (a + b + c)^2 = 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca = -\frac{1}{2} \quad (*)$$

Nếu $c = 0$ thì $A = 0$

Nếu $c \neq 0$ thì $ab = \frac{A}{3c}$, khi đó (*) trở thành: $\frac{A}{3c} + bc + ca = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 3c^3 - \frac{3c}{2}$

Xét hàm số: $f(c) = 3c^3 - \frac{3c}{2}$, $c \in [-1; 1]$.

3. Đặt $f(a, b, c) = (a^2 - b^2)(b - c) + c^2(1 - c)$,

Ta có $f(0, b, c) = -b^2(b - c) + c^2(1 - c)$

Xét hiệu: $f(a, b, c) - f(0, b, c) = a^2(b - c) \leq 0$ vì $b \leq c \Rightarrow f(a, b, c) \leq f(0, b, c)$

Khi đó $P \leq f(0, b, c) = -b^2(b - c) + c^2(1 - c)$. Xét $f(b) = -b^2(b - c) + c^2(1 - c)$

Ta có: $f'(b) = -3b^2 + 2bc$ và $f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ hoặc $b = \frac{2c}{3}$

Suy ra $\max f(b) = f\left(\frac{2c}{3}\right) = -\frac{23}{27}c^3 + c^2$ và $P \leq f(c)$ với $f(c) = -\frac{23}{27}c^3 + c^2$

Ta có: $f'(c) = -\frac{23}{9}c^2 + 2c$ và $f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 0$ hoặc $c = \frac{18}{23}$

Suy ra $\max f(c) = f\left(\frac{18}{23}\right) = \frac{108}{529}$

Vậy, $\max P = \frac{108}{529}$ xảy ra khi $a = 0$, $b = \frac{12}{23}$, $c = \frac{18}{23}$.

Bài 3.

1. Ký hiệu: $F(a; b; c) = (a - b)(b - c)(c - a)$

Vì $F(a; c; b) = (a - c)(c - b)(b - a) = -F(a; b; c)$ nên miền giá trị của F là tập đối xứng, vì vậy ta chỉ cần chứng minh: $F(a; b; c) \leq \frac{\sqrt{3}}{18}$.

* Nếu trong ba số a, b, c có hai số bằng nhau thì $F(a; b; c) = 0 < \frac{\sqrt{3}}{18}$

* Nếu a, b, c đôi một khác nhau thì không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a; b; c\}$. Khi đó nếu $b > c$ thì $F(a; b; c) < 0 < \frac{\sqrt{3}}{18}$, do vậy ta chỉ cần xét $a > c > b$. Đặt $x = a + b \Rightarrow c = 1 - x$.

Ta có:

$$F(a; b; c) = (a - b)(c - b)(a - c) \leq (a + b)c(a + b - c) = x(1 - x)(2x - 1) = h(x)$$

Xét $h(x) = x(1 - x)(2x - 1)$, $\frac{1}{2} < x \leq 1$, $h'(x) = -6x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$.

Lập bảng biến thiên ta được: $h(x) \leq h\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}$ với mọi $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, b=0, c = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

2. $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{y+z}{yz} = \frac{1}{x} + x(5-x)$. Với mọi y, z ta luôn có: $(y+z)^2 \geq 4yz$

$$\Leftrightarrow (5-x)^2 \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x < 0 \text{ hoặc } 3-2\sqrt{2} \leq x \leq 4 \text{ hoặc } x \geq 3+2\sqrt{2}.$$

3. Bất đẳng thức đã cho tương đương với $4\left[(a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3\right] + 15abc \geq 1$

$$\Leftrightarrow 4\left[(1-c)^3 - 3ab(1-c) + c^3\right] + 15abc \geq 1 \Leftrightarrow 3(9c-4)ab + 3 - 12c + 12c^2 \geq 0$$

Đặt $x = ab$ khi đó $0 \leq x \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(1-c)^2}{4}$

Xét hàm số: $f(x) = 3(9c-4)x + 3 - 12c + 12c^2$ với $x \in \left[0; \frac{(1-c)^2}{4}\right]$

Dễ thấy, $f(0) = 3(2c-1)^2 \geq 0$, $f\left(\frac{(1-c)^2}{4}\right) = 3c(3c-1)^2 \geq 0$

suy ra $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \left[0; \frac{(1-c)^2}{4}\right]$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc

$a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ và các hoán vị.

4. $ab + 2abc \leq 2ab\left(c + \frac{1}{2}\right) \leq 2a \frac{\left(b+c+\frac{1}{2}\right)^2}{4} = \frac{a(7-2a)^2}{8}$.

Ta cần chứng minh: $a + \frac{a(7-2a)^2}{8} \leq \frac{9}{2}$. Xét hàm số: $f(a) = a^3 - 8a^2 + 20a$ với

$0 \leq a \leq 3$ ta được đpcm.

Bài 5:

1. $|P| \leq 2|ab| + |c||a+b| \leq a^2 + b^2 + |c|\sqrt{2(a^2 + b^2)} = 1 - c^2 + |c|\sqrt{2-2c^2}$.

Đặt $|c| = t \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$ và xét hàm số $f(t) = 1 - t^2 + t\sqrt{2-2t^2}$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\Rightarrow f'(t) = -2t + \sqrt{2-2t^2} - \frac{2t^2}{\sqrt{2-2t^2}} = \frac{2-4t^2-2t\sqrt{2-2t^2}}{\sqrt{2-2t^2}}$$

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1-2t^2 = t\sqrt{2-2t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 6t^4 - 6t^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t_0 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}$$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t) \leq f(t_0) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P \leq |P| \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab+bc+ca \geq 0 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ a=b \\ |c| = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{12}} \\ c=\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} \end{cases}$.

Vậy $\min P = -\frac{1}{2}$; $\max P = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

2. Đặt $f(a;b;c) = \frac{a^3+b^3+16c^3}{(a+b+c)^3}$. Vì $f(ka;kb;kc) = f(a;b;c), \forall k > 0$ nên không

giảm tính tổng quát ta giả thiết $a+b+c=1$, khi đó $f(a;b;c) = a^3+b^3+16c^3$.

Ta có: $a^3+b^3 \geq \frac{1}{4}(a+b)^3 = \frac{1}{4}(1-c)^3$ nên

$$f(a;b;c) \geq \frac{1}{4}(1-c)^3 + 16c^3 = \frac{1}{4}[(1-c)^3 + 64c^3] = \frac{1}{4}g(c), 0 \leq c \leq 1$$

Khảo sát hàm $g(c), c \in [0;1]$ ta được

$$g(c) \geq \frac{64}{81} \Rightarrow f(a;b;c) \geq \frac{1}{4}g(c) \geq \frac{16}{81} \Rightarrow \min P = \frac{16}{81}.$$

Mặt khác: $f(a;b;c) = a^3+b^3+c^3+15c^3 \leq (a+b+c)^3+15c^3 \leq 16$

Suy ra $\max P = 16$.

3. Vì $F(a;c;b) = (a-c)(c-b)(b-a) = -F(a;b;c)$ suy ra miền giá trị của F là tập đối xứng vì vậy ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $F(a;b;c)$.

* Nếu trong ba số a, b, c có hai số bằng nhau thì $F(a;b;c) = 0$

* Nếu a, b, c đôi một khác nhau thì không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a;b;c\}$ khi đó nếu $b > c$ thì $F(a;b;c) < 0$ do vậy ta chỉ cần xét $a > c > b$. Đặt $x = a+b \Rightarrow c = 1-x$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } F(a; b; c) &= (a-b)(c-b)(a-c) \leq (a+b)c(a+b-c) \\ &= x(1-x)(2x-1) = h(x)\end{aligned}$$

$$\text{Xét } h(x) = x(1-x)(2x-1), \quad \frac{1}{2} < x \leq 1, \quad h'(x) = -6x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta được: } h(x) \leq h\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}, \quad \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$\text{Vậy } \max F = \frac{\sqrt{3}}{18} \text{ đạt được chẳng hạn khi } a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, b=0, c = \frac{3-\sqrt{3}}{6};$$

$$\min F = -\frac{\sqrt{3}}{18} \text{ đạt được chẳng hạn khi } a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, b = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, c=0$$

Bài 6:

$$1. \text{ Ta có: } a+c = b(1-ac) > 0. \text{ Dễ thấy } ac \neq 1 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{c}$$

$$\text{Suy ra } b = \frac{a+c}{1-ac} \Rightarrow P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2(1-ac)^2}{(a+c)^2 + (1-ac)^2} + \frac{3}{c^2+1}$$

$$P = \frac{2}{a^2+1} + \frac{2(a+c)^2}{(a^2+1)(c^2+1)} - 2 + \frac{3}{c^2+1}$$

$$f(x) = \frac{2(x^2+2cx+2c^2+1)}{(x^2+1)(c^2+1)} + \frac{3}{c^2+1} - 2, \quad 0 < x < \frac{1}{c}$$

$$\text{Trên khoảng } \left(0; \frac{1}{c}\right): f'(x) = 0 \text{ có nghiệm } x_0 = -c + \sqrt{c^2+1} \text{ và } f'(x)$$

đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0 , suy ra $f(x)$ đạt cực đại tại $x = x_0$

$$\Rightarrow \forall x \in \left(0; \frac{1}{c}\right): f(x) \leq \frac{2}{c^2+1-c\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1} - 2 = \frac{2c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1}$$

$$\text{Xét } g(c) = \frac{2c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1}, c > 0 \Rightarrow \forall c > 0: g(c) \leq g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{10}{3}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}, c = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$2. \text{ Từ giả thiết } \Rightarrow a = \frac{2(b+c)}{bc-1} \geq \frac{4\sqrt{bc}}{bc-1} \text{ (ta có } bc > 1)$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq \frac{4\sqrt{bc}}{bc-1} + b+c \geq \frac{4\sqrt{bc}}{bc-1} + 2\sqrt{bc} = \frac{4t}{t^2-1} + 2t = f(t).$$

Xét hàm số $f(t)$ với $t = \sqrt{bc} > 1$.

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{4(t^2-1) - 8t^2}{(t^2-1)^2} + 2 = \frac{2(t^4 - 4t^2 + 1)}{(t^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \sqrt{2+\sqrt{5}} \text{ (do } t > 1).$$

Lập bảng biến thiên $\Rightarrow f(t) \geq f(t_0) \Rightarrow a+b+c \geq f(t_0)$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c=t_0 \\ a=\frac{2t_0}{t_0^2-1} \end{cases}. \text{ Vậy } \min(a+b+c) = f(t_0).$$

Dạng 7. XÁC ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ CÓ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Bài 1:

1. Gọi $m = \min_{x \in \mathbb{R}} y$. Điều kiện cần để $m > 2$ là $y(1) > 2 \Rightarrow 4a > 2 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$.

$$y = \begin{cases} 4ax + x^2 - 4x + 3 = x^2 + 4(a-1)x + 3, & x \in (-\infty; 1] \text{ hoặc } [3; +\infty) \\ 4ax - x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 4(a+1)x - 3, & x \in [1; 3] \end{cases}$$

* Với $x \in (-\infty; 1]$ hoặc $[3; +\infty)$: $y' = 2x + 4(a-1)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2(1-a) < 1$

* Với $x \in [1; 3]$: $y' = -2x + 4(a+1)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2(a+1) > 3$.

Lập bảng biến thiên trên suy ra:

$$\min y = m = y[2(1-a)] = 4(1-a)^2 - 8(a-1)^2 + 3 = 3 - 4(a-1)^2 = 8a - 4a^2 - 1.$$

$$m > 2 \Leftrightarrow 8a - 4a^2 - 1 > 2 \Leftrightarrow 4a^2 - 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}.$$

Kết hợp $a > \frac{1}{2}$ ta được các giá trị của tham số a cần tìm là $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$.

2. Tìm tập giá trị E của hàm số y , $y \in E \Leftrightarrow$ phương trình $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$ (1) có nghiệm

$$(1) \Leftrightarrow y \cos x + 2y = m \sin x + 1 \Leftrightarrow y \cos x - m \sin x = 1 - 2y.$$

$$(1) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow m^2 + y^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1+3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1+3m^2}}{3},$$

$$\text{suy ra } \min y = \frac{2 - \sqrt{1+3m^2}}{3}.$$

$$\min y < -1 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1+3m^2}}{3} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{1+3m^2} > 5 \Leftrightarrow 1+3m^2 > 25$$

$$\Leftrightarrow m^2 > 8 \Leftrightarrow m \leq -2\sqrt{2}, m \geq 2\sqrt{2}$$

$$3. y' = 8x - 4m \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$$

Xét các trường hợp sau:

$$* \frac{m}{2} \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -4. \text{ Khi đó } \forall x \in (-2; 0), y' > 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số y đồng biến trên $(-2; 0)$ và hàm số y liên tục trên $[-2; 0]$

$$\Rightarrow \min_{x \in [-2; 0]} y = y(-2) = m^2 + 6m + 16.$$

$$\min y = 2 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 16 = 2 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 14 = 0, \text{ phương trình này vô nghiệm.}$$

$$* -2 \leq \frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên của hàm số } y \text{ trên } [-2; 0] \Rightarrow \min y = y\left(\frac{m}{2}\right) = -2m.$$

$$\min y = 2 \Leftrightarrow -2m = 2 \Leftrightarrow m = -1 \in [-4; 0].$$

$$* \frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0, \text{ khi đó } \forall x \in (-2; 0), y' < 0$$

$$\Rightarrow \text{Hàm số } y \text{ nghịch biến trên } [-2; 0] \Rightarrow \min_{x \in [-2; 0]} y = y(0) = m^2 - 2m$$

$$\min y = 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m = 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Vì $m > 0$ nên chỉ nhận giá trị $m = 1 + \sqrt{3}$.

Vậy $m = -1$ hoặc $m = 1 + \sqrt{3}$.

$$4. \max y = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y \leq 4 \\ \exists x_1 \in \mathbb{R} : y(x_1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \frac{ax+b}{x^2+1} \leq 4 \\ \exists x_1 \in \mathbb{R} : \frac{ax_1+b}{x_1^2+1} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, 4x^2 - ax + 4 - b \geq 0 \\ \exists x_1 \in \mathbb{R}, 4x_1^2 - ax_1 + 4 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta_1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 16b - 64 = 0 \quad (1)$$

$$* \min y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y \geq 1 \\ \exists x_2 \in \mathbb{R} : y(x_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \frac{ax+b}{x^2+1} \geq 1 \\ \exists x_2 \in \mathbb{R} : \frac{ax_2+b}{x_2^2+1} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + ax + b + 1 \geq 0 \\ \exists x_2 \in \mathbb{R}, x_2^2 + ax_2 + b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta_2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b - 4 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Hệ} \begin{cases} a^2 + 16b - 64 = 0 \\ a^2 - 4b - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20b - 60 = 0 \\ a^2 - 4b - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Bài 2:

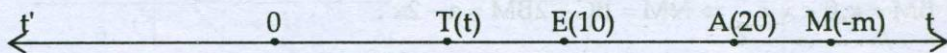
1. Đặt $t = x^3 - 3x^2 + 4$, $x \in [0; 4]$. Tìm tập giá trị của t .

$$t' = 3x^2 - 6x, \begin{cases} t' = 0 \\ x \in (0; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vì $t(0) = 4$, $t(4) = 20$, $t(2) = 0$, hàm số t liên tục và có đạo hàm trên $[0; 4]$, suy ra tập giá trị của t là $[0; 20]$.

Hàm số y trở thành hàm $f(t) = |t + m|$, $t \in [0; 20]$.

Bài toán quy về: Tìm tham số m để $\max_{t \in [0; 20]} f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Trên trục $t'Ot$, gọi A, T, M là các điểm có hoành độ lần lượt là: $-2, -1, t$ và $-m$, khi đó $MT = |t + m|$ và T di động trên đoạn OA .

Từ đó suy ra:

* Nếu M ở ngoài đoạn OA thì $\max MT = \max\{MO, MA\} \geq OA$.

* Nếu M ở trong đoạn OA thì $\max MT = \max\{MO, MA\} \geq \frac{OA}{2}$.

$$\max MT = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow M \text{ trùng với trung điểm } E \text{ của } OA.$$

Vậy $\max MT$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{OA}{2} = 10 \Leftrightarrow M \text{ trùng } E \Leftrightarrow m = -10$.

$$2. y = \left| \frac{x^2 - x + 2 - m(x - 2)}{x - 2} \right| = \left| \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} - m \right|.$$

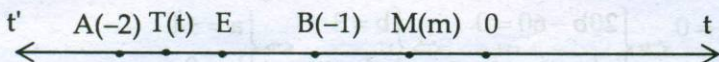
$$\text{Đặt } t = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}, x \in [-1; 1].$$

$$t' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \Rightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ x \in (-1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Từ bảng biến thiên trên suy ra tập giá trị của t là $[-2; -1]$.

Hàm số y trở thành $f(t) = |t - m|$. Bài toán quy về:

Tìm tham số m để $\max_{t \in [-2; -1]} f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Trên trục $t'Ot$, gọi A, B, T, M là các điểm có hoành độ lần lượt là $-2, -1, t$ và m .

Khi đó $MT = |t - m| = f(t)$ và T di động trên đoạn AB . Từ đó suy ra:

* Nếu M ở ngoài đoạn AB thì $\max MT = \max\{MA, MB\} \geq AB$.

* Nếu M ở trong đoạn AB thì $\max MT = \max\{MA, MB\} \geq \frac{AB}{2}$.

$$\max MT = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow M \text{ trùng với trung điểm } E \text{ của } AB.$$

$$\text{Vậy } \max MT \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M \text{ trùng } E \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Bài 3:

$$\text{Đặt } BM = x, 0 < x < \frac{a}{2} \Rightarrow NM = BC - 2BM = a - 2x.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } BMQ \text{ có } \tan \widehat{QBM} = \frac{QM}{BM} \Rightarrow QM = BM \cdot \tan \widehat{QBM} = x\sqrt{3}$$

$$\text{Diện tích hình chữ nhật } MNPQ \text{ là } S(x) = MN \cdot QM = (a - 2x)x\sqrt{3}.$$

$$\text{Bài toán quy về: Tìm giá trị lớn nhất của } S(x) = (a - 2x)x\sqrt{3}, x \in \left(0; \frac{a}{2}\right).$$

$$S'(x) = -4\sqrt{3}x + a\sqrt{3}, x \in \left(0; \frac{a}{2}\right); S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}.$$

$$\text{Bảng biến thiên của } S(x) \text{ trên khoảng } \left(0; \frac{a}{2}\right).$$

$$\text{Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất là } \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \text{ khi } x = \frac{a}{4}.$$

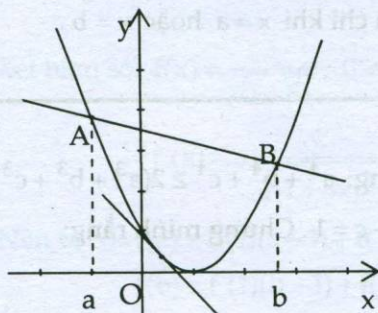
DÙNG TIẾP TUYẾN ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Chuyên đề này bạn đọc có thể tham khảo trong cuốn sách: “Các bài giảng trọng tâm theo chuyên đề môn toán giải tích 12” của nhóm giáo viên chuyên toán THPT: Nguyễn Phú Khánh – Nguyễn Tân Thu – Nguyễn Tấn Siêng – Nguyễn Anh Trường – Đậu Thanh Kỳ.

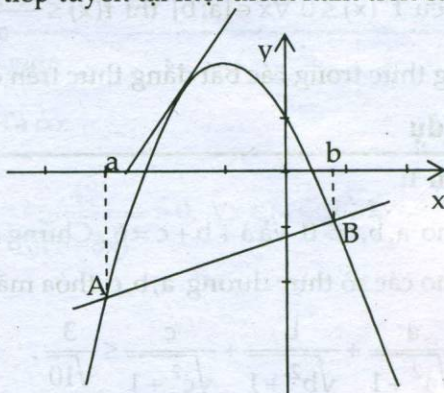
1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và có đồ thị là (C). Khi đó ta có hai điểm $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ nằm trên đồ thị (C).

i) Đồ thị (C) gọi là lồi trên $(a; b)$ nếu tiếp tuyến tại mọi điểm nằm trên cung AB luôn nằm phía trên đồ thị (C).

ii) Đồ thị (C) gọi là lõm trên $(a; b)$ nếu tiếp tuyến tại mọi điểm nằm trên cung AB luôn nằm phía dưới đồ thị (C).



Đồ thị hàm số lõm



Đồ thị hàm số lồi

2. Dấu hiệu đồ thị lồi

Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $(a; b)$

* Nếu $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a; b)$ thì đồ thị hàm số lõm trên $(a; b)$

* Nếu $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a; b)$ thì đồ thị hàm số lồi trên $(a; b)$

3. Ứng dụng

Từ hình ảnh trực quan của định nghĩa cho ta một phương pháp giải các bài toán bất đẳng thức và cực trị sau:

Định lý 2: (Bất đẳng thức tiếp tuyến)

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trên $[a; b]$.

i) Nếu $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ thì $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad \forall x_0 \in [a; b]$

ii) Nếu $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ thì $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad \forall x_0 \in [a; b]$

Đẳng thức trong hai bất đẳng thức trên xảy ra $\Leftrightarrow x = x_0$.

Ta có thể chứng minh định lí này như sau:

i) Xét hàm số $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$, $x \in [a; b]$

Ta có: $g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \Rightarrow g''(x) = f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ và $g'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi x qua x_0 nên ta có:

$$g(x) \geq g(x_0) = 0 \quad \forall x \in [a; b].$$

ii) Chứng minh tương tự.

Định lí 3: (Bất đẳng thức cát tuyến)

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trên $[a; b]$.

i) Nếu $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ thì $f(x) \geq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a) + f(a)$, $\forall x_0 \in [a; b]$

ii) Nếu $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ thì $f(x) \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a) + f(a)$, $\forall x_0 \in [a; b]$.

Đẳng thức trong các bất đẳng thức trên có khi và chỉ khi $x = a$ hoặc $x = b$.

Các ví dụ

Ví dụ 1:

1. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^3 + b^3 + c^3)$

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} \leq \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Lời giải

1. Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow (a^4 - 2a^3) + (b^4 - 2b^3) + (c^4 - 2c^3) \geq 0$

$\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 0$, với $f(x) = x^4 - 2x^3$. Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 2$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2$ là $y = 8x - 16$

Ta có: $f(x) - (8x - 16) = x^4 - 2x^3 - 8x + 16 = (x - 2)^2(x^2 - 2x + 4) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) \geq 8x - 16 \Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 8(a + b + c) - 48 = 0, \text{ đpcm.}$$

2. Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ với $x \in (0; 1)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{3x}{\sqrt{(x^2 + 1)^5}} < 0 \quad \forall x \in (0; 1)$

Nên ta có: $f(a) \leq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$;

$$f(b) \leq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$f(c) \leq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(c - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right).$$

$$\text{Suy ra: } f(a) + f(b) + f(c) \leq f'\left(\frac{1}{3}\right)(a + b + c - 1) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a}} + \frac{1}{\sqrt{1+8b}} + \frac{1}{\sqrt{1+8c}} \geq 1.$$

Lời giải

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+8x}}$, $0 < a \leq \sqrt{3}$. Ta có:

$$f'(x) = -\frac{4}{\sqrt{(1+8x)^3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{48}{\sqrt{(1+8x)^5}} > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{8}; \sqrt{3}\right].$$

Nên ta có: $f(a) \geq f'(1)(a - 1) + f(1)$

$$f(b) \geq f'(1)(b - 1) + f(1)$$

$$f(c) \geq f'(1)(c - 1) + f(1)$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq f'(1)(a + b + c - 3) + 3f(1) \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác: } (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9$$

$$\Rightarrow -3 \leq a + b + c \leq 3 \Rightarrow a + b + c - 3 \leq 0 \text{ và } f'(1) = -\frac{4}{27} < 0 \text{ nên từ } (*), \text{ ta có:}$$

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f(1) = 1.$$

Nhận xét: Dấu hiệu giúp chúng ta nhận ra phương pháp trên là bất đẳng thức cần chứng minh có dạng:

$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq k$ hoặc $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq k$, trong đó a_i ($i = 1, \dots, n$) là các số thực cho trước. Trong một số trường hợp bất đẳng thức chưa có dạng trên, ta phải thực hiện một số phép biến đổi mới đưa về dạng trên. Chúng ta cần chú ý một số dấu hiệu sau:

- Nếu bất đẳng thức có dạng $f(a_1).f(a_2) \dots f(a_n) \geq k$ thì ta lấy logarit hai vế
- Nếu bất đẳng thức cần chứng minh đồng bậc thì ta có thể chuẩn hóa. Tùy thuộc vào từng bài toán mà ta lựa chọn cách chuẩn hóa phù hợp.

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a, b, c thỏa: $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (a + \sqrt{1+a^2})^b (b + \sqrt{1+b^2})^c (c + \sqrt{1+c^2})^a$.

Lời giải

Ta có: $\ln P = b \ln(a + \sqrt{1+a^2}) + c \ln(b + \sqrt{1+b^2}) + a \ln(c + \sqrt{1+c^2})$

Xét hàm số: $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $0 < x < 1$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} < 0 \quad \forall x \in (0;1)$$

Suy ra: $f(a) \leq f'(1)(a-1) + f(1) = f'(1)a + f(1) - f'(1)$

$$\Rightarrow bf(a) \leq f'(1)ab + [f(1) - f'(1)]b$$

$$cf(b) \leq f'(1)cb + [f(1) - f'(1)]c$$

$$af(c) \leq f'(1)ac + [f(1) - f'(1)]a.$$

$$\Rightarrow \ln P \leq f'(1)(ab + bc + ca - (a + b + c)) + f(1)(a + b + c) \leq 3 \ln(1 + \sqrt{2})$$

(do $ab + bc + ca \leq 3 = a + b + c$)

$$\Rightarrow \ln P \leq 3 \ln(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow P \leq (1 + \sqrt{2})^3.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của $P = (1 + \sqrt{2})^3$.

Ví dụ 4: Cho $x, y > 0$ thỏa $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^{-y} + y^{-z} + z^{-x}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $P \geq \frac{3}{\sqrt[3]{x^y \cdot y^z \cdot z^x}}$

Đặt $A = x^y \cdot y^z \cdot z^x \Rightarrow \ln A = y \ln x + z \ln y + x \ln z$.

Vì hàm số $f(t) = \ln t$ có $f''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$

$$\Rightarrow \ln x \leq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 3x - 1 - \ln 3$$

$$\Rightarrow \ln A \leq y(3x - 1 - \ln 3) + z(3y - 1 - \ln 3) + x(3z - 1 - \ln 3)$$

$$= 3(xy + yz + zx) - 1 - 3 \ln 3 \leq (x + y + z)^2 - 1 - 3 \ln 3 = -3 \ln 3$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{3} \Rightarrow P \geq 3\sqrt[3]{3}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 3\sqrt[3]{3}$.

Ví dụ 5: Cho $a, b, c \geq \frac{1}{2}$ thỏa $a + b + c = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^a + b^b + c^c.$$

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = t^t$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Ta có: $\ln f(t) = t \ln t$ lấy đạo hàm hai vế ta được

$$f'(t) = (1 + \ln t)f(t) \Rightarrow \ln f'(t) = \ln f(t) + \ln(\ln t + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{1}{t(\ln t + 1)} = 1 + \ln t + \frac{1}{t(\ln t + 1)}$$

$$\Rightarrow f''(t) = (1 + \ln t)f(t) \left[1 + \ln t + \frac{1}{t(1 + \ln t)} \right] > 0 \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$$

Vì $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ nên áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến, ta có:

$$f(a) \geq f' \left(\frac{2}{3} \right) \left(a - \frac{2}{3} \right) + f \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$f(b) \geq f' \left(\frac{2}{3} \right) \left(b - \frac{2}{3} \right) + f \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$f(c) \geq f' \left(\frac{2}{3} \right) \left(c - \frac{2}{3} \right) + f \left(\frac{2}{3} \right)$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có:

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq f' \left(\frac{2}{3} \right) (a + b + c - 2) + 3f \left(\frac{2}{3} \right) = 3\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 3\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ đạt được $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 6: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}} (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(Trích đề thi Albania 2002)

Lời giải

Vì bất đẳng thức đã cho thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đúng với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $f(a) + f(b) + f(c) \geq 1$, trong đó:

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x} - x \quad \text{với } 0 < x < 1. \text{ Dễ thấy hàm số } f \text{ có } f''(x) > 0 \quad \forall x \in (0; 1).$$

Nên theo bất đẳng thức tiếp tuyến ta có:

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(a + b + c - \sqrt{3}) + 3f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\text{Do } \begin{cases} f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0 \\ a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.$$

Ví dụ 7: Cho n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ thỏa mãn:

$$\tan x_1 + \tan x_2 + \dots + \tan x_n \leq n. \text{ Chứng minh: } \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \dots \cdot \sin x_n \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}}.$$

Lời giải

Đặt $a_i = \tan x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) $\Rightarrow a_i > 0$ $i = 1, 2, \dots, n$ và $\sum_{i=1}^n a_i \leq n$

Ta cần chứng minh: $\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{1+a_i^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ (1).

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x > 0$, có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \Rightarrow f''(x) < 0 \forall x > 0$

$$\Rightarrow f(x) \leq f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{\sqrt{2^3}}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+1)$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{1+a_i^2}} = \prod_{i=1}^n f(a_i) \leq \frac{1}{\sqrt{8^n}} \prod_{i=1}^n (a_i + 1) \leq \frac{1}{\sqrt{8^n}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (a_i + 1)}{n} \right)^n \leq \frac{2^n}{\sqrt{8^n}} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 \Leftrightarrow \tan x_1 = \tan x_2 = \dots = \tan x_n = 1$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{\pi}{4}.$$

Nhận xét: Qua các ví dụ trên, ta được kết quả tổng quát sau :

Định lí 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $[a; b]$ và n số $a_1, a_2, \dots, a_n$

nằm trong đoạn $[a; b]$ thỏa mãn: $\sum_{i=1}^n a_i = k$, $na \leq k \leq nb$.

- Nếu $f''(x) > 0 \forall x \in [a; b]$ thì ta có: $\sum_{i=1}^n f(a_i) \geq nf\left(\frac{k}{n}\right)$

- Nếu $f''(x) < 0 \forall x \in [a; b]$ thì ta có: $\sum_{i=1}^n f(a_i) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC có một góc không nhỏ hơn $\frac{2\pi}{3}$. Chứng minh rằng:

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 4 - \sqrt{3}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $A \geq \frac{2\pi}{3} > B \geq C \Rightarrow C \leq \frac{\pi}{6}$.

Hàm số $f(x) = \tan x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ có $f''(x) > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến, ta có:

$$f\left(\frac{A}{2}\right) \geq f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{B}{2}\right) \geq f'\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$f\left(\frac{C}{2}\right) \geq f'\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) &\geq \left[f'\left(\frac{\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\left(\frac{A}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{A+B+C}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Do $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$; $\frac{A}{2} - \frac{\pi}{3} \geq 0$ và $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$ nên ta có:

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4 - \sqrt{3} \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = \frac{2\pi}{3}; B = C = \frac{\pi}{6}$ và các hoán vị.

Ví dụ 9: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $\max\{a, b, c\} \geq \frac{3}{4}$ và $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt[3]{1+3a^2} + \sqrt[3]{1+3b^2} + \sqrt[3]{1+3c^2}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = \max\{a, b, c\} \Rightarrow a \geq \frac{3}{4}, c \leq \frac{1}{8}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1+3x^2}$, $x \in (0;1)$ có $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{(1+3x^2)^2}}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{2-2x^2}{\sqrt[3]{(1+3x^2)^5}} > 0 \quad \forall x \in (0;1)$. Áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến, ta có:

$$f(a) \geq f'(\frac{3}{4})(a - \frac{3}{4}) + f(\frac{3}{4}); \quad f(b) \geq f'(\frac{1}{8})(b - \frac{1}{8}) + f(\frac{1}{8}); \quad f(c) \geq f'(\frac{1}{8})(c - \frac{1}{8}) + f(\frac{1}{8})$$

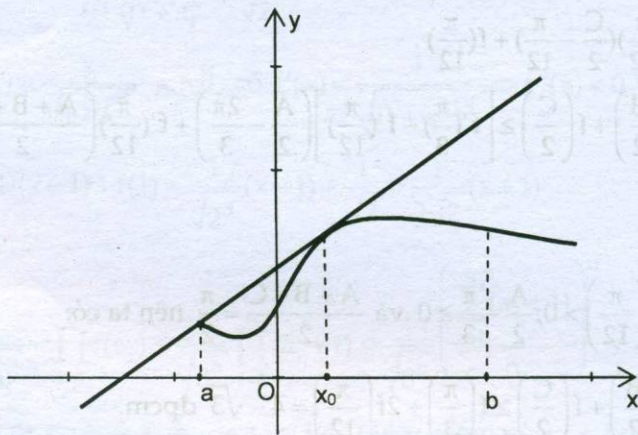
$$\Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq \left[f'(\frac{3}{4}) - f'(\frac{1}{8}) \right] \left(a - \frac{3}{4} \right) + f(\frac{3}{4}) + 2f(\frac{1}{8}) \geq f(\frac{3}{4}) + 2f(\frac{1}{8}) = \frac{\sqrt[3]{172} + 2\sqrt[3]{67}}{4}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{3}{4}; b = c = \frac{1}{8}$ và các hoán vị.

$$\text{Vậy } \min P = \frac{\sqrt[3]{172} + 2\sqrt[3]{67}}{4}.$$

Nhận xét: Trong một số trường hợp đồ thị hàm số $y = f(x)$ có khoảng lõm, lõm trên $[a; b]$ nhưng ta vẫn có được đánh giá: $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, $x_0 \in (a; b)$.

Chẳng hạn các bạn xem đồ thị minh họa dưới đây.



Ví dụ 10: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho

$$\Leftrightarrow (a^4 - 2a^3) + (b^4 - 2b^3) + (c^4 - 2c^3) \geq 0 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 0$$

Trong đó $f(x) = x^4 - 2x^3$. Ta thấy $f''(x) = 12x^2 - 12x$ nên đồ thị hàm số f có khoảng lõm và khoảng lõm trên, do đó ta không thể áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến được. Tuy nhiên ta vẫn có thể đánh giá được $f(x)$ qua tiếp tuyến của nó tại điểm có hoành độ $x = 2$ (vì đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 2$).

Ta có tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là:

$$y = 8x - 16.$$

$$f(x) - (8x - 16) = x^4 - 2x^3 - 8x + 16 = (x - 2)^2(x^2 - 2x + 4) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 8(a + b + c) - 48 = 0 \text{ (đpcm).}$$

Chú ý. Vì $y = 8x - 16$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ nên ta có sự phân tích: $f(x) - (8x - 16) = (x - 2)^k g(x)$ với $k \geq 2$ và $g(2) \neq 0$.

Ví dụ 11: Cho $a, b, c \geq -\frac{3}{4}$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

(Vô địch Toán Ba Lan năm 1996)

Lời giải

Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ và bất đẳng thức đã cho có dạng:

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{9}{10}, \text{ trong đó } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ với } x \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right].$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ là: $y = \frac{36x + 3}{50}$.

$$\text{Ta có: } \frac{36x + 3}{50} - f(x) = \frac{36x + 3}{50} - \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{(3x - 1)^2(4x + 3)}{50(x^2 + 1)} \geq 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right]$$

$$\text{Vậy: } \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{36(a + b + c) + 9}{50} = \frac{9}{10} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 12: Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a}{1 + bc} + \frac{b}{1 + ac} + \frac{c}{1 + ab} \geq \frac{9}{10}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2; \quad ca \leq \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{2}\right)^2; \quad ab \leq \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2$$

$$\text{nên } \frac{a}{1 + bc} + \frac{b}{1 + ac} + \frac{c}{1 + ab} \geq \frac{4a}{a^2 - 2a + 5} + \frac{4b}{b^2 - 2b + 5} + \frac{4c}{c^2 - 2c + 5} = f(a) + f(b) + f(c).$$

(Nhận xét: Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 - 2x + 5} \text{ tại điểm có hoành độ } x = \frac{1}{3} \text{ là: } y = \frac{99x - 3}{100}.)$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{4x}{x^2 - 2x + 5} - \frac{99x - 3}{100} = \frac{(3x - 1)^2(15 - 11x)}{100(x^2 - 2x + 5)} \geq 0 \quad \forall x \in (0; 1)$$

$$\Rightarrow \frac{4a}{a^2 - 2a + 5} + \frac{4b}{b^2 - 2b + 5} + \frac{4c}{c^2 - 2c + 5} \geq \frac{99(a + b + c) - 9}{100} = \frac{9}{10} \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 13: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a + b + c} \geq 4 \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right).$$

Lời giải

Không làm mất tính tổng quát ta giả sử $a + b + c = 1$, khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành $\frac{5a - 1}{a - a^2} + \frac{5a - 1}{b - b^2} + \frac{5c - 1}{c - c^2} \leq 9$.

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và $a + b + c = 1$ suy ra $a, b, c \in (0; \frac{1}{2})$.

$$\text{Ta có: } \frac{5a - 1}{a - a^2} - (18a - 3) = \frac{(3a - 1)^2(2a - 1)}{a - a^2} \leq 0 \quad \forall a \in (0; \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{5a - 1}{a - a^2} \leq 18a - 3 \quad \forall a \in (0; \frac{1}{2}).$$

Ta cũng có hai bất đẳng thức tương tự. Cộng các bất đẳng thức này lại với nhau ta có:

$$\frac{5a - 1}{a - a^2} + \frac{5a - 1}{b - b^2} + \frac{5c - 1}{c - c^2} \leq 18(a + b + c) - 9 = 9 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 14: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b + c - a)^2}{(b + c)^2 + a^2} + \frac{(c + a - b)^2}{(c + a)^2 + b^2} + \frac{(a + b - c)^2}{(a + b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

(Olympic Toán Nhật Bản năm 1997)

Lời giải

Vì bất đẳng thức cần chứng minh là thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đúng với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$\frac{(1 - 2a)^2}{(1 - a)^2 + a^2} + \frac{(1 - 2b)^2}{(1 - b)^2 + b^2} + \frac{(1 - 2c)^2}{(1 - c)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4a^2 - 4a + 1}{2a^2 - 2a + 1} + \frac{4b^2 - 4b + 1}{2b^2 - 2b + 1} + \frac{4c^2 - 4c + 1}{2c^2 - 2c + 1} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{2b^2 - 2b + 1} + \frac{1}{2c^2 - 2c + 1} \leq \frac{27}{5}$$

$$\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{27}{5}.$$

Trong đó $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$ với $x \in (0; 1)$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ là: $y = \frac{54x + 27}{25}$

Ta có: $\frac{54x + 27}{25} - f(x) = \frac{2(54x^3 - 27x^2 + 1)}{25(2x^2 - 2x + 1)} = \frac{2(3x - 1)^2(6x + 1)}{25(2x^2 - 2x + 1)} \geq 0 \quad \forall x \in (0; 1)$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{54(a + b + c) + 81}{25} = \frac{27}{5} \text{ đpcm.}$$

Trong các ví dụ trên ta chỉ xét các bất đẳng thức đối xứng ba biến và đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau. Phần tiếp theo ta sẽ đi xét một số bất đẳng thức không đối xứng hoặc bất đẳng thức đối xứng nhưng đẳng thức xảy ra khi có ít nhất hai biến không bằng nhau.

Ví dụ 15: Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1$$

(Trung Quốc năm 2005)

Lời giải

Giả sử $a \geq b \geq c$.

Xét hàm số $f(x) = 10x^3 - 9x^4$, $x \in (0; 1)$ có $f'(x) = 30x^2 - 45x^4 \Rightarrow f''(x) = 60x - 180x^3$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \text{ đồng thời } f''(x) > 0 \quad \forall x \in (0; x_0) \text{ và } f''(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0; 1).$$

• Nếu $a < x_0$. Áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến, ta có:

$$f(a) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(b) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(c) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(c - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right)(a + b + c - 1) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 1.$$

- Nếu $a > x_0$. Áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến và cát tuyến ta có:

$$f(a) \geq \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0}(a - 1) + f(1) > f(1) = 1;$$

$$f(b) \geq f'(0)(b - 0) + f(0) = 0;$$

$$f(c) \geq f'(0)(c - 0) + f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) > 1.$$

Ví dụ 16: Cho ΔABC nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$F = \sin A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C.$$

Lời giải

Ta có: $\ln F = \ln \sin A + 2 \ln \sin B + 3 \ln \sin C$

Xét hàm số $f(x) = \ln \sin x$, $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f'(x) = \cot x \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$

Áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến với ΔMNP nhọn, ta có:

$$f(A) \leq f'(M)(A - M) + f(M) = (A - M) \cot M + \ln \sin M;$$

$$f(B) \leq f'(N)(B - N) + f(N) = (B - N) \cot N + \ln \sin N$$

$$f(C) \leq f'(P)(C - P) + f(P) = (C - P) \cot P + \ln \sin P$$

$$\Rightarrow \tan M \cdot f(A) + \tan N \cdot f(B) + \tan P \cdot f(C) \geq \tan M \ln \sin M + \tan N \cdot \ln \sin N + \tan P \cdot \ln \sin P$$

Chọn ba góc M, N, P sao cho:

$$\frac{\tan M}{1} = \frac{\tan N}{2} = \frac{\tan P}{3} = k \Rightarrow \tan M = k; \tan N = 2k; \tan P = 3k$$

Mặt khác: $\tan M + \tan N + \tan P = \tan M \cdot \tan N \cdot \tan P$

$$\Rightarrow 6k = 6k^3 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \sin M = \frac{\tan M}{\sqrt{1 + \tan^2 M}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sin N = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin P = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow f(A) + f(B) + f(C) \leq \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \ln \frac{2}{\sqrt{5}} + 3 \ln \frac{3}{\sqrt{10}} = \ln \frac{27}{25\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow F \leq \frac{27}{25\sqrt{5}}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow A = M; B = N; C = P.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $F = \frac{27}{25\sqrt{5}}$.

Nhận xét: Từ cách giải trên, ta có được cách giải cho bài toán tổng quát sau:

Cho ΔABC nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của $E = \sin^m A \cdot \sin^n B \cdot \sin^p C$, với m, n, p là các số thực dương. (Xem ở phần bài tập)

Ví dụ 17: Cho tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \tan A + 2 \tan B + 3 \tan C.$$

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \tan x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, có $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

$$\Rightarrow f''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) > 0, \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến với $\triangle MNP$ nhọn, ta có:

$$f(A) \geq f'(M)(A - M) + f(M) = \frac{1}{\cos^2 M}(A - M) + \tan M$$

$$\Rightarrow \cos^2 M \cdot f(A) \geq \frac{1}{2} \sin 2M + A - M$$

$$\text{Tương tự: } \cos^2 N \cdot f(B) \geq \frac{1}{2} \sin 2N + B - N; \quad \cos^2 P \cdot f(C) \geq \frac{1}{2} \sin 2P + C - P$$

$$\Rightarrow \cos^2 M \cdot f(A) + \cos^2 N \cdot f(B) + \cos^2 P \cdot f(C) \geq \frac{\sin 2M + \sin 2N + \sin 2P}{2}.$$

Ta chọn các góc M, N, P sao cho: $\cos M = k > 0$; $\cos N = \sqrt{2}k$; $\cos P = \sqrt{3}k$

Vì M, N, P là ba góc của tam giác nên ta có đẳng thức:

$$\cos^2 M + \cos^2 N + \cos^2 P + 2 \cos M \cdot \cos N \cdot \cos P = 1$$

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})k + 2\sqrt{6}k^3 = 1 \Rightarrow k \text{ là nghiệm dương của phương trình:}$$

$$2\sqrt{6}x^3 + (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})x - 1 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Ta được } \sin 2M = 2\sqrt{1 - \cos^2 M} \cdot \cos M = 2k\sqrt{1 - k^2};$$

$$\sin 2N = 2k\sqrt{2(1 - 2k^2)}; \sin 2P = 2k\sqrt{3(1 - 3k^2)}$$

$$\Rightarrow F \geq \frac{\sin 2M + \sin 2N + \sin 2P}{2k^2} = \frac{\sqrt{1 - k^2} + \sqrt{2(1 - 2k^2)} + \sqrt{3(1 - 3k^2)}}{k}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } F = \frac{\sqrt{1 - k^2} + \sqrt{2(1 - 2k^2)} + \sqrt{3(1 - 3k^2)}}{k} \text{ đạt được khi}$$

$A = M$; $B = N$; $C = P$, với M, N, P là ba góc của tam giác nhọn được xác định bởi:

$\cos M = k > 0$; $\cos N = \sqrt{2}k$; $\cos P = \sqrt{3}k$, trong đó k là nghiệm dương duy nhất của phương trình (1).

Nhận xét: Tương tự cách làm trên, ta cũng tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$F = m \cdot \tan A + n \cdot \tan B + p \cdot \tan C$, trong đó m, n, p là các số thực dương và A, B, C là ba góc của tam giác nhọn (Xem ở phần bài tập).

Ví dụ 18: Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^3 + \sqrt{1+y^2} + \sqrt[4]{1+z^4}.$$

Lời giải

Ta có các hàm số $f(t) = t^3$; $g(t) = \sqrt{1+t^2}$; $h(t) = \sqrt[4]{1+t^4}$, $t \in (0;1)$ là những hàm số có đạo hàm cấp hai dương trên khoảng $(0;1)$. Nên với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$, áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến, ta có:

$$f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a); \quad h(y) \geq h'(b)(y-b) + h(b); \quad g(z) \geq g'(c)(z-c) + g(c)$$

Ta chọn a, b, c sao cho $f'(a) = g'(b) = h'(c) = k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 = k \\ \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = k \\ \frac{c^3}{\sqrt[4]{(1+c^4)^3}} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{k}{3}} \\ b = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \\ c = \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{1-k^3/k}} \end{cases}$$

$$\text{Do } a + b + c = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{3}} + \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{1-k^3/k}} = 1 \quad (*).$$

Dễ thấy phương trình (*) luôn có nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

$$\Rightarrow P = f(x) + g(y) + h(z) \geq f(a) + h(b) + g(c) = \frac{k\sqrt{3k}}{9} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1-k^3/k}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = a; y = b; z = c$.

$$\text{Vậy } \min P = \frac{k\sqrt{3k}}{9} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1-k^3/k}} \text{ với } k \text{ là nghiệm nằm trong } (0;1) \text{ của } (*).$$

Ví dụ 19: (Bất đẳng thức Jensen). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $(a; b)$ và n số thực dương $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ có tổng bằng 1.

$$\text{a) Nếu } f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a; b) \text{ thì ta có: } \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)$$

với $\forall x_i \in (a; b) \quad i = \overline{1, n}$. Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

$$\text{b) Nếu } f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a; b) \text{ thì ta có: } \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)$$

với $\forall x_i \in (a; b) \quad i = \overline{1, n}$. Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Lời giải

a) Đặt $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \Rightarrow y \in (a; b)$.

Vì $f''(x) > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến, ta có:

$$f(x_i) \geq f'(y)(x_i - y) + f(y) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \alpha_i f(x_i) \geq f'(y)(\alpha_i x_i - \alpha_i y) + \alpha_i f(y) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \geq f'(y) \sum_{i=1}^n (\alpha_i x_i - \alpha_i y) + f(y) \sum_{i=1}^n \alpha_i = f(y) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right).$$

b) Chứng minh tương tự.

Ví dụ 20 Cho hai bộ số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i. \text{ Chứng minh rằng: } \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \geq \prod_{i=1}^n a_i^{a_i}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \ln x_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \ln a_i$.

Hàm số $f(x) = \ln x$ là hàm lồi, nên áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến ta có:

$$f(x_i) \leq f'(a_i)(x_i - a_i) + f(a_i) = \frac{1}{a_i}(x_i - a_i) + f(a_i)$$

$$\Rightarrow a_i f(x_i) \leq x_i - a_i + a_i f(a_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) + \sum_{i=1}^n a_i f(a_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(a_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \ln x_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \ln a_i \text{ đpcm.}$$

Chú ý: Điều thú vị là bất đẳng thức Cauchy lại là một hệ quả của bài toán trên.

Thật vậy: Cho $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$. Khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \prod_{i=1}^n a_i = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^n \quad (\text{do } a_1 = a_2 = \dots = a_n)$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \text{ đây chính là bất đẳng thức Cauchy cho } n \text{ số.}$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} + \frac{a+b}{c^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{b^2+c+a} + \frac{1}{c^2+a+b} \leq 1$$

Bài 3. Cho $x, y, z \leq 1$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{27}{10}$$

Bài 4. Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Chứng minh

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{a_2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \geq (n-1)^n.$$

Bài 5. Cho $a, b, c, d \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $a+b+c+d=\pi$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{2} \sin a - 1}{\cos a} + \frac{\sqrt{2} \sin b - 1}{\cos b} + \frac{\sqrt{2} \sin c - 1}{\cos c} + \frac{\sqrt{2} \sin d - 1}{\cos d} \geq 0.$$

Bài 6. Cho n số thực dương thỏa mãn: $\sum_{i=1}^n x_i = n$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \quad (\text{New Zealand năm 1998}).$$

Bài 7. Cho tam giác ABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right) \cot \frac{A}{4} + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{4}\right) \cot \frac{B}{4} + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right) \cot \frac{C}{4}.$$

Bài 8. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\sqrt{3} \leq \frac{\cos \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{1 + \sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{1 + \sin \frac{C}{2}} < 2.$$

Bài 9. Cho tam giác ABC nhọn và $m, n, k > 0$. Tìm:

a. Giá trị lớn nhất của $F = \sin^m A \cdot \sin^n B \sin^k C$.

b. Giá trị nhỏ nhất của $F = m \tan A + n \tan B + k \tan C$

Bài 10. Cho n số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tổng bằng 1. Chứng minh:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{1}{n} \quad (\text{Bất đẳng thức Cauchy}).$$

Bài 11. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8 \quad (\text{Mỹ năm 2003}).$$

Bài 12. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

Bài 13. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$

Bài 14. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - (a+b+c) \geq 2\sqrt{3}$

Bài 15. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh: $\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} \leq \frac{3+\sqrt{3}}{9}.$

(Hong Kong năm 1997)

BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN MŨ – LOGARIT

Bạn đọc có thể xem lại dạng toán này và những bài tập cơ bản trong cuốn: Hàm số mũ – Logarit, Tích phân, Đại số tổ hợp – Số phức – cùng tác giả.

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho $a > 0, b > 0$ và $a^2 + b^2 = 7ab$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha > 0, \alpha \neq 1$, ta có: $\log_{\alpha} \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_{\alpha} a + \log_{\alpha} b)$

Lời giải

Từ $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$. Suy ra:

$$\log_{\alpha} \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log_{\alpha} (ab)$$

Do $\frac{a+b}{3} > 0$, nên ta có: $2\log_{\alpha} \frac{a+b}{3} = \log_{\alpha} (ab)$

$$\text{hay } \log_{\alpha} \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_{\alpha} a + \log_{\alpha} b)$$

Ví dụ 2: Giả sử $\frac{x(y+z-x)}{\lg x} = \frac{y(z+x-y)}{\lg y} = \frac{z(x+y-z)}{\lg z}$.

Chứng minh rằng: $x^y y^x = z^y y^z = z^x x^z$

Lời giải

Đặt $\frac{x(y+z-x)}{\lg x} = \frac{y(z+x-y)}{\lg y} = \frac{z(x+y-z)}{\lg z} = 1$.

Suyra: $\lg x = tx(y+z-x) \Leftrightarrow y \lg x = txy(y+z-x)$;

$\lg y = ty(z+x-y) \Leftrightarrow x \lg y = txy(z+x-y)$

Từ đó ta có: $x \lg y + y \lg x = 2txyz$

Lập luận tương tự: $y \lg z + z \lg y = 2txyz$;

$z \lg x + x \lg z = 2txyz$

Do đó ta có: $x \lg y + y \lg x = y \lg z + z \lg y = z \lg x + x \lg z$

$\Leftrightarrow \lg(x^y y^x) = \lg(z^y y^z) = \lg(z^x x^z) \Leftrightarrow x^y y^x = z^y y^z = z^x x^z$

Ví dụ 3: Cho hai số $a, b \in (0;1)$ và $a \neq b$. Chứng minh rằng:

$\frac{\ln 2012}{b-a} \left(\log_{2012} \frac{b}{1-b} - \log_{2012} \frac{a}{1-a} \right) > 4$

Lời giải

Bất đẳng thức cho

$\Leftrightarrow \frac{\ln 2012}{b-a} (\log_{2012} b - \log_{2012} (1-b) - \log_{2012} a + \log_{2012} (1-a)) > 4$

Trường hợp 1: nếu $b > a$ thì bất đẳng thức

$\Leftrightarrow \log_{2012} b - \log_{2012} (1-b) - \frac{4b}{\ln 2012} > \log_{2012} a - \log_{2012} (1-a) - \frac{4a}{\ln 2012}$

Xét hàm số $f(t) = \log_{2012} t - \log_{2012} (1-t) - \frac{4t}{\ln 2012}$ $t \in (0;1)$

Ta có $f'(t) = \frac{(2t-1)^2}{t(1-t)\ln 2012} \geq 0 \quad \forall t \in (0;1)$ vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;1)$

Suy ra $b > a$ ta có $f(b) > f(a)$ từ đó ta có điều phải chứng minh

Trường hợp 2: $b < a$ chứng minh tương tự.

Ví dụ 4. Cho các số $x, y, z > -1$.

Chứng minh rằng: $\ln(x+1) + \ln(y+1) + \ln(z+1) < \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1}$

Lời giải

Xét hàm số: $f(t) = \ln(t+1) - \sqrt{t+1}$ với $t > -1$

Ta có: $f'(t) = \frac{2-\sqrt{t+1}}{2(t+1)}$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$

$f'(t)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua 3 nên $f(3)$ là giá trị lớn nhất.

Suy ra $f(t) \leq f(3) < 0$, do đó $f(x) + f(y) + f(z) < 0$ hay

$$\ln(x+1) + \ln(y+1) + \ln(z+1) < \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1}$$

Ví dụ 5: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$

Đề thi Đại học khối A, A1 – năm 2012

Lời giải

Cách 1: $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -(x+y)$ và có hai số không âm hoặc không dương.

Do tính chất đối xứng ta có thể giả sử $xy \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= 3^{|x-y|} + 3^{|2y+x|} + 3^{|2x+y|} - \sqrt{12(x^2 + y^2 + xy)} \\ &= 3^{|x-y|} + 3^{|2y+x|} + 3^{|2x+y|} - \sqrt{12[(x+y)^2 - xy]} \\ &\geq 3^{|x-y|} + 2.3^{\frac{|2y+x|+|2x+y|}{2}} - \sqrt{12[(x+y)^2 - xy]} \geq 3^{|x-y|} + 2.3^{\frac{3|x+y|}{2}} - 2\sqrt{3}|x+y| \end{aligned}$$

Đặt $t = |x+y| \geq 0$

Xét hàm số: $f(t) = 2.(\sqrt{3})^{3t} - 2\sqrt{3}t$

Ta có: $f'(t) = 2.3(\sqrt{3})^{3t} \cdot \ln \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}[\sqrt{3}.(\sqrt{3})^{3t} \ln \sqrt{3} - 1] > 0$

$\Rightarrow f$ đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow f(t) \geq f(0) = 2$

Mà: $3^{|x-y|} \geq 3^0 = 1$

Vậy $P \geq 3^0 + 2 = 3$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 0$. Vậy min $P = 3$.

Cách 2: Không mất tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$.

Từ giả thiết suy ra $z = -(x+y)$ do đó,

$$\begin{aligned} P &= 3^{x-y} + 3^{y-z} + 3^{x-z} - \sqrt{12(x^2 + y^2 + (x+y)^2)} \\ &= 3^{x-y} + 3^{2y+x} + 3^{2x+y} - \sqrt{12(x^2 + y^2 + (x+y)^2)} \end{aligned}$$

Đặt: $\begin{cases} a = 2x + y \\ b = 2y + x \end{cases}$ thì $\begin{cases} x = \frac{2a-b}{3} \\ y = \frac{2b-a}{3} \end{cases}$ và $a \geq b \geq 0$.

Thay vào P ta được:

$$P = 3^{a-b} + 3^a + 3^b - 2\sqrt{a^2 - ab + b^2} = 3^{a-b} + 3^a + 3^b - 2\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

Đặt: $\begin{cases} u = \frac{a+b}{2} \\ v = \frac{a-b}{2} \end{cases}$, thì $u \geq v \geq 0$ và ta có: $P = 9^v + 3^{u+v} + 3^{u-v} - 2\sqrt{u^2 + 3v^2}$

Xét hàm: $P = f(u) = 9^v + 3^{u+v} + 3^{u-v} - 2\sqrt{u^2 + 3v^2}, u \geq v \geq 0$

$$f'(u) = 3^{u+v} \ln 3 + 3^{u-v} \ln 3 - \frac{2u}{\sqrt{u^2 + 3v^2}} \geq 2 \ln 3 - 2 > 0$$

$\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $[v; +\infty)$, nên:

$$f(u) \geq f(v) = 9^v + 3^{2v} + 1 - 2\sqrt{4v^2} = 2 \cdot 9^v - 4v + 1 \quad (1)$$

Xét $g(v) = 2 \cdot 9^v - 4v + 1, v \geq 0$

$$g'(v) = 2 \cdot 9^v \ln 9 - 4 = 4 \cdot 9^v \ln 3 - 4 \geq 4 \ln 3 - 4 > 0 \text{ do } v \geq 0$$

Suy ra $g(v)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$, nên $g(v) \geq g(0) = 3 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $f(u) \geq 3$ hay $P \geq 3$

Đẳng thức xảy ra khi $u = v = 0$ hay $x = y = z = 0$

Vậy min $P = 3$.

Cách 3: $6(x^2 + y^2 + z^2) = 2(|x-y|^2 + |y-z|^2 + |z-x|^2)$

Đặt $A = |y-z|, B = |z-x|, C = |x-y|$

$$P = 3^A + 3^B + 3^C - \sqrt{2(A^2 + B^2 + C^2)}$$

Giả sử $x \geq y \geq z$, ta chứng minh $2(A^2 + B^2 + C^2) \leq (A+B+C)^2$

Thật vậy bất đẳng thức tương đương: $2(AB + BC + CA) \geq A^2 + B^2 + C^2$

$$2(x-y)(y-z) + 2(x-z)(y-z) + 2(x-y)(x-z) \geq (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$$

$$4(x-y)(y-z) \geq 0, \text{ đúng vì } x \geq y \geq z$$

Vậy, ta có $P \geq 3^A + 3^B + 3^C - (A + B + C)$

Xét hàm số $f(x) = 3^x - x$, với $x \geq 0$, ta có ngay $f(x) \geq 1, \forall x \geq 0$. Do đó $P \geq 3$

Cách 4: Không mất tính tổng quát $x \geq y \geq z$. Đặt $\begin{cases} a = x - y \\ b = y - z \end{cases}, a, b \geq 0$

$$P = 3^a + 3^b + 3^{a+b} - \sqrt{\frac{2}{3}(4a^2 + 8a + 4b^2)} \geq 2\sqrt{3^{a+b}} + 3^{a+b} - \sqrt{\frac{8}{3}}(a+b) = Q$$

$$Q = 3^t + 2\sqrt{3^t} - \sqrt{\frac{8}{3}}t, \text{ với } t = a+b, t \geq 0$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 2\sqrt{3^t} - \sqrt{\frac{8}{3}}t$, với $t \geq 0$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 3^t \ln 3 + 2 \frac{3^t \ln 3}{2\sqrt{3^t}} - \sqrt{\frac{8}{3}} = 3^t \ln 3 + \sqrt{3^t} \ln 3 - \sqrt{\frac{8}{3}} \geq 2 \ln 3 - \sqrt{\frac{8}{3}} > 0$$

Do đó $f(t)$ đồng biến với $t \geq 0$ và $f(t) \geq f(0) = 3$

Đẳng thức xảy ra khi $t=0 \Leftrightarrow a=b=0$ hay $x=y=z=0$

Cách 5: $x^2 + y^2 + z^2 = -2xy - 2yz - 2zx$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (|x-y| + |y-z| + |z-x|)^2 \\ &= 3(x^2 + y^2 + z^2) + 2(|xy - y^2 - xz + yz| + |yz - z^2 - xy + xz| + |xz - x^2 - yz + xy|) \\ &\geq 6(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

$$P \geq 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - (|x-y| + |y-z| + |z-x|)$$

Khảo sát hàm số: $f(x) = 3^x - x$ hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Cách 6: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai dãy số $(1; 1; 1)$ và $(x; y; z)$

$$\text{Ta có: } (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (1.x + 1.y + 1.z)^2 = (x + y + z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{6(x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0$$

$$\text{Vậy } P \geq 3 - 0 = 3 \Rightarrow P_{\min} = 3.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} |x-y| + |y-z| + |z-x| \\ x=y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Ví dụ 6:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_2^2 x + 1} + \sqrt{\log_2^2 y + 1} + \sqrt{\log_2^2 z + 4}$, trong đó là các số x, y, z dương thoả mãn điều kiện $xyz = 8$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$. Ta được: $P \geq \sqrt{\log_2^2(xyz) + 4^2}$

Vậy, $\min P = 5$ khi và chỉ khi $\frac{\log_2 x}{1} = \frac{\log_2 y}{1} = \frac{\log_2 z}{2} = \frac{\log_2(xyz)}{4} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow x = y = \sqrt[4]{8}; z = 2\sqrt{2}.$$

PHƯƠNG PHÁP DÙNG TỌA ĐỘ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bạn đọc có thể xem lại dạng toán này và những bài tập cơ bản trong cuốn: **Phân dạng và phương pháp giải các chuyên đề Hình học 12 – Nhóm tác giả: Nguyễn Phú Khánh – Nguyễn Tất Thu – Nguyễn Tấn Sĩ.**

Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho các số thực $x + 2y + 3z - 6 = 0$. Chứng minh rằng:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \geq \frac{32}{7}$$

Lời giải

Xét hai véc tơ $\vec{u} = (x-1; y-2; z-3)$, $\vec{v} = (1; 2; 3)$

Áp dụng bất đẳng thức: $|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

Ta có: $14[(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2] \geq [1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3)]^2$

Suy ra $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \geq \frac{1}{14}(x+2y+3z-14)^2 = \frac{32}{7}$ (đpcm).

Ví dụ 2: Cho các số thực a, b, c, d thoả $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$4x^2 + \frac{1}{(x^2 + ax + b)^2 + (x^2 + cx + d)^2} \geq 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Xét hai vectơ: $\vec{u}(x; a; b)$, $\vec{v} = (x; x; 1)$. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

Ta có: $(x^2 + a^2 + b^2)(2x^2 + 1) \geq (x^2 + ax + b)^2$

Tương tự: $(x^2 + c^2 + d^2)(2x^2 + 1) \geq (x^2 + cx + d)^2$

Suy ra $(x^2 + ax + b)^2 + (x^2 + cx + d)^2 \leq (2x^2 + 1)(2x^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (2x^2 + 1)^2$

Do đó: $4x^2 + \frac{1}{(x^2 + ax + b)^2 + (x^2 + cx + d)} \geq 4x^2 + \frac{1}{(2x^2 + 1)^2}$

Mặt khác: $(2x^2 + 1) + (2x^2 + 1) + \frac{1}{(2x^2 + 1)^2} \geq 3 \Rightarrow 4x^2 + \frac{1}{(2x^2 + 1)^2} \geq 1$

Vậy ta có: $4x^2 + \frac{1}{(x^2 + ax + b)^2 + (x^2 + cx + d)} \geq 1$.

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Lời giải

Xét hai vectơ $\vec{u} = \left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}; \sqrt{\frac{b}{c+a}}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right)$, $\vec{v} = \left(\sqrt{a(b+c)}; \sqrt{b(c+a)}; \sqrt{c(a+b)} \right)$

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \Leftrightarrow |\vec{u}|^2 \geq \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{v}|^2}$, ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}.$$

(Ở đây ta đã sử dụng bất đẳng thức $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$)

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 4:

Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Lời giải

Xét hai vectơ $\vec{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}; \frac{b}{\sqrt{c+a}}; \frac{c}{\sqrt{a+b}} \right)$, $\vec{v} = \left(\sqrt{b+c}; \sqrt{c+a}; \sqrt{a+b} \right)$

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \Leftrightarrow |\vec{u}|^2 \geq \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{v}|^2}$, ta có:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1:

1. Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thoả $ab + bc + ca \geq \frac{4}{3}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2 + \frac{1}{(b+1)^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{(c+1)^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{(a+1)^2}} \geq \frac{\sqrt{181}}{5}$

Bài 2: Cho các số thực a, b, c thoả $(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 9$.

1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: $P = 3a + 4b - 5c$

2. Chứng minh rằng: $87 - 16\sqrt{51} \leq (2a-1)^2 + (2b+3)^2 + (2c-5)^2 \leq 87 + 16\sqrt{51}$

Bài 3: Cho 6 số thực a, b, c, m, n, p thoả mãn
$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 18 \\ (m-1)^2 + (n-2)^2 + (p-3)^2 = 36 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + 2m(1-a) + 2n(2-b) + 2p(3-c).$$

Bài 4: Cho các số thực a, b, c, m, n, p thoả
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ (m-6)^2 + (n-5)^2 + (p-4)^2 = 4 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\frac{69 + \sqrt{77}}{2} \leq m(6-a) + n(5-b) + p(4-c) \leq \frac{75 + \sqrt{77}}{2}$.

Bài 5: Cho các số thực $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1. Trong hệ tọa độ Oxy, xét $\vec{u}(x-1; y), \vec{v}(x+1; y)$.

Do $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ nên ta có: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq \sqrt{4 + 4y^2} = 2\sqrt{1+y^2}$.

Do đó $A \geq 2\sqrt{1+y^2} + |y-2| = f(y)$

* Với $y \leq 2 \Rightarrow f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2 - y$.

Lập bảng biến thiên suy ra $f(y) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 + \sqrt{3}$.

* Với $y > 2 \Rightarrow f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + |y-2| > 2\sqrt{1+y^2} > 2\sqrt{5} > 2 + \sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2 + \sqrt{3}$.

Nhận xét:

Khi gặp biểu thức trong căn có dạng tổng hai bình phương, ta liên tưởng đến phương pháp hình học với đánh giá quen thuộc sau:

Cho k véc tơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$, khi đó ta có: $\sum_{i=1}^k |\vec{u}_i| \geq \left| \sum_{i=1}^k \vec{u}_i \right|$.

2. Gọi P là biểu thức ở vế trái

Xét ba véc tơ sau: $\vec{u} = \left(a; \frac{1}{b+1}\right), \vec{v} = \left(b; \frac{1}{c+1}\right), \vec{m} = \left(c; \frac{1}{a+1}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{m}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{m}|$ ta có:

$$P \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{a+1}\right)^2} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \frac{81}{(a+b+c+3)^2}}$$

Đặt $t = a + b + c \Rightarrow t \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} = 2$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + \frac{81}{(t+3)^2}, t \geq 2$. Ta có: $f'(t) = 2t - \frac{162}{(t+3)^3} = \frac{2[g(t) + 169]}{(t+3)^3}$

Trong đó: $g(t) = (t-2)(t^3 + 11t^2 + 49t + 125) + 169$

Khảo sát hàm $g(t)$, ta có: $g(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 2 \Rightarrow f'(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 2$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(2) = \frac{181}{25} \quad \forall t \geq 2 \Rightarrow P \geq \frac{\sqrt{181}}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{4}{9}$.

Bài 2: Xét mặt cầu (S) tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 3$

1. Gọi $(\alpha): 3x + 4y - 5z - P = 0$. Xét $M(a;b;c) \Rightarrow M \in (\alpha) \cap (S)$

Do đó a, b, c tồn tại $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) \neq \emptyset \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) \leq R \Leftrightarrow -4 - 15\sqrt{3} \leq P \leq -4 + 15\sqrt{3}$

Gọi M là hình chiếu của I lên (α) , ta tìm được $M\left(\frac{62+3P}{50}; \frac{58+2P}{25}; \frac{26-P}{10}\right)$

$$\text{Vậy } \max P = -4 + 15\sqrt{3}, \text{ đạt được khi } \begin{cases} a = \frac{62+3P}{50} = \frac{10+9\sqrt{3}}{10} \\ b = \frac{58+2P}{25} = \frac{10+6\sqrt{3}}{5} \\ c = \frac{26-P}{10} = \frac{6-3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\min P = -4 - 15\sqrt{3}, \text{ đạt được khi } \begin{cases} a = \frac{62+3P}{50} = \frac{10-9\sqrt{3}}{10} \\ b = \frac{58+2P}{25} = \frac{10-6\sqrt{3}}{5} \\ c = \frac{26-P}{10} = \frac{6+3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2. Đặt $F = (2a-1)^2 + (2b+3)^2 + (2c-5)^2 \geq 0$.

Xét mặt cầu (S_1) có tâm $I_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$, bán kính $R_1 = \frac{\sqrt{F}}{2}$

Khi đó a, b, c tồn tại $\Leftrightarrow (S) \cap (S_1) \neq \emptyset \Leftrightarrow |R - R_1| \leq \Pi_1 \leq R + R_1$

$$\Leftrightarrow 87 - 16\sqrt{51} \leq F \leq 87 + 16\sqrt{51}.$$

Bài 3:

Xét mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y + z - 18 = 0$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 6$.

Xét hai điểm $M(a;b;c) \in (\alpha), N(m;n;p) \in (S)$

Ta có $P = (a-m)^2 + (b-n)^2 + (c-p)^2 - 22 = MN^2 - 22$

Vì $d(I, (\alpha)) = 3 < R \Rightarrow (\alpha)$ và (S) cắt nhau theo đường tròn tâm $H(3;4;4)$.

IH cắt (S) tại hai điểm $N_1(5;6;5), N_2(-3;-2;1)$

Suy ra $9 = N_1H^2 \leq MN^2 \leq N_2H^2 = 81 \Rightarrow -13 \leq P \leq 59$

Từ đó ta tìm được $\max P = -13, \min P = 59$.

Bài 4: Xét hai mặt cầu (S_1) tâm O bán kính $R_1 = 1$, mặt cầu (S_2) tâm I(6;5;4), bán kính $R_2 = 2$.

Xét hai điểm $M(a;b;c) \in (S_1), N(m;n;p) \in (S_2)$

$$\text{Đặt } P = m(6-a) + n(5-b) + p(4-c) \Rightarrow 2P = MN^2 + 72$$

$$\text{Ta có } \sqrt{77} - 3 = OI - R_1 - R_2 \leq MN \leq IO + R_1 + R_2 = \sqrt{77} + 3.$$

Bài 5: Xét các véc tơ $\vec{u} = \left(\sqrt{\frac{3}{b+c}}; \sqrt{\frac{4}{c+a}}; \sqrt{\frac{5}{a+b}} \right), \vec{v} = (\sqrt{b+c}; \sqrt{c+a}; \sqrt{a+b})$

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$.

$$\text{Ta có: } \left(\frac{3}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{5}{a+b} \right) (a+b+c) \geq \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b} \geq \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{b+c}{\sqrt{3}} = \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12.$$

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: ỨNG DỤNG HÀM SỐ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT

- Dạng 1. Ứng dụng của hàm số bậc nhất... 5
- Dạng 2. Ứng dụng của hàm số bậc hai... 9
- Dạng 3. Chứng minh bất đẳng thức có chứa các hệ số
của phương trình bậc hai với nghiệm của nó có điều kiện 13
- Dạng 4. Ứng dụng tam thức bậc hai, bất phương trình bậc hai 15
- Hướng dẫn giải..... 19

CHỦ ĐỀ 2: BẤT ĐẲNG THỨC..... 28

- Dạng 1. Sử dụng định nghĩa và tính chất cơ bản của bất đẳng thức 29
- Dạng 2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy để chứng minh
bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất 47
- Dạng 3. Đặt ẩn phụ trong bất đẳng thức..... 107
- Dạng 4. Sử dụng bất đẳng thức phụ..... 116
- Hướng dẫn giải 126
- Bài đọc thêm: Một số phương pháp khác chứng minh bất đẳng thức 185*

CHỦ ĐỀ 3: ỨNG DỤNG HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

- Dạng 1. Bất đẳng thức lượng giác và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất
của biểu thức lượng giác 211
- Dạng 2. Ứng dụng lượng giác trong chứng minh bất đẳng thức đại số 216
- Dạng 3. Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất,
giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác trong tam giác 221
- Hướng dẫn giải 224

CHỦ ĐỀ 4: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

- Dạng 1. Phương pháp dùng bất đẳng thức 236
- Dạng 2. Phương pháp dùng đạo hàm 238
- Dạng 3. Phương pháp dùng bất đẳng thức kết hợp với đạo hàm 245
- Dạng 4. Phương pháp suy biến 256
- Dạng 5. Phương pháp đổi biến số 264
- Dạng 6. Phương pháp cân bằng 272
- Dạng 7. Xác định tham số để hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất
thỏa điều kiện cho trước 275
- Hướng dẫn giải 277

Chuyên đề đọc thêm 341



NS. HỒNG AN

www.nhasachhongan.com.vn

Email: baolongco_ha@vnn.vn

18D Nguyễn Thị Minh Khai - Q.1 - TP.HCM

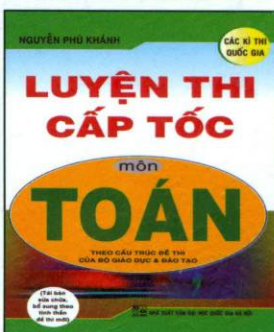
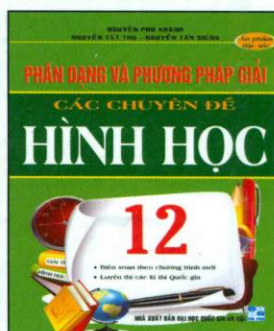
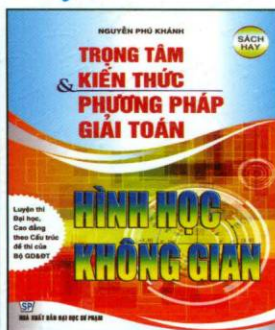
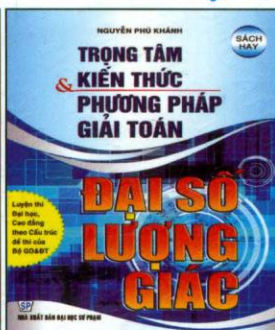
ĐT: 38246706 - 08083021 - 39107095 ♦ Fax: 08083017



Điểm đến của tri thức



Cùng một tác giả:



Bản lại

- 29&31 Phan Bội Châu - Hải Phòng *ĐT: (0313) 839599
- 245 Trần Nguyên Hãn - Hải Phòng *ĐT: (0313) 858699
- 04 Lý Thái Tổ - TP. Đà Nẵng *ĐT: 0511.3823421
- 259 Lê Duẩn - TP. Vinh - ĐT: 0383.554777
- 94 Xô Viết Nghệ Tĩnh - Cần Thơ - ĐT: (0710) 3818891
- 158 Tỉnh lộ 8 - TT.Củ Chi - TP.HCM *ĐT: (08) 37924216
- 129 Phan Chu Trinh - Đà Nẵng *ĐT: 3821317
- 295 Đường 30/4 - Tây Ninh *ĐT: 3827249
- 01 Hai Bà Trưng - Buôn Ma Thuột *ĐT: 3951984
- 66 Lý Thái Tổ - TX. Quảng Trị
- 496 Võ Thị Sáu, 3/5 Tôn Đức Thắng - Long Xuyên

Để xác định sách chính phẩm,
chúng tôi in chìm ở bìa 1 và 4 chữ:

"NS. HỒNG AN"



Giá: 70.000đ