

$$y = x^2$$

$$\cos^2 x$$

$$\sin^2 x$$

$$x^2$$

NGUYỄN PHÚ KHÁNH  
VÕ QUỐC BÁ CẦN  
TRẦN QUỐC ANH

# KIẾN THỨC KINH NGHIỆM LÀM BÀI

QUA CÁC KÌ THI ĐẠI HỌC

môn

# TOÁN

**ĐH**  
**QG**  
Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN PHÚ KHÁNH  
VÕ QUỐC BÁ CẨN – TRẦN QUỐC ANH

**KIẾN THỨC VÀ KINH NGHIỆM  
LÀM BÀI QUA CÁC KÌ THI  
ĐẠI HỌC  
MÔN TOÁN**

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI



**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;

Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897

Fax: (04) 39714899

***Chịu trách nhiệm xuất bản***

*Giám đốc:* PHÙNG QUỐC BẢO

*Tổng biên tập:* PHẠM THỊ TRÂM

*Biên tập:* PHAN ANH

*Đối tác liên kết xuất bản:*

NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾ

---

**Kiến thức và kinh nghiệm làm bài qua các kì thi đại học môn Toán**

---

Mã số: 1L-25ĐH2011

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty TNHH In Bao Bì Phong Tân

Số xuất bản: 140-2011/CXB/13-13/ĐHQGHN, ngày 29/1/2011.

Quyết định xuất bản số: 25LK-TN/QĐ-NXBDHQGHN.

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2011.

# Lời tựa

Thị trường sách tham khảo toán hiện nay có quá nhiều những cuốn sách tiêu đề như “Bộ đề thi Đại học”, “Các chủ đề ôn thi Đại học”, hay “Các bài giảng ôn luyện môn Toán”... mà đa phần nội dung không khác nhau nhiều, thường chỉ xoay quanh việc giải bài tập, còn phương pháp và cách dẫn dắt rất sơ sài. Điều này khiến các sĩ tử trước kì thi càng trở nên khó khăn và mệt mỏi hơn trong việc lựa chọn một cuốn sách hay cho mình. Hiểu được phần nào tâm lí ấy, nhà sách Hồng Ân xin được chia sẻ với độc giả một tin vui:

*Nếu bạn đang lo lắng...Bạn muốn biết cấu trúc đề thi đại học những năm gần đây? Có quá nhiều kiến thức, bạn muốn biết phần nào là trọng tâm? Bạn muốn biết phần nào học tốn ít thời gian nhưng khả năng thi cao nhất? Bạn muốn học hỏi kinh nghiệm, những “kĩ năng mềm” trước khi bước vào phòng thi?*

Tất cả đã có trong cuốn sách mà bạn đang cầm trên tay:

## ***“Kiến thức và kinh nghiệm làm bài qua các kì thi Đại học môn Toán”***

Sau đây, nhà sách Hồng Ân xin được có đôi dòng cảm nhận về nhóm tác giả Nguyễn Phú Khánh – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh.

- *Nguyễn Phú Khánh* là sáng lập viên (hiện đang là admin) của Diễn đàn toán học Việt Nam [maths.vn](http://maths.vn). Ông đã lập ra một hệ thống thư viện tài liệu cũng như giáo án online trên website nổi tiếng này với ước mơ phổ cập kiến thức tới những vùng sâu, vùng xa cho giáo viên, học sinh nghèo vượt khó và là tác giả nhiều cuốn sách hay, ôn thi Đại học hiện nay.
- *Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh*, được ví như “Bắc Kiều Phong, Nam Mộ Dung” trong lĩnh vực bất đẳng thức sơ cấp ở nước ta. Trong thời gian qua, với phong cách viết “hướng đối tượng”, “dẫn dắt lời giải tự nhiên” bộ đôi trẻ tuổi này đã thực sự tạo nên *hiệu ứng bất đẳng thức* qua gần mười đầu sách được xuất bản tại Việt Nam và cả trên thế giới.

## ***Ba người thầy – Một thông điệp***

Sự kết hợp ấy đã tạo nên một phong cách viết “trẻ trung” và “giàu kinh nghiệm”, chắc chắn sẽ làm hài lòng cả những độc giả kĩ tính nhất.

**Nhà sách Hồng Ân**  
**Trân trọng giới thiệu**



# Lời nói đầu

Một mùa thi nữa lại đang đến gần...

Thực sự, nhóm tác giả chúng tôi không khỏi chạnh lòng khi nhìn vào thực trạng thi cử hiện nay. Học sinh các tỉnh đổ dồn về những thành phố lớn để học “trung tâm”, còn học sinh thành phố thì “chạy sô” khắp “lò luyện” này đến “lò luyện” khác. Phụ huynh thấp thòm, đứng ngồi không yên, tính đủ mọi phương án chọn trường... Toàn cảnh bức tranh này có thể tóm gọn trong hai cụm từ: “bon chen” và “mất phương hướng”.

Xin đừng nghĩ rằng cứ học nhiều thời gian hơn người khác, bạn sẽ vượt lên.

Điều ngược lại hoàn toàn có thể xảy ra. Đừng để rơi vào hoàn cảnh “học tài, thi phận” mà hãy “học đúng cách, thi đúng năng lực”.

Đúng cách là thế nào ? Theo chúng tôi, đúng cách ở đây có nghĩa là:

*Học vừa đủ, hiệu quả cao. Vững tâm lý, làm bài tốt.*

Với mục đích truyền đạt tới các bạn thí sinh nội dung cụ thể của thông điệp này, nhóm tác giả đã cố gắng biên soạn cuốn sách **“Kiến thức và kinh nghiệm làm bài qua các kì thi Đại học môn Toán”**.

Đúng như tên gọi của nó, sách bao gồm những kiến thức cần thiết, tối ưu nhất được hệ thống đầy đủ qua những chuyên đề ngắn gọn. Ngay sau đó, chúng ta sẽ đi vào thực hành. Phần đề thi những năm gần đây và cả những đề tự luyện (kèm đáp án) sẽ giúp thí sinh nắm được rõ cấu trúc đề cũng như vận dụng thành thạo kiến thức từ phần trước. Cuối cùng, không kém phần quan trọng là những chia sẻ cuối sách. Những chia sẻ này thực sự đã mang lại thành công cho nhiều thí sinh qua các mùa thi, nay xin được trải lòng cùng bạn đọc.

Giờ đây, chúng tôi chợt nhớ tới câu danh ngôn của đại thi hào William A.Ward: “Người thầy trung bình chỉ biết nói, người thầy giỏi biết cách giải thích, người thầy xuất chúng biết cách minh họa, còn người thầy vĩ đại biết cách truyền cảm hứng”.

Và chúng tôi thực sự hi vọng rằng cuốn sách này sẽ trở thành nguồn cảm hứng cũng như tư liệu bổ ích cho các bạn thí sinh trong kì thi Đại học sắp tới.

**Thân mến**

**Các tác giả**

# MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC

## ○ CHUYÊN ĐỀ 1

# BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

*Chắc hẳn bạn đọc sẽ đồng ý rằng nhiều khi, nếu ta có thể giải quyết được những vấn đề khó thì điều đó sẽ góp phần củng cố niềm tin cũng như sự tự tin khi giải quyết những vấn đề bình thường. Đây chính là lí do khiến chúng tôi chọn phần mở đầu là chuyên đề “Bất đẳng thức và cực trị” chứ không phải chuyên đề về hàm số như nhiều sách tham khảo cùng loại khác.*

Nhắc đến “bất đẳng thức”, đa số giáo viên và học sinh đều lắc đầu ngao ngán. Cũng đúng thôi, khi mà không ít giáo viên hiện nay không làm nổi câu bất đẳng thức ở đề thi đại học thì học sinh “đọc đề xong, giao tay hàng” âu cũng là điều dễ hiểu. Xin chia sẻ một chút, trước đây, chúng tôi cũng như các bạn, đến mùa thi cũng phải cố gắng “chạy sô”, đi học đủ hết các trung tâm uy tín, đôi khi chỉ để “bằng bạn bằng bè”. Nhưng có một điều thú vị mà chúng tôi nhận ra, đó là những “bậc thầy luyện thi” đều có một điểm chung, họ thường tự nhận mình không giỏi bất đẳng thức và từ chối dạy phần này. Cũng có vài vị mà chúng tôi biết kiến thức tuy hạn chế nhưng lại tuyên bố rất hùng hồn “Tôi có dạy các em cũng không làm được, thôi thì không dạy nữa”. Lại có một số ít “bậc thầy” cao thủ hơn, đó là thủ sẵn, hay nói cách khác là học thuộc vài bài bất đẳng thức rồi đi dạy lại cho học sinh mà không hiểu được vì sao lời giải lại như vậy. Và thế là chỉ còn rất ít người giải thích, hệ thống được các dạng bất đẳng thức và định hướng cho học sinh con đường tự nhiên nhất để đến được với lời giải.

Thực ra, nghệ thuật giảng dạy chính là cách biến những vấn đề phức tạp trở nên đơn giản. Và chúng tôi là những người yêu nghệ thuật. Cuộc hành trình khám phá chủ đề “Bất đẳng thức và cực trị luyện thi đại học” sẽ bắt đầu ngay sau đây.

Dựa vào kinh nghiệm tổng hợp và phân tích nhiều năm, chúng tôi có thể khẳng định gần như chắc chắn rằng: bài bất đẳng thức (hoặc cực trị) trong các kì thi đại học luôn luôn chỉ rơi vào một trong hai dạng: sử dụng ý tưởng “giảm biến” hoặc sử dụng trực tiếp các bất đẳng thức cổ điển.

Trước khi đi vào chi tiết hai dạng toán này thì ta cần “trang bị” cho mình những công cụ thông dụng nhất trong giải bất đẳng thức, tìm cực trị (lưu ý khi đi thi, các bạn học sinh được áp dụng mà không cần chứng minh lại các kết quả này).

- Bất đẳng thức Côsi cho hai số và ba số với các dạng:

1) Với  $x, y \geq 0$  thì  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  và  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ .

2) Với  $x, y \in \mathbb{R}$  thì  $(x + y)^2 \geq 4xy$  và  $xy \leq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2$

3) Với  $x, y, z \geq 0$  thì  $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$  và  $xyz \leq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3$ .

- Bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho ba số.

Với  $a, b, c, x, y, z$  bất kì, ta luôn có:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

Đây còn gọi là dạng “nguyên thủy” của bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

- Bất đẳng thức cộng mẫu số (hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Bunhiacôpxki).

Với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $x, y, z > 0$ , ta luôn có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a + b + c)^2}{x + y + z}$$

Có nhiều giáo viên gọi đây là bất đẳng thức Schwarz (Svac). Nhưng thực ra, cách gọi chính xác theo chuẩn quốc tế phải là Cauchy Schwarz. Tuy nhiên, do tính mục đích của cuốn sách này nên chúng tôi sẽ sử dụng cách gọi đơn giản và dễ nhớ là bất đẳng thức cộng mẫu số.

*\* Độc giả có thể tham khảo thêm về lịch sử các bất đẳng thức trên trong hai cuốn sách cùng bộ là*

- *Sử dụng phương pháp Cauchy Schwarz để chứng minh bất đẳng thức.*

- *Sử dụng phương pháp AM-GM để chứng minh bất đẳng thức.*

(Tác giả: Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh, Nhà xuất bản DHS&P).

Chúng tôi sẽ không làm mất thời gian của bạn đọc bằng những chứng minh cho các bất đẳng thức “cơ bản” trên, điều đã quá “quen thuộc” và “trần ngập” ở các sách tham khảo khác. Để nhớ và hiểu được ứng dụng của những kết quả trên, chúng ta sẽ bước vào phần bài tập minh họa cho từng dạng.



## Dạng 1. Những bài toán sử dụng ý tưởng “giảm biến”.

Thế giới bất đẳng thức tồn tại một quy luật rất quan trọng, đó là “Trong một dạng cụ thể thì những bất đẳng thức càng nhiều biến càng khó”. Điều này cũng đồng nghĩa với việc khẳng định “Bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn nếu ta đưa được một bất đẳng thức nhiều biến về dạng ít biến hơn”.

Sau đây, nhóm tác giả sẽ chia sẻ với độc giả hướng giải quyết khi gặp phải dạng toán này, mấu chốt chính là: “*Quan sát, chọn ẩn, tìm điều kiện cho ẩn, và... quy ẩn*”. Cụ thể, chúng ta cần làm ba bước như sau :

- Bước 1. Quan sát đề bài và các dữ kiện đã cho để xem bài toán có khả thi để đưa được về một biến hay không, nếu có thì biến đó phải là gì.
- Bước 2. Sau khi đã dự đoán được, chúng ta sẽ khai thác dữ kiện của bài toán, kết hợp với các bất đẳng thức quen thuộc để thiết lập điều kiện cho biến đó. Lưu ý: Bất đẳng thức thường dùng nhất ở bước này là bất đẳng thức Côsi.
- Bước 3. Sử dụng hằng đẳng thức, bất đẳng thức phụ và những biến đổi tương đương để quy những đại lượng cần đánh giá theo ẩn đó (chúng tôi thường gọi vui là “quy ẩn”).

**Bài tập 1.** Cho hai số thực không âm  $x, y$  thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$$

(Trích đề thi Đại học khối D năm 2009)

### Lời giải.

Với những bài toán đối xứng chứa hai biến  $x$  và  $y$  (tức vai trò của  $x$  và  $y$  là như nhau), thì cách giải quyết tự nhiên và nhanh chóng nhất chính là quy chúng về một biến để có thể kết thúc bằng việc khảo sát hàm một biến hoặc sử dụng những đánh giá đơn giản.

Ở ví dụ này, dễ thấy với  $x + y = 1$  thì,

$$\begin{aligned} S &= 12(x^3 + y^3) + 16x^2y^2 + 34xy = 12(x + y)[x^2 - xy + y^2] + 16x^2y^2 + 34xy \\ &= 12(x + y)[(x + y)^2 - 3xy] + 16x^2y^2 + 34xy = 12(1 - 3xy) + 16x^2y^2 + 34xy \\ &= 16.(xy)^2 - 2xy + 12 = \left(4xy - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16}. \end{aligned}$$

Từ đó, ta có ngay  $S \geq \frac{191}{16}$ .

Dấu đẳng thức ở đây xảy ra khi:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 4xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}, \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) \\ (x,y) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}, \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) \end{cases}$$

Do đẳng thức có thể xảy ra nên ta kết luận được giá trị nhỏ nhất của  $S$  là  $\frac{191}{16}$ .

Mặt khác, do  $x, y$  không âm và  $x+y=1$  nên ta có  $0 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ .

Suy ra:  $-\frac{1}{4} \leq 4xy - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}$

Từ đó dẫn đến:  $S = \left(4xy - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{191}{16} = \frac{25}{2}$

Dấu đẳng thức có thể xảy ra khi  $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$ .

Vậy ta kết luận được giá trị lớn nhất của  $S$  là  $\frac{25}{2}$ .

**Nhận xét.** Ta cũng có thể quy bài toán về việc khảo sát, tìm cực trị của hàm một biến  $S = f(t) = 16t^2 - 2t + 12$  trên đoạn  $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ ,  $t = xy$ .

**Bài tập 2.** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $xy \neq 0$  và  $xy(x+y) = x^2 - xy + y^2$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$

(Trích đề thi Đại học khối A năm 2006)

### Hướng dẫn giải

Bài toán này có khá nhiều cách giải, nhất là với những học sinh chuyên toán thì họ có nhiều phương pháp, kinh nghiệm hay nói vui là những “vũ khí hạng nặng” để giải quyết vấn đề. Thế nhưng câu hỏi đặt ra là làm thế nào để một học sinh trung bình khá (thiếu kinh nghiệm, thiếu công cụ, thiếu kỹ năng) cũng có thể tìm ra một lời giải thật đơn giản, tự nhiên cho nó?

Câu trả lời thực ra đã được đề cập ở ngay phần lời dẫn ở đầu chương, đó là: “*Những bài toán đối xứng hai biến thường quy được về dạng  $S, P$  (tức tổng – tích) và sẽ trở nên thật sự đơn giản nếu chỉ còn một biến*”.

Hãy chiêm nghiệm câu nói trên và đối chiếu với lời giải sau.

### Lời giải.

Nếu đặt  $S = x + y$  và  $P = xy$  thì từ giả thiết  $xy(x + y) = x^2 - xy + y^2$ , ta suy ra ngay  $P.S = S^2 - 3P$ . Để thực hiện mục tiêu quy bài toán về một biến, ta cần tìm ra một phép thế  $P$  theo  $S$  hoặc  $S$  theo  $P$ .

Từ hệ thức  $P.S = S^2 - 3P$ , ta thấy ngay nếu rút  $P$  theo  $S$  sẽ đơn giản hơn rất nhiều.

$$\text{Thật vậy, } P.S = S^2 - 3P \Rightarrow P(3 + S) = S^2 \Rightarrow P = \frac{S^2}{3 + S}.$$

Mặt khác, kết hợp với giả thiết ta suy ra

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{x^3 y^3} = \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(xy)^3} \\ &= \frac{(x + y).xy(x + y)}{(xy)^3} = \frac{S^2}{P^2} = \frac{S^2}{\left(\frac{S^2}{3 + S}\right)^2} = \frac{(3 + S)^2}{S^2} = \left(1 + \frac{3}{S}\right)^2 \end{aligned}$$

Vậy để tìm giá trị lớn nhất của  $A$ , ta chỉ cần tìm giá trị nhỏ nhất của  $S$  tức giá trị nhỏ nhất của  $x + y$ .

Từ giả thiết  $xy(x + y) = x^2 - xy + y^2$ , sử dụng bất đẳng thức Côsi bộ hai số,

$$xy(x + y) = x^2 + y^2 - xy \geq 2xy - xy = xy$$

$$\text{Hay } xy(x + y) \geq xy \Rightarrow x + y \geq 1 \Rightarrow S \geq 1$$

$$\text{Suy ra } A = \left(1 + \frac{3}{S}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{3}{1}\right)^2 = 16.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x^2 - xy + y^2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy ta kết luận được giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$  là 16,

đạt được khi và chỉ khi  $x = y = \frac{1}{2}$ .

**\*Nhận xét.** Đây không phải cách làm ngắn nhất nhưng là cách làm tự nhiên và “dễ nghĩ ra” nhất, bởi kể cả với những bài toán tương tự, bên ngoài khác một chút ta vẫn hoàn toàn sử dụng được ý tưởng “định hướng tổng tích – quy về một biến” này.



**Bài tập 3.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x(x + y + z) = 3yz$ .

Chứng minh rằng

$$(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x) \leq 5(y + z)^3$$

(Trích đề thi Đại học khối A năm 2009)

### Hướng dẫn giải

Đây được coi là bài bất đẳng thức “khó nhất” trong các kì thi đại học ở nước ta từ trước đến nay. Chúng ta hãy thử xem liệu lần này, ý tưởng “giảm biến” còn phát huy tác dụng hay không nhé.

### Lời giải.

Do tính đồng bậc của bài toán nên ta hoàn toàn có thể giả sử  $x + y + z = 3$ .

- Khi đó, giả thiết của bài toán sẽ trở thành  $x = yz$ . Nhận xét rằng bất đẳng thức đề bài đối xứng với  $y$  và  $z$ . Quan sát cả điều kiện  $x = yz$ , một cách tự nhiên ta sẽ dự đoán rằng nếu muốn quy bài toán về một ẩn thì ẩn đó chỉ có thể là  $x$  hoặc  $yz$ . Do  $x = yz$  nên thực ra ta chọn ẩn nào cũng là tương đương. Tuy nhiên, ta sẽ chọn  $x$  với lí do nhìn  $x$  “nhỏ gọn”, “dễ viết” hơn so với  $yz$ .

- Chọn được ẩn rồi, ta sẽ tiến hành bước thứ hai, đó là khai thác các dữ kiện của bài toán, kết hợp với các bất đẳng thức quen thuộc để thiết lập điều kiện cho ẩn.

Để ý rằng, sử dụng bất đẳng thức Côsi bộ hai số, ta có

$$x = yz \leq \left( \frac{x + y}{2} \right)^2 = \frac{(3 - x)^2}{4}$$

$$\text{Từ đó suy ra } x \leq \frac{(3 - x)^2}{4} \Leftrightarrow (x - 1)(x - 9) \geq 0 \quad (1)$$

Mặt khác,  $x, y, z$  là các số thực dương và  $x + y + z = 3$  nên hiển nhiên

$$x < 3 < 9. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta đã thiết lập được điều kiện cho ẩn, đó là  $0 < x \leq 1$ .

- Bước 3 là sử dụng hằng đẳng thức và những biến đổi tương đương để quy những đại lượng trong biểu thức theo ẩn đó.

Cụ thể, ở bài toán này, trước hết ta sẽ “xử lí” đại lượng  $(x + y)^3 + (x + z)^3$ .

Bằng cách sử dụng hằng đẳng thức  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$  với  $a = x + y$ ,  $b = x + z$  kết hợp giả thiết  $x = yz$ , ta có

$$\begin{aligned} (x + y)^3 + (x + z)^3 &= (2x + y + z)^3 - 3(x + y)(x + z)(2x + y + z) \\ &= (2x + y + z)^3 - 3[x(x + y + z) + yz](2x + y + z) \\ &= (x + 3)^3 - 3(3x + yz)(x + 3) = (x + 3)^3 - 12x(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác, } (x+y)(y+z)(z+x) &= (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \\ &= (x+y+z)[x(y+z)+yz] - xyz = 3[x(3-x)+x] - x^2 = 12x - 4x^2 \end{aligned}$$

$$\text{Và } 5(y+z)^3 = 5(3-x)^3$$

Suy ra bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(x+3)^3 - 12x(x+3) + 3(12x - 4x^2) \leq 5(3-x)^3$$

Sau khi khai triển và phân tích thành nhân tử, ta được

$$(x-6)(x-3)(x-1) \leq 0$$

(hiển nhiên đúng với  $0 < x \leq 1$ ).

Bài toán được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z$ .

**\* Nhận xét.** Trên các diễn đàn toán học Việt Nam, tồn tại khoảng hơn 10 lời giải cho bài toán này. Tuy nhiên, đa số các lời giải có ý tưởng xuất phát thiếu tự nhiên, thường chỉ dựa vào những kỹ năng của một số cá nhân giàu kinh nghiệm. Trên đây, nhóm tác giả đã trình bày chi tiết một lời giải tự nhiên và phù hợp với mọi đối tượng học sinh.

## **Dạng 2. Những bài toán sử dụng trực tiếp các bất đẳng thức cổ điển.**

Bất đẳng thức cổ điển là mảng đề tài rộng lớn và phong phú, gồm nhiều bất đẳng thức như Côsi, Bunhiacôpxki, Trêbusép, Mincôpxki,....

Tuy nhiên, trong chương trình phổ thông và thi đại học, ta thường chỉ sử dụng hai dạng, đó là bất đẳng thức cộng mẫu số (hay còn gọi là Cauchy Schwarz) và bất đẳng thức Côsi (hay còn gọi là AM-GM).

**Bài tập 1.** Cho  $x, y, z > 0$  và  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+z+x} + \frac{1}{2z+x+y}$$

(Trích đề thi Đại học khối D năm 2007)

**Lời giải.**

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức cộng mẫu số dạng  $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ , ta có

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right]$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right].$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{2y+z+x} \leq \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2y} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) \right]; \quad \frac{1}{2z+x+y} \leq \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right]$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, kết hợp với giả thiết  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$ ,

ta suy ra  $P \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = \frac{4}{3}$ .

**Bài tập 2.** Cho  $x, y, z > 0$  và  $xyz = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

(Trích đề thi Đại học khối A năm 2007)

**Lời giải.**

Với những bài toán ba biến mà  $x, y, z > 0$ , dấu bằng thường chỉ xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z$ . Do đó, ở bài toán này, kết hợp điều kiện  $xyz = 1$ , ta dự đoán  $\min P = 2$  khi  $x = y = z = 1$ . Sau đây, ta sẽ chứng minh nhận định này, tức

$$\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \geq 2$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} \geq \frac{x^2 \cdot 2\sqrt{yz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} = \frac{x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} = \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}$$

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng lại, ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh  $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$  với  $a = x\sqrt{x}$ ,  $b = y\sqrt{y}$ ,  $c = z\sqrt{z}$ .

Quả thực, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức cộng mẫu số.

$$\text{Đề ý rằng } \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)},$$

suy ra

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{2}{3} \geq \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} = 1$$

Vậy ta kết luận được  $\min P = 2$ . Dấu đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ .



**Bài tập 3.** Cho  $a, b, c, d$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

**Lời giải.**

Sử dụng bất đẳng thức Côsi dạng  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ , ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c+d)}} \geq \frac{a}{\frac{a+b+c+d}{2}} = \frac{2a}{a+b+c+d}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} &\geq \frac{2b}{a+b+c+d}, \quad \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c+d}, \\ \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} &\geq \frac{2d}{a+b+c+d}. \end{aligned}$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} a = b + c + d \\ b = c + d + a \\ c = d + a + b \\ d = a + b + c \end{cases}$$

Thế nhưng, hệ này không có nghiệm dương. Và vì vậy đẳng thức không thể xảy ra được. Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

**Bài tập 4.** Cho  $x, y, z$  là ba số thực dương thay đổi.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left( \frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left( \frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right)$$

(Trích đề thi Đại học khối B năm 2007)

**Hướng dẫn giải**

Trước hết, ta sẽ phân tích bài toán. Dự đoán dấu bằng sẽ xảy ra khi  $x = y = z$ .

$$\text{Khi đó: } P = x \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left( \frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left( \frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right) = \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{x}$$

$$= 3 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \right) \geq 3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \frac{9}{2}.$$

Ở đây, dấu bằng xảy ra khi  $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow x = 1$ .

Vậy ta dự đoán  $\min P$  đạt được khi  $x = y = z = 1$ .

Từ đó, dẫn đến lời giải sau.

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Đề ý rằng: } P &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{xyz} \right) \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \left( 1 + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyz} \right). \end{aligned}$$

Tới đây, sử dụng liên tiếp bất đẳng thức Côsi bộ ba số (sao cho dấu bằng được bảo toàn), ta có

$$P = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \left( 1 + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyz} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 9 \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 y^2 z^2}} = \frac{9}{2}$$

**Bài tập 5.** Xét một hình vuông và một hình tam giác. Nếu chúng có diện tích bằng nhau thì hình nào có chu vi lớn hơn?

**Lời giải.**

Ta chứng minh chu vi của tam giác không nhỏ hơn chu vi của hình vuông.

Gọi độ dài ba cạnh tam giác là  $a, b, c$ , đường cao ứng với cạnh  $a$  là  $h_a$ .

Gọi độ dài cạnh hình vuông là  $x$ . Ta cần chứng minh

$$a + b + c \geq 4x$$

với  $\frac{ah_a}{2} = x^2$ , hay  $ah_a = 2x^2$  (do theo giả thiết thì hai hình này có diện tích bằng nhau).

Áp dụng định lí về quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu, dễ thấy  $b \geq h_a$ ,  $c \geq h_a$  nên suy ra  $b + c \geq 2h_a$ .

Bài toán quy về chứng minh:  $a + 2h_a \geq 4x$ .

Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Côsi, ta có

$$a + 2h_a \geq 2\sqrt{a \cdot 2h_a} = 2\sqrt{2ah_a} = 2\sqrt{2 \cdot 2x^2} = 4x.$$

Đây chính là điều phải chứng minh. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

# SỐ PHỨC.

Với tính ứng dụng cao cho nhiều ngành khoa học, số phức đã được đưa vào giảng dạy ở bậc phổ thông của nhiều nước trên thế giới, tuy nhiên nó lại là nội dung mới đối với học sinh phổ thông của nước ta. Vài năm gần đây, số phức bắt đầu xuất hiện trong những đề thi đại học và được coi là một trong những câu “gỡ điểm”. Chính vì thế, để đảm bảo sự “gỡ điểm” đó một cách chắc chắn trong chuyên đề này, chúng tôi sẽ đề cập đầy đủ các dạng toán liên quan đến số phức bao gồm:

- Giải phương trình phức (tìm phần thực, phần ảo của một số phức), dựa trên kiến thức về  $\bar{z}$  và  $|z|$ .
- Tìm tập hợp điểm trên mặt phẳng phức.
- Tính căn bậc hai của một số phức
- Giải phương trình bậc hai ẩn phức.
- Bất đẳng thức và cực trị liên quan đến số phức.
- Argument của một số phức - dạng lượng giác của số phức đó.
- Cuối cùng là “Ứng dụng của công thức Moivre”.

**Bài tập 1.** Tìm số phức  $z$ , biết  $z^2 + |z| = 0$

**Lời giải.**

Giả sử  $z = x + yi$  với  $x, y \in \mathbb{R}$ , khi đó

$$z^2 + |z| = 0 \Leftrightarrow (x + yi)^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} \right) + 2xyi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + |y| = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + |x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |y|(1 - |y|) = 0 \\ y = 0 \\ |x|(1 + |x|) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ |y| = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{do } |x| + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 0, y = 1 \\ x = 0, y = -1 \\ y = 0, x = 0 \end{cases}$$

Vậy có ba số phức thoả điều kiện là  $z = 0, z = -i, z = i$ .

**Bài tập 2.** Xác định phần thực, phần ảo của số phức  $z$  biết

$$\bar{z} = (1+i)^{2012}$$

**Lời giải.**

Để ý rằng  $(1+i)^2 = 1+i^2+2i = 2i$ . Suy ra

$$\bar{z} = (1+i)^{2012} = [(1+i)^2]^{1006} = (2i)^{1006} = 2^{1006} \cdot i^{1006}$$

Mặt khác,  $i^{1006} = (i^2)^{503} = (-1)^{503} = -1$ .

Từ đó, dễ thấy  $\bar{z} = -2^{2006} \Rightarrow z = -2^{2006} = -2^{2006} + 0i$

Vậy phần thực của số phức  $z$  là  $-2^{2006}$ , phần ảo của  $z$  bằng 0.

**\* Nhận xét:** Bạn đọc hãy thử giải bài toán này bằng cách đưa  $\bar{z}$  về dạng lượng giác, tiếp đó sử dụng công thức Moivre (Moa vơ rơ) và cuối cùng, so sánh hai cách giải để thấy được với cách làm trên, ta đã tiết kiệm được nhiều công đoạn tính toán như thế nào.

**Bài tập 3.** Giải phương trình sau (trên tập số phức):

$$(z + 2011 - i)^2 - 4(z + 2011 - i) + 8 = 0$$

**Lời giải.**

Đặt  $t = z + 2011 - i$ , khi đó phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$t^2 - 4t + 8 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)^2 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} t = 2 + 2i \\ t = 2 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + 2011 - i = 2 + 2i \\ z + 2011 - i = 2 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2009 + 3i \\ z = -2009 - i \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là  $\begin{cases} z = -2009 + 3i \\ z = -2009 - i \end{cases}$ .

**Bài tập 4.** Giải phương trình:  $\bar{z}^2 + 2011 = 0$

**Lời giải.**

Đặt  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

Khi đó,  $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + b^2 \cdot i^2 + 2ab \cdot i = a^2 - b^2 + 2abi$



Suy ra  $\overline{z^2} = a^2 - b^2 - 2ab.i$ . Phương trình đã cho trở thành

$$a^2 - b^2 - 2ab.i + 2011 = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2011 - 2ab.i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2011 = 0 \\ -2ab = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy ở hệ trên,  $b$  không thể bằng 0 (sẽ dẫn đến vô lí vì  $a^2 = -2011$ ).

Vậy chỉ có thể xảy ra trường hợp  $\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm\sqrt{2011} \end{cases}$ .

Vậy số phức cần tìm là  $z = \pm\sqrt{2011}.i$

\* **Nhận xét:** Có một điều khá thú vị nếu bạn đọc đề ý đó là

Với  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thì  $\overline{z^2} = (\overline{z})^2 = a^2 - b^2 - 2ab.i$

**Bài tập 5.** Tìm phần thực của số phức  $z = (1 + i)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  thỏa mãn phương trình:  $\log_4(n - 3) + \log_4(n + 9) = 3$ .

*Lời giải.*

Điều kiện:  $n > 3, n \in \mathbb{N}$

Phương trình

$$\log_4(n - 3) + \log_4(n + 9) = 3 \Leftrightarrow \log_4(n - 3)(n + 9) = 3$$

$$(n - 3)(n + 9) = 4^3 \Leftrightarrow n^2 + 6n - 9 = 0 \Leftrightarrow n = 7 \text{ (do : } n > 3)$$

$$z = (1 + i)^7 = (1 + i) \cdot \left[ (1 + i)^2 \right]^3 = (1 + i) \cdot (2i)^3 = (1 + i) \cdot (-8i) = 8 - 8i$$

Vậy phần thực của số phức  $z$  là 8.

**Bài tập 6.** Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = |\overline{z} - 2 + 3i|$ .

*Lời giải.*

Gọi số phức  $z$  cần tìm là  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

Từ đó, suy ra ngay  $\overline{z} = x - yi$ .

*Lưu ý rằng việc xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức đồng nghĩa với việc thiết lập một biểu thức quan hệ giữa  $x$  và  $y$  dựa vào các dữ kiện từ bài toán.*

Cụ thể ở đây, ta có

$$|z| = |\bar{z} - 2 + 3i| \Leftrightarrow |x + yi| = |x - yi - 2 + 3i|$$

$$\Leftrightarrow |x + yi| = |(x-2) + (3-y)i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-2)^2 + (3-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x + 6y = 13$$

Vậy tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = |\bar{z} - 2 + 3i|$  là đường thẳng  $4x + 6y = 13$ .

**Bài tập 7.** Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

1)  $8 + 6i$

2)  $33 - 56i$

**Giải:**

1) Giả sử  $z = x + yi$  với  $x, y \in \mathbb{R}$  là một căn bậc hai của  $8 + 6i$  tức là

$$(x + iy)^2 = 8 + 6i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 8 + 6i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Vì  $b = 6 > 0$  nên  $x, y$  cùng dấu do đó  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$ .

Vậy  $8 + 6i$  có 2 căn bậc hai là  $-3 - i$  và  $3 + i$ .

2) Giả sử  $z = x + yi$  với  $x, y \in \mathbb{R}$  là một căn bậc hai của  $33 - 56i$  tức là

$$(x + iy)^2 = 33 - 56i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 33 - 56i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ 2xy = -56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 49 \\ y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 7 \\ y = \pm 4 \end{cases}$$

Vì  $b = -56 < 0$  nên  $x, y$  trái dấu do đó  $\begin{cases} x = 7 \\ y = -4 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = -7 \\ y = 4 \end{cases}$

Vậy  $33 - 56i$  có 2 căn bậc hai là  $-7 + 4i$  và  $7 - 4i$ .

**Bài tập 8.** Giải phương trình:  $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\Delta = (1 - 3i)^2 + 8(1 + i) = 2i = 1 + i^2 + 2i = (1 + i)^2$ .

Từ đó suy ra phương trình có hai nghiệm là

$$z_1 = \frac{1}{2}[-1 + 3i + (1 + i)] = 2i; \quad z_2 = \frac{1}{2}[-1 + 3i - (1 + i)] = -1 + i$$

**Bài tập 9.** Giải phương trình sau trên tập số phức:  $\frac{4z - 3 - 7i}{z - i} = z - 2i$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $z \neq i$

Phương trình

$$\Leftrightarrow 4z - 3 - 7i = (z - i)(z - 2i) \Leftrightarrow z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 7i = 0$$

Ta có:  $\Delta = (4 + 3i)^2 - 4(1 + 7i) = 3 - 4i = 2^2 - 4i + i^2 = (2 - i)^2$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{4 + 3i + (2 - i)}{2} = 3 + i; z_2 = \frac{4 + 3i - (2 - i)}{2} = 1 + 2i.$$

Kết hợp điều kiện, ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$z_1 = 3 + i, z_2 = 1 + 2i.$$

**Bài tập 10.** Tìm các số thực  $a, b$  để phương trình (ẩn  $z$ ) sau nhận  $z = 1 + i$  làm một nghiệm:  $z^2 + az + b = 0$ .

**Lời giải.**

Đề  $1 + i$  là một nghiệm của phương trình  $z^2 + az + b = 0$ , ta cần có

$$(1 + i)^2 + a(1 + i) + b = 0 \Leftrightarrow a + b + (2 + a)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy hai số thực cần tìm là  $(a, b) = (-2, 2)$ .

**Bài tập 11.** Cho số phức  $z = \frac{i - m}{1 - m(m - 2i)}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực  $k$  sao cho tồn tại  $m$  để  $|z - 1| \leq k$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $z = \frac{i - m}{-i^2 + 2mi - m^2} = \frac{-1}{i - m} \Rightarrow z - 1 = \frac{1 - m + i}{m - i}$

$$|z - 1| = \frac{|1 - m + i|}{|m - i|} = \sqrt{\frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow |z - 1| \leq k \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 1} \leq k^2 \end{cases}.$$

Xét hàm số  $f(m) = \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 1}$

Ta có:  $f'(m) = \frac{2(m^2 - m - 1)}{(m^2 + 1)^2} \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Lập bảng biến thiên ta có  $\min f(m) = f\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$  Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow k^2 \geq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow k \geq \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

Vậy  $k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  là giá trị phải tìm.

**Bài tập 12.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 3 + 4i| = 4$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z|$ .

**Lời giải.**

**Cách 1.** Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{aligned} ||z| - |3 - 4i|| &\leq |z - (3 - 4i)| = 4 \Rightarrow -4 + |3 - 4i| \leq |z| \leq 4 + |3 - 4i| \\ &\Rightarrow 1 \leq |z| \leq 9. \end{aligned}$$

- $|z| = 1 \Leftrightarrow z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \Rightarrow \min |z| = 1$

- $|z| = 9 \Leftrightarrow z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i \Rightarrow \max |z| = 9.$

**Cách 2.** Đặt  $z = x + iy \Rightarrow z - 3 + 4i = (x - 3) + (y + 4)i$

Nên từ giả thiết  $\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(3x - 4y) + 9 = 0 \quad (*)$$

Do  $(3x - 4y)^2 \leq 25(x^2 + y^2) \Rightarrow -5\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3x - 4y \leq 5\sqrt{x^2 + y^2}$

Nên từ (\*) ta có: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10\sqrt{x^2 + y^2} + 9 \leq 0 \\ x^2 + y^2 + 10\sqrt{x^2 + y^2} + 9 \geq 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 9 \Rightarrow 1 \leq |z| \leq 9.$$

Tương tự như trên:  $\min |z| = 1$  và  $\max |z| = 9$ .

**\*Chú ý:** Ta có thể giải bài toán theo cách sau

Từ  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 16 \Rightarrow \exists \alpha \in [0; 2\pi]$  sao cho:

$x = 3 + 4 \sin \alpha; y = -4 + 4 \cos \alpha$ . Khi đó:

$$|z|^2 = (3 + 4 \sin \alpha)^2 + (-4 + 4 \cos \alpha)^2 = 41 + 8(3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha)$$

$$\text{Do } -5 \leq 3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha \leq 5 \Rightarrow 1 \leq |z|^2 \leq 81 \Rightarrow 1 \leq |z| \leq 9.$$

**Bài tập 13.** Tìm một argument của số phức  $z = 1 - \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$z = 1 - \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} + 2i \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = 2 \sin \frac{\pi}{8} \left( \sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \right)$$

Tuy nhiên, lưu ý là dạng lượng giác của một số phức  $z$  là  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  chứ không phải  $r(\sin \theta + i \cos \theta)$ . Vậy nên nếu ở đây, kết luận một argument của  $z$  là  $\frac{\pi}{8}$  thì ta đã mắc phải một trong những “sai lầm thường gặp khi giải toán”.

Để thu được lời giải đúng, ta sẽ tiếp tục biến đổi như sau,

$$\begin{aligned} z &= 2 \sin \frac{\pi}{8} \left( \sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{8} \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{8} \left( \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

**\*Nhận xét:** Ý tưởng chủ đạo ở đây là chúng ta đã sử dụng công thức “phụ chéo” để hoán đổi dạng  $r(\sin \theta + i \cos \theta)$  về  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  một cách khéo léo.

**Bài tập 14.** Biểu diễn số phức  $z = \tan \frac{5\pi}{8} + i$  dưới dạng lượng giác.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } z = \tan \frac{5\pi}{8} + i = \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{8}} \left( \sin \frac{5\pi}{8} + i \cos \frac{5\pi}{8} \right)$$

Lưu ý rằng một số phức  $z$  có dạng lượng giác là  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  với điều kiện  $r > 0$ .

Vậy nên ở bài toán này,  $\frac{1}{\cos\frac{5\pi}{8}}\left(\sin\frac{5\pi}{8} + i\cos\frac{5\pi}{8}\right)$  không phải dạng

lượng giác của  $z$  cần tìm bởi nếu thế,  $r = \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{8}} < 0$  (vô lí).

Sau đây là lời giải đúng,

$$\begin{aligned} z = \tan\frac{5\pi}{8} + i &= -\frac{1}{\cos\frac{5\pi}{8}}\left(-\sin\frac{5\pi}{8} - i\cos\frac{5\pi}{8}\right) \\ &= \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{8}}\left(-\sin\frac{5\pi}{8} - i\cos\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{8}}\left(\sin\frac{13\pi}{8} + i\cos\frac{13\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

(do  $\sin\alpha = -\sin(\pi + \alpha)$  và  $\cos\alpha = -\cos(\pi + \alpha)$ ).

Vậy số phức  $z$  cần tìm được biểu diễn dưới dạng lượng giác là

$$z = \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{8}}\left(\sin\frac{13\pi}{8} + i\cos\frac{13\pi}{8}\right)$$

**Bài tập 15.** Tìm dạng lượng giác của số phức  $z = \left(\frac{4i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6$ .

**Lời giải.**

Với dạng toán này, điều ta cần làm là trục căn thức ở mẫu để đưa số phức  $z$  về dạng đại số là  $a + bi$ , từ đó chuyển sang dạng lượng giác.

$$\begin{aligned} \frac{4i}{1+i\sqrt{3}} &= \frac{4i(1-i\sqrt{3})}{1^2 - (i\sqrt{3})^2} = \frac{4i(1-i\sqrt{3})}{4} = \sqrt{3} + i \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Sử dụng công thức Moivre,

$$z = \left(\frac{4i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6 = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Vậy dạng lượng giác của số phức  $z$  cần tìm là  $z = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi)$ .

\* **Nhận xét:** Ý nghĩa của công thức Moivre trong giải toán đó chính là hạ bậc (từ đó rút gọn) một biểu thức phức.

**Bài tập 16.** Với số nguyên dương  $n$  nào thì số phức  $z = \left( \frac{\sqrt{3}-i}{1-\sqrt{3}i} \right)^n$  là số thuần thực ?

**Lời giải.**

$$\text{Đề ý rằng } \frac{\sqrt{3}-i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+\sqrt{3}i)}{1-3i^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

Từ đó, sử dụng công thức Moivre, ta có

$$\left( \frac{\sqrt{3}-i}{1-\sqrt{3}i} \right)^n = \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6}$$

Để thấy số phức  $z$  là số thuần thực (tức phần ảo bằng 0) khi và chỉ khi

$$\sin \frac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow n = 6k \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

## ○ CHUYÊN ĐỀ 3

# PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC.

### I. Công thức lượng giác cơ bản.

a) Công thức cung nhân đôi, công thức hạ bậc, công thức cung nhân ba.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha .$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} ; \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha ; \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha .$$

b) Công thức cộng cung

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

c) Công thức biến tổng thành tích.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

d) Công thức biến tích thành tổng.

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

e) Một số công thức hệ quả thông dụng khác.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = \frac{5 + 3 \cos 4\alpha}{8}$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}$$

## II. Các phương trình lượng giác cơ bản.

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

\* Một số phương trình đặc biệt (thường gặp):

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) ; \cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

### III. Cos đối, sin bù, phụ chéo.

Đây có thể coi là câu thần chú “đơn giản, dễ nhớ” nhất trong lượng giác nhưng nó lại đóng vai trò là một trong những nhân tố cần thiết, hiệu quả nhất khi giải phương trình lượng giác.

*Cos đối* tức là cos của hai góc đối nhau thì bằng nhau, tức  $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ .

*Sin bù* tức là sin của hai góc bù nhau thì bằng nhau, tức  $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$

*Phụ chéo* tức là với hai góc phụ nhau (có tổng bằng  $90^\circ$ ) thì sin góc này bằng cos góc kia và ngược lại, tức:

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right); \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Ta hãy thử đến với ví dụ nhỏ sau đây để thấy được hiệu quả của “câu thần chú” này.

\* Giải phương trình lượng giác:  $\sin x = \cos \alpha$ .

Rõ ràng, ở phần II, ta chỉ biết cách giải cho phương trình  $\sin x = \sin \alpha$ , vậy còn phương trình  $\sin x = \cos \alpha$  thì sao?

Câu trả lời ở đây chính là “phụ chéo”, bởi

$$\begin{aligned} \sin x = \cos \alpha &\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Qua ví dụ này, chắc hẳn nếu trong bài thi gặp những phương trình dạng như  $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ , các bạn học sinh sẽ không còn cảm thấy lúng túng nữa.

Sau đây là một số công thức tương tự khá thông dụng khác:

$$\sin \alpha = -\sin(-\alpha) ; \cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha ; \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

$$\tan \alpha = -\tan(-\alpha) ; \cot \alpha = -\cot(-\alpha)$$

Sau khi nắm vững được những kiến thức ở trên, có thể nói độc giả đã tự trang bị được cho mình những “hành trang”, những công cụ cần thiết nhất để bước vào con đường chinh phục thế giới mang tên phương trình lượng giác.

Mấu chốt của việc giải phương trình lượng giác trong đề thi đại học là sử dụng các công thức và kiến thức cơ bản (trong mục I và mục III) để đưa phương trình đã cho về một trong hai dạng: phương trình tích hoặc phương trình một ẩn bậc 2 hoặc 3. Từ đó, ta sẽ quy bài toán về việc giải những phương trình lượng giác cơ bản đã đề cập ở mục II.

Chúng tôi vừa chia sẻ với độc giả một cách tổng quan về con đường tư duy để tìm ra kết quả cuối cùng. Và trên con đường đó, để tránh bị lạc phương hướng, ta sẽ có các cột mốc cụ thể như thế nào?

Điều này sẽ được minh họa rất rõ qua hai ý tưởng định hướng lời giải sau:

- Trước tiên ta cần đặt điều kiện để phương trình có nghĩa (nếu có). Điều này rất quan trọng vì cuối cùng, khi tìm được họ nghiệm của phương trình hệ quả, ta cần kết hợp với điều kiện đó để xác định được nghiệm của phương trình ban đầu. Thông thường, ta sẽ đặt điều kiện khi phương trình chứa  $\tan \alpha$  hoặc  $\cot \alpha$ . Để “đơn giản hóa” những

bài toán như thế, hãy thay  $\tan \alpha$  bằng  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  (tương tự với  $\cot \alpha$ )

nhằm mục đích đưa phương trình đã cho về quan hệ giữa hai giá trị lượng giác  $\sin$  và  $\cos$  mà thôi.

- Với phương trình xuất hiện nhiều cung khác nhau, ta sẽ sử dụng các công thức cơ bản để đưa về một cung duy nhất.

**Ví dụ.** Giải phương trình:

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin(x + \pi) + \cos 2x + 1 = 0$$

Để ý rằng ba hạng tử  $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\sin(x + \pi)$ ,  $\cos 2x$  đều có thể quy về một cung duy nhất là  $x$ . Thật vậy,

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x - \cos x; \quad \sin(x + \pi) = -\sin x; \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Từ đó, phương trình đã cho trở thành

$$2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

Sau đây, bạn đọc hãy tham khảo kĩ những bài tập minh họa sau để hiểu rõ hơn điều chúng tôi muốn đề cập.

### **Dạng 1. Những phương trình lượng giác quy về phương trình tích.**

Xin được nhắc lại điều **tối quan trọng**, đó là: Mấu chốt của việc giải phương trình lượng giác trong đề thi đại học là sử dụng các công thức và kiến thức cơ bản (trong mục I và mục III) để đưa phương trình đã cho về một trong hai dạng: phương trình tích hoặc phương trình một ẩn bậc 2 hoặc 3. Từ đó, ta sẽ quy bài toán về việc giải những phương trình lượng giác cơ bản đã đề cập ở mục II.

*Ngoài ra, theo tổng hợp của nhóm tác giả, trong đại đa số các phương trình lượng giác thi đại học trong 10 năm trở lại đây thì xác suất thi vào dạng phương trình tích là khoảng 70% (thậm chí trong 5 năm gần đây là 90%). Vì vậy, chúng tôi sẽ ưu tiên đưa ra nhiều bài tập trong phần này để các bạn học sinh có thể làm quen với nhiều thủ thuật tách ghép, chọn thừa số chung, nâng cao kinh nghiệm và sự tự tin khi làm bài.*

#### **Bài tập 1. Giải các phương trình:**

$$1) 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) + 4 \sin x = 1 \quad 2) \frac{\cos^2 x \cdot (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x).$$

#### **Lời giải.**

1) Để thấy phương trình đã cho không có điều kiện. Vì vậy, một cách tự nhiên, ý tưởng đầu tiên của ta là tìm cách **đưa cung**  $2x + \frac{\pi}{6}$  **về cung**  $x$  để bài toán trở nên đơn giản hơn. Muốn làm được điều này, ta sẽ **sử dụng công thức cộng cung và công thức cung nhân đôi**.

$$2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) + 4 \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 4 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \sin^2 x + 4 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{3} \cos x - \sin x + 2) \sin x = 0$$

Tới đây, ta đã đưa được bài toán về dạng phương trình tích. Từ đó, quy về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản để tìm nghiệm.

$$2(\sqrt{3} \cos x - \sin x + 2) \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sqrt{3} \cos x - \sin x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

Vậ phương trình có 2 họ nghiệm là  $x = k\pi$  và  $x = \frac{5\pi}{6} + m2\pi$  ( $k, m \in \mathbb{Z}$ ).

$$2) \frac{\cos^2 x \cdot (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x).$$

Điều kiện:  $\sin x + \cos x \neq 0$

Phương trình trên tương đương với

$$(1 - \sin^2 x)(\cos x - 1) = 2(1 + \sin x)(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(1 + \cos x + \sin x + \sin x \cdot \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

**Bài tập 2.** Giải phương trình:  $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$

**Lời giải.**

Thoạt nhìn bài toán này, ta có cảm giác muốn quy nó về phương trình một ẩn là  $\sin x$  hoặc  $\cos x$ . Tuy nhiên, ta không thể thay  $\sin x$  theo  $\cos x$ , và cũng không thể biểu diễn  $\cos^3 x$  theo  $\sin x$ , chính vì thế, phương trình này không thể quy về một ẩn. Vậy chỉ còn lại một lựa chọn, đó chính là quy về phương trình tích. Tuy nhiên, lần này phép nhóm không còn “hiển nhiên” như ở bài tập 1 mà đòi hỏi sự khéo léo, tinh tế hơn. Thật vậy, để ý rằng

$$\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin x(1 + \sin x) + \cos x(1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(1 + \sin x) + \cos x(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(\sin x + \cos x - \sin x \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 & (*) \\ \sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0 & (**) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Sau đây, ta sẽ xét phương trình (\*\*), tức

$$\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0$$

Đây là dạng phương trình liên quan đến tổng và tích. Vì thế, ta sẽ áp dụng cách làm quen thuộc là đặt

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{suy ra } |t| \leq \sqrt{2}).$$

$$\text{Mặt khác, khi đó } \sin x \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{2} = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Và (**) trở thành } t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - \sqrt{2} \\ t = 1 + \sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra (**) } \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta đặt } \frac{1 - \sqrt{2}}{2} = \cos \theta \text{ thì suy ra } \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \theta &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \theta + m2\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \theta + m2\pi \quad (m \in \mathbb{Z}, 0 < \theta < 2\pi). \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có các họ nghiệm là

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{4} \pm \theta + m2\pi \quad (m \in \mathbb{Z}, 0 < \theta < 2\pi), \cos \theta = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

**Bài tập 3.** Giải phương trình:  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

**Lời giải.**

Với những phương trình có các hạng tử bậc hai, ta thường dùng công thức hạ bậc để bài toán trở nên đơn giản hơn.

Sử dụng công thức hạ bậc, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$$

Tới đây, bạn đọc hãy chú ý ta sẽ ghép bốn số hạng này thành hai cặp sao cho hiệu (hoặc tổng) các cung của chúng bằng nhau, tức trong trường hợp này sẽ để ý  $2x - 4x = 6x - 8x$ . Tại sao lại phải ghép như vậy? Lí do rất đơn giản, chúng ta cần những “thừa số chung” để nhóm ra ngoài, đưa bài toán về dạng phương trình tích.

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + \cos 4x) + (\cos 6x + \cos 8x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 3x \cos x + 2 \cos 7x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\cos 3x + \cos 7x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

#### **Bài tập 4. Giải phương trình:**

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$$

**Lời giải.**

Với phương trình đối xứng giữa  $\sin x$  và  $\cos x$ , ta luôn đưa được nó về dạng phương trình tích với một nhân tử là  $\sin x - \cos x$ .

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) \cdot [2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x \cdot \cos x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ 2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x \cdot \cos x = 0 \end{cases}$$

+ Với  $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

+ Với  $2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x \cdot \cos x = 0 \quad (*)$ , đặt

$$t = \sin x + \cos x, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

$$\text{Phương trình } (*) \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow t = -1$$

$$t = -1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pi + m2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi \end{cases} (m, n \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có 3 họ nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = \pi + m2\pi \quad \text{và} \quad x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi \quad (k, m, n \in \mathbb{Z}).$$

**Bài tập 5.** Giải phương trình:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$$

**Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x \quad (*)$$

Để ý rằng

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x(2 \cos x + 1)$$

và

$$(1 + \cos 2x) + \cos x = 2 \cos^2 x + \cos x = \cos x(2 \cos x + 1).$$

Nên suy ra (\*) tương đương với

$$\sin 2x(2 \cos x + 1) = \cos x(2 \cos x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x - \cos x)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x \cos x - \cos x)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2 \sin x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \cos x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài tập 6.** Giải phương trình:

$$\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$$

**Lời giải.**

Thông thường, ta sẽ đặt điều kiện khi phương trình chứa  $\tan \alpha$  hoặc  $\cot \alpha$ . Để “đơn giản hóa” những bài toán như thế, hãy thay  $\tan \alpha$  bằng  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  (tương tự với  $\cot \alpha$ ) nhằm mục đích đưa phương trình đã cho về quan hệ giữa hai giá trị lượng giác  $\sin$  và  $\cos$  mà thôi.

Điều kiện:  $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} &= 2(\sin 2x + \cos 2x) \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \sin 2x + \cos 2x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2 \sin x \cos x} &= \sin 2x + \cos 2x \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 2x} = \sin 2x + \cos 2x \\ \Leftrightarrow \sin 2x(\sin 2x + \cos 2x) &= 1 \Leftrightarrow \sin 2x \cdot \cos 2x = 1 - \sin^2 2x \\ \Leftrightarrow \sin 2x \cdot \cos 2x &= \cos^2 2x \\ \Leftrightarrow \cos 2x(\sin 2x - \cos 2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = m\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{2} \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, ta suy ra: Phương trình đã cho có hai họ nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{2} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

**Bài tập 7. Giải phương trình:**

$$\sin 2x + 2 \tan x = 3$$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$(1 - \sin 2x) + 2(1 - \tan x) = 0 \quad (*)$$

Mặt khác, để ý rằng

$$1 - \sin 2x = 1 - 2 \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = (\cos x - \sin x)^2$$



$$1 - \tan x = 1 - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x}$$

$$\text{Do đó, } (*) \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)^2 + \frac{2(\cos x - \sin x)}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) \left( \cos x - \sin x + \frac{2}{\cos x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 & (1) \\ \cos x - \sin x + \frac{2}{\cos x} = 0 & (2) \end{cases}$$

Xét phương trình (1), ta có

$$\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}).$$

$$\text{Xét phương trình (2), } \cos x - \sin x + \frac{2}{\cos x} = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = \cos x + \frac{2}{\cos x} \quad (3)$$

Lại có  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  nên suy ra

$$\left( \cos x + \frac{2}{\cos x} \right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x} + 3 = 0$$

$$\text{Tuy nhiên, điều này là vô lí vì hiển nhiên: } 2\cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x} + 3 > 0$$

Do đó, (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho chỉ có duy nhất họ nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

## **Dạng 2. Những phương trình lượng giác quy về phương trình một ẩn.**

*Bước 1:* Quan sát, dựa vào những công thức biến đổi cơ bản để chọn ẩn phù hợp.

*Bước 2:* Sử dụng ý tưởng từ Bước 1, biểu diễn tất cả các số hạng trong phương trình theo ẩn đó. Quy bài toán về phương trình một ẩn duy nhất (thường là bậc hai hoặc bậc ba).

*Bước 3:* Giải phương trình tương đương vừa thu được và suy ra họ nghiệm cần tìm, lưu ý kết hợp điều kiện đề bài (nếu có).

**Bài tập 1.** Giải phương trình:  $\cos 3x - \cos 2x + 3 \cos x + 2 \sin^2 x = 3$

**Lời giải.**

Để ý rằng  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ ,  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ,  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  nên ta sẽ quy bài toán về phương trình một ẩn là  $\cos x$ .

Sử dụng những công thức cơ bản trên, phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x - (2 \cos^2 x - 1) + 3 \cos x + 2(1 - \cos^2 x) = 3$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 4 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x (\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

**Bài tập 2.** Giải phương trình:  $\frac{2 \cos 4x + 6 \cos^2 x + 1 + 3 \cos 2x}{\cos x} = 0$

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ở bài toán này, nếu ta tiếp tục chọn ẩn duy nhất là  $\cos x$  thì sẽ thu được một phương trình bậc 4, rất khó có thể giải quyết tiếp. Tuy nhiên, sự xuất hiện của  $\cos^2 x$  khiến ta nghĩ tới việc sử dụng lối “tư duy ngược”, hạ bậc  $\cos^2 x$  để quy phương trình về dạng một ẩn duy nhất, không phải  $\cos x$  mà là  $\cos 2x$ .

Thật vậy, phương trình đã cho tương đương với

$$2(2 \cos^2 2x - 1) + 3(1 + \cos 2x) + 1 + 3 \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - 3 \cos 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

Thỏa mãn điều kiện  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Vậy phương trình đã cho có ba họ nghiệm là

$$x = m\pi, x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

**Bài tập 3.** Giải phương trình:  $\sin^6 x + \cos^6 x = 2 \cos^2 x - 1$ **Lời giải.**

Đề ý rằng:

$$\begin{aligned}
\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 \\
&= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\
&= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{3}{4} \cos^2 2x + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Suy ra phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{4} \cos^2 2x + \frac{1}{4} = \cos 2x \Leftrightarrow 3 \cos^2 2x - 4 \cos 2x + 1 = 0 \quad (*)$$

Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó,

Phương trình

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\alpha}{2} + m\pi, \cos \alpha = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

**Bài tập 4.** Giải phương trình:  $7 \left( \frac{\sin 3x - \cos 3x}{2 \sin 2x - 1} - \cos x \right) = 4 - \cos 2x$   
 với  $x \in (0; \pi)$ .

**Lời giải.**Điều kiện:  $\sin 2x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{12} + k2\pi$  và  $x \neq \frac{\pi}{12} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } \sin 3x - \cos 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x - 4 \cos^3 x + 3 \cos x \\
&= 3(\sin x + \cos x) - 4(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) \\
&= (\sin x + \cos x)(4 \sin x \cos x - 1) = (\sin x + \cos x)(2 \sin 2x - 1)
\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\sin 3x - \cos 3x}{2 \sin 2x - 1} = \sin x + \cos x.$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với

$$7(\sin x + \cos x - \cos x) = 4 - \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 7 \sin x = 4 - (1 - 2 \sin^2 x) \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 3(\text{loại}) \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + m2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Do ta cần tìm  $x \in (0; \pi)$  nên suy ra chỉ có 2 nghiệm thỏa mãn đề bài là

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ và } x = \frac{5\pi}{6}.$$

\* Trên thực tế, ngoài hai dạng trên, còn rất nhiều dạng phương trình lượng giác không mâu thuẫn khác như phương trình sử dụng đạo hàm, tính chất hàm lẻ, hay tính chất của bất đẳng thức. Tuy nhiên, do tính mục đích của cuốn sách nên chúng tôi không đề cập tới những nội dung này. Chỉ xin giới thiệu tới bạn đọc một ví dụ minh họa đơn giản, thay cho phân kết của chuyên đề này.

**Ví dụ.** Giải phương trình  $\sin^{2011} x + \cos^{2011} x = 1$

**Lời giải.**

Đề ý rằng do  $-1 \leq \sin x \leq 1$  ta có

$$\sin^2 x (1 - \sin^{2009} x) \geq 0 \Rightarrow \sin^{2011} x \leq \sin^2 x$$

Hoàn toàn tương tự, dễ dàng nhận thấy  $\cos^{2011} x \leq \cos^2 x$ .

Từ đó suy ra  $\sin^{2011} x + \cos^{2011} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

$$\text{Vậy } \sin^{2011} x + \cos^{2011} x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^{2011} x = \sin^2 x \\ \cos^{2011} x = \cos^2 x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$



# PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

Ở các đề thi tuyển sinh Đại học môn Toán, giai đoạn từ năm 2002 – 2005 (những năm đầu tiên thi đề chung), độc giả sẽ bắt gặp những bài phương trình và hệ phương trình rất cơ bản, chúng được đánh giá ở mức độ “câu gỡ điểm”. Tuy nhiên, những năm gần đây, đề thi ngày càng chứa nhiều dạng “không mẫu mực”, đi kèm cả biện luận theo tham số. Sự thay đổi này đã gây nên sự lúng túng cho không ít học sinh bởi đã là “không mẫu mực” thì càng khó hệ thống, phân loại. Chính vì lí do đó, ở chuyên đề này, nhằm mục đích tránh không gây cho độc giả “sự choáng ngợp”, chúng tôi sẽ không khai thác quá nhiều bài toán mà chỉ tập trung đưa ra những “hệ thống lí thuyết” thường dùng nhất, được rút ra một cách tổng quan từ những đề thi gần đây. Tin chắc rằng khi nắm vững được lượng kiến thức tối ưu này, kèm theo hướng giải quyết áp dụng cho những bài toán cụ thể đã thi, các bạn học sinh sẽ tự định hướng được con đường tư duy cho những vấn đề tương tự.

**Bài tập 1.** Giải phương trình:  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

**Đề thi Đại học khối B năm 2010.**

*Lời giải.*

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}; 6\right]$$

**Cách 1.** Xét hàm số:  $f(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8$  liên tục trên đoạn  $\left[-\frac{1}{3}; 6\right]$ .

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right] + 6x - 14, x \in \left[-\frac{1}{3}; 6\right]$$

$$\bullet x \in \left[\frac{7}{3}; 6\right]: f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[\frac{7}{3}; 6\right] \text{ và } f(5) = 0.$$

Do đó trên  $\left[\frac{7}{3}; 6\right]$  phương trình  $f(x) = 0$  có đúng 1 nghiệm  $x = 5$ .

$$\bullet x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right] \Rightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} < 2\sqrt{2} - \sqrt{\frac{11}{3}},$$

$$3x^2 - 14x - 8 \leq -3 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right].$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 5$ .

**Cách 2.** Phương trình :  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 4) + (1 - \sqrt{6-x}) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left( \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 \right) = 0 \quad (*)$$

Vì  $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 > 0, x \in \left[-\frac{1}{3}; 6\right]$  nên phương trình

$$(*) \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 5$ .

Ký hiệu  $K$  là **một** đoạn, **một** khoảng hoặc **một** nửa khoảng.

• Nếu  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  và  $f(a) \cdot f(b) < 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm  $c \in (a; b)$ .

• Nếu  $f(x)$  liên tục và đơn điệu trên  $K$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có không quá một nghiệm trên  $K$ .

### Tổng quát:

Nếu  $f(x)$  liên tục và tăng trên  $K$ ,  $g(x)$  liên tục và giảm (hoặc là hàm hằng) trên  $K$  thì phương trình  $f(x) = g(x)$  có không quá một nghiệm trên  $K$ .

• Nếu phương trình  $f'(x) = 0$  có  $n$  nghiệm trên khoảng  $(a; b)$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có không quá  $n+1$  nghiệm trên khoảng  $(a; b)$ .

• Tổng của 2 hàm tăng trên  $K$  là một hàm tăng trên  $K$ , tổng của 2 hàm giảm trên  $K$  là một hàm giảm trên  $K$ .

- Nếu  $f(x)$  là hàm tăng trên  $K$  thì  $a.f(x)$  tăng trên  $K$  nếu  $a > 0$  và  $a.f(x)$  giảm trên  $K$  nếu  $a < 0$ .

**Bài tập 2.** Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 & (2) \end{cases}$$

(Đề thi ĐH khối A năm 2010.)

**Lời giải.**

**Cách 1:** Điều kiện:  $x \leq \frac{3}{4}, y \leq \frac{5}{2}$ .

$$(4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + 1)2x + 2(y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + 1)2x = (5 - 2y + 1)\sqrt{5 - 2y} \text{ có dạng}$$

$$f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y})$$

Xét hàm số  $f(t) = t(t^2 + 1)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$

Để thấy  $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Do đó } f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ y = \frac{5 - 4x^2}{2} \end{cases}$$

Khi đó (2) viết lại  $4x^2 + \left(\frac{5 - 4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7$  (3).

Vì  $x = 0, x = \frac{3}{4}$  không là nghiệm của (3).

$$\text{Xét hàm số: } g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5 - 4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7$$

liên tục trên khoảng  $\left(0; \frac{3}{4}\right)$ .

Ta có  $g'(x) = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{3}{4}\right) \Rightarrow g(x)$

nghiệch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{3}{4}\right)$  và  $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow (3)$  có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2.$$

**\* Chú ý 1:**

Ta có thể đặt :  $u = 2x \Rightarrow u \leq \frac{3}{2}, v = \sqrt{5-2y}, v \geq 0 \Rightarrow y = \frac{5-v^2}{2}$

Phương trình (1)  $\Rightarrow (u^2 + 1)\frac{u}{2} - \frac{v^2 + 1}{2}v = 0$

$$\Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow u = v \Rightarrow 2x = \sqrt{5-2y}$$

vì  $u^2 + uv + v^2 + 1 > 0, \forall u, v \in \mathbb{R}$ .

**\* Chú ý 2:** Đặt :  $\sqrt{5-2y} = t \Leftrightarrow y = \frac{5-t^2}{2}$  với  $t \geq 0$

Khi đó (1)  $\Rightarrow (4x^2 + 1)x = \frac{t^2 + 1}{2}t \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = t^3 + t$

$$\Leftrightarrow (2x - t)(4x^2 + 2xt + t^2 + 1) = 0 \Rightarrow t = 2x \Rightarrow t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$$

Phương trình (2) trở thành

$$t^2 + \frac{(5-t^2)^2}{4} + 2\sqrt{3-2t} = 7 \Leftrightarrow t^4 - 6t^2 + 8\sqrt{3-2t} - 3 = 0$$

Xét hàm:  $f(t) = t^4 - 6t^2 + 8\sqrt{3-2t} - 3$  liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$

Ta có:  $f'(t) = 4t^3 - 12t - \frac{8}{\sqrt{3-2t}} < 0, \forall t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$  và  $f(1) = 0$  nên

trong đoạn  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$  và  $f(t) = 0$  có nghiệm duy nhất  $t = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = 2$ .

**Cách 2.**

Đặt  $u = 2x, v = \sqrt{5-2y}$



$$\text{Từ (1)} \Rightarrow (u^2 + 1)u - (v^2 + 1)v = 0 \Rightarrow u = v$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} 2x = \sqrt{5 - 2y} \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Với } t = y - 1, w = \sqrt{3 - 4x} = \sqrt{3 - 2u}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{3 - 2t} \geq 0 \\ t^2 = 3 - 2w \\ w = \sqrt{3 - 2u} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = 3 - 2t \\ t^2 = 3 - 2w \\ w^2 = 3 - 2u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = t = w = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

**Cách 3.** Điều kiện:  $x \leq \frac{3}{4}, y \leq \frac{5}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow 4x^3 + x = \left( \frac{\sqrt{2 - 5y}}{2} \right)^3 + \frac{\sqrt{2 - 5y}}{2} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{2 - 5y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ y = \frac{5 - 4x^2}{2} \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 4x^2 + \left( \frac{5 - 4x^2}{2} \right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 - 25x^2 + 8\sqrt{3 - 4x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 - 25x^2 + 5 + 8(\sqrt{3 - 4x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 1)(4x^2 - 5) + \frac{16(1 - 2x)}{\sqrt{3 - 4x} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1) \left[ (2x + 1)(4x^2 - 5) - \frac{16}{\sqrt{3 - 4x} + 1} \right] = 0 \quad (3)$$

$$0 \leq x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow (2x + 1)(4x^2 - 5) < 0$$

$$\Rightarrow (2x + 1)(4x^2 - 5) - \frac{16}{\sqrt{3 - 4x} + 1} < 0 \quad (3) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2.$$

**Bài tập 3.** Tìm tham số thực  $m$  để phương trình  $x + \sqrt{3x^2 + 1} = m$  có nghiệm thực.

**Lời giải.**

Xét hàm số  $f(x) = x + \sqrt{3x^2 + 1}$  và  $y = m$

Hàm số  $f(x) = x + \sqrt{3x^2 + 1}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có : } f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + 3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 1} = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3x^2 + 1 = 9x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = \frac{\pm 1}{\sqrt{6}} = \frac{\pm \sqrt{6}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{6}}{6}, f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Lập bảng biến thiên và suy ra  $f(x) \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$  mà  $f(x) = m$ .

Do đó, với  $m \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$  thì phương trình đã cho có nghiệm thực.

**Bài tập 4.** Tìm tham số thực  $m$  để bất phương trình

$$\sqrt{x^2 - 2x + 24} \leq x^2 - 2x + m \text{ có nghiệm thực trong đoạn } [-4; 6].$$

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x + 24}, \forall x \in [-4; 6] \Rightarrow t \in [0; 5]$$

Bài toán trở thành tìm tham số thực  $m$  để bất phương trình  $t^2 + t - 24 \leq m$  có nghiệm thực  $t \in [0; 5]$

Xét hàm số  $f(t) = t^2 + t - 24$  liên tục trên đoạn  $[0; 5]$ .

$$f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [0; 5] \Rightarrow f(t) \text{ liên tục và đồng biến trên đoạn } [0; 5].$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm thực trên đoạn  $[0; 5]$  khi

$$\max_{t \in [0; 5]} f(t) \leq m \Leftrightarrow f(5) \leq m \Leftrightarrow 6 \leq m \Leftrightarrow m \geq 6.$$

**Chú ý :** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên khoảng  $(a; b)$ .

**Định lý 1:** Phương trình  $f(x) = m$  có nghiệm thuộc đoạn

$$[a; b] \Leftrightarrow \min_{[a; b]} f(x) \leq m \leq \max_{[a; b]} f(x).$$

**Định lý 2:** Bất phương trình  $f(x) \geq m$  có nghiệm thuộc đoạn

$$[a; b] \Leftrightarrow \max_{[a; b]} f(x) \geq m.$$

**Định lý 3:** Bất phương trình  $f(x) \leq m$  có nghiệm thuộc đoạn

$$[a; b] \Leftrightarrow \min_{[a; b]} f(x) \leq m.$$

**Định lý 4:** Bất phương trình  $f(x) \geq m$  nghiệm đúng với mọi

$$x \in [a; b] \Leftrightarrow \min_{[a; b]} f(x) \geq m.$$

**Định lý 5:** Bất phương trình  $f(x) \leq m$  nghiệm đúng với mọi

$$x \in [a; b] \Leftrightarrow \max_{[a; b]} f(x) \leq m.$$

## ○ CHUYÊN ĐỀ 5

# HÀM SỐ VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN.

Hàm số là bài toán “cố định” và cũng là “thử thách” đầu tiên trong đề thi đại học môn toán, gồm hai ý là khảo sát hàm số và câu hỏi phụ.

Phần khảo sát hàm số được coi là phần dễ nhất trong đề và hầu như không thí sinh nào bỏ qua cơ hội “ăn điểm” này.

Tuy nhiên, ở ý tiếp theo là câu hỏi phụ thì không ít bạn lại “bỏ qua” để làm phần khác. Điều này thực ra khá tự nhiên bởi lẽ câu hỏi phụ có nhiều dạng, ngoài việc phải nắm vững kiến thức cơ bản, để đến được đáp số đúng cuối cùng, nó còn đòi hỏi ở người giải sự cẩn thận và nhanh nhạy khi tính toán.

Chính vì vậy, ở chuyên đề này chúng tôi không đề cập đến vấn đề “khảo sát hàm số” vốn đã quá quen thuộc mà sẽ tập trung giúp các bạn giải quyết vấn đề “khó khăn” hơn, đó chính là: “Các dạng câu hỏi phụ”. Ví dụ minh họa ở phần này được chọn lọc, sắp xếp từ dễ đến khó. Nhóm tác giả đã hạn chế tối đa việc sử dụng phương pháp nâng cao, thay vào đó là những ý tưởng gợi mở rất đối tự nhiên để bạn đọc tự khám phá, từ đó dần dần hoàn thiện kỹ năng tư duy của mình khi đứng trước một bài toán.

**Bài tập 1.** Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

$$1) y = x + 1 - 2\sqrt{x^2 + 3x + 3} \quad 2) y = |x^2 - 2x - 3|$$

**Hướng dẫn giải**

$$1) y' = 1 - \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}} = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 3} - (2x + 3)}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}.$$

• Khi  $y' = 0$ , bài toán đưa về dạng:  $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$ .

Đạo hàm  $y'$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ ,  $y' = 0$  tại điểm  $x = -1$ , do vậy trên khoảng  $(-\infty; -1)$ ,  $y'$  giữ dấu không đổi và  $y'(-2) > 0$ . Tương tự trên khoảng  $(-1; +\infty)$ ,  $y'$  giữ dấu không đổi và  $y'(0) < 0$ .

• Ngoài ra bài toán có thể yêu cầu:

tìm  $x$  để  $y' > 0$  ( $y' < 0$ ;  $y' \geq 0$ ;  $y' \leq 0$ )...

Bài toán quy về dạng sau:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$2) |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

Và sau đây là lời giải chi tiết.

**Lời giải.**

$$1) y = x + 1 - 2\sqrt{x^2 + 3x + 3}$$

Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

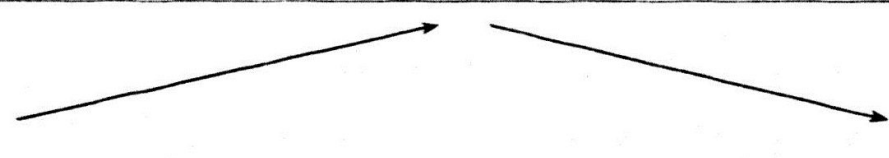
$$\text{Ta có: } y' = 1 - \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}} = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 3} - (2x + 3)}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$$



$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x + 3} = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x^2 + 3x + 3 = (2x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Bảng biến thiên :

|    |                                                                                    |    |           |
|----|------------------------------------------------------------------------------------|----|-----------|
| x  | $-\infty$                                                                          | -1 | $+\infty$ |
| y' | +                                                                                  | 0  | -         |
| y  |  |    |           |

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ , nghịch biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .

$$2) y = |x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{khi } x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{khi } -1 < x < 3 \end{cases}$$

Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có: } y' = \begin{cases} 2x - 2 & \text{khi } x < -1 \vee x > 3 \\ -2x + 2 & \text{khi } -1 < x < 3 \end{cases}$$

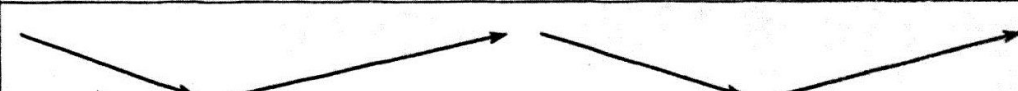
Hàm số không có đạo hàm tại  $x = -1$  và  $x = 3$ .

+ Trên khoảng  $(-1; 3)$ :  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ;

+ Trên khoảng  $(-\infty; -1)$ :  $y' < 0$ ;

+ Trên khoảng  $(3; +\infty)$ :  $y' > 0$ .

Bảng biến thiên:

|    |                                                                                      |    |   |   |           |  |   |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------|----|---|---|-----------|--|---|
| x  | $-\infty$                                                                            | -1 | 1 | 3 | $+\infty$ |  |   |
| y' | -                                                                                    |    | + | 0 | -         |  | + |
| y  |  |    |   |   |           |  |   |

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng  $(-1; 1)$  và  $(3; +\infty)$ , nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; 3)$ .

**Bài tập 2.** Xét chiều biến thiên của hàm số :  $y = 2 \sin x + \cos 2x, x \in [0; \pi]$ .

**Hướng dẫn giải**

- Nếu hàm số  $f$  liên tục trên  $[a; b]$  và có đạo hàm  $f'(x) > 0$  trên khoảng  $(a; b)$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên  $[a; b]$ .
- Nếu hàm số  $f$  liên tục trên  $[a; b]$  và có đạo hàm  $f'(x) < 0$  trên khoảng  $(a; b)$  thì hàm số  $f$  nghịch biến trên  $[a; b]$ .
- Giả sử hàm số  $f$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ .
- \* Nếu hàm số  $f$  đồng biến trên khoảng  $(a; b)$  thì đồng biến trên đoạn  $[a; b]$ .
- \* Nếu hàm số  $f$  nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$  thì nghịch biến trên đoạn  $[a; b]$ .
- \* Nếu hàm số  $f$  không đổi trên khoảng  $(a; b)$  thì không đổi trên đoạn  $[a; b]$ .
- Phương trình lượng giác cơ bản:

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}$$

$$\tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u \neq 0, \cos v \neq 0 \\ u = v + k\pi \end{cases}$$

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}$$

$$\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u \neq 0, \sin v \neq 0 \\ u = v + k\pi \end{cases}$$

Và sau đây là lời giải chi tiết.

**Lời giải.**

Hàm số đã cho xác định trên đoạn  $[0; \pi]$

Ta có:  $y' = 2 \cos x (1 - 2 \sin x)$ .

Ta cần tìm nghiệm của phương trình  $y' = 0$  trên khoảng  $(0; \pi)$ :

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; \pi) \\ \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}.$$

Bảng biến thiên:

|    |  |   |                 |                 |                  |       |   |   |
|----|--|---|-----------------|-----------------|------------------|-------|---|---|
| x  |  | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |   |   |
| y' |  | + | 0               | -               | 0                | +     | 0 | - |
| y  |  |   |                 |                 |                  |       |   |   |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra : hàm số đồng biến trên các khoảng

$\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$  và  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right)$ , nghịch biến trên các khoảng  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$  và  $\left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right)$ .

**Chú ý:** Ta có thể kết luận: hàm số đồng biến trên mỗi đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

và  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$ , nghịch biến trên mỗi đoạn  $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$  và  $\left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$ .

**Bài tập 3.** Tìm a để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Hướng dẫn giải**

\* Hàm số  $y = f(x, m)$  tăng trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} y' \geq 0$ .

\* Hàm số  $y = f(x, m)$  giảm trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} y' \leq 0$ .

**Chú ý:**

1) Nếu  $y' = ax^2 + bx + c$  thì

$$* y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \\ a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$* y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \\ a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

2) Hàm đồng biến trên  $\mathbb{R}$  thì nó phải xác định trên  $\mathbb{R}$ .  
Và sau đây là lời giải chi tiết.

**Lời giải.**

Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = x^2 + 2ax + 4$  và có  $\Delta' = a^2 - 4$

Bảng xét dấu  $\Delta'$

|           |           |    |   |   |           |
|-----------|-----------|----|---|---|-----------|
| a         | $-\infty$ | -2 |   | 2 | $+\infty$ |
| $\Delta'$ | +         | 0  | - | 0 | +         |

+ Nếu  $-2 < a < 2$  thì  $y' > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

+ Nếu  $a = 2$  thì  $y' = (x + 2)^2$ , ta có :

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -2, y' > 0, x \neq -2.$$

Hàm số  $y$  đồng biến trên mỗi nửa khoảng  $(-\infty; -2]$  và  $[-2; +\infty)$  nên hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

+ Tương tự nếu  $a = -2$ . Hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

+ Nếu  $a < -2$  hoặc  $a > 2$  thì  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ .

Giả sử  $x_1 < x_2$ . Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng  $(x_1; x_2)$ , đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; x_1)$  và  $(x_2; +\infty)$ .

Do đó  $a < -2$  hoặc  $a > 2$  không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $-2 \leq a \leq 2$ .

**Bài tập 4.** Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để các hàm số sau :

1)  $y = \frac{mx + 4}{x + m}$  luôn nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .

2)  $y = 2x^3 - 2x^2 + mx - 1$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

3)  $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$  đồng biến trên khoảng  $(-3; 0)$ .

**Lời giải.**

1)  $y = \frac{mx + 4}{x + m}$  luôn nghịch biến khoảng  $(-\infty; 1)$ .

Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .



Ta có  $y' = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2}, x \neq -m$

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \begin{cases} y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -m \geq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1 \end{aligned}$$

Vậy : với  $-2 < m \leq -1$  thì thỏa yêu cầu bài toán .

2)  $y = 2x^3 - 2x^2 + mx - 1$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

\* Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(1; +\infty)$  .

\* Ta có :  $y' = 6x^2 - 4x + m$

**Cách 1.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$  khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow g(x) = 6x^2 - 4x \geq -m, x > 1.$$

Xét hàm số  $g(x) = 6x^2 - 4x$  liên tục trên khoảng  $(1; +\infty)$ , ta có

$$g'(x) = 12x - 4 > 0, \forall x > 1 \Leftrightarrow g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (1; +\infty)$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (6x^2 - 4x) = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

\* Bảng biến thiên.

| x       | -1 | $+\infty$ |
|---------|----|-----------|
| $g'(x)$ | +  |           |
| $g(x)$  | -2 | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra  $2 \geq -m \Leftrightarrow m \geq -2$

**Cách 2.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$  khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow f(x) = 6x^2 - 4x + m \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

Khi và chỉ khi hoặc  $\Delta' = 2 - 6m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$

hoặc  $f(x) = 0$  có hai nghiệm thỏa mãn  $x_1 \leq x_2 < 1$  (\*).

Đặt  $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$ , khi đó  $g(t) = f(t + 1)$ .

Điều kiện (\*)  $\Leftrightarrow g(t) = 6t^2 + 8t + 2 + m$  có hai nghiệm không dương,

$$\text{tức là } \begin{cases} \Delta_g \geq 0 \\ S_g \leq 0 \\ P_g \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (b). \text{ Từ (a) và (b) suy ra } m \geq -2.$$

3)  $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$  đồng biến trên khoảng  $(-3; 0)$ .

Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(-3; 0)$ .

Ta có:  $y' = 3mx^2 - 2x + 3$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-3; 0)$  khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (-3; 0).$$

Hay  $3mx^2 - 2x + 3 \geq 0, \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow m \geq \frac{2x - 3}{3x^2}, \forall x \in (-3; 0)$

Xét hàm số  $g(x) = \frac{2x - 3}{3x^2}$  liên tục trên khoảng  $(-3; 0)$ , ta có

$$g'(x) = \frac{-6x^2 + 18x}{9x^4} < 0, \forall x \in (-3; 0) \Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng}$$

$$(-3; 0) \text{ và } \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = -\frac{4}{27}, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$$

Bảng biến thiên:

|         |                 |           |
|---------|-----------------|-----------|
| x       | -3              | 0         |
| $g'(x)$ | -               |           |
| $g(x)$  | $-\frac{4}{27}$ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra  $m \geq -\frac{4}{27}$ .

**Bài tập 13.** Cho hàm số :  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm  $A\left(\frac{23}{9}; -2\right)$ .

### Hướng dẫn giải

Hai đường cong  $(C): y = f(x)$  và  $(C'): y = g(x)$

tiếp xúc nhau tại  $M(x_0; y_0)$

khi điểm  $M \in (C) \cap (C')$  và tiếp tuyến tại  $M$  của  $(C)$  trùng với tiếp tuyến

tại  $M$  của  $(C')$  chỉ khi hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$
 có nghiệm  $x_0$ .

### Lời giải.

Gọi  $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ . Phương trình tiếp tuyến  $(d)$  của  $(C)$  tại  $M_0$  là

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^3 - 3x_0^2 + 2) = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0)$$

Do  $(d)$  đi qua điểm  $A\left(\frac{23}{9}; -2\right)$  nên

$$-2 - (x_0^3 - 3x_0^2 + 2) = (3x_0^2 - 6x_0)\left(\frac{23}{9} - x_0\right)$$

$$\Leftrightarrow 6x_0^3 - 32x_0^2 + 46x_0 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)(3x_0^2 - 10x_0 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y = -2 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y = 9x - 25 \\ x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x + \frac{61}{27} \end{cases}$$

Vậy qua điểm  $A\left(\frac{23}{9}; -2\right)$  kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số đã

cho là:  $y = -2, y = 9x - 25, y = \frac{5}{3}x + \frac{61}{27}$ .

**Bài tập 5.** Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để hàm số  $y = -2x + 2 + m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$  có cực đại.

### Hướng dẫn giải

Hàm số đạt cực đại tại  $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$

Và sau đây là lời giải chi tiết.

**Lời giải.**

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Mặt khác, ta có: } y' = -2 + m \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}; y'' = \frac{m}{\sqrt{(x^2-4x+5)^3}}.$$

Bước tiếp theo, độc giả có thể chọn một trong hai cách sau:

**Cách 1.**

+ Nếu  $m = 0$  thì  $y = -2 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$  nên hàm số không có cực trị.

+  $m \neq 0$  vì dấu của  $y''$  chỉ phụ thuộc vào  $m$  nên để hàm có cực đại thì trước hết  $y'' < 0 \Leftrightarrow m < 0$ .

Khi đó hàm số có cực đại  $\Leftrightarrow$  Phương trình  $y' = 0$  có nghiệm (1).

$$\text{Ta có: } y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2+1} = m(x-2) \quad (2).$$

Đặt  $t = x - 2$  thì (2) trở thành :

$$mt = 2\sqrt{t^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ (m^2-4)t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ t^2 = \frac{1}{m^2-4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -2 \quad (\text{Do } m < 0).$$

Vậy  $m < -2$  thì hàm số có cực đại.

**Cách 2.** Hàm số đạt cực đại tại  $x = x_0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m(x_0-2)}{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}} = 2 \\ \frac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2} = \frac{m}{2} \\ m < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Với  $m < 0$  thì (1)  $\Rightarrow x_0 < 2$ .

$$\text{Xét hàm số : } f(x_0) = \frac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2}, x_0 < 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2} = -\infty.$$



$$\text{Ta có } f'(x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 2)^2 \sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}} < 0, \forall x_0 \in (-\infty; 2)$$

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm } x_0 < 2 \Leftrightarrow \frac{m}{2} < -1 \Leftrightarrow m < -2.$$

**Bài tập 6.** Cho hàm số:  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+6)x + 1$  có đồ thị là  $(C_m)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Khi hàm số có cực trị, hãy tìm tham số thực  $m$  để điểm  $A(3;5)$  nằm trên đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

**Lời giải.**

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m+6)$ . Hàm số đã cho có cực trị khi và chỉ khi  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9(m^2 - m - 6) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 3 \end{cases}.$$

Với  $\begin{cases} m < -2 \\ m > 3 \end{cases}$  (1) thì hàm số có cực trị và tọa độ các điểm cực trị của đồ

thị hàm số đã cho là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+6)x + 1 \\ y' = 3(x^2 - 2mx + m + 6) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (x-m)(x^2 - 2mx + m + 6) + 2(-m^2 + m + 6)x + m^2 + 6m + 1 \\ x^2 - 2mx + m + 6 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 2(-m^2 + m + 6)x + m^2 + 6m + 1$  ( $d_m$ ) là đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\text{Điểm } A(3;5) \in (d_m) \Leftrightarrow 5m^2 - 12m - 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{8}{5} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $m = 4$  là giá trị cần tìm.

**Bài tập 7.** Xác định giá trị tham số  $m \in \mathbb{R}$  để hàm số:

$$y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$$

đạt cực đại và cực tiểu đồng thời hai giá trị cực trị cùng dấu.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử  $y' = ax^2 + bx + c$ .

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta' > 0$ .

Gọi  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $y' = 0$ . Theo bài toán:  $y_1 \cdot y_2 > 0$

Việc thực hiện tìm  $y_1, y_2$  đơn giản bằng cách lấy  $y$  chia  $y'$  ta được:

$$y = \frac{1}{3}(x-2) \cdot [3x^2 - 12x + 3(m+2)] + 2(m-2)x + m - 2.$$

Để thấy  $y' = 3x^2 - 12x + 3(m+2) = 0$  hàm số có hai điểm cực trị  $A, B$ .

Khi đó đường thẳng đi qua hai điểm  $A, B$  là  $y = 2(m-2)x + m - 2$ .

Ngoài cách lấy  $y$  chia  $y'$ , ta có thể tìm cụ thể tọa độ  $A, B$  rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm  $A, B$ .

Nếu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình:  $y' = ax^2 + bx + c = 0$  thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

**Chú ý:** Gọi  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

là các điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

- Để hàm số có hai cực trị có giá trị cực trị cùng dấu  $\Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 > 0$ .
- Để hàm số có hai cực trị nằm về 2 phía đối với trục tung  $\Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 < 0$ .
- Để hàm số có hai cực trị nằm về 2 phía đối với trục tung  $\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < 0$ .
- Để hàm số có hai cực trị nằm trên trục hoành  $\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 > 0 \\ y_1 \cdot y_2 > 0 \end{cases}$ .
- Để hàm số có hai cực trị nằm dưới trục hoành  $\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 < 0 \\ y_1 \cdot y_2 < 0 \end{cases}$ .
- Để hàm số có cực trị tiếp xúc với trục hoành  $\Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 = 0$ .

Và sau đây là lời giải chi tiết.

**Lời giải.**

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$

Ta có :  $y' = 3x^2 - 12x + 3(m + 2)$ .

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 9(m + 2) > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$$

$$y = \frac{1}{3}(x - 2) \cdot [3x^2 - 12x + 3(m + 2)] + 2(m - 2)x + m - 2$$

$$y = \frac{1}{3}(x - 2) \cdot y' + 2(m - 2)x + m - 2$$

Gọi  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $g(x) = 3x^2 - 12x + 3(m + 2) = 0$ .

$$\text{Trong đó : } \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3}(x_1 - 2) \cdot y'(x_1) + 2(m - 2)x_1 + m - 2 \\ y'(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1 = 2(m - 2)x_1 + m - 2$$

$$\begin{cases} y_2 = \frac{1}{3}(x_2 - 2) \cdot y'(x_2) + 2(m - 2)x_2 + m - 2 \\ y'(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_2 = 2(m - 2)x_2 + m - 2$$

Theo định lý Vi-ét , ta có :  $x_1 + x_2 = 4, x_1x_2 = m + 2$

Theo bài toán :

$$y_1 \cdot y_2 > 0 \Leftrightarrow [2(m - 2)x_1 + m - 2][2(m - 2)x_2 + m - 2] > 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2 (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2 [4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1] > 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2 [4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1] > 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 (4m + 17) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{17}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện bài toán , vậy  $-\frac{17}{4} < m < 2$  là giá trị cần tìm .

**Bài tập 8.** Tìm  $a \in \mathbb{R}$  để đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  (C) có điểm cực đại và điểm cực tiểu ở về hai phía khác nhau của đường tròn (phía trong và phía ngoài):  $(C_a): x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + 5a^2 - 1 = 0$ .

**Hướng dẫn giải**

Đường tròn : (C) :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  có tâm  $I(x_0; y_0)$  và bán kính R

$$A(x_1; y_1) \text{ và } IA = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Nếu A là điểm nằm trong đường tròn thì  $IA < R$ .

Nếu A là điểm nằm ngoài đường tròn thì  $IA > R$ .

Và sau đây là lời giải chi tiết.

**Lời giải.**

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có : } y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

$$(C_a): (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 1 \text{ có tâm } I(a; 2a) \text{ và bán kính } R = 1$$

$$\text{Ta có : } IB = \sqrt{(a - 2)^2 + (2a + 2)^2} = \sqrt{5a^2 + 4a + 8}$$

$$IB = \sqrt{5\left(a + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{36}{5}} \geq \frac{6}{\sqrt{5}} > 1 = R \Rightarrow \text{điểm B nằm ngoài } (C_a),$$

do đó điểm A nằm trong đường tròn

$$(C_a) \Leftrightarrow IA < 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (2 - 2a)^2} < 1$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < a < 1$$

**Bài tập 9.** Cho hàm số  $y = \frac{mx - 4m + 3}{x - m}$ , cho m hai giá trị  $m_1$  và  $m_2$ .

Tìm hệ thức liên hệ giữa  $m_1$  và  $m_2$  để một trong hai đường cong  $(C_{m_1})$  và  $(C_{m_2})$  suy ra từ đường kia nhờ một phép tịnh tiến.

**Lời giải.**

$$y = \frac{mx - 4m + 3}{x - m} = m + \frac{m^2 - 4m + 3}{x - m}, x \neq m$$



Xét trường hợp  $m \neq 1, m \neq 3$ .

Tính tiền hệ trục tọa độ Oxy theo vec tơ  $\overrightarrow{OI}$ , công thức chuyển hệ tọa độ:

$$\begin{cases} x = X + m \\ y = Y + m \end{cases}$$

Phương trình đường cong  $(C_m)$  đối với hệ tọa độ IXY là:

$$Y + m = m + \frac{m^2 - 4m + 3}{(X + m) - m} \text{ hay } Y = \frac{m^2 - 4m + 3}{X}.$$

Phương trình  $(C_{m_1})$  đối với hệ tọa độ  $I_1XY$ :  $Y = \frac{m_1^2 - 4m_1 + 3}{X}$

Phương trình  $(C_{m_2})$  đối với hệ tọa độ  $I_2XY$ :  $Y = \frac{m_2^2 - 4m_2 + 3}{X}$

Một trong hai đường cong  $(C_{m_1})$  và  $(C_{m_2})$  suy ra từ đường kia nhờ một phép tịnh tiến khi và chỉ khi:  $m_1^2 - 4m_1 + 3 = m_2^2 - 4m_2 + 3$

$$\Leftrightarrow (m_1 - m_2)(m_1 + m_2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = m_2 \\ m_1 + m_2 = 4 \end{cases}$$

Khi  $m_1 = 1 \Rightarrow m_2 = 1$  hoặc  $m_2 = 3$ .

Khi  $m_1 = 3 \Rightarrow m_2 = 1$  hoặc  $m_2 = 3$ .

**Bài tập 10.** Cho hàm số  $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ . Gọi  $(d)$  là đường thẳng có hệ số góc  $m$  và đi qua điểm  $B(-2; 2)$ . Tìm  $m$  để  $(d)$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $M_1, M_2$ . Các đường thẳng đi qua  $M_1, M_2$  song song với các trục tọa độ tạo thành hình chữ nhật. Tính các cạnh của hình chữ nhật đó theo  $m \in \mathbb{R}$ , khi nào hình chữ nhật này trở thành hình vuông.

**Lời giải.**

$(d)$  đi qua điểm  $B(-2; 2)$  có phương trình  $y = m(x + 2) + 2$

Để  $(d)$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $M_1, M_2$  khi phương trình

$m(x + 2) + 2 = \frac{2x + 1}{x - 1}$  có hai nghiệm khác 1, hay phương trình

$mx^2 + mx - 2m - 3 = 0$  có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 + 4m(2m + 3) > 0 \\ m^2 + m - 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giả sử  $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ , hai cạnh hình chữ nhật  $M_1PM_2Q$  có độ dài là

$$M_1P = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{9m^2 + 12m}}{|m|}, M_1Q = |y_2 - y_1| = \sqrt{9m^2 + 12m}$$

Hình chữ nhật  $M_1PM_2Q$  trở thành hình vuông khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} M_1P = M_1Q &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{9m^2 + 12m}}{|m|} = \sqrt{9m^2 + 12m} \\ &\Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = 1 \quad (\text{do } (*)) \end{aligned}$$

**Bài tập 11.** Cho hàm số  $y = (x + 1)(x^2 + 2mx + m + 2)$  có đồ thị là  $(C_m)$ ,  $m$  là tham số thực. Với giá trị nào của  $m$  thì đồ thị  $(C_m)$  của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt  $A(-1; 0), B, C$  sao cho diện tích tam giác  $KBC$  bằng 2 (đvdt) với  $K(5; 1)$ .

### *Hướng dẫn giải*

**Nhắc lại một số tính chất** của hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = Ax^2 + Bx + C = 0 \end{cases} \quad (2)$$

\* Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi đó đồ thị của hàm số cắt trục  $Ox$  tại 1 điểm.

**Cách 1.**  $\Leftrightarrow (2)$  vô nghiệm hoặc (2) có nghiệm kép  $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g < 0 \\ \Delta_g = 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases}$ .

**Cách 2.**  $\Leftrightarrow$  Hàm số luôn đơn điệu hoặc có cực đại, cực tiểu mà  $y_{(cD)} y_{(cT)} > 0$ .

\* Phương trình (1) có đúng hai nghiệm khi đó đồ thị của hàm số tiếp xúc với trục Ox.

**Cách 1.**  $\Leftrightarrow (2)$  có nghiệm kép khác  $x_0$  hoặc (2) có 2 nghiệm và một

$$\text{nghiệm } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_x = 0 \\ g(x_0) \neq 0 \\ \Delta_x > 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases}$$

**Cách 2.**  $\Leftrightarrow$  Hàm số có cực đại, cực tiểu và  $y_{(CD)}y_{(CT)} = 0$ .

\* Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi đó đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

**Cách 1.**  $\Leftrightarrow (2)$  có 2 nghiệm phân biệt khác  $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_x > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases}$ .

**Cách 2.**  $\Leftrightarrow$  Hàm số có cực đại, cực tiểu và  $y_{(CD)}y_{(CT)} < 0$ .

**Trở lại bài toán:**

Hoành độ giao điểm của đồ thị  $(C_m)$  của hàm số và trục hoành là nghiệm của phương trình:  $(x+1)(x^2+2mx+m+2)=0(1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ g(x)=x^2+2mx+m+2=0(2) \end{cases}$$

Đồ thị  $(C_m)$  của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt  $A(-1;0), B, C$  khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt, nghĩa là phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt và cả 2 nghiệm đều khác

$$-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases}$$

**Cách 1.**  $dt(\Delta KBC) = \frac{1}{2} BC \cdot d(K, BC)$

Phương trình cạnh  $(BC): y=0 \Rightarrow d(K, BC)=1$ .

$$\begin{aligned} BC^2 &= (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 \\ &= (-2m)^2 - 4(m+2) = 4(m^2 - m - 2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ } dt(\Delta KBC) = 2 \Rightarrow m = ?.$$

### Cách 2.

- + Viết phương trình đường thẳng  $(d')$  qua K và vuông góc với  $(BC) \equiv (d)$
- +  $(d')$  cắt  $(d)$  tại điểm H. Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ  $(d')$  và  $(d)$ .
- +  $d(K, BC) = KH$

### Để ý rằng,

- + Khoảng cách giữa hai điểm  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$  là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- + Khoảng cách từ  $M(x_0, y_0)$  đến đường thẳng  $(d): Ax + By + C = 0$  là

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

- + Phương trình đường thẳng

$$(\Delta'): \begin{cases} \text{Qua } M(x_0, y_0) \\ (\Delta') \perp (\Delta): Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\Delta'): B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0.$$

**Mở rộng bài toán:** Tìm tham số  $m$  để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  thỏa mãn:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 17$ .

Theo bài toán: phương trình  $g(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và

$$\text{cả 2 nghiệm đều khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Mà } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 17 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 2(m+2) = 16 \Leftrightarrow m = ?, \text{ so với điều kiện suy ra } m \text{ cần tìm.}$$



**Đặt câu hỏi ngược lại :** nếu phương trình bậc 3 dạng  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  mà việc tìm nghiệm  $x_0$  phân tích về dạng  $(x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0$  như bài toán trên gặp khó khăn thì ta làm thế nào?

\* Đề ý phương trình:  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có ba nghiệm

$$x_1, x_2, x_3 \text{ thì } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

$$* x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

Và sau đây là lời giải chi tiết.

**Lời giải.**

Đồ thị  $(C_m)$  của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt  $A(-1;0), B, C$  khi và chỉ khi phương trình

$$(x + 1)(x^2 + 2mx + m + 2) = 0 \quad (1) \text{ có 3 nghiệm phân biệt hay}$$

$$g(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \quad (2) \text{ có 2 nghiệm phân biệt và cả 2 nghiệm}$$

$$\text{đều khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 3 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ 2 < m < 3 \\ m > 3 \end{cases} \quad (3).$$

$$dt(\Delta KBC) = \frac{1}{2} BC \cdot d(K, BC).$$

Gọi  $B(x_1;0), C(x_2;0)$  là tọa độ thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó

$$\begin{aligned} BC^2 &= (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= (-2m)^2 - 4(m + 2) = 4(m^2 - m - 2) \end{aligned}$$

$$\text{Phương trình cạnh } (BC): y = 0 \Rightarrow d(K, BC) = 1.$$

$$\text{Mà } dt(\Delta KBC) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} 2 \cdot \sqrt{m^2 - m - 2} \cdot 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra  $m = -2$  thỏa mãn.

**Bài tập 12.** Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị (C):  $y = \frac{2x-3}{x-2}$  tại M cắt các đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm hai tiệm cận.

*Lời giải.*

Gọi  $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0-3}{x_0-2}$  và  $y'_0 = -\frac{1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại M:

$$y = \frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2}$$

(d) cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt

$$A\left(2; \frac{2x_0-2}{x_0-2}\right), B(2x_0-2; 2).$$

Dễ thấy M là trung điểm AB và  $I(2; 2)$  là giao điểm hai đường tiệm cận.

Tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$\begin{aligned} S &= \pi IM^2 = \pi \left[ (x_0-2)^2 + \left( \frac{2x_0-3}{x_0-2} - 2 \right)^2 \right] \\ &= \pi \left[ (x_0-2)^2 + \frac{1}{(x_0-2)^2} \right] \geq 2\pi \end{aligned}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } (x_0-2)^2 = \frac{1}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 3 \end{cases}$$

Vậy  $M(1; 1)$  và  $M(3; 3)$  thỏa mãn bài toán.

**Bài toán có thể mở rộng:** Tìm những điểm trên (C) có hoành độ  $x > 2$  sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

**Hướng dẫn:**

Tương tự như trên, ta có:  $A\left(2; \frac{2x_0 - 2}{x_0 - 2}\right), B(2x_0 - 2; 2) \Rightarrow IA, IB$ .

Khi đó, chu vi tam giác AIB là

$$P = IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2 \cdot IA \cdot IB}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $IA = IB$ .

Nếu trường hợp tam giác AIB không vuông thì  $P = IA + IB + AB$ , để tính AB ta cần đến định lý hàm số cosin

$$AB^2 = IA^2 + IB^2 - 2IA \cdot IB \cos(\widehat{IA, IB}).$$

$$P = IA + IB + \sqrt{AB^2} \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{IA^2 + IB^2 - 2IA \cdot IB \cos(\widehat{IA, IB})}$$

$$P \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB - 2IA \cdot IB \cos(\widehat{IA, IB})}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $IA = IB$ .

# TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG.

Tích phân là một đề tài khá rộng, do khuôn khổ và tính mục đích của cuốn sách nên nhóm tác giả sẽ chỉ đề cập tới những ví dụ “điển hình” cho ba “dạng” thường gặp nhất trong đề thi đại học, đó là: tích phân từng phần, tích phân dùng phép đặt ẩn phụ và sử dụng tích phân để tính diện tích, thể tích.

**Bài tập 1.** Tính tích phân:

$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \ln(2x + 1) dx$$

$$I_3 = \int_0^c \frac{\ln x}{x^2} dx$$

**Lời giải.**

$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 x e^x dx = \left( x \cdot e^x \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left( x \cdot e^x \right) \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1$$

$$I_2 = \int_0^1 \ln(2x + 1) dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln(2x + 1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{2}{2x + 1} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^1 \ln(2x + 1) dx$$

$$= x \cdot \ln(2x + 1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(2x + 1) - 1}{2x + 1} dx = \frac{3}{2} \ln 3 - 1$$

$$I_3 = \int_0^c \frac{\ln x}{x^2} dx$$



$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_3 &= \int_0^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left( -\frac{1}{x} \ln x \right) \Big|_1^e + \int_0^e \frac{1}{x^2} dx = \left( -\frac{1}{x} \ln x \right) \Big|_1^e + \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_1^e \\ &= -\left( \frac{1}{e} \ln e - \ln 1 \right) - \left( \frac{1}{e} - 1 \right) = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

**Bài tập 2.** Tính tích phân:  $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

**Lời giải.**

Đặt :  $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt, \sin x = \sin t, \cos^2 x = \cos^2 t$

Đổi cận :  $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \pi \\ x = \pi \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó : } I &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin t dt}{1 + \cos^2 t} - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t dt}{1 + \cos^2 t} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x dx}{1 + \cos^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} = \pi \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + t^2} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}.$$

**Bài tập 3.** Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left[ \left( 1 + \tan \frac{x}{2} \right) e^x \right] dx$

**Lời giải.**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( 1 + \tan \frac{x}{2} \right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + I_1 = \frac{\pi^2}{8} + I_1 \text{ trong đó}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( 1 + \tan \frac{x}{2} \right) dx$$

$$\text{Đặt } x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \Rightarrow dx = -dt$$

$$\text{Đổi cận : } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$I_1 = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \left[ 1 + \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) \right] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( 1 + \frac{1 - \tan \frac{t}{2}}{1 + \tan \frac{t}{2}} \right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{2}{1 + \tan \frac{t}{2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( 1 + \tan \frac{t}{2} \right) dt.$$

$$= t \ln 2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - I_1 = \frac{\pi}{2} \ln 2 - I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{4} \ln 2 \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} \ln 2.$$

**Bài tập 4.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^3$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = -1, x = 2$ .

**Lời giải.**

Diện tích cần tính là :

$$S = \int_{-1}^2 |x^3| dx = \int_{-1}^0 (-x^3) dx + \int_0^2 x^3 dx = -\frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{17}{4} (\text{đvdt}).$$

**Bài tập 5.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

1)  $y = x^2, y = x + 2$  và  $x = -1, x = 2$

2)  $y = (x - 6)^2, y = 6x - x^2$  và  $x = 1, x = 5$

**Lời giải.**

1)  $y = x^2, y = x + 2$  và  $x = -1, x = 2$

Phương trình hoành độ giao điểm  $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x = -1, x = 2$

Vậy diện tích cần tính là

$$S = \left| \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx \right| = \left| \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-1}^2 \right| = \frac{9}{2}$$

$$2) y = (x - 6)^2, y = 6x - x^2 \text{ và } x = 1, x = 5$$

Phương trình hoành độ giao điểm

$$(x - 6)^2 - (6x - x^2) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 18x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = 6$$

Vậy diện tích cần tính là

$$S = \left| \int_3^6 (2x^2 - 18x + 36) dx \right| = \left| \left( \frac{2x^3}{3} - 9x^2 + 36x \right) \Big|_3^6 \right| = 9$$

**Bài tập 6.** Tính thể tích vật thể sinh ra bởi phép quay quanh trục Ox của giới hạn hình phẳng bởi :  $y = \sqrt{\log_2 x}, x + y = 3, y = 0$ .

**Lời giải.**

Giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \sqrt{\log_2 x}$  và  $x + y = 3$  là  $A(2;1)$

$$V_{Ox} = \pi \left( \int_1^2 \log_2 x dx + \int_2^3 (3 - x)^2 dx \right) = V_1 + V_2$$

$$\bullet V_1 = \pi \int_1^2 \log_2 x dx = \pi \ln 2 \int_1^2 \ln x dx = \dots = \pi \ln 2 \cdot (2 \ln 2 - 1)$$

$$\bullet V_2 = \pi \int_2^3 (3 - x)^2 dx = \dots = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{Ox} = \pi \ln 2 \cdot (2 \ln 2 - 1) + \frac{\pi}{3} \text{ (đvtt).}$$

**Bài tập 7.** Chứng minh rằng:

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.3.5 \dots (2n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

**Lời giải.**

$$(1 - x^2)^n = 1 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - \dots + (-1)^n C_n^n x^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \int_0^1 \left( 1 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - \dots + (-1)^n C_n^n x^{2n} \right) dx$$

$$= 1 - \frac{1}{3} C_n^1 + \frac{1}{5} C_n^2 + \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1}$$

Mặt khác, với  $x = \cos t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = -\sin t dt$

$$\text{Ta có } I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt$$

$$\text{Đặt : } \begin{cases} u = \sin^{2n} t \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2n \sin^{2n-1} t (\cos t) dt \\ v = -\cos t \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n = -\cos t \cdot \sin^{2n} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{2n-1} t dt = 2n$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^{2n-1} t dt = 2n I_{n-1} - 2n I_n$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2.4 \dots 2n}{3.5 \dots (2n+1)} I_0 \Rightarrow I_n = \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.3.5 \dots (2n+1)}$$

$$\text{Vậy : } 1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} + \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.3.5 \dots (2n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$$



# TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT.

Tổ hợp và xác suất là những dạng toán thường gặp trong đề thi tốt nghiệp và đôi khi cũng “tình cờ” xuất hiện trong những đề thi đại học, tất nhiên với xác suất ít hơn. Do vậy, chúng tôi chỉ xin đưa ra một số bài tập điển hình để minh họa rõ nét cho từng dạng toán.

**Bài tập 1.** Giải phương trình :

$$1) \frac{x! - (x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6}$$

$$2) \frac{(x+1)!(x-1)!}{x!(x-4)!} = 144$$

*Lời giải.*

$$1) \frac{x! - (x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{(x-1)!(x-1)}{(x+1)!} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1) = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$2) \text{Điều kiện: } \begin{cases} x \in \mathbb{N}^* \\ x \geq 4 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(x+1)!}{x!} \cdot \frac{(x-1)!}{(x-4)!} = 144 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-2)(x-3) = 144$$

$$\text{Lại có: } VP = 2.3.4.6 = (5+1)(5-1)(5-2)(5-3)$$

Nên phương trình trên có thể viết lại thành

$$(x+1)(x-1)(x-2)(x-3) = (5+1)(5-1)(5-2)(5-3).$$

Từ đó suy ra  $x = 5$  (thỏa mãn điều kiện).

**Bài tập 2.** Giải phương trình :

$$1) x + 80 = \frac{x!}{8!}$$

$$2) \frac{x!}{y!} = 24$$

**Lời giải.**

1) Điều kiện xác định:  $x \in \mathbb{N}$ .

Phương trình đã cho  $\Leftrightarrow x.8! + 80.8! = x! \Leftrightarrow x! - x.8! - 80.8! = 0$

Xét hàm số:  $f(x) = x! - x.8! - 80.8!$  với  $x \in \mathbb{N}$ .

Nhận xét:  $x = 10$  là một nghiệm của phương trình  $f(x) = 0$ .

Đến đây, do  $x \in \mathbb{N}$ , nên:

Nếu  $x < 10$  thì  $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{N}$

Nếu  $x > 10$  thì  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{N}$

Vì vậy,  $x = 10$  là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

2) Điều kiện xác định:  $\begin{cases} x, y \in \mathbb{N} \\ x > y \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x(x-1)\dots(y+1)y!}{y!} = 24 \Leftrightarrow x(x-1)\dots(y+1) = 24$$

Mặt khác, khi phân tích thành thừa số tại vế phải thì:  $24 = 4.3.2.1 = 4.3.2$

**Trường hợp 1:** VP = 24 khi đó  $\begin{cases} x = 24 \\ y + 1 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 23 \end{cases}$ .

**Trường hợp 2:** VP = 4.3.2 khi đó

$$\begin{cases} x(x-1)(x-2) = 4.3.2 \\ (y+1)(y+2)(y+3) = 4.3.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

**Trường hợp 3:** VP = 4.3.2.1 khi đó

$$\begin{cases} x(x-1)(x-2)(x-3) = 1.2.3.4 \\ (y+1)(y+2)(y+3)(y+4) = 1.2.3.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

**Bài tập 3.** Giải bất phương trình:  $\frac{x!}{6!(x-6)!} + \frac{x!}{5!(x-5)!} \leq \frac{1}{(x-5)!}$

**Lời giải.**

Điều kiện xác định:  $\begin{cases} x \geq 6 \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$\text{Bất phương trình đã cho} \Leftrightarrow \frac{x!(x-5)}{6!(x-5)!} + \frac{6.x!}{6!(x-5)!} \leq \frac{6!}{6!(x-5)!}$$

Vì  $6!(x-5)! > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên bất phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow x!(x-5) + 6.x! \leq 6!$$

$$\Leftrightarrow x!(x-5+6) \leq 6! \Leftrightarrow (x+1)! \leq 6! \Leftrightarrow x+1 \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 5$$

Đổi chiều điều kiện ta thấy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

**Bài tập 4.** Tìm số có ba chữ số  $\overline{abc}$ , biết  $\overline{abc} = a! + b! + c!$ .

*Lời giải.*

Ta có:  $\overline{abc} \leq 999 \Rightarrow a! + b! + c! \leq 999$  nên  $a, b, c \leq 6$  hay  $\overline{abc} \leq 666$ .

Cho nên  $a! + b! + c! \leq 666$  suy ra  $a, b, c \leq 5$  do đó:

$$a! + b! + c! \leq 5! + 5! + 5! = 360$$

$$\text{Từ đây ta có: } a \leq 3 \Rightarrow a! + b! + c! \leq 3! + 5! + 5! = 246 \Rightarrow a \leq 2 \quad (1).$$

Giả sử:  $b = c = 5$  thì ta có:  $\overline{a55} = a! + 5! + 5! \Rightarrow a! + 240 = \overline{a55}$   
nên ta có:  $a \geq 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $a = 2$ . Thử lại ta thấy:  $255 \neq 2! + 5! + 5!$ .

Cho nên một trong hai số  $b$  hoặc  $c$  phải nhỏ hơn 5 hay  $\begin{cases} b \leq 4 \\ c \leq 4 \end{cases}$ .

$$\text{Từ đây ta có: } a! + b! + c! \leq 2! + 4! + 5! = 146 \Rightarrow \overline{abc} \leq 146 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b \leq 4 \end{cases}$$

Bây giờ ta xét trường hợp cả  $c \leq 4$ , ta sẽ có:

$$\overline{abc} = a! + b! + c! \leq 1! + 4! + 4! = 49 \text{ (vô lý, do ở đây } a = 0 \text{)}.$$

Do đó:  $a = 5$  và ta có:  $\overline{1b5} = 1! + b! + 5!$

$$\Rightarrow 100 + 10b + 5 = 1 + b! + 120 \Leftrightarrow 10b = 16 + b! (*)$$

$$\text{Phương trình: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} b! = 10b - 16 \\ b \leq 4 \\ b \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Như vậy  $b$  sẽ nhận giá trị trong tập hợp số  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

$$+ b = 0 \Rightarrow 0! = 0 - 16 = -16 \text{ (không thỏa)}$$

$$+ b = 1 \Rightarrow 1! = 10 - 16 = -6 \text{ (không thỏa)}$$

$$+ b = 2 \Rightarrow 2! = 20 - 16 = 4 \text{ (không thỏa)}$$

$$+ b = 3 \Rightarrow 3! = 30 - 16 = 14 \text{ (không thỏa)}$$

$$+ b = 4 \Rightarrow 4! = 40 - 16 = 24 \text{ (đúng, chọn)}$$

Như vậy  $b = 4$ . Thử lại:  $abc = a! + b! + c! = 1! + 4! + 5! = 145$ , thỏa mãn.

Vậy số  $abc$  phải tìm là 145.

**Bài tập 5.** Trong thư viện có 12 bộ sách gồm 3 bộ sách Toán giống nhau, 3 bộ sách Vật lý giống nhau, 3 bộ sách Hóa học giống nhau và 3 bộ sách Sinh học giống nhau được xếp thành một dãy sao cho không có ba bộ nào cùng một môn đứng kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp như vậy?

*Lời giải.*

Gọi  $A$  là tập hợp các cách xếp 12 bộ thành một dãy tùy ý

Gọi  $A_1$  là tập hợp các cách xếp 3 bộ sách Toán đứng kề nhau

Gọi  $A_2$  là tập hợp các cách xếp 3 bộ sách Lý đứng kề nhau

Gọi  $A_3$  là tập hợp các cách xếp 3 bộ sách Hóa đứng kề nhau

Gọi  $A_4$  là tập hợp các cách xếp 3 bộ sách Sinh đứng kề nhau

Gọi  $A^*$  là tập hợp các cách xếp thỏa yêu cầu đề bài

$$\text{Ta có } A^* = A \setminus \bigcup_{i=1}^4 A_i \Rightarrow |A^*| = |A| - \left| \bigcup_{i=1}^4 A_i \right|. \text{ Mà } |A| = \frac{12!}{(3!)^4} = 369600$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^4 A_i \right| = C_4^1 \frac{10!}{(3!)^3} + C_4^2 \frac{8!}{(3!)^2} + C_4^3 \frac{6!}{(3!)} + C_4^4 \frac{4!}{(3!)} = 60936$$

$$\Rightarrow |A^*| = 369600 - 60936 = 308664.$$

**Bài tập 6.** Có bao nhiêu số có 8 chữ số được lập từ các chữ số: 0, 2, 4, 6, 8, 9 trong đó chữ số 9 có mặt đúng 3 lần còn các chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần.

*Lời giải.*

Xét số có 8 chữ số cần tìm có hình thức : 99902468, có 8! số.

Do hoán vị ba chữ số 9 này thì số không thay đổi và có 3! cách hoán vị

nên số các hoán vị này là  $\frac{8!}{3!} = 6720$ .



Trong các số hoán vị này có những số có chữ số 0 đứng đầu, vậy số các hoán vị này bằng  $\frac{7!}{3!} = 840$ .

Vậy các số cần tìm có tất cả là :  $6720 - 840 = 5880$ .

**Bài tập 7.** Xung quanh bờ hồ hình tròn có 17 cây cau cảnh. Người ta dự định chặt bớt 4 cây sao cho không có 2 cây nào kề nhau bị chặt. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện khác nhau?

*Lời giải.*

Chọn 1 cây bất kì trong hàng cây, đánh dấu là cây A. Có hai trường hợp sau xảy ra:

**Trường hợp 1:** Cây A không bị chặt. Khi đó xét hàng cây gồm 16 cây còn lại. Ta sẽ chặt 4 cây trong số 16 cây đó sao cho không có hai cây nào kề nhau bị chặt.

Giả sử đã chặt được 4 cây thỏa yêu cầu nói trên, lúc này hàng cây còn lại 12 cây (không kể cây A). Việc phục hồi lại hàng cây là đặt 4 cây đã chặt vào 4 vị trí đã chặt, số cách làm này bằng với số cách đặt 4 cây vào 4 trong số 13 vị trí xen kẽ giữa 12 cây (kể cả 2 đầu), nên:

Số cách chặt 4 cây ở trường hợp 1 là:  $C_{13}^4 = 715$  (cách).

**Trường hợp 2:** Cây A bị chặt. Khi đó hàng cây còn lại 16 cây. Ta sẽ chặt 3 cây trong số 16 cây còn lại sao cho không có hai cây nào kề nhau bị chặt (hai cây ở hai phía của cây A cũng không được chặt).

Giả sử đã chặt được 3 cây thỏa yêu cầu nói trên, lúc này hàng cây còn lại 13 cây. Do hai cây ở hai phía của cây A vừa chặt không được chặt nên ta xét hàng cây gồm 11 cây còn lại.

Tương tự như trường hợp 1, ta có số cách chặt cây là:  $C_{12}^3 = 220$  (cách).

Suy ra: số cách chặt cây thỏa yêu cầu đề bài là:  $715 + 220 = 935$  (cách).

**Bài tập 8.** Một tổ chuyên môn gồm 7 thầy và 5 cô giáo, trong đó thầy P và cô Q là vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 5 người để lập hội đồng chấm thi vấn đáp. Tính xác suất để sao cho hội đồng có 3 thầy, 3 cô và nhất thiết phải có thầy P hoặc cô Q nhưng không có cả hai.

*Lời giải.*

Kết quả của sự lựa chọn là một nhóm 5 người tức là một tổ hợp chập 5 của 12. Vì vậy không gian mẫu Q gồm:

$C_{12}^5 = 792$  phần tử.

Gọi A là biến cố cần tìm xác suất, B là biến cố chọn được hội đồng gồm 3 thầy, 2 cô trong đó có thầy P nhưng không có cô Q.

C là biến cố chọn được hội đồng gồm 3 thầy, 2 cô trong đó có cô Q nhưng không có thầy P.

Như vậy:  $A = B \cap C$  và  $n(A) = n(B) + n(C)$

Tính  $n(B)$ :

- Chọn thầy P, có 1 cách.
- Chọn 2 thầy từ 6 thầy còn lại, có  $C_6^2$  cách.
- Chọn 2 cô từ 4 cô, có  $C_4^2$  cách.

Theo quy tắc nhân:  $n(B) = C_6^2 \cdot C_4^2 = 90$

Tương tự:  $n(C) = 1 \cdot C_6^3 \cdot C_4^1 = 80$

Vậy  $n(A) = 80 + 90 = 170$  và  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{170}{792}$

**Bài tập 9.** Gọi  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$  là các hệ số trong khai triển sau :

$(x+1)^{10}(x+2) = x^{11} + a_1 x^{10} + a_2 x^9 + \dots + a_{11}$ . Hãy tính hệ số  $a_5$

**Lời giải.**

**Cách 1.** Ta có  $(x+1)^{10} = C_{10}^0 x^{10} + C_{10}^1 x^9 + \dots + C_{10}^8 x^2 + C_{10}^9 x + C_{10}^{10}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+1)^{10}(x+2) &= (C_{10}^0 x^{10} + C_{10}^1 x^9 + \dots + C_{10}^8 x^2 + C_{10}^9 x + C_{10}^{10})(x+2) \\ &= C_{10}^0 x^{11} + C_{10}^1 x^{10} + \dots + C_{10}^8 x^3 + C_{10}^9 x^2 + C_{10}^{10} x \\ &\quad + 2C_{10}^0 x^{10} + 2C_{10}^1 x^9 + \dots + 2C_{10}^8 x^2 + 2C_{10}^9 x + 2C_{10}^{10}. \end{aligned}$$

Do đó  $a_5$  chính là hệ số của số hạng chứa  $x^6$  nên ta có

$$a_5 = 2C_{10}^4 + C_{10}^5 = 672.$$

**Cách 2.** Ta có  $f(x) = (x+1)^{10} \cdot (x+2) = (x+1)^{11} + (x+1)^{10}$

$$f'(x) = 11(x+1)^9 + 10(x+1)^9$$

$$\Rightarrow f''(x) = 11 \cdot 10 \cdot (x+1)^8 + 10 \cdot 9 \cdot (x+1)^8 \dots$$

$$f^{(6)}(x) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (x+1)^5 + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (x+1)^4$$

$$\Rightarrow a_5 = \frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 672.$$

**Bài tập 10.** Trong khai triển của  $(x + a)^3(x - b)^6$ , hệ số  $x^7$  là  $-9$  và không có số hạng chứa  $x^8$ . Tìm  $a, b$ .

**Lời giải.**

Số hạng chứa  $x^7$  là:  $\left( C_3^0 \cdot C_6^2 (-b)^2 + C_3^1 a C_6^1 (-b) + C_3^2 a^2 C_6^0 \right) x^7$

Số hạng chứa  $x^8$  là:  $\left( C_3^0 C_6^1 (-b) + C_3^1 a C_6^0 \right) x^8$ .

Theo yêu cầu bài toán ta có hệ:

$$\begin{cases} 15b^2 - 18ab + 3a^2 = -9 \\ -6b + 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

## ○ CHUYÊN ĐỀ 8

# PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC TRONG CÁC BÀI TOÁN VỀ BA ĐƯỜNG CÔNIC.

Khi giải một bài toán có liên quan đến ba đường conic, nhiều học sinh thường có thói quen sử dụng "phương pháp giải tích". Đó là phương pháp cơ bản, dễ nghĩ nhưng nặng về tính toán và dễ bị nhầm lẫn. Vì vậy, trong bài viết này, tác giả muốn trao đổi với các bạn một phương pháp khác, đó là "phương pháp hình học", nghĩa là chúng ta sẽ sử dụng định nghĩa về ba đường conic để có một lời giải ngắn gọn và ít tính toán hơn cho một số dạng toán liên quan đến chứng minh tính chất, tìm quỹ tích, dựng hình, điểm cố định, đường cố định, ...

Kiến thức cơ bản cần nhớ:

1) Trên mặt phẳng tọa độ cho hai điểm cố định  $F_1, F_2$  với  $F_1F_2=2c$ . Quỹ tích những điểm  $M$  sao cho  $MF_1+MF_2=2a$  ( $a>c$ ) là một elip.  $F_1, F_2$  gọi là hai tiêu điểm của elip,  $F_1F_2=2c$  gọi là tiêu cự của nó.

2) Cho hai điểm  $F_1, F_2$  cố định trên mặt phẳng, với  $F_1F_2=2c$ . Quỹ tích những điểm  $M$  sao cho  $|MF_1-MF_2|=2a$  ( $a<c$ ) gọi là hypebol.  $F_1, F_2$  gọi là hai tiêu điểm, còn  $2c$  gọi là tiêu cự của hypebol.

3) Tập hợp các điểm trên mặt phẳng cách đều một đường thẳng  $(d)$  cố định và một điểm  $F$  cố định không thuộc  $(d)$  là một parabol.  $F$  gọi là tiêu điểm, đường thẳng  $(d)$  gọi là đường chuẩn.

Để hiểu rõ hơn về phương pháp này, mời các bạn theo dõi một vài ví dụ sau:



## 1. Chứng minh các tính chất hình học.

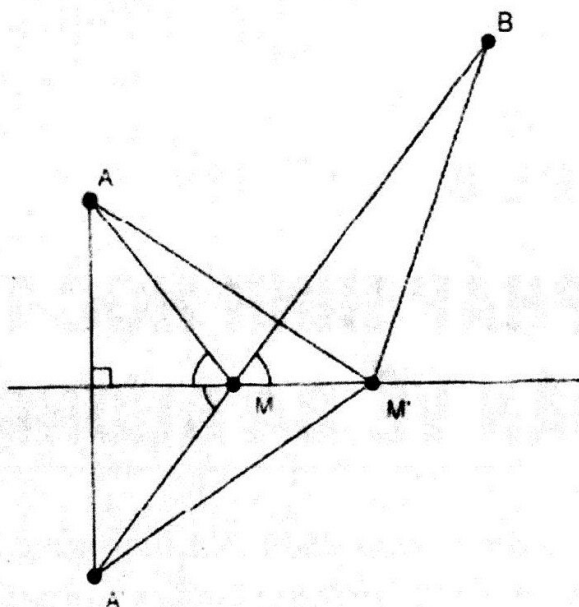
**Bài tập 1.** Cho điểm  $M$  tùy ý thuộc Elíp ( $E$ ), với  $F_1, F_2$  là hai tiêu điểm. Gọi  $t$  là tiếp tuyến qua  $M$  đối với ( $E$ ). Chứng minh rằng  $t$  là phân giác ngoài của góc  $F_1MF_2$ .

*Lời giải.*

Trước tiên ta sẽ chứng minh một bổ đề:

**Bổ đề 1.** Cho hai điểm  $A, B$  cùng nằm về một phía đối với đường thẳng  $d$ .  $M$  là một điểm chuyển động trên  $d$ . Khi đó  $MA+MB$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $M$  là điểm thỏa mãn  $d$  là phân giác ngoài của góc  $AMB$ .

**Chứng minh.**



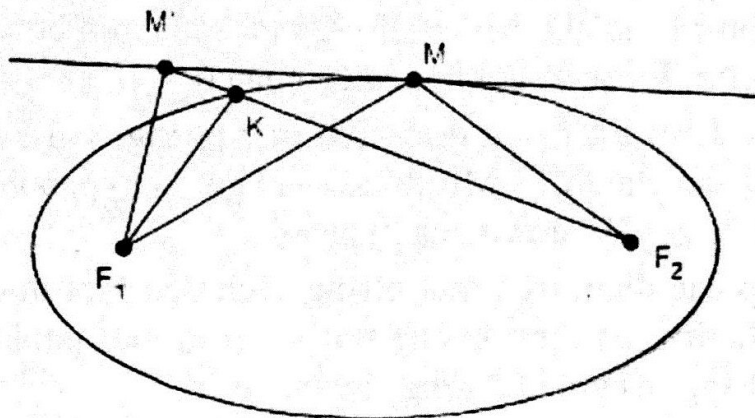
Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $d$ .  $M$  là giao của  $A'B$  với  $d$ .  $M'$  là điểm bất kì trên  $d$  khác  $M$ .

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$AM' + BM' = A'M' + BM' > A'B = A'M + MB = AM + BM.$$

Do đó  $M$  là điểm thỏa mãn  $MA+MB$  nhỏ nhất. Hiển nhiên,  $d$  là phân giác ngoài của góc  $AMB$ .

Trở lại với bài toán:





Gọi  $M'$  là điểm bất kì khác  $M$  trên  $t$ .  $M'F_2$  cắt  $(E)$  tại  $K$ .

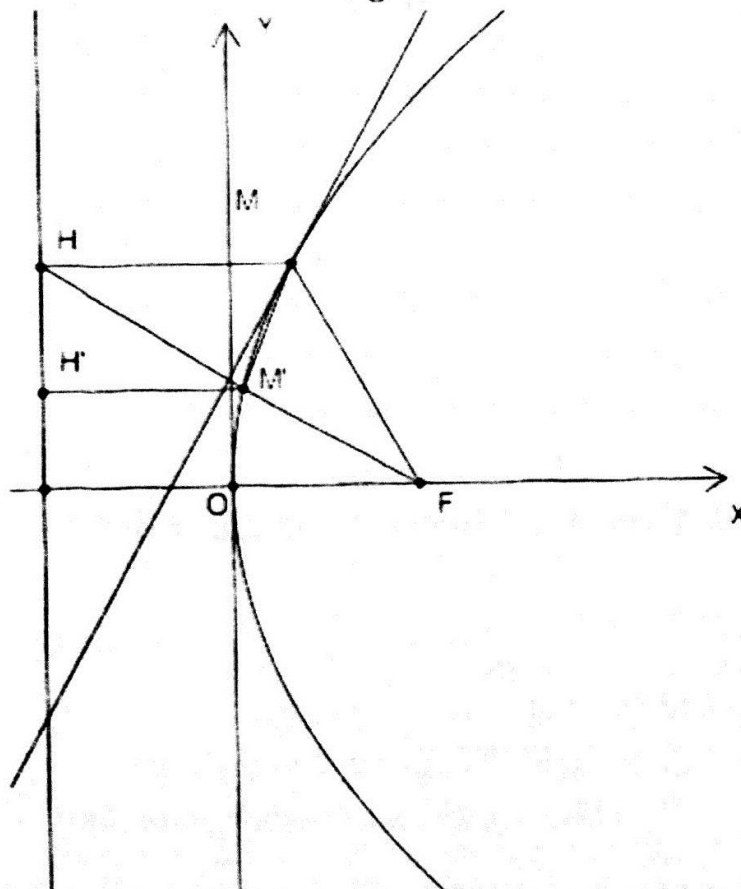
Ta có  $M'F_1 + M'F_2 = M'F_1 + M'K + KF_2 > F_1K + KF_2 = F_1M + F_2M$ .

Do đó  $M$  là điểm trên  $t$  thỏa mãn  $MF_1 + MF_2$  nhỏ nhất.

Áp dụng bổ đề 1 ta suy ra  $t$  là phân giác ngoài của góc  $F_1MF_2$ . (đpcm)

**Bài tập 2.** Trên mặt phẳng tọa độ cho parabol  $(P): y^2 = 2px$ , với  $F$  là tiêu điểm.  $M$  là một điểm trên parabol. Vẽ tiếp tuyến  $\Delta$  với  $(P)$  tại  $M$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $M$  trên đường chuẩn  $d$  của  $(P)$ . Chứng minh  $\Delta$  là phân giác trong của góc  $HMF$ .

*Lời giải.*



Giả sử phân giác  $l$  của góc  $HMF$  không phải là tiếp tuyến  $\Delta$  của  $(P)$  tại  $M$ .

Khi đó  $l$  cắt  $(P)$  tại điểm  $M'$ .

Gọi  $H'$  là hình chiếu của  $M'$  trên đường chuẩn  $d$ .

Ta có  $M'H = M'F$ . (1)

Mặt khác do  $M'$  nằm trên phân giác  $l$  của góc  $HMF$  và  $MH = MF$  nên

$\Delta HMM' = \Delta FMM'$  (c.g.c).

Suy ra  $M'H' = M'F$ . (2)

Tr (1) và (2) ta có  $M'H = M'H'$ .

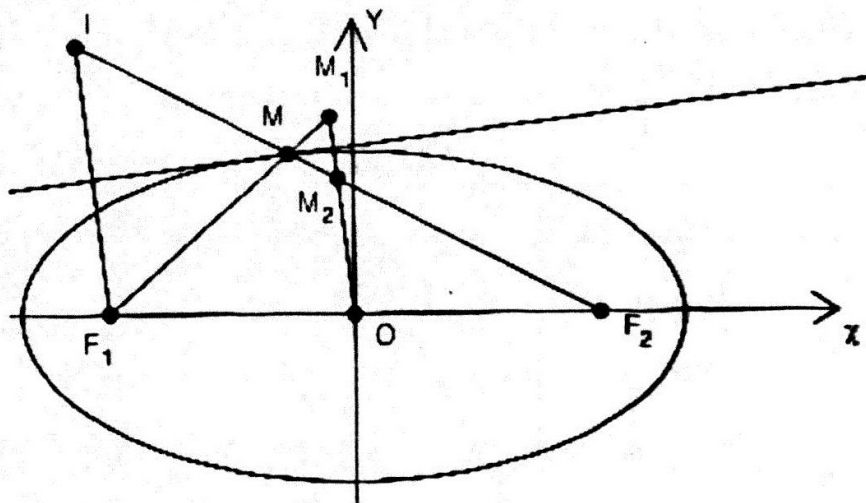
Theo tính chất đường xiên và hình chiếu:  $M'H > M'H'$  nên suy ra vô lý.

Vậy  $\Delta$  là phân giác trong của góc  $HMF$  (đpcm).

## 2. Tìm quỹ tích

**Bài tập 1.** Cho  $M$  là một điểm thuộc Elíp ( $E$ ) có tâm  $O$ , hai tiêu điểm  $F_1, F_2$ .  $t$  là tiếp tuyến qua  $M$  đối với ( $E$ ). Đường thẳng qua  $O$  và vuông góc với  $t$  cắt  $MF_1, MF_2$  lần lượt tại  $M_1, M_2$ . Tìm quỹ tích  $M_1, M_2$  khi  $M$  chuyển động trên ( $E$ ).

*Lời giải.*



Gọi  $I$  là điểm đối xứng với  $F_1$  qua  $t$ .

Theo bài toán 1 ta có  $I, M, F_2$  thẳng hàng.

Mà  $OM_2 \perp t, F_1I \perp t$  nên  $F_1I \parallel OM_2$ .

Do đó  $OM_2$  là đường trung bình của tam giác  $F_1IF_2$ .

Ta suy ra:  $F_2M_2 = \frac{1}{2} F_2I = \frac{1}{2} (F_2M + MI) = \frac{1}{2} (F_2M + F_1M) = a$ .

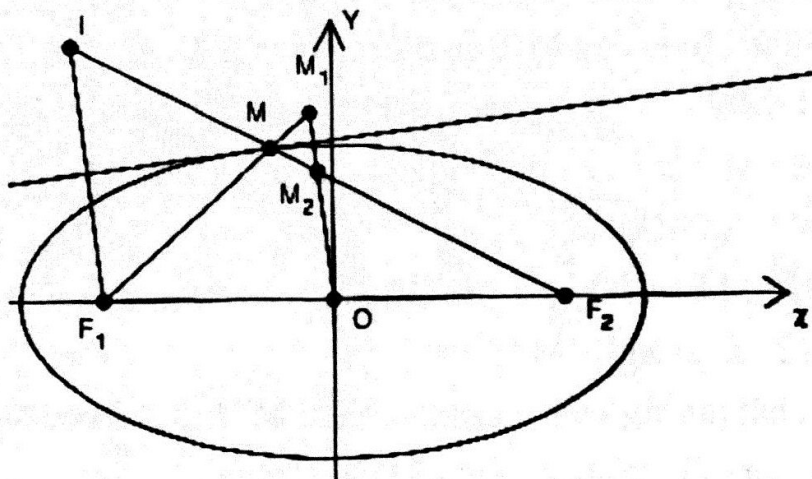
Vậy quỹ tích của  $M_2$  là đường tròn ( $F_2, a$ ).

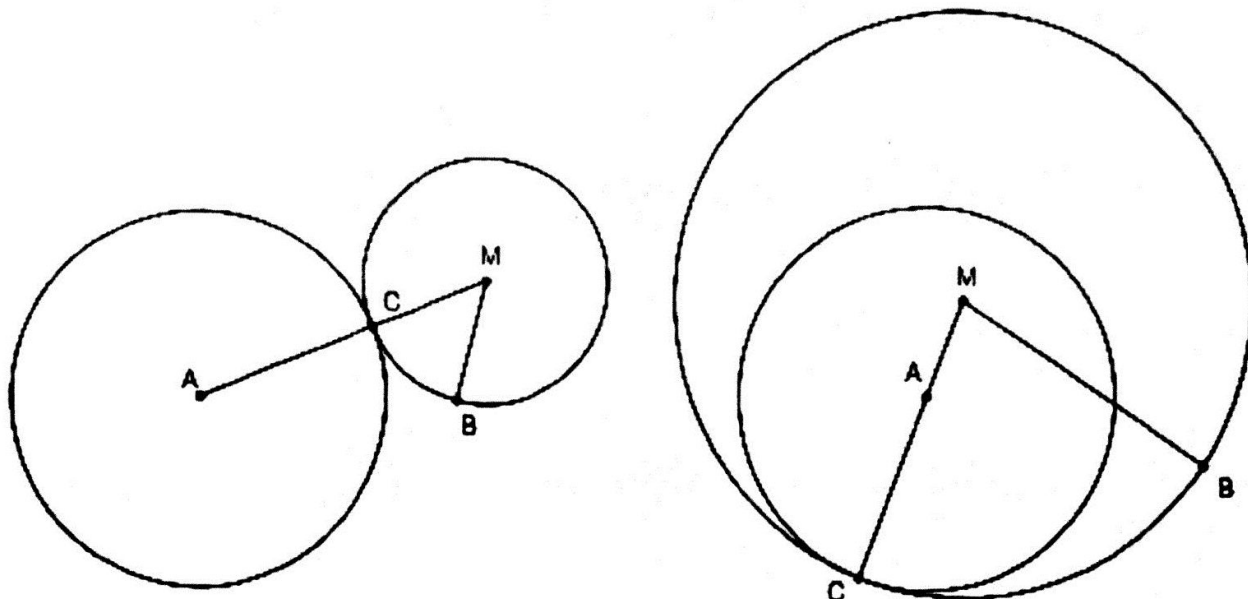
Tương tự, quỹ tích của  $M_1$  là đường tròn ( $F_1, a$ ).

*(Độc giả tự chứng minh phần đảo).*

**Bài tập 2.** Cho đường tròn tâm  $A$  bán kính  $a$  và một điểm  $B$  nằm ngoài đường tròn. Tìm quỹ tích tâm  $M$  của đường tròn qua  $B$  và tiếp xúc với ( $A, a$ ).

*Lời giải.*





**Trường hợp 1:** (M, MB) tiếp xúc ngoài với (A, a). Gọi tiếp điểm là C.

$$\text{Ta có } MA - MB = AC + CM - MB = AC = a \quad (1)$$

**Trường hợp 2:** (M, MB) tiếp xúc trong với (A, a).

Gọi C là tiếp điểm ta suy ra

$$MB - MA = MB - (MC - AC) = AC. \quad (2)$$

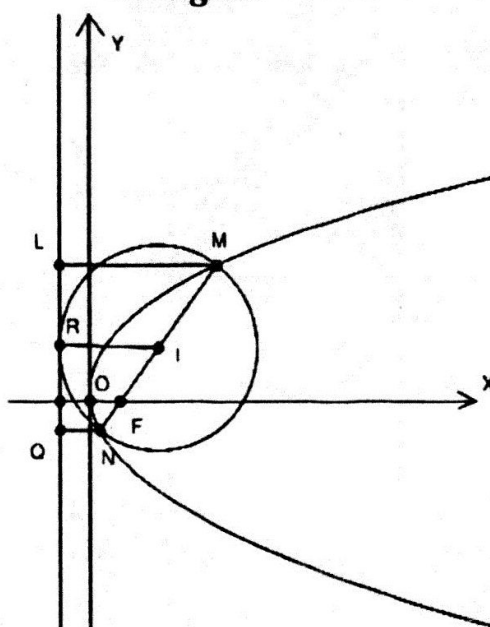
Từ (1) và (2) suy ra  $|MA - MB| = a$ .

Vậy quỹ tích tâm M là hyperbol nhận A, B làm hai tiêu điểm và thực trục bằng a.

### 3. Các bài toán liên quan đến yếu tố cố định

**Bài tập 1.** Cho parabol (P):  $y^2 = 2px$  và đường thẳng  $\Delta$  di động đi qua tiêu điểm F của parabol và cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. Chứng minh rằng các đường tròn đường kính MN luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

*Lời giải.*



Gọi I là trung điểm của MN; L, R, Q lần lượt là hình chiếu của M, I, N trên đường chuẩn d.

Ta có  $ML = MF$ ,  $NQ = NF$  nên  $MN = MF + NF = ML + NQ$ .

Do  $IR \parallel ML \parallel NQ$  nên IR là đường trung bình của hình thang LMNQ.

$$\text{Suy ra } IR = \frac{1}{2} (ML + NQ) = \frac{1}{2} MN.$$

Do đó R thuộc đường tròn đường kính MN.

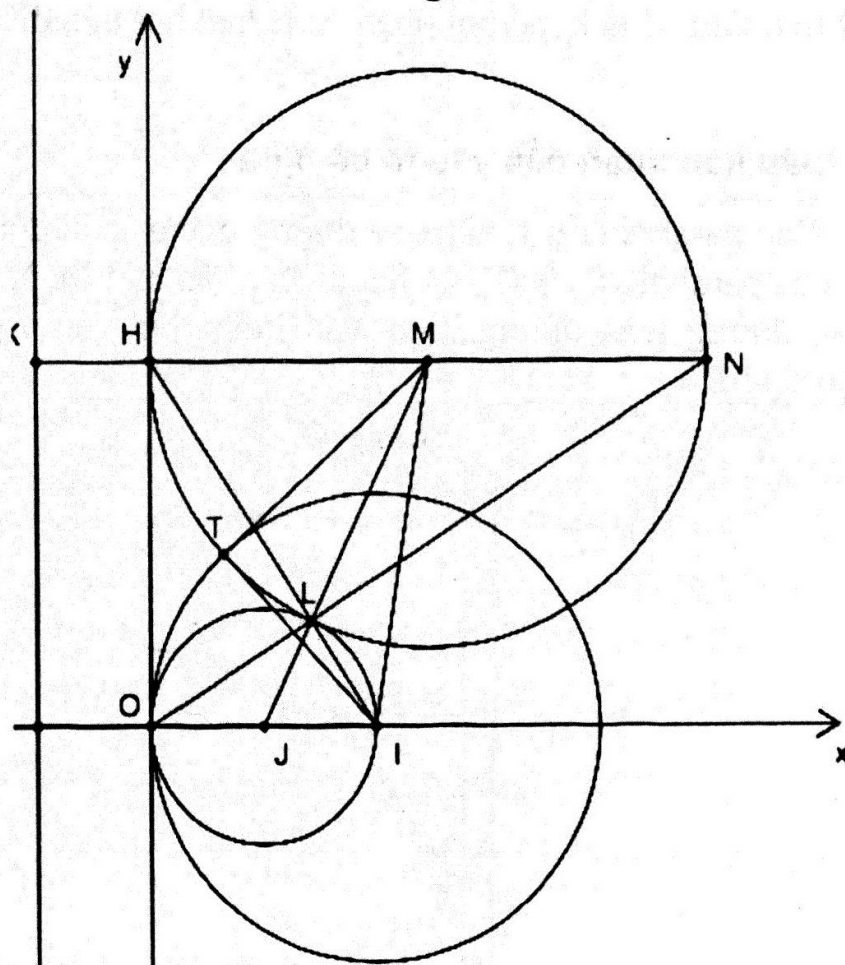
Suy ra đường tròn đường kính MN luôn tiếp xúc với đường chuẩn d.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Bài tập 2.** Trên mặt phẳng tọa độ cho đường tròn (C) tâm I(R, 0), bán kính R. M là điểm chuyển động trên mặt phẳng sao cho  $MT = MH$  với T và H thứ tự là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) và hình chiếu của M trên Oy.

- Chứng minh rằng các đường tròn tâm M, bán kính MT luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định. Viết phương trình của đường tròn này.
- Chứng minh rằng M nằm trên một parabol. Viết phương trình của parabol này.

*Lời giải.*



a, Gọi L là giao điểm của IH với (M, MH).

Do MT là tiếp tuyến của (C) nên IT là tiếp tuyến của (M, MH).





Giả sử ta có (I) tiếp xúc với Ox tại F và tiếp xúc với (P) tại M.

Gọi H là hình chiếu của M trên đường chuẩn d.

Kẻ tiếp tuyến t đối với (P) qua M. t cắt Ox tại K.

Theo bài tập 2 mục 1, ta có t là phân giác trong của góc HMF.

Ta có  $\widehat{HMK} = \widehat{FMK}$ . Mà  $MH \parallel Ox$  nên  $\widehat{HMK} = \widehat{MKF}$ .

Do đó tam giác MKF đều.

Suy ra  $\widehat{OFM} = 60^\circ$ .

Vậy M là giao điểm của (P) với đường thẳng qua F và tạo với tia Ox góc  $60^\circ$ .

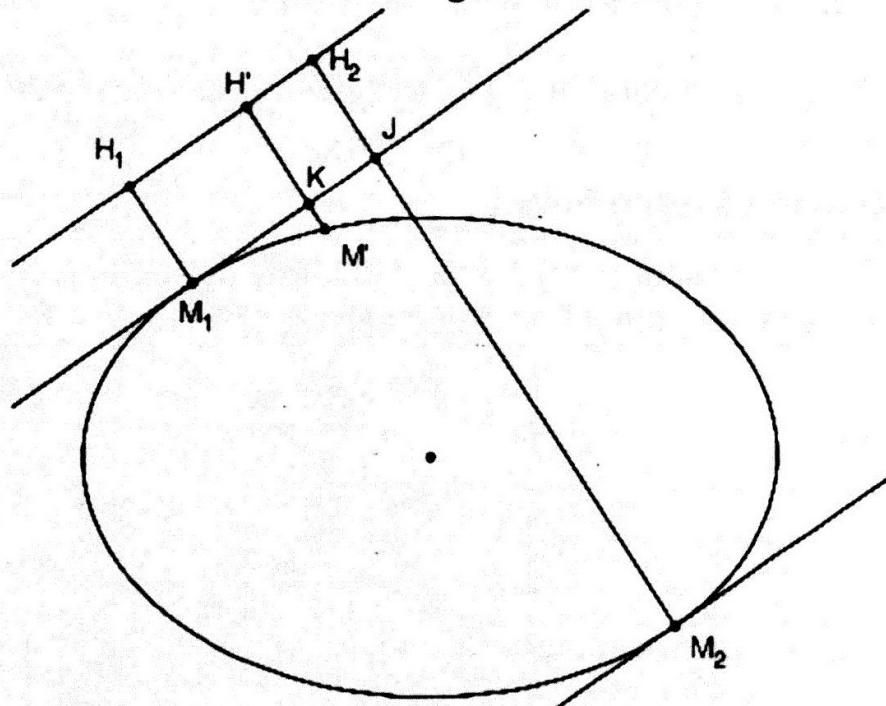
Từ đó xác định được tâm I.

Bài toán có hai nghiệm hình.

## 5. Các bài toán về cực trị

**Bài tập 1.** Cho một đường thẳng d nằm ngoài Elíp (E). Tìm vị trí các điểm M trên (E) sao cho khoảng cách từ M đến d lớn nhất, nhỏ nhất.

*Lời giải.*



Tịnh tiến đường thẳng d đến hai vị trí  $d_1, d_2$  tiếp xúc với (E) lần lượt tại  $M_1, M_2$ . Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử d và (E) khác phía so với  $d_1, d_2$  và (E) nằm cùng phía so với  $d_2$ .

Kẻ  $M_1H_1 \perp d, M_2H_2 \perp d$ . Với mỗi điểm  $M'$  nằm trên (E) khác  $M_1$  và  $M_2$ .

Kẻ  $M'H' \perp d$ , cắt  $d_1$  tại K.  $M_2H_2$  cắt  $d_1$  tại J.

Do  $M'$  nằm trên phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  nên  $0 < M'K < M_2J$ .

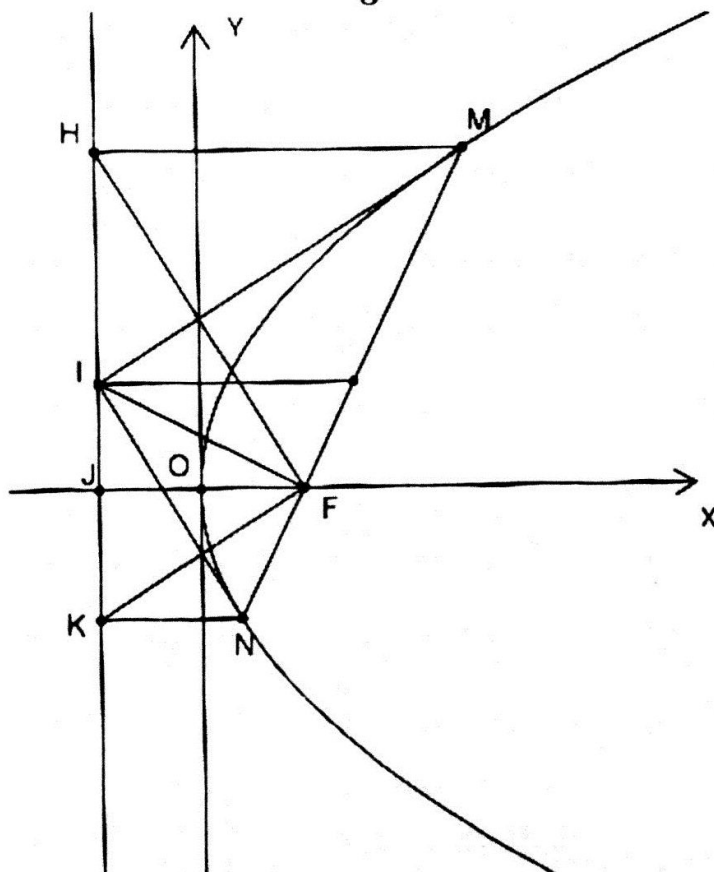
Suy ra  $M_1H_1 < M'K + H'K < M_2J + H_2J$  hay  $M_1H_1 < M'H' < M_2H_2$ .

Vậy  $M_1$  là vị trí thỏa mãn khoảng cách từ M đến d nhỏ nhất,  $M_2$  là vị trí thỏa mãn khoảng cách từ M đến d lớn nhất.

**Nhận xét.** Trong khi làm bài tập sẽ cho biết phương trình đường thẳng  $d$  và  $(E)$ , yêu cầu tìm tọa độ của  $M$ . Ta biết được hệ số góc của  $d_1$  và  $d_2$  nên dựa vào điều kiện tiếp tuyến của Elip sẽ dễ dàng giải quyết được bài toán.

**Bài tập 2.** Cho Parabol  $(P): y^2 = 2px$  với  $F$  là tiêu điểm. Một đường thẳng  $d$  bất kì đi qua  $F$  cắt  $(P)$  tại hai điểm  $M, N$ . Tìm  $d$  sao cho  $MF \cdot NF$  nhỏ nhất.

**Lời giải.**



Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $M, N$  trên đường chuẩn  $d$ .  $I$  là trung điểm  $HK$ .

Ta có  $MH = MF$ ,  $NK = NF$  nên các tam giác  $HMF$  và  $KNF$  lần lượt cân tại  $M, N$ .

$$\Rightarrow \widehat{HFO} = \widehat{MHF} = \widehat{MFH}, \widehat{KFO} = \widehat{KNF} = \widehat{NFK}$$

Suy ra  $\widehat{HFK} = 90^\circ$  nên  $IH = IF$ .

$\Rightarrow \widehat{IHF} = \widehat{IFH}$ , ta thu được  $IF$  vuông góc với  $MN$ .

Mặt khác, theo ví dụ 5, tam giác  $MIN$  vuông tại  $I$  nên ta có

$$FM \cdot FN = FI^2 \geq FJ^2 = p^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng  $MN$  vuông góc với  $Ox$ .

Cuối cùng, các bạn hãy thử giải những ví dụ trên và các bài tập dưới đây bằng cả phương pháp giải tích và phương pháp hình học để có thể so sánh được lợi ích của mỗi phương pháp.

## 6. Bài tập.

**Bài 1.** Cho điểm M tùy ý trên Hyperbol (H):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Gọi (t) là tiếp tuyến qua M đối với (H). Chứng minh rằng (t) là phân giác trong của góc  $F_1MF_2$ .

**Bài 2.** Cho điểm M tùy ý thuộc (H):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  và (t) là tiếp tuyến của (H) qua M. (t) cắt trục tung tại N. Gọi  $N_1, N_2$  là hình chiếu vuông góc của N lên  $MF_1, MF_2$ . Chứng minh đường thẳng  $(N_1N_2)$  đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên (H).

**Bài 3.** Cho Parabol (P):  $y^2=2px$  với đường chuẩn d. I là điểm bất kì trên d. Từ I kẻ hai tiếp tuyến IM, IN tới (P). Chứng minh rằng  $\widehat{MIN} = 90^\circ$ .

**Bài 4.** Cho Elíp (E):  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$  và đường thẳng (d):  $x+y+18=0$ . Tìm tọa độ các điểm M thuộc (E) sao cho khoảng cách từ M đến (d) lớn nhất, nhỏ nhất.

**Bài 5.** Cho Parabol (P):  $y^2=4x$  với tiêu điểm F. Hai điểm M, N chuyển động trên (P) sao cho M, F, N thẳng hàng.

a, Tìm M, N sao cho MN nhỏ nhất.

b, Chứng minh rằng  $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF}$  là một hằng số.

c, Giả sử MN cắt Oy tại K. Chứng minh rằng  $KM \cdot KN = KF^2$ .

d, Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M, N đến Oy là một hằng số.

**Bài 6.** Cho Elíp (E) với hai tiêu điểm  $F_1, F_2$ . M là điểm bất kì nằm ngoài (E). Kẻ hai tiếp tuyến qua M tới (E), với X, Y là hai tiếp điểm. Chứng minh rằng  $F_1M, F_2M$  lần lượt là phân giác của góc  $XF_1Y, XF_2Y$ .

**Bài 7.** Cho Parabol (P):  $y^2=2px$ . Ba điểm X, Y, Z bất kì nằm trên (P). Kẻ các tiếp tuyến tới (P) qua X, Y, Z. Chúng cắt nhau tạo thành tam giác ABC. Tìm quỹ tích trục tâm H của tam giác ABC.

**Bài 8.** Cho hai đường tròn  $(C_1): (x+5)^2+y^2=441, (C_2): (x-5)^2+y^2=25$ . Tìm quỹ tích tâm các đường tròn (C) tiếp xúc trong với  $(C_1)$  và tiếp xúc ngoài với  $(C_2)$ .

**Bài 9.** Trên mặt phẳng cho Elíp (E) có phương trình  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  có hai tiêu điểm  $F_1, F_2$ ; A và B là hai điểm trên (E) sao cho  $AF_1+BF_2=8$ . Tính  $AF_2+BF_1$ ?

**Bài 10.** Cho Elíp (E) có phương trình:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ , hai tiêu điểm  $F_1, F_2$ . M là điểm bất kì trên (E). Chứng minh rằng tích khoảng cách từ  $F_1, F_2$  tới tiếp tuyến của (E) đi qua M luôn không đổi.



**Bài 11.** Cho Elíp (E) có phương trình:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Điểm M  $(1, \frac{4\sqrt{2}}{3})$  thuộc (E). Tìm điểm M' trên (E) sao cho tiếp tuyến tới (E) tại M' song song với tiếp tuyến tới (E) tại M.

**Bài 12.** Cho Hyperbol (H):  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ . M là điểm tùy ý trên (H).

a, Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là một hằng số.

b, Kẻ tiếp tuyến tới (H) qua M, cắt hai tiệm cận tại A, B. Chứng minh rằng M là trung điểm AB.

c, Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Chứng minh rằng diện tích tam giác IAB không đổi.

## O CHUYÊN ĐỀ 9

# THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN & ỨNG DỤNG.

*Đề thi đại học thường có một câu hình học không gian mà trong đó, bài toán về thể tích khối đa diện luôn chiếm một vị trí quan trọng. Sau đây, chúng tôi xin giới thiệu một số phương pháp tính thể tích và đưa ra hai ứng dụng đặc sắc của thể tích khối đa diện là tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.*

## I. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH THỂ TÍCH.

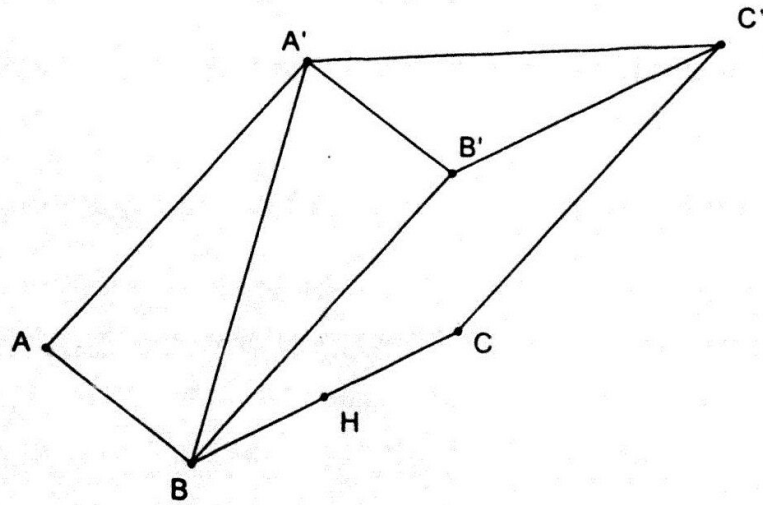
### 1. Tính trực tiếp.

Trong phương pháp này, cần xác định chiều cao và diện tích đáy của khối. Việc tính diện tích đáy thường được thực hiện khá dễ dàng. Vấn đề khó khăn hơn là tính chiều cao nên trong nhiều trường hợp ta cần sử dụng các định lý về quan hệ vuông góc đã học ở lớp 11, các phép tính lượng giác, định lý Pi-ta-go,... Các bài toán thuộc loại này luôn đòi hỏi việc tính toán cẩn thận và chính xác. Để tìm hiểu kỹ hơn, chúng ta cùng xem xét một số bài tập sau:

**Bài tập 1.** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có độ dài cạnh bên bằng  $2a$ , đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$  và hình chiếu vuông góc của đỉnh  $A'$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $A'.ABC$ .

(Trích đề thi Đại học khối A năm 2008)

**Lời giải.**



Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$ , suy ra  $A'H \perp (ABC)$ .

Mặt khác, lại do tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên

$$AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$$

Do đó  $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2$ . Từ đó suy ra  $A'H = a\sqrt{3}$

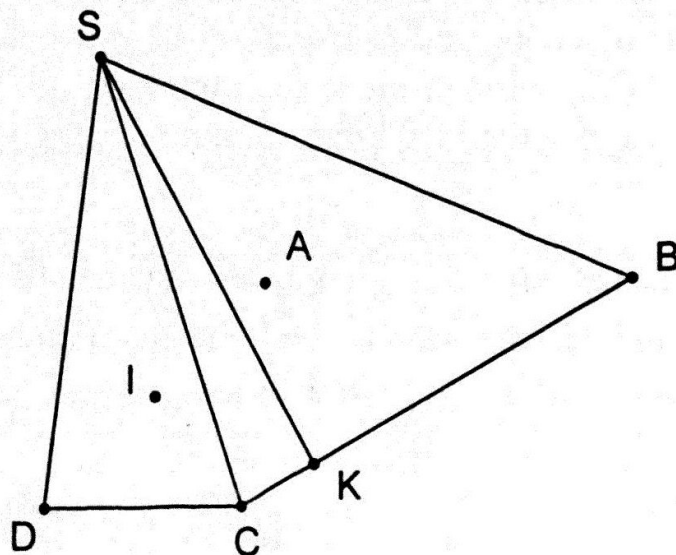
$$\text{Vậy } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} \cdot A'H \cdot S_{ABC} = \frac{a^3}{2} \text{ (đvtt).}$$

**Bài tập 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ ;  $AB = AD = 2a$ ,  $CD = a$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Biết hai mặt phẳng  $(SBI)$  và  $(SCI)$  cùng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ .

Tính thể tích khối chóp  $S.ABCD$  theo  $a$ .

(Trích đề thi Đại học khối A năm 2009)

**Lời giải.**



Gọi  $K$  là hình chiếu của  $I$  trên  $BC$ .

Do hai mặt phẳng  $(SBI)$  và  $(SCI)$  cùng vuông góc với mặt phẳng

$(ABCD)$  nên  $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp BC$ .

Mà  $IK \perp BC$  nên  $BC \perp (SIK) \Rightarrow \widehat{SKI} = 60^\circ$ .

Ta tính được  $S_{ABCD} = 3a^2$ , tổng diện tích các tam giác  $ABI$  và  $CDI$  bằng  $\frac{3a^2}{2}$

Từ đó suy ra  $S_{IBC} = S_{ABCD} - S_{ABI} - S_{CDI} = \frac{3a^2}{2}$

$$BC = \sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow IK = \frac{2S_{IBC}}{BC} = \frac{3\sqrt{5}a}{5}$$

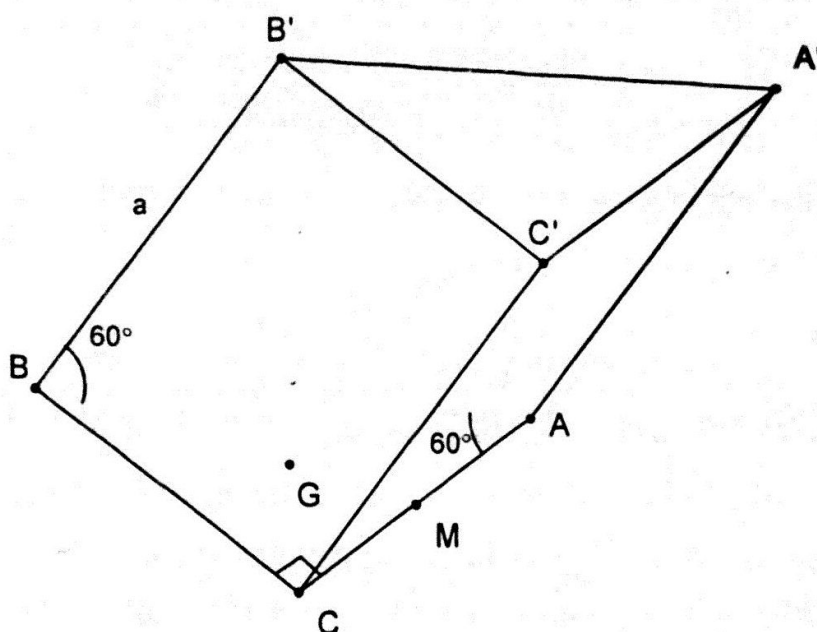
$$\Rightarrow SI = IK \cdot \tan \widehat{SKI} = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$$

Vậy thể tích khối chóp  $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SI = \frac{3\sqrt{15}}{5} a^3$  (đvtt).

**Bài tập 3.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $BB' = a$ . Góc giữa đường thẳng  $BB'$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  có  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $B'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tính thể tích khối tứ diện  $A'ABC$  theo  $a$ .

(Trích đề thi Đại học khối B năm 2009)

**Lời giải.**



Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

Ta có  $BG \perp (ABC)$  nên tam giác  $BB'G$  vuông tại  $G$ . Mà  $\widehat{B'BG} = 60^\circ$

$$\text{suy ra } B'G = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } BG = \frac{a}{2} \Rightarrow BM = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Đặt } BC = x. \text{ Ta có: } CM = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{\tan \widehat{BAC}} = \frac{x}{2\sqrt{3}}.$$

Theo định lý Pi-ta-go,

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 \Leftrightarrow \frac{9a^2}{16} = x^2 + \frac{x^2}{12} \Rightarrow x^2 = \frac{27}{52} a^2.$$

$$\text{Suy ra } S_{ABC} = \frac{1}{2} CB \cdot CA = \frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{104} a^2 \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Do } A'B' \parallel AB \text{ nên } V_{A'ABC} = V_{B'ABC} = \frac{1}{3} B'G \cdot S_{ABC} = \frac{9}{208} a^3 \text{ (đvtt)}.$$

## 2. Phân chia khối đa diện thành tổng hoặc hiệu của các khối cơ bản hoặc sử dụng tỉ số thể tích (tính gián tiếp).

Trên thực tế, không phải lúc nào ta cũng dễ dàng tính trực tiếp thể tích khối đa diện theo phương pháp 1. Trong nhiều bài toán, ta khó có thể xác định và tính được chiều cao hay diện tích đáy. Khi gặp trường hợp đó, thông thường ta có thể làm như sau:

- Phân chia khối cần tính thể tích thành tổng hoặc hiệu của các khối cơ bản mà những khối này có thể tính dễ dàng hơn.

- Sử dụng tỉ số thể tích.

1) Cho hình chóp  $S.ABC$ , với  $A' \in SA$ ,  $B' \in SB$ ,  $C' \in SC$ . Khi đó,

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$

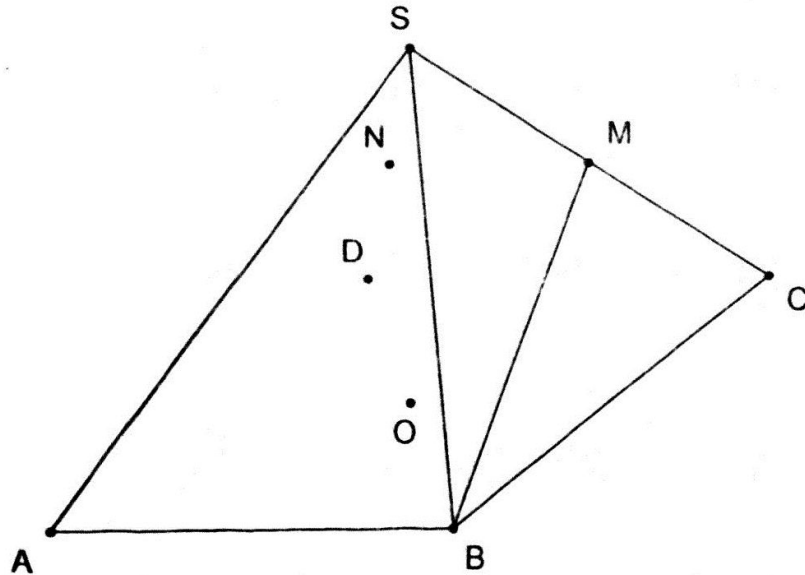
2) Cho hình chóp đa giác  $S.A_1A_2 \dots A_n$ . Một điểm  $A'$  bất kì trên  $SA_1$ . Khi đó

$$\frac{V_{A'.A_1A_2A_3 \dots A_n}}{V_{S.A_1A_2A_3 \dots A_n}} = \frac{A_1A'}{SA_1}.$$

**Bài tập 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh bằng  $\sqrt{5}(cm)$ , đường chéo  $AC = 4(cm)$ . Đoạn thẳng  $SO = 2\sqrt{2}(cm)$  và vuông góc với đáy, ở đây  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $SC$ . Giả sử mặt phẳng  $(ABM)$  cắt  $SD$  tại  $N$ .  
Tính thể tích khối chóp  $S.ABMN$ .



**Lời giải.**



Ta có  $AB \parallel CD$  suy ra  $AB \parallel (SCD)$ .

Do đó giao tuyến của  $(ABM)$  và  $(SCD)$  là  $MN \parallel CD$  ( $N \in SD$ ).

Vì M là trung điểm SC nên N là trung điểm SD.

$$\text{Ta có: } V_{S.ABMN} = V_{S.ABN} + V_{S.BNM} \Rightarrow V_{S.ABN} = \frac{1}{2} V_{S.ABD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD}.$$

$$\frac{V_{S.BNM}}{V_{S.BCD}} = \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SB}{SB} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.BNM} = \frac{1}{4} V_{S.BCD} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABMN} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác góc AOB vuông nên } OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{5 - 4} = 1.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } V_{S.ABMN} = \sqrt{2} \text{ (đvtt).}$$

**Bài tập 2.** Tính thể tích khối tứ diện ABCD biết  $AB = a, AC = b, AD = c$  và  $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60^\circ$ .

(Trích đề Dự bị khối A năm 2002)

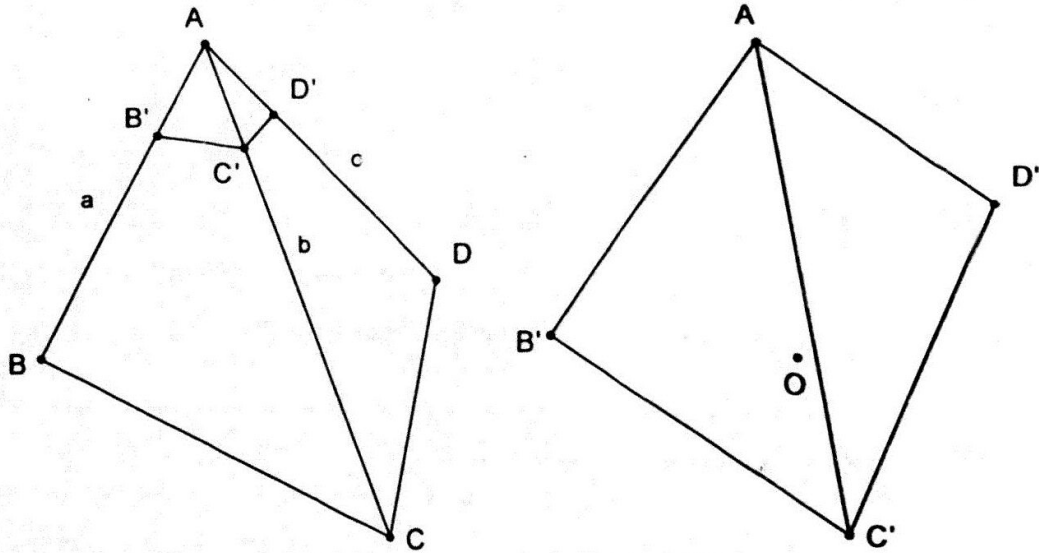
**Lời giải.**

Trên AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' sao cho

$$AB' = AC' = AD' = 1.$$

Theo giả thiết, ta có  $\widehat{B'AC'} = \widehat{C'AD'} = \widehat{D'AB'} = 60^\circ$  nên các tam giác  $AB'C'$ ,  $AC'D'$ ,  $AD'B'$  đều và có cạnh bằng 1.

$$S_{B'C'D'} = \frac{1}{2} B'D' \cdot C'D' \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{đvdt}).$$



Gọi O là tâm tam giác  $B'C'D'$  suy ra O là hình chiếu của A trên  $(B'C'D')$ .

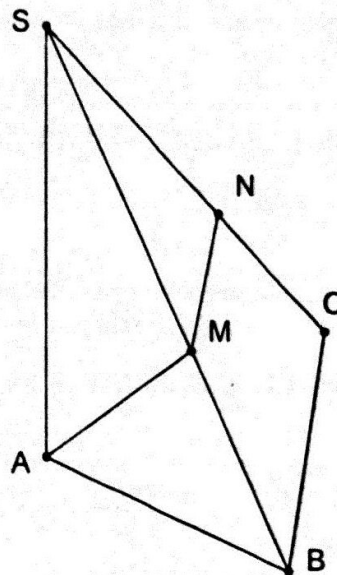
$$\text{Ta có } AO = \sqrt{AD'^2 - OD'^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{AB'C'D'} = \frac{1}{3} AO \cdot S_{B'C'D'} = \frac{\sqrt{2}}{12} (\text{đvtt}).$$

$$\text{Mà } \frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC} \cdot \frac{AD'}{AD} = \frac{1}{abc} \Rightarrow V_{ABCD} = abc \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} (\text{đvtt})$$

**Bài tập 3.** Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng a.  $SA=2a$  và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N tương ứng là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Tính thể tích khối chóp A.BMNC theo a.

(Trích đề thi Đại học khối D năm 2006)

**Lời giải.**



Ta có  $V_{A.BMNC} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN}$ . Do  $SA \perp (ABC)$  và  $AB=AC$  nên  $SB=SC$ .

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông:

$$SN \cdot SC = SA^2 = SM \cdot SB \text{ suy ra } SM = SN.$$

$$SB = \sqrt{SA^2 + BA^2} = \sqrt{5}a \Rightarrow SM = \frac{SA^2}{SB} = \frac{4a^2}{\sqrt{5}a} = \frac{4a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \left( \frac{SM}{SB} \right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{16}{25} V_{S.ABC}.$$

$$\Rightarrow V_{A.BMNC} = \frac{9}{25} V_{S.ABC} = \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{50} a^3 \text{ (đvtt)}.$$

## II. ỨNG DỤNG CỦA THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

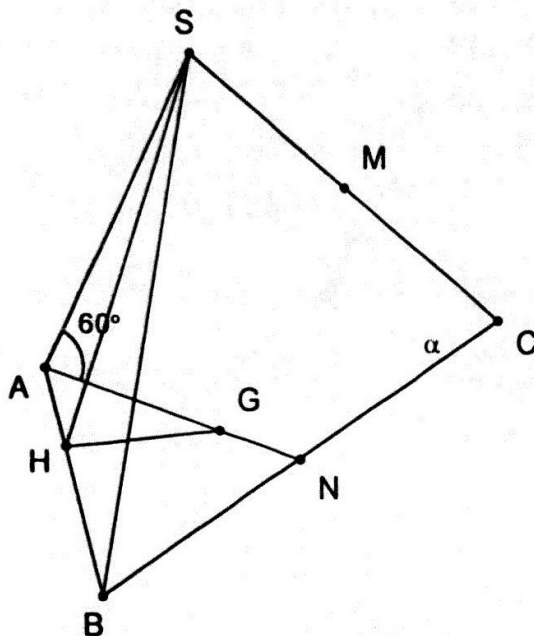
### 1. Tính khoảng cách.

Phương pháp này rất hữu ích trong bài toán tính khoảng cách khi ta dễ dàng tính được thể tích một khối đa diện và diện tích một đáy. Việc tìm các

khoảng cách này dựa vào công thức đơn giản:  $h = \frac{3V}{S}$ .

**Bài tập 1.** Cho hình chóp  $S.ABC$ ,  $SA=a$  và  $SA$  tạo với mặt phẳng đáy góc  $60^\circ$ . Biết hình chiếu vuông góc của  $S$  trên  $(ABC)$  trùng với trọng tâm tam giác  $ABC$ ,  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ,  $\widehat{ACB} = \alpha$ .  $M$  là trung điểm  $SC$ . Tính khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(SAB)$  theo  $a$  và  $\alpha$ .

*Lời giải.*



Gọi  $N$  là trung điểm  $BC$ . Ta có tam giác  $AGS$  vuông tại  $G$  nên  $AG = \frac{a}{2}$ ,

$$\text{suy ra } AN = \frac{3a}{4} \Rightarrow BC = 2AN = \frac{3a}{2}.$$

Lại do  $AC=BC.\cos \alpha$ ,  $AB=BC.\sin \alpha$  nên

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} .BC^2 .\sin \alpha .\cos \alpha = \frac{1}{4} .\sin 2\alpha .\frac{9a^2}{4} = \sin 2\alpha .\frac{9a^2}{16} \text{ (đvdt)}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SG.S_{ABC} = \frac{1}{3} .\frac{\sqrt{3}}{2} a .\sin 2\alpha .\frac{9a^2}{16} = \frac{a^3 .3\sqrt{3} .\sin 2\alpha}{32} \text{ (đvtt)} \quad (1)$$

Do M là trung điểm SC nên  $d_{M/(SAB)} = \frac{1}{2} .d_{C/(SAB)}$ .

Mặt khác, gọi H là hình chiếu của S trên AB. Do  $AB \perp SG$ ,  $AB \perp SH$  nên theo định lý ba đường vuông góc,

$$GH \perp AB \Rightarrow GH = \frac{1}{3} CA = \frac{1}{3} .\frac{3a}{2} .\cos \alpha = \frac{a}{2} \cos \alpha .$$

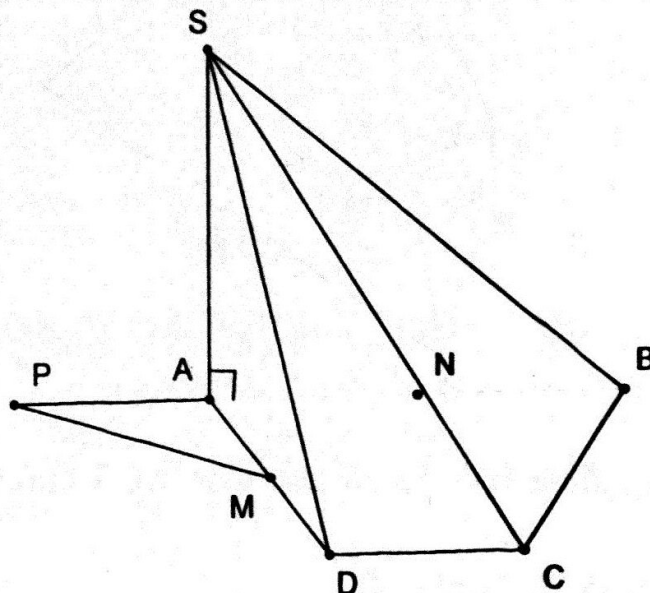
$$\Rightarrow SH = \sqrt{GH^2 + SG^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \cos^2 \alpha + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{\cos^2 \alpha + 3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{SAB} &= \frac{1}{2} .SH .AB = \frac{1}{2} .\frac{a}{2} \sqrt{\cos^2 \alpha + 3} .\frac{3a}{2} \sin \alpha \\ &= \frac{3a^2}{8} \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + 3} \text{ (đvdt)} \quad (2) \end{aligned}$$

Vậy  $d_{M/(SAB)} = \frac{1}{2} .d_{C/(SAB)} = \frac{3V_{S.ABC}}{2S_{SAB}}$  với  $V_{S.ABC}$  và  $S_{SAB}$  được tính theo công thức (1) và (2).

**Bài tập 2.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang. Đáy lớn  $AB=2a$ ,  $BC=CD=DA=a$ . SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc tạo bởi (SBC) với đáy bằng  $\alpha$ . M là trung điểm AD. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC).

**Lời giải.**





Gọi N là trung điểm AB.

Ta có  $AN \parallel DC$  và  $AN=DC=a$  nên ADCN là hình bình hành.

Từ đó  $NC=AD=a$ .

Suy ra  $NA=NB=NC=a$  hay  $\widehat{ACB} = 90^\circ$ .

Do  $SA \perp (ABCD)$  nên  $SA \perp BC$ .

Áp dụng định lý ba đường vuông góc ta suy ra  $SC \perp BC \Rightarrow \widehat{SCA} = \alpha$ .

Mặt khác, tam giác NBC đều nên  $\widehat{NBC} = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3}a$ .

$$\Rightarrow SA = AC \cdot \tan \alpha = \sqrt{3}a \cdot \tan \alpha.$$

Dễ dàng tính được  $S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$  (đvdt).

Suy ra  $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}a \cdot \tan \alpha \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3}{4} \tan \alpha \cdot a^3$  (đvtt)

Kéo dài MC cắt AB tại P suy ra M là trung điểm PC.

Suy ra  $d_{M/(SBC)} = \frac{1}{2} d_{P/(SBC)}$

Mặt khác,  $S_{PAM} = S_{CMD}$  nên  $S_{PBC} = S_{ABCD}$ , suy ra  $V_{S.ABCD} = V_{P.SBC}$ .

$$\Rightarrow d_{P/(SBC)} = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{SBC}} = \frac{9 \cdot \tan \alpha \cdot a^3}{2 \cdot SC \cdot CB} = \frac{9 \cdot \tan \alpha \cdot a^3}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{\cos \alpha} \cdot a} = \frac{9 \sin \alpha \cdot a}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } d_{M/(SBC)} = \frac{9 \sin \alpha \cdot a}{4\sqrt{3}}.$$

## 2. Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.

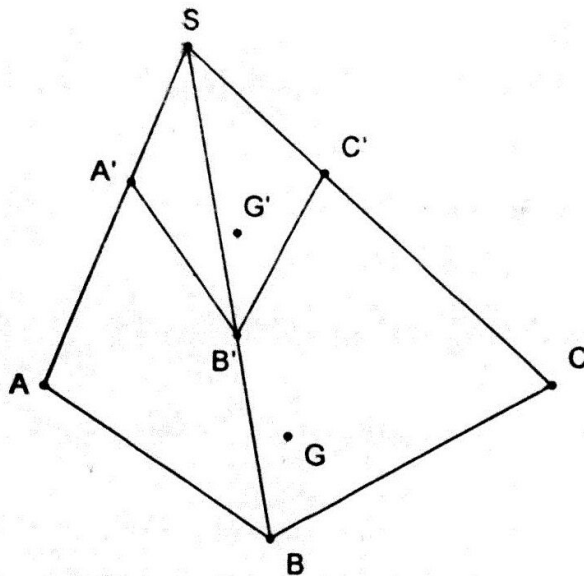
**Bài tập 1.** Cho hình chóp S.ABC. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (P) bất kì cắt các tia SA, SB, SC, SG lần lượt tại A', B', C', G'.

Chứng minh rằng:  $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}.$

*Lời giải.*

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên  $V_{S.ABG} = V_{S.BCG} = V_{S.ACG} = \frac{1}{3} V_{S.ABC}.$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \quad (1).$$



**Mặt khác** 
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{S.A'B'G'}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.B'C'G'}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.C'A'G'}}{V_{S.ABC}}$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{V_{S.A'B'G'}}{V_{S.ABG}} + \frac{V_{S.B'C'G'}}{V_{S.BCG}} + \frac{V_{S.C'A'G'}}{V_{S.CAG}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SG'}{SG} + \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SG'}{SG} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SG'}{SG} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SG'}{SG} \left( \frac{SA'}{SA} + \frac{SB'}{SB} + \frac{SC'}{SC} \right)$$

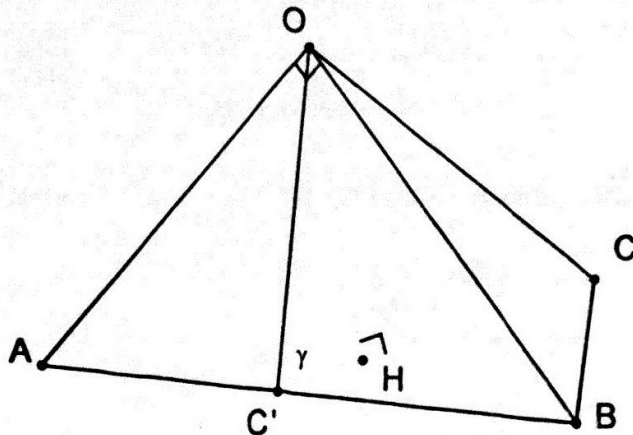
Kết hợp với (1), ta suy ra ngay điều phải chứng minh.

**Bài tập 2.** Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi  $\alpha, \beta, \gamma$  lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB).

Chứng minh rằng:  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{3}$ .

(Trích đề Dự bị khối B năm 2002)

**Lời giải.**



Hạ  $OC' \perp AB$ . Do  $OA \perp OC$ ,  $OB \perp OC$  nên theo định lý ba đường vuông góc suy ra  $AB \perp OC$ .

Mà  $OC' \perp AB$  suy ra  $CC' \perp AB \Rightarrow \widehat{OC'C} = \gamma$ . Tương tự với  $\alpha, \beta$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \frac{OA'}{A'A} + \frac{OB'}{B'B} + \frac{OC'}{C'C} \\ &= \frac{OA' \cdot BC}{A'A \cdot BC} + \frac{OB' \cdot AC}{B'B \cdot AC} + \frac{OC' \cdot AB}{C'C \cdot AB} = \frac{S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB}}{S_{ABC}} \end{aligned}$$

Kẻ  $OH \perp CC'$ . Do  $AB \perp (COC')$  nên  $AB \perp OH$ . Suy ra  $OH \perp (ABC)$ .

$$\text{Ta có } S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB} = 3V_{O.ABC} \cdot \left( \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} \right), S_{ABC} = \frac{3V_{O.ABC}}{OH}.$$

Do đó ta cần chứng minh

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} \leq \frac{\sqrt{3}}{OH} \Leftrightarrow \left( \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} \right)^2 \leq \frac{3}{OH^2}. \quad (1)$$

Do tam giác  $C'OC$  vuông tại  $O$  nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OC'^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}.$$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow \left( \frac{1}{OC} + \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} \right)^2 \leq 3 \left( \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \right).$$

Hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $OA=OB=OC$ .

## II. BÀI TẬP.

**Bài 1.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác vuông  $ABC$  tại  $B$ . Giả sử  $AB=a$ ,  $AA'=2a$ ,  $AC'=3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $A'C'$  và  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $A'C$ . Tính thể tích tứ diện  $IABC$ .

(Trích đề thi Đại học khối D năm 2009)

**Bài 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , mặt bên  $SAD$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $SB, SC, SD$ . Tính thể tích tứ diện  $CMNP$ .

(Trích đề thi Đại học khối A năm 2007)

**Bài 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB=a$ ,  $AD=a\sqrt{2}$ ,  $SA=a$  và  $SA \perp (ABCD)$ . Giả sử  $I$  là giao điểm của  $BM$  và  $AC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AD$  và  $SC$ . Tìm thể tích tứ diện  $ANIB$ .

(Trích đề thi Đại học khối B năm 2006)

**Bài 4.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  đáy là hình vuông cạnh bằng  $a$ , chiều cao  $AA'=b$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $CC'$ . Tính tích tứ diện  $BDA'M$ .

(Trích đề thi Đại học khối A năm 2006)

**Bài 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình thoi có  $SO$  vuông góc với đáy và là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Giả sử  $SO=2\sqrt{2}$ ,  $AC=4$ ,  $AB=\sqrt{5}$ . Gọi  $M$  trung điểm của  $SC$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BM$ .

(Trích đề thi Đại học khối A năm 2006)

**Bài 6.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 1. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $MN$ .

(Trích đề thi Đại học khối A năm 2006)

**Bài 7.** Cho tứ diện  $ABCD$ , các mặt  $(ACD)$  và  $(BCD)$  tạo với nhau một góc  $\alpha$ .

Chứng minh rằng: 
$$V_{ABCD} = \frac{2}{3} S_{ACD} \cdot S_{BCD} \cdot \frac{\sin \alpha}{CD}.$$

**Bài 8.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $d$  và  $\alpha$  lần lượt là khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

Chứng minh rằng: 
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \alpha.$$



# CÁC ĐỀ THI MẪU VÀ ĐỀ TỰ LUYỆN

## (CÓ KÈM ĐÁP ÁN)

### ○ ĐỀ 1

#### ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

#### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

□ **Câu I:** Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$  (1),  $m$  là số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi  $m = 1$ .
2. Tìm  $m$  để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  thỏa mãn điều kiện:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$ .

□ **Câu II:**

1. Giải phương trình: 
$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x.$$

2. Giải bất phương trình: 
$$\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1.$$

□ **Câu III:** Tính tích phân: 
$$I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx.$$

□ **Câu IV:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $AD$ . Gọi  $H$  là giao điểm của  $CN$  và  $DM$ . Biết  $SH$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$

và  $SH = a\sqrt{3}$ . Tính thể tích khối chóp  $S.CDNM$  và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $DM$  và  $SC$  theo  $a$ .

□ **Câu V:** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

## II. PHẦN RIÊNG

**Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)**

### A. Theo chương trình Chuẩn

#### □ Câu VI.a

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng  $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$  và  $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$ . Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với  $d_1$  tại A, cắt  $d_2$  tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  và điểm A có hoành độ dương.

2. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$  và mặt phẳng (P):  $x - 2y + z = 0$ . Gọi C là giao điểm của  $\Delta$  với (P), M là điểm thuộc  $\Delta$ . Tính khoảng cách từ M đến (P), biết  $MC = \sqrt{6}$ .

□ Câu VII.a: Tìm phần ảo của số phức  $z$ , biết

$$\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2 (1 - \sqrt{2}i).$$

### B. Theo chương trình Nâng cao

#### □ Câu VI.b

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(6;6), đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình  $x + y - 4 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm E(1;-3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

2. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm A(0;0;-2) và đường thẳng  $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$ . Tính khoảng cách từ A đến  $\Delta$ . Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt  $\Delta$  tại hai điểm B và C sao cho  $BC = 8$ .

□ Câu VII.b: Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $z = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^2}{1 - i}$ . Tìm môđun của số phức  $\bar{z} + iz$ .

## ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 1

### □ Câu I

1. Bạn đọc tự làm.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và Ox

$$x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$

$$\Leftrightarrow (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ khác } 1 \text{ thỏa } x_1^2 + x_2^2 + 1 < 4$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 < 3 \text{ ( giả sử } x_3 = 1)$$

$$\text{Nghĩa là: } \begin{cases} \Delta = 1 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \\ 1 + 2m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{4} < m < 1 \end{cases}$$

Vậy  $m \in \left(-\frac{1}{4}; 1\right) \setminus \{0\}$  là những giá trị cần tìm.

### □ Câu II

$$1. \text{ Giải phương trình : } \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x (1 + \sin x + \cos 2x) (\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin x + \cos 2x = 1 \quad (\text{Do } \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \quad (\text{loại do } \cos x \neq 0) \text{ hoặc}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \text{ thỏa điều kiện}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm:

$$x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

**Chú ý:** Phương trình  $\cos 2x + \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

So với điều kiện, suy ra  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

2. Giải bất phương trình:  $\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1$

Điều kiện:  $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 2x + 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$

**Cách 1:**

Ta có:  $1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} = 1 - \sqrt{2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]} \leq 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$

Nên bất phương trình tương đương với

$$x - \sqrt{x} \leq 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 - x \geq \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \quad (*)$$

Do  $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$  với mọi  $a, b$  và đẳng thức có khi  $a = b$  nên ta có:

$$\sqrt{x} + (1 - x) \leq \sqrt{2\left(x + (1 - x)^2\right)} = \sqrt{2(x^2 - x + 1)}.$$



$$\text{Do vậy } (*) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

**Chú ý:**  $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 - x \geq 0 \\ 2(x^2 - x + 1) \leq (\sqrt{x} + 1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 - x \geq 0 \\ \sqrt{x} + 1 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x} = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

**Cách 2:** Ta có  $(*) \Leftrightarrow x + 1 \geq \sqrt{2(x^2 - x + 1)} - \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 2(x^2 - x + 1) + x - 2\sqrt{2x(x^2 - x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x(x^2 - x + 1)} \geq x^2 + x + 1$$

Áp dụng BĐT Cô si, ta có:  $VT \leq 2x + x^2 - x + 1 = x^2 + x + 1$

Dấu "=" xảy ra khi  $2x = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  ( do  $0 \leq x < 1$  )

**Cách 3:** Ta có (\*)  $\Leftrightarrow \sqrt{2\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 - \sqrt{x}$ .

Ta thấy  $x = 0$  không thỏa mãn, với  $x \neq 0$ , đặt  $t = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$  ta được:

$$\sqrt{2(t^2 + 1)} \leq t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ (t-1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

**Chú ý:** Đặt  $t = \sqrt{x}$  ( $t \geq 0$ )

Phương trình (\*)  $\Rightarrow \sqrt{2(t^4 - t^2 + 1)} \leq 1 - t^2 + t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t^2 + t \geq 0 \\ 2(t^4 - t^2 + 1) \leq (1 - t^2 + t)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t^2 + t \geq 0 \\ t^4 + 2t^3 - t^2 - 2t + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t^2 + t \geq 0 \\ (t^2 + t - 1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t^2 + t \geq 0 \\ t^2 + t - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t \geq 0 \\ t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

**Cách 4:** Ta có (\*)  $\Leftrightarrow 1 - x \geq \sqrt{2(x^2 - x + 1)} - \sqrt{x}$  (\*\*)

$$\text{Do } \sqrt{2(x^2 - x + 1)} - \sqrt{x} = \frac{2x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + \sqrt{x}} > 0$$

$$\text{Nên (**) } \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 2x + 1 \geq 2x^2 - x + 2 - 2\sqrt{2x(x^2 - x + 1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 2\sqrt{2x(x^2 - x + 1)} \geq x^2 + x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 8x(x^2 - x + 1) \geq (x^2 + x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 \leq 0 \end{cases}$$

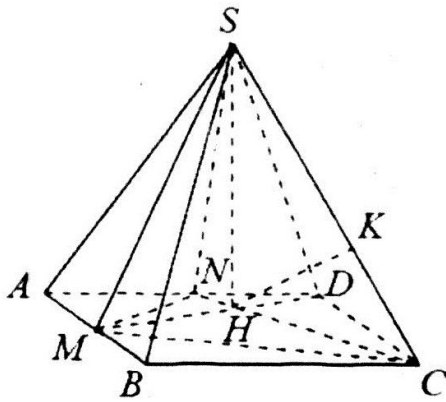
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ (x^2 - 3x + 1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

□ **Câu III:** Tính  $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx$

$$I = \int_0^1 \frac{x^2(1 + 2e^x) + e^x}{1 + 2e^x} dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{e^x}{1 + 2e^x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1 + 2e^x)}{1 + 2e^x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln |1 + 2e^x| \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 2e}{3}.$$

□ Câu IV



Ta có:  $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3} SH.S_{MNDC}$

Mà  $S_{MNDC} = S_{ABCD} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle MBC}$

$$= AB^2 - \frac{1}{2}(AM \cdot AN + BC \cdot BM)$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}.$$

Nên  $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \frac{5a^2}{8} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$  (đvtt).

Lại thấy:

$$\overline{DM} \cdot \overline{CN} = \frac{1}{2}(2\overline{DA} - \overline{DC}) \cdot \frac{1}{2}(2\overline{DC} - \overline{DA}) = DA^2 - DC^2 = 0.$$

Vậy  $CN \perp DM$  từ đó  $SC \perp DM$  bởi vậy:

$$d(SC; DM) = d(H; SC) = \frac{2S_{\triangle HSC}}{SC} = \frac{SH \cdot CH}{SC} = \frac{SH \cdot CH}{\sqrt{SH^2 + CH^2}}.$$

Lại có:  $CH = \frac{2S_{\triangle CMD}}{DM} = \frac{2(S_{ABCD} - S_{\triangle AMD} - S_{\triangle CMB})}{DM} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

Từ đó suy ra:  $d(SC; DM) = 2a \frac{\sqrt{57}}{19}.$

**Chú ý:** Trong mặt phẳng (SHC) hạ  $SH \perp SC$ , khi đó:

$$\triangle ADM = \triangle DCN \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{DCN} \Rightarrow DM \perp CN \Rightarrow DM \perp (SHC)$$

$\Rightarrow DM \perp HK \Rightarrow HK$  là đoạn vuông góc chung của  $DM$  và  $SC$ .

Trong  $\triangle DCN$ , ta có:

$$CD^2 = CH \cdot CN \Rightarrow CH = \frac{CD^2}{CN} = \frac{CD^2}{\sqrt{CD^2 + DN^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Trong  $\triangle DCN$ , ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2} \Rightarrow HK = \frac{HS \cdot HC}{\sqrt{HS^2 + HC^2}} = \frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

□ Câu V: Điều kiện:  $x \leq \frac{3}{4}, y \leq \frac{5}{2}$

**Cách 1:** Phương trình thứ nhất tương đương với:

$$4x^3 + x = \left( \frac{\sqrt{2-5y}}{2} \right)^4 + \frac{\sqrt{2-5y}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5-2y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow y = \frac{5-4x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \quad \text{thay vào phương trình}$$

thứ hai ta có:  $4x^2 + \left( \frac{5-4x^2}{2} \right)^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7$

$$\Leftrightarrow 16x^4 - 25x^2 + 8\sqrt{3-4x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 - 25x^2 + 5 + 8(\sqrt{3-4x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 1)(4x^2 - 5) + \frac{16(1-2x)}{\sqrt{3-4x} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) \left[ (2x+1)(4x^2-5) - \frac{16}{\sqrt{3-4x}+1} \right] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2.$$

(Do  $0 \leq x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow (2x+1)(4x^2-5) < 0$  nên biểu thức trong dấu [ ] luôn âm).

**Cách 2:** Từ phương trình thứ nhất dễ dàng suy ra  $x > 0$ .

Đặt  $\sqrt{5-2y} = 2t \geq 0$ , ta được  $y = \frac{5-4t^2}{2}$ .

Thay vào phương trình đầu ta có:  $x(4x^2+1) = t(4t^2+1)$

Vì hàm  $f(u) = u(4u^2+1)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}^+$  nên ta có  $x = t$ , suy ra

$$y = \frac{5-4x^2}{2}.$$

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$4x^2 + \frac{(5-4x^2)^2}{4} + 2\sqrt{3-4x} = 7.$$

Trong khoảng  $\left(0, \frac{3}{4}\right]$ , hàm số  $g(x) = 4x^2 + \frac{(5-4x^2)^2}{4} + 2\sqrt{3-4x}$  có:

$$g'(x) = 4x(4x^2-3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 4x(4x^2-3) < 0.$$



Mặt khác lại có  $g\left(\frac{1}{2}\right) = 7$  vì vậy phương trình  $g(x) = 7$  chỉ có nghiệm

độc nhất là  $x = \frac{1}{2}$ , suy ra  $y = 2$ .

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$ .

**Chú ý:**

$$1. (4x^2 + 1)x = (3 - y)\sqrt{5 - 2y}$$

$$\Leftrightarrow \left[(2x)^2 + 1\right]2x = \left[(\sqrt{5 - 2y})^2 + 1\right]\sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y})$$

Xét  $f(t) = (t^2 + 1)t, t \in \mathbb{R}$  và  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ , do đó

$$f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y}$$

Ngoài cách phân tích trên, ta có thể đặt  $u = 2x, v = \sqrt{5 - 2y}, v \geq 0$

Phương trình  $(4x^2 + 1)x = (3 - y)\sqrt{5 - 2y} \Rightarrow \dots$

$$\Leftrightarrow (u - v)(u^2 + v^2 + uv + 1)v = 0 \Leftrightarrow u = v.$$

$$2. \text{Đặt } u = \sqrt{5 - 2y}, u \geq 0 \Rightarrow 2y = 5 - u^2$$

Phương trình thứ nhất biến đổi về dạng:

$$2(4x^2 + 1)x = [6 - (5 - u^2)]u \Leftrightarrow 2x[(2x)^2 + 1] = (u^2 + 1)u$$

$$\text{Dạng } f(2x) = f(u).$$

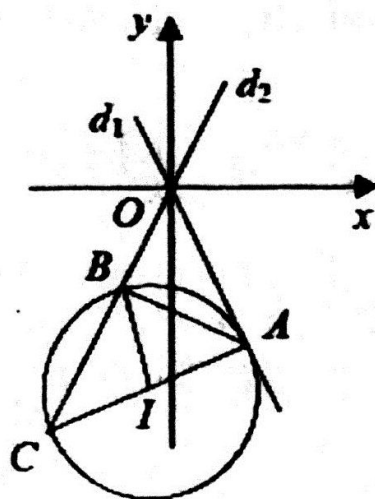
#### □ Câu VI.a

1. Vì  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$  nên  $AC$  là đường kính của  $(T)$ .

Gọi  $\widehat{ASB} = (\widehat{d_1, d_2}) = t$  ta có

$$\widehat{BAC} = \widehat{ASB} = t$$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc).



Giả sử bán kính (T) là R ta có :

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot BA}{2} = \frac{AC \sin t \cdot AC \cos t}{2} = 2R^2 \sin t \cos t$$

$$\text{Mặt khác: } \cos t = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{suy ra } S_{\Delta ABC} = R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ từ đó có } R = 1.$$

Do  $A \in d_1, C \in d_2$  nên  $A(a; -a\sqrt{3}), C(c; c\sqrt{3})$  thêm nữa vectơ chỉ phương của  $d_1$  là  $\vec{u}_1(1; -\sqrt{3})$  có phương vuông góc với  $\overline{AC}$  nên:

$$\overline{AC} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow c - a - 3(c + a) = 0 \Leftrightarrow c = -2a.$$

Mặt khác

$$AC = 2R = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(c - a)^2 + (\sqrt{3}(c + a))^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2|a|\sqrt{3} = 2 \text{ vì } a > 0 \text{ nên } a = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tâm đường tròn là trung điểm của AC là :

$$I\left(\frac{a+c}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}(c-a)\right) = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{3\sqrt{3}a}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{3}{2}\right).$$

$$\text{Vậy phương trình của (T) là } \left(x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1.$$

**Chú ý:**

$$(AB) \text{ đi qua } A \text{ và vuông góc } (d_2) \Rightarrow (AB): x + \sqrt{3}y + 2a = 0$$

$$(AB) \cap (d_2) = \{B\} \Rightarrow B\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(AC) \text{ đi qua } A \text{ và vuông góc } (d_1) \Rightarrow (AC): x - \sqrt{3}y - 4a = 0$$

$$(AC) \cap (d_1) = \{C\} \Rightarrow C(-2a; -2a\sqrt{3})$$

$$\Delta ABC \text{ có diện tích bằng } \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} AB \cdot CB$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -2\right).$$

**Cách 2:** Ta có  $d_1$  tiếp xúc với  $(T)$  có đường kính là AC nên  $AC \perp d_1$

Từ giả thiết ta có :

$$\widehat{AOx} = 60^\circ, \widehat{BOx} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ, \widehat{ACB} = 30^\circ$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AB^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 1$$

$$A \in d_2 \Rightarrow A(x; -\sqrt{3}x), x > 0, OA = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot AB = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right)$$

$$OC = 2OA = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -2\right).$$

$$\text{Đường tròn } (T) \text{ đường kính AC có: } I\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{3}{2}\right), R = \frac{AC}{2} = 1.$$

$$\text{Phương trình } (T): \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1.$$

**Chú ý:**

$$1. d_1, d_2 \text{ cắt nhau tại điểm O và } \cos(\widehat{AOB}) = \cos(d_1, d_2) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}. \text{ Mà } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{BAC})$$

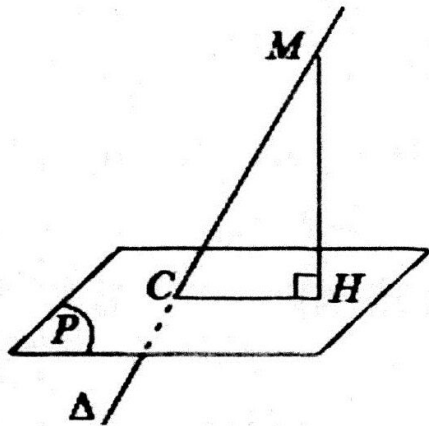
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} (OA \sin \widehat{AOB}) (OA \tan \widehat{AOB}) \sin \widehat{BAC} \Leftrightarrow OA^2 = \frac{4}{3}$$

$$a^2 + (-a\sqrt{3})^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -2\right).$$

$$2. M(x; y) \in (T) \Leftrightarrow MA \perp MC \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

$$3. M(x; y) \in (T) \Leftrightarrow \Delta MAC \text{ vuông tại M} \Leftrightarrow MA^2 + MC^2 = AC^2$$

2. **Cách 1:** Phương trình tham số của  $\Delta$  : 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$



Tọa độ điểm C là giao điểm của  $(\Delta)$  và  $(P)$  là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow C(-1; -1; -1)$$

Điểm  $M \in \Delta \Leftrightarrow M(1 + 2t; t; -2 - t) \Rightarrow MC = \sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow (2t + 2)^2 + (t + 1)^2 + (t + 1)^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow M(1; 0; -2) \Rightarrow d(M; (P)) = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ t = -2 \Rightarrow M(-3; -2; 0) \Rightarrow d(M; (P)) = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

**Cách 2:** Đường thẳng  $\Delta$  có VTCP  $\vec{u} = (2; 1; -1)$

Mặt phẳng  $(P)$  có VTPT  $\vec{n} = (1; -2; 1)$

Gọi H là hình chiếu của M lên  $(P)$ , suy ra  $\cos \widehat{HMC} = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right|$

$$d(M, (P)) = MH = MC \cdot \cos \widehat{HMC} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

#### □ Câu VII.a

Ta có:  $\bar{z} = (1 + 2\sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 1 - \sqrt{2}i + 2\sqrt{2}i - 4i^2 = 5 + \sqrt{2}i$

$\Rightarrow z = 5 - \sqrt{2}i$ . Vậy phần ảo của z bằng  $-\sqrt{2}$ .

#### □ Câu VI.b

1. Gọi d :  $x + y - 4 = 0$ .

Vì  $BC \parallel d \Rightarrow$  phương trình BC có dạng:  $x + y + m = 0$



Lấy  $I(1;3) \in d$ , ta có:  $d(I, BC) = d(A, d) = 4\sqrt{2}$

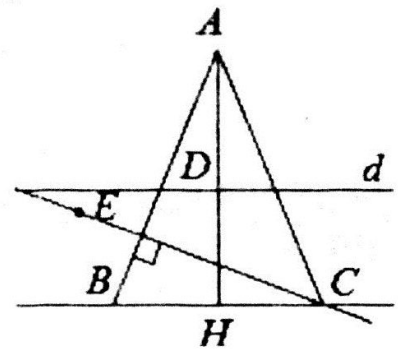
$$\Rightarrow |m + 4| = 8 \Rightarrow m = -12, m = 4$$

Vì  $A$  và  $I$  ở cùng phía so với  $BC$  nên ta có

$$m = 4 \Rightarrow BC: x + y + 4 = 0.$$

Đường cao hạ từ đỉnh  $A$  có phương trình:

$$x - y = 0.$$



Tọa độ trung điểm  $P$  của  $BC$ : 
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(-2; -2)$$

$$B \in BC \Rightarrow B(b; -4 - b), P \text{ là trung điểm } BC \text{ suy ra } C(-4 - b; b)$$

$$AB \perp CE \Rightarrow (b - 6)(b + 4) + (b + 10)(b + 3) = 0 \Leftrightarrow b = 0, b = -6$$

Vậy có hai bộ điểm thỏa yêu cầu bài toán:  $B(0; -4), C(-4; 0)$  hoặc

$$B(-6; 2), C(2; -6).$$

**Chú ý:**

$AH$  đi qua  $A$  và vuông góc  $MN \Rightarrow (AH): x - y = 0.$

$I$  là giao điểm  $AH$  và  $MN \Rightarrow I(2; 2) \Rightarrow H(-2; -2).$

$BC$  đi qua  $H$  và vuông góc  $AH \Rightarrow (BC): \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

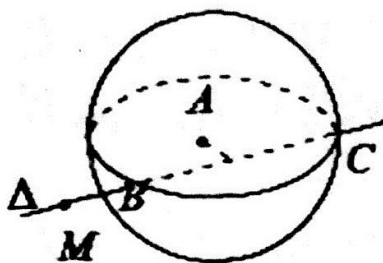
$B \in (BC) \Rightarrow B(-2 + t; -2 - t)$  vì  $B, C$  đối xứng nhau qua  $H$  nên

$$C(-2 - t; -2 + t)$$

Vì  $E(1; -3) \in (d)$ ,  $(d)$  là đường cao đi qua điểm  $C$  của  $\Delta ABC$  nên

$$AB \perp CE \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0$$

2.



$\Delta$  qua  $M(-2; 2; -3)$  và vtcp

$$\vec{u} = (2; 3; 2); d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 3$$

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $\Delta$  thì  $AH = 3$  và  $H$  là trung điểm của  $BC$  nên  $BH = 4.$

Vậy bán kính mặt cầu là  $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 5$ .

Nên PT mặt cầu là  $x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 25$ .

**□ Câu VII.b**

**Cách 1:** Ta có:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)^3(1 + i) = \frac{1}{2}(1 - 3\sqrt{3}i + 3 \cdot 1 \cdot 3i^2 - 3\sqrt{3}i^3)(1 + i) \\ &= \frac{1}{2}(1 - 3\sqrt{3}i - 9 + 3\sqrt{3}i)(1 + i) = -4(1 + i) \Rightarrow iz = -4 - 4i.\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } |\bar{z} + iz| = |-4 - 4i - 4i - 4| = 8|1 + i| = 8\sqrt{2}.$$

**Cách 2:** Ta có  $(1 - \sqrt{3}i) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$\Rightarrow (1 - \sqrt{3}i)^3 = 8(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = -8$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{-8}{1 - i} = \frac{-8(1 + i)}{2} = -4 - 4i$$

$$\Rightarrow \bar{z} + iz = -4 - 4i + i(-4 + 4i) = -8(1 + i) \Rightarrow |\bar{z} + iz| = 8\sqrt{2}.$$

**○ ĐỀ 2**

**ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010**

**I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH**

**□ Câu I:** Cho hàm số  $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$  có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

2. Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để đường thẳng  $y = -2x + m$  cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng  $\sqrt{3}$  (O là gốc tọa độ).

**□ Câu II:**

1. Giải phương trình:  $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$ .

2. Giải phương trình:  $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{6 - x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

□ **Câu III:** Tính tích phân:  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)^2} dx$ .

□ **Câu IV:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(A'BC)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $A'BC$ . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $GABC$  theo  $a$ .

□ **Câu V:** Cho các số thực không âm  $a, b, c$  thỏa mãn:  $a + b + c = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

## II. PHẦN RIÊNG

**Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)**

### A. Theo chương trình Chuẩn

□ **Câu VI.a**

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh  $C(-4;1)$ , phân giác trong góc A có phương trình  $x + y - 5 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

2. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm  $A(1;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$  trong đó  $b, c$  dương và mặt phẳng  $(P): y - z + 1 = 0$ . Xác định  $b$  và  $c$ , biết mặt phẳng  $(ABC)$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $\frac{1}{3}$ .

□ **Câu VII.a:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn:  $|z - i| = |(1 + i)z|$ .

### B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b**

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm  $A(2; \sqrt{3})$  và elip  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ . Gọi  $F_1$  và  $F_2$  là các tiêu điểm của  $(E)$  ( $F_1$  có hoành độ âm),

M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng  $AF_1$  với  $(E)$ , N là điểm đối xứng của  $F_2$  qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ANF_2$ .

2. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ .

Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến  $\Delta$  bằng OM.

□ **Câu VII.b:** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \log_2(3y-1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

## ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 2

□ **Câu I**

1. Bạn đọc tự làm

2. Phương trình hoành độ giao điểm của  $(C)$  và đường thẳng

$$y = -2x + m \text{ là: } \frac{2x+1}{x+1} = -2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (4-m)x + 1-m = 0 (*)$$

(vì  $x = -1$  không là nghiệm)

Phương trình  $(*)$  có  $\Delta = m^2 + 8 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$  nên d luôn cắt  $(C)$  tại điểm A, B.

$$A(x_A; y_A) \in d \Rightarrow A(x_A; y_A = -2x_A + m)$$

$$B(x_B; y_B) \in d \Rightarrow B(x_B; y_B = -2x_B + m)$$

$$\text{Ta có: } S_{\Delta OAB} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} |x_A y_B - x_B y_A| = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow |x_A(-2x_B + m) - x_B(-2x_A + m)| = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow |m(x_A - x_B)| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m^2(x_A - x_B)^2 = 12 \Leftrightarrow m^2 \frac{m^2 + 8}{4} = 12$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 8m^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

□ **Câu II.**

$$1. \text{ Phương trình } \Leftrightarrow (\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x (\cos x + 2) + \sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0$$



$$\Leftrightarrow \cos 2x (\cos x + 2) + \sin x \cdot \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x (\cos x + \sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Điều kiện:  $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$

**Cách 1:**

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - 4 + 1 - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left( \frac{2}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 \right) = 0$$

$$\text{Vì } \frac{2}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 > 0 \quad \forall x \in \left[ -\frac{1}{3}; 6 \right]$$

Nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = 5$ .

**Cách 2:**

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8$$

liên tục trên đoạn  $\left[ -\frac{1}{3}, 6 \right]$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right] + 6x - 14, x \in \left( -\frac{1}{3}, 6 \right)$$

$$\bullet x \in \left[ \frac{7}{3}, 6 \right]: f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[ \frac{7}{3}, 6 \right] \text{ và } f(5) = 0.$$

Do đó trên  $\left[ \frac{7}{3}, 6 \right]$  phương trình  $f(x) = 0$  có đúng 1 nghiệm  $x = 5$ .

$$\bullet x \in \left[ -\frac{1}{3}, \frac{7}{3} \right] \Rightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} < 2\sqrt{2} - \sqrt{\frac{11}{3}},$$

$$3x^2 - 14x - 8 \leq -3 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \left[ -\frac{1}{3}, \frac{7}{3} \right].$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 5$ .

### □ Câu III

Đặt  $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$ .

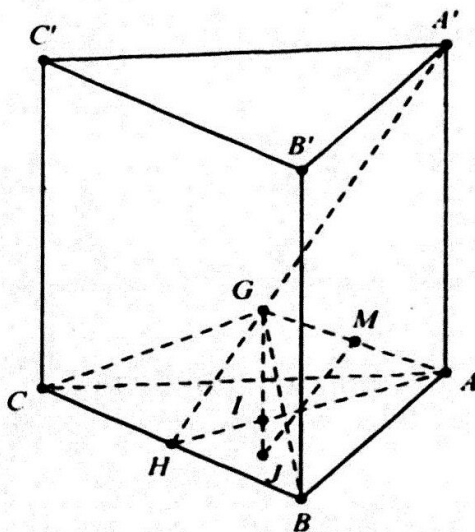
Ta có 
$$I = \int_0^1 \frac{u}{(2+u)^2} du = \int_0^1 \left( \frac{1}{2+u} - \frac{2}{(2+u)^2} \right) du$$

$$= \left( \ln|2+u| + \frac{2}{2+u} \right) \Big|_0^1 = \left( \ln 3 + \frac{2}{3} \right) - (\ln 2 + 1) = \ln \left( \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{3}.$$

**Chú ý:** Đặt  $u = 2 + \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$I = \int_2^3 \frac{u-2}{u^2} du = \int_2^3 \left( \frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} \right) du = \left( \ln|u| + \frac{2}{u} \right) \Big|_2^3 = \ln \left( \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{3}.$$

### □ Câu IV



Gọi H là trung điểm của BC, theo giả thiết ta có :

$$\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'H \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{(A'BC), (ABC)} = \widehat{A'HA}$$

$$\text{hay } \widehat{A'HA} = 60^\circ.$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, A'H = 2AH = a\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ và } AA' = AH \cdot \tan \widehat{A'HA} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} \text{ (đvtt).}$$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của G trên  $(ABC)$ , suy ra I là trọng tâm của tam giác ABC, suy ra  $GI \parallel AA' \Rightarrow GI \perp (ABC)$

Gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC suy ra J là giao điểm của GI với đường trung trực đoạn GA. M là trung điểm GA, ta có:

$$GM \cdot GA = GJ \cdot GI \Rightarrow R = GI = \frac{GM \cdot GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI} = \frac{7a}{12}.$$

**□ Câu V**

$$\text{Đặt } t = ab + bc + ca \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow 1 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca)$$

$$3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (ab + bc + ca)^2 = t^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 1 - 2t$$

**Cách 1:**

$$\text{Do đó: } P \geq t^2 + 3t + 2\sqrt{1-2t} = t^2 + 3t + 2(\sqrt{1-2t} - 1) + 2$$

$$= t \left( t + 3 - \frac{4}{\sqrt{1-2t} + 1} \right) + 2 = \frac{t \left[ (t+3)\sqrt{1-2t} + t - 1 \right]}{1 + \sqrt{1-2t}} + 2$$

$$\text{Do } (t+3)\sqrt{1-2t} \geq 3\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \sqrt{3} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{t \left[ (t+3)\sqrt{1-2t} + t - 1 \right]}{1 + \sqrt{1-2t}} > 0, \forall t \in \left[ 0; \frac{1}{3} \right]. \text{ Suy ra } P \geq 2 \quad \forall t \in \left[ 0; \frac{1}{3} \right].$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=0 \\ ab=bc=ca \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$  trong ba số  $a, b, c$  có hai số bằng 0, một số bằng 1. Vậy  $\min P = 2$ .

**Cách 2:** Xét hàm số  $f(t)$  với  $t \in \left[ 0; \frac{1}{3} \right]$  ta có:

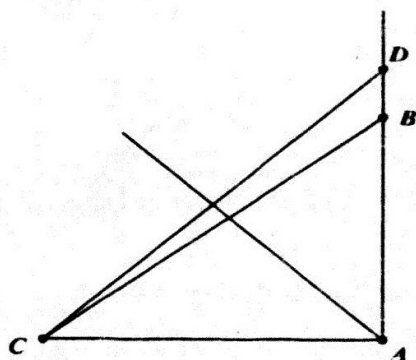
$$f'(t) = 2t + 3 - \frac{2}{\sqrt{1-2t}} \Rightarrow f''(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}} < 0, \quad \forall t \in \left[ 0; \frac{1}{3} \right]$$

$$\text{Suy ra } f'(t) \text{ là hàm giảm trên } \left[ 0; \frac{1}{3} \right] \text{ nên } f'(t) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right) > 0$$

$$\Rightarrow f \text{ tăng} \Rightarrow f(t) \geq f(0) = 2, \quad \forall t \in \left[ 0; \frac{1}{3} \right]. \text{ Từ đó ta có được } \min P = 2.$$

□ Câu VI.a

1.



Gọi D là điểm đối xứng với C qua đường thẳng  $d: x + y - 5 = 0$ , ta tìm được  $D(4; 9)$ .

Vì A thuộc đường tròn đường kính CD nên A là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn đường kính CD, suy ra tọa độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x^2 + (y - 5)^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 5 = -x \\ x^2 + (-x)^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow A(4; 1) \text{ (vì } x_A > 0 \text{)}.$$

$$\Rightarrow AC = 8 \Rightarrow AB = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AC} = 6.$$

B thuộc đường thẳng AD:  $x - 4 = 0 \Rightarrow B(4; y)$

$$\text{Từ } AB = 6 \Rightarrow (y - 1)^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} y = -5 \Rightarrow B(4; -5) \\ y = 7 \Rightarrow B(4; 7) \end{cases}$$

Vì d là phân giác trong của góc  $\hat{A}$  nên  $\overline{AB}$  và  $\overline{AD}$  cùng hướng suy ra  $B(4; 7)$ .

Vậy phương trình BC:  $3x - 4y + 16 = 0$ .

**Chú ý:** Phân giác trong của góc A có phương trình  $x + y - 5 = 0$  (song song với đường phân giác phần tư thứ II) nên:

$$AC // Ox \Rightarrow y_A = y_C = 1, x_A = 4 \Rightarrow A(4; 1)$$

2. Phương trình (ABC):  $\frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$\text{Vì } (ABC) \perp (P) \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = c \Rightarrow (ABC): bx + y + z - b = 0$$

$$\text{Mà } d(O, (ABC)) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{b^2 + 2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \text{ (do } b > 0 \text{)}.$$

Vậy  $b = c = \frac{1}{2}$  là giá trị cần tìm.



□ Câu VII.a

Gọi  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn của số phức  $z = x + y.i$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )

$$\text{Suy ra } |z - i| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$|(1 + i)z| = |(1 + i)(x + yi)| = \sqrt{(x - y)^2 + (x + y)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } |z - i| = |(1 + i)z| &\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 2. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm  $M$  là đường tròn:  $x^2 + (y + 1)^2 = 2$ .

□ Câu VI.b

1. Ta có:  $F_1(-1; 0)$ ,  $F_2(1; 0)$ . Đường thẳng  $AF_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{\sqrt{3}}$

Tọa độ điểm  $M$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{y}{\sqrt{3}} \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow N\left(1; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow AM = MF_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Do  $N$  đối xứng với  $F_2$  qua  $M$  nên ta có  $MN = MF_2$

$\Rightarrow MA = MF_2 = MN$ . Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ANF_2$  có

tâm là điểm  $M$ , bán kính  $R = MA = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  nên nó có phương trình

$$(x - 1)^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

**Chú ý:**  $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NF_2} = 0 \Rightarrow \Delta ANF_2$  vuông tại  $A$ . Do đó đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ANF_2$  có đường kính  $F_2N$  nên có phương trình:

$$(x - 1)^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

2. Vì  $M \in Ox \Rightarrow M(m; 0; 0)$

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $N(0; 1; 0)$  có  $\vec{u} = (2; 1; 2)$  là VTCP nên

$$d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{NM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{5m^2 + 4m + 8}}{3}$$

$$\text{Nên } d(M, \Delta) = OM \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5m^2 + 4m + 8}}{3} = |m| \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow m = -1, m = 2.$$

Vậy có hai điểm  $M$  thỏa yêu cầu bài toán:  $M_1(-1; 0; 0)$ ,  $M_2(2; 0; 0)$ .

#### □ Câu VII.b

$$\text{Ta có hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x + 1}{3} \\ 4^x + 2^x = \frac{(2^x + 1)^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x + 1}{3} \\ 2 \cdot 4^x + 2^x - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2^x + 1}{3} \\ 2^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ là nghiệm của hệ đã cho.}$$

### ○ ĐỀ 3

#### ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

#### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

□ Câu I: Cho hàm số  $y = -x^4 - x^2 + 6$  có đồ thị là  $(C)$ .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị  $(C)$  của hàm số đã cho.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$ , biết tiếp tuyến vuông góc

với đường thẳng  $y = \frac{1}{6}x - 1$ .

□ Câu II: 1. Giải phương trình:  $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$ .

2. Giải phương trình:  $4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

□ **Câu III:** Tính tích phân:  $I = \int_1^e \left( 2x - \frac{3}{x} \right) \ln x dx$ .

□ **Câu IV:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA = a$ , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC,  $AH = \frac{AC}{4}$ . Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo  $a$ .

□ **Câu V:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10} \text{ trên miền xác định của nó.}$$

## II. PHẦN RIÊNG

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

### A. Theo chương trình Chuẩn

□ **Câu VI.a**

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh  $A(3; -7)$ , trực tâm là  $H(3; -1)$ , tâm đường tròn ngoại tiếp là  $I(-2; 0)$ . Xác định toạ độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

2. Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (P):  $x + y + z - 3 = 0$  và (Q):  $x - y + z - 1 = 0$ . Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

□ **Câu VII.a:** Tìm số phức  $z$  thoả mãn  $|z| = \sqrt{2}$  và  $z^2$  là số thuần ảo.

### B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b**

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm  $A(0; 2)$  và  $\Delta$  là đường thẳng đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên  $\Delta$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$ , biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.

2. Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}.$$

Xác định toạ độ điểm M thuộc  $\Delta_1$  sao cho khoảng cách từ M đến  $\Delta_2$  bằng 1.

□ **Câu VII.b:** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ 2\log_2(x-2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

### ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 3

---

□ **Câu I.**

1. Bạn đọc tự làm

2. Gọi đường thẳng  $(t)$  là tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$ .

Theo bài toán  $(t)$  vuông góc với đường thẳng  $y = \frac{1}{6}x - 1$ , nên đường thẳng  $(t)$  có hệ số góc bằng  $-6$ .

**Cách 1:**

Gọi  $M(x_0; y_0)$  là tọa độ tiếp điểm của  $(t)$  và  $(C)$ .

Theo bài toán, ta có phương trình:  $y'(x_0) = -6 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0 = -6$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(2x_0^2 + 2x_0 + 3) = 0 \quad (*).$$

Vì  $2x_0^2 + 2x_0 + 3 > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$  nên phương trình  $(*)$

$$\Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(1) = 4 \Rightarrow M(1; 4).$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:  $y = -6(x - 1) + 4 = -6x + 10$ .

**Cách 2:**

Phương trình  $(t)$  có dạng  $y = -6x + m$

$(t)$  tiếp xúc  $(C)$  tại điểm  $M(x_0; y_0)$  khi hệ phương trình sau có nghiệm  $x_0$

$$\begin{cases} -x_0^4 - x_0^2 + 6 = -6x_0 + m \\ -4x_0^3 - 2x_0 = -6 \end{cases} \text{ có nghiệm } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ m = 10 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:  $y = -6(x - 1) + 4 = -6x + 10$ .

□ **Câu II.**

1. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sin x \cos x - \cos x - (1 - 2\sin^2 x) - 3\sin x - 1 = 0$$



$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ (do } \sin x + \cos x + 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Điều kiện:  $x \geq -2$ .

Phương trình đã cho tương đương với

$$4^{2x+\sqrt{x+2}} - 4^{2+\sqrt{x+2}} = 2^{x^3+4x-4} - 2^{x^3},$$

$$\Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x+2}}(2^{4x} - 16) = 2^{x^3-4}(2^{4x} - 16)$$

$$(2^{4x} - 16)(2^{2\sqrt{x+2}} - 2^{x^3-4}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{4x} = 16 \\ 2^{2\sqrt{x+2}} = 2^{x^3-4} \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất có nghiệm  $x = 1$  (thỏa).

Phương trình thứ hai tương đương với  $2\sqrt{x+2} = x^3 - 4$

$$2(\sqrt{x+2} - 2) = x^3 - 8 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{\sqrt{x+2}+2}\right) = 0$$

$$\text{Do } x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{\sqrt{x+2}+2} \geq x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{2} = x^2 + 2x + 3 > 0$$

nên ta có  $x = 2$  (thỏa).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = 1$  và  $x = 2$ .

**Chú ý:**

Xét hàm số  $g(x) = 2\sqrt{x+2} - x^3 + 4$  liên tục trên nửa khoảng  $\left[\sqrt[3]{4}; +\infty\right)$ .

Ta có:  $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} - 3x^2 < 0, \forall x \in \left[\sqrt[3]{4}; +\infty\right) \Rightarrow g(x)$  nghịch biến trên nửa khoảng  $\left[\sqrt[3]{4}; +\infty\right)$  và  $g(2) = 0$ , do đó phương trình  $g(x) = 0$  có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

**□ Câu III.**

$$\text{Ta có } I = \int_1^e 2x \ln x dx - 3 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x d(x^2) - 3 \int_1^e \ln x d(\ln x)$$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 d(\ln x) - 3 \int_1^e \ln x d(\ln x) \\
 &= e^2 - \int_1^e x dx - \frac{3}{2} \ln^2 x \Big|_1^e = e^2 - \left( \frac{x^2 + 3 \ln^2 x}{2} \right) \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - 1
 \end{aligned}$$

**Chú ý:**

$$A = \int_1^e x \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases}$$

$$B = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x} dx \end{cases}$$

□ **Câu IV.**

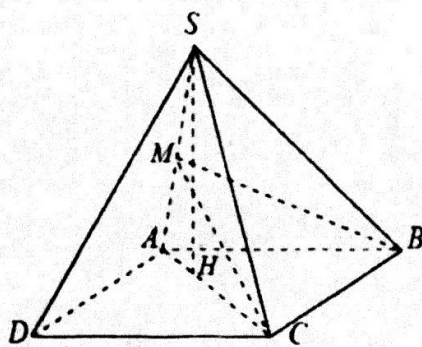
- Chứng minh M là trung điểm SA

$$\text{Ta có: } AH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

$$HC = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = a\sqrt{2}$$

Suy ra  $SC = AC \Rightarrow \triangle ACS$  cân tại C nên M là trung điểm SA.

- Tính  $V_{S.MBC}$  ?



Vì M là trung điểm SC nên

$$\begin{aligned}
 S_{SCM} &= \frac{1}{2} S_{SAC} \Rightarrow V_{SMBC} = \frac{1}{2} V_{SABC} \\
 &= \frac{1}{6} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3 \sqrt{14}}{48} \text{ (đvtt)}.
 \end{aligned}$$

□ **Câu V.** Điều kiện:  $\begin{cases} -x^2 + 4x + 21 \geq 0 \\ -x^2 + 3x + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 5$

**Cách 1:**

Xét trên miền  $-2 < x < 5$ , ta có :

$$y = \sqrt{25 - (x - 2)^2} - \sqrt{\frac{49}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2},$$

$$\text{nên } y' = \frac{-(x-2)}{\sqrt{25-(x-2)^2}} + \frac{x-\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{49}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{\frac{49}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} = \left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{25-(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 5 \\ (x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \\ (x-2)^2\left(\frac{49}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right) = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2(25-(x-2)^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-2; \frac{3}{2}\right] \cup [2; 5) \\ 25\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ta có } y(-2) = 3; y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{2}; y(5) = 4.$$

$$\text{Vậy } \max_{-2 \leq x \leq 5} y = y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{2}.$$

**Cách 2:** Điều kiện:  $-2 \leq x \leq 5$ .

$$\text{Vì } (-x^2 + 4x + 21) - (-x^2 + 3x + 10) = x + 11 > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y^2 &= (x+3)(7-x) + (x+2)(5-x) - 2r(x+3)(7-x)(x+2)(5-x) \\ &= \left(\sqrt{(x+3)(5-x)} - \sqrt{(x+2)(7-x)}\right)^2 + 2 \geq 2 \end{aligned}$$

Suy ra  $y \geq \sqrt{2}$ , dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{(x+3)(5-x)} - \sqrt{(x+2)(7-x)} = 0$$

$$(x+3)(5-x) = (x+2)(7-x) \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } \min y = \sqrt{2} \text{ khi } x = \frac{1}{3}.$$

### □ Câu VI.a

1. **Cách 1:** Gọi  $T(x; y)$  là trung điểm của  $BC$ ,  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $O$ . Ta có  $BH \parallel CD, CH \parallel BD$  nên tứ giác  $BDCH$  là hình bình hành nên  $T$  là trung điểm  $BC$

$$\text{Từ đó suy ra, } \overline{AH} = 2\overline{TI} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2(-2 - x) \\ 6 = 2(-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow T(-2; -3)$$

Đường thẳng  $BC$  qua  $T$  có  $\overline{AH}(0; 6)$  là vtpt có phương trình là  $y + 3 = 0$ .

$$\text{Mà } IA = IC \Leftrightarrow 5^2 + (-7)^2 = (a + 2)^2 + (-3)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a - 61 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \pm \sqrt{65} \Rightarrow C(-2 + \sqrt{65}; -3)$$

**Cách 2.** Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có tâm  $I(-2; 0)$  và bán

kính  $IA = \sqrt{74}$  phương trình:  $(x + 2)^2 + y^2 = 74$ .

Phương trình  $AH: x = 3$ , do  $BC \perp AH \Rightarrow BC: y = m$  ( $m \neq -7$ )

Tọa độ  $B, C$  là nghiệm của phương trình:

$$(x + 2)^2 + m^2 = 74 \Leftrightarrow x^2 + 4x + m^2 - 70 = 0 \quad (*)$$

Vì  $(*)$  có hai nghiệm, trong đó có ít nhất một nghiệm dương nên  $|m| < \sqrt{70}$

$$\text{Khi đó: } B(-2 - \sqrt{74 - m^2}; m), C(-2 + \sqrt{74 - m^2}; m)$$

$$\text{Vì } BH \perp AC \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BH} = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 21 = 0 \Leftrightarrow m = 3$$

$$\text{Vậy } C(\sqrt{65} - 2; 3).$$

### Chú ý:

1) Gọi  $AD$  là đường kính thì  $BCHD$  là hình bình hành nên  $HD$  đi qua trung điểm  $M$  của  $BC$ , khi đó  $IM$  là đường trung bình của tam giác

$$DAH \Rightarrow \overline{AH} = 2\overline{IM} \Rightarrow M(-2; 3).$$

$BC$  qua điểm  $M$  vuông góc với  $AH \Rightarrow (BC): y - 3 = 0$

$$\text{Tọa độ điểm } C \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} (x + 2)^2 + y^2 = 74 \\ y - 3 = 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{65} - 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$



2) Có thể gọi E là giao điểm của AH và (C), tọa độ E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 74 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow E(3;7)$$

HE cắt BC tại trung điểm N của HE  $\Rightarrow N(3;3)$

BC đi qua N và vuông góc AH  $\Rightarrow (BC): y-3=0$ .

2. Mặt phẳng (P) có  $\vec{n}_P(1;1;1)$  là VTPT, mp(Q) có  $\vec{n}_Q(1;-1;1)$  là VTPT.

$$\begin{aligned} \text{Do } \begin{cases} (R) \perp (P) \\ (R) \perp (Q) \end{cases} &\Rightarrow \text{mp}(R) \text{ có } \vec{n}_R = \frac{1}{2}[\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (1;0;-1) \text{ là VTPT} \\ &\Rightarrow (R): x-z+m=0 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } d(O; (R)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1+0+1}} = 2 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } (R): x-z \pm 2\sqrt{2} = 0.$$

#### □ Câu VII.a

**Cách 1:**

$$\text{Giả thiết } z^2 \text{ là số thuần ảo nên } z^2 + \overline{z^2} = 0 \Rightarrow (z + \overline{z})^2 - 2|z|^2 = 0$$

$$\begin{cases} z + \overline{z} = 2 \\ z + \overline{z} = -2 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác cũng từ } z^2 + \overline{z^2} = 0 \Rightarrow (z - \overline{z})^2 + 2|z|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z - \overline{z} = 2i \\ z - \overline{z} = -2i \end{cases}$$

Do đó ta có các số phức thỏa mãn là :

$$z = i+1, z = -1+i, z = 1-i, z = -1-i.$$

$$\text{Cách 2: Đặt } z = a+bi \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \text{ và } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

Vậy các số phức cần tìm:  $z = i+1, z = -1+i, z = 1-i, z = -1-i$ .

□ Câu VI.b

1. Gọi  $H(a; b)$ , ta có:  $AH^2 = a^2 + (b-2)^2$ ,  $d(H, Oy) = |b|$

Suy ra:  $a^2 + (b-2)^2 = b^2$

Do  $H$  thuộc đường tròn đường kính  $OA$  nên:  $a^2 + (b-1)^2 = 1$

Từ đó, ta có:  $\begin{cases} a^2 - 4b + 4 = 0 \\ a^2 + b^2 - 2b = 0 \end{cases}$ , giải hệ ta được

$$H\left(2\sqrt{\sqrt{5}-2}; \sqrt{5}-1\right) \text{ hoặc } H\left(-2\sqrt{\sqrt{5}-2}; \sqrt{5}-1\right)$$

Vậy phương trình đường thẳng  $\Delta$  là

$$(\sqrt{5}-1)x - 2\sqrt{\sqrt{5}-2}y = 0 \text{ hoặc } (\sqrt{5}-1)x + 2\sqrt{\sqrt{5}-2}y = 0.$$

2. Đường thẳng  $\Delta_2$  qua  $A(2;1;0)$  có vtcp là  $\vec{u} = (2;1;2)$

$$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(3+t; t; t) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(t+1; t-1; t)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = (t-2; -2; 3-t)$$

$$\text{Nên } d(M, \Delta_2) = 1 \Leftrightarrow \frac{[\overrightarrow{AM}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = 1$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2 + (-2)^2 + (3-t)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 10t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow M(4;1;1) \\ t=4 \Rightarrow M(7;4;4) \end{cases}$$

□ Câu VII.b Điều kiện:  $x > 2, y > 0$ .

Phương trình thứ hai có thể viết lại thành:  $2\log_2(x-2) - 2\log_2 y = 0$

$\Leftrightarrow x-2 = y$ . Thay vào phương trình thứ nhất, ta được:

$$x^2 - 4x + (x-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (do } x > 2)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất  $(x, y) = (3, 1)$ .

**ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009**

**I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH**

□ **Câu I:** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{2x+3}$  (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

□ **Câu II:**

1. Giải phương trình:  $\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}$  (1).

2. Giải phương trình:  $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$  (2).

□ **Câu III:** Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$ .

□ **Câu IV:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D;  $AB = AD = 2a$ ;  $CD = a$ ; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng  $60^\circ$ . Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

□ **Câu V:** Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa

$$x(x+y+z) = 3yz \quad (*), \text{ ta luôn có:}$$

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \leq 5(y+z)^3.$$

**II. PHẦN RIÊNG**

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

**A. Theo chương trình Chuẩn**

**□ Câu VI.a**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có điểm I (6, 2) là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Điểm M(1; 5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng  $d: x + y - 5 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng AB.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) có phương trình:  $2x - 2y - z - 4 = 0$  và mặt cầu (S) có phương trình:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$ . Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

**□ Câu VII.a:** Gọi  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình:

$$z^2 + 2z + 10 = 0. \text{ Tính giá trị của biểu thức: } A = |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

**B. Theo chương trình Nâng cao**

**Câu VIb (2,0 điểm)**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxyz cho đường tròn (C) có phương trình:  $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$  và đường thẳng  $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$  với m là tham số thực. Gọi I là tâm của (C). Tìm m để  $\Delta$  cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) có phương trình:  $x - 2y + 2z - 1 = 0$  và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}, \quad d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}.$$

Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng  $d_1$  sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng  $d_2$  và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

**□ Câu VII.b (1,0 điểm)** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$



## ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 4

### □ Câu 1

1. HS tự làm.

2. Bài toán thuộc dạng toán viết phương trình tiếp tuyến. Để giải bài toán trên ta có thể đi theo hai hướng sau:

**Cách 1:** Gọi  $M(x_0; y_0)$  là tiếp điểm.

Vì tam giác  $OAB$  cân nên đường thẳng  $AB$  (chính là tiếp tuyến) phải vuông góc với phân giác của góc (chính là phân giác hai trục  $Ox, Oy$  và có hai phân giác là  $y = x$  hoặc  $y = -x$ ) nên suy ra tiếp tuyến phải vuông góc với một trong hai đường thẳng  $y = x$  hoặc  $y = -x$ . Tức là:  $y'(x_0) = \pm 1$

Mà do  $y'(x_0) = \frac{-1}{(2x_0 + 3)^2} < 0 \quad \forall x_0 \neq -\frac{3}{2}$  nên chỉ xảy ra

$$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow (2x_0 + 3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 3 = 1 \\ 2x_0 + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

\*  $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow$  phương trình tiếp tuyến:  $y = -(x + 1) + 1 = -x$   
loại vì  $A \equiv B \equiv O$ .

\*  $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow$  phương trình tiếp tuyến:  $y = -x - 2$

Vậy  $y = -x - 2$  là tiếp tuyến cần tìm.

**Cách 2:** Phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  có dạng:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = \frac{-1}{(2x_0 + 3)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 2}{2x_0 + 3}$$

$$A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{-1}{(2x_0 + 3)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 2}{2x_0 + 3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x_0^2 + 8x_0 + 6 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2x_0^2 + 8x_0 + 6; 0)$$

$$B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{-1}{(2x_0 + 3)^2}(0 - x_0) + \frac{x_0 + 2}{2x_0 + 3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2x_0^2 + 8x_0 + 6}{(2x_0 + 3)^2} \Rightarrow B \left( 0; \frac{2x_0^2 + 8x_0 + 6}{(2x_0 + 3)^2} \right) \end{cases}$$

$$\text{Vì } A, B \neq O \Rightarrow 2x_0^2 + 8x_0 + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ x_0 \neq -3 \end{cases} \quad (*)$$

Tam giác AOB vuông cân tại O  $\Leftrightarrow OA = OB$

$$\Leftrightarrow |2x_0^2 + 8x_0 + 6| = \frac{|2x_0^2 + 8x_0 + 6|}{(2x_0 + 3)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{(2x_0 + 3)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \text{ (l)} \\ x_0 = -2 \text{ (n)} \end{cases} \quad (\text{do điều kiện } (*)).$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là:  $y = -x - 2$ .

## □ Câu II

$$1. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} \sin x \neq -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (1 - 2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - 2\sin x \cos x = \sqrt{3}(1 + \sin x - 2\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - k2\pi \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm :  $x = \frac{\pi}{2} - k2\pi$ ;  $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$

Đôi chiếu với điều kiện ta chỉ nhận họ nghiệm:  $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ .

2. Điều kiện:  $x \leq \frac{6}{5}$ . Để giải bài này ta có thể làm theo hai cách sau

**Cách 1:** Đặt  $t = \sqrt[3]{3x-2} \Rightarrow x = \frac{t^3+2}{3}$  và  $t \leq \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ , thay vào phương trình ta được

$$2t + 3\sqrt{6 - \frac{5(t^3+2)}{3}} - 8 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{24 - 15t^3} = 8 - 2t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \\ 24 - 15t^3 = (8 - 2t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \\ 24 - 15t^3 = (8 - 2t)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \\ 15t^3 + 4t^2 - 32t + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2 \Leftrightarrow x = -2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = -2$ .

**Cách 2:** Đặt  $a = \sqrt[3]{3x-2}$ ;  $b = \sqrt{6-5x}$ ,  $b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 5a^3 = 15x - 10 \\ 3b^2 = 18 - 15x \end{cases}$

$$\Rightarrow 5a^3 + 3b^2 = 8.$$

Khi đó ta có hệ:  $\begin{cases} 2a + 3b - 8 = 0 \\ 5a^3 + 3b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{8-2a}{3} \\ 5a^3 + \frac{(8-2a)^2}{3} = 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{8-2a}{3} \\ 15a^3 + 4a^2 - 32a + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{8-2a}{3} \\ (a-2)(15a^2 - 26a + 20) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2, \text{ do } 15a^2 - 26a + 20 > 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

**Cách 3:** Phương trình  $\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{3x-2} + 2) + 3(\sqrt{6-5x} - 4) = 0$

### Bình luận:

1. Phương trình đã cho thuộc dạng phương trình lượng giác không mẫu mực. Để giải phương trình không mẫu mực ta sử dụng các phép biến đổi lượng giác đưa phương trình đã cho về phương trình thường gặp hoặc phương trình chỉ chứa một hàm số lượng giác hoặc phương trình tích. Trong bài toán xuất hiện  $\sqrt{3}$  thì ta có thể liên tưởng tới cách đưa về dạng phương trình bậc nhất đối với  $\sin$  và  $\cos$ .

2. Đây là một phương trình vô tỉ chứa hai căn bậc hai. Về nguyên tắc chung để giải phương trình - bất phương trình chứa căn thức thì ta phải tìm cách loại bỏ căn thức. Có hai cách ta thường dùng để loại bỏ căn thức đó là lũy thừa hai vế và đặt ẩn phụ. Ở phương trình trên ta không thể lũy thừa hai vế được vì trong phương trình chứa hai căn bậc hai, do đó ta nghĩ tới đặt một căn bằng  $t$  khi đó trong phương trình chỉ chứa một căn thức và việc lũy thừa dễ dàng thực hiện được. Với cách giải thứ hai ta đã làm tăng số ẩn cần tìm, phương pháp này khá hiệu quả khi ta gặp các phương trình chứa các căn bậc hai và các biểu thức trong căn dễ thấy mối quan hệ giải thoát ẩn  $x$ .

Ta có được dạng tổng quát:  $\alpha \cdot \sqrt[n]{a - f(x)} + \beta \cdot \sqrt[m]{b + f(x)} = c$

Để giải phương trình này ta đặt  $u = \sqrt[n]{a - f(x)}$ ;  $v = \sqrt[m]{b + f(x)}$ , ta có hệ:

$$\begin{cases} \alpha u + \beta v = c \\ u^n + v^m = a + b \end{cases}$$

□ **Câu III.** Ta có:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5 x - \cos^2 x) dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx}_{I_2}$

Tính  $I_1 = ?$ : Đặt  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận: Với  $x = 0 \Rightarrow t = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \left( t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right) \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow I_1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$



$$\text{Tính } I_2 = ? : I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}.$$

**Bình luận:** Đây là bài tích phân lượng giác khá cơ bản. Lưu ý khi gặp tích phân có dạng  $I = \int \sin^m(ax+b) \cos^n(ax+b) dx$  ta thường xử lí như sau:

\* Nếu  $m$  lẻ ta thực hiện phép đổi biến số  $t = \cos(ax+b)$

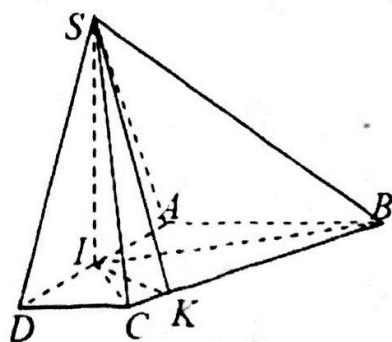
\* Nếu  $n$  lẻ ta thực hiện phép đổi biến số  $t = \sin(ax+b)$

Với lưu ý:  $\sin^2(ax+b) = 1 - \cos^2(ax+b)$

\* Nếu  $m, n$  chẵn thì ta hạ bậc và biến đổi tích thành tổng nếu cần.

$$\text{Lưu ý: } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}, \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

#### □ Câu IV



Vì hai mặt phẳng  $(SBI)$  và  $(SCI)$  cùng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó  $(SI)$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  hay là  $SI \perp (ABCD)$  nên

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI \cdot S_{ABCD}.$$

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = \frac{AD(AB+CD)}{2} = 3a^2.$$

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $I$  xuống  $BC \Rightarrow BC \perp (SIH)$

$$\Rightarrow \widehat{SHI} = \overline{((SBC), (ABCD))} = 60^\circ.$$

Tam giác  $BCI$  vuông tại  $I$  nên ta có:

$$BC = \sqrt{CI^2 + BI^2} = a\sqrt{5}; S_{\Delta IDC} = \frac{a^2}{2}; S_{\Delta AIB} = a^2.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BCI} = S_{ABCD} - (S_{\Delta IDC} - S_{\Delta AIB}) = \frac{3}{2}a^2$$

$$\Rightarrow IH = \frac{2S_{\Delta IBC}}{BC} = \frac{3a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow SI = IH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI S_{ABCD} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5} \text{ (đvtt)}.$$

### □ Câu V.

**Cách 1:** Vì giả thiết và BĐT (1) là những biểu thức đẳng cấp đồng thời giả thiết và BĐT cần chứng minh đối xứng đối với  $y$  và  $z$  nên ta nghĩ tới cách đặt  $y = ax; z = bx$ .

$$\text{Khi đó (*) trở thành: } x(x + ax + bx) = 3abx^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + a + b = 3ab \text{ (**)} \text{ và (1) trở thành:}$$

$$\begin{aligned} (x + ax)^3 + (x + bx)^3 + 3(x + ax)(ax + bx)(bx + x) &\leq 5(ax + bx)^3 \\ \Leftrightarrow (1 + a)^3 + (1 + b)^3 + 3(1 + a)(1 + b)(a + b) &\leq (a + b)^3 \quad (2). \end{aligned}$$

Vì (\*\*) và (2) là những biểu thức đối xứng đối với  $a, b$  nên ta nghĩ tới cách đặt  $S = a + b; P = ab$

$$\begin{aligned} \text{Mối quan hệ giữa } S \text{ và } P \text{ là } \begin{cases} S^2 \geq 4P \\ 1 + S = 3P \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1 + S}{3} \\ 3S^2 - 4S - 4 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1 + S}{3} \\ S \geq 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Khi đó :

$$(1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab = 1 + S + \frac{1 + S}{3} = \frac{4(1 + S)}{3}$$

$$\begin{aligned} (1 + a)^3 + (1 + b)^3 &= (2 + a + b)^3 - 3(1 + a)(1 + b)(2 + a + b) \\ &= (2 + S)^3 - 4(1 + S)(2 + S) \end{aligned}$$

$$\text{Nên (2)} \Leftrightarrow (2 + S)^3 - 4(S^2 + 3S + 2) + 4S(1 + S) \leq 5S^3$$

$$\Leftrightarrow 2S^2 - 3S - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (2S + 1)(S - 2) \geq 0 \text{ luôn đúng do } S \geq 2.$$

Vậy bài toán đã được chứng minh.

**Cách 2:**

$$\text{Để thấy : } 4yz = (y+z)^2 - (y-z)^2 \leq (y+z)^2$$

Từ giả thiết:

$$\begin{aligned} x(x+y+z) &= 3yz \Rightarrow 4yz = x(x+y+z) + yz = (x+y)(x+z) \\ \Rightarrow (x+y)(x+z) &\leq (y+z)^2 \Rightarrow 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 3(y+z)^3 \quad (1). \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh  $(x+y)^3 + (x+z)^3 \leq 2(y+z)^3$ .

Thật vậy :

$$\begin{aligned} (x+y)^3 + (x+z)^3 &= (x+y+x+z) \left[ (x+y)^2 - (x+y)(x+z) + (x+z)^2 \right] \\ (x+y)^3 + (x+z)^3 &= (x+y+x+z) \left[ y^2 + z^2 + 2x(x+y+z) - 4yz \right] \\ (x+y)^3 + (x+z)^3 &= (x+y+x+z) \left[ y^2 + z^2 + x(x+y+z) - yz \right] \\ &= (x+y+x+z) (y^2 + z^2 + 3yz - yz) \\ (x+y)^3 + (x+z)^3 &= (x+y+x+z) (y+z)^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Để dàng chứng minh được:  $y^2 + z^2 + 14yz = 4(y+z)^2 - 3(y-z)^2$

$$\begin{aligned} (x+y+x+z)^2 &= 4x^2 + 4x(y+z) + (y+z)^2 = 4x(x+y+z) + (y+z)^2 \\ &= 4.3yz + (y+z)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+y+x+z)^2 &= 14yz + y^2 + z^2 = 4(y+z)^2 - 3(y-z)^2 \leq 4(y+z)^2 \\ \Rightarrow x+y+x+z &\leq 2(y+z) \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2), (3) suy ra  $(x+y)^3 + (x+z)^3 \leq 2(y+z)^3 \quad (4)$

Từ (1), (4) suy ra

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3.$$

**Cách 3:** Đặt: 
$$\begin{cases} a = x+y \\ b = x+z \\ c = y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a+b-c) \\ y = \frac{1}{2}(a-b+c) \\ z = \frac{1}{2}(-a+b+c) \end{cases}$$

Từ giả thiết:  $x(x + y + z) = 3yz \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - ab \quad (1)$

$$\Leftrightarrow c^2 = (a + b)^2 - 3ab \geq (a + b)^2 - \frac{3}{4}(a + b)^2 = \frac{1}{4}(a + b)^2$$

Hay  $(a + b)^2 \leq (2c)^2 \Rightarrow a + b \leq 2c \quad (2)$

Đẳng thức cần chứng minh  $\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3abc \leq 5c^3$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 + b^2 - ab) + 3abc \leq 25c^3$$

$$\Leftrightarrow (a + b)c^2 + 3abc \leq 25c^3 \quad (\text{do } (1))$$

Hay  $\Leftrightarrow (a + b)c + 3ab \leq 25c^2 \quad (3)$

Từ  $(2) \Rightarrow (a + b)c \leq 2c^2 \quad (4)$

Mặt khác:  $ab \leq \frac{1}{4}(a + b)^2 \leq \frac{1}{4}(2c)^2 \Leftrightarrow ab \leq c^2 \quad (5)$

Từ  $(4)$  và  $(5) \Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi  $\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 - ab \\ a = b = c \end{cases} \Rightarrow x = y = z.$

### Chú ý

**Cách 3:** Đặt:  $\begin{cases} a = x + y \\ b = y + z \\ c = z + x \end{cases}$

Từ giả thiết:  $x(x + y + z) = 3yz \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - ac$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{1}{4}(a + c)^2 + \frac{3}{4}(a - c)^2 \Rightarrow \begin{cases} a + c \leq 2b \\ ac \leq b^2 \end{cases}$$

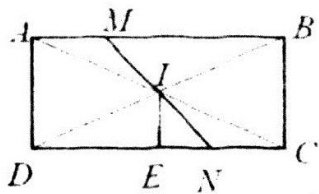
Điều cần chứng minh suy ra:  $a^3 + c^3 + 3abc \leq 5b^3$

$$\begin{aligned} VT &= a^3 + c^3 + 3abc = (a + c)(a^2 + c^2 - ac) + 3abc = (a + c)b^2 + 3abc \\ &\leq (2b)b^2 + 5b^2.b \Rightarrow VT \leq 5b^3 \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$



□ Câu VI.a

1.



Vì  $E \in d \Rightarrow E(a; 5-a) \Rightarrow \overrightarrow{IE} = (a-6; 3-a)$ .

Gọi N là trung điểm của AB  $\Rightarrow I$  là trung điểm của EN nên :

$$N : \begin{cases} x_N = 2x_I - x_E = 12-a \\ y_N = 2y_I - y_E = a-1 \end{cases} \Rightarrow N(12-a; a-1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (11-a; a-6). \text{ Vì } E \perp MN \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{IE} = 0$$

$$\Leftrightarrow (11-a)(a-6) + (a-6)(3-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = 7 \end{cases}$$

$$* a = 6 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (5; 0) \Rightarrow \text{pt AB : } y - 5 = 0$$

$$* a = 7 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (4; 1) \Rightarrow \text{pt AB : } x - 4y + 19 = 0.$$

2. Mặt cầu (S) có tâm I(1;2;3), bán kính  $R = 5$ .

$$\text{Khoảng cách từ I đến (P) : } d(I, (P)) = \frac{|2-4-3-4|}{3} = 3 < R$$

$\Rightarrow$  mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Gọi H, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đó  $\Rightarrow H$  là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) nên tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \\ 2x - 2y - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3; 0; 2).$$

$$\text{Bán kính } r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4.$$

□ Câu VII.a

$$\text{Ta có : } z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = -9 = (3i)^2$$

$$\Rightarrow z_1 = -1 + 3i, z_2 = -1 - 3i.$$

$$\Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{10} \Rightarrow A = 10 + 10 = 20.$$

□ **Câu VI.b**

1. Đường tròn (C) có tâm I(-2;-2); bán kính  $R = \sqrt{2}$

Gọi H là hình chiếu của I trên  $\Delta$ .

Để  $\Delta$  cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A,B phân biệt thì:  $IH < R$

$$\text{Khi đó } S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB = IH \cdot HA \leq \frac{IH^2 + HA^2}{2} = \frac{IA^2}{2} = \frac{R^2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \max S_{\Delta IAB} = 1 \text{ khi } IH = HA = 1 < R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |1-4m| = \sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow 1-8m+16m^2 = m^2+1$$

$$\Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = \frac{8}{15}.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu là:  $m = 0$  và  $m = \frac{8}{15}$ .

**Chú ý:**  $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \sin \widehat{AIB} \leq \frac{1}{2} IA \cdot IB \Rightarrow S_{\Delta IAB} \leq \frac{R^2}{2} = 1$

Đẳng thức xảy ra khi:  $\sin \widehat{AIB} = 1$  hay  $\widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AIB$  vuông  
cân tại I  $\Rightarrow d(I; \Delta) = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow m = 0$  hoặc  $m = \frac{8}{15}$ .

2. **Cách 1:** Giả sử  $M(a;b;c)$  là điểm cần tìm.

$$\text{Vi } M \in \Delta_1 \Rightarrow \frac{a+1}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c+9}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = b-1 \\ c = 6b-9 \end{cases}$$

Khoảng cách từ M đến mp (P) là:

$$d = d(M; (P)) = \frac{|a-2b+2c-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{|11b-20|}{3}.$$

Gọi (Q) là mp qua M và vuông góc với  $\Delta_2$ , ta có:

$$\vec{n}_{(Q)} = \vec{n}_{\Delta_2} = (2; 1; -2) \Rightarrow (Q): 2(x-a) + 1(y-b) - 2(z-c) = 0$$

$$\text{Hay } (Q): 2x + y - 2z + 9b - 16 = 0$$

Gọi H là giao điểm của (Q) và  $\Delta_2 \Rightarrow$  Tọa độ H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 9b - 16 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2} \end{cases} \Rightarrow H(-2b+3; -b+4; 2b-3)$$

$$\Rightarrow MH^2 = (3b-4)^2 + (2b-4)^2 + (4b-6)^2 = 29b^2 - 88b + 68$$

Yêu cầu bài toán trở thành:  $MH^2 = d^2$

$$\Leftrightarrow 29b^2 - 88b + 68 = \frac{(11b-20)^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 261b^2 - 792b + 612 = 121b^2 - 440b + 400$$

$$\Leftrightarrow 140b^2 - 352b + 212 = 0 \Leftrightarrow 35b^2 - 88b + 53 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = \frac{53}{35} \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn là:  $M(0; 1; -3)$  và  $M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right)$ .

**Cách 2:**  $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -9 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad M \in \Delta_1 \Rightarrow M(1-t; t; -9+6t).$

$\Delta_2$  đi qua  $A(1; 3; -1)$  và có VTCP  $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$

$$d(M; \Delta_2) = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_2|} = \sqrt{29t^2 - 88t + 68}, d(M; (P)) = \frac{|11t - 20|}{3}$$

$$d(M; \Delta_2) = d(M; (P)) \Leftrightarrow \sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \frac{|11t - 20|}{3}$$

$$\Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = \frac{53}{35} \Rightarrow M.$$

#### □ Câu VII b.

Điều kiện  $\begin{cases} x^2 + y^2 > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow xy > 0.$

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = \log_2(2xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (2; 2), (-2; -2): \text{thỏa mãn}$$

điều kiện. Vậy nghiệm của hệ là:  $(x; y) = (2; 2), (-2; -2)$ .

## O ĐỀ 5

### ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

#### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

□ Câu I. Cho hàm số  $y = 2x^4 - 4x^2$  (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2. Với các giá trị nào của  $m$ , phương trình  $x^2|x^2 - 2| = m$  có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

□ Câu II.

1. Giải phương trình:

$$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x).$$

2. Giải hệ phương trình  $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

□ Câu III. Tính tích phân  $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x + 1)^2} dx.$

□ Câu IV. Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $BB' = a$ , góc giữa đường thẳng  $BB'$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ ; tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  và  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $B'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tính thể tích khối tứ diện  $A'ABC$  theo  $a$ .



□ **Câu V.** Cho các số thực  $x, y$  thay đổi và thỏa mãn:  $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

## II. PHẦN RIÊNG

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

### A. Theo chương trình Chuẩn

□ **Câu VI.a**

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho đường tròn  $(C): (x - 2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$  và hai đường thẳng  $\Delta_1: x - y = 0$ ,  $\Delta_2: x - 7y = 0$ . Xác định toạ độ tâm K và tính bán kính của đường tròn  $(C_1)$ ; biết đường tròn  $(C_1)$  tiếp xúc với các đường thẳng  $\Delta_1, \Delta_2$  và tâm K thuộc đường tròn  $(C)$ .

2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho tứ diện ABCD có các đỉnh  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(-2; 1; 3)$ ,  $C(2; -1; 1)$  và  $D(0; 3; 1)$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến  $(P)$  bằng khoảng cách từ D đến  $(P)$ .

□ **Câu VII.a.** Tìm số phức  $z$  thỏa mãn:  $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$  và  $z \cdot \bar{z} = 25$ .

### B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b.**

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh  $A(-1; 4)$  và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng  $\Delta: x - y - 4 = 0$ . Xác định toạ độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

2. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng  $(P)$  có phương trình:  $x - 2y + 2z - 5 = 0$  và hai điểm  $A(-3; 0; 1)$ ,  $B(1; -1; 3)$ . Trong các đường thẳng đi qua A và song song với  $(P)$ , hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

□ **Câu VII.b.**

Tìm các giá trị của tham số  $m \in \mathbb{R}$  để đường thẳng  $y = -x + m$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$  tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho  $AB = 4$ .

# ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 5

## □ Câu I.

1. Khảo sát

• Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$

• Sự biến thiên

\* Chiều biến thiên:  $y' = 8x^3 - 8x$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = \pm 1$

Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; -1)$  và  $(0; 1)$ ;

đồng biến trên :  $(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$

\* Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0, y_{CB} = 0$ ;

đạt cực tiểu tại  $x = \pm 1, y_{CT} = -2$ .

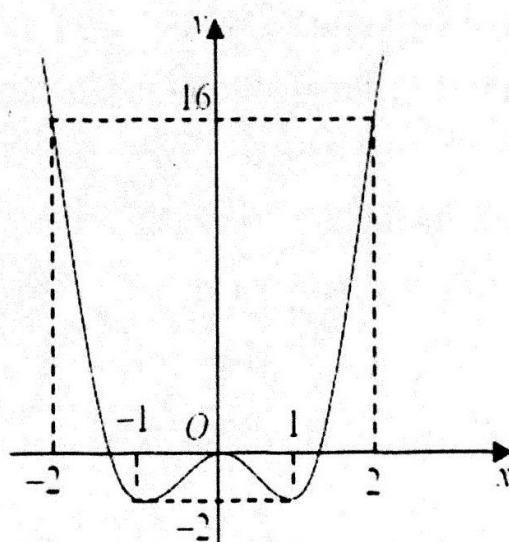
\* Giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

\* Bảng biến thiên

|    |           |    |   |   |           |
|----|-----------|----|---|---|-----------|
| x  | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
| y' | -         | 0  | + | 0 | +         |
| y  | $+\infty$ |    | 0 |   | $+\infty$ |

$\swarrow$   $\nearrow$   $\searrow$   $\nearrow$   
 $-2$   $-2$

\* Đồ thị:



2. Tìm m ...

$$\text{Ta có: } x^2 |x^2 - 2| = m \Leftrightarrow 2x^2 |x^2 - 2| = 2m (*)$$

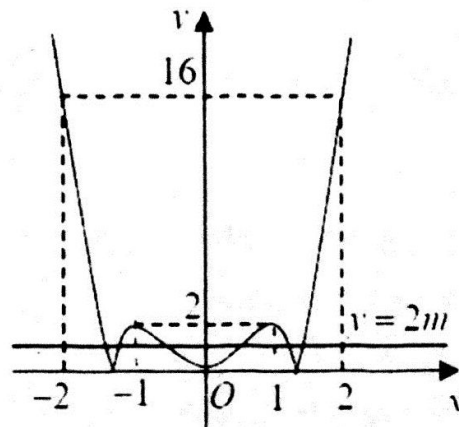
Phương trình có đúng 6 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow$  đường thẳng  $y = 2m$  cắt đồ thị hàm số  $y = 2x^2|x^2 - 2|$  tại 6 điểm phân biệt

Đồ thị đường thẳng  $y = 2m$  và hàm số  $y = 2x^2|x^2 - 2|$

$$y = 2x^2|x^2 - 2| = \begin{cases} 2x^4 - 4x^2 & \text{khi } x \leq -\sqrt{2} \text{ hay } x \geq \sqrt{2} \\ -(2x^4 - 4x^2) & \text{khi } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó  $y = 2x^2|x^2 - 2|$  trùng với đồ thị hàm số  $y = 2x^4 - 4x^2$  khi  $x \leq -\sqrt{2}$  hoặc  $x \geq \sqrt{2}$  và đối xứng của đồ thị của hàm số (1) khi  $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ .

Ta có đồ thị của hàm số  $y = 2x^2|x^2 - 2|$



Dựa vào đồ thị (C') ta thấy yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow 0 < 2m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

## □ Câu II.

1. Giải phương trình ...

Phương trình đã cho tương đương với

$$(1 - 2\sin^2 x)\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \sin x + \cos x \cos 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 4x \Leftrightarrow \cos \left( 3x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 4x = 3x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } 4x = -3x + \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$\text{Vậy } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

## 2. Giải hệ ....

Vì  $y = 0$  không thỏa hệ đã cho nên hệ đã cho:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \end{cases}$$

Đặt  $a = x + \frac{1}{y}$ ;  $b = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{y^2} = a^2 - 2b$ .

Ta có hệ:  $\begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 - b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 + a - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -5 \\ b = 12 \end{cases}$

\*  $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \\ x = 3 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

\*  $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = -5 \\ \frac{x}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 12 = 0 \\ x = 12y \end{cases} \text{ hệ vô nghiệm.}$

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm:  $(x; y) = \left(1; \frac{1}{3}\right), (3; 1)$ .

**Chú ý:**

Hệ đã cho  $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 1 = 7y - x \\ (xy + 1)^2 = 13y^2 - xy \end{cases}$   
 $\Rightarrow (7y - x)^2 = 13y^2 + xy \Leftrightarrow (12y - x)(3y - x) = 0$ .

### □ Câu III.

Tính tích phân...

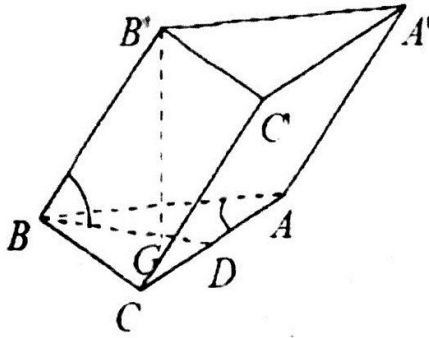
Đặt  $\begin{cases} u = 3 + \ln x \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$



$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= -\frac{3 + \ln x}{1 + x} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{3 + \ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \frac{dx}{x} - \int_1^3 \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{3 - \ln 3}{4} + \ln|x| \Big|_1^3 - \ln|x+1| \Big|_1^3 = \frac{1}{4} \left( 3 + \ln \frac{27}{16} \right)\end{aligned}$$

□ Câu IV.

Tính thể tích hình chóp...



Gọi D là trung điểm AC, G là trọng tâm  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow B'G \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{B'BG} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow B'G = BB' \cdot \sin \widehat{B'BG} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow B'G = BB' \cdot \sin \widehat{B'BG} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$BG = \frac{a}{2} \Rightarrow BD = \frac{3a}{4}. \text{ Đặt } AC = x$$

Trong  $\triangle ABC$ , ta có:  $BC = AC \tan \widehat{CAB} = x \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2$$

$$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + 3x^2 = \frac{9a^2}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{52} a^2$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104} \text{ (đvdt)} \text{ và } B'G = BB' \sin \widehat{B'BG} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích khối tứ diện  $A'.ABC$ :

$$V_{A'.ABC} = V_{B'.ABC} = \frac{1}{3} B'G \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{9a^3}{208} \text{ (đvtt)}.$$

□ Câu V.

Tìm giá trị nhỏ nhất...

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \begin{cases} (x+y)^3 + 4xy \geq 2 \\ (x+y)^2 - 4xy \geq 0 \end{cases} &\Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 - 2 \geq 0 \\ &\Rightarrow x+y \geq 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 \\
&= 3\left[(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2\right] - 2(x^2 + y^2) + 1 \\
&\geq 3\left[(x^2 + y^2)^2 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{4}\right] - 2(x^2 + y^2) + 1 \\
&= \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1.
\end{aligned}$$

Đặt  $t = x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow t \geq \frac{1}{2}$  và  $A \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ .

Xét hàm số:  $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1, t \geq \frac{1}{2}$  có

$$f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0 \quad \forall t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{9}{16}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A$  bằng  $\frac{9}{16}$ .

#### □ Câu VI.a

1. Xác định tọa độ tâm  $K$  ....

Gọi  $K(a; b), K \in (C) \Leftrightarrow (a-2)^2 + b^2 = \frac{4}{5} \quad (1)$

$$(C_1) \text{ tiếp xúc với } \Delta_1, \Delta_2 \Leftrightarrow d(K; \Delta_1) = d(K; \Delta_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-7b|}{5\sqrt{2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} 5(a-2)^2 + 5b^2 = 4 \\ 5|a-b| = |a-7b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(a-2)^2 + 5b^2 = 4 \\ 5(a-b) = a-7b \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} 5(a-2)^2 + 5b^2 = 4 \\ 5(a-b) = -a + 7b \end{cases} \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} 25a^2 - 20a + 16 = 0 \\ b = -2a \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

$$(\text{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 25b^2 - 40b + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b) = \left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

$$\text{Bán kính } (C_1): R = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}. \text{ Vậy } \left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right) \text{ và } R = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

2. Viết phương trình mặt phẳng (P)...

Mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán trong hai trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** (P) đi qua A, B song song với CD

$$\text{Véc tơ pháp tuyến } (P): \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]; \overrightarrow{AB} = (-3; -1; 2), \overrightarrow{CD} = (-2; 4; 0)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (-8; -4; -14).$$

$$\text{Phương trình } (P): 4x + 2y + 7z - 15 = 0.$$

**Trường hợp 2:** (P) đi qua A, B và cắt CD  $\Rightarrow$  (P) cắt CD tại trung điểm I của CD.

$$I(1; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (0; -1; 0).$$

$$\text{Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng } (P): \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] = (2; 0; 3).$$

$$\text{Phương trình } (P): 2x + 3z - 5 = 0.$$

$$\text{Vậy } (P): 4x + 2y + 7z - 15 = 0 \text{ hoặc } (P): 2x + 3z - 5 = 0.$$

**Chú ý:** Gọi (P):  $ax + by + cz + d = 0, a^2 + b^2 + c^2 > 0$

$$\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \\ d(C; (P)) = d(D; (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c + d = 0 \\ -2a + b + 3c + d = 0 \\ \frac{|2a - b + c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|3b + c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{cases}$$

Tìm số phức  $z$  ...

Gọi  $z = x + iy$ ,  $z - (2 + i) = (x - 2) + (y - 1)i$

$$|z - (2 + i)| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \quad (1)$$

$$\bar{z} \cdot z = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta được:  $(x; y) = (3; 4), (5; 0)$

Vậy  $z = 3 + 4i$  hoặc  $z = 5$ .

#### □ Câu VI.b

1. Xác định tọa độ B, C ...

Gọi H là hình chiếu của A lên  $\Delta \Rightarrow H$  là trung điểm BC.

$$AH = d(A, BC) = \frac{9}{\sqrt{2}}, \quad BC = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AH} = 4\sqrt{2}$$

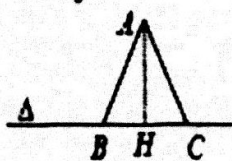
$$AB = AC = \sqrt{AH^2 + \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{97}{2}}$$

Tọa độ B, C là nghiệm của hệ: 
$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = \frac{97}{2} \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được  $(x; y) = \left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$  hoặc  $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

Vậy  $B\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right), C\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$  hoặc  $B\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right), C\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

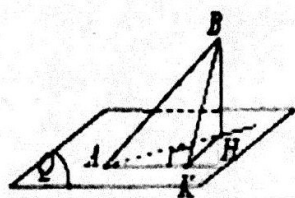
Chú ý:



Tam giác ABC cân nên  $BH = CH = 2\sqrt{2}$  và  $B \in \Delta, B(x_0; y_0)$ .

Ta có hệ: 
$$\begin{cases} \left(x_0 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{1}{2}\right)^2 = 8 \\ x_0 - y_0 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{11}{2} \\ y_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

2. Lập phương trình đường thẳng...



Gọi  $\Delta$  là đường thẳng cần tìm;  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P).

Phương trình (Q):  $x - 2y + 2z + 1 = 0$ .



Gọi K, H là hình chiếu của B trên  $\Delta$ . (Q)

Ta có  $BK \geq BH \Rightarrow AH$  là đường thẳng cần tìm.

Tọa độ của H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2} \\ x-2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(\frac{26}{9}; \frac{11}{9}; -\frac{2}{9}\right).$$

Vậy phương trình  $\Delta: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$ .

### □ Câu VII.b

Tìm các giá trị của tham số m ....

$$\text{Tọa độ A, B thỏa: } \begin{cases} \frac{x^2-1}{x} = -x+m \\ y = -x+m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - mx - 1 = 0, (x \neq 0) \\ y = -x + m \end{cases} \quad (1)$$

Ta thấy (1) có hai nghiệm thực phân biệt  $x_1, x_2$  khác 0 với mọi m.

Gọi  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ , ta có:

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2(x_1 - x_2)^2$$

Áp dụng định lý Viet cho phương trình (1) ta được:

$$AB^2 = 2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = \frac{m^2}{2} + 4$$

$$AB = 4 \Leftrightarrow \frac{m^2}{2} + 4 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}.$$

**I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH**

**□ Câu I.** Cho hàm số  $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$  có đồ thị là  $(C_m)$ ,  $m$  là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi  $m = 0$ .
2. Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = -1$  cắt đồ thị  $(C_m)$  tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

**□ Câu II.**

1. Giải phương trình:  $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$ .

2. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

**□ Câu III.** Tính tích phân:  $I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$ .

**□ Câu IV.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $AB = a$ ,  $AA' = 2a$ ,  $A'C = 3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $A'C'$ ,  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $A'C$ . Tính theo  $a$  thể tích khối tứ diện  $IABC$  và khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(IBC)$ .

**□ Câu V.** Cho các số thực không âm  $x, y$  thay đổi và thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy.$$

**II. PHẦN RIÊNG**

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

**A. Theo chương trình Chuẩn**

**□ Câu VI.a**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác  $ABC$  có  $M(2; 0)$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh  $A$  lần lượt có phương trình là  $7x - 2y - 3 = 0$  và  $6x - y - 4 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $AC$ .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm  $A(2;1;0)$ ,  $B(1;2;2)$ ,  $C(1;1;0)$  và mặt phẳng.

Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng  $(P): x + y + z - 20 = 0$

□ **Câu VII.a.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - (3 - 4i)| = 2$ .

## B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b.**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn  $(C)$  có phương trình:  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ . Gọi I là tâm của  $(C)$ . Xác định tọa độ điểm M thuộc  $(C)$  sao cho  $\widehat{IMO} = 30^\circ$ .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1} \text{ và mặt phẳng } (P): x + 2y - 3z + 4 = 0.$$

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong  $(P)$  sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng  $\Delta$ .

□ **Câu VII.b.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng

$$y = -2x + m \text{ cắt đồ thị hàm số } y = \frac{x^2 + x - 1}{x} \text{ tại hai điểm phân biệt}$$

A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc trục tung.

## O ĐÁP ÁN ĐỀ 6

□ **Câu I**

1. Khảo sát...

$$\text{Khi } m = 0, y = x^4 - 2x^2$$

- Tập xác định  $D = \mathbb{R}$
- Sự biến thiên:

$$* \text{ Chiều biến thiên: } y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ hoặc } x = 0.$$

\* Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; -1)$  và  $(0; 1)$ ; đồng biến trên

$(-1; 0)$  và  $(1; +\infty)$

\* Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = \pm 1, y_{CT} = -1$

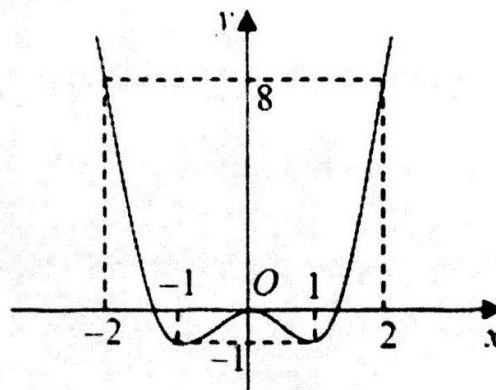
đạt cực đại tại  $x = 0, y_{CD} = 0$

\* Giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

\* Bảng biến thiên

|    |           |    |   |    |           |
|----|-----------|----|---|----|-----------|
| x  | $-\infty$ | -1 | 0 | 1  | $+\infty$ |
| y' | -         | 0  | + | 0  | +         |
| y  | $+\infty$ | -1 | 0 | -1 | $+\infty$ |

• Đồ thị:



2. Tìm m...

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(C_m)$  và đường thẳng

$$y = -1 : x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m - 1 = -1$$

Đặt  $t = x^2, t \geq 0$ : phương trình trở thành:

$$t^2 - (3m + 2)t + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 3m + 1.$$

Yêu cầu bài toán tương đương

$$\begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < 1, m \neq 0$$

## □ Câu II

1. Giải phương trình...

Phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt{3} \cos 5x - (\sin 5x + \sin x) - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 5x - \sin 5x = 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x - \frac{1}{2} \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi}{3} - 5x \right) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - 5x = x + k2\pi \text{ hoặc } \frac{\pi}{3} - 5x = \pi - x + k2\pi$$

$$\text{Vậy } x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \left( k \in \mathbb{Z} \right).$$

2. Giải hệ phương trình...

$$\text{Hệ đã cho tương đương : } \begin{cases} x + y + 1 - \frac{3}{x} = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{3}{x} - 1 \\ \left( \frac{3}{x} - 1 \right)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{3}{x} - 1 \\ \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x} + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Nghiem của hệ : } (x; y) = (1; 1) \text{ và } (x; y) = \left( 2; -\frac{3}{2} \right).$$

**Chú ý:** Để đơn giản bài toán, có thể đặt  $u = x + y, v = \frac{1}{x}$

**Cách khác:** Với điều kiện  $x \neq 0, u = x(x + y), v = x$

$$\text{Hệ đã cho viết lại: } \begin{cases} x(x + y) + x = 3 \\ x^2(x + y)^2 + x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases}$$

### □ Câu III

Tính tích phân...

$$\text{Đặt } t = e^x, dx = \frac{dt}{t}; x = 1, t = e; x = 3, t = e^3$$

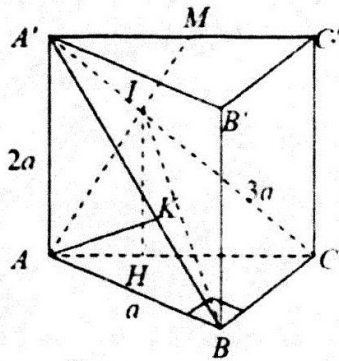


$$I = \int_{-e}^3 \frac{dt}{t(t-1)} = I = \int_{-e}^3 \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= \ln|t-1| \Big|_{-e}^3 - \ln|t| \Big|_{-e}^3 = \ln(e^2 + e + 1) - 2.$$

#### □ Câu IV

Tính thể tích khối chóp...



Hạ  $IH \perp AC$  ( $H \in AC$ )

$\Rightarrow IH \perp (ABC)$ ;  $IH$  là đường cao của tứ diện

$$IABC \Rightarrow IH \parallel AA' \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow IH = \frac{2}{3} AA' = \frac{4a}{3}, AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC : S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = a^2.$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện } IABC : V = \frac{1}{3} IH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{4a^3}{9}.$$

Hạ  $AK \perp A'B$  ( $K \in A'B$ ).

Vì  $BC \perp (ABB'A')$  nên  $AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (IBC)$ .

Khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(IBC)$  là  $AK$

$$AK = \frac{2S_{\triangle AA'B}}{A'B} = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

#### □ Câu V

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Do  $x + y = 1$  nên:

$$S = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 9xy + 25xy$$

$$= 16x^2y^2 + 12 \left[ (x+y)^3 - 3xy(x+y) \right] + 34xy = 16x^2y^2 - 2xy + 12.$$

Đặt  $t = xy$ , ta được:

$$S = 16t^2 - 2t + 12; 0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

Xét hàm số  $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$  trên đoạn  $\left[0; \frac{1}{4}\right]$

$$f'(t) = 32t - 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{16}; f(0) = 12,$$

$$f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}, f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}.$$

$$\max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}; \min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}$$

Giá trị lớn nhất của  $S$  bằng  $\frac{25}{2}$ ;

$$\text{Khi } \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Giá trị nhỏ nhất của  $S$  bằng  $\frac{191}{16}$ ; Khi  $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \frac{1}{16} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}; \frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right) \text{ hoặc } (x; y) = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}; \frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right).$$

## □ Câu VIa.

1. Viết phương trình đường thẳng...

$$\text{Tọa độ } A \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ 6x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2)$$

$B$  đối xứng với  $A$  qua  $M$ , suy ra  $B = (3; -2)$ .

Đường thẳng  $BC$  đi qua  $B$  và vuông góc với đường thẳng:

$$6x - y - 4 = 0$$

Phương trình  $BC$ :  $x + 6y + 9 = 0$ .

Tọa độ trung điểm N của BC thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ x + 6y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow N\left(0; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN} = (-4; -3);$$

Phương trình đường thẳng AC :  $3x - 4y + 5 = 0$

2. Xác định tọa độ điểm D ...

$$\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 2), \text{ phương trình AB : } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$D \text{ thuộc đường thẳng AB} \Rightarrow D(2 - t; 1 + t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (1 - t; t; 2t).$$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) :  $\vec{n} = (1; 1; 1)$

$$CD // (P) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (1 - t) + 1 \cdot t + 1 \cdot 2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right).$$

#### □ Câu VIIa.

Tìm tập hợp các điểm...

$$\text{Đặt } z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}); z - 3 + 4i = (x - 3) + (y + 4)i.$$

$$\text{Từ giả thiết, ta có: } \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4.$$

Tập hợp điểm biểu diễn các số phức  $z$  là đường tròn tâm  $I(3; -4)$  bán kính  $R = 2$ .

#### □ Câu VIIb.

1. Xác định tọa độ điểm M ...

Gọi điểm  $M(a; b)$ . Do  $M(a; b)$  thuộc (C) nên

$$(a - 1)^2 + b^2 = 1; O \in (C) \Rightarrow IO = IM = 1.$$

Tam giác IMO có  $\widehat{OIM} = 120^\circ$  nên

$$OM^2 = IO^2 + IM^2 - 2IO \cdot IM \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 3.$$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: 
$$\begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Vậy  $M = \left( \frac{3}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$

2. Viết phương trình đường thẳng...

Tọa độ điểm I của  $\Delta$  với (P) thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1} \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases} \Rightarrow I(-3; 1; 1).$$

Véc tơ pháp tuyến của (P):  $\vec{n} = (1; 2; -3)$ ; véc tơ chỉ phương của  $\Delta$ :

$$\vec{u} = (1; 1; -1).$$

Đường thẳng d cần tìm qua I và có véc tơ chỉ phương

$$\vec{v} = [\vec{n}, \vec{u}] = (1; -2; -1).$$

Phương trình d: 
$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

#### □ Câu VIIb.

*Tìm các giá trị của tham số m ...*

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x} = -2x + m \Leftrightarrow 3x^2 + (1-m)x - 1 = 0 (x \neq 0).$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $x_1; x_2$  khác 0 với mọi m

Hoành độ trung điểm I của AB:  $x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m-1}{6}$

$$I \in Oy \Leftrightarrow x_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{6} = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

## O ĐỀ 7

### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

□ Câu I. Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + 4$  có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Giả sử parabol (P):  $y = ax^2 + bx + c$ , ( $a \neq 0$ ) luôn đi qua các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số. Viết phương trình (P) để parabol (P) luôn tiếp xúc với đường thẳng  $y = 2x$ .

□ Câu II.

1. Giải phương trình:  $2 \sin^3 x + 4 \cos^3 x = 3 \sin x$ .
2. Giải bất phương trình:  $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} \leq 2x + \frac{1}{2x} + 5$ .

□ Câu III. Tính tích phân:  $I = \int_5^{10} \frac{dx}{x - 2\sqrt{x} - 1}$

□ Câu IV. Cho tứ diện ABCD có:

$$AB = CD = 2x, \left( 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ và } AC = BC = BD = DA = 1.$$

Tính thể tích tứ diện ABCD theo x. Tìm x để thể tích này lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

□ Câu V. Cho các số thực dương a, b, c bất kì. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{(a^2 + bc)(b + c)}{a(b^2 + c^2)}} + \sqrt{\frac{(b^2 + ca)(c + a)}{b(c^2 + a^2)}} + \sqrt{\frac{(c^2 + ab)(a + b)}{c(a^2 + b^2)}} \geq 3\sqrt{2}.$$

### II. PHẦN RIÊNG

**Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)**

#### A. Theo chương trình Chuẩn

□ Câu VI.a

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường tròn (C)  $x^2 + y^2 = 1$ . Đường tròn (C') tâm I(2;2) cắt (C) tại các điểm A, B sao cho  $AB = \sqrt{2}$ . Viết phương trình đường thẳng AB.



2. Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz cho  $A(2; 5; 3)$

và đường thẳng  $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $(d)$  sao cho khoảng cách từ  $A$  đến  $(Q)$  lớn nhất.

□ **Câu VII.a.** Tìm  $m$  để phương trình:  $x^2 + mx + 3i = 0$  có tổng bình phương 2 nghiệm bằng 8.

## B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b (2,0 điểm)**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng  $d_1: x - y = 0$ ,  $d_2: 2x + y - 1 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết rằng đỉnh  $A$  thuộc  $d_1$ , đỉnh  $C$  thuộc  $d_2$  và các đỉnh  $B, D$  thuộc trục hoành.

2. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu  $(S)$ :

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14 \text{ và điểm } M(-1; -3; -2).$$

Lập phương trình mặt phẳng  $(P)$  đi qua sao cho  $(P)$  cắt  $(S)$  theo một giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

□ **Câu VII.b.** Tính:  $S = C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - \dots + C_{19}^{16} + C_{19}^{18}$

## ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 7

□ **Câu I**

1. Bạn đọc tự giải.

2. Theo câu 1. hàm số đạt cực đại tại  $A(-2; 0)$  và đạt cực tiểu tại  $B(0; 4)$ .

Vì parabol  $(P)$  luôn đi qua các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số nên ta

$$\text{có hệ } \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a + 2 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow (P): y = ax^2 + 2(a+1)x + 4.$$

Parabol  $(P)$  luôn tiếp xúc đường thẳng  $y = 2x$  tại điểm  $(x_0; y_0)$ , khi hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} ax_0^2 + 2(a+1)x_0 + 4 = 2x_0 \\ (ax_0^2 + 2(a+1)x_0 + 4)' = (2x_0)' \end{cases} (*) \text{ có nghiệm } x_0.$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ x_0 = -1, a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow (P) : y = 4x^2 + 10x + 4.$$

## □ Câu II

$$1. 2 \sin^3 x + 4 \cos^3 x = 3 \sin x = 3 \sin x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 3 \sin^3 x + 3 \sin x \cdot \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x - \cos^3 x + 3 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \cos^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) (\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x)$$

$$+ 3 \cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) (\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + 4 \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 & (1) \\ \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + 4 \cos^2 x = 0 & (2) \end{cases}$$

- Giải (1)  $\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

- Giải (2)

- \* Để thấy  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi$  không là nghiệm phương trình (2)

- \* Với  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$ , chia cả hai vế phương trình (2) cho  $\cos^2 x$

Khi đó phương trình (2) trở thành :  $\tan^2 x + \tan x + 4 = 0$  (3), phương trình (3) vô nghiệm, nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có một họ nghiệm  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

2. Điều kiện :  $x > 0$

$$\text{Bất phương trình đã cho viết lại : } 5 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \leq 2 \left( x + \frac{1}{4x} \right) + 5 \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } t = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq \sqrt{2} \quad (2), \text{ do } x > 0.$$

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow t^2 = x + \frac{1}{4x} + 1 \Rightarrow x + \frac{1}{4x} = t^2 - 1$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow 5t \leq 2(t^2 - 1) + 5 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Điều kiện  $t \geq \sqrt{2}$ , do đó  $t \geq \frac{3}{2}$

$$\text{Khi đó (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq \frac{3}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 1 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{x} \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là :  $T = \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

### □ Câu III

Đặt  $x - 1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 + 1, dx = 2tdt$

Đổi cận :  $x = 5 \Rightarrow t = 2, x = 10 \Rightarrow t = 3$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= \int_2^3 \frac{2tdt}{(t^2 + 1) - 2t} = 2 \int_2^3 \frac{(t-1) + 1}{(t-1)^2} dt = 2 \int_2^3 \left[ \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \right] dt \\ &= 2 \left[ \ln|t-1| - \frac{1}{t-1} \right]_2^3 = 2 \left[ \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) - (0 - 1) \right] = 2 \left( \ln 2 + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \left( \ln 2 + \ln e^{\frac{1}{2}} \right) = 2 \ln(2\sqrt{e}) = \ln(2\sqrt{e})^2 = \ln 4e. \end{aligned}$$

### □ Câu IV

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD

$$\text{Để thấy } V_{ABCD} = V_{AICD} + V_{BICD}, \quad V_{AICD} = \frac{1}{3} AI \cdot S_{ICD}, \quad V_{BICD} = \frac{1}{3} BI \cdot S_{ICD}$$

$$\text{Hay : } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ICD} (AI + BI), \quad S_{ICD} = \frac{1}{2} \cdot IJ \cdot CD$$

Dễ dàng chứng minh được IJ là đoạn vuông góc chung của AB, CD

$$\text{Ta có : } IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = 1 - 2x^2, AI = BI = x$$

$$\Rightarrow S_{ICD} = \frac{1}{2} \cdot IJ \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - 2x^2} \cdot 2x = x \cdot \sqrt{1 - 2x^2} \text{ (đvdt)}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ICD} (AI + BI) = \frac{1}{3} x \cdot \sqrt{1 - 2x^2} (x + x) = \frac{2x^2}{3} \cdot \sqrt{1 - 2x^2} \text{ (đvtt)}.$$

$$\frac{2x^2}{3} \cdot \sqrt{1 - 2x^2} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^2 \cdot x^2 (1 - 2x^2)} \leq \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\left( \frac{x^2 + x^2 + (1 - 2x^2)}{3} \right)^3} = \frac{2}{9\sqrt{3}}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi : } x^2 = x^2 = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } \max V_{ABCD} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \text{ khi } x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

#### □ Câu V

Đặt  $x = a(b^2 + c^2), y = b(c^2 + a^2), z = c(a^2 + b^2)$ . Khi đó, bất đẳng

$$\text{thức cần chứng minh chính là : } \sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq 3\sqrt{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi bộ ba số, ta có

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{y+z}{x}} \cdot \sqrt{\frac{z+x}{y}} \cdot \sqrt{\frac{x+y}{z}}}.$$

$$\text{Vậy ta cần chỉ ra được : } \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \geq 8.$$

Điều này một lần nữa lại đúng theo bất đẳng thức Côsi vì

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \geq \frac{2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx}}{xyz} = 8.$$

Bất đẳng thức chứng minh xong.

Đấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c > 0$ .

#### □ Câu VI.a

1. **Cách 1:** Đường thẳng OI nối 2 tâm của 2 đường tròn  $(C), (C')$  là đường phân giác  $y = x$ . Do đó, đường AB vuông góc với đường thẳng  $y = x \Rightarrow$  hệ số góc của đường thẳng AB bằng  $-1$ .

Vì  $AB = \sqrt{2} \Rightarrow A, B$  phải là giao điểm của  $(C)$  với  $Ox, Oy$ .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} A(0;1), B(1;0) \\ A'(-1;0), B'(0;-1) \end{cases}$$

Suy ra phương trình  $(AB): y = -x - 1, y = -x + 1$ .

**Cách khác:** phương trình  $AB$  có dạng:  $y = -x + m$ .

Phương trình hoành độ giao điểm của  $AB$  là:

$$x^2 + (-x + m)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

(1) có  $\Delta' = 2 - m^2$ , gọi  $x_1, x_2$  là nghiệm của (1) ta có:

$$AB^2 = 2 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\Delta'}{a^2} = 1 \Leftrightarrow 2 - m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Suy ra phương trình  $(AB): y = -x - 1, y = -x + 1$ .

2. Giả sử mặt phẳng  $(Q)$  có phương trình dạng:

$$ax + by + cz + d = 0, a^2 + b^2 + c^2 > 0.$$

**Cách 1:**

(d) có vector chỉ phương là  $\vec{u} = (2; 1; 2)$  và qua điểm  $N(1; 0; 2)$ ,  $(Q)$  có vector pháp tuyến là  $\vec{n} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ . Mặt phẳng  $(Q)$  chứa (d) khi

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ N \in (Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 2c = 0 \\ a + 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = a + b \\ c = -\frac{2a + b}{2} \end{cases} \quad (1).$$

Khoảng cách từ  $A$  đến  $(Q)$ :

$$d_{(A/(Q))} = \frac{|2a + 5b + 3c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\left| 2a + 5b + 3\left(-\frac{2a + b}{2}\right) + (a + b) \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + \left(-\frac{2a + b}{2}\right)^2}} \quad \text{do (1)}$$



Thu gọn rồi chia hai trường hợp :

- $b = 0$ , trường hợp này không thỏa đề bài .
- $b \neq 0$ , chia cả tử và mẫu cho  $b$ .

Khoảng cách từ  $A$  đến  $(Q)$  lớn nhất khi  $a = 1, b = -4 \Rightarrow c = 1, d = -3$ .

Mặt phẳng  $(Q)$ :  $x - 4y + z - 3 = 0$ .

### Cách 2:

Gọi  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên đường thẳng  $(d)$ , khi đó

$$\begin{cases} M \in (d) \\ \overline{AM} \perp \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow M(3; 1; 4).$$

Giả sử  $(P)$  là mặt phẳng tùy ý chứa  $(d)$ , khi đó  $M \in (P)$ .

Kẻ  $AH \perp (P)$ , khi đó  $AH \leq AM$ .

Mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $(d)$  sao cho khoảng cách từ  $A$  đến  $(Q)$  lớn nhất chính là mặt phẳng chứa  $(d)$  đồng thời vuông góc với  $AM$ .

$$\text{Vậy } (Q): \begin{cases} \text{qua } M(3; 1; 4) \\ \text{vtpt } \vec{n} // \overline{AM} = (1; -4; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x - 4y + z - 3 = 0.$$

### □ Câu VII.a

Theo bài ra ta có:  $x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8(1)$ .

Theo định lí Viet ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = 3i \end{cases} (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $m^2 - 6i = 8 \Leftrightarrow m^2 = 8 + 6i \Rightarrow m$  là một căn bậc hai của  $8 + 6i$ .

Gọi  $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$  là một căn bậc hai của  $8 + 6i$  nghĩa là

$$(x + iy)^2 = 8 + 6i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 8 + 6i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Do  $x, y$  cùng dấu suy ra  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy  $8 + 6i$  có 2 căn bậc hai là  $3 + i$  và  $-3 - i$ .

#### □ Câu VI.b

1. Vì  $A \in d_1 \Rightarrow A(t; t)$ ,  $A$  và  $C$  đối xứng nhau qua  $BD$  và

$$B, D \in O_x \Rightarrow C(t; -t).$$

Vì  $C \in d_2 \Rightarrow 2t - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ . Vậy  $A(1; 1), C(1; -1)$ .

Trung điểm của  $AC$  là  $I(1; 0)$ .

Vì  $I$  là tâm của hình vuông nên  $\begin{cases} IA = IB = 1 \\ ID = IA = 1 \end{cases}$ .

$$B, D \in O_x \Rightarrow B(b; 0), D(d; 0) \Rightarrow \begin{cases} |b - 1| = 1 \\ |d - 1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, b = 2 \\ d = 0, d = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(0; 0), D(2; 0) \text{ hoặc } B(2; 0), D(0; 0)$$

Vậy  $A(1; 1), B(0; 0), C(1; -1), D(2; 0)$

$$\text{hoặc } A(1; 1), B(2; 0), C(1; -1), D(0; 0)$$

2. Mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-1; -2; -3)$  và bán kính  $R = \sqrt{14}$ .

Vì  $IM < R$  nên mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo một giao tuyến là đường tròn.

Để đường tròn có bán kính nhỏ nhất  $\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - IH^2}$  nhỏ nhất ( $H$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  trên mặt phẳng  $(P)$ )

$$\Leftrightarrow IH \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow M \equiv H \Leftrightarrow \overline{IM} = (0; 1; -1) \text{ là VTPT của } (P).$$

Vậy  $(P)$  có phương trình là  $y - z + 1 = 0$ .

#### □ Câu VII.b.

$$(1 + i)^{19} = (C_{19}^0 + C_{19}^2 i^2 + C_{19}^4 i^4 + \dots + C_{19}^{18}) + (C_{19}^1 i + C_{19}^3 i^3 + \dots + C_{19}^{19} i^{19})$$

Phần thực ở vế phải là :  $C_{19}^0 + C_{19}^2 i^2 + C_{19}^4 i^4 + \dots + C_{19}^{18} (1)$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}(1+i)^{19} &= \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{19} = (\sqrt{2})^{19} \left( \cos \frac{19\pi}{4} + i \sin \frac{19\pi}{4} \right) \\ &= (\sqrt{2})^{19} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2^9 + 2^9 i\end{aligned}$$

Phần thực ở vế phải là:  $-2^9 (2)$ .

Từ (1) và (2) suy ra  $C_{19}^0 + C_{19}^2 i^2 + C_{19}^4 i^4 + \dots + C_{19}^{18} = -2^9 = -512$

## O ĐỀ 8

### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

□ Câu I. Cho hàm số  $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m+2$   $m \in \mathbb{R}$ .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với  $m=2$ .

2. Tìm tham số  $m \in \mathbb{R}$  để đồ thị của hàm số có tiếp tuyến tạo với đường thẳng (d):  $x+y+7=0$  góc  $\alpha$ , biết  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$ .

□ Câu II.

1. Giải phương trình:  $\sqrt{3^x - 5} + \sqrt{10 - 3^x} - \sqrt{15 \cdot 3^x - 50 - 9^x} = 1$ .

2. Giải phương trình:  $2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - 2x \right) + \sqrt{3} \cos 4x = 4 \cos^2 x - 1$ .

□ Câu III. Tính tích phân:  $I = \int_0^1 \frac{x+1}{(1+\sqrt{1+2x})^2} dx$ .

□ Câu IV. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh bên bằng  $a$ , góc ở đáy của mặt bên là  $\alpha$ . Chứng minh:

$$V = \frac{2}{3} a^3 \cos^2 \alpha \sqrt{\sin(\alpha + 30^\circ) \sin(\alpha - 30^\circ)}.$$

□ Câu V: Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a+b+c=6$ .

Chứng minh rằng:  $(11+a^2)(11+b^2)(11+c^2) + 120abc \geq 4320$

## II. PHẦN RIÊNG

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

### A. Theo chương trình Chuẩn

#### □ Câu VI.a.

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm  $M(1;-1)$  và hai đường thẳng  $d_1: x - y - 1 = 0$ ,  $d_2: 2x + y - 5 = 0$ . Gọi A là giao điểm của  $d_1$  và  $d_2$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua M cắt  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt ở B và C sao cho ba điểm A, B, C tạo thành tam giác có  $BC = 3AB$ .

2. Trong không gian Oxyz cho 2 đường thẳng

$$(d_1) \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = t' \\ y = 3 - t' \\ z = 0 \end{cases}.$$

Viết phương trình mặt phẳng cách đều 2 đường thẳng  $(d_1), (d_2)$ .

#### □ Câu VII.a.

Trên mặt phẳng cho đa giác lồi 10 cạnh  $T = A_1A_2...A_n$ . Xét các tam giác có 3 đỉnh của tam giác T. Hỏi trong số các tam giác có bao nhiêu tam giác mà 3 cạnh của nó đều không phải là 3 cạnh của tam giác T?

### B. Theo chương trình Nâng cao

#### □ Câu VI.b.

1. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm  $A(2;5), B(4;1)$  và tiếp xúc với đường thẳng có phương trình  $3x - y + 9 = 0$ .

2. Tìm trên giao tuyến của hai mặt phẳng  $(P): x + 4y - 5 = 0$  và  $(Q): 3x - y + z - 2 = 0$  những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng  $(S): 2x - 2y - z + 7 = 0$  một khoảng bằng 2?

□ Câu VII.b. Tìm các giá trị x trong khai triển nhị thức Newton:

$$\left( \sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} + \sqrt[3]{2^{(x-2)\lg 3}} \right)^n \text{ biết rằng số hạng thứ 6 của khai triển bằng 21}$$

$$\text{và } C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2.$$

## O ĐÁP ÁN ĐỀ 8

### □ Câu I

1. Bạn đọc tự giải
2. Gọi  $k$  là hệ số góc của tiếp tuyến

$\Rightarrow$  tiếp tuyến có vectơ pháp  $\vec{n}_1 = (k; -1)$

Đường thẳng (d) có vectơ pháp  $\vec{n}_2 = (1; 1)$

$$\text{Ta có: } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2} \sqrt{k^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow 12k^2 - 26k + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{3}{2} \\ k_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Yêu cầu của bài toán thỏa mãn  $\Leftrightarrow$  ít nhất một trong hai phương trình:

$y' = k_1(1)$  và  $y' = k_2(2)$  có nghiệm  $x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2(1-2m)x + 2-m = \frac{3}{2} \text{ (a)} \\ 3x^2 + 2(1-2m)x + 2-m = \frac{2}{3} \text{ (b)} \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_a \geq 0 \\ \Delta'_b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m^2 - 2m - 1 \geq 0 \\ 4m^2 - m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{4}, m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq -\frac{3}{4}, m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{4} \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

### □ Câu II

$$1. \text{Đặt: } t = \sqrt{3^x - 5} + \sqrt{10 - 3^x} \quad (t > 0) \Rightarrow t^2 = 5 + 2\sqrt{15 \cdot 3^x - 50 - 9^x}$$

Khi đó từ phương trình đã cho suy ra:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow t = 3 \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{Với } t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3^x - 5} + \sqrt{10 - 3^x} = 3(*).$$

Đặt  $y = 3^x, y > 0$ .



$$\text{Khi đó } (*) \Rightarrow 9 = 5 + 2\sqrt{15y - 50 - y^2} \Leftrightarrow \sqrt{15y - 50 - y^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 15y + 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 9 \\ 3^x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_3 6 \end{cases}$$

$$2. \text{ Phương trình đã cho } \Leftrightarrow 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + \sqrt{3} \cos 4x = 4 \cos^2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = 2(2 \cos^2 x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 4x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

□ **Câu III.** Tính tích phân:  $I = \int_0^1 \frac{x+1}{(1+\sqrt{1+2x})^2} dx$

$$\text{Đặt } t = 1 + \sqrt{1+2x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} \Rightarrow dx = (t-1)dt \text{ và } x = \frac{t^2-2t}{2}$$

$$\text{Ta có: } I = \frac{1}{2} \int_2^1 \frac{(t^2-2t+2)(t-1)}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_2^1 \frac{t^3-3t^2+4t-2}{t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^1 \left(t - 3 + \frac{4}{t} - \frac{2}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2} - 3t + 4 \ln|t| + \frac{2}{t}\right) \Big|_2^1 = 2 \ln 2 - \frac{1}{4}.$$

□ **Câu IV**

Gọi SH, SI lần lượt là đường cao, trung đoạn của hình chóp.

Theo giả thiết, góc ở đáy của mặt bên là  $\alpha \Leftrightarrow \widehat{SBC} = \alpha, SB = a$ .

Tuy nhiên góc giữa mặt bên và mặt đáy là  $\widehat{SIA}$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} SH = \frac{\sqrt{3}}{12} BC^2 \cdot SH$$

$$\Delta SBI \text{ vuông, } BI = SB \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \alpha \Rightarrow BC = 2BI = 2a \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta SBH \text{ vuông, } BH = \frac{2}{3} \cdot \frac{BC \sqrt{3}}{2} = \frac{2a \sqrt{3}}{3} \cos \alpha$$

$$SH^2 = SB^2 - BH^2 = \frac{a^2}{3}(3 - 4\cos^2 \alpha) \Rightarrow SH = a\sqrt{\frac{3 - 4\cos^2 \alpha}{3}}$$

$$V = \frac{1}{3}a^3 \cos^2 \alpha \sqrt{3 - 4\cos^2 \alpha}$$

$$3 - 4\cos^2 \alpha = 3 - 4\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = 2\left(\frac{1}{2} - \cos 2\alpha\right) = 2(\cos 60^\circ - \cos 2\alpha)$$

$$V = \frac{2}{3}a^3 \cos^2 \alpha \sqrt{\sin(\alpha + 30^\circ)\sin(\alpha - 30^\circ)}$$

□ **Câu V.** Khai triển bất đẳng thức cần chứng minh, ta thu được

$$121(a^2 + b^2 + c^2) + 11(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + (a^3b^2c^2 + 36) + 120abc \geq 3025$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:  $a^2b^2c^2 + 36 \geq 12abc$

Vậy bài toán quy về chứng minh

$$121(a^2 + b^2 + c^2) + 11(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 132abc \geq 3025$$

$$\Leftrightarrow 11(a^2 + b^2 + c^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) \geq 275$$

$$\Leftrightarrow 11[36 - 2(ab + bc + ca)] + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) \geq 275$$

$$\Leftrightarrow 11^2 - 22(ab + bc + ca) + (ab + bc + ca)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca - 11)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Chứng minh hoàn tất.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } a, b, c \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} a + b + c = 6 \\ abc = 6 \\ ab + bc + ca = 11 \end{cases}$$

Từ đó suy ra  $a, b, c$  là 3 nghiệm phân biệt của phương trình bậc ba:

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = 0 \text{ (theo định lí Viét đảo).}$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = (1, 2, 3) \text{ và các hoán vị.}$$

\* **Nhận xét:** Một bài toán hoàn toàn đối xứng nhưng dấu bằng lại xảy ra khi 3 biến lệch nhau và không có biến nào bằng 0, quả là rất đặc biệt phải không các bạn ?

**□ Câu VI.a**

1. Ta có tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(2;1)$$

Lấy điểm  $E(3;2) \in d_1$  ( $E \neq A$ ). Ta tìm trên  $d_2$  điểm  $F, F \neq A$  sao cho  $EF = 3AE$

$$\text{Do } F \in d_2 \Rightarrow F(x; 5 - 2x).$$

$$\text{Khi đó: } EF = 3AE \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (3 - 2x)^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{18}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(0;5) \\ F\left(\frac{18}{5}; -\frac{11}{5}\right) \end{cases}$$

$$\text{Vi } \begin{cases} BC = 3AB \\ EF = 3AE \end{cases} \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow BC \parallel EF \Rightarrow \Delta \parallel EF$$

$$F(0;5) \Rightarrow \overrightarrow{EF}(-3;3) \Rightarrow \Delta: x + y = 0$$

$$F\left(\frac{18}{5}; -\frac{11}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{EF}\left(\frac{3}{5}; -\frac{21}{5}\right) \Rightarrow \Delta: 7x + y - 6 = 0$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$\Delta: x + y = 0 \text{ và } \Delta: 7x + y - 6 = 0.$$

2. Đường thẳng  $(d_1)$  đi qua  $A(0;0;4)$  và có vector chỉ phương  $\vec{u}_1 = (2; 1; 0)$ ,  $(d_2)$  đi qua  $A(0;3;0)$  và có vector chỉ phương  $\vec{u}_2 = (1; -1; 0)$ .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (0; 0; -3) \\ \overrightarrow{AB} = (0; 3; -4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{AB} = 12 \neq 0 \Rightarrow (d_1), (d_2) \text{ chéo nhau.}$$

Vì  $(d_1), (d_2)$  chéo nhau nên mặt phẳng  $(P)$  phải đi qua trung điểm I của MN là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng  $(d_1), (d_2)$ .

$$\begin{aligned} \text{Giả sử } M \in (d_1) &\Rightarrow M(2t; t; 4), N \in (d_2) \Rightarrow N(t'; 3 - t'; 0) \\ &\Rightarrow \overline{MN} = (t' - 2t; 3 - t' - t; -4) \end{aligned}$$

MN là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng  $(d_1), (d_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overline{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' - 4t - 3 - t' - t = 0 \\ t' - 2t - 3 + t' + t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow M(2; 1; 4) \\ t' = 2 \Rightarrow N(2; 1; 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{MN} = (0; 0; -4) \\ I(2; 1; 2) \end{cases}$$

Mặt phẳng  $(P)$  đi qua trung điểm  $I$  của  $MN$  và vuông góc  $MN$  nên có vectơ pháp tuyến là  $\overline{MN} = (0; 0; -4)$ , do đó mặt phẳng  $(P)$  cần tìm :  $z - 2 = 0$ .

#### □ Câu VII.a

Số tam giác phân biệt có 3 đỉnh là 3 trong các đỉnh của tam giác  $T$  là  $C_{10}^3 = 120$ . Ứng với mỗi cạnh của đa giác  $T$  sẽ có 8 cách chọn các đỉnh còn lại để tạo thành 1 tam giác chứa cạnh này.

Do đó số tam giác có ít nhất 1 cạnh là cạnh của đa giác  $T$  là 80 tam giác.

Trong 80 tam giác trên có 10 tam giác có 2 cạnh là 2 cạnh của đa giác  $T$  được lặp lại 2 lần.

Vậy số tam giác cần tìm để thỏa mãn đề bài là

$$(C_{10}^3 - 80) + 10 = 50 \text{ (tam giác)}$$

#### □ Câu VI.b

1. Gọi  $I(a; b)$  là tâm đường tròn ta có hệ

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = d(I; \Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - a)^2 + (5 - b)^2 = (4 - a)^2 + (1 - b)^2 & (1) \\ (2 - a)^2 + (5 - b)^2 = \frac{(3a - b + 9)^2}{10} & (2) \end{cases}$$

(1)  $\Leftrightarrow a = 2b - 3$  thế vào (2) ta có

$$b^2 - 12b + 20 = 0 \Leftrightarrow b = 2 \vee b = 10$$

$$b = 2 \Rightarrow a = 1, R = \sqrt{10} \Rightarrow (C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$$

$$b = 10 \Rightarrow a = 17, R = \sqrt{250} \Rightarrow (C) : (x - 17)^2 + (y - 10)^2 = 250$$

2. Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(P), (Q)$  là

$$(d) : \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = t \\ z = -13 + 13t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$M \in (d) \Rightarrow M(5 - 4t; t; -13 + 13t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$d_{(MS)} = \frac{|2(5 - 4t) - 2(t) - (-13 + 13t) + 7|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|30 - 23t|}{5}$$

Theo bài toán

$$d_{(MS)} = 2 \Leftrightarrow \frac{|30 - 23t|}{5} = 2 \Leftrightarrow |30 - 23t| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 30 - 23t = 10 \\ 30 - 23t = -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{20}{23}, M\left(\frac{20}{23}; \frac{20}{23}; \frac{20}{23}\right) \\ t = \frac{40}{23}, M\left(\frac{40}{23}; \frac{40}{23}; \frac{40}{23}\right) \end{cases}$$

#### □ Câu VII.b

Điều kiện:  $n$  nguyên dương và  $n \geq 3$

$$\text{Ta có } C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} = 2 \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$n^2 - 9n + 14 = 0 \Rightarrow n = 7$$

Số hạng thứ 6 :

$$C_7^5 \left( \sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} \right)^2 \left( \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}} \right)^5 = 21 \Leftrightarrow 21 \cdot 2^{\lg(10-3^x)} \cdot 2^{(x-2)\lg 3} = 21$$

$$\Leftrightarrow \lg(10 - 3^x) + \lg 3^{(x-2)} = 0 \Leftrightarrow 10 - 3^x \cdot 3^{(x-2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 (*)$$

Đặt  $t = 3^x, t > 0$

$$\text{Phương trình: } (*) \Rightarrow t^2 - 10t + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ t = 9 \Rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$



**I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH**

□ **Câu I.** Cho hàm số:  $y = \frac{x-2}{x-1}$  có đồ thị là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm  $A\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$  và cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho A thuộc đoạn MN và  $AN = 2AM$ .

□ **Câu II.**

1. Giải phương trình:  $x + \frac{3x}{\sqrt{x^2-9}} = 6\sqrt{2} \quad (x \in \mathbb{R})$ .

2. Giải phương trình:  $1 + \sin \frac{x}{2} \sin x - \cos \frac{x}{2} \sin^2 x = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$ .

□ **Câu III.** Cho hai hàm số  $g(x) = 3 - x, f(x) = (x-1)^2$ .

Tính tích phân  $\int_{-2}^3 \min \{f(x), g(x)\} dx$ .

□ **Câu IV.** Cho hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, SA, SB là hai đường sinh, biết  $SO = 3$ , khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng 1, diện tích tam giác SAB bằng 18. Tính thể tích hình nón đã cho.

□ **Câu V.** Chứng minh rằng với mọi số thực không âm x, y, z, ta luôn có:

$$(x+2y+z)(x+y+z)^2 \geq 4(x+y)(y+z)(z+x).$$

**II. PHẦN RIÊNG**

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

**A. Theo chương trình Chuẩn**

□ **Câu VI.a.**

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm  $A(1;3)$  nằm ngoài

$$(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0.$$

Viết phương trình đường thẳng d qua A cắt (C) tại hai điểm B và C sao cho  $AB = BC$ .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho  $A(2;3;-1)$  và mặt phẳng  $(\alpha): 2x - y - z - 5 = 0$ . Tìm tọa độ B đối xứng với A qua mặt phẳng  $(\alpha)$ .

□ Câu VII.a.

Giải phương trình:  $z^3 + (2 - 2i)z^2 + (5 - 4i)z - 10i = 0$  biết phương trình có nghiệm thuần ảo

**B. Theo chương trình Nâng cao**

□ Câu VI.b.

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn  $(C)$ :

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13 \text{ và đường thẳng } (\Delta): x - 5y - 2 = 0.$$

Gọi giao điểm của đường tròn  $(C)$  với đường thẳng  $(\Delta)$  là A, B. Xác định tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông tại B và nội tiếp đường tròn  $(C)$ .

2. Trong không gian Oxyz cho hai điểm  $A(-1;3;-2), B(-3,7,-18)$  và mặt phẳng  $(P): 2x - y + z + 1 = 0$ .

Tìm tọa độ điểm  $M \in (P)$  sao cho  $MA + MB$  nhỏ nhất.

□ Câu VII.b. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3 \log_8 (\sqrt{x-y} + 2) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases}$$

**○ ĐÁP ÁN ĐỀ 9**

□ Câu I

1. Bạn đọc tự giải

2. Giả sử  $M\left(x_1; 1 - \frac{1}{x_1 - 1}\right), N\left(x_2; 1 - \frac{1}{x_2 - 1}\right)$

Theo bài toán, suy ra

$$\overline{AN} = -2\overline{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - 2x_1 \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{x_2 - 1} = -2\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{x_1 - 1}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(0;2), N(2;0) \Rightarrow (d): y = 2 - x$$

□ Câu II

$$1. \text{ Điều kiện: } x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases}$$

Nếu  $x < -3$  thì  $x + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 9}} < 0 < 6\sqrt{2}$  phương trình vô nghiệm.

Nếu  $x > 3$ , bình phương hai vế phương trình

$$x^2 + \frac{9x^2}{x^2 - 9} + \frac{6x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} = 72 \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2 - 9} + 6 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} - 72 = 0 (*)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} \quad (t > 0), \text{ phương trình } (*) \Rightarrow t^2 + 6t - 72 = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

$$\text{Với } t = 6 \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} = 6 \Leftrightarrow x^4 - 36x^2 + 324 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} \text{ thỏa } x > 3.$$

$$2. 1 + \sin \frac{x}{2} \sin x - \cos \frac{x}{2} \sin^2 x = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin \frac{x}{2} \sin x - \cos \frac{x}{2} \sin^2 x = 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = 1 + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \sin x - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \left( \sin \frac{x}{2} - 1 \right) \left( 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin \frac{x}{2} = 1 \\ 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pi + k4\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

### 1 Câu III

**ách 1:**  $\int_{-2}^3 \min \{f(x), g(x)\} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^3 \left\{ (f(x) + g(x)) - |f(x) - g(x)| \right\} dx$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^3 \left\{ (x^2 - 3x + 4) - |x^2 - x - 2| \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^3 (x^2 - 3x + 4) dx - \frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx$$

$$+ \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx - \int_2^3 (x^2 - x - 2) dx = 8$$

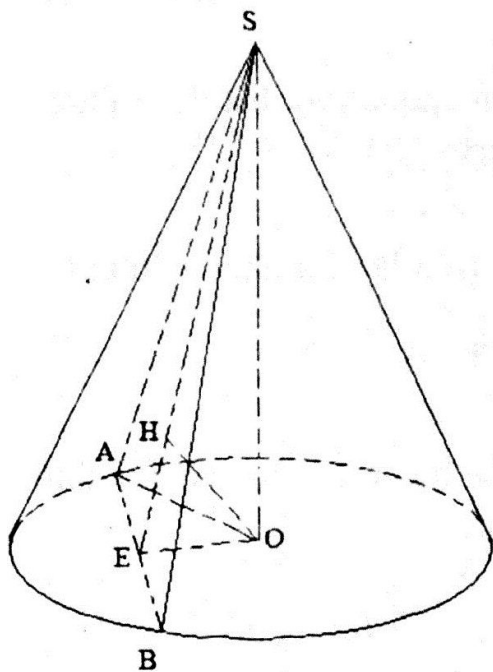
**ách 2:**

Xét  $f(x) - g(x) = (x - 1)^2 - (3 - x) = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

Suy ra  $\begin{cases} \min \{f(x), g(x)\} = 3 - x & \text{khi } x \in [-2; -1] \cup [2; 3] \\ \min \{f(x), g(x)\} = (x - 1)^2 & \text{khi } x \in [-1; 2] \end{cases}$

Bài toán đến đây đã đơn giản nhiều:  $\min \{a; b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$

### 1 Câu IV .



Gọi E là trung điểm của AB, ta có:

$OE \perp AB$ ,  $SE \perp AB$ , suy ra

$(SOE) \perp AB$ .

Dựng  $OH \perp SE \Rightarrow OH \perp (SAB)$

vậy OH là khoảng cách từ O

đến  $(SAB)$ , theo giả thiết thì  $OH = 1$ .

Tam giác SOE vuông tại O, OH

là đường cao  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OE^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow OE^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow OE = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$SE^2 = OE^2 + SO^2 = \frac{9}{8} + 9 = \frac{81}{8} \Rightarrow SE = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} AB \cdot SE \Leftrightarrow AB = \frac{2S_{SAB}}{SE} = \frac{36}{\frac{9\sqrt{2}}{4}} = 8\sqrt{2}$$

$$OA^2 = AE^2 + OE^2 = \left(\frac{1}{2} AB\right)^2 + OE^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \frac{9}{8} = 32 + \frac{9}{8} = \frac{265}{8}$$

$$\text{Thể tích hình nón đã cho: } V = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \pi \frac{265}{8} \cdot 3 = \frac{265}{8} \pi \text{ (đvtt)}$$

#### □ Câu V.

Một kinh nghiệm mà chúng tôi muốn chia sẻ ở đây, đó là với hầu hết các bất đẳng thức ba biến, nhất là trong kì thi đại học thì đẳng thức chỉ xảy ra khi

$$a = b = c \text{ hoặc } abc = 0.$$

Điều đó cũng dẫn tới phương pháp xác định dấu bằng đơn giản và hiệu quả nhất là cho ba biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

Bất đẳng thức này chỉ đối xứng với hai biến là  $x$  và  $z$ .

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi  $y = 0, x = z$ . Ý tưởng đầu tiên của ta có lẽ là sử dụng đánh giá đơn giản  $y \geq 0$  để đưa về chứng minh bất đẳng thức đối xứng

$$(x + y + z)^3 \geq 4(x + y)(y + z)(z + x).$$

Nhưng thật đáng tiếc vì đánh giá này đem lại cho ta một bất đẳng thức sai (chẳng hạn chỉ cần cho  $a = b = c = 1$ , ta thấy ngay  $VT = 27 < VP = 32$ ).

Sau đây là lời giải đúng.

Do vai trò của  $x$  và  $z$  trong bất đẳng thức trên là như nhau nên ta hoàn toàn có thể giả sử  $x \geq z$ . Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$(x + y + z)^2 \geq 4x(y + z).$$

Sử dụng đánh giá này, dễ thấy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$x(x + 2y + z) \geq (x + y)((z + x)).$$

Bất đẳng thức này tương đương với  $y(x - z) \geq 0$  (đúng do  $x \geq z$ ).

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = z = \frac{1}{2}$  và  $y = 0$ .



**Nhận xét.** Khi đọc lời giải bài toán này, học sinh thường hỏi chúng tôi vì sao lại sử dụng bất đẳng thức  $(x + y + z)^2 \geq 4x(y + z)$  mà không phải là  $(x + y + z)^2 \geq 4y(z + x)$  hay  $(x + y + z)^2 \geq 4z(x + y)$ .

Câu trả lời thực ra rất đơn giản. Nếu đánh giá  $(x + y + z)^2 \geq 4y(z + x)$  thì dấu đẳng thức sẽ không được bảo toàn.

Nên nhớ dấu bằng xảy ra khi  $x = z = \frac{1}{2}, y = 0$ .

Mặt khác, với giả sử  $x \geq z$  thì hiển nhiên là  $x(y + z) \geq z(x + y)$  nên đánh giá  $(x + y + z)^2 \geq 4x(y + z)$  khi đó sẽ “chặt” hơn và hiệu quả đem lại chắc chắn sẽ tốt hơn.

Tất nhiên, do vai trò của  $x$  và  $z$  là như nhau nên nếu ta giả sử ngược lại là  $z \geq x$  thì khi đó sẽ phải sử dụng đánh giá  $(x + y + z)^2 \geq 4z(x + y)$ .

#### □ Câu VI.a.

Gọi  $B(x_0; y_0)$  là tọa độ điểm thuộc đường tròn  $(C)$ , khi đó ta có phương trình:

$$x_0^2 + y_0^2 - 6x_0 + 2y_0 + 6 = 0 \quad (1)$$

Từ giả thiết  $AB = BC$ , suy ra  $B$  là trung điểm  $AC$ , khi đó

$$C(2x_0 - 1; 2y_0 - 3).$$

Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(3; -1)$ , bán kính  $R = 2$  và  $IC = R$  (2)

Tọa độ điểm  $B, C$  cần tìm là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 6x_0 + 2y_0 + 6 = 0 & (1) \\ (2x_0 - 4)^2 + (2y_0 - 2)^2 = 4 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2y_0 - 1 = 0 \\ (2x_0 - 4)^2 + (2y_0 - 2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_0 = x_0 - 1 \\ 5x_0^2 - 22x_0 + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = \frac{7}{5} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Vậy  $B(3; 1)$ ,  $C(\frac{7}{5}; \frac{1}{5})$  và ngược lại.

Phương trình cần tìm là đường thẳng  $(AB)$ :  $x + y - 4 = 0$ .

2. Gọi  $\Delta$  là đường thẳng qua A và vuông góc với  $(\alpha) \Rightarrow \vec{u} = (2; -1; -1)$  là vector chỉ phương. Phương trình đường thẳng  $\Delta$  là: 
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - t \end{cases}.$$

Toạ độ giao điểm H của  $\Delta$  và  $(\alpha)$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - t \\ 2x - y - z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow H\left(3; \frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Vì H là trung điểm của AB  $\Rightarrow B(4; 2; -2)$ .

#### □ Câu VI.b

1. Toạ độ giao điểm của  $(C)$  và  $(\Delta)$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 13 \\ (x+1) = 5(y-2) + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [5(y-2) + 13]^2 + (y-2)^2 = 13 \\ (x+1) = 5(y-2) + 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 26(y-2)^2 + 130(y-2) + 156 = 0 \\ (x+1) = 5(y-2) + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2 = -2 \\ y-2 = -3 \\ x = 5y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$A(2; 0), B(-3; -1)$  hoặc  $A(-3; -1), B(2; 0)$ .

Tam giác ABC vuông tại B và nội tiếp đường tròn  $(C)$  suy ra AC là đường kính của  $(C)$ . Hay tâm  $O(-1; 2)$  là trung điểm của AC.

Khi đó:  $A(2; 0), B(-3; -1) \Rightarrow C(-4; 4)$

$A(-3; -1), B(2; 0) \Rightarrow C(1; 5)$

2. Vì khoảng cách đại số của A và B cùng dấu nên A và B ở cùng phía với  $(P)$

Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $(P)$ , mọi điểm  $M \in (P)$  đều thỏa :  
 $MA = MA'$ , do đó :  $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ .

Đẳng thức xảy ra khi  $A'B$  cắt mặt phẳng  $(P)$  tại điểm  $M$ .

$$\text{Phương trình } AA' : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}$$

$AA'$  cắt  $(P)$  tại  $H$ , tọa độ  $H$  là nghiệm của:

$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1} \end{cases} \Rightarrow H(1, 2, -1)$$

Vì  $H$  là trung điểm của  $AA'$  nên ta có :

$$\begin{cases} 2x_H = x_A + x_{A'} \\ 2y_H = y_A + y_{A'} \\ 2z_H = z_A + z_{A'} \end{cases} \Rightarrow A'(3, 1, 0).$$

Ta có  $\overrightarrow{A'B} = (-6, 6, -18)$  (cùng phương với  $(1; -1; 3)$ )

$$\text{Phương trình đường thẳng } A'B : \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$$

Vậy tọa độ điểm  $M$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow M(2, 2, -3)$$

#### □ Câu VII.a.

Giả sử  $z = xi$  là một nghiệm của phương trình.

Khi đó, ta có:

$$-x^3i - (2 - 2i)x^2 + (5 - 4i)xi - 10i = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2x^2 + 4x) + (-x^3 + 2x^2 + 5x - 10)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 4x = 0 \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

$\Rightarrow x = 2i$  là một nghiệm của phương trình.

Nên ta biến đổi phương trình đã cho về dạng:

$$(z - 2i)(z^2 + 2z + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z^2 + 2z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = -1 \pm 2i \end{cases}$$

**□ Câu VII.b.**

Điều kiện:  $x + y > 0, x - y > 0$

$$\text{Hệ } \begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3 \log_2 (2 + \sqrt{x-y}) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = 2 + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases} (*)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \text{ khi đó hệ } (*) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2 \quad (u > v) \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{(u+v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được:  $\sqrt{uv + 8\sqrt{uv} + 9} - \sqrt{uv} = 3$

$$\Leftrightarrow uv + 8\sqrt{uv} + 9 = (3 + \sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv = 0 \quad (3)$$

$$\text{Giải hệ (1) và (3): } \begin{cases} uv = 0 \\ u + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(4-v) = 0 \\ u = 4-v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm  $(x; y) = (2; 2)$ .

## I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

□ **Câu I.** Cho hàm số :  $y = -x^3 - 3x^2 + 4$  (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).
2. Với giá trị nào của  $m$  thì đường thẳng nối hai cực trị đồ thị của hàm số (1) tiếp xúc với đường tròn (C) :  $(x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$ .

□ **Câu II.**

1. Giải phương trình:  $x^2 - 2(x + 1)\sqrt{3x + 1} = 2\sqrt{2x^2 + 5x + 2} - 8x - 5$ .
2. Giải phương trình :  $\sqrt{3}(2\cos^2 x + \cos x - 2) + \sin x(3 - 2\cos x) = 0$ .

□ **Câu III.** Tính giới hạn :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln(1 + \cos 2x)^{\frac{1}{\cos 6x}}$

□ **Câu IV.** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác cân tại A,  $AB = AC = a$ ,  $(SBC) \perp (ABC)$  và  $SA = SB = a$ . Tính độ dài cạnh SC để bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng  $a$ .

□ **Câu V.** Cho  $x, y \in \mathbb{R}$  và  $x, y > 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x - 1)(y - 1)}.$$

## II. PHẦN RIÊNG

**Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)**

### A. Theo chương trình Chuẩn

□ **Câu VI.a.**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có diện tích là  $\frac{15}{2}$  có đáy lớn AB gấp hai lần đáy nhỏ CD. Biết rằng điểm A(2;0), B(0;4) và điểm C có hoành độ dương. Hãy viết phương trình của đường thẳng chứa cạnh CD.



2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  lần lượt có phương trình:  $d: x = \frac{y-2}{-1} = z$  và  $d': \frac{x-2}{2} = y-3 = \frac{z+5}{-1}$ .

Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $d$  và tạo với  $d'$  một góc  $30^\circ$ .

□ **Câu VII.a.** Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển

$$\left( x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^{28}}} \right)^{11}, \text{ biết } \begin{cases} 4C_n^4 \geq 5C_{n-1}^4 \\ 3C_{n-1}^4 - 18.C_{n-1}^3 + 22A_{n-2}^2 = 0 \end{cases}$$

## B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình các cạnh của tam giác  $ABC$  biết trực tâm  $H(1;0)$ , chân đường cao hạ từ đỉnh  $B$  là  $K(0;2)$ , trung điểm cạnh  $AB$  là  $M(3;1)$ .

2. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng  $(d): \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$  và mặt phẳng  $(P): x - y + z - 5 = 0$ . Viết phương trình tham số của đường thẳng  $(t)$  đi qua  $A(3;-1;1)$  nằm trong  $(P)$  và hợp với  $(d)$  một góc  $45^\circ$ .

□ **Câu VII.b.**

Tìm số nguyên dương  $n$  thỏa mãn:

$$C_n^{(0)} + \frac{2}{2} C_n^{(1)} + \frac{2^2}{3} C_n^{(2)} + \dots + \frac{2^n}{n+1} C_n^{(n)} = \frac{121}{n+1}.$$

## ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 10

□ **Câu I**

1. Bạn đọc tự giải

2. Đồ thị hàm số  $(1)$  có cực tiểu  $A(-2;0)$ , cực đại  $B(0;4)$ . Phương trình đường thẳng nối hai cực trị của hàm số  $(1)$  là

$$(AB): \frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow (AB): 2x - y + 4 = 0.$$

$$(C_m) \text{ có tâm } I_m(m;m+1), \text{ bán kính } R = \sqrt{5}.$$

Đường thẳng (AB) tiếp xúc với đường tròn ( $C_m$ ) khi

$$d_{(I_m, (AB))} = R \Leftrightarrow \frac{|2(m) - (m+1) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |m+3| = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 = 5 \\ m+3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -8 \end{cases}$$

## □ Câu II

1. Điều kiện:  $x \geq -\frac{1}{3}$

Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \left[ (x+1)^2 - 2(x+1)\sqrt{3x+1} + (\sqrt{3x+1})^2 \right] +$$

$$+ \left[ (\sqrt{x+2})^2 - 2\sqrt{2x^2+5x+2} + (\sqrt{2x+1})^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ (x+1) - \sqrt{3x+1} \right]^2 + \left[ (\sqrt{x+2}) - (\sqrt{2x+1}) \right]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} = x+1 \\ \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

2. Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}(1 - \sin^2 x) + \sqrt{3} \cos x - 2\sqrt{3} + 3 \sin x - 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{3} \sin^2 x + 3 \sin x + \sqrt{3} \cos x - 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x (-2 \sin x + \sqrt{3}) + \cos x (\sqrt{3} - 2 \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 2 \sin x) (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} - 2 \sin x = 0 \\ \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi & n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

### ▮ Câu III

**Cách 1:** Dễ thấy  $\ln(1 + \cos 2x)^{\cos 6x} = \frac{1}{\cos 6x} \cdot \ln(1 + \cos 2x)$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\cos 3(2x)} \cdot \frac{\ln\left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}$$

$$= \frac{\cos(2x)}{4\cos^3(2x) - 3\cos(2x)} \cdot \frac{\ln\left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}$$

$$= \frac{1}{4\cos^2(2x) - 3} \cdot \frac{\ln\left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln(1 + \cos 2x)^{\cos 6x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos^2(2x) - 3} \cdot \frac{\ln\left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} = -\frac{1}{3}$$

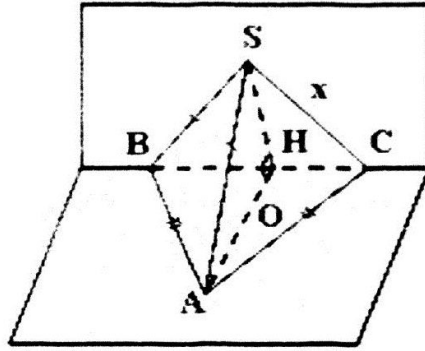
**Cách 2 :** Đặt  $t = x - \frac{\pi}{4}, x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow t \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln(1 + \cos 2x)^{\cos 6x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos 6x} \cdot \ln(1 + \cos 2x)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (-\sin 2t)]}{\sin 6t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (-\sin 2t)]}{(-\sin 2t)} \cdot \frac{(-\sin 2t)}{\sin 6t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (-\sin 2t)]}{(-\sin 2t)} \cdot \frac{(-\sin 2t) \cdot 2t}{\sin 6t} = -\frac{1}{3}$$

□ Câu IV.



Giả sử H là trung điểm của BC, ta có  $AH \perp BC$ .

Vì  $(SBC) \perp (ABC)$  nên  $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SH$ .

$\Delta SHA, \Delta BHA$  có HA chung và  $SA = BA = a$  nên  $\Delta SHA = \Delta BHA$

Suy ra :  $HA = HB = HC$ ,  $\Delta SBC$  vuông tại S.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC, khi đó O là giao điểm HA và trung trực AB vẽ trong mặt phẳng  $(ABC)$ .

Giả sử  $SC = x$ .

Gọi I là trung điểm AB, khi đó tứ giác OIBH nội tiếp được nên:

$$AO \cdot AH = AI \cdot AB \Rightarrow R = AO = \frac{AB^2}{2 \cdot AH}.$$

$\Delta SBC$  vuông, nên có:

$$BC^2 = SB^2 + SC^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow BH^2 = \frac{a^2 + x^2}{4}$$

$\Delta BHA$  vuông, nên có:

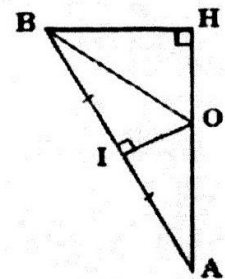
$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}, (0 < x < a\sqrt{3})$$

$$R = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}, (0 < x < a\sqrt{3})$$

$$R = a \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}} = a \\ 0 < x < a\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3a^2 - x^2} = a \\ 0 < x < a\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$$

Vậy :  $SC = a\sqrt{2}$



**1 Câu V.** Đặt  $t = x + y$ ;  $t > 2$ . Ta có  $xy \leq \frac{t^2}{4}$ .

$$P = \frac{t^3 - t^2 - xy(3t - 2)}{xy - t + 1}. \text{ Do } 3t - 2 > 0 \text{ và } -xy \geq -\frac{t^2}{4} \text{ nên ta có}$$

$$P \geq \frac{t^3 - t^2 - \frac{t^2(3t - 2)}{4}}{t^2 - t + 1} = \frac{t^2}{t - 2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2}{t - 2} \Rightarrow f'(t) = \frac{t^2 - 4t}{(t - 2)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta tìm được  $\min P = \min_{(2; +\infty)} f(t) = f(4) = 8$

$$\text{đạt được khi } \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

**1 Câu VI.a**

$$1. \text{ Ta có } \overline{AB} = (-2; 4) \Rightarrow |\overline{AB}| = 2\sqrt{5}, |\overline{CD}| = \sqrt{5}.$$

$$\text{Chiều cao hình thang cân } ABCD \text{ là } h = \frac{2S}{AB + CD} = \frac{15}{3\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Phương trình đường thẳng CD (vector chỉ phương  $\overline{CD} = (1; -2)$ ) có dạng

$$2x + y + c = 0$$

$$\text{Ta có } h = d(A; CD) \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + c|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |4 + c| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -9 \\ c = 1 \end{cases}$$

Từ đó ta có hai phương trình  $2x + y - 9 = 0, 2x + y + 1 = 0$ .

Lại do điểm C có hoành độ dương nên đường thẳng thỏa mãn:

$$2x + y - 9 = 0.$$

. Đường thẳng d đi qua điểm  $M(0; 2; 0)$  và có vector chỉ phương  $\vec{u}(1; -1; 1)$

Đường thẳng d' đi qua điểm  $M'(2; 3; -5)$  và có vector chỉ phương  $\vec{u}'(2; 1; -1)$ .



$M_p(\alpha)$  phải đi qua điểm  $M$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}$  vuông góc với  $\vec{u}$

$$\text{và } \left| \cos(\vec{n}; \vec{u}') \right| = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Đặt  $\vec{n} = (A; B; C)$  là vectơ pháp tuyến của  $(\alpha)$ .

$$\text{Theo bài toán ta có: } \begin{cases} A - B + C = 0 \\ \frac{|2A + B - C|}{\sqrt{6}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = A + C \\ 2|3A| = \sqrt{6}\sqrt{A^2 + (A + C)^2 + C^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = A + C \\ 2A^2 - AC - C^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = A + C \\ (A - C)(2A + C) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = C, B = 2A \\ 2A = -C, B = -A \end{cases}$$

$$A = C, B = 2A \Rightarrow x + 2y + z - 4 = 0, A \neq 0.$$

$$2A = -C, B = -A \Rightarrow x - y - 2z + 2 = 0, A \neq 0.$$

#### □ Câu VII.a

Điều kiện  $n \geq 4$

$$4C_n^3 \geq 5C_{n-1}^3 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} \geq 5 \cdot \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} \Leftrightarrow \frac{4n}{n-3} \geq 5 \Leftrightarrow n \leq 15$$

$$\text{do đó: } 4 \leq n \leq 15 \quad (1).$$

Điều kiện  $n \geq 5$

$$3C_{n-1}^4 - 18C_{n-1}^3 + 22A_{n-2}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} - 18 \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} + 22 \frac{(n-2)!}{(n-4)!} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \frac{n-1}{4!} - 18 \frac{n-1}{3!(n-4)} + 22 \frac{1}{n-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(n-1)(n-4) - 72(n-1) + 528 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 87n + 612 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = 17 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :  $n = 12$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó : } \left( x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x^{25}}} \right)^{12} &= \left( x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x^{25}}} \right)^{12} \\ &= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot x^{\frac{1}{3}(12-k)} \cdot x^{-\frac{25}{15}k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (x)^{16 - \frac{16}{5}k} \end{aligned}$$

Số hạng thứ  $k + 1$  của khai triển là :  $C_{12}^k (x)^{16 - \frac{16}{5}k}$

Số hạng này không chứa  $x$  khi và chỉ khi :  $16 - \frac{16}{5}k = 0 \Leftrightarrow k = 5$

Vậy số hạng không chứa  $x$  trong khai triển là :  $C_{12}^5 = 792$ .

#### □ Câu VI.b.

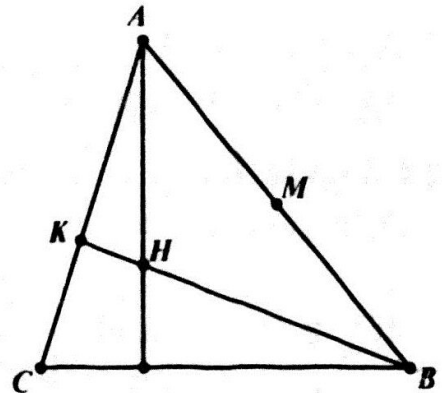
1. Đường thẳng  $AC$  vuông góc với  $HK$  nên nhận  $\overrightarrow{HK} = (-1; 2)$  làm vptp và  $AC$  đi qua  $K$

Nên  $(AC) : x - 2y + 4 = 0$ .

$(BK) : 2x + y - 2 = 0$ .

+ Do  $A \in AC$ ,  $B \in BK$  nên giả sử

$A(2a - 4; a)$ ,  $B(b; 2 - 2b)$ .



Mặt khác  $M(3; 1)$  là trung điểm của  $AB$  nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 2a - 4 + b = 6 \\ a + 2 - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 10 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(4; 4) \\ B(2; -2) \end{cases}$$

$AB$  qua  $A$  và có  $\overrightarrow{AB} = (-2; -6) \Rightarrow (AB) : 3x - y - 8 = 0$ .

$BC$  qua  $B$  và vuông góc với  $AH$  nên nhận

$$\overrightarrow{HA} = (3; 4) \Rightarrow (BC) : 3x + 4y + 2 = 0.$$

2. Gọi  $\vec{u} = (a; b; c), (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$  là vector chỉ phương của đường thẳng  $(t)$

Vì  $(t)$  nằm trong  $(P)$  nên  $\vec{u} \perp \vec{n}_P = (1; -1; 1) \Leftrightarrow a - b + c = 0 \quad (1)$

Đường thẳng  $(t)$  hợp với  $(d)$  một góc  $45^\circ$  khi

$$\left| \cos(\vec{u}; \vec{u}_d) \right| = \frac{|a + 2b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a + 2b + 2c)^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(a + 2a + 2c + 2c)^2 = 9[a^2 + (a + c)^2 + c^2] \quad (\text{do (1)})$$

$$\Leftrightarrow 14c^2 + 30ac = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = -\frac{15a}{7} \end{cases}$$

$$\bullet c = 0 \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow (t_1): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\bullet c = -\frac{15a}{7} \Rightarrow a = 7 \Rightarrow c = -15; b = -8 \Rightarrow (t_2): \begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$$

#### □ Câu VII.b.

Xét khai triển  $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 đến 2, ta được:

$$\frac{3^{n+1} - 1}{n+1} = 2C_n^0 + \frac{2^2}{2} C_n^1 + \frac{2^3}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1} C_n^n$$

$$\Leftrightarrow C_n^0 + \frac{2}{2} C_n^1 + \frac{2^2}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^n}{n+1} C_n^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2(n+1)} \Leftrightarrow \frac{121}{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{n+1} = 243 \Leftrightarrow n = 4$$

## I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

□ **Câu I.** Cho hàm số :  $y = \frac{2x-1}{x-1} (1)$ ,  $m$  là tham số thực .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số (1) biết khoảng cách từ điểm  $I(1;2)$  đến tiếp tuyến bằng  $\sqrt{2}$ .

□ **Câu II.**

1. Giải phương trình:  $x^2 - x - 2\sqrt{1+16x} = 2$ .
2. Giải phương trình :

$$8(\sin^6 x + \cos^6 x) + 3\sqrt{3} \sin 4x = 3\sqrt{3} \cos 2x - 9 \sin 2x + 11.$$

□ **Câu III.** Tính tích phân:  $I = \int_5^{10} \frac{dx}{x - 2\sqrt{x-1}}$

□ **Câu IV.** Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông ABCD cạnh  $a$  có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng (ABCD) tạo với đáy hình trụ góc  $45^\circ$ . Tính thể tích của hình trụ.

□ **Câu V.** Cho các số thực  $x, y$  thoả mãn  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$ .

Chứng minh rằng:  $\cos x + \cos y \leq 1 + \cos(xy)$ .

## II. PHẦN RIÊNG

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

### A. Theo chương trình Chuẩn

□ **Câu VI.a.**

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$x - y = 0 \text{ và điểm } M(2;1).$$

Tìm phương trình đường thẳng  $\Delta$  cắt trục hoành tại A, cắt đường thẳng (d) tại B sao cho tam giác AMB vuông cân tại M.

2. Tìm tham số thực  $m$  sao cho đường thẳng  $(d): x = 2(y - 1) = z + 1$  cắt mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$  tại 2 điểm phân biệt  $M, N$  sao cho độ dài dây cung  $MN = 8$ .

**□ Câu VII.a.**

Cho tập  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ , từ  $A$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 3?

**B. Theo chương trình Nâng cao**

**□ Câu VI.b.**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy xét elíp  $(E)$  đi qua điểm  $M(-2; -3)$  và có phương trình một đường chuẩn là  $x + 8 = 0$ .

Viết phương trình chính tắc của  $(E)$ .

2. Cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$  và hai đường thẳng  $(d_1): \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}, (d_2)$  có vector chỉ phương  $\vec{u}_2 = (3; -2; 0)$ . Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với  $(S)$  và song song với  $(d_1)$  và  $(d_2)$ .

**□ Câu VII.b.**

Chứng minh rằng phương trình  $\ln(x+1) - \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} = 0$  không có nghiệm thực.

**○ ĐÁP ÁN ĐỀ 11**

**□ Câu I**

1. Bạn đọc tự giải

2. Tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$  có phương trình

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow x + (x_0 - 1)^2 y - 2x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 (*)$$



Khoảng cách từ điểm  $(1; 2)$  đến tiếp tuyến  $(*)$  bằng  $\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 - 2x_0|}{\sqrt{1 + (x_0 - 1)^4}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Các tiếp tuyến cần tìm :  $x + y - 1 = 0$  và  $x + y - 5 = 0$ .

## □ Câu II

1. Điều kiện :  $x \geq -\frac{1}{16}$

Phương trình :

$$x^2 - x - 2\sqrt{1 + 16x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2(\sqrt{1 + 16x} + 1) \quad (*)$$

Đặt  $\sqrt{1 + 16x} + 1 = 2y \Leftrightarrow y^2 - y = 4x \quad (**), y \geq \frac{1}{2}$ .

$$\text{Phương trình } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y = 4x \\ x^2 - x = 4y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + 3 = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó phương trình } (**) \Leftrightarrow x^2 - x = 4x \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

So với điều kiện bài toán, suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là  $x = 5$ .

2. Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow 8\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) + 3\sqrt{3}\sin 4x = 3\sqrt{3}\cos 2x - 9\sin 2x + 11$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\sin 4x - 3\sqrt{3}\cos 2x = 6\sin^2 2x - 9\sin 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 4x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin^2 2x - 3\sin 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x \cdot (2\sin 2x - 1) = (2\sin 2x - 1)(\sin 2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2\sin 2x - 1)(\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x - 1 = 0 \\ \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

□ Câu III. Đặt  $x - 1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 + 1, dx = 2tdt$

Đổi cận :  $x = 5 \Rightarrow t = 2, x = 10 \Rightarrow t = 3$

$$\text{Khi đó } I = \int_2^3 \frac{2tdt}{(t^2 + 1) - 2t} = 2 \int_2^3 \frac{(t-1) + 1}{(t-1)^2} dt = 2 \int_2^3 \left[ \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \right] dt$$

$$= 2 \left[ \ln|t-1| - \frac{1}{t-1} \right]_2^3 = 2 \left[ \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) - (0 - 1) \right] = 2 \left( \ln 2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$I = 2 \left( \ln 2 + \ln e^{\frac{1}{2}} \right) = 2 \ln(2\sqrt{e}) = \ln(2\sqrt{e})^2 = \ln 4e$$

□ Câu IV

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

Khi đó  $OM \perp AB$  và  $O'N \perp CD$ .

Giả sử I là giao điểm của MN và  $OO'$ .

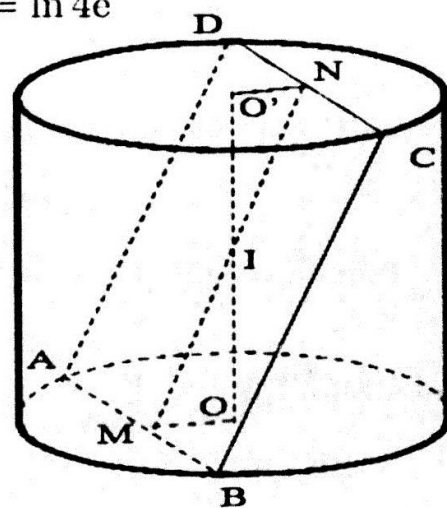
Đặt  $R = OA$  và  $h = OO'$ . Khi đó:

$\triangle IOM$  vuông cân tại O nên:

$$OM = OI = \frac{\sqrt{2}}{2} IM \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

$$\text{Ta có: } R^2 = OA^2 = AM^2 + MO^2 = \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \left( \frac{a\sqrt{2}}{4} \right)^2$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8} \Rightarrow V = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{3a^2}{8} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16} (\text{đvtt}).$$



### □ Câu V

Theo BDT Cô si ta có :

$$0 \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \sqrt{xy} \geq \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq 2 \cos \frac{x+y}{2} \leq 2 \cos \sqrt{xy}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh:

$$1 + \cos(xy) \geq 2 \cos \sqrt{xy} \Leftrightarrow 1 + \cos(xy) - 2 \cos \sqrt{xy} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos t^2 - 2 \cos t \geq 0 \quad (1) \quad \text{với } t = \sqrt{xy}, t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right].$$

Xét hàm số  $f(t) = 1 + \cos t^2 - 2 \cos t$

$$\text{Ta có: } f'(t) = -2t \sin t^2 + 2 \sin t = 2(\sin t - t \sin t^2) \quad ; f'(1) = 0$$

$$\text{* Nếu } t \in [0; 1) \Rightarrow t > t^2 \Rightarrow \sin t > \sin t^2 > t \sin t^2 \Rightarrow f'(t) > 0$$

$$\text{* Nếu } t \in \left[1; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow t < t^2 \Rightarrow \sin t < \sin t^2 < t \sin t^2 \Rightarrow f'(t) < 0.$$

$$f(0) = 0; f(1) = 1 - \cos 1 > 0; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi^2}{9}\right) > 0$$

$$\text{Lập bảng biến thiên} \Rightarrow f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \text{đpcm.}$$

### □ Câu VI.a

1. A nằm trên Ox nên  $A(a; 0)$ , B nằm trên đường thẳng  $x - y = 0$  nên

$$B(b; b), M(2; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (a - 2; -1), \overrightarrow{MB} = (b - 2; b - 1)$$

$$\text{Tam giác ABM vuông cân tại M nên: } \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ MA = MB \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2)(b - 2) - (b - 1) = 0 \\ \sqrt{(a - 2)^2 + 1} = \sqrt{(b - 2)^2 + (b - 1)^2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } b = 2 \text{ không thỏa mãn nên } \begin{cases} a - 2 = \frac{b-1}{b-2}, b \neq 2 \\ (a-2)^2 + 1 = (b-2)^2 + (b-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = \frac{b-1}{b-2}, b \neq 2 \\ \left(\frac{b-1}{b-2}\right)^2 + 1 = (b-2)^2 + (b-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = \frac{b-1}{b-2}, b \neq 2 \\ \left[(b-2)^2 + (b-1)^2\right] \cdot \left[\frac{1}{(b-2)^2} - 1\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với: } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \text{ đường thẳng } \Delta \text{ qua } AB \text{ có phương trình } x + y - 2 = 0.$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \text{ đường thẳng } \Delta \text{ qua } AB \text{ có phương trình } 3x + y - 12 = 0.$$

$$2. (S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 13 - m$$

$$\text{có tâm } I(2; 3; 0), \text{ bán kính } R = \sqrt{13 - m}, m < 13$$

$$\text{Dựng } IH \perp MN \Rightarrow MH = HN = 4$$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{IN^2 - HN^2} = \sqrt{13 - m - 16} = \sqrt{-m - 3}, m < -3$$

$$\text{và } IH = d_{(I;(d))}$$

(d) luôn đi qua A(0; 1; -1) và có vector chỉ phương

$$\vec{u} = \left(1; \frac{1}{2}; 1\right) = \frac{1}{2}(2; 1; 2)$$

$$\vec{AI} = (-2; 2; 1); [\vec{AI}; \vec{u}] = (3; 6; -6)$$

$$\Rightarrow d_{(1;(d))} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} \overline{AI} \\ \overline{u} \end{bmatrix} \right\|}{\left| \overline{u} \right|} = \frac{\sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = 3.$$

$$IH = d_{(1;(d))} \Leftrightarrow \sqrt{-m-3} = 3 \Leftrightarrow -m-3 = 9 \Leftrightarrow m = -12$$

Vậy  $m = -12$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

#### □ Câu VII.a

**Cách 1:** Gọi số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ tập  $A$  là:

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}, a_1 \neq 0$$

Số cách chọn  $a_1$  có 5 cách. Số cách chọn  $\overline{a_2 a_3 a_4 a_5}$  là số chỉnh hợp chập 4 của 5:  $A_5^4$ .

Suy ra có  $5.A_5^4 = 600$  (số).

Trong 600 số trên thì: Số không có chữ số 0 được lập từ tập

$B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$  là số chỉnh hợp chập 4 của 5:  $A_5^4 = 120$  (số).

Số không có chữ số 3 được lập từ tập  $A = \{0; 1; 2; 4; 5\}$ : Số cách chọn  $a_1 \neq 0$  có 4 cách.

Số cách chọn  $\overline{a_2 a_3 a_4 a_5}$  là số hoán vị  $P_4$ .

Suy ra : có  $4.P_4 = 96$  (số).

Vậy theo yêu cầu bài toán ta có :  $600 - (120 + 96) = 384$  (số)

**Cách 2:** Số cách chọn số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 3, chính là số cách xếp 5 chữ số từ tập  $A$  vào 5 ô liên tiếp nhau.

Vì nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 3 nên ta chọn số 0 và 3 xếp trước

Vì số 0 không được đứng ở vị trí đầu tiên nên có 4 cách xếp.

Số 3 có 4 cách xếp vào 4 vị trí còn lại. Số cách xếp 3 số còn lại chính là số chỉnh hợp chập 3 của 4 :  $A_4^3$ .

Vậy theo yêu cầu bài toán ta có :  $4.4A_4^3 = 384$  (số).

#### □ Câu VI.b.

1. Gọi phương trình (E) :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ).



Giả thiết suy ra

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 & (1) \\ \frac{a^2}{c} = 8 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{8c} + \frac{9}{c(8-c)} = 1 \\ b^2 = a^2 - c^2 = 8c - c^2 = c(8-c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2 - 17c + 26 = 0 \\ b^2 = c(8-c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \Rightarrow a^2 = 16, b^2 = 12 \Rightarrow (E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1. \\ c = \frac{13}{2} \Rightarrow a^2 = 52, b^2 = \frac{39}{4} \Rightarrow (E) : \frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{\frac{39}{4}} = 1. \end{cases}$$

2.  $(d_1)$  có véc tơ chỉ phương  $\vec{u}_1 = (2; -3; 2)$  và  $(d_2)$  có véc tơ chỉ phương  $\vec{u}_2 = (3; -2; 0)$ .

Do hai véc tơ  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  không cộng tuyến, mà  $(d_1)$  và  $(d_2)$  song song với tiếp diện  $(P)$  của  $(S)$  nên  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  là một cặp véc tơ chỉ phương của  $(P)$ .

Nghĩa là:

$$\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left( \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (4, 6, 5) \text{ là véc tơ pháp của } (P).$$

Khi đó tiếp diện  $(P)$  có dạng  $4x + 6y + 5z + D = 0$

Mặt cầu  $(S) : (x - 5)^2 + (y + 1)^2 + (z + 13)^2 = 308$  có tâm  $I(5; -1; -13)$

và bán kính  $R = \sqrt{308}$

Mặt tiếp diện  $(P)$  tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  khi

$$\frac{|20 - 6 - 65 + D|}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 5^2}} = \sqrt{308} \Leftrightarrow |D - 51| = 154 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 205 \\ D = -103 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp diện cần tìm:

$$4x + 6y + 5z + 205 = 0, 4x + 6y + 5z - 103 = 0.$$

□ Câu VII.b.

Xét hàm số :  $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2) + \frac{1}{x+2}$ , xác định và liên tục trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .

Ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)^2} > 0,$$

$\forall x > -1 \Rightarrow f(x)$  liên tục và đồng biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$

và  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , suy ra  $f(x) < 0, \forall x > -1$ .

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm thực.

## ○ ĐỀ 12

---

### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

□ Câu I. Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x+2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng tại A và cắt tiệm cận ngang tại B và tam giác IAB cân, với I là giao của hai đường tiệm cận.

□ Câu II.

1. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

2. Giải phương trình :  $2\sqrt{2} \cos^3 \left( x - \frac{\pi}{4} \right) - 3 \cos x - \sin x = 0.$

□ Câu III. Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x \cdot \ln(\cos x)}{\cos x} dx.$

□ **Câu IV.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh  $AB = AD = a$ ,

$AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  và  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $A'D'$  và  $A'B'$ .

Chứng minh  $AC' \perp (BDMN)$  và tính thể tích khối chóp  $A.BDMN$ .

□ **Câu V.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + a + b + c \geq 6$

## II. PHẦN RIÊNG

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

### A. Theo chương trình Chuẩn

□ **Câu VI.a.**

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn  $(C): (x-4)^2 + y^2 = 4$  và điểm  $E(4;1)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên trục tung sao cho từ  $M$  kẻ được hai tiếp tuyến  $MA, MB$  đến đường tròn  $(C)$  với  $A, B$  là hai tiếp điểm sao cho đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $E$ .

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hình vuông  $MNPQ$  có  $M(5;3;-1)$ ,  $P(2;3;-4)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $Q$  biết đỉnh  $N$  nằm trong mặt phẳng  $(\alpha): x + y - z - 6 = 0$ .

□ **Câu VII.a.** Xác định tập hợp các điểm  $M$  trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức  $(1 + i\sqrt{3})z + 2$ , trong đó  $|z - 1| \leq 2$ .

### B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b.**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(3;2)$ , bán kính  $R = \sqrt{13}$  và đường thẳng  $\Delta: mx - 2y + m + 3 = 0$ .

Tìm  $m$  để đường thẳng  $\Delta$  cắt đường tròn  $(C)$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho tam giác  $AIB$  có diện tích bằng  $\frac{4\sqrt{66}}{5}$ .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho  $(P): x - y + z + 1 = 0$  và ba điểm  $A(1; 1; 1), B(0; 1; 2), C(-2; 0; 1)$ .

Tìm  $N \in (P)$  sao cho  $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$  nhỏ nhất.

□ **Câu VII.b.** Giải phương trình nghiệm phức:  $\bar{z} + \frac{25}{z} = 8 - 6i$ .

## ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 12

□ **Câu I.**

1. Bạn đọc tự giải

2. Gọi  $\Delta$  là tiếp tuyến cần tìm và  $(x_0; y_0)$  là tiếp điểm của  $\Delta$  và  $(C)$ .

$$\text{Phương trình } \Delta: y = \frac{4}{(x_0 + 2)^2} (x - x_0) + \frac{x_0 - 2}{x_0 + 2}.$$

Giao điểm của  $\Delta$  và TCD là  $A\left(-2; \frac{x_0 - 6}{x_0 + 2}\right)$ , giao điểm của  $\Delta$  và TCN

là  $B(2x_0 + 2; 1)$ .

$$\text{Ta có } I(-2; 1) \Rightarrow IA = \left| \frac{x_0 - 6}{x_0 + 2} - 1 \right| = \frac{8}{|x_0 + 2|}, IB = 2|x_0 + 2|.$$

$\Delta IAB$  cân suy ra

$$IA = IB \Leftrightarrow \frac{8}{|x_0 + 2|} = 2|x_0 + 2| \Leftrightarrow |x_0 + 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \end{cases}$$

Với  $x_0 = 0 \Rightarrow \Delta_1: y = x - 2$

Với  $x_0 = -4 \Rightarrow \Delta_2: y = x + 7$ .

Cả hai tiếp tuyến đều thỏa mãn

□ **Câu II.**

$$1. \begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8x = y(y^2 + 2) \\ x^2 = 3(y^2 + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(3x - \frac{24}{x}\right) \\ x^2 = 27\left(x - \frac{8}{x}\right) + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\left(x - \frac{8}{x}\right) \\ 26x^4 - 426x^2 + 1728 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\left(x - \frac{8}{x}\right) \\ x^2 = 9, x^2 = \frac{96}{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x; y) = \left\{ (3; 1); (-3; -1); \left(\frac{4\sqrt{78}}{13}; -\frac{\sqrt{78}}{13}\right); \left(-\frac{4\sqrt{78}}{13}; \frac{\sqrt{78}}{13}\right) \right\}.$$

2. Ta có:  $2\sqrt{2} \cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 \cos x - \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[ \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^3 - 3 \cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 - (3 \cos x + \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \cos^3 x + 2 \cos^2 x \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}.$$

**Chú ý:** Với cách đặt  $t = x - \frac{\pi}{4}$ , đem lại lời giải đẹp.

### □ Câu III.

Đặt  $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi cận  $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

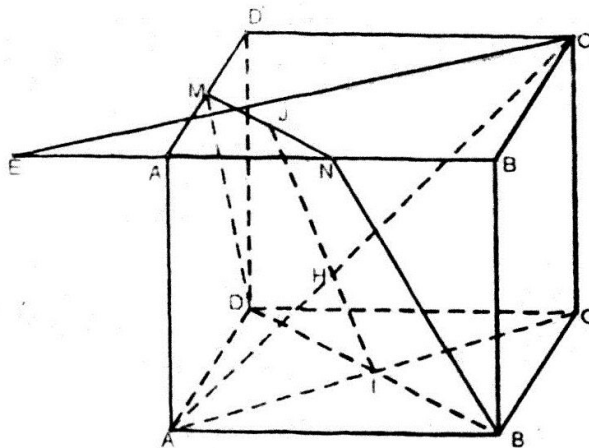
Từ đó  $I = - \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\ln t}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\ln t}{t^2} dt$



$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = \frac{1}{t^2} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = -\frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = -\frac{1}{t} \ln t \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{t^2} dt = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln 2 - \frac{1}{t} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 2$$

□ Câu IV.



\* Theo giả thiết ta có:  $\begin{cases} BD \perp AC \\ DB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow BD \perp AC' (1)$

Gọi E ∈ A'B' sao cho A' là trung điểm của EN.

Ta có: AE ∥ BN, AE = BN = a.

Theo giả thiết ta có ABD đều nên suy ra AC = √3a.

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 3a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{15a^2}{4}$$

$$EC'^2 = B'E^2 + B'C'^2 - 2B'E \cdot B'C' \cdot \cos 120^\circ = \frac{19a^2}{4}$$

$$AE^2 + AC'^2 = EC'^2 \Rightarrow AE \perp AC' \Rightarrow BN \perp AC' (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: AC' ⊥ (BDMN).

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BD, MN và H = AC' ∩ IJ

Ta có AH là đường cao của hình chóp A.BDMN

Tứ giác HICC' nội tiếp

$$\Rightarrow AH \cdot AC' = AI \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AC^2}{2AC'} = \frac{\sqrt{15}a}{5}.$$

Tứ giác BDMN là hình thang cân ta có :

$$IJ = \sqrt{BN^2 - \left(\frac{BD - MN}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}a}{4}.$$

$$\text{Diện tích hình thang BDMN : } S = \frac{1}{2} IJ (BD + MN) = \frac{\sqrt{15}a^2}{16}.$$

Thể tích khối chóp A.BDMN.

$$V = \frac{1}{3} AHS_{BDMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}a}{5} \cdot \frac{\sqrt{15}a^2}{16} = \frac{a^3}{16} \text{ (đvtt)}.$$

#### □ Câu V.

Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu số, ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}$$

Vậy chỉ cần chứng minh  $\frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} + a + b + c \geq 6$ .

$$\text{Tương đương với } a + b + c + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 4$$

Tới đây, nếu đặt  $x = a + b + c$  thì với điều kiện  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ , ta có

$$\text{ngay } ab + bc + ca = \frac{x^2 - 3}{2}$$

Và bất đẳng thức cuối trở thành bất đẳng thức một biến đơn giản là

$$x + \frac{x^2 - 3}{2} \geq 4 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } x > 0 \text{)}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

#### □ Câu VI.a.

1. Đường tròn (C) có tâm I(4;0), bán kính R = 2.

Gọi M(0;m), giả sử T(x;y) là tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ từ M tới

$$(C) \Rightarrow \overrightarrow{MT} = (x; y - m), \quad \overrightarrow{IT} = (x - 4; y).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} T \in (C) \\ \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{IT} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - my = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x - my - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \text{phương trình đường thẳng } AB : 4x - my - 12 = 0$$

$$\Rightarrow AB \text{ đi qua } E \Leftrightarrow 16 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy  $M(0; 4)$  là điểm cần tìm.

$$2. \text{ Giả sử } N(a; b; c) \in (\alpha) \Rightarrow a + b + c - 6 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Gọi } I \text{ là tâm của hình vuông} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; 3; -\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Vì } MNPQ \text{ là hình vuông nên } \begin{cases} \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \\ IN = IM = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c - 1 = 0 \\ \left(a - \frac{7}{2}\right)^2 + (b - 3)^2 + \left(c + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c - 1 = 0 \\ \left(a - \frac{7}{2}\right)^2 + (b - 3)^2 + \left(c + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Từ (2)  $\Rightarrow c = 1 - a$  thay vào (1)  $\Rightarrow b = 7 - 2a$  thay vào (3) ta được

$$\left(a - \frac{7}{2}\right)^2 + (2a - 4)^2 + \left(\frac{7}{2} - a\right)^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2a^2 - 15a + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 6; a = \frac{3}{2}.$$

$$* a = 6 \Rightarrow b = -5; c = -5 \Rightarrow N(6; -5; -5)$$

$$\text{Vì } Q \text{ và } N \text{ đối xứng qua } I \Rightarrow Q(1; 11; 0)$$

$$* a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 4; c = -\frac{1}{2} \Rightarrow N\left(\frac{3}{2}; 4; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow Q(2; 2; 3).$$

$$\square \text{ Câu VII.a. Đặt } w = (1 + i\sqrt{3})z + 2 \text{ thì } z = \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}}.$$

$$\text{Theo bài ra } |z - 1| \leq 2 \text{ nên } \left| \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}} - 1 \right| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow |w - 2 - 1 - i\sqrt{3}| \leq 2|1 + i\sqrt{3}| \Leftrightarrow |w - (3 + i\sqrt{3})| \leq 4.$$

Vậy tập hợp các điểm  $M$  là các điểm thuộc hình tròn tâm  $I$  là điểm biểu diễn số phức  $3 + i\sqrt{3}$ , có bán kính bằng 4.

□ Câu VI.b.

$$1. \text{ Gọi } h = d(I, \Delta) \Rightarrow S_{\Delta AM} = \frac{1}{2} h \cdot AB = h \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$\Rightarrow h \sqrt{13 - h^2} = \frac{3\sqrt{56}}{5} \Leftrightarrow h^4 - 13h^2 + \frac{504}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = \frac{56}{5} \\ h^2 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\text{Mà } h = d(I, \Delta) = \frac{|4m - 1|}{\sqrt{m^2 + 4}}.$$

$$\text{TH 1: } h^2 = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 5(4m - 1)^2 = 9(m^2 + 4) \Leftrightarrow 71m^2 - 40m - 31 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1; m = -\frac{31}{71}.$$

$$\text{TH 2: } h^2 = \frac{56}{5} \Leftrightarrow 5(4m - 1)^2 = 56(m^2 + 4)$$

$$\Leftrightarrow 24m^2 - 40m - 129 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{10 \pm \sqrt{874}}{12}.$$

$$\text{Vậy } m = 1; m = -\frac{31}{71}; m = \frac{10 \pm \sqrt{874}}{12} \text{ là những giá trị cần tìm.}$$

$$2. \text{ Vì } \Delta ABC \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow AB^2 = \frac{1}{2} BC^2 = 34$$

$$B \in d \Rightarrow B(-1 + 2t; -1 + 3t; 7 - 4t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2t - 6; 3t - 6; -4t + 7)$$

$$\Rightarrow AB^2 = 34 \Leftrightarrow 29t^2 - 116t + 87 = 0 \Leftrightarrow t = 3; t = 1.$$

$$\text{Vậy } B(1; 2; 3), C(5; 8; -5) \text{ là những điểm cần tìm.}$$

$$2. \text{ Giả sử } N(a; b; c) \in (P) \Rightarrow a - b + c + 1 = 0 \Leftrightarrow a - b + c = -1 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } NA^2 = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2$$

$$NB^2 = a^2 + (b - 1)^2 + (c - 2)^2$$

$$NC^2 = (a + 2)^2 + b^2 + (c - 1)^2$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S &= 3(2a^2 + b^2 + c^2) - 6b - 10c + 16 \\
&= 6\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(b - \frac{5}{3}\right)^2 + 3(c-1)^2 - 4(a-b+c) + 4 \\
&= 6\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(b - \frac{5}{3}\right)^2 + 3(c-1)^2 + 8 \geq 8
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}; b = \frac{5}{3}; c = 1$ .

Dễ thấy bộ ba số này thỏa mãn (1)

Vậy  $M\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; 1\right)$  là điểm cần tìm và  $\min S = 8$ .

□ **Câu VII.b.** Giả sử  $z = a + bi$  với  $a, b \in \mathbb{R}$  và  $a, b$  không đồng thời bằng 0.

Khi đó  $\bar{z} = a - bi$ ;  $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$ .

Khi đó phương trình  $\bar{z} + \frac{25}{z} = 8 - 6i \Leftrightarrow a - bi + \frac{25(a - bi)}{a^2 + b^2} = 8 - 6i$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + b^2 + 25) = 8(a^2 + b^2) & (1) \\ b(a^2 + b^2 + 25) = 6(a^2 + b^2) & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Lấy (1) chia (2) theo vế ta có  $b = \frac{3}{4}a$  thế vào (1) ta có  $a = 0$  v  $a = 4$ .

Với  $a = 0 \Rightarrow b = 0$  (loại).

Với  $a = 4 \Rightarrow b = 3$ .

Ta có số phức  $z = 4 + 3i$ .



**I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH**

□ **Câu I.** Gọi  $(C_m)$  là đồ thị hàm số  $y = -x^3 + (3m + 1)x^2 - m - 1$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi  $m = 1$
2. Tìm  $m$  để đồ thị  $(C_m)$  tiếp xúc với đường thẳng  $d: y = 2mx - m - 1$ .

□ **Câu II.**

1. Giải bất phương trình:  $(x + 1)(x - 3)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} < 2 - (x - 1)^2$
2. Tìm nghiệm trong khoảng  $(0; \pi)$  của phương trình :

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2 \cos^2 \left( x - \frac{3\pi}{4} \right).$$

□ **Câu III.** Tìm  $m$  để đồ thị  $(C): y = x^4 - 2mx^2 + m + 2$  cắt  $Ox$  tại bốn điểm phân biệt và diện tích hình phẳng nằm trên  $Ox$  giới hạn bởi  $(C)$  và  $Ox$  bằng diện tích hình phẳng phía dưới trục  $Ox$  giới hạn bởi  $(C)$  và  $Ox$ .

□ **Câu IV.** Cho hai đường thẳng  $Ax$  và  $By$  chéo nhau, góc giữa chúng bằng  $30^\circ$ , nhận  $AB = 2$  làm đường vuông góc chung. Trên  $By$  lấy  $C$  sao cho  $BC = 2$ . Gọi  $D$  là hình chiếu của  $C$  lên  $Ax$ . Tính thể tích của khối chóp  $ABCD$ .

□ **Câu V.** Cho  $a, b, c$  là các số dương thỏa  $a + b + c = 3$ .

Chứng minh:  $\frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} \leq 1$ .

**II. PHẦN RIÊNG**

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

**A. Theo chương trình Chuẩn**

□ **Câu VI.a.**

1. Cho hai đường tròn:

$$(C_1): x^2 + y^2 = 9 \text{ và } (C_2): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0.$$

Gọi  $A, B$  là các giao điểm của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ , viết PT đường thẳng  $AB$ .

Chứng minh rằng nếu  $K \in AB$  thì  $KI_1 < KI_2$  (với  $I_1; I_2$  là tâm của  $(C_1)$

và  $(C_2)$ ).

2. Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

Lấy hai điểm  $A, B$  thuộc  $\Delta_1$  sao cho  $x_A = 7; z_B = 12$ .

Lấy 2 điểm  $C, D$  thuộc  $\Delta_2$  với  $y_C = 1$ .

Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho thể tích của tứ diện  $ABCD$  là 1008.

□ **Câu VII.a.** Giải phương trình nghiệm phức:

$$25(5z^2 + 2)^2 + 4(25z + 6)^2 = 0.$$

## B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b.**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hình chữ nhật  $ABCD$  có cạnh:  $AB: x - 3y + 5 = 0$ , đường chéo:  $BD: x - y - 1 = 0$  và đường chéo  $AC$  qua điểm  $M(-9; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{1} \quad \text{lên mặt phẳng } (P): x + 2y + 3z - 4 = 0.$$

□ **Câu VII.b.** Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{z+2i}{z-2i}$  là một số thực dương.

## ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 13

□ **Câu I**

1. Bạn đọc tự giải

2.  $(C_m)$  và  $(d)$  tiếp xúc với nhau tại  $(x_0; y_0)$  khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} -x^3 + (3m+1)x^2 - m - 1 = 2mx - m - 1 & (1) \\ -3x^2 + 2(3m+1)x = 2m & (2) \end{cases} \quad \text{có nghiệm } x_0$$

Khi đó phương trình  $(1) \Leftrightarrow x_0 [x_0^2 - (2m+1)x_0 + 2m] = 0$  có nghiệm

$$x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \\ x_0 = 2m \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm thì ít nhất một trong các nghiệm trên phải là nghiệm của (2), điều này tương đương với

$$\begin{cases} 2m = 0 \\ -3 + 2(3m + 1) = 2m \\ -3m^2 + 2(3m + 1)m = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

### □ Câu II

1. Bất phương trình  $\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} < 1 - x^2 + 2x$

Đặt  $t = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ ,  $t \geq 0$ .

Ta có:  $-t^3 < -2 + t^2 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2 > 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + 2t + 2) > 0 \Leftrightarrow t > 1 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 3} > 1$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$ .

2.  $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2(1 - \cos x) - \sqrt{3} \cos 2x = 2 - \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = -2 \cos x$

$\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} & (a) \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi & (b) \end{cases}$

Họ nghiệm (a) cho 2 nghiệm trong  $(0; \pi)$  là  $x_1 = \frac{5\pi}{18}$ ,  $x_2 = \frac{17\pi}{18}$ ; họ

nghiệm (b) chỉ cho 1 nghiệm trong  $(0; \pi)$  là  $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ .

Vậy phương trình có 3 nghiệm trong  $(0; \pi)$  là:

$$x_1 = \frac{5\pi}{18}, x_2 = \frac{17\pi}{18}, x_3 = \frac{5\pi}{6}.$$

### □ Câu III

- Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox:

$$x^4 - 2mx^2 + m + 2 = 0 \quad (1).$$

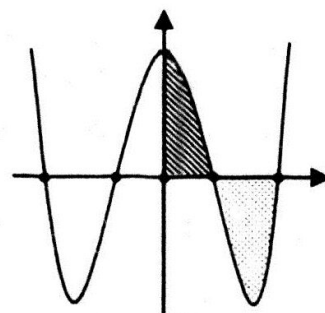
Đặt  $t = x^2$ ,  $t \geq 0$ , ta có phương trình :

$$t^2 - 2mt + m + 2 = 0 \quad (2).$$

Yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow (2)$  có hai nghiệm  $t > 0$  phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$



Gọi  $t_1, t_2$  ( $0 < t_1 < t_2$ ) là hai nghiệm của (2).

Khi đó (1) có bốn nghiệm theo thứ tự tăng dần là:

$$x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}.$$

Do tính đối xứng của (C) nên yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_3} (x^4 - 2mx^2 + m + 2) dx = \int_{x_3}^{x_4} (-x^4 + 2mx^2 - m - 2) dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x_4^5}{5} + \frac{2mx_4^3}{3} - (m+2)x_4 = 0 \Leftrightarrow 3x_4^4 - 10mx_4^2 + 15(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow x_4 \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x_4^4 - 2mx_4^2 + m + 2 = 0 \\ 3x_4^4 - 10mx_4^2 + 15(m+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4mx_4^2 - 12(m+2) = 0 \Rightarrow x_4^2 = \frac{3(m+2)}{m} \text{ thay vào hệ ta có được}$$

$$9 \frac{(m+2)^2}{m^2} - 6(m+2) + m + 2 = 0 \Leftrightarrow 9(m+2) - 5m^2 = 0$$

$$(\text{do } m > 2) \Leftrightarrow 5m^2 - 9m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow x_4 = \sqrt{5}.$$

$$\text{Với } m = 3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{5} \end{cases}.$$

Vậy  $m = 3$  là giá trị cần tìm.

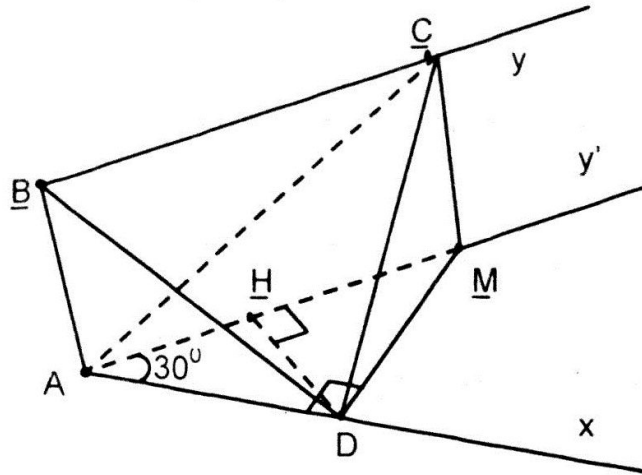
#### □ Câu IV

Vẽ tia  $Ay' // By \Rightarrow \widehat{xAy'} = 30^\circ$ .

Gọi M là hình chiếu của C lên  $Ay' \Rightarrow CM // AB$ ,  $CM = AB$

$$\Rightarrow AM = BC = 2 \text{ và } CM \perp (xAy')$$

$$\Rightarrow CM \perp Ax. \text{ Mà } CD \perp Ax \Rightarrow Ax \perp (CDM) \Rightarrow Ax \perp DM$$



Trong tam giác ADM vuông tại D

ta có:  $DM = AM.\sin 30^0 = 1$ ;  $AD = AM.\cos 30^0 = \sqrt{3}$

Gọi H là hình chiếu của D lên  $Ay' \Rightarrow DH \perp (ABC)$

$$\Rightarrow DH = \frac{AD \cdot DM}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 2 \Rightarrow V_{D.ABC} = \frac{1}{3} DH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (đvtt)}.$$

**□ Câu V**

Đối với bài toán này, nếu thực hiện phép khai triển và biến đổi tương đương, ta sẽ thu được một bất đẳng thức bậc cao khá phức tạp.

Ngoài ra, các mẫu thức cũng không có một sự liên hệ nào giống như các bài trước (bạn đọc có thể kiểm tra thử).

Như vậy, ta phải làm thế nào để có thể giải được bài này?

Cái khó ở bài này chính là ở chỗ *các mẫu thức quá khác nhau*, chính điều đó đã tạo nên *bậc cao khi khai triển*, một điều mà ta không hề mong muốn. Như thế, *liệu có cách đánh giá nào giúp đưa các mẫu thức trở về giống nhau hay không?* Đây là câu hỏi mà có lẽ mỗi chúng ta đều tự hỏi sau khi phân tích đến đây. Và từ ý tưởng của câu hỏi này, ta tìm được cách giải quyết cho cả bài toán như sau:

Theo bất đẳng thức Bunnhiacopxki, ta có

$$(a^2 + b + c)(1 + b + c) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2 + b + c} \leq \frac{1 + b + c}{(a + b + c)^2}.$$



Tương tự

$$\frac{1}{b^2 + c + a} \leq \frac{1 + c + a}{(a + b + c)^2}, \quad \frac{1}{c^2 + a + b} \leq \frac{1 + a + b}{(a + b + c)^2}.$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} &\leq \frac{3 + 2(a + b + c)}{(a + b + c)^2} \\ &= \frac{3 + 2 \cdot 3}{3^2} = 1. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

#### □ Câu VI.a

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có } M(x; y) \in (C_1) \cap (C_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow x + y + 7 = 0. \end{aligned}$$

Vậy phương trình  $AB: x + y + 7 = 0$ .

Nếu  $K \in AB \Rightarrow K(a; -a - 7)$ , ta có :

$$I_1(0; 0), I_2(1; 1) \Rightarrow I_1K^2 = a^2 + (a + 7)^2, \quad I_2K^2 = (a - 1)^2 + (a + 8)^2$$

$$\text{Vi } I_2K^2 - I_1K^2 = (a - 1)^2 + (a + 8)^2 - a^2 - (a + 7)^2 = 16 > 0$$

$$\Rightarrow I_2K > I_1K \text{ (đpcm).}$$

2. Đường tròn  $(C)$  có tâm là gốc tọa độ, bán kính  $R = 1$ .

Giả sử  $M \in \Delta$  và từ  $M$  kẻ được hai tiếp tuyến  $MA, MB$  ( $A, B$  là tiếp điểm) tới  $(C)$  và hai tiếp tuyến này tạo với nhau một góc  $60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AMO} = 30^\circ$ . Trong tam giác vuông  $AMO$ , ta có:

$$\frac{OA}{OM} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = 2OA = 2 \Rightarrow M \in (O; r = 2)$$

$\Rightarrow$  yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow \Delta$  cắt  $(O; r)$  tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow d(O, \Delta) < r \Leftrightarrow \frac{|m|}{1} < 2 \Leftrightarrow |m| < 2.$$

□ Câu VII.a.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (25z^2 + 10)^2 - (50iz + 12i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (25z^2 + 50iz + 10 + 12i)(25z^2 - 50iz + 10 - 12i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25z^2 + 50iz + 10 + 12i = 0 \\ 25z^2 - 50iz + 10 - 12i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5z + 5i)^2 = -35 - 12i = (1 - 6i)^2 \\ (5z - 5i)^2 = -35 + 12i = (1 + 6i)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1 - 11i}{5}; z_2 = \frac{-1 + i}{5} \\ z_3 = \frac{1 + 11i}{5}; z_4 = \frac{-1 - i}{5} \end{cases}$$

□ Câu VI.a.

1. Ta có tọa độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(4;3).$$

$$BC \perp AB \Rightarrow BC : 3(x - 4) + (y - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 15 = 0.$$

$$D \in BD \Rightarrow D(d; d - 1) \Rightarrow \text{phương trình AD : } 3x + y - 4d + 1 = 0.$$

$$\Rightarrow AD \cap AB = A : \begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + y - 4d + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{6d - 4}{5}; \frac{2d + 7}{5}\right)$$

Gọi I là tâm của hình chữ nhật

$$\Rightarrow I \text{ là trung điểm của BD} \Rightarrow I\left(\frac{d + 4}{2}; \frac{d + 2}{2}\right)$$

Vì A, I, M thẳng hàng nên ta có:

$$\overrightarrow{IA} = k \cdot \overrightarrow{MI} \Rightarrow \frac{7d - 28}{d + 22} = \frac{-d + 4}{d - 2} \Leftrightarrow d = -1; d = 4.$$

$$* d = 4 \Rightarrow D(4;3) \equiv B \text{ loại}$$

$$* d = -1 \Rightarrow D(-1; -2), A(-2; 1) \text{ và } I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow C(5; 0)$$

$$\text{Vậy } A(-2; 1), B(4; 3), C(5; 0), D(-1; -2).$$

2. Hình chiếu của đường thẳng  $\Delta$  lên  $\text{mp}(P)$  là giao tuyến  $d$  của  $\text{mp}(\alpha)$  và  $\text{mp}(P)$  với  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa  $\Delta$  và vuông góc với  $\text{mp}(P)$ .

Ta có:  $\overrightarrow{u_\Delta} = (3; 4; 1), \overrightarrow{n_p} = (1; 2; 3)$

Véc tơ pháp tuyến của  $\text{mp}(\alpha)$ :  $\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{u_\Delta}; \overrightarrow{n_p}] = (10; -8; 2)$ .

Phương trình  $\text{mp}(\alpha)$ :  $5x - 4y + z - 19 = 0$ .

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng  $d$ :  $\overrightarrow{n_d} = [\overrightarrow{n_p}; \overrightarrow{n_\alpha}] = (28; 28; -28)$

Phương trình đường thẳng  $d$ :  $\frac{x - \frac{27}{7}}{1} = \frac{y - \frac{1}{14}}{1} = \frac{z}{-1}$ .

#### □ Câu VII.b

Giả sử  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} \text{Ta có } w &= \frac{z + 2i}{z - 2i} = \frac{x + (y + 2)i}{x + (y - 2)i} = \frac{[x + (y + 2)i][x - (y - 2)i]}{x^2 + (y - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 4 + 4xi}{x^2 + (y - 2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + (y - 2)^2} + \frac{4x}{x^2 + (y - 2)^2}i. \end{aligned}$$

Do đó  $w$  là một số thực dương thì  $(x; y)$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 > 0 \\ 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y > 2 \\ y < -2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp số phức  $z$  là trục  $Oy \setminus [-2; 2]$ .

## O ĐỀ 14

### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

□ **Câu I.** Cho hàm số:  $y = x^3 + (m+1)x^2 + (m+2)x + 2$ , có đồ thị là  $(C_m)$ ,  $m$  là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi  $m = -2$ .
2. Tìm các giá trị của tham số  $m$  sao cho hàm số đồng biến trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$ .

□ **Câu II.**

1. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{5y} = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

2. Giải phương trình:  $\sin x \cos 2x + \cos^2 x (\tan^2 x - 1) + 2 \sin^3 x = 0.$

□ **Câu III.**

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị 3 hàm số

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + 2; g(x) = \frac{x^2}{2} - 4x \text{ và } h(x) = -\frac{3x}{2} + 12.$$

□ **Câu IV.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$ , đáy có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SA, SC$ . Tính thể tích của hình chóp  $S.ABC$  biết  $BM$  vuông góc với  $AN$ .

□ **Câu V.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa  $ab + bc + ca = 3$ .

Chứng minh rằng: 
$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq 1.$$

### II. PHẦN RIÊNG

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

#### A. Theo chương trình Chuẩn

□ **Câu VI.a.**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxy, cho hai đường tròn:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0, (C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$$

Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  và có tâm nằm trên đường thẳng  $x + 6y - 6 = 0$ .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 3 điểm

$$A(1; 1; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2).$$

Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

□ **Câu VII.a.** Giải phương trình trong tập số phức  $z^2 + |z| = 0$ .

### B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b.**

1. Xác định tọa độ các đỉnh B và C của tam giác đều ABC, biết  $A(3; -5)$  và trọng tâm  $G(1; 1)$ .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 3 điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 3)$ . Tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC.

□ **Câu VII.b.** Chứng minh hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 29 & (1) \\ \log_3 x \log_2 y = 1 & (2) \end{cases}$$

## O ĐÁP ÁN ĐỀ 14

□ **Câu I.**

1. Bạn đọc tự giải

$$2. y' = 3x^2 + 2(m+1)x + m + 2 \Rightarrow \Delta = m^2 - m - 5$$

Bảng xét dấu  $\Delta$ :

|          |           |                           |                           |           |   |   |
|----------|-----------|---------------------------|---------------------------|-----------|---|---|
|          | $-\infty$ | $\frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ | $\frac{1 + \sqrt{21}}{2}$ | $+\infty$ |   |   |
| m        |           |                           |                           |           |   |   |
| $\Delta$ |           | +                         | 0                         | -         | 0 | + |

$$\frac{1 - \sqrt{21}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{hàm số đồng biến } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$m = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ đẳng thức xảy ra tại } x = \frac{1 + \sqrt{21}}{6}$$

$\Rightarrow$  hàm số đồng biến  $\forall x \in \mathbb{R}$ .



Tương tự:  $m = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$  hàm số đồng biến  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy, hàm số đồng biến  $\forall x \in \mathbb{R}$  khi  $\frac{1 - \sqrt{21}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$  (a).

$m < \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$  hoặc  $m > \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$  thì

$y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ).

Lập bảng biến thiên, suy ra hàm số đồng biến trên hai nửa khoảng  $(-\infty; x_1]$  và  $[x_2; +\infty)$ , nghịch biến trên đoạn  $[x_1, x_2]$ .

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$  khi và chỉ khi  $x_1 < x_2 \leq 1$ .

Đặt  $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$ , khi đó

$$y' = 3x^2 + 2(m+1)x + m + 2 = 0 (*)$$

trở thành  $3t^2 + 2(m+4)t + 3m + 7 = 0 (**)$ .

Phương trình (\*) có nghiệm  $x_1 < x_2 \leq 1$  khi và chỉ khi phương trình (\*\*) có hai nghiệm  $t_1, t_2$  thỏa

$$t_1 < t_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 < 0 \\ t_1 \cdot t_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{3} \leq m < \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \\ m > \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \end{cases} (b).$$

Từ (a) và (b) suy ra  $-\frac{7}{3} \leq m$  thỏa bài toán.

### Chú ý:

Với hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Khi xét tính đơn điệu của hàm số trên nửa khoảng  $[\alpha; +\infty)$ , thì ta lưu ý:

Xét  $a = 0$  để tìm giá trị của tham số  $m$  sao cho  $y' \geq 0, x \in [\alpha; +\infty)$ .

Xét  $a \neq 0$ , ta lập biệt số  $\Delta$ .

Nếu  $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$  thì  $y' \geq 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ , nghĩa là cũng

đồng biến trên nửa khoảng  $[\alpha; +\infty)$ .

Nếu  $\Delta > 0$  khi đó phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ )

Lập bảng biến thiên, kết hợp yêu cầu bài toán, suy ra hàm số đồng biến trên hai nửa khoảng  $(-\infty; x_1]$  và  $[x_2; +\infty)$ , nghịch biến trên đoạn  $[x_1, x_2]$ .

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng  $[\alpha; +\infty)$  khi và chỉ khi  $x_1 < x_2 \leq \alpha$ .

Bài toán đưa nhiều hướng giải, giới thiệu bạn đọc hai cách giải phổ biến:

$$\text{Cách 1: } x_1 < x_2 \leq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \geq 0 \end{cases}$$

**Cách 2:** Đặt  $t = x - \alpha \Rightarrow x = t + \alpha$ .

Khi đó phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1 < x_2 \leq \alpha$  khi và chỉ khi phương trình  $y'(t + \alpha) = 0$  có hai nghiệm phân biệt

$$t_1 < t_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 < 0 \\ t_1 \cdot t_2 \geq 0 \end{cases}$$

## □ Câu II.

1. Điều kiện:  $x + y \geq 0, x - y \geq 0, y \geq 0$

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 4y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = 2y - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ 5y^2 = 4xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y = 0 \vee 5y = 4x \end{cases}$$

\*  $y = 0 \Rightarrow x = 9$  không thỏa  $2y - x \geq 0$ .

\*  $5y = 4x$  thế vào phương trình còn lại của hệ ta có :

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{4}{5} \text{ thỏa } 2y - x \geq 0.$$

Vậy  $(x; y) = \left(1; \frac{4}{5}\right)$  là nghiệm của hệ đã cho.

2. Điều kiện:  $\cos x \neq 0$

Ta có phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin x \cos 2x + \cos^2 x (\tan^2 x - 1) + 2 \sin^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos 2x + \sin^2 x - \cos^2 x + 2 \sin^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin^2 x - 1 + 2 \sin^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 (\text{loại}) \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

□ Câu III.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm  $f$  và  $g$  là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2}{4} + 2 = \frac{x^2}{2} - 4x \Leftrightarrow x^2 - 16x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 14.$$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm  $f$  và  $h$  là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2}{4} + 2 = -\frac{3x}{2} + 12 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 40 = 0 \Leftrightarrow x = -10, x = 4.$$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm  $g$  và  $h$  là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2}{2} - 4x = -\frac{3x}{2} + 12 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 6.$$

Vẽ đồ thị  $f, g$  và  $h$  lên hệ trục, suy ra:

$$S = \int_2^4 [f(x) - g(x)] dx + \int_4^6 [h(x) - g(x)] dx = \frac{16}{3} + \frac{17}{3} = 11 \text{ (đvdt)}.$$

□ Câu IV.

Gọi  $O$  là tâm của đáy  $\Rightarrow SO \perp (ABC)$

Gọi  $E$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $A$ ;  $F$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$

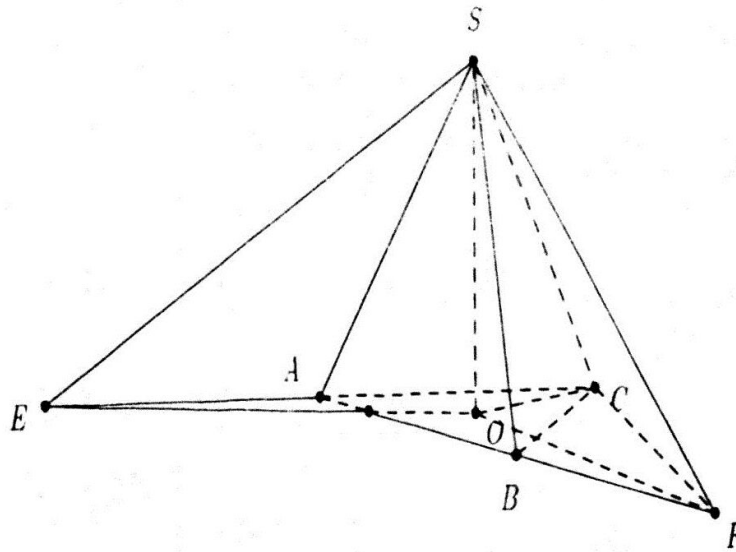
$$\Rightarrow SE // AN; SF // BM \Rightarrow \widehat{ESF} = 90^\circ$$

Áp dụng định lý cô sin cho tam giác  $EOC$ , ta có:

$$OE^2 = CE^2 + CO^2 - 2CE.CO.\cos 30^\circ = \frac{7a^2}{3}.$$

$$\text{Tương tự đối với tam giác } OFC \text{ ta có: } OF^2 = \frac{7a^2}{3}.$$

$$\Rightarrow SE^2 = SF^2 = SO^2 + \frac{7a^2}{3}.$$



**Áp dụng định lí cô sin cho tam giác AEF ta có:**

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cdot \cos 120^\circ = 7a^2$$

**Áp dụng định lí Pitago cho tam giác SEF :  $FE^2 = SE^2 + SF^2$**

$$\Rightarrow 7a^2 = 2SO^2 + \frac{14a^2}{3} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{42}}{6}.$$

**Mà  $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$   $\Rightarrow$  thể tích cần tính là:**

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{42}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{14}}{24} \text{ (đvtt)}.$$

#### □ Câu V

**Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng**

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2, \text{ ta có}$$

$$(a^2 + 2) \left[ 1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right] \geq (a+b+c)^2.$$

**Từ đó suy ra:** 
$$\frac{1}{a^2 + 2} \leq \frac{1 + \frac{(b+c)^2}{2}}{(a+b+c)^2}.$$

**Tương tự ta cũng có:** 
$$\frac{1}{b^2 + 2} \leq \frac{1 + \frac{(c+a)^2}{2}}{(a+b+c)^2}, \quad \frac{1}{c^2 + 2} \leq \frac{1 + \frac{(a+b)^2}{2}}{(a+b+c)^2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} &\leq \frac{3 + \frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}{2}}{(a+b+c)^2} \\ &= \frac{3 + a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{(a+b+c)^2} \\ &= \frac{ab + bc + ca + a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{(a+b+c)^2} = 3. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

### 1 Câu VI.a.

1. Tọa độ giao điểm của hai đường tròn  $(C_1)$  và  $(C_2)$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x = 0 \\ 14x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7x - 10 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -3 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow (C_1)$  và  $(C_2)$  cắt nhau tại  $A(1; -3)$  và  $B(2; 4)$ .

Gọi  $I$  là tâm của đường tròn  $(C)$ ,  $I \in \Delta$

$$x + 6y - 6 = 0 \Rightarrow I(6 - y; y)$$

$$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (5 - 6y)^2 + (y + 3)^2 = (4 - 6y)^2 + (y - 4)^2 \Leftrightarrow y = -1$$

$$\Rightarrow I(12; -1), R = IA = 5\sqrt{5}.$$

Vậy phương trình đường tròn  $(C)$ :  $(x - 12)^2 + (y + 1)^2 = 125$ .

2. Gọi  $(S)$ :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì  $(S)$  đi qua 4 điểm  $O, A, B, C$  nên ta có hệ:

$$\begin{cases} d = 0 \\ -2a - 2b + d = -2 \\ -4b + d = -4 \\ -4c + d = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Vậy  $(S)$ :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0$ .



□ **Câu VII.a.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), khi đó

$$z^2 + |z| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} + 2xyi = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được các cặp  $(x, y)$  là  $(0; 0), (0; 1), (0; -1)$ .

Vậy PT có 3 nghiệm là  $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -i$ .

□ **Câu VI.b.**

1. Gọi M là trung điểm BC  $\Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GA} \Rightarrow M(0; 4)$

Đặt  $x = AB \Rightarrow AM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{10} \Rightarrow x = 2\sqrt{30}$

$\Rightarrow BM = CM = \frac{x}{2} = \sqrt{30}$ .

Giả sử  $B(a; b) \Rightarrow BM = \sqrt{30} \Leftrightarrow BM^2 = 30 \Leftrightarrow a^2 + (b - 4)^2 = 30 \quad (1)$

Mặt khác  $AM \perp BM \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow a - 3b + 12 = 0$

$\Rightarrow a = 3b - 12$  thay vào (1) ta có được:

$$(3b - 12)^2 + (b - 4)^2 = 30 \Leftrightarrow (b - 4)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \Rightarrow a = 9 \\ b = 1 \Rightarrow a = -9 \end{cases}$$

Hai giá trị  $a, b$  tương ứng là tọa độ của B, C.

Vậy  $B(9; 7), C(-9; 1)$ .

2. Phương trình mp(ABC):  $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ .

Gọi  $H(a; b; c)$  là trực tâm của tam giác ABC

$H \in (ABC) \Rightarrow \frac{a}{1} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 1 \quad (1)$ .

Ta có

$\overrightarrow{AH} = (a - 1; b; c), \overrightarrow{BH} = (a; b - 2; c), \overrightarrow{BC} = (0; -2; 3), \overrightarrow{AC} = (-1; 0; 3)$

$$\text{Vì } H \text{ là trực tâm của } \triangle ABC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b + 3c = 0 \\ -a + 3c = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ :

$$\begin{cases} -a + 3c = 0 \\ -2b + 3c = 0 \\ 6a + 3b + 2c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{36}{49} \\ b = \frac{18}{49} \\ c = \frac{12}{49} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right)$$

**Lưu ý:** Tứ diện  $OABC$  là tứ diện vuông tại  $O$ , nên trực tâm  $H$  chính là hình chiếu của  $O$  trên  $(ABC)$ . Vì vậy có thể tìm tọa độ của  $H$  bằng cách: Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $O$  và vuông góc với  $(ABC) \Rightarrow H = \Delta \cap (ABC)$ .

### 1 Câu VII.b

Để thấy nếu  $(x; y)$  là một nghiệm của hệ thì  $x > 1, y > 1$ .

Đặt  $t = \log_3 x, t > 0 \Rightarrow x = 3^t$  và từ PT thứ hai của hệ ta có  $y = 2^{\frac{1}{t}}$

Thay vào PT (1) ta có PT  $9^t + 8^{\frac{1}{t}} = 17$  (3).

Nhận thấy số nghiệm của hệ bằng số nghiệm của PT (3).

Xét hàm số  $f(t) = 9^t + 8^{\frac{1}{t}}$  trên  $(0; +\infty)$ .

Ta có  $f'(t) = 9^t \ln 9 - \frac{8^{\frac{1}{t}} \ln 8}{t^2}$ ,

$$f''(t) = 9^t \ln^2 9 + \frac{1}{t^4} 8^{\frac{1}{t}} \ln^2 8 + \frac{2 \cdot 8^{\frac{1}{t}} \ln 8}{t^3} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$$

Nên hàm  $f'(t)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Mà  $f'\left(\frac{1}{2}\right)f'(1) = 18(\ln 9 - \ln 2^{256})(\ln 27 - \ln 16) < 0$  nên phương trình

$f'(t) = 0$  có nghiệm duy nhất  $t_0 \in (0; 1)$ .

Ta có  $f(t_0) < f(1) = 0$  và  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$  nên phương trình  $f(t) = 0$

có đúng 2 nghiệm dương do đó hệ có đúng 2 nghiệm.

## O ĐỀ 15

### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

#### □ Câu I.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .
2. Với các giá trị nào của tham số  $m \in \mathbb{R}$ , đường thẳng  $(d_m)$  đi qua điểm  $A(-2; 2)$  và có hệ số góc  $m$  cắt đồ thị  $(C)$  của hàm số đã cho tại hai điểm thuộc hai nhánh của  $(C)$ .

#### □ Câu II.

1. Giải phương trình:  $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$ .
2. Giải phương trình:  $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$ .

□ Câu III. Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \cos x \cdot e^{\sin x}) dx$ .

□ Câu IV. Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Hai mặt bên  $(SAB)$  và  $(SAD)$  cùng vuông góc với đáy. Đáy  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $r$ . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$  biết  $SA = h$ .

Câu V. Chứng minh rằng:  $\sin 2x + \tan x > 2x$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

### II. PHẦN RIÊNG

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

#### A. Theo chương trình Chuẩn

#### □ Câu VI.a.

1. Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có trọng tâm  $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ , phương trình đường thẳng  $BC: x - 2y - 4 = 0$  và phương trình đường thẳng  $BG: 7x - 4y - 8 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh  $A, B, C$ .
2. Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; -1; 2)$ , đường cao  $BH$  và trung tuyến  $CM$  lần lượt nằm trên hai đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{4}; (d_2): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{1}$$

Lập phương trình đường thẳng chứa các cạnh AB, AC của tam giác ABC.

**Đề VII.a.** Một hộp đựng 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải rút ít nhất bao nhiêu thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn  $\frac{5}{6}$ .

### B. Theo chương trình Nâng cao

#### 1 Câu VI.b.

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm  $C(2;0)$  và elip  $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ . Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc  $(E)$ . Biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng  $(P): x + y + z - 1 = 0$  và đường thẳng  $d: \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = -t \end{cases}$ .

Gọi  $A = d \cap (P)$ , viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua A, nằm trong  $(P)$  sao cho góc tạo bởi  $\Delta$  và  $d$  bằng  $45^\circ$ .

**Đề VII.b.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = -x + m$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$  tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho  $2 < AB < 2\sqrt{3}$ .

## D. ĐÁP ÁN ĐỀ 15

#### 1 Câu I.

1. Bạn đọc tự giải

2. Phương trình của đường thẳng  $(d_m)$  là  $y = m(x + 2) + 2$ .

Đường thẳng  $(d_m)$  cắt đồ thị  $(C)$  của hàm số đã cho tại hai điểm thuộc hai nhánh của  $(C)$  khi và chỉ khi phương trình:  $\frac{2x+1}{x-1} = m(x+2) + 2$  có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  sao cho  $x_1 < 1 < x_2$ .

Nghĩa là phương trình :  $mx^2 + mx - 2m - 3 = 0(*)$  có hai nghiệm  $x$  và  $x_2$  thỏa mãn  $x_1 < 1 < x_2$ .

**Cách 1:**  $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$   
 $\Leftrightarrow \left( \frac{-2m-3}{m} \right) - (-1) + 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{m} < 0 \Rightarrow m > 0$

**Cách 2:** Đặt  $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$

Khi đó phương trình  $(*)$  trở thành :  $mt^2 + 3mt - 3 = 0(**)$

Phương trình $(*)$  có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thỏa mãn  $x_1 < 1 < x_2$  khi phương trình  $(**)$  có hai nghiệm  $t_1$  và  $t_2$  thỏa mãn:

$$t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow t_1 \cdot t_2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{m} < 0 \Rightarrow m > 0.$$

## □ Câu II

1. Điều kiện:  $x \leq \frac{6}{5}$ .

**Cách 1:** Đặt  $t = \sqrt[3]{3x-2} \Rightarrow x = \frac{t^3+2}{3}$ , từ  $x \leq \frac{6}{5} \Rightarrow t \leq \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ .

Phương trình đã cho trở thành:  $2t + 3\sqrt{6 - \frac{5(t^3+2)}{3}} - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{24 - 15t^3} = 8 - 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \\ 24 - 15t^3 = (8 - 2t)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \\ 15t^3 + 4t^2 - 32t + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \\ (t+2)(15t^2 - 26t + 20) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = -2 \Leftrightarrow x = -2 \text{ thỏa điều kiện } x \leq \frac{6}{5}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = -2$ .



**Cách 2:** Đặt  $a = \sqrt[3]{3x-2}$ ,  $b = \sqrt{6-5x}$ ,  $b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 5a^3 = 15x - 10 \\ 3b^2 = 18 - 15x \end{cases}$

$\Rightarrow 5a^3 + 3b^2 = 8$ . Phương trình đã cho trở thành :  $\begin{cases} 2a + 3b - 8 = 0 \\ 5a^3 + 3b^2 = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{8-2a}{3} \\ 5a^3 + \frac{(8-2a)^2}{3} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{8-2a}{3} \\ 15a^3 + 4a^2 - 32a + 40 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{8-2a}{3} \\ (a+2)(15a^2 - 26a + 20) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = \sqrt[3]{3x-2} \\ 4 = \sqrt{6-5x} \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$

**Cách 3:**

$2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0 \Leftrightarrow (2\sqrt[3]{3x-2} + 4) + (3\sqrt{6-5x} - 12) = 0$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{3x-2} + 2) + 3(\sqrt{6-5x} - 4) = 0$

$\Leftrightarrow 2 \frac{3x-2+2^3}{(\sqrt[3]{3x-2})^2 - 2\sqrt[3]{3x-2} + 2^2} + 3 \frac{6-5x-4^2}{\sqrt{6-5x} + 4} = 0$

$\Leftrightarrow (x+2) \left[ \frac{6}{(\sqrt[3]{3x-2})^2 - 2\sqrt[3]{3x-2} + 2^2} - \frac{15}{\sqrt{6-5x} + 4} \right] = 0 (*)$

Dễ dàng chứng minh được :

$\frac{6}{(\sqrt[3]{3x-2})^2 - 2\sqrt[3]{3x-2} + 2^2} - \frac{15}{\sqrt{6-5x} + 4} < 0, \forall x \leq \frac{6}{5}.$

Khi đó phương trình  $(*) \Leftrightarrow x = -2$ .

**Cách 4:** Xét hàm số  $f(x) = 2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8, \forall x \leq \frac{6}{5}$ .

2. Ta có:  $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2 \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 1 + 2 \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \mp \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

□ **Câu III:**  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \cos x \cdot e^{\sin x}) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot e^{\sin x} dx$

$$= \left[ -\ln(\cos x) + e^{\sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \sqrt{2} + e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1.$$

□ **Câu IV**

Vì  $(SAB) \perp (ABCD), (SAD) \perp (ABCD).$

$$(SAB) \cap (SAD) = SA \Rightarrow SA \perp (ABCD).$$

Qua O dựng đường thẳng

$\Delta \perp SA \Rightarrow \Delta \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta$  là trục của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD.

Gọi M là trung điểm của SA,  $(\alpha)$  là mặt phẳng trung trực của SA và  $I = \Delta \cap (\alpha).$

$$I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IC = ID, I \in (\alpha)$$

$$\Rightarrow IS = IA \Rightarrow IS = IA = IB = IC = ID$$

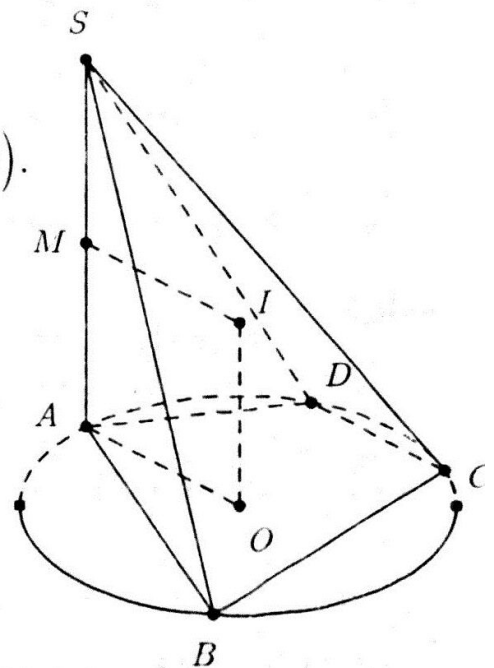
nên I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Tứ giác MAOI là hình chữ nhật nên  $OI = AM = \frac{SA}{2} = \frac{h}{2}$

$$\Rightarrow IA^2 = OA^2 + OI^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow R = IA = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}$$

**Câu V** Xét hàm số  $y = \sin 2x + \tan x - 2x$  xác định và liên tục trên nửa khoảng  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right).$

$$y' = 2 \cos 2x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \frac{1}{\cos^2 x} - 2(1 - \cos 2x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 4 \sin^2 x$$



$$= \frac{1 - \sin^2 2x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 0 \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ và}$$

$$y' = 0, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

Vì hàm số xác định và liên tục trên nửa khoảng  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ;  $y' \geq 0$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  và đẳng thức xảy ra chỉ tại điểm  $x = \frac{\pi}{4}$  nên hàm số đồng biến trên nửa khoảng  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Do đó  $y > y(0)$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

$$\text{Hay } \sin 2x + \tan x > 2x \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

#### □ Câu VI.a

$$1. \text{ Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ } \begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 7x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0; -2)$$

Vì  $\triangle ABC$  cân tại A nên AG là đường cao của  $\triangle ABC$ ,

$$AG \perp BC \Rightarrow AG : 2\left(x - \frac{4}{3}\right) + 1\left(y - \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$$

Gọi  $H = AG \cap BC$  thì tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(2; -1)$$

$$\text{Vì H là trung điểm của BC} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_H - x_B \\ y_C = 2y_H - y_B \end{cases} \Rightarrow C(4; 0).$$

$$\text{Ta có } x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \Rightarrow A(0; 3).$$

Vậy  $A(0; 3), B(0; -2), C(4; 0)$ .

2. Phương trình tham số của các đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$  là :

$$(d_1): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4 + 4t \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -2 - 3s \\ z = 5 + s \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Vì } B \in (d_1) \Rightarrow B(2t - 1; 3t + 1; 4t + 4),$$

$$C \in (d_2) \Rightarrow C(2s + 1; -3s - 2; s + 5)$$

Ta có  $\overrightarrow{AC} = (2s + 2; -3s - 1; s + 3)$ , tọa độ trung điểm M của AB là

$$M\left(t - 1; \frac{3t - 2}{2}; 2t + 3\right).$$

$$\text{VTCP của } (d_1): \overrightarrow{u_{BH}} = (2; 3; 4),$$

$$\text{vì } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{u_{BH}} = 0 \Rightarrow 2(2s + 2) + 3(-3s - 1) + 4(s + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -s + 13 = 0 \Leftrightarrow s = 13 \Rightarrow C(27; -41; 18).$$

$$\text{Vì } M \in (d_2) \Rightarrow \begin{cases} t - 1 = 2s + 1 \\ 3t - 2 = 2(-3s - 2) \\ 2t + 3 = s + 5 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow B\left(\frac{1}{3}; 3; \frac{20}{3}\right)$$

$$\text{Do đó phương trình } AB: \frac{x + 1}{2} = \frac{y + 3}{9} = \frac{z - 2}{7},$$

$$AC: \frac{x + 1}{13} = \frac{y + 3}{-19} = \frac{z - 2}{8}.$$

**Câu VII.a.** Trong 9 thẻ đã cho có hai tấm thẻ ghi số chia hết cho 4 (các thẻ ghi số 4 và 8), 7 thẻ còn lại ghi số không chia hết cho 4.

Giả sử rút  $x$  ( $1 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$ ), số cách chọn  $x$  từ 9 thẻ trong hộp là  $C_9^x$ , số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_9^x$ .

Gọi A là biến cố "Trong số  $x$  thẻ rút ra, có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4".

Số cách chọn tương ứng với biến cố  $\overline{A}$  là  $n(\overline{A}) = C_7^x$ .

$$\text{Ta có } p(\overline{A}) = \frac{C_7^x}{C_9^x} \Rightarrow p(A) = 1 - \frac{C_7^x}{C_9^x}.$$

$$\text{Do đó } p(A) > \frac{5}{6} \Leftrightarrow 1 - \frac{C_7^x}{C_9^x} > \frac{5}{6} \Leftrightarrow x^2 - 17x + 60 < 0$$

$$\Leftrightarrow 5 < x < 12 \Rightarrow 6 \leq x \leq 9 (x \in \mathbb{N})$$

Giá trị nhỏ nhất của  $x$  là 6. Vậy số thẻ ít nhất phải rút ra là 6.

#### □ Câu VI.b

1. Gọi  $A(x_0; y_0)$ , do  $A, B$  đối xứng nhau qua trục hoành nên  $B(x_0; -y_0)$ .

$$AB^2 = 4y_0^2; AC^2 = (2 - x_0)^2 + y_0^2$$

$$\text{Vì } A \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{4 - x_0^2}{4} \quad (1)$$

$$ABC \text{ là tam giác đều nên } AB = AC \Leftrightarrow 4y_0^2 = (x_0 - 2)^2 + y_0^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } 7x_0^2 - 16x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Với  $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow A \equiv C$  loại

$$\text{Với } x_0 = \frac{2}{7} \text{ thay vào (1) ta được } y_0^2 = \frac{48}{49} \Leftrightarrow x_0 = \mp \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{Vậy } A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right); B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right); B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right).$$

2. Ta có  $A(1; 0; -1)$ , VTCP của  $(d): \vec{u} = (1; 2; -1)$ ,

$$\text{VTPT của } (P): \vec{n} = (2; 1; 1)$$

Gọi  $\vec{u}_\Delta = (a; b; c)$  ( $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ ) là VTCP của  $(\Delta)$

$$\text{Vì } (\Delta) \subset mp(P) \Rightarrow \vec{u}_\Delta \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 2a + b + c = 0 \quad (1)$$

Góc giữa  $(d)$  và  $(\Delta)$  bằng  $45^\circ$  suy ra

$$\cos 45^\circ = \frac{|a + 2b - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{6}} \Leftrightarrow |a + 2b - c| = \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra



$$3|a + b| = \sqrt{3(a^2 + b^2 + (2a + b)^2)}$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 6ab + 3b^2 = 5a^2 + 4ab + 2b^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 2ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}a)^2 = (a + b)^2 \Leftrightarrow b = -a \pm \sqrt{3}a$$

\* Với  $b = -a + a\sqrt{3}$ , chọn  $a = 1 \Rightarrow b = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow c = -1 - \sqrt{3}$

\* Với  $b = -a - a\sqrt{3}$ , chọn  $a = 1 \Rightarrow b = -\sqrt{3} - 1 \Rightarrow c = \sqrt{3} - 1$

Từ đó ta có hai đường thẳng thỏa mãn có phương trình là :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{\sqrt{3}-1} = \frac{z+1}{-\sqrt{3}-1} \text{ và } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1-\sqrt{3}} = \frac{z+1}{\sqrt{3}-1}.$$

**âu VII.b.**  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  là giao điểm đường thẳng  $(d): y = -x + m$

à đồ thị  $(C): y = \frac{x^2 - 1}{x}$  của hàm số nên tọa độ  $A, B$  thỏa :

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x} = -x + m \\ y = -x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - mx - 1 = 0, (x \neq 0) \\ y = -x + m \end{cases} \quad (1)$$

Dễ thấy (1) có hai nghiệm thực phân biệt  $x_1, x_2$  khác 0 với mọi  $m$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ và } y_1 = -x_1 + m, y_2 = -x_2 + m.$$

Khi đó:

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = \frac{m^2}{2} + 4.$$

Theo bài toán:

$$2 < AB < 2\sqrt{3} \Rightarrow 4 < \frac{m^2}{2} + 4 < 12 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{2} > 0 \\ \frac{m^2}{2} < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -4 < m < 4 \end{cases}.$$

## O ĐỀ 16

### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

□ Câu I. Cho hàm số  $y = x^3 - mx - m$  có đồ thị  $(C_m)$ ,  $m$  là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi  $m = 3$ .

2. Tìm các giá trị  $m$  để đồ thị  $(C_m)$  của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

□ Câu II.

1. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8 - x^3 & (1) \\ (x-1)^4 = y & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

2. Giải phương trình:  $\tan x = \cot x + 4 \cos^2 2x$ .

□ Câu III. Tính tích phân:  $I = \int_0^1 \left( xe^{2x} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$

□ Câu IV. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a\sqrt{3}$ . Gọi  $I$  là hình chiếu của  $A$  lên  $AC$ . Từ  $I$  lần lượt vẽ các đường thẳng song song với  $SB, SD$  cắt  $BC, CD$  tại  $P, Q$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là giao điểm của  $PQ$  với  $AB, AD$ . Tính thể tích của khối chóp  $SAEF$  và khoảng cách từ  $E$  đến mặt phẳng  $(SBD)$ .

□ Câu V. Cho các số không âm  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + 2b + 3c = 4$ .

Chứng minh bất đẳng thức sau:  $ab - bc + ca \leq 2$ .

### II. PHẦN RIÊNG

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

#### A. Theo chương trình Chuẩn

□ Câu VI.a.

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn  $(C): (x-4)^2 + y^2 = 4$  và điểm  $E(4;1)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên trục tung sao cho từ  $M$  kẻ được hai tiếp tuyến  $MA, MB$  đến đường tròn  $(C)$  với  $A, B$  là hai tiếp điểm sao cho đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $E$ .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}; d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2} \text{ và mặt phẳng}$$

$$(P): x - y - 2z + 3 = 0.$$

Viết phương trình chính tắc của đường thẳng  $\Delta$ , biết  $\Delta$  nằm trên mặt phẳng  $(P)$  và  $\Delta$  cắt hai đường thẳng  $d_1, d_2$ .

□ **Câu VII.a.** Chứng minh rằng phương trình:  $(x-1)e^x - (x+1)e^{-x} = 0$  có hai nghiệm.

## B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b.**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(3;2)$ , bán kính  $R = \sqrt{13}$  và đường thẳng  $\Delta: mx - 2y + m + 3 = 0$ .  
 Tìm  $m$  để đường thẳng  $\Delta$  cắt đường tròn  $(C)$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho tam giác  $AIB$  có diện tích bằng  $\frac{4\sqrt{66}}{5}$ .

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;2;5), B(1;4;3), C(5;2;1)$  và mặt phẳng  $(P): x - y - z - 3 = 0$ .

Gọi  $M$  là một điểm thay đổi trên mặt phẳng  $(P)$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $MA^2 + MB^2 + MC^2$ .

□ **Câu VII.b.** Giải bất phương trình  $\log_9 x \geq \log_{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \frac{x}{4}}$

## ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 16

□ **Câu I**

1. Bạn đọc tự giải

2. Ta có:  $y' = 3x^2 - m$

Để ý  $m \leq 0 \Rightarrow y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  hàm số đồng biến với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , do đó đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 1 giao điểm.

Khi  $m > 0 \Rightarrow y' = 0$  luôn có hai nghiệm phân biệt  $x = -\sqrt{\frac{m}{3}}, x = \sqrt{\frac{m}{3}}$ .

Lập bảng biến thiên và suy ra : hàm số đạt cực đại tại :

$$x = -\sqrt{\frac{m}{3}}, y\left(-\sqrt{\frac{m}{3}}\right) = \frac{2m}{3}\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right) - m \text{ và đạt cực tiểu tại :}$$

$$x = \sqrt{\frac{m}{3}}, y\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right) = -\frac{2m}{3}\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right) - m.$$

Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m > 0 \\ y\left(-\sqrt{\frac{m}{3}}\right) > 0 \\ y\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{2m}{3}\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right) - m > 0 \\ -\frac{2m}{3}\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right) - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right) > 1 \Leftrightarrow m > \frac{27}{4}.$$

## □ Câu II.

1. Điều kiện:  $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}.$

Thay (2) vào (1) ta được:  $\sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 8 - x^3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + x^3 - x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 + x^3 - x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + (x-2)(x^2+x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + x^2+x+4\right) = 0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=1$$

Vậy  $(x; y) = (2; 1)$  là nghiệm duy nhất của hệ.

2. Điều kiện :  $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq l\frac{\pi}{2} \quad (l \in \mathbb{Z})$

Phương trình tương đương với

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + 4 \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} + 4 \cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 2x \left( \frac{1}{\sin 2x} + 2 \cos 2x \right) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x (1 + \sin 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

do với điều kiện  $\Rightarrow$  họ nghiệm của phương trình là :

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

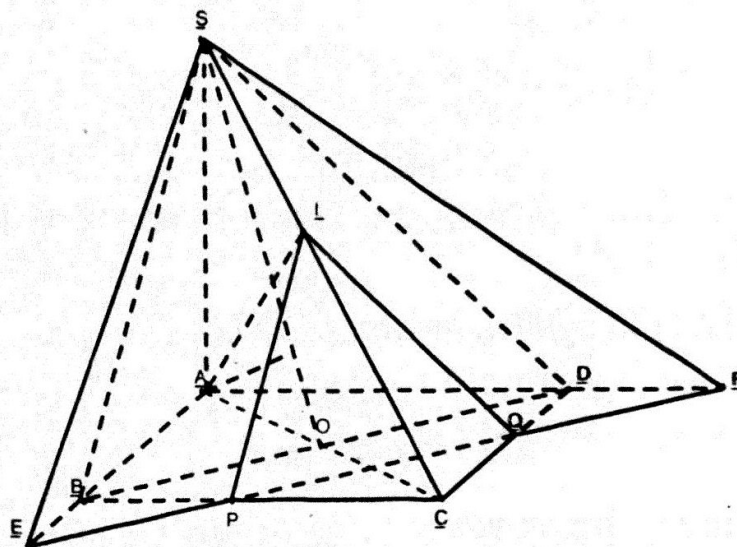
**▮ Câu III.**  $I = \frac{1}{2} \int_0^1 x d(e^{2x}) + \int_0^1 \frac{d(4-x^2)}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx + \sqrt{4-x^2} \Big|_0^1$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 + \sqrt{3} - 2 = \frac{e^2 + 4\sqrt{3} - 7}{4}.$$

**Chú ý:**  $\int_0^1 x \cdot e^{2x} dx.$

Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases}$   $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx.$  Đặt  $t = 4-x^2.$

**▮ Câu IV**



Trong tam giác vuông SAC, ta có:

$$CS \perp SC \Rightarrow \frac{IC}{SC} = \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + 3a^2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow CP = \frac{2}{5} CB = \frac{2a}{5} \text{ và } CQ = \frac{2}{5} CD = \frac{2a}{5}$$



Áp dụng định lí Talet:  $\frac{BE}{CQ} = \frac{BP}{PC} = \frac{3}{2} \Rightarrow BE = \frac{3}{2}CQ = \frac{3a}{5}$

Tương tự:  $DF = \frac{3a}{5} \Rightarrow AE = AF = a + \frac{3a}{5} = \frac{8a}{5}$

$\Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot AF = \frac{32a^2}{25}$ .

Vậy  $V_{SAEF} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{\triangle AEF} = \frac{1}{3}a\sqrt{3} \cdot \frac{32a^2}{25} = \frac{32a^3\sqrt{3}}{75}$  (đvtt).

Ta có:  $\frac{DA}{DE} = \frac{5}{3} \Rightarrow d(E, (SBD)) = \frac{3}{5}d(A, (SBD))$ .

Vẽ đường cao AH của tam giác SAO

Ta có:  $AI \perp (SBD) \Rightarrow d(A, (SBD)) = SH = \frac{SA \cdot AO}{SO} = a\sqrt{\frac{3}{7}}$

Vậy  $d(E, (SBD)) = \frac{3a\sqrt{21}}{35}$ .

#### □ Câu V

Hiển nhiên là do  $bc \geq 0$  nên ta chỉ cần chứng minh  $a(b+c) \leq 8$  là đủ.

Mặt khác, lại dễ ý rằng theo bất đẳng thức Côsi dạng  $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ , thì

$$\begin{aligned} a(b+c) &\leq a\left(b + \frac{3c}{2}\right) = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(b + \frac{3c}{2}\right) \leq 2 \cdot \frac{\left[\frac{a}{2} + \left(b + \frac{3c}{2}\right)\right]^2}{4} \\ &= \frac{(a+2b+3c)^2}{8} = 2. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ bc=0 \\ ca=0 \\ \frac{a}{2}=b+\frac{3c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (a,b,c) = (2,1,0).$$

### □ Câu VI.a

1. Đường tròn (C) có tâm I(4;0), bán kính  $R = 2$ .

Gọi  $M(0;m)$ , giả sử  $T(x;y)$  là tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ từ M tới

$$(C) \Rightarrow \overrightarrow{MT} = (x; y - m), \quad \overrightarrow{IT} = (x - 4; y).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} T \in (C) \\ \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{IT} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - my = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x - my - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \text{phương trình đường thẳng AB: } 4x - my - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \text{AB đi qua E} \Leftrightarrow 16 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy  $M(0;4)$  là điểm cần tìm.

2. Giả sử  $\vec{n}(a;b;c) \neq \vec{0}$  là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Phương trình mặt phẳng (P):  $ax + by + cz + 2b = 0$ .

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A(1;3;0)$  và có một VTCP  $\vec{u} = (1;1;4)$ .

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} \Delta // (P) \\ d(A; (P)) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = a + b + 4c = 0 & (1) \\ \frac{|a + 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 4 & (2) \end{cases}$$

Thế  $b = -a - 4c$  vào (2) ta có :

$$(a + 5c)^2 = (2a^2 + 17c^2 + 8ac) \Leftrightarrow a^2 - 2ac - 8c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{c} = 4 \text{ và } \frac{a}{c} = -2.$$

\* Với  $\frac{a}{c} = 4$  chọn  $a = 4, c = 1 \Rightarrow b = -8$ .

Phương trình mặt phẳng (P):  $4x - 8y + z - 16 = 0$ .

\* Với  $\frac{a}{c} = -2$  chọn  $a = 2, c = -1 \Rightarrow b = 2$ .

Phương trình mặt phẳng (P):  $2x + 2y - z + 4 = 0$ .

### □ Câu VII.a

Dễ thấy  $x = 1$  không là nghiệm phương trình.

Với  $x \neq 1$  phương trình  $(x-1)e^x - (x+1)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - \frac{x+1}{x-1} = 0$ .

Xét hàm số  $y = e^{2x} - \frac{x+1}{x-1}$  xác định với mọi  $x \neq 1$ .

Ta có :  $y' = 2e^{2x} + \frac{2}{(x-1)^2} > 0$  với mọi  $x \neq 1$  nên hàm số đồng biến

trên mỗi khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

Mặt khác  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$ .

Lập bảng biến thiên, ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm nhỏ hơn 1 và một nghiệm lớn hơn 1.

### ▮ Câu VI.b

$$1. \text{ Gọi } h = d(I, \Delta) \Rightarrow S_{\Delta AIB} = \frac{1}{2} h \cdot AB = h \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$\Rightarrow h \sqrt{13 - h^2} = \frac{3\sqrt{56}}{5} \Leftrightarrow h^4 - 13h^2 + \frac{504}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = \frac{56}{5} \\ h^2 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\text{Mà } h = d(I, \Delta) = \frac{|4m - 1|}{\sqrt{m^2 + 4}}.$$

$$\text{TH 1: } h^2 = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 5(4m - 1)^2 = 9(m^2 + 4) \Leftrightarrow 71m^2 - 40m - 31 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1; m = -\frac{31}{71}.$$

$$\text{TH 2: } h^2 = \frac{56}{5} \Leftrightarrow 5(4m - 1)^2 = 56(m^2 + 4)$$

$$\Leftrightarrow 24m^2 - 40m - 129 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{10 \pm \sqrt{874}}{12}.$$

Vậy  $m = 1$ ;  $m = -\frac{31}{71}$ ;  $m = \frac{10 \pm \sqrt{874}}{12}$  là những giá trị cần tìm.

$$2. \text{ Do } (\beta) // (\alpha) \Rightarrow (\beta): 2x + 2y - z + D = 0 \quad (D \neq 17).$$

Mặt cầu (S) có tâm  $I(1; -2; 3)$ , bán kính  $R = 5$ .

Đường tròn có chu vi  $6\pi$  nên có bán kính  $r = 3$ .

Khoảng cách từ I tới  $(\beta)$  là  $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ .

$$\text{Do đó } \frac{|2 \cdot 1 + 2(-2) - 3 + D|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 4 \Leftrightarrow |-5 + D| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -7 \\ D = 17 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy  $(\beta)$  có phương trình :  $2x + 2y - z - 7 = 0$ .

□ **Câu VII.b.** Điều kiện:  $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \frac{x}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4$ .

$$\text{Đề ý: } \log_3 \sqrt{1 - \frac{x}{4}} = \frac{1}{2} \log_3 \left(1 - \frac{x}{4}\right), \log_9 x = \frac{1}{2} \log_3 x.$$

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$\left(\frac{1}{2} \log_3 x\right)^2 \geq \left[\frac{1}{2} \log_3 \left(1 - \frac{x}{4}\right)\right]^2 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 \geq \left[\log_3 \left(1 - \frac{x}{4}\right)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\log_3 x - \log_3 \left(1 - \frac{x}{4}\right)\right] \left[\log_3 x + \log_3 \left(1 - \frac{x}{4}\right)\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{x}{1 - \frac{x}{4}} \cdot \log_3 x \left(1 - \frac{x}{4}\right) \geq 0$$

**Trường hợp 1:**  $\begin{cases} \log_3 \frac{4x}{4-x} \geq 0 \\ \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ \frac{4x}{4-x} \geq 1 \\ \frac{x(4-x)}{4} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

**Trường hợp 2:**  $\begin{cases} \log_3 \frac{4x}{4-x} \leq 0 \\ \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ \frac{4x}{4-x} \leq 1 \\ \frac{x(4-x)}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{4}{5}.$

Vậy bất phương trình cho có tập nghiệm là  $\left(0; \frac{4}{5}\right] \cup \{2\}$ .

**I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH**

□ **Câu I.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 4$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị khi  $m = 1$ .

2. Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$  có 3 nghiệm phân biệt và các nghiệm đều nhỏ hơn 4.

□ **Câu II**

1. Giải bất phương trình :  $x^2 + 3x + 1 \leq (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$ .

2. Giải phương trình:  $\frac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

□ **Câu III:** Tính tích phân:  $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x dx}{3 + 4 \sin x - \cos 2x}$ .

□ **Câu IV:** Cho tứ diện ABCD có các cạnh  $AB = BC = CD = DA = a$ ,  $AC = x, BD = y$ . Giả sử  $a$  cố định, hãy xác định  $x$  và  $y$  sao cho thể tích tứ diện ABCD lớn nhất.

**Câu V:** Chứng minh rằng phương trình :  $\frac{1}{5}x^5 + x^3 - 4x - 3 = 0$  có nghiệm duy nhất và nghiệm đó thuộc khoảng  $(1; 2)$ .

**II. PHẦN RIÊNG**

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

**A. Theo chương trình Chuẩn**

□ **Câu VI.a.**

1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 3 điểm  $A(2; 0; 0)$ ,  $C(0; 4; 0)$ ,  $S(0; 0; 4)$ . Tìm tọa độ điểm B thuộc mặt phẳng Oxy sao cho tứ giác OABC là hình chữ nhật, viết phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm O, B, C, S.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho  $M(5; 2; -3)$  và mặt phẳng  $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$ . Gọi  $M_1$  là hình chiếu của M trên  $(P)$ , xác định



tọa độ của  $M_1$  và tính  $MM_1$ . Viết phương trình mp(Q) đi qua M và chứa đường thẳng (d):  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{-6}$ .

□ **Câu VII.a.** Tìm căn bậc hai của số phức  $z = \frac{(3-i)^2}{1+i}$ .

## B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b.**

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E):  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$  và đường thẳng  $\Delta: x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ . Giả sử  $\Delta$  cắt (E) tại B, C. Tìm điểm  $A \in \Delta$  để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm  $A(1;0;0)$ ,  $B(0;1;0)$ ,  $C(0;3;2)$  và mặt phẳng ( $\alpha$ ):  $x + 2y + 2 = 0$ . Tìm tọa độ của điểm M biết rằng M cách đều các điểm A, B, C và mặt phẳng ( $\alpha$ ).

□ **Câu VII.b.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2^{2x-2y} + 2^{x-y} - 2 = 0 & (1) \\ 2^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2y-1} = 5 & (2) \end{cases}$$

## ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 17

□ **Câu I**

1. Bạn đọc tự giải

2. Ta có  $x^3 - 3mx^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 3m = x + \frac{4}{x^2} = f(x)$

Xét hàm số  $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$  với  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 4)$ .

Ta có  $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pm\infty$$

Bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên ta thấy PT có 3 nghiệm phân biệt và cả 3 nghiệm đều nhỏ hơn 4 khi và chỉ khi  $1 < m < \frac{17}{12}$ .

**Lưu ý:** Có thể giải bài toán theo cách sau:

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow f(x) = x^3 - 3mx^2 + 4$  có hai điểm cực đại và cực tiểu  $x_1, x_2$  đồng thời

$$\begin{cases} f(x_1)f(x_2) < 0 \\ x_1, x_2 < 4 \\ f(4) > 0 \end{cases}.$$

## □ Câu II

1. Bất phương trình  $\Leftrightarrow x(x+3) - (x+3)\sqrt{x^2+1} + 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x - \sqrt{x^2+1}) + (\sqrt{x^2+1})^2 - x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} - 3) \leq 0. \quad (*)$$

$$\text{Do } \sqrt{x^2+1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \leq 3 \Leftrightarrow x^2 \leq 8 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}.$$

Vậy  $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$  là nghiệm của bất phương trình đã cho.

2. Điều kiện:  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \cos^2 x (\tan^2 x + \tan x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin^2 x + \sin x \cos x) - (\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

Kết hợp với điều kiện ta có:

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$  là nghiệm của phương trình đã cho.

□ Câu III. Ta có:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^2 x + 2 \sin x + 1}$ .

Đặt  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

Khi đó:  $I = \int_0^1 \frac{t dt}{t^2 + 2t + 1} = \int_0^1 \frac{(t+1-1) dt}{(t+1)^2} = \int_0^1 \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$   
 $= \left( \ln(t+1) + \frac{1}{t+1} \right) \Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$ .

□ Câu IV

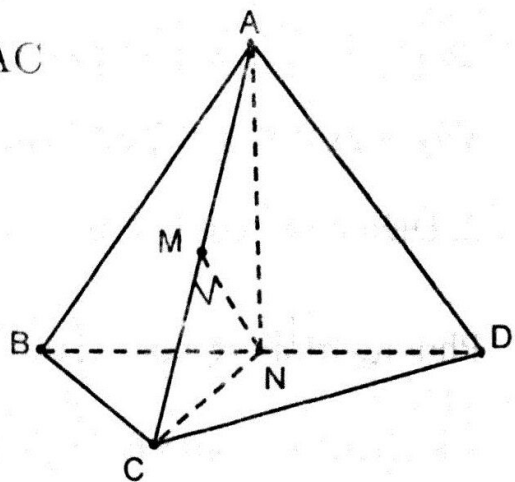
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD.

Vì các tam giác ABD, CDB là các tam giác cân nên  $(ANC) \perp BD$ .

Do đó:  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} BD \cdot S_{ACN}$ .

Do  $\triangle ANC$  cân tại N nên  $S_{ACN} = \frac{1}{2} MN \cdot AC$

Mà  $MN = \sqrt{AN^2 - AM^2}$   
 $= \sqrt{AB^2 - BN^2 - AM^2}$   
 $= \sqrt{a^2 - \frac{x^2 + y^2}{4}}$   
 $= \frac{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}}{2}$



Suy ra  $S_{ACN} = \frac{1}{2} MN \cdot AC = \frac{1}{4} x \sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}$

$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{12} xy \sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)} = \frac{1}{12} \sqrt{x^2 y^2 (4a^2 - x^2 - y^2)}$

$\leq \frac{1}{12} \sqrt{\left( \frac{x^2 + y^2 + 4a^2 - x^2 - y^2}{3} \right)^3} = \frac{2a^3}{9\sqrt{3}}$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ .

$$\text{Vậy } \max V_{ABCD} = \frac{2a^3}{9\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = y = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

□ **Câu V.** Xét hàm số  $y = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - 4x - 3$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

$$y' = x^4 + 3x^2 - 4 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y(-1) = -\frac{1}{5} \\ x = 1, y(1) = -\frac{29}{5} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên, suy ra:

$y < 0, \forall x \leq 1 \Rightarrow$  phương trình không có nghiệm khi  $x \leq 1$ .

Mặt khác  $y(1) = -\frac{29}{5}$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ , do đó phương trình đã cho có

nghiệm  $x > 1$ , hơn nữa  $y(2) = \frac{17}{5} > 0 \Rightarrow y(1)y(2) < 0 \Rightarrow$  phương trình

$\frac{1}{5}x^5 + x^3 - 4x - 3 = 0$  có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng  $(1; 2)$ .

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy  $y$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ , do đó hàm số  $y$  cắt trục hoành tại 1 giao điểm có hoành độ  $x \in (1; 2)$ .

Vậy, phương trình:  $\frac{1}{5}x^5 + x^3 - 4x - 3 = 0$  có một nghiệm duy nhất và nghiệm đó thuộc khoảng  $(1; 2)$ .

**Chú ý:** Xét hàm số  $y = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - 4x - 3$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ .

Do đó tồn tại một số âm  $\alpha$  sao cho  $y(\alpha) < 0$  và tồn tại một số dương  $\beta$  sao cho  $y(\beta) > 0$ .

Theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục, phương trình  $y = 0$  có ít nhất một nghiệm  $c \in (\alpha; \beta)$ .

Nếu ta chứng minh được hàm số  $y$  đồng biến trên khoảng  $(\alpha; \beta)$ . Từ đó suy ra rằng phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc khoảng  $(\alpha; \beta)$ .

Như vậy, theo bài toán ta cần chứng minh được  $y(1) \cdot y(2) < 0$  và hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

#### □ Câu VI.a

1. Tứ giác  $OABC$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow B(2; 4; 0)$ , vì  $O, C$  cùng nhìn  $SB$  dưới một góc vuông nên trung điểm  $I(1; 2; 2)$  của  $SB$  là tâm mặt cầu và bán kính  $R = \frac{1}{2}SB = 3$ .

Vậy PT mặt cầu  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 9$ .

2. Phương trình tham số của  $MM_1 \perp (P)$ : 
$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

$M_1 = MM_1 \cap (P)$  nên tọa độ của  $M_1$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \\ 2x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M_1(1; -2; -1).$$

$$\text{Suy ra } MM_1 = \sqrt{(5 - 1)^2 + (2 + 2)^2 + (-3 + 1)^2} = 6$$

Đường thẳng  $(d)$  đi qua  $A(1; 1; 5)$  và có VTCP  $\vec{u} = (2; 1; -6)$ , mp $(Q)$  đi qua  $M$  và chứa  $(d)$  nên có VTPT  $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = (2; 8; 2)$ .

Vậy phương trình  $(Q)$ :  $x + 4y + z - 10 = 0$ .

#### □ Câu VII.a.

$$\text{Ta có: } \frac{(3 - i)^2}{1 + i} = 7 - i.$$

Gọi  $z = x + yi$  là căn bậc hai của số phức  $7 - i$



$$\Rightarrow z^2 = 7 - i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy.i = 7 - i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2x} \\ x^2 - \frac{9}{4x^2} = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2x} \\ x^2 - \frac{9}{4x^2} = -\frac{5}{4} \end{cases} \begin{cases} y = \frac{3}{2x} \\ 4x^4 + 5x^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy  $7 - i$  có hai căn bậc hai là:  $1 + \frac{3}{2}i$  và  $-1 - \frac{3}{2}i$ .

#### □ Câu VI.b.

1. Giả sử  $A(x_0; y_0) \in (E)$  là điểm cần tìm.

Khoảng cách từ  $A$  đến  $(\Delta)$  là  $AH = \frac{|x_0 - \sqrt{2}y_0 + 2|}{\sqrt{3}}$ .

Vì  $BC$  không đổi nên  $S_{\Delta ABC}$  lớn nhất khi và chỉ khi  $AH$  lớn nhất.

$$\begin{aligned} |x_0 - \sqrt{2}y_0 + 2| &\leq |x_0 - \sqrt{2}y_0| + 2 = \left| \frac{x_0}{2\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} + \left(-\frac{y_0}{2}\right) \cdot 2\sqrt{2} \right| + 2 \\ &\leq \sqrt{16 \left( \frac{x_0^2}{8} + \frac{y_0^2}{4} \right)} + 2 = 6 \Rightarrow AH \leq 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Và } AH = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0}{2\sqrt{2}} = -\frac{y_0}{2} \\ x_0 - \sqrt{2}y_0 \geq 0 \\ \frac{x_0^2}{8} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow A(2; -\sqrt{2}).$$

Vậy diện tích tam giác  $ABC$  lớn nhất khi  $A(2; -\sqrt{2})$ .

2. Gọi  $M(a; b; c)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (a - 1; b; c), \quad \overrightarrow{BM} = (a; b - 1; c), \quad \overrightarrow{CM} = (a; b - 3; c - 2)$$

$$\text{Do } M \text{ cách đều } A, B, C \Rightarrow \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MB^2 = MC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = -2b \\ -2b = -6b - 4c + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = -a + 3 \end{cases} \Rightarrow M(a; a; -a + 3).$$

$$d(M, (\alpha)) = MA \Leftrightarrow \frac{|3a + 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(a - 1)^2 + a^2 + (a - 3)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3a + 2)^2}{5} = 3a^2 - 8a + 10 \Leftrightarrow a = 1; a = \frac{23}{3}.$$

$$* a = 1 \Rightarrow M(1; 1; 2)$$

$$* a = \frac{23}{3} \Rightarrow M\left(\frac{23}{3}; \frac{23}{3}; -\frac{14}{3}\right).$$

□ **Câu VII.b** Đặt  $u = 2^{x-y}$ ,  $u > 0$ , phương trình (1) trở thành

$$u^2 + u - 2 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(u + 2) = 0(3).$$

$$\text{Vì } u > 0 \Rightarrow u + 2 > 2 > 0 \text{ nên } (3) \Leftrightarrow u = 1$$

$$\text{Với } u = 1 \Rightarrow 2^{x-y} = 1 = 2^0 \Leftrightarrow x - y = 0 \text{ hay } x = y.$$

$$\text{Khi đó phương trình (2) trở thành } 2^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 5(4)$$

$$\text{Đặt } v = 2^{2x}, v > 0, \text{ phương trình (4) viết lại: } 2.v + \frac{2}{v} = 5$$

$$\Leftrightarrow 2v^2 - 5v + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-1} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2} \\ v = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là } \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Chú ý: } \begin{cases} 2^{2x-2y} + 2^{x-y} - 2 = 0 \\ 2^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2y-1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2^x}{2^y}\right)^2 + \frac{2^x}{2^y} - 2 = 0 \\ 2 \cdot (2^x)^2 + \frac{2}{(2^y)^2} = 5 \end{cases}.$$

Hệ đã gợi ý đặt  $u = 2^x, u > 0$  và  $v = 2^y, v > 0$  hoặc  $v = \frac{1}{2^y}, v > 0$

Nếu đặt  $u = 2^x, u > 0$  và  $v = \frac{1}{2^y}, v > 0$ , hệ đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} (u.v)^2 + u.v - 2 = 0 \\ 2.u^2 + 2.v^2 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (u.v)^2 + u.v - 2 = 0 \\ (u+v)^2 - 2uv = \frac{5}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u.v = \dots \\ u+v = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases} \end{aligned}$$

## ○ ĐỀ 18

### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

#### □ Câu I.

Cho hàm số  $y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$  (1)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị khi  $m = 2$
2. Tìm  $m$  để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, cực tiểu và hoành độ của các điểm cực trị đó nhỏ hơn 1.

#### □ Câu II.

1. Giải phương trình:

$$x + 2\sqrt{7 - x} = 2\sqrt{x - 1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Giải phương trình:  $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$ .

#### □ Câu III: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$ và

$$y = \frac{x(1 - x)}{x^2 + 1}.$$

#### □ Câu IV. Cho tứ diện ABCD và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$ . Mặt phẳng

(MNP) cắt AD tại Q. Tính tỷ số  $\frac{AQ}{AD}$  và tỷ số thể tích hai phần của khối tứ diện ABCD được chia bởi mặt phẳng (MNP).

#### □ Câu V. Chứng minh rằng phương trình $4^x(4x^2 + 1) = 1$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

## I. PHẦN RIÊNG

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

### A. Theo chương trình Chuẩn

#### □ Câu VI.a.

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình:

$y = x^2 - 2x$  và elip (E):  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ . Chứng minh rằng (P) giao (E) tại

4 điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn.

Viết phương trình đường tròn đi qua 4 điểm đó.

2. Trong không gian Oxyz cho điểm  $A(5; 5; 0)$  và đường thẳng

$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-7}{-4}.$$

Tìm tọa độ điểm B, C thuộc d sao cho tam giác ABC vuông cân tại A và  $BC = 2\sqrt{17}$ .

□ Câu VII.a. Tìm giá trị của tham số  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $\log_{10}^2 x + \sqrt{10 \log_{10}^2 x + 90} = m$  có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn  $[1; 10]$ .

### B. Theo chương trình Nâng cao

#### □ Câu VI.b.

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có cạnh  $AB: x - 3y + 5 = 0$ , đường chéo:  $BD: x - y - 1 = 0$  và đường chéo AC qua điểm  $M(-9; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

2. Trong không gian Oxyz cho các điểm  $A(5; 4; 3), B(6; 7; 2)$

và đường thẳng  $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ . Tìm điểm C thuộc  $d_1$  sao cho

tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

□ Câu VII.b. Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{7-y} = 2 \\ 4 \log_4^2 x + 9 \log_8^2 y = 12 \log_4 x \cdot \log_8 y \end{cases}$$

**□ Câu I.**

1. Bạn đọc tự giải

$$2. y' = 3x^2 + 2(1 - 2m)x + (2 - m),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2(1 - 2m)x + (2 - m) = 0(*)$$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu đồng thời hoành độ của chúng nhỏ hơn 1 khi và chỉ khi (\*) có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1.

$$\text{Đặt } t = x - 1, (*) \text{ trở thành } 3t^2 - 4(m - 2)t - 5m + 7 = 0(**)$$

(\*) có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1 khi và chỉ khi (\*\*) có hai nghiệm

$$\text{âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ S = \frac{2(m - 2)}{3} < 0 \\ P = -5m + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{5}{4} \\ m < -1 \\ m < 2 \\ m < \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5} \end{cases}$$

**□ Câu II**

$$1. \text{Điều kiện: } \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 7 - x \geq 0 \\ -x^2 + 8x - 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7.$$

$$\text{Ta có: } x + 2\sqrt{7 - x} = 2\sqrt{x - 1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + 2\sqrt{7 - x} - 2\sqrt{x - 1} - \sqrt{(7 - x)(x - 1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 1}(\sqrt{x - 1} - 2) - \sqrt{7 - x}(\sqrt{x - 1} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x - 1} - 2)(\sqrt{x - 1} - \sqrt{7 - x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - 1} = 2 \\ \sqrt{x - 1} = \sqrt{7 - x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

2. Điều kiện:  $\cos x \neq 0$ .

$$\text{Ta có: } (1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = (1 + \tan x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x$$



$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

### □ Câu III

Phương trình hoành độ giao điểm:  $\frac{x(1-x)}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 1.$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích hình phẳng: } S &= \int_0^1 \frac{x(1-x)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left( -1 + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \left( -x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \Big|_0^1 + I = -1 + \frac{1}{2} \ln 2 + I \end{aligned}$$

Đặt  $x = \tan t, dx = (1 + \tan^2 t) dt$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan^2 t + 1) dt}{\tan^2 t + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

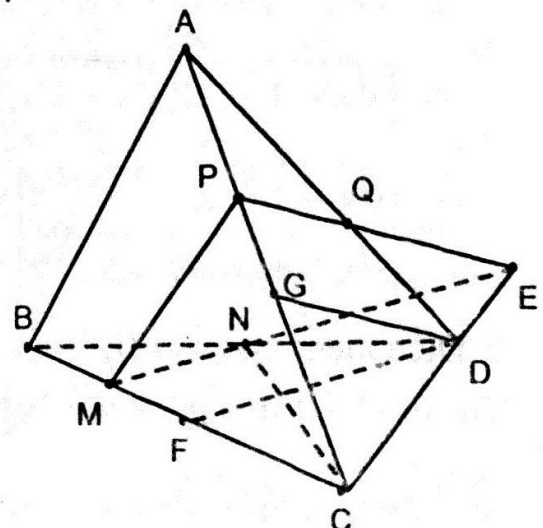
Vậy  $S = -1 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$  (đvdt)

### Câu IV

Gọi  $E$  là giao điểm của  $MN$  và  $CD$ . Khi đó  $Q$  là giao điểm của  $PE$  và  $AD$ .  
Gọi  $G$  là điểm thuộc cạnh  $AC$  sao cho  $DG \parallel PQ$  và  $F$  là trung điểm của  $BC$  thì  $M$  là trung điểm của  $BF$  suy ra  $MN \parallel FD$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{AG}{AP} &= 1 + \frac{PG}{AP} = 1 + \frac{2PG}{PC} \\ &= 1 + \frac{2ED}{EC} = 1 + \frac{2MF}{MC} \\ &= 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AQ}{AD} = \frac{AP}{AG} = \frac{3}{5}.$$



Gọi  $V$  là thể tích khối tứ diện  $ABCD$ ,  $V_1$  là thể tích khối đa diện  $ABMNQP$ ,  $V_2$  là thể tích khối đa diện  $CDMNPQ$ .

Khi đó  $V_2 = V - V_1$ .

Ta có  $V_1 = V_{ABMN} + V_{AMNP} + V_{APQN}$ .

$$\text{Do } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{4}, \frac{BN}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \frac{BM \cdot BN}{BC \cdot BD} = \frac{1}{8},$$

$$\frac{S_{MNC}}{S_{BCD}} = \frac{3}{8}, \frac{S_{DNC}}{S_{BCD}} = \frac{1}{2}.$$

$$V_{ABMN} = \frac{1}{8}V, V_{AMNP} = \frac{1}{3}V, V_{APQN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}V_{ADNC} = \frac{1}{10}V.$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{7}{20}V \Rightarrow V_2 = \frac{13}{20}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{13}.$$

#### □ Câu V

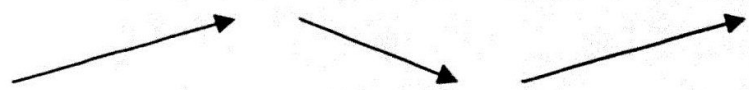
Phương trình  $\Leftrightarrow 4^x(4x^2 + 1) - 1 = 0$ .

Xét hàm số  $f(x) = 4^x(4x^2 + 1) - 1$ , ta có :

$$f'(x) = 4^x(4x^2 \ln 4 + 8x + \ln 4).$$

Dễ thấy  $f'(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x = a_1; x = a_2$ ,  $a_1 > a_2$

Bảng biến thiên

|    |                                                                                      |       |       |           |   |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-----------|---|
| x  | $-\infty$                                                                            | $x_1$ | $a_2$ | $+\infty$ |   |
| f' | +                                                                                    | 0     | -     | 0         | + |
| f  |  |       |       |           |   |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình  $f(x) = 0$  có nhiều nhất 3 nghiệm

$$\text{Mặt khác } f(0) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0; f(-1) = \frac{1}{4} > 0; f(-3) = -\frac{27}{64} < 0$$

Nên phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt

$$x_1 = 0; x_2 = -\frac{1}{2}; x_3 \in (-1; -3).$$

### □ Câu VI.a

1. Hoành độ giao điểm của (E) và (P) là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^2}{9} + (x^2 - 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0 \quad (*)$$

Xét hàm số:  $f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9$

Ta có:  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có  $f(-1)f(0) < 0$ ,  $f(0)f(1) < 0$ ,

$$f(1)f(2) < 0, f(2)f(3) < 0$$

suy ra (\*) có 4 nghiệm phân biệt, do đó (E) cắt (P) tại 4 điểm phân biệt.

Toạ độ các giao điểm của (E) và (P) thỏa mãn hệ: 
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 16x = 8y \\ x^2 + 9y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 9x^2 + 9y^2 - 16x - 8y - 9 = 0 \quad (**).$$

(\*\*) là phương trình của đường tròn có tâm  $I = \left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}\right)$ , bán kính  $R = \frac{\sqrt{161}}{9}$

Do đó 4 giao điểm của (E) và (P) cùng nằm trên đường tròn có phương trình (\*\*).

2. Vì  $\triangle ABC$  vuông cân tại A  $\Rightarrow AB^2 = \frac{1}{2}BC^2 = 34$

$$B \in d \Rightarrow B(-1 + 2t; -1 + 3t; 7 - 4t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2t - 6; 3t - 6; -4t + 7)$$

$$\Rightarrow AB^2 = 34 \Leftrightarrow 29t^2 - 116t + 87 = 0 \Leftrightarrow t = 3; t = 1.$$

Vậy  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(5; 8; -5)$  là những điểm cần tìm.

### □ Câu VII.a

Đặt  $u = \log_{10}^2 x \geq 0$  với  $x \in [1; 10] \Rightarrow 0 \leq \log_{10} x \leq 1 \Rightarrow u \in [0; 1]$ .

Bài toán quy về tìm tham số  $m$  để phương trình  $u + \sqrt{10u + 90} = m$  có ít nhất 1 nghiệm  $u \in [0; 1]$ .

Xét hàm số  $f(u) = u + \sqrt{10u + 90}$  xác định và liên tục trên đoạn  $[0; 1]$ .

Để thấy  $f'(u) = 1 + \frac{5}{\sqrt{10u+90}} > 0$  với mọi  $u \geq 0 \Rightarrow f(u) > 0$  với

mọi  $u \in [0;1]$ , do đó hàm số  $f(u)$  đồng biến trên đoạn  $[0;1]$ .

Lập bảng biến thiên, ta thấy  $f(0) \leq f(u) \leq f(1), \forall u \in [0;1]$

$$\text{hay } 3\sqrt{10} \leq f(u) \leq 11, \forall u \in [0;1].$$

Vậy: phương trình  $\log_{10}^2 x + \sqrt{10 \log_{10}^2 x + 90} = m$  có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn  $[1;10]$  khi  $3\sqrt{10} \leq m \leq 11$ .

**Chú ý:** Đặt  $u = \sqrt{10 \log_{10}^2 x + 90}$ .

$$\text{Đề ý } \log_{10}^2 x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{10 \log_{10}^2 x + 90} \geq 3\sqrt{10} \text{ hay } u \geq 3\sqrt{10}.$$

$$\text{Từ } u = \sqrt{10 \log_{10}^2 x + 90} \Rightarrow \log_{10}^2 x = \frac{u^2 - 90}{10}.$$

$$\text{Vì } x \in [1;10] \text{ nên } 0 \leq \log_{10}^2 x \leq 1, \text{ khi đó } 0 \leq \frac{u^2 - 90}{10} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 90 \leq u^2 \leq 100 \Rightarrow 3\sqrt{10} \leq u \leq 10.$$

Bài toán trở thành, tìm tham số  $m$  để phương trình  $\frac{u^2 - 90}{10} + u = m$  có ít nhất một nghiệm  $3\sqrt{10} \leq u \leq 10$ .

Để ý thêm  $\frac{u^2 - 90}{10} + u = m$  là phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị  $y = f(u) = \frac{u^2 - 90}{10} + u$  với  $3\sqrt{10} \leq u \leq 10$  và  $y = m$ .

Như vậy để phương trình đã cho có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn  $[1;10]$ , tức là phương trình  $\frac{u^2 - 90}{10} + u = m$  có ít nhất một nghiệm  $3\sqrt{10} \leq u \leq 10$ .

Nói khác hơn là đồ thị  $y = f(u) = \frac{u^2 - 90}{10} + u$  và  $y = m$  có ít nhất 1 giao điểm thỏa mãn  $3\sqrt{10} \leq u \leq 10$ .

□ Câu VI.b.

1. Ta có tọa độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(4;3).$$

$$BC \perp AB \Rightarrow BC : 3(x - 4) + (y - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 15 = 0.$$

$$D \in BD \Rightarrow D(d; d - 1) \Rightarrow \text{phương trình AD : } 3x + y - 4d + 1 = 0.$$

$$\Rightarrow AD \cap AB = A : \begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + y - 4d + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{6d - 4}{5}; \frac{2d + 7}{5}\right)$$

Gọi I là tâm của hình chữ nhật  $\Rightarrow I$  là trung điểm của

$$BD \Rightarrow I\left(\frac{d + 4}{2}; \frac{d + 2}{2}\right)$$

Vì A, I, M thẳng hàng nên ta có:

$$\overrightarrow{IA} = k \cdot \overrightarrow{MI} \Rightarrow \frac{7d - 28}{d + 22} = \frac{-d + 4}{d - 2} \Leftrightarrow d = -1; d = 4.$$

$$* d = 4 \Rightarrow D(4;3) \equiv B \text{ loại}$$

$$* d = -1 \Rightarrow D(-1; -2), A(-2; 1) \text{ và } I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow C(5; 0)$$

$$\text{Vậy } A(-2; 1), B(4; 3), C(5; 0), D(-1; -2).$$

2. Ta có:  $AB = \sqrt{11}$ . Gọi h là khoảng cách từ C đến AB.

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h \cdot AB \Rightarrow S_{\Delta ABC} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow h \text{ nhỏ nhất.}$$

Đường thẳng AB có VTCP:  $\vec{u}_1 = (1; 3; -1)$

$$C \in d_1 \Rightarrow C(1 + 2t; 2 + 3t; 3 + t) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (2t - 4; 3t - 2; t)$$

$$\Rightarrow [\vec{u}_1, \overrightarrow{AC}] = (6t - 2; -3t + 4; -3t + 10)$$

$$\Rightarrow \left\| [\vec{u}_1, \overrightarrow{AC}] \right\| = \sqrt{54t^2 - 108t + 120} = \sqrt{54(t - 1)^2 + 66} \geq \sqrt{66}$$



$$\Rightarrow h = \frac{\left| \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{AC} \right|}{\left| \overrightarrow{u_1} \right|} \geq \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{11}} = \sqrt{6}.$$

Dạng thức xảy ra  $\Leftrightarrow t = 1$ . Vậy  $C(3; 5; 4)$  là điểm cần tìm.

□ **Câu VII.b** 
$$\begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{7-y} = 2 & (1) \\ 4\log_4^2 x + 9\log_8^2 y = 12\log_4 x \cdot \log_8 y & (2) \end{cases}$$

Điều kiện:  $x \geq 3, 0 < y \leq 7$ .

Phương trình (2)  $\Leftrightarrow (2\log_4 x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3\log_4 x \cdot \log_8 y + (3\log_8 y)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2\log_4 x - 3\log_8 y)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\log_{2^2} x = 3\log_{2^3} y$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 y \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó phương trình (1)  $\Leftrightarrow \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x} = 2$

$$\Leftrightarrow x-3 + 2\sqrt{x-3}\sqrt{7-x} + 7-x = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3}\sqrt{7-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = 0 \Rightarrow x = 3, y = 3 \\ \sqrt{7-x} = 0 \Rightarrow x = 7, y = 7 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm  $(x; y) = (3; 3), (7; 7)$ .

## ○ ĐỀ 19

### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

□ **Câu I.** Cho hàm số:  $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ ,  $m$  là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi  $m = 0$ .

2. Tìm các giá trị của  $m$  để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có hoành độ là các số dương.

□ **Câu II**

1. Giải phương trình:  $\frac{1}{4} + \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2}$ .

2. Giải phương trình:  $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}, x \in \mathbb{R}$ .

□ **Câu III.** Tính tích phân: 
$$I = \int_{\pi}^{\pi} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dx.$$

□ **Câu IV.** Cho tứ diện OABC có đáy OBC là tam giác vuông tại O,  $OB = a$ ,  $OC = \sqrt{3}$ , ( $a > 0$ ) và đường cao  $OA = a\sqrt{3}$ . Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, OM.

□ **Câu V.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x + 4 = 8y \\ y^3 - 4y^2 + 7y + 4 = 8x \end{cases}$$

## II. PHẦN RIÊNG

*Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

### A. Theo chương trình Chuẩn

□ **Câu VI.a.**

1. Cho họ đường cong  $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 7m^2 - 2 = 0$ .

Tìm tham số thực m để điểm A(1; -1) nằm ngoài đường tròn  $(C_m)$ .

2. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng:  $(d): \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$  và mặt phẳng  $(P): x - y + z - 5 = 0$ . Viết phương trình tham số của đường thẳng (t) đi qua A(3; -1; 1) nằm trong (P) và hợp với (d) một góc  $45^\circ$ .

□ **Câu VII.a.** Giải phương trình:  $\overline{z^2} + 2011 = 0$  trên tập số phức.

### B. Theo chương trình Nâng cao

□ **Câu VI.b.**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn

$$(C): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 25 \text{ và điểm } M(7; 3).$$

Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M cắt (C) tại A, B phân biệt sao cho  $MA = 3MB$ .

2. Trong không gian Oxyz cho điểm  $A(10; 2; -1)$  và đường thẳng  $(d)$

có phương trình  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$ .

Lập phương trình mặt phẳng  $(P)$  qua  $A$ , song song với  $(d)$  và khoảng cách từ  $(d)$  tới  $(P)$  là lớn nhất.

□ **Câu VII.b.** Tìm dạng lượng giác của số phức  $z = \left( \frac{4i}{1+i\sqrt{3}} \right)^6$ .

## ○ ĐÁP ÁN ĐỀ 19

### □ **Câu I.**

1. Bạn đọc tự giải

2. Hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu có hoành độ là các số dương khi và chỉ khi phương trình :

$y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m = 0$  có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = (m+2) \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 3m(m+2) > 0 \\ P = \frac{m}{3(m+2)} > 0 \\ S = \frac{-3}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -m^2 - 2m + 3 > 0 \\ m < 0 \\ m+2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m < 0 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -2$$

### □ **Câu II**

$$1. \frac{1}{4} + \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1 + \cos \frac{2x}{3}}{2} = \frac{1 - \cos x}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 2 \cos \frac{2x}{3} = 1 - \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 \cos 2 \left( \frac{x}{3} \right) = -\cos 3 \left( \frac{x}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 \left( 2 \cos^2 \left( \frac{x}{3} \right) - 1 \right) = - \left( 4 \cos^3 \left( \frac{x}{3} \right) - 3 \cos \left( \frac{x}{3} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4 \cos^2 \left( \frac{x}{3} \right) - 2 + 4 \cos^3 \left( \frac{x}{3} \right) - 3 \cos \left( \frac{x}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left( \frac{x}{3} \right) \left[ 4 \cos^2 \left( \frac{x}{3} \right) + 4 \cos \left( \frac{x}{3} \right) - 3 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left( \frac{x}{3} \right) = 0 \\ \cos \left( \frac{x}{3} \right) = \frac{1}{2} \\ \cos \left( \frac{x}{3} \right) = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left( \frac{x}{3} \right) = 0 \\ \cos \left( \frac{x}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + k3\pi \\ x = \pm \pi + k6\pi. \end{cases}$$

2. Điều kiện :  $-2 \leq x \leq 2$

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow 2(3x-2) \left( \frac{1}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ \sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x} = \sqrt{x^2+4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ 4\sqrt{2(2+x)(2-x)} + (2-x)(x+4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ \sqrt{2-x} [4\sqrt{2(2+x)} + (x+4)\sqrt{2-x}] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

□ Câu III

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + 1}} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x \sqrt{\tan^2 x + 2}} dx.$$

Đặt  $u = \tan x \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ .

Đổi cận :  $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}}, x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$

Do đó  $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2}} du = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d(\sqrt{u^2 + 2}) = \sqrt{u^2 + 2} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = \frac{3 - \sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

Để đơn giản hơn có thể đặt  $t = \sqrt{u^2 + 2} \Rightarrow dt = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2}} du$ .

□ Câu IV

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó:  $O(0;0;0)$ ,  $A(0;0;a\sqrt{3})$ ,  $B(a;0;0)$ ,

$$C(0;a\sqrt{3};0), M\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right).$$

Gọi  $N$  là trung điểm của  $AC$

$$\Rightarrow N\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

$MN$  là đường trung bình của tam giác

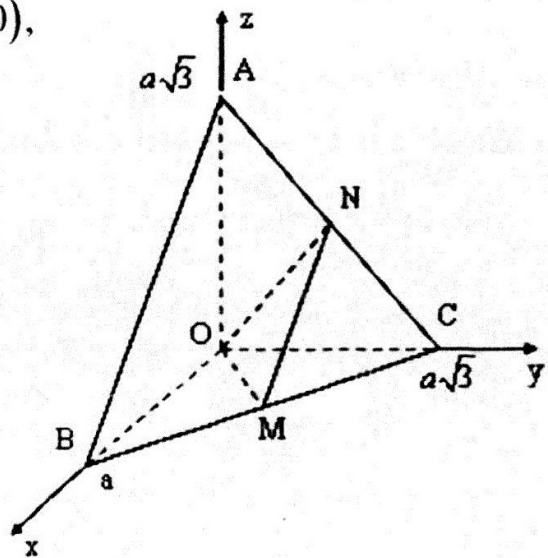
$ABC \Rightarrow AB \parallel MN$

$\Rightarrow AB \parallel (OMN) \Rightarrow d(AB; OM)$

$= d(AB; (OMN)) = d(B; (OMN))$

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), \overrightarrow{ON} = \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}] = \left(\frac{3a^2}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}; 1; 1) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\vec{n} \text{ với } \vec{n} = (\sqrt{3}; 1; 1).$$





Phương trình mặt phẳng (OMN) qua O với vector pháp tuyến  $\vec{n}$  là

$$\sqrt{3}x + y + z = 0.$$

$$\text{Ta có: } d(B; (OMN)) = \frac{|\sqrt{3} \cdot a + 0 + 0|}{\sqrt{3+1+1}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Vậy, } dd(B; (OMN)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

#### □ Câu V

Xét  $f(t) = t^3 - 4t^2 + 7t + 4$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có:  $f'(t) = 3t^2 - 8t + 7 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Do đó nếu  $x < y$  thì  $f(x) < f(y)$ , nghĩa là  $8y < 8x \Rightarrow y < x$  mâu thuẫn.

Vậy  $x = y$ .

Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x + 4 = 8y \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, x = 4.$$

Hệ phương trình đã cho có ba nghiệm:  $(x; y) = (-1; -1), (1; 1), (4; 4)$ .

#### □ Câu VI.a

$$1. (C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 7m^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (C_m): (x - m)^2 + (y + 2m)^2 = 2 - 2m^2$$

Nếu  $-2m^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$  (a) thì  $(C_m)$  là đường tròn tâm

$$I(m; -2m), \text{ bán kính } R = 2 - 2m^2$$

Điểm  $A(1; -1)$  nằm ngoài đường tròn  $(C_m)$  khi

$$IA > R \Leftrightarrow 7m^2 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > \frac{6}{7} \text{ (b)}$$

$$\text{Từ (a), (b) suy ra } \begin{cases} -1 < m < 0 \\ \frac{6}{7} < m < 1 \end{cases} \text{ thỏa mãn bài toán.}$$

2. Gọi  $\vec{u} = (a; b; c), (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$  là vector chỉ phương của đường thẳng  $(t)$

Vì  $(t)$  nằm trong  $(P)$  nên  $\vec{u} \perp \vec{n}_P = (1; -1; 1) \Leftrightarrow a - b + c = 0 \quad (1)$

Đường thẳng  $(t)$  hợp với  $(d)$  một góc  $45^\circ$  khi

$$\left| \cos(\vec{u}; \vec{u}_t) \right| = \frac{|a + 2b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a + 2b + 2c)^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(a + 2a + 2c + 2c)^2 = 9[a^2 + (a + c)^2 + c^2]$$

$$(\text{do } (1)) \Leftrightarrow 14c^2 + 30.a.c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = -\frac{15a}{7} \end{cases}$$

$$\bullet \quad c = 0 \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow (t_1): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad c = -\frac{15a}{7} \Rightarrow a = 7 \Rightarrow c = -15, b = -8 \Rightarrow (t_2): \begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$$

**Câu VII.a** Đặt  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

Khi đó,  $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + b^2.i^2 + 2ab.i = a^2 - b^2 + 2ab.i$

Suy ra  $\overline{z^2} = a^2 - b^2 - 2ab.i$ . Phương trình đã cho trở thành

$$a^2 - b^2 - 2ab.i + 2011 = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2011 - 2ab.i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2011 = 0 \\ -2ab = 0 \end{cases}$$

Để thấy ở hệ trên,  $b$  không thể bằng 0 (sẽ dẫn đến vô lí vì  $a^2 = -2011$ ).

Do đó chỉ có thể xảy ra trường hợp  $\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm\sqrt{2011} \end{cases}$ .

Vậy số phức cần tìm là  $z = \pm\sqrt{2011}.i$

**\* Nhận xét:** Có một điều khá thú vị nếu bạn đọc để ý đó là

Với  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thì  $\overline{z^2} = (\overline{z})^2 = a^2 - b^2 - 2ab.i$ .

**□ Câu VI.b**

1. (C) có tâm  $I(1; -1)$  và bán kính  $R = 5$  và  $IM > R \Rightarrow M$  nằm ngoài đường tròn (C).

Mặt khác:  $P_{M/(C)} = 27$  và

$$P_{M/(C)} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 3MB^2$$

$$\Rightarrow MB = 3 \Rightarrow BH = 3$$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{R^2 - BH^2} = 4 = d[M, (d)].$$

Ta có: (d):  $a(x - 7) + b(y - 3) = 0, a^2 + b^2 > 0$

$$d[M, (d)] = 4 \Leftrightarrow \frac{|-6a - 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -\frac{12}{5}b \end{cases}.$$

Vậy (d):  $y = 3$  hoặc (d):  $12x - 5y - 69 = 0$ .

2. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng (d), khi đó

$H(3 + 2t; 2 + 6t; 2 - t)$  và  $\vec{u}(2; 6; -1)$  là vectơ chỉ phương của (d).

Khi đó  $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow H(3; 2; 2)$ .

Xét tam giác vuông HAM có  $HM = 4, AH = 3 \Rightarrow AM = 5 = R$  với R là bán kính mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm:  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 25$ .

**□ Câu VII.b**

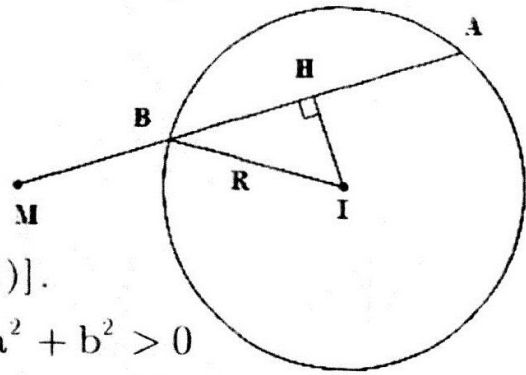
Với dạng toán này, điều ta cần làm là trục căn thức ở mẫu để đưa số phức z về dạng đại số là  $a + bi$ , từ đó chuyển sang dạng lượng giác.

$$\begin{aligned} \frac{4i}{1 + i\sqrt{3}} &= \frac{4i(1 - i\sqrt{3})}{1^2 - (i\sqrt{3})^2} = \frac{4i(1 - i\sqrt{3})}{4} = \sqrt{3} + i \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Sử dụng công thức Moivre

$$z = \left(\frac{4i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^6 = \left[2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)\right]^6 = 2^6 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

Vậy dạng lượng giác của số phức z cần tìm là  $z = 2^6 (\cos \pi + i \sin \pi)$ .



## ĐÔI ĐIỀU CHIA SẺ CÙNG BẠN ĐỌC.

### *1. Kinh nghiệm làm bài.*

Bên cạnh việc củng cố kiến thức thì kinh nghiệm thực tế cho các bạn thí sinh khi bước vào phòng thi là vô cùng quan trọng. Hãy nhớ rằng khi vào phòng thi, có nghĩa “đây không phải là buổi diễn tập nữa”. Chính vì vậy, nhóm tác giả đã đúc kết lại những kinh nghiệm quý báu, những lời khuyên bổ ích trong phần cuối cuốn sách này. Hãy chú ý:

Điều đầu tiên, vô cùng quan trọng: bạn phải chắc chắn rằng khi vào phòng thi, đừng nên để ý tới giám thị hay những thí sinh khác, hãy tập trung vào bài làm của chính mình. **Sự tập trung** sẽ giúp bạn tiết kiệm thời gian và nó chính là cái nôi của những ý tưởng.

Tiếp theo, sau khi đọc đề thi một lượt, hãy **làm lần lượt những câu từ dễ đến khó**. Như vậy bạn sẽ nắm chắc điểm của những câu đó và tạo sự tự tin để làm tiếp những câu khó hơn. **Tạo ra sự thoải mái ban đầu** là một yếu tố rất quan trọng để giúp thí sinh hoàn thành tốt nhất bài thi của mình.

Thông thường thứ tự từ dễ đến khó sẽ là:

- + Khảo sát hàm số (ý đầu tiên của câu I).
- + Số phức (câu VII.b).
- + Tích phân (câu III)
- + Phương trình lượng giác (ý đầu tiên của câu II).
- + Phương trình – hệ phương trình – bất phương trình (ý thứ hai của câu II).
- + Hình giải tích trong không gian, hình giải tích trong mặt phẳng (câu VI.a)
- + Câu hỏi phụ hàm số (ý thứ hai của câu I).
- + Hình không gian (câu IV)
- + Cuối cùng là bất đẳng thức (câu V).

Sau khi giải quyết trọn vẹn những câu dễ, nếu thấy những câu còn lại đều rơi vào những dạng lạ, lúc đó bạn cũng đừng nên mất bình tĩnh. Hãy thở sâu, đọc kĩ đề nhiều lần, tập trung nhớ lại những kiến thức liên quan đã học, hay những kinh nghiệm, những dẫn dắt từng được nghe, chắc chắn bạn sẽ có những ý tưởng để đến được với lời giải.

Những lúc căng thẳng hãy lấy lại sự tự tin bằng cách thở sâu và tự nhủ rằng: “*Mình có thể làm được!*”.

Với những bạn học sinh trung bình khá, chúng tôi khuyên các bạn nên bỏ những câu như hình không gian và đặc biệt là bất đẳng thức. Bởi nếu không có kiến thức thật vững thì xác suất bạn làm được hai mảng đó gần như bằng 0. Thậm chí, nếu như “thử tìm vận may” với chúng, chắc chắn bạn sẽ mất một khoảng thời gian vô ích và điều đó sẽ chỉ khiến tâm lí của bạn bị dao động, ảnh hưởng không tốt tới việc giải quyết những phần còn lại. Mặt khác, hiển nhiên là nếu “bỏ qua” hai phần đó thì bạn sẽ có thêm khá nhiều thời gian để nghĩ ra những ý tưởng mới cũng như kiểm tra lại cẩn thận những bài mình đã làm.

Một lưu ý nữa, đó là **không nên làm trước vào giấy nháp**. Với những bài toán mà thí sinh đã định hướng được cách giải thì không nên giải hoàn toàn trên giấy nháp rồi mới viết vào giấy thi. Làm như vậy vừa mất thời gian vừa dễ sai sót. Bởi khi giải trực tiếp bài toán là “viết ra những gì ở trong đầu”, ta sẽ rất chủ động. Còn khi chép lại (kể cả chép những gì mình vừa viết) thì sinh lại trở thành thụ động vì vậy rất dễ viết nhầm,



bỏ sót. Do đó, chỉ nên sử dụng giấy nháp ở những phần cần tính toán. Cố gắng luyện cho mình kỹ năng tính toán linh hoạt, bởi **tốc độ tính toán** là một yếu tố quan trọng ảnh hưởng tới thời gian cũng như niềm tin khi làm bài của bạn.

Chú ý, với những bài toán khó, **nếu chỉ làm được một phần mà chưa làm được trọn vẹn thì cũng nên viết vào bài làm**. Vì những phần bạn đã làm được, nếu đúng theo ba-rem chấm thì vẫn được điểm.

Chúng tôi xin được lấy một ví dụ đơn giản là ở phần câu hỏi phụ của bài khảo sát hàm số, chẳng hạn đề bài hỏi về cực trị: “Tìm điều kiện của  $m$  để hàm số có cực đại và cực tiểu thỏa mãn...”. Hãy nhớ rằng cứ nhắc đến cực trị, ta phải nghĩ ngay đến kỹ năng tính nhanh cực trị. Và sau khi sử dụng kỹ năng này, viết được phương trình đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu thì bạn đã nắm chắc được một nửa số điểm của câu đó. Còn việc “thỏa mãn” một điều kiện nào, nếu điều kiện đó khó quá bạn không giải tiếp được, không sao cả, vì chúng ta đã có một nửa số điểm rồi. Hãy coi đây là một thành công ở mức chấp nhận được.

Điều cuối cùng, ở **mỗi bài toán các bạn thí sinh nên có một phần kết luận**. Có thể là viết lại đáp số hoặc trả lời câu hỏi của đề bài để người chấm thi biết được thí sinh đã kết thúc bài đó hay chưa. Với kinh nghiệm nhiều năm chấm bài thi Đại học thì bỏ phần kết luận là một trong những lỗi khá phổ biến của các thí sinh. Đơn giản chỉ thêm một câu kết luận nhưng chắc chắn các bạn sẽ gây được cảm tình với người chấm bởi tính rõ ràng, mạch lạc trong bài làm của mình.

## **II. Kinh nghiệm chuẩn bị tâm lý trước khi thi.**

*Tâm lý chắc chắn sẽ là vấn đề mà bất cứ thí sinh nào cũng đều phải trải qua. Nó có tầm ảnh hưởng không nhỏ tới kết quả thi mà bạn sẽ đạt được. Câu hỏi đặt ra là làm thế nào để duy trì được một tinh thần thoải mái và một sức khỏe tốt trước thử thách khó khăn này? Sau đây là một vài kinh nghiệm mà chúng tôi muốn chia sẻ. Những kinh nghiệm này trên thực tế đã mang lại sự thành công cho những người biết áp dụng chúng một cách hợp lý.*

- Trước tiên, hãy nhớ **không nên nạp quá nhiều kiến thức trong giai đoạn nước rút**. Do tâm lý thi cử nặng nề nên nhiều bạn đã gấp rút ôn tập ba môn thi một lúc. Nhưng chính lượng kiến thức quá lớn đã khiến họ rơi vào trạng thái stress và làm giảm hiệu quả ôn tập. Để tránh hiện tượng này, các bạn cần phải biết loại ra những kiến thức không cần thiết. Nói cách khác, hãy “tối ưu hóa” chương trình học của mình.

- Tiếp theo, **đừng quan tâm đến những thông tin “gây nhiễu”**.

Nhiều thông tin “gây nhiễu” vào giai đoạn cuối có khả năng sẽ làm cho thí sinh mất tập trung. Với những dẫn đo về chọn trường, chờ đợi tỷ lệ “chọi” để chấm trường dự thi, hay chờ đợi vào những “tin vịt” kiểu “lộ đề” trên mạng... sẽ làm bạn mất tập trung khi ôn tập. Do đó cần loại bỏ tất cả những thông tin này với niềm tin mình sẽ trúng tuyển.

- Cuối cùng, **hãy điều hòa cảm xúc của mình, giảm sức ép “đổ” - “trượt”**

Sức ép này sẽ gây đau đầu, căng thẳng.... ảnh hưởng trực tiếp tới tâm lý và sức khỏe của bạn trước khi thi. Do đó, bạn cần xác định mục tiêu “học hết mình thi hết sức”. Bên cạnh đó, bạn đừng bao giờ nghĩ đến sức ép của gia đình và người thân. Bởi nếu không may, bạn có thi trượt, họ cũng không bao giờ trách bạn vì bạn đã nỗ lực hết mình. Với suy nghĩ như vậy, bạn sẽ có một tâm lý thoải mái trước khi bước vào kì thi chính thức.

## **III. Những lời khuyên chân thành của nhóm tác giả.**

Mỗi con người đều có một câu chuyện nhỏ của riêng mình. Nhưng hôm nay, chúng tôi không nói về chúng tôi. Bởi ngày hôm nay, có một câu chuyện chung của các bạn học sinh, một câu chuyện mà chúng ta không ngừng quan tâm. Đó là câu chuyện về



ước mơ, về mục tiêu thực sự bạn muốn có được trong cuộc đời này. Hãy cố gắng lựa chọn thật chính xác trường đại học hay bất cứ con đường nào bạn muốn đi. Bởi nếu chọn sai, đó sẽ là sự lãng phí rất lớn cho bản thân, cho gia đình và cho cả xã hội. Chúng tôi lại nhớ đến những phân tích của chuyên gia tuyển sinh Trần Đình Lý:

*Lẽ ra, về nguyên tắc việc chọn ngành, nghề của thí sinh phải từ rất sớm, nghĩa là nó mang tính định hướng, chứ không phải ngay trước kỳ thi tuyển sinh ĐH-CD.*

*Thử so sánh về mức độ kinh phí cho việc định hướng nghề nghiệp để thi và học cũng giống như 3 mức độ trong ngành y: phòng bệnh, điều trị và cấp cứu. Nếu lo 1 đồng chi phí dự phòng sẽ giảm được 10 đồng điều trị trước khi tránh được 100 đồng cấp cứu.*

*Nếu việc chọn lựa xuất phát từ sở thích, nguyện vọng của bản thân thì sẽ bền vững hơn. Việc chọn ngành không phù hợp ảnh hưởng rất lớn (theo hướng tiêu cực) đối với việc học hành và công việc của các thí sinh sau này.*

*Hãy nhớ, Đại học không phải là con đường duy nhất để vào đời.*

*Nếu xác định như vậy, các bạn sẽ luôn thoải mái và tự tin vào chính bản thân mình. Với các thí sinh nộp nhiều hồ sơ, các bạn cần lượng sức mình để chọn trường cho phù hợp.*

Và sau khi các bạn đã đưa ra được lựa chọn tối ưu, hãy sẵn sàng chiến đấu vì nó. Hãy tự nhủ rằng “đây là thử thách cần phải vượt qua trên con đường chinh phục ước mơ của mình”.

**Bạn cảm thấy stress vì áp lực quá lớn ? Bạn cảm thấy mệt mỏi vì ôn luyện quá nhiều ? Hãy tập quên hết điều đó đi, vì thành công chỉ đến khi ta vượt qua thời khắc khó khăn nhất. Điều đó có nghĩa là khi mọi thứ trở nên tồi tệ, đó thường là dấu hiệu cho thấy gió sắp đổi chiều. Bạn có biết rằng giây phút mặt trời sắp xuất hiện là lúc màn đêm trở nên đen tối nhất ? Hãy nhớ lại những bộ phim từng xem và bạn cũng có thể nhận thấy hiện tượng này. Chỉ ngay trước cái kết có hậu, người anh hùng thường phải trải qua một giai đoạn cực kì khó khăn và vô vọng. Đó là khi mọi thứ đột nhiên xoay chiều và bộ phim kết thúc. Đó cũng là cuộc sống. Hãy bám vào những mục tiêu bạn đã dự định, đừng bao giờ quên nó, đừng bao giờ làm tắt đi ngọn lửa đam mê của mình. đừng để bất cứ ai thực hiện ước mơ của bạn thay bạn. Khi vượt qua được tất cả những khó khăn, những áp lực thì thành công sẽ đến thật ngọt ngào. Có thể bạn không phải một vàng dương chói lọi nhưng bạn có thể trở thành một vì sao lấp lánh.**

**Một lần nữa, xin chúc những con người có ước mơ sẽ sớm đạt được thành công trên con đường mình đã chọn.**

**Thân mến**

**Các tác giả**

# Mục lục

|                                                                                                 |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Lời tựa .....                                                                                   | 3          |
| Lời nói đầu .....                                                                               | 5          |
| <b>Phần 1. Một số chuyên đề chọn lọc .....</b>                                                  | <b>7</b>   |
| <b>Chuyên đề 1. Bất đẳng thức và cực trị .....</b>                                              | <b>7</b>   |
| <b>Chuyên đề 2. Số phức .....</b>                                                               | <b>17</b>  |
| <b>Chuyên đề 3. Phương trình lượng giác .....</b>                                               | <b>25</b>  |
| <b>Chuyên đề 4. Phương trình – Hệ phương trình .....</b>                                        | <b>39</b>  |
| <b>Chuyên đề 5. Hàm số và các vấn đề liên quan .....</b>                                        | <b>45</b>  |
| <b>Chuyên đề 6. Tích phân và ứng dụng .....</b>                                                 | <b>66</b>  |
| <b>Chuyên đề 7. Tổ hợp và xác suất .....</b>                                                    | <b>71</b>  |
| <b>Chuyên đề 8. Phương pháp hình học trong các bài toán<br/>        về ba đường Conic .....</b> | <b>77</b>  |
| <b>Chuyên đề 9. Thể tích khối đa diện &amp; Ứng dụng .....</b>                                  | <b>87</b>  |
| <b>Phần 2. Các đề thi mẫu và đề tự luyện (có kèm đáp án) .....</b>                              | <b>99</b>  |
| <b>Các đề thi Đại học, Cao đẳng năm 2010 (đề 1, 2, 3)</b>                                       |            |
| Đề số 1 .....                                                                                   | 99         |
| Đề số 2 .....                                                                                   | 112        |
| Đề số 3 .....                                                                                   | 120        |
| <b>Các đề thi Đại học, Cao đẳng năm 2009 (đề 4, 5, 6)</b>                                       |            |
| Đề số 4 .....                                                                                   | 129        |
| Đề số 5 .....                                                                                   | 142        |
| Đề số 6 .....                                                                                   | 152        |
| <b>Các đề tự luyện (đề 7 – 19)</b>                                                              |            |
| Đề số 7 .....                                                                                   | 160        |
| Đề số 8 .....                                                                                   | 168        |
| Đề số 9 .....                                                                                   | 176        |
| Đề số 10 .....                                                                                  | 185        |
| Đề số 11 .....                                                                                  | 194        |
| Đề số 12 .....                                                                                  | 202        |
| Đề số 13 .....                                                                                  | 211        |
| Đề số 14 .....                                                                                  | 219        |
| Đề số 15 .....                                                                                  | 228        |
| Đề số 16 .....                                                                                  | 237        |
| Đề số 17 .....                                                                                  | 245        |
| Đề số 18 .....                                                                                  | 253        |
| Đề số 19 .....                                                                                  | 261        |
| <b>Phụ lục. Đôi điều chia sẻ cùng bạn đọc .....</b>                                             | <b>269</b> |